

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2007

ББК 95.4; 22.251
Ч-823

Учредитель

ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Главный редактор Г. Н. Григорьев

Учредители серии

Г. Н. Григорьев, Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов,
Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Г. П. Черепанов, Е. И. Шемякин, А. А. Шуканов.

Редакционная коллегия:

Ивлев Д. Д. – ответственный редактор,
Максимова Л. А., Матченко Н. М., Миронов Б. Г. – зам. ответственного редактора,
Радаев С. Ю. – ученый секретарь,
Баженов В. Г., Буренин А. А., Зубчанинов В. Г., Каюмов Р. А., Климов Д. М., Маркин А. А.,
Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р. И., Победра Б. Е., Радаев Ю. Н., Редкозубов С. А.,
Сенашев С. И., Спорыхин А. Н., Трещев А. А., Хромов А. И., Шашкин А. И., Шемякин Е. И.

Международный совет

Амензаде Р. Ю. (Азербайджан), Варданян С. В. (Армения), Мирсалимов В. М. (Азербайджан),
Тамуж В. П. (Латвия), Черепанов Г. П. (США), Чигарев А. В. (Белоруссия).

ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.
Тел.: (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83

© ГОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2007

От главного редактора

Уважаемый читатель!

Предлагаемый Вашему вниманию выпуск «Вестника Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева» необычен. Он знаменателен тем, что является первым номером серии «Механика предельного состояния».

Подготовили этот журнал сотрудники созданной при ЧГПУ им. И. Я. Яковлева лаборатории Института проблем механики РАН «Механика предельного состояния». Возглавляет лабораторию доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки Российской Федерации Ивлев Д. Д.

Сотрудники лаборатории являются членами научной школы, созданной профессором Д.Д. Ивлевым в Чебоксарах. Тематика их научных работ связана с определением предельного состояния тел и конструкций, задачи их исследований – жесткопластическое и упругопластическое поведение идеальнопластических и упрочняющих сред. На страницах «Вестника» им будет предоставлена возможность рассказать о полученных в ходе научных изысканий результатах.

Авторами этого номера являются крупнейшие и авторитетнейшие ученые в области механики деформируемого твердого тела, а также молодые научные сотрудники и преподаватели. Публикации отличаются актуальностью, новизной и оригинальностью суждений, которые авторы выносят на обсуждение.

Мы очень надеемся, что материалы журнала займут достойное место в научном пространстве не только нашего региона и России, но выйдут и на международный уровень.

Приглашаем Вас стать авторами научных статей последующих выпусков серии «Механика предельного состояния» «Вестника Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева».

С наилучшими пожеланиями,
ректор ГОУ ВПО «Чувашский
государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева»,
профессор

Г. Н. Григорьев

МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Одним из выдающихся достижений механики XX столетия явилось создание теории предельного состояния и несущей способности тел и конструкций, основы которой были заложены в трудах Кулона, Треска и Сен-Венана.

Кулон с самого начала поставил проблему определения предельного состояния сыпучих сред и грунтов.

Треска и Сен-Венан определили развитие теории идеальной пластичности применительно к металлам. Хаар и Карман показали, что оба направления имеют общие основы.

Выдающиеся исследования Прандтля, Мизеса, Гейрингер, Рейсса, А. А. Гвоздева, С. А. Христиановича, А. Ю. Ишлинского, В. В. Соколовского, А. А. Ильюшина, М. И. Ерхова, Прагера, Хилла, Койтера и др. определили современное состояние теории предельного состояния и несущей способности.

Механика предельного состояния занимает свою принадлежащую ей область изучения статически определимых состояний тел и конструкций. В то же время к механике предельного состояния примыкают многочисленные исследования неупругого поведения тел.

В целях консолидации сил ученых, работающих в области предельного состояния твердых тел, неупругого деформирования и т. п. Совет Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева принял решение об издании журнала «Механика предельного состояния» на базе Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева.

Тематика публикаций охватывает широкий спектр вопросов предельного состояния, теории пластичности и ползучести, вязкоупругости и вязкопластичности, статики сыпучих сред и горных пород, разрушения, устойчивости и т. п.

Состав участников журнала позволяет проводить квалифицированное независимое рецензирование поступающих материалов. Современные виды связи позволяют своевременно знакомить участников издания журнала с содержанием статей, находящихся в портфеле редакции, поэтому непременным условием является предоставление авторами электронной версии статей.

Участники издания считают, что публикация журнала «Механика предельного состояния» будет способствовать развитию актуальных вопросов механики деформируемого твердого тела, научному росту молодых ученых, так необходимых нашей науке.

Ивлев Д. Д.

О ПЕРЕХОДЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОГО СОСТОЯНИЯ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЕ

(Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева)

В работе рассматриваются условия перехода статически неопределимого состояния в статически определимое.

Вопросы перехода статически неопределимого состояния в статически определимое рассматривались в работе [1]. В качестве условия достижения статически определимого состояния полной пластичности рассматривались экстремальные значения диссипации механической работы при условии пластичности Треска среди всех возможных условий предельного состояния.

Условия перехода статически неопределимого неполного пластического состояния в состояние полной пластичности обсуждались в работах [2], [3].

Пластическое деформирование возникает в результате достижения сдвигающими усилиями некоторого предельного значения. Условие пластичности максимального касательного напряжения, условие пластичности Треска имеет вид:

$$|t_{\max}| = k, \quad k - \text{const.} \quad (1)$$

Выражения максимальных касательных напряжений запишем в виде

$$t_1 = \frac{s_1 - s_3}{2}, \quad t_2 = \frac{s_2 - s_1}{2}, \quad t_3 = \frac{s_3 - s_2}{2}, \quad (2)$$

где s_1, s_2, s_3 – главные напряжения.

Согласно (2) имеет место:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0. \quad (3)$$

Введем трехмерное пространство t_1, t_2, t_3 . Области изменения касательных напряжений t_i согласно (1) ограничена плоскостями (рис. 1)

$$-k \leq t_i \leq k. \quad (4)$$

Введем вектор

$$\tau = t_1 i + t_2 j + t_3 k, \quad (5)$$

где i, j, k – единичные орты вдоль осей t_1, t_2, t_3 .

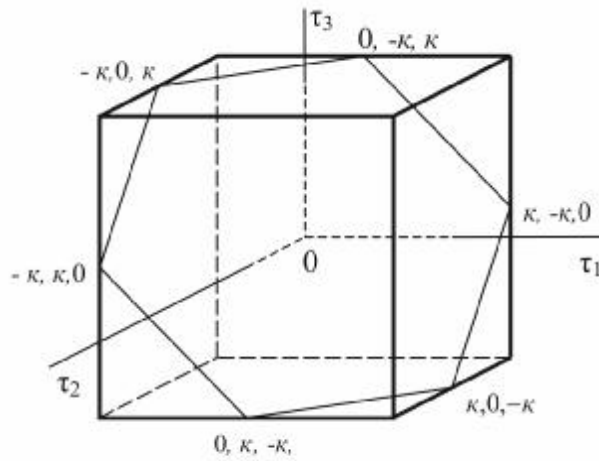


Рис. 1.

Вектор τ (5) лежит в девятиорной плоскости (3) пространства t_1, t_2, t_3 (рис. 2).

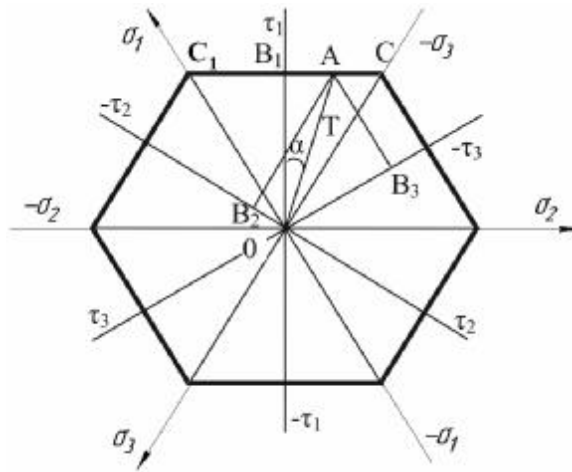


Рис. 2.

Рассмотрим девятиорную плоскость (3) (рис. 2). Обозначим

$$T = AO, t_1 = OB_1, |t_2| = OB_2, |t_3| = OB_3,$$

$$t_1 = T \cos a,$$

$$t_2 = -T \sin(30^\circ - a) = -\frac{T}{2} (\cos a - \sqrt{3} \sin a), \quad (6)$$

$$t_3 = -T \sin(60^\circ - a) = -\frac{T}{2} (\cos a + \sqrt{3} \sin a).$$

Выражения (6) удовлетворяют соотношению (3).

Согласно (6), модуль вектора τ имеет вид

$$|\tau| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}T, \quad T = \frac{\sqrt{6}}{3}|\tau|. \quad (7)$$

Для напряженного состояния, изображенного на рис. 2, имеет место:

$$t_1 = \frac{s_1 - s_3}{2} = k, \quad k - const, \quad s_1 \geq s_2 \geq s_3. \quad (8)$$

На рис. 3 показано положение кругов Мора, соответствующих условиям (8).

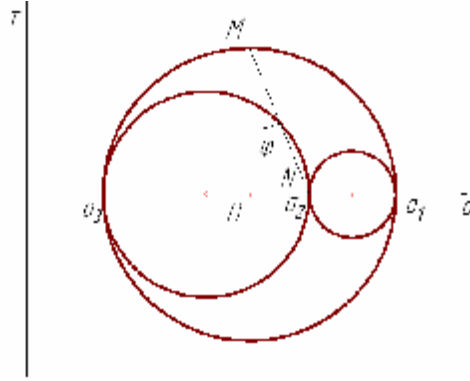


Рис. 3.

Параметр Лоде имеет вид:

$$m = tgj = \frac{NO}{MO} = \frac{s_2 - \frac{1}{2}(s_1 + s_3)}{\frac{s_1 - s_3}{2}} = \frac{s_2 - s}{k} = \sqrt{3}tga, \quad s = \frac{1}{2}(s_1 + s_3). \quad (9)$$

Из (9) получим

$$s_2 = mk + s. \quad (10)$$

Согласно (2), (10) будем иметь

$$t_2 = \frac{k}{2}(m-1), \quad t_3 = -\frac{k}{2}(m+1). \quad (11)$$

Из (2), (7), (8), (11) получим выражения для интенсивности напряжений

$$(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2 = 2k^2(3 + m^2). \quad (12)$$

Условие пластичности Треска (1) не учитывает влияние параметра Лоде (9) на характер напряженного состояния при неполной пластичности $|m| < 1$, полная пластичность имеет место при $|m| = 1$. Постепенный переход от состояния неполной пластичности к состоянию полной пластичности с учетом влияния параметра Лоде может быть описан в случае совместного использования двух условий предельного состояния (8), (12)

$$s_1 - s_2 = 2k, \quad (8)$$

$$(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2 = 2k^2(3 + m^2). \quad (12)$$

Условие предельного состояния (12) по форме напоминает условие пластичности Мизеса, но в отличие от последнего правая часть (12) не является фиксированной.

Согласно соотношениям обобщенного ассоциированного закона течения из (13) следует

$$\begin{aligned} e_1 &= I_1 + I_2(2s_1 - s_2 - s_3), \\ e_2 &= I_2(2s_1 - s_2 - s_3), \\ e_3 &= -I_1 + I_2(2s_1 - s_2 - s_3), \end{aligned} \quad (13)$$

где e_1, e_2, e_3 – главные скорости деформации, $I_1 \geq 0, I_2 \geq 0$.

Из (2), (11), (13) следует

$$\begin{aligned} e_1 &= I_1 + I_2k(3 - m), \\ e_2 &= I_2km, \\ e_3 &= -I_1 + I_2k(3 + m). \end{aligned} \quad (14)$$

Диссипация механической энергии согласно (2), (11), (14) будет иметь вид:

$$N = s_1e_1 + s_2e_2 + s_3e_3 = 2k[I_1 + I_2k(3 + m^2)]. \quad (15)$$

Из (15) следует, что при фиксированных I_1, I_2 диссипация N возрастает с ростом параметра Лоде и достигает максимального значения при $m = \pm 1$:

$$N_{\max} = 2k[I_1 + 4I_2k]. \quad (16)$$

Определим диссипативную функцию $D = D(e_{ij})$.

Из (14) следует

$$2I_2 = \frac{e_2}{km}. \quad (17)$$

Далее из (14), (17) найдем

$$2I_1 = e_1 - e_3 - \frac{3e_2}{m}. \quad (18)$$

Из (15), (17), (18) следует выражение диссипативной функции

$$D(e_{ij}) = k[e_1 - e_3 + me_2]. \quad (19)$$

Согласно (19), найдем при фиксированных e_1, e_2, e_3 диссипативная функция $D(e_{ij})$ возрастает с ростом параметра m .

Для определения напряженного состояния из диссипативной функции следует рассмотреть функционал [4]

$$D = k[e_1 - e_3 + me_2] + n(e_1 + e_2 + e_3), \quad (20)$$

где n – неопределенный множитель Лагранжа.

Из (20) следует

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{\partial D}{\partial e_1} = k + n, \\ s_2 &= \frac{\partial D}{\partial e_2} = km + n, \\ s_3 &= \frac{\partial D}{\partial e_3} = -k + n. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) следуют соотношения (8), (12).

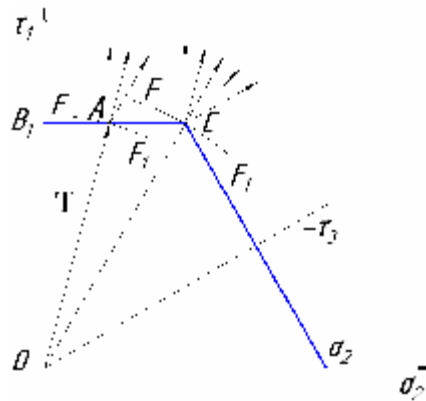


Рис. 4.

На рис. 4 точка A находится на пересечении отрезка прямой B_1C , соответствующей условию Треска (8) и дуги окружности FF_1 , соответствующей условию (12).

В результате совместного использования условий предельного состояния Треска (8), (12) в точке A в состоянии неполной пластичности $m \neq 1$ возникает определенная свобода пластического течения. В результате при $m \neq 0$ появляется составляющая скорости деформации вдоль оси s_2 , которая может возрастать по мере возрастания параметра Лоде m . Таким образом может быть учтено влияние параметра Лоде на характер деформирования при условии пластичности максимального касательного напряжения Треска.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д. Д.* Об экстремальных свойствах условий пластичности / Д. Д. Ивлев // ПММ. – 1960. – Вып. 6.
2. *Христианович, С. А.* К теории идеальной пластичности / С. А. Христианович, Е. И. Шемякин // МТТ. – 1967 – № 5.
3. *Ивлев, Д. Д.* О развитии предельного состояния / Д. Д. Ивлев, Н. М. Матченко // МТТ. – 2006. – № 6.
4. *Ивлев, Д. Д.* О диссипативной функции в теории пластических сред / Д. Д. Ивлев // ДАН СССР. – 1967. – Т. 176. – № 5.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНОГО ЛИНЕЙНО ВЯЗКО-УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

(Бакинский государственный университет)

Проблема устойчивости тонкостенных элементов конструкций занимает одно из центральных мест в механике деформируемых твердых тел. Это обстоятельство отражено в многочисленных исследованиях, проведенных в данной области [6; 5; 8]. Обеспечив устойчивость, можно быть уверенным в равновесии спроектированной конструкции и не опасаться разрушения ее элементов от различных воздействий. Наряду с явлением полного разрушения недопустимо и появление таких больших деформаций, которые помешали бы выполнению конструкцией ее прямых функций.

В последнее время в качестве несущих элементов широко используются тонкостенные стержни, изготовленные из композитных материалов, которым присуще свойство кусочной неоднородности по толщине. Это обусловлено, в частности, стремлением к экономии материала при одновременном уменьшении веса конструкции и изысканием дополнительных прочностных ресурсов. Некоторые задачи устойчивости и выпучивания многослойных стержней, изготовленных из линейно-упругого и нелинейно-упругого материалов рассмотрены в [3; 4].

В предлагаемой работе исследуется устойчивость шарнирно опертого по концам призматического, линейно вязко-упругого кусочно-неоднородного по толщине стержня. Численно выявлено влияние физико-механических и геометрических параметров на критическое время устойчивости.

1. Пусть стержень имеет поперечное сечение, состоящее из нескольких частей, соединенных между собой по всей его длине. При их жестком соединении стержень считается монолитным и его можно рассматривать как обычный, даже если он составлен из различных материалов. Поэтому допустим, что задан прямоугольный в плане стержень единичной ширины, длиной l и толщиной $2h$.

Для определенности введем в плоскости изгиба в рассмотрение декартову систему координат (x, z) с началом на левом торце стержня и направим ось x вдоль длины стержня. Положим теперь, что он составлен из s чередующихся различных по толщине слоев с различными модулями упругости E_{k+1} и функциями ползучести $D_{k+1}\{(t-t), s(t)\} [k = 0, 1, \mathbf{K}(s-1)]$, которые в дальнейшем будем считать линейными относительно напряжения:

$$D_{k+1}\{(t-t), s(t)\} = F'_{k+1}(t-t) s(t).$$

Полагаем, что раздел слоев осуществляется параллельно боковым граням стержня. Толщину каждого слоя обозначим через d_k . Таким образом $d_1 + d_2 + \dots + d_s = 2h$. В основу предлагаемой здесь теории сжатых многослойных стержней ставятся следующие предположения:

а) условия контакта между слоями пакета заключаются в их жестком сцеплении, из чего следует равенство на них перемещений, напряжения и отсутствие взаимного давления слоев;

б) процесс выпучивания происходит в плоскости стержня;

в) в силу тонкостенности нормальное напряжение S по толщине меняется по линейному закону.

Применимость и точность последнего допущения обоснована в [2]. В дальнейшем будем руководствоваться гипотезой плоских сечений Кирхгофа–Лява, при которой допущения а) выполняются автоматически.

При сделанных предположениях выпишем физическое соотношение для пакета в целом в виде одного равенства

$$e^f = \frac{S}{E_{k+1}} + \int_0^t F'_{k+1}(t-t) s(t) dt \quad a_k \leq z \leq a_{k+1}, \quad (1.1)$$

где штрих означает дифференцирование по параметру $t-t$,

$$a_k = -h + \sum_{i=0}^k d_i,$$

а d_0 принимается равным нулю. Для дальнейших целей конкретизируем вид $F'_{k+1}(t-t)$, задав его в экспоненциальном виде:

$$F'_{k+1}(t-t) = \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} e^{-a(t-t)}. \quad (1.2)$$

Здесь полагалось, что показатель ползучести a одинаков для всех слоев пакета.

Рассмотрим, теперь задачу об устойчивости выбранного нами сжатого силой N стержня, имеющего начальное несовершенство w_0 . Обозначая посредством u и w соответственно осевое перемещение и прогиб с учетом гипотезы плоских сечений, имеем:

$$e = u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x}^2 - w_0^2) + z(w_{,xx} - w_{0,xx}), \quad (1.3)$$

где запятая указывает на дифференцирование по координате x . Решение задачи осуществим посредством вариационного метода [1]. Преимущество такого подхода состоит в возможности выявления таких явлений, которые не предсказываются при привлечении обычных методов классической математической физики. Теперь, с учетом нелинейности только по w , соответствующее выражение функционала приводится к следующему виду:

$$R = \int_{-h}^h \int_0^l \left\{ \mathcal{L}(u_{,x} + w_{,x}^2 + z w_{,xx}^2) + \frac{1}{2} S w_{,x}^2 \right\} dz dx - \\ - \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathcal{L}^f dz dx + \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\mathcal{L}^2}{E_{k+1}} dz dx \quad (1.4)$$

Под точкой здесь и далее будем понимать дифференцирование по физическому времени t .

Тогда,

$$F''(t-t) = -a \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} e^{-a(t-t)},$$

для \mathcal{E} запишем:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{E_{k+1}} \left\{ \mathcal{E} + A_{k+1} \left[s - a \int_0^t e^{-a(t-t)} s(t) dt \right] \right\}. \quad (1.5)$$

В силу соотношения (1.3) и замечая, что

$$\int_{-h}^h \mathcal{E} dz = N, \quad \int_{-h}^h \mathcal{E} z dz = M,$$

где M – изгибающий момент в сечении стержня, выполнив в (1.4) интегрирование по z , найдем:

$$R = \int_0^l \left\{ M(\mathcal{E}_{,x} + w_{,x} \mathcal{E}_{,x}) + M \mathcal{E}_{,xx} + \frac{1}{2} N \mathcal{E}_{,x}^2 \right\} dx - \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathcal{E} \mathcal{E} dz dx + \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\mathcal{E}^2}{E_{k+1}} dz dx - N[\mathcal{E}(l) - \mathcal{E}(0)]. \quad (1.6)$$

При решении задачи устойчивости будем считать $N = const = -T$, и поэтому соответствующие члены в (1.6) выпадают. Следовательно,

$$R = \int_0^l \left\{ M \mathcal{E}_{,xx} - \frac{T}{2} \mathcal{E}_{,x}^2 \right\} dx - \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathcal{E} \mathcal{E} dz dx + \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\mathcal{E}^2}{E_{k+1}} dz dx. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.5) в (1.7), получаем

$$R = \int_0^l M \mathcal{E}_{,xx} dx - \frac{T}{2} \int_0^l \mathcal{E}_{,x}^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathcal{E}^2 dz dx - \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} s \mathcal{E} dz dx + a \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathcal{E} \left[\int_0^t e^{-a(t-t)} s(t) dt \right] dz dx. \quad (1.8)$$

Для получения окончательного вида функционала воспользуемся методом Релея–Ритца. С этой целью, удовлетворяя искомые функции w и M краевым условиям шарнирного опирания, в качестве первых собственных функций положим

$$w = a(t) \sin \frac{px}{l}, \quad M = b(t) \sin \frac{px}{l},$$

откуда после дифференцирования по t будем иметь:

$$\mathcal{E}_{,x} = \mathcal{E} \sin \frac{px}{l}, \quad M_{,x} = \mathcal{E} \sin \frac{px}{l}. \quad (1.9)$$

Положив в дальнейших рассуждениях

$$s = -\frac{T}{2h} + \frac{3z}{2h^3} M \quad \text{или} \quad \mathcal{E} = \frac{3z}{2h^3} M \quad (1.10)$$

и учитывая соотношения (1.9) и (1.10) в (1.8), после соответствующего интегрирования получим следующее аналитическое представление функционала:

$$R = -\frac{p^2}{2l} \mathfrak{A} - \frac{p^2}{4l} T \mathfrak{A} - \frac{9l}{16h^6} h_2 \mathfrak{B} + \frac{3Tl}{2ph^4} g_1 \mathfrak{B} - \frac{9l}{8h^6} g_2 b \mathfrak{B} + \frac{3Tl}{2ph^4} g_1 e^{-at} \mathfrak{B} + a \frac{9l}{8h^6} g_2 \mathfrak{B} \int_0^t e^{-a(t-t)} b(t) dt, \quad (1.11)$$

для которого справедливы следующие обозначения:

$$h_2 = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} z^2 dz, \quad g_j = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} z^j dz, \quad (j=1,2). \quad (1.12)$$

Варьированию в исследуемом функционале подлежат функциональные параметры \mathfrak{A} и \mathfrak{B} . Выражение (1.11) значительно упростится, если принять, что раздел слоев симметричен относительно срединной поверхности стержня. Из этого вытекает, что, $g_1 = 0$ и можно записать

$$R = -\frac{p^2}{2l} \mathfrak{A} - \frac{p^2}{4l} T \mathfrak{A} - \frac{9l}{16h^6} h_2 \mathfrak{B} - \frac{9l}{8h^6} g_2 b \mathfrak{B} + a \frac{9l}{8h^6} g_2 \mathfrak{B} \int_0^t e^{-a(t-t)} b(t) dt.$$

Условия стационарности данного функционала, соответствующие равенству нулю выражений:

$$\frac{\partial R}{\partial \mathfrak{A}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial \mathfrak{B}} = 0,$$

приводят к следующей системе уравнений:

$$\mathfrak{B} = -T \mathfrak{A} \quad \text{откуда} \quad b = -Ta,$$

$$-\frac{p^2}{l} \mathfrak{A} - \frac{9l}{4h^6} h_2 \mathfrak{B} - \frac{9l}{4h^6} g_2 b + a \frac{9l}{4h^6} g_2 \int_0^t e^{-a(t-t)} b(t) dt = 0.$$

Комбинируя эти уравнения, можно записать

$$\mathfrak{A} \left(-p^2 + \frac{9l^2}{4h^6} T h_2 \right) + \frac{9l^2}{4h^6} T g_2 a - a \frac{9l^2}{4h^6} g_2 \int_0^t e^{-a(t-t)} a(t) dt = 0.$$

Введя следующие безразмерные величины

$$w = \frac{T}{T_{кр}} \quad \text{и} \quad y = \frac{a}{h},$$

где согласно [3]

$$T_{кр} = \frac{4p^2 h^6}{9l^2} h_2^{-1}$$

– критическая сила для неоднородного по толщине линейно-упругого стержня, последнее уравнение представим в форме

$$\mathfrak{A} \frac{g_2}{h_2} \frac{w}{1-w} \left\{ y - a \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt \right\} = 0. \quad (1.13)$$

Отметим, что дальнейшее рассмотрение вопроса об устойчивости для вязкоупругости имеет смысл, когда действующая нагрузка меньше критической, т. е. $w < 1$.

2. Учитывая формулу

$$\left\{ \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt \right\}' = y - a \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt,$$

уравнение (1.13) перепишем в виде

$$\left\{ y(t) - \frac{g_2}{h_2} \frac{w}{1-w} \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt \right\}' = 0,$$

откуда

$$y(t) - \frac{g_2}{h_2} \frac{w}{1-w} \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt = C. \quad (2.1)$$

Постоянную C надлежит определить из начального условия при $t = 0$. Отсюда из (2.1) имеем $C = y(0) = y_0$. Величина y_0 представляет значение прогиба немедленно после приложения нагрузки. Следуя [3] она определяется по формуле

$$y_0 = \frac{y_0^\vee}{1-w}, \quad (2.2)$$

в которой y_0^\vee – задаваемый начальный эксцентриситет стержня. Обозначив

$$\frac{g_2}{h_2} \frac{w}{1-w} = b,$$

(2.1) запишем следующим образом:

$$y(t) - b \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt = y_0. \quad (2.3)$$

Теперь, приняв

$$a - \frac{g_2}{h_2} \frac{w}{1-w} = l, \quad \text{а} \quad b - a = -l,$$

можно сразу записать решение интегрального уравнения (2.3), а именно [7, 25]:

$$y(t) = y_0 \left\{ 1 + b \int_0^t e^{-l(t-t)} dt \right\}.$$

Вычисляя соответствующий интеграл, получим:

$$y(t) = \left\{ \left(1 - \frac{a}{l} \right) e^{-lt} + \frac{a}{l} \right\} y_0. \quad (2.4)$$

Из формулы (2.4) следует, что в зависимости от знака l возможны три варианта. Если $l \leq 0$, то наблюдается неограниченный рост прогиба во времени. Причем для $l < 0$ этот рост имеет экспоненциальный характер, а для $l = 0$ – линейный. Если же $l > 0$, то наблюдается ограниченный рост прогиба, причем его предельное значение определяется

$$\text{соотношением } y_* = y_0 \frac{a}{l} \quad \left(\frac{a}{l} > 1 \right).$$

3. Для численного анализа ограничимся случаем $l < 0$. Приведенное выше решение (2.4) в принципе применимо при любых значениях времени t . Однако большие прогибы в стержнях, являющихся элементами конструкций, недопустимы сами по себе. По-

этому разумно ограничить время службы стержня $t_{кр}$ условием достижения прогибом некоторой величины, фиксированной из тех или иных соображений, например $\tilde{y} = 1$. Это соответствует безразмерному прогибу, равному половине толщины. Согласно отмеченному находим:

$$1 = y_0 \left\{ \left(1 - \frac{a}{l} \right) e^{-l t_{кр}} + \frac{a}{l} \right\},$$

откуда для $t_{кр}$ запишем:

$$t_{кр} = -\frac{1}{l} \ln \left| \frac{l - a y_0}{l y_0 \left(1 - \frac{a}{l} \right)} \right|. \quad (3.1)$$

В качестве примера рассмотрим поведение трехслойного стержня ($s = 3$), обладающего следующей периодической структурой:

$$E_1 = E_3, \quad d_1 = d_3, \quad A_1 = A_3.$$

Введем дополнительные обозначения

$$E = \frac{E_1}{E_2}, \quad m = \frac{A_2}{A_1}, \quad k = \frac{d_2}{d_1}.$$

Исходя из этого по формулам для a_k имеем:

$$a_0 = -h, \quad a_1 = -\frac{d_2}{2}, \quad a_2 = \frac{d_2}{2}, \quad a_3 = h.$$

Отмеченное выше позволяет определить отношение g_2/h_2 , которое принимает вид:

$$\frac{g_2}{h_2} = A_1 \frac{1 + 1,5k + 0,75k^2 + 0,125Emk^3}{1 + 1,5k + 0,75k^2 + 0,125Ek^3}.$$

Теперь представим некоторые результаты вычислений, выполненных исходя из приведенной выше зависимости (3.1).

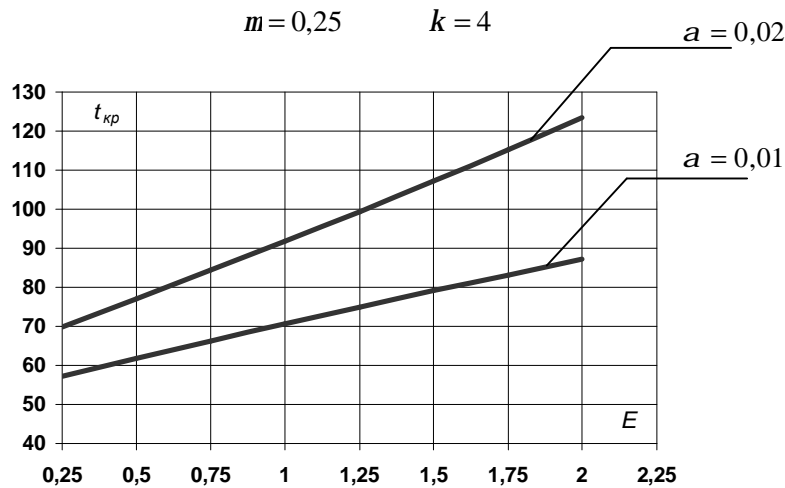


Рис. 1. Зависимость критического времени от E

$$E = 0,25 \quad k = 4$$

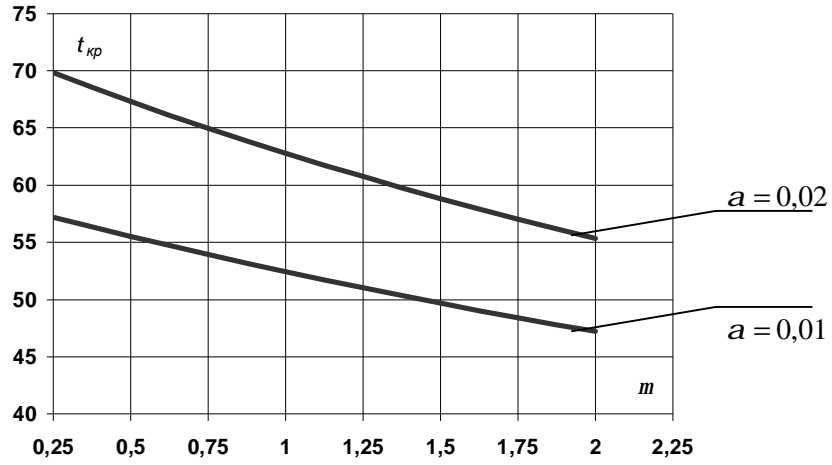


Рис. 2. Зависимость критического времени от b

$$E = 0,25 \quad m = 0,25$$

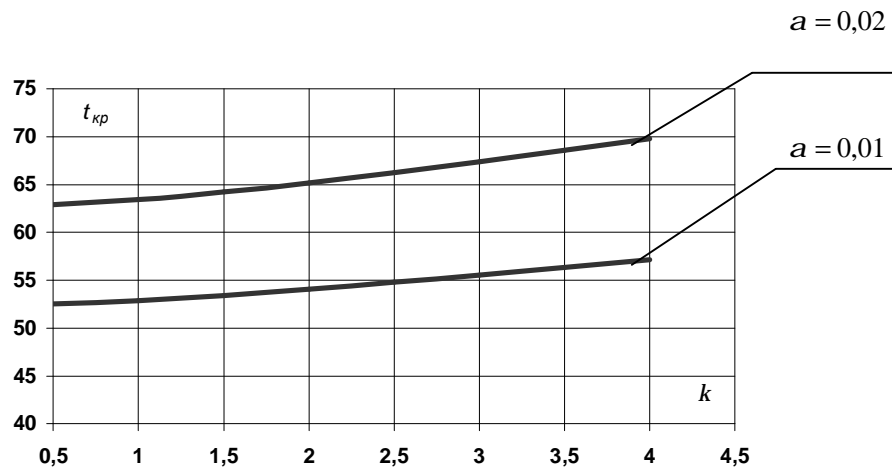


Рис. 3. Зависимость критического времени от k

На графике рис. 1 представлены кривые зависимости $t_{кр}$ от E для двух значений a . Отсюда видно, что увеличение отношения модулей упругости существенно увеличивает критическое время устойчивости. Причем с возрастанием a также возрастает и $t_{кр}$.

На рисунке 2 и 3 приведены аналогичные графики зависимости $t_{кр}$ от m и k . Здесь их влияние на критическое время менее существенно. Заметим, что в зависимости от m (с его увеличением) наблюдается уменьшение значений критического времени. Небезынтересно отметить, что для однородного стержня $t_{кр} = 52,43 \text{ сек}$ при $a = 10^{-2} \text{ сек}^{-1}$ и $t_{кр} = 62,78 \text{ сек}$, когда $a = 2 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1}$.

Таким образом, конструированием неоднородности можно увеличить (или уменьшить) критическое время устойчивости и тем самым, в определенном смысле, оптимизировать процесс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амензаде, Р. Ю. Вариационный метод механики гетерогенных нелинейно вязко-упругих твердых тел / Р. Ю. Амензаде, М. Б. Ахундов // Доклады РАН. – 2006. – Т. 410. – № 1. – С. 45–48.
2. Амензаде, Р. Ю. О точности линейного распределения напряжения в задачах выпучивания многослойных стержней / Р. Ю. Амензаде, Э. Т. Киясбейли // ДАН Азербайджана. – 2000. – № 4–6. – С. 72–77.
3. Амензаде, Р. Ю. Устойчивость неоднородного по толщине стержня из композитного материала / Р. Ю. Амензаде, С. А. Шестериков // МКМ. – 1992. – № 1. – С. 115–118.
4. Амензаде, Р. Ю. Предельное состояние жестко-зашемленного нелинейно-упругого многослойного стержня / Р. Ю. Амензаде, Э. Т. Киясбейли, А. Ф. Фатуллаева // МКМ. – 2006. – № 3. – С. 347–360.
5. Болотин, В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. – М. : Физматгиз, 1961. – 339 с.
6. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 984 с.
7. Работнов, Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1977. – 383 с.
8. Хофф, Н. Продольный изгиб и устойчивость / Н. Хофф. – М. : Изд-во Ил., 1955. – 154 с.

Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Устинова А. С.

**ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ
УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА
МЕЖДУ ЖЕСТКИМИ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ
ПОВЕРХНОСТЯМИ**

(ИАПУ ДВО РАН, Институт ДВГТУ)

Вискозиметрические опыты являются основными при определении постоянных вязкой и вязкопластической сред. Однако в этих экспериментах необходимо иметь точные решения соответствующей краевой задачи. В теории вязких и неньютоновских жидкостей такие решения давно получены и являются уже классическими [1; 6; 7]. Но существуют гидродинамические процессы, а также процессы интенсивного формоизменения твердых деформируемых тел на стадии пластического течения материалов, когда изучаемые эффекты диктуются упругими свойствами среды. К таким эффектам относятся заметные геометрические изменения в форме и объеме интенсивно деформированных тел в процессах разгрузки после снятия нагружающих усилий и формирование остаточных напряжений в этих процессах. При изучении таких эффектов необходимо пользоваться математической моделью больших упругопластических деформаций. Неньютоновский характер вискозиметрического течения вместе с усложнениями, которые вносит учет упругих свойств, приводит к существенно нелинейной краевой задаче математической физики с неизвестными движущимися границами (границы упруговязкопластических областей).

Ниже приводится решение краевой задачи о вязкопластическом течении несжимаемого упруговязкопластического материала, находящегося в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями, при повороте внутренней поверхности. Решение получено в рамках модели больших деформаций. Рассчитаны параметры рассматриваемого процесса как в области развивающегося вязкопластического течения, так, и в областях упругого деформирования.

1. Основные модельные соотношения. Для решения поставленной задачи воспользуемся моделью больших упругопластических деформаций, подробно описанной в [2] и обобщенной на случай учета вязких свойств в [5]. В декартовой прямоугольной системе координат компоненты не измеримых в опытах обратимой e_{ij} и необратимой p_{ij} составляющие тензора полных деформаций Альманси d_{ij} определяются дифференциальными уравнениями изменения (переноса) в форме

$$\begin{aligned}
\frac{De_{ij}}{Dt} &= e_{ij} - e_{ij}^p - \frac{1}{2}(e_{ik}(e_{kj} - e_{kj}^p) - (e_{ik} - e_{ik}^p)e_{kj} + e_{ik}F_{kj} - F_{ik}e_{kj}), \\
\frac{Dp_{ij}}{Dt} &= e_{ij}^p - p_{is}F_{sj} - p_{is}e_{sj}^p + F_{si}p_{sj} - e_{is}^p p_{sj}, \\
e_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j u_{i,j}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
F_{ij} &= A^{-1}(B^2(e_{ik}e_{kj} - e_{ik}e_{kj}^p) + B(e_{ik}e_{ks}e_{sj} - e_{ik}e_{ks}e_{sj}^p) + e_{ik}e_{ks}e_{st}e_{tj} - e_{ik}e_{ks}e_{st}e_{tj}^p), \\
A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3, \quad B = 2 - E_1, \\
E_1 &= e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

В (1.1) u_i, v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды, F_{ij} – нелинейная составляющая тензора вращения $r_{ij} = w_{ij} + F_{ij}$, определяющая его отличие от тензора жесткого вращения $w_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i})$, $\frac{D}{Dt}$ – оператор производной Яумана $\left(\frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - w_{ik}n_{kj} + n_{ik}w_{kj}\right)$, источник e_{ij}^p в уравнении изменения тензора необратимых деформаций – тензор скоростей их изменения. Согласно уравнениям (1.1), в условиях разгрузки ($e_{ij}^p = 0$) компоненты тензора необратимых деформаций изменяются так же, как при жестком движении тела. Компоненты тензора полных деформаций Альманси d_{ij} через его составляющие e_{ij} и p_{ij} представляются в виде

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{is}p_{sk}e_{kj}. \tag{1.2}$$

Следуя (1.2), обратимыми деформациями следовало бы назвать компоненты тензора $e_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj}$, так как именно им оказываются равными компоненты полных деформаций при отсутствии пластических ($p_{ij} = 0$). Однако это только усложняет запись не только уравнения переноса для обратимых деформаций, но и запись, как увидим, формулы Мурнагана при наличии необратимых деформаций ($p_{ij} \neq 0$) и, следовательно, всех последующих соотношений.

Напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями и, следуя законам термодинамики, для несжимаемой среды связаны с ними зависимостями

$$\begin{aligned}
s_{ij} &= -Pd_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(d_{kj} - 2d_{kj}) \quad \text{при } p_{ij} = 0, \\
s_{ij} &= -P_1d_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(d_{kj} - e_{kj}) \quad \text{при } p_{ij} \neq 0.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

В (1.3) P и P_1 – добавочные гидростатические давления. Считая среду изотропной, упругий потенциал W примем в виде

$$W = -2mJ_1 - mJ_2 + bJ_1^2 + (b - m)J_1J_2 - cJ_1^3 + \dots$$

$$J_k = \begin{cases} L_k & \text{при } p_{ij} = 0 \\ I_k & \text{при } p_{ij} \neq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

$$L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki}, \quad I_1 = e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \quad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns}.$$

Здесь m , b , c – упругие постоянные среды, а выбор инвариантов I_1 , I_2 тензора обратимых деформаций в таком виде обеспечивает предельный переход от второй зависимости (1.3) к первой при стремлении необратимых деформаций к нулю.

Считаем, что необратимые деформации в материале накапливаются при достижении напряженным состоянием поверхности нагружения, которая в условиях принимаемого принципа максимума Мизеса является пластическим потенциалом. В качестве такой поверхности будем использовать условие пластичности Треска, обобщенное на случай учета вязких свойств материала [3, 4], в форме

$$\max|s_i - s_j| = 2k + 2h \max|e_k^p|, \quad (1.5)$$

где k – предел текучести, h – коэффициент вязкости, s_i , e_k^p – главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций.

Скорости необратимых деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения

$$e_{ij}^p = I \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}, \quad f(s_{ij}, e_{ij}^p) = k, \quad I > 0. \quad (1.6)$$

2. Упругое равновесие. Пусть упруговязкопластический материал, свойства которого описываются модельными зависимостями, приведенными выше, заполняет слой между двумя цилиндрическими матрицами с жесткими стенками. Рассмотрим деформирование данного материала при повороте внутреннего жесткого цилиндра радиуса $r = r_0$, в то время, когда внешний цилиндр радиуса $r = R_0$ остается неподвижным. Таким образом, в цилиндрической системе координат r , j , z граничное условие имеет вид

$$\bar{u} \Big|_{r=R_0} = 0. \quad (2.1)$$

Считаем, что в рассматриваемом случае все точки среды, в том числе и граничные, движутся по окружностям. Составляющие вектора перемещений в этом случае имеют вид

$$u_r = r(1 - \cos q), \quad u_j = r \sin q, \quad (2.2)$$

где, $q = q(r, t)$ – центральный угол закручивания.

При увеличении угла q со временем происходит первоначально только упругое деформирование. При достижении некоторого значения $q_0 = q(t_0)$ в окрестности внутренней жесткой стенки начинается пластическое течение. Примем в дальнейшем $t_0 = 0$ и вычислим параметры напряженно-деформированного состояния в этот момент времени.

Отличными от нуля компонентами тензора Альманси в рассматриваемом случае являются

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}g^2, \quad d_{jj} = \frac{1}{2}g, \quad g = r \frac{\partial q}{\partial r}. \quad (2.3)$$

Согласно зависимостям (1.3) и (1.4) компоненты напряжений с точностью слагаемых до второго порядка по деформациям найдутся зависимостями

$$\begin{aligned}
s_{rr} = s_{zz} &= -(P + 2m) - \frac{1}{2}(b + m)g^2 = -s, \\
s_{jj} &= -(P + 2m) + \frac{1}{2}(b - m)g^2 = -s + mg^2, \\
s_{rj} &= mg.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Из условий равновесия

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{s_{rr} - s_{jj}}{r} &= 0, \\
\frac{\partial s_{rj}}{\partial r} + 2\frac{s_{rj}}{r} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

воспользовавшись граничным условием (2.1) и условием пластичности в форме

$$(s_{rr} - s_{jj})^2 + 4s_{rj}^2 = 4k^2,$$

найдем угол q_0 , при повороте на который начнется пластическое течение

$$q_0 = \frac{k}{2m} \left(1 - \frac{r_0^2}{R_0^2} \right). \tag{2.6}$$

Компоненты напряжений в условиях упругого равновесия определяются зависимостями

$$s_{rr} = s_{zz} = \frac{k^2}{4m} \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4} \right) + s_0, \quad s_{jj} = \frac{k^2}{4m} \left(1 + 3\frac{r_0^4}{r^4} \right) + s_0, \quad s_{rj} = -k \frac{r_0^2}{r^2},$$

где s_0 – значение компоненты напряжений s_{rr} на поверхности $r = r_0$ в момент начала пластического течения.

Из соотношений (1.2) найдем необходимые для дальнейших вычислений зависимости

$$e_{rj} = d_{rj} = -\frac{k}{2m} \frac{r_0^2}{r^2}, \quad e_{rr} = -\frac{3}{2} e_{rj}^2, \quad e_{jj} = \frac{1}{2} e_{rj}^2. \tag{2.7}$$

3. Необратимое деформирование. С момента времени $t = t_0 = 0$ при дальнейшем увеличении угла поворота в окрестности внутреннего жесткого цилиндра развивается область вязкопластического течения, ограниченная поверхностями $r_0 \leq r \leq r_1(t)$, где $r_1(t)$ – движущаяся граница пластической области, отделяющая ее от зоны упругого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R_0$.

Согласно зависимостям (1.1) и (1.2) кинематика среды определяется соотношениями

$$\begin{aligned}
u_r &= r(1 - \cos q(r, t)), \quad u_j = r \sin q(r, t), \\
v_j &= r \frac{\partial q}{\partial t}, \quad e_{rj} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial r} - \frac{v_j}{r} \right) = \frac{\partial d_{rj}}{\partial t} = \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 q}{\partial r \partial t}, \\
e_{rj} &= e_{rj}^e + e_{rj}^p = \frac{\partial e_{rj}^e}{\partial t} + \frac{\partial p_{rj}}{\partial t}, \\
e_{rr}^p &= \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} + 2p_{rj} (r_{j,r} + e_{rj}^p), \quad e_{jj}^p = \frac{\partial p_{jj}}{\partial t} + 2p_{rj} (r_{r,j} + e_{rj}^p), \\
e_{rr}^p &= -e_{jj}^p = -2e_{rj}^p e_{rj}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Интегрированием уравнений равновесия (квазистатическое приближение) в области обратимого деформирования так же, как и ранее, используя условие (2.1), найдем

$$s_{rj} = \frac{c(t)}{2mr^2}, \quad q(r,t) = \frac{c(t)(r^2 - R_0^2)}{2mR_0^2 r^2}. \quad (3.2)$$

В (3.2) $c(t)$ – неизвестная функция интегрирования.

Для компонент напряжений в области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$, следуя второй зависимости (1.3), получим

$$\begin{aligned} s_{rr} = s_{zz} &= -(P_1 + 2m) - 2(b + m)e_{rj}^2 = -s_1(t), \\ s_{jj} &= -(P_1 + 2m) + 2(b - m)e_{rj}^2 = -s_1(t) + 4me_{rj}^2, \\ s_{rj} &= 2me_{rj}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При записи выражений (3.3) использовались кинематические зависимости (2.7). С другой стороны, интегрированием уравнений равновесия можно получить

$$s_{rj} = \frac{m(t)}{r^2}, \quad e_{rj} = \frac{m(t)}{2mr^2}. \quad (3.4)$$

Из условий непрерывности компонент напряжений на упругопластической границе $r = r_1(t)$ получим, что

$$m(t) = c(t), \quad s(t) = s_1(t).$$

Условие пластического течения (1.5) в нашем случае переписется в форме

$$s_{rj}^2 - (k + h|e_{rj}^p|)^2 = 0. \quad (3.5)$$

Следуя ассоциированному закону пластического течения (1.6) и условию (3.5), найдем

$$s_{rj} = -k + he_{rj}^p, \quad l = -\frac{e_{rj}^p}{k - he_{rj}^p}. \quad (3.6)$$

Сравнение зависимостей (3.4) и (3.6) позволяет найти скорость пластической деформации

$$e_{rj}^p = \frac{1}{h} \left(\frac{c(t)}{r^2} + k \right) \quad (3.7)$$

Учитывая второе равенство (3.4), из кинематических зависимостей (3.1), используя условие непрерывности функции $q(r,t)$ на упругопластической границе $r = r_1(t)$, для области необратимого деформирования найдем

$$\begin{aligned} q(r,t) &= \frac{c(t)}{2m} \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{c_1(t)}{h} \left(\frac{1}{r_1^2(t)} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2kt}{h} \ln \frac{r}{r_1(t)}, \\ c_1(t) &= \int c(t) dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Условие непрерывности производной $\frac{\partial q}{\partial r}$ на границе $r = r_1(t)$ и задание условия нагружения на границе $r = r_0$ позволяют вычислить функции $c(t)$ и $c_1(t)$ и получить обыкновенное дифференциальное уравнение для $r_1(t)$:

$$c_1(t) = -ktr_1^2, \quad c(t) = -k \left(r_1^2 + 2r_1 \dot{r}_1 t \right)$$

$$\dot{r}_1 = \frac{\frac{kr_1^2}{2m} \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{kt}{h} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2} - 2 \ln \frac{r_0}{r_1} \right) + q(r_0, t)}{\frac{ktr_1}{m} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{R_0^2} \right)}. \quad (3.9)$$

Развитие зоны вязкопластического течения $r_1(t) = \frac{r_1(t)}{R_0}$ со временем ($t = at$) при значениях постоянных

$$\frac{ah}{m} = 0.004, \quad \frac{r_0}{R_0} = 0.5, \quad \frac{k}{m} = 0.00621 \quad (3.10)$$

показано на рис. 1. При увеличении угла поворота со временем (для численного решения был выбран линейный закон $q(r, t) = q_0(1 + at)$) функция $r_1(t)$ асимптотически приближается к некоторому значению, зависящему от свойств материала.

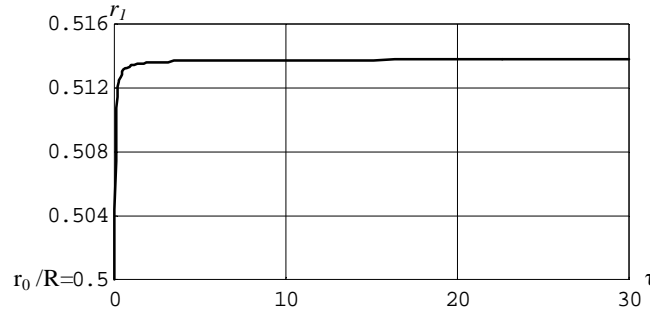


Рис. 1

По найденной функции $r_1(t)$ определяются функция $q(r, t)$, напряжения, полные и обратимые деформации, как в области обратимого деформирования, так и в области вязкопластического течения. Согласно формуле (1.2) разделения полных деформаций на обратимые и необратимые, компоненты пластических деформаций определяются зависимостями

$$p_{rj} = \frac{kt}{h} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right), \quad p_{jj} = 2e_{rj} p_{rj}, \quad p_{rj} = 2d_{rr} (e_{rj} - d_{rj}) \quad (3.11)$$

4. Разгрузка и течение при повороте цилиндра в обратную сторону. При остановке внутреннего цилиндра ($q = q_1$) в некоторый момент времени $t = t_1$ граница области вязкопластического течения определяется значением $r_1 = r_1(t_1)$. Если далее угол поворота не увеличивать, то данное значение не изменяется. Неизменными при этом остаются и компоненты деформаций, а, следовательно, и напряжений. Если процесс деформирования закончен, то такие деформации и напряжения являются остаточными.

Рассмотрим, как будет изменяться напряженно-деформированное состояние, если, начиная с момента времени $t = t_1$ (или любого момента $t > t_1$), поворачивать внутренний цилиндр в обратную сторону.

До достижения углом поворота значения $q(t_2) = q_2$ в материале происходит только обратимое деформирование, а, начиная с момента времени $t = t_2$, в окрестности внутреннего жесткого цилиндра напряженное состояние выходит на поверхность нагружения

$$s_{rj}(r_0) = k \quad (4.1)$$

и начинает свое развитие новая область пластического течения. Для нахождения начального параметра пластического течения q_2 необходимо решить задачу упругого равновесия с накопленными необратимыми деформациями. В области обратимого деформирования $r_1 \leq r \leq R_0$ компоненты деформаций и напряжений определяются зависимостями (2.3) и (2.4), а значение $q(r)$ - выражением (3.2) при $t = t_2$. В области с накопленными необратимыми деформациями, учитывая, что до момента начала пластического течения компонента p_{rj} тензора пластических деформаций не изменяется ($e_{rj}^p = 0$) функцию, $q(r)$ определим из условий $d_{rj} = e_{rj} + p_{rj}$ и непрерывности $q(r)$ при $r = r_1$.

$$q(r) = \frac{2kt_1}{h} \left(\ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{r_1^2}{r^2} - 1 \right) \right) + \frac{c(t_2)}{2m} \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) \quad (4.2)$$

Отметим, что хотя компоненты p_{rr} и p_{jj} изменяются, тензор необратимых деформаций при этом остается неизменным. Из равенств (4.1) и (4.2) определим угол q_2 .

$$q_2 = \frac{2kt_1}{h} \left(\ln \frac{r_0}{r_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{r_1^2}{r_0^2} - 1 \right) \right) + \frac{k}{2m} \left(\frac{r_0^2}{R_0^2} - 1 \right). \quad (4.3)$$

При дальнейшем изменении (уменьшении) угла q для определения компонент напряжений уравнения равновесия необходимо проинтегрировать в трех областях: в области обратимого деформирования $r_1 \leq r \leq R_0$, в области с неизменяющимся тензором необратимых деформаций $r_2(t) \leq r \leq r_1$ и в области пластического течения $r_0 \leq r \leq r_2(t)$, где $r_2(t)$ - граница данной области. В первых двух областях, как и ранее, найдем, что компоненты напряжений и функция $q(r, t)$ определяются соотношениями (3.2) и (3.4) и (4.2), в которых функцию $c(t)$ заменим ее текущим значением $x(t)$. В области пластического течения $r_0 \leq r \leq r_2(t)$, воспользовавшись зависимостями (3.4) и условием пластичности (3.5), найдем

$$s_{rj} = k + h e_{rj}^p, \quad e_{rj}^p = \frac{1}{h} \left(\frac{x(t)}{r^2} - k \right) \quad (4.4)$$

Из кинематических зависимостей (3.1) и условия непрерывности $q(r, t)$ при $r = r_2(t)$, используя (4.4), получим, что в области пластического течения

$$q(r, t) = \frac{x(t)}{2m} \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{kt_1}{h} \left(2 \ln \frac{r_2(t)}{r_1} + \frac{r_1^2}{r_2^2(t)} - 1 \right) - \frac{1}{h} \left(2kt \ln \frac{r}{r_2(t)} + x_1(t) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2(t)} \right) \right) \quad x_1(t) = \int x(t) dt. \quad (4.5)$$

Используя условие непрерывности функции $\frac{\partial q}{\partial r}$ при $r = r_2(t)$, определим неизвестные функции $x(t)$, $x_1(t)$ и получим дифференциальное уравнение изменения для $r_2(t)$:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= k(t_1 + t)r_2^2 - kt_1r_1^2, & x(t) &= 2kr_2 \dot{r}_2(t_1 + t) + kr_2^2, \\
q(r_0, t) &= \frac{2k(t_1 + t)r_2 \dot{r}_2 + kr_2^2}{2m} \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{kt_1}{h} \left(2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1^2}{r_2^2} - 1 \right) - \\
&\quad - \frac{1}{h} \left[2kt \ln \frac{r_0}{r_2} + (k(t_1 + t)r_2^2 - kt_1r_1^2) \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Развитие области вязкопластического течения $r_2(t)$ при значениях постоянных (3.10), $t_1 = 0.1$ и изменении $q(r_0, t)$ по закону $q(r_0, t) = q_2(1 - at)$ показано на рис. 2. Так же, как и

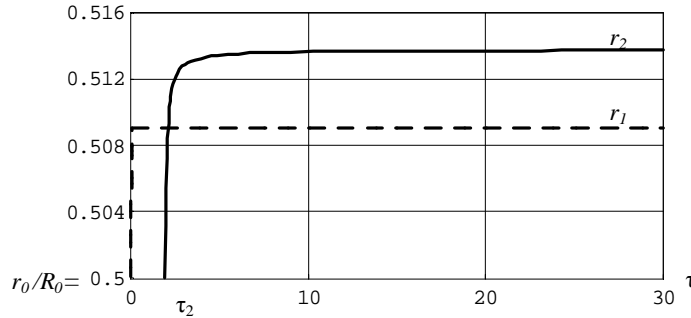


Рис. 2

на рис. 1. функция $r_2(t)$ имеет горизонтальную асимптоту. Существенно, что область течения при этом увеличивается. По найденной функции $r_2(t)$ ($x(t)$) напряжения во всей области деформирования определяются зависимостями

$$\begin{aligned}
s_{rr} = s_{zz} &= \frac{x^2(t)}{4m} \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right) + s_0, \\
s_{jj} &= \frac{x^2(t)}{4m} \left(\frac{1}{r_0^4} + \frac{3}{r^4} \right) + s_0, & s_{rj} &= \frac{x(t)}{r^2}.
\end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00537-а), фонда содействия отечественной науки и гранта Президента МК.1774.2005.1

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахшиян, Ф. А. Вращение жесткого цилиндра в вязкопластичной среде / Ф. А. Бахшиян // ПММ. – 1948. – 12. Вып. 6. – С. 650–661.
2. Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // ДАН. – 1996. – Т. 347, № 2. – С. 199–201.
3. Быковцев, Г. И. О вязкопластическом течении круглых пластин и оболочек / Г. И. Быковцев, Т. Д. Семькина // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – № 4. – С. 68–76.
4. Знаменский, В. А. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах / В. А. Знаменский, Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 114–118.
5. Ковтанюк, Л. В. О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов / Л. В. Ковтанюк, А. В. Шитиков // Вестник ДВО РАН. 2006. – №4. – С. 87–93.
6. Огибалов, П. М. Нестационарные движения вязкопластичных сред / П. М. Огибалов, А. Х. Мирзаджанзаде. – М. : Изд-во МГУ, 1970. – 415 с.
7. Сафрончик, А. И. Вращение цилиндра с переменной скоростью в вязкопластичной среде / А. И. Сафрончик // ПММ. – 1959. – 23. – Вып. 6. – С. 998–1014.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО ПОЛОСТЬЮ

(Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева)

В данной работе рассматривается идеальнопластическое напряженное состояние растягиваемого анизотропного пространства, ослабленного эллипсоидальной полостью. Малый параметр δ характеризует отклонение границы полости от сферической, а также связан с анизотропией среды. Задача статически определимая. Используется условие полной пластичности [1], переменный предел текучести на одноосное растяжение определяется из условия пластичности Хилла [4].

1. Рассмотрим напряженное состояние анизотропной неограниченной среды с эллипсоидальной полостью, растягиваемой на бесконечности равномерными усилиями q . Поверхность полости свободна от усилий. Уравнение эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1.1)$$

Условия предельного состояния для главных компонент напряжений запишем в виде

$$s_1 = s_2, \quad s_3 - s_1 = 2k, \quad (1.2)$$

где $2k$ – предел текучести при растяжении.

Условие пластичности Хилла для анизотропной среды имеет вид [4]

$$A_1(s_x - s_y)^2 + B_1(s_y - s_z)^2 + C_1(s_z - s_x)^2 + 6(F_1 t_{xy}^2 + G_1 t_{yz}^2 + H_1 t_{xz}^2) = 6k_0^2, \quad (1.3)$$

где $k_0 - const$, $A_1, B_1, C_1, F_1, G_1, H_1$ – безразмерные константы анизотропии.

Согласно (1.3) анизотропия материала ориентирована в декартовой системе координат по осям x, y, z . В дальнейшем перейдем к сферическим координатам r, q, f , полагая $x = r \sin q \cos f$, $y = r \sin q \sin f$, $z = r \cos q$.

Предположим, что ось f совпадает с осью z . Оси r, q повернуты против часовой стрелки относительно осей x, y на угол α . Таблица перехода от одной системы координат к другой будет следующей (табл. 1):

Таблица 1

	ρ	θ	φ
x	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	0
y	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	0
z	0	0	1

Имеют место соотношения между напряжениями в декартовой системе координат и напряжениями в сферической системе координат

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{s_r + s_q}{2} + \frac{s_r - s_q}{2} \cos 2a - t_{rq} \sin 2a, & t_{xy} &= \frac{s_r - s_q}{2} \sin 2a + t_{rq} \cos 2a, \\ s_y &= \frac{s_r + s_q}{2} - \frac{s_r - s_q}{2} \cos 2a + t_{rq} \sin 2a, & t_{xz} &= t_{rf} \cos a - t_{qf} \sin a, \\ s_z &= s_f, & t_{yz} &= t_{qf} \cos a + t_{rf} \sin a. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Из (1.3), (1.4) получим

$$A(s_r - s_q)^2 + B(s_q - s_f)^2 + C(s_f - s_r)^2 + 6(Ft_{rq}^2 + Gt_{qf}^2 + Ht_{rf}^2) = 6k_0^2, \quad (1.5)$$

где A, B, C, F, G, H – константы анизотропии.

Имеют место уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{rq}}{\partial q} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial t_{rf}}{\partial f} + \frac{1}{r} (2s_r - s_q - s_f + t_{rq} \operatorname{ctg} q) &= 0, \\ \frac{\partial t_{rq}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_q}{\partial q} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial t_{qf}}{\partial f} + \frac{1}{r} ((s_q - s_f) \operatorname{ctg} q + 3t_{rq}) &= 0, \\ \frac{\partial t_{rf}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{qf}}{\partial q} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial s_f}{\partial f} + \frac{1}{r} (3t_{rf} + 2t_{qf} \operatorname{ctg} q) &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Предположим, что взаимная ориентация осей ρ, θ, φ и главных направлений $1, 2, 3$ определяется табл. 2 направляющих косинусов, тогда, используя известные условия связи между компонентами напряжений в сферической системе координат и главными напряжениями s_1, s_2, s_3 , из (1.2) получим [1] выражения для компонент напряжений, учитывающие условия полной пластичности:

Таблица 2

	1	2	3
ρ	l_1	m_1	n_1
θ	l_2	m_2	n_2
φ	l_3	m_3	n_3

$$\begin{aligned} s_r &= s - \frac{2}{3}k + 2kn_1^2, & t_{rq} &= 2kn_1n_2, \\ s_q &= s - \frac{2}{3}k + 2kn_2^2, & t_{qf} &= 2kn_2n_3, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} s_f &= s - \frac{2}{3}k + 2kn_3^2, & t_{rf} &= 2kn_1n_3, & s &= \frac{1}{3}(s_r + s_q + s_f), \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где n_1, n_2, n_3 – направляющие косинусы, определяющие ориентацию третьего главного напряжения s_3 в системе r, q, j .

Подставляя (1.7) в (1.5), определим предел текучести k в соотношениях (1.2), (1.7)

$$k = \sqrt{\frac{3}{2}} k_0 \left[A(n_1^2 - n_2^2)^2 + B(n_2^2 - n_3^2)^2 + C(n_3^2 - n_1^2)^2 + 6(Fn_1^2n_2^2 + Gn_2^2n_3^2 + Hn_1^2n_3^2) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.9)$$

Положим

$$\begin{aligned} a &= 1 + d_1 \bar{a}, & A &= 1 + d_2 \bar{A}, & F &= 1 + d_2 \bar{F}, \\ b &= 1 + d_1 \bar{b}, & B &= 1 + d_2 \bar{B}, & G &= 1 + d_2 \bar{G}, \\ c &= 1 + d_1 \bar{c}, & C &= 1 + d_2 \bar{C}, & H &= 1 + d_2 \bar{H}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{H}$ – const, параметры $\delta_1 \ll 1, \delta_2 \ll 1$.

Пусть $d_2 = cd_1 = cd$, $c \geq 0$, $d \ll 1$, тогда из (1.10) следует

$$d = \frac{a-1}{\bar{a}} = \frac{b-1}{\bar{b}} = \frac{c-1}{\bar{c}} = \frac{A-1}{\bar{cA}} = \frac{B-1}{\bar{cB}} = \frac{C-1}{\bar{cC}} = \frac{F-1}{\bar{cF}} = \frac{G-1}{\bar{cG}} = \frac{H-1}{\bar{cH}}. \quad (1.11)$$

При $\delta = 0$ получаем изотропное пространство со сферической полостью.

Решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{ij} &= \mathbf{s}_{ij}^0 + d\mathbf{s}_{ij}^{\cdot}, & n_i &= n_i^0 + d n_i^{\cdot}, & k &= k^0 + d k^{\cdot}, \\ A &= 1 + cd \bar{A}, & F &= 1 + cd \bar{F}, & a &= 1 + d \bar{a}, \\ B &= 1 + cd \bar{B}, & G &= 1 + cd \bar{G}, & b &= 1 + d \bar{b}, \\ C &= 1 + cd \bar{C}, & H &= 1 + cd \bar{H}, & c &= 1 + d \bar{c}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Линеаризируя соотношения (1.5), (1.7), (1.8), получим в нулевом приближении

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_r^0 &= \mathbf{s}^0 - \frac{2}{3}k^0 + 2k^0 n_1^0{}^2, & \mathbf{t}_{rq}^0 &= 2k^0 n_1^0 n_2^0, & (rqf) \quad (1.23) \\ n_1^0{}^2 + n_2^0{}^2 + n_3^0{}^2 &= 1, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$(\mathbf{s}_r^0 - \mathbf{s}_q^0)^2 + (\mathbf{s}_q^0 - \mathbf{s}_f^0)^2 + (\mathbf{s}_f^0 - \mathbf{s}_r^0)^2 + 6(\mathbf{t}_{rq}^0{}^2 + \mathbf{t}_{qf}^0{}^2 + \mathbf{t}_{rf}^0{}^2) = 6k_0^2,$$

где (pθφ) (1.23) означают круговую перестановку индексов; в первом приближении

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_r^{\cdot} &= \mathbf{s}^{\cdot} - \frac{2}{3}k^{\cdot} + 4k^0 n_1^0 n_1^{\cdot} + 2k^{\cdot} n_1^0{}^2, & \mathbf{t}_{rq}^{\cdot} &= 2k^{\cdot} n_1^0 n_2^0 + 2k^0 (n_1^0 n_2^{\cdot} + n_1^{\cdot} n_2^0), & (rqf) \quad (1.23) \\ n_1^0 n_1^{\cdot} + n_2^0 n_2^{\cdot} + n_3^0 n_3^{\cdot} &= 0, \\ \frac{1}{2} \left[\bar{A}(\mathbf{s}_r^0 - \mathbf{s}_q^0)^2 + \bar{B}(\mathbf{s}_q^0 - \mathbf{s}_f^0)^2 + \bar{C}(\mathbf{s}_f^0 - \mathbf{s}_r^0)^2 \right] + \\ + (\mathbf{s}_r^0 - \mathbf{s}_q^0)(\mathbf{s}_r^{\cdot} - \mathbf{s}_q^{\cdot}) + (\mathbf{s}_q^0 - \mathbf{s}_f^0)(\mathbf{s}_q^{\cdot} - \mathbf{s}_f^{\cdot}) + (\mathbf{s}_f^0 - \mathbf{s}_r^0)(\mathbf{s}_f^{\cdot} - \mathbf{s}_r^{\cdot}) + \\ + 6 \left[\frac{c}{2} (\bar{F}\mathbf{t}_{rq}^0{}^2 + \bar{G}\mathbf{t}_{qf}^0{}^2 + \bar{H}\mathbf{t}_{rf}^0{}^2) + \mathbf{t}_{rq}^0 \mathbf{t}_{rq}^{\cdot} + \mathbf{t}_{qf}^0 \mathbf{t}_{qf}^{\cdot} + \mathbf{t}_{rf}^0 \mathbf{t}_{rf}^{\cdot} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Невозмущенное состояние ($\delta=0$) для изотропного пространства со сферической полостью радиуса $a_0 = 1$ примем в виде

$$\mathbf{s}_r^0 \neq 0, \quad \mathbf{s}_f^0 = \mathbf{s}_q^0 \neq 0, \quad \mathbf{t}_{rq}^0 = \mathbf{t}_{qf}^0 = \mathbf{t}_{rf}^0 = 0. \quad (1.15)$$

Из (1.13), (1.15) получим

$$\begin{aligned} n_2^0 = n_3^0 &= 0, & n_1^0 &= 1, \\ \mathbf{s}_r^0 = \mathbf{s}_q^0 + 2k^0, & \mathbf{s}_q^0 = \mathbf{s}_f^0, \\ \mathbf{t}_{rq}^0 = \mathbf{t}_{qf}^0 = \mathbf{t}_{rf}^0 &= 0, & \text{где } k^0 &= \frac{\sqrt{3}}{2} k_0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Согласно (1.14), (1.15), (1.16) в первом приближении будем иметь

$$\begin{aligned} n_1^{\cdot} &= 0, \\ \mathbf{s}_r^{\cdot} = \mathbf{s}_q^{\cdot} + 2k^{\cdot} = \mathbf{s}^{\cdot} + \frac{4}{3}k^{\cdot}, & \mathbf{s}_q^{\cdot} = \mathbf{s}_f^{\cdot} = \mathbf{s}^{\cdot} - \frac{2}{3}k^{\cdot}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$t'_{rq} = 2k^0 n'_2, \quad t'_{qf} = 0, \quad t'_{rf} = 2k^0 n'_3,$$

где

$$k' = -\frac{c}{4} k^0 (\bar{A} + \bar{C}), \quad s' = \frac{1}{3} (s'_r + s'_q + s'_f). \quad (1.18)$$

Из уравнений равновесия (1.6) в нулевом приближении согласно (1.15) получим

$$\frac{\partial s'_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (s'_r - s'_q) = 0, \quad \frac{\partial s'_q}{\partial q} = \frac{\partial s'_f}{\partial f} = 0. \quad (1.19)$$

В первом приближении уравнения равновесия с учетом (1.17) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial s'}{\partial r} + \frac{2k^0}{r} \frac{\partial n'_2}{\partial q} + \frac{2k^0}{r \sin q} \frac{\partial n'_3}{\partial f} + \frac{1}{r} (4k' + 2k^0 n'_2 \operatorname{ctg} q) &= 0, \\ 2k^0 \frac{\partial n'_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s'}{\partial q} + \frac{1}{r} (6k^0 n'_2) &= 0, \\ 2k^0 \frac{\partial n'_3}{\partial r} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial s'}{\partial f} + \frac{1}{r} (6k^0 n'_3) &= 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Удовлетворим второму и третьему уравнениям (1.20) с помощью замены

$$s' = \frac{2k^0}{r^2} \frac{\partial \Psi(r, q, f)}{\partial r}, \quad n'_2 = -\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Psi(r, q, f)}{\partial q}, \quad n'_3 = -\frac{1}{r^3 \sin q} \frac{\partial \Psi(r, q, f)}{\partial f}, \quad (1.21)$$

тогда из первого уравнения (1.20) получим линейное неоднородное уравнение

$$r^2 \Psi''_{rr} - \Psi''_{qq} - \frac{1}{\sin^2 q} \Psi''_{ff} - 2r \Psi'_r - \operatorname{ctg} q \Psi'_q = Dr^3, \quad (1.22)$$

где

$$D = -\frac{2k'}{k^0} = \frac{c}{2} (\bar{A} + \bar{C}). \quad (1.23)$$

В случае $k' = 0$, т. е. если среда изотропная ($c \bar{A} = c \bar{B} = \dots = c \bar{H} = 0$), или $\bar{A} = -\bar{C}$, или при $\bar{A} = \bar{C} = 0$, уравнение (1.22) становится однородным ($D = 0$) и совпадает с уравнением, приведенным в [3].

Общее решение Ψ линейного неоднородного уравнения (1.22) представляется в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения Ψ_1 и частного решения неоднородного Ψ_2 , т. е. $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. Функция Ψ_1 находится методом разделения переменных в соответствующем однородном уравнении. Для этого положим $\Psi_1 = R(r)Y(q, f)$, тогда, разделяя переменные, для функции $R(r)$ получим уравнение Эйлера

$$r^2 R'' - 2rR' - IR = 0, \quad I - \text{const}. \quad (1.24)$$

Полагая $Y(q, f) = \Theta(q)\Phi(f)$, для функций $\Phi(f)$ и $\Theta(q)$ получим соответственно уравнения

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0, \quad (1.25)$$

$$\sin^2 q \Theta'' + \sin q \cos q \Theta' + (-\sin^2 q I - m^2) \Theta = 0. \quad (1.26)$$

Ограниченным решением последнего при $I = -n(n+1)$ является присоединенная функция Лежандра 1-го рода $P_n^m(\cos q)$.

Решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (1.22), представим в виде

$$\Psi_1 = (C_1 r^{\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{\frac{3}{2}-b}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (D_{mn} \cos mf + E_{mn} \sin mf) P_n^m(\cos q), \quad (1.27)$$

$$b = \sqrt{\frac{9}{4} - n(n+1)}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

Частным решением неоднородного уравнения (1.22) является функция

$$\Psi_2 = \frac{D}{3} (r^3 \ln r - \frac{r^3}{3}) + C_3 \frac{r^3}{3}, \quad C_3 - const. \quad (1.28)$$

Таким образом, общее решение уравнения (1.22) будет следующим:

$$\Psi = [(C_1 r^{\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{\frac{3}{2}-b}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (D_{mn} \cos mf + E_{mn} \sin mf) P_n^m(\cos q)] + \frac{D}{3} (r^3 \ln r - \frac{r^3}{3}) + C_3 \frac{r^3}{3}, \quad (1.29)$$

где $C_1, C_2, C_3, D_{mn}, E_{mn}$ – константы, определяемые из граничных условий, D – согласно (1.23).

Из (1.29), (1.21), (1.17) получим выражения для компонент напряжений

$$\begin{aligned} s_r' &= \frac{4}{3} k' + \\ &+ \frac{2k^0}{r^2} \left[\left(\left(\frac{3}{2} + b \right) C_1 r^{\frac{1}{2}+b} + \left(\frac{3}{2} - b \right) C_2 r^{\frac{1}{2}-b} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (D_{mn} \cos mf + E_{mn} \sin mf) P_n^m(\cos q) + \right. \\ &\quad \left. + Dr^2 \ln r + C_3 r^2 \right], \\ s_q' &= s_f' = -\frac{2}{3} k' + \\ &+ \frac{2k^0}{r^2} \left[\left(\left(\frac{3}{2} + b \right) C_1 r^{\frac{1}{2}+b} + \left(\frac{3}{2} - b \right) C_2 r^{\frac{1}{2}-b} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (D_{mn} \cos mf + E_{mn} \sin mf) P_n^m(\cos q) + \right. \\ &\quad \left. + Dr^2 \ln r + C_3 r^2 \right], \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$t_{rq}' = -\frac{2k^0}{r^3} (C_1 r^{\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{\frac{3}{2}-b}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (D_{mn} \cos mf + E_{mn} \sin mf) \frac{\partial (P_n^m(\cos q))}{\partial q},$$

$$t_{qf}' = 0,$$

$$t_{rf}' = -\frac{2k^0}{r^3 \sin q} (C_1 r^{\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{\frac{3}{2}-b}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-m D_{mn} \sin mf + m E_{mn} \cos mf) P_n^m(\cos q).$$

2. Граничные условия в предположении, что поверхность полости свободна от усилий, записываются в виде

$$\begin{aligned} s_r \cos \vec{n}r + t_{rq} \cos \vec{n}q + t_{rf} \cos \vec{n}f &= 0, \\ t_{rq} \cos \vec{n}r + s_q \cos \vec{n}q + t_{qf} \cos \vec{n}f &= 0, \\ t_{rf} \cos \vec{n}r + t_{qf} \cos \vec{n}q + s_f \cos \vec{n}f &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где \vec{n} – нормаль к поверхности полости. Согласно (1.10) уравнение поверхности полости (1.1) примет вид

$$r^2 \left(\frac{(\sin q \cos f)^2}{(1+d \bar{a})^2} + \frac{(\sin q \sin f)^2}{(1+d \bar{b})^2} + \frac{(\cos q)^2}{(1+d \bar{c})^2} \right) = 1, \quad (2.2)$$

откуда

$$r = \frac{(1+d \bar{a})(1+d \bar{b})(1+d \bar{c})}{\sqrt{\sin^2 q \cos^2 f (1+d \bar{b})^2 (1+d \bar{c})^2 + \sin^2 q \cos^2 f (1+d \bar{b})^2 (1+d \bar{c})^2 + \sin^2 q \cos^2 f (1+d \bar{b})^2 (1+d \bar{c})^2}} \quad (2.3)$$

Раскладывая (2.3) в ряд по d , ограничиваясь первым приближением, получим

$$r = r_0 + dr_1(q, f), \quad (2.4)$$

где

$$r_0 = 1, \quad r_1(q, f) = r_0 (\bar{a} \sin^2 q \cos^2 f + \bar{b} \sin^2 q \sin^2 f + \bar{c} \cos^2 q). \quad (2.5)$$

Линеаризируем направляющие косинусы нормали. С точностью до малых второго порядка будем иметь

$$\cos \vec{n}r \approx 1, \quad \cos \vec{n}q \approx -\frac{d}{r_0} \frac{\partial r_1(q, f)}{\partial q}, \quad \cos \vec{n}f \approx -\frac{d}{r_0 \sin q} \frac{\partial r_1(q, f)}{\partial f}. \quad (2.6)$$

Из (2.1), учитывая (1.12), (1.15), получим граничные условия на невозмущенной поверхности $r = r_0 = 1$

$$\text{при } r = r_0 \quad s_r^0 = 0, \quad (2.7)$$

$$\text{при } r = r_0 \quad s_r' = -\frac{\partial s_r^0}{\partial r} r_1(q, f), \quad t_{rq}' = \frac{s_q^0}{r_0} \frac{\partial r_1(q, f)}{\partial q}, \quad t_{rf}' = \frac{s_f^0}{r_0 \sin q} \frac{\partial r_1(q, f)}{\partial f}. \quad (2.8)$$

Из уравнений равновесия (1.19), граничных условий (2.7), учитывая (1.16), найдем компоненты напряжений в нулевом приближении

$$s_r^0 = -4k^0 \ln \frac{r}{r_0}, \quad s_q^0 = s_f^0 = -4k^0 \ln \frac{r}{r_0} - 2k^0, \quad t_{ij}^0 = 0. \quad (2.9)$$

Граничные условия (2.8) согласно (2.9) примут вид

$$s_r' = \frac{4k^0}{r_0} r_1(q, f), \quad t_{rq}' = -\frac{2k^0}{r_0} \frac{\partial r_1(q, f)}{\partial q}, \quad t_{rf}' = -\frac{2k^0}{r_0 \sin q} \frac{\partial r_1(q, f)}{\partial f} \quad \text{при } r = r_0. \quad (2.10)$$

Представим $r_1(q, f)$ в виде ряда

$$r_1(q, f) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a_{mn} \cos mf + b_{mn} \sin mf) P_n^m(\cos q). \quad (2.11)$$

В выражении (2.11) коэффициенты Фурье a_{mn} , b_{mn} разложения $r_1(q, f)$ в ряд по сферическим функциям определяются по формулам

$$a_{mn} = \frac{1}{N_{mn}} \int_0^{2p} \int_0^p r_1(q, f) P_n^m(\cos q) \cos mf \sin q \, dq \, df, \quad N_{mn} = \frac{2p e_m (n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}, \quad (2.12)$$

$$b_{mn} = \frac{1}{N_{mn}} \int_0^{2p} \int_0^p r_1(q, f) P_n^m(\cos q) \sin mf \sin q \, dq \, df, \quad e_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m=0 \\ 1 & \text{при } m>0 \end{cases}$$

где $r_1(q, f)$ имеет вид (2.5). Полагая $D_{mn} = a_{mn}$, $E_{mn} = b_{mn}$, $C_3 = -\frac{2k'}{3k^0}$, из граничных условий (2.10) с учетом (2.11), (1.30) получим при $r = r_0 = 1$ уравнения для определения констант C_1 , C_2

$$C_1 + C_2 = 1, \quad \left(\frac{3}{2} + b\right)C_1 + \left(\frac{3}{2} - b\right)C_2 = 2. \quad (2.13)$$

Следовательно,

$$C_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4b}, \quad C_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4b}, \quad C_3 = -\frac{2k'}{3k^0} = \frac{c}{6}(\bar{A} + \bar{C}), \quad D_{mn} = a_{mn}, \quad E_{mn} = b_{mn}. \quad (2.14)$$

Искомые компоненты напряжений определяются согласно (2.9) и (1.30), (1.18), (2.14). Отметим, что при $k' = 0$ полученные результаты совпадают с результатами, приведенными в [3] для изотропной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – Т. 1 – 448 с.; 2002. – Т. 2. – 448 с.
2. *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
3. *Семькина, Т. Д.* О трехосном растяжении упруго-пластического пространства, ослабленного сферической полостью / Т. Д. Семькина // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 1. – С. 173–177.
4. *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехиздат, 1956. – 407 с.

Григорьева А. Л.

**ПОВЕРХНОСТЬ НАГРУЖЕНИЯ, СВЯЗАННАЯ С ЛИНИЯМИ УРОВНЯ
ПОВЕРХНОСТИ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СОСТОЯНИЙ
НЕСЖИМАЕМОГО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА**

(Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет)

Одной из проблем теории пластичности является задание условия текучести (поверхности нагружения), адекватно описывающей исследуемые экспериментально наблюдаемые эффекты пластического течения. Одним из таких эффектов является влияние на разрушение пластических материалов диссипации энергии, осуществленной частицей материала. В работе [1] показано, что выбор поверхности нагружения, связанной с линиями уровня поверхности деформационных состояний несжимаемого жесткопластического тела, дает возможность выделить удельную диссипацию энергии как независимый параметр, влияющий на условия разрушения. Ниже приводится способ построения поверхности нагружения для конструкционных материалов на основе кривых упрочнения [2].

Рассматривается идеальное жесткопластическое тело, деформационные состояния которого изображаются в виде точек в пространстве главных деформаций. Эти точки образуют гиперболическую поверхность третьего порядка. Деформационные процессы изображаются линиями на этой поверхности.

В качестве меры деформаций используются тензоры деформаций Коши C_{ij} и Альманси E_{ij} :

$$C_{ij} = H_{ki} H_{kj}, \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(d_{ij} - C_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Условие несжимаемости

$$(1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1 \quad (2)$$

определяет в пространстве E_i гиперболическую поверхность третьего порядка \mathcal{E} (рис. 1). Проекция поверхности \mathcal{E} на девиаторную плоскость с нормалью \mathbf{n} , которые представляют линии пересечения поверхности \mathcal{E} с плоскостью параллельной девиаторной плоскости, расположенной на расстоянии $h/\sqrt{3}$ до начала координат заданы уравнением:

$$h = (E_1 + E_2 + E_3), \quad (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1. \quad (3)$$

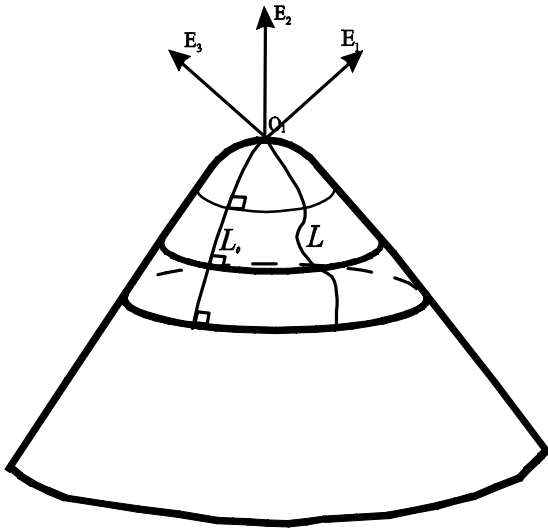


Рис. 1

Введем цилиндрическую поверхность нагружения, связанную с линиями уровня (3), которые характеризуются параметром упрочнения $h = E_1 + E_2 + E_3$. Эта поверхность нагружения обладает свойством: при простом деформировании для достижения соответствующей линии уровня затрачивается одна и та же диссипация энергии. Под простым процессом понимается процесс, в котором физическое время не учитывается и t является параметром. Будем изображать простые деформационные процессы кривыми l на девиаторной плоскости (рис.2). В этой плоскости уравнение цилиндрической поверхности нагружения определяет линии уровня для функции H , заданные уравнением:

$$2x^3 - 6xy^2 - 3\sqrt{2}Hx^2 - 3\sqrt{2}Hy^2 + 2\sqrt{2}H^3 - 6\sqrt{6} = 0, \quad (4)$$

которое определяет цилиндрическую поверхность нагружения $f(s_1 - s_2, s_2 - s_3, H) = 0$,

после замены: $y = \frac{-1}{\sqrt{2}h'}(s_1 - s_2)$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{6}h'}(s_2 - s_3)$. Из рис. 2 видно, что кривые (4) при $H \rightarrow \sqrt{3}$ мало отличаются от окружности.

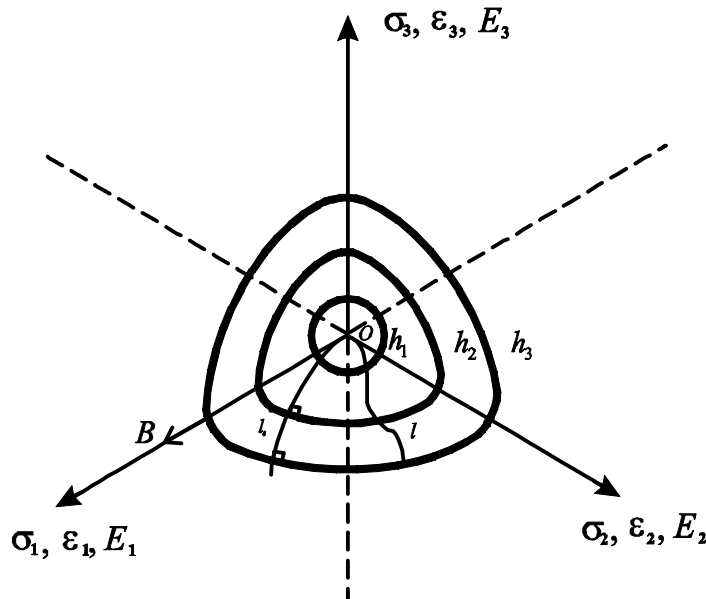


Рис. 2

При плоской деформации условие текучести (4) в Эйлеровых координатах после замены:

$$s_1 = s_z + \frac{1}{2} \sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2}, \quad s_2 = s_z - \frac{1}{2} \sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2}, \quad s_3 = s_z \quad (5)$$

имеет вид:

$$\left((s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2 \right) \cdot \left(3^3 H \cdot h' - 5 \left((s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) = 18 \cdot h'^3 \left(\sqrt{3}^3 - H^3 \right). \quad (6)$$

К условию (6) присоединяем два уравнения равновесия

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

и уравнение, связывающее компоненты напряжения с приращениями компонент деформации,

$$\frac{e_x - e_y}{e_{xy}} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}} = \frac{s_x - s_y}{2t_{xy}}, \quad (8)$$

где

$$e_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{-5\sqrt{6}}{3h'^3} (s_x - s_y) \sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2} - \frac{9\sqrt{2}H}{h'^2} (s_x - s_y),$$

$$e_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{5\sqrt{6}}{3h'^3} (s_x - s_y) \sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2} + \frac{9\sqrt{2}H}{h'^2} (s_x - s_y),$$

$$e_{xy} = \frac{-20\sqrt{6}}{3h'^3} t_{xy} \sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2} - \frac{36\sqrt{2}H}{h'^2} t_{xy}.$$

Кроме того, должно выполняться условие несжимаемости:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

Для пяти неизвестных $s_x, s_y, t_{xy}, v_x, v_y$ получили пять уравнений (6)–(9). Формулы (7)–(9) удовлетворяют условию текучести Мизеса при плоской деформации.

Для того чтобы построить поверхности нагружения (4), может быть использован стандартный эксперимент на одноосное растяжение. Как правило, она изображается в координатах $s_T(e)$, где e – логарифмическая (относительная) степень деформации.

Для построения кривой нагружения перестраиваем $s_T(e)$ из [1] для циркония (99,7%) и электролитического никеля в координатах $s_T(h)$ (рис. 3). Параметр h' определяется по формуле:

$$h' = \frac{3s}{3 - 2h}. \quad (10)$$

Из (6) следует, что чем больше параметр h' , тем ближе форма линий уровня приближается к окружности (рис. 4: а) – цирконий (99,7%), б) – электролитический никель). Получаем, что для циркония линии уровня больше подходят к окружности. Для электролитического никеля кривые стремятся к треугольной форме.

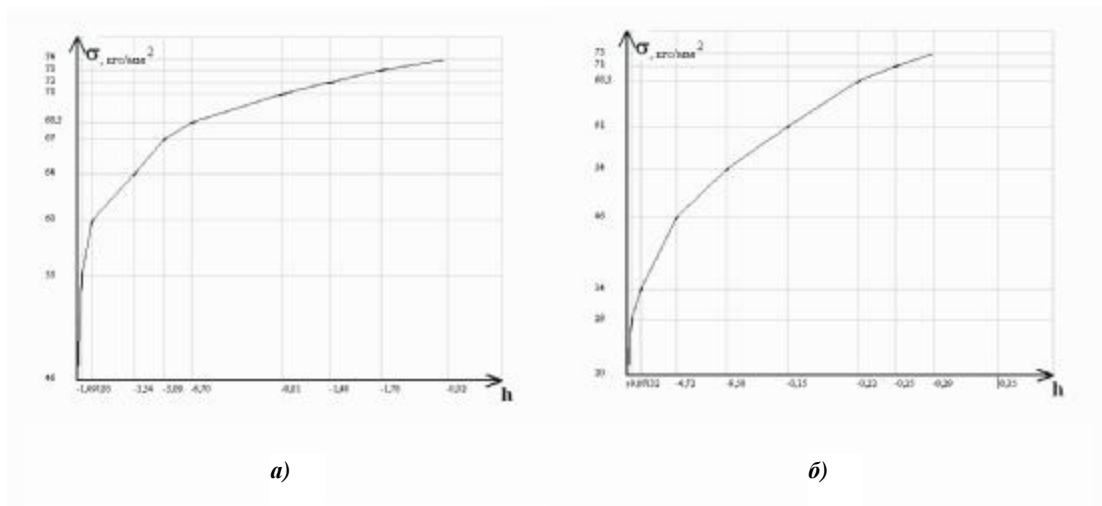


Рис 3.

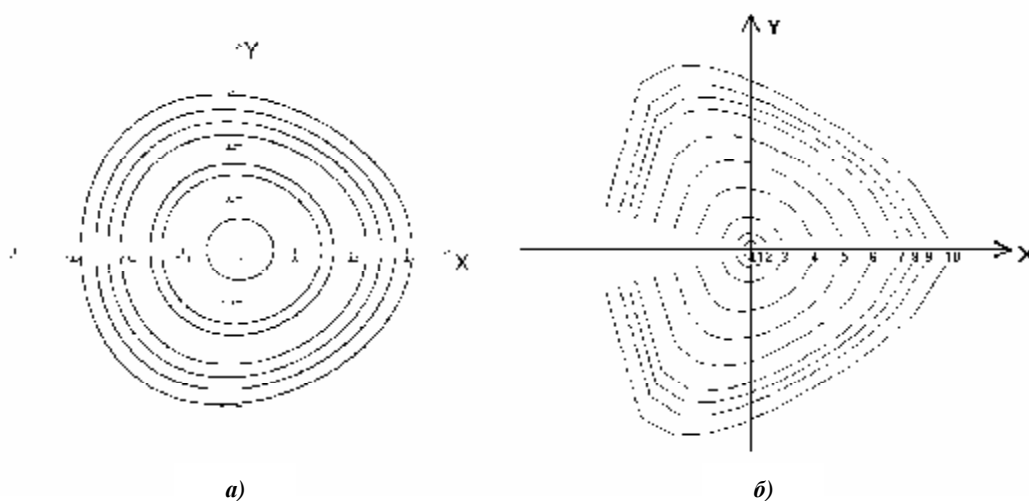


Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочеров, Е. П. Деформационные состояния и разрушение идеальных жесткопластических тел / Е. П. Кочеров, А. И. Хромов // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. – 2006. – Вып. 42. – С. 66–71.
2. Кроха, В. А. Упрочнение металлов при холодной пластической деформации : справочник / В. А. Кроха. – М. : Машиностроение, 1980. – 157 с.
3. Хромов, А. И. Концентраторы деформаций / А. И. Хромов, А. А. Буханько, С. А. Степанов // Доклады РАН. – 2006. – Т. 407. – № 6. – С. 777–781.

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ БЫСТРОВОРАЩАЮЩЕЙСЯ КОНИЧЕСКОЙ ТРУБЫ

(Институт механики НАН РА)

Исследуется предельное пластическое состояние быстровращающейся конической трубы из идеально пластического материала с медленно возрастающей угловой скоростью ω вокруг своей оси. Уругопластическое состояние вращающегося диска исследовано В.В. Соколовским [1]. Линейно упругое напряженное состояние дисков и цилиндрических труб рассмотрено во многих работах (см. [2]).

1. Центробежная сила, направленная перпендикулярно оси вращения, будет

$$R = v\omega^2\rho,$$

где v – масса единицы объема материала трубы, ρ – расстояние от оси вращения.

Задача рассматривается в сферических координатах. Массовые силы в них будут

$$R_r = R \sin \vartheta, \quad R_{\vartheta} = R \cos \vartheta.$$

Благодаря осесимметричности деформирования имеем $\omega = \tau_{r\varphi} = \tau_{\vartheta\varphi} = 0$. Далее, рассматривая трубу с малой конусностью, полагаем $\tau_{r\vartheta} = 0$ по всему объему трубы (рис. 1).

Дифференциальные уравнения равновесия примут следующую форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(2\sigma_r - \sigma_{\vartheta} - \sigma_{\varphi}) + v\omega^2 r \sin^2 \vartheta &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r}(\sigma_{\vartheta} - \sigma_{\varphi}) \operatorname{ctg} \vartheta + v\omega^2 r \sin \vartheta \cos \vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Условие пластичности Губера – Мизеса имеет вид

$$(\sigma_r - \sigma_{\vartheta})^2 + (\sigma_{\vartheta} - \sigma_{\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi} - \sigma_r)^2 = 6k^2. \quad (2)$$

На внутренней и внешней поверхностях трубы имеем условия

$$\sigma_{\vartheta} = 0 \text{ при } \vartheta = \alpha, \quad \sigma_{\vartheta} = 0 \text{ при } \vartheta = \beta. \quad (3)$$

Приведенная система уравнений (1)–(2) с граничными условиями (3) принадлежит к числу «статически определимых» задач теории пластичности.

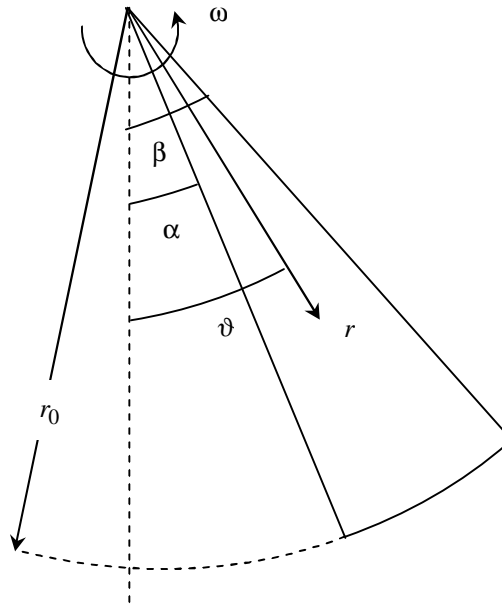


Рис. 1

Из первого уравнения (1) определяем

$$\sigma_{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_r) - \sigma_{\vartheta} + \nu \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta.$$

Далее подобным же образом из второго уравнения (1) находим

$$\sigma_{\varphi} = \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sigma_{\vartheta} \sin \vartheta) + \nu \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta.$$

Приравняв полученные выражения σ_{φ} , будем иметь

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_r) - \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sigma_{\vartheta} \sin \vartheta) - \sigma_{\vartheta} = 0.$$

Введем функцию напряжения $\Phi(r, \vartheta)$ с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{\Phi}{r^2 \sin \vartheta}, \\ \sigma_{\vartheta} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{1}{r \cos \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \vartheta} + \nu \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (4)$$

Эти выражения напряжений тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия (1).

Далее, подставляя (4) в условие пластичности (2), приходим к дифференциальному уравнению в частных производных

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{r^2 \cos J} \frac{\partial \Phi}{\partial J} - \frac{1}{r \sin J} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\Phi}{r^2 \sin J} \right)^2 + \\ & \left(\frac{1}{r \cos J} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial J} - \frac{\Phi}{r^2 \sin J} - \frac{1}{r^2 \cos J} \frac{\partial \Phi}{\partial J} + n\omega^2 r^2 \sin^2 J \right)^2 + \\ & \left(\frac{1}{r \cos J} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial J} - \frac{1}{r \sin J} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + n\omega^2 r^2 \sin^2 J \right)^2 = 6k^2. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Решение уравнения (5) будем искать в форме

$$\Phi = r\psi(\rho), \quad \rho = r \sin \vartheta. \quad (6)$$

Подставляя Φ в уравнение (5), приходим к уравнению

$$\psi'' + \frac{1}{\rho} \psi' - \frac{\psi}{\rho^2} = \frac{\sqrt{3}}{\rho} k - v\omega^2 \rho,$$

где A и B произвольные постоянные $y(r)$, причем

$$y(r) = \frac{\sqrt{3}}{2} k r \ln r - \frac{1}{8} n\omega^2 r^3 + Ar + \frac{B}{r}. \quad (7)$$

Используя (4) и (6), получим

$$\begin{aligned} s_r = s_J &= y'(r) + \frac{1}{r} y(r), \\ s_j &= r y''(r) + 2y'(r) + n\omega^2 r^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, используя (7), из (8) получим

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \sqrt{3} k \ln \rho - \frac{1}{2} v\omega^2 \rho^2 + 2A + \frac{\sqrt{3}}{2} k. \quad (9)$$

В чисто пластическое состояние сначала переходит концевое сечение $r = r_0$, а затем при возрастании угловой скорости ω эта область распространяется по направлению к вершине конуса. Минимальное значение ω , при котором сечение $r = r_0$ переходит целиком в пластическое состояние, обозначим через ω_0 .

Используя первое граничное условие (3), получаем

$$\sigma_{\vartheta} = \sqrt{3}k \ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} - \frac{1}{2} v \omega_0^2 r_0^2 (\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha). \quad (10)$$

Далее из второго условия (3) будем иметь

$$\Omega^2 = \frac{2\sqrt{3}k}{v(\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)} \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad (11)$$

где обозначено $\Omega = \omega_0 r_0$. При возрастании ω пластическая область распространяется по направлению к вершине трубы, т.е. при $\omega > \omega_0$ имеем $r > r_0$.

Если при $\omega = \omega_*$ зона пластичности определяется поверхностью $r = r_*$, то, используя решение (9) или (10), находим

$$\Omega = \omega_0 r_0 = \omega_* r_*.$$

Таким образом, для напряжений (9) и (10) при учете (11) получаем

$$\begin{aligned} s_r = s_J &= \sqrt{3}k \left(\ln \frac{\sin J}{\sin a} - \frac{\sin^2 J - \sin^2 a}{\sin^2 b - \sin^2 a} \ln \frac{\sin b}{\sin a} \right) \\ s_j &= \sqrt{3}k \left(1 + \ln \frac{\sin J}{\sin a} - \frac{\sin^2 J - \sin^2 a}{\sin^2 b - \sin^2 a} \ln \frac{\sin b}{\sin a} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

причем $r_0 \leq r \leq r_*$. Представляет интерес определение осевой силы. Выделяя мысленно сферической поверхностью с радиусом r конечную часть трубы с вершиной и проектируя направление силы от σ_r для удельной осевой силы, приходящейся на единицу площади, будем иметь

$$\bar{\sigma}_r^* = \frac{1}{2(\cos \alpha - \cos \beta)} \int_{\alpha}^{\beta} \sigma_r^* \sin 2\vartheta d\vartheta,$$

где $\sigma_r^* = \frac{\sigma_r}{\sqrt{3}k}$. После интегрирования согласно (12) получим

$$\bar{\sigma}_r^* = \frac{1}{4(\cos \alpha - \cos \beta)} \left[(\sin^2 \beta + \sin^2 \alpha) \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \right]. \quad (13)$$

Из (13) при предположении $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ находим $\bar{\sigma}_r^* \approx 0.03$; между тем минимальное значение $\sigma_{\varphi}^* = \frac{\sigma_{\varphi}}{\sqrt{3}k}$, действующее в осевом сечении трубы, равно 1. Иначе говоря, осевая сила (13) по сравнению с σ_{φ} не имеет практического значения.

3. Из полученного решения для конической трубы легко вывести аналогичные формулы для вращающейся цилиндрической трубы. В системе цилиндрических координат $\rho\varphi z$ при предельном переходе $\vartheta \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ и фиксированном ρ напряжения σ_ϑ , σ_φ , σ_r переходят в σ_ρ , σ_φ , σ_z (рис. 2).

Из (9) или (10) следует

$$\sigma_\rho = \sigma_z = \sqrt{3}k \left(\ln \frac{\rho}{a} - \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} \right)$$

$$\sigma_\varphi = \sqrt{3}k \left(1 + \ln \frac{\rho}{a} - \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} \right)$$

причем $a \leq \rho \leq b$. Здесь a и b соответственно будут внутренним и внешним радиусами цилиндрической трубы.

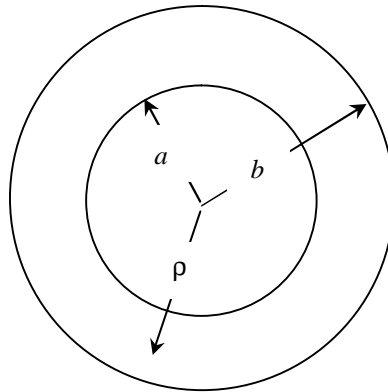


Рис. 2

Из (11) находим предельное значение угловой скорости:

$$\omega_* = \frac{2\sqrt{3}k}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b}{a}.$$

Вывод о незначительности осевой силы в конической трубе для цилиндрической трубы также остается в силе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 396 с.
2. Тимашенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимашенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1979. – 560 с.

О ПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ БЫСТРОВРАЩАЮЩЕЙСЯ КОНИЧЕСКОЙ ТРУБЫ

(Институт механики НАН Армении)

Исследуется пластическое состояние быстровращающейся конической трубы при условии полной пластичности. Получены характеристические соотношения, определяющие напряженное состояние и поле скоростей перемещений. Полученные соотношения позволяют определить предельное значение угловой скорости.

Пластическое течение быстровращающейся конической трубы при условии пластичности Губера–Мизеса было исследовано М.А. Задояном [1]. В настоящей работе исследуется пластическое состояние той же задачи при предположении, что материал трубы подчиняется закону полной пластичности $s_2 = s_3$, $s_1 = s_2 + 2k$, $k = const$, а касательные напряжения отличны от нуля $t_{rj}, t_{rj}, t_{jJ} \neq 0$. Предполагается, что все компоненты не зависят от угла поворота j .

Таким образом, имеем быстровращающуюся коническую трубу (рис. 1) с углами конусообразности a_0, a_n . При заданных граничных условиях требуется найти поля напряжений, скоростей перемещений и соответствующее значение угловой скорости.

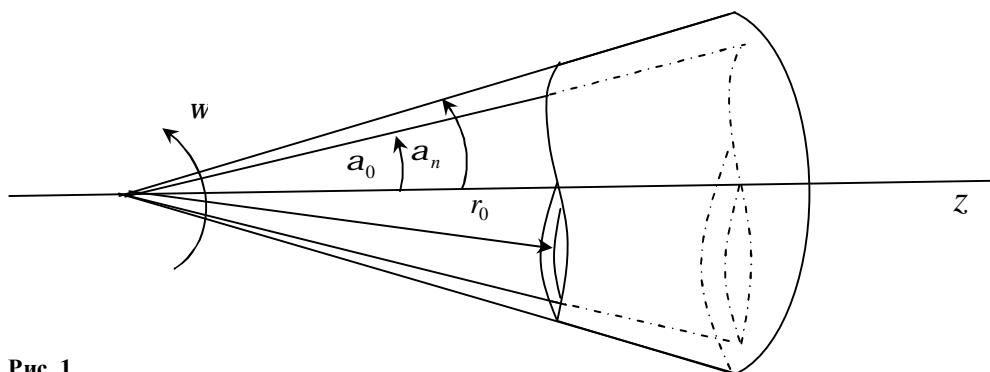


Рис. 1

Принимая $2k = 1$ уравнения равновесия в сферической системе координат с безразмерными напряжениями, можем записать:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{rJ}}{\partial J} + \frac{1}{r} (2s_r - s_J - s_j + t_{rJ} \operatorname{ctg} J) + nw^2 r \sin^2 J &= 0, \\
\frac{\partial t_{rJ}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_J}{\partial J} + \frac{1}{r} [(s_J - s_j) \operatorname{ctg} J + 3t_{rJ}] + nw^2 r \sin J \cos J &= 0, \\
\frac{\partial t_{rj}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{Jj}}{\partial J} + \frac{1}{r} [2t_{Jj} \operatorname{ctg} J + 3t_{rj}] &= 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $n = \frac{r}{2k}$, r – масса единицы объема материала.

Из условий полной пластичности имеем:

$$\begin{aligned}
s_r &= s - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1 - \cos y), \\
s_J &= s - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1 + \cos y) \cos^2 x, \quad s_j = s - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1 + \cos y) \sin^2 x, \\
t_{rJ} &= \frac{1}{2} \sin y \cos x, \quad t_{rj} = \frac{1}{2} \sin y \sin x, \quad t_{Jj} = \frac{1}{2}(1 + \cos y) \sin x \cos x, \\
s &= \frac{1}{3}(s_r + s_\theta + s_j),
\end{aligned} \tag{2}$$

где y, x направляющие косинусы, определяющие ориентацию главного напряжения s_1 в системе координат $r\theta j$:

$$n_1 = \sin \frac{y}{2}, \quad n_2 = \cos \frac{y}{2} \cos x, \quad n_3 = \cos \frac{y}{2} \sin x. \tag{3}$$

Подставляя (2) в (1) получим систему уравнений гиперболического типа [2,3,4]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial r} + \frac{1}{2} \sin y \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{1}{2r} \cos y \cos x \frac{\partial y}{\partial J} - \frac{1}{2r} \sin y \sin x \frac{\partial x}{\partial J} + \\
+ \frac{1}{2r} [1 - 2 \cos y + \sin y \cos x \operatorname{ctg} J] + nw^2 r \sin^2 J &= 0, \\
\frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial J} + \frac{1}{2} \cos y \cos x \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin y \cos^2 x \frac{\partial y}{\partial J} - \frac{1}{2} \sin y \sin x \frac{\partial x}{\partial r} - \\
- \frac{2}{r} \cos x \sin x (1 + \cos y) \frac{\partial x}{\partial J} + \frac{1}{2r} [\sin y \cos x + (1 + \cos y) \cos 2x \operatorname{ctg} J] + \\
+ nw^2 r \sin J \cos J &= 0, \\
\cos y \sin x \frac{\partial y}{\partial r} + \sin y \cos x \frac{\partial x}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin y \sin x \cos x \frac{\partial y}{\partial J} + \\
+ \frac{1}{r} (1 + \cos y) \cos 2x \frac{\partial x}{\partial J} + \frac{1}{r} [3 \sin y \cos x + (1 + \cos y) \sin 2x \operatorname{ctg} J] &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Добавим к (4) следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial r} dr + \frac{\partial s}{\partial J} dJ &= ds, \\
\frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial J} dJ &= dx, \\
\frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial J} dJ &= dy.
\end{aligned} \tag{5}$$

(4) и (5) рассмотрим как систему линейных алгебраических уравнений относительно $\frac{\partial s}{\partial r}, \frac{\partial s}{\partial J}, \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial J}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial J}$. В характеристических линиях одновременно должно выполняться $\Delta = \Delta_i = 0, i = 1, \dots, 6$. Из $\Delta = \Delta_6 = 0$ получим следующее характеристическое соотношение:

$$4 \cos x \left(\frac{d \ln r}{dJ} \right)^3 \left[\sin^2 x \sin^2 y - (1 + \cos y) \cos y \cos 2y \right] + \left(\frac{d \ln r}{dJ} \right)^2 \left[-2(1 + \cos 2x + \cos 4x) \sin y + (3 - \cos 4x) \sin 2y + (2 + \cos 2x)(2 \sin 3y + \sin 4y) \right] - 4 \cos x \cos^2 y \frac{d \ln r}{2 dJ} \left[5 - 10 \cos y + \cos 2x(1 + 3 \cos y) - \cos 3y \right] - 2 \sin 2y = 0, \quad (6)$$

а вдоль характеристических направлений (a, b, g) имеет место:

$$f_1(y, x) dy + 2 f_2(y, x) ds + f_3(y, x) dx + f_4(y, x) dJ = 0, \quad (7)$$

где приняты следующие обозначения:

$$f_1(y, x) = \left(\frac{d \ln r}{dJ} \right)^2 \cos^2 x \sin 2y - \frac{d \ln r}{dJ} \cos x \sin^2 y (5 + \cos 2x) - \sin 2y, \\ f_2(y, x) = \left(\frac{d \ln r}{dJ} \right)^2 \sin 2x \sin y + 2 \frac{d \ln r}{dJ} \cos y \sin x, \quad (8) \\ f_3(y, x) = \left(\frac{d \ln r}{dJ} \right)^2 \sin 2x - \frac{1}{2} \frac{d \ln r}{dJ} \sin 2y \sin 2x \cos x, \\ f_4(y, x) = 2 \left(\frac{d \ln r}{dJ} \right)^3 \left(n w^2 r^2 \sin 2x \sin y \sin^2 J + \cos x \left[\cos y \sin 2x (1 + \cos y) \operatorname{ctg} J + \frac{3}{2} \cos x \sin 2y + \sin x \sin y (1 - 2 \cos y) + \frac{1}{2} \sin 2x \sin^2 y \operatorname{ctg} J \right] \right) + \left(\frac{d \ln r}{dJ} \right)^2 \left[2 \cos y \sin x - 4 \cos^2 y \sin x - 4 \sin y \sin 2x \operatorname{ctg} J - \frac{3}{2} \sin 2y \sin 2x \operatorname{ctg} J - \frac{1}{2} \sin 4x \sin y (1 + \cos y) - 2 \cos x \sin^2 y \left(3 + 6 \cos^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + n w^2 r^2 \left(4 \cos y \sin x \sin^2 J + \sin 2x \sin y \operatorname{ctg} J - \cos 2J \operatorname{ctg} J \sin 2x \sin y \right) \right] + \frac{d \ln r}{dJ} \left[2 n w^2 r^2 \sin 2J \cos y \sin x + \cos y \left(-2(1 + \cos y) \operatorname{ctg} J \sin x - 4(3 + 3 \cos 2x - \sin 2x) \sin y \right) \right].$$

Таким образом, имеем три характеристических соотношения, и при заданных граничных условиях можно численным методом интегрировать дифференциальные уравнения характеристик и, следовательно, определить напряженное состояние.

Граничные условия. Предположим, что имеют место следующие соотношения (рис. 2):

$$s_J = p_1, t_{Jj} = q_1, J = a_0, \\ s_J = p_2, t_{Jj} = q_2, J = a_n. \quad (9)$$

Численный метод решения задачи. Для решения поставленной задачи будем использовать численный метод, предложенный в [3; 4; 5].

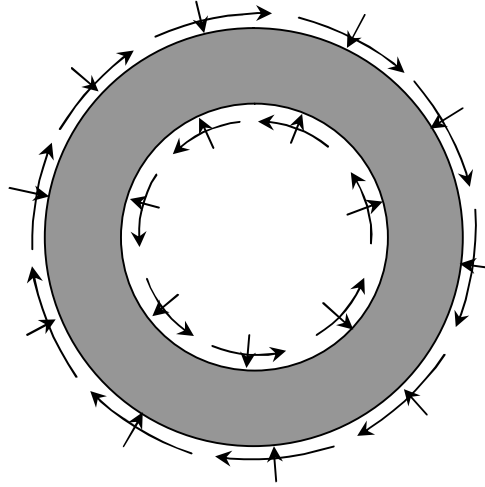


Рис. 2

Имеем три характеристические соотношения вдоль линий (a, b, g) , определяемые из первого уравнения (7).

$$f_1(y, x)dy + f_2(y, x)ds + f_3(y, x)dx + f_4(y, x)dJ|_{a, b, g} = 0. \quad (10)$$

Систему (10) можем записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_1(y_i, x_i)(y_{i+1} - y_i) + f_2(y_i, x_i)(s_{i+1} - s_i) + \\ + f_3(y_i, x_i)(x_{i+1} - x_i) + f_4(y_i, x_i)(J_{i+1} - J_i)|_{a, b, g} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

$$i = 0, \dots, n-1.$$

Причем $J_0 = a_0, J_1 = a_0 + \frac{a_n - a_0}{n}, \dots, J_i = a_0 + \frac{i}{n}(a_n - a_0), \dots, J_n = a_n$. Решаем уравнение

(6) относительно $\left(\frac{d \ln r}{dJ}\right)_{a, b, g}$, полученные значения подставляем в (11) и вместе с граничными условиями (9):

$$\begin{aligned} s_0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1 + \cos y_0) \cos^2 x_0 = p_1, \quad \frac{1}{2}(1 + \cos y_0) \sin x_0 \cos x_0 = q_1, \\ s_n - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1 + \cos y_n) \cos^2 x_n = p_2, \quad \frac{1}{2}(1 + \cos y_n) \sin x_n \cos x_n = q_2, \end{aligned} \quad (12)$$

получаем $(3n + 4)$ уравнений с $\{y_i, s_i, x_i, nw^2 r^2, i = 0, \dots, n\}$, $(3n + 4)$ неизвестными. С помощью интерполяционных многочленов можем интерполировать функции y, s, x , и, следовательно, получим аппроксимированные функции поля напряжений.

Для определения поле скоростей перемещений рассмотрим условие изотропии:

$$\begin{aligned}
e_r + e_{rq} \frac{n_2}{n_1} + e_{rj} \frac{n_3}{n_1} &= e_{rq} \frac{n_1}{n_2} + e_q + e_{qj} \frac{n_3}{n_2}, \\
e_{rq} \frac{n_1}{n_2} + e_q + e_{qj} \frac{n_3}{n_2} &= e_{rj} \frac{n_1}{n_3} + e_{qj} \frac{n_2}{n_3} + e_j, \\
e_{rj} \frac{n_1}{n_3} + e_{qj} \frac{n_2}{n_3} + e_j &= e_r + e_{rq} \frac{n_2}{n_1} + e_{rj} \frac{n_3}{n_1}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Для скоростей деформаций имеем:

$$\begin{aligned}
e_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial q} + \frac{u}{r}, \\
e_j &= \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} q, \quad e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial q} \right] \\
e_{\theta j} &= \frac{1}{2} \frac{\sin q}{r} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{w}{\sin q} \right), \quad e_{rj} = \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r} \right).
\end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13) увидим, что из них независимы только два. Предположим, что поле скоростей перемещений удовлетворяет условию несжимаемости:

$$e_r + e_q + e_j = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим первые два уравнения (13), условие несжимаемости (15), туда подставим соотношения (14), получим систему уравнений, которые принадлежат к гиперболическому типу. Присоединим к ним следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial J} dJ &= du, \\
\frac{\partial v}{\partial r} dr + \frac{\partial v}{\partial J} dJ &= dv, \\
\frac{\partial w}{\partial r} dr + \frac{\partial w}{\partial J} dJ &= dw.
\end{aligned} \tag{16}$$

Получим линейную алгебраическую систему относительно $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial J}, \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial J}, \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial J}$. Аналогичным образом из $\Delta = \Delta_6 = 0$ получим следующее характеристическое соотношение:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d \ln r}{dJ} \right)^3 \frac{(n_1^2 - n_1 n_2 - n_2^2) n_3^2 - n_1^2 n_2^2 + n_2^4}{n_1 n_2} + \left(\frac{d \ln r}{dJ} \right)^2 \frac{n_1^3 - 5n_1 n_2^2 + 3n_1 n_3^2 - 2n_2 n_3^2}{n_1} - \\
- \frac{d \ln r}{dJ} \frac{(n_2^4 + n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2) n_3^2 - 5n_1^2 n_2^2}{n_1 n_2} + n_2^2 + n_3^2 - n_1^2 = 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

а вдоль определяемых направлений $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{g})$ имеет место:

$$Adu + Bdv + Cdw - D(u, v, w) d \ln r = 0, \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}
A = B \frac{d \ln r}{dJ}, \quad B = \frac{d \ln r}{dJ} \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1 n_2}, \quad C = \left(\left(\frac{d \ln r}{dJ} \right)^2 - 1 \right) \frac{n_2^2 - n_1^2 + n_3^2}{4n_2 n_3} - \frac{d \ln r}{dJ} \left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{n_3}{2n_1} \right) \\
D(u, v, w) = \frac{1}{4n_1 n_2 n_3} \left(\frac{d \ln r}{dJ} \right)^2 \left[(n_2^2 - n_1^2)(n_1 + n_2 \operatorname{ctg} J) n_2 w + \right. \\
+ \left. ((v - w)(n_2^3 - n_1^2) n_1 + 2(u + v \operatorname{ctg} J)(n_1^2 - 2n_2^2) n_2) n_3 + (n_1 - n_2 \operatorname{ctg} J) n_2 n_3^2 w \right] + \\
+ \frac{1}{2n_1 n_2 n_3} \frac{d \ln r}{dJ} \left[-2(n_1 + n_2 \operatorname{ctg} J) n_1 w + ((2w - v) n_1^2 + 6(u + v \operatorname{ctg} J) n_1 n_2 + v n_2^2) n_3 + \right. \\
+ \left. (n_2 + n_1 \operatorname{ctg} J) n_3^2 w \right] + \frac{1}{4n_1 n_2 n_3} \left[(n_1^2 - n_2^2)(n_1 + n_2 \operatorname{ctg} J) n_2 w + \right. \\
+ \left. ((v - u)(n_1^2 - n_2^2) n_1 - 2(3u + 2v \operatorname{ctg} J) n_1^2 n_2 + 2n_2^2 v \operatorname{ctg} J) n_3 + (n_2 \operatorname{ctg} J - n_1) n_2 n_3^2 w \right].
\end{aligned} \tag{19}$$

Таким образом, имеем три характеристических соотношения, и при заданных граничных условиях можно численным методом интегрировать дифференциальные уравнения характеристик, и, следовательно, определить поле скоростей деформаций.

Кинематические граничные условия. Предположим, что на поверхности $r = r_0$ конической трубы имеет место следующие кинематические граничные условия (рис. 1):

$$u = v = w = 0, \tag{20}$$

т. е. отмеченный край жестко защемлен.

Определение скоростей перемещений аналогичным образом приводится к решению $3(n+1)$ уравнений относительно $\{u_i, v_i, w_i, i = 0, \dots, n\}$, $3(n+1)$ неизвестных.

Решение ищем в интервале $[r_0, r_n]$, $r_1 = r_0 + \frac{r_n - r_0}{n}, \dots, r_i = r_0 + \frac{i}{n}(r_n - r_0)$. Условие (20) на поверхности $r = r_0$ можем записать:

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0. \tag{21}$$

Характеристические соотношения будут:

$$\begin{aligned}
A(u_{i+1} - u_i) + B(v_{i+1} - v_i) + C(w_{i+1} - w_i) - D(u_i, v_i, w_i) (\ln r_{i+1} - \ln r_i) \Big|_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{g}} = 0, \\
i = 0, \dots, n-1.
\end{aligned} \tag{22}$$

Полученная система уравнений (21), (22) позволяет с помощью интерполяционных многочленов аппроксимировать поле скоростей перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Задоян, М. А. Пластическое течение быстровращающейся конической трубы / М. А. Задоян // ДАН НАН РА. – 2001. – Т. 101. – № 2. – С. 122–127.
2. Ивлев, Д. Д. О свойствах соотношений общей плоской задачи теории идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова // Докл. РАН. – 2000. – Т. 373. – № 1. – С. 39–41.
3. Ишлинский, А. Ю. Прикладные задачи механики. Кн. 1 : Механика вязкопластических и не вполне упругих тел / А. Ю. Ишлинский. – М. : Наука. – 1986. – 360 с.
4. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 702 с.
5. Горский, А. В. Общие двумерные задачи теории идеальной пластичности : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.04 / А. В. Горский. – Чебоксары, 2004.

**О ГИПОТЕЗЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ,
ПРИНЦИПЕ ГРАДИЕНТАЛЬНОСТИ И ПОСТУЛАТЕ ПЛАСТИЧНОСТИ**

(Тверской государственной технической университет)

В работе на основе гипотезы ортогональности и вытекающих из нее общих определяющих соотношений теории процессов упругопластического деформирования сплошных сред и обобщенного принципа градиентальности показано, что постулаты пластичности А.А. Ильюшина и Драккера имеют в математической теории пластичности более глубокое содержание и значение. Доказано, что выполнение этих постулатов является критерием достоверности не только классических определяющих соотношений теории течения, но и классических определяющих соотношений, обобщенных на сложное нагружение–разгружение теории упругопластических процессов.

1. Об активных и пассивных процессах и предельных поверхностях.

Макроскопическое состояние сплошной среды в механике в любой момент времени однозначно определяется процессом [6–9]. Процесс деформирования в частице тела определяется заданием шести компонент e_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) тензора деформаций как независимых функций времени t . Процесс нагружения в частице среды определяется заданием шести компонент S_{ij} тензора напряжений как независимых функций времени t .

Так как

$$e_{ij} = d_{ij}e_0 + \mathcal{E}_{ij}, \quad S_{ij} = d_{ij}S_0 + S_{ij},$$

где $e_0 = d_{ij}e_{ij}/3$, $S_0 = d_{ij}S_{ij}/3$, $q = d_{ij}e_{ij}$ – средние значения напряжений и деформаций и относительное изменение объема; \mathcal{E}_{ij} , S_{ij} – компоненты соответствующих тензоров-девиаторов, то процессы деформирования и нагружения в столь же общей форме могут быть заданы шестью компонентами $\mathcal{E}_{ij}(t)$ и $S_{ij}(t)$ тензоров-девиаторов, связанных условиями $\mathcal{E}_{ii} = 0$, $S_{ii} = 0$, а также инвариантами e_0 , S_0 соответственно.

В векторных пятимерных евклидовых пространствах деформаций E_5 и напряжений Σ_5 указанные выше процессы деформирования и нагружения могут быть заданы траекториями деформирования $\bar{\mathcal{E}}(t)$ и нагружения $\bar{S}(t)$ [1–5]. Положение каждой точки K на траекториях определяется длинами дуг s и Σ соответственно. Для траектории деформирования в каждой ее точке K можно построить физические векторы \bar{S} , $d\bar{\mathcal{E}}$, $d\bar{S}$ и приписать к ней скалярные параметры e_0 , $\mathcal{E} = |\bar{\mathcal{E}}|$, угол вида деформированного состоя-

ния формоизменения j , температуру T , другие нетермомеханические параметры c . Их совокупность в каждой точке K создает образ процесса деформирования. Мерой его сложности являются параметры внутренней геометрии траектории – параметры кривизны и кручения \varkappa_m ($m = 1, 2, 3, 4$) и углы J_m^0 ее излома. Аналогично строится образ процесса нагружения в Σ_5 .

Пусть образ процесса до точки K траектории деформирования задан. Рассмотрим продолжение этого процесса из точки K по различным направлениям.

Процессом *мягкого нагружения* назовем такой, для которого приращение модуля вектора напряжений $ds > 0$, а процессом разгрузки – такой, для которого $ds < 0$. Процессом *жесткого нагружения* назовем такой, для которого приращение модуля вектора деформаций $d\varepsilon > 0$, а процессом разгрузки – такой, для которого $d\varepsilon < 0$. Для *локальных процессов* при мягком нагружении $dS_k > 0$, а разгрузении $dS_k < 0$; при жестком локальном нагружении $d\dot{Y}_k > 0$, а разгрузении $d\dot{\mathcal{E}}_k < 0$ ($k = 1, 2, \mathbf{K}, 5$).

Элементарная работа деформирования

$$dA = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \sigma_0 d\theta + S_{ij} d\dot{Y}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где $dA_0 = s_0 dq$ – элементарная работа всестороннего растяжения–сжатия, $dA_\Phi = S_{ij} d\dot{\mathcal{E}}_{ij}$ – элементарная работа формоизменения. Поскольку для большинства материалов энергия объемного расширения–сжатия обратима, т. е.

$$A = \oint s_0 dq = 0,$$

то к необратимому пластическому деформированию должно приводить приращение энергии формоизменения

$$dA_\Phi = S_{ij} d\dot{\mathcal{E}}_{ij} = \bar{s} d\bar{\mathcal{E}} = s ds \cos J_1, \quad (1.1)$$

где всегда $s > 0$, $ds > 0$, $0 \leq J_1 \leq p$. Угол J_1 называется *углом сближения* и определяется по формуле $\cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1$, где $\hat{\sigma} = \bar{\sigma}/\sigma$, $\hat{p}_1 = d\bar{Y}/ds$ – единичные векторы напряжений и касательной к траектории в текущей точке K .

Если $dA_\Phi > 0$ ($J_1 < p/2$), то процесс упругопластического деформирования назовем активным, а если $dA_\Phi < 0$ ($J_1 > p/2$), то – пассивным. При $dA_\Phi = 0$ ($J_1 = p/2$) процесс назовем условно нейтральным. Слово «условный» означает, что локальные процессы $S_k - \dot{\mathcal{E}}_k$ не являются нейтральными.

Приращение элементарной работы напряжений (дополнительной работы) равно

$$dB = q ds_0 + \mathcal{E}_{ij} dS_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где $dB_0 = q ds_0$ – приращение дополнительной энергии всестороннего растяжения–сжатия;

$$dB_\Phi = \mathcal{E}_{ij} dS_{ij} = \bar{\mathcal{E}} d\bar{S} = \mathcal{E} d\Sigma \cos J_1^* \quad (1.2)$$

– приращение дополнительной энергии напряжений, для которой всегда $\mathcal{E} > 0$, $d\Sigma > 0$, $0 \leq J_1^* \leq p$. Угол J_1^* носит название *угла запаздывания*, причем $\cos \vartheta_1^* = \hat{Y} \cdot \hat{q}_1$, где $\hat{Y} = \bar{Y}/\dot{Y}$, $\hat{q}_1 = d\bar{\sigma}/d\Sigma$, Σ – длина дуги траектории нагружения в Σ_5 .

Критерием определения состояния процесса нагружения является знак dB_Φ . Если $dB_\Phi > 0$ ($J_1^* < p/2$), то процесс нагружения считаем *активным*, если $dB_\Phi < 0$ ($J_1^* > p/2$) – *пассивным*, $dB_\Phi = 0$ ($J_1^* = 0$) – *условно нейтральным*.

В каждой точке K траекторий деформирования в E_5 либо нагружения в Σ_5 их продолжения можно разбить на два множества, разделенных *предельными поверхностями деформирования* $F(\bar{\mathcal{E}}) = 0$ и *нагружения* $f(\bar{\mathcal{S}}) = 0$ соответственно. Эти поверхности могут быть включены в понятие образов процессов в E_5 и Σ_5 для каждой текущей точки K . Вне этих предельных поверхностей $dA_\Phi = \bar{s}d\bar{\mathcal{E}} > 0$, $dB_\Phi = \bar{\mathcal{E}}d\bar{\mathcal{S}} > 0$, т. е. имеют место активные процессы полного и неполного упругопластического деформирования и нагружения соответственно. Внутри этих поверхностей $dA_\Phi = \bar{s}d\bar{\mathcal{E}} < 0$, $dB_\Phi = \bar{\mathcal{E}}d\bar{\mathcal{S}} < 0$ и имеют место пассивные процессы нагружения или иначе происходит *упругая частичная сложная разгрузка*. В теории течения введена основополагающая упрощающая гипотеза о возможности разделения полных деформаций e_{ij} на упругую e_{ij}^e и пластическую e_{ij}^p части

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p, \quad \mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij}^e + \mathcal{E}_{ij}^p, \quad e_0 = e_0^e, \quad e_0^p = 0.$$

При этом считается, что упругие части подчиняются закону Гука

$$q = \frac{S_0}{K}, \quad \mathcal{E}_{ij}^e = S_{ij}/2G,$$

где $K = E/3(1-2m)$ – объемный модуль упругости, E – модуль Эйлера–Юнга, m – коэффициент Пуассона. При этом считается, что при полной разгрузке по линейному закону

$$d\bar{\mathcal{S}} = 2Gd\bar{\mathcal{E}} \quad (1.3)$$

пластическая часть деформации остается неизменной, т. е. ее значение в момент начала разгрузки совпадает с остаточной деформацией. Элементарная работа пластического формоизменения

$$dA_\Phi^p = \bar{s}d\bar{\mathcal{E}}^p = sds_p \cos J_1^p. \quad (1.4)$$

При разгрузке $dA_\Phi^p = 0$, что отвечает пассивному процессу пластического деформирования, т. е. упругой разгрузке. Во вне предельной поверхности изменяются обе части деформации и $dA_\Phi^p > 0$, т. е. процесс пластического деформирования активен. При этом изменяются как упругая $\bar{\mathcal{E}}^e$, так и пластическая $\bar{\mathcal{E}}^p$ части вектора деформации.

Таким образом, в теории течения предельные поверхности разделяют процессы упругой простой разгрузки и активного пластического деформирования. Это сужает введенные нами выше понятия предельных поверхностей, разделяющих процессы сложного активного и пассивного деформирования и нагружения.

При сложном нагружении либо деформировании, при изломе траектории на углы $J_1^0 > p/2$, $J_1^* > p/2$ образуются нырки неполного упругого состояния (сложной разгрузки). Наши опыты с различными материалами показали, что на диаграмме деформирования на всем протяжении нырка процесс нагружения является пассивным ($dB_\Phi < 0$). В то же самое время на ниспадающей ветви нырка при частичной упругой разгрузке материала $dA_\Phi < 0$, а на восходящей ветви – $dA_\Phi > 0$. Минимальное значение s на нырке практически соответствует «протыканию» предельной поверхности $F(\bar{\mathcal{E}}) = 0$. На восходящей ветви нырка имеет место состояние *неполной упругости* или пластичности, которое отличается от понятия неполной пластичности, данное Хааром и Карманом [2]. Поэтому мы даем здесь другое название указанному выше состоянию как состоянию *неполной упругости* при сложном нагружении по криволинейным траекториям. Заметим также, как

опытно подтвержденный факт, что всегда угол запаздывания J_1^* больше угла сближения J_1 . Если вектор \bar{S} стремится занять положение касательной к траектории деформирования ($J_1 \rightarrow 0$), т. е. создать *скользящий образ процесса*, то вектор $\bar{\mathcal{E}}$ стремится совпасть по направлению с вектором \bar{S} и создать *квазипростой образ процесса*.

2. Гипотеза ортогональности и определяющие соотношения теории пластичности.

В работах [2, 5] автором выдвинута гипотеза ортогональности вектора напряжений \bar{S} к предельным поверхностям

$$\bar{S} = D \text{grad } F(\bar{\mathcal{E}}) = L \text{grad } f(\bar{S}), \quad (2.1)$$

где D, L – функционалы процессов деформирования и нагружения.

Данная гипотеза позволила получить дифференциально-нелинейные определяющие соотношения теории процессов упругопластического деформирования

$$d\bar{\sigma} = M_1 d\bar{Y} + ds(M\hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3), \quad (2.2)$$

где

$$M = \frac{dS}{ds} - M_1 \cos J_1 - M_3 \sin J_1 \sin J_2, \quad P = \frac{dS}{ds} \frac{1}{\cos J_1}, \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta_1}{ds} + \alpha_1 \cos \vartheta_2 = \frac{1}{\sigma} (-M_1 \sin \vartheta_1 + M_3 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2), \\ \sin \vartheta_1 \left(\frac{d\vartheta_2}{ds} + \alpha_2 \right) = \alpha_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \frac{M_3}{\sigma} \cos \vartheta_2, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{ds} + \alpha_1 \cos \theta_2 = -\frac{1}{Y} \sin \theta_1, \\ \sin \theta_1 \left(\frac{d\theta_2}{ds} + \alpha_2 \right) = \alpha_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2, \end{cases} \quad (2.5)$$

где

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \cos \vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin \vartheta_1 (\cos \vartheta_2 \hat{p}_2 + \sin \vartheta_2 \hat{p}_3), \\ \hat{Y} = \cos \theta_1 \hat{p}_1 + \sin \theta_1 (\cos \theta_2 \hat{p}_2 + \sin \theta_2 \hat{p}_3) \end{cases} \quad (2.6)$$

– единичные векторы в репере Френе $\{\hat{p}_k\}$,

$$\hat{p}_1 = \frac{d\bar{Y}}{ds}, \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{\alpha_1} \frac{d^2 \bar{Y}}{ds^2}, \quad \alpha_2 \hat{p}_3 = \alpha_1 \frac{d\bar{Y}}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{d^2 \bar{Y}}{ds^2} \right) \quad (2.7)$$

Функционалы

$$\begin{cases} M_k = M_k \{ \dot{Y}, \varepsilon_0, \varphi, \alpha_1, \alpha_2, T, \chi \}_{s(t)}, \\ P = P \{ \dot{Y}, \varepsilon_0, \varphi, \alpha_1, \alpha_2, T, \chi \}_{s(t)} \end{cases} \quad (2.8)$$

зависят от параметров процесса $s(t)$ либо от $\mathcal{E}(s)$, $e_0(s)$, $j(s)$, $\alpha_1(s)$, $\alpha_2(s)$, $T(s)$, $c(s)$.

Мерой сложности процесса являются параметры кривизны и кручения α_1 , α_2 траектории деформирования, а также углы ее излома.

Вместо (2.2) в [2] была получена также вторая основная форма определяющего соотношения

$$d\bar{\sigma} = N_1 d\bar{Y} + ds(N_\sigma \hat{\sigma} + N_{\hat{Y}} \hat{Y}), \quad (2.9)$$

где

$$\begin{cases} N_\sigma = -M_3 A_0 / A_3, & N_1 = M_1 - M_3 A_1 / A_3, \\ N_s = M + M_3 / A_3 = \frac{dS}{ds} - N_1 \cos J_1 - N_\sigma \cos a, \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = A_0 \hat{Y} + A_m \hat{p}_m \quad (m=1,3), \\ A_0 = \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 / \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ A_3 = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 - A_0 \sin \theta_1 \sin \theta_2. \end{cases} \quad (2.11)$$

Из (2.9) следует определяющее соотношение вида

$$d\bar{S} = N_1 d\bar{\mathcal{E}} + (P - N_1) \frac{\bar{S} d\bar{\mathcal{E}}}{S^2} \bar{S} + ds N_3 \bar{n}, \quad (2.12)$$

где вектор

$$\bar{n} = \hat{n} \sin \alpha = \hat{Y} - \hat{\sigma} \cos \alpha$$

ортогонален вектору \bar{S} и лежит в плоскости векторов $\bar{\mathcal{E}}$ и \bar{S} .

При пассивном процессе деформирования имеет место частичная упругая разгрузка на ниспадающей ветви нырка. При этом реализуется квазипростой образ упругого процесса разгрузки, при котором $P = M_1 = 2G$, $M_3 = 0$. Из (2.2), (2.9), (2.12) следует закон частичной упругой разгрузки

$$d\bar{S} = 2G d\bar{\mathcal{E}}, \quad (2.13)$$

который по форме совпадает с законом полной упругой линейной разгрузки при простом разгрузении в теории процессов Ильюшина и теории течения. Если $M_3 = 0$, то из (2.2), (2.9), (2.12) следуют определяющие соотношения гипотезы компланарности [2, 4]

$$d\bar{S} = M_1 d\bar{\mathcal{E}} + (P - M_1) \frac{\bar{S} d\bar{\mathcal{E}}}{S^2} \bar{S}, \quad (2.14)$$

$$d\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{M_1} d\bar{S} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{M_1} \right) \frac{\bar{S} d\bar{S}}{S^2} \bar{S}, \quad (2.15)$$

где

$$P = \frac{\bar{\sigma} d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma} d\bar{Y}} = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1}, \quad M_1 = \frac{\hat{v} d\bar{\sigma}}{\hat{v} d\bar{Y}} \quad (\hat{v} \perp \hat{\sigma}).$$

В дальнейшем, без снижения общности, в целях большей геометрической наглядности и возможности сравнения с аналогичными соотношениями в теории течения будем использовать определяющие соотношения (2.14), (2.15).

Рассмотрим вектор

$$d\bar{\mathcal{E}}^* = d\bar{\mathcal{E}} - \frac{dS}{M_1}, \quad (2.16)$$

который в теории течения ($M_1 = 2G$) совпадает с $d\bar{\mathcal{E}}^P$. Из (2.14), (2.16) получаем

$$d\bar{\mathcal{E}}^* = \left(1 - \frac{P}{M_1} \right) \frac{\bar{S} d\bar{\mathcal{E}}}{S^2} \bar{S} = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{M_1} \right) \frac{\bar{S} d\bar{S}}{S^2} \bar{S}. \quad (2.17)$$

С учетом соотношений (2.1) гипотезы ортогональности, из (2.17) следует

$$d\bar{\mathcal{E}}^* = D_1 \text{grad } F(\bar{\mathcal{E}}) ds, \quad (2.18)$$

$$d\bar{\mathcal{E}}^* = D_2 \text{grad } f(\bar{\mathcal{S}})d\Sigma, \quad (2.19)$$

где функционалы процесса

$$D_1 = D \left(1 - \frac{P}{M_1} \right) \frac{\bar{s}d\bar{\mathcal{E}}}{\mathcal{S}^2 ds}, \quad D_2 = L \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{M_1} \right) \frac{\bar{s}d\bar{\mathcal{S}}}{\mathcal{S}^2 d\Sigma}.$$

Как видно из (2.17), (2.18), вектор $d\bar{\mathcal{E}}^*$ направлен по нормали к предельным поверхностям, как и вектор напряжений $\bar{\mathcal{S}}$. Соотношения (2.18), (2.19) представляют собой закон *градиентальности* в теории процессов упругопластического деформирования в E_5 и Σ_5 и обобщают этот закон теории течения. При сложной разгрузке $P = M_1 = 2G$, $M_3 = 0$ и из (2.16) следует $d\bar{\mathcal{E}}^* = 0$ и закон частичной и полной разгрузки $d\bar{\mathcal{S}} = 2Gd\bar{\mathcal{E}}$.

В теории течения $M_1 = 2G$, $d\bar{\mathcal{E}}^* = d\bar{\mathcal{E}}^p$ и из соотношений (2.18), (2.19) закона градиентальности в теории процессов следует закон градиентальности теории течения

$$\begin{cases} d\bar{\mathcal{E}}^p = D_1 \text{grad } F(\bar{\mathcal{E}})ds, & (2.20) \\ d\bar{\mathcal{E}}^p = D_2 \text{grad } f(\bar{\mathcal{S}})d\Sigma, & (2.21) \end{cases}$$

где

$$D_1 = \frac{D}{\mathcal{S}^2} \frac{\bar{s}d\bar{\mathcal{E}}^p}{ds}, \quad D_2 = \frac{L}{\mathcal{S}^2} \frac{\bar{s}d\bar{\mathcal{E}}^p}{d\Sigma}.$$

Элементарная работа пластического формоизменения

$$dA_\Phi^0 = \bar{s}d\bar{\mathcal{E}}^p = \mathcal{S}ds^p \cos J_1^p$$

положительна при активном процессе и равна нулю при пассивном (разгрузке).

Общие соотношения теории течения Мелана–Прагера, как известно [2], имеют вид

$$\begin{cases} d\bar{\mathcal{E}}^p = d\bar{\mathcal{E}} - \frac{d\bar{\mathcal{S}}}{2G} = \tilde{D}_2 \text{grad } f(\bar{\mathcal{S}})df, & (2.22) \\ df = \text{grad } f(\bar{\mathcal{S}}) \cdot d\bar{\mathcal{S}} > 0 \end{cases}$$

для активных процессов пластического течения и вид

$$d\bar{\mathcal{E}} = \frac{d\bar{\mathcal{S}}}{2G}, \quad d\bar{\mathcal{E}}^p = 0, \quad df = \text{grad } f(\bar{\mathcal{S}})d\bar{\mathcal{S}} = 0 \quad (2.23)$$

для пассивных процессов упругой разгрузки.

Законы Мелана–Прагера (2.22), (2.23) согласуются с (2.20), (2.21).

3. Постулат пластичности.

В соответствии с первым и вторым началом термодинамики необратимых процессов сплошных сред

$$\oint (dA - dQ) = 0, \quad s = \oint \frac{dQ}{T} \geq 0, \quad (3.1)$$

где dQ – приращение количества тепловой энергии, s – функция состояния среды, называемая ее *энтропией*, $dA = \mathcal{S}_{ij} de_{ij}$ – внутренняя энергия деформации.

Знак равенства в (3.1) имеет место для обратимых процессов. Для изотерических процессов ($T = \text{const}$) в необратимом процессе деформирования $dQ \geq 0$, $dA \geq 0$ и из (3.1) следует

$$A = \oint \mathcal{S}_{ij} de_{ij} = \oint \mathcal{S}_0 dq + \oint \bar{s}d\bar{\mathcal{E}} = \oint \bar{s}d\bar{\mathcal{E}} \geq 0, \quad (3.2)$$

так как

$$\oint S_0 dq = K \oint q dq \equiv 0.$$

Таким образом, работа вектора напряжений в E_5 на любой замкнутой траектории, начинающейся и заканчивающейся в текущей точке K , положительна и равна нулю, если деформация обратима [9].

Это положение известно в теории пластичности как постулат пластичности, который является следствием закона термодинамики необратимых процессов. Постулат пластичности впервые был выдвинут в теории течения сначала Драккером, а затем обобщен А.А. Ильюшиным [9]. Для случая простого нагружения–разгрузки он очевиден.

Покажем, что постулат пластичности выполняется и в общей теории процессов упругопластического деформирования упрочняющихся сред, когда имеет место не только простая, но и сложная разгрузка. В общей теории процессов при сложном (непропорциональном) нагружении и разгрузке не допускается разложение полной деформации на упругую и пластическую части, т. е. $\bar{\mathcal{E}} \neq \bar{\mathcal{E}}^e + \bar{\mathcal{E}}^p$. Однако при частичной сложной разгрузке по криволинейной траектории либо после ее излома имеет место квазипростой упругий процесс до момента «протыкания» предельной поверхности изнутри. В этом случае выполняется закон Гука для приращений напряжений и деформаций, т. е.

$$\Delta \bar{S} = 2G \Delta \bar{\mathcal{E}}, \quad d\bar{S} = 2G d\bar{\mathcal{E}}. \quad (3.3)$$

Общее определяющее соотношение для активных процессов имеет вид [2]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \hat{p}_1 + M \hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3, \quad (3.4)$$

где

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \cos \vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin \vartheta_1 (\cos \vartheta_2 \hat{p}_2 + \sin \vartheta_2 \hat{p}_3), \\ M = (P - M_1) \cos \vartheta_1 - M_3 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2, \quad P = \frac{\bar{\sigma} d\bar{\sigma}}{dA_\Phi}, \\ \cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1 = \frac{dA_\Phi}{\bar{\sigma} ds}, \quad dA_\Phi = \bar{\sigma} d\bar{Y}. \end{cases} \quad (3.5)$$

При $M_1 = P = 2G$, $M_3 = 0$ из (3.4) следует закон разгрузки (3.3). Умножая (3.4) на $\hat{\sigma} = \bar{\sigma}/\sigma$ и учитывая (3.5), находим

$$dA_\Phi = \bar{s} d\bar{\mathcal{E}} = \frac{s ds}{P}, \quad (3.6)$$

где функционал пластичности P удовлетворяет условию

$$0 \leq 2G_k \leq P \leq 2G, \quad (3.7)$$

а при частичной разгрузке $P = 2G$.

Из (3.6), в частности, следует, что для активных процессов нагружения ($ds > 0$) элементарная работа формоизменения $dA_\Phi > 0$, а для пассивных ($ds < 0$) процессов сложной частичной разгрузки – $dA_\Phi < 0$.

Рассмотрим теперь замкнутый по деформациям в E_5 процесс *МКРКМ* из некоторой точки M внутри предельной поверхности [6]. В точке K на пересечении траектории деформирования и предельной поверхности $F(\bar{\mathcal{E}}) = 0$ процесс выходит на бесконечно малую величину $d\bar{\mathcal{E}}_k$ за пределы поверхности в точку P . Для прямого *МКР* и обратного

РКМ путей вектор $\bar{\mathcal{E}}(s)$ одинаков в каждой точке, но приращение вектора $d\bar{\mathcal{E}}$ меняет знак на обратный. Поэтому работа A на замкнутом по деформациям пути

$$A_{\Phi} = \oint \bar{\mathcal{S}} d\bar{\mathcal{E}} = \int_{MK} (\bar{\mathcal{S}}_{MK} - \bar{\mathcal{S}}_{KM}) d\bar{\mathcal{E}} + \int_{KP} (\bar{\mathcal{S}}_{KP} - \bar{\mathcal{S}}_{PK}) d\bar{\mathcal{E}}. \quad (3.8)$$

На основании (3.6), (3.7) из (3.8) следует

$$A_{\Phi} = \oint \bar{\mathcal{S}} d\bar{\mathcal{E}} = \oint \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2G} \right) d\mathcal{S} > 0 \quad (3.9)$$

для необратимых процессов ($P < 2G$). При упругой нагрузке $P = 2G$, $A_{\Phi} = 0$.

Таким образом, для любой замкнутой по деформациям траектории в E_5 работа вектора напряжений неотрицательна. Следовательно, гипотеза ортогональности и вытекающий на ее основании обобщенный принцип градиентальности (2.18) приводят к выполнению постулата пластичности в E_5 . Поскольку $\bar{\mathcal{E}}$ связано с $\bar{\mathcal{S}}$ законом $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}(\bar{\mathcal{S}})$, то поверхность $F(\bar{\mathcal{E}}) = 0$ преобразуется в Σ_5 в предельную поверхность $f(\bar{\mathcal{S}}) = 0$, так как $F(\bar{\mathcal{E}}) = F[\bar{\mathcal{E}}(\bar{\mathcal{S}})] = f(\bar{\mathcal{S}}) = 0$.

В силу изоморфизма образа процесса постулат пластичности можно применять и в пространстве напряжений Σ_5 . Соответствующий закон градиентальности в Σ_5 имеет вид (2.19). Законы градиентальности (2.18), (2.19) утверждают, что вектор

$$d\bar{\mathcal{E}}^* = d\bar{\mathcal{E}} - \frac{d\bar{\mathcal{S}}}{M_1}$$

ортогонален предельным поверхностям $F(\bar{\mathcal{E}}) = 0$, $f(\bar{\mathcal{S}}) = 0$ и коллинеарен вектору напряжений $\bar{\mathcal{S}}$. В теории течения $M_1 = 2G$ и $d\bar{\mathcal{E}}^* = d\bar{\mathcal{E}}^P$, т. е. вектор приращения $d\bar{\mathcal{E}}^P$ пластических деформаций ортогонален предельным поверхностям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубчанинов, В. Г. Гипотеза ортогональности в теории пластичности / В. Г. Зубчанинов // Проблемы механики деформируемого твердого тела. – СПб. : СПбГУ, 2002. – С. 137–140.
2. Зубчанинов, В. Г. Математическая теория пластичности / В. Г. Зубчанинов. – Тверь : ТГТУ, 2003. – 300 с.
3. Зубчанинов, В. Г. Основы теории упругости и пластичности / В. Г. Зубчанинов. – М. : Высшая школа, 1990. – 368 с.
4. Зубчанинов, В. Г. Устойчивость и пластичность : в 3 т. Т. 3 : Доклады / В. Г. Зубчанинов. – Тверь : ТГТУ, 2006. – 399 с.
5. Зубчанинов, В. Г. Устойчивость и пластичность : в 3 т. Т. 1 : Устойчивость / В. Г. Зубчанинов. – М. : Физматлит, 2006. – 400 с.
6. Ильюшин, А. А. Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М. : МГУ, 1990. – 310 с.
7. Ильюшин, А. А. Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : АН СССР, 1963. – 271 с.
8. Ильюшин, А. А. Труды. Т. 1 (1935–1945) / А. А. Ильюшин. – М. : Физматлит, 2003. – 350 с.
9. Ильюшин, А. А. Труды. Т. 2 (1946–1966) / А. А. Ильюшин. – М. : Физматлит, 2004. – 479 с.

**О СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СООТНОШЕНИЯХ
ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА**

(Московский государственный горный университет)

В работе рассматриваются статически определяемые соотношения в рамках условия пластичности Мизеса.

Уравнения теории пластичности при условии пластичности Мизеса являются статически неопределимыми.

В самом деле, имеют место три уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

и условие пластичности Мизеса

$$(s_x - s_y)^2 + (s_y - s_z)^2 + (s_z - s_x)^2 + 6(t_{xy}^2 + t_{yz}^2 + t_{xz}^2) = 6k^2, \quad k - const, \quad (2)$$

где $s_x, t_{xy} \dots$ – компоненты напряжений.

Система четырех уравнений (1), (2) относительно шести компонент напряжений s_{ij} является незамкнутой. Для определения замкнутой системы уравнений, вообще говоря, следует привлечь соотношения ассоциированного закона пластического течения.

Для определения статически определяемых соотношений в рамках условия пластичности Мизеса (2) примем предположения.

Предположим, что

$$T = \sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2} = T_0, \quad T_0 - const, \quad T_0 < k. \quad (3)$$

Согласно (3), условие пластичности (2) примет вид

$$(s_x - s_y)^2 + (s_y - s_z)^2 + (s_z - s_x)^2 + 6t_{xy}^2 = 6(k^2 - T_0^2). \quad (4)$$

Система пяти уравнений (1), (3), (4) относительно шести компонент напряжений s_{ij} остается незамкнутой.

Предположим далее, что

$$s_z = \frac{1}{2}(s_x + s_y). \quad (5)$$

Согласно (5), условие (4) примет вид

$$(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2 = 4(k^2 - T_0^2). \quad (6)$$

Система шести уравнений (1), (3), (5), (6) является замкнутой, статически определенной системой уравнений.

Рассмотрим некоторые примеры.

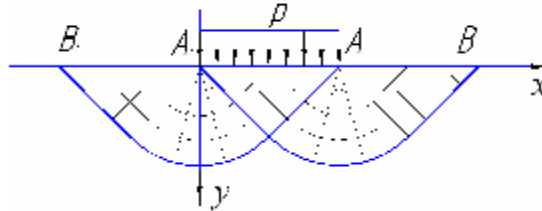


Рис. 1

Предположим, что компоненты напряжения не зависят от координаты z :

$$s_{ij} = s_{ij}(x, y), \quad t_{xz} = t_{yz} = const. \quad (7)$$

Согласно (1), (3), (6), (7) имеет место замкнутая система уравнений

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} = 0,$$

$$(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2 = 4K^2, \quad K^2 = k^2 - T_0^2. \quad (9)$$

Система уравнений (8) являются уравнениями плоской задачи теории идеальной пластичности с измененным пределом текучести, вызванном действием сдвигающих усилий T .

В качестве примера рассмотрим действие прандтлевского штампа (рис. 1) на идеальнопластическое полупространство при действии сдвигающих усилий (3).

Согласно (8), (9) предельное нормальное давление p определяется по формуле [1].

$$p = K(2 + p) = \sqrt{k^2 - T_0^2}(2 + p). \quad (10)$$

Согласно (10) величина нормального давления зависит от величины сдвигающих усилий $T = T_0$ и не зависит от направления сдвигающих усилий T .

Соотношения (10) перепишем в виде

$$\frac{1}{(2 + p)^2} \cdot \left(\frac{p}{k}\right)^2 + \left(\frac{T_0}{k}\right)^2 = 1. \quad (11)$$

Выражение (11) представляет собой уравнение эллипса (рис. 2) и определяет зависимость предельного усилия p от величины сдвига T_0 при фиксированном пределе текучести k .

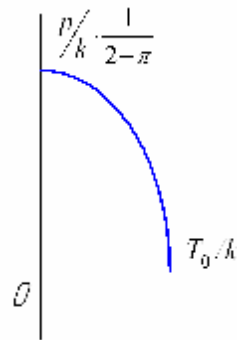


Рис. 2

Выражения (8), (9) являются соотношениями плоской задачи при измененном пределе текучести $K = \sqrt{k^2 - T_0^2}$, вызванном действием сдвигающих усилий, поэтому выводы о независимости действия на напряженное состояние от направления сдвигающих усилий сохраняются в общем случае.

Приведем примеры статически допустимых распределений касательных сдвигающих усилий $T_0 = \sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2}$ для прандтлевского штампа (рис. 1). На рис. 3 показаны возможные статически допустимые распределения сдвигающих напряжений

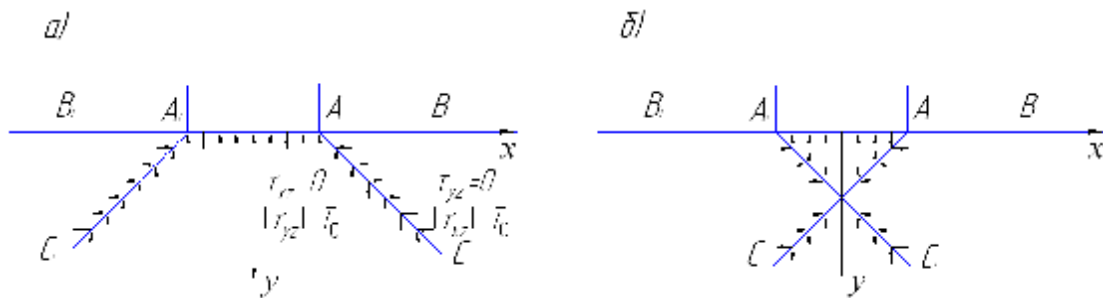


Рис. 3

На рис. 3 касательные сдвигающие усилия действуют вдоль штампа AA_1 , поверхность $AB_1A_1B_1$ свободная от напряжений: линии $AC_1A_1C_1$ являются линиями разрыва напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Гостехтеоретиздат, 1957.

ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В ПОЛОСЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

(Тульский государственный университет)

Рассматривается задача механики разрушения для полос (балок), когда полоса изгибается в ее плоскости, заданной системой внешних нагрузок (постоянными изгибающими моментами, равномерно распределенным давлением и т. п.). Толщина полосы считается переменной.

Процессы разрушения реальных материалов имеют сложный характер и протекают для различных материалов по-разному. Это зависит от особенностей структуры материала, его химического состава, вида напряжения и других факторов. В настоящее время известны различные механизмы зарождения трещин [8]. Балки переменной толщины широко используются в технике и строительстве. Для практики исследование вопросов разрушение полос (балок) переменной толщины имеет важное значение.

Рассмотрим однородную изотропную полосу (балку) переменной толщины. Обозначим через $2c$ и $2h$ соответственно ширину и толщину полосы. Выбор системы декартовых координат и обозначения поясняются на рис. 1. Декартовы координаты xu в срединной плоскости полосы являются плоскостью симметрии. Полоса переменной толщины находится в обобщенном плоском напряженном состоянии.

По мере нагружения полосы силовой нагрузкой будут возникать зоны предразрушения, которые моделируем как области ослабленных межчастичных связей материала. Будем полосу (балку) переменной толщины моделировать реальным хрупким телом. В процессе деформации в некоторых точках балки могут появляться зоны, в которых закон Гука не выполняется, т. е. в этих зонах напряжения превосходят предел упругости. Так как указанные зоны (прослойки перенапряженного материала) малы по сравнению с остальной упругой частью полосы, их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала, где материал балки деформируется за пределом упругости. Учет этих эффектов в задачах механики разрушения машин и конструкций представляет важную, но весьма трудную задачу.

Из опыта хорошо известна общая тенденция к формированию пластических областей на ранних стадиях развития в виде узких слоев скольжения, занимающих незначительный объем тела по сравнению с его упругой зоной [1–4, 7, 8].

Считается, что толщина полосы (балки) $2h(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$0 < h_1 \leq h(x, y) \leq h_2,$$

где h_1 и h_2 – соответственно, наименьшее и наибольшее значения толщины полосы.

Функция толщины может быть представлена в виде

$$h(x, y) = h_0 [1 + e\bar{h}(x, y)]. \quad (1)$$

Здесь принято, что $h_0 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$; $e = \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1}$; $\bar{h}(x, y)$ – некоторая известная безразмерная непрерывная функция ($-1 \leq \bar{h}(x, y) \leq 1$).

Пусть на рассматриваемую полосу действуют внешние нагрузки (изгибающие моменты, равномерно распределенное по длине полосы давление или сосредоточенные силы), расположенные в срединной плоскости полосы. Грани полосы, параллельные плоскости xOy , приняты свободными от внешних напряжений.

В изучаемом случае возникновение трещины представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. При этом размер зоны предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения задачи.

Зона предразрушения ориентирована в направлении максимальных растягивающих напряжений. Ось x системы координат Oxy совмещаем с линией зоны предразрушения ($a \leq x \leq b$). Считается, что в зоне предразрушения имеет место пластическое течение при постоянном напряжении.

Задача заключается в определении напряженно-деформированного состояния полосы (балки), а также в определении предельной нагрузки, по достижении которой произойдет появление трещины.

Запишем общие уравнения статического деформирования полосы: уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

закон Гука

$$N_x = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad N_y = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right); \quad N_{xy} = \frac{Eh}{1+\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (3)$$

Здесь N_x , N_y , N_{xy} – соответственно, нормальные и сдвигающие усилия, приходящиеся на единицу длины; u , u – смещения; E – модуль упругости Юнга, ν – коэффициент Пуассона материала пластины.

Граничное условие в зоне предразрушения будет

$$s_y = s_s; \quad t_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (4)$$

где s_s – предел текучести материала полосы на растяжение.

Решение системы уравнений статического деформирования пластины (2)–(3) ищем в виде разложений по малому параметру

$$N_x = N_x^{(0)} + eN_x^{(1)} + \mathbf{K}; \quad N_y = N_y^{(0)} + eN_y^{(1)} + \mathbf{K}; \quad N_{xy} = N_{xy}^{(0)} + eN_{xy}^{(1)} + \mathbf{K}; \quad (5)$$

$$u = u_0 + eu_1 + \mathbf{K}; \quad u = u_0 + eu_1 + \mathbf{K}; \quad a = a_0 + ea_1 + \mathbf{K}; \quad b = b_0 + eb_1 + \mathbf{K}$$

Формулы (1)–(5) подставляем в уравнения (2) и (3) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра e . В полученных уравнениях уравнения нулевого приближения совпадают с уравнениями классической плоской задачи теории упругости, а уравнения первого приближения представляют собой уравнения классической плоской задачи теории упругости с объемной силой, определяемой, согласно [5]:

$$X_1 = N_x^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}; \quad Y_1 = N_y^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}. \quad (6)$$

Аналогично определяются составляющие X_2 , Y_2 объемной силы для второго и последующих приближений.

Граничные условия задачи принимают соответственно вид:
для нулевого приближения

$$N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)} = N_s ; \quad \text{при } y = 0, \quad a_0 \leq x \leq b_0 ; \quad (7)$$

для первого приближения

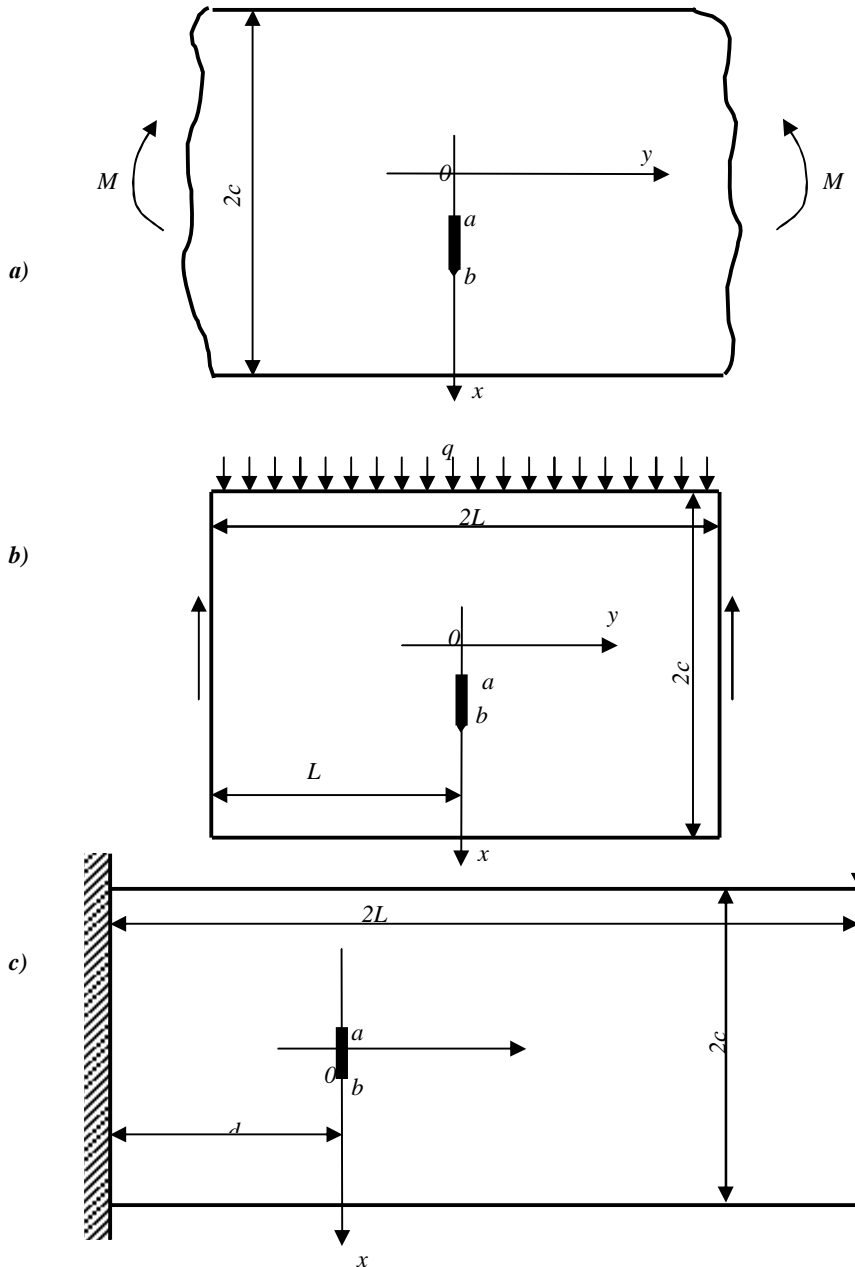


Рис. 1. Расчетная схема задачи

$$N_y^* - iN_{xy}^* = -\bar{h}(x,0)N_s; \quad \text{при } y = 0, \quad a_1 \leq x \leq b_1, \quad (8)$$

где $N_s = 2h_0 S_s$.

Здесь при выводе уравнений первого приближения были приняты следующие обозначения

$$\begin{aligned} N_x^* &= N_x^{(1)} - N_{x_0}^{(1)}; & N_{x_0}^{(1)} &= \bar{h}(x, y)N_x^{(0)}; \\ N_y^* &= N_y^{(1)} - N_{y_0}^{(1)}; & N_{y_0}^{(1)} &= \bar{h}(x, y)N_y^{(0)}; \\ N_{xy}^* &= N_{xy}^{(1)} - N_{xy_0}^{(1)}; & N_{xy_0}^{(1)} &= \bar{h}(x, y)N_{xy}^{(0)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Вначале рассмотрим решение для нулевого приближения. Как известно [6], компоненты N_x , N_y , N_{xy} тензора напряжений и компоненты u , v вектора смещений в условиях плоской задачи теории упругости выражаются через две аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$. Напряженно-деформированное состояние в окрестности зоны предразрушения определяем приближенно в том смысле [6], что будем удовлетворять граничным условиям задачи на контуре зоны предразрушения (условиям (7)–(8)), и требовать, чтобы на значительном расстоянии от полосы предразрушения напряженное состояние в полосе совпадало с напряженным состоянием, определяемым функциями

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow \infty} \Phi(z) &= \Phi_0(z) = A_0 z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3; \\ \lim_{|z| \rightarrow \infty} \Omega(z) &= \Omega_0(z) = B_0 z^3 + B_1 z^2 + B_2 z + B_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Эти функции в зависимости от значений коэффициентов A_j и B_j ($j = 0, 1, 3$) определяют напряженное состояние в полосе (балке) без зоны предразрушения.

Например, полагая в формулах (10)

$$\begin{aligned} A_0 = 0; A_1 = 0; A_2 = \frac{M}{4I}; A_3 = 0; \\ B_0 = 0; B_1 = 0; B_2 = \frac{3M}{4I}; B_3 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где I – момент инерции площади сечения полосы, можно убедиться, что в этом случае функции $\Phi_0(z)$ и $\Omega_0(z)$ дают решение задачи о чистом изгибе моментами M бесконечной полосы (балки) без полосы предразрушения (см. рис. 1, случай а)).

Аналогично, на основании формул

$$\begin{aligned} \frac{N_x^{(0)} + N_y^{(0)}}{2h_0} &= 2[\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)}]; \\ \frac{N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}}{2h_0} &= \Phi_0(z) + \Omega_0(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_0'(z)} \end{aligned} \quad (z = x + iy) \quad (12)$$

найдем, что при

$$\begin{aligned} A_0 = \frac{q}{24I}; A_1 = 0; A_2 = \frac{q}{8I} \left(L^2 + \frac{3c^2}{5} \right); A_3 = -\frac{qc^3}{12I}; \\ B_0 = \frac{7q}{24I}; B_1 = 0; B_2 = \frac{q}{8I} \left(3L^2 - \frac{11c^2}{5} \right); B_3 = \frac{qc^3}{12I}, \end{aligned} \quad (13)$$

(см. рис. 1, случай б)).

Функции $\Phi_0(z)$ и $\Omega_0(z)$ дают решение задачи об изгибе балки длиной $2L$ без полосы предразрушения, когда балка нагружена равномерным давлением интенсивности q . При этом принято, что балка свободно расположена на двух опорах, а опорные реакции определяются как касательные усилия, приложенные к торцам балки.

Можно показать также на основании формул (12), (13) и (10), что если

$$\begin{aligned} A_0 = 0; \quad A_1 = -\frac{iQ}{8I}; \quad A_2 = -\frac{Q(2L-d)}{4I}; \quad A_3 = 0; \\ B_0 = 0; \quad B_1 = \frac{5iQ}{8I}; \quad B_2 = -\frac{3Q(2L-d)}{4I}; \quad B_3 = -\frac{iQc^2}{2I} \end{aligned} \quad (14)$$

(обозначения указаны на рис. 1), то функции $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ дают решение задачи об изгибе жестко заземленной консольной балки без полосы предразрушения под действием постоянной поперечной силы Q , приложенной на ее свободном конце.

Наличие в балке полосы предразрушения приведет к возмущению поля упругих напряжений в окрестности зоны предразрушения. Вдали от зоны предразрушения напряженно-деформированное состояние в балке для указанных нагрузок определяется формулами (10), (12), если значения коэффициентов A_j и B_j ($j = 0, 1, 3$) определены равенствами (11), (13), (14).

Следуя Н.И. Мусхелишвили [6], краевую задачу (7) сведем к задаче линейного сопряжения граничных условий функций $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Omega^{(0)}(z)$

$$\begin{aligned} [\Phi^{(0)}(t) + \Omega^{(0)}(t)]^+ + [\Phi^{(0)}(t) + \Omega^{(0)}(t)]^- = 2f(t) \\ [\Phi^{(0)}(t) - \Omega^{(0)}(t)]^+ - [\Phi^{(0)}(t) - \Omega^{(0)}(t)]^- = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где $a_0 \leq t \leq b_0$; t – аффикс точек контура зоны предразрушения ($t = x$); $f(t) = S_S$.

Решив эту задачу (15), находим

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(z) = \frac{\sqrt{(z-a_0)(z-b_0)}}{2\pi i} \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t)dt}{\sqrt{(t-a_0)(t-b_0)(t-z)}} + \sqrt{(z-a_0)(z-b_0)} P_n(z) + \\ + \frac{1}{2} [\Phi_0(z) - \Omega_0(z)]; \\ \Omega^{(0)}(z) = \frac{\sqrt{(z-a_0)(z-b_0)}}{2\pi i} \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t)dt}{\sqrt{(t-a_0)(t-b_0)(t-z)}} + \sqrt{(z-a_0)(z-b_0)} P_n(z) - \\ - \frac{1}{2} [\Phi_0(z) - \Omega_0(z)], \end{aligned} \quad (16)$$

где функции $\Phi_0(z)$ и $\Omega_0(z)$ определяются равенствами (10), а полином $P_n(z)$ имеет вид

$$P_n(z) = D_n z^n + D_{n-1} z^{n-1} + \dots + D_0; \quad (17)$$

интегралы в (16) элементарно находятся.

Степень полинома (17) и его коэффициенты D_0, D_1, \dots, D_n определяются из условия поведения функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ окрестности точки $|z| = \infty$. Функции $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Omega^{(0)}(z)$ аналитичны в области вне зоны предразрушения и при больших значениях $|z|$ имеют вид

$$\Phi^{(0)}(z) = \Phi_0(z) + O\left(\frac{1}{z^2}\right); \quad \Omega^{(0)}(z) = \Omega_0(z) + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (18)$$

Следовательно, для определения коэффициентов D_0, D_1, \dots, D_n и величин a_0, b_0 необходимо функцию $\Phi^{(0)}(z)$, представленную в (16), разложить в ряд по степеням z в окрестности точки $|z| = \infty$ и сопоставить это разложение с выражением (18). Учитывая предыдущие соотношения и осуществляя необходимые вычисления, для определения искомым коэффициентов D_0, D_1, \dots, D_n и величин a_0, b_0 , находим следующую систему уравнений

$$D_2 + \frac{1}{2}(A_0 - B_0) = A_0, \quad (19)$$

$$D_1 - \frac{1}{2}(a_0 + b_0)D_2 + \frac{1}{2}(A_1 - B_1) = A_1,$$

$$D_0 - \frac{1}{2}(a_0 + b_0)D_1 - \frac{1}{8}(a_0 - b_0)^2 D_2 + \frac{1}{2}(A_2 - B_2) = A_2,$$

$$-C_1 - \frac{1}{2}(a_0 + b_0)D_0 - \frac{1}{2}(a_0 - b_0)^2 D_1 + \frac{1}{2}(A_3 - B_3) = A_3,$$

$$\frac{1}{2}(a_0 + b_0)C_1 - C_2 - \frac{1}{8}(a_0 - b_0)^2 D_0 = 0,$$

$$D_n = 0, \quad n \geq 3.$$

$$\text{Здесь } C_1 = -\frac{\mathbf{S}_S}{2}; \quad C_2 = \frac{1}{4}(a_0 + b_0)\mathbf{S}_S.$$

При чистом изгибе моментами M полосы с зоной предразрушения в нулевом приближении имеем

$$A_0 = 0; \quad A_1 = 0; \quad A_2 = \frac{M}{4I}; \quad A_3 = 0; \quad B_0 = 0; \quad B_1 = 0; \quad B_2 = \frac{3M}{4I}; \quad B_3 = 0.$$

Из системы (19) находим

$$D_2 = 0; \quad D_1 = 0; \quad D_0 = \frac{M}{2I} \quad (20)$$

$$-\frac{1}{2}(a_0 + b_0)D_0 = -\frac{\mathbf{S}_S}{2}; \quad -\frac{1}{2}(a_0 + b_0)\mathbf{S}_S = \frac{1}{8}(a_0 - b_0)^2 D_0.$$

Последние два уравнения служат для определения размера зоны предразрушения.

Аналогично рассматриваются и другие случаи изгиба полосы (балки) с зоной предразрушения.

При изгибе равномерным давлением интенсивности q в нулевом приближении имеем (13).

Из системы (19) получаем

$$D_2 - \frac{3q}{24I} = \frac{q}{24I},$$

$$D_1 - \frac{1}{2}(a_0 + b_0)D_2 = 0,$$

$$D_0 - \frac{1}{2}(a_0 + b_0)D_1 - \frac{1}{8}(a_0 - b_0)^2 D_2 - \frac{q}{8I} \left(L^2 - \frac{7c^2}{5} \right) = \frac{q}{8I} \left(L^2 + \frac{3c^2}{5} \right),$$

$$\frac{\mathbf{S}_S}{2} - \frac{1}{2}(a_0 + b_0)D_0 - \frac{1}{2}(a_0 - b_0)^2 D_1 - \frac{qc^3}{12I} = -\frac{qc^3}{12I},$$

$$-\frac{S_s}{2}(a_0+b_0)-\frac{1}{8}(a_0-b_0)^2 D_0=0.$$

Решая ее, находим

$$D_2 = \frac{q}{6I}; \quad D_1 = \frac{1}{2}(a_0+b_0)\frac{q}{6I}, \quad (21)$$

$$D_0 = \frac{1}{4}(a_0+b_0)^2 \frac{q}{6I} + \frac{1}{8}(a_0-b_0)^2 \frac{q}{6I} + \frac{q}{4I} \left(L^2 - \frac{2c^2}{5} \right),$$

$$-\frac{1}{2}(a_0+b_0)D_0 - \frac{1}{2}(a_0-b_0)^2 D_1 = -\frac{S_s}{2},$$

$$-\frac{S_s}{2}(a_0+b_0) = \frac{1}{8}(a_0-b_0)^2 D_0.$$

Последние два уравнения, как и в предыдущем случае, служат для определения размеров зоны предразрушения.

При изгибе консольной балки в нулевом приближении имеем (14).

Из системы с учетом (19) получаем

$$D_2 = 0; \quad D_1 = \frac{iQ}{4I}; \quad D_0 = \frac{1}{2}(a_0+b_0)\frac{iQ}{4I} - \frac{Q}{2I}(2L-d), \quad (22)$$

$$\frac{S_s}{2} - \frac{1}{2}(a_0+b_0)D_0 - \frac{1}{2}(a_0-b_0)^2 D_1 + \frac{iQc^3}{4I} = 0,$$

$$-\frac{S_s}{2}(a_0+b_0) = \frac{1}{8}(a_0-b_0)^2 D_0.$$

И в этом случае последние два уравнения служат для определения размеров зоны предразрушения.

Перейдем к решению задачи в первом приближении. При наличии объемных сил решение представляется в виде суммы:

$$N_x^* = N_{x_0}^{(1)} + N_{x_1}^{(1)}; \quad N_y^* = N_{y_0}^{(1)} + N_{y_1}^{(1)}; \quad N_{xy}^* = N_{xy_0}^{(1)} + N_{xy_1}^{(1)}, \quad (23)$$

где $N_{x_0}^{(1)}$, $N_{y_0}^{(1)}$, $N_{xy_0}^{(1)}$ – частное решение уравнения плоской теории упругости при наличии объемной силы (6); $N_{x_1}^{(1)}$, $N_{y_1}^{(1)}$, $N_{xy_1}^{(1)}$ – общее решение уравнений плоской теории упругости при отсутствии объемных сил.

Согласно методу А.Г. Угодчикова [9], в первом приближении для усилий имеем следующие общие представления

$$\frac{N_x^* + N_y^*}{2h_0} = 4 \operatorname{Re} \left[\Phi^{(1)}(z) - \frac{1}{2(1+\kappa_0)} \frac{\partial F_1}{\partial z} \right]; \quad (24)$$

$$\frac{N_y^* - N_x^* + 2iN_{xy}^*}{2h_0} = 2 \left[\bar{z} \Phi^{(1)'}(z) + \Psi^{(1)}(z) + \frac{1}{2(1+\kappa_0)} \frac{\partial}{\partial z} (\kappa_0 \bar{F}_1 - \bar{Q}_1) \right],$$

где $\kappa_0 = (3-\nu)/(1+\nu)$; ν – коэффициент Пуассона материала полосы.

В эти соотношения входят две аналитические функции $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Psi^{(1)}(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$ и две функции $F_1(z, \bar{z})$ и $Q_1(z, \bar{z})$, представляющие собой любые частные решения уравнений

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial \bar{z}} = F; \quad \frac{\partial^2 Q_1}{\partial z^2} = \bar{F} \quad (25)$$

$$F = X_1 + iY_1 = \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} (N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}) + i \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} (N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}).$$

Для определения комплексных потенциалов $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Omega^{(1)}(z)$ получаем задачу линейного сопряжения

$$\left[\Phi^{(1)}(x) + \Omega^{(1)}(x) \right]^+ + \left[\Phi^{(1)}(x) + \Omega^{(1)}(x) \right]^- = 2f_1(t); \quad (26)$$

$$\left[\Phi^{(1)}(x) - \Omega^{(1)}(x) \right]^+ - \left[\Phi^{(1)}(x) - \Omega^{(1)}(x) \right]^- = 0, \quad (27)$$

где $a_1 \leq x \leq b_1$ – аффикс точек контура зоны предразрушения в первом приближении

$$f_1(t) = -\bar{h} s_s + f_0(x) \quad \text{при } a_1 \leq x \leq b_1 \quad (28)$$

$$f_0(x) = \frac{1}{1+\kappa_0} \operatorname{Re} \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{1}{2(1+\kappa_0)} \left(\kappa_0 \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial z} \right) \quad \text{при } y = 0. \quad (29)$$

Так как при больших $|z|$ функция $\Phi^{(1)}(z) - \Omega^{(1)}(z) = 0$, то общее решение краевой задачи (27) будет

$$\Phi^{(1)}(z) - \Omega^{(1)}(z) = 0.$$

Общее решение краевой задачи (26), исчезающее на бесконечности и ограниченное на концах a_1 и b_1 , будет

$$\Phi^{(1)}(z) = \Omega^{(1)}(z) = \frac{\sqrt{(z-a_1)(z-b_1)}}{2\pi i} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-b_1)}(t-z)}. \quad (30)$$

Размеры зоны предразрушения в первом приближении определяются из условия разрешимости краевой задачи (26):

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-b_1)}} = 0; \quad \int_{a_1}^{b_1} \frac{t f_1(t) dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-b_1)}} = 0. \quad (31)$$

Как и в нулевом приближении, решение в первом приближении получено в замкнутом виде.

Для определения распределения напряжений и размеров зон предразрушения необходимо задать закон изменения толщины в полосе. Функцию $h(x, y)$ разложим в ряд Тейлора в начале координат и в этом разложении ограничимся двумя членами разложения, т. е.

$$h(x, y) = h_0 \left[1 + e(a_0^* x + b_0^* y) \right], \quad (32)$$

где $2h_0$ – толщина полосы в начале координат, a_0^* и b_0^* – некоторые коэффициенты.

Тогда выражения для составляющих объемной силы в первом приближении примут вид:

$$X_1 = a_0^* N_x^{(0)} + b_0^* N_{xy}^{(0)}; \quad Y_1 = a_0^* N_{xy}^{(0)} + b_0^* N_y^{(0)}. \quad (33)$$

С помощью формул

$$\frac{N_x^{(0)} + N_y^{(0)}}{2h_0} = 4 \operatorname{Re} \Phi^{(0)}(z); \quad \frac{N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}}{2h_0} = \Phi^{(0)}(z) + \Omega^{(0)}(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi^{(0)'(z)}}$$

находятся компоненты напряжений $N_x^{(0)}$, $N_y^{(0)}$, $N_{xy}^{(0)}$.

Затем по формулам (33) определяем функцию $F = X_1 + iY_1$.

С помощью интегрирования уравнений (25) имеем:

$$F_1(z, \bar{z}) = \int dz \int \bar{z} F(z, \bar{z}) d\bar{z}; \quad Q_1(z, \bar{z}) = \int dz \int \bar{z} \overline{F(z, \bar{z})} dz.$$

По найденным функциям $F_1(z, \bar{z})$ и $Q_1(z, \bar{z})$, согласно (29), находим функцию $f_0(x)$. Затем по полученным формулам (30), (31) находим решение в первом приближении.

Окончательно, получаем

$$N_y = N_y^{(0)} + eN_y^{(1)}; \quad N_x = N_x^{(0)} + eN_x^{(1)}; \quad N_{xy} = N_{xy}^{(0)} + eN_{xy}^{(1)}$$

$$u = u_0 + eu_1; \quad v = v_0 + ev_1; \quad a = a_0 + ea_1; \quad b = b_0 + eb_1.$$

Для определения предельного состояния полосы (балки), при котором происходит появление трещины, используем критерий критического раскрытия берегов полосы предразрушения. Согласно этому критерию, зарождение трещины произойдет как только ее раскрытие достигнет предельного (для данного материала при заданных условиях) значения d_c :

$$2u_* = d_c. \quad (34)$$

Здесь $2u_*$ – расстояние между противоположными берегами зоны предразрушения.

Используя решения упругопластической задачи, вычислим смещения u на пластической линии скольжения (при $y = 0$, $a \leq x \leq b$)

$$u_0 = \frac{1 + \kappa_0}{4\mu m} \int_{a_0}^{b_0} \frac{[s_s + f_*(t)] F_2^0(t, x) dt}{X_0(t)}; \quad (35)$$

$$u_1 = \frac{1 + \kappa_0}{4\mu m} \int_{a_1}^{b_1} \frac{[f_0(t) - \bar{h}(t, 0) s_s] F_2^1(t, x) dt}{X_1(t)} \quad (36)$$

Здесь $f_*(t) = \Phi_0(t) + \Omega_0(\bar{t}) + (t - \bar{t})\Phi_0'(t)$; $X_1(t) = \sqrt{(b_1 - t)(t - a_1)}$;

$$X_0(t) = \sqrt{(b_0 - t)(t - a_0)}; \quad F_2^0(t, x) = X_0(x) + \frac{1}{2} X_0(t) \ln \frac{X_0(t) - X_0(x)}{X_0(t) + X_0(x)};$$

$$F_2^1(t, x) = X_1(x) + \frac{1}{2} X_1(t) \ln \frac{X_1(t) - X_1(x)}{X_1(t) + X_1(x)}.$$

Для определения критических внешних нагрузок, вызывающих появление трещины в полосе (балке), получаем следующее уравнение:

$$\frac{4}{\rho E} \int_{a_0}^{b_0} \frac{[s_s + f_*(t)] F_2^0(t, x) dt}{X_0(t)} + \frac{4e}{\rho E} \int_{a_1}^{b_1} \frac{[f_0(t) - \bar{h}(t, 0) s_s] F_2^1(t, x) dt}{X_1(t)} = d_c. \quad (37)$$

Очевидно, что разрыв межчастичных связей материала будет происходить в средней части зоны предразрушения. Уравнение (37) дает возможность (при заданных характеристиках материала) найти критическую внешнюю нагрузку, при которой происходит зарождение трещины в полосе (балке) переменной толщины.

Преобразуем уравнение (37) к виду, удобному для численного решения. Переходя к безразмерным переменным в интегралах и заменяя интегралы квадратурными формулами типа Гаусса по чебышевским узлам, уравнение (37) приведем к следующему виду

$$\frac{4}{EM} \sum_{m=1}^M [s_s + f_*(t_m^0)] F_2^0(t_m^0, x) + \frac{4e}{EM} \sum_{m=1}^M [f_0(t_m) - \bar{h}(t_m, 0) s_s] F_2^1(t_m, x) = d_c \quad (38)$$

Здесь $a \leq x \leq b$; $t_m^0 = \frac{b_0 + a_0}{2} + \frac{b_0 - a_0}{2} t_m$; $t_m = \frac{b_1 + a_1}{2} + \frac{b_1 - a_1}{2} t_m$;

$$t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} p, \quad (m = 1, 2, \dots, M).$$

Преобразуем также систему уравнений (31), служащую для определения неизвестных параметров a_1 и b_1 :

$$\frac{p}{M} \sum_{m=1}^M f_1(t_m) = 0; \quad \frac{p}{M} \sum_{m=1}^M t_m f_1(t_m) = 0. \quad (39)$$

Система уравнений (19) (последние два уравнения, служащие для определения параметров a_0 и b_0), (39) и (38) при выбранном значении x ($x = 0$) и известном законе изменения толщины полосы (балки) решается численно методом итераций.

На рис. 2 представлен график зависимости длины полосы предразрушения от безразмерной нагрузки s_0/s_s для балки при чистом изгибе с толщиной, изменяющейся по закону (32). В расчетах было принято $\nu = 0,3$; $M = 30$. На рис. 3 приводится зависимость безразмерной предельной нагрузки $M_* = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{M}{h_0 c^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{E S_s d_c}}$ от относительной толщины полосы

h_1/h_0 , полученная в результате совместного решения уравнений (19), (39) и (38) при тех же значениях свободных параметров.

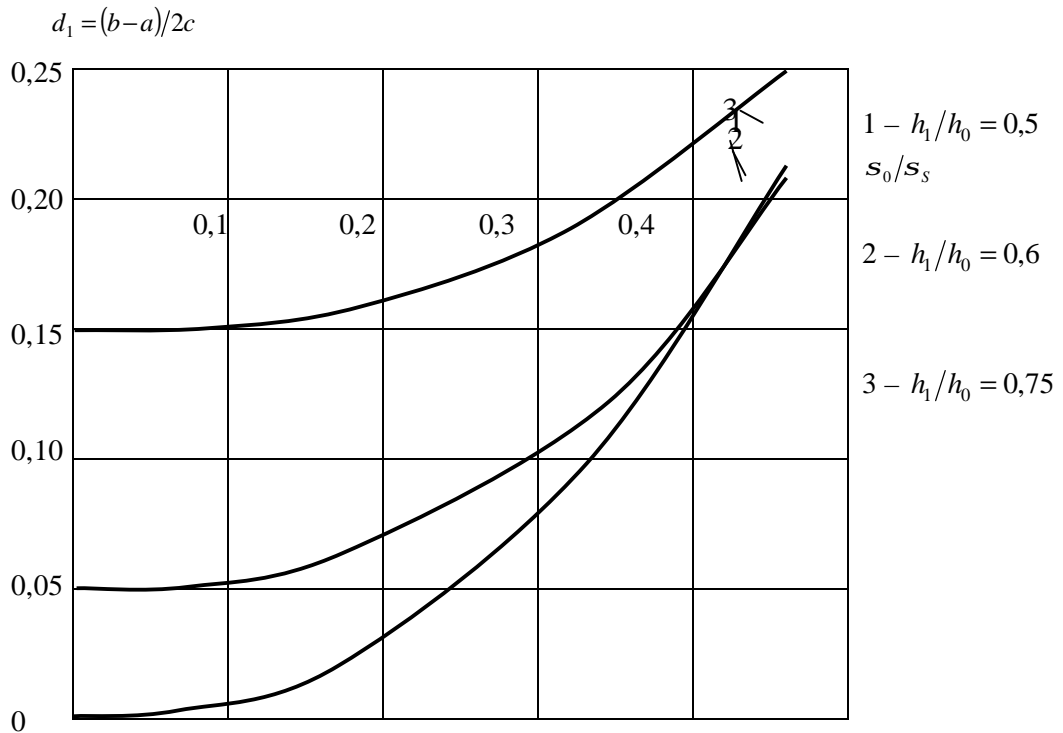


Рис. 2. Зависимости длины полосы предразрушения от безразмерной нагрузки S_0/S_s для балки при чистом изгибе

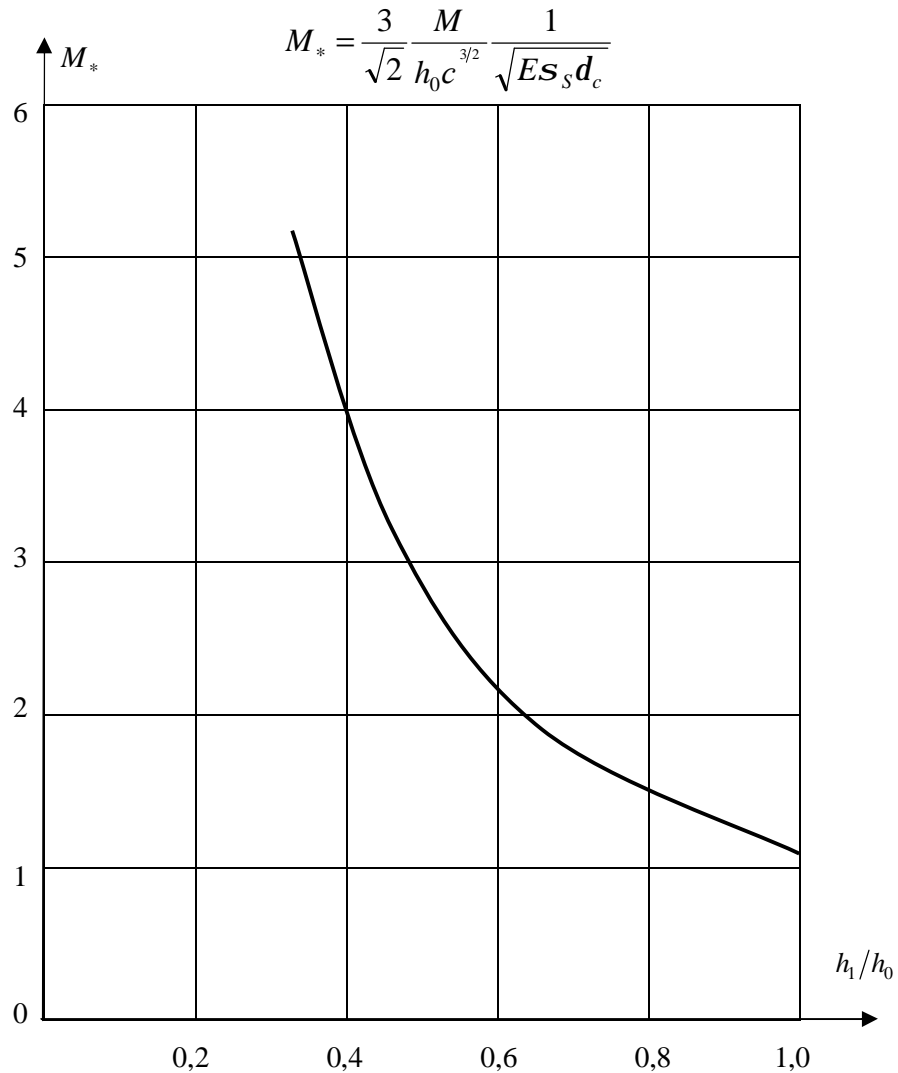


Рис. 3. Зависимость безразмерной предельной нагрузки M_* от относительной толщины полосы h_1/h_0

ЛИТЕРАТУРА

1. Витвицкий, П. М. Пластические деформации в окрестности трещины и критерии разрушения: Обзор / П. М. Витвицкий, В. В. Панасюк, С. Я. Ярема // Проблемы прочности. – 1973. – № 2. – С. 3–19.
2. Ивлев, Д. Д. Механика пластических сред / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2002. – Т. 2. – 448 с.
3. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
4. Мирсалимов, В. М. Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
5. Мирсалимов, В. М. Разрушение пластин переменной толщины / В. М. Мирсалимов // ФХММ. – 1996. – Т. 32. – № 3. – С. 46–54.
6. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
7. Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М. : Мир, 1969. – Т. 2 – 864 с.
8. Панасюк, В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев : Наукова думка, 1991. – 416 с.
9. Угодчиков, А. Г. К решению плоской задачи теории упругости при произвольных объемных силах / А. Г. Угодчиков // Прикладная механика. – 1967. – Т. 3. – № 7.

Налимов А. В., Немировский Ю. В.

ТЕОРЕМЫ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

*(Бийский технологический институт,
Институт теоретической и прикладной механики СО РАН)*

Задачи жесткопластического тела описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Решения таких задач удастся построить только в частных случаях [6, 24], поэтому обычно на основе теорем предельного равновесия строят приближенные решения. Эти теоремы впервые были доказаны А. А. Гвоздевым [2] и позднее в [4, 9].

Большая часть исследований предельного равновесия жесткопластических тел посвящена тонкостенным конструкциям [3, 22, 29]. С целью исключения малых параметров (отношений толщины к радиусам кривизны) обычно принимают справедливость гипотез Кирхгофа–Лява [26]. Это позволяет понизить размерность задачи, а разрешающие уравнения формулируются в обобщенных напряжениях и скоростях [20].

Для задач предельного равновесия оболочек, сформулированных в обобщенных напряжениях и скоростях, обычно распространяют общие теоремы предельного равновесия и принимают справедливость ассоциированного закона течения для приближенных поверхностей [3, 22, 29]. Здесь следует отметить, что, как правило [23, 25, 27], решение задач предельного равновесия оболочек удастся построить только при наличии ограничений. Такие ограниченные решения построены для точных [21] и приближенных [28] поверхностей текучести. Все эти решения были получены при наличии допустимых разрывов обобщенных скоростей [7, 17]. Для цилиндрических оболочек однородного строения только в работе [1] были построены решения без каких-либо ограничений. Более того, в работе [1] показано, что для одной и той же задачи при реализации пластического течения во всем пролете оболочки наряду с непрерывными решениями существуют решения с разрывными обобщенными скоростями. Для оболочек вращения также удастся построить решения, соответствующие реализации разных механизмов пластического течения [15]. Это возможно, поскольку полные системы уравнений для таких задач формулируются на одной из пластических областей [16], а в жестких областях всегда можно построить допустимые поля обобщенных величин [14]. Подобные ситуации при решении задач предельного равновесия, сформулированных в обобщенных величинах, возникали и раньше. Ю. Н. Работнов [20] истинное значение коэффициента запаса связывает с величиной, когда впервые конструкция приобретает дополнительные степени свободы.

Общие теоремы предельного равновесия оболочек не дают инструментов для выбора истинного из всех возможных решений. По всей видимости, в таких ситуациях эти теоремы имеют локальный характер, а именно они выполняются для каждого фиксиро-

ванного механизма течения. Поскольку для задач, сформулированных в напряжениях и скоростях, эти теоремы однозначно определяют отношения точного и приближенных решений, а для задач в пространстве обобщенных величин это не так, то необходимо пересмотреть доказательства теорем с учетом особенностей процесса преобразования уравнений из пространства напряжений и скоростей в пространство соответствующих обобщенных величин. Это тем более важно, что возможные недочеты при формальном переносе условий теорем на такие задачи и построение внешне непротиворечивых решений являются почвой для формирования мнения о некорректности модели жесткопластического тела [18].

В работе доказываются теоремы предельного равновесия для осесимметричных оболочек с учетом преобразований соотношений из пространства напряжений и скоростей в соответствующие соотношения в пространстве обобщенных величин. Доказано, что общие теоремы имеют локальный характер, а также справедливость предположения Ю. Н. Работнова и ассоциированного закона течения для приближенных поверхностей текучести. Показано, что путем выбора специального вида приближенных поверхностей текучести можно строить приближенные непрерывные решения задач предельного равновесия оболочек.

Пусть в теле, занимающем объем ω с границей $\partial\omega = \partial\omega_\sigma + \partial\omega_u + \partial\omega_{\sigma u}$ (на $\partial\omega_\sigma$ заданы напряжения; $\partial\omega_u$ – скорости перемещений и на $\partial\omega_{\sigma u}$ – напряжения и скорости перемещений), определено поле напряжений σ , удовлетворяющее уравнениям равновесия

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + f_\beta = 0 \quad (1)$$

и некоторое поле скоростей перемещений u , которому соответствуют скорости деформаций

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}). \quad (2)$$

Напряжения и скорости перемещений могут иметь разрывы, не противоречащие уравнениям равновесия (1) и условиям сплошности среды. Тогда уравнение скорости виртуальных работ записывается в виде [5]:

$$\int_{\omega} \sigma \varepsilon d\omega + \sum_{\mu} \int_{S_{\mu}} \sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} [u_{\alpha}] dS = \int_{\omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\omega + \int_{\partial\omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} dS, \quad (3)$$

где $S_{\mu} \subseteq \omega$ поверхности разрыва скоростей перемещений, \mathbf{n} – нормаль к поверхности S_{μ} , $[u_{\alpha}]$ – величина разрыва вектора скоростей перемещений, \mathbf{f} , \mathbf{p} – плотности массовых и поверхностных сил. Уравнение (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (1)–(2) [7].

Напряжения всюду в теле ограничены кусочно-гладким условием пластичности:

$$\mathbf{f}(\sigma) = \bigcup_k \mathbf{f}_k(\sigma) = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{f}_k(\sigma) = 0$ – гладкие функции, образующие условие пластичности.

В основе механики жесткопластического тела лежит принцип максимума Мизеса [7]: при любом данном значении скоростей деформаций ε имеет место неравенство

$$\sigma \varepsilon \geq \sigma^* \varepsilon \quad (5)$$

где σ – действительные напряжения, соответствующие данным скоростям ε , σ^* – любые возможные напряжения, не превышающие предела пластичности $\mathbf{f}(\sigma) \leq 0$.

В соответствии с принципом Мизеса в каждой точке тела скорость диссипации энергии $D = \sigma \mathfrak{E}$ достигает максимального значения. Учитывая связи, выраженные условиями пластичности, составляется выражение [7]:

$$D = \sigma \mathfrak{E} = \lambda_k \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\sigma}), \quad (6)$$

где $\lambda_k = \lambda_k(\mathfrak{E})$ – неопределенные множители, постоянные для данных значений компонент скорости деформаций.

При варьировании в выражении (6) компоненты напряженного состояния, экстремум скорости диссипации D будет иметь место, если [7]

$$\mathfrak{E}_{\alpha\beta} = \lambda_k \frac{\partial \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_{\alpha\beta}}. \quad (7)$$

Условие положительности скорости диссипации энергии записывается в виде неравенств, накладываемых на множители λ_k [7]:

$$\begin{aligned} \lambda_k &\geq 0 \text{ если } \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \text{ и } d\mathbf{f}_k(\boldsymbol{\sigma}) = 0; \\ \lambda_k &= 0 \text{ если } \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \text{ или } d\mathbf{f}_k(\boldsymbol{\sigma}) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Соотношения (7) связывают скорости деформаций с напряжениями и определяют ассоциированный закон течения.

В соответствии с (7)–(8) скорость диссипации D является однородной функцией первой степени скоростей деформаций $\mathfrak{E}_{\alpha\beta}$ и определяется с точностью до постоянного множителя [20]. Обычно поверхность постоянной мощности диссипации нормируют, например, полагают [20]: $D(\mathfrak{E}) = 1$. Если поверхность текучести всюду невогнутая, то и поверхность равного уровня скорости диссипации невогнутая. Из условия невогнутости поверхности постоянной диссипации следует неравенство [20]:

$$\boldsymbol{\sigma}^0 \mathfrak{E} \geq \sigma \mathfrak{E}, \quad (9)$$

где \mathfrak{E} – произвольное кинематически допустимое поле скоростей деформаций такое, что $D(\mathfrak{E}) = 1$, а $\boldsymbol{\sigma}^0$ – соответствующее поле напряжений; \mathbf{s} – заданное напряженное состояние.

Для тонкостенных оболочек вращения при гипотезах Кирхгофа–Лява скорости деформаций (2) в криволинейной системе координат (s, φ, γ) записываются в виде [26]:

$$\mathfrak{E}_{\alpha\alpha} = \mathfrak{E}_{0\alpha} + 2\zeta \mathfrak{K}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{01} &= \frac{d\mathfrak{E}}{ds} + \frac{v\mathfrak{E}}{R_1}; & \mathfrak{K}_1 &= -\frac{h}{2} \frac{d\vartheta}{ds}; & \mathfrak{E}_{02} &= \frac{(v\mathfrak{E} \cos \xi - \mathfrak{E} \sin \xi)}{R}; \\ \mathfrak{K}_2 &= \frac{h \sin \xi}{2R} \mathfrak{E}; & \vartheta &= \frac{dv\mathfrak{E}}{ds} - \frac{v\mathfrak{E}}{R_1}; \end{aligned} \quad (11)$$

$\mathfrak{E}_{0\alpha}, \mathfrak{K}_\alpha$ – скорости деформации и изменения кривизны срединной поверхности вдоль меридиана и в тангенциальном направлениях; $v\mathfrak{E}, \mathfrak{E}$ – скорости перемещения вдоль меридиана и нормали к срединной поверхности Σ ; $s \in [s_1, s_2]$ – координата, отсчитываемая вдоль меридиана; R_i ($i = 1, 2$) – главные радиусы кривизны; $R = R_2 \cos \xi$ – расстояние от оси Z до Σ ; $2h$ ($h/R_i = 1$) – толщина оболочки; $\gamma = \zeta \cdot h$ ($\gamma \in [-h, h]$) координата, направлен-

ная по внешней нормали к срединной поверхности; ξ – угол между касательной к образующей и осью вращения Z оболочки; $dR = -\sin \xi ds$; $R_1 d\xi = ds$; $dZ = \cos \xi ds$.

Уравнения равновесия (1) с учетом (10)–(11) преобразуются к виду [26]:

$$\frac{d\bar{\mathbf{Q}}}{ds} = \bar{\mathbf{\Omega}}(\mathbf{Q}, N, s) \quad s \in [s_0, s_1], \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{\Omega}} &= (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)'; \quad \bar{\mathbf{Q}} = (t_1, N, m_1)'; \quad \mathbf{Q} = (t_1, t_2, m_1, m_2)'; \\ \Omega_1 &= \frac{\sin \xi}{R} (t_1 - t_2) - \frac{N}{R_1} - E_1; \quad \Omega_2 = \frac{\sin \xi}{R} N + \left(\frac{t_1}{R_1} + \frac{t_2}{R_2} \right) - E_n; \\ \Omega_3 &= \frac{\sin \xi}{R} (m_1 - m_2) + \frac{2}{h} N; \\ \mathbf{E}^0 &= (E_1^0, E_n^0, 0)'; \quad E_\alpha = E_\alpha^0 / T_0 \quad (\alpha = 1, n); \quad E_\alpha^0 = p_\alpha^+ + p_\alpha^- + \int_{-h}^h f_\alpha d\gamma; \\ t_j &= \frac{1}{T_0} \int_{-h}^h \sigma_{jj} d\gamma; \quad N = \frac{1}{T_0} \int_{-h}^h \sigma_{13} d\gamma; \quad m_j = \frac{2}{T_0 h} \int_{-h}^h \sigma_{jj} \gamma d\gamma; \quad T_0 = 2\sigma_0 h; \end{aligned}$$

σ_0 – константа размерности напряжений; p_1^\pm, p_n^\pm – касательная и нормальная нагрузки на внешней и внутренней поверхностях оболочки; f_1, f_n – объемные силы, действующие в направлении меридиана и нормали соответственно.

Подставим (10) в (3) и после интегрирования по координате γ с учетом принятых обозначений получим [26]:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{Q} \mathbf{\Phi} R_1 R ds d\varphi + \int_{\Phi_\mu} \bar{\mathbf{Q}}[\mathbf{U}] R d\varphi = \int_{\Sigma} \mathbf{E}^0 \mathbf{U} R_1 R ds d\varphi + (-1)^i \int_{\Gamma_i} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{U} R d\varphi, \quad (13)$$

где $\mathbf{\Phi} = (\Phi_{01}, \Phi_{02}, \Phi_1, \Phi_2)'$; $\mathbf{U} = \left(u, v, \frac{h}{2} \theta \right)'$; $[u, v] = 0$; $\varphi \in [0, 2\pi]$ – угол, определяющий меридиан поверхности вращения; Γ_i ($i = 1, 2$) – граничные параллельные окружности; Φ_μ – линии разрыва обобщенных скоростей \mathbf{U} .

Первое слагаемое в левой части уравнения (13) представляет скорость диссипации механической энергии $\mathbf{D}(\mathbf{Q}, \mathbf{\Phi})$ в теле при пластическом деформировании, второе – скорость диссипации энергии $\mathbf{T}(\mathbf{Q}, [\mathbf{U}])$ на линиях разрыва Φ_μ , а выражение в правой части (13) есть скорость изменения работы всех внешних сил $\mathbf{N}(\mathbf{P}, \mathbf{U})$, где $\mathbf{P} = \{\mathbf{p}, \mathbf{f}\}$ система нагрузок.

Условие пластического течения (4) в пространстве обобщенных напряжений \mathbf{Q} представляет собой замкнутую невыпуклую поверхность [13]

$$F(\mathbf{Q}, s) = 0, \quad (14)$$

образованную гиперповерхностями типа:

$$F_k(\mathbf{Q}, s) = 0 \quad (k = \overline{1, L}). \quad (15)$$

Пусть $\mathbf{Q}, \mathbf{\Phi}$ – действительное распределение обобщенных напряжений и скоростей деформаций, \mathbf{Q}^* – статически допустимые обобщенные напряжения, $\mathbf{\Phi}^0$ – кинематически

допустимое поле скоростей и \mathbf{Q}^0 – соответствующее поле обобщенных напряжений. Подставим (10) в (5), (9) и после интегрирования получим:

$$\mathbf{Q}\dot{\Phi} \geq \mathbf{Q}^*\dot{\Phi}, \quad \mathbf{Q}^0\dot{\Phi} \geq \mathbf{Q}\dot{\Phi}. \quad (16)$$

При реализации пластического течения вектор скоростей деформаций $\dot{\Phi}$ ортогонален поверхности текучести (14), а в угловых точках может принимать произвольное направление между нормальными к смежным гиперповерхностям [13]. Обобщенные напряжения \mathbf{Q} и скорости деформаций $\dot{\Phi}$ связаны ассоциированным законом течения:

$$\dot{\Phi}_k = \lambda_k \frac{\partial F_k(\mathbf{Q}, s)}{\partial Q_i}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_k &\geq 0 \text{ если } F_k = 0 \text{ и } dF_k = 0; \\ \lambda_k &= 0 \text{ если } F_k < 0 \text{ или } dF_k = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку обобщенные напряжения не могут выходить за пределы поверхности текучести (14), то внешние силы, действующие на оболочку, не могут возрастать неограниченно. Пусть n_F коэффициент запаса такой, что нагрузка $n_F \mathbf{P}$ является предельной и обеспечивает появление в оболочке дополнительных степеней свободы и характеризуется одним из возможных механизмов течения. Этот механизм течения характеризуется выполнением пластического течения в некоторой части оболочки $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ и реализацией на фиксированных поверхностях $\Phi_v \in \Sigma_0$ разрывов обобщенных скоростей \mathbf{U} . За пределами области пластического течения обобщенные напряжения \mathbf{Q} удовлетворяют условию $F(\mathbf{Q}, s) \leq 0$, а обобщенные скорости равны нулю с точностью до перемещений оболочки как жесткого целого [14,16].

При реализации этого заданного механизма течения, аналогично [7,20], определим статический и кинематический множители n_F^* , n_F^0 . Отношения коэффициента запаса n_F , статически n_F^* и кинематически n_F^0 допустимых множителей определяются следующими теоремами.

Теорема I. При заданном механизме течения коэффициент запаса n_F является наибольшим статически допустимым множителем $n_F \geq n_F^*$.

Доказательство.

Пусть $\mathbf{Q}, \dot{\Phi}, \mathbf{U}$ – действительное единственное при заданном механизме течения распределение обобщенных напряжений и скоростей, соответствующее предельным нагрузкам $n_F \mathbf{P}$, а \mathbf{Q}^* – статически допустимое поле обобщенных напряжений, соответствующее системе нагрузок $n_F^* \mathbf{P}$.

Составим уравнения скоростей виртуальных работ для истинного и допустимого состояния, где в качестве виртуальных скоростей примем истинные значения

$$\mathbf{D}(\mathbf{Q}, \dot{\Phi}) + \mathbf{T}(\mathbf{Q}, [\mathbf{U}]) = n_F \mathbf{N}(\mathbf{P}, \mathbf{U}); \quad \mathbf{D}(\mathbf{Q}^*, \dot{\Phi}) + \mathbf{T}(\mathbf{Q}^*, [\mathbf{U}]) = n_F^* \mathbf{N}(\mathbf{P}, \mathbf{U}). \quad (19)$$

Вычитая второе уравнение (19) из первого в соответствии с (16) получим:

$$(n_F - n_F^*) \times \mathbf{N}(\mathbf{P}, \mathbf{U}) \geq \mathbf{T}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^*, [\mathbf{U}]). \quad (20)$$

Скорость работы внешних сил $\mathbf{N}(\mathbf{P}, \mathbf{U})$ всегда положительна и для заданного механизма течения приращение скорости диссипации энергии на фиксированных поверхностях разрыва неотрицательно $\mathbf{T}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^*, [\mathbf{U}]) \geq 0$ или

$$\int_{\Phi_v} \left\{ (t_1 - t_1^*) [\mathbf{u}^{\otimes}] - \frac{h}{2} (m_1 - m_1^*) [\mathbf{\sigma}^{\otimes}] \right\} R d\phi \geq 0. \quad (21)$$

Таким образом, из (20) следует:

$$n_F \geq n_F^*. \quad (22)$$

Теорема II. При заданном механизме течения кинематически допустимый множитель n_F^0 не ниже коэффициента запаса $n_F \leq n_F^0$.

Доказательство.

Пусть $\mathbf{\Phi}^0, \mathbf{U}^0$ – кинематически допустимое поле обобщенных скоростей деформаций и перемещений, а \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^0 – действительное и соответствующее скоростям $\mathbf{\Phi}^0$ поле обобщенных напряжений. В общем случае напряжения \mathbf{Q}^0 не удовлетворяют уравнениям равновесия (12).

В соответствии с принципом виртуальных работ (13) имеет место:

$$\mathbf{D}(\mathbf{Q}^0, \mathbf{\Phi}^0) + \mathbf{T}(\mathbf{Q}^0, [\mathbf{U}^0]) = n_F^0 \mathbf{N}(\mathbf{P}, \mathbf{U}^0); \quad \mathbf{D}(\mathbf{Q}, \mathbf{\Phi}^0) + \mathbf{T}(\mathbf{Q}, [\mathbf{U}^0]) = n_F \mathbf{N}(\mathbf{P}, \mathbf{U}^0). \quad (23)$$

Вычитая из первого равенства (23) второе, учитывая (16), получим:

$$(n_F^0 - n_F) \times \mathbf{N}(\mathbf{P}, \mathbf{U}^0) \geq \mathbf{T}(\mathbf{Q}^0 - \mathbf{Q}, [\mathbf{U}^0]). \quad (24)$$

Скорость работы внешних сил $\mathbf{N}(\mathbf{P}, \mathbf{U}^0)$ положительна, а при заданном механизме течения величина мощности пластического формоизменения на фиксированных поверхностях разрыва неотрицательна $\mathbf{T}(\mathbf{Q}^0 - \mathbf{Q}, [\mathbf{U}^0]) \geq 0$ или

$$\int_{\Phi_v} \left\{ (t_1^0 - t_1) [\mathbf{u}^{\otimes}] - \frac{h}{2} (m_1^0 - m_1) [\mathbf{\sigma}^{\otimes}] \right\} R d\phi \geq 0. \quad (25)$$

Таким образом, из (24) при заданном механизме течения, следует неравенство:

$$n_F^0 \geq n_F. \quad (26)$$

Замечание.

Наличие различных механизмов течения оболочки обозначает, что существует несколько решений задачи предельного равновесия. Можно доказать утверждение Ю. Н. Работнова [20] и показать, что истинным является механизм, доставляющий наименьшее значение коэффициента запаса.

Кинематически допустимый множитель n_F^0 не ниже наименьшего коэффициента запаса $n_F \leq n_F^0$, обеспечивающего реализацию в оболочке дополнительных степеней свободы.

Пусть в оболочке может реализоваться два различных механизма. Для каждого из этих механизмов коэффициенту запаса $n_F^{(k)}$ соответствуют поля обобщенных скоростей $\mathbf{\Phi}^{(k)}, \mathbf{U}^{(k)}$ и напряжений $\mathbf{Q}^{(k)}$.

Предположим, что истинным является первый механизм и $n_F^{(1)} > n_F^{(2)}$. Тогда $\mathbf{Q}^{(2)}, \mathbf{U}^{(2)}$ есть кинематически допустимые поля скоростей, а $\mathbf{Q}^{(2)}$ – соответствующее поле напряжений. Согласно (16) и (23) в данном случае имеем: $\mathbf{Q}^{(2)} \mathbf{Q}^{(2)} \geq \mathbf{Q}^{(1)} \mathbf{Q}^{(2)}$;

$$\mathbf{D}(\mathbf{Q}^{(2)}, \mathbf{Q}^{(2)}) + \mathbf{T}(\mathbf{Q}^{(2)}, [\mathbf{U}^{(2)}]) = n_F^{(2)} \mathbf{N}(\mathbf{P}, \mathbf{U}^{(2)});$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{Q}^{(1)}, \mathbf{Q}^{(2)}) + \mathbf{T}(\mathbf{Q}^{(1)}, [\mathbf{U}^{(2)}]) = n_F^{(1)} \mathbf{N}(\mathbf{P}, \mathbf{U}^{(2)}).$$

В соответствии с теоремой II в этом случае имеем $n_F^{(2)} \geq n_F^{(1)}$, что противоречит принятым предположениям.

Таким образом, истинным является механизм, доставляющий минимальное значение коэффициента запаса. Или истинным коэффициентом запаса является такое значение, когда оболочка впервые приобретает дополнительные степени свободы [20].

Следствие А. Если для оболочек из материалов с поверхностями текучести $F^{(\pm)}(\mathbf{Q}, s) = 0$ при действии предельных нагрузок действительные механизмы течения совпадают, то коэффициент запаса $n_F^{(+)}$ для оболочки из материала с внешней поверхностью текучести $F^{(+)}(\mathbf{Q}, s) = 0$ не меньше коэффициента запаса $n_F^{(-)}$ для оболочки из материала с вписанной $F^{(-)}(\mathbf{Q}, s) = 0$ поверхностью текучести.

Рассмотрим две оболочки из материалов с поверхностями текучести $F^{(\pm)}(\mathbf{Q}, s) = 0$ и обозначим символом $\Sigma_F^{(\pm)}$ ($\Sigma_F^{(+)} \supseteq \Sigma_F^{(-)}$) множества всех статически допустимых полей обобщенных напряжений. Каждому из элементов множества $\Sigma_F^{(\pm)}$ соответствуют статически допустимый множитель $n_{F^{(\pm)}}^*$. Согласно первой теореме предельного равновесия при заданных механизмах течения для этих оболочек имеем:

$$n_F^{(\pm)} = \sup_{\mathbf{Q}^* \in \Sigma_F^{(\pm)}} (n_{F^{(\pm)}}^*).$$

Если для обеих оболочек действительные механизмы течения совпадают, то имеет место:

$$n_F^{(+)} \geq n_F^{(-)}.$$

Здесь важным является совпадение механизмов течения. В частности, в [11] построены решения для точной и приближенных поверхностей при реализации различных механизмов течения, где коэффициент запаса для внешней поверхности меньше точного значения.

Следствие В. Если к части оболочки, ограниченной параллельными окружностями Γ_i , добавить материал и действительный механизм течения не изменится, то предельная нагрузка не может понизиться.

Если к оболочке добавить материал, то поверхность текучести $F^{(+)}(\mathbf{Q}, s) = 0$ для этой оболочки будет внешней по отношению к исходной поверхности текучести $F(\mathbf{Q}, s) = 0$ [11,13]. Согласно следствию А, имеет место:

$$n_F^{(+)} \geq n_F.$$

Следствие С. Если от части оболочки, ограниченной параллельными окружностями Γ_i , удалить часть материала, то при неизменном действительном механизме течения предельная нагрузка не может увеличиться.

Утверждение следует из предыдущего.

Следствие D. Увеличение предела текучести в некоторых частях оболочки при неизменном действительном механизме течения не может понизить предельную нагрузку $n_F P$.

Утверждение следует из следствия А.

Следствие E. Уменьшение предела текучести в некоторых частях оболочки при неизменном действительном механизме течения не может увеличить предельную нагрузку $n_F P$.

Утверждение следует из следствия А.

Теорема единственности. Для строго выпуклых условий текучести при заданном механизме течения и действии предельных нагрузок распределение обобщенных напряжений Q единственно в областях, где скорости Φ отличны от нуля.

Доказательство.

Пусть имеют место два различных решения $Q^{(1)}, \Phi^{(1)}, U^{(1)}$ и $Q^{(2)}, \Phi^{(2)}, U^{(2)}$ одной и той же задачи. Тогда разность $(Q^{(1)} - Q^{(2)})$ удовлетворяет уравнениям равновесия (12), а обобщенные скорости $(\Phi^{(1)} - \Phi^{(2)})$ соответствуют по формулам (11) скоростям перемещений $(U^{(1)} - U^{(2)})$. Используя уравнение скорости виртуальных работ (13), будем иметь:

$$\begin{aligned} D\left((Q^{(1)} - Q^{(2)}), (\Phi^{(1)} - \Phi^{(2)})\right) + T\left((Q^{(1)} - Q^{(2)}), [U^{(1)} - U^{(2)}]\right) = \\ = N\left((P^{(1)} - P^{(2)}), (U^{(1)} - U^{(2)})\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку на поверхности Σ выполняется равенство $(P^{(1)} - P^{(2)}) = 0$, а на краях оболочки Γ_j на ортогональных направлениях заданы обобщенные напряжения \bar{Q} или нулевые скорости U [22, 26, 29], то выражение в правой части (27) равно нулю. Из первого слагаемого левой части уравнения (27) для строго выпуклых поверхностей получим (16)

$$D\left((Q^{(1)} - Q^{(2)}), (\Phi^{(1)} - \Phi^{(2)})\right) = D\left((Q^{(1)} - Q^{(2)}), \Phi^{(1)}\right) + D\left((Q^{(2)} - Q^{(1)}), \Phi^{(2)}\right) > 0, \quad (28)$$

второе слагаемое (27) при заданном механизме течения также неотрицательно

$$T\left((Q^{(1)} - Q^{(2)}), [U^{(1)} - U^{(2)}]\right) \geq 0. \quad (29)$$

Следовательно, правая часть равенства (27) положительна. Из полученного противоречия следует, что решения $Q^{(1)}, \Phi^{(1)}, U^{(1)}$ и $Q^{(2)}, \Phi^{(2)}, U^{(2)}$ совпадают.

В случае невогнутых поверхностей знак строго неравенства в (28) нужно заменить на больше или равно. В этом случае обобщенные напряжения $Q^{(1)} \dot{\epsilon} Q^{(2)}$ могут отличаться на вектор, лежащий на соответствующем участке невогнутости поверхности текучести [7].

Теорема доказана.

Замечание.

В оболочках различным механизмам течения соответствуют разные краевые задачи [16]. Приведенные выше теоремы справедливы для каждой из таких задач. Истинное решение определяется действительным механизмом течения. Этот механизм, а следовательно и соответствующее решение, можно определить в соответствии с [20], где принимается, что истинным механизмом течения из всех возможных является механизм, обеспечивающий наименьшее значение предельных нагрузок.

Существенным ограничением применимости изложенных теорем является выполнение условий (20), (24), (29).

Это ограничение состоит из двух частей:

- формулировки краевых условий для действительного механизма течения;
- фиксирование схемы поверхностей разрывов $\Phi_v \subseteq \Sigma$.

Эти ограничения снимаются, если реализация линий разрывов (пластических шарниров) сопровождается выполнением гиперповерхностей, описываемых однородными функциями не менее второй степени [12]

$$F_k(t_1, m_1, s) = 0 \quad (30)$$

переменных t_1, m_1 .

В оболочках вращения реализация пластических шарниров сопровождается выполнением условий [16]:

$$\frac{[\mathcal{E}_{02}]}{[\mathcal{E}_2]} = \frac{\partial F_k(t_1, m_1, s)}{\partial t_1} / \frac{\partial F_k(t_1, m_1, s)}{\partial m_1}.$$

Из последнего, (10) и равенства $t_1 \frac{\partial F_k}{\partial t_1} + m_1 \frac{\partial F_k}{\partial m_1} = \beta F_k$, $\beta \geq 2$ следует:

$$\mathbf{T}(\mathbf{Q}, [\mathbf{U}]) = 0 \quad (31)$$

или

$$\mathbf{T}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^*, [\mathbf{U}]) = 0; \mathbf{T}(\mathbf{Q}^0 - \mathbf{Q}, [\mathbf{U}^0]) = 0; \mathbf{T}((\mathbf{Q}^{(1)} - \mathbf{Q}^{(2)}), [\mathbf{U}^{(1)} - \mathbf{U}^{(2)}]) = 0.$$

В этом случае, в оболочке скорость диссипации энергии на линиях разрыва Φ_μ равна нулю, решения непрерывные и механизм пластического течения распространяется на всю оболочку. Следовательно, действительный механизм определяется единственным способом, а теоремы предельного равновесия и единственности для оболочек аналогичны общим теоремам теории предельного равновесия [7].

При решении нерегулярных задач вводят штрафные функции [8] или искусственную вязкость [10], сглаживающие разрывные решения. Последовательность таких непрерывных решений строят так, что они асимптотически сходятся к решению, удовлетворяющему общим соотношениям, например, принципу виртуальных работ. Следует отметить, что введение элементов вязкости или штрафных функций часто делается формально, и модель жесткопластического тела подменяется другой, например, моделью вязкопластического тела. Это приводит к крайне трудоемким доказательствам, если они возможны, отношений асимптотически полученных решений и решений соответствующих задач жесткопластического тела [10].

В рамках жесткопластического тела сходящуюся последовательность приближенных гладких решений можно строить на основе аппроксимаций поверхности текучести, например [12], и гиперповерхностей (30) в виде однородных потенциалов. Но такой физически ясный подход требует обоснования. Дело в том, что в теории оболочек для при-

ближенных поверхностей без доказательства принимается справедливость ассоциированного закона течения, например [25,28], где для приближенных поверхностей текучести удается построить только ограниченные решения.

Докажем сейчас, что в предельном состоянии ассоциированный закон течения выполняется для приближенных невогнутых поверхностей.

Теорема: Пусть невогнутая кусочно-гладкая поверхность $\mathcal{F}^0=0$ является вписанной по отношению к точной поверхности текучести $F=0$. Тогда для оболочки с поверхностью $\mathcal{F}^0=0$ максимальное значение коэффициента запаса $n_{\mathcal{F}^0}$ с необходимостью достигается при заданном механизме течения и реализации таких статически допустимых напряжений, что соответствующее поле скоростей является кинематически допустимым.

Доказательство.

Пусть n_F^* – коэффициент запаса, определенный на статически допустимом поле напряжений $\mathbf{Q}^* \in \Sigma_F$ и $n_F = \max_{\mathbf{Q} \in \Sigma_F} (n_F^*)$. Подмножество всех статически допустимых полей напряжений, не превосходящих поверхность $\mathcal{F}^0=0$, обозначим символом $\Sigma_{\mathcal{F}^0}$.

Определим условия достижения максимального значения величины $n_{\mathcal{F}^0} = \max_{\mathbf{Q} \in \Sigma_{\mathcal{F}^0}} (n_{\mathcal{F}^0}^*)$ для оболочки с вписанной поверхностью $\mathcal{F}^0=0$. Для этой оболочки выполняются уравнения равновесия (12), краевые условия в напряжениях и предельные соотношения для обобщенных напряжений.

Обратим $\mathcal{F}^0(\mathbf{Q}, s) = 0$ относительно m_2 :

$$m_2 = \bar{F}(t_1, t_2, m_1, s). \quad (32)$$

Кусочно-гладкие поверхности $\mathcal{F}^0=0$, образованные гиперповерхностями $\mathcal{F}_j^0=0$ ($j = \overline{1, K}$), представим в виде:

$$\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}_j^0 \mathcal{F}_j^0, \quad (33)$$

где

$$\mathcal{F}_j^0 \mathcal{F}_j^0 = 0, \quad \sum_{i=1}^K \mathcal{F}_i^0 = \text{const} \geq 0. \quad (34)$$

С учетом (33)–(34) равенство (32) можно записать следующим образом:

$$m_2 = \bar{\lambda}_j \bar{F}_j(t_1, t_2, m_1, s), \quad (35)$$

где

$$\mathcal{F}_j^0 (m_2 - \bar{F}_j) = 0; \quad \bar{\lambda}_j = \mathcal{F}_j^0 / \mathcal{F}_k^0; \quad \sum_{k=1}^K \bar{\lambda}_k = 1.$$

Подставляя (35) в (12), получим систему трех дифференциальных уравнений с известным коэффициентом $n_{\mathcal{F}^0}^*$ и функцией $t_2(s)$.

Теперь условие достижения максимального значения коэффициента запаса $n_{\mathcal{F}^0}^*$ можно сформулировать следующим образом:

Найти допустимую функцию $t_2(s) \in \Sigma_{\mathcal{F}^0}$, удовлетворяющую уравнениям равновесия (12) и предельным соотношениям (33), обеспечивающую достижение максимального

значения коэффициента запаса n_{p6}^* . Задачу определения функции $t_2(s)$, обеспечивающей достижение максимального значения n_{p6}^* , можно сформулировать в терминах теории оптимального управления:

Найти такое кусочно-непрерывное управление $\boldsymbol{\mu}(s) = (t_2, n_{p6})'$, $s \in [s_0, s_1]$, чтобы объект, описываемый уравнениями (37), двигаясь из многообразия $\Delta_0 = \{\mathbf{z} \in E^4, \mathbf{A}_0 \mathbf{z}(s_0) = \mathbf{B}_0\}$, перешел на многообразии $\Delta_1 = \{\mathbf{z} \in E^4, \mathbf{A}_1 \mathbf{z}(s_1) = \mathbf{B}_1\}$ так, чтобы функционал (36) принимал наименьшее значение [19].

$$\Phi_* = \inf_{\boldsymbol{\mu}} \Phi(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{z}); \quad (36)$$

$$\Phi(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{z}) = \int_{s_0}^{s_1} \Omega_0(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) ds, \quad \Omega_0(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{\mu_2}{(s_0 - s_1)},$$

при условиях:

$$\frac{d\mathbf{z}}{ds} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}); \quad \mathbf{A}_i \mathbf{z}(s_i) = \mathbf{B}_i \quad (i = 0, 1), \quad (37)$$

где $\mathbf{z} = (t_1, N, m_1, s)'$; $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4)'$; $\Omega_4(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) = 1$; $\mathbf{A}_i \mathbf{z}(s_i) = \mathbf{B}_i$, $(i = 0, 1)$ есть статические краевые условия [25–26], дополненные равенством $z_4(s_0) = s_0$.

При наибольшем значении коэффициента запаса $n_{p6} = \mu_2$ функционал (36) принимает наименьшее значение, что обеспечивается его строением. Для определения необходимых условий достижения минимума функционала (36) при ограничениях (37) воспользуемся принципом максимума Л. С. Понтрягина [19], который для рассматриваемой задачи формулируется следующим образом:

Пусть $\{\boldsymbol{\mu}(s), \mathbf{z}(s)\}$, $s \in [s_0, s_1]$ – решение задачи (36), (37). Тогда с необходимостью существует вектор функция $\boldsymbol{\Psi}(s) = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)'$, где $\psi_0 = const$, такая, что:

1. $\psi_0 \leq 0$; $(\boldsymbol{\Psi}(s) \neq 0) \quad s \in [s_0, s_1]$.

2. $\boldsymbol{\Psi}(s)$ является решением следующей сопряженной системы уравнений, соответствующей рассматриваемому решению $\{\boldsymbol{\mu}(s), \mathbf{z}(s)\}$, $s \in [s_0, s_1]$:

$$\frac{d\psi_i}{ds} = - \left(\boldsymbol{\Psi}, \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial z_i} \right), \quad (i = \overline{0, 4}), \quad (38)$$

где

$$\frac{dz_0}{ds} = \Omega_0(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}).$$

3. При любом $s \in [s_0, s_1]$ гамильтониан

$$G(\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) = (\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}))$$

переменного $\boldsymbol{\mu}$ достигает в точке $\boldsymbol{\mu}(s)$ максимальное значение и

$$\max_{\boldsymbol{\mu}} G(\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{z}) = C = const. \quad (39)$$

4. На краях $s = s_i$, ($i = 0, 1$) выполняются условия трансверсальности [19], т. е. векторы $\Psi(s_i)$ направлены по нормали к касательным плоскостям к многообразиям Δ_i , ($i = 0, 1$).

Формально условия трансверсальности записываются следующим образом [19]:

Для любого вектора $\mathbf{z}(s_i) \in E^4$, ($i = 0, 1$) такого, что: $a_{\alpha\beta}^{(i)} \cdot z_\alpha(s_i) = 0$ ($\alpha, \beta = \overline{1, 4}$), имеет место:

$$\Psi_k(s_i) z_k(s_i) = 0 \quad (k = \overline{1, 4}). \quad (40)$$

Сравнивая уравнения (11), (17), (38), и учитывая, что условия трансверсальности (40) для оболочек всегда выполняются [26], видим, что вектор $\bar{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)'$ с точностью до обозначений совпадает с URh .

Таким образом, с необходимостью коэффициент запаса $n_{p_0}^*$ на статически допустимом поле обобщенных напряжений $\mathbf{Q}^* \in \Sigma_{p_0}$ достигает максимального значения при условии, когда величины $\bar{\Psi}$ удовлетворяют кинематическим соотношениям (11), (17) и кинематическим краевым условиям.

Теперь еще необходимо показать, что скорость диссипации энергии неотрицательная для невогнутой поверхности $\dot{P}^0 = 0$. Эти условия выполняются, если множители $\%_i^0$ (33) удовлетворяют соотношениям типа (18) [7]. Частично соотношения (18) выполнены при построении поверхности $\dot{P}^0 = 0$ (34), а остальные можно объединить в равенство:

$$\%_j^0 d\dot{P}_j^0 = 0. \quad (41)$$

Для доказательства этого равенства рассмотрим условие (39), обеспечивающее достижение максимального значения n_{p_0} , которое с учетом принятых обозначений записывается в виде:

$$(\mathbf{U}, \bar{\Omega}) + \varphi(\mathbf{Q}^*, N, \mathbf{U}, n_{p_0}, s) = C, \quad (42)$$

где

$$\frac{d\varphi}{ds} = Rh\%_i^0 \frac{\partial \dot{P}_i^0}{\partial s} - \left(\mathbf{U}, \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial s} \right). \quad (43)$$

Интегрируя по частям уравнение (41) с учетом (11)–(12), (17) получим соотношения (42)–(43).

Таким образом, для любой вписанной невогнутой поверхности $\dot{P}^0 = 0$ максимальное значение статически допустимого коэффициента запаса $n_{p_0} = \max_{\mathbf{Q}^* \in \Sigma_{p_0}} (n_{p_0}^*)$ с необходимостью достигается при реализации таких статически допустимых обобщенных напряжений $\mathbf{Q}^* \in \Sigma_{p_0}$, что соответствующие скорости Φ являются кинематически допустимыми. Если механизмы течения для оболочек с поверхностями $\dot{P}^0 = 0$ и $F = 0$ совпадают, то в соответствии со статической теоремой имеем $n_F \geq n_{p_0} \geq n_{p_0}^*$.

Что и требовалось доказать.

Справедливость ассоциированного закона течения можно показать и для описанной невогнутой поверхности $\hat{F} = 0$. Для этого рассмотрим оболочку из некоторого фиктивного материала с поверхностью текучести $G = 0$ такой, что $\hat{F} = 0$ является вписанной по отношению к $G = 0$. Для этих поверхностей определим множества статически допустимых полей обобщенных напряжений $\Sigma_{p_0} \subset \Sigma_F \subset \Sigma_{\hat{F}} \subset \Sigma_G$. Согласно приведенной теореме, получим, что в предельном состоянии в оболочке из жесткопластического материала с любой из перечисленных поверхностей выполняется ассоциированный закон течения, а при условии реализации в этих оболочках одинаковых механизмов течения соответствующие коэффициенты запаса удовлетворяют неравенствам $n_{p_0} \leq n_F \leq n_{\hat{F}} \leq n_G$.

Таким образом, при решении задач предельного равновесия оболочек вращения в пространстве обобщенных напряжений можно использовать любые невогнутые приближенные предельные поверхности текучести. Для этих поверхностей выполняется ассоциированный закон течения. Решения для таких поверхностей, как правило, определяются неединственным способом, а для каждого из этих решений при реализации одинаковых механизмов течения выполняются теоремы предельного равновесия. Определение истинного решения связано с выбором механизма, обеспечивающего наименьшее значение коэффициента запаса. Можно построить приближенные невогнутые поверхности текучести так, что в оболочке реализуется один механизм течения, характеризуемый непрерывными обобщенными скоростями [1]. В таких случаях теоремы предельного равновесия применимы без ограничений. Эти вписанные и описанные поверхности можно строить асимптотически сходящимися [11], а следовательно, получать сходящиеся оценки коэффициента запаса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вохмянин, И. Т.* Несущая способность гладких и подкрепленных цилиндрических оболочек / И. Т. Вохмянин, Ю. В. Немировский // Прикладная механика. – 1967. – Т. 3. – Вып. 1. – С. 18–23.
2. *Гвоздев, А. А.* Расчет несущей способности конструкций по методу предельного нагружения / А. А. Гвоздев. – М. : Стройиздат, 1949. – 280 с.
3. *Дехтярь, А. С.* Несущая способность тонкостенных конструкций / А. С. Дехтярь, А. О. Рассказов. – Киев : Будивзельник, 1990. – 153 с.
4. *Друккер, Д.* Расширенные теоремы о предельном равновесии для сплошной среды / Д. Друккер, В. Прагер, Г. Гринберг // Механика : сб. пер. – М. : ИЛ, 1953. – № 1(17). – С. 96–106.
5. *Жермен, П.* Механика сплошных сред / П. Жермен. – М. : Мир, 1965. – 480 с.
6. *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред / Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 1. – 448 с.; М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – Т. 2. – 448 с.
7. *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.
8. *Киндерлерер, Д.* Введение в вариационные неравенства и их приложения / Д. Киндерлерер, Г. Стампакия. – М. : Мир, 1983. – 256 с.
9. *Койтер, В. Т.* Общие теоремы упругопластических сред. Серия Механика / В. Т. Койтер. – М. : ИЛ, 1961. – 80 с.
10. *Мосолов, П. П.* Механика жесткопластических сред / П. П. Мосолов, В. П. Мясников. – М. : Наука, 1981. – 208 с.
11. *Налимов, А. В.* Универсальная аппроксимация поверхностей текучести для жесткопластических цилиндрических оболочек / А. В. Налимов // Ползуновский вестник. – 2006. – № 2–2. – С. 90–94.
12. *Налимов, А. В.* Проблемы численного решения задач предельного анализа оболочек / А. В. Налимов, Ю. В. Немировский // Ползуновский вестник. – 2006. – № 2–2. – С. 95–100.
13. *Немировский, Ю. В.* Предельное равновесие многослойных армированных осесимметрических оболочек / Ю. В. Немировский // Известия АН СССР. МТТ. – 1969. – № 6. – С. 80–89.
14. *Немировский, Ю. В.* Предельное равновесие армированных оболочек нулевой гауссовой кривизны / Ю. В. Немировский, А. В. Налимов // Прикладная механика. – 1989. – Т. 25. – Вып. 9. – С. 72–79.

15. *Немировский, Ю. В.* Неединственность решений задач статики жесткопластического тела / Ю. В. Немировский, А. В. Налимов // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности : труды XVIII Межреспубликанской конференции. – Новосибирск : Nonparel, 2003. – С. 115–121.
16. *Немировский, Ю. В.* Полные решения задач предельного равновесия армированных осесимметрических оболочек / Ю. В. Немировский, А. В. Налимов // Известия ВУЗов. Строительство и архитектура. – 2004. – № 1. – С. 4–13.
17. *Онат, Е. Т.* Предельное равновесие пологих конических оболочек / Е. Т. Онат // Механика : сб. пер. – М. : ИЛ, 1961. – № 4 (68). – С. 105–115.
18. *Панагиотопулос, П.* Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии / П. Панагиотопулос. – М. : Мир, 1989. – 494 с.
19. *Понтрягин, Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М. : Наука, 1983. – 392 с.
20. *Работнов, Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1979. – 774 с.
21. *Работнов, Ю. Н.* Приближенная техническая теория упругопластических оболочек / Ю. Н. Работнов // ПММ. – 1951. – Т. XV. – С. 167–174.
22. *Ржаницын, А. Р.* Предельное равновесие пластинок и оболочек / А. Р. Ржаницын. – М. : Наука, 1983. – 288 с.
23. *Савчук, А.* О пластическом анализе оболочек / А. Савчук // Механика деформируемого твердого тела. Направления развития. – М. : Мир, 1983. – С. 274–309.
24. *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехиздат, 1956. – 493 с.
25. *Ходж, Ф. Г.* Краевые задачи теории пластичности / Ф. Г. Ходж // Серия Механика. Пластичность и термопластичность. – М. : ИЛ, 1962. – С. 7–69.
26. *Чернина, В. С.* Статика тонкостенных оболочек вращения / В. С. Чернина. – М. : Наука, 1968. – 455 с.
27. *Cinquini, C.* Limit analysis of circular cylindrical shells under hydrostatic pressure / C. Cinquini, D. O. Lamblin, G. Guerlement // J. Struct. Mech. – 1984. – Vol. 12. – N. 3. – P. 263–278.
28. *Hodge, P. G.* Automatic piecewise linearization in ideal plasticity / P. G. Hodge // Comp. Meth. in Appl. Eng. – 1977. – Vol. 10. – N. 3. – P. 249–272.
29. *Save, M.* Limit analysis of plates and shells: Research over two decades / M. Save // J. Struct. Mech. – 1985. – Vol. 13. – N. 3–4. – P. 343–370.

ПЛАСТИЧЕСКОЕ СЖАТИЕ КОЛЬЦА ПЛОСКИМ ИНСТРУМЕНТОМ С УЧЕТОМ УПРОЧНЕНИЯ

(Московский государственный технический университет «СТАНКИН»)

Приведена приближенная модель пластического сжатия идеально пластического кольца плоским инструментом с однородным упрочнением материала в процессе сжатия, учитываемым по величине средней накопленной пластической деформации. Расчетная зависимость силы деформирования кольца от перемещения инструмента хорошо согласуется с экспериментальными данными при холодной деформации упрочняющегося металла.

Приближенная модель сжатия идеально пластического кольца плоским инструментом (рис. 1) основана на трех допущениях [2].

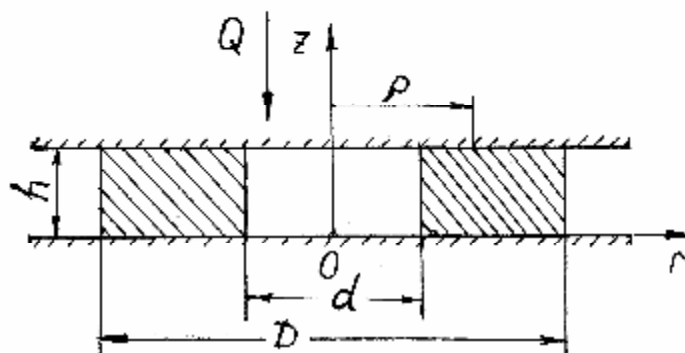


Рис. 1

(1) Рассматривается дифференциальное уравнение равновесия элемента равной толщине кольца h . (2) Радиальное нормальное напряжение усредняется по толщине h . (3). Вследствие изменения знака касательного напряжения на границах контакта с инструментом среднее касательное напряжение по толщине h принимается равным нулю, используется условие полной пластичности кольцевого элемента для нормальных напряжений [3; 4].

Эти допущения приводят к обыкновенному дифференциальному уравнению для изменения напряжений в радиальном направлении. Допущения приближенной модели пластического деформирования элемента конечной толщины широко используются на практике для моделирования многих технологических процессов и удовлетворительно согласуются с экспериментами [5; 1].

Ниже рассматриваются безразмерные напряжения, отнесенные к напряжению текучести материала кольца σ_s . На границах контакта кольца с инструментом задается коэффициент пластического трения μ , представляющий безразмерное касательное напряжение, изменяющееся в пределах $0 < \mu < 1/2$.

В случае идеально гладкого инструмента ($\mu = 0$) задача имеет простое точное решение – однородное напряженное состояние осевого сжатия с линейным изменением скоростей пластического течения при положительной радиальной скорости V_r во всей пластической области. В этом случае внутренний и наружный диаметры увеличиваются при сжатии кольца и определяются соотношением подобия $D_0/d_0 = D/d$ между начальными D_0, d_0 и текущими D, d значениями диаметров.

При наличии контактного трения ($\mu > 0$) пластическая область разделяется радиусом ρ на внутреннюю зону, где $V_r < 0$, и на наружную зону, где $V_r > 0$. В этом случае в процессе сжатия кольца внутренний диаметр d уменьшается, а наружный диаметр D увеличивается. Дифференциальные уравнения равновесия кольцевого элемента толщиной h в цилиндрических координатах $\{r, z, \theta\}$ и соответствующие условия полной пластичности для внутренней и наружной пластических зон с противоположными направлениями скорости V_r и контактного трения μ имеют следующий вид:

$$\frac{ds_r}{dr} + \frac{s_r - s_\theta}{r} = -2 \frac{m}{h} \quad (1)$$

$$\sigma_r - \sigma_z = 1, \quad \sigma_z = \sigma_\theta \quad (2)$$

при $d/2 \leq r \leq \rho, V_r < 0$ и

$$\frac{ds_r}{dr} + \frac{s_r - s_\theta}{r} = 2 \frac{m}{h} \quad (3)$$

$$\sigma_r - \sigma_z = 1, \quad \sigma_r = \sigma_\theta \quad (4)$$

при $\rho \leq r \leq D/2, V_r > 0$.

Из (1)–(4) следуют дифференциальные уравнения для давления на инструмент $p = -\sigma_z$

$$\frac{dp}{dr} = 2 \frac{m}{h} + \frac{1}{r}, \quad d/2 \leq r \leq \rho, \quad (5)$$

$$\frac{dp}{dr} = -2 \frac{m}{h}, \quad \rho \leq r \leq D/2. \quad (6)$$

Интегрирование уравнений (5) и (6) с граничными условиями $p = 1$ при $r = d/2$ и $r = D/2$, приводит к распределениям давления на инструмент в виде

$$p = 1 + \ln \frac{2r}{d} + \frac{m}{h}(2r - d), \quad d/2 \leq r \leq \rho, \quad (7)$$

$$p = 1 + \frac{m}{h}(D - 2r), \quad \rho \leq r \leq D/2. \quad (8)$$

Из условия непрерывности давления при $r = \rho$ из уравнений (7) и (8) получаем трансцендентное уравнение для границы раздела пластических зон ρ

$$\ln \frac{2r}{d} + \frac{4m}{h} r = \frac{m}{h}(D + d). \quad (9)$$

Уравнение (9) при заданных значениях величин μ , D , d и h удобно решать итерационным методом Ньютона.

После определения ρ из уравнения (9) находим среднее давление на инструмент q интегрированием распределений давления (7) и (8)

$$q = 1 + \frac{1}{R_1^2 - R_0^2} \left[\frac{R_0^2 - r^2}{2} + r^2 \ln \frac{r}{R_0} + \frac{2m}{h} \left(\frac{1}{3} (R_1^3 + R_0^3 + 4r^3) - r^2 (R_1 + R_0) \right) \right], \quad (10)$$

где $R_0 = d/2$ и $R_1 = D/2$ – радиусы внутренней и наружной границ, которые в процессе сжатия кольца на величину dh определяются дифференциальными соотношениями, следующими из условия несжимаемости

$$\left. \begin{aligned} dR_0 &= \frac{1}{2} \frac{dh}{h} \frac{(r^2 - R_0^2)}{R_0} \\ dR_1 &= \frac{1}{2} \frac{dh}{h} \frac{(r^2 - R_1^2)}{R_1} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Уравнения (9) и (11) показывают, что изменение диаметров кольца d и D определяется коэффициентом трения μ , который можно оценить сравнением экспериментальных и расчетных значений диаметров при сжатии кольца для заданных условий эксперимента.

Размерная величина силы сжатия кольца Q в зависимости от толщины h определяется формулой

$$Q(h) = p(R_1^2 - R_0^2) \sigma_s(e_p) q(h), \quad (12)$$

где $q(h)$ определяется уравнениями (9)–(11); $\sigma_s(e_p)$ – заданная кривая упрочнения; накопленная средняя пластическая деформация e_p определяется интегралом [1]

$$e_p(h) = - \int_{h_0}^h q(h) \frac{dh}{h}. \quad (13)$$

Уравнение (12) можно использовать для определения экспериментальной кривой упрочнения при записи зависимости $Q(h)$ на испытательной машине при сжатии кольцевого образца плоскими плитами с малым коэффициентом трения. Такое испытание позволяет получить кривую упрочнения для больших пластических деформаций, которую можно использовать для моделирования технологических процессов осадки кольцевых заготовок при холодной деформации.

На рис. 2 светлыми кружками показана экспериментальная кривая упрочнения алюминиевого сплава АД-31 при сжатии кольцевого образца с начальными размерами $D_0 = 27$ мм, $d_0 = 21$ мм и $h_0 = 6.5$ мм до конечной толщины $h = 2.9$ мм, полученная по приведенным уравнениям при $\mu = 0.1$. При этом конечные расчетные значения диаметров кольца $d = 19.4$ мм и $D = 31.2$ мм удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Экспериментальная кривая упрочнения, показанная на рис. 2, имеет начальный участок, на котором происходит быстрое возрастание напряжения текучести, средний участок, на котором продолжается более медленное нелинейное упрочнение, и конечный участок при больших деформациях, на котором наблюдается почти линейное упрочнение с малым углом наклона касательной к кривой упрочнения материала.

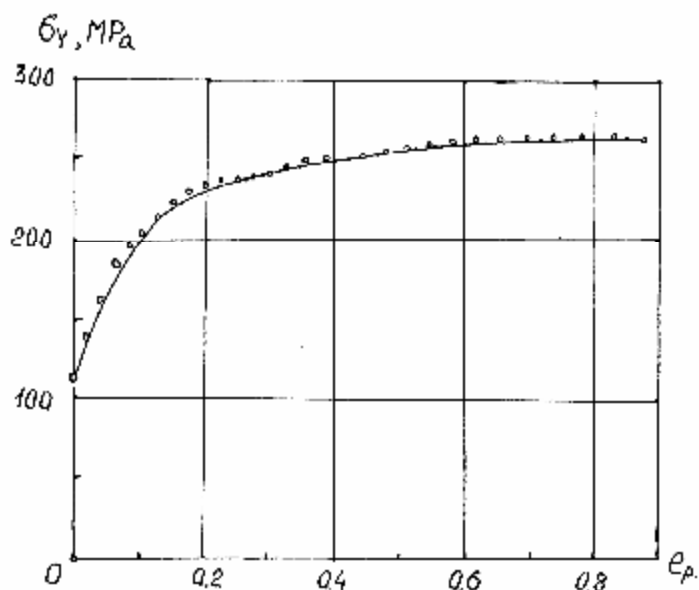


Рис. 2

Экспериментальная кривая упрочнения хорошо аппроксимируется квадратично-линейной зависимостью, показанной на рис. 2 сплошной кривой.

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_s &= \sigma_0 (1 + C_1 e_p + C_2 e_p^2), & 0 < e_p \leq e_p^* \\
 \sigma_s &= \sigma_0 (C_3 + C_4 e_p + C_5 e_p^2), & e_p^* \leq e_p \leq e_p^{**} \\
 \sigma_s &= \sigma_0 (C_6 + C_7 e_p), & e_p \geq e_p^{**}
 \end{aligned} \right\} (14)$$

с параметрами материала $\sigma_0 = 358.6$ МПа, $C_1 = 1.89$, $C_2 = -1.33$, $C_3 = 0.92$, $C_4 = 2.13$, $C_5 = -1.19$, $C_6 = 1.61$, $C_7 = 0.31$, $e_p^* = 0.29$ и $e_p^{**} = 0.83$.

На рис. 3 светлыми кружками и сплошной кривой показаны экспериментальная и расчетная зависимости силы Q от перемещения $s = h_0 - h$ инструмента при сжатии указанного выше образца из сплава АД-31. Расчетная зависимость получена из уравнения (12) при численном интегрировании уравнений (11) и (13) с использованием аппроксимации (14) кривой упрочнения. Вследствие точной аппроксимации экспериментальной кривой упрочнения расчетная и экспериментальная зависимости практически совпадают.

При сжатии кольца по схеме, показанной на рис. 1, конечные значения наружного и внутреннего диаметров зависят от контактного трения, которое на практике трудно регулировать с заданной точностью. Ниже рассмотрены две другие схемы сжатия кольца, в которых наружный или внутренний диаметры не зависят от контактного трения и определяются кинематическими ограничениями инструментом и условием несжимаемости материала кольца при пластической деформации.

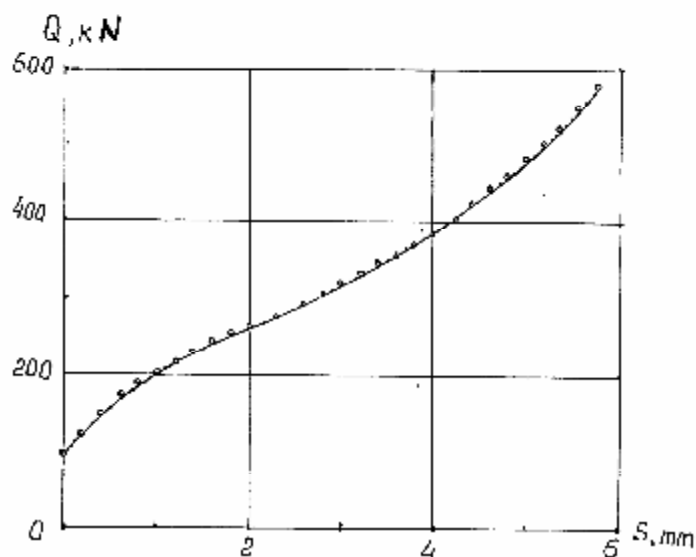


Рис. 3

На рис. 4 показана схема сжатия кольца плоским инструментом с кинематическим ограничением внутреннего диаметра d оправкой. В этом случае при наличии контактного трения диаметр d остается постоянным, равным диаметру оправки, а наружный диаметр D определяется условием несжимаемости в зависимости от h

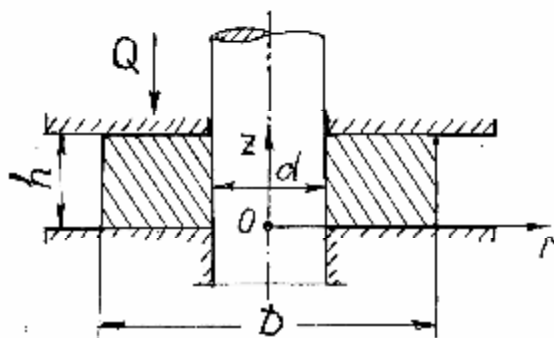


Рис. 4

$$D^2 = d^2 + \frac{h_0}{h} (D_0^2 - d^2), \quad d = \text{const.} \quad (15)$$

В этом процессе при $\mu > 0$ и $V_r > 0$ распределение давления на инструмент определяется формулой (8), и на границе контакта кольца с оправкой возникает радиальное давление на оправку $p_m = -\sigma_r$, которое определяется из первого соотношения (4) условия полной пластичности и из (8) при $r = d/2$

$$p_m = \frac{m}{h} (D - d). \quad (16)$$

Интегрирование распределения давления (8) на границе контакта $d/2 \leq r \leq D/2$ приводит к выражению для среднего давления q на плоский инструмент

$$q = 1 + \frac{m}{h} \left(D - \frac{2(D^3 - d^3)}{3(D^2 - d^2)} \right). \quad (17)$$

Зависимость силы сжатия кольца $Q(h)$ определяется формулой (12) для заданной кривой упрочнения $\sigma_s(e_p)$, пластической деформацией e_p , определяемой интегралом (13), и зависимостью $q(h)$, определяемой соотношениями (15) и (17).

На рис. 5 показана схема сжатия кольца плоским инструментом с ограничением перемещения наружного диаметра D стенкой контейнера. В этом случае внутренний диаметр кольца d определяется условием несжимаемости

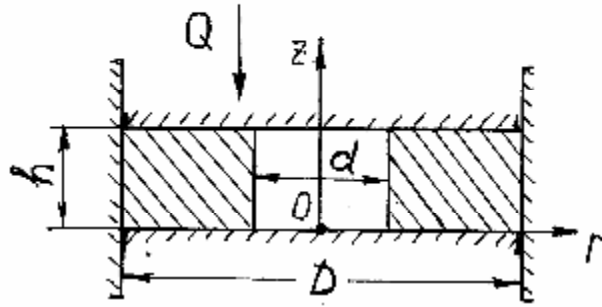


Рис. 5

$$d^2 = D^2 - \frac{h_0}{h} (D^2 - d_0^2), \quad D = \text{const.} \quad (18)$$

Пластическое течение направлено к оси z , и распределение давления на плоский инструмент определяется выражением (7). На стенку контейнера действует радиальное давление $p_c = -\sigma_r$, определяемое из первого соотношения (2) условия полной пластичности и из (7) при $r = D/2$

$$p_c = \ln \frac{D}{d} + \frac{m}{h} (D - d). \quad (19)$$

Интегрирование распределения давления (7) по границе контакта кольца с плоским инструментом приводит к выражению для среднего давления q в виде

$$q = \frac{1}{2} + \frac{D^2}{D^2 - d^2} \ln \frac{D}{d} + \frac{m}{h} \left[\frac{2(D^3 - d^3)}{3(D^2 - d^2)} - d \right]. \quad (20)$$

Зависимость силы сжатия кольца $Q(h)$ определяется формулой (12) для заданной кривой упрочнения $\sigma_s(e_p)$, пластической деформацией e_p , определяемой интегралом (13), и зависимостью $q(h)$, определяемой соотношениями (18) и (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гоффман, О. Введение в теорию пластичности для инженеров / О. Гоффман, Г. Закс. – М. : Машгиз, 1957. – 280 с.
2. Друянов, Б. А. Теория технологической пластичности / Б. А. Друянов, Р. И. Непершин. – М. : Машиностроение, 1990. – 272 с.
3. Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.
4. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
5. Целиков, А. И. Основы теории прокатки / А. И. Целиков. – М. : Metallurgia, 1965. – 248 с.

**ТРЕХМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ**

(Самарский государственный университет)

Рассматривается напряженно-деформированное состояние жесткопластического тела с рассеянным анизотропным полем микроповреждений. Поврежденность представляется симметричным тензором поврежденности второго ранга, главные оси которого совпадают с главными осями тензора напряжений. Получена замкнутая система статических и кинематических уравнений теории связанной пластичности и поврежденности в изостатической координатной системе относительно приращений главных напряжений, главных скоростей пластических деформаций и приращений перемещений, что наиболее удобно для представления и анализа уравнений связанной задачи. Рассмотрен случай плоской пластической деформации и осесимметричной деформации, и показано, что система основных соотношений относится к гиперболическому типу, что позволяет обобщить понятие поля скольжения на случай связанных состояний.

1. Математическая модель анизотропного распределения поврежденности

В представляемой работе рассматривается связанная задача математической теории пластичности. Связанная постановка задач необходима в механике деформируемого твердого тела для того, чтобы учесть искажение пластического течения полем повреждений, и одновременно возрастание повреждений в процессе накопления пластических деформаций. Эта задача значительно сложнее с точки зрения общих свойств уравнений, возможных постановок задач и возможных подходов к их интегрированию, по сравнению с традиционными уравнениями теории идеальной пластичности. Актуальным также представляется учет анизотропии распределения поврежденности в основных уравнениях математической теории пластичности. Цель работы состоит в том, чтобы дать вывод основных соотношений связанной задачи¹ и указать случаи их гиперболичности, обобщив тем самым понятие поля скольжения на случай связанных состояний. Математическое моделирование пластического течения, сопровождающегося накоплением повреждений, подразумевает описание разупрочнения и соответствующую нетривиальную модификацию инкрементальных соотношений теории пластичности.

¹ Используя для этого преимущества триортогональной изостатической системы координат.

Математическое моделирование анизотропной поврежденности являлось предметом интенсивных исследований на протяжении последних десятилетий [2], [5]–[7], [11]–[13]. Классические представления о поврежденности связаны с так называемым геометрическим подходом, позволяющим довольно просто учесть анизотропию состояния поврежденности. При помощи этого подхода эффект возрастания внутренних напряжений в среде с повреждениями представляется с помощью понятия эффективного напряжения. Тензор эффективных напряжений строится как произведение тензора напряжений Коши и соосного ему обратного тензора сплошности. Условие соосности выполняется, если в процессе нагружения можно пренебречь влиянием упругой деформации на состояние поврежденности.

Под поврежденностью, следуя [10], понимается сокращение обратимого отклика тела вследствие сокращения эффективной площади, передающей внутренние усилия от одной части тела к другой его части, обусловленного, в свою очередь, появлением и развитием рассеянного поля микроповреждений, которые при пластическом течении проявляются в форме распределения дислокаций. В рамках математической модели поврежденности, как правило, представляется специальной тензорной переменной – тензором поврежденности. Тензорная мера анизотропной поврежденности является мерой сокращения, вследствие распределения микроповреждений, реально несущей нагрузку площади двумерного элемента тела в зависимости от его ориентации. В идеально пластическом теле сокращение эффективной площади происходит в основном вследствие шейкообразования (см. рис. 1, 2).

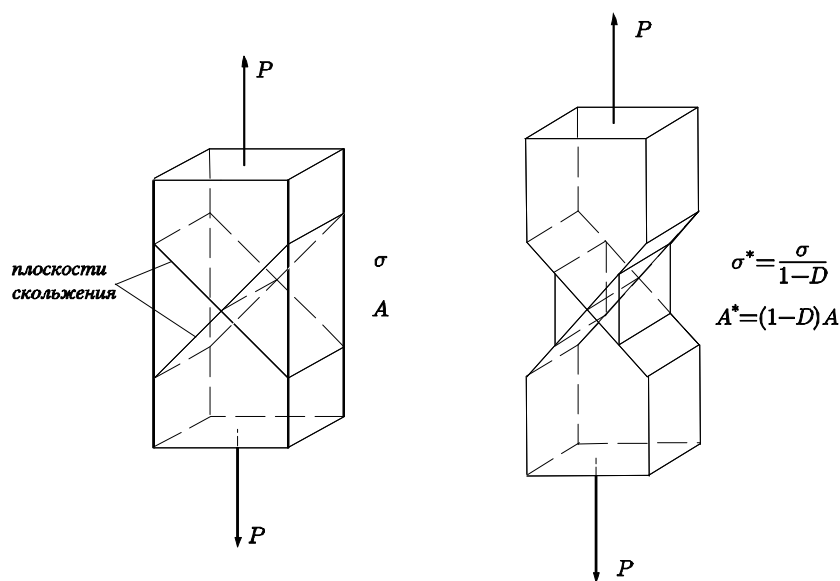
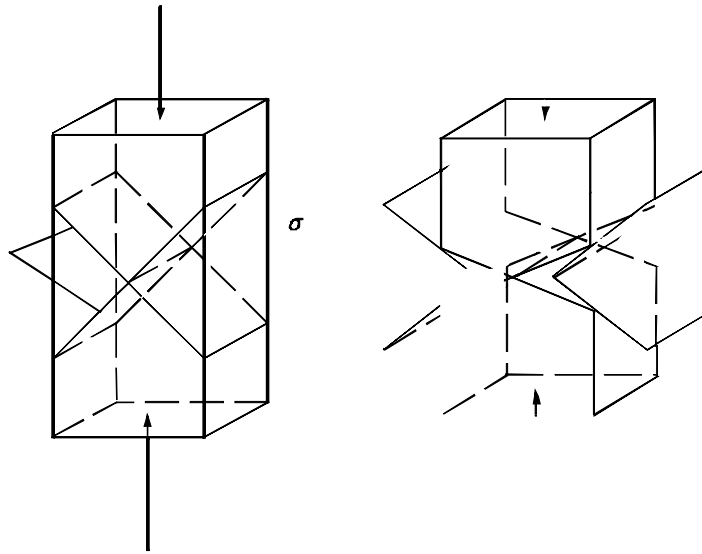


Рис. 1. Математическая модель сокращения эффективной площади вследствие скольжения при одноосном растяжении жесткопластического образца (схема Оната–Прагера [3]). Скольжение происходит вдоль двух изолированных плоскостей



\mathbf{n} от той точки, тонкую структуру поврежденности в окрестности которой предполагается исследовать. Конечные точки векторов \mathbf{n} образуют тогда единичную сферу (сферу единичных направлений).

Значения этой функции суть поврежденности, измеренные для каждого данного направления. Ясно, что вычислить поврежденности можно в результате анализа тонкой структуры поврежденности, задавшись при этом определенной мерой поврежденности. Возможные варианты – разнообразны. Выбор определяется, конечно же, преобладающим механизмом зарождения и развития поврежденности: образование и развитие полей взаимовлияющих микротрещин – характерный механизм деградации упругого тела, пластическое течение сопровождается зарождением и распространением дислокаций, ползучесть металлов – образованием и ростом пор. Можно ввести также общие меры поврежденности, абстрагируясь от конкретного типа микродефектов. Одной из таких мер является сокращение эффективной площади плоского элемента нормального вектору \mathbf{n} .

Для актуального состояния поврежденности, вследствие распределенных микродефектов передающая нагрузку от одной части тела на другую эффективная площадь элемента $dA^*(\mathbf{n})$ оказывается меньше, чем площадь этого элемента без учета его микроструктуры поврежденности $dA(\mathbf{n})$. Таким образом, можно определить функцию ориентации

$$V(\mathbf{n}) = \frac{dA^*(\mathbf{n})}{dA(\mathbf{n})} \quad (1.1)$$

как отношение указанных площадей.

Переменную V будем называть ориентационным распределением поврежденности (заметим, что правильнее было бы называть V ориентационной сплошностью).

Подчеркнем, что принятая интерпретация значений распределения $V = V(\mathbf{n})$ – лишь одна из многих возможных. Можно, например, связать значения V с плотностью распределения микротрещин или задать ориентационным распределением сколь угодно тонкую структуру состояния поврежденности.

Для дальнейшего принципиально важным является только то, что поврежденность локально может быть описана некоторым скалярным полем, определенным на поверхности единичной сферы.

Ориентационное распределение поврежденности выражается формулой

$$V = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})}, \quad (1.2)$$

где \mathbf{C} есть симметричный положительно определенный тензор второго ранга.

Тензор \mathbf{C} может быть интерпретирован как тензор деформации Фингера (см. [14]), градиент \mathbf{G} которой должен удовлетворять следующему уравнению:

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}}{\det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T})}. \quad (1.3)$$

Следуя концепции, предложенной в [11], можно представить, что поврежденность материального элемента может быть элиминирована посредством его некоторой дополнительной деформации, так что тензор \mathbf{G} преобразует поврежденный материальный элемент в неповрежденный.

В силу уравнения (1.3), можно заключить, что ортогональный множитель в полярном разложении Коши тензора \mathbf{G} не изменяет ориентационного распределения поврежденности, поэтому тензор \mathbf{G} можно считать симметричным.

Представим тензор поврежденности второго ранга посредством следующего соотношения

$$\mathbf{D} = \mathbf{I} - \sqrt{\mathbf{C}}. \quad (1.4)$$

Ориентационное распределение поврежденности тогда можно представить в следующем виде:

$$V = \sqrt{\text{tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{D})^2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}]}. \quad (1.5)$$

Учитывая уравнения (1.3), (1.4), получаем

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \frac{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}}{\det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T})} \quad (1.6)$$

В работах [2], [12] с самого начала тензорная мера анизотропной поврежденности вводится как симметричный тензор второго ранга \mathbf{D} . Это позволяет преодолеть трудности, связанные с несимметричностью введенных ранее тензорных мер анизотропной поврежденности, а также дать ясную геометрическую и механическую интерпретацию собственных значений и главных направлений тензора поврежденности.

Будучи симметричным тензором второго ранга, тензор поврежденности \mathbf{D} имеет три взаимно ортогональных главных направления (главные оси поврежденности) и три соответствующих собственных значения (главные поврежденности). Векторы ортонормированного базиса из собственных векторов тензора \mathbf{D} будем обозначать через \mathbf{d}_a , а собственные значения – через D_a . В дальнейшем будет предполагаться, что базис $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ ориентирован точно так же, как и базис из собственных векторов тензора напряжений $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$. Это положение нуждается в обосновании, поскольку, вообще говоря, оно может и не выполняться.

Для содержательной интерпретации тензор поврежденности удобно представлять в форме спектрального разложения

$$\mathbf{D} = \sum_{a=1}^3 D_a \mathbf{d}_a \otimes \mathbf{d}_a. \quad (1.7)$$

Рассмотрим произвольно ориентированный поврежденный плоский элемент PQR , опирающийся на главные оси поврежденности в точке O текущей конфигурации K , так что образуется тетраэдр $OPQR$ (см. рис. 3).

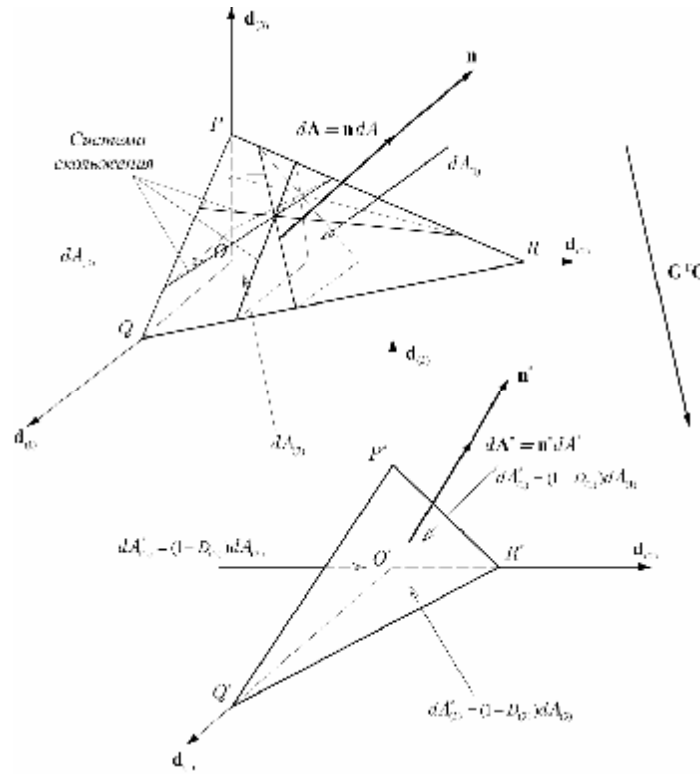


Рис. 3. Трансформация поврежденного объемного элемента, опирающегося на главные оси поврежденности, в эквивалентное неповрежденное состояние.

Эквивалентный неповрежденный тетраэдр $O^*P^*Q^*R^*$ получается в результате преобразования тетраэдра $OPQR$ линейным оператором $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$.

В силу уравнений (1.1) векторные элементы $d\mathbf{A}$ и $d\mathbf{A}^*$ связаны следующим соотношением:

$$d\mathbf{A}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{D})d\mathbf{A} \quad (1.8)$$

подставляя в которое спектральное разложение (1.7), получим

$$d\mathbf{A}^* = \sum_{a=1}^3 (1 - D_{(a)}) dA_{(a)} \mathbf{d}_{(a)}, \quad (1.9)$$

где $dA_{(a)} = d\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}_{(a)}$ есть площади граней тетраэдра $OPQR$, расположенных в главных плоскостях поврежденности.

Умножая обе части уравнения (1.9) скалярно на вектор $\mathbf{d}_{(b)}$, получим (см. [2]):

$$dA_b^* = (1 - D_b) dA_b \quad (\text{по } b \text{ не суммировать}), \quad (1.10)$$

где $dA_{(a)}^* = d\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{d}_{(a)}$ есть площади граней эквивалентного неповрежденного тетраэдра $O^*P^*Q^*R^*$, расположенных в главных плоскостях поврежденности.

Последнее уравнение позволяет дать механическую интерпретацию собственных значений тензора поврежденности: главные поврежденности выражают сокращение несущей нагрузки площади элементов, нормальных главным осям поврежденности, так как это определяется простыми формулами (1.10).

Формула (1.10) в простейшей форме выражает количественно эффект сокращения эффективной площади элементов континуума с внутренним распределением повреждений.

Возможна также и другая интерпретация главных поврежденностей через сокращение линейных размеров тетраэдра $OPQR$ при его трансформации в эквивалентный неповрежденный тетраэдр $O^*P^*Q^*R^*$.

Действительно, поскольку тензоры $\mathbf{I} - \mathbf{D}$ и $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ соосны, то справедливы соотношения

$$\sqrt{\mathbf{G}^T \mathbf{G}} \mathbf{d}_{(a)} = L_{(a)}^D \mathbf{d}_{(a)} \quad (\text{по } a \text{ не суммировать, } a = 1, 2, 3) \quad (1.11)$$

где $L_{(a)}^D$ есть фиктивные удлинения (сокращения) главных осей поврежденности при переходе в эквивалентное неповрежденное состояние.

Воспользовавшись уравнениями (1.6), (1.11), находим соотношения, связывающие главные поврежденности с главными фиктивными удлинениями:

$$1 - D_{(a)} = \frac{L_{(1)}^D L_{(2)}^D L_{(3)}^D}{L_{(a)}^D}. \quad (1.12)$$

Разрешив последние уравнения относительно $L_{(a)}^D$ (собственных значений тензора $\sqrt{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}$), находим также

$$\begin{aligned} L_{(1)}^D &= \sqrt{\frac{(1 - D_{(2)})(1 - D_{(3)})}{(1 - D_{(1)})}}, \\ L_{(2)}^D &= \sqrt{\frac{(1 - D_{(1)})(1 - D_{(3)})}{(1 - D_{(2)})}}, \\ L_{(3)}^D &= \sqrt{\frac{(1 - D_{(1)})(1 - D_{(2)})}{(1 - D_{(3)})}}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Таким образом, главные поврежденности $D_{(a)}$ определяют удлинения (сокращения) главных осей поврежденности при переходе в эквивалентное состояние \mathbf{K}^* в соответствии с формулами (1.13) и позволяют вычислить приведенные длины поврежденности. При этом, очевидно, что при переходе в эквивалентное состояние объем элемента может изменяться, т. е. поврежденность может иметь ненулевую объемную меру.

2. Основные соотношения связанной задачи

Ниже разрабатывается математическая модель трехмерного связанного состояния, базирующаяся на инкрементальных уравнениях относительно триортогональной изостатической координатной системы, включающих уравнения равновесия, обобщенное условие пластичности, уравнения совместности приращений деформаций и приращений поворотов, соотношения Коши, соотношения обобщенного ассоциированного закона течения с учетом микроповреждений, а также уравнения, определяющие изменение главных поврежденностей в зависимости от главных приращений деформаций.

2.1. Уравнения равновесия в триортогональной криволинейной сетке изостат

Рассмотрим уравнения равновесия в трижды ортогональной криволинейной сетке изостат, известные как уравнения Ламе (см., например, [1, с. 230–232]; [4, с. 42, 43]; [8, р. 91]).

Спектральное разложение тензора напряжений Коши имеет вид:

$$\mathbf{s} = s_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + s_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + s_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (2.1)$$

где s_1, s_2, s_3 – главные нормальные напряжения; $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ – базисные орты, направленные вдоль главных осей напряжений.

Уравнение равновесия в инвариантной форме есть

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Обозначим через d_k производную вдоль направления изостатической траектории с номером k

$$d_k \equiv \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (\text{по } k \text{ не суммировать } (k = 1, 2, 3)), \quad (2.3)$$

где x^k – триортогональные криволинейные изостатические координаты; g_{ij} – компоненты метрического тензора.

Вводя кривизны k_{ij} (где k_{ij} есть кривизна проекции изостаты с номером i , причем проектирование осуществляется параллельно главному направлению j на плоскость, ортогональную этому направлению)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{l}} k_{23} &= -\mathbf{l} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \tilde{\mathbf{N}}) \mathbf{m}], & k_{32} &= -\mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{N}}) \mathbf{n}], \\ \dot{\mathbf{m}} k_{13} &= -\mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{N}}) \mathbf{l}], & k_{31} &= -\mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{N}}) \mathbf{n}], \\ \dot{\mathbf{n}} k_{12} &= -\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{N}}) \mathbf{l}], & k_{21} &= -\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \tilde{\mathbf{N}}) \mathbf{m}], \end{aligned} \quad (2.4)$$

приведем уравнения Ламе (2.2) к виду (ср. [4, с. 43, уравнение (20)])

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{l}} d_1 s_1 + k_{23} (s_1 - s_2) + k_{32} (s_1 - s_3) &= 0, \\ \dot{\mathbf{m}} d_2 s_2 + k_{31} (s_2 - s_3) + k_{13} (s_2 - s_1) &= 0, \\ \dot{\mathbf{n}} d_3 s_3 + k_{12} (s_3 - s_1) + k_{21} (s_3 - s_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

где значения кривизн k_{ij} вдоль изостат можно, пользуясь деривационными формулами [9], связать уравнениями

$$\begin{aligned}
d_1 k_{32} + d_3 k_{12} + k_{32}^2 + k_{12}^2 + k_{13} k_{31} &= 0, \\
d_1 k_{23} + d_2 k_{13} + k_{23}^2 + k_{13}^2 + k_{21} k_{12} &= 0, \\
d_2 k_{31} + d_3 k_{21} + k_{31}^2 + k_{21}^2 + k_{32} k_{23} &= 0, \\
d_2 k_{12} &= k_{13} (k_{21} - k_{12}), \\
d_3 k_{23} &= k_{21} (k_{32} - k_{23}), \\
d_1 k_{31} &= k_{32} (k_{13} - k_{31}),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

или, что эквивалентно, – уравнениями

$$\begin{aligned}
d_1 k_{32} + d_3 k_{12} + k_{32}^2 + k_{12}^2 + k_{13} k_{31} &= 0, \\
d_1 k_{23} + d_2 k_{13} + k_{23}^2 + k_{13}^2 + k_{21} k_{12} &= 0, \\
d_2 k_{31} + d_3 k_{21} + k_{31}^2 + k_{21}^2 + k_{32} k_{23} &= 0, \\
d_3 k_{13} &= k_{12} (k_{31} - k_{13}), \\
d_1 k_{21} &= k_{23} (k_{12} - k_{21}), \\
d_2 k_{32} &= k_{31} (k_{23} - k_{32}).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Чаще всего оказывается удобнее использовать формулировку уравнений относительно приращений напряжений. Приращение тензора напряжений $d\mathbf{S}$ соответствуют малому изменению параметра нагружения вдоль действительной траектории нагружения. Уравнение равновесия в приращениях имеет вид

$$\mathring{\mathbf{N}} \cdot (d\mathbf{S}) = \mathbf{0}. \tag{2.8}$$

При дифференцировании спектрального разложения тензора напряжений (2.1) вдоль действительного процесса нагружения необходимо дифференцировать также и базисные векторы \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} , поскольку, вообще говоря, они будут поворачиваться при нагружении. С целью описания поворота главных осей напряжений \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} при малом догружении введем вектор $d\mathbf{w}$ такой, что

$$d\mathbf{l} = d\mathbf{w} \times \mathbf{l}, \quad d\mathbf{m} = d\mathbf{w} \times \mathbf{m}, \quad d\mathbf{n} = d\mathbf{w} \times \mathbf{n}. \tag{2.9}$$

Здесь $d\mathbf{w}$ следует рассматривать как единый символ, обозначающий вектор, определяемый согласно (2.9), а не приращение вектора, стоящего под знаком дифференциала.²

Разложим вектор $d\mathbf{w}$ по ортонормированному собственному локальному базису тензора напряжений \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} :

$$d\mathbf{w} = \mathbf{l} dw_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m} dw_{\langle 2 \rangle} + \mathbf{n} dw_{\langle 3 \rangle}. \tag{2.10}$$

Заметим, что $dw_{\langle j \rangle}$ есть физические компоненты вектора $d\mathbf{w}$ по отношению к изостатической координатной сетке. Они не являются действительными приращениями. Поэтому $dw_{\langle j \rangle}$ также следует трактовать как единый символ. Для простоты мы в дальнейшем будем использовать более короткое обозначение dw_j , опуская треугольные скобки.³

² Это обстоятельство мы не отражаем в нашей системе обозначений, чтобы не усложнять запись уравнений. Ясно, что при этом мы создаем ряд неудобств, затрудняющих понимание работы. Так, например, $d\mathbf{S}$ является действительным приращением тензора напряжений при догружении, в то время как $d\mathbf{w}$ приращением не является.

³ Мы используем треугольные скобки для указания физических компонент векторных и тензорных величин.

Изменение ориентаций базисных векторов на основании (2.9) и (2.10) вычисляется как

$$d\mathbf{l} = -\mathbf{n}dw_2 + \mathbf{m}dw_3, \quad d\mathbf{m} = \mathbf{n}dw_1 - \mathbf{l}dw_3, \quad d\mathbf{n} = -\mathbf{m}dw_1 + \mathbf{l}dw_2. \quad (2.11)$$

Дифференцируя спектральное разложение тензора напряжений (2.1) вдоль процесса нагружения и учитывая (2.11), получим

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} ds_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} ds_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} ds_1 + \\ & + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} (s_1 - s_2) dw_3 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} (s_3 - s_1) dw_2 + \\ & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} (s_1 - s_2) dw_3 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} (s_2 - s_3) dw_1 + \\ & + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} (s_3 - s_1) dw_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} (s_2 - s_3) dw_1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В дальнейшем будут необходимы следующие соотношения:

$$\tilde{\mathbf{N}} \times (\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{l}) + (\mathbf{l} \times \tilde{\mathbf{N}})\mathbf{n}, \quad (2.13)$$

а также

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot (\mathbf{j} \mathbf{l} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{n}(\mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{N}})\mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{l}) + \mathbf{j} (\mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{N}})\mathbf{n}. \quad (2.14)$$

Учитывая (2.12)–(2.14), находим уравнения равновесия в приращениях (2.8) относительно линий главных напряжений:

$$\left\{ \begin{aligned} d_1 ds_1 + k_{23}(ds_1 - ds_2) + k_{32}(ds_1 - ds_3) + (2k_{13} + k_{31} + d_2)[(s_1 - s_2)dw_3] + \\ + (2k_{12} + k_{21} + d_3)[(s_3 - s_1)dw_2] = 0, \\ d_2 ds_2 + k_{31}(ds_2 - ds_3) + k_{13}(ds_2 - ds_1) + (2k_{23} + k_{32} + d_1)[(s_1 - s_2)dw_3] + \\ + (2k_{21} + k_{12} + d_3)[(s_2 - s_3)dw_1] = 0, \\ d_3 ds_3 + k_{12}(ds_3 - ds_1) + k_{21}(ds_3 - ds_2) + (2k_{32} + k_{23} + d_1)[(s_3 - s_1)dw_2] + \\ + (2k_{31} + k_{13} + d_2)[(s_2 - s_3)dw_1] = 0, \end{aligned} \right. \quad (2.15)$$

где ds_1, ds_2, ds_3 – приращения главных напряжений.⁴

Заметим, что второе и третье уравнения в системе (2.15) получаются из первого циклической перестановкой индексов.

2.2. Уравнения совместности приращений малых деформаций в криволинейной сетке изостат

Сформулируем далее уравнения совместности приращений малых деформаций в триортогональной криволинейной сетке x^1, x^2, x^3 .

Уравнение совместности малых деформаций в приращениях, как известно, имеет вид [1]

$$-d\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{N}} \times d\mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad (2.16)$$

где тензор второго ранга $d\mathbf{P}$ есть транспонированный вихрь тензора приращений полных деформаций

$$d\mathbf{P} = (\tilde{\mathbf{N}} \times d\mathbf{e})^T. \quad (2.17)$$

Тензор несовместности $d\mathbf{S}$ симметричен:

$$d\mathbf{S} = (d\mathbf{S})^T. \quad (2.18)$$

⁴ Эти величины представляют собой действительные приращения главных напряжений s_1, s_2, s_3 при малом догружении.

Тензор $d\mathbf{P}$ антисимметричен, поскольку:

$$(\tilde{\mathbf{N}} \times d\mathbf{e})^T = -(d\mathbf{e} \times \tilde{\mathbf{N}}). \quad (2.19)$$

Физические компоненты тензора несовместности $d\mathbf{S}$ в триортогональной криволинейной координатной сетке вычисляются в форме [9]:

$$\begin{aligned} dS_{\langle 11 \rangle} = & \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{h_2} \left[\frac{\partial(h_2 d\mathbf{e}_{\langle 32 \rangle})}{\partial x^3} - \frac{\partial(h_3 d\mathbf{e}_{\langle 33 \rangle})}{\partial x^2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 12 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x^1} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 23 \rangle}}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 22 \rangle}}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} \right\} - \\ & - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^3} \left\{ \frac{1}{h_3} \left[\frac{\partial(h_2 d\mathbf{e}_{\langle 22 \rangle})}{\partial x^3} - \frac{\partial(h_3 d\mathbf{e}_{\langle 23 \rangle})}{\partial x^2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{d\mathbf{e}_{\langle 32 \rangle}}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} - \frac{d\mathbf{e}_{\langle 13 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} - \frac{d\mathbf{e}_{\langle 33 \rangle}}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} \right\} + \\ & + \frac{1}{h_1^2 h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x^1} \left[\frac{\partial(h_1 d\mathbf{e}_{\langle 21 \rangle})}{\partial x^2} - \frac{\partial(h_2 d\mathbf{e}_{\langle 22 \rangle})}{\partial x^1} \right] + \\ & + \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x^1} \left[\frac{d\mathbf{e}_{\langle 31 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 12 \rangle}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 11 \rangle}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \right] - \\ & - \frac{1}{h_1^2 h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \left[\frac{\partial(h_3 d\mathbf{e}_{\langle 33 \rangle})}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1 d\mathbf{e}_{\langle 31 \rangle})}{\partial x^3} \right] + \\ & + \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \left[\frac{d\mathbf{e}_{\langle 21 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x^3} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 13 \rangle}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x^3} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 11 \rangle}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x^1} \right], \quad (2.20) \\ \\ dS_{\langle 12 \rangle} = & \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{h_1} \left[\frac{\partial(h_3 d\mathbf{e}_{\langle 33 \rangle})}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1 d\mathbf{e}_{\langle 31 \rangle})}{\partial x^3} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{d\mathbf{e}_{\langle 21 \rangle}}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} - \frac{d\mathbf{e}_{\langle 13 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x^3} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 11 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x^1} \right\} - \\ & - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^3} \left\{ \frac{h_2}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 d\mathbf{e}_{\langle 23 \rangle})}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1 d\mathbf{e}_{\langle 21 \rangle})}{\partial x^3} \right] + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 31 \rangle}}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} - \frac{d\mathbf{e}_{\langle 13 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \right\} + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2^2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \left[\frac{\partial(h_2 d\mathbf{e}_{\langle 23 \rangle})}{\partial x^3} - \frac{\partial(h_3 d\mathbf{e}_{\langle 33 \rangle})}{\partial x^2} \right] + \\ & + \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \left[\frac{d\mathbf{e}_{\langle 12 \rangle}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x^1} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 23 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 22 \rangle}}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} \right] + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2^2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} \left[\frac{\partial(h_1 d\mathbf{e}_{\langle 21 \rangle})}{\partial x^2} - \frac{\partial(h_2 d\mathbf{e}_{\langle 22 \rangle})}{\partial x^1} \right] + \\ & + \frac{1}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} \left[\frac{d\mathbf{e}_{\langle 31 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 12 \rangle}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} + \frac{d\mathbf{e}_{\langle 11 \rangle}}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \right] + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{h_1 h_2^2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} \left[\frac{\partial(h_1 de_{\langle 31 \rangle})}{\partial x^2} - \frac{\partial(h_2 de_{\langle 32 \rangle})}{\partial x^1} \right] + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} \left[\frac{de_{\langle 12 \rangle}}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x^3} - \frac{de_{\langle 21 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} \right], \quad (2.21)$$

где $h_a = \sqrt{g_{aa}}$ (по a не суммировать) – параметры Ламе; $de_{\langle ij \rangle}$ – физические компоненты тензора de в изостатической системе координат:

$$\begin{aligned} de = & \mathbf{l} \otimes l de_{\langle 11 \rangle} + \mathbf{l} \otimes m de_{\langle 12 \rangle} + \mathbf{l} \otimes n de_{\langle 13 \rangle} + \\ & + \mathbf{m} \otimes m de_{\langle 22 \rangle} + \mathbf{m} \otimes l de_{\langle 21 \rangle} + \mathbf{m} \otimes n de_{\langle 23 \rangle} + \\ & + \mathbf{n} \otimes n de_{\langle 33 \rangle} + \mathbf{n} \otimes l de_{\langle 31 \rangle} + \mathbf{n} \otimes m de_{\langle 32 \rangle}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Компоненты $dS_{\langle 22 \rangle}$, $dS_{\langle 33 \rangle}$ получаются циклической перестановкой индексов в (2.20).

Компоненты $dS_{\langle 23 \rangle}$, $dS_{\langle 31 \rangle}$ получаются циклической перестановкой индексов в (2.21).

Здесь представляется уместным еще раз упомянуть о том, что ни $dS_{\langle ij \rangle}$, ни $de_{\langle ij \rangle}$ не являются действительными приращениями величин, находящихся под знаком дифференциала.

Опираясь на приведенные формулы, запишем уравнение совместности для приращений пластических деформаций в изостатической сетке. Мы будем пренебрегать упругими деформациями: $de = de^P$. Поскольку тензоры S и de^P соосны, то в сетке изостат матрица тензора de^P диагональна и в физических компонентах имеем

$$\begin{aligned} dS_{\langle 11 \rangle} = & -d_2 d_2 de_3 - d_3 d_3 de_2 + (k_{21}^2 - k_{31}^2)(de_3 - de_2) + \\ & + d_3 [k_{21}(de_3 - de_2)] - d_2 [k_{31}(de_3 - de_2)] - \\ & - k_{23} k_{32} (de_2 + de_3 - 2de_1) - k_{31} d_2 de_3 - \\ & - k_{21} d_3 de_2 - k_{32} d_1 de_2 - k_{23} d_1 de_3, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} dS_{\langle 12 \rangle} = & d_2 d_1 de_3 + d_2 [k_{32}(de_3 - de_1)] + k_{31} d_1 (de_3 - de_2) - \\ & - k_{23} d_2 de_3 + k_{31} (de_3 - de_1)(k_{32} - k_{23}), \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $de = \mathbf{l} \otimes l de_1 + \mathbf{m} \otimes m de_2 + \mathbf{n} \otimes n de_3$.

Как и прежде, компоненты $dS_{\langle 22 \rangle}$, $dS_{\langle 33 \rangle}$ получаются циклической перестановкой индексов в (2.23). Компоненты $dS_{\langle 23 \rangle}$, $dS_{\langle 31 \rangle}$ получаются циклической перестановкой индексов в (2.24).

В случае плоской сжимаемой⁵ пластической деформации имеется всего одно соотношение

$$dS_{\langle 33 \rangle} = 0, \quad (2.25)$$

или

$$\begin{aligned} -dS_{\langle 33 \rangle} = & d_1 d_1 de_2 + d_2 d_2 de_1 + \\ & + (de_2 - de_1)(d_1 k_2 - d_2 k_1 + k_2^2 - k_1^2) + \\ & + k_2 d_1 (2de_2 - de_1) - k_1 d_2 (2de_1 - de_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

⁵ В отличие от теории идеальной пластичности в поврежденной среде пластическая деформация, вообще говоря, сжимаемая.

2.3. Условие совместности для приращений поворотов

Сформулируем далее уравнения совместности для приращений поворотов в триортogonalной криволинейной сетке x^1, x^2, x^3 .

Вектор поворота dW определяется как половина вихря вектора приращений перемещений

$$2dW = \tilde{N} \times d\mathbf{u}. \quad (2.27)$$

Из данного определения следует уравнение совместности для поворотов в приращениях

$$\tilde{N} \cdot dW = \mathbf{0}. \quad (2.28)$$

В изостатической системе координат уравнение совместности для приращений поворотов (2.28) примет вид

$$(k_{23} + k_{32})d\Omega_1 + (k_{13} + k_{31})d\Omega_2 + (k_{12} + k_{21})d\Omega_3 + d_1d\Omega_1 + d_2d\Omega_2 + d_3d\Omega_3 = 0, \quad (2.29)$$

где $d\Omega_j$ – физические компоненты вектора dW в изостатической системе координат и, следовательно, они не являются действительными приращениями.

2.4. Соотношения Коши для плоской задачи в изостатической сетке координат

Соотношения Коши в приращениях имеют вид

$$2de = (\tilde{N} \otimes d\mathbf{u}) + (\tilde{N} \otimes d\mathbf{u})^T. \quad (2.30)$$

Приращения перемещений можно представить в виде разложения по векторам ортонормированного базиса \mathbf{l}, \mathbf{m} :

$$d\mathbf{u} = \mathbf{l}du_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m}du_{\langle 2 \rangle}. \quad (2.31)$$

Заметим, что величины $du_{\langle j \rangle}$ не являются действительными приращениями, а представляют собой компоненты разложения вектора $d\mathbf{u}$ по базису \mathbf{l}, \mathbf{m} . Тем не менее о величинах $du_{\langle j \rangle}$ мы будем говорить как о приращениях перемещений, помня, что они таковыми не являются.

Оператор Гамильтона, как нетрудно видеть, имеет форму (h_1, h_2 – параметры Ламе)

$$\tilde{N} = h_1^{-1}\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial x^1} + h_2^{-1}\mathbf{m} \frac{\partial}{\partial x^2}. \quad (2.32)$$

Оператор $\tilde{N} \otimes d\mathbf{u}$ вычисляется в виде:

$$\tilde{N} \otimes d\mathbf{u} = \mathbf{l} \otimes \tilde{N}du_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \tilde{N}du_{\langle 2 \rangle} + (du_{\langle 1 \rangle})\tilde{N} \otimes \mathbf{l} + (du_{\langle 2 \rangle})\tilde{N} \otimes \mathbf{m}. \quad (2.33)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \tilde{N}du_{\langle 1 \rangle} &= h_1^{-1}\mathbf{l} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial x^1} + h_2^{-1}\mathbf{m} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial x^2}, \\ \tilde{N}du_{\langle 2 \rangle} &= h_1^{-1}\mathbf{l} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial x^1} + h_2^{-1}\mathbf{m} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Используя далее выражения для производных от базисных векторов

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x^1} &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \mathbf{m}, & \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^1} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \mathbf{l}, \\ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x^2} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \mathbf{m}, & \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^2} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \mathbf{l}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

приходим к формулам

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{I} &= -h_1^{-1}(d_2 h_1) \mathbf{I} \otimes \mathbf{m} + h_2^{-1}(d_1 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \\ \tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{m} &= h_1^{-1}(d_2 h_1) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - h_2^{-1}(d_1 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{I}.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Используя (2.34) и (2.36), градиент приращений перемещений (2.33) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u} &= \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \left[h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + (d_1 du_{\langle 1 \rangle}) \right] + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + (d_2 du_{\langle 2 \rangle}) \right] + \\ &+ \mathbf{I} \otimes \mathbf{m} \left[-h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + (d_2 du_{\langle 1 \rangle}) \right] + \mathbf{m} \otimes \mathbf{I} \left[-h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + (d_1 du_{\langle 2 \rangle}) \right].\end{aligned}\quad (2.37)$$

Транспонировав уравнение (2.37), получаем

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u})^T &= \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \left[h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + (d_1 du_{\langle 1 \rangle}) \right] + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + (d_2 du_{\langle 2 \rangle}) \right] + \\ &+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{I} \left[-h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + (d_2 du_{\langle 1 \rangle}) \right] + \mathbf{I} \otimes \mathbf{m} \left[-h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + (d_1 du_{\langle 2 \rangle}) \right].\end{aligned}\quad (2.38)$$

Подставляя выражения (2.37) и (2.38) в соотношение Коши (2.30), приходим к

$$\begin{aligned}d\mathbf{e} &= \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \left[h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + (d_1 du_{\langle 1 \rangle}) \right] + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + (d_2 du_{\langle 2 \rangle}) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[-h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + (d_2 du_{\langle 1 \rangle}) - h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + (d_1 du_{\langle 2 \rangle}) \right] \mathbf{I} \otimes \mathbf{m} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[-h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + (d_2 du_{\langle 1 \rangle}) - h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + (d_1 du_{\langle 2 \rangle}) \right] \mathbf{m} \otimes \mathbf{I}.\end{aligned}\quad (2.39)$$

В силу того, что $d\mathbf{e} = d\mathbf{e}^P$, а также ассоциированного закона течения, из которого следует соосность тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, из формулы Коши (2.39) вытекают три соотношения

$$d\mathbf{e}_1^P = h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, \quad (2.40)$$

$$d\mathbf{e}_2^P = h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle}, \quad (2.41)$$

$$-h_1^{-1}(d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} - h_2^{-1}(d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} = 0. \quad (2.42)$$

Вводя кривизны изостатических траекторий $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ согласно

$$\begin{aligned}d_2 h_1 &= h_1 \mathbf{k}_1, \\ d_1 h_2 &= h_2 \mathbf{k}_2\end{aligned}\quad (2.43)$$

в соотношения (2.40)–(2.42), получим

$$d\mathbf{e}_1^P = \mathbf{k}_1 du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, \quad (2.44)$$

$$d\mathbf{e}_2^P = \mathbf{k}_2 du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle}, \quad (2.45)$$

$$d_1 du_{\langle 2 \rangle} - \mathbf{k}_1 du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} - \mathbf{k}_2 du_{\langle 2 \rangle} = 0. \quad (2.46)$$

Приведем также матричную форму двумерных соотношений Коши:

$$\begin{pmatrix} d\mathbf{e}_1 \\ d\mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

2.5. Трехмерные соотношения Коши в триортогональной изостатической координатной сетке

Соотношения Коши в приращениях есть

$$2de = (\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u}) + (\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u})^\top. \quad (2.48)$$

Приращения перемещений можно представить в виде разложения по векторам ортонормированного базиса на плоскости \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} :

$$d\mathbf{u} = \mathbf{l}du_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m}du_{\langle 2 \rangle} + \mathbf{n}du_{\langle 3 \rangle}. \quad (2.49)$$

Здесь величины $du_{\langle j \rangle}$ не являются действительными приращениями.

Трехмерный оператор Гамильтона, как нетрудно видеть, в триортогональной изостатической системе координат есть

$$\tilde{\mathbf{N}} = h_1^{-1}\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial x^1} + h_2^{-1}\mathbf{m} \frac{\partial}{\partial x^2} + h_3^{-1}\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial x^3}. \quad (2.50)$$

Оператор $\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u}$ вычисляется в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u} &= \mathbf{l} \otimes \tilde{\mathbf{N}}du_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \tilde{\mathbf{N}}du_{\langle 2 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \tilde{\mathbf{N}}du_{\langle 3 \rangle} + \\ &+ (du_{\langle 1 \rangle})\tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{l} + (du_{\langle 2 \rangle})\tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{m} + (du_{\langle 3 \rangle})\tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{N}}du_{\langle 1 \rangle} &= h_1^{-1}\mathbf{l} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial x^1} + h_2^{-1}\mathbf{m} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial x^2} + h_3^{-1}\mathbf{n} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial x^3}, \\ \tilde{\mathbf{N}}du_{\langle 2 \rangle} &= h_1^{-1}\mathbf{l} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial x^1} + h_2^{-1}\mathbf{m} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial x^2} + h_3^{-1}\mathbf{n} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial x^3}, \\ \tilde{\mathbf{N}}du_{\langle 3 \rangle} &= h_1^{-1}\mathbf{l} \frac{\partial du_{\langle 3 \rangle}}{\partial x^1} + h_2^{-1}\mathbf{m} \frac{\partial du_{\langle 3 \rangle}}{\partial x^2} + h_3^{-1}\mathbf{n} \frac{\partial du_{\langle 3 \rangle}}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (2.52)$$

или

$$\begin{aligned} \nabla du_{\langle 1 \rangle} &= \mathbf{l}(d_1 du_{\langle 1 \rangle}) + \mathbf{m}(d_2 du_{\langle 1 \rangle}) + \mathbf{n}(d_3 du_{\langle 1 \rangle}), \\ \nabla du_{\langle 2 \rangle} &= \mathbf{l}(d_1 du_{\langle 2 \rangle}) + \mathbf{m}(d_2 du_{\langle 2 \rangle}) + \mathbf{n}(d_3 du_{\langle 2 \rangle}), \\ \nabla du_{\langle 3 \rangle} &= \mathbf{l}(d_1 du_{\langle 3 \rangle}) + \mathbf{m}(d_2 du_{\langle 3 \rangle}) + \mathbf{n}(d_3 du_{\langle 3 \rangle}). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Используя далее выражения для производных от базисных векторов

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x^1} &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \mathbf{m} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x^3} \mathbf{n} = -(d_2 h_1) \mathbf{m} - (d_3 h_1) \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x^2} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \mathbf{m} = (d_1 h_2) \mathbf{m}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x^3} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x^1} \mathbf{n} = (d_1 h_3) \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^1} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \mathbf{l} = (d_2 h_1) \mathbf{l}, \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^2} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \mathbf{l} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} \mathbf{n} = -(d_1 h_2) \mathbf{l} - (d_3 h_2) \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^3} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} \mathbf{n} = (d_2 h_3) \mathbf{n}, \\
\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^1} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x^3} \mathbf{l} = (d_3 h_1) \mathbf{l}, \\
\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^2} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} \mathbf{m} = (d_3 h_2) \mathbf{m},
\end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^3} = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x^1} \mathbf{l} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} \mathbf{m} = -(d_1 h_3) \mathbf{l} - (d_2 h_3) \mathbf{m},$$

приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{l} &= -\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} - \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\
\tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{m} &= \frac{1}{h_1} (d_2 h_1) \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\
\tilde{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{n} &= \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} - \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Используя (2.53) и (2.51), соотношение (iv) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u} &= \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
&+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
&+ \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
&+ \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} \right] + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
&+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
&+ \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} \right].
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Транспонировав уравнение (2.58), получаем

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathbf{N}} \otimes d\mathbf{u})^T = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
& + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
& + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} \right] + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
& + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
& + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} \right]. \quad (2.59)
\end{aligned}$$

Подставляя выражения (2.58) и (2.59) в соотношение Коши (2.48), получим

$$\begin{aligned}
de = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
& + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
& + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} - \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} - \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} \right].
\end{aligned}$$

Тензор de симметричен.

В силу того, что в приближении жесткопластического анализа $de = de^P$, а также ассоциированного закона течения, из которого следует соосность тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, полученная формула приводит к шести соотношениям:

$$de_1^P = \frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 1 \rangle}, \quad (2.60)$$

$$de_2^P = \frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle}, \quad (2.61)$$

$$de_3^P = \frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle}, \quad (2.62)$$

$$-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_2du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle} = 0, \quad (2.63)$$

$$-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_3du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle} = 0, \quad (2.64)$$

$$-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 2 \rangle} - \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle} = 0. \quad (2.65)$$

Вводя кривизны в соотношения (2.60)–(2.65) согласно

$$\begin{aligned} d_1h_3 &= h_3k_{32}, & d_1h_2 &= h_2k_{23}, & d_2h_3 &= h_3k_{31}, \\ d_2h_1 &= h_1k_{13}, & d_3h_2 &= h_2k_{21}, & d_3h_1 &= h_1k_{12}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

получим

$$de_1^P = k_{13}du_{\langle 2 \rangle} + k_{12}du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 1 \rangle}, \quad (2.67)$$

$$de_2^P = k_{23}du_{\langle 1 \rangle} + k_{21}du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle}, \quad (2.68)$$

$$de_3^P = k_{32}du_{\langle 1 \rangle} + k_{31}du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle}, \quad (2.69)$$

$$-k_{13}du_{\langle 1 \rangle} - k_{23}du_{\langle 2 \rangle} + d_2du_{\langle 1 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle} = 0, \quad (2.70)$$

$$-k_{12}du_{\langle 1 \rangle} - k_{32}du_{\langle 3 \rangle} + d_3du_{\langle 1 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle} = 0, \quad (2.71)$$

$$-k_{21}du_{\langle 2 \rangle} - k_{31}du_{\langle 3 \rangle} + d_3du_{\langle 2 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle} = 0. \quad (2.72)$$

Эти соотношения компактно представляются в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} de_1^P \\ de_2^P \\ de_3^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & k_{13} & k_{12} \\ k_{23} & d_2 & k_{21} \\ k_{32} & k_{31} & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -k_{13} + d_2 & -k_{23} + d_1 & 0 \\ -k_{12} + d_3 & 0 & -k_{32} + d_1 \\ 0 & -k_{21} + d_3 & -k_{31} + d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix} = 0.$$

В случае плоской деформации $du_{\langle 3 \rangle} = 0$, $de_3^P = 0$, $k_1 = k_{13}$, $k_2 = k_{23}$ матричные соотношения упрощаются и принимают вид

$$\begin{pmatrix} de_1^P \\ de_2^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & k_1 \\ k_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -k_1 + d_2 & -k_2 + d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

В случае осесимметричного состояния $du_{\langle 2 \rangle} = 0$, $d_2 = 0$, $k_{31} = 0$, $k_{13} = 0$ соотношения Коши примут вид:

$$\begin{pmatrix} de_1^P \\ de_2^P \\ de_3^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & k_{12} \\ k_{23} & 0 & k_{21} \\ k_{32} & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ 0 \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -k_{23} + d_1 & 0 \\ -k_{12} + d_3 & 0 & -k_{32} + d_1 \\ 0 & -k_{21} + d_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ 0 \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix} = 0.$$

2.6. Эффективные напряжения

Рассмотрим призматический образец, растягиваемый силой P . Обозначим через A и A^* соответственно площадь поперечного сечения образца в начальном неповрежденном и текущем поврежденном состояниях соответственно (рис. 1, 2). В силу того, что параметр поврежденности D представляет собой относительное сокращение эффективной площади, то для параметра D имеет место следующее простое соотношение:

$$1 - D = \frac{A^*}{A}. \quad (2.73)$$

Вызванное внутренним распределением повреждений сокращение эффективной площади, сразу же приводит к важнейшему представлению об эффекте возрастания внутренних напряжений в теле с распределенными повреждениями. Действительно, наряду с напряжениями

$$s = \frac{P}{A}, \quad (2.74)$$

очевидно, следует рассмотреть эффективные напряжения

$$s^* = \frac{P}{A^*}, \quad (2.75)$$

которые в силу формулы (2.73) можно также представить в виде:

$$s^* = \frac{s}{1 - D} \quad (2.76)$$

или в общем случае, учитывая соосность тензора напряжений и тензора поврежденности,

$$s_j^* = \frac{s_j}{1 - D_j} \quad (\text{по } j \text{ не суммировать}). \quad (2.77)$$

Ясно, что $s_j^* > s_j$, если поврежденность ненулевая.

2.7. Обобщенное условие текучести Кулона–Треска для микроповрежденного тела

Понятие эффективного напряжения позволяет весьма просто произвести обобщение критериев текучести изотропных тел так, чтобы учесть возможную их повреждаемость. Действительно, рассматривая условие текучести изотропного тела в наиболее общей форме

$$f(s_1, s_2, s_3) = 0,$$

мы переформулируем его в терминах эквивалентных напряжений

$$f(s_1^{\vartheta}, s_2^{\vartheta}, s_3^{\vartheta}) = 0.$$

В пространстве главных напряжений классическое условие текучести Треска изображается поверхностью шестигранной призмы с ребрами

$$s_1 \pm 2k = s_2 = s_3, \quad s_1 = s_2 \pm 2k = s_3, \quad s_1 = s_2 = s_3 \pm 2k, \quad (2.78)$$

где k – предел текучести при чистом сдвиге.

Для напряженного состояния, соответствующего грани призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы главные напряжения были связаны соотношением

$$s_1 - s_2 = 2k. \quad (2.79)$$

Для напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялось равенство

$$s_1 = s_2 = s_3 \pm 2k. \quad (2.80)$$

Последнее условие означает, что главное нормальное напряжение s_3 является либо наименьшим, либо наибольшим.

Перепишем классическое условие Треска для грани (2.79) и ребра (2.80) с учетом соотношений (2.77), выражающих увеличение внутренних напряжений вследствие повреждений, заменяя главные напряжения эквивалентными, и получим обобщенное условие текучести Треска для тела с микроповреждениями.

Обобщенное условие текучести для грани призмы Треска (2.79) имеет форму:

$$s_1^{\vartheta} - s_2^{\vartheta} = 2k \quad (2.81)$$

или

$$\frac{s_1}{1-D_1} - \frac{s_2}{1-D_2} = 2k. \quad (2.82)$$

Обобщенное условие текучести для ребра призмы Треска (2.80) примет вид:

$$s_1^{\vartheta} = s_2^{\vartheta} = s_3^{\vartheta} \pm 2k \quad (2.83)$$

или (ограничиваясь выбором положительного знака)

$$\frac{s_1}{1-D_1} - \frac{s_3}{1-D_3} = 2k, \quad \frac{s_2}{1-D_2} - \frac{s_3}{1-D_3} = 2k. \quad (2.84)$$

2.8. Закон накопления повреждений

Закон накопления повреждений принимая во внимание соосность тензора напряжений и тензора поврежденности, примем в простейшей форме:

$$dD_j = K_j \operatorname{sgn}(de_j^p) de_j^p \quad (\text{по } j \text{ не суммировать}), \quad (2.85)$$

где K_j – определяющие функции ($K_j > 0$). Здесь dD_j представляют собой действительные приращения главных поврежденностей D_j , а de_j^P действительными приращениями не являются.⁶

Закон накопления повреждений, также можно представлять в виде обобщенной степенной зависимости

$$dD_j = K_j (\text{sgn}(de_j^P) de_j^P)^a \quad (\text{по } j \text{ не суммировать}), \quad (2.86)$$

или в общей линейной форме

$$dD_j = K_{js} \text{sgn}(de_s^P) de_s^P, \quad (2.87)$$

где a – постоянный показатель; определяющие функции K_j и K_{js} не зависят от приращений dS_j , de_j^P , dD_j .

Следует также заметить, что в соответствии с представлениями, положенными в основу рассматриваемой математической модели связанного состояния, поврежденность возрастает в процессе деформации сжатия, поэтому в соотношениях (2.85)–(2.87), определяющих закон накопления повреждений, используется модуль главных приращений пластических деформаций $\text{sgn}(de_s^P) de_s^P$.⁷

2.9. Обобщенный ассоциированный закон течения тела с микроповреждениями

Мы сохраним традиционную форму ассоциированного с условием пластичности

$$f(S_1^s, S_2^s, S_3^s) = 0$$

закона течения тела с микроповреждениями, приняв соосность тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, и три соотношения

$$de_j^P = d\Lambda \frac{\partial f}{\partial S_j},$$

где $d\Lambda$ – множитель пропорциональности.

Рассмотрим соотношения ассоциированного с условием пластичности Треска закона течения. Нас будет интересовать определяющая зависимость главных приращений пластической деформации от приращений главных напряжений в поврежденной среде.

1. Предположим, что напряженное состояние соответствует грани призмы Треска (2.82). Согласно ассоциированному закону течения определяющие зависимости для грани (2.82) есть

$$de_1^P = \frac{d\Lambda}{1 - D_1}, \quad de_2^P = -\frac{d\Lambda}{1 - D_2}, \quad de_3^P = 0. \quad (2.88)$$

⁶ Мы используем термин *главные приращения пластических деформаций* для указания на величины de_j^P .

⁷ Это означает, что независимо от процесса, всегда $dD_j \geq 0$. Закон накопления повреждений в случае, когда при деформации сжатия не происходит рост поврежденности, очевидно, имеет следующий вид (по j не суммировать):

$$dD_j = \begin{cases} K_j \text{sgn}(de_j^P) de_j^P, & de_j^P > 0; \\ 0, & de_j^P \leq 0. \end{cases}$$

Множитель $d\Lambda$ без труда исключается с помощью уравнения, устанавливающего непрерывность нагружения:

$$d\left(\frac{s_1}{1-D_1} - \frac{s_2}{1-D_2}\right) = 0. \quad (2.89)$$

Учитывая, что приращения главных поврежденностей и главные приращения пластических деформаций связаны определяющими зависимостями вида

$$dD_1 = K_1 \operatorname{sgn}(de_1^P) de_1^P, \quad dD_2 = K_2 \operatorname{sgn}(de_2^P) de_2^P, \quad dD_3 = 0, \quad (2.90)$$

где определяющие функции⁸ не зависят от приращений главных напряжений и главных приращений пластических деформаций, находим

$$d\Lambda = \frac{(1-D_1)^2 [(b-1)ds_2 - ds_1]}{K_1 \operatorname{sgn}(de_1^P) s_1 + (b-1)^3 K_2 \operatorname{sgn}(de_2^P) s_2}, \quad (2.91)$$

$$b-1 = \frac{1-D_1}{1-D_2},$$

и, таким образом,

$$\frac{de_1^P}{F} = (b-1)ds_2 - ds_1. \quad (2.92)$$

Здесь F не зависит от приращений и определяется как

$$F = \frac{1-D_1}{K_1 \operatorname{sgn}(de_1^P) s_1 + (b-1)^3 K_2 \operatorname{sgn}(de_2^P) s_2}. \quad (2.93)$$

Заметим, что на основании $s_j de_j^P \geq 0$ вдоль всего процесса нагружения $d\Lambda \geq 0$, следовательно, при течении на грани призмы Треска

$$\operatorname{sgn}(de_1^P) = +1, \quad \operatorname{sgn}(de_2^P) = -1.$$

В силу ассоциированного закона течения на грани (2.88) выполняется соотношение

$$de_2^P = -(b-1)de_1^P, \quad (2.94)$$

поэтому

$$\begin{cases} \frac{de_1^P}{F} = (b-1)ds_2 - ds_1, \\ \frac{de_2^P}{F} = -(b-1)^2 ds_2 + (b-1)ds_1. \end{cases} \quad (2.95)$$

Заметим также, что условие разупрочнения при накоплении повреждений

$$\frac{\partial f}{\partial s_j} ds_j < 0$$

в случае течения на грани призмы Треска эквивалентно неравенству $(b-1)ds_2 - ds_1 > 0$, которое гарантирует выполнение неравенства диссипации $d\Lambda > 0$.

⁸ В первом приближении их можно считать постоянными. В случае течения на грани призмы Треска главное приращение de_2^P не может быть положительным. Накопление поврежденности D_2 при этом не может быть значительным и с хорошим приближением, поэтому можно полагать, что $K_2 = 0$.

Упрочнение $\frac{\partial f}{\partial s_j} ds_j > 0$ при накоплении повреждений никогда не реализуется,

поэтому условие $(b-1)ds_2 - ds_1 < 0$ вдоль действительного процесса никогда не выполняется.

Процессы, характеризуемые условием $(b-1)ds_2 - ds_1 = 0$, происходят, как это следует из соотношений ассоциированного закона течения на грани, при нулевых главных скоростях пластических деформаций и не сопровождаются ростом главных поврежденностей.⁹

2. Рассмотрим далее соотношения между главными приращениями пластических деформаций и приращениями главных напряжений при тчении на ребре призмы Треска.

Ребро образовано пересечением граней и всегда можно считать, что оно задается уравнениями (2.84). Согласно ассоциированному закону течения, определяющие зависимости для ребра (2.84) есть

$$de_1^P = \frac{d\Lambda_1}{1-D_1}, \quad de_2^P = \frac{d\Lambda_2}{1-D_2}, \quad de_3^P = -\frac{d\Lambda_1}{1-D_3} - \frac{d\Lambda_2}{1-D_3}. \quad (2.96)$$

Неравенство диссипации

$$s_j de_j^P = 2k(d\Lambda_1 + d\Lambda_2) \geq 0$$

должно выполняться вдоль всего процесса нагружения.

Множители $d\Lambda_1$, $d\Lambda_2$ без труда исключаются с помощью уравнения, устанавливающего непрерывность нагружения, и закона накопления повреждений

$$dD_1 = K_1 \operatorname{sgn}(de_1^P) de_1^P, \quad dD_2 = K_2 \operatorname{sgn}(de_2^P) de_2^P, \quad dD_3 = K_3 \operatorname{sgn}(de_3^P) de_3^P.$$

Мы приводим соответствующие формулы для случая $de_1^P \geq 0$, $de_2^P \geq 0$, $de_3^P \leq 0$:

$$\begin{aligned} d\Lambda_1 = & \left[(1-D_1)^2 \left[s_2 K_2 - (b_2-1)^3 s_3 K_3 \right] \left[(b_1-1) ds_3 - ds_1 \right] + \right. \\ & \left. + (1-D_2)^2 (b_1-1)^3 s_3 K_3 \left[(b_2-1) ds_3 - ds_2 \right] \right] \times \\ & \times \left[s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3 \right]^{-1}, \\ d\Lambda_2 = & \left[(1-D_2)^2 \left[s_1 K_1 - (b_1-1)^3 s_3 K_3 \right] \left[(b_2-1) ds_3 - ds_2 \right] + \right. \\ & \left. + (1-D_1)^2 (b_2-1)^3 s_3 K_3 \left[(b_1-1) ds_3 - ds_1 \right] \right] \times \\ & \times \left[s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3 \right]^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$b_1 - 1 = \frac{1-D_1}{1-D_3}, \quad b_2 - 1 = \frac{1-D_2}{1-D_3}.$$

Главные приращения пластических деформаций de_1^P и de_2^P выражаются через приращения главных напряжений определяющими зависимостями вида

$$\begin{aligned} \frac{de_1^P}{S_1} &= ds_3 - E_{12} ds_2 - E_{11} ds_1, \\ \frac{de_2^P}{S_2} &= ds_3 - E_{22} ds_2 - E_{21} ds_1, \end{aligned} \quad (2.97)$$

⁹ При таких процессах, однако, может происходить поворот триэдра главных напряжений \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} .

в которых

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left[(1-D_1)(b_1-1) \left[s_2 K_2 - (b_2-1)^3 s_3 K_3 \right] + (1-D_2)^2 (1-D_1)^{-1} (b_1-1)^3 (b_2-1) s_3 K_3 \right] \times \\
&\quad \times \left[s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3 \right]^{-1}, \\
S_2 &= \left[(1-D_2)(b_2-1) \left[s_1 K_1 - (b_1-1)^3 s_3 K_3 \right] + (1-D_1)^2 (1-D_2)^{-1} (b_2-1)^3 (b_1-1) s_3 K_3 \right] \times \\
&\quad \times \left[s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3 \right]^{-1}, \\
S_1 E_{11} &= \frac{(1-D_1) \left[s_2 K_2 - (b_2-1)^3 s_3 K_3 \right]}{s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3}, \\
S_2 E_{22} &= \frac{(1-D_2) \left[s_1 K_1 - (b_1-1)^3 s_3 K_3 \right]}{s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3}, \\
S_1 E_{12} &= \frac{(1-D_2)^2 (1-D_1)^{-1} (b_1-1)^3 s_3 K_3}{s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3}, \\
S_2 E_{21} &= \frac{(1-D_1)^2 (1-D_2)^{-1} (b_2-1)^3 s_3 K_3}{s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3}.
\end{aligned}$$

Для главного приращения de_3^P имеем формулу (обобщенный закон сжимаемости микроповрежденного тела)

$$-de_3^P = (b_1-1)de_1^P + (b_2-1)de_2^P \quad (2.98)$$

или

$$\begin{aligned}
-\frac{de_3^P}{S_1 S_2} &= \left[\frac{b_1-1}{S_2} + \frac{b_2-1}{S_1} \right] dS_3 - \left[\frac{b_1-1}{S_2} E_{12} + \frac{b_2-1}{S_1} E_{22} \right] dS_2 - \\
&\quad - \left[\frac{b_1-1}{S_2} E_{11} + \frac{b_2-1}{S_1} E_{21} \right] dS_1.
\end{aligned} \quad (2.99)$$

Соотношения ассоциированного закона течения для ребра (2.97), (2.99) справедливы, лишь когда наблюдается активное разупрочнение:

$$\begin{aligned}
(b_1-1)dS_3 - dS_1 &\geq 0, \\
(b_2-1)dS_3 - dS_2 &\geq 0.
\end{aligned} \quad (2.100)$$

Режим нагружения

$$\begin{aligned}
(b_1-1)dS_3 - dS_1 &= 0, \\
(b_2-1)dS_3 - dS_2 &= 0
\end{aligned} \quad (2.101)$$

характеризуется тем, что $de_j^P = 0$ и $dD_j = 0$.¹⁰

Уравнения ассоциированного закона течения для грани (2.95) и ребра (2.97), (2.99) не позволяют, в силу линейной зависимости правых частей, найти обратные соотношения, т. е. выразить приращения главных напряжений через главные приращения пластических деформаций.

¹⁰ При таких режимах течения, однако, может происходить поворот главных осей напряжений, т. е. поворот триэдра \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} .

3. Связанное плоское деформированное состояние

Плоское деформированное состояние характеризуется условием $de_3 = 0$. В плоскости течения x_1, x_2 имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий. Одно из семейств будем идентифицировать номером 1, другое – номером 2. Если считать, что s_1 – наибольшее главное напряжение, то обобщенное условие пластичности Треска в состоянии плоской деформации выражается уравнением

$$\frac{s_1}{1-D_1} - \frac{s_2}{1-D_2} = 2k, \quad (3.1)$$

где k , по-прежнему, есть предел текучести при сдвиге.

Обозначая через q угол наклона к оси x_1 изостаты первого семейства, получаем

$$k_1 = k_{13} = -d_1q, \quad k_2 = k_{23} = d_2q.$$

Единственное деривационное соотношение в этом случае имеет форму

$$d_1k_2 + d_2k_1 + k_1^2 + k_2^2 = 0.$$

Уравнения равновесия, сформулированные в изостатической координатной сетке, сводятся к двум соотношениям Ламе–Максвелла

$$d_1s_1 + k_2(s_1 - s_2) = 0,$$

$$d_2s_2 + k_1(s_2 - s_1) = 0.$$

Пренебрегая упругими деформациями, приведем основные соотношения для приращений.

Уравнения равновесия в приращениях

$$\begin{cases} d_1ds_1 + k_2(ds_1 - ds_2) + (2k_1 + d_2)[(ds_1 - ds_2)dw] = 0, \\ d_2ds_2 + k_1(ds_2 - ds_1) + (2k_2 + d_1)[(ds_1 - ds_2)dw] = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $dw = dw_3$ определяет малый поворот главных осей напряжений в плоскости течения при догружении.

Формулы Коши, связывающие главные приращения пластических деформаций с приращениями перемещений, в случае плоской деформации имеют следующий вид (см. (2.44), (2.45)):

$$\begin{aligned} de_1^P &= k_1 du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, \\ de_2^P &= k_2 du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Условие соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций (см. (2.46)) приводит к соотношению

$$d_1 du_{\langle 2 \rangle} - k_1 du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} - k_2 du_{\langle 2 \rangle} = 0. \quad (3.4)$$

Условие совместности для приращений поворотов (2.29) в случае плоской связанной задачи удовлетворяется тождественно.

Уравнение совместности (упругими деформациями пренебрегаем $de_j = de_j^P$)

$$\begin{aligned} -d_2 d_2 de_1 - (b-1)d_1 d_1 de_1 - ((1+b)k_2 + 2d_1 b)d_1 de_1 + \\ + (1+b)k_1 d_2 de_1 + (d_1 d_1 b + k_2 d_1 b - \\ - k_1 d_2 b - b d_1 k_2 + b d_2 k_1 - b k_2^2 + b k_1^2) de_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

При плоском пластическом течении главные приращения пластических деформаций имеют разные знаки:

$$de_1^P \geq 0, \quad de_2^P \leq 0.$$

Ассоциированный закон течения

$$\begin{cases} (b-1)de_1 + de_2 = 0, \\ \frac{de_1}{F} = (b-1)ds_2 - ds_1, \end{cases} \quad (3.6)$$

где F не зависит от приращений

$$F = \frac{(1-D_1)}{K_1s_1 - (b-1)^3K_2s_2}, \quad (3.7)$$

$$b-1 = \frac{1-D_1}{1-D_2}.$$

Закон накопления повреждений есть (K_1, K_2 – положительные постоянные)

$$\begin{cases} dD_1 = K_1de_1^p, \\ dD_2 = -K_2de_2^p. \end{cases} \quad (3.8)$$

Полученная система соотношений замкнута, например, относительно пяти приращений $ds_1, ds_2, dw, de_1, de_2$, поскольку для их определения имеется ровно пять уравнений.

Уравнение совместности (3.5) относительно главного приращения de_1 можно формально рассматривать независимо от остальных соотношений плоской задачи. Главная часть этого уравнения есть:

$$\frac{1}{g_{22}}\partial_2\partial_2de_1 - \frac{1}{g_{11}}(b-1)\partial_1\partial_1de_1 + \mathbf{K} = 0. \quad (3.9)$$

Характеристическое уравнение, которое получается по главной части (3.9), указывает на его гиперболичность. Характеристики плоской связанной задачи

$$\frac{\sqrt{g_{11}}dx^1}{\sqrt{g_{22}}dx^2} = \pm \sqrt{\frac{1-D_1}{1-D_2}} \quad (3.10)$$

совпадают с линиями максимального касательного напряжения только в случае изотропного в плоскости течения распределения поврежденности $D_1 = D_2$.

4. Связанное осесимметричное состояние

Связанное осесимметричное пластическое течение, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона–Треска, можно разделить на следующие два типа:¹¹

1) эквивалентное тангенциальное напряжение является наибольшим (наименьшим) главным эквивалентным напряжением, а эквивалентные меридиональные главные напряжения равны;

2) эквивалентное напряжение равно одному из меридиональных главных эквивалентных напряжений, эквивалентное максимальное касательное напряжение в меридиональной плоскости равно пределу текучести k .

¹¹ Эквивалентное тангенциальное напряжение всегда будет главным эквивалентным напряжением при связанном осесимметричном состоянии.

Второй случай – обобщенное состояние «полной пластичности» Хаара–Кармана. Если присвоить эквивалентному тангенциальному главному напряжению второй номер и обозначить через s_3^{ϑ} наибольшее (наименьшее) из двух меридиональных главных эквивалентных напряжений, то приходим к соотношению, характеризующему обобщенное состояние «полной пластичности»:

$$s_1^{\vartheta} = s_2^{\vartheta} = s_3^{\vartheta} \pm 2k,$$

где k – предел текучести при чистом сдвиге.

В случае осесимметричной деформации удобно ввести цилиндрическую систему координат r, j, z .

Обобщенное условие пластичности Треска в состоянии осесимметричной деформации примем в виде

$$\frac{s_1}{1-D_1} - \frac{s_3}{1-D_3} = 2k, \quad \frac{s_2}{1-D_2} - \frac{s_3}{1-D_3} = 2k. \quad (4.1)$$

В плоскости $j = \text{const}$ имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий, соответствующих первому и третьему главным направлениям. Введем угол c так, чтобы наклон (к горизонтальной оси) траектории первого семейства был равен $p - c$.

В этом случае справедливы следующие соотношения:

$$d_2 = 0, \quad k_{23} = \frac{\cos c}{r}, \quad k_{21} = \frac{\sin c}{r}, \quad k_{31} = 0, \quad k_{13} = 0.$$

Деривационные соотношения выражаются либо группой уравнений

$$\begin{aligned} d_1 k_{32} + d_3 k_{12} + k_{32}^2 + k_{12}^2 &= 0, \\ d_1 k_{23} + k_{23}^2 + k_{21} k_{12} &= 0, \\ d_3 k_{21} + k_{21}^2 + k_{32} k_{23} &= 0, \\ d_3 k_{23} &= k_{21} (k_{32} - k_{23}), \end{aligned}$$

либо группой уравнений

$$\begin{aligned} d_1 k_{32} + d_3 k_{12} + k_{32}^2 + k_{12}^2 &= 0, \\ d_1 k_{23} + k_{23}^2 + k_{21} k_{12} &= 0, \\ d_3 k_{21} + k_{21}^2 + k_{32} k_{23} &= 0, \\ d_1 k_{21} &= k_{23} (k_{12} - k_{21}). \end{aligned}$$

Компоненты тензора напряжений можно задать в форме

$$\begin{aligned} s_{\langle rr \rangle} &= p + t \cos 2c, \\ s_{\langle zz \rangle} &= p - t \cos 2c, \\ s_{\langle jj \rangle} &= s_2, \\ s_{\langle rz \rangle} &= -t \sin 2c, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(s_1 + s_3), \\ t &= \frac{1}{2}(s_1 - s_3). \end{aligned}$$

Главные напряжения определяются как

$$s_1, s_2 = \frac{1}{2}(s_{\langle rr \rangle} + s_{\langle zz \rangle}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(s_{\langle rr \rangle} - s_{\langle zz \rangle})^2 + 4s_{\langle rz \rangle}^2}. \quad (4.3)$$

Уравнения равновесия, сформулированные относительно изостатической сетки, есть

$$\begin{aligned} d_1 s_1 + k_{23}(s_1 - s_2) + k_{32}(s_1 - s_3) &= 0, \\ d_3 s_3 + k_{12}(s_3 - s_1) + k_{21}(s_3 - s_2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} k_{12} &= \frac{\text{ctg } c}{r} d_1 r + d_1 c - \frac{\cos c \text{ctg } c}{r} = d_1 c, \\ k_{32} &= \frac{\text{tg } c}{r} d_3 r - d_3 c - \frac{\sin \text{ctg } c}{r} = -d_3 c, \end{aligned}$$

уравнения равновесия (4.4) можно представить в форме

$$\begin{aligned} d_1 s_1 + \frac{\cos c}{r} (s_1 - s_2) - (s_1 - s_3) d_3 c &= 0, \\ d_3 s_3 + \frac{\sin c}{r} (s_3 - s_2) - (s_1 - s_3) d_1 c &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Уравнения равновесия в приращениях главных напряжений, сформулированные в изостатической сетке, можно получить в следующем виде:

$$\begin{cases} d_1 ds_1 + k_{23}(ds_1 - ds_2) + k_{32}(ds_1 - ds_3) + (2k_{12} + k_{21} + d_3)(s_3 - s_1)dw = 0, \\ d_3 ds_3 + k_{12}(ds_3 - ds_1) + k_{21}(ds_3 - ds_2) + (2k_{32} + k_{23} + d_1)(s_3 - s_1)dw = 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

где $dw = dw_2$ – поворот главных осей напряжений 1 и 3 (в плоскости $j = \text{const}$) при догрузении.

Компоненты осесимметричного тензора приращения деформации можно задать в форме

$$\begin{aligned} de_{\langle rr \rangle} &= dl + dm \cos 2c, \\ de_{\langle jj \rangle} &= de_2, \\ de_{\langle zz \rangle} &= dl - dm \cos 2c, \\ de_{\langle rz \rangle} &= -dm \sin 2c, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} dl &= \frac{1}{2}(de_1 + de_3), \\ dm &= \frac{1}{2}(de_1 - de_3). \end{aligned}$$

Главные приращения деформаций вычисляются по формуле

$$de_1, de_2 = \frac{1}{2}(de_{\langle rr \rangle} + de_{\langle zz \rangle}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(de_{\langle rr \rangle} - de_{\langle zz \rangle})^2 + 4(de_{\langle rz \rangle})^2}. \quad (4.8)$$

Соотношения Коши, связывающие приращения деформаций и перемещений, в осесимметричном случае сводятся к

$$\begin{aligned} de_{\langle rr \rangle} &= \frac{\partial du_{\langle r \rangle}}{\partial r}, \quad de_{\langle jj \rangle} = \frac{du_{\langle r \rangle}}{r}, \quad de_{\langle zz \rangle} = \frac{\partial du_{\langle z \rangle}}{\partial z}, \\ 2de_{\langle rz \rangle} &= \frac{\partial du_{\langle r \rangle}}{\partial z} + \frac{\partial du_{\langle z \rangle}}{\partial r}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Условие совместности для приращений поворотов в случае осесимметричной деформации удовлетворяется тождественно.

Учитывая, что $S_{12} = 0$, $S_{23} = 0$, $S_{31} = 0$ удовлетворяются тождественно в силу $dw_1 = 0$, $dw_3 = 0$, $k_{31} = 0$, $k_{13} = 0$, $d_2 = 0$ условия совместности приращений деформаций (упругими деформациями пренебрегаем $de_j = de_j^P$), выражаются уравнениями относительно изостатических координат:

$$\begin{aligned}
dS_{\langle 11 \rangle} &= -d_3 d_3 de_2 + k_{21}^2 (de_3 - de_2) + d_3 [k_{21} (de_3 - de_2)] - k_{23} k_{32} (de_2 + de_3 - 2de_1) - \\
&\quad - k_{21} d_3 de_2 - k_{32} d_1 de_2 - k_{23} d_1 de_3 = 0, \\
dS_{\langle 22 \rangle} &= -d_3 d_3 de_1 - d_1 d_1 de_3 + (k_{32}^2 - k_{12}^2) (de_1 - de_3) + d_1 [k_{32} (de_1 - de_3)] - \\
&\quad - k_{12} d_3 de_1 - k_{32} d_1 de_3 - d_3 [k_{12} (de_1 - de_3)] = 0, \\
dS_{\langle 33 \rangle} &= -d_1 d_1 de_2 - k_{23}^2 (de_2 - de_1) - d_1 [k_{23} (de_2 - de_1)] - k_{21} k_{12} (de_1 + de_2 - 2de_3) - \\
&\quad - k_{23} d_1 de_2 - k_{21} d_3 de_1 - k_{12} d_3 de_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Наконец, учитывая, что

$$k_{12} = d_1 c, \quad k_{32} = -d_3 c, \quad k_{21} = \frac{\sin c}{r}, \quad k_{23} = \frac{\cos c}{r},$$

а также

$$\begin{aligned}
d_3 k_{21} &= k_{23} d_3 c - k_{21}^2, \\
d_1 k_{23} &= -k_{21} d_1 c - k_{23}^2,
\end{aligned}$$

получаем условия совместности в виде

$$\begin{aligned}
dS_{\langle 11 \rangle} &= -d_3 d_3 de_2 + k_{23} (de_3 - de_2) d_3 c + k_{21} (d_3 de_3 - d_3 de_2) - k_{23} k_{32} (de_2 + de_3 - 2de_1) - \\
&\quad - k_{21} d_3 de_2 - k_{32} d_1 de_2 - k_{23} d_1 de_3 = 0, \\
dS_{\langle 22 \rangle} &= -d_3 d_3 de_1 - d_1 d_1 de_3 + (k_{32}^2 - k_{12}^2 - d_1 d_3 c - d_3 d_1 c) (de_1 - de_3) - k_{12} d_3 de_1 - \\
&\quad - k_{32} d_1 de_3 + k_{32} (d_1 de_1 - d_1 de_3) - k_{12} (d_3 de_1 - d_3 de_3) = 0, \\
dS_{\langle 33 \rangle} &= -d_1 d_1 de_2 + k_{21} (de_2 - de_1) d_1 c - k_{23} (d_1 de_2 - d_1 de_1) - k_{21} k_{12} (de_1 + de_2 - 2de_3) - \\
&\quad - k_{21} d_3 de_1 - k_{12} d_3 de_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Ассоциированный закон течения¹²

$$\begin{aligned}
\frac{de_1^P}{S_1} &= dS_3 - E_{12} dS_2 - E_{11} dS_1, \\
\frac{de_2^P}{S_2} &= dS_3 - E_{22} dS_2 - E_{21} dS_1, \\
-de_3^P &= (b_1 - 1) de_1^P + (b_2 - 1) de_2^P,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

¹² Формулы ассоциированного закона течения записаны для случая $de_1^P \geq 0$, $de_2^P \geq 0$, $de_3^P \leq 0$.

В котором

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left[(1-D_1)(b_1-1) \left[s_2 K_2 - (b_2-1)^3 s_3 K_3 \right] + (1-D_2)^2 (1-D_1)^{-1} (b_1-1)^3 (b_2-1) s_3 K_3 \right] \times \\
&\quad \times \left[s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3 \right]^{-1}, \\
S_2 &= \left[(1-D_2)(b_2-1) \left[s_1 K_1 - (b_1-1)^3 s_3 K_3 \right] + (1-D_1)^2 (1-D_2)^{-1} (b_2-1)^3 (b_1-1) s_3 K_3 \right] \times \\
&\quad \times \left[s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3 \right]^{-1}, \\
S_1 E_{11} &= \frac{(1-D_1) \left[s_2 K_2 - (b_2-1)^3 s_3 K_3 \right]}{s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3}, \\
S_2 E_{22} &= \frac{(1-D_2) \left[s_1 K_1 - (b_1-1)^3 s_3 K_3 \right]}{s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3}, \\
S_1 E_{12} &= \frac{(1-D_2)^2 (1-D_1)^{-1} (b_1-1)^3 s_3 K_3}{s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3}, \\
S_2 E_{21} &= \frac{(1-D_1)^2 (1-D_2)^{-1} (b_2-1)^3 s_3 K_3}{s_1 s_2 K_1 K_2 - s_1 s_3 K_1 K_3 (b_2-1)^3 - s_2 s_3 K_2 K_3 (b_1-1)^3}, \\
b_1 - 1 &= \frac{1-D_1}{1-D_3}, \quad b_2 - 1 = \frac{1-D_2}{1-D_3}.
\end{aligned}$$

Закон накопления повреждений есть (K_1, K_2, K_3 – положительные постоянные)

$$\begin{cases} dD_1 = K_1 de_1^P, \\ dD_2 = K_2 de_2^P, \\ dD_3 = -K_3 de_3^P. \end{cases} \quad (4.13)$$

Используя уравнение ассоциированного закона течения, которое устанавливает связь между de_1^P, de_2^P, de_3^P , перепишем соотношения совместности приращений деформаций (4.11)

$$\begin{aligned}
dS_{\langle 11 \rangle} &= -d_3 d_3 de_2 + k_{23} (b_1 - 1) d_1 de_1 + (k_{23} (b_2 - 1) - k_{32}) d_1 de_2 - k_{21} (b_1 - 1) d_3 de_1 - \\
&\quad - k_{21} (b_2 + 1) d_3 de_2 + (k_{23} d_1 b_1 + k_{23} k_{32} (3 - b_1) - k_{21} d_3 b_1 - k_{23} (b_1 - 1) d_3 c) de_1 + \\
&\quad + (k_{23} d_1 b_2 + k_{23} k_{32} (2 - b_1) - k_{21} d_3 b_2 - k_{23} b_2 d_3 c) de_2 = 0, \\
dS_{\langle 22 \rangle} &= -d_3 d_3 de_1 + (b_1 - 1) d_1 d_1 de_1 + (b_2 - 1) d_1 d_1 de_2 + (2d_1 b_1 + k_{32} (2b_1 - 1)) d_1 de_1 + \\
&\quad + 2(d_1 b_2 + k_{32} (b_2 - 1)) d_1 de_2 - k_{12} (1 - b_1) d_3 de_1 - k_{12} (b_2 - 1) d_3 de_2 + \\
&\quad + (d_1 d_1 b_1 + b_1 (k_{32}^2 - k_{12}^2 - d_1 d_3 c - d_3 d_1 c) + 2k_{32} d_1 b_1 - k_{12} d_3 b_1) de_1 + \\
&\quad + (d_1 d_1 b_2 + (b_2 - 1) (k_{32}^2 - k_{12}^2 - d_1 d_3 c - d_3 d_1 c) + 2k_{32} d_1 b_2 - k_{12} d_3 b_2) de_2 = 0, \\
dS_{\langle 33 \rangle} &= -d_1 d_1 de_2 + k_{21} (de_2 - de_1) d_1 c - k_{23} (d_1 de_2 - d_1 de_1) - \\
&\quad - k_{21} k_{12} (de_1 + de_2 - 2(b_1 - 1) de_1 - 2(b_2 - 1) de_2) - k_{21} d_3 de_1 - k_{12} d_3 de_2 = 0.
\end{aligned} \quad (4.14)$$

Уравнения совместности $dS_{\langle 11 \rangle} = 0$, $dS_{\langle 22 \rangle} = 0$ системы (4.14) относительно главных приращений de_1 , de_2 можно формально рассматривать независимо от остальных соотношений осесимметричной задачи. Главная часть этой системы имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{g_{33}} \partial_3 \partial_3 de_2 = \mathbf{K} , \\ -\frac{1}{g_{33}} \partial_3 \partial_3 de_1 + (b_1 - 1) \frac{1}{g_{11}} \partial_1 \partial_1 de_1 + (b_2 - 1) \frac{1}{g_{11}} \partial_1 \partial_1 de_2 = \mathbf{K} . \end{cases} \quad (4.15)$$

Характеристическое уравнение может быть представлено в форме

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{g_{33}} n_3^2 \\ -\frac{1}{g_{33}} n_3^2 + (b_1 - 1) \frac{1}{g_{11}} n_1^2 & (b_2 - 1) \frac{1}{g_{11}} n_1^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{g_{33}} n_3^2 \left(-\frac{1}{g_{33}} n_3^2 + (b_1 - 1) \frac{1}{g_{11}} n_1^2 \right) = 0 ,$$

откуда следует

$$\frac{g_{11}}{g_{33}} \frac{n_3^2}{n_1^2} = (b_1 - 1) .$$

Характеристическое уравнение имеет два действительных корня, что указывает на его гиперболичность. Характеристики осесимметричной связанной задачи

$$\frac{\sqrt{g_{11}} dx^1}{\sqrt{g_{33}} dx^3} = \pm \sqrt{\frac{1 - D_1}{1 - D_3}} \quad (4.15)$$

совпадают с линиями максимального касательного напряжения только в случае изотропного в меридиональной плоскости распределения поврежденности $D_1 = D_3$.

5. Заключение

Таким образом, получена замкнутая система статических и кинематических уравнений теории связанной пластичности и поврежденности в изостатической координатной системе относительно приращений главных напряжений, главных скоростей пластических деформаций и приращений перемещений, что наиболее удобно для представления и анализа основных соотношений связанной задачи. Рассмотрены случаи связанной плоской пластической деформации и связанного осесимметричного состояния и показано, что система основных соотношений относится к гиперболическому типу, что позволяет обобщить понятие поля скольжения на случаи указанных связанных состояний. Линии скольжения для связанного состояния наклонены иначе, чем линии скольжения при чисто идеально пластическом течении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блох, В. И.* Теория упругости / В. И. Блох. – Харьков : Изд-во Харьковского ун-та, 1964. – 484 с.
2. *Мураками, С.* Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности / С. Мураками, Ю. Н. Радаев // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 1996. – № 4. – С. 93–110.
3. *Онат, Е.* Образование шейки при пластическом течении растягиваемого плоского образца / Е. Онат, В. Прагер // Механика : сб. переводов. – М. : Изд-во АН СССР, – 1955. – № 4(32). – С. 93–97.
4. *Папкович, П. Ф.* Теория упругости. – М. ; Л. : Оборонгиз, 1939. – 640 с.
5. *Радаев, Ю. Н.* Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности / Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. – 1999. – № 4(14). – С. 70–93.
6. *Радаев, Ю. Н.* Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности / Ю. Н. Радаев // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2000. – № 5. – С. 27–45.
7. *Радаев Ю.Н.* Тензорные меры поврежденности и гармонический анализ тонкой структуры поврежденности // Вестник Самарского гос. университета. – 1998. – № 2(8). – С. 79–105.
8. *Love, A. E. H.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity / A. E. H. Love. – New York : Dover Publications, 1944. – 643 p.
9. *Malvern, L. E.* Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium / L. E. Malvern. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969. – 714 p.
10. *Maugin, G. A.* The Thermomechanics of Plasticity and Fracture / G. A. Maugin. – Cambridge : Cambridge University Press, 1992. – 350 p.
11. *Murakami, S.* Mechanical modeling of material damage / S. Murakami // J. Appl. Mech. – 1988. – V. 55. – No. 2. – P. 280–286.
12. *Radayev, Y. N.* On directional average of the local anisotropic damage / Y. N. Radayev // Int. J. Fracture. – 2004. – V. 128. – P. 293–307.
13. *Radayev, Y. N.* Mathematical Description of Anisotropic Damage State in Continuum Damage Mechanics / Y. N. Radayev, S. Murakami, K. Hayakawa // Trans. Japan Soc. Mech. Engrn. – 1944. – V. 60 A. – No. 580. – P. 68–76.

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

(Сибирский государственный аэрокосмический университет)

В статье изучаются уравнения двумерной теории идеальной пластичности, описывающие стационарное напряженное состояние. Для исследуемых уравнений найдена группа точечных симметрий и на ее основе построены новые точные решения. Эти решения можно использовать для описания пластического состояния материала, сжимаемого жесткими плитами.

Рассмотрим систему уравнений анизотропной идеальной пластичности в плоском случае следующего вида [3]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$a_{11}^2 (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4a_{12}^2 \tau_{xy}^2 = 1, \quad (2)$$

где σ_x , σ_y , τ_{xy} – компоненты тензора напряжений, a_{11} , a_{12} – параметры, характеризующие состояние анизотропии.

Сделаем следующую замену переменных:

$$\sigma'_x = a_{11} \sigma_x, \quad \sigma'_y = a_{11} \sigma_y, \quad \tau'_{xy} = a_{11} \tau_{xy}.$$

Система (1)–(2) переписется в виде

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$(\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + 4 \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2} \tau'^2_{xy} = 1. \quad (4)$$

Обозначим $\frac{a_{12}^2}{a_{11}^2} = \beta^2$ и сделаем следующую замену переменных:

$$\sigma'_x = \sigma - \sin 2\theta, \quad \sigma'_y = \sigma + \sin 2\theta, \quad \tau'_{xy} = \beta \cos 2\theta.$$

В результате система (3)–(4) запишется в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x - 2(\theta_x \cos 2\theta + \beta\theta_y \sin 2\theta) &= 0, \\ \sigma_y - 2(\beta\theta_x \sin 2\theta - \theta_y \cos 2\theta) &= 0.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь и далее индекс внизу обозначает производную по соответствующей переменной. Нетрудно показать, что система (5) имеет две характеристики вида

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{-\cos 2q \pm \sqrt{\cos^2 2q + b^2 \sin^2 2q}}{b \sin 2q}\quad (6)$$

и соотношение на них

$$d\sigma m 2\sqrt{\cos^2 2\theta + \beta^2 \sin^2 2\theta} d\theta = 0.\quad (7)$$

Интегрируя (7), получаем

$$\sigma m E(2\theta, \sqrt{1 - \beta^2}) = \text{const},$$

где $E(2\theta, \sqrt{1 - \beta^2})$ – эллиптический интеграл второго рода.

1. Групповые свойства уравнений (3).

В этом пункте найдем группу непрерывных преобразований, допускаемых системой (3) в смысле Ли.

Пользуясь методикой, описанной, например в [1], находим группу непрерывных преобразований, которые порождаются следующими операторами:

$$\begin{aligned}X_1 &= x \partial_x + y \partial_y, \\ X_2 &= \partial_\sigma, \quad X_+ = \xi(\sigma, \theta) \partial_x + \eta(\xi, \theta) \partial_y,\end{aligned}\quad (8)$$

где (ξ, η) есть произвольное решение системы уравнений

$$\begin{aligned}\xi_\theta - 2(\xi_\sigma \cos 2\theta - \beta\eta_\sigma \sin 2\theta) &= 0, \\ \eta_\theta - 2(\beta\xi_\sigma \sin 2\theta + \eta_\sigma \cos 2\theta) &= 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Операторы X_1, X_2, X_+ порождают бесконечномерную алгебру Ли со следующей таблицей умножения:

$$[X_1, X_2] = 0, [X_1, X_+] = X_+.$$

Произведение $[X_2, X_+]$, как нетрудно проверить, дают новые операторы вида X_+ , а именно

$$[X_2, X_+] = \xi_\sigma \partial_x + \eta_\sigma \partial_y.$$

Этот факт позволяет сформулировать две леммы.

Лемма 1. Операторы вида X_+ порождают бесконечномерный идеал алгебры Ли (8).

Лемма 2. Если (ξ, η) – произвольное решение системы уравнений (9), то $(\xi_\sigma, \eta_\sigma)$ решение этой же системы.

Выясним смысл допускаемой алгебры Ли.

Каждый оператор из (8) порождает однопараметрическую группу преобразований.

Построим эти группы.

Оператор X_1 порождает группу растяжений по координатам

$$x' = x e^{a}, \quad y' = y e^{a}.$$

Здесь и далее a – групповой параметр.

Оператор X_2 порождает группу сдвигов

$$\sigma' = \sigma + a.$$

Операторы вида X_+ порождают бесконечное множество преобразований вида

$$x' = x + a\xi(\sigma, \theta), \quad y' = y + a\eta(\sigma, \theta).$$

2. С помощью найденных симметрий построим некоторые инвариантные решения системы (3).

а) Решение на подалгебре $\partial_x + b \partial_\sigma$ является аналогом известного решения Прандтля для изотропной среды. Его следует искать в виде

$$\sigma = bx + f(y), \quad \theta = \theta(y).$$

Подставляя эти соотношения в (5), без труда получаем

$$\theta = -\frac{1}{2} \arccos \frac{by}{\beta}, \quad \cos 2\theta = -\frac{by}{\beta}, \quad \sigma = bx - \sin 2\theta. \quad (10)$$

Теперь найдем линии скольжения.

Дифференцируя равенство $\cos 2\theta = -\frac{by}{\beta}$ по x , получаем

$$\frac{b}{\beta} \frac{dy}{dx} = 2\theta_x \sin 2\theta.$$

Теперь с помощью (6) находим дифференциальные уравнения линий скольжения

$$\frac{2\beta}{b} \theta_x \sin 2\theta = \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta + \beta^2 \sin^2 2\theta}}{\beta \sin 2\theta}$$

или

$$-\int \frac{2\beta}{b} \frac{\sin^2 2\theta d\theta}{\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta + \beta^2 \sin^2 2\theta}} = x + C, \quad (11)$$

$$y = -\frac{\beta}{b} \cos 2\theta.$$

Это параметрические уравнения линий скольжения. Построим эти линии для случая $b=1$ и различных значениях β . Они изображены на рис. 1–4.

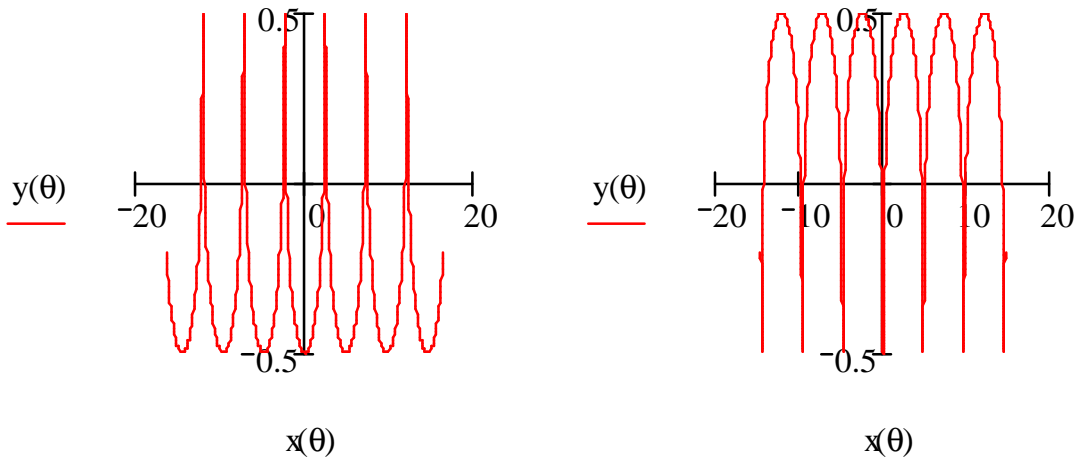


Рис. 1. Линии скольжения (11) при $b=1$ и $b=0,5$

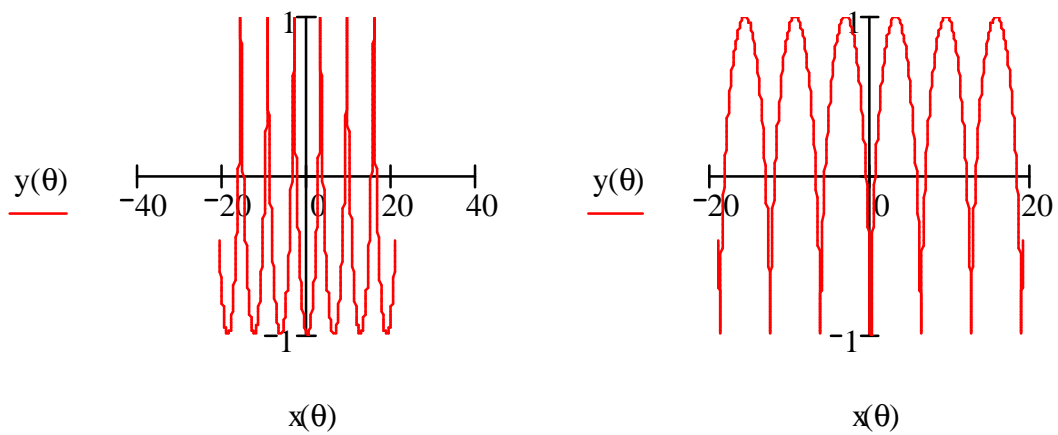


Рис. 2. Линии скольжения (II) при $b=1$ и $b=1$

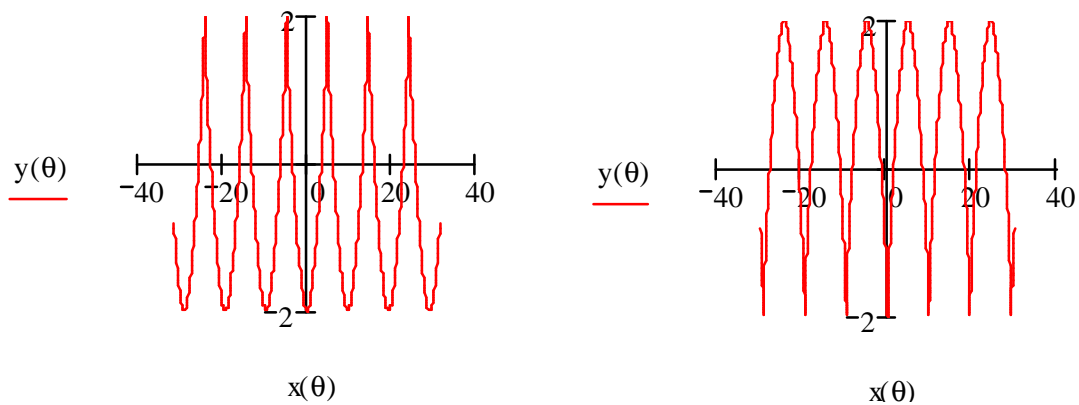


Рис. 3. Линии скольжения (II) при $b=1$ и $b=2$

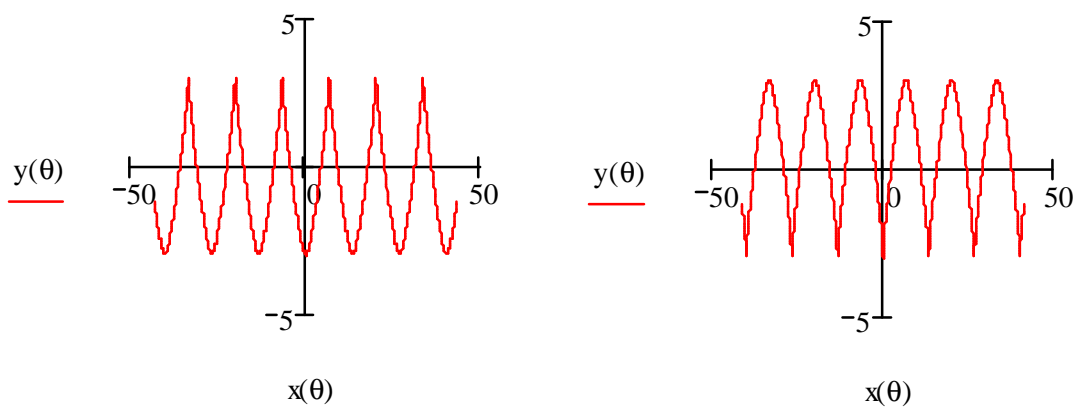


Рис. 4. Линии скольжения (II) при $b=1$ и $b=3$

б) Ищем инвариантное решение на подалгебре X_+ . Инварианты оператора X_+ имеют вид σ , θ , $\xi y - \eta x$. Поэтому решение следует искать в виде $\sigma = f(\xi y - \eta x)$, $\theta = g(\xi y - \eta x)$. Дифференцируем эти соотношения по x и y . Имеем

$$\begin{aligned}\sigma_x &= f'[\xi_\sigma \sigma_x y + \xi_\theta \theta_x y - \eta - \eta_\sigma \sigma_x x - \eta_\theta \theta_x x], \\ \theta_x &= g'[\xi_\sigma \sigma_x y + \xi_\theta \theta_x y - \eta - \eta_\sigma \sigma_x x - \eta_\theta \theta_x x], \\ \sigma_y &= f'[\xi_\sigma \sigma_x y + \xi_\theta \theta_x y - \eta - \eta_\sigma \sigma_x x - \eta_\theta \theta_x x], \\ \theta_y &= g'[\xi_\sigma \sigma_x y + \xi_\theta \theta_x y - \eta - \eta_\sigma \sigma_x x - \eta_\theta \theta_x x].\end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно σ_x , θ_x , σ_y , θ_y , получаем

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{-\eta f'}{1 - f'(\xi_\sigma y - \eta_\sigma x) - g'(\xi_\theta y - \eta_\theta x)}, \\ \theta_x &= \frac{-\eta g'}{1 - f'(\xi_\sigma y - \eta_\sigma x) - g'(\xi_\theta y - \eta_\theta x)}, \\ \sigma_y &= \frac{\xi f'}{1 - f'(\xi_\sigma y - \eta_\sigma x) - g'(\xi_\theta y - \eta_\theta x)}, \\ \theta_y &= \frac{\xi g'}{1 - f'(\xi_\sigma y - \eta_\sigma x) - g'(\xi_\theta y - \eta_\theta x)}.\end{aligned}$$

Подставляя формулы для σ_x , θ_x , σ_y , θ_y в уравнение (5), имеем

$$\begin{aligned}-\eta f' - 2(-\eta g' \cos 2\theta + \xi g' \beta \sin 2\theta) &= 0, \\ \xi f' - 2(-\beta \eta g' \sin 2\theta - \xi g' \cos 2\theta) &= 0.\end{aligned}\tag{12}$$

Система уравнений (12) – однородная система уравнений относительно неизвестных f' и g' . Чтобы она имела нетривиальное решение, необходимо потребовать равенство нулю ее определителя, следовательно,

$$\Delta = \eta^2 \beta \sin 2\theta + 2\eta \xi \cos 2\theta - \xi^2 \beta \sin 2\theta = 0$$

или

$$b\left(\frac{h}{x}\right)^2 \sin 2q + 2\left(\frac{h}{x}\right) \cos 2q - b \sin 2q = 0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta + \beta^2 \sin^2 2\theta}}{\beta \sin 2\theta}.$$

Отсюда следует

$$\eta = \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta + \beta^2 \sin^2 2\theta}}{\beta \sin 2\theta} \xi.\tag{13}$$

Поскольку η и ξ есть решение системы (9), то подставим (13) в систему уравнений (9). Получаем

$$\xi_\theta - 2 \xi_\sigma \cos 2\theta - \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta + \beta^2 \sin^2 2\theta}}{\sin 2\theta} \xi_\sigma = 0,\tag{14}$$

$$\eta_\theta - 2 \frac{\beta^2 \sin^2 2\theta}{-\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta + \beta^2 \sin^2 2\theta}} \eta_\sigma + \eta_\sigma \cos 2\theta = 0.$$

Эти уравнения служат для определения функций ξ и η .

Замечание. Если $\beta = 1$, что соответствует изотропному случаю, то уравнение (14) приводится к виду $\xi_\theta - 2k\xi_\sigma = 0, \eta_\theta - 2k\eta_\sigma = 0$.

Лемма 3. Система уравнений (13)–(14) совместна тогда и только тогда, когда $\xi = \eta = 0$.

Особенно легко это можно доказать в случае $\beta = 1$.

Поэтому нетривиальных решений инвариантных относительно подалгебры X_+ не существует.

3. Эволюция решений уравнения (5).

В этом пункте будут приведены новые решения уравнения (5) на основе решения (10). Эти новые решения строятся преобразованием симметрий, которые порождаются оператором X_+ и действуют на решение (10). Преобразование симметрии обладает замечательным свойством: если $(\sigma(x, y), \theta(x, y))$ есть некоторое решение уравнения (5), то $(s(x', y'), q(x', y'))$, где

$$x' = x + ax(q, s), \quad y' = y + ah(q, s); \quad (15)$$

есть также решение этого уравнения в том и только том случае, когда (ξ, η) есть некоторое решение уравнения (9). Здесь a – некоторый параметр. Более того, имеет место следующее утверждение.

Утверждение. Под действием преобразований симметрии характеристики уравнения (5) преобразуются в характеристики этой же системы уравнений.

Для реализации вышеизложенного нам необходимо найти решения системы линейных дифференциальных уравнений (9). Из вида системы (9) следует, что решение системы (9) можно искать в виде

$$\xi = \sigma + f(\theta), \quad \eta = \sigma + g(\theta); \quad (16)$$

$$\xi = f(\theta) \exp \alpha \sigma, \quad \eta = g(\theta) \exp \alpha \sigma; \quad (17)$$

$$\xi = f_1(\theta) \sin \alpha \sigma + f_2(\theta) \cos \alpha \sigma; \quad (18)$$

$$\eta = g_1(\theta) \sin \alpha \sigma + g_2(\theta) \cos \alpha \sigma; \quad (19)$$

$$\xi = f_1(\theta) \operatorname{sh} \alpha \sigma + f_2(\theta) \operatorname{ch} \alpha \sigma; \quad (20)$$

$$\eta = g_1(\theta) \operatorname{sh} \alpha \sigma + g_2(\theta) \operatorname{ch} \alpha \sigma. \quad (21)$$

Здесь f, g, f_i, g_i и параметр α определяются из системы уравнений (9).

Лемма 4. Решение уравнения (9) в форме (16) имеет вид

$$\begin{aligned} \xi &= \sigma + \sin 2\theta + \beta \cos 2\theta, \\ \eta &= \sigma + \sin 2\theta - \beta \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (22)$$

Лемма 5. Решение уравнения (9) в форме (17) имеет вид

$$\begin{aligned} \xi &= \beta(\cos \theta + \sin \theta) \exp\left(\pm \frac{\sigma}{2}\right), \\ \eta &= (-\cos \theta + \sin \theta) \exp\left(\pm \frac{\sigma}{2}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Кратко обоснуем выбор формы решения (23). После подстановки (17) в (9) получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Поскольку коэффициенты этих уравнений – тригонометрические функции, то естественно искать решение в виде

$$f = C_1 \sin n\theta + C_2 \cos n\theta, \quad g = C_3 \cos n\theta + C_4 \sin n\theta.$$

При всех значениях n , кроме $n = \pm 1$, на четыре неизвестных C_1, C_2, C_3, C_4 получаем 6 уравнений. Это определило выбор n .

Далее используем метод неопределенных коэффициентов, находим решение (23).

Замечание. Решение системы (9) в виде (18)–(21) будут приведены в будущих работах.

Под действием преобразований (15) решение (10) перейдет в следующее:

$$\cos 2\theta = -\frac{by + a\eta}{\beta}, \quad \sigma = b(x + a\xi) - \sin 2\theta.$$

Параметрическая форма линий скольжения для этого решения имеет вид

$$- \int \frac{2\beta}{b} \frac{\sin^2 2\theta d\theta}{\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta + \beta^2 \sin^2 2\theta}} = x + a\xi,$$

$$y + a\eta = -\frac{\beta}{b} \cos 2\theta.$$

Графики линий скольжения для решения (22) при $\beta=1,5$ и различных значениях a приведены на рис. 5–8.

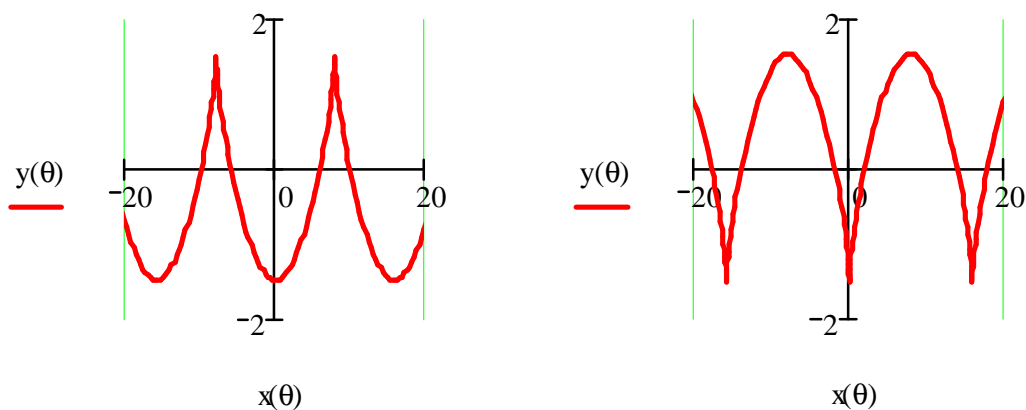


Рис. 5. Линии скольжения (22) при $b=1,5$ и $a=0,01$

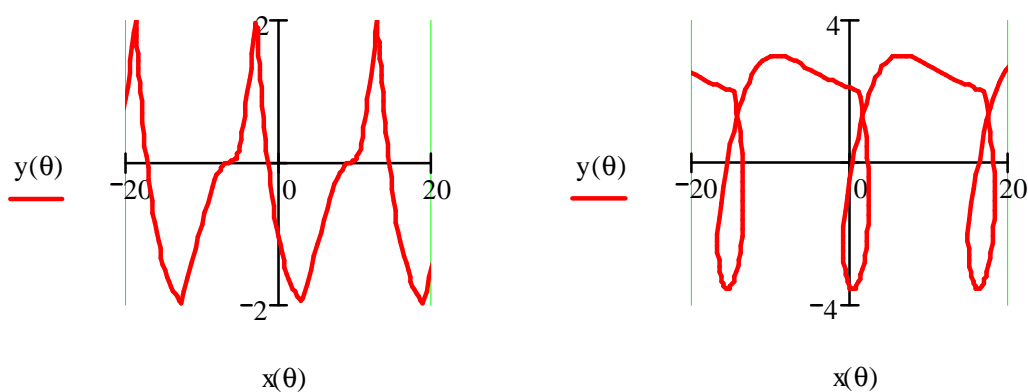


Рис. 6. Линии скольжения (22) при $b=1,5$ и $a=1$

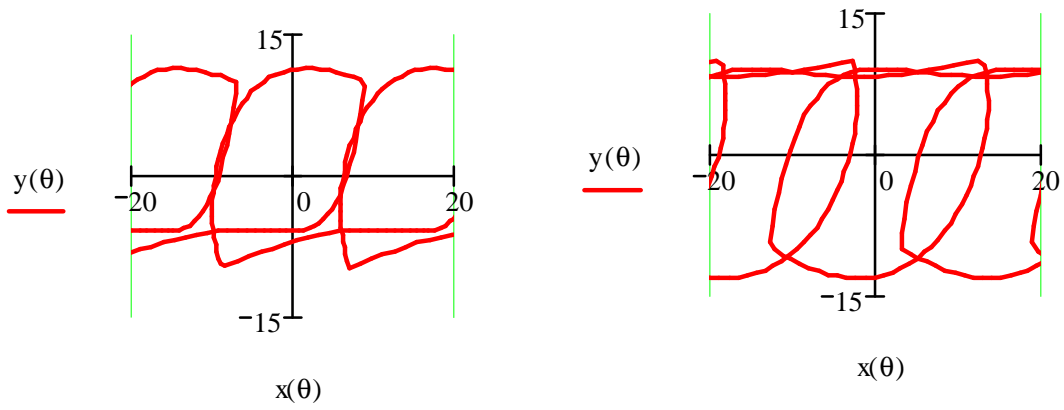


Рис. 7. Линии скольжения (22) при $b=1,5$ и $a=5$

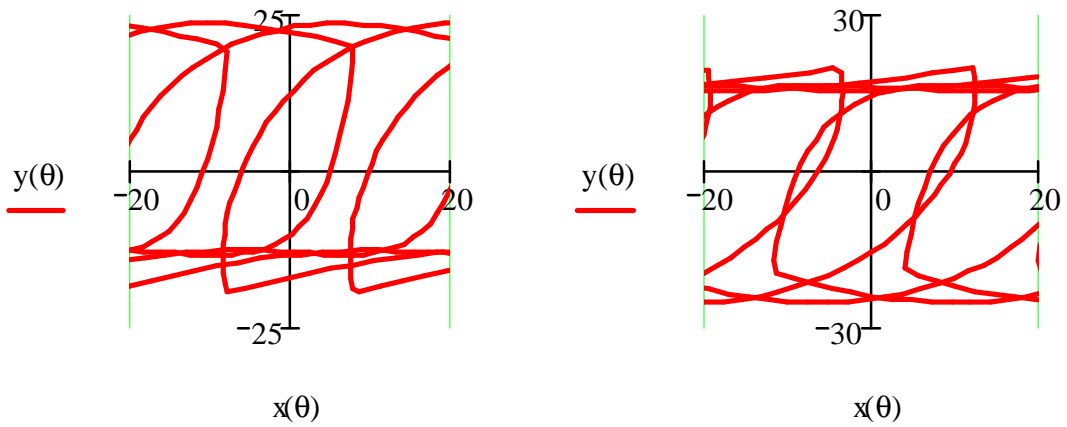


Рис. 8. Линии скольжения (22) при $b=1,5$ и $a=10$

Графики линий скольжения для решения (23) при $\beta=1,5$ и различных значениях a приведены на рис. 9–14.

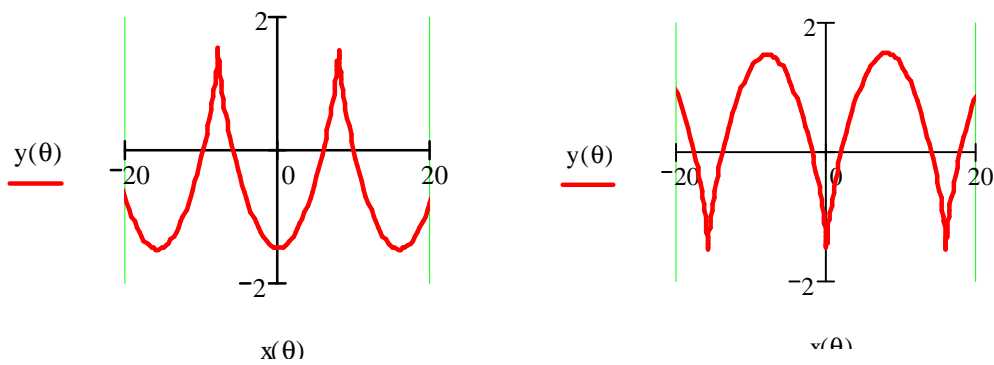


Рис. 9. Линии скольжения (23) при $b=1,5$ и $a=0,01$

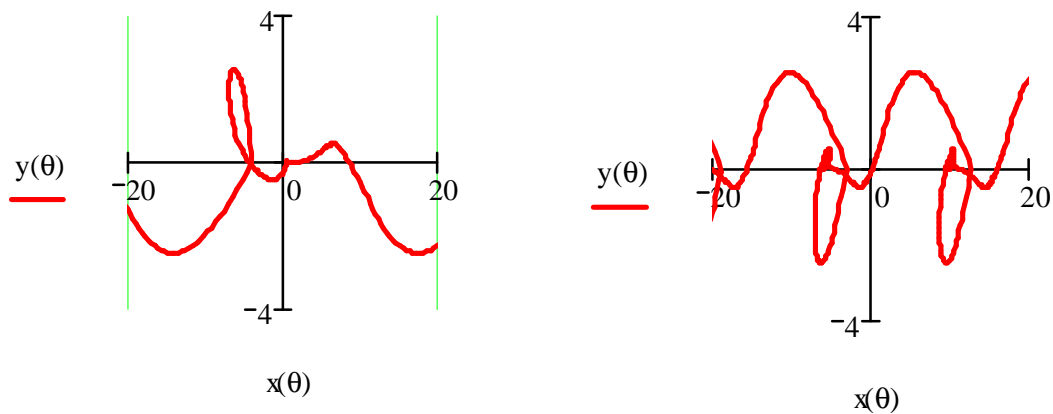


Рис. 10. Линии скольжения (21) при $b=1,5$ и $a=1$

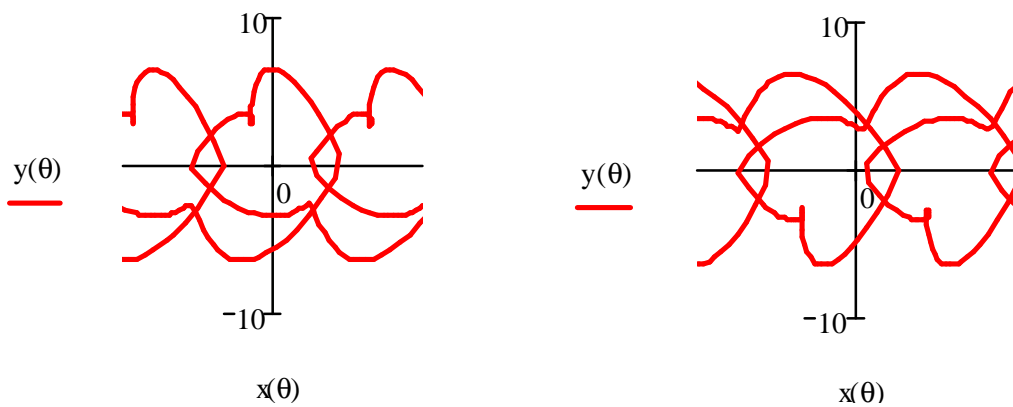


Рис. 11. Линии скольжения (23) при $b=1,5$ и $a=5$

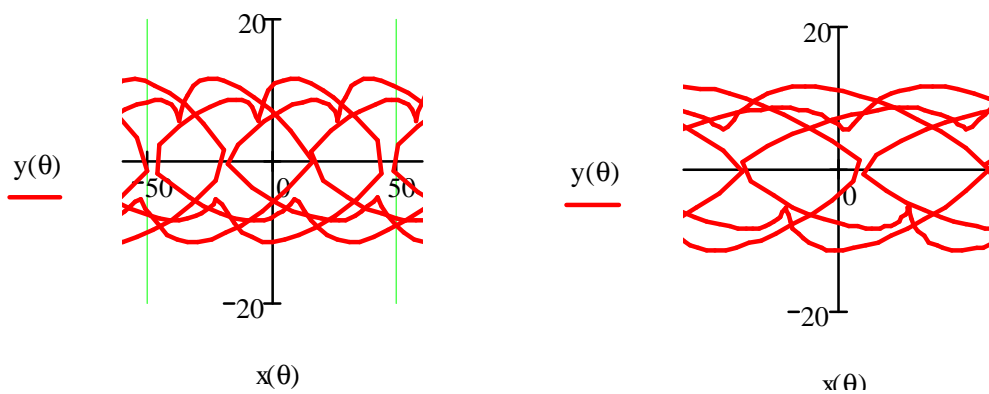


Рис. 12. Линии скольжения (23) при $b=1,5$ и $a=10$

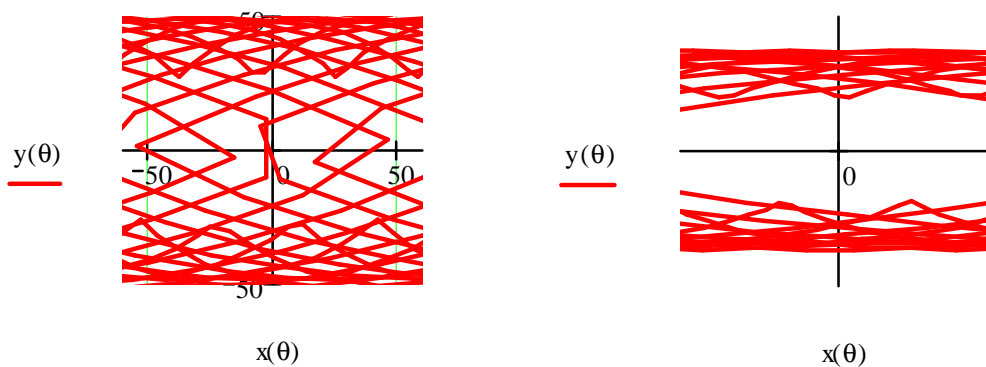


Рис. 13. Линии скольжения (23) при $b=1,5$ и $a=50$

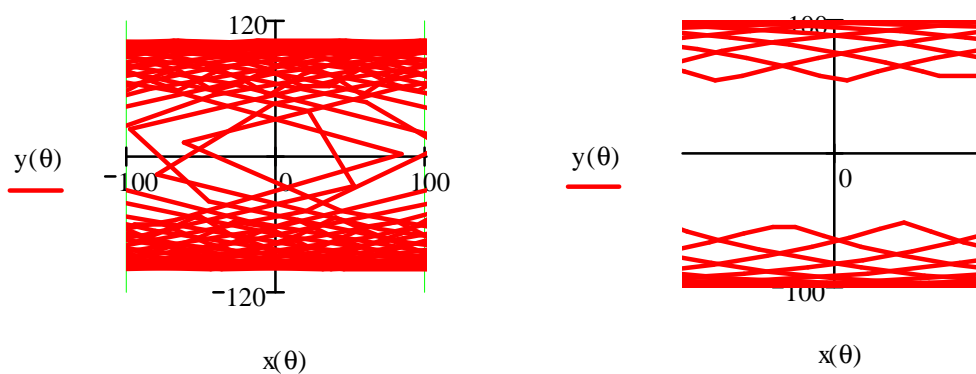


Рис. 14. Линии скольжения (23) при $b=1$ и $a=100$

Случай $\beta=1$ рассмотрен в работе [2].

Из рисунков 9–14 следует, что решения соответствующие большему значению параметра a можно использовать для описания течений пластического материала сжимаемого жесткими плитами. При этом слой может быть средней толщины, что отличает данные решений от решения Прандтля, которое можно использовать только для тонких слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киряков, П. П.*, Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. – 190 с.
2. *Сенашов, С. И.* Об эволюции решения Прандтля под действием группы симметрий / С. И. Сенашов // Механика твердого тела. – 2005. – № 5. – С. 167-171.
3. *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехиздат, 1954. – 407 с.

УДК 539.3

Сергеева А. М.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

(Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН)

Применяя теорию малых упругопластических деформаций и апробированный численный метод, моделируется процесс зарождения и развития трещины в ледяном покрове, нагруженном внешним атмосферным давлением, собственным весом и находящимся над разряженным ограниченным пространством.

Ключевые слова: разрушение ледяного покрова, напряжения, деформации.

Введение. Моделируется процесс разрушения льда как результат образования и развития в нем трещин. В основу построения модели положен новый способ разрушения ледяного покрова, защищенный патентом РФ [9]. Идея в том, что подо льдом создается разряжение и лед будет разрушаться под действием атмосферного давления и собственного веса. Под лед помещается контейнер, в котором имеются две подвижные створки, свободно перемещающиеся в направлении, перпендикулярном движению судна. В контейнере имеются две боковые стенки и днище, которые при раздвижении створок мешают заполнению контейнера водой. С торцевых сторон контейнера нет препятствий для отжима воды створками. На рис. 1 представлена схема получения разряжения подо льдом рассматриваемым способом. Важно, что скорость раздвижения створок v должна быть такой, что при заданных параметрах контейнера объем поступившей воды не должен быть больше $2/3$ от объема контейнера. Аналитическая формула для скорости раздвижения створок получена в работе [10, 24].

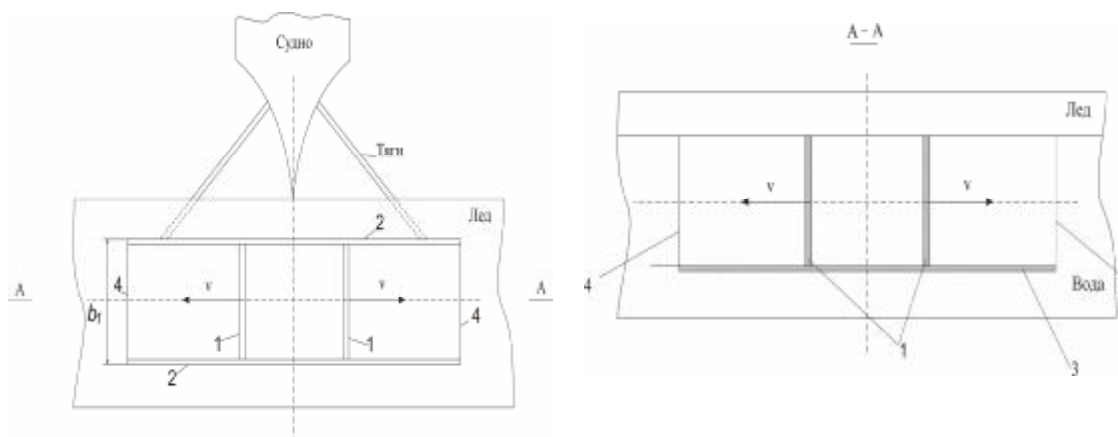


Рис. 1. Схема получения разряжения под ледяным покровом:
1 – подвижные створки; 2 – боковые стенки; 3 – днище; 4 – внешние стороны контейнера

Установлено, что значения напряжений растяжения или сдвига, при которых происходит полное разрушение ледяного покрова, должно в несколько раз превышать предел прочности льда, установленный для образца. Если же напряжение незначительно превышает предел прочности, то образуется трещина, при этом лед переходит в новое устойчивое состояние и выдерживает внешнюю нагрузку. В работе определены такие параметры контейнера, при которых происходит полное разрушение ледяного покрова способом [9].

Постановка и решение задачи. Решается пространственная задача о разрушении ледяного покрова под действием атмосферного давления и силы тяжести самого льда. При построении модели учитывалось, что задача симметричная, поэтому достаточно исследовать четвертую часть области деформирования (рис. 2, а). Пусть лед (рис. 2, а) опирается на коробку контейнера и упругое основание (воду) с внешней стороны контейнера. Внутри контейнера лед провисает под действием внешнего атмосферного давления и собственного веса. Так как нагрузка кратковременная, то деформируемую среду можно считать упругой и изотропной, а упругие перемещения малыми. Применяя уравнения теории упругости для малых деформаций, запишем систему дифференциальных уравнений в декартовой системе координат

$$s_{ij,j} + F_i = 0; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad F_2 = F_3 = 0. \quad (1)$$

$$s_{ij} - s d_{ij} = 2G e_{ij}^*; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad e_{ij}^* = e_{ij} - 1/3 e d_{ij}; \quad e = e_{ii}, \quad (2)$$

$$s = 1/3 s_{ii}; \quad e_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad d_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3)$$

$$e_{ii} = 3ks. \quad (3)$$

Уравнение теплопроводности для стационарного случая:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(I \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (4)$$

В (1)–(4) $G = G(q)$ – модуль сдвига; q – температура; $k = k(q)$ – коэффициент объемного сжатия; s_{ij} – компоненты тензора напряжений; e_{ij} – компоненты тензора деформаций; F_i – проекция удельной объемной силы по осям x_i ; u_i – проекции перемещений по координатным осям x_i , $i = 1, 2, 3$; I – коэффициент теплопроводности; уравнения (1–4) записаны с учетом суммирования по повторяющимся индексам.

Будем рассматривать ледяной покров как пластину конечной толщины, поэтому уравнение теплопроводности примет вид:

$$q = -\frac{I_0}{a} + \sqrt{\left(\frac{I_0}{a}\right)^2 + \frac{x_1}{h} \left(\frac{2q_1 I_0}{a} + q_1^2\right)} \quad (5)$$

По данным работы [2] $a = -0.0159$, $I_0 = 2.22 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$.

Граничные условия задачи

$$\begin{aligned} s_{11}|_{S_8} = -s_0; \quad (s_{12} = s_{13})|_{S_8} = 0; \quad (s_{11} = s_{12} = s_{13})|_{S_1} = 0; \\ (s_{12} = s_{13})|_{S_3} = 0; \quad s_{21}|_{S_4} = 0; \quad s_{23}|_{S_i} = 0; \quad i = 4, 6; \quad (s_{12} = s_{13})|_{S_2} = 0; \\ s_{31}|_{S_5} = 0; \quad s_{32}|_{S_i} = 0; \quad i = 5, 7; \quad s_{11}|_{S_3} = -q_1; \quad s_{11}|_{S_2} = s_*; \\ u_2|_{S_i} = 0; \quad i = 4, 6; \quad u_3|_{S_i} = 0; \quad i = 5, 7, \end{aligned} \quad (6)$$

где $q_1 = s_0 + gh_*$; h_* – глубина погружения льда.

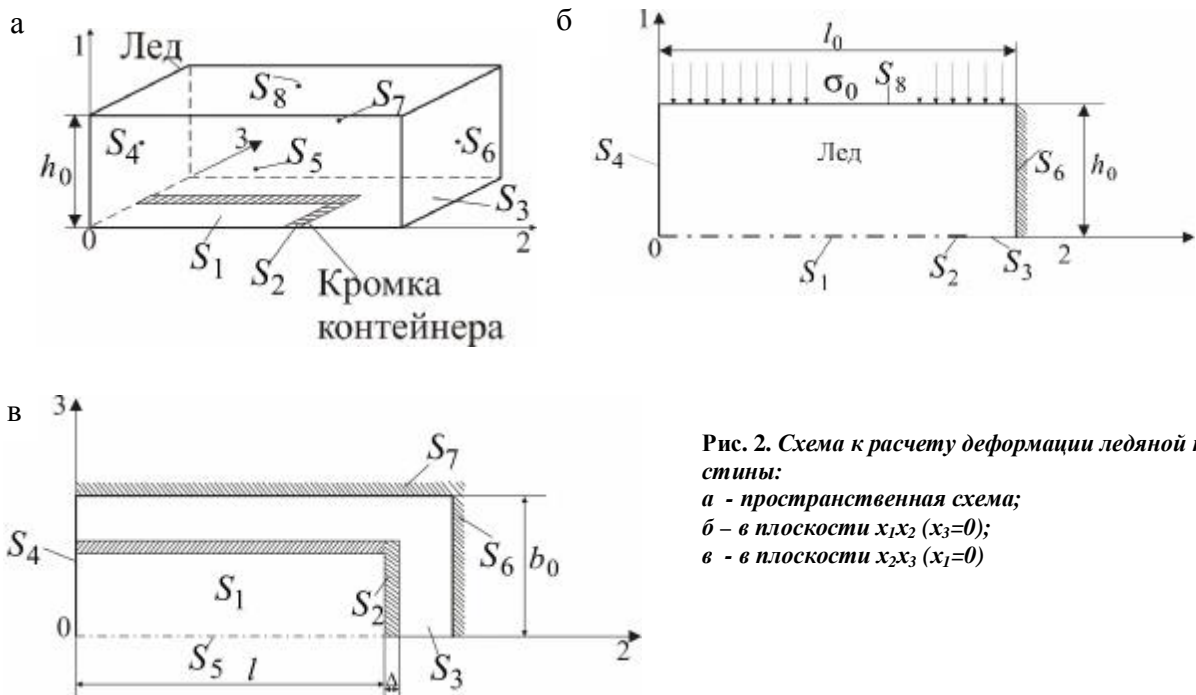


Рис. 2. Схема к расчету деформации ледяной пластины:
 а - пространственная схема;
 б - в плоскости x_1x_2 ($x_3=0$);
 в - в плоскости x_2x_3 ($x_1=0$)

Важно, что контейнер, наполненный водой, имеет положительную плавучесть. Поэтому при раздвижении створок контейнера появляется сила, направленная снизу на лед от бортов контейнера, – выталкивающая сила, равная $P = b \cdot l \cdot h_1 \cdot g$, где h_1 – высота образовавшейся в контейнере полости ($h_1 < h$, так как в процессе раздвижения щек внутрь затекает вода); g – удельный вес воды; S_0 – атмосферное давление.

Таким образом, напряжение на бортах контейнера (S_2), (рис. 2) будет

$$s_* = -P / [(l + D) \cdot D + b \cdot D] = s_{11}|_{S_2}. \quad (7)$$

Таким образом под ледяным покровом реализуется разреженное пространство, способствующее погружению деформированного льда вместе с контейнером в воду. Моделируя связь ледовой подушки с внешней недеформируемой основой, на внешних гранях S_6 , S_7 (рис. 2) принимается условие закрепления льда, не дающее ему перемещаться в воду.

Моделируемая связь определяется уравнениями

$$s_{21}|_{S_6} = -y_6 t_s \frac{v_{ск}}{|v|}; \quad s_{31}|_{S_7} = -y_7 t_s \frac{v_{ск}}{|v|}. \quad (8)$$

Здесь y_6 , y_7 – коэффициенты ($y_6 = y_7 = 1000$); $v_{ск}$ – скорость скольжения ледяной подушки относительно основы; $v_{ск} = v_1|_{S_3} - v_1^*$, v_1^* – скорость перемещения основы. В нашем случае $v_1^* = 0$; $|v|$ – нормирующая скорость; t_s – условный предел текучести льда. По расчетам, при значениях y_i ($i = 6, 7$) перемещения u_i вблизи S_6 , S_7 составили 0.0007 мм, а касательные напряжения на поверхностях S_6 , S_7 не превышали 0.02 МПа.

При построении численной схемы решения используется численный метод [4]. Для этого область деформирования разбивается на ортогональные элементы конечных размеров и для каждого элемента записывается в разностном виде система (1–3), которая решается по разработанному алгоритму с учетом смешанных граничных условий (6). В результате решения имеем поля напряжений S_{ij} и перемещений u_i по граням каждого элемента.

В соответствии с работой [8] $E = (87.6 - 0.21q - 0.0017q^2) \cdot 10^2$ (МПа), коэффициент Пуассона $\nu = 0.5 + 0.003 \cdot q$ ($0 > -40^\circ C$), коэффициент объемного сжатия (k) $k = (1 - 2\nu)/E$, модуль сдвига (G) $G = E/2(1 + \nu)$.

Значение q_1 в формуле (5) принималось $q_1 = -30^\circ C$.

Алгоритм решения рассматриваемой задачи будет иметь вид:

1. Исследуемая область деформирования разбивается на элементы ортогональной формы (в нашем случае на элементы прямоугольной формы). Рассчитывается матрица дуг элементов.

2. Задаются граничные условия.

3. По формуле (5) насчитывается поле температур по каждому элементу.

4. Насчитываются по формулам значения $(G)_n$ и $(k)_n$ по каждому элементу (n – номер элемента).

5. Насчитывается матрица коэффициентов и свободных членов новой эквивалентной системы в соответствии с вышеизложенной последовательностью вычислений.

6. Решается система линейных уравнений по стандартной программе.

7. По каждому элементу (его граням) (i, j) насчитываются S_{ij} , u_i ($i, j = 1, 2, 3$).

8. Отыскиваются растягивающие напряжения S_{ii} ($i = 2, 3$), превышающие 1 МПа. Так как предполагается, что в данном месте образовалась трещина, то следует изменение граничных условий: на грани элемента, где $S_{ii} \geq 1$ МПа ($i = 2, 3$), устанавливается $S_{ii} = 0$. Осуществляется операция 5. В случае выполнения условий по прочности следует операция 9.

9. Окончание расчета.

Результаты исследования. В качестве критерия разрушения примем прочность морского льда на сжатие от 2 до 3 МПа, прочность – на растяжение от 0.5 до 1 МПа. В качестве критических значений определим максимальные значения. В работе [10, 26] установлено, что наиболее оптимальной является скорость раздвижения створок 0,5 м/с. Поэтому все рассматриваемые результаты были получены при $v = 0,5$ м/с.

Принимая в качестве критерия разрушения ледяного покрова $s_{np} = 1$ МПа, установлено, что по мере раздвижения створок в толще льда образуется трещина. Эволюция развития трещины рассмотрена в [5, 102] и схематично представлена на рис. 3, процесс образования и развития которой происходит последовательно в порядке нумерации 1, 2, 3, 4, 5 по растягивающим напряжениям S_{33} .

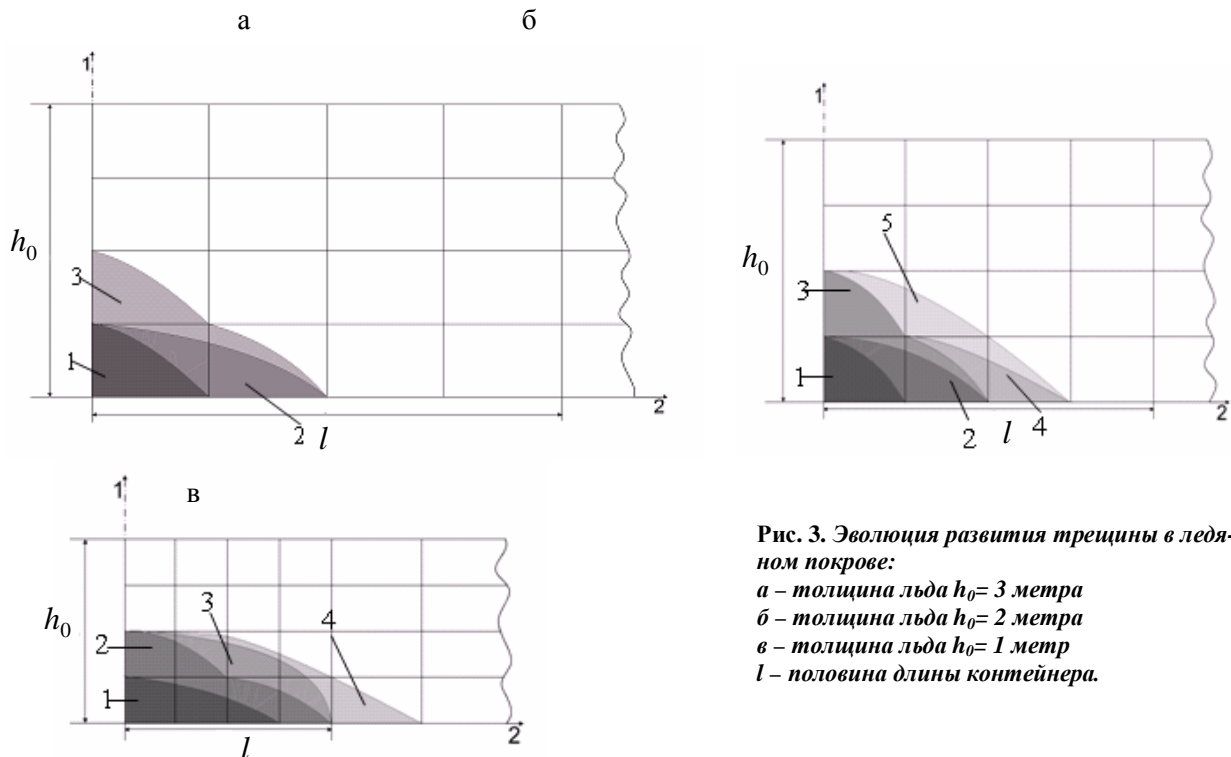


Рис. 3. Эволюция развития трещины в ледяном покрове:
а – толщина льда $h_0=3$ метра
б – толщина льда $h_0=2$ метра
в – толщина льда $h_0=1$ метр
l – половина длины контейнера.

Установлено, что, независимо от толщины льда, при заданной ширине контейнера трещина растет в высоту только до половины толщины льда и при дальнейшем раздвижении створок до критического положения не изменяется. Под критической длиной контейнера понимается максимальная длина $2l$, превышение которой сразу же приведет к «затоплению» контейнера. Эту критическую длину будем называть номинальной длиной контейнера. На рис. 4 показано, как меняется отношение номинальной длины контейнера к длине образовавшейся трещины при изменении толщины льда. Важно, что при толщине льда менее $1,5$ м. трещина распространяется и за пределами контейнера, причем ширина трещины колеблется от $0,57$ до $0,972$ мм.

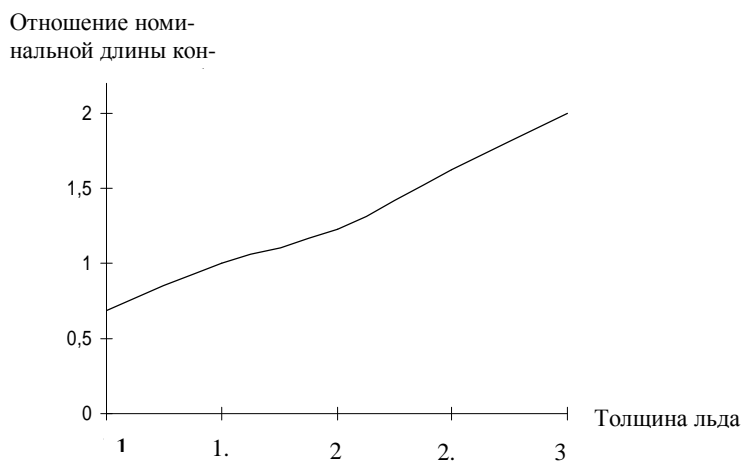


Рис. 4. Отношение номинальной длины контейнера к длине образовавшейся трещины при различной толщине льда

Как следует из расчетов, при критерии разрушения $s_{np} = 1 \text{ МПа}$ нет полного разрушения льда. Происходит только начальное разрушение и ледяной покров переходит в другое состояние по сплошности, выдерживающее внешнее воздействие. Для того чтобы процесс разрушения продолжался, необходимо увеличивать ширину контейнера. Увеличение ширины контейнера, в свою очередь, повлечет увеличение номинальной длины. Параметры контейнера, при которых происходит полное разрушение льда, представлены в таблице 1.

Таблица 1

Параметры контейнера, при которых лед будет полностью разрушаться

Толщина льда (м)	Глубина контейнера (м)	Номинальная длина контейнера (м)	Ширина контейнера (м)
3	1,5	44	18
2,5	1,5	30	15,5
2	1,5	23,4	12
1,5	1,5	13,8	9,94
1	1,5	8,8	6
0,5	1,5	5	3,9

На рис. 5 представлена эволюция развития трещин в ледяном покрове толщиной 1 м. Разрушение льда происходит поэтапно и соответствует последовательности (1, 2, 3, 4) нумерации областей на рисунке.

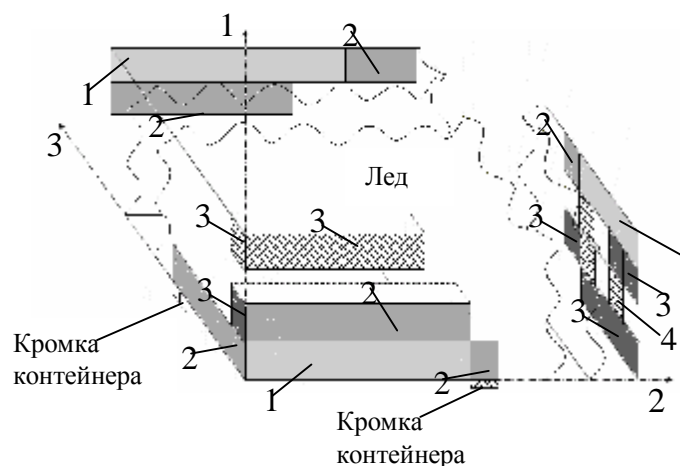


Рис. 5. Процесс развития трещин до полного разрушения льда толщиной $h_0 = 1$ метр

Также получена формула, позволяющая найти зависимость величины максимального расхождения створок контейнера от заданных геометрических параметров его поперечного сечения и заданной величины растягивающего напряжения, при котором начнется разрушение льда:

$$l = 6.1419 \cdot h_0 \cdot e^{-1.7045h_0/b} \cdot e^{0.4219(\frac{v}{v_x})} \cdot \left(\frac{s}{s_x}\right)^{0.5 \ln(h/h_x)},$$

где l – половина длины контейнера (м); b – половина ширины контейнера (м); h – глубина контейнера (м); h_0 – толщина льда (м); v – скорость раздвижения створок (м/с); s – принятый критерий прочности льда (МПа); v_x – нормирующая скорость (1м/с); s_x – нормирующее напряжение (1МПа). Причем $h \approx 0,5h_0$; $b \approx 3h_0$; $v \approx 0,16$ м/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бердяников, В. П.* Изучение модуля упругости льда / В. П. Бердяников // Труды ГПИ. – 1948. – Вып. 7(61). – С. 13–23.
2. *Богородский, В. В.* Разрушение льда. Методы, технические средства / В. В. Богородский, В. П. Гаврило, О. А. Недошивин. – Л. : Гидрометеоздат, 1983.
3. *Богородский, В. В.* Физические свойства. Современные методы гляциологии / В. В. Богородский, В. П. Гаврило. – Л. : Гидрометеоздат, 1980.
4. *Одинок, В. И.* Численное исследование процесса деформации материалов бескоординатным методом / В. И. Одинок. – Владивосток : Дальнаука, 1995. – 168 с.
5. *Одинок, В. И.* Разрушение льда под действием гидростатического давления на подведенном плавающем контейнере с учетом его заполнения водой / В. И. Одинок, А. М. Сергеева // Вестник УГТУ-УПИ. – 2006. – № 11(82). – С. 100–104.
6. *Одинок, В. И.* Разрушение льда под действием гидростатического давления на подведенном плавающем контейнере с учетом его заполнения водой / В. И. Одинок, А. М. Сергеева // Механика микронеоднородных материалов и разрушение : тезисы докладов IV Всероссийского семинара (Екатеринбург, 23–24 марта 2006 г.). – Екатеринбург : Изд-во УГТУ-УПИ, 2006. – С. 43.
7. *Одинок, В. И.* Математическое моделирование одного нового процесса разрушения ледяного покрова / В. И. Одинок, А. М. Сергеева // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – № 2. – С. 139–146.
8. *Одинок, В. И.* Моделирование процесса разрушения ледяного покрова под действием гидростатического давления на стационарном контейнере / В. И. Одинок, А. М. Сергеева // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 22–28 августа 2006 г.) : аннотация докладов. – Н. Новгород : Нижегородский государственный университет, 2006. – Т. 1. – С. 162.
9. *Патент РФ № 2220878.* Способ разрушения ледяного покрова / В. И. Одинок, В. М. Козин. Бюл. № 1. Оpubл. 10.01.04 г.
10. *Полярус (Сергеева), А. М.* Об одном способе разрушения ледяного покрова / А. М. Полярус (Сергеева), Д. Ю. Романов // Проблемы механики сплошных сред и смежные вопросы технологии машиностроения : сб. докладов второй конференции (Владивосток, 31 августа – 6 сентября 2003 г.). – Комсомольск-на-Амуре : ИМиМ ДВО РАН, 2003. – С. 23–28.

Трещев А. А., Теличко В. Г.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
ТРУБЧАТЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ЧИСТОМ КРУЧЕНИИ
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

(Тульский государственный университет)

Сложные механические явления, наблюдающиеся при кручении оболочек из материалов с усложненными свойствами, представляют собой серьезный барьер для применения традиционного метода конечных разностей и накладывают определенные ограничения на возможности использования метода граничных элементов. В связи с этим были проведены подробные математические исследования, которые показали, что при не гладких входных данных наиболее удобен и обладает достаточно быстрой сходимостью метод конечных элементов [3; 9; 14].

Условимся представлять исследуемую оболочку в виде сети плоских конечных элементов с разбивкой по толщине на ряд однородных фиктивных слоев внутри реальных армированных и неармированных зон. Параметры жесткости будем определять в центре каждого фиктивного слоя конечного элемента и распространять их на весь объем этого слоя. Очевидно, что по мере сгущения сетки конечных элементов и увеличения числа фиктивных слоев приближенное конечно-элементное решение будет асимптотически приближаться к точному, сводя на нет все геометрические погрешности аппроксимации.

Анализ задачи деформирования оболочек из материалов с усложненными механическими свойствами показывает, что для них характерно сильное влияние деформаций поперечного сдвига [1]. Кроме того, физическая нелинейность материала приводит к появлению ярко выраженных деформаций в срединной плоскости [1].

Рассмотрим равновесие малого плоского элемента оболочки толщиной h , находящейся под действием поперечной нагрузки интенсивностью q . Ориентируем этот участок в локальной декартовой системе координат так, чтобы ось x_3 была направлена вертикально вверх. Перемещения любой точки участка поверхности оболочки представим следующим образом:

$$\begin{aligned}U_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1, x_2) + x_3 y_2(x_1, x_2); \\U_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_1, x_2) - x_3 y_1(x_1, x_2); \\U_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2), \\y_1 &= w_2 - g_{23}; y_2 = -w_1 + g_{13};\end{aligned}\tag{1}$$

где y_1, y_2 – углы поворота срединной поверхности вокруг осей x_1 и x_2 ; g_{13}, g_{23} – деформации поперечного сдвига.

Деформирование железобетонной оболочки вплоть до разрушения происходит при малых прогибах. Поэтому для малого плоского элемента оболочки связи между деформациями и перемещениями с учетом принятых зависимостей (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} e_{11} &= u_{1,1} + x_3 y_{2,1}; \quad e_{22} = u_{2,2} - x_3 y_{1,2}; \quad e_{33} = 0; \\ g_{12} &= u_{1,2} + u_{2,1} + x_3 (y_{2,2} - y_{1,1}); \\ g_{13} &= y_2 + w_1; \quad g_{23} = -y_1 + w_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение равновесия малого плоского элемента оболочки записываются в традиционной форме [10]:

$$\begin{aligned} N_{11,1} + N_{12,2} &= 0; \quad N_{12,1} + N_{22,2} = 0; \\ M_{11,1} + M_{12,2} &= Q_1; \quad M_{12,1} + M_{22,2} = Q_2; \\ Q_{1,1} + Q_{2,2} &= q. \end{aligned} \quad (4)$$

При получении зависимостей между напряжениями и деформациями будем считать, что нормальные напряжения S_{33} достаточно малы и ими можно пренебречь. Тогда имеем

$$\{s\} = [B]\{e\}, \quad (5)$$

где

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ t_{12} \\ t_{13} \\ t_{23} \end{Bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} & B_{14} & B_{15} \\ & B_{22} & B_{26} & B_{24} & B_{25} \\ & & B_{66} & B_{64} & B_{65} \\ & & & B_{44} & B_{45} \\ & & & & B_{55} \end{bmatrix}; \quad \{e\} = \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ g_{12} \\ g_{13} \\ g_{23} \end{Bmatrix};$$

B_{ij} – жесткости, зависящие от вида напряженного состояния, степени нагружения, характера армирования, развития пластических деформаций в арматуре.

Переходя от напряжений (5) к их интегральным характеристикам с учетом расширения количества силовых параметров за счет усилий, получим

$$Q_k = \int_{-h/2}^{h/2} t_{k3} dx_3, \quad (k=1,2). \quad (6)$$

Тогда, принимая во внимание уравнения (3), приведем зависимости (5) к виду

$$\{M\} = [D]\{e\}, \quad (7)$$

где $\{M\}$ – вектор обобщенных сил; $\{e\}$ – вектор обобщенных деформаций срединной поверхности оболочки;

$$M = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix}; \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} & K_{14} & K_{15} & K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ & D_{22} & D_{26} & K_{24} & K_{25} & K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ & & D_{66} & K_{64} & K_{65} & K_{16} & K_{26} & K_{66} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{14} & C_{24} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{15} & C_{25} & C_{65} \\ & & & & & C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ & & & & & & C_{22} & C_{26} \\ & & & & & & & C_{66} \end{bmatrix}; \quad \{e\} = \begin{Bmatrix} y_{2,1} \\ -y_{1,2} \\ y_{2,2} - y_{1,1} \\ g_{13} \\ g_{23} \\ u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix};$$

$$C_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} dx_3; K_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} x_3 dx_3; D_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} x_3^2 dx_3.$$

Заметим, что интегральные жесткостные характеристики C_{km} , K_{km} , D_{km} не могут быть получены непосредственно, так как параметры B_{km} не являются наперед заданными функциями от x_3 и зависят от напряженного состояния. Однако интегралы можно вычислять приближенно, разбив малый плоский элемент оболочки по толщине на ряд фиктивных слоев. В целях упрощения фиктивные слои можно принять одинаковыми по толщине.

При выборе конечно-элементной модели для расчета конструкций типа железобетонных оболочек была предпринята попытка использовать изопараметрические конечные элементы (КЭ) [1]. Численные эксперименты на примере пластин и оболочек показали, что при уменьшении их толщины вследствие трещинообразования использование изопараметрических КЭ, учитывающих деформации поперечного сдвига, приводит к прогрессирующему возрастанию изгибной жесткости [16]. Поэтому для моделирования были выбраны свободные от «паразитных жесткостей», так называемые гибридные КЭ [15]. Р. Куком получены две модификации гибридных КЭ с тремя степенями свободы в узле. Непосредственное применение конечных элементов Р. Кука к расчету железобетонных пространственных конструкций нецелесообразно, так как они не учитывают продольные усилия и перемещения в срединной плоскости, а также не позволяют эффективно определять вектор обобщенных сил $\{M\}$ в центре КЭ. Поэтому была разработана модификация гибридных КЭ с пятью степенями свободы в узле и матрицей жесткости, полученной для произвольного плоского треугольного элемента.

1. Математическая модель конечного элемента

Матрица жесткости конечного элемента

Внутри конечного элемента вектор обобщенных сил представим следующим образом [15]:

$$\{M\} = [P]\{b\}, \quad (8)$$

где $[P]$ – матрица некоторых функций от координат точки элемента; $\{b\}$ – вектор коэффициентов, подлежащих определению.

Вектор обобщенных деформаций представим в виде

$$\{e\} = [D]^{-1}\{M\} = [E]\{M\}, \quad (9)$$

где $[E]$ – матрица податливости. Энергию деформации для объема конечного элемента определим как интеграл по его площади

$$U = \frac{1}{2} \int_S \{M\}^T [E] \{M\} dS. \quad (10)$$

П. Тонгом и Т. Пианом в работе [16] показано, что конечные элементы данного класса основаны на функционале вида

$$\dot{I} = \sum_n \left(U_n - \int_{V_n} \{\Phi\}^T \{t\} dS + \int_S \{\bar{\Phi}\}^T \{t\} dS \right) \quad (11)$$

где V_n – граница объема элемента; S – часть V_n , подвергнутая действию внешнего вектора сил $\{\bar{\Phi}\}$; n – количество элементов; $\{t\}$ – граничные перемещения, связанные с узловыми перемещениями $\{q\}$ выражением

$$\{t\} = [L]\{q\}. \quad (12)$$

Вектор сил на границе элемента $\{\Phi\}$ определяется из уравнения (11):

$$\{\Phi\} = [R]\{b\}, \quad (13)$$

где $[R]$ – матрица $[P]$ для контура V_n элемента.

Подставляя выражения (8), (10), (12), (13) в уравнение (11), получаем

$$\dot{i} = \sum_n \left(\frac{1}{2} \{b\}^T [H] \{b\} - \{b\}^T [T] \{q\} + \{\Phi_0\}^T \{q\} \right), \quad (14)$$

где

$$[H] = \int_S [P]^T [E] [P] dS; \quad (15)$$

$$[T] = \int_{V_n} [R]^T [L] dS; \quad (16)$$

$$\{\Phi_0\}^T = \int_S \{\bar{\Phi}\} [L] dS. \quad (17)$$

Определяя вариации функционала (14) по параметрам $\{b\}$, $\{q\}$ и приравнявая эти вариации нулю, можно получить выражение вида [15]

$$\sum_n [T]^T [H]^{-1} [T] \{q\} = \sum_n \{\Phi_0\}, \quad (18)$$

откуда выделяется матрица жесткости элемента

$$[K] = [T]^T [H]^{-1} [T]. \quad (19)$$

При определении вариации функционала (14) по коэффициентам $\{b\}$ устанавливается связь этих коэффициентов с узловыми перемещениями

$$\{b\} = [H]^{-1} [T] \{q\}. \quad (20)$$

Подставляя (20) в соотношения (8), приходим к зависимостям вида

$$\{M\} = [P][H]^{-1} [T] \{q\}. \quad (21)$$

Таким образом, вектор обобщенных сил $\{M\}$ определен.

Определение матрицы $[H]$

Представим $\{M\}$ через неизвестные коэффициенты $\{b\}$ в виде

$$\begin{aligned} M_{11} &= b_1 + b_4 x_1 + b_9 x_2; & M_{22} &= b_2 + b_5 x_2 + b_{10} x_1; & M_{12} &= b_3 + b_{12} x_1 + b_{11} x_2; \\ Q_1 &= b_4 + b_{11}; & Q_2 &= b_5 + b_{12}; & N_{11} &= b_6; & N_{22} &= b_7; & N_{12} &= b_8. \end{aligned} \quad (22)$$

На основании уравнения (8) получаем матрицу $[P]$ функций $M_{11} \dots N_{12}$ от координат точки элемента. Вектор b при этом имеет вид

$$\{b\} = \{b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6 \ b_7 \ b_8 \ b_9 \ b_{10} \ b_{11} \ b_{12}\}^T. \quad (23)$$

Подставляя матрицу $[P]$ в соотношение (15) и учитывая известные выражения для интегралов по площади треугольника [6], получим выражения для элементов квадратной матрицы двенадцатого порядка $[H]$.

Определение матрицы $[T]$

Запишем выражение работы вектора обобщенных сил $\{M\}$ вдоль контура конечно-го элемента, а затем выделим из этого выражения векторы $\{b\}^T$ и $\{q\}$, тогда то, что останется (см. уравнение (14)), окажется матрицей $[T]$.

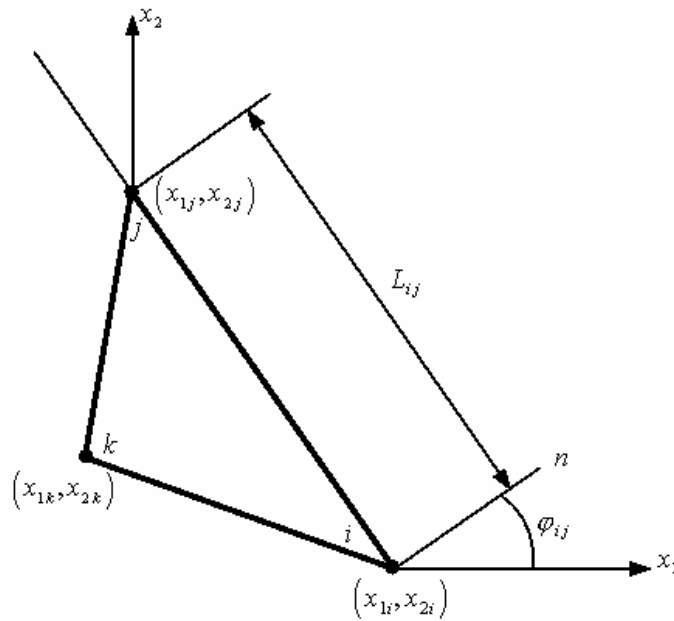


Рис. 1. Схема треугольного конечного элемента в плоскости $x_1, 0, x_2$

Из условия равновесия элементарного треугольника ABC , приведенного на рис. 1, вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{11} &= M_{11}C_{ij} + M_{12}S_{ij}; \quad \bar{M}_{22} = -M_{22}S_{ij} - M_{12}C_{ij}; \quad \bar{N}_{11} = N_{11}C_{ij} + N_{12}S_{ij}; \\ \bar{N}_{22} &= N_{22}S_{ij} + N_{12}C_{ij}; \quad \bar{Q} = Q_1C_{ij} + Q_2S_{ij}, \quad C_{ij} = \cos j_{ij}; \quad S_{ij} = \sin j_{ij}. \end{aligned} \quad (24)$$

С учетом зависимостей (24) определим работу распределенных вдоль стороны $i-j$ (рис. 2) сил и моментов следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= L_{ij} \int_0^1 [(Q_1C_{ij} + Q_2S_{ij})w - (M_{12}C_{ij} + M_{22}S_{ij})y_1 + (M_{12}S_{ij} + M_{11}C_{ij})y_2 + \\ &\quad + (N_{11}C_{ij} + N_{12}S_{ij})u_1 + (N_{22}S_{ij} + N_{12}C_{ij})u_2] dx, \end{aligned} \quad (25)$$

где $x = l/L_{ij}$ – безразмерная координата, измеряемая вдоль стороны конечного элемента $i-j$.

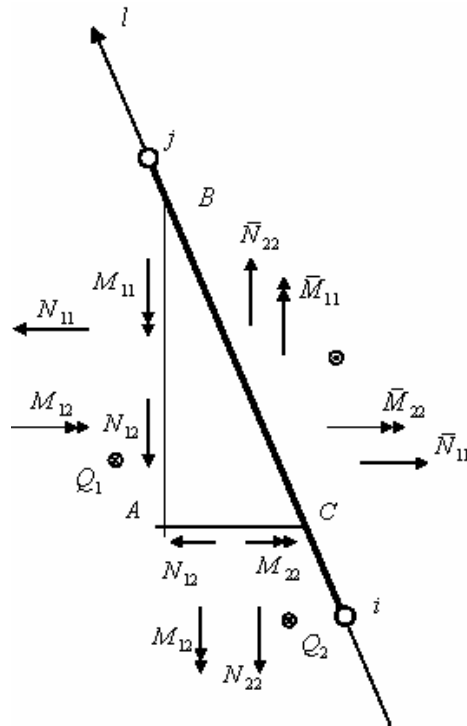


Рис. 2. Схема усилий и перемещений на стороне конечного элемента

Работа усилий и моментов, совершаемая на соответствующих перемещениях вдоль всего контура треугольного КЭ, определяется суммой:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31}. \quad (26)$$

Зададим вектор перемещений в i -ом узле конечного элемента:

$$\{q_i\} = \{w_i, y_{1i}, y_{2i}, u_{1i}, u_{2i}\}^T = \{q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}, q_{i4}, q_{i5}\}^T. \quad (27)$$

Вектор узловых перемещений всего КЭ можно представить так:

$$\{q\} = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_{15}\}^T. \quad (28)$$

Аппроксимацию граничных перемещений в зависимости от узловых перемещений примем в следующей форме [15]:

$$\begin{aligned} w &= [(1-x) x] \{w_i, w_j\} + L_{ij} x(1-x)(q_i - q_j) / 2; \\ y_1 &= [(1-x) x] \{y_{1i}, y_{1j}\}; y_2 = [(1-x) x] \{y_{2i}, y_{2j}\}; \\ u_1 &= [(1-x) x] \{u_{1i}, u_{1j}\}; u_2 = [(1-x) x] \{u_{2i}, u_{2j}\}; \end{aligned} \quad (29)$$

где $q_i = y_{1i} c_{ij} + y_{2i} s_{ij}$; $q_j = y_{1j} c_{ij} + y_{2j} s_{ij}$; L_{ij} – длина стороны $i-j$.

Представим текущие координаты x_1, x_2 на стороне $i-j$ через координаты узлов в виде

$$x_1 = x_{1i} - L_{ij} x s_{ij}; x_2 = x_{2i} + L_{ij} x c_{ij}. \quad (30)$$

Подставляя зависимости (22), (25), (29), (30) в уравнение (26), учитывая при этом (28) и выделяя векторы $\{b\}^T, \{q\}$, получим выражения для элементов матрицы $[T]$ размера 12×15 .

2. Модель деформирования железобетонной оболочки

Очевидно, что математическая модель деформирования железобетонных оболочек должна достаточно точно учитывать специфические особенности сложной среды «бетон-арматура» на различных стадиях работы композита, быть вполне обозримой и практически реализуемой, т. е. модель не может быть полностью свободной от дополнительных технических гипотез.

Дополнительные технические гипотезы модели

Задачи деформирования железобетонных цилиндрических оболочек будем рассматривать в условиях активной деформации и простого нагружения, что позволяет представить бетон как нелинейный материал с присущими ему упругопластическими свойствами, вполне укладывающимися в «рамки» потенциала деформаций [8]. Вопрос о ползучести бетона оставляем открытым, т. е. деформации ползучести не учитываем.

Ограничимся анализом напряженно-деформированного состояния оболочек с ортогональным армированием стержней.

Рассмотрим оболочки, размеры которых в плане велики по сравнению со средним расстоянием между арматурными стержнями. Такой выбор конструкции позволяет пренебречь местными напряжениями в зоне контакта арматуры и бетона, а значит, распределить арматуру, представив ее в виде сплошного слоя, обладающего свойствами структурной анизотропии.

В качестве модели для стальной арматуры примем идеальное упругопластическое тело.

Предположим, что арматура воспринимает только нормальные напряжения в поперечных сечениях, а ее коэффициенты Пуассона примем равными нулю. Обнуление коэффициентов поперечной деформации заметно упрощает зависимости между напряжениями и деформациями, тогда как погрешность с введением этого допущения лежит в пределах точности исходных данных.

Напряжения в пределах армированных слоев оболочки определим как сумму напряжений в бетоне и арматуре, а за условие совместности бетона и арматуры примем равенство деформаций этих двух сред.

Срединную поверхность оболочки представим сетью гибридных конечных элементов разработанной в исследовании модификации $H12$ с учетом разбиения по толщине на ряд фиктивных слоев n_c . Жесткостные характеристики, рассчитанные для центра фиктивного слоя данного конечного элемента, распространим на любые точки фиктивного слоя.

За критерий трещинообразования бетона в каждом фиктивном слое примем критерий Баландина [4]. Предполагая, что трещины нормальны к срединной поверхности оболочки, будем рассчитывать главные напряжения по формулам плоского напряженного состояния. Трещины в области треснувшего фиктивного слоя будем считать сквозными и параллельными друг другу.

Так как на участке между трещинами сцепление между арматурой и бетоном сохраняется, то влияние растянутого бетона учтем при помощи коэффициента Мурашева, который представляет собой отношение средней деформации между трещинами к максимальной деформации арматуры в трещине.

При наличии трещин бетон моделируем трансверсально-изотропным телом с плоскостью изотропии, параллельной плоскости трещин.

В зависимости от конкретных условий напряженно-деформированного состояния фиктивных слоев выделим следующие группы: а) бетонные слои без трещин, б) армированные (железобетонные) слои без трещин, в) бетонные слои с трещинами, г) армированные (железобетонные) слои с трещинами, д) армированные (железобетонные) слои с пересекающимися трещинами. Рассмотрим моделирование каждого из этих слоев.

Бетонные слои без трещин

Для бетонных слоев будем считать справедливым закон деформирования [11]. Тогда, выделив компоненты матрицы податливости, получим

$$\{e\} = [A]\{s\}, \quad (31)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & A_{14} & A_{15} \\ & A_{22} & A_{26} & A_{24} & A_{25} \\ & & A_{66} & A_{64} & A_{65} \\ & sim & & A_{44} & A_{45} \\ & & & & A_{55} \end{bmatrix}; \quad (32)$$

$$A_{11} = \{2(R_1 + 2R_2)/3 + R_3x(3 - 2x^2)/3 + R_4[x(2 - h^2) + 4(s_{11} - 2s_{22})/9S_0] + R_5[h \cos 3j (1 + x^2) + 2\sqrt{2}x - 2 \cos 3j - \sqrt{2}s_{22}/S_0]\}/3;$$

$$A_{12} = \{2(R_1 - R_2)/3 + (R_3 + R_4/3)x + R_5[\cos 3j (1 - x) - \sqrt{2}x]\}/3;$$

$$A_{16} = (2R_4/3 + \sqrt{2}R_5)t_{12}/3S_0; \quad A_{26} = A_{16};$$

$$A_{14} = (2R_4/3 + \sqrt{2}R_5)t_{13}/3S_0;$$

$$A_{15} = 2(R_4/3 - \sqrt{2}R_5)t_{23}/3S_0;$$

$$A_{22} = \{2(R_1 + 2R_2)/3 + R_3[x(3 - 2x^2)/3 + R_4[x(2 - h^2) + 4(s_{22} - 2s_{11})/9S_0] + R_5[h \cos 3j (1 + x^2) + 2\sqrt{2}x - 2 \cos 3j - \sqrt{2}s_{11}/S_0]\}/3;$$

$$A_{24} = 2(R_4/3 - \sqrt{2}R_5)t_{13}/3S_0;$$

$$A_{25} = (2R_4/3 + \sqrt{2}R_5)t_{23}/3S_0;$$

$$A_{66} = 2\{2R_2 - R_3x^3 + R_4[x(2 - h^2) - (s_{11} + s_{22})/3S_0] + R_5[\sqrt{2}h(s_{11} - s_{22})/2 - h^3 \cos 3j]\}/3;$$

$$A_{64} = \sqrt{2}R_5t_{23}/S_0; \quad A_{65} = \sqrt{2}R_5t_{13}/S_0;$$

$$A_{44} = 2\{2R_2 - R_3h^3 + R_4[x(2 - h^2) - (s_{11} + s_{22})/3S_0] + R_5[\sqrt{2}h(s_{11} - 2s_{22})/2 - h^3 \cos 3j]\}/3;$$

$$A_{45} = \sqrt{2}R_5t_{12}/S_0;$$

$$A_{55} = 2\{2R_2 - R_3h^3 + R_4[x(2 - h^2) - (s_{11} + s_{22})/3S_0] + R_5[\sqrt{2}h(s_{22} - 2s_{11})/2 - h^3 \cos 3j]\}/3,$$

где R_i – константы потенциала деформаций, приведенные в работе [8]; S_0 – модуль вектора полного напряжения на октаэдрической площадке; x , h – некоторые гармонические функции, которые можно трактовать как нормированные нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке; j – фаза напряжений.

Очевидно, что матрица упругости $[B]$ для каждого из неармированных бетонных слоев конечного элемента может быть выражена через матрицу податливостей (32):

$$[B] = [A]^{-1}. \quad (33)$$

Армированные (железобетонные) слои

В силу принятых выше гипотез имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{11} &= \mathbf{s}_{B11} + \mathbf{s}_{S11}; \quad \mathbf{s}_{22} = \mathbf{s}_{B22} + \mathbf{s}_{S22}; \\ \mathbf{t}_{12} &= \mathbf{t}_{B12}; \quad \mathbf{t}_{13} = \mathbf{t}_{B13}; \quad \mathbf{t}_{23} = \mathbf{t}_{B23}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\mathbf{s}_{11}, \mathbf{s}_{22}, \mathbf{t}_{ij}$ – напряжения в железобетонных слоях; $\mathbf{s}_{B22}, \mathbf{s}_{B11}, \mathbf{s}_{Bij}$ – напряжения в бетоне железобетонного слоя; $\mathbf{s}_{S11}, \mathbf{s}_{S22}$ – напряжения в арматуре.

Условие совместности деформаций бетона и арматуры для железобетонных слоев можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} e_{11} &= e_{B11} = e_{S11}; \quad e_{22} = e_{B22} = e_{S22}; \\ \mathbf{g}_{12} &= \mathbf{g}_{B12} = \mathbf{g}_{S12}; \quad \mathbf{g}_{13} = \mathbf{g}_{B13} = \mathbf{g}_{S13}; \quad \mathbf{g}_{23} = \mathbf{g}_{B23} = \mathbf{g}_{S23}, \end{aligned} \quad (35)$$

где $e_{11}, e_{22}, \mathbf{g}_{12}, \mathbf{g}_{13}, \mathbf{g}_{23}$ – компоненты деформаций железобетонного слоя; $e_{B11}, e_{B22}, \mathbf{g}_{B12}, \mathbf{g}_{B13}, \mathbf{g}_{B23}$ – деформации бетона в железобетонном слое; $e_{S11}, e_{S22}, e_{S12}, e_{S13}, e_{S23}$ – деформации арматуры.

На основе выражений (34), (35) получим матрицу упругости для армированных слоев

$$[B] = [A]^{-1} + [B_S], \quad (36)$$

где $B_{S11} = E_S \mathbf{m}_{11}$; $B_{S22} = E_S \mathbf{m}_{22}$;

$$[B_S] = \begin{bmatrix} B_{S11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & B_{S22} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & sim & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix};$$

где E_S – модуль упругости материала арматуры; $\mathbf{m}_{11} = A_{Si} / S_{i11} h_S$, $\mathbf{m}_{22} = A_{Si} / S_{i22} h_S$ – коэффициенты армирования в направлении осей x_1 и x_2 соответственно; A_{Si} – площадь сечения арматурного стержня; S_{i11}, S_{i22} – шаг стержней, параллельных соответственно осям x_1 и x_2 ; h_S – суммарная толщина армированных слоев.

Заметим, что компоненты матрицы $[A]^{-1}$ в выражении (36) определяются по формулам (32), в которых вместо напряжений \mathbf{s}_{ij} должны фигурировать напряжения \mathbf{s}_{Bij} .

Бетонный слой с трещиной

Считаем, что трещины будут образовываться, если выполняется условие

$$\mathbf{s}_{11}^2 + \mathbf{s}_{22}^2 + 3 \cdot (\mathbf{t}_{12}^2 + \mathbf{t}_{23}^2 + \mathbf{t}_{13}^2) - (\mathbf{s}_{11} \mathbf{s}_{22}) - (R_{bt} + R_b)(\mathbf{s}_{11} + \mathbf{s}_{22}) + R_{bt} R_b > 0, \quad (37)$$

где $s_{11}, s_{22}, t_{12}, t_{13}, t_{23}$ – напряжения в бетоне в момент трещинообразования, рассчитанные для центра фиктивного слоя. Здесь R_{bt}, R_b – предел прочности бетона при осевом растяжении и сжатии соответственно.

Будем считать, что с появлением трещины неармированный бетонный слой в области данного конечного элемента перестает работать, т. е. примем

$$[B] = 0. \quad (38)$$

Это допущение (38) можно распространить и на случай бетонных слоев с пересекающимися трещинами.

Железобетонный слой с трещиной

В качестве критерия трещинообразования примем условие

$$s_{B11}^2 + s_{B22}^2 + 3 \cdot (t_{12}^2 + t_{23}^2 + t_{13}^2) - (s_{B11} s_{B22}) - (R_{bt} + R_b)(s_{B11} + s_{B22}) + R_{bt} R_b > 0, \quad (39)$$

где s_{Bij} – напряжения в бетоне железобетонного слоя, R_{bt}, R_b – предел прочности бетона при осевом растяжении и сжатии соответственно.

Угол между нормалью к трещине и осью c_1 может быть определен из соотношения $c_1 = \arctg \left[(s_{B11} - s_{11}) / t_{12} \right]$ ($s_{bt} = s_i + t_i$ – инварианты, определяемые согласно зависимостям [8]).

Заметим, что при возникновении параллельных друг другу трещин в области армированного слоя данного конечного элемента начально-изотропный бетон приобретает свойства ортотропии. В связи с этим утрачивается приемлемость потенциальных определяющих соотношений, ориентированная на нелинейно-упругий, разносопротивляющийся изотропный материал. Поэтому для треснувшего в армированных слоях бетона проведем некоторое изменение модели, заключающееся в следующем. Будем считать справедливой приемлемость потенциальных отношений [8] только для направлений вдоль трещин, где не нарушена целостность бетона. В указанном направлении физически нелинейные свойства бетона будем аппроксимировать секущим модулем упругости E_B и секущим коэффициентом поперечных деформаций n_B , определяемых из уравнения

$$e_{22}^* = A_{12}^* s_{B11}^* + A_{22}^* s_{B22}^* = (s_{B22}^* - n_B s_{B11}^*) / E_B, \quad (40)$$

т. е.

$$E_B = 1 / A_{22}^*; n_B = -A_{12}^* / A_{22}^*,$$

где A_{12}^*, A_{22}^* – компоненты матрицы податливостей, рассчитываемые по формулам (32), в которых напряжения s_{11} и s_{22} необходимо заменить на s_{B11}^*, s_{B22}^* соответственно; s_{Bij}^* – напряжения в бетоне, рассчитанные в ортогональной системе координат $X_1^* O X_2^*$, повернутой относительно исходной системы $X_1 O X_2$ на угол c_1 .

С учетом изложенного зависимости между деформациями и напряжениями в повернутой системе координат представим в виде

$$\{e^*\} = [A^*] \{s_B^*\}, \quad (41)$$

где

$$\{e^*\} = \begin{Bmatrix} e_{11}^* \\ e_{22}^* \\ g_{12}^* \\ g_{13}^* \\ g_{23}^* \end{Bmatrix}; [A^*] = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & 0 & 0 & 0 \\ & A_{22}^* & 0 & 0 & 0 \\ & & A_{66}^* & 0 & 0 \\ & Sim & & A_{44}^* & 0 \\ & & & & A_{55}^* \end{bmatrix}; \{s_B^*\} = \begin{Bmatrix} s_{B11}^* \\ s_{B22}^* \\ t_{B12}^* \\ t_{B13}^* \\ t_{B23}^* \end{Bmatrix};$$

$$A_{11}^* = 1/(E_B w); A_{12}^* = -n_B/E_B; A_{22}^* = 1/E_B;$$

$$A_{44}^* = A_{66}^* = 2(1+n_B)/(E_B w); A_{55}^* = 2(1+n)/E_B,$$

где модуль деформации бетона определим величиной $E_B w$ (w – функция, характеризующая степень разрушения бетона $0 < w \leq 1$).

Тогда, выполнив преобразование координат из системы $X_1^* O X_2^*$ в исходную, получим матрицу податливостей для треснувшего бетона [13] $[A^C]$.

Очевидно, что матрица упругости для арматуры треснувшего железобетонного слоя в исходной системе координат $X_1 O X_2$ имеет вид

$$[B_S^C] = \begin{bmatrix} E_{S11} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & E_{S22} m_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & Sim & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (42)$$

где E_{S11}, E_{S22} – секционные модули деформаций материала арматуры соответственно вдоль осей X_1 и X_2 .

Матрицу упругости железобетонного слоя представим в виде

$$[B] = [B_B^C] + [B_S^C], [B_B^C] = [A^C]^{-1}. \quad (43)$$

Для того чтобы уравнения (43) были замкнутыми, необходимо задать функцию поврежденности w . Эту функцию определим через коэффициент В. И. Мурашева y_s , учитывающий работу растянутого бетона на участках между трещинами [12]:

$$y_s = E_{sn} / (E_B w + E_{sn}), \quad (44)$$

где E_{sn} – модуль упругости арматуры в направлении вдоль нормали к трещине,

$$E_{sn} = E_{S11} m_{11} \cos^4 c_1 + E_{S22} m_{22} \sin^4 c_1. \quad (45)$$

Решая совместно уравнения (44) и (45) относительно w , получим

$$w = (E_{S11} m_{11} \cos^4 c_1 + E_{S22} m_{22} \sin^4 c_1) (1/y_s - 1) / E_B. \quad (46)$$

Для вычисления коэффициента y_s воспользуемся эмпирической формулой [1]

$$y_s = 1 - 0,7 R_{bt} / s_{11}^*, \quad (47)$$

в которой подразумевается, что

$$s_{B11}^* = 0,7 R_{bt}, \quad (48)$$

где s_{11}^* , s_{B11}^* – нормальные напряжения в железобетоне и бетоне на площадках, совпадающих с трещиной.

Расписав уравнение (48) с учетом правил преобразования координат напряжений s_{Bij} , получим нелинейное уравнение относительно w

$$\begin{aligned} & (B_{B11}^C e_{11} + B_{B12}^C e_{22} + B_{B16}^C g_{12}) \cos^2 c_1 + \\ & + (B_{B12}^C e_{12} + B_{B22}^C e_{22} + B_{B26}^C g_{12}) \sin^2 c_1 + \\ & + (B_{B16}^C e_{11} + B_{B26}^C e_{26} + B_{B66}^C g_{12}) \sin 2c_1 = 0,7R_{bt}. \end{aligned} \quad (49)$$

Решение этого уравнения строится в рамках метода последовательных приближений. По рассчитываемой функции w и параметру u определяются матрица $[A^C]$ и компоненты матрицы упругости $[B]$.

Железобетонные слои с пересекающимися трещинами

Очевидно, что у железобетонных конечных элементов с трещинами при увеличении нагрузки происходит более интенсивный рост главных напряжений в направлениях вдоль трещин, где не нарушена сплошность бетона. В общем случае теоретически эти напряжения могут оказаться растягивающими. После образования первичных трещин и выполнения связанного с этим процессом ограничения (47) для случая, когда напряжения s_{B11} и s_{B22} являются растягивающими, на некотором этапе нагружения становится возможным повторное срабатывание критерия (39). При дальнейшем увеличении второго главного напряжения в бетоне s_{B2t} железобетонного элемента при $s_{B2t} > s_{B1t}$ могут возникнуть вторичные трещины, пересекающие первичные и перпендикулярные направлению второго главного напряжения s_{B2t} . Здесь s_{B1t} – первые главные напряжения в бетоне, определяемые по формуле

$$s_{B1t} = [s_{B11} + s_{B22} + \sqrt{(s_{B11} - s_{B22})^2 + 4t_{12}^2}] / 2,$$

а s_{B2t} – вторые главные напряжения в бетоне, определяемые по формуле

$$s_{B2t} = [s_{B11} + s_{B22} - \sqrt{(s_{B11} - s_{B22})^2 + 4t_{12}^2}] / 2. \quad (50)$$

В случае непересекающихся трещин полосы бетона между ними выполняют две важные функции. С одной стороны, из-за сцепления бетона с арматурой происходит уменьшение средних напряжений и деформаций арматуры на участках между трещинами. С другой стороны, эти полосы бетона совместно с арматурой воспринимают усилия, действующие на площадках, нормальных к трещинам, и определяют деформации элемента вдоль трещины. При наличии пересекающихся трещин последняя функция полностью утрачивается, а первая – заметно ослабевает, так как сцепление бетона с арматурой становится менее прочным. Поэтому сделаем следующее упрощение модели. Будем считать, что в случае пересекающихся трещин в рамках данного конечного элемента работает только арматура, т. е. матрица упругости принимает вид

$$[B] = [B_S^{\bar{n}}], \quad (51)$$

где матрица $[B_S^{\bar{n}}]$ определяется согласно условию (42).

3. Алгоритм решения задачи об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) железобетонных оболочек различной геометрической конфигурации

Общий алгоритм решения задачи об определении НДС железобетонных оболочек различной геометрической конфигурации условно расчленим на следующие подалгоритмы:

1. Формирование задания на расчет оболочечной конструкции.
2. Формирование матрицы связи узлов конечных элементов.
3. Формирование граничных условий.
4. Задания нагружения оболочки.
5. Формирование матриц жесткости конечных элементов.
6. Расчет вектора узловых перемещений.

Такое расчленение алгоритма решения задачи позволяет повысить помехозащищенность вычислительного процесса и дает возможность искусственно прервать ход решения, оценить динамику сходимости, корректировать дальнейшие вычислительные процессы, начиная их с прерванной операции. Решение задачи предполагалось методом пошаговых нагружений в сочетании с методом «переменных параметров упругости» – вариантом метода последовательных приближений [2].

Формирование задания на расчет оболочки представляет собой процесс определения следующих исходных данных:

- задание геометрических параметров оболочки;
- определение толщины неармированной и армированной частей оболочки;
- вычисление количества фиктивных слоев в армированной части;
- определение констант потенциала деформаций W_1 , характеризующих напряженно-деформированное состояние бетона;
- задание модуля упругости и предела текучести материала арматуры армированных элементов;
- определение коэффициентов армирования в направлении осей x_1, x_2 ;
- задание величины допустимой погрешности для расчетных значений прогибов в качестве критерия сходимости решения.

Формирование матрицы связи узлов конечных элементов реализует следующие функции:

- а) производит автоматизированное разбиение конструкции на треугольные конечные элементы, создавая ансамбль конечных элементов;
- б) выполняет нумерацию конечных элементов;
- в) определяет связь номеров узлов в ансамбле элементов с нумерацией узлов, принятой внутри конечного элемента, и формирует матрицу связи узлов.

Формирование граничных условий представляет собой присвоение нулевых значений заданному подмножеству вектора узловых перемещений $\{q\}$ ансамбля элементов. Это подмножество перемещений генерируется в ответ на указание последовательности узлов ансамбля (если узлы последовательности лежат на одной прямой, достаточно задать только номера его первого и последнего узлов) и номеров перемещений согласно принятой их нумерации внутри узла.

Операция задания нагрузки формирует вектор узловых сил для заданной области ансамбля, которая, в частности, может быть сведена к одному узлу (сосредоточенная сила в точке).

При начальном формировании матриц жесткости конечных элементов рассматриваются всего два типа фиктивных слоев: бетонные слои без трещин и железобетонные слои без трещин. Для этих слоев матрицы упругости рассчитываются по формулам (33) и (36). При этом коэффициенты начальной матрицы податливостей бетона вычисляются по правилам (32) для случая нулевых компонент тензора напряжений.

Расчет матрицы жесткости конечного элемента представляет собой последовательность следующих операций:

- расчет матрицы $[D]$ интегральных жесткостных характеристик по формулам (7);
- расчет матрицы $[E] = [D]^{-1}$;
- расчет матрицы $[H]$ по формулам (15);
- расчет матрицы $[H]^{-1}[T]$;
- непосредственное вычисление элементов матрицы жесткости конечного элемента $[K]$ по формулам (19).

Если формирование матриц жесткости не является начальным, то вычислительный процесс усложняется. В этом случае необходимо хранить в памяти векторы узловых перемещений $\{q\}$ для каждого конечного элемента и матрицы упругости их фиктивных слоев $[B]_i$ ($i = 1, 2, \dots, n_c$, где n_c – количество фиктивных слоев), рассчитанные на предыдущей итерации. Тогда расчет вектора обобщенных сил $\{M\}$ для центра конечного элемента ведется в следующем порядке:

- расчет матрицы $[H]^{-1}[T]$;
- определение вектора коэффициентов $\{b\}$ по формулам (20);
- вычисление компонент вектора $\{M\}$ при $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, т.е. в центре конечного элемента.

Вектор обобщенных деформаций для центра элемента рассчитывается непосредственно из решения уравнения (21), после чего определяются компоненты тензоров деформаций и напряжений для каждого фиктивного слоя с использованием выражений (3) и (5). Дополнительно для армированных слоев вычисляются напряжения в бетоне и в арматуре в соответствии с принятыми техническими гипотезами.

Фиктивные слои без трещин анализируются на появление трещин, а слои с трещинами – на появление вторичных трещин, пересекающих первые. В результате анализа устанавливается класс фиктивного слоя конечного элемента, в соответствии с которым корректируется матрица упругости. После перебора всех фиктивных слоев рассчитывается матрица жесткости данного конечного элемента и происходит ее включение в глобальную матрицу жесткости.

Расчет вектора узловых перемещений для всего ансамбля конечных элементов выполняется согласно методу LDL^T – факторизации для решения линейных алгебраических уравнений [2]. В пределах каждого шага нагрузки и внутри каждой итерации по методу «переменных параметров упругости» решение системы уравнений заканчивается, если все переменные в течение итерации изменяются менее чем на 10^{-6} от предыдущего значения. После того как решение сошлось, фиксируются следующие параметры: вектор узловых перемещений ансамбля; деформации и напряжения для

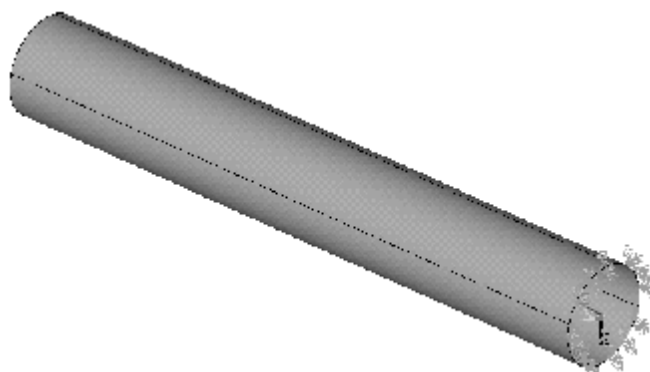
центра фиктивных слоев конечных элементов, характеристики трещинообразования для каждого фиктивного слоя: c_1 , w , Y_s , вид трещин, вектор обобщенных сил для центра конечного элемента.

Разработанный алгоритм решения реализован на алгоритмическом объектно-ориентированном языке высокого уровня C++, с применением среды разработки Visual C++ фирмы Microsoft.

4. Определение НДС трубчатых элементов при чистом кручении

Для того чтобы показать работу разработанной математической модели совместно с приведенным выше алгоритмом расчета напряженно-деформированного состояния железобетонных оболочек, была решена задача о чистом кручении трубчатых железобетонных образцов (рис. 3).

Для проверки теории, анализа и сравнения использовались данные экспериментов, выполненных в НИИЖБ Э. Г. Елагиным. Эксперименты проводили на образцах кольцевого сечения наружным диаметром 0,3 м, внутренним – 0,2 м, длиной 3,34 м. Арматура для продольных стержней – класса А-III (предел текучести $s_p = 390$ МПа, модуль упругости $E_s = 2 \cdot 10^5$ МПа), диаметром 12 мм, поперечная – класса А-I (предел текучести $s_p = 235$ МПа, модуль упругости $E_s = 2,1 \cdot 10^5$ МПа), диаметром 6,5 мм. Кубиковая прочность бетона принималась равной от 27 до 44 МПа, также варьировались такие параметры, как количество стержней в сечении для продольной арматуры и расстояние между арматурными стержнями для поперечной арматуры. Величина максимального крутящего момента, для которого проводился расчет, в зависимости от образца колебалась от 25 до 28 кН·м.



**Рис. 3. Характер закрепления исследуемых образцов:
жесткое защемление на одном из концов трубчатого образца**

Было испытано десять образцов: шесть из них с ненапрягаемой арматурой (образцы ОК-7, ОК-2, ОК-4, ОК-14 и ОК-15) и четыре – с напрягаемой (ОНК-7, ОНК-8, ОНК-14, ОНК-15), в которых предварительно напряжению подвергались 50% продольных стержней. Испытание на кручение производили на специальной установке НИИЖБ. Подробные данные опытных образцов, а также методика их испытания приведены в работах Э. Г. Елагина [5]. В диссертации решены задачи для следующих образцов: ОК-14, ОК-4, ОК-7, ОНК-7. Некоторые данные об образцах приведены в табл. 1.

Значения констант определены по данным эксперимента, как показано в работах А. А. Трещева и Н. М. Матченко [8].

Таблица 1

Образец	Продольная арматура	Поперечная арматура	Кубиковая прочность бетона на сжатие	Наличие преднапряжения в арматуре
ОК-4	А-III; диаметром 12 мм; 12 стержней в сечении;	А-I; диаметром 6,5 мм; шаг 0,06 м	28,4 МПа	нет
ОК-14	А-III; диаметром 12 мм; 16 стержней в сечении;	А-I; диаметром 6,5 мм; шаг 0,09 м	37 МПа	нет
ОК-7	А-III; диаметром 12 мм; 10 стержней в сечении;	А-I; диаметром 6,5 мм; шаг 0,05 м	28,4 МПа	нет
ОНК-7	А-III; диаметром 12 мм; 10 стержней в сечении;	А-I; диаметром 6,5 мм; шаг 0,05 м	37 МПа	да

Значения коэффициентов армирования m_{11} и m_{22} для образцов принимались в соответствии с данными табл. 2.

Таблица 2

Образец	m_{11}	m_{22}
ОК-4	0,0553	0,0346
ОК-14	0,0369	0,0462
ОК-7	0,0664	0,0289
ОНК-7	0,0664	0,0289

В своей работе Н. И. Карпенко [7] показал, что правильность модели в общем виде могут характеризовать углы закручивания. Результаты расчета углов закручивания по разработанной теории для некоторых вышеупомянутых образцов приведены ниже – на рис. 4–7.

На рис. 4–7 штрихпунктирной линией показаны результаты, полученные с применением разработанной теории расчета НДС, сплошной линией – результаты по теории Н. И. Карпенко, пунктирной линией данные эксперимента НИИЖБ.

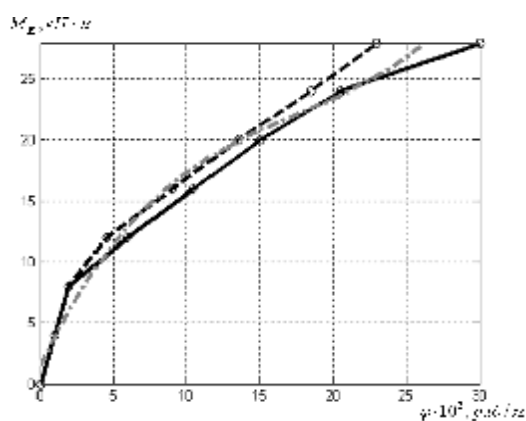


Рис. 4. Образец ОК-14

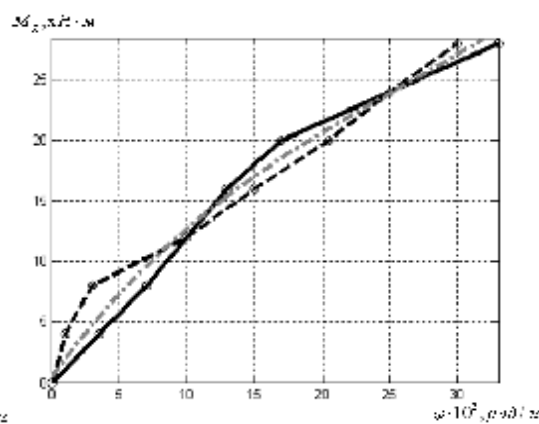


Рис. 5. Образец ОК-4

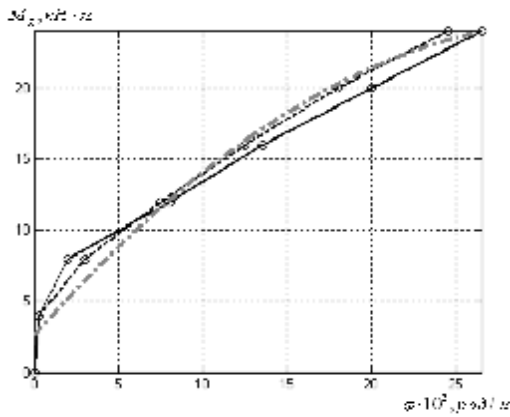


Рис. 6. Образец ОК-7

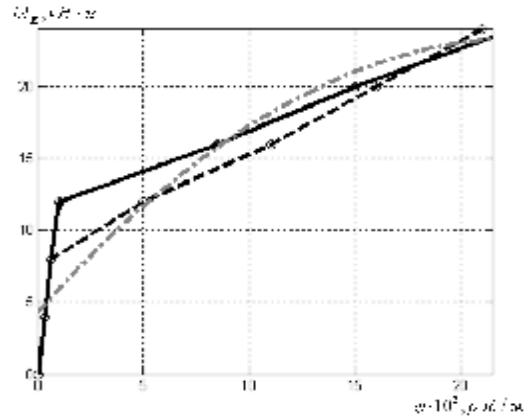


Рис. 7. Образец ОНК-7

На рис. 8–9 показаны изменения длины образца от действия крутящего момента M_K для различных образцов: ОК-4, ОНК-7. Следует заметить, что изменение длины образца является эффектом, присущим разносопротивляющимся и дилататирующим материалам, таким как бетон. В случае не учета разносопротивляемости эффект изменения длины образца от чистого кручения отсутствует.

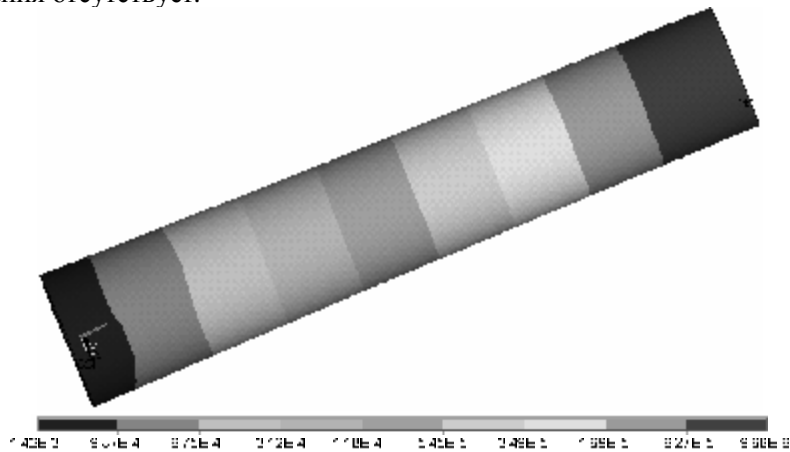


Рис. 8. Перемещения вдоль образующих цилиндра образца ОК-14 (м)

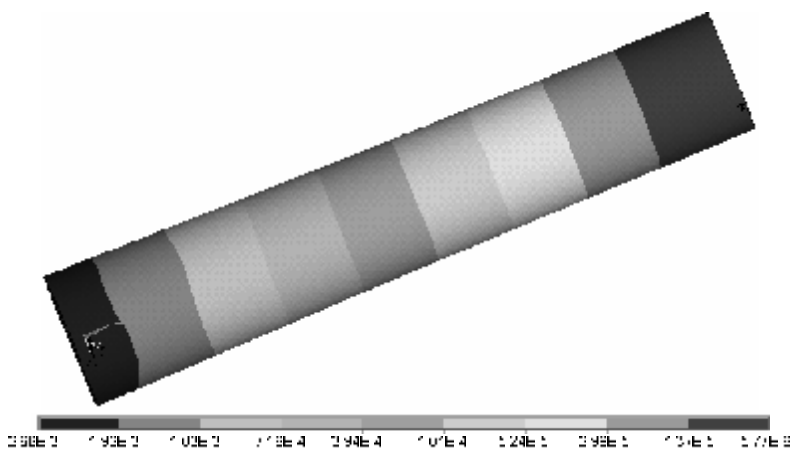


Рис. 9. Перемещения вдоль образующих цилиндра образца ОНК-7 (м)

На рис. 10 показана схема трещинообразования для исследуемых образцов. Следует отметить, что полученная теоретическая схема полностью соответствует данным, полученным в ходе экспериментов НИИЖБ [5], и результатам, полученным Н. И. Карпенко [7].

Линии, вдоль которых образуются трещины
(теоретические данные, полученные с помощью
разработанной модели)

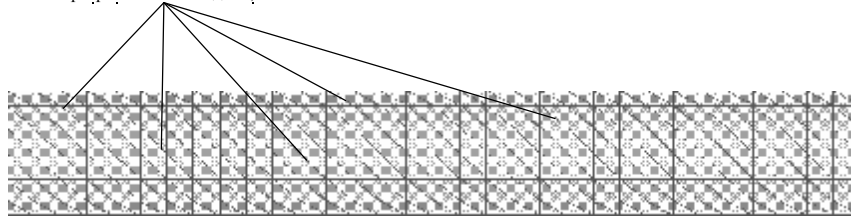


Рис. 10. Схема трещинообразования в образцах ОК-14, ОК-4, ОК-7, ОК-7

На рис. 11–12 показана зависимость углов закручивания j от крутящего момента M_K на различном расстоянии от зоны защемления: 20%, 40%, 70% и 90% длины образца $l = 3,34 \text{ м}$.

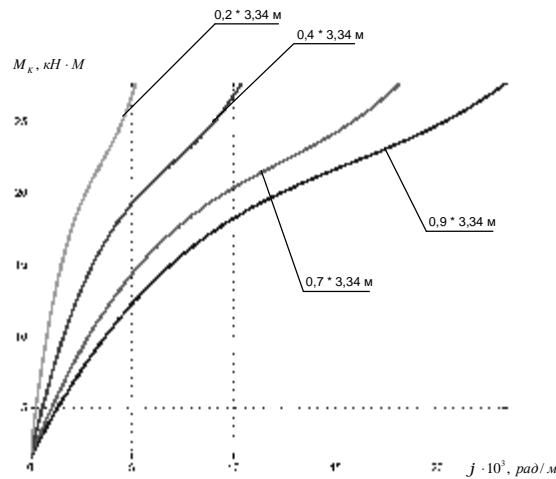


Рис. 11. Зависимость углов закручивания j от крутящего момента M_K (ОК-14)

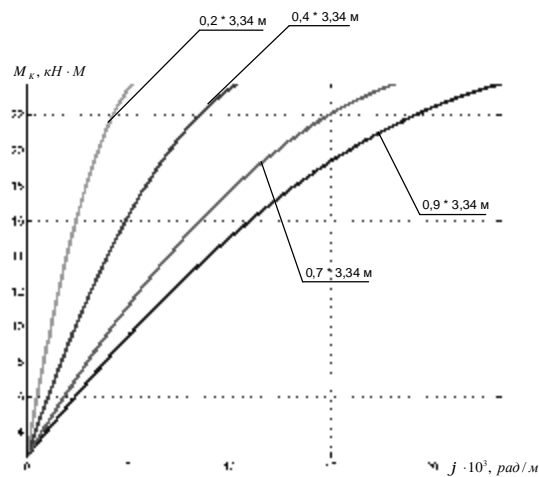


Рис. 12. Зависимость углов закручивания j от крутящего момента (ОК-7)

Сравнение с экспериментальными данными и теорией Н. И. Карпенко свидетельствует об адекватности разработанной механико-математической модели, правильности работы разработанного алгоритма и его реализации на ЭВМ, а также возможности ее использования при решении задачи об определении напряженно-деформированного состояния железобетонных оболочек при кручении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гениев, Г. А.* Теория пластичности бетона и железобетона / Г. А. Гениев, В. Н. Киссюк, Г. А. Тюпин. – М. : Стройиздат, 1974. – 316 с.
2. *Голованов, А. И.* Расчет напряженно-деформированного и предельного состояния железобетонных конструкций / А. И. Голованов, Р. Ф. Закиров и др. // Труды Междунар. конф. «Численные и аналитические методы расчета конструкций». – Самара, 1998. – С. 67–71.
3. *Голованов, А. И.* Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек / А. И. Голованов, М. С. Корнишин. – Казань, 1989. – 270 с.
4. *Гольденблат, И. И.* Критерии прочности конструкционных материалов / И. И. Гольденблат, В. А. Копнов. – М. : Машиностроение, 1968. – 192 с.
5. *Елагин, Э. Г.* Исследование работы железобетонных элементов кольцевого сечения с напрягаемой и ненапрягаемой арматурой при совместном действии изгибающего и крутящего моментов / Э. Г. Елагин // Влияние скорости нагружения, гибкости и крутящих моментов на прочность железобетонных конструкций. – М. : Стройиздат, 1970.
6. *Зенкевич, О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
7. *Карпенко, Н. И.* Теория деформирования железобетона с трещинами / Н. И. Карпенко. – М. : Стройиздат, 1976. – 208 с.
8. *Матченко, Н. М.* Теория деформирования разнотипных материалов. Определяющие соотношения / Н. М. Матченко, А. А. Трещев. – М. ; Тула : РААСН-ТулГУ, 2000. – 149 с.
9. *Норри, Д.* Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. – М. : Мир, 1981. – 304 с.
10. *Секулович, М.* Метод конечных элементов / М. Сенкевич. – М. : Стройиздат, 1993. – 664 с.
11. *Теличко, В. Г.* Гибридный конечный элемент для расчета плит и оболочек с усложненными свойствами / В. Г. Теличко, А. А. Трещев // Известия вузов. Строительство / ИГАСУ. – 2003. – № 5. – С. 17–23.
12. *Теличко, В. Г.* Моделирование напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций из железобетона / В. Г. Теличко, А. А. Трещев // Известия ТулГУ. Сер. Строительные материалы, конструкции и сооружения. – 2005. – Вып. 8. – С. 147–161.
13. *Теличко, В. Г.* Расчет напряженно-деформированного состояния железобетонных оболочек различного типа / В. Г. Теличко // Материалы 2-й Международной конференции по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики «Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики». – Тула : Гриф и К, 2005. – С. 87–94.
14. *Шмельтер, Я.* Метод конечных элементов в статике сооружений / Я. Шмельтер, М. Дацко, С. Добросинский, М. Вечорек. – М. : Стройиздат, 1986. – 220 с.
15. *Cook, R. D.* Two hybrid elements for analysis of thick thin and sandwich plates / R. D. Cook // Int. J. num. Meth. Engng. – 1972. – Vol. 5. – P. 277–288.
16. *Tong, P.* A variation principle and the convergence of a finite-element method based on assumed stress distribution / P. Tong, T. H. H. Pian // Int. J. Solids Struct. – 1969. – P. 463–472.

Ивлев Д. Д.

ТРИ ДИСКУССИИ

В споре рождается истина. Это бодрое и энергичное утверждение открывает светлые перспективы. Истина нам нужна, как воздух, и, как видно, есть верный способ ее обрести. Но все, как всегда, не так просто.

Конечно, что-то в этом есть, в результате спора или, скажем так, дискуссии, что-то действительно появляется и рождается, но вот только не всегда истина, а если и что-то вроде истины, то сама эта истина может оказаться на заднем плане относительно последствий, вызванных самим фактом спора, ожесточением сторон и других, более веских и закрытых причин, так что принимать это бодрое и безапелляционное утверждение буквально не стоит.

В общем-то, спор или дискуссия – это попытка поймать рыбу-истину в мутной воде разномнений. Почему мутной? Да если все чисто и прозрачно, то тогда и так все ясно. А если взмутить воду, то непонятно, что где, и естественно, что по этому поводу возникают разногласия. В мутной воде не то что рыбу, бегемота можно не увидеть, и можно много дискутировать, где он находится и есть ли он вообще.

Мне довелось принять участие в трех «дискуссиях». С тех пор прошло уже достаточно много времени, и кое-что можно рассказать.

Первая из дискуссий, если ее можно так назвать, относится к работе [1–4] Касьяна Никитовича Шевченко, посвященной плоской задаче о действии сосредоточенной силы на упругопластическое полупространство. Результаты этой работы, естественно, считались замечательными, и я сам тоже так считал. (Изложение этой работы можно найти в книге В. В. Соколовского Теория пластичности. – М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1950, второе издание; в третьем издании этой книги: Теория пластичности. – М. : Высшая школа, 1969, изложения этой работы, естественно, нет). В этой работе К. Н. Шевченко предполагает, что компоненты напряжения в упругой и пластической области совпадают с распределением напряжений в упругой задаче при тех же граничных условиях.

По известным компонентам напряжений определяются деформации, и далее показано, что условия совместности и сопряжения деформаций на упругопластической границе выполняются.

Чтобы я сразу увидел, что решение К. Н. Шевченко неверное, – этого и в помине не было. Я восхищался этой задачей, раздумывал над ней и думал, какие результаты на этом пути можно получить еще. Потом почему-то я начал думать о трубе и обрадовался, когда обнаружил, что, следуя идеям [1–4], можно получить новое решение задачи об упругопластическом состоянии трубы под действием внутреннего давления с выполненными условиями сопряжения напряжений и деформаций на упругопластической границе. Но

радость была недолгой, и я понял, что здесь что-то не так. Оставалось определить перемещения, и я обнаружил, что в полученном мной решении перемещения на упругопластической границе терпят разрыв. После этого, конечно, установить разрыв перемещений в решении К. Н. Шевченко не составило труда.

В то время я работал в Институте механики АН СССР на Ленинградском проспекте. К. Н. Шевченко тоже работал в этом институте. Я написал заметку в журнал, содержание которой быстро стало общим достоянием, заинтересовало и поляризовало окружающий мир.

В то время директором ИМех АН был Алексей Антонович Ильющин. Мне до сих пор непонятно, почему Алексей Антонович не вник в суть моих соображений, он мог пригласить меня, выслушать, во всем разобраться. Для такого ученого, как он, это не составило бы труда. Если бы Алексей Антонович понял, что результаты К. Н. Шевченко реанимировать невозможно, думаю «дискуссия» в ИМех закончилась бы сама собой.

Вместо этого состоялся семинар, санкционированный дирекцией института, на который Алексей Антонович не пришел и на котором К. Н. Шевченко был категорически против моих доводов, слушать ничего не хотел, и, конечно, ничего путного из этой полемики выйти не могло и не вышло.

Какой резонанс вызвала эта полемика, можно судить по следующему: Николай Адрианович Талицких, редактировавший журнал, передал мне пожелание самого Михаила Алексеевича Лаврентьева, чтобы я добавил пример, из которого *всем все стало бы ясно*. Я и добавил пример с чистым изгибом стержня. Моя заметка [5] была напечатана. Стало ли после этого «всем все ясно», судить не мне.

Приблизительно через полгода в том же журнале появилось «Письмо в редакцию» [6] и ответ на мою заметку [7].

Вот тут возникает вопрос. Журнал – рецензируемый, рецензенты у журнала – квалифицированные. Разобраться в сути вопросов для специалистов не составляет труда. Тем более в моей заметке было четко сформулировано: *все дело в том, что прием К. Н. Шевченко основан на принципиально неверной идее: на игнорировании факта перераспределения напряжений – основного механического явления, происходящего при образовании областей пластических деформаций в статически неопределимых конструкциях*. Я до сих пор не знаю, как сказать яснее.

А вообще говоря, нужно ли, чтобы *всем все стало ясно*? Хорошо сказано: правильный результат не нуждается в признании. В основе большинства наших убеждений лежат сведения, которые мы получаем из источников, заслуживающих, по нашему мнению, доверия. Конечно, очень досадно, если мы попадаем впросак, недаром говорят: *доверяй, но проверяй*. Рецензируемый журнал на то и рецензируемый, чтобы публиковать правильные результаты и не разводить «дискуссии».

В результате внутреннего рецензирования редакция без труда могла бы установить невозможность реабилитации результатов К. Н. Шевченко, не разжигать страстей, не публиковать заведомо неверные рассуждения [7] (все это напоминает что-то вроде заманивания в западню). Но был избран другой путь, публикациями [6; 7] интерес к «дискуссии» был подогрет и на роль третейского судьи был призван В.В. Новожилов.

В. В. Новожилов опубликовал свое заключение [8], в котором он написал, что пояснения К. Н. Шевченко [6] не меняют сути дела, что «в работах [1–4] имеется дефект, не предусмотренный заранее их автором, т. е. ошибка», и далее: «из вышесказанного видно, что я считаю критические замечания Д. Д. Ивлева правильными», а, собственно, ничего другого и быть не могло.

Раз дискуссия, значит дискуссия, я начал нести потери. У В. В. Новожилова в [8] есть фраза: «С контрвозражениями же К. Н. Шевченко я (в основной их части) согласить-

ся не могу». Я спросил В. В. Новожилова: что значит «в основной части»? Значит, есть что-то, в чем К. Н. Шевченко прав, а я не прав. В. В. Новожилов ответил мне, буквально я передать не могу, но смысл ответа сводился к тому, что он хотел «подсластить пилюлю». Не знаю, как и что, но с тех пор прошло много лет, многие участники этих событий сошли со сцены, а «подслащенная пилюля» осталась. Мне кажется, что заниматься «подслащением пилюли» в научных работах ни при каких обстоятельствах не следует.

Что я могу сказать? Мной был опубликован совершенно правильный результат. Стоило ли его публиковать? Наверное, да. Моя публикация закрывала вопрос. Все дальнейшее – пример искусственно созданной «дискуссии», «мутной воды», созданной на чистом месте.

Перехожу ко второй дискуссии. А. А. Ильюшин выдвинул постулат изотропии, согласно которому связь между девиаторами напряжений и деформаций изотропна в пространстве девиаторов напряжений и деформаций. Очевидно, что положения постулата изотропии и требования изотропии материала отличны друг от друга. Условия пластичности, являющиеся комбинацией второго и третьего инвариантов девиатора напряжений, описывающие свойства изотропного материала, например, условие Треска, неизотропны в пространстве девиатора напряжений. На это я обратил внимание Л. И. Седова, это придало мощный импульс развернувшимся событиям. Я опубликовал заметку [9]. На мой взгляд, ничего существенного в этой заметке, кроме высказанного мной выше замечания, нет. Тем временем В. С. Ленский опубликовал статью [10]. Вторую заметку [11] мне публиковать вообще не следовало бы. В дискуссию были «подброшены дровишки», и она разгорелась. Виктор Степанович опубликовал письмо в редакцию [12], в качестве третьего судьи вновь был призван В. В. Новожилов [13]. Естественно, он согласился с моим замечанием относительно неинвариантности выражений, содержащих третий инвариант, в пространстве девиаторов: «Нет основания считать постулат изотропии универсальным законом для пластических тел; изотропные тела в обычном физическом смысле могут обладать свойствами, противоречащими постулату изотропии».

Далее появилась статья А. А. Ильюшина [14], в которой он изложил свое понимание постулата изотропии. В частности, он пишет: «Многочисленные опыты наших и зарубежных ученых с изотропными в исходном состоянии материалами при нормальных и высоких температурах, малых и больших временах деформирования показывают, что влияние третьего инварианта девиатора деформаций (напряжений) на механические свойства при малых деформациях является слабым, и это согласуется с теорией малых упруго-пластических деформаций. Поэтому в распространенных формулировках постулата изотропии мы принимаем, что от третьих инвариантов тензоров $d\varepsilon_{ij}^n / dI^n$ коэффициенты A_n в (1), а значит и S_n в (5), не зависят (курсив мой – Д. И.)», где (1) и (5) – запись связи между напряжениями и деформациями при выполнении постулата изотропии. Другими словами, мое замечание признается справедливым. В том же номере журнала редакция оставила последнее слово за В. В. Новожиловым [15], которому пришлось отвечать на достаточно резкие высказывания А. А. Ильюшина [14].

Что сказать обо всем этом? Постулат изотропии с самого начала имел право на существование и, по существу, изначально, по своей сути, служит средством классификации свойств материала, подобно, например, постулату Драккера. Из постулата Драккера следует ассоциированный закон течения, но можно предположить, что ассоциированный закон не выполняется. Постулат изотропии можно принимать, но можно и не заботиться о его выполнении. Кому как нравится. Последнее слово за расчетом и экспериментом.

Стоило ли мне публиковать замечание о том, что в формулировке постулата изотропии не учитывается влияние третьего инварианта? Наверное, да, оно верное и пред-

ставляет определенный интерес. Но это замечание послужило поводом для искусственно раздутой дискуссии. Дала ли что-нибудь эта дискуссия полезного для науки? Лично я сомневаюсь. Для меня дискуссия снова обернулась издержками. Надо сказать, что я никогда не входил, если можно так выразиться, в «штаб» дискуссий. Дискуссией правили не такие умы. Я имел отношение к материалам, выходящим под моей фамилией, с другими материалами я, как и любой другой рядовой читатель, знакомился после их выхода в печать. В статье В. В. Новожилова [13] неожиданно для себя я прочитал: «4. В работе Д. Д. Ивлева, посвященной доказательству гиперболичности уравнений, вытекающих из трансляционной теории течения, содержится ошибка (как это мне указал недавно А. А. Кузнецов). Суть ее состоит в том, что Д. Д. Ивлев рассматривает приращения деформаций только как функции от координат, не принимая во внимание зависимость деформаций от времени. Это приводит к неправильной постановке задачи, игнорирующей неголомомный характер уравнений закона течения».

Никогда ни до, ни после я не читал об «ошибочности» своих доказательств по той простой причине, что ошибок в моих работах [16; 17] нет. Уравнения теории пластичности не зависят от времени. В отличие от теории идеальной пластичности в теории упрочняющегося пластического тела поверхность нагружения изменяется в процессе нагружения. Параметрами, определяющими изменение поверхности нагружения, могут быть сами компоненты пластических деформаций, как в теории трансляционного упрочнения, либо параметры, связанные с изменением деформированного состояния, например, параметр Одквиста и др. В работах [16; 17] я ограничился рассмотрением теории трансляционного упрочнения. Если рассматривать приращение параметров упрочнения, т. е. приращения пластических деформаций, малыми и в пределе пренебречь ими, то можно рассмотреть «мгновенное» деформирование, что и было сделано [16; 17]. Собственно, гиперболичность мгновенного состояния и объясняет наблюдаемые, мгновенно возникающие, линии скольжения Людерса при пластическом деформировании упрочняющихся тел. В подобных нелинейных задачах возникает много особенностей, для упрочняющегося материала в зависимости между напряжениями и девиаторами напряжений входят деформации, и стационарных линий разрыва деформаций не существует, поэтому уравнения теории упрочняющегося пластического тела следует отнести к эллиптическому типу [18], но это не отменяет результатов [16; 17].

Еще до поступления в аспирантуру я наблюдал эксперименты по растяжению плоских образцов с отверстиями и выточками. Кажется, из алюминиевых сплавов. При растяжении металл потрескивал, и было видно, как мгновенно проскакивали линии скольжения. Казалось, что идет не непрерывное деформирование, а идут какие-то толчки, происходит какой-то скачкообразный, квантованный неоднородный процесс упрочнения, предел текучести изменяется скачками. Известно, что линии скольжения, характеристики следуют из уравнений теории идеальной пластичности, а по теории сколь угодно малое упрочнение меняет картину, и линий скольжения, характеристик быть не должно. Но идеально пластических материалов не бывает, а линии Людерса – это физический факт, и они реально наблюдаются для материалов с упрочнением. Не ведет ли мгновенно себя металл как идеально пластический, а затем происходит скачкообразное изменение предела текучести, и материал, перескочив на другой уровень предела текучести, мгновенно вновь ведет себя как идеально пластический? Я думал об этом, и меня это интересует до сих пор.

В то же время на тех же испытательных машинах вел свои эксперименты Г. И. Барыков. Он растягивал плоские образцы с симметричными выточками, материалом, кажется, у него

была мягкая сталь. Вблизи концентратора напряжений, в конце выточки, там, где радиус кривизны минимален, возникала пластическая зона, и пик растягивающих напряжений смещался внутрь пластины. Геннадий Иванович «ловил» зарождение трещины, которая должна была возникать в месте максимального растягивающего напряжения, на границе пластической зоны, т. е. внутри образца. Сразу приспособиться ему не удалось, любые перекосы в закреплении и другие производственные моменты выводили зарождение трещины на край образца, но затем он с этим справился, весь процесс фиксировал на скоростной киносъемке, и действительно было видно, что трещина зарождается там, где ей и положено. Все ясно, чисто, честно, понятно, ничего не скажешь. Вернемся к дискуссии.

Фраза В. В. Новожилова: «Это приводит к неправильной постановке задачи, игнорирующей неголономный характер уравнений закона течения» – не соответствует действительности. Неголономный характер используемых мною уравнений сохраняется вполне аналогично тому, как это имеет место в теории идеальной пластичности.

Я спросил В. В. Новожилова: зачем он написал замечание, уводящее, в общем-то, читателя от центральной линии дискуссии. Что я должен после всего этого делать, затевать новую дискуссию? Он ответил мне в том духе, что пусть все видят, что он занимает объективную позицию, что он способен критиковать как тех, так и других. Не мне судить о цене этой объективности.

Должен сказать, редакция журнала поставила оппонировавшие стороны в неравное положение: письмо В. С. Ленского [12] и тут же следом в том же номере журнала на следующей странице ответ В. В. Новожилова [13]. Статья А. А. Ильюшина [14] и в том же номере журнала на следующей странице следом ответ В. В. Новожилова [15], словом, что-то вроде игры в одни ворота. Мне кажется, что согласие на подобную роль, любезно предоставленную редакцией журнала, не вполне вяжется со стремлением занимать объективную позицию.

Перехожу к третьей «дискуссии». В середине прошлого века теория квазихрупкого разрушения получила значительное развитие, прежде всего в трудах Ирвина. Был установлен факт: асимптотическое распределение вблизи кончика трещины имеет одну и ту же интегрируемую особенность, и все, что характеризует геометрию трещины и нагружение, сводится к одному параметру, изменяющемуся линейно в зависимости от изменения нагрузки. Этот параметр получил название коэффициента интенсивности напряжений. Это фундаментальный результат, дальнейшее – его развитие. Очевидно, что при этом остается одна возможность определить критерий распространения трещины: достижение коэффициентом интенсивности напряжений некоторого предельного значения, определяемого экспериментально – новой физической константой материала. Вот и все, другого в рамках принятых предположений не дано. И все рассуждения о «клювике» в конце трещины имеют в лучшем случае вторичный интерес. О чем дискутировать? Надо просто уяснить этот факт – фундаментальный результат Ирвина и принять его к сведению со всеми вытекающими следствиями.

Надо сказать, что я с большим почтением относился к работам, которые проводились у нас по теории распространения трещин. Но, когда я уяснил суть дела, меня поразило, что этот факт (результат Ирвина) в нашей среде умалчивается. Меня удивило, что журнал «Механика. ИЛ. Сборник переводов» – журнал, который по определению должен своевременно публиковать статьи ведущих зарубежных механиков, – не опубликовал ни одной статьи Ирвина, да и вообще статей по теории трещин, которые могли бы пролить свет на истинное состояние дел в механике квазихрупкого разрушения. Посте-

пенно уяснил состояние дел в механике квазихрупкого разрушения и Л. И. Седов. Последовал мощнейший импульс к немедленному обсуждению сложившегося положения.

Мне довелось написать первый обзор в нашей литературе по теории трещин [19]. По мере знакомства с зарубежной литературой по механике квазихрупкого разрушения меня поражало то неведение, которое было в нашей механике по этим вопросам. Впервые я так остро ощутил провинциализм нашей механики. Так ли это на самом деле или нет, это другой вопрос, я здесь говорю о тогдашних моих ощущениях, не более. Надо сказать, что механика квазихрупкого разрушения у нас быстро получила развитие. Я знаю, что наши механики внесли исключительный вклад в механику разрушения, это прежде всего Г. П. Черепанов, а также многие другие ученые, имена которых я здесь перечислять не буду.

Чтобы мутное положение дел стало ясным, надо было дождаться опубликования обзора нескольких других статей, опубликовать переводы статей Ирвина и др. в печати, доступной широкой публике. И этого было бы вполне достаточно. Вода сама бы стала чистой и прозрачной. Мой обзор уже был в печати, но, к сожалению, была проявлена масса эмоций и нетерпения, прошедшая в МГУ «дискуссия» по механике квазихрупкого разрушения до выхода обзора и статей изначально ничего позитивного дать не могла. «Хотели как лучше, получилось как всегда»¹. Но вот вопрос: хотели ли лучше?

Прав Ю. Н. Радаев, когда написал: *через сорок лет после этой дискуссии стало очевидным, что она нанесла значительный ущерб российской науке* [20].

Итак, пора подводить итоги. Я не знаю, выработало ли наше научное сообщество иммунитет к подобным дискуссиям. Не уверен. Наверное, что-либо подобное когда-нибудь может повториться. О чем-то вроде этого не так давно я даже услышал. Так что все может быть. Все возвращается на круги свои.

Безусловно, между нынешним и тем Д. Д. Ивлевым есть разница. Нынешний обратил бы внимание того, тогдашнего, на ряд обстоятельств, на которые тот, тогдашний, не обращал внимания. Молодость при всех своих преимуществах имеет и свои недостатки.

Как-то в разговоре с А. Ю. Ишлинским я затронул тему дискуссий. Александр Юльевич быстро ответил мне: «Вам не о чем сожалеть».

На меня сильное впечатление оказала статья Анри Рухадзе и Александра Самохина «Субъективные заметки о научной этике», опубликованная в *Независимой Газете* от 17.02.99 г. Очень поучительная статья, наводящая на размышления. В заключение авторы пишут: «В истории науки имеется не мало драматических и даже трагических примеров соперничества, неприязни, элементарной необъективности... Поэтому, если бы предмет научных исследований был столь же доступен для массового восприятия, как музыка, то легенда о Моцарте и Сальери *просто затерялась бы* (курсив мой – Д. И.) среди ее научных аналогов, в которых гениальность и злодейство причудливо сочетались в одних и тех же персонажах». Не думаю, что в описанных мной случаях драматизм ситуации был поднят на такую высоту, но все же, все же, все же...

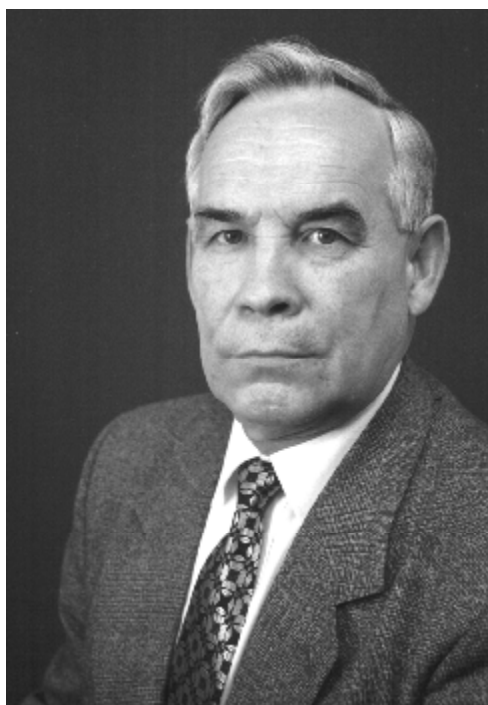
ЛИТЕРАТУРА

1. Шевченко, К. Н. Упруго-пластическое состояние под сосредоточенной силой, приложенной к полуплоскости / К. Н. Шевченко // ДАН СССР. – 1948. – Т. 6. – № 1.

2. Шевченко, К. Н. Сосредоточенная сила, приложенная к полуплоскости (упруго-пластическая задача) / К. Н. Шевченко // ПММ. – 1948. – Т. 12. – Вып. 4.

¹ У Марк Твена эта фраза звучит так: «Хотели как лучше, получилось как всегда – хуже».

3. *Шевченко, К. Н.* Плоская упруго-пластическая деформация цилиндра, нагруженного уравновешенной системой двух сосредоточенных сил / К. Н. Шевченко // ПММ. – 1952. – Т. 16. – Вып. 1.
4. *Шевченко, К. Н.* Упруго-пластическая деформация плоскости, вызванная действием сосредоточенной силы / К. Н. Шевченко // ДАН СССР. – 1957. – Т. 115. – Вып. 3.
5. *Ивлев, Д. Д.* О некоторых работах К. Н. Шевченко по теории пластичности / Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – № 2. – С. 159–162.
6. *Шевченко, К. Н.* Письмо в редакцию / К. Н. Шевченко // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – № 9. – С. 151.
7. *Шевченко, К. Н.* К вопросу о методе решения некоторых упруго-пластических задач / К. Н. Шевченко // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – № 9. – С. 153–155.
8. *Новожилов, В. В.* О работах К. Н. Шевченко и критике их Д. Д. Ивлевым / В. В. Новожилов // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – № 1. – С. 189–190.
9. *Ивлев, Д. Д.* О постулате изотропии в теории пластичности / Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – № 2. – С. 125–127.
10. *Ленский, В. С.* Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении / В. С. Ленский // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – № 5.
11. *Ивлев, Д. Д.* О работе В. С. Ленского «Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении» / Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – № 6. – С. 179–181.
12. *Ленский, В. С.* Об ошибочных замечках Д. Д. Ивлева / В. С. Ленский // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1961. – № 3 – С. 174–175.
13. *Новожилов, В. В.* Об одном направлении в теории пластичности (замечания по поводу полемики Д. Д. Ивлева с В. С. Ленским) / В. В. Новожилов // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1961. – № 3. – С. 176–181.
14. *Ильюшин, А. А.* Еще о постулате изотропии / А. А. Ильюшин // Изв. АН СССР. ОТН. – 1962. – № 1. – С. 201–204.
15. *Новожилов, В. В.* И еще о постулате изотропии / В. В. Новожилов // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – С. 205–208.
16. *Ивлев, Д. Д.* О свойствах соотношений закона анизотропного упрочнения пластического материала / Д. Д. Ивлев // ПММ. – 1960. – Т. XXIV. – Вып. 1.
17. *Ивлев, Д. Д.* К теории плоской деформации упрочняющегося пластического материала / Д. Д. Ивлев // ПММ. – 1960. – Т. XXIV. – Вып. 4.
18. *Ивлев, Д. Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – М. : Наука, 1971.
19. *Ивлев, Д. Д.* О теории трещин квазихрупкого разрушения / Д. Д. Ивлев // ПМТФ. – 1967. – № 6.
20. *Радаев, Ю. Н.* Вестник Самарского ГУ. Естественнонаучная серия / Ю. Н. Радаев. – 2005. – № 5(39). – С. 12.



СТОЛЯРОВ АЛЕКСЕЙ ВАСИЛЬЕВИЧ

(К 70-летию со дня рождения)

Исполнилось 70 лет со дня рождения видного ученого-математика, замечательного педагога, доктора физико-математических наук, профессора, заведующего кафедрой геометрии Столярова Алексея Васильевича, члена диссертационного совета по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 механика деформируемого твердого тела при Чувашском государственном педагогическом университете им. И. Я. Яковлева.

А. В. Столяров родился 15 февраля 1936 г. в селе Акулево Чебоксарского района Чувашской АССР. В 1958 г. с отличием закончил физико-математический факультет Чувашского государственного педагогического института им. И. Я. Яковлева. После окончания аспирантуры при Московском государственном педагогическом институте им. В. И. Ленина в 1968 г. успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научные интересы А. В. Столярова определились под влиянием известных ученых В. Т. Базылева, Г. Ф. Лаптева, А. П. Нордена и др. Ему принадлежит более 130 научных работ. Они широко известны не только в нашей стране, но и за ее пределами.

Фундаментальными научными исследованиями явились монография и докторская диссертация Алексея Васильевича на тему «Двойственная теория оснащенных многообразий», которую он успешно защитил в 1996 г. Эти работы получили высокую оценку ведущих геометров страны.

А. В. Столяров успешно совмещает научную деятельность с педагогической, которая неразрывно связана с Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева: 45 лет Алексей Васильевич трудится в педагогическом университете, в котором он прошел путь от ассистента до профессора, заведующего кафедрой.

Профессор Столяров ведет большую работу по подготовке научно-педагогических кадров. С 1997 г. под его руководством в вузе успешно функционирует аспирантура по специальности «Геометрия и топология». Начиная с этого времени около 10 его аспирантов защитили диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

А. В. Столяров известен как организатор образования в республике. В течение 9 лет (1988–1997 гг.) он работал первым проректором педагогического университета и внес заметный вклад в укрепление и развитие вуза.

Многогранная научно-педагогическая деятельность, личностные качества снискали А. В. Столярову глубокое уважение и признание коллег, научной общественности республики и страны.

Участники издания журнала «Механика предельного состояния», члены диссертационного совета при ЧГПУ им. И. Я. Яковлева желают А. В. Столярову крепкого здоровья, многих творческих достижений.

Д. Д. Ивлев, Н. М. Матченко, С. Ю. Радаев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Максимова,
Б. Г. Миронов, В. В. Сильвестров, А. И. Шашкин, Е. И. Шемякин.



СЛОВО О ГЕННАДИИ ПЕТРОВИЧЕ ЧЕРЕПАНОВЕ

(К 70-летию со дня рождения)

Термин «гамбургский счет», кажется, принадлежит Виктору Шкловскому. До революции в России широкой популярностью пользовалась цирковая борьба. Сам я застал ее отголоски в Воронеже, когда посещал там цирк и как-то попал на борьбу, которая занимала все второе отделение. Борцы были уже не молоды, но люди крепкие, боролись профессионально.

А до революции это зрелище процветало. Появлялись «черные маски», турки-чемпионы, негры-чемпионы, другие заморские и отечественные корифеи, неожиданно взлетали никому не известные бойцы, интерес подогревался, ажиотаж, тотализатор, деньги текли рекой.

Всем этим цирком управляли настоящие специалисты, доки в своем деле, и борцы твердо знали, когда надо выигрывать, а когда и прилечь.

Но раз в год борцы собирались в Гамбурге, и там при закрытых дверях и зашторенных окнах они боролись в полную силу, чтобы знать, кто есть кто на самом деле. Отсюда и понятие «гамбургский счет».

Раневская как-то написала: многие получают награды не по способностям, а по потребности. Наверное, в этом что-то есть. Мне кажется, я так считаю, что по гамбургскому счету Геннадий Петрович Черепанову равных нет. В его области. Я мог бы перечислить здесь много имен лиц, выдающиеся достижения, нравственные качества которых очень высоко ценю и не хочу устанавливать какую-либо иерархию. У нас не борьба, каждый занимается своим делом, делать какие-то сравнения – дело неблагодарное. Каждый насыпал свою гору. И все же – такие ученые, как Геннадий Петрович, видны отовсюду. Он действительно виден.

Геннадий Петрович закончил физтех МГУ по кафедре Вадима Васильевича Соколовского. Я познакомился с Геннадием Петровичем, когда он работал в Институте механики АН. Помню, как возражало руководство института, чтобы он получил премию Ленинского комсомола. Из деловых соображений? Нет, конечно. Г. П. премию получил вопреки всему, но это был его последний подобный официальный успех в России.

Вначале у него были устраивающие его условия в Горном институте. Но кто-то сумел выйти на тогдашнего ректора, которому, казалось бы, и никакого дела не должно было быть до Г. П., тем более сам ректор был крупной личностью и, казалось, должен был бы понимать, что значит для Горного и для России Геннадий Петрович. И т. д.

Геннадий Петрович – цельный человек, с независимым и твердым характером. Мне не известны случаи, чтобы он где-то когда-то прогнулся. Такой же независимой личностью был Лев Александрович Галин – его учитель, выдающийся механик нашего времени.

Перечислять научные заслуги Геннадия Петровича здесь не буду, скажу только, что одно его открытие инвариантных Г-интегралов потрясло и поразило научный мир.

Геннадий Петрович – талантлив разносторонне. Его оценки происходящего всегда производили на меня впечатление точностью суждений. Недавно он опубликовал на сайте www.poetry.com собственные стихи на английском и вошел в «International Who's Who in Poetry», как он мне написал по этому поводу: «Tak chto ia stal amerikanskim poetom s russkoi dushoi. Zabavno!»

Безусловно, история нашей науки воздаст должное Г. П. Черепанову. Иначе не может быть. Я рад от души поздравить Геннадия Петровича с семидесятилетием, пожелать ему неизменной бодрости духа, силы и новых достижений его выдающегося таланта.

Д. Д. Ивлев



Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.



Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.



Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru, burenin@iacp.dvo.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток.



Варданын Седрак Ваникович (vardanyan_s@yahoo.com) – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.



Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru, kafsm@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.



Ивлев Дюис Данилович (Ivlev21@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.



Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.



Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – Академик РАН, Институт Проблем Механики РАН, г. Москва.



Максимова Людмила Анатольевна (strangcheb@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.



Маркин Алексей Александрович (markin@uic.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.



Матченко Николай Михайлович (ekc@tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.



Миронов Борис Гурьевич (prorektor@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.



Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (irakon63@hotmail.com) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.



Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@proc.ru, gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.



Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.



Непершин Ростислав Иванович (Nepershin_r@pop.mtu.ru, nepershin_r@mtu-net.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технический университет «СТАНКИН», г. Москва.



Победря Борис Ефимович (pob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.



Радаев Сергей Юрьевич (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.



Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный университет, г. Самара.



Редкозубов Сергей Алексеевич (NIKE109@yandex.ru, MAPYCbKA434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.



Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru, senashov@mail.kgtei.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.



Спорыхин Анатолий Николаевич (pmmdeans@main.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.



Тамуж Витаугас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.



Трещев Александр Анатольевич (taa@uic.tula.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет; г. Тула.



Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.



Черепанов Геннадий Петрович (genadyc@netscape.net, genacherepanov@hotmail.com) – доктор физико-математических наук, профессор, пожизненный член Нью-йоркской академии наук, Флорида, США.



Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.



Шашкин Александр Иванович (pmmdeans@main.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.



Шемякин Евгений Иванович (esh@msu.ru, eshem@mech.math.msu.su) – Академик РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

1. В «Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния». Статья должна быть подписана автором и представлена вместе с дискетой или выслана на электронные адреса редакции: ivlev21@mail.ru, strangcheb@mail.ru.

2. Авторы представляют статьи, набранные на компьютере в текстовом редакторе Microsoft Word (7.0, 6.0 версии). Формат бумаги – А4, поля: справа, слева и сверху 3 см, снизу 6 см.

3. Размер шрифта – 11. Абзацный отступ – 1 см. Интервал – одинарный. Текст статьи набирается шрифтом Times New Roman с выравниванием по ширине и автоматическим переносом слов. Страницы не нумеруются. Заголовок пишется жирным шрифтом заглавными буквами. Фамилия и инициалы автора даются курсивом в правом верхнем углу над заголовком.

4. Иллюстрации:

должны быть пронумерованы и упомянуты в тексте;
подрисовочные подписи выполняются шрифтом размера 9.

5. **Формулы** и буквенные обозначения по тексту должны быть набраны в среде редактора формул Microsoft Equation 3.0. Шрифт для греческих букв – Symbol, для всех остальных – Times New Roman, основной размер – 11, крупный индекс – 7, мелкий – 5.

В формулах следует избегать громоздких обозначений. Формулы располагаются по центру страницы. В случае необходимости формулы нумеруются.

6. **Таблицы** выполняются шрифтом 9. Они могут быть с заголовками и без них. Заголовок набирается полужирным шрифтом 9. Таблицы необходимо пронумеровать и упомянуть в тексте.

7. **Список литературы** набирается по алфавиту шрифтом Times New Roman размера 9. Фамилия и инициалы автора или первое слово в названии издания (если нет автора) выделяются курсивом.

Ссылки на используемую литературу даются внутри текста в квадратных скобках. Например: [1, 23], где 1 – порядковый номер в списке использованной литературы, 23 – номер страницы.

8. **Сведения об авторах «Вестника ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния»** включают фамилию, имя и отчество автора, данные об ученой степени и занимаемой должности. Например, *Ивлев Дюис Данилович* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева

ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ

Ивлев Д. Д., Матченко Н. М.

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

*Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева,
Тульский государственный университет*

В работе [1] определены три состояния идеально пластического материала. Пластическое состояние, при котором напряжения удовлетворяют условию пластичности в виде одной гладкой функции текучести

$$f(s_{ij})=0. \quad (1)$$

Развитое пластическое состояние, при котором напряжения удовлетворяют условию пластичности в виде пересечения двух гладких функций текучести

$$f_1(s_{ij})=0, f_2(s_{ij})=0, \quad (2)$$

ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ СПИСКА ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быковцев, Г. И.* О вязкопластическом течении круглых пластин и оболочек / Г. И. Быковцев, Т. Д. Семькина // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – № 4. – С. 68–76.
2. *Киряков, П. П.*, Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. – 190 с.
3. *Кроха, В. А.* Упрочнение металлов при холодной пластической деформации : справочник / В. А. Кроха. – М. : Машиностроение, 1980. – 157 с.
4. *Одинокоев, В. И.* Разрушение льда под действием гидростатического давления на подведенном плавающем контейнере с учетом его заполнения водой / В. И. Одинокоев, А. М. Сергеева // Механика микронеоднородных материалов и разрушение : тезисы докладов IV Всероссийского семинара (Екатеринбург, 23–24 марта 2006 г.). – Екатеринбург : Изд-во УГТУ-УПИ, 2006. – С. 43.
5. *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 396 с.
6. *Maugin, G. A.* The Thermomechanics of Plasticity and Fracture / G. A. Maugin. – Cambridge : Cambridge University Press, 1992. – 350 p.
7. *Radayev, Y. N.* On directional average of the local anisotropic damage / Y. N. Radayev // Int. J. Fracture. – 2004. – V. 128. – P. 293–307.

Амензаде Рафаэль Юсиф-оглы – доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой «Теоретическая механика и механика сплошной среды» Бакинского государственного университета, г. Баку

Ахундов Магомед Багир-оглы – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Теоретическая механика и механика сплошной среды» Бакинского государственного университета, г. Баку

Буренин Анатолий Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией механики деформируемого твердого тела ИАПУ ДВО РАН, заведующий кафедрой математического моделирования и информатики ДВГТУ, г. Владивосток

Варданян Седрак Ваникович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института механики НАН РА, г. Ереван

Васильева Анна Михайловна – доцент кафедры информатики и вычислительной техники Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

Григорьева Анна Леонидовна – аспирант Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета, г. Комсомольск-на-Амуре

Задоян Месроп Арамович (1930–2004) – доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Армении

Зубчанинов Владимир Георгиевич – доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета, г. Тверь

Ивлев Дюис Данилович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

Ковтанюк Лариса Валентиновна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики деформируемого твердого тела ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток

Коюпченко Ирина Николаевна – старший преподаватель кафедры информационных технологий и математического моделирования Красноярского государственного торгового-экономического института, г. Красноярск

Курнышева Наталья Александровна – аспирант кафедры механики сплошных сред Самарского государственного университета, г. Самара

Максимова Людмила Анатольевна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Московского государственного горного университета, г. Чебоксары

Мирсалимов Мир Ахмед Керим Вагиф оглы – аспирант кафедры математического моделирования Тульского государственного университета, г. Баку

Налимов Александр Васильевич – кандидат физико-математических наук, профессор Бийского технологического института, г. Бийск

Немировский Юрий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск

Непершин Ростислав Иванович – доктор технических наук, профессор кафедры систем пластического деформирования Московского государственного технического университета «СТАНКИН», г. Москва

Радаев Юрий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики сплошных сред Самарского государственного университета, г. Самара

Сенашов Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Сибирского государственного аэрокосмического университета, г. Красноярск

Сергеева Анастасия Михайловна – научный сотрудник Института машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

Теличко Виктор Григорьевич – кандидат технических наук, ассистент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций Тульского государственного университета, г. Тула

Трещев Александр Анатольевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительства, строительных материалов и конструкций Тульского государственного университета, г. Тула

Устинова Александра Сергеевна – студентка естественно-научного института ДВГТУ, г. Владивосток

ОТ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА.....	3
<i>Ивлев Д. Д.</i> Механика предельного состояния.....	4
<i>Ивлев Д. Д.</i> О переходе статически неопределимого состояния в статически определимое.....	5
<i>Амензаде Р. Ю., Ахундов М. Б.</i> Приближенное решение задач устойчивости многослойного линейно вязко-упругого стержня.....	10
<i>Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Устинова А. С.</i> Вискозиметрическое течение упруговязкопластического материала между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями.....	18
<i>Васильева А. М.</i> Определение напряженного состояния анизотропного пространства, ослабленного полостью.....	26
<i>Григорьева А. Л.</i> Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности деформационных состояний несжимаемого жесткопластического тела.....	33
<i>Задоян М. А.</i> Пластическое течение быстровращающейся конической трубы	37
<i>Варданян С. В.</i> О пластическом состоянии быстровращающейся конической трубы.....	42
<i>Зубчанинов В. Г.</i> О гипотезе ортогональности, принципе градиентальности и постулате пластичности.....	48
<i>Максимова Л. А.</i> О статически определимых состояниях при условии пластичности Мизеса.....	56
<i>Мирсалимов М. В.</i> Зарождение трещины в полосе переменной толщины.....	59
<i>Налимов А. В., Немировский Ю. В.</i> Теоремы предельного равновесия для оболочек вращения.....	70
<i>Непершин Р. И.</i> Пластическое сжатие кольца плоским инструментом с учетом упрочнения.....	84

<i>Радаев Ю. Н., Курнышева Н. А.</i>	Трехмерные уравнения связанной задачи математической теории пластичности.....	90
<i>Сенашов С. И., Коюпченко И. Н.</i>	Групповые свойства и точные решения уравнений двумерной анизотропной пластичности.....	121
<i>Сергеева А. М.</i>	Моделирование разрушения ледяного покрова.....	131
<i>Трещев А. А., Теличко В. Г.</i>	Определение напряженно-деформированного состояния трубчатых железобетонных оболочек при чистом кручении методом конечных элементов.....	138
Свободная трибуна		
<i>Ивлев Д. Д.</i>	Три дискуссии.....	157
Юбилей		
	Столяров Алексей Васильевич (к 70-летию со дня рождения).....	164
	Слово о Геннадии Петровиче Черепанове (к 70-летию со дня рождения).....	166
	УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	168
	ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ.....	172
	АВТОРЫ ЖУРНАЛА.....	174

Вестник
Чувашского государственного педагогического университета им. И?
Я? Яковлева

Серия: Механика предельного состояния

№ 1 • 2007

Отв. за выпуск С. В. Тихонов
С. В. Матвеев

Технические редакторы Н? А? Немилова
Л? А? Судленкова
М? Г? Федотова

Компьютерная верстка: макет А? В? Митрасовой

Подписано в печать 30?03?07? Формат 70x100/8? Бумага писчая?
Печать оперативная? Гарнитура Times New Roman.
Усл? печ? л? 22,25? Тираж 200 экз? Цена свободная? Заказ №

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет
им? И? Я? Яковлева»

428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38