

ББК 95.4; 22.251
Ч-823

Подписной индекс в каталоге ПРЕССА РОССИИ: 13109
ISSN: 2073-5499

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2011. № 2(10)

Учредитель: ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Учредители серии: Г. Н. Григорьев, Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров, Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Т. Н. Петрова, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин, А. А. Шуканов

Редакционная коллегия: Ивлев Д. Д. – ответственный редактор, Максимова Л. А., Матченко Н. М. – зам. ответственного редактора, Тихонов С. В. – ответственный секретарь, Баженов В. Г., Буренин А. А., Георгиевский Д. В., Глаголев В. В., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Каюмов Р. А., Климов Д. М., Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Кулиев В. Д., Ломакин Е. В., Маркин А. А., Манжиров А. В., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р. И., Победря Б. Е., Радаев Ю. Н., Радченко В. П., Ревуженко А. Ф., Редкозубов С. А., Сенашов С. И., Спорыхин А. Н., Трещев А. А., Чернышев А. Д., Хромов А. И., Шашкин А. И.

Международный совет: Амензаде Р. Ю. (Азербайджан), Варданян С. В. (Армения), Мирсалимов В. М. (Азербайджан), Тамуж В. П. (Латвия), Чигарев А. В. (Белоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19.

Email: predel21@mail.ru.

WWW: <http://predel.chgpu.edu.ru>.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-36234 от 15.05.2009 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2011

В. Д. Кулиев, Т. Н. Алексеева

КРАЕВАЯ ТРЕЩИНА В ДВУХСЛОЙНЫХ МАТЕРИАЛАХ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

Московский государственный открытый университет

Коломенский институт (филиал) Московского государственного открытого университета

Аннотация. Рассматривается задача о краевой трещине в двухслойном материале, находящемся под воздействием внешней температуры. Определен коэффициент интенсивности напряжений. Приведен анализ численного решения.

Ключевые слова: краевая трещина, уравнение Фредгольма второго рода, коэффициент интенсивности напряжений.

УДК: 620.22-419.8:539.3(043)

Проблема прочности многослойных элементов конструкций и сооружений, в частности тепловых воздействий, и необходимость ее практического решения вызывает большой интерес многих исследователей к изучению процесса их деформирования и разрушения. Одна из важнейших задач такого рода – исследование поведения трещин в многослойных материалах с целью повышения прочности и эксплуатационной надежности современных многослойных конструкций при экстремальных условиях их работы.

При исследовании аналитических решений краевых задач многослойные материалы представляют полосами разной толщины и разных упругих свойств. Для плоской задачи теории упругости двухслойных материалов, находящихся под воздействием внешней температуры, общее решение строится с помощью метода Попковича-Нейбера и интегральных преобразований Лапласа и Фурье[2],[5].

1. Многослойные материалы под воздействием внешней температуры. Постановка задачи.

Будем рассматривать двухслойный материал. Предполагается, что две однородные изотропные полосы жестко сцеплены вдоль плоскостей $x = h_1$, $x = H$. Поверхность двухслойного материала подвержена воздействию некоторой заданной температуры. Предполагается, что материал каждого из слоев является термоупругим. Задача считается симметричной относительно плоскости $y = 0$. На бесконечности напряжения отсутствуют, а смещения исчезают. Таким образом, приходим к следующей плоской краевой задаче теории термоупругости для двухслойных материалов.

1. Начальные условия

$$t = 0, \quad T_j(x, y, 0) = 0. \quad (1.1)$$

2. Граничные условия

$$\begin{aligned} x = 0, \quad T_1(0, y, t) = f(y, t), \quad f(y, t) = T_0 \sin \omega t, \\ x = H, \quad T_2(H, y, t) = \varphi(y, t), \quad \varphi(y, t) = 0; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} x = h_1, \quad T_1(h_1, y, t) = T_2(h_1, y, t), \\ k_1 \left(\frac{\partial T_1(x, y, t)}{\partial x} \right)_{x=h_1} = k_2 \left(\frac{\partial T_2(x, y, t)}{\partial x} \right)_{x=h_1}; \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} v_1(h_1, y, t) = v_2(h_1, y, t), \\ u_1(h_1, y, t) = u_2(h_1, y, t); \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_1(h_1, y, t) = (\sigma_x)_2(h_1, y, t), \\ (\tau_{xy})_1(h_1, y, t) = (\tau_{xy})_2(h_1, y, t). \end{aligned} \quad (1.5)$$

3. Условия на бесконечности

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq H, \quad |y| \rightarrow \infty, \quad T_j(x, y, t) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial T_j(x, y, t)}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial T_j^2(x, y, t)}{\partial y^2} \rightarrow 0; \\ (\sigma_x)_j, \quad (\sigma_y)_j, \quad (\tau_{xy})_j \rightarrow 0; \\ \Psi_j \rightarrow 0, \quad v_j \rightarrow 0, \quad u_j \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь k_j – коэффициент теплопроводности j -го слоя, α_j – коэффициент температуропроводности j -го слоя, T_0 – амплитуда, являющаяся постоянной функцией, ω – циклическая частота, Ψ_j – термоупругий потенциал перемещений.

Всюду в дальнейшем считается, что изменения функции $T_j(x, y, t)$ во времени происходят с достаточно малой скоростью, когда влиянием инерционных членов в уравнениях движения теории упругости можно пренебречь, рассматривая движение как последовательность состояний равновесия (принцип Дюамеля) [4].

Решение данной задачи подробно рассмотрено в [1]. В частности, найдено нормальное напряжение

$$\sigma_{y1}(x, 0, t) = -2G_1\alpha_1(1 + \nu_1)T_0 \frac{1}{I_1^2 + I_2^2} [(I_1I_4 - I_2I_3) \cos \omega t + (I_1I_3 + I_2I_4) \sin \omega t]. \quad (1.7)$$

Здесь

$$k = \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}, \quad d_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{a_2}} (H - h_1), \quad d_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{a_1}} h_1, \quad d_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{a_1}} (h_1 - x);$$

$$I_1 = \frac{1}{2} [(k + 1) \operatorname{sh}(d_2 + d_1) \cos(d_2 + d_1) + (k - 1) \operatorname{sh}(d_2 - d_1) \cos(d_2 - d_1)],$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(k + 1) \operatorname{ch}(d_2 + d_1) \sin(d_2 + d_1) + (k - 1) \operatorname{ch}(d_2 - d_1) \sin(d_2 - d_1)],$$

$$I_3 = \frac{1}{2} [(k + 1) \operatorname{sh}(d_1 + d_3) \cos(d_1 + d_3) + (k - 1) \operatorname{sh}(d_1 - d_3) \cos(d_1 - d_3)],$$

$$I_4 = \frac{1}{2} [(k + 1) \operatorname{ch}(d_1 + d_3) \sin(d_1 + d_3) + (k - 1) \operatorname{ch}(d_1 - d_3) \sin(d_1 - d_3)].$$

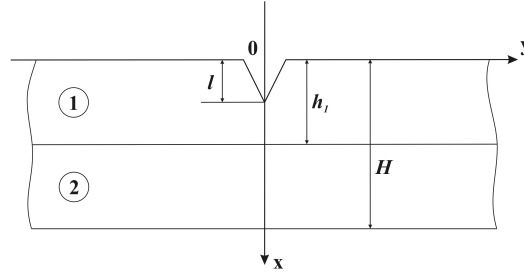


Рис. 1

2. Краевая трещина в двухслойном материале, находящемся под воздействием внешней температуры. Постановка задачи.

Рассмотрим краевую задачу, аналогичную вышеприведенной, для двухслойного материала ($n = 2$; $G_{n+1} = 0$, $\nu_{n+1} = 0$ – $(n + 1)$ -я среда отсутствует).

Пусть упругая полуплоскость $x \geq 0$, составленная из различных материалов с упругими свойствами G_k, ν_k ($k = 1, 2$), жестко сцепленных вдоль плоскостей $x = h_1, x = H$, содержит краевую трещину нормального разрыва.

Трещина перпендикулярна свободной от напряжений границе $x=0$ и границам раздела слоев $x = h_1, x = H$. К берегам трещины приложено заданное нормальное напряжение $\sigma_{y1}(x, 0, t) = -p(x, t) \leq 0$, $(\tau_{xy})_1(x, 0) = 0$, $x \in [0, l]$ ($l < h_1$), где $p(x, t)$ интегрируемая на отрезке $[0, l]$ функция, $\sigma_{y1}(x, 0, t)$ определяется соотношением (1.7).

На бесконечности напряжения отсутствуют, а смещения исчезают.

Таким образом, приходим к симметричной относительно плоскости $y = 0$ краевой задаче плоской теории упругости для двухслойных материалов с краевой трещиной нормального разрыва, находящихся под воздействием внешней температуры.

Граничные условия

$$x = 0, \quad |y| < \infty, \quad (\sigma_x)_1 = 0, \quad (\tau_{xy})_1 = 0, \tag{2.1}$$

$$y = 0, \quad x \in [0, l], \quad \sigma_{y1}(x, 0, t) = -p(x, t) \leq 0, \quad (\tau_{xy})_1 = 0, \tag{2.2}$$

$$y = 0, \quad x \in [l, h_1], \quad (\tau_{xy})_1 = 0, \quad (v)_1 = 0, \tag{2.3}$$

$$y = 0, \quad x \in [h_1, H], \quad (\tau_{xy})_2 = 0, \quad (v)_2 = 0, \tag{2.4}$$

$$x = h_1, \quad |y| < \infty, \quad (\sigma_x)_1 = (\sigma_x)_2, \quad (\tau_{xy})_1 = (\tau_{xy})_2, \\ (u)_1 = (u)_2, \quad (v)_1 = (v)_2, \tag{2.5}$$

$$x = H, \quad |y| < \infty, \quad (\sigma_x)_2 = 0, \quad (\tau_{xy})_2 = 0. \tag{2.6}$$

Условия на бесконечности

$$0 < x < h_1, \quad h_1 < x < H, \\ |y| \rightarrow \infty, \quad h_n < x \rightarrow \infty, \\ \{(\sigma_x)_k, (\sigma_y)_k, (\tau_{xy})_k\} \rightarrow 0 (k = 1, \dots, n + 1), \\ \{(u)_k, (v)_k\} \sim O(r^{-\alpha}) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}, \alpha > 0). \tag{2.7}$$

Условие на конце трещины (дополнительное условие к краевой задаче (2.1)– (2.7)) при $y = 0$, $x \rightarrow l + 0$ имеет вид

$$\sqrt{2\pi(x-l)}(\sigma_y)_1 \sim K_I.$$

3. Решение краевой задачи

Учитывая симметрию задачи, рассматриваем область $x \geq 0$, $y \geq 0$. Решение задачи в указанной области, согласно представлению Папковича-Нейбера перемещений и напряжений через три гармонические функции, примет вид при $x \in [0, h_1]$, $y \geq 0$ (первая упругая среда: G_1, ν_1)

$$\begin{aligned} 2G_1(u)_1(x, y) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [(\chi_1 A_1^{(1)} - \lambda B_0^{(1)} - \lambda x B_1^{(1)}) \operatorname{ch} \lambda x + \\ & + (\chi_1 B_1^{(1)} - \lambda A_0^{(1)} - \lambda x A_1^{(1)}) \operatorname{sh} \lambda x] \cos \lambda y d\lambda + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [\eta y - (1 - 2\nu_1) C_2^{(1)} e^{-\eta y}] \sin \eta x d\eta, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} 2G_1(v)_1(x, y) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda [(A_0^{(1)} + x A_1^{(1)}) \operatorname{ch} \lambda x + (B_0^{(1)} + x B_1^{(1)}) \operatorname{sh} \lambda x] \sin \lambda y d\lambda + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [\eta y + 2(1 - \nu_1) C_2^{(1)} e^{-\eta y}] \cos \eta x d\eta, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_1(x, y) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda \{ [(2(1 - \nu_1) B_1^{(1)} - \lambda A_0^{(1)} - \lambda x A_1^{(1)}) \\ & \operatorname{ch} \lambda x + \\ & + [(2(1 - \nu_1) A_1^{(1)} - \lambda B_0^{(1)} - \lambda x B_1^{(1)}) \operatorname{sh} \lambda x] \} \cos \lambda y d\lambda + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \eta (\eta y - 1) C_2^{(1)} e^{-\eta y} \cos \eta x d\eta, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_1(x, y) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda [(\lambda A_0^{(1)} + 2\nu_1 B_1^{(1)} + \lambda x A_1^{(1)}) \operatorname{ch} \lambda x + \\ & + (\lambda B_0^{(1)} + 2\nu_1 A_1^{(1)} + \lambda x B_1^{(1)}) \operatorname{sh} \lambda x] \cos \lambda y d\lambda - \\ & - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \eta (\eta y + 1) C_2^{(1)} e^{-\eta y} \cos \eta x d\eta, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} (\tau_{xy})_1(x, y) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda \{ [\lambda B_0^{(1)} - (1 - 2\nu_1) A_1^{(1)} + \lambda x B_1^{(1)}] \operatorname{ch} \lambda x + \\ & + [\lambda A_0^{(1)} - (1 - 2\nu_1) B_1^{(1)} + \lambda x A_1^{(1)}] \operatorname{sh} \lambda x \} \sin \lambda y d\lambda - \\ & - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \eta^2 y C_2^{(1)} e^{-\eta y} \sin \eta x d\eta; \end{aligned} \quad (3.5)$$

при $h_1 \leq x \leq H$, $y \geq 0$ (вторая упругая среда: G_2, ν_2)

$$\begin{aligned} 2G_2(u)_2(x, y) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [(\chi_2 A_1^{(2)} - \lambda B_0^{(2)} - \lambda(x-H) B_1^{(2)}) \operatorname{ch} \lambda(x-H) + \\ & + (\chi_2 B_1^{(2)} - \lambda A_0^{(2)} - \lambda(x-H) A_1^{(2)}) \operatorname{sh} \lambda(x-H)] \cos \lambda y d\lambda, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$2G_2(v)_2(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda [(A_0^{(2)} + (x - H)A_1^{(2)}) \operatorname{ch} \lambda(x - H) + (B_0^{(2)} + xB_1^{(2)}) \operatorname{sh} \lambda(x - H)] \sin \lambda y d\lambda, \quad (3.7)$$

$$(\sigma_x)_2(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda \{ [(2(1 - \nu_2)B_1^{(2)} - \lambda A_0^{(2)} - \lambda(x - H)A_1^{(2)}) \operatorname{ch} \lambda(x - H) + [(2(1 - \nu_2)A_1^{(2)} - \lambda B_0^{(2)} - \lambda(x - H)B_1^{(2)}) \operatorname{sh} \lambda(x - H)] \} \cos \lambda y d\lambda, \quad (3.8)$$

$$(\sigma_y)_2(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda [(\lambda A_0^{(2)} + 2\nu_2 B_1^{(2)} + \lambda(x - H)A_1^{(2)}) \operatorname{ch} \lambda(x - H) + (\lambda B_0^{(2)} + 2\nu_2 A_1^{(2)} + \lambda(x - H)B_1^{(2)}) \operatorname{sh} \lambda(x - H)] \cos \lambda y d\lambda, \quad (3.9)$$

$$(\tau_{xy})_2(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda \{ [\lambda B_0^{(2)} - (1 - 2\nu_2)A_1^{(2)} + \lambda(x - H)B_1^{(2)}] \operatorname{ch} \lambda(x - H) + [\lambda A_0^{(2)} - (1 - 2\nu_2)B_1^{(2)} + \lambda(x - H)A_1^{(2)}] \operatorname{sh} \lambda(x - H) \} \sin \lambda y d\lambda. \quad (3.10)$$

Здесь $\chi_j = 3 - 4\nu_j$.

Из (3.5), (3.7), (3.10) следует, что условия (2.2(2)), (2.3(1)), (2.4) выполняются автоматически. Удовлетворяя граничные условия (2.1) и (2.6), из (3.8), (3.10) и (3.3), (3.5) находим

$$\lambda B_0^{(1)} - (1 - 2\nu_1)A_1^{(1)} = 0 \quad (\tau_{xy_1} = 0), \quad (3.11)$$

$$2(1 - \nu_1)B_1^{(1)} - \lambda A_0^{(1)} = \frac{4\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 C_2^{(1)}(\eta)}{(\eta^2 + \lambda^2)^2} d\eta \quad (\sigma_{x_1} = 0), \quad (3.12)$$

$$\lambda B_0^{(2)} - (1 - 2\nu_2)A_1^{(2)} = 0 \quad (\tau_{xy_2} = 0), \quad (3.13)$$

$$\lambda A_0^{(2)} - 2(1 - \nu_2)B_1^{(2)} = 0 \quad (\sigma_{x_2} = 0). \quad (3.14)$$

Таким образом, остаются девять неизвестных функций: $A_0^{(1)}$, $B_0^{(1)}$, $A_1^{(1)}$, $B_1^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $B_0^{(2)}$, $A_1^{(2)}$, $B_1^{(2)}$, $C_2^{(1)}$.

При помощи формул (3.1)–(3.3), (3.3.5)–(3.8), (3.10) и граничных условий (2.5) получаем систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно восьми неизвестных функций с правыми частями, зависящими от неизвестной функции $C_2^{(1)}$:

при $x = h_1$ (граница раздела 1-го и 2-го слоев)

$$\begin{aligned} & k_{1,2} [(\chi_2 A_1^{(2)} - \lambda B_0^{(2)} + \lambda h_2 B_1^{(2)}) \operatorname{ch} \lambda h_2 - \\ & - (\chi_2 B_1^{(2)} - \lambda A_0^{(2)} + \lambda h_2 A_1^{(2)}) \operatorname{sh} \lambda h_2] = \\ & = (\chi_1 A_1^{(1)} - \lambda B_0^{(1)} - \lambda h_1 B_1^{(1)}) \operatorname{ch} \lambda h_1 + \\ & + (\chi_1 B_1^{(1)} - \lambda A_0^{(1)} - \lambda h_1 A_1^{(1)}) \operatorname{sh} \lambda h_1 - \gamma_1(\lambda), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} & k_{1,2} [(\lambda A_0^{(2)} - \lambda h_2 A_1^{(2)}) \operatorname{ch} \lambda h_2 - (\lambda B_0^{(2)} - \lambda h_2 B_1^{(2)}) \operatorname{sh} \lambda h_2] = \\ & = (\lambda A_0^{(1)} + \lambda h_1 A_1^{(1)}) \operatorname{ch} \lambda h_1 + (\lambda B_0^{(1)} + \lambda h_1 B_1^{(1)}) \operatorname{sh} \lambda h_1 - \gamma_2(\lambda), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
& [(2(1 - \nu_2)B_1^{(2)} - \lambda A_0^{(2)} + \lambda h_2 A_1^{(2)}) \operatorname{ch} \lambda h_2 - \\
& - [(2(1 - \nu_2)A_1^{(2)} - \lambda B_0^{(2)} + \lambda h_2 B_1^{(2)}) \operatorname{sh} \lambda h_2 = \\
& = [(2(1 - \nu_1)B_1^{(1)} - \lambda A_0^{(1)} - \lambda h_1 A_1^{(1)}) \operatorname{ch} \lambda h_1 + \\
& + [(2(1 - \nu_1)A_1^{(1)} - \lambda B_0^{(1)} - \lambda h_1 B_1^{(1)}) \operatorname{sh} \lambda h_1 - \gamma_3(\lambda),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
& [\lambda B_0^{(2)} - (1 - 2\nu_2)A_1^{(2)} - \lambda h_2 B_1^{(2)}] \operatorname{ch} \lambda h_2 - \\
& - [\lambda A_0^{(2)} - (1 - 2\nu_2)B_1^{(2)} - \lambda h_2 A_1^{(2)}] \operatorname{sh} \lambda h_2 = \\
& = [\lambda B_0^{(1)} - (1 - 2\nu_1)A_1^{(1)} + \lambda h_1 B_1^{(1)}] \operatorname{ch} \lambda h_1 + \\
& + [\lambda A_0^{(1)} - (1 - 2\nu_1)B_1^{(1)} + \lambda h_1 A_1^{(1)}] \operatorname{sh} \lambda h_1 - \gamma_4(\lambda).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Здесь $k_{1,2} = \frac{G_1}{G_2}$, $h_2 = H - h_1$;

$$\begin{aligned}
\gamma_1(\lambda) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda y \int_0^\infty [\eta y - (1 - 2\nu_1)] C_2^{(1)}(\eta) e^{-\eta y} \sin \eta h_1 d\eta dy, \\
\gamma_2(\lambda) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \lambda y \int_0^\infty [\eta y + 2(1 - \nu_1)] C_2^{(1)}(\eta) e^{-\eta y} \cos \eta h_1 d\eta dy, \\
\gamma_3(\lambda) &= -\frac{2}{\lambda \pi} \int_0^\infty \cos \lambda y \int_0^\infty \eta(\eta y - 1) C_2^{(1)}(\eta) e^{-\eta y} \cos \eta h_1 d\eta dy, \\
\gamma_4(\lambda) &= \frac{2}{\lambda \pi} \int_0^\infty \sin \lambda y \int_0^\infty \eta^2 y C_2^{(1)}(\eta) e^{-\eta y} \sin \eta h_1 d\eta dy.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Удовлетворяя оставшимся смешанным граничным условиям (2.2(1)), (2.3(2)), с помощью (3.2) и (3.5) приходим к парным (дуальным) интегральным уравнениям

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty C_2^{(1)}(\eta) \cos \eta x d\eta = 0, \quad l < x < h_1, \tag{3.20}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \eta C_2^{(1)}(\eta) \cos \eta x d\eta = f(x), \quad 0 < x < l. \tag{3.21}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
f(x) &= p(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda [(\lambda A_0^{(1)} + 2\nu_1 B_1^{(1)} + \lambda x A_1^{(1)}) \operatorname{ch} \lambda x + \\
& + (\lambda B_0^{(1)} + 2\nu_1 A_1^{(1)} + \lambda x B_1^{(1)}) \operatorname{sh} \lambda x] d\lambda.
\end{aligned}$$

Учитывая (3.11)–(3.14) соотношения (3.19) примут вид

$$\begin{aligned}
\gamma_j(\lambda) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t \psi(t) \Phi_j(\lambda t) dt \quad (j = 1, \dots, 5), \\
\lambda B_0^{(1)} - (1 - 2\nu_1)A_1^{(1)} &= 0, \\
\lambda A_0^{(1)} &= 2(1 - \nu_1)B_1^{(1)} - \gamma_5(\lambda), \\
\lambda B_0^{(2)} - (1 - 2\nu_2)A_1^{(2)} &= 0, \\
\lambda A_0^{(2)} - 2(1 - \nu_2)B_1^{(2)} &= 0.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(\lambda t) &= \Phi_0(\lambda t) - \Phi_4(\lambda t), \\
 \Phi_2(\lambda t) &= -\Phi_0(\lambda t) - \Phi_3(\lambda t), \\
 \Phi_0(\lambda t) &= 2(1 - \nu_1^j) e^{-\lambda h_1} I_0(\lambda t), \\
 \Phi_3(\lambda t) &= e^{-\lambda h_1} [(1 - \lambda h_1) I_0(\lambda t) + \lambda t I_1(\lambda t)], \\
 \Phi_4(\lambda t) &= e^{-\lambda h_1} [(2 - \lambda h_1) I_0(\lambda t) + \lambda t I_1(\lambda t)], \\
 \Phi_5(\lambda t) &= I_0(\lambda t) - L_0(\lambda t) + \lambda t [I_1(\lambda t) - L_1(\lambda t) - \frac{2}{\pi}], \quad (t \in [0, l]).
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Здесь $I_0, I_1, L_0, L_1, L_{-1}$ – модифицированные функции Бесселя первого рода и модифицированные функции Струве.

После соответствующих преобразований [2] получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{p(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda \{ B_1^{(1)}(\lambda) [\lambda x I_1(\lambda x) + 2I_0(\lambda x)] + \\
 &+ A_1^{(1)}(\lambda) [\lambda x L_{-1}(\lambda x) + L_0(\lambda x)] - \gamma_5(\lambda) I_0(\lambda x) \} d\lambda \quad (x \in [0, l]).
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

В дальнейшем для решения задачи необходимо произвести следующие действия:

- 1) из системы алгебраических уравнений (3.15)–(3.18) с учетом (3.22) все искомые функции $A_1^{(1)}, B_1^{(1)}, A_1^{(2)}, B_1^{(2)}$ выразить через интегралы $\gamma_j(\lambda)$ ($j = 1, \dots, 5$);
- 2) определенные таким образом функции $A_1^{(1)}, B_1^{(1)}$ подставить в (3.23);
- 3) изменить порядок интегрирования (получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода для нахождения неизвестной функции $\psi(x)$ ($x \in [0, l]$)).

Представим искомые функции в виде

$$\begin{aligned}
 A_1^{(1)} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t \psi(t) a_1^{(1)}(\lambda t) dt, \\
 B_1^{(1)} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t \psi(t) b_1^{(1)}(\lambda t) dt, \\
 A_1^{(2)} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t \psi(t) a_1^{(2)}(\lambda t) dt, \\
 B_1^{(2)} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t \psi(t) b_1^{(2)}(\lambda t) dt \quad (\lambda \in]0, \infty[).
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Здесь $a_1^{(1)}, b_1^{(1)}, a_1^{(2)}, b_1^{(2)}$ – новые неизвестные функции.

С помощью (3.15)–(3.18), (3.22) и (3.24) приходим к следующей системе, состоящей из четырех линейных неоднородных алгебраических уравнений с уже известными правыми частями $\Phi_j(\lambda t)$ ($j = 1, \dots, 5$ $\lambda \in]0, \infty[$ $t \in [0, l]$) относительно новых неизвестных функций:

при $x = h_1$ (граница раздела 1-го и 2-го слоев)

$$\begin{aligned}
 k_{1,2} e^{-\lambda(h_2 - h_1)} &\left[(2(1 - \nu_2) a_1^{(2)} + \lambda h_2 b_1^{(2)}) \frac{1 + e^{-2\lambda h_2}}{2} - \right. \\
 &\left. - ((1 - 2\nu_2) b_1^{(2)} + \lambda h_2 a_1^{(2)}) \frac{1 - e^{-2\lambda h_2}}{2} \right] = \\
 &= (2(1 - \nu_1) a_1^{(1)} - \lambda h_1 b_1^{(1)}) \frac{1 + e^{-2\lambda h_1}}{2} + \\
 &+ ((1 - 2\nu_1) b_1^{(1)} + \Phi_5 - \lambda h_1 a_1^{(1)}) \frac{1 - e^{-2\lambda h_1}}{2} - \Phi_1(\lambda t) e^{-\lambda h_1},
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$k_{1,2}e^{-\lambda(h_2-h_1)} \left[(2(1-\nu_2)b_1^{(2)} - \lambda h_2 a_1^{(2)}) \frac{1+e^{-2\lambda h_2}}{2} - \right. \\ \left. ((1-2\nu_2)a_1^{(2)} - \lambda h_2 b_1^{(2)}) \frac{1-e^{-2\lambda h_2}}{2} \right] = \quad (3.26)$$

$$= (2(1-\nu_1)b_1^{(1)} + \lambda h_1 a_1^{(1)} - \Phi_5) \frac{1+e^{-2\lambda h_1}}{2} + \\ + ((1-2\nu_1)a_1^{(1)} + \lambda h_1 b_1^{(1)}) \frac{1-e^{-2\lambda h_1}}{2} - \Phi_2(\lambda t)e^{-\lambda h_1},$$

$$e^{-\lambda(h_2-h_1)} \left[\lambda h_2 a_1^{(2)} \frac{1+e^{-2\lambda h_2}}{2} - (a_1^{(2)} + \lambda h_2 b_1^{(2)}) \frac{1-e^{-2\lambda h_2}}{2} \right] = \quad (3.27)$$

$$= (\Phi_5 - \lambda h_1 a_1^{(1)}) \frac{1+e^{-2\lambda h_1}}{2} + (a_1^{(1)} - \lambda h_1 b_1^{(1)}) \frac{1-e^{-2\lambda h_1}}{2} - \Phi_3(\lambda t)e^{-\lambda h_1},$$

$$e^{-\lambda(h_2-h_1)} \left[-\lambda h_2 b_1^{(2)} \frac{1+e^{-2\lambda h_2}}{2} - (b_1^{(2)} - \lambda h_2 a_1^{(2)}) \frac{1-e^{-2\lambda h_2}}{2} \right] = \quad (3.28)$$

$$= \lambda h_1 b_1^{(1)} \frac{1+e^{-2\lambda h_1}}{2} + (b_1^{(1)} + \lambda h_1 a_1^{(1)} - \Phi_5) \frac{1-e^{-2\lambda h_1}}{2} - \Phi_4(\lambda t)e^{-\lambda h_1}.$$

Подставляя (3.24) в (3.23) и изменяя порядок интегрирования, приходим к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода:

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{p(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau + \int_0^l \psi(t) K(x, t) dt, \quad (3.29)$$

$$K(x, t) = \int_0^\infty \lambda t \{ b_1^{(1)}(\lambda t) [\lambda x I_1(\lambda x) + 2I_0(\lambda x)] + \quad (3.30)$$

$$+ a_1^{(1)}(\lambda t) [\lambda x L_{-1}(\lambda x) + L_0(\lambda x)] - \Phi_5(\lambda t) I_0(\lambda x) \} d\lambda \quad (x \in [0, l], \quad l < h_1).$$

Здесь $a_1^{(1)}(\lambda t)$, $b_1^{(1)}(\lambda t)$ определяются из (3.25)–(3.28).

Коэффициент интенсивности напряжений будем искать в виде

$$K_I = \sqrt{\pi l} \psi(l), \quad (3.31)$$

$$\psi(\cdot) = \psi_1(x, l, h_1, H, a_1, a_2, k_1, k_2, k_{1,2}, \nu_1, \nu_2) | x = l. \quad (3.32)$$

Здесь $\psi(l)$ определяется из фредгольмова уравнения с непрерывным ядром (3.30).

Для нахождения коэффициента интенсивности напряжений K_I в вершине краевой трещины $y = 0$, $0 \leq x \leq l$, находящейся в двухслойной среде под воздействием внешней температуры, достаточно выполнить следующие действия:

- 1) в уравнении (3.30) выполнить замену $t = \xi$,
- 2) в найденном ранее напряжении (1.7) поменять знак и принять $x = \tau$,
- 3) полученное соотношение подставить в измененное уравнение (3.30).

Будем искать $\psi(x)$ в виде

$$\psi(x) = F_0(x) \cos \omega t + F_1(x) \sin \omega t, \quad (3.33)$$

$$F_0(x) = \frac{4}{\pi} \frac{G_1(1+\nu_1)\alpha_1 T_0}{I_1^2 + I_2^2} [I_1 A(x) - I_2 B(x)] + \int_0^l F_0(\xi) K(x, \xi) d\xi, \quad (3.34)$$

$$F_1(x) = \frac{4}{\pi} \frac{G_1(1+\nu_1)\alpha_1 T_0}{I_1^2 + I_2^2} [I_1 B(x) + I_2 A(x)] + \int_0^l F_1(\xi) K(x, \xi) d\xi. \quad (3.35)$$

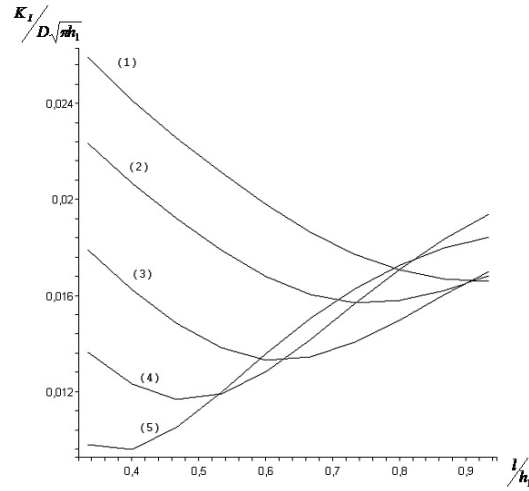


Рис. 2

Здесь

$$A(x) = \int_0^x \frac{I_4(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau, \quad B(x) = \int_0^x \frac{I_3(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau.$$

Коэффициент интенсивности напряжений примет вид:

$$K_I = K_I^0 \cos \omega t + K_I^1 \sin \omega t, \quad K_I = \sqrt{K_I^{0^2} + K_I^{1^2}} \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.36)$$

Здесь

$$K_I^0 = \frac{4}{\pi} G_1 (1 + \nu_1) \alpha_1 T_0 \sqrt{\pi l} F_0(l), \quad K_I^1 = \frac{4}{\pi} G_1 (1 + \nu_1) \alpha_1 T_0 \sqrt{\pi l} F_1(l), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{K_I^0}{K_I^1}.$$

Введем следующие обозначения

$$K_I^* = \sqrt{K_I^{0^2} + K_I^{1^2}}, \quad D = \frac{4}{\pi} G_1 (1 + \nu_1) \alpha_1 T_0,$$

тогда

$$K_I = K_I^* \sin(\omega t + \varphi).$$

4. Анализ решения

Благодаря представлению искомых функций в виде (3.24) появилась практическая возможность вычисления значений $\psi(\cdot)$ для любых комбинаций свойств материалов и тем самым в оптимальном проектировании многослойных конструкций. Для этого средствами аналитической системы Maple [3] разработана вычислительная программа, в которой решение уравнения (3.30) сведено к решению системы линейных неоднородных уравнений.

Рассмотрим частные случаи общего решения. Пусть $H = 1$, $h_1 = 0.3$, $T_0 = 1$, $\omega = 2\pi$. Результаты численного расчета зависимости $\frac{K_I^*}{D\sqrt{\pi h_1}}$ от $\frac{l}{h_1}$ ($l < h_1$) при различных теплофизических свойствах материалов представлены на рис. 2,3,4.

На рис. 2 построены графики для двухслойных конструкций, в которых первый слой представлен различными марками бронзы, а второй – конструкционной сталью 20.

На первом графике с увеличением длины трещины безразмерный коэффициент интенсивности напряжений K_I падает, т. е. происходит торможение трещины.

На втором, третьем и четвертом графике коэффициент интенсивности напряжений K_I с увеличением длины трещины падает до некоторой величины, затем постепенно увеличивается с ростом длины трещины.

На пятом графике коэффициент интенсивности напряжений K_I монотонно увеличивается, т. е. при определенных значениях $\frac{\ell}{h_1}$ может происходить неустойчивый рост трещины.

№ п/п	Материал	ρ	k	c	ν	E	G
Первый слой – различные марки бронзы							
1.	Кадмиевая бронза	8.890	329	385	0,32-0,35	123,6	41,2
2.	Магниева бронза Бр Мг 0,3	8.910	242,8	381	0,32-0,35	120,7	45,4
3.	Хромовая бронза Бр Х 0,5	8.900	176,5	385	0,32-0,35	109,9	41,2
4.	Бериллиевая бронза Бр Б2	8.230	104,7	418,7	0,32-0,35	128,5	50
5.	Алюминиевожелезная бронза АЖ9-4	7.500	58,6	423	0,32-0,35	110,7	41,6
Второй слой – конструкционная сталь 20							
		7.859	52	486	0,24-0,31	213	83,9

Теплофизические свойства:

- 1) ρ – плотность $[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}]$;
- 2) k – коэффициент теплопроводности $[\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot^\circ\text{C}}]$;
- 3) c – удельная теплоемкость $[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot^\circ\text{C}}]$;
- 4) ν – коэффициент Пуассона;
- 5) E – модуль продольной упругости [МПа];
- 6) G – модуль сдвига [МПа].

На рис. 3 построены графики для двухслойных конструкций, в которых первый слой представлен различными сплавами легких металлов, а второй – конструкционной сталью 20.

На первом графике с увеличением длины трещины безразмерный коэффициент интенсивности напряжений K_I монотонно уменьшается, т. е. происходит торможение трещины.

На втором и третьем графике коэффициент интенсивности напряжений K_I с увеличением длины трещины падает до некоторой величины, затем постепенно увеличивается с ростом длины трещины.

На четвертом графике коэффициент интенсивности напряжений K_I монотонно увеличивается, т.е. при определенных значениях $\frac{\ell}{h_1}$ может происходить неустойчивый рост трещины.

На рис. 4 построены графики для двухслойных конструкций, в которых первый слой представлен различными жаростойкими никелевыми сплавами, а второй – конструкционной сталью 20.

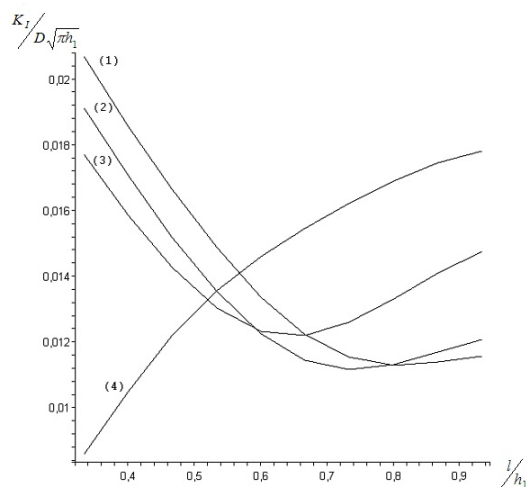


Рис. 3

№ п/п	Материал	ρ	k	c	ν	E	G
Первый слой – различные сплавы легких металлов							
1.	Магний деформируемый МА8	1.780	133,9	1046,7	0,31-0,35	40,2	15,7
2.	Магний литейный МЛ11	1.800	117,2	1044,7	0,31-0,35	41,2	15,7
3.	Сплав алюминия D16	2.770	130	992	0,32-0,36	720	26,5
4.	Титан технический ВТ1-00	4.500	19,3	503	0,31	110	39,2
Второй слой – конструкционная сталь 20							
		7.859	52	486	0,24-0,31	213	83,9

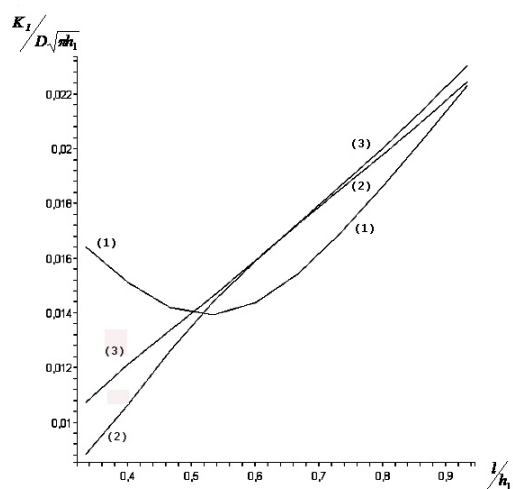


Рис. 4

На первом графике коэффициент интенсивности напряжений K_I с увеличением длины трещины падает до некоторой величины, затем постепенно увеличивается с ростом длины трещины.

На втором и третьем графике коэффициент интенсивности напряжений K_I монотонно увеличивается, т. е. при определенных значениях $\frac{\ell}{h_1}$ может происходить неустойчивый рост трещины.

№ п/п	Материал	ρ	k	c	ν	E	G
Первый слой – различные жаростойкие никелевые сплавы							
1.	Жаростойкий сплав Ni-Fe(617)	8.400	13,4	420	0,31	212	80,9
2.	Никель марганцевый НМц 5	8760	48	544	0,31	206	78,6
3.	Жаростойкий сплав Ni-Fe(263)	8.400	11,7	426	0,31	222	84,7
Второй слой – конструкционная сталь 20							
		7.859	52	486	0,24-0,31	213	83,9

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кулиев, В. Д. Многослойные материалы под воздействием внешней температуры / В. Д. Кулиев, Т. Н. Алексеева // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2011. – № 1(9). – С. 143–149.
- [2] Кулиев, В. Д. Сингулярные краевые задачи / В. Д. Кулиев. – М. : Физматлит, 2005. – 720 с.
- [3] Матросов, А. В. Марле 6. Решение задач высшей математики и механики / А. В. Матросов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2001. – 528 с.
- [4] Папкович, П. Ф. Теория упругости / П. Ф. Папкович. – М. : Оборонгиз, 1939. – 643 с.
- [5] Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.

V. D. Kuliev, T. N. Alekseeva

INFLUENCE OF AMBIENT TEMPERATURE FOR EDGE CRACK IN A TWO-LAYER MATERIALS

Moscow State Open University

Kolomna Institute (branch) of Moscow State Open University

Abstract. The problem of edge crack in a two-layer material which is under the influence of ambient temperature is considered. The stress intensity factor is calculated. It is given the analysis of the numerical solution.

Keywords: boundary fracture, Fredholm second order equation, stress intensity factor.

Кулиев Валех Джафарович

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики МГОУ, г. Москва

e-mail: alexeevatn75@rambler.ru

Алексеева Татьяна Николаевна

старший преподаватель кафедры высшей и прикладной математики КИ(ф)МГОУ, г. Коломна

e-mail: alexeevatn75@rambler.ru

Kuliev, Valekh Dzhafarovich

Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, Department of Mathematics, Moscow State Open University, Moscow

Alekseeva, Tatyana Nikolaevna

Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, Kolomna Institute (branch) of Moscow State Open University, Kolomna

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ СТАЛИ 45 ПРИ СЛОЖНОМ ДОКРИТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Тверской государственный технический университет

Аннотация. В статье представлены результаты испытаний трубчатого образца из стали 45 по сложной многозвенной траектории деформирования. Исследовалось влияние сложного докритического нагружения материала на устойчивость цилиндрической оболочки при последующем сжатии.

Ключевые слова: упругость, пластичность, изотропия, цилиндрическая оболочка.

УДК: 539.375

В данной статье представлены результаты экспериментального исследования напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при докритическом растяжении с кручением и сжатии в пространстве напряжений по плоской ломаной траектории до ее потери устойчивости. Стальной трубчатый образец имел толщину стенки $h = 1$ мм, радиус срединной поверхности $R = 15,5$ мм, длину рабочей части $l = 110$ мм. Материал образцов в достаточной степени начально изотропен. Модуль упругости $E = 2.105$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; $\sigma_T = 270$ МПа. При обработке экспериментальных данных принималось условие несжимаемости ($\epsilon_0 = 0$). При проведении испытаний деформации измерялись с помощью экстензометра, работающего в составе автоматизированного экспериментального комплекса СН-ЭВМ. При упруго-пластическом деформировании на лучах простого нагружения-разгружения при кручении и растяжении разброс величин модуля вектора напряжений составлял не более 6%, что позволяло считать материал начально изотропным. Компоненты векторов напряжений и деформаций и их модулей в девиаторных подпространствах напряжений Σ_3 и деформации E_3 вычислялись по формулам:

$$\begin{aligned} -1 &= \sqrt{3/2}\epsilon_{11}, -2 = \sqrt{2}(\epsilon_{22} + 1/2\epsilon_{11}), -3 = \sqrt{2}\epsilon_{12}, -4 = -5 = 0, \\ S_1 &= \sqrt{2/3}(\sigma_{11} - 1/2\sigma_{22}), S_2 = \sigma_{22}/\sqrt{2}, S_3 = \sqrt{2}\sigma_{12}, S_4 = S_5 = 0, \\ \epsilon_0 &= \epsilon_{ij}\delta_{ij}/3 \approx 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) – компоненты тензоров напряжений и деформации.

Для исследования и измерения модулей продольной упругости E , модуля сдвига G , коэффициента Пуассона μ были выполнены диаграммы растяжения, сжатия, кручения и внутреннего давления. В результате модуль упругости E составил значение, близкое к 2,1.105 на начальном этапе нагружения (упругом участке), модуль $G=2,1.105$. На рис. 1 представлена диаграмма простого нагружения при растяжении.

Программа испытаний реализовывалась в векторном пространстве напряжений в плоскости S_1S_3 (рис. 2). Соответствующий ей отклик в плоскости $\Theta_1\Theta_3$ векторного пространства

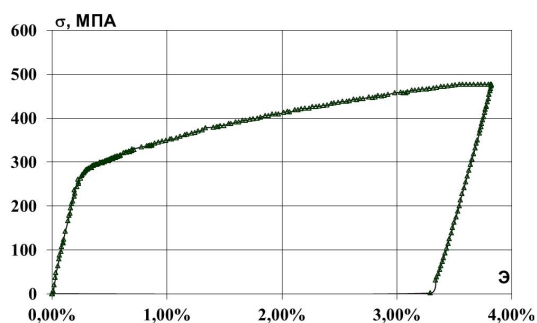


Рис. 1

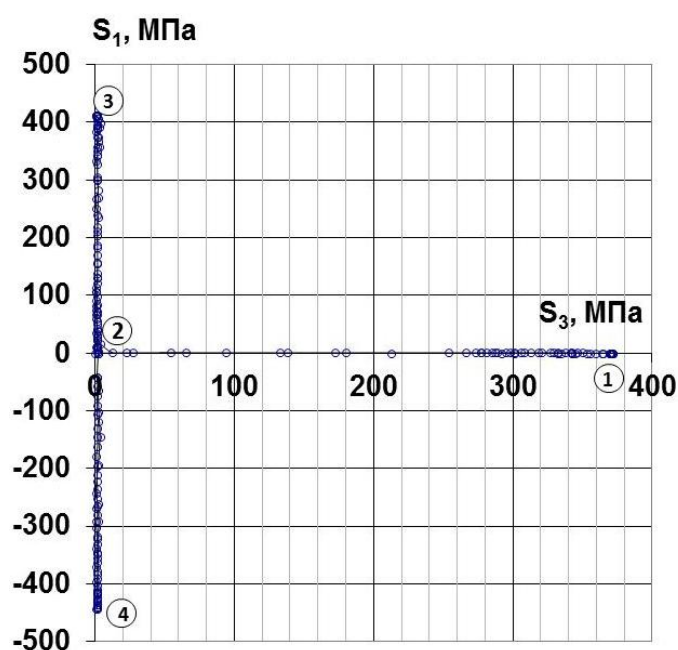


Рис. 2

девиатора деформаций показан на рис. 3. На рис. 2-5 приведены результаты испытаний трубчатого образца по реализованной программе сложного нагружения при $\sigma_{22} = 0$.

Образцы закручивались до уровня $\sigma = S_3 \approx 370$ МПа (точка 1) и разгружались до $\sigma = S_3 = 0$ (точка 2). Дальнейшее нагружение производилось путем растяжения до значения $S_1 = 444$ МПа (точка 3), после чего образец разгружался и затем сжимался до потери устойчивости (точка 4).

На рис. 2 и 3 в плоскостях S_1S_3 и $\Theta_1\Theta_3$ представлены программа испытаний и соответствующий отклик на эту программу. Стрелками с номерами отмечены точки излома траекторий. После разгрузки по кручению (точка 2), последующем нагружении до точки 3, разгрузке и последующем сжатии наблюдался эффект раскручивания образца при отсутствии крутящего момента ($S_3 = 0$) вплоть до момента потери устойчивости, отмеченного крестиком в точке 5.

На рис. 4 представлена диаграмма нагружения-разгружения $\sigma - \Theta$. Участки нагружения ($d_\sigma > 0$) и разгружения ($d_\sigma < 0$) хорошо просматриваются. Потеря устойчивости соответствует точке 4, в которой предел устойчивости $\sigma_{кр} = 444$ МПа, $\Theta_{кр} = 2,3$ %.

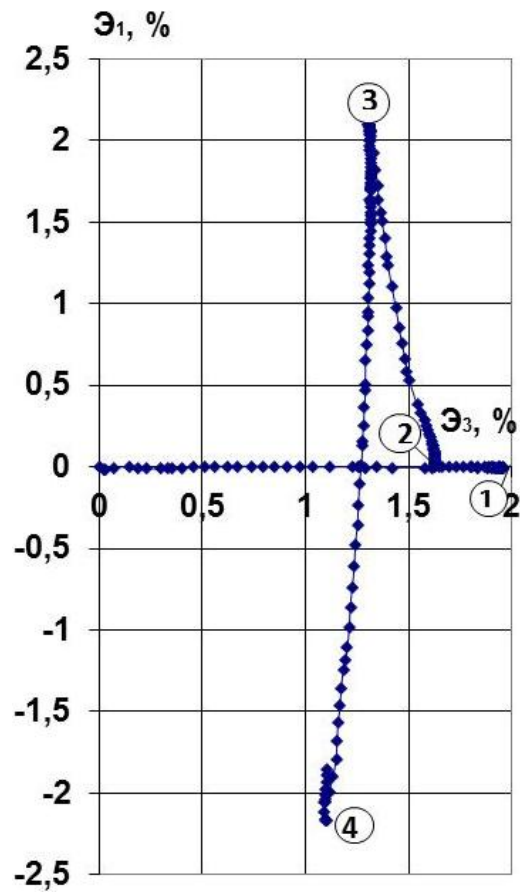


Рис. 3

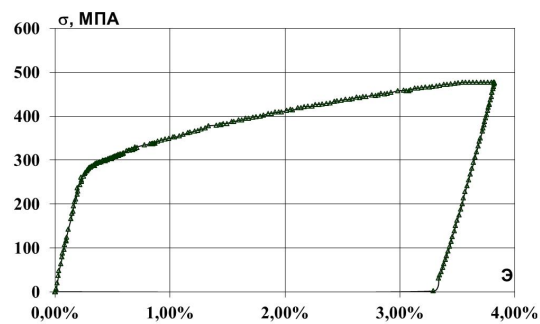


Рис. 4

На рис. 5 и 6 представлены локальные диаграммы нагружения $S_1 - \varepsilon_1$, $S_3 - \varepsilon_3$. Хорошо виден участок раскрутки 2-4, который завершается потерей устойчивости при сжатии. Раскрутка и докрутка трубчатых образцов при разгрузке и знакопеременном сжатии в отсутствие крутящего момента наблюдается и при иных сложных видах докритического нагружения. Данное явление характеризует интеррект-эффект напряжений при сложном нагружении.

Окончательные результаты испытаний представлены в таблице 1, где приведены критические значения компонент напряжений и деформаций в момент потери устойчивости при сложном докритическом нагружении, при простом сжатии и кручении.

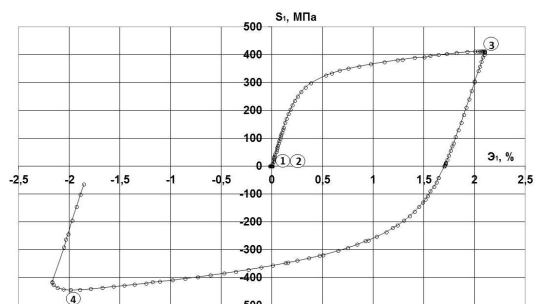


Рис. 1

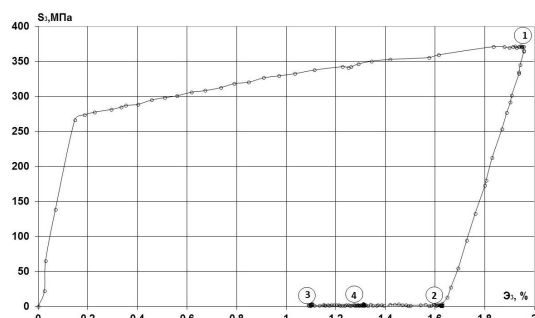


Рис. 1

Таблица 1

№ обр	$\sigma_{кр}$, МПа	$\varepsilon_{кр}$, %	S_1 , МПа	S_3 , МПа	ε_1 , %	ε_2 , %	ε_3 , %
1.	444	2.30	-444	1.30	-1.99	-0.29	1.11
2.	435	3.12	-435	0	-3.12	0	0
3.	420	2.95	0	420	0	0	2.95

Исходя из полученных результатов можно сделать выводы:

- (1) При реализации сложной траектории в виде многозвенной ломаной в плоскости $S_1 S_3$ имел место interrotation-эффект раскручивания и закручивания образца при компоненте $S_3=0$, до момента потери устойчивости;
- (2) Материал в процессе докритического упруго-пластического деформирования в целом получил упрочнение;
- (3) Предварительное докритическое сложное нагружение при сравнении с простым мало влияет на модуль критического напряжения, но существенно влияет до 30-35% на модуль критических деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Зубчанинов, В. Г.* Математическая теория пластичности. – Тверь: ТГТУ, 2002. – 300с.
- [2] *Зубчанинов, В. Г.* Механика сплошных деформированных сред. – Тверь:ТГТУ, 2002. – 803с.
- [3] *Зубчанинов, В. Г.* Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990. – 368с.

V. G. Zubchaninov, V. I. Gulyaev

**EXPERIMENTAL RESEARCH OF STABILITY OF CYLINDRICAL SHELLS
FROM STEEL 45 AT DIFFICULT SUBCRITICAL LADENING**

Tver State Technical University

Abstract. Influence of difficult subcritical loading of material was investigated on stability of cylindrical shell at a subsequent compression.

Keywords: elasticity, plasticity, isotropy, cylindrical shell.

Зубчанинов Владимир Георгиевич

доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г.Тверь

e-mail: vgz@rambler.ru

Гультяев Вадим Иванович

кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой «Строительство и энергетика», Тверской государственной технический университет, г.Тверь

e-mail: vig0@mail.ru

Zubchaninov Vladimir Georgievich

Dr. Of Eng. Sci., Professor, Head of the Department of the Resistance of Materials, Elasticity and Plasticity Theories, Tver State Technical University, Tver

Gulyaev Vadim Ivanovich

Candidate of Technical Sciences, Assoc. Professor, Head of the Department of the Building and Energy, Tver State Technical University, Tver

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ И РАЗГРУЖЕНИИ МАТЕРИАЛА

Тверской государственный технический университет

Аннотация. В статье представлены результаты испытаний трубчатого образца из стали 45 по сложной многозвенной траектории деформирования. Исследовалось влияние сложного докритического нагружения материала на устойчивость цилиндрической оболочки при кручении, криволинейной траектории нагружения и последующем сжатии.

Ключевые слова: упругость, пластичность, изотропия, цилиндрическая оболочка, сложное нагружение.

УДК: 539.375

В данной статье представлены результаты экспериментального исследования напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при растяжении с кручением в пространстве напряжений по трехзвенной плоской ломаной траектории. Стальной трубчатый образец имел толщину стенки $h = 1$ мм, радиус срединной поверхности $R = 15,5$ мм, длину рабочей части $l = 110$ мм. Материал образцов в достаточной степени начально изотропен. Модуль упругости $E = 2.105$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; $\sigma_T = 270$ МПа. Сложное нагружение образцов проводилось в условиях растяжения-сжатия и кручения при $\sigma_{22} = 0$. При обработке экспериментальных данных принималось условие несжимаемости ($\epsilon_0 = 0$).

Программа испытаний реализовывалась в векторном пространстве девиатора напряжений в плоскости $S_1 S_3$ (рис. 1). Соответствующий ей отклик реализовывался в плоскости векторного пространства девиатора деформаций $\Theta_1 \Theta_3$ (рис. 2). Цифрами отмечены участки смены траектории нагружения. В точке 5 происходила потеря устойчивости оболочки при сжатии. Компоненты векторов напряжений и деформаций и их модулей в девиаторном подпространствах напряжений Σ_3 и деформации E_3 вычислялись по формулам:

$$\begin{aligned} -1 &= \sqrt{3/2}\epsilon_{11}, -2 = \sqrt{2}(\epsilon_{22} + 1/2\epsilon_{11}), -3 = \sqrt{2}\epsilon_{12}, -4 = -5 = 0, \\ S_1 &= \sqrt{2/3}(\sigma_{11} - 1/2\sigma_{22}), S_2 = \sigma_{22}/\sqrt{2}, S_3 = \sqrt{2}\sigma_{12}, S_4 = S_5 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\epsilon_0 = \epsilon_{ij}\delta_{ij}/3 \approx 0,$$

где σ_{ij} , ϵ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – компоненты тензоров напряжений и деформации.

Образец подвергался нагружению, разгрузению и повторному нагружению кручением до $S_3 = 375$ МПа (точки 1,2,3). Затем производился излом траектории на 180° и нагружение реализовывалось по четверти перевернутой окружности (точки 3,4) с плавным переходом на прямолинейную траекторию сжатия ($S_3 = 0$) до потери устойчивости при $\sigma_{кр} = 450$ МПа, $\Theta_{кр} = 2,9$ %. Номерами (1-5) отмечены точки излома траекторий.

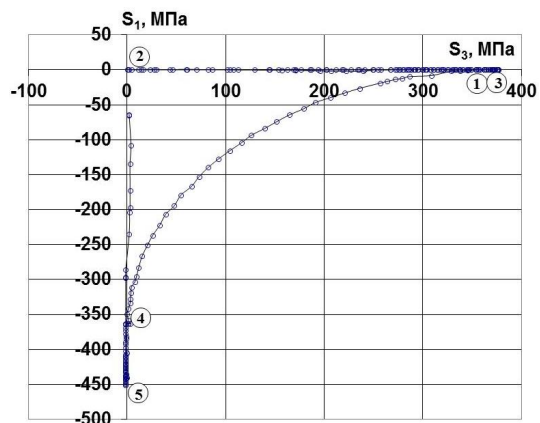


Рис. 1

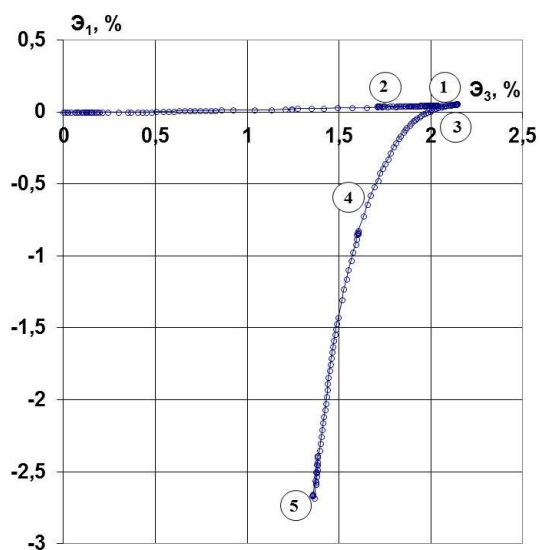


Рис. 2

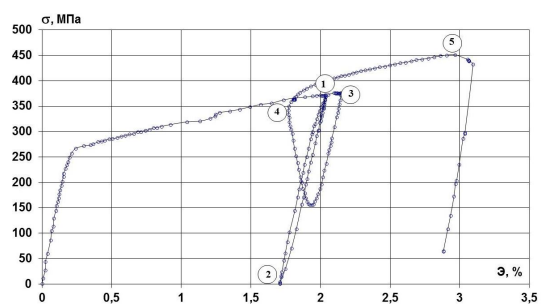


Рис. 3

Скалярные свойства материала: диаграмма сложного деформирования σ - ϵ и диаграмма прослеживания процесса σ - S представлены на рис. 3, 4.

Локальные диаграммы представлены на рис. 5-6. Видно, что на участке 4-5 происходит явный эффект раскручивания образца при отсутствии S_3 .

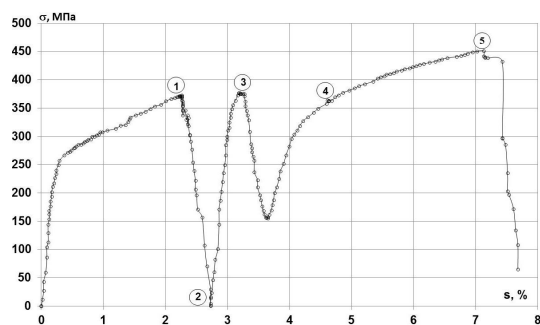


Рис. 1

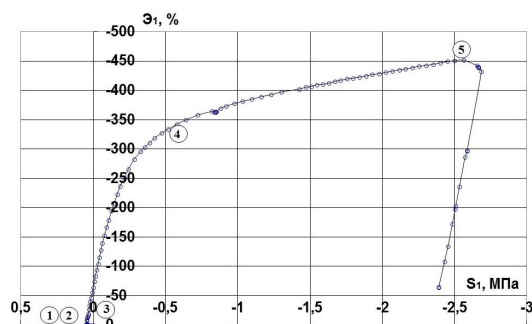


Рис. 1

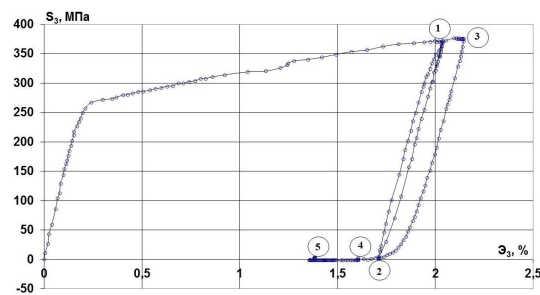


Рис. 1

Окончательные результаты испытаний представлены в таблице 1, где приведены критические значения компонент напряжений и деформаций в момент потери устойчивости при сложном докритическом нагружении, а также при простом сжатии и кручении.

Таблица 1

№ обр	$\sigma_{кр}$, МПа	$\varepsilon_{кр}$, %	S_1 , МПа	S_3 , МПа	ε_1 , %	ε_2 , %	ε_3 , %
1.	450	2.90	-450	1.30	-2.50	-0.56	1.375
2.	435	3.12	-435	0	-3.12	0	0
3.	420	2.95	0	420	0	0	2.95

Выводы по экспериментальному исследованию:

- (1) На участке сжатия (участок 4-5) происходит эффект раскручивания образца.
- (2) Предварительное сложное докритическое нагружение-разгружение для данной программной траектории мало повлияло на критическое значение модулей напряжений и деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Зубчанинов, В. Г.* Математическая теория пластичности. – Тверь: ТГТУ, 2002. – 300с.
[2] *Зубчанинов, В. Г.* Механика сплошных деформированных сред. – Тверь:ТГТУ, 2002. – 803с.

V. G. Zubchaninov, V. I. Gulyaev

**EXPERIMENTAL RESEARCH OF STABILITY OF SHELLS AT DIFFICULT
LADENING ON FLAT TRAJECTORY**

Tver State Technical University

Abstract. Influence of difficult subcritical lading of material was investigated on stability of cylindrical shell at twisting, curvilinear trajectory and subsequent compression.

Keywords: elasticity, plasticity, isotropy, cylindrical shell, difficult lading.

Зубчанинов Владимир Георгиевич

доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г.Тверь

e-mail: vgz@rambler.ru

Гультяев Вадим Иванович

кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой «Строительство и энергетика», Тверской государственной технический университет, г.Тверь

e-mail: vig0@mail.ru

Zubchaninov Vladimir Georgievich

Dr. Of Eng. Sci., Professor, Head of the Department of the Resistance of Materials, Elasticity and Plasticity Theories, Tver State Technical University, Tver

Gulyaev Vadim Ivanovich

Candidate of Technical Sciences, Assoc. Professor, Head of the Department of the Building and Energy, Tver State Technical University, Tver

В. В. Дудукаленко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА НА ОСНОВЕ ПАРАМЕТРОВ МЕЗОСТРУКТУРЫ

Самарский государственный университет

Аннотация. Важнейшими свойствами твердых тел и материалов являются их механические свойства: упругость, вязкость, пластичность, прочность. Вместе с тем свойства тел непосредственно связаны с их строением – структурой материала, которая характеризует пространственное распределение компонентов. Задача механики материалов состоит в проектировании композиций, оптимально сочетающих свойства прочности, пластичности, жесткости, которые решают вопрос о возможности применения данного материала или детали. Композиционные материалы позволяют удовлетворять противоречивым требованиям легкой обработки материала или формообразования с высокой прочностью при эксплуатации. Этим условиям удовлетворяют такие технологические процессы, как спекание порошков, полимеризация, твердение цементных растворов и другие способы образования связки между частицами заполнителя. Выбор заполнителя зависит от целевого значения материала: высокая прочность, экстремальная теплопроводность, низкий удельный вес и пр. Высокая прочность заполнителя достигается такими технологическими приемами, как выращивание нитеобразных кристаллов, помол в шаровых мельницах, т. е. получение частиц с наименьшим количеством дефектов. С точки зрения механики расчет такой композиции аналогичен расчету конструкции со случайно распределенными параметрами. Если жесткость включения выше жесткости связующего, происходит распределение напряжений, в которых более нагруженными оказываются высокопрочные включения, а связующее лишь передает нагрузки включениям и находится в поле меньших по интенсивности напряжений. Этот пример показывает многофакторную зависимость прочности композита от параметров его компонентов. Таким образом, проектирование составов композиций включает расчет упругих полей и необратимых процессов, сложным образом взаимодействующих в структуре материала. Аналогичные явления происходят в гетерогенных системах, в которых необратимые процессы деформирования, рассматриваемые на уровне структуры материала, могут объяснить такие свойства, как приобретенная анизотропия, эффект упрочнения, зависимость от истории нагружения. Воздействия температуры и пластических деформаций изменяют структуру материала. Характер изменения структуры и гетерогенные фазовые переходы объясняют такие уникальные явления, как память форм, сверхпластичность.

Ключевые слова: напряжение, деформация, упругость, пластичность, мезоструктура.

УДК: 539

ВВЕДЕНИЕ

Развитие новых областей техники требует материалов, обладающих необычным сочетанием свойств, которые достигаются по мере нахождения новых путей комбинирования составов

Поступила 12.09.2011

материала. Если также учесть, что с развитием промышленности, использующей минеральное сырье, количество отходов будет возрастать, то станет ясно, какое важное значение имеет задача их утилизации. Из отходов, загромождающих большие земельные площади и ставших обузой производства, в композициях материалов используются шлаковые цементы, легкие заполнители, щебень и другие компоненты, позволяющие получать дешевый и нужный конструкционный материал.

Важнейшими свойствами твердых тел и материалов являются их механические свойства: упругость, вязкость, пластичность, прочность. Вместе с тем свойства тел непосредственно связаны с их строением – структурой материала, которая характеризует пространственное распределение компонентов. Задача механики материалов состоит в проектировании композиций, оптимально сочетающих свойства прочности, пластичности, жесткости, которые решают вопрос о возможности применения данного материала или детали. Композиционные материалы позволяют удовлетворять противоречивым требованиям легкой обработки материала или формообразования с высокой прочностью при эксплуатации. Этим условиям удовлетворяют такие технологические процессы, как спекание порошков, полимеризация, твердение цементных растворов и другие способы образования связки между частицами заполнителя. Выбор заполнителя зависит от целевого значения материала: высокая прочность, экстремальная теплопроводность, низкий удельный вес и пр. Высокая прочность заполнителя достигается такими технологическими приемами, как выращивание нитеобразных кристаллов, помол в шаровых мельницах, т. е. получение частиц с наименьшим количеством дефектов. С точки зрения механики расчет такой композиции аналогичен расчету конструкции со случайно распределенными параметрами. Если жесткость включения выше жесткости связующего, происходит распределение напряжений, в которых более нагруженными оказываются высокопрочные включения, а связующее лишь передает нагрузки включениям и находится в поле меньших по интенсивности напряжений. Этот пример показывает многофакторную зависимость прочности композита от параметров его компонентов. Таким образом, проектирование составов композиций включает расчет упругих полей и необратимых процессов, сложным образом взаимодействующих в структуре материала. Аналогичные явления происходят в гетерогенных системах, в которых необратимые процессы деформирования, рассматриваемые на уровне структуры материала, могут объяснить такие свойства, как приобретенная анизотропия, эффект упрочнения, зависимость от истории нагружения. Воздействия температуры и пластических деформаций изменяют структуру материала. Характер изменения структуры и гетерогенные фазовые переходы объясняют такие уникальные явления, как память форм, сверхпластичность.

Преимуществом композиционного материала является возможность достижения некоторыми параметрами значений, которые превосходят аналогичные характеристики его компонентов, например – прочность, термостойкость. Эта цель достигается также образованием гетерогенной структуры при остывании расплавов металлов, окислов, карбидов, которые образуют сосуществующие фазовые состояния. В процессе производства материалов в его структуре происходят изменения фазового состава, реакции, вызывающие изменения объема компонентов и внутренние микронапряжения, которые, в конечном счете, определяют результативность технологических приемов создания материала требуемого качества. Эти явления и свойства рассматривает механика материалов, которая использует такие понятия, как микроструктура, микронапряжения и т. д. на масштабном уровне элементов материала, для которых сохраняется гипотеза сплошности среды.

Решение задач должно опираться на теорию случайных полей, так как композиты, используемые в виде материала широкого применения, имеют случайный характер распределения компонентов. Наиболее полное изложение статистических методов содержится в работах В. В. Болотина [1-3], С. Д. Волкова [4-5], В. А. Ломакина [6-7], Л. П. Хорошуна [8-9], Т. Д. Шермергора [10].

Теория случайных полей отражает геометрию структуры материала. Свойства отдельных компонентов структуры и макроскопическое поведение материала исследуется методами теории реологически сложных сред.

Задачи, возникающие в теории композитов и гетерогенных систем, по необходимости включают различные разделы механики твердого тела и смежных областей знания. В настоящей работе рассматриваются необратимые процессы деформирования структурно-неоднородных материалов. Исследования основываются на достижениях необратимых процессов в твердых телах и методах решения краевых задач, изложенных в монографиях [11-22]. Построение моделей сред основывается на вариационных принципах, использующих понятия термодинамических потенциалов и диссипативной функции [14].

Существенно применяются положения статистической теории микронапряжений, которая развивалась в работах А. Ю. Ишлинского [23-25], Ю. И. Кадашевича, В. В. Новожилова [26-30], А. Н. Гузя [31-32].

Термодинамические аспекты исследования процессов деформирования и фазовых превращений исходят из положений работ Л. И. Седова [22], И. Пригожина [33].

Класс рассматриваемых материалов и происходящие в них процессы удовлетворяют постулатам А. А. Ильюшина, Д. С. Друккера [34].

Условия на подвижной границе фаз в гетерогенной структуре представлены соотношениями на поверхности разрыва параметров, полученными в работах Л. И. Седова [22], Т. Томаса [72].

Постановка задачи теории структурно-неоднородных материалов может быть сформулирована следующим образом. Исходными данными являются начальная геометрическая структура распределения фаз или компонентов, физико-механические свойства составляющих материала, условия на границе фаз. Отличие от детерминированной краевой задачи состоит в том, что исследуется не конкретная реализация распределения компонентов, а ансамбль структур, который должен удовлетворять статическим условиям эргодичности, однородности, если необходимо, начальной изотропности. При этих условиях материальные образования можно рассматривать как среду с новыми свойствами. Цель расчетов состоит в определении средних, измеряемых в макроэксперименте, параметров.

Анализ состояния теории структурно неоднородных тел в развитие исследований процессов деформирования и разрушения содержится в монографии Ю. В. Соколкина, А. А. Ташкинова [73].

Эффективные соотношения в корреляционной теории упругопластичности и другие аспекты рассматривались в работах Л. А. Толоконникова и соавторов [74-75].

Р. Хиллом установлены общетермодинамические соотношения пластичности микронеоднородной среды [76].

Упругопластичность и предельное равновесие композитов рассмотрены в монографии Ю. В. Немировского, В. С. Резникова [77].

Анализ современных моделей пластичности содержится в монографиях Б. Д. Аннина [80], Ю. П. Самарина [43]. Нелинейность этих соотношений является исходным усложнением при построении структурных моделей. Физические и геометрические нелинейности в структурных теориях исследовались статистическими методами в работах Б. П. Маслова, Л. П. Хорошуна [78,79]. Свойства доменных структур и связанные с ними эффекты изучались в работах В. А. Лихачева и других исследователей [60-65].

Анализ общих теоретических проблем теории композитов приводится в работе Хашина [97]. Прикладные модели структурно неоднородных материалов, основанные на богатом эмпирическом материале, представлены в работах [98-103].

Теория композитов и мезоструктур находит многочисленные приложения в различных областях материаловедения; влияние структуры существенно не только для прогнозирования

эксплуатационных свойств, но также в процессах их производства когда происходит образование структуры [107-112]. Заметим, что строгая постановка задач требует ограничений, связанных с конкретными условиями для микроструктур и макровоздействий.

В статически неоднородных материалах наиболее сложно проявляются необратимые процессы: пластичность, ползучесть, фазовые превращения, разрушения. Исследования этого направления многочисленны, поэтому в последующем ограничимся теми работами, которые попадают в класс вышесформулированных задач.

Механизмы пластических деформаций в материалах многообразны: движение дислокаций, двойникование, диффузионные перестройки на границах кристаллов, фазовые превращения с собственными деформациями, движение стенок доменов. Эти процессы взаимодействуют, образуют поля микронапряжений, вклад которых в термодинамический баланс системы существенен. Сложность процессов и макроскопические их проявления создают трудности идеализации соотношений между напряжениями и деформациями. Дислокации, границы кристаллических образований, трещины перемещаются или распространяются в условиях преодоления потенциальных барьеров микроскопических систем. Эти барьеры соответствуют состояниям на линиях дислокаций, кончике трещины, бездиффузионным перестройкам решетки на границе кристаллов. В механике твердого тела системы такого типа моделируются особыми линиями или поверхностями разрыва параметров. Можно указать параметры, характеризующие эти системы: направление и положение локального участка линейной дислокации, края трещины, поверхности разрывов – это геометрические параметры, изменение которых определяет кинематику необратимого процесса.

Предположим, что образование, развитие или движение сингулярности подчиняется некоторому термодинамическому закону, который определяет изменение параметров X , характеризующих сингулярность в упругой среде. Термодинамические соотношения ансамбля сингулярностей формулируются в виде уравнений для определения параметров X_{II} , характеризующих статистику распределения сингулярностей. Задачей статистической механики является отыскание законов изменения X_{II_0} при заданных внешних воздействиях и начальных значениях X_{II} . Если провести аналогию между ансамблем элементарных частиц и ансамблем рассматриваемых сингулярностей, может оказаться, что статистическая теория сингулярностей в континууме является более сложной. Многочисленные исследования континуальной теории дислокаций указывают на значительные трудности, встречаемые при выводе соотношений для макроскопических параметров. Это относится к исследованию ансамбля микротрещин [91], образованию и развитию включений новой фазы [89].

Исследования связи между макропараметрами и локальными статистически распределенными элементами материала представлены в многочисленных работах латвийской школы, которые отражены в монографиях [91, 92].

Термодинамические функции для отдельных сингулярностей представляют собой интегралы Г. П. Черепанова [89]. Термодинамические соотношения единичной сингулярности являются элементарными по отношению к законам термодинамики ансамбля взаимодействующих сингулярностей в упругом теле.

Законы термодинамики можно сформулировать как для отдельной сингулярности так и для ансамбля, что позволяет выявить общий вид для макропараметров.

Вектор Бергерса, энергия поверхности трещины, величина разрывов на поверхности фазового перехода – физические параметры, которые часто можно считать постоянными системы. Измерение этих параметров или их статистических характеристик в определяющих уравнениях термодинамически необратимо. Краевая задача для упругого тела, содержащего особые образования, наиболее полно рассмотрена в случае дислокаций и трещин. Поверхности разрывов в реологических задачах мало изучены, хотя термодинамика и кинематические условия достаточно полно исследованы в работах [22, 72]. Возникает следующая схема решения реологических задач, основанная на возможностях механики упругих тел. Уравнения упругости

определяют энергию напряжений, созданных дефектами тела и внешними силами. Эта энергия представляет функционал $U\{e, \chi_n\}$, где e – деформации, вызванные внешними силами и удовлетворяющие условиям совместимости (деформации, созданные дефектами, функционально определены через χ_n). Примером могут быть многочисленные решения задач упругости для тел, содержащих трещины. Скорость образования некомпенсированного тепла или необратимое изменение поверхностной энергии трещин заданы параметрами скоростей $\dot{\chi}_n$ и функционалом $D(\dot{\chi}_n)$. Работа внешних сил F_i на перемещениях δu_i в силу закона сохранения энергии равна

$$F_i \delta u_i = \delta U\{e, \chi_n\} + d\{\dot{\chi}_n\} \delta t. \quad (0.1)$$

Существование обратимого процесса $\dot{\chi}_n = 0$ приводит к уравнению

$$F_i = \left. \frac{\delta U\{e, \chi_n\}}{\delta u_i} \right|_{\chi_n = \text{const}}, \quad (0.2)$$

тогда

$$\dot{\chi}_n \left. \frac{\delta U\{e, \chi_n\}}{\delta \chi_i} \right|_{e = \text{const}} + D\{\dot{\chi}_n\} = 0.$$

Из второго закона термодинамики следует положительная определенность функционала $D\{\dot{\chi}_n\}$. Для того чтобы определить направление и скорость необратимого процесса $\dot{\chi}_n$, необходимы дополнительные гипотезы, позволяющие найти связь между термодинамическими потоками χ_n и движущими силами, –

$$Z_n = - \left. \frac{\delta U}{\delta \chi_n} \right|_{e = \text{const}}.$$

В частности, критерий Гриффитса для трещин длины l в хрупком материале формулируется как условие максимального освобождения упругой энергии [35].

$$D(\dot{l}) = - \frac{\delta U}{\delta l} \dot{l} = k \dot{l}, \quad (0.3)$$

что соответствует уравнению $Z = k$, где Z – движущая сила, определяемая как интеграл Райса-Черепанова, k – постоянная Гриффитса, равная скорости образованной энергии на единицу поверхности трещины. Если направление n развития трещины изменяется, то кривизна $dn/dl = (dn/dt)/(dl/dt)$ или угол излома трещины θ могут введены [36] в интеграл U . Минимизация скорости упругой энергии при условии (0.3) определяют критические нагрузки и направление развития трещины [36]. Термодинамическое обобщение на случай, когда характерный объем твердого тела содержит статистически однородные распределения дефектов, состоит в определении параметров χ_n , характеризующих статистику этого распределения.

Микроскопическим проявлением потенциальных барьеров являются условия пластичности, разрушения, фазового превращения, представленные границами областей в пространстве напряжений и температуры $F(\sigma, T) \leq 0$. В тех случаях, когда барьеры преодолеваются тепловыми флуктуациями, критические условия отсутствуют, напряжения определяют скорость и направление процесса ползучести. В физических теориях понятие потенциального барьера системы, заданной термодинамическими функциями, иногда однозначно определяет поведение системы. Обычно применяется следствие второго начала термодинамики о переходе системы в новое положение равновесия, термодинамически более выгодное по отношению ко всем остальным.

Пусть неизотермический процесс в элементе объема сплошной среды определен поступлением тепла Q и действием напряжений σ , тогда изменение внутренней энергии $U(e, \chi, T)$ как функции температуры T , деформаций e и параметров необратимого процесса χ_n определяется законом сохранения энергии:

$$\sigma de + dQ = dU(e, \chi, T). \quad (0.4)$$

Скорость образования некомпенсированного тепла зависит от скорости необратимого процесса $\dot{\chi} = d\chi/dt$, тогда энтропия системы S связана зависимостью, которая определяет $D \geq 0$ вторым законом термодинамики

$$T \frac{dS}{dt} = \frac{dQ}{dt} + D. \quad (0.5)$$

Таким образом

$$-ed\sigma - SdT = d(U - ST) + Ddt.$$

Величина $F = ST - U$ с обратным знаком известна как термодинамический потенциал Гиббса. Из условия обратимости процессе при $\dot{\chi} = 0$ следует

$$e = \frac{\partial F}{\partial \sigma}, \quad S = \frac{\partial F}{\partial T}, \quad (0.6)$$

тогда получим

$$\left(\frac{dF}{dt} \right)_{\sigma, T=const} = D, \quad (0.7)$$

$$T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right) = \frac{dQ}{dt} + D. \quad (0.8)$$

Необходимые состояния системы зависят от истории механических нагрузок и тепловых воздействий. Система термодинамических уравнений будет замкнутой, если состояние системы определяет скорость параметров необратимого процесса. Такого вида уравнения следуют из дополнительных гипотез относительно термодинамической системы. В частности, критерий Гриффитса определяет максимальную скорость освобождения упругой энергии. Принцип максимума диссипации определяет экстремальное значение D на множестве $\dot{\chi}$. Принимая условие экстремальности правой и левой части уравнения (0.7), получим систему уравнений для определения необратимого процесса $\dot{\chi}$, причем необходимо учитывать условность экстремума, следующая из необходимости выполнения неравенства (0.7). Например, для дифференцируемых функций F , D следует

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \lambda \frac{\partial D}{\partial \dot{\chi}}, \quad (0.9)$$

где λ – множитель Лагранжа, который определяется из условия (0.7)

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} \dot{\chi} = \lambda \frac{\partial D}{\partial \dot{\chi}} \dot{\chi} = D. \quad (0.10)$$

В случае, когда D является однородной функцией от $\dot{\chi}$, следует критерий необратимости процесса в пространстве Z , определенном переменными $Z = \partial F / \partial \chi$. Так как F является функцией напряжений и известен χ как результат истории процесса, то условие в пространстве одновременно является условием в напряжениях.

Порядок системы уравнений (0.9) соответствует количеству параметров χ_n . Такие модели сред, как теория скольжения или вязкоупругие среды с непрерывным спектром запаздывания соответствуют бесконечным множествам χ и системе (0.9).

Обобщение на среды, в которых происходит развитие микротрещин, можно осуществить, используя прием теории скольжения. Пусть условие устойчивости трещин определенной ориентации задано гиперплоскостями в пространстве напряжений $m_{ij} \sigma_{ij} = A(\chi_n)$. Тогда условие разрушения материала можно представить как огибающую плоскостей. Неустойчивость развития трещин состоит в том, что если возникли условия, благоприятствующие продвижению

трещин определенной ориентации, то увеличение их размеров ослабит критические условия, т. е. плоскость $m_{ij}\sigma_{ij} = A(\chi_n)$ продвинется внутрь условия разрушения в пространстве напряжений. Поверхность предельного равновесия изменится таким образом, что в окрестности точки нагружения σ_{ij} образуется плоский участок. Так как полная деформация определяется из уравнения (0.6), то эмпирическая зависимость падения напряжения при разрушении [58] может быть использована как закон движения плоскопараллельного участка предельной поверхности.

Необходимым и достаточным условием единственности [59] решения краевых задач является неравенство, следующее из постулата устойчивости Драккера [34]. Неустойчивость разрушения в общем случае приводит к неединственности полей напряжений, деформаций. Рассматриваемая феноменологическая модель процессов по условию однозначно определяет $\dot{\chi}_n$, если, конечно, задано состояние σ, χ_n, T . Тогда использование таких методов решения краевых задач, как шаговой по времени t или метод последовательных приближений, который, начиная с упругого решения, в силу однозначности определения $\dot{\chi}_n$ должен привести к единственности решения. Противоречие возникает при определении краевых условий, которые управляют процессом. Например, приращения внешних нагрузок в условиях падения напряжений при разрушении твердого тела изменяются в зависимости от кинематики поверхности, где они приложены. Если граничные условия заданы кинематически, то это противоречие не возникает. Действительно, упругое решение первого приближения задает траекторию напряжений $\sigma(t)$ в каждой точке тела, когда последующие приближения определяются значениями χ , единственность которых должна следовать из термодинамических уравнений.

В теории композитов задание граничных условий эквивалентно определению траектории средних деформаций $\langle e \rangle$. Решение упругой задачи при заданных χ_n укладывается в известные схемы теории упругих композитов. Эта часть решения задачи представляет значительные трудности. Несколько проще вычисления, связанные с определением параметров и статических характеристик необратимого процесса (0.9), (0.10).

Квазитермодинамический характер некоторых принципов [34] состоит в том, что если они выполняются для элементарного объема, то из общих уравнений механики деформируемого тела следует их справедливость для всего тела в целом. Примером может служить постулат Друккера [34]. Таким образом, если составляющие композит материалы удовлетворяют соотношениям, следующим из квазитермодинамического принципа, необходимо определить скрытые параметры χ_n и термодинамические функции U, D , а определяющие уравнения следуют из тех же уравнений (0.4) - (0.10). Этим путем получают сложные реологические модели композитов, составляющие которых удовлетворяют более простым реологическим соотношениям.

Теория пластичности использует следствия термодинамики [22], общие свойства физических микропроцессов [26], постулаты, классифицирующие материалы [34], частные феноменологические модели, описывающие законы упрочнения и влияние параметров истории нагружения [14]. К теориям, учитывающим структуру материала и ее статический характер, следует отнести теорию скольжения [21] и микронапряжений [30]. По существу это единая теория, рассматривающая две стороны процесса: механизмы образования пластических микродеформаций и влияние микронапряжений, созданных несовместимостью деформаций неоднородностью структуры материала. С этих позиций теория находит обобщения [30] на процессы ползучести и микроразрушений. Задача теории состоит в том, чтобы количественно связать данные о структуре материала и соотношения для макроскопических параметров. Если идеализировать и обобщить такие свойства, как упругость, пластичность, вязкость, разрушение, полагая их свойствами однородного элемента структуры, описываемого простыми уравнениями, то многообразие неоднородных структур приводит к качественно новым соотношениям для макросреды, которые трудно идеализировать, также как реальные материалы.

Исследования структуры материалов являются традиционными для технологов, более того, стремление получить определенную структуру часто является целью и критерием качества

материала. Это объясняется устойчивой связью между физическими свойствами материала и его структуры. Проникновение математических методов в эту область материаловедения определено развитием теории случайных полей [37] и статистических экспериментов.

Задачи теплопроводности, упругости, вязкости многофазных твердых материалов имеют решения в виде разложений по многоточечным моментам [1-7]. Однако применение этих решений ограничено трудностью определения многоточечных моментов, задающих случайное поле параметров, которые являются исходными для теоретического исследования. Из имеющихся количественных методов статистического эксперимента [38-39] наиболее перспективным становится оптико-структурный анализ, основанный на запоминании сигнала, полученного на выходе датчика оптической плотности при сканировании структуры. Последующий автоматизированный ввод записи сигнала в ЭВМ предоставил бы возможность использовать любые алгоритмы вычисления параметров структуры.

Для обоснования экспериментального метода определения многоточечных моментов рассмотрим статистически однородные случайные поля Λ в пространстве декартовых координат x_i . Многоточечные моменты определяются в результате осреднения

$$\langle \Lambda(x) \Lambda(x') \Lambda(x'') \dots \rangle = M(x' - x, x'' - x, \dots). \quad (0.11)$$

Для композитной среды задание случайного поля определяющих параметров представляется в виде независимых характеристик, относящихся к физическим свойствам каждой фазы в отдельности, и геометрией распределения фаз в пространстве. Пусть Λ_i – некоторый физический параметр, соответствующий i -й фазе, например, тензор упругих модулей, плотность, диэлектрическая проницаемость и т. п.

Геометрия фазы задается функцией α_i , принимающей значение 1 в области пространства, занимаемого O_i -й фазой, и значение 0 в остальной области. Случайное поле параметра Λ для $(N + 1)$ -фазной среды можно представить в виде

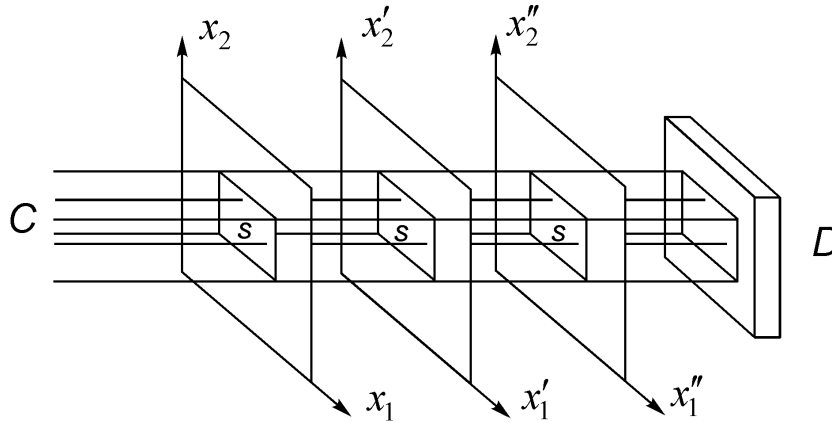
$$\Lambda = \Lambda_0 + \sum_{i=1}^N (\Lambda_i - \Lambda_0) \alpha_i(x); \quad \alpha_i, \alpha_j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (0.12)$$

Подставка выражения (0.12) в соотношение (0.11) показывает, что многоточечные моменты поля выражаются линейной комбинацией смешанных многоточечных моментов геометрических структур α_i . Таким образом, исследование геометрической структуры можно выделить независимо от определения физических параметров. Возможность полного задания случайной структуры в виде детерминированных характеристик содержится в условиях существования характеристического функционала [37]:

$$\Phi\{\theta\} = \left\langle \exp \sum_{j=1}^N \int \alpha_j(x) \theta_j(x) dx \right\rangle. \quad (0.13)$$

Разложение функционала (0.13) в ряд по функционалам n_i -го порядка задано точечными моментами. В этом смысле задание точечных моментов можно принять как обозримое представление многообразия случайных структур. Знание n - точечных моментов является наиболее полным и объективным критерием распознавания структуры. Универсальность представления случайной структуры в виде (0.13) или n - точечными моментами состоит в том, что любые статистические характеристики можно выразить через параметры n - точечных моментов.

Пусть изображение структуры какой-либо фазы представлено на черно-прозрачной фотопластине, причем значению $\alpha(x_1, x_2) = 1$ соответствуют прозрачные области изображения. На фиг. 0-1 показана схема установки для исследования плоских фигур. Параллельный луч света C с площадью сечения проходит через фотопластины I, II, III, которые имеют идентичные изображения структуры. Световой поток, регистрируемый фотометром, пропорционален



Фиг. 0-1

площади прозрачной области на пластинах. При полном совмещении изображений структуры на пластинах I-III неоднородное по площади поглощение света происходит только на пластине I. В этом случае площадь прозрачной области, отнесенная к площади S , совпадает с отношением световых потоков для черно-прозрачных и прозрачных пластин, причем отношение равно концентрации прозрачных областей.

Пусть пластина I закреплена, пластины II, III смещаются в направлениях (x'_1, x'_2) и (x''_1, x''_2) . В этом случае прозрачная для всех пластин область соответствует области, для которой выполняется равенство

$$\varepsilon(x_1, x_2) \varepsilon(x'_1, x'_2) \varepsilon(x''_1, x''_2) = 1.$$

Площадь этой области равна

$$S_M = \int \varepsilon(x_1, x_2) \varepsilon(x'_1, x'_2) \varepsilon(x''_1, x''_2) dx_1 dx_2.$$

Предполагая эргодичность однородной структуры, математическое ожидание можно вычислить осреднением по площади.

Для трехточечного момента получается

$$M_3(x'_1 - x_1, x'_2 - x_2, x''_1 - x_1, x''_2 - x_2) = S_M S^{-1}.$$

Отношение $S_M S^{-1}$, регистрируемое фотометром как отношение световых потоков при различных комбинациях сдвигов пластин, измеряет функцию четырех переменных. Для пространственной изотропной структуры момент M_3 определяется взаимным расположением трех точек. Поэтому исследование одного плоского шлифа на трех фотопластинах достаточно для измерения M_3 как функции трех переменных, характеризующих взаимное расположение трех точек любой плоскости пространства. При измерении четырех точечных моментов используются четыре фотопластины, причем не только с идентичными изображениями, но и фотографии срезов по плоскостям $x_3 = const$ на различных расстояниях, которые малы по сравнению с характерными размерами неоднородностей структуры. Для измерения моментов n -го порядка не требуется новых срезов. В зависимости от координат точек, в которых производится измерение, составляется для просвечивания пакет из пластин. При исследовании смешанных моментов N -фазной среды просвечиваются фотографии одного шлифа с поглощающими областями $\varepsilon_i, \varepsilon_j$, которые можно получить, используя специальные способы



Фиг.0-2

травления, позволяющие из совокупности N – фаз выделять для фотографирования отдельные фазы. Аналогия между световым потоком и осреднением по площади, между поглощением света при сдвиге фотопластин и произведением функций в различных точках позволяет экспериментально исследовать более общие структуры, чем указанные выше.

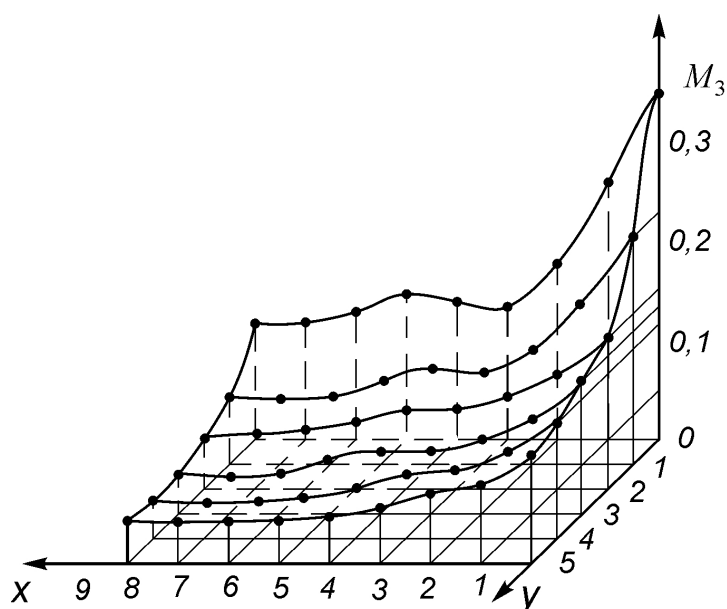
Экспериментально исследовалась структура, размеры фотоизображения которой (фиг. 0-2) и сечение луча равны соответственно 81 x 111 мм и 45 x 46 мм. Шаг при сдвиге фотопластин равен 0,5 мм. Использовался полупроводниковый фотоэлемент типа ф-107 [38] и потенциометр Р-307. Результаты измерения трехточечного момента как функции $M_3(x, y)$, где $x = x'_1 - x_1$, $x = x'_2 - x_2$, показаны на фиг. 0-3.

Исследование рассматриваемой структуры распределения мартенсита в стали Х12М [38] производилось численными методами. После нанесения квадратной сетки значения функции I вводились в ЭВМ. На фиг. 0-4 результаты вычислений нормированной двухточечной корреляционной функции сравниваются с полученными экспериментальными данными, значения которых отмечены крестиками. Цена деления по осям x, y на фиг. 0-3, 0-4 составляет $5 \cdot 10^{-3}$ мм и равна среднему диаметру мартенситной иглы.

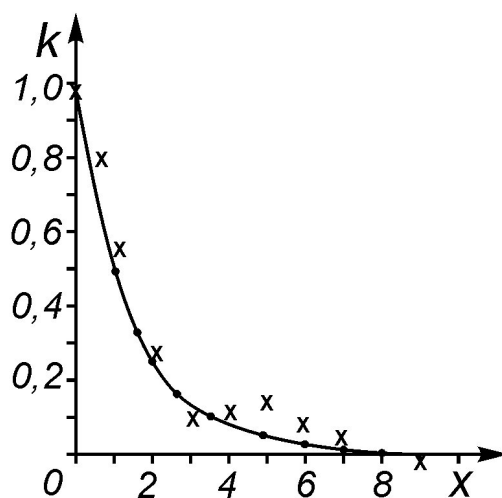
Рассматриваемая структура имеет незначительную анизотропию, которая выявляется из несимметричности. В эксперименте наблюдалась крупномасштабная неоднородность, поэтому результаты измерений осреднялись по значениям, получаемым при параллельном сдвиге источника света (см. фиг. 0-1). Порядок отклонения составлял 2-5 %.

Этот эксперимент, поставленный совместно с Н. Н. Лысачем и С. И. Мешковым [127], приведен с целью показать, что из известных наиболее простая техника экспериментирования приводит к большой и трудно перерабатываемой информации, что варьировать исходным экспериментальным материалом (структурой) сложно.

Макроскопические свойства материала в сильной степени зависят от его геометрической структуры, то есть существенным оказывается не только состав материала и свойства его компонентов, но геометрия их распределения в пространстве. Например, смесь разнородных



Фиг. 0-3



Фиг. 0-4

порошков после спекания превращается в плотную структуру, в которой одна из составляющих образует матрицу (связывающее). Если связывающим может стать другая компонента, то свойства композита изменяются. Границы параметров, например, моделей упругости для одинаковых составов образуют значительный интервал, каждая точка которого соответствует одной из множества геометрических структур [4]. Расчет влияния геометрии случайной структуры представляет собой самую сложную задачу теории композитов и гетерогенных систем. Многие задачи физики твердого тела, космогонии, биологических тканей, возможно, микроструктуры пространства создают проблемы, связанные с развитием геометрии случайных структур. Такие понятия, как дальний порядок представления теории протекания, образование структур неустойчивыми процессами, теория распознавания образов и др., фрагментарно описывают даже тот класс задач, который они рассматривают. Возможно, что одно

из этих направлений со временем образует общий метод исследования или произойдет слияние представлений и методов. В механике сплошных сред для описания случайных полей используется представление о характеристическом функционале [37]. Однако идентификация и способ его вычисления для конкретных реальных структур остается сложной задачей, которая, возможно, является наиболее общей в своей постановке. Разложение функционала по многоточечным моментам, их экспериментальное определение имеет смысл в расчетах композитов, если моменты и управляемые технологом параметры (концентрация компонентов, форма включения) связаны определенной зависимостью. Эта зависимость изучалась для некоторых структур [42] и трехточечных моментов, что позволило сузить расчетные границы упругих модулей. Эти методы ограничены как в своей основе, так и в применении к системам “матрица-включения”, а также используют лишь линейные уравнения, определяющие свойства композитов [42]. Переход к исследованию пластических свойств композитов влечет за собой трудности, которые не преодолены в теории линейных материалов.

В настоящей работе используется вариационный метод, который имеет аналогию в теории упругих систем “матрица-включения” [88]. Р. Хиллом показано, что этот метод и оценки, полученные на его основании, следуют из классических вариационных принципов теории упругости. В работах [43, 88] указывается на достижимость оценок, что подтверждается экспериментальными данными и приближениями с периодическими распределениями включений [10].

В главе 1 рассматривается обобщение вариационного метода, основная черта которого состоит в его термодинамическом содержании. Последнее существенно для необратимых сред, когда заранее не известен вид определяющих соотношений композита и, следовательно, не известно, какие параметры необходимо вычислить. Термодинамическая формулировка вариационных принципов, которые получены в теории пластичности [59], позволяют использовать их для выявления определяющих уравнений между макропараметрами композита.

Другая черта метода состоит в приближенности описания геометрической структуры материала, а именно используется ограниченное число параметров: форма, ориентация включений, их концентрация в объеме материала. Такое определение геометрической структуры не является полным, однако, это те параметры, которые используются в технологии материалов. В остальном неопределенность статистики распределения включения часто связана с неуправляемостью при проектировании технологического процесса, хотя в некоторых случаях предварительное напыление включений материалом матрицы с целью избежать слипаемости включений оказывает существенное влияние на структуру и макросвойства композита.

В главе 2 исследуется жесткопластический композиционный материал, составляющие которого удовлетворяют условию течения Мизеса. В случае сферических включений (§ 2) выявляются два варианта пластического деформирования композита, когда напряжения включений достигают предела пластичности или включения остаются жесткими. Вычислены напряжения в жестких включениях, которые оказываются большими по сравнению со средними напряжениями матрицы. Приведено сравнение расчетных и экспериментальных данных.

Рассматривается материал с ориентированными пластическими включениями (§ 3), примером которого служит композит промышленного значения [113]. Данные о свойствах различных марок удовлетворительно отражают полученные закономерности. Получен закон “квадратного корня” для зависимости предела пластичности от концентрации включений, который эмпирически установлен А. Келли [56]. В этой работе [56] альтернативно приводится линейная зависимость, которая также наблюдается экспериментально. В § 3 показано, что эти случаи соответствуют пластическому или жесткому состоянию включений. Получено условие оптимального использования волокон в композите, при котором критическое состояние включений наступает одновременно с пластическим течением матрицы. В § 4 рассматриваются процессы деформирования, сопровождающиеся развитием микротрещин.

На основании экспериментальных данных по плотным бетонам формулируется модель неустойчивого процесса с необратимым изменением модулей упругости материала, ослабленного микротрещинами. Условие деформативности используется для обоснования теории предельного равновесия в расчетах композиций из хрупких материалов. Методы теории композитов распространяются на материалы с различными пределами прочности при растяжении и сжатии. Приведено сравнение расчетных и эмпирических данных для ячеистых бетонов, керамзитобетонов и плотных композиций.

В главе 2 используются некоторые задачи технологии электроплавленных огнеупоров, которые имеют аналогию с процессами твердения, усадки и ползучести бетонов, со свойствами остывшей нефти с высоким содержанием парафина. Общими являются образование микронапряжений при различных изменениях объемных деформаций матрицы и включений (§ 1), процессы ползучести (§ 2) и перераспределения напряжений в матрице и включениях (§ 3), для которых установлены реологические соотношения и их связь с параметрами структуры. Приведены сравнения с экспериментальными данными и объясняются аномальные изменения удельных объемов и вязкости огнеупоров.

В главе 3 исследуются материалы с доменной структурой кристаллов. Рассмотрены свойства поликристаллических структур ферроупругих сплавов и деформационные зависимости в сегнетоэлектриках, между которыми существует аналогия, определенная доменными состояниями. Подзадачей является определение свойств поликристалла по известным соотношениям пластичности для отдельного кристалла. В § 1 исследуются уравнения движения границ доменов, ферроупругие свойства отдельного кристалла и его фазовые превращения. Исследуются также основные эффекты ферроупругого деформирования в условиях тепловых воздействий. Определение соотношений, связывающих макропараметры поликристалла и состояния отдельных кристаллов, замыкает систему статистических уравнений, которые рассмотрены в § 2. Показано, что определяющие уравнения описывают деформационную память в процессах фазовых превращений. Изучены формы петель гистерезиса при различных температурах. Полученные закономерности применяются к исследованию сегнетоэлектриков, которые являются не только двигателями, но позволяют запоминать и воспроизводить траекторию деформаций при работе манипулятора.

Практическая значимость. Создана теоретическая основа для моделирования и расчета влияния параметров мезоструктуры материала, таких как: инородные включения, поликристалличность, когерентные фазовые образования. Теоретические разработки использовались в исследованиях необратимых деформаций сегнетоэлектриков для расчета управления двигателей, применяемых заводом электронных микроскопов /Сумы, 1980/. Для института электроплавленного стекла /Москва/ следующие исследования выполнены предлагаемыми в работе методами: “Оптимизация режимов отжига плавленных огнеупоров” /1981 г. № гос. регистр. 81.041891/, “Расчет оптимизации прочностных характеристик оборотного огнеприпаса” /1982 г. № 0182.8049940/, “Микронапряжения при фазовом переходе двуокиси циркония в бадделейтокорундовых огнеупорах” /1983 г. № 0183.0021524/.

Достоверность установленных в работе результатов следует из корректности поставленных задач, применения строгого аналитического аппарата исследования. Полученные в работе общие положения в частных случаях приводят к известным ранее результатам. Анализ имеющихся в литературе экспериментальных данных согласуется с теоретическими результатами, приведенными в данной работе.

Апробация работы. Результаты исследования докладывались на научных семинарах по механике Воронежского госуниверситета, Воронежского технологического института, Московского горного института, Самарского политехнического института, на Всесоюзной школе по механике твердого деформируемого тела /Куйбышевский университет, 1978/, на III Всесоюзном симпозиуме “Теория механической переработки полимерных материалов” (Пермь, 1985), научно-технической конференции “Применение композитных материалов на полимерной и металлической матрицах” (Пермь, 1985).

Цель работы. Разработка теории моделирования пластических свойств материалов на основе параметров мезоструктуры.

Научная новизна. Впервые решен ряд задач о моделировании пластических свойств материалов сложной структуры с фазовыми превращениями. Получена связь между функциональными и вариационными приближениями, что дало возможность применить теорию композитов в условиях неполной информации о структуре материала. Получено обоснование правила Келли о связи линейного закона и закона “квадратного корня” в материалах армированных нитеобразными включениями, а также связи, определенной выбором оптимальной длины нитей. Предложена расчетная модель структур с различными пределами прочности на растяжение и сжатие, основанная на теории предельного равновесия. Рассчитан уровень микронапряжений в процессе фазового превращения. Получена реологическая модель и связь с параметрами структуры, образованной вязкими, упругими, пластическими элементами. На основе представлений о когерентных превращениях в кристаллах получены характерные феноменологические проявления пластических свойств: возврат пластических деформаций, сверхпластичность. Показана аналогия, и построена модель ферроупругих и сегнетоэлектрических материалов в условиях пластического деформирования.

Основной вывод работы указывает на широкие возможности применения современной теории композитов для исследований и моделирования материалов с уникальными свойствами.

Глава 1. ГЕОМЕТРИЯ СТРУКТУРЫ И ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ

§ 1. Анализ некоторых статистических гипотез теории композитов

Вариационные принципы механики твердого тела позволяют сформулировать краевую задачу в виде условия минимальности положительно определенного функционала $\Phi \{v\}$ на множестве кинематически возможных перемещений или скоростей v . Методы приближений сводятся к отысканию $\min \Phi \{v\}$ на подмножестве функций v^* . Чем шире подмножество, тем сложнее решение. Точное решение возможно тогда, когда минимизирующая функция v^0 попадает в это подмножество. В случае детерминированной краевой задачи часто используются экспериментальные данные или интуитивные соображения о возможных классах полей v^* , заданных свободой выбора ее некоторых параметров или функций. В результате число степеней свободы функционала $\Phi \{v^*\}$ уменьшится, одновременно уменьшается число параметров, задающих систему. Например, в теории изгиба гипотеза Кирхгоффа позволяет определить систему моментов инерции сечений, в остальном форма сечений произвольна. Эта связь существенна для статистически неоднородных тел, так как задание структуры материала требует практической необозримой информации [1, 2], из которой трудно выделить необходимые параметры. Эффективные постоянные композита можно представить в виде рядов интегралов по многоточечным моментам. Эмпирическое определение многоточечных моментов трудоемко, но необходимыми являются лишь интегральные параметры. Технологам при выборе структуры материала использовать эту информацию сложно, а варьировать ею не удастся. Представляется целесообразным выбор такого подмножества v^* , которое ограничивает информацию о структуре материала, нет необходимости включать те параметры, для которых экспериментально установлена значимость влияния. Универсальных рецептов такого выбора нет, — это ясно из опыта решения детерминированных задач [3]. В теории композитов ограничения, выделяющие подмножество v^* , могут иметь статистический характер и одновременно, как следствие, ограничивать классы геометрических структур материала. Такие подмножества выделяются гипотезами с сильной изотропией о состояниях, форме и ориентации включений [4-9].

Пусть Φ_1 положительно определенный функционал, представляющий оценку $\Phi \{v\} \leq \Phi_1 \{v\}$ и $\Phi_1^* \{v\} \leq \Phi \{v^*\}$ на подмножестве v^* , которое, в этом случае, будем называть опорным. Действительное решение v^0 удовлетворяет условию $\Phi \{v^0\} = \min \Phi \{v\}$. Аргументы в скобках обозначают элементы множеств, из которых отыскивается минимум. Сведем определения: функциональное приближение v^{0*} соответствует $\Phi \{v^{0*}\} = \min \Phi \{v^*\}$; оценочное (вариационное) приближение v^{01} будет удовлетворять условию $\Phi_1 \{v^{01}\} = \min \Phi_1 \{v\}$. Степень близости решений v^1, v^2 к действительному v^0 естественно определить неравенством $\Phi \{v^0\} \leq \Phi \{v^1\} \leq \Phi \{v^2\}$ [3]. Из сделанных определений не трудно получить неравенства

$$\begin{aligned} \min \Phi \{v\} &\leq \min \Phi_1 \{v\} \leq \min \Phi_1 \{v^*\}, \\ \Phi \{v^0\} &\leq \Phi \{v^{01}\} \leq \Phi \{v^{0*}\}. \end{aligned} \quad (2.0)$$

Таким образом, оценочное приближение v^{01} по значению минимума и по близости к действительному решению не менее точно, чем функциональное приближение v^{0*} .

Для упругих систем “матрица-включения” предположения теории самосогласования об однородности состояния включения выделяют подмножество v^* ; вариационными приближениями служат оценки Машина–Штрикмана [7]. Практически важным результатом является достижимость оценок, так как экспериментальное подтверждение этого результата позволяет идентифицировать структуры, для которых упомянутые решения являются точными [11].

§ 2. Двухфазный композиционный материал

Двухфазный композиционный материал состоит из физически нелинейных компонент, связанных между собой условием непрерывности перемещений. Соотношения напряжения – деформации определены потенциалом $\sigma = \partial D / \partial \varepsilon$. Аналогичным образом можно использовать диссипативную функцию скоростей деформаций ε , для которой уравнения Коши совпадают с формулой малых деформаций $\varepsilon_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$. Пусть в некоторой области V_B характерного объема V свойства фазы заданы потенциалом $D_1(\varepsilon)$, а в остальном объеме – $D(\varepsilon)$. Вариационную задачу определения свойств композита можно сформулировать как условие экстремальности функционала из множества статистически однородных полей ε для фиксированных средних $\langle \varepsilon \rangle$

$$\delta \left\{ \frac{1}{V} \int_V (D + \varkappa R) dV \right\} = 0, \quad R = D_1 - D, \quad (2.1)$$

где индикаторная функция \varkappa равна 1 в области V_B и 0 в остальном объеме.

Разобьем V_B на составляющие V_n с индикаторными функциями \varkappa_n . Осреднение по областям V_n обозначим $\langle \cdot \rangle_n$. Предполагая выполнение условий эргодичности совокупности V_n , образуем приближение функционала (2.1), для этого деформации объемов V_n заменим средними $\langle \varepsilon \rangle_n$:

$$\delta \left\{ \frac{1}{V} \int_V D(\varepsilon) dV + \sum_n c_n R(\langle \varepsilon \rangle_n) \right\} = 0; \quad (2.2)$$

здесь $c_n = \langle \varkappa \rangle_n$ – объемные концентрации.

Аналогичным образом можно получить приближения для задачи в напряжениях с потенциалом $\varepsilon = \partial \Psi / \partial \sigma$ и функционалом на множестве статистически допустимых напряжений $\sigma_{ij,j} = 0$, $\langle \sigma_{ij} \rangle$ – фиксировано.

Приближения в задачах для деформаций или напряжений

$$D^* = \min \left\{ \langle D(\varepsilon) \rangle + \sum_n c_n R(\langle \varepsilon \rangle_n) \right\}, \quad (2.3)$$

$$\Psi^* = \min \left\{ \langle \Psi(\sigma) \rangle + \sum_n c_n Q(\langle \sigma \rangle_n) \right\}, \quad (2.4)$$

$$Q = \Psi_1 - \Psi$$

являются оценками сверху в тех случаях, если при любых ε, σ из множества эргодических полей выполнено

$$\langle R(\varepsilon) \rangle \geq R(\langle \varepsilon \rangle_n) \quad \text{или} \quad \langle Q(\sigma) \rangle \geq Q(\langle \sigma \rangle_n). \quad (2.5)$$

Для составляющих композита различающихся по механическим свойства условия (2.5) обычно альтернативны. Тогда к одному из оценочных приближений (2.3), (2.4) применимы утверждения (2.0), если опорными подмножествами ε^* или σ^* будут поля, удовлетворяющие условиям однородности состояний в области V_n . Особенности выбора V_n состоят в том, что вне областей V_n варьирование произвольно, поэтому кинематические ограничения, связанные с однородностью состояний, слишком жесткие для таких областей, как матрица и связанный скелет. Так как любое кинематическое ограничение может только увеличить минимальное значение положительно определенного функционала, то налагаемые связи в областях V_n в меньшей степени скажутся в случае неразветвленных включений. Однако, для заданных статистических параметров областей \varkappa_n (учитывающих, например, форму включений V_n)

остается неопределенность в выборе других характеристик. В условиях этой неопределенности минимизируются приближения (2.3), (2.4), что не противоречит существованию минимумов функционалов, хотя варьируемые поля v неявно связаны со структурой материала. В этих условиях ограничение на статику ε_n одновременно является ограничением на вариации кинематически возможных полей. Эта связь существенна для следующих представлений. Задание геометрической структуры в первую очередь определяется связностью множеств, для распознавания которой не существует алгоритмов, вычисляющих степень связности [10]. В частности, функции распределений на конечном числе произвольно заданных точек (масок 10) не способны различать структуру матрицы от структуры включений. В тоже время физический параметр, например коэффициент фильтрации, может быть выбран в качестве характеристики связности пор. В этом смысле получаемые оценки (2.0), если они достижимы, сами могут служить параметрами, характеризующими оптимальную связность. В теории упругих композитов достижимость оценок [11, 12], которые можно свести к функционалам (2.3), (2.4), хорошо подтверждается экспериментально [7, 11, 12].

В тех случаях, когда вне областей V_n материал подчиняется линейным соотношениям, условия минимальности функционалов (2.3), (2.4) представляют линейные уравнения относительно флуктуаций. Нелинейность заключения – в коэффициентах уравнений, которые являются функционалами [9]. Надеясь ε_n определенными статистическими свойствами, вычисляются D^* , Ψ^* как функции от $\langle \varepsilon \rangle, \langle \sigma \rangle$. Минимальные значения функций, $D^* - \langle \varepsilon \rangle \langle \sigma \rangle$ при заданных $\langle \sigma \rangle$ или $\Psi - \langle \sigma \rangle \langle \varepsilon \rangle$ для фиксированных $\langle \varepsilon \rangle$ вследствие вариационных принципов дают соотношения $\langle \sigma \rangle = \partial D^* / \partial \langle \varepsilon \rangle$, $\langle \varepsilon \rangle = \partial \Psi^* / \partial \langle \sigma \rangle$.

В общем случае нелинейных соотношений рассмотрим приближения или оценки в области второй фазы $V_0 = V - V_B$, которая позволяет линеаризировать уравнения для флуктуаций. Воспользуемся приближениями $\langle D(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}) \rangle_0 \approx D(\langle \varepsilon_{ij} \rangle_n \langle \varepsilon_{ij} \rangle_n)$, которые превращаются в точные соотношения на опорном подмножестве, удовлетворяющем уравнению $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = const$ почти всюду в области V_0 . Изучим опорное подмножество v^* . В случае несжимаемого материала к уравнениям относительно скоростей v_i^* , которыми являются соотношения $\varepsilon_{ij}^*\varepsilon_{ij}^* = const$, присоединяется $v_{i,i}^* = 0$, таким образом степени свободы вариаций в матрице соответствуют одной произвольной функции. Кинематически возможные поля и условие выполнения почти всюду $\varepsilon_{ij}^*\varepsilon_{ij}^* = const$ не исключают существование поверхностей разрыва производных от непрерывных функций v_i^* , тогда варьируемые поля определены множеством кусочно-дифференцируемых функций, на которые распространяются теоремы об условиях экстремальности. Ограничение $\varepsilon_{ij}^*\varepsilon_{ij}^* = const$ непосредственно в решении задачи не применяется, оно используется при доказательстве существования оценок функционалов, и является достаточным.

Для степенных зависимостей из неравенств Гёльдера следует

$$\begin{aligned}
 \langle (\sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}})^\alpha \rangle_n &\geq (\sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \rangle_n \langle \varepsilon_{ij} \rangle_n})^\alpha, \\
 \langle (\sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}})^\alpha \rangle_0 &\leq (\sqrt{\langle \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \rangle_0})^\alpha, \quad \alpha \geq 1.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Получим также

$$\begin{aligned}
 \langle \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \rangle_0 &= (1 - c)^{-1} \left[\langle \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \rangle - \sum_n c_n \langle \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \rangle_n \right] \leq \\
 &\leq (1 - c)^{-1} \left[\langle \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \rangle - \sum_n c_n \langle \varepsilon_{ij} \rangle_n \langle \varepsilon_{ij} \rangle_n \right],
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

где оценка и приближение на включениях V для однородных состояний переходят в равенства.

Применительно к однородным, в смысле Эйлера, потенциалам D, D_1, Ψ, Ψ_1 воспользуемся приближениями (2.6), (2.7)

$$D^* = \min \left\{ (1-c)^{-1} D \left(\left(\langle \varepsilon \varepsilon \rangle - \sum_n c_n \langle \varepsilon \rangle_n \langle \varepsilon \rangle_n \right) / (1-c) \right) + \sum_n c_n D_1 (\langle \varepsilon \rangle_n) \right\}, \quad (2.8)$$

$$\Psi^* = \min \left\{ (1-c)^{-1} \Psi \left(\left(\langle s s \rangle - \sum_n c_n \langle s \rangle_n \langle s \rangle_n \right) / (1-c) \right) + \sum_n c_n \Psi_1 (\langle s \rangle_n) \right\}, \quad (2.9)$$

здесь в задаче для напряжений используется девиатор s $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ll} \delta_{ij} / 3$; составляющие композита предполагаются несжимаемыми $\varepsilon_{ii} = 0$.

На основании неравенства (2.6), (2.7) не всегда удается показать оценочность приближений (2.8), (2.9). Учитывая, что приближения (2.8), (2.9) относятся к одинаковым геометрическим структурам, результаты можно контролировать сравнением решений задач в напряжениях и деформациях. Если оба результата совпадают, то из условия альтернативности оценок следует применимость утверждения (2.0). Заметим, что для линейных материалов результаты приближений (2.8), (2.9) всегда совпадают, причем оценка приближения (2.3) следует без ограничения $\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = \text{const}$ в области V_0 . Это ограничение не используется при вычислении функционалов (2.8), (2.9), но существование оценки в случае ее достижимости позволяет утверждать, что получено точное решение для структур с некоторыми параметрами, характеризующими ε_n . Статистика распределения включений многообразна, и данные, например, о форме и ориентации включений не устраняют неопределенности при вычислении эффективных постоянных. Мощность множества эффективных постоянных значительно меньше мощности множества структур, поэтому указанная неопределенность относится к различным структурам, имеющим одинаковые эффективные постоянные. Вычисление последних не требует полной информации о геометрической структуре.

Процессы установившейся ползучести представим степенными зависимостями, которые, как предельный случай, переходит в идеальную пластичность.

$$D = \mu (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij})^p; \quad \Psi = \mu (2p-1) (s_{ij} s_{ij} / (4\mu^2 p^2))^{\frac{p}{2p-1}}; \quad \mu = \text{const}; \quad (2.10)$$

$$\sigma_{ij} = \partial D / \partial \varepsilon_{ij}; \quad \varepsilon_{ij} = \partial \Psi / \partial \sigma_{ij}.$$

Предполагаем, что включения сферические неразличимы по механическим свойствам: $\langle \varepsilon \rangle_n = \langle \varepsilon \rangle_1$, $\sum_n c_n = c$, тогда функционалы (2.8), (2.9) преобразуются к виду

$$D^* = \min \left\{ (1-c)^{1-p} \mu (\langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle - c \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1)^p + c \mu_1 (\langle \varepsilon_{ij} \rangle_n \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1)^q \right\}, \quad (2.11)$$

$$\Psi^* = \min \left\{ (1-c)^{1-n} \nu (\langle s_{ij} s_{ij} \rangle - c \langle s_{ij} \rangle_1 \langle s_{ij} \rangle_1)^n + c \nu_1 (\langle s_{ij} \rangle_n \langle s_{ij} \rangle_1)^m \right\}, \quad (2.12)$$

здесь индексом I отмечены постоянные μ_1 , ν_1 , отнесенные к включениям; показатели m , n связаны с p , q по формулам, следующим из (2.10).

В случае задачи в напряжениях условие равновесия $\sigma_{ij,j} = 0$ выполнимо, используя множители Лагранжа λ'_i . Получим уравнения полей, минимизирующих (2.12)

$$s'_{ij} = a \langle s_{ij} \rangle_1 \varepsilon' + \lambda'_{i,j} + \lambda'_{j,i}; \quad s'_{ij,j} + \sigma'_{ll,i} = 0;$$

где штрихом отмечены флуктуации:

$$a = 1 - \nu_1 m S_1^{m-1} / \left((1-c)^{1-n} n S^{n-1} \nu \right); \quad (2.13)$$

$$S = \langle s_{ij} s_{ij} \rangle - c \langle s_{ij} \rangle_1 \langle s_{ij} \rangle_1;$$

$$S_1 = \langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle_1; \quad S_0 = \langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle.$$

В остальном вычисление минимумов функционалов (2.11), (2.12) аналогично работам [9, 13]; алгоритм вычислений однозначен и использует свойство изотропности ε . Обозначая

$$\begin{aligned}
 b &= 1 - \mu_1 q J_1^{q-1} (1-c)^{p-1} / (p \mu J^{p-1}); \\
 J &= \langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle - c \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1; \\
 J_1 &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1; \quad J_0 = \langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle,
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

получим две группы алгебраических уравнений для вычисления минимумов D^*, Ψ^* функционалов (2.11), (2.12) соответственно

$$\begin{aligned}
 D^* &= \mu (1-c)^{1-p} J^p + c \mu_1 J_1^q; \quad \sqrt{J_1} = \sqrt{J_0} / (1 - \frac{2}{5} (1-c) b); \\
 J &= (1-c) (1 - \frac{2}{5} b) J_0 / (1 - \frac{2}{5} (1-c) b);
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi^* &= \nu (1-c)^{1-n} S^n + c \nu_1 S_1^m; \quad \sqrt{S_1} = \sqrt{S_0} / (1 - \frac{3}{5} (1-c) a); \\
 S &= (1-c) (1 - \frac{3}{5} a) S_0 / (1 - \frac{3}{5} (1-c) a).
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

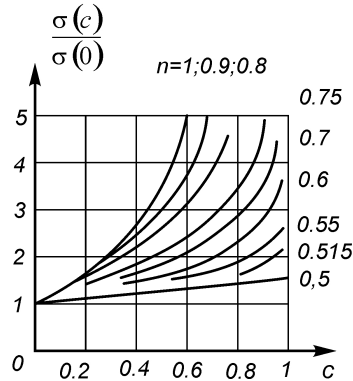
При $m \neq n$ или $p \neq q$ потенциалы D^* и Ψ^* в явном виде непредставимы; необходимо использовать численные методы. В случае пористого материала вычисления (2.15) производятся без ограничений несжимаемости $\varepsilon_{ij} \neq 0$ в области включений.

Приведем результаты вычислений для пористого материала и композита с абсолютно жесткими включениями. Для этих случаев оказывается, что задачи (2.8) в напряжениях и деформациях дают одинаковые результаты. Диссипативные функции для пористого тела D_0 и с жесткими включениями D_v в безразмерных параметрах имеют вид

$$D_0 = (1-c) \left(\frac{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}{1 + \frac{2}{3} c} + \frac{2 \varepsilon_{ll}^2}{3 c} \right)^p;
 \tag{2.17}$$

$$D_v = (1-c) \left(\frac{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}{(1-c)^2} \left(1 + \frac{2}{3} c \right) \right)^p, \quad \varepsilon_{ij} = 0.
 \tag{2.18}$$

Значение приведенного напряжения $\sigma(c)/\sigma(0)$ следует из выражения $\sigma = \partial D_v / \partial \varepsilon$ и зависит от объемной концентрации включения, как показано на фиг. 1-1. В случае $p = 1$ результат совпадает с формулой для упругого материала [7], там же приведено сравнение с экспериментом. В случае идеальнопластического пористого материала $p = 1/2$ значение D_0 получено в работе [13], сравнение с экспериментальными данными приведено в работе [14].



Фиг. 1-1

§ 3. Оптимальное использование собственной прочности волокон в композитах с пластической матрицей

Композит состоит из двух жесткопластических компонентов, свойства которых заданы диссипативной функцией, связывающей напряжения и скорости деформаций $\sigma_{ij} - (\sigma_{ll}/3) \delta_{ij} = k \partial D / \partial \varepsilon_{ij}$, $D = \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}$; k, k_1 – пределы пластичности компонентов. Величина k_1 относится к области включений V_1 характерного объема V . Вариационную задачу определения свойств композита сформулируем как условие экстремальности функционала D^* аналогично постановке задачи в параграфе 1:

$$D^* = \frac{1}{V} \int_V [k \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} + \varkappa (k_1 - k) \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}] dV,$$

где \varkappa – индикаторная функция, принимающая значение 1 в области V и 0 в остальном объеме V .

Предполагая выполнение условий эргодичности, осреднение по области V обозначим $\langle \cdot \rangle_1$; для фазы с пределом пластичности k средние отмечаются индексом 2.

Введем приближение $\langle \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} \rangle_2 \approx \sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle_2}$ и деформации включений в функционале заменим средними по включениям $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_1$. Так как $\langle \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} \rangle_2 \leq \sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle_2}$, $\sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1} \leq \langle \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} \rangle_1$, получаемые приближения одновременно являются оценками, которые в случае квадратичных функционалов переходят в оценки Хашина–Штрикмана, а рассматриваемое приближение соответствует теории самосогласования [4, 5]. Так как

$$\langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle_2 \leq (\langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle - c \langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle_1) / (1 - c),$$

где $c = V_1/V$. Функционал D^* представим в виде

$$D^* = k \sqrt{1 - c} \sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle - c \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1} + k_1 c \sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1};$$

$$\varepsilon_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2; \quad v_{i,i} = 0.$$

Варьирование по флуктуациям v'_i функционала D^* приводит к линейным уравнениям относительно v'_i , рассматриваемым как уравнения в частных производных. Нелинейность сохраняется в коэффициентах уравнений, которые представляют собой нелинейные функционалы. Решение получается в виде спектральных разложений или с использованием функций Грина.

Пусть включения обладают осевой симметрией в направлении n_i , вдоль которого можно произвести сжатие или растяжение пространства, приводящее к изотропному распределению \varkappa .

Введем обозначения

$$D^* = k \sqrt{1 - c} J + k_1 c J_1; \quad J_1 = \sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1};$$

$$J = \sqrt{J_0^2 + \langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} \rangle - c J_1};$$

$$J_0 = \sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle}.$$
(3.0)

Воспользуемся методикой параграфа 2, которая позволяет найти точное минимальное значение функционала D^* . Предполагая, что включения находятся в пластическом состоянии, получим соотношения, следующие из решения условий минимальности

$$\langle \varkappa' \varepsilon'_{ij} \rangle = (1 - c) F S_{ijkl}^{(n)} \langle \varepsilon_{kl} \rangle_1;$$

$$\langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} \rangle = F^2 c (1 - c) S_{ijkl}^{(n)} \langle \varepsilon_{kl} \rangle_1 \langle \varepsilon_{kl} \rangle_1;$$

$$F = 1 - k_1 J / (k J_1 \sqrt{1 - c});$$

$$S_{ijkl}^{(n)} = (6A + 2B) \delta_{ik} \delta_{jl} - 2B \delta_{ij} n_k n_l +$$

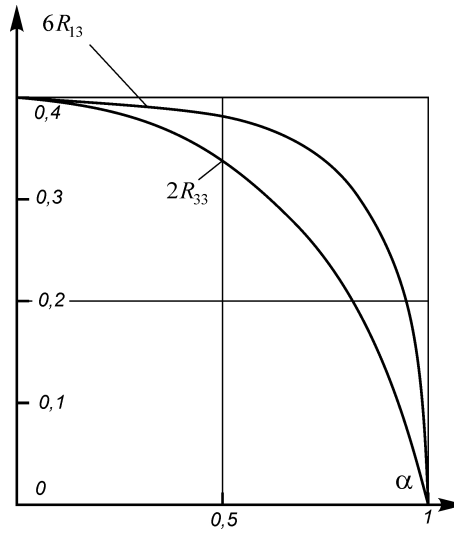
$$+ (3B + C) (n_i n_k \delta_{jl} + n_j n_k \delta_{il}) - 2C n_i n_j n_k n_l;$$
(3.1)

здесь A, B, C – скаляры, вычисляемые через главные значения тензора анизотропии при $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 1$:

$$R_{11} = 3A, \quad R_{13} = A + B, \quad R_{33} = 3A + 6B + C, \\ 8R_{11} + 12R_{13} + 3R_{33} = 3.$$

Для игольчатых включений с соотношением размеров получим значения тензорных компонент, которые показаны на фигуре 1-2.

$$R_{13} = \frac{1-\alpha^2}{4\alpha^5} \left[(3-\alpha^2) \frac{1}{2} \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - 3\alpha \right]; \quad \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}}; \\ R_{33} = \frac{1-\alpha^2}{\alpha^5} \left[(1-\alpha^2) \alpha + \frac{1}{2} (1-\alpha^2) \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right].$$



Фиг. 1-2

Для пластинчатых включений $\alpha < 1$ формулы получены в параграфе 2. Если включения не достигают пластического состояния $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 = 0$, то неопределенность, возникающая в уравнениях для напряженного состояния включений

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 = k_1 \frac{\langle \varepsilon_{ij} \rangle_1}{J_1}; \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{ij}, \quad (3.2)$$

раскрывается в формулах (3.1). Так как

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \langle \varkappa' \varepsilon'_{ij} \rangle / c,$$

из (3.1) следует

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 = k \langle \varepsilon_{kl} \rangle \left(S_{ijkl}^{(n)} \right)^{-1} / (\sqrt{1-c} J); \quad (3.3) \\ D^* = k \sqrt{1-c} J; \quad J = \langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{c}{1-c} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \left(S_{ijkl}^{(n)} \right)^{-1} \langle \varepsilon_{kl} \rangle.$$

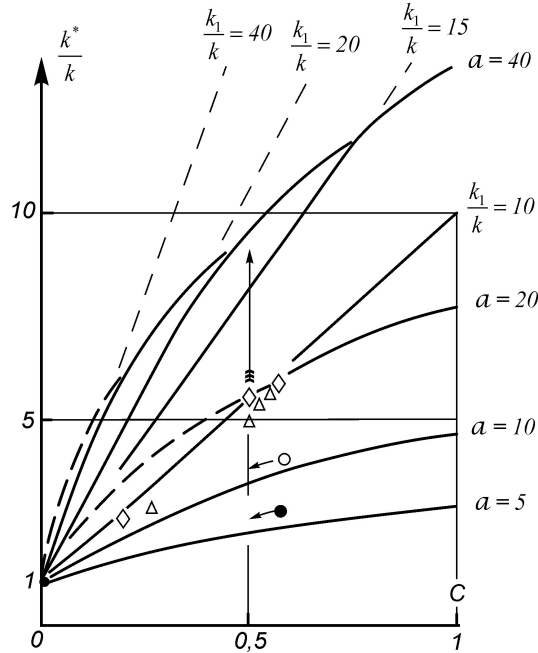
Выделим направление ориентации включений χ_3 ; индексы в последующих формулах при суммировании принимают значения (1.2). Для абсолютно жестких включений диссипативная функция (3.3)

$$\begin{aligned}
D^* &= k \left\{ (1-c) J_0^2 + 2c \left[\frac{\langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle}{1-R_{33}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \langle \varepsilon_{i3} \rangle \langle \varepsilon_{i3} \rangle / (1-R_{33} - 6R_{13}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \langle \varepsilon_{33} \rangle^2 (1/R_{13} - 1/(2-2R_{33})) \right\}^{1/2}; \\
J_0^2 &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle + 2 \langle \varepsilon_{i3} \rangle \langle \varepsilon_{i3} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle^2; \quad i, j = 1, 2
\end{aligned} \tag{3.4}$$

определяет напряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle = \partial D^* / \partial \langle \varepsilon_{ij} \rangle$, удовлетворяющие условию пластичности, которое в пространстве напряжений представляет цилиндр эллипсоидального сечения. Предел пластичности σ^* при растяжении вдоль волокон равен

$$\sigma^* = \sigma_0 \sqrt{1 - c + \frac{c}{6R_{13}}}, \tag{3.5}$$

где σ_0 – предел пластичности матрицы при растяжении. Зависимость (3.5) для включений различной относительной длины представлена на фиг. 1-3, показаны также экспериментальные данные для матрицы, армированной проволочками $a = 5$ (точка), $a = 10$ (кружок), $a = 20$ (треугольник), $a = 40$ (ромб). Близкие к расчетам (3.5) данные имеют место лишь при $a = 5$ и $a = 10$; действительно, короткие проволочки находятся в жестком состоянии, что соответствует условиям вывода формулы (3.5). При тех же условиях длинные проволочки разрушаются или текут.



Фиг. 1-3

Рассмотрим случай пластического состояния включений. При растяжении вдоль оси χ_3 в формулах (3.1) полагаем

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle_1 = -2 \langle \varepsilon_{11} \rangle_1 = -2 \langle \varepsilon_{22} \rangle_1,$$

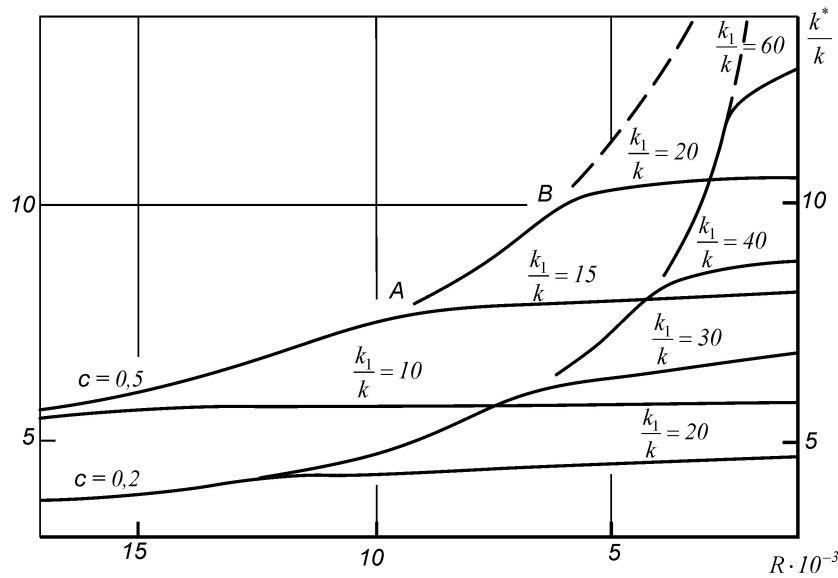
следовательно,

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{33} \rangle_1 - \langle \varepsilon_{33} \rangle &= F(1-c)6(A+B)\langle \varepsilon_{33} \rangle_1; \\ \langle S_{ijkl}^{(n)} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{kl} \rangle_1 &= (9A+B)\langle \varepsilon_{33} \rangle^2. \end{aligned}$$

Диссипативная функция определяется соотношением

$$\begin{aligned} D^* &= \sigma^* |\langle \varepsilon_{33} \rangle|; \\ \sigma^* &= \sqrt{\frac{3}{2}}k \left[\frac{1-c\sqrt{1-R}\sqrt{1-R(1-c+ck_1^2/k^2)}+ck_1/k}{1-R(1-c)} \right], \\ R &= R_{13}, \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}k, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \frac{k_1}{k}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

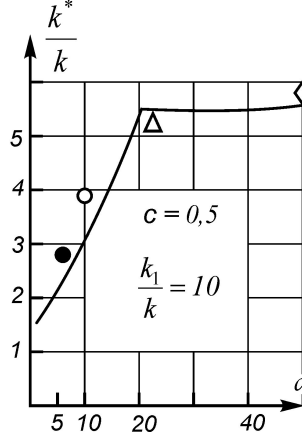
где σ_1 – предел пластичности включений при растяжении.



Фиг. 1-4

На фиг. 1-4 показаны зависимости (3.6), которые переходят в кривую (3.5) для включений в жестком состоянии. В точках сопряжения А, В длина волокон становится критической в том смысле, что последующее ее увеличение менее эффективно влияет на предельные напряжения композита. Этот же вывод можно сделать на основании зависимостей, показанных на фиг. 1-3. В работе [55] указывается особенность эмпирических данных по пределам пластичности композитов: зависимость от концентрации c имеет либо линейный характер, либо закон квадратного корня. Это подтверждается зависимостями фиг. 2, где случай пластического состояния включений (3.6) близок к линейному закону, жесткие состояния включений (3.5) соответствуют приближениям квадратного корня. Из условий эксперимента [56] следует, что точке максимальной кучности экспериментальных данных (фиг. 1-3) соответствует случай, когда разрушение композита происходит на одновременном действии двух механизмов: вытягивание включений из пластической матрицы и разрыва включений. В рассматриваемых зависимостях этому случаю соответствует точка сопряжения кривых (3.5), (3.6), поэтому на фиг. 1-3 для точки сопряжения подобрано значение $(k_1/k) = 10$. Если предположить, что включения $a = 40$ (ромб) находятся в жестком состоянии, то зависимость (3.6) при $c = 0.5$ определяет точки в два раза большее предельное напряжение (на фиг. 1-3 увеличение показано вертикальной стрелкой). Горизонтальными стрелками указан снос для выбора эмпирических значений при $c = 0.5$ волокон $a = 5$ и $a = 10$. Это позволяет более наглядно сравнить

эмпирические и расчетные значения при $c = 0.5$ (фиг. 1-5). Расчетные зависимости почти кусочно-линейные, хотя в увеличенном масштабе (фиг. 1-4) они плавно сопрягаются.



Фиг. 1-5

А. Коттрелом [55] предложено условие оптимального использования собственной прочности волокон. Когда напряжения в матрице достигают предела текучести, волокна оказываются нагруженными более высокими напряжениями. Перераспределение нагрузки принимает оптимальное значение, когда напряжения волокон становятся равными собственному разрушающему напряжению. В случае разрушения волокон композит можно считать армированным волокнами меньшей длины, поэтому имеет смысл расчет эффективной длины волокон.

Вычислим напряжение состояния включений. Девиаторная часть напряжений представлена формулой (3.2), выражение для шаровой части

$$\langle \sigma_{ii} \rangle_1 = \langle \sigma_{ii} \rangle - 3 \langle \alpha' p' \rangle / c$$

получим из формулы

$$\langle \sigma_{ii} \rangle_1 = \langle \sigma_{ii} \rangle - 3(1-c) \langle s_{ij} \rangle_1 n_i n_j (7B + C).$$

Пусть в условиях чистого растяжения $\langle \sigma_{33} \rangle$ вдоль направления волокон достигнуто разрушающее напряжение

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{33} \rangle_1 &= \sigma_p, \\ \sigma_p &= \langle s_{33} \rangle_1 [1 - (1-c)(7B + C)] + \frac{1}{3} \langle \sigma_{33} \rangle. \end{aligned}$$

Из соотношений (4.2), (4.3) получим

$$\begin{aligned} \langle s_{33} \rangle_1 &= \frac{k^2 \langle \varepsilon_{33} \rangle}{6(A-B)D^*}; \\ D^* &= k \sqrt{\frac{3}{2}(1-c) + \frac{c}{4R_{13}} |\langle \varepsilon_{33} \rangle|}; \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= k \sqrt{\frac{3}{2}(1-c) + \frac{c}{4R_{13}}}; \\ A + B &= R_{13}; \\ 7B + \underline{C} &= \frac{1}{2}(6R_{13} + 3R_{33} - 1). \end{aligned}$$

Откуда следует сопряжение условий прочности волокон и пластического состояния матрицы

$$\sigma_p = k\sqrt{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{1-c}{R_{33}} \right] / \left[6R_{13} \sqrt{1-c + \frac{c}{6R_{13}}} \right],$$

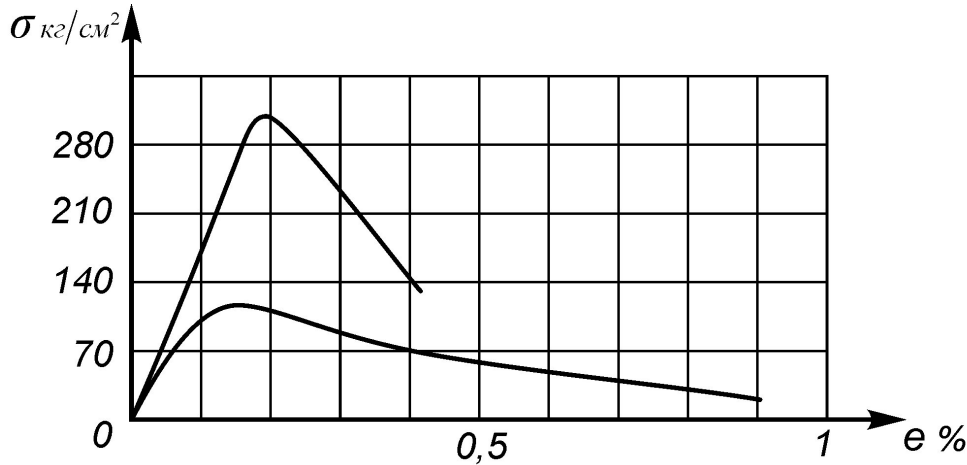
где R_{13}, R_{33} определяются по зависимостям, показанным фиг. 1-2.

§ 4. Предельное состояние хрупкого композиционного материала

Разрушение бетона, керамики, скальных пород с большой степенью приближения может быть рассмотрено как развитие микротрещин в линейно-упругой среде [57–58]. На фиг. 1-6 показаны кривые напряжения σ – деформации e при кратковременных нагрузках тяжелых бетонов с различными прочностями на сжатие [58]. Участок падения напряжений соответствует процессу развития микротрещин, который приводит к образованию одной или нескольких макротрещин. Предположим, что для обратимых процессов разгрузки выполнен закон Гука $e = \mu\sigma + p$ и, следовательно, определен термодинамический потенциал

$$W = \frac{1}{2}\sigma\mu\sigma + p\sigma, \quad e = \partial W / \partial \sigma, \tag{4.1}$$

где p, μ изменяются лишь в необратимых процессах.



Фиг. 1-6

Пусть χ – некоторые параметры, характеризующие необратимый изотермический процесс, в частности, ими могут быть статистические средние, тензорные величины, задающие распределение ориентации микротрещин. Коэффициенты термодинамического потенциала определим как функции параметров χ , а мощность диссипации и образования поверхностной энергии трещин зададим функцией $D(\dot{\chi})$, где точкой обозначена производная по времени t . Внутренняя энергия

$$U = \sigma e - W$$

и функция D в уравнении первого закона термодинамики $\sigma de = dU + Ddt$ позволяют сформулировать закон (второй) в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \chi} \dot{\chi} = D \geq 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial \chi} \dot{\chi} = D \geq 0. \tag{4.2}$$

Из этого выражения следует, что движущая силами необратимого процесса по отношению к потокам $\dot{\chi}$ являются величины $z = \partial W / \partial \chi = -\partial U / \partial \chi$, которые могут не совпадать с обобщенными силами обратимого процесса, инвариантных относительно масштаба времени, удовлетворяют условию однородности $D = (\partial D / \partial \dot{\chi}) \dot{\chi}$. Это условие исключает диффузионный характер преодоления потенциальных барьеров в микропроцессорах, связанных с движениями дислокаций, трещин. Максимум правой части уравнения (4.2) (принцип Мизеса) или левой (максимальная скорость освобождения внутренней энергии) при условии достигается для значений $\dot{\chi}$, удовлетворяющим обобщенным соотношениям Онсагера $z = \partial D / \partial \dot{\chi}$. Из этих соотношений и условия однородности Эйлера следует существование [5] области обратимых процессов в пространстве z , которая ограничена поверхностью $F(z) = 0$, причем

$$\dot{\chi} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad F(z, \chi) \leq 0. \quad (4.3)$$

Приращение деформаций представим суммой слагаемых

$$de = de^e + de^p, \quad de^p = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \chi} \sigma + \frac{\partial p}{\partial \chi} \right) d\chi, \quad (4.4)$$

$$de^e = \mu d\sigma.$$

Здесь de^e определены изменением напряжений в упругом материале, ослабленном микро-трещинами; приращения de^p происходят в необратимых процессах $d\chi \neq 0$.

Выражение $z = \partial W / \partial \chi$ и условие $F(z, \chi) = 0$ образуют поверхность в пространстве напряжений $F(\sigma, \chi) = 0$. Приращение неупругих деформаций вычислим из (4.3) и (4.4):

$$de^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \sigma} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma}. \quad (4.5)$$

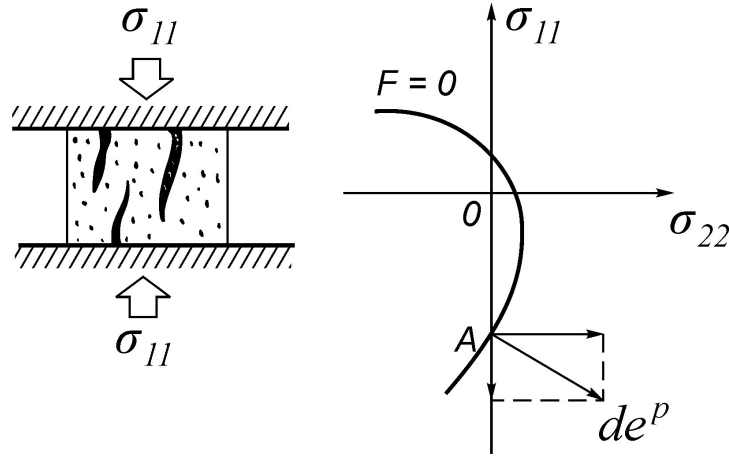
Таким образом de^p ассоциированы с условием разрушения $F(\sigma, \chi) = 0$, что позволяет использовать результаты исследования в теориях пластичности, основанные на ассоциированном законе деформирования. К существенным различиям приводит неустойчивость процессов разрушения и, как следствие, неединственность решения краевых задач. В целях использования теории предельного равновесия будем предполагать малыми $e^e \approx 0$ и рассматривать состояния $F(\sigma) \leq 0$, достигающиеся при максимальных нагрузках. Если условие разрушения образует выпуклую поверхность, то из соотношений (4.5) для жесткопластичного деформирования $de = de^p$ следуют теоремы единственности [59] предельных состояний, соответствующих моменту разрушения. Этому моменту относится мгновенное состояние, заданное полями скоростей и напряжений.

Материалы с микротрещинами имеют низкую прочность при растяжении. Иногда в условиях сжатия возникают продольные трещины (фиг. 1-7). Это состояние $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ на поверхности $F = 0$ (фиг. 1-7) соответствует точке А. Так как трещины продольные, то деформации, определенные развитием трещин, удовлетворяют условию $dp_{11} = 0$, и ассоциированность возможна лишь при $d\mu_{11} \sigma_{11} \leq 0$, что соответствует падению жесткости.

Более точные модели должны учитывать, что сжатие сопровождается упругим закрытием трещин, возникает физическая нелинейность упругих свойств, проявлением которой является разномодульность.

Формальное обобщение с учетом этих аспектов очевидно, хотя идентификацией является разномодульность.

Формальное обобщение с учетом этих аспектов очевидно, хотя идентификация с реальными материалами остается сложной задачей. С другой стороны, для бетонов, керамики, скальных пород характерен значительный статистический разброс механических параметров, что оправдывает расчеты, основанные на оценках теории предельного равновесия.



Фиг. 1-7

Композиты из хрупких материалов на основе бетона, керамики, стекла имеют случайную геометрическую структуру. Дисперсная фаза или поры являются концентраторами напряжений, поэтому в случайной структуре всегда существует вероятность локальных разрушений. Расчет напряжений на основе теории упругости позволяет отыскать вероятность выброса локальных напряжений за предел прочности, однако последующее поведение композита при увеличении нагрузки еще не исчерпывает действительной прочности. Поэтому разрушение композита будем рассматривать как потерю несущей способности в целом, и на основании этого можем использовать теорию предельного равновесия. При определенных ограничениях на механические свойства фазовых составляющих композита эта теория применима, и ограничения имеют тот же характер, что при расчетах конструкции.

Кинематика системы в момент разрушения определена скоростью деформаций, которые для хрупких материалов можно разбить на две составляющие: упругую, которая достигается до начала разрушения, и неупругую, связанную с развитием микротрещин. В теории предельного равновесия существенно предположение о малости упругих деформаций по сравнению с полными деформациями e^* , достигнутыми при разрушении. Характеристикой этого отношения является предельная деформативность:

$$\delta = e^* E/R \quad (R - \text{предел прочности, } E - \text{модуль упругости}).$$

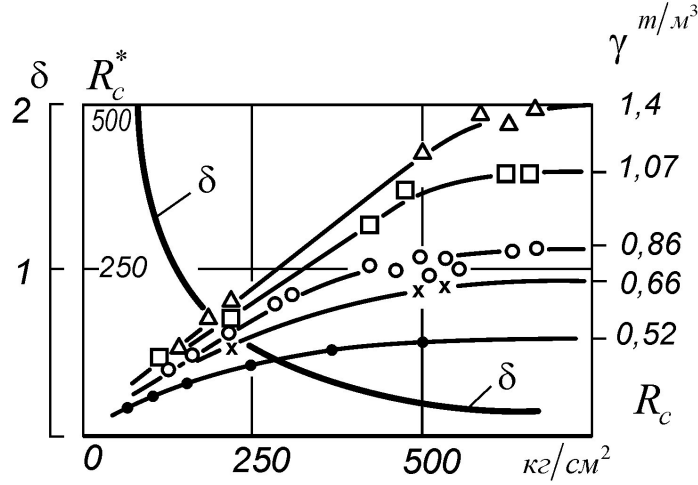
На фиг. 1-8 показана зависимость $\delta(R)$ [50] для бетонов, из которой следует, что высокопрочные бетоны обладают меньшей предельной деформативностью по сравнению с бетонами обычной прочности. Последние экономически выгодные, их технически целесообразно использовать в композициях, так как свойство деформативности позволяет передать нагрузки армирующему материалу или заполнителю.

Полагая материал изотропным, условие предельного равновесия сформулируем в следующем виде:

$$\begin{aligned} s_{ij}s_{ij}/a + (\sigma_{ii}/3 + \rho)^2/b &= 1; \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma_{ii}\delta_{ij}/3; \end{aligned} \quad (4.6)$$

здесь a, b, ρ – параметры материала. В предельных состояниях скорости деформаций ε_{ij} удовлетворяют ассоциированному закону (4.5).

$$\varepsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}; \quad \varepsilon_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2. \quad (4.7)$$



Фиг. 1-8 [50]

Идеализацию жесткопластической кинематики можно представить в момент разрушения, характеризуемой непрерывным полем скоростей v_i и который соответствует образованию сетки статистически распределенных микротрещин. Поверхности разрыва скоростей, характерные для кинематических уравнений (4.7), интерпретируются как мгновенные состояния на поверхности, результатом которых является образование магистральной трещины в процессе развития и слияния микротрещин. В момент разрушения мощность, затрагиваемая на образование микротрещин, определяется из соотношений (4.6), (4.7):

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = D = \sqrt{a\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + b\varepsilon_{ll}^2} - \rho\varepsilon_{ll}. \quad (4.8)$$

Выведем параметры ν , α , k , определенные формулами

$$\begin{aligned} \rho &= \nu/\alpha, & a &= k^2 + \nu^2/\alpha, \\ b &= \frac{k^2}{\alpha} + \frac{\nu^2}{\alpha^2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

При $\alpha \rightarrow 0$ условие разрушения соответствует бесконечной прочности при воздействии всестороннего сжатия:

$$s_{ij}s_{ij} + 2\nu\sigma = k^2, \quad \sigma = \sigma_{ij}/3. \quad (4.10)$$

Этим свойством обладают материалы с микротрещинами при отсутствии пор значимой объемной концентрации. Аппроксимации (4.6), (4.10) реальных условий разрушения [61] определяются пределами прочности при сжатии R_c , растяжении R_p и сдвиге k .

Рассмотрим композиционный материал, составленный из матрицы с параметрами a , b , ρ и сферических включений концентрации c и параметрами a_1 , b_1 , ρ_1 .

Выражение для мощности диссипации в объеме композита можно записать в виде

$$D^* = (1 - c)\langle D \rangle_2 + c\langle D \rangle_1. \quad (4.11)$$

При осреднениях по матрице $\langle \rangle_2$ и включениям $\langle \rangle_1$ воспользуемся приближениями

$$\left\langle (a\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + b\varepsilon_{ll}^2)^{1/2} \right\rangle_2 \approx \left(\langle a\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + b\varepsilon_{ll}^2 \rangle_2 \right)^{1/2}, \quad (4.12)$$

состояния включений приближенно заменим средними по включениям

$$\begin{aligned} & \left\langle (a_1 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + b_1 \varepsilon_{ll}^2)^{1/2} \right\rangle_1 \approx \\ & \approx \left(a_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 + b_1 \langle \varepsilon_{ll} \rangle_1^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

(при осреднении можно использовать функцию ε , принимающую значения I на включениях и 0 в остальной области).

Если функционалы квадратичные, формулы (4.12), (4.13) приводят к оценкам Хашина-Штрикмана, а приближения соответствуют теории самосогласования для структур со сферическими включениями.

На основании предположений предыдущего раздела функционал (4.11) представлен в виде

$$\begin{aligned} D^* = & \sqrt{1-c} \left(a \langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle + b \langle \varepsilon_{ll}^2 \rangle - \right. \\ & \left. - ac \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 - bc \langle \varepsilon_{ll} \rangle_1^2 \right)^{1/2} + \\ & + \left(a_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 + b_1 \langle \varepsilon_{ll} \rangle_1^2 \right)^{1/2} - \\ & - \rho \langle \varepsilon_{ll} \rangle + c(\rho - \rho_1) \langle \varepsilon_{ll} \rangle_1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Условие экстремальности функционала (4.14) относительно флуктуаций v'_i приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-c} J^{-1} (a \varepsilon'_{ij,j} - a \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \varepsilon'_{j,i} + b \varepsilon'_{jj,i} - \\ & - b \langle \varepsilon_{jj} \rangle_1 \varepsilon'_{i,i} + J_1^{-1} (a_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \varepsilon'_{j,i} + \\ & - b_1 \langle \varepsilon_{jj} \rangle_1 \varepsilon'_{i,i}) + (\rho - \rho_1) \varepsilon'_{i,i} = 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

здесь

$$\begin{aligned} J = & \left(a \langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle + b \langle \varepsilon_{ll} \rangle^2 + \langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} \rangle a + \right. \\ & \left. + b \langle (\varepsilon'_{ll})^2 \rangle - ac \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 - bc \langle \varepsilon_{ll} \rangle_1^2 \right)^{1/2}; \\ J_1 = & \left(a_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 + b_1 \langle \varepsilon_{ll} \rangle_1^2 \right)^{1/2}; \\ J_0 = & \left(a \langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle + b \langle \varepsilon_{ll} \rangle^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Спектральные разложения флуктуаций поля скоростей по волновым числам ξ_i удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-c} J^{-1} [a v'_i \xi_j \xi_j / 2 + (b + a/b) v'_i \xi_j \xi_i + \\ & + i a \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \varepsilon'_{j,i} + i b \langle \varepsilon_{jj} \rangle_1 \varepsilon'_{i,i}] = \\ & = J_1^{-1} [a_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 i \varepsilon'_{j,i} + b_1 \langle \varepsilon_{jj} \rangle_1 i \varepsilon'_{i,i} + \\ & + i(\rho - \rho_1) \varepsilon'_{i,i}]; \end{aligned} \quad (4.16)$$

здесь флуктуации их спектры обозначены одинаковыми буквами. Спектры скоростей деформаций получим из уравнения (4.16):

$$\begin{aligned} a \sqrt{1-c} \frac{\varepsilon'_{ij}}{J} = & \left\{ a \sqrt{1-c} J^{-1} [(\varepsilon_{ik})_1 \xi_k \xi_j + \right. \\ & + \langle \varepsilon_{jk} \rangle_1 \xi_k \xi_i - 2(1-h) \langle \varepsilon_{kl} \rangle_1 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l (\xi_n \xi_n) + \\ & + 2h(b/a) \langle \varepsilon_{kk} \rangle_1 \xi_i \xi_j (\xi_n \xi_n)^{-1} - \\ & - a_1 J_1 [(\varepsilon_{ik})_1 \xi_k \xi_j + \langle \varepsilon_{jk} \rangle_1 \xi_k \xi_i - \\ & - 2(1-h) \langle \varepsilon_{kl} \rangle_1 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l (\xi_n \xi_n)^{-1} + \\ & + 2(b_1/a_1) h \langle \varepsilon_{ll} \rangle_1 \xi_i \xi_j (\xi_n \xi_n)^{-1} - \\ & \left. - 2(\rho - \rho_1) h \xi_i \xi_j (\xi_n \xi_n)^{-1}] \varepsilon'_{ij}; \right. \\ & \left. h = 1 - (b + a/b)/(b + 2a/3). \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Учитывая изотропность функции ε' , вычислим

$$\begin{aligned}
& a\sqrt{1-c}J^{-1}\langle\mathfrak{a}'\varepsilon'_{ij}\rangle = \\
& = \left\{ a\sqrt{1-c}J^{-1}\left[\frac{2}{5}\left(1+\frac{2}{3}h\right)\langle\varepsilon_{ij}\rangle_1 + \right. \right. \\
& + \frac{2bh}{3a}\langle\varepsilon_{ll}\rangle_1\delta_{ij}] - a_1J_1^{-1}\left[\frac{2}{5}\left(1+\frac{2}{3}\right)h\langle\varepsilon_{ij}\rangle_1 + \right. \\
& \left. \left. + \frac{2b_1h}{3a_1}\langle\varepsilon_{ll}\rangle_1\delta_{ij}\right] - 2(\rho - \rho_1)\frac{h}{3}\delta_{ij}\right\} c(1-c). \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Из соотношений (4.18) вычислим средние по включениям скорости деформаций

$$\begin{aligned}
J_1^{-1}\langle\tilde{\varepsilon}_{ij}\rangle_1 &= \langle\tilde{\varepsilon}_{ij}\rangle \left[J_1 - (1-c)\frac{2}{5}\left(1+\frac{2}{3}h\right)\left(J_1 - \frac{Ja_1}{a\sqrt{1-c}}\right) \right]^{-1}; \\
\tilde{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ll}\delta_{ij}/3; \tag{4.19}
\end{aligned}$$

$$J_1^{-1}\langle\varepsilon_{ll}\rangle_1 = \frac{\langle\varepsilon_{ll}\rangle - \frac{h}{a}2(\rho - \rho_1)J\sqrt{1-c}}{J_1 - \frac{2bh}{a}(1-c)\left(J_1 - b_1\frac{J}{b\sqrt{1-c}}\right)}. \tag{4.20}$$

Вычисление минимального значения функционала (4.14) можно упростить, если учесть выполнение уравнений (4.15). Для этого воспользуемся правилами осреднения при переходе к поверхностным интегралам:

$$\begin{aligned}
\langle\varepsilon'_{ij,j}v'_i\rangle &= -\langle\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}\rangle; \\
\langle\mathfrak{a}',jv'_i\rangle &= -\langle\mathfrak{a}'v'_{i,j}\rangle; \\
\langle(\varepsilon'_{ij}v'_i),j\rangle &= 0; \\
\langle(\mathfrak{a}'v'_i),j\rangle &= 0. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Свертка уравнений (4.6) и осреднение по формулам (4.21) приводит к соотношению

$$\begin{aligned}
& \langle a\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij} + b(\varepsilon'_{ll})^2 \rangle = c(\langle\varepsilon_{ij}\rangle_1 - \langle\varepsilon_{ij}\rangle) \times \\
& \times \langle\varepsilon_{ij}\rangle_1 \left[a - a_1\frac{J}{J_1\sqrt{1-c}} \right] + c(\langle\varepsilon_{ll}\rangle_1 - \langle\varepsilon_{ll}\rangle)\langle\varepsilon_{ll}\rangle_1 \times \\
& \times \left[b - b_1\frac{J}{J_1\sqrt{1-c}} \right] + c(\rho - \rho_1)J(\langle\varepsilon_{ll}\rangle_1 - \langle\varepsilon_{ll}\rangle)\frac{1}{\sqrt{1-c}}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
J^2 &= J_0^2 - ac\langle\varepsilon_{ij}\rangle_1\langle\varepsilon_{ij}\rangle - bc\langle\varepsilon_{ll}\rangle_1 \times \\
& \times \langle\varepsilon_{ll}\rangle - cJ\sqrt{1-c}[(\rho - \rho_1)(\langle\varepsilon_{ll}\rangle_1 - \langle\varepsilon_{ll}\rangle) - cJ_1 + \\
& + a(\langle\varepsilon_{ij}\rangle_1\langle\varepsilon_{ij}\rangle + b_1a_1^{-1}\langle\varepsilon_{ll}\rangle_1\langle\varepsilon_{ll}\rangle)J_1^{-1}].
\end{aligned}$$

Решение алгебраических уравнений (4.19) и соотношения (4.22) полностью определяют минимальное значение D^* . Получаемое значение D^* очень громоздко. Имеет смысл рассмотреть наиболее важные в технических приложениях предельные случаи, соответствующие разрушению матрицы с прочными включениями и пористому материалу.

В случае, когда включения не разрушаются, $\langle\tilde{\varepsilon}_{ij}\rangle_1$, $\langle\varepsilon_{ll}\rangle_1$ равны нулю, параметры a_1 , b_1 , ρ_1 могут иметь конечные значения. В соотношениях (4.19), (4.20), (4.22) при предельном переходе $\langle\varepsilon_{ij}\rangle_1 \rightarrow 0$ неопределенности раскрываются по формулам

$$\begin{aligned}
\frac{\langle\tilde{\varepsilon}_{ij}\rangle_1}{J_1} &= \frac{5a\langle\tilde{\varepsilon}_{ij}\rangle J^{-1}}{2a_1\sqrt{1-c}(1+2h/3)}; \\
\frac{\langle\varepsilon_{ll}\rangle_1}{J_1} &= \frac{a\langle\varepsilon_{ll}\rangle}{2b_1hJ\sqrt{1-c}} - (\rho - \rho_1)/b_1; \\
\sqrt{1-c}(J^2 - J_0^2) &= (\rho - \rho_1)cJ\langle\varepsilon_{ll}\rangle + \\
& + cJJ_1^{-1}(a_1\langle\varepsilon_{ij}\rangle_1\langle\varepsilon_{ij}\rangle + b_1\langle\varepsilon_{ll}\rangle_1\langle\varepsilon_{ll}\rangle).
\end{aligned}$$

Выражение функции мощности разрушения композита имеет вид (4.14) $D^* = J\sqrt{1-c} - \rho\langle\varepsilon_{ll}\rangle$, который можно преобразовать по формулам (4.23), вычисляя J

$$J^2 J_0^2 + \frac{ac \langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle \langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle}{2(1-c)(1+2h/3)^{5/2}} + \frac{ac \langle \varepsilon_{ll} \rangle^2}{2h(1-c)};$$

$$D^* = \left[a \left(1 - c + \frac{5c}{2(1+2h/3)} \right) \langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \right. \\ \left. + \left(b(1-c) + \frac{ac}{2h} \right) \langle \varepsilon_{ll} \rangle^2 \right]^{1/2} - \rho \langle \varepsilon_{ll} \rangle.$$

Функции D^* соответствует предельная поверхность

$$\frac{s_{ij}s_{ij}}{a} \left[1 - c + \frac{5c}{2(1+2h/3)} \right]^{-1} + \frac{(\sigma - \rho)^2}{b(1+c) + \frac{ca}{2h}} = 1. \quad (4.24)$$

Введем параметры ν , α , k , определенные формулами (4.9).

Для абсолютно прочных включений условие разрушения (4.24) при $\alpha \rightarrow 0$ принимает вид

$$\frac{s_{ij}s_{ij}}{1+\frac{2}{3}c} + 2\nu\sigma = k^2 + \frac{2}{3}\nu^2c; \quad (4.25)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{ll}}{3}.$$

В случае пористого материала мощность разрушения, как следует из (4.22), определяется соотношением

$$D^* = (1-c) \left[\left(k^2 + \frac{4\nu^2}{bc} \right)^{1/2} \left(\frac{\langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle}{1 + \frac{2}{3}c} + \frac{2 \langle \varepsilon_{ll} \rangle^2}{3c} \right)^{1/2} - \frac{2\nu \langle \varepsilon_{ll} \rangle}{3c} \right],$$

которое соответствует условию разрушения

$$\frac{s_{ij}s_{ij}}{1+\frac{2}{3}c} + \left[\sigma + \frac{2\nu(1-c)}{3c} \right]^2 =$$

$$= (1-c)^2 \left[k^2 + \frac{2\nu^2}{3c} \right]; \quad \sigma = \frac{\sigma_{ll}}{3}; \quad (4.26)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}.$$

Заметим, что пористый материал разрушается при конечных значениях всестороннего давления.

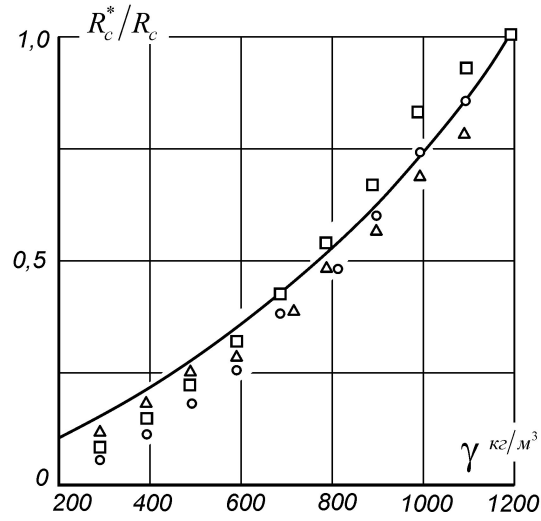
Условия разрушения (4.25), (4.26) противоречивы при любых концентрациях и параметрах, составляющих материала. На фиг. 1-9, фиг. 1-10 показаны экспериментальные и теоретические зависимости, полученные для ячеистых бетонов. По данным работы [62] отношение пределов прочности при растяжении и сжатии для плотных бетонов (R_p/R_c) = 0.07. Макропараметры композита при различных объемных концентрациях пор вычисляются из соотношения (4.26), в частности, пределы прочности при сжатии R_c^* и растяжении ячеистых бетонов вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{matrix} R_c^* \\ R_p^* \end{matrix} \right\} = \left[\pm (R_c - R_p) + \left(4R_c R_p \left(1 + \frac{11c}{12} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (R_c - R_p)^2 \right)^{1/2} \right] \frac{1-c - \frac{1}{2}}{1 + \frac{11c}{12}}.$$

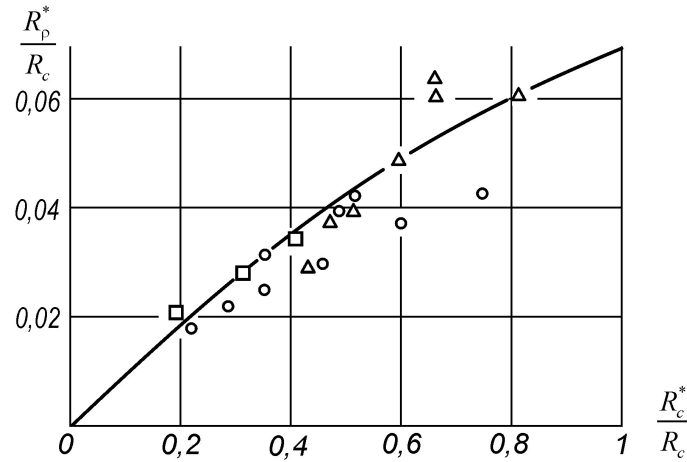
На фиг. 1-9, фиг. 1-10 отмечены экспериментальные данные: кружками – газобетон, квадратами – пеносиликат, треугольниками – пенобетон [62], соответствующие структуры довольно близки предположению о сферичности пор (фиг. 1-11, а – пеносиликат, б – газосиликат).

В экспериментах с цилиндрическими образцами при боковом давлении, достигающем половины продольного напряжения, характер разрушения может измениться; объем образца при сжатии не увеличивается, и разрушение происходит в результате среза [60]. В этом случае критерием разрушения (4.10) можно считать условие Мизеса $s_{ij}s_{ij} = k^2$. Если это условие имеет место для составляющих композита с заданными k , k_1 , то вычисления по формулам (4.19)–(4.22) можно значительно упростить. В случае, когда включения разрушаются и $k_1 < k$, получается следующее выражение для предела прочности композита k^* :

$$\frac{k^*}{k} = \left(1 + \frac{2}{3}c\right)^{-1} \left[(1-c) \sqrt{\left(1 + \frac{2}{3}c\right) \frac{k^2}{k_1^2} - \frac{2}{3}c + \frac{5c}{2}} \right]. \quad (4.27)$$



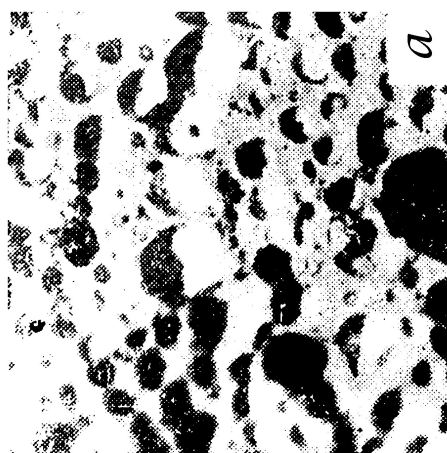
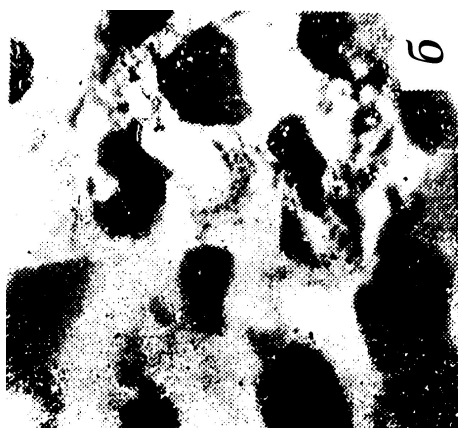
Фиг. 1-9



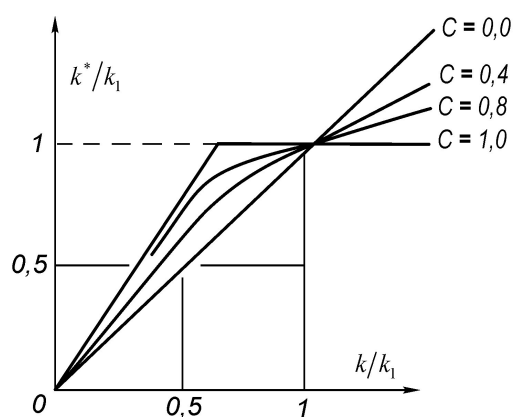
Фиг. 1-10

Условие неразрушения включений $J_1 = 0$ соответствует композитам с определенным соотношением между k , k_1 , c , значения которых удовлетворяют неравенству

$$(2k_1/5k) \sqrt{1 + 3c/2} \geq 1.$$



Фиг. 1-11



Фиг. 1-12

Это условие, в случае равенства, плавно сопрягает переход от зависимости (4.27) к зависимости для прочных включений (4.25) при $\nu = 0$. Полученный результат качественно согласуется с экспериментальными данными для бетонов на легких заполнителях. На фиг. 1-8 показана зависимость прочности R_c^* керамзитобетона при сжатии от прочности раствора R_c для различных керамзитных заполнителей (γ – плотность бетона). В условиях сдвигового разрушения $(R_p/R_c) = (k^*/k)$ для малопрочных растворов предельные напряжения в соответствии с формулой (4.25) $k^* = k\sqrt{1 + 3c/2}$ линейно возрастают с ростом k , что соответствует начальным участкам кривых фиг. 1-8, фиг. 1-12. После достижения критических значений k или R_c , при которых начинают разрушаться включения, наступает менее интенсивный рост k^* , R_c^* . При асимптотическом значении $(k_1/k) \rightarrow 0$ формула (4.27) переходит в выражение

$$k^* = k(1 - c)\sqrt{1 + 3c/2}.$$

Эта асимптотика ясно выражена на фиг. 1-8 и фиг. 1-12.

Для количественных оценок необходима более полная информация о свойствах компонента, то есть тех параметров, которые являются исходными в рассмотренных вычислениях.

ГЛАВА 2. НЕКОТОРЫЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Образование микронапряжений в процессах фазовых превращений

Технологические процессы, связанные с изменением температуры изделий, в материале которых происходит фазовый переход, могут оказаться неэффективными из-за больших внутренних напряжений, созданных включениями новой фазы. Частота трещин в локальной структуре материала обусловлена выбросом микронапряжений за предел прочности. В этом случае функция надежности [40], характеризующая вероятность выбросов, должна определяться в процессе изменения структуры материала. Стечение таких явлений, как уменьшение скорости релаксации при понижении температуры, увеличение концентрации включений, влияющих на уровень макронапряжений, приводит к значительной концентрации микротрещин, в результате материал может просто рассыпаться, не достигнув потенциально возможности прочности.

В настоящей работе свойства материала конкретизируются для расплавов, при остывании которых в стеклообразной матрице образуется кристаллическая фаза. Процессы ползучести характеризуются соотношениями Бингама [43], выбор которых определен существованием критических напряжений, отвечающих началу релаксации. Таким образом, при некоторых условиях возможен фазовый переход в упругом состоянии. Существенной характеристикой рассматриваемых превращений является изменение удельного объема.

Фазовый переход в гетерогенной структуре рассмотрим в условиях однородного температурного поля; внешние нагрузки отсутствуют. Структура характеризуется функцией α , принимающей значения 1 на включениях и 0 – в остальной области. Собственная деформация фазового перехода определяется скачком плотности фаз, задана шаровой частью тензора $\alpha \delta_{ij}$.

Поле флуктуаций напряжений σ_{ij} и деформаций e_{ij} удовлетворяет закону Гука

$$\sigma'_{ij} = 2\mu(e'_{ij} - \alpha \alpha' \delta_{ij}) + \lambda(e'_{ll} - 3\alpha \alpha') \delta_{ij}.$$

Решение уравнений равновесия $\sigma_{ij,j} = 0$ в перемещениях u_i получим, используя спектральные разложения

$$\begin{aligned} u'_i(\chi) &= \int n'_i(\xi) \exp(i\xi_i \chi_i) d\xi; \\ 2\mu e'_{ij} &= a'_{ik} \frac{\xi_j \xi_k}{\xi_n \xi_n} + a'_{jk} \frac{\xi_i \xi_k}{\xi_n \xi_n} - 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} a'_{kl} \frac{\xi_i \xi_k \xi_j \xi_l}{(\xi_n \xi_n)^2}; \\ a'_{ij} &= (3\lambda + 2\mu) \alpha \alpha'(\xi) \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В предполагаемых условиях функция α является изотропной. Вычислим средние значения

$$\langle e'_{ij} \alpha' \delta_{ij} \rangle = \frac{\mu \lambda}{\lambda + 2\mu} (3\lambda + 2\mu) \alpha^2 c (1 - c). \quad (1.2)$$

Здесь c – объемная концентрация включений.

Так как из $\sigma'_{ij,j} = 0$ следует $\langle \sigma'_{ij} e'_{ij} \rangle = 0$, можно показать, что плотность упругой энергии микронапряжений равна

$$\begin{aligned} w &= -\frac{1}{2} \langle \sigma'_{ij} \alpha \alpha' \delta_{ij} \rangle = A c (1 - c) \alpha^2; \\ A &= 2\mu \frac{2\mu + 3\lambda}{2\mu + \lambda} = \frac{E}{1 - \nu}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Рассмотрим термодинамические условия фазового равновесия. Пусть $g_1(T)$, $g_2(T)$ – энергия фаз в свободном от напряжений состоянии. Упругая энергия взаимодействия фаз в гетерогенной структуре представлена соотношениями (1.3). Тогда, с учетом поступления тепла dQ , закон сохранения энергии при $\langle \sigma_{ij} \rangle = 0$ примет вид

$$dQ = d \{ A \alpha^2 c (1 - c) + g_1 c + g_2 (1 - c) \}. \quad (1.4)$$

Предполагаем, что тепловой процесс локально равновесный, то есть фазовый переход значительно медленнее, чем выравнивание температуры в локальных элементах структуры материала. Это предположение часто используется для исследования макронеравновесных процессов [10]. Тогда для аддитивных составляющих энтропии S – выполнено

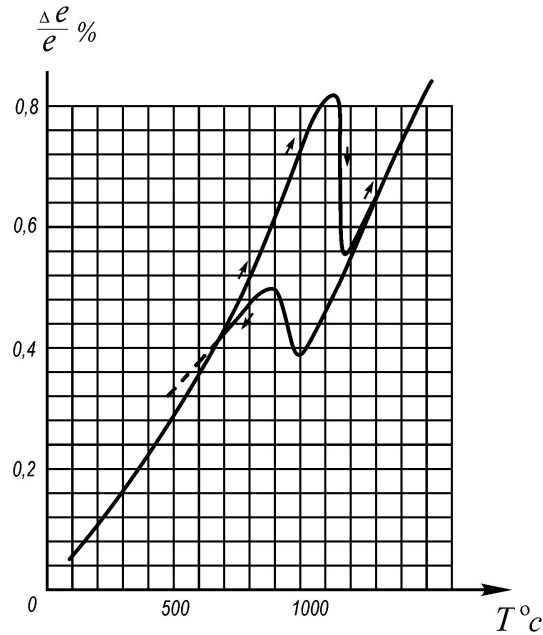
$$\begin{aligned} TdS_1 &= dg_1, & TdS_2 &= dg_2; \\ S &= S_1c + S_2(1-c). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Второй закон термодинамики указывает направление фазового перехода $TdS \geq dQ$ следовательно, формулы (1.4), (1.5) приводят к неравенству

$$\{-A\alpha^2(1-2c) + (g_2 - g_1) - T(S_2 - S_1)\} dc \geq 0. \quad (1.6)$$

Определение начала перехода (зарождение фазы), следующее из неравенства (1.6), является необходимым, но не достаточным. Прямой $dc > 0$ и обратный $dc < 0$ переходы соответствуют неравенствам для термодинамического потенциала

$$\begin{aligned} f(T) &= g(T) - TS, \\ dc > 0, & c = 0, & f_2(T) - f_1(T) &> A\alpha^2; \\ dc < 0, & c = 1, & f_2(T) - f_1(T) &< -\alpha^2 A. \end{aligned} \quad (1.7)$$

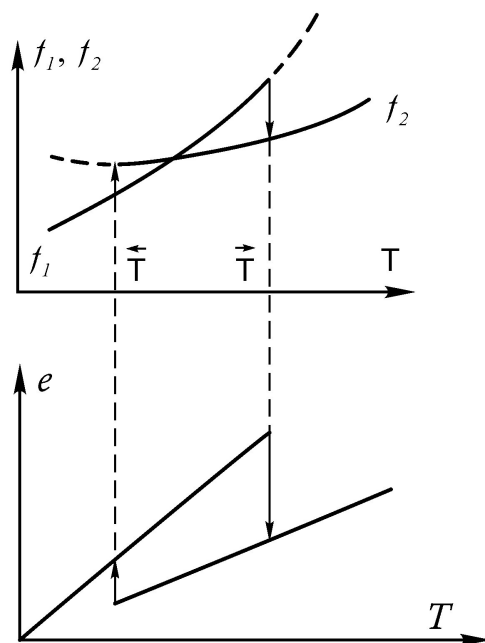


Фиг. 2-1 [41]

Обозначим α_1, α_2 коэффициенты линейного температурного расширения, α_0 – скачек удельного объема фаз, тогда

$$\alpha = \alpha_2 T - \alpha_1 T - \alpha_0. \quad (1.8)$$

В соответствии с неравенствами (1.7), которые указывают на существование перегретого \overleftarrow{T} и переохлажденного \overrightarrow{T} фазовых состояний, зависимость (1.8) можно использовать как кусочно-линейную аппроксимацию экспериментальной диаграммы (фиг. 2-1) для структуры, представляющую включения в корундовой матрице [46]. Фазовое превращение происходит



Фиг. 2-2

во включениях Z_rO_2 , поэтому в формулах (1.7), (1.8) необходимо ограничить изменение до значения объемной концентрации Z_rO_2 ($c \approx 0.33$).

Механические свойства бадделеитокорундовых огнеупоров в сильной степени зависят от температурного режима остывания, что вообще характерно для материалов стеклокерамических, получаемых в процессах плавления. Неконтролируемый режим остывания может создать внутренние напряжения, которые превышают пределы прочности или приводят к недопустимой концентрации микротрещин на различных масштабных уровнях изделия и структуры материала. Если при температурах вблизи точки плавления имеет место быстрая релаксация напряжений за счет ползучести, то последующее понижение температуры характеризуется сильным уменьшением вязких параметров материала, хотя перепады температурных полей, а следовательно, и температурных напряжений, остаются в прежней зависимости от скорости остывания. К макронапряжениям, созданным неоднородным температурным полем, прибавятся микронапряжения, созданные изменением плотности фаз в процессе кристаллизации. Причем, скачок деформаций при переходе к новой фазе не только соизмерим по величине с температурной деформацией, но, отнесенный к линейным размерам структуры материала, приводит к уровню микронапряжений, значительно превышающему макронапряжения. Одним из способов уменьшения уровня микронапряжений является подбор однородного по механическим свойствам состава материала. Так компоненты бадделеитокорундовых огнеупоров характеризуются незначительными различиями коэффициентов линейного температурного расширения, однако эффект использования однородных параметров имеет смысл, если эти параметры одинаковым образом изменяются в технологических процессах. В первую очередь это относится к разностям температурных коэффициентов расширения, которые инициируют образование внутренних напряжений.

Прогнозирование и выбор температурных режимов являются взаимодействующими задачами определения макронапряжений и микронапряжений, сумма которых не должна превышать заданных пределов на протяжении процесса остывания.

Средние напряжения включения $\langle \sigma_{ij} \rangle_1$ и матрицы $\langle \sigma_{ij} \rangle_2$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= \langle \sigma_{ij} \rangle_1 c + \langle \sigma_{ij} \rangle_2 (1 - c); \\ \langle \varepsilon \sigma'_{ij} \rangle &= c (\langle \sigma_{ij} \rangle_1 - \langle \sigma_{ij} \rangle). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Из этих соотношений и (1.2) вычисляются средние напряжения в матрице при

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_2 = 2A\alpha c \delta_{ij} / 3. \quad (1.10)$$

Если в процессе фазового перехода образуются включения с меньшей плотностью $\alpha > 0$, то матрица находится в условиях растягивающих напряжений, способствующих развитию микротрещин.

В хрупких материалах низкий предел прочности часто объясняется концентрацией напряжений на микротрещинах и других дефектах структуры. Низкий предел пластичности или малая вязкость определяют прочность в смысле недопустимости больших деформаций или потери устойчивости, а в таких процессах, как релаксация внутренних напряжений и остановка микротрещин за счет закругления их краев, влияние пластичности на промежуточных технологических этапах благоприятствует образованию прочных структур с малой концентрацией микротрещин.

Анализ свойств некоторых материалов на основе ZrO_2 [46] показывает, что для температур выше 1200°C изменение вязких свойств определено концентрацией кристаллической фазы. Малый предел пластичности стеклообразной фазы в основном определяет релаксацию напряжений. Учитывая, что для релаксации напряжений существенна вязкость стеклообразной матрицы, а для макронапряжений – вязкость смеси, можно сделать вывод с необходимости разделения роли микро- и макропроцессов, протекающих параллельно. Их взаимодействие приводит к зависимости свойств материала от тепловой истории технологического режима.

После окончания кристаллизации процесс релаксации напряжений значительно замедлен. В этом режиме основное влияние на разрушение оказывают температурные макронапряжения, которые можно уменьшить выбором режима охлаждения. Расчет этих процессов основывается на хорошо разработанных и многочисленных исследованиях по термоупругости. Применение этих методов оправдано в тех интервалах температур, где не возникают полиморфные превращения. При температуре фазовых переходов в твердом состоянии основную роль в процессах разрушения играет образование включений новой модификации кристаллов с меньшей плотностью. В этом случае матрица является связуемым включений, которые при достижении предела прочности матрицы превратят материал в несвязанные частицы.

Учитывая, что при высоких температурах разрушению за счет внутренних напряжений противостоит процесс релаксации, то в интервале низких температур сосредоточились почти все неблагоприятные для прочности факторы:

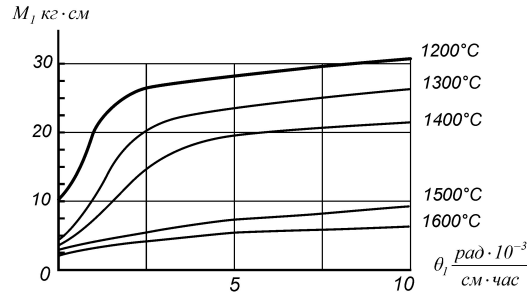
- 1) хрупкий характер разрушения, определенный развитием микротрещин;
- 2) значительно понижено влияние процессов релаксации микро- и макронапряжений;
- 3) образование растягивающих напряжений в матрице;
- 4) сложение растягивающих температурных напряжений на поверхности охлаждаемого изделия с микронапряжениями.

Исследование этих процессов на различных этапах технологического режима в условиях высоких температур представляет значительные трудности для эмпирических методов. Имеющиеся экспериментальные данные косвенным образом характеризуют внутрискруктурные процессы. Сравнение этих данных с теоретическими позволяет выбрать расчетные методы, с помощью которых возможно прогнозирование процессов в более широкой вариации внешних условий, а следовательно, возможен выбор оптимального режима.

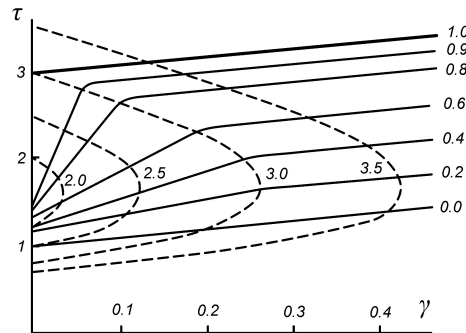
§ 2. Установившаяся ползучесть огнеупорных композитов

Огнеупоры на основе корунда с высокой концентрацией включений ZrO_2 в интервале температур $1000^\circ - 1800^\circ$ проявляют аномальные изменения скорости ползучести.

Кручение цилиндрических образцов в условиях установившейся ползучести исследовались [42] при различных температурах. Характерная зависимость (фиг. 2-3) скорости ползучести от нагрузки показывает, что аномальное изменение вязкости происходит в области температур фазового превращения ZrO_2 [42].



Фиг. 2-3 [42]



Фиг. 2-4

С целью аппроксимации зависимости, показанной на фиг. 2-4, воспользуемся видоизменением модели Бингама.

Диссипативные функции выберем различными для малых и больших скоростей деформаций ε_{ij} и соответствующих напряжений σ_{ij} [43].

$$D = k\sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} + \frac{1}{2}\nu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}; \tag{2.1}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{11}\delta_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}}. \tag{2.2}$$

Здесь k – предел пластичности, ν – коэффициент вязкости, индексом "a" будем отмечать тоже величины K_a, ν_a для больших скоростей деформаций.

Инварианты $\gamma = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}, \tau = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ одновременно служат обозначениями сдвиговых компонент в задаче о кручении. В полярной системе координат (ρ, φ) максимальные напряжения достигаются на поверхности стержня $\rho = R$, а переход от зависимости $\tau = k + \nu\gamma$ и $\tau = k_a + \nu_a\gamma$ может иметь место при $\rho = R_1$. Зона интенсивной ползучести $\rho > R_1$ с ростом

напряжений распространяется к центру стержня. Можно показать, что кусочно-линейная зависимость $\tau(\gamma)$ переходит в гладкое сопряжение для зависимости крутящего момента M от скорости кручения θ . Так как $\gamma = \theta\rho$, получим

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \left[\int_0^{R_1} \tau\rho^2 d\rho + \int_{R_1}^R \tau\rho^2 d\rho \right]; \\ M &= 2\pi \left[k\frac{R^3}{3} + \nu\theta\frac{R^4}{4} \right], \quad (R_1 > R); \\ M &= 2\pi \left[k_a\frac{R^3}{3} + \nu_a\frac{R^4}{4} + \frac{(k_a-k)^4}{12\theta^3(\nu_a-\nu)^3} \right]; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$R_1 = \frac{1}{\theta} \frac{k_a - k}{\nu_a - \nu} \leq R. \quad (2.4)$$

Зависимость (2.3), (2.4) связывает параметры аппроксимирующих зависимостей (фиг. 3-3) с параметрами обобщенной модели Бингама k, k_a, ν, ν_a . Формула (2.3) определяет линейную зависимость от θ , а формула (2.4) – асимптотически линейную ($\theta \rightarrow \infty$), что позволяет вычислять параметры кусочно-линейной зависимости $\tau(\gamma)$ по данным эксперимента (фиг. 2-3).

При остывании электроплавленного огнеупора в стеклообразной матрице, содержащей кристаллы ZrO_2 , увеличивается вязкость за счет образования жестких кристаллов корунда. В этих условиях материал способен воспринимать высокие напряжения, которые могут вызвать пластические деформации кристаллов ZrO_2 , двойниковая структура последних объясняет существование предела пластичности и малую вязкость включений.

Используя эти утверждения как гипотезу, покажем, что двухфазная структура, компоненты которой удовлетворяют соотношениям Бингама, описывается реологическими соотношениями, характеризующими аномальный переход к большим скоростям ползучести. Этому переходу соответствует начало пластического деформирования включений.

Двухфазная структура материала состоит из вязкопластических компонент, подчиняющихся реологическим уравнениям Бингама, задающим связь между напряжениями σ_{ij} и скоростями деформаций ε_{ij} в виде

$$s_{ij} = \frac{k\varepsilon_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl}}} + \nu\varepsilon_{ij}; \quad \varepsilon_{ii} = 0, \quad (2.5)$$

где k – предел пластичности, ν – вязкость матрицы.

Параметры включений с объемной концентрацией будем отмечать индексами k_1, ν_1 .

В макрообъеме V , состоящем из области включений V_1 и матрицы V_2 , диссипативная функция D равна

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{V} \int (k\sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} + \frac{1}{2}\nu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}) dV + \\ &+ \frac{1}{V} \int_{V_1} (k_1\sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} + \frac{1}{2}\nu_1\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}) dV. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В §1 главы 2 предложен метод решения аналогичной задачи в случае идеальнопластических составляющих гетерогенной структуры. Минимизация функционала (2.6) по флуктуациям при фиксированных средних значениях $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$ приводит к вычислению $D(\langle\varepsilon_{ij}\rangle)$ и, следовательно, определяет уравнения для средних напряжений $\langle\sigma_{ij}\rangle = \partial D/\partial\langle\varepsilon_{ij}\rangle$. Для сферических включений используется формула осреднения по области V :

$$\begin{aligned} \langle\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\rangle_1 &\approx \langle\varepsilon_{ij}\rangle_1 \langle\varepsilon_{ij}\rangle_1 \\ \langle\sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}\rangle_2 &\approx \sqrt{\langle\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\rangle_2}, \end{aligned}$$

что соответствует гипотезе оценок функционала (2.6) для оптимально связанных матриц.

Пусть геометрическая структура материала задана изотропной функцией \varkappa , принимающей значение 1 на включениях и 0 – в матрице, $\langle\varkappa\rangle = c = V_1/V$, имеют место соотношения

$$(1-c) \langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle_2 = \langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle - c \langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle_1; \quad (2.7)$$

$$\langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} \rangle = c (\langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 - \langle \varepsilon_{ij} \rangle),$$

где штрихом отмечаются флуктуации.

Введем обозначения

$$J_0^2 = \langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad J_1^2 = \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1,$$

$$J^2 = J_0^2 + \langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} \rangle - c J_1^2.$$

Таким образом функционал (2.6) представляется в следующем виде:

$$D = k\sqrt{1-c}J + kcJ_1 + \frac{1}{2}\nu J^2 + \frac{1}{2}\nu_1 J_1^2 c. \quad (2.8)$$

Условие экстремальности функционала (2.8) приводит к уравнениям

$$k\sqrt{1-c}(\varepsilon'_{ij,j} - \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \varepsilon', j)/J +$$

$$+ k_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \varepsilon', j)/J_2 + \nu \varepsilon_{ij,j} +$$

$$+ (\nu_1 - \nu) \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \varepsilon', j = P', i; \quad (2.9)$$

$$v_{i,j} = 0, \quad (2.10)$$

где P' – флуктуации гидростатического давления.

Решение уравнения (2.9) получим в виде спектральных разложений по волновым числам ξ_i

$$\varepsilon'_{ij} = (\langle \varepsilon_{ik} \rangle_1 \xi_k \xi_j \xi^{-2} + \langle \varepsilon_{jk} \rangle_1 \xi_k \xi_i \xi^{-2} -$$

$$- 2 \langle \varepsilon_{kl} \rangle_1 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l \xi^{-4}) A \varepsilon'; \quad (2.10)$$

$$\xi = \sqrt{\xi_i \xi_i}; \quad A = (\nu_1 + k_1/J_1) / (\nu + k\sqrt{1-c}/J),$$

откуда в силу изотропности ε , следует

$$\langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} \rangle = c (\langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 - \langle \varepsilon_{ij} \rangle) = \frac{2}{5}c(1-c)A \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1; \quad (2.11)$$

$$\langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} \rangle = \frac{2}{5}c(1-c)A^2 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1.$$

Формулы (2.10) дают систему уравнений для вычисления инвариантов J, J_1

$$J_1 (1 - \frac{2}{5}(1-c)A) = J_0; \quad (2.12)$$

$$J^2 = J_0^2 - cJ_1^2 + \frac{2}{5}c(1-c)A^2 J_1^2.$$

В зависимости от напряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle$ возможен процесс деформирования, в котором включения ведут себя как жесткие частицы. Последние начинают деформироваться при достижении критических напряжений. Для недеформированных включений $J_1 = 0$, тогда из формул (2.9)–(2.12) следует

$$D = k\sqrt{1-c}J + \frac{1}{2}\nu J^2;$$

$$J_0 = \frac{2}{5}(1-c)k_1 / (\nu + k\sqrt{1-c}/J); \quad (2.13)$$

$$J = J_0 + \frac{2}{5}c(1-c)k_1^2 / (\nu + k\sqrt{1-c}/J)^2.$$

Последние два уравнения раскрывают неопределенность относительно k_1 , следовательно диссипативная функция в случае жестких включений примет вид

$$D = kJ_0 \sqrt{1 + \frac{3}{2}c} + \frac{1}{2}\nu \frac{1 + \frac{3}{2}c}{1-c} J_0^2. \quad (2.14)$$

Нетрудно указать в зависимости (2.14) значения пределов пластичности и вязкости материала, содержащего жесткие включения.

Критическое значение интенсивности J_0^* деформирования, при которой напряжения включений достигают предела пластичности k_1 , следует из (2.13)

$$k_1 = \frac{5}{2} \left(\frac{k}{\sqrt{1 + \frac{3}{2}c}} + \frac{\nu}{1-c} J_0^* \right). \quad (2.15)$$

Перейдем к определению реологической модели в случае, когда обе фазы находятся в пластическом состоянии. Из формулы (2.15) следует, что при $k_1 \leq \frac{5}{2}k$ включения находятся в пластическом состоянии с начального момента деформирования. В ином случае процесс происходит с жесткими включениями по формулам (2.14), а затем при достижении критической скорости деформирования J_0^* , имеют место общие соотношения (2.10)–(2.13), учитывающие пластичность включений.

Зависимость между интенсивностями $\tau = \sqrt{\langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle} / k$ и $\gamma = J_0 \nu / k$ для различных c и параметрах, составляющих композит, можно представить в плоскости (τ, γ) в виде семейства кривых, разделенных границей $\gamma = \gamma^*(c)$, $\tau = \tau^*(c)$ (фиг. 2-4):

$$\begin{aligned} \gamma^*(c) &= (1-c) \left(\frac{5}{2} \frac{k_1}{k} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{2}c}} \right); \\ \tau^*(c) &= \frac{5}{2} \frac{k_1}{k} \left(1 + \frac{3}{2}c \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

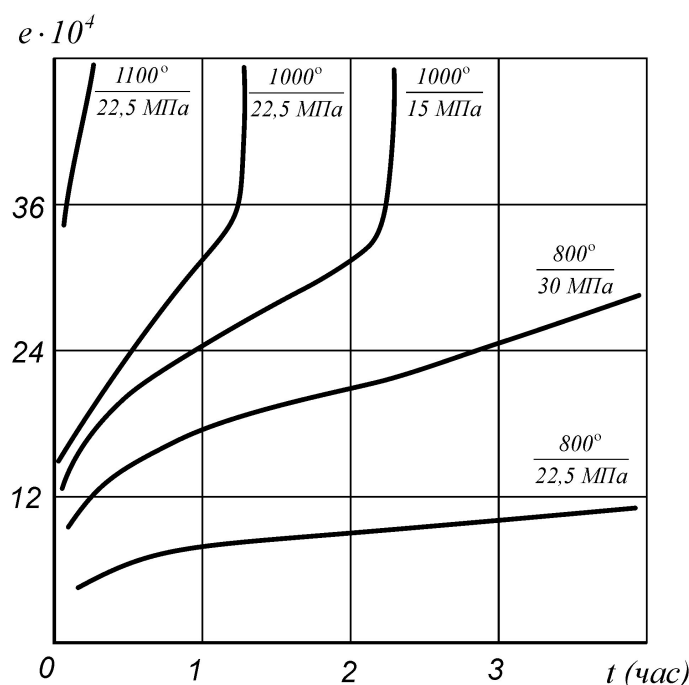
соответствующей точкам перехода включений в пластическое состояние. На (фиг. 2-4) эти границы показаны пунктирными линиями с указанием значений k_1/k . Слева от границы материал характеризуется состояниями Бингама

$$\tau = \sqrt{1 + \frac{3}{2}c} + \frac{1 + \frac{3}{2}c}{1-c} \gamma, \quad (2.17)$$

а справа – нелинейной зависимостью, которая при $\gamma \rightarrow \infty$ приближается к линейной с асимптотическим пределом пластичности k_a и вязкостью ν_a

$$\begin{aligned} \frac{\nu_a}{\nu} &= 1 - c \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) / \left[1 - \frac{2}{5} (1-c) \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right]; \\ \frac{k_a}{k} &= \frac{1 - \frac{2}{5} (1-c) (1 - \nu_1/\nu)}{(1-c) \sqrt{\left(1 - \frac{2}{5} (1-c) (1 - \nu_1/\nu) \right)^2 + \frac{6}{25} c (1 - \nu_1/\nu)^2} + \frac{k_1}{k} c}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Необходимость использования полученных соотношений связана с тем, что в поле высоких температур исследование микроструктуры технически трудно осуществимо. Полученные соотношения позволяют связать параметры, измеренные в макроэксперименте, с концентрацией и параметрами составляющих, таких как корунд и бадделент, получивших широкое применение в огнеупорных композициях [43]. Эти составляющие достаточно хорошо изучены при различных температурах. Однако зависимость от тепловой истории процесса образования структуры, требует использования расчетных методов. Полученные формулы могут быть применены для вычислений параметров матрицы с включениями $Z_r O_2$. Затем, основываясь на гипотезе самосогласования, вычисляются свойства матрицы как композиции из кристаллов корунда и стеклообразного связывающего, т. е. снова применяются полученные здесь формулы, но уже для жестких включений. Свойства $Z_r O_2$ и кристаллов корунда стабильны, но концентрация стеклообразной фазы сильно отличается от тепловой истории, что является целью вычислений, использующих эмпирические данные.



Фиг. 2-5 [42]

§ 3. Процессы неустановившейся ползучести в двухфазных электроплавленных огнеупорах

Использование включений ZrO_2 в составе электроплавленных огнеупоров и керамических материалов существенно повышает термостойкость изделий. Прочностные характеристики удовлетворяют условиям, при которых оказывается возможным изготовление газотурбинных двигателей из керамических материалов [41].

Рассмотрим реологию процессов деформирования и ее связь со структурой материалов, в данном случае, огнеупоров типа бекор с концентрацией ZrO_2 , достигающей 90 %. Матрица структуры представляет стеклообразные и кристаллические состояния корунда; включения ZrO_2 по форме близки к сферическим. Установившаяся ползучесть описывается кусочно-линейной зависимостью. Наблюдаемый излом кривой ползучести соответствует переходу к существенно большим скоростям деформаций, что достигается при некоторых критических напряжениях [42]. Исследования ползучести при изменении температуры показывает [42], что ускорение деформаций происходит в области температуры фазового превращения ZrO_2 . При понижении температуры скорость ползучести уменьшается и материал в состоянии воспринимать значительные напряжения, которые могут вызвать пластическое состояние включений ZrO_2 , характерное для двойниковых кристаллов. Это предположение подтверждается также экспериментальными данными (фиг. 2-5) по неустановившейся ползучести деформаций $e(t)$ при постоянных напряжениях σ . Верхние числа на фиг. 3-5 показывают температуру, нижние – напряжения. При достижении пластичности ZrO_2 происходит перераспределение нагрузок в матрице и включениях, которые перестают воспринимать последующий рост напряжений, что приводит к росту деформаций матрицы и ее разрушению. В рассматриваемом случае содержание ZrO_2 – 68 %.

Рассмотрим гетерогенную систему, состоящую из компонентов с упругими постоянными Ламе μ , λ в матрице и μ_1 , λ_1 включений. Пусть макрообъем V находится в статистически однородном состоянии. Области включений V_1 заданы индикаторной функцией. Включения

имеют некоторую неупругую деформацию p_{ij} , тогда упругую энергию, отнесенную к объему V , можно представить в виде

$$\langle W \rangle = \frac{1}{V} \left[\int_V W dV + \int_{V_1} (W_1 - W) dV \right], \quad (3.1)$$

где

$$W_1 - W = \mu_1 (e_{ij} - p_{ij}) (e_{ij} - p_{ij}) + \frac{1}{2} \lambda_1 e_{ll}^2 - \mu e_{ij} e_{ij} - \frac{1}{2} \lambda e_{ll}^2, \\ p_{ii} = 0, \quad e_{ij} - \text{деформации.}$$

Воспользуемся предположениями главы 1, которые эквивалентны замене в (3.1) деформированных состояний включений средними по объему включениями

$$\langle W \rangle = \mu \langle e_{ij} e_{ij} \rangle + \frac{1}{2} \lambda \langle e_{ll}^2 \rangle + (\mu_1 - \mu) c \langle e_{ij} \rangle_1 \langle e_{ij} \rangle_1 + \\ + \frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda) c \langle e_{ll} \rangle_1^2 (\mu_1 p_{ij} p_{ij} c - 2\mu_1 c \langle e_{ij} \rangle_1 p_{ij}); \quad c = V_1/V. \quad (3.2)$$

Условие экстремальности функционала (3.2) относительно флуктуаций перемещений u'_i определено уравнением

$$2\mu e'_{ij,j} + \lambda e'_{ll,i} + a_{ij} \varkappa', \quad i = 0; \\ a_{ij} = 2(\mu_1 - \mu) \langle e_{ij} \rangle_1 + (\lambda_1 - \lambda) \langle e_{ll} \rangle_1 \delta_{ij} - 2\mu_1 p_{ij}. \quad (3.3)$$

В случае изотропной функции \varkappa из решения уравнения (3.3) и соотношения $\langle \varkappa' \varepsilon'_{ij} \rangle = c(\langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 - \langle \varepsilon_{ij} \rangle)$ для девиаторной ε_{ij} и шаровой частей тензора e_{ij} следует

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 - \langle \varepsilon_{ij} \rangle = a(1-c) \left[\mu' \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 - \mu_1 p_{ij} \frac{1}{\mu} \right]; \\ \langle \varepsilon_{ll} \rangle_1 - \langle \varepsilon_{ll} \rangle = -b(1-c) (2\mu' + 3\lambda') \langle \varepsilon_{ll} \rangle_1; \\ \mu' = (\mu_1 - \mu)/\mu; \quad \lambda' = (\lambda_1 - \lambda)/\mu; \\ a = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{5} \frac{\lambda + \mu}{2\mu + \lambda} \right); \\ b = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\lambda + \mu}{2\mu + \lambda} \right). \quad (3.4)$$

Из этих соотношений вычисляются $\langle e_{ij} \rangle_1$, которые после подстановки в (3.2) определяют упругую энергию $\langle W \rangle$ и, следовательно, макронапряжения

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \partial \langle W \rangle / \partial \langle e_{ij} \rangle; \\ \langle s_{ij} \rangle = 2\mu \langle \varepsilon_{ij} \rangle + c \frac{2(\mu_1 - \mu) \langle \varepsilon_{ij} \rangle - 2\mu_1 p_{ij}}{1 - a(1-c)\mu'}; \\ s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ll} \delta_{ij} / 3; \\ \langle \sigma_{ll} \rangle = (2\mu + 3\lambda) \langle e_{ll} \rangle + c \frac{(2\mu' + 3\lambda') \langle e_{ll} \rangle}{1 + b(1-c)(2\mu' + 3\lambda')}. \quad (3.5)$$

Напряжения включений вычисляются из (3.4)

$$\langle s_{ij} \rangle_1 = 2\mu_1 (\langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 - p_{ij}) = \\ = 2\mu_1 \frac{\langle \varepsilon_{ij} \rangle - p_{ij} (1 - a(1-a))}{1 + a(1-c)\mu'}. \quad (3.6)$$

Соотношения (3.5), (3.6) для девиаторных составляющих тензоров представим в виде

$$\sigma = L e + \sigma^*, \quad \sigma^* = L_1 (e - p^*); \quad (3.7)$$

$$\sigma^* = \frac{c\sigma_1}{1 - a(1-c)}, \quad p^* = (1 - a(1-c)) p; \quad (3.8)$$

$$L = \frac{2\mu(1-c)(1-a)}{1 - a(1-c)}; \quad (3.9)$$

$$L_1 = \frac{2\mu_1 c}{(1 - a(1 - c))(1 + a(1 - c)\mu')}, \quad (3.10)$$

здесь σ_1, p – напряжения и пластические деформации включений (знаки осреднения и тензорные индексы опущены).

Рассмотрим материал, матрица которого представляет собой среду Максвелла ($de/dt = (\sigma\eta) + (d\sigma/dt)/(2\mu)$), η – вязкость, объемные деформации – упругие. Закон образования пластических деформаций включений пока произволен, то есть p – некоторая функция времени t . Соотношения (3.7)–(3.10) являются результатом решения задачи для линейно упругого тела, поэтому для перехода к вязкоупругим соотношениям достаточно воспользоваться преобразованием Лапласа. Изображения функций обозначим теми же буквами. Упругая постоянная 2μ в соотношениях (3.7)–(3.10) заменяется оператором

$$S/[\eta^{-1} + S(2\mu)^{-1}],$$

где S – параметр преобразования Лапласа, 2μ – упругая постоянная среды Максвелла. Тогда параметры L, L_1 можно представить операторами [4]:

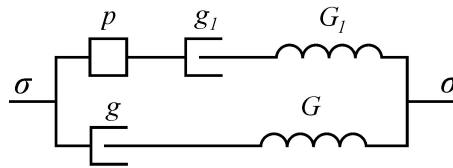
$$L_1 = \frac{S}{\frac{S}{G_1} + \frac{1}{g_1}}, \quad L = \frac{S}{\frac{S}{G} + \frac{1}{g}}; \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{G_1} = \frac{(1-a(1-c))}{c} \left[\frac{1-a(1-c)}{2\mu_1} + \frac{a(1-c)}{2\mu} \right];$$

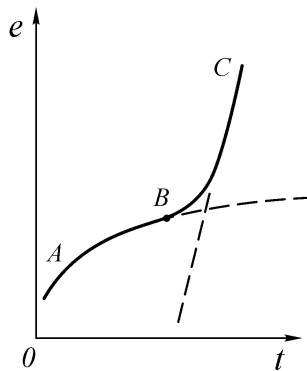
$$g_1 = c\eta [a(1-c)(1-a(1-c))]^{-1};$$

$$G = 2\mu(1-c)(1-a)/(1-a(1-c)); \quad (3.12)$$

$$g = \eta(1-c)(1-a)/(1-a(1-c)).$$



Фиг. 2-6



Фиг. 2-7

В общем случае величина a является оператором, но учитывая, что вязкие деформации не изменяют объема, полагаем $a = 2/5$. Операторы (3.11) определены постоянными (3.12), которые выражены через характеристики структуры материала. Вид операторов L , L_1 соответствует моделям Максвелла с жесткостями G , G_1 и вязкостью g , g_1 . Эти модели включены в более сложную реологическую систему (3.7), которую можно интерпретировать схемой параллельных и последовательных соединений элементов пластичности p , вязкости g , g_1 , упругости G , G_1 (фиг. 3-6).

Пусть пластические деформации включения появляются после достижения предела пластичности $\sigma_1 = k_0 + \eta_0 dp/dt$, то есть пластичность включения описывается моделью Бингама, которая в переменных (3.8) примет вид

$$\begin{aligned}\sigma^* &= k^* + \eta^* \frac{dp^*}{dt}; \\ k^* &= k_0 c / [1 - a(1 - c)]; \\ \eta^* &= \eta_0 c / [1 - a(1 - c)]^2.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Рассмотрим процесс ползучести при $\sigma = const$, полагая $\sigma^* < k^*$ или $p^* = 0$, тогда из соотношений (3.1), (3.5) следует

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sigma^*}{g_1} + \frac{1}{G_1} \frac{d\sigma^*}{dt} = \frac{\sigma - \sigma^*}{g} + \frac{1}{G} \frac{d(\sigma - \sigma^*)}{dt}, \quad (3.14)$$

то есть имеет место линейное вязко-упругое деформирование, при котором напряжения включений изменяются по закону

$$\begin{aligned}\sigma^* &= \sigma \left\{ \left(1 + \frac{g}{g_1}\right)^{-1} + \left[\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)^{-1} - \left(1 + \frac{g}{g_1}\right)^{-1} \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right\}, \\ \tau &= \frac{g}{G} \left(1 + \frac{g}{g_1}\right) / \left(1 + \frac{G}{G_1}\right).\end{aligned}\quad (3.15)$$

Таким образом, напряжения включений растут, если $(g_1/g) > (G_1/G)$, что в силу соотношений (3.12) эквивалентно неравенству

$$1 > \left[1 + \frac{\mu}{\mu_1} \frac{1 - a(1 - c)}{a(1 - c)} \right]^{-1},$$

которое всегда выполняется.

Напряжения включений асимптотически стремятся к значению $\sigma_a^* = \sigma / (1 + g/g_1)$, которое для достаточно больших σ превышает k^* и, следовательно, наступит момент, когда включения начнут пластически деформироваться. В этом случае соотношения (3.7), (3.11), (3.13) приводят к следующему закону деформирования:

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \frac{\sigma^*}{g_1} + \frac{1}{G_1} \frac{d\sigma^*}{dt} + \frac{\sigma^* - k^*}{\eta^*} = \\ &= (\sigma - \sigma^*)/g + \frac{d(\sigma + \sigma^*)}{dt} \frac{1}{G},\end{aligned}\quad (3.16)$$

который в момент $\sigma^* = k^*$ плавно сопрягается с законом деформирования (3.14). На фиг. 2-6 участок AB соответствует уравнениям (3.14), в BC – уравнениям (2.16). Напряжения σ^* асимптотически стремятся к значению

$$\sigma_a^* = \left(\sigma + k^* \frac{g}{\eta^*} \right) / \left(1 + \frac{g}{\eta^*} + \frac{g}{g_1} \right).$$

Асимптотика участка BC соответствует скорости деформирования

$$\frac{de}{dt} \rightarrow \frac{1}{g} \left[\sigma \left(1 + \frac{g_1}{g} \right) - k^* \frac{g_1}{\eta^*} \right] / \left(1 + \frac{g_1}{g} + \frac{g_1}{\eta^*} \right).$$

Аппроксимация кривых ползучести (фиг. 2-5) на основании полученных асимптотических значений (фиг. 2-6, пунктир) показывает, что включения ведут себя почти идеально пластически $\eta_0 = \eta^* \approx 0$, $\sigma^* \approx k^*$. Так как напряжения макрообъема $\langle \sigma \rangle$ связаны с напряжениями матрицы $\langle \sigma \rangle_2$ и $\langle \sigma \rangle_1$, что равно пределу пластичности включений, следует, что рост напряжений

$$\langle \sigma \rangle = (1 - c) \langle \sigma \rangle_2 + c \langle \sigma \rangle_1$$

в материале приводит лишь к росту напряжений в матрице. Из сказанного следует, что состояние включений определяет управление, в том смысле, что $\sigma^* < k^*$, напряженным состоянием материала, при котором имеет место вязкое деформирование стеклообразной фазы.

ГЛАВА 3. ПЛАСТИЧНОСТЬ ДОМЕННЫХ СТРУКТУР

§ 1. Ферроупругость

Ферроупругие материалы [61-64], часто именуемые “формозапоминающими”, обладают рядом уникальных физико-механических свойств, делающих их применение в технике весьма перспективным. Уже сейчас имеются механизмы и конструкции на базе таких сплавов, промышленное производство которых налажено и не препятствует более широкому внедрению. Необходимыми становятся методы расчета напряжений и деформации тел, уникальное поведение которых с точки зрения установившихся представлений состоит в следующем [61-64]:

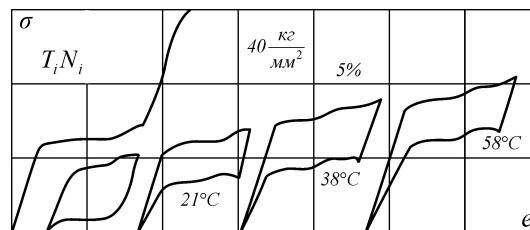
- в ограниченности неупругих деформаций, за которыми вновь следует упругая область деформирования (фиг. 5-1);
- в возможности их исчезновения либо сразу при разгрузке, либо при нагреве, соответственно сверхупругость и память формы (фиг. 3-1);
- в накоплении и возврате неупругих деформаций при термоциклировании упруго нагруженного постоянным усилием образца через характерный для данного сплава интервал температур (фиг. 3-2);
- в сильной линейной зависимости условного предела пластичности от температуры (фиг. 3-1).

Повышение температуры деформирования до некоторой величины M_α приводит к потере способности сплава к обратимому деформированию: при $T \geq M_\alpha$ наблюдается обычное пластическое течение (дислокации подвижны).

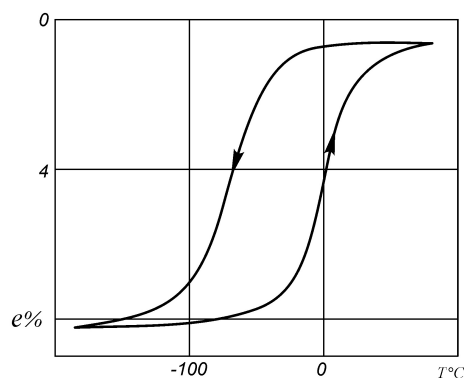
Так называемое ферроупругое деформирование (фиг. 3-3) является непосредственной причиной возможного возврата формы при нагреве (память формы). Суть эффекта состоит в следующем. Если сплаву при достаточно высоких температурах обычным пластическим деформированием задать определенную форму, а затем, охладив образец через характерный интервал температур, продеформировать в пределах ферроупругой петли, то в процессе последующего нагрева образец вернет себе исходную форму, даже совершая работу против препятствующих этому внешних сил (фиг. 5-2).

Исследования показывают, что необходимое механическое поведение “формозапоминающих” сплавов является следствием протекания в них обратимого термоупругого мартенситного превращения – это фазовый переход 1 рода, который может быть инициирован не только воздействием температуры, но и сравнительно небольшими внешними усилиями, т. е. полем упругих напряжений. При этом развитие неупругие деформации определяются различием кристаллических решеток фаз и возможностью появления и роста упорядоченно ориентированных включений новой фазы.

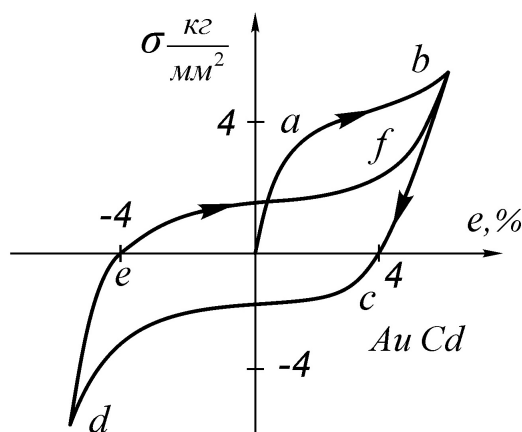
Методы механики сплошных сред на масштабном уровне фазовой структуры твердых материалов основаны на предположении, согласно которому частицы образований с различными механическими свойствами являются сплошными и однородными, а граница раздела фаз представляет собой поверхность разрыва параметров.



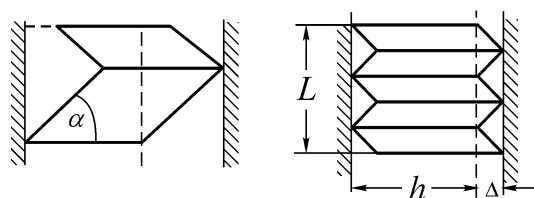
Фиг. 3-1 [61]



Фиг. 3-2



Фиг. 3-3 [62]



Фиг. 3-4

Фазовые превращения в твердых телах обусловлены полиморфизмом кристаллических состояний, неустойчивостью твердых растворов и другими физико-химическими свойствами. В более общем смысле процессы рекристаллизации, приводящие к различным ориентациям анизотропных образований, условно можно отнести к фазовым превращениям. Ограничимся превращениями на фазовой границе, связанными с перестройками структуры за счет роста одной фазы в сторону вещества другой. Во многих случаях граница раздела фаз является

переходным слоем, в котором нарушена правильность расположения атомов, имеются скопления дислокаций, повышена концентрация примесей, уменьшающих поверхностную энергию. Разнообразие физических явлений при фазовых переходах приводит к необходимости феноменологического описания процессов на масштабных уровнях макрообъема материала или структуры фазовых образований. Фазовая структура материала в значительной степени отвечает за прочностные, пластические и другие деформационные свойства.

Определение макросвойств материала состоит из исследований условий фазового перехода на границе фаз, решения задачи для гетерогенной системы, вычисления параметров истории процесса и связи между макронапряжениями и макродеформациями.

В работах ряда авторов исследуется проблема влияния фазового превращения на напряженно-деформированное состояние твердых тел. Например, в работах [66-69] фазовый переход аппроксимировался поверхностью разрыва тензора деформаций, скачок которого равнялся известному деформационному эффекту превращения. Движение поверхности считалось известным или определялось решением уравнения теплопроводности. С учетом этого формулировались исходные уравнения и вычислялись искомые величины.

Существует общий феноменологический подход, развиваемый в работах [70-71]. Здесь методами механики сплошной среды и термодинамики необратимых процессов получены системы уравнений, описывающих во взаимосвязи процессы деформации, объемного фазового превращения, теплопроводности, диффузии и т. д.

В настоящей работе рассматриваются бездиффузные фазовые превращения, характерные для ферроупругих материалов с когерентным распределением фаз. Геометрическую структуру фазовых превращений можно представить изменяющейся поверхностью раздела фаз Σ . Условия перемещения границы соответствуют условиям фазового перехода, которые выражают термодинамическую оптимальность превращения как функцию напряжений и температуры. Дальнейшее рассмотрение ограничивается материалом, состоящим из двух фаз, параметры которых имеют индексы 1, 2; разрыв параметров обозначается квадратными скобками $[a] = a_2 - a_1$. Положительное направление скорости движения поверхности Σ в направлении нормали n_i соответствует фазовому переходу $1 \rightarrow 2$.

Рассмотрим изотермический процесс превращений, в котором перемещения u_i непрерывны при переходе через поверхность Σ . В этом случае статические и кинематические условия на поверхности разрыва [72] имеют вид:

$$[u_{i,j}]c = [v_i]n_j; \quad [\sigma_{ij}]n_j = 0; \quad \left(v_i = \frac{du_i}{dt} \right). \quad (1.1)$$

Из закона сохранения энергии следует значение работы напряжений σ_{ij} на поверхности разрыва параметров [73]:

$$\sigma_{ij}n_j[v_i] = c[U] + D, \quad (1.2)$$

где U – внутренняя энергия на единицу объема; D – мощность на единицу поверхности, расходуемая на диссипацию.

В процессе фазового превращения разрыв $[v_i]$ приводит к образованию неупругих деформаций $[p_{ij}]$, которые оставляет за собой движущая поверхность Σ . Для неподвижной поверхности Σ разрыв скорости $[v_i] = 0$, так как иначе образуются бесконечные значения деформаций и их скоростей. Такого типа разрывы возможны в идеальной пластичности или образуют трещины, во всяком случае здесь они исключаются. Для линейного упругого материала $U = \sigma_{ij}\mu_{ijkl}\sigma_{kl}/2 + g$, где g – химическая и тепловая составляющие энергии, термодинамический потенциал G определяется соотношением:

$$G = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\mu_{ijkl}\sigma_{kl} + \sigma_{ij}p_{ij} + g; \quad e_{ij} = \partial G / \partial \sigma_{ij} = \mu_{ijkl}\sigma_{kl} + p_{ij}. \quad (1.3)$$

Из закона Гука следует также

$$[e_{ij}]c = [v_{(i} n_{j)}] = c \{[\mu_{ijkl}] \sigma_{kl1} + \mu_{ijkl2} [\sigma_{kl}] + [p_{ij}]\}, \quad (1.4)$$

где круглыми скобками обозначена симметризация.

Из соотношений (1.2), (1.4) получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_{ij1} [\mu_{ijkl}] \sigma_{kl1} + [p_{ij1}] \sigma_{ij1} - \frac{1}{2} [\sigma_{ij}] \nu_{ijkl}^{-1} [\sigma_{kl}] + [g] &= D/c; \\ \nu_{ijkl}^{-1} &= \mu_{ijkl2} = \mu_{ijkl1} + [\mu_{ijkl}]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Когерентное сопряжение фаз соответствует случаю, когда кристаллические решетки фаз в плоскости сопряжения совпадают. Фазовое превращение представляет собой упорядоченное перемещение узлов кристаллической решетки на движущейся границе фаз. Когерентный переход имеет место, если полная однородная дисторсия, отсчитанная от состояния недеформированной начальной фазы, равна

$$[u_{i,j}] = \alpha_i n_j, \quad (1.6)$$

где α_i – некоторый вектор, подлежащий определению 5.

Структурная деформация в общем случае не совпадает со выражением $(\alpha_i n_j + \alpha_j n_i)/2$, которое следует из (1.6) и определяется как деформация, которую претерпевает объем исходной фазы при превращении этого объема в новую фазу; при этом имеется в виду, что обе фазы находятся в ненапряженном состоянии 5. Сопоставление формул (1.1), (1.6) и определения $[p_{ij}]$ приводят к выводу, что $\alpha_i = [u_i]/c$, а $[p_{ij}]$ является структурной деформацией.

В формуле (1.5) слагаемое, содержащее разрывы напряжений, определяет энергию внутренних напряжений доменной структуры. Условия статики (1.1) накладывают ограничения на разрыв напряжений, которые совместно с выражением (1.4) позволяют вычислить

$$\begin{aligned} [\sigma_{ij}] \nu_{ijkl}^{-1} [\sigma_{kl}] &= x_{ij} \left\{ \nu_{ijkl} - \nu_{ijmnn} n_n (n_p \nu_{pqms} n_q)^{-1} \nu_{klrs} n_r \right\} x_{kl}; \\ x_{ij} &= [p_{ij}] + [\mu_{ijkl}] \sigma_{kl}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Очевидно, что равенство нулю квадратичной формы соответствует непрерывности напряжений. В тех случаях, когда ориентация фаз удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} [\mu_{ijkl}] &= \mu_{ik} n_j n_l + \mu_{jk} n_i n_l + \mu_{il} n_j n_k + \mu_{jl} n_i n_k; \\ [p_{ij}] &= [p_{(i} n_{j)}]; \end{aligned} \quad (1.8)$$

при некоторых $[p_i]$ и постоянных μ_{ij} , условие непрерывности напряжений выполнено, так как свертка выражения в фигурных скобках (1.7) с вектором n_i тождественно равна нулю.

В кристалле с ориентацией границ и доменов (1.8) условие перехода (1.5) имеет место для непрерывных напряжений

$$\left\{ \frac{1}{2} \sigma_{ij} [\mu_{ijkl}] \sigma_{kl} + [p_i] n_j \sigma_{ij} - [g] \right\} c = D. \quad (1.9)$$

Для определенных полиморфных состояний условия (1.8) могут не реализоваться при любых относительных ориентациях границ и доменов, тогда уровень внутренних напряжений может быть высоким, и доменные структуры в таких кристаллах не образуются. Для ориентаций с незначительным разрывом напряжений условие (1.9) можно использовать как приближение. В работе [75] условие (1.9) рассматривалось с феноменологической точки зрения, что позволило описать ряд характерных свойств ферроупругого деформирования.

Можно показать, что левая часть выражения (1.5) равна разности термодинамических потенциалов

$$[G]c = D. \quad (1.10)$$

Так как $D \geq 0$, то знак $c \neq 0$ определяет направление фазового перехода. Разность $[G]$ по отношению к скорости движения границы является движущей силой необратимого процесса,

в котором диссипация квазиравновесно протекающего процесса предлагается пропорциональной объему образующейся фазы.

$$D = k |c|. \quad (1.11)$$

Постоянные перехода k , определяющие энергию активизации процесса $[G] = k$, в случаях прямого и обратного фазовых превращений могут быть различными. Двойникование – симметричный переход, поэтому k не зависит от направления. Критические значения перепадов термодинамического потенциала $[G]$ являются следствием существования потенциальных барьеров в микросистемах. Микроскопически это условие соответствует существованию пределов текучести материалов, пластические деформации которых являются результатом двойникования и фазовых превращений.

Рассматриваемое континуальное приближение может быть распространено на процессы в сегнетоэлектриках и ферритах, в которых спонтанная поляризация и остаточная намагниченность являются аналогом неупругой деформации. Когерентность переходов, соотношения на поверхностях разрывов полей, совпадение формы своеобразных петель гистерезиса позволяют усмотреть значительную аналогию явлений. Привлечение исследований на дискретно-микроскопическом уровне объясняет причины явлений, однако непосредственное их использование усложняет рассмотрение на последующих масштабных уровнях структуры материала. Выражение (1.10) в силу общих термодинамических определений относится к движению границ в ферритных кристаллах, относительно которых воспользуемся эмпирическими данными по непосредственному измерению скорости границы c . В эксперименте наблюдается критическое значение $[G]$ и линейная зависимость скорости границы от последующего роста $[G]$

$$[G] = k + \nu c, \quad (1.12)$$

где ν – вязкость, постоянная перехода.

Таким образом, в случае квазиравновесного процесса $c \approx 0$ выражение (1.12) переходит в ранее рассмотренные (1.10), (1.11).

Деформации кристаллов, образованные фазовым превращением и двойникованием, в условиях поликристаллической структуры вызывают внутренние напряжения, созданные несоместностью деформаций. Границы фаз и стенки двойников образуют таким образом, чтобы внутренняя энергия кристалла в стесненных условиях была минимальной. На фиг. 3-4 показана плоскопараллельная двойниковая структура, стесненная параллельными плоскостями / последние заштрихованы/. Для того, чтобы кристалл находился в объеме начального параупругого состояния, его нужно сжать на величину Δ . Пусть E – жесткость при сжатии и $W = Ee^2/2$ – энергия сжатия $e = \Delta/h$. Величина структурной деформации, вызванной двойникованием, определена углом α . Ширина двойниковой пластины равна L/N , где N – число пластин в кристалле размером L , тогда $e = L/(hNtg\alpha)$. Поверхностная энергия границ пропорциональна количеству двойниковых пластин βN . Энергия, связанная с двойниковым состоянием, равна

$$W + \beta N = [EL^2/(2h^2 tg^2 \alpha)] N^{-2} + \beta N.$$

Минимум энергии достигается при $N = (EL^2/2h^2 tg^2 \alpha)/\beta$, т. е. пренебрежение поверхностной энергией $\beta = 0$ предполагает неограниченное образование двойниковых пластин. Таким образом, пренебрежение поверхностной энергией, которое принято в настоящей работе, не противоречит наблюдаемым при кристаллографических исследованиях мелкослоистым структурам [65].

Теоретический анализ структур, образующихся в результате бездиффузионного фазового превращения, изложен в работе [65], в которой учтены внутренние напряжения, возникающие

при когерентном сопряжении фаз. Показано, что процесс образования доменов, как и в рассмотренных здесь случаях, обусловлен минимизацией внутренних напряжений. В настоящей работе рассматривается динамика движения границ доменов, скорости которых определяют изменения концентраций различных доменов в кристалле. Если фазовый переход в поликристаллической структуре осуществляется под действием пропорционально изменяющихся напряжений, то ориентация фазовых границ имеет преимущественные направления, близкие к постоянным. В этом случае получаемые здесь соотношения можно использовать для сравнения с данными макроэксперимента, принимая во внимание, что участки текучести при постоянных напряжениях в силу влияния микронапряжений перейдут в несколько наклонные линии.

Перейдем к исследованию системы доменов, образующихся в ферроупругом кристалле. Высокотемпературная фаза /пароупругое состояние/ при переходе в ферроупругое состояние может образовать двойники /диссимметричная фаза/. Структурная деформация в зеркально-симметричных двойниковых состояниях отличается лишь знаком /начало отсчета деформаций ведется от параупругого состояния/.

Пусть λ^+ , λ^- – объемные концентрации двойниковых доменов противоположных ориентаций; $1 - \lambda^+ - \lambda^-$ – концентрация доменов в параупругом состоянии. Соответствующие термодинамические потенциалы представим в виде:

$$\begin{aligned} G^+ &= \frac{1}{2} (\mu_{ijkl} + [\mu_{ijkl}]) \sigma_{ij} \sigma_{kl} + p_i n_j \sigma_{ij} + g + [g]; \\ G^- &= \frac{1}{2} (\mu_{ijkl} + [\mu_{ijkl}]) \sigma_{ij} \sigma_{kl} - p_i n_j \sigma_{ij} + g + [g]; \\ G_1 &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \mu_{ijkl} \sigma_{kl} + g; \end{aligned} \quad (1.20)$$

где μ_{ijkl} , g относятся к параупругому состоянию.

Условия взаимных переходов состояний (1.21) на основании соотношения (1.9) определяются энергией активации прямого k_1 и обратного k_2 переходов, двойникование k

$$X^+ = \frac{1}{2} \sigma_{ij} [\mu_{ijkl}] \sigma_{kl} + p_i n_j \sigma_{ij} + [g] = k_1; \quad (1.21)$$

$$-X^+ = k_2; \quad (1.22)$$

$$X^- = \frac{1}{2} \sigma_{ij} [\mu_{ijkl}] \sigma_{kl} - p_i n_j \sigma_{ij} + [g] = k_1; \quad (1.23)$$

$$-X^- = k_2; \quad (1.24)$$

$$|X^+ - X^-| = |2p_i n_j \sigma_{ij}| = k. \quad (1.25)$$

Термодинамический потенциал системы равен

$$G = G_1 (1 - \lambda^+ - \lambda^-) + \lambda^+ G^+ + \lambda^- G^-; \quad (1.26)$$

тогда полная деформация равна

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \partial G / \partial \sigma_{ij} = \mu_{ijkl} \sigma_{kl} + \\ &+ \lambda^+ ([\mu_{ijkl}] \sigma_{kl} + p_i n_j) + \lambda^- ([\mu_{ijkl}] \sigma_{kl} - p_i n_j) \end{aligned} \quad (1.27)$$

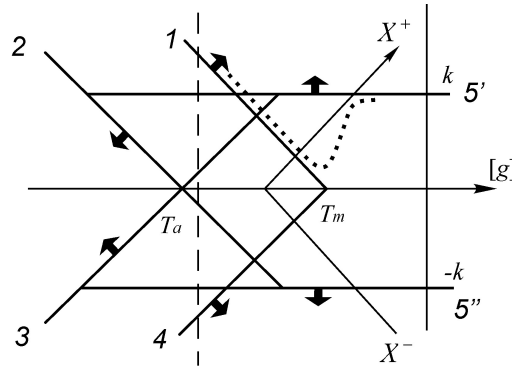
и представляет собой сумму результатов упругого действия напряжений и необратимых изменений λ^+ , λ^- , последние могут происходить при постоянных напряжениях, удовлетворяющих одному из условий (1.21)–(1.25). Так как пределы изменения $0 \leq \lambda^+ \leq 1$, $0 \leq \lambda^- \leq 1$, $0 \leq \lambda^+ + \lambda^- \leq 1$ ограничены, то процесс неупругого деформирования прекращается в предельных или однофазных состояниях. Из соотношений (1.27) следует, что приращения неупругих деформаций градиентальны ($\partial / \partial \sigma_{ij}$) тому условию, которое выполняется для приложенных к кристаллу напряжений.

Перепады термодинамических потенциалов определяют направление движения границ доменов, а следовательно, скорости

$$\begin{aligned}
 & d\lambda^+/dt, \quad d\lambda^-/dt : \\
 & X^+ = k_1, \quad d\lambda^+ \geq 0, \quad d\lambda^- = 0; \\
 & X^+ = k_2, \quad d\lambda^+ \leq 0, \quad d\lambda^- = 0; \\
 & X^+ = k_1, \quad d\lambda^- \geq 0, \quad d\lambda^+ = 0; \\
 & X^- = k_2, \quad d\lambda^- \leq 0, \quad d\lambda^+ = 0; \\
 & X^+ - X^- = \pm k, \quad d\lambda^+ - d\lambda^- \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0; \\
 & d\lambda^+ + d\lambda^- = 0.
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Равенства типа $d\lambda^- = 0$ в этих соотношениях обозначают, что выполняется только одно условие перехода, но если выполнены некоторые два условия одновременно, достаточно потребовать лишь следствия второго закона термодинамики $X^+d\lambda^+ + X^-d\lambda^- \geq 0$. Таким образом соотношения (1.28) определяют термодинамически возможные варианты необратимых процессов.

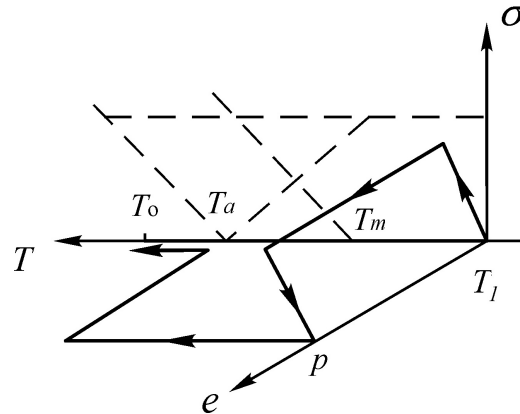
Компоненты вектора $(d\lambda^+, d\lambda^-)$ в проекции на оси координат плоскости $(X^+ X^-)$ ортогональны к условиям перехода и направлены в сторону, соответствующую неравенствам (1.28). Эти направления показаны на фиг. 3-5 короткими стрелками и определяют закономерности движения границ доменов. Правила определения фазовых переходов эквивалентны схеме ассоциированного закона течения с кусочно-линейными условиями текучести.



Фиг. 3-5

Угловым точкам пересечения условий соответствует веер направлений $(d\lambda^+, d\lambda^-)$, лежащих между крайними ортогональными направлениями (1.28). Особенность состоит в том, что достижение предельных значений $\lambda^+ + \lambda^- = 1; 0$ при фазовом переходе или $\lambda^+; \lambda^- = 0; 1$ при двойниковании, прекращает необратимый процесс и оказывается возможным последующий рост напряжений с упругим деформированием. Но в этом случае может быть достигнут потенциальный барьер для других переходов, условия которых снова образуют невыпуклую область.

Возникающие неоднородности, спонтанный рост деформаций при постоянных напряжениях аналогичны идеальной пластичности и характерны для ферроупругих материалов. Исследуем процесс деформирования, определенный условиями (1.21)–(1.25) при различных температурах. Разность $[g(T)]$ при $\sigma_{ij} = 0$ определяет фазовые превращения, поэтому в качестве



Фиг. 3-6

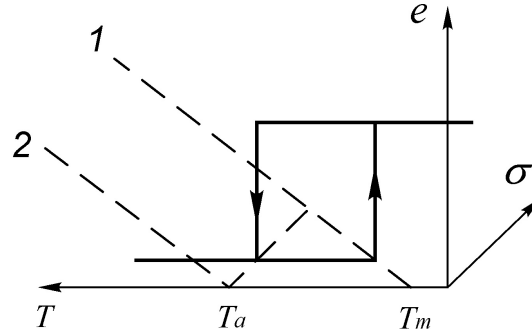
параметра, взаимоднозначно связанного с температурой, выберем $[g(T)]$. Нагружение будем производить какой-либо одной компонентой $\sigma = \sigma_{ij}$, тогда условия (1.21)–(1.25) можно представить в плоскости $(\sigma, [g])$ (фиг. 5-5). Изменения упругих модулей в ферроупругих материалах незначительны, поэтому рассматриваемые условия в плоскости $(\sigma, [g])$ близкие к схематично представленным на фиг. 5 линейным зависимостям, цифры возле линий соответствуют второму номеру формул (1.21)–(1.25).

В окрестности температур фазовых переходов термодинамический потенциал гетерогенной системы как функция температуры содержит особенности, но для однородных образований структуры, каждой из фаз в отдельности предполагаем возможность линейной аппроксимации $g(T)$. Тогда $[g(T)]$ определяет напряжения $\sigma^0(T)$, при которых начинается процесс ферроупругого деформирования. Если изменение упругих постоянных фаз несущественно, соотношения (1.21)–(1.25) определяют линейную зависимость $\sigma^0(T)$ в области $T > T_m$ (фиг. 5-5) и скачкообразный характер перехода при $T \leq T_m$. Точка перехода T_m соответствует сверхпластичности, т. е. незначительные напряжения – лишь зависимость после выбора соответствующих размерностей, на фиг. 3-5 зависимость показана точками, которые соответствуют верхним площадкам текучести фиг. 3-1.

Рассмотрим пример циклического нагружения при температуре T сплава в начальном параупругом состоянии в области сосуществования фаз. Рост напряжения /пунктирная линия фиг. 3-5/ пересекает условия 5, 3, 1. Условия 5, 3 не реализуют перехода, так как отсутствуют ферроупругие домены. Условие 1 приводит к образованию доменов λ^+ и неупругого деформирования $a - b$ (фиг. 3-3). Если переход полный $\lambda^+ = 1$, дальнейший рост напряжений происходит упруго, а разгрузка не реализует переходов 3, 5, так как $\lambda^- = 0$. Нагрузка в противоположном направлении $b - c$ (фиг. 3-3) при достижении условия 5 приводит к двойникованию $\lambda^+ \rightarrow 0$, $\lambda^- \rightarrow 1$ и деформированию $c - d$; при догрузке условия 2, 4 остаются нереализованными, т. к. $\lambda^+ = 0$. Разгрузка $d - e$ и последующее двойникование $e - f$ на условии 5 замыкает петлю гистерезиса $cedf$. Достижения условий 3, 1 и 2, 4 больше не реализуют переходов, происходит только двойникование 5, 5.

Основываясь на вариантах полученных здесь термодинамических условий, можно описать многообразие кривых деформирования, которые наблюдаются эмпирически, однако, они не исчерпывают поведения кристаллов с более сложными доменными структурами. Мозаика доменов в отдельном кристалле в условиях, когда дислокации и границы кристаллов в сплаве неподвижны, при переходе в параупругое состояние однозначно возвращает первоначальную форму тела. Рассмотрим состояние кристалла в пространстве σ, T и деформаций e (фиг. 3-6). Пусть форма тела задана при температуре T_0 . Охлаждение до $T = T_1$ переводит материал в ферроупругое состояние, в котором путем двойникового деформирования p после снятия

нагрузок образуется новая форма тела. Если теперь нагревать тело до температуры T_0 , то в момент $T = T_2$ происходит переход $p \rightarrow 0$, т. е. форма тела восстанавливается. Ранее этот процесс был определен как эффект памяти формы.



Фиг. 3-7

Термоциклирование (фиг. 3-2) и условия его образования можно объяснить на диаграммах переходов фиг. 3-7.

Перейдем к исследованию влияния макронапряжений в отдельных кристаллах поликристаллического тела.

Поликристалл будем рассматривать как среду с изотропными упругими свойствами, в которой микронапряжения созданы несовместимостью деформаций отдельных кристаллов. Эту часть деформаций e_{ij} , неудовлетворяющую условиям совместимости, обозначим через a_{ij} , тогда закон Гука примет вид:

$$e_{ij} - a_{ij} = \frac{1 - \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll} \delta_{ij}. \quad (2.11)$$

Предполагая статистическую однородность полей, решение уравнений упругости относительно флуктуаций, которые будем отмечать штрихом, представим с помощью тензорной функции Грина для напряжений

$$\sigma'_{ij} = \int G_{ijkl}(x-y) a'_{kl}(y) dy. \quad (2.12)$$

Физическое состояние N отдельного кристалла будем характеризовать параметрами, осредненными по объему этого кристалла, и отмечать индексом N в скобках, например, $a'_{ij}(N)$. Пусть $N(x)$ индикаторная функция в объеме поликристалла, принимающая значения 0 или 1, причем 1 имеет место в области кристаллов с одинаковыми состояниями N . Поле $a'_{ij}(x)$ представим в виде суммы, образованной индикаторными функциями по всем состояниям N , причем различным состояниям N, M соответствуют функции $N(x), M(x)$

$$a'_{ij}(x) = \sum_N a_{ij}(N) N'(x); \quad \langle a_{ij} \rangle = \sum_N c(N) a_{ij}(N), \quad (2.13)$$

здесь осреднение $\langle a_{ij} \rangle$ вычислено через объемные концентрации кристаллов $c(N) = \langle N(x) \rangle$.

Выпишем некоторые соотношения, следующие из сделанных предположений

$$\begin{aligned} N(x) M(x) &= 0; & N' &= N(x) - \langle N(x) \rangle; \\ \langle N'(x) M(x) \rangle &= -c(N) c(M); \\ \langle N' N' \rangle &= c(N) (1 - c(N)); & a_{ij}(N) &= \langle a_{ij}(x) N(x) \rangle / c; \\ \langle \sigma'_{ij}(x) M'(x) \rangle &= c(M) (\sigma_{ij}(M) - \langle \sigma_{ij} \rangle). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Полагаем, что изменение среднего однородного напряженного состояния $\langle \sigma_{ij} \rangle$ вызывает статистически однородное изменение полей e_{ij} , a_{ij} , которые в начальный момент при $\langle \sigma_{ij} \rangle = 0$ были статистически изотропны. Предположим, что избирательность внешнего воздействия $\langle \sigma_{ij} \rangle$ на кристаллы зависит от начальных состояний a_{ij} , истории их последующего изменения, геометрии функций $N(x)$, любых параметров, образующих пространство необратимых состояний N , но геометрия функций остается постоянной к изотропной. Последнее условие является определением системы функций $N(x)$, относительно которых величина $c(N)$ характеризует плотность распределения из множества состояний.

Из соотношений (2.12), (2.13) вычислим

$$\begin{aligned} & \int G_{ijkl}(x-y) \langle N'(y) M'(x) \rangle dy = \\ & = -c(N) c(M) \left[\frac{1}{3} (\delta_{ik} \delta_{il} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Интегралы от корреляционных функций для изотропных случайных полей можно вычислить по заданным дисперсиям (2.12).

$$\begin{aligned} \langle \sigma'_{ij} M' \rangle &= \int G_{ijkl}(x-y) \left[\sum_{N \neq M} a_{kl} \langle N'(y) \times \right. \\ & \quad \left. \times M'(x) \rangle - a_{kl}(M) \langle M'(y) M'(x) \rangle \right] dy. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Тогда с учетом соотношений (2.14) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(N) - \langle \sigma_{ij} \rangle &= \frac{E}{1+\nu} \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{15} \frac{1}{1-\nu} \right) (\langle a_{ij} \rangle - \right. \\ & \quad \left. - a_{ij}(N)) + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{15} \frac{1}{1-\nu} \right) (\langle a_{ii} \rangle - a_{ii}(N)) \delta_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Несовместные деформации a_{ij} разобьем на составляющие, вызванные пластической деформацией p_{ij} и микронапряжениями c_{ij} , связанными с геометрической несовместимостью формы кристаллов при образовании сплошной структуры. Опуская индекс N , соотношения (2.17) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} - \langle \sigma_{ij} \rangle &= a (\langle p_{ij} \rangle - p_{ij}) + c_{ij}; \quad p_{ii} = 0; \\ a &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{15} \frac{1}{1-\nu} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Это разбиение имеет смысл, если кинематика пластических деформаций не может снять внутренних напряжений. Например, сдвиговая деформация в отдельном кристалле не изменит в нем всестороннего давления. Скольжение с определенной ориентацией тоже ограничивает возможность релаксации напряжений в других направлениях.

§ 2. Пластическое скольжение в ферроупругом материале

Концепция теории скольжения [81] и микронапряжений [82] предполагает исследование связей между макропараметрами полукристаллического тела и микросостояниями кристаллов. Возникающие при этом задачи являются статистическими и рассматриваются на масштабном уровне структуры материала, для которой применима гипотеза сплошности среды. Исследования микроструктуры материалов, обладающих свойствами сверхпластичности, ферроупругости, спонтанного деформирования при фазовых превращениях, показывают, что в этих материалах бедислокационный процесс скольжения является основным механизмом образования пластических деформаций [83-85]. Более того, подвижность дислокаций в высокотемпературных модификациях этих сплавов приводит к потере таких практически важных свойств, как возврат пластических деформаций, эффект памяти формы [85].

Стабильность ориентаций двойниковых стенок, когерентных фазовых границ, определяющих направление пластического скольжения относительно кристалла, представляется идеальным условием выполнения гипотез теории скольжения.

Определим исходные соотношения теории скольжения [81]. Пусть n_i – вектор нормали к плоскости скольжения, m_i – направление скольжения, λ – величина чистого сдвига, тогда напряжения σ_{ij} и пластическая деформация кристалла удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} |\sigma_{ij} n_i m_j| &\leq k, & p_{ij} &= \lambda(m_i n_j + m_j n_i)/2; \\ n_i n_i &= 1, & m_i m_i &= 1, & n_i m_i &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь k – критическое напряжение сдвига.

Соотношения (2.1), задающие свойства отдельного кристалла, необходимо дополнить связью между состояниями кристаллов и средними по объему поликристалла, которые рассмотрены в §1 настоящей работы

$$\sigma_{ij} - \langle \sigma_{ij} \rangle = \langle p_{ij} \rangle - p_{ij} \quad (2.2)$$

Здесь напряжения отнесены к коэффициенту пропорциональности, определенными упругими постоянными; таким образом в последующих формулах зависимость от упругих свойств содержится в безразмерной форме записи.

Заданием начальных распределений $p_{ij} = p_{ij}^0$ или начальных микронапряжений $\sigma_{ij} = -p_{ij}^0$ завершается постановка статистической задачи.

Следствием эргодичности является возможность вычисления средних пластических деформаций по формуле [81].

$$\langle p_{ij} \rangle = \int_{\Omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (n_i m_j + n_j m_i) \lambda d\Omega d\psi, \quad (2.3)$$

где Ω – поверхность единичной сферы направлений n_i ,

ψ – угол, определяющий направление m_i в плоскости скольжения,

λ – значение чистого сдвига в кристалле, которое, если кристалл находится в пластическом скольжении, можно вычислять по формулам (2.1).

$$\lambda = \langle s_{ij} \rangle n_j m_j - k_{sign} \dot{\lambda}; \quad \langle s_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle + \langle p_{ij} \rangle. \quad (2.4)$$

Скорость сдвига $\dot{\lambda}$ определяет знак критического напряжения, $\dot{\lambda} = 0$ соответствует нейтральному нагружению. В остальных случаях λ определяется предшествующим процессом нагружения.

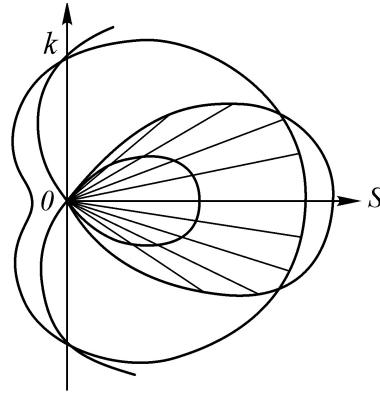
Кристаллы с фиксированной площадью скольжения n_i можно рассматривать как плоскопластическую систему скольжения [86]. На плоскость скольжения спроектируем пластические деформации $p_i = p_{ij} n_j = \lambda m_i / 2$. Тогда уравнение (0.3), представленное в виде

$$\lambda = (\langle \sigma_i \rangle + \langle p_i \rangle) m_i - k; \quad \langle \sigma_i \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle n_j; \quad \langle p_i \rangle = \langle p_{ij} \rangle,$$

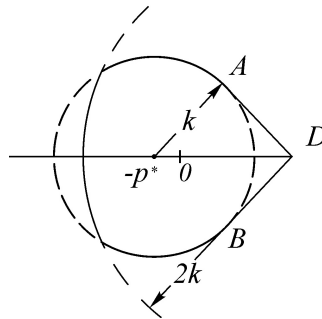
задает кардионду в плоскости (p_i)

$$p_i = [(\langle \sigma_i \rangle - \langle p_j \rangle) m_j - k] m_i / 2. \quad (2.5)$$

Замкнутая кривая (2.5) окружает область упругих состояний кристаллов, которые характеризуются некоторым, ранее образованным, распределением пластических деформаций. Процесс нагружения определяет закон движения кривой (2.5) (фиг. 3-8), причем коллинеарное



Фиг. 3-8



Фиг. 3-9

изменение пластических деформаций $p_i = \lambda m_i/2$ производится стороной кордионды, что следует из условия положительной диссипации энергии; роли сторон меняются на внутренней петле (фиг. 3-8). Деформации вовлеченных в пластическое состояние кристаллов суммируются, образуя новое их распределение, сосредоточенное на кривой (2.5). Кардионда “замечает” начальное распределение деформаций, делая их сосредоточенными вдоль кривой активного нагружения. В результате начальное распределение полностью стирается из памяти материала. При разгрузке кардионда отстывает, оставив достигнутое распределение пластических деформаций.

Обычно условие нагружения рассматривается в пространстве $\langle \sigma_{ij} \rangle$. Имеем, что $|\sigma_{ij} n_i m_j| = |\langle \sigma_{ij} \rangle n_i m_j| \leq k$. Это уравнение в пространстве $\langle \sigma_{ij} \rangle$ задает семейство плоскостей, огибающая которых является критерием пластичности Треска [81]. Рассмотрим простое нагружение до напряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^*$, при котором пластические деформации достигают значений $\langle p_{ij} \rangle = p_{ij}^*$, тогда получим распределение деформаций по ориентациям $p_{ij} = [(\sigma_{kl}^* + p_{kl}^*) m_k n_l - k] m_i n_j$, которое имеет место в кристаллах, находившихся в пластическом состоянии; для остальных ориентаций $p_{ij} = 0$. Перейдем теперь к произвольному напряженному состоянию $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и выясним, при каких условиях наступает пластическое состояние. Так как после пластического нагружения образовались кристаллы с различными деформациями

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \langle \sigma_{ij} \rangle + p_{ij}^* - [(\sigma_{kl}^* + p_{kl}^*) m_k n_l - k] m_i n_j, \\ \sigma_{ij} &= \langle \sigma_{ij} \rangle + p_{ij}^* \end{aligned} \quad (2.6)$$

то условие $|\sigma_{ij} n_i m_j| = k$ образует варианты

$$\begin{aligned} (\langle \sigma_{ij} \rangle - \sigma_{ij}^*) n_i m_j &= -2k; 0; \\ |(\langle \sigma_{ij} \rangle + p_{ij}^*) n_i m_j| &= k, \end{aligned} \quad (2.7)$$

которые в пространстве $\langle \sigma_{ij} \rangle$ соответствуют различным семействам плоскостей: одно образует условие Треска, смещенное в центр σ_{ij}^* с пределом пластичности $2k$, второе стянуто в угловую точку σ_{ij}^* , в которой семейство плоскостей пересекается, третье – условие Треска с центром $-p_{ij}^*$, смещенным в направлении обратном деформированию. В плоскости $\langle \sigma_i \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle n_j$ (фиг. 3-9) поверхность нагружения определяет дугу АВ, по которой суммируются деформации. Если процесс нагружения происходит таким образом, что касательная к траектории в точке D не выходит из угла, образованного продолжениями АВ и BD , то результат суммирования не зависит от траектории. В начальный момент веер таких траекторий больше, а затем сужается. Если среди всех ориентаций n_i выбрать плоскость скольжения с наибольшим удалением точки D , то соответствующий угол $\angle ADB$ лимитирует траектории нагружения поликристалла, для которых выполняются нелинейные интегрируемые соотношения.

Доказательства независимости от пути интегрирования проще получить при рассмотрении условий нагружения в пространстве (p_i) . Образовавшийся веер пластических деформаций ограничивает нейтральные движения кардиоиды (фиг. 3-8) моментами касания, а именно: внутреннее касание соответствует условиям пластичности на линиях AD , BD , причем угловой точке D соответствует полное совпадение кардиоиды с распределением пластических деформаций, внешнее касание кардиоидной точки определяет напряжения на окружности радиуса $2k$ (фиг. 3-9); внешнее касание с линией распределения пластических деформаций дает окружность радиуса k в пространстве $\langle \sigma_i \rangle$. Если нагружение производится таким образом, что в кристаллах не происходит разгрузки, результирующее распределение не зависит от пути его достижения. Последнее совпадает с условием нагружения в конусе конической точки.

Рассмотрим процессы растяжения-сжатия стержня вдоль оси x_3 . Обозначим $\langle p_{33} \rangle = p$, $\langle \sigma_{33} \rangle = \sigma$, $s_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \langle p_{ij} \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle s_{11} \rangle &= \langle s_{33} \rangle = -p/2, & n_3 &= \sin \theta, & m_3 &= \cos \theta \cos \psi, \\ \langle s_{ij} \rangle n_i m_j &= s \sin 2\theta \cos \psi; \\ s &= (\sigma + 3p/2)/2; \\ p &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \cos \psi \lambda \cos 2\theta d\theta d\psi. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В случае простого нагружения для начального распределения $\lambda = 0$ по формуле (2.4) определяется пластическое состояние кристаллов $\lambda = s \sin 2\theta \cos \psi - k$. Кристаллы, для которых $s \sin 2\theta \cos \psi < k$, находятся в упругом состоянии $\lambda = 0$. Эти соображения определяют пределы интегрирования (2.8), где $\lambda \neq 0$. Введем переменную $\xi = \sin 2\theta \cos \psi$:

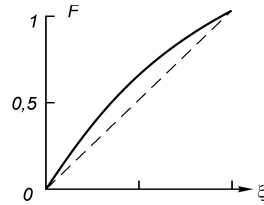
$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{4\pi} \int_{k/s}^1 \xi (s\xi - k) \int_{\frac{1}{2} \arcsin \xi}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \xi} \frac{\cos \theta d\theta d\xi}{\sqrt{\sin^2 2\theta - \xi^2}} = \int_{k/s}^1 (s\xi - k) F d\xi; \\ F(\xi) &= \frac{\xi}{\pi \sqrt{1+\xi}} k \left(\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \right); \\ s &= (\sigma + 3p/2)/2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где k – интеграл Лежандра I рода.

В начальный момент нагружения $s \approx k$ пределы интегрирования по θ (2.9) локализируются вблизи плоскостей скольжения, направленных под углом 45° к оси стержня. Так как ξ определяет пределы интегрирования по θ , то функция $F(\xi)$ будет общей при знакопеременных нагрузках. Величина λ (2.4) определяет текущее значение сдвигов кристаллов в пластическом состоянии. Для определения пределов интегрирования по ξ воспользуемся схемами на фиг. 5-8, где ξ пропорционально $\cos \psi$ – проекции единичного вектора, определяющего направление p_i на ось s . Нагружение в обратном направлении после достижения состояний $\lambda^* = s_1 \xi - k$ начнется после нейтральной разгрузки (холостой ход кардиоиды $\lambda = s\xi + k$

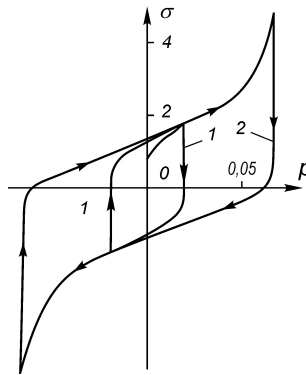
до момента касания с распределением λ^*), а затем пластические деформации определяются пределами интегрирования, следующими из условия пересечения кардиоид

$$p = \int_{k/s_1}^{2k/(s_1-s)} (s_1\xi - k) F d\xi + \int_{2k/(s_1-s)}^1 (s\xi - k) F d\xi \quad (2.10)$$



Фиг. 3-10

Функция $F(\xi)$ (фиг. 3-10) аппроксимируется удобным для интегрирования выражением, результаты интегрирования показаны на фиг. 3-11. Петля гистерезиса I с участками (2.9), (2.10) замыкается после одного цикла, причем явно выражен эффект Баушингера.



Фиг. 3-11

Предположим, что пластическая деформация кристалла имеет определенный предел λ^0 , после которого кристалл деформируется упруго. Эта ситуация может возникнуть, если в кристалле нет источников дислокации, тогда путь пробег существующих дислокаций ограничен размерами кристалла. Определяя пределы интегрирования из условия $\lambda^0 = s\xi - k \text{ sign } \lambda^0$, получим зависимости фиг. 3-11 (кривая 2).

Анализ микроструктурных исследований показывает, что эффекты ферроупругости возможны в структурах, в которых границы кристаллов неподвижны [85]. Это условие отражено в предположениях параграфа 1 настоящей главы. Пластичность проявляется в субструктуре кристаллов, которые образованы доменными состояниями, изменяющимися в процессе деформирования.

Домены могут содержать дислокации и другие локальные несовершенства, но в целом являются однородной кристаллической структурой, доменные границы ориентированы по определенным кристаллографическим направлениям. Эффект ферроупругости проявляется при понижении температуры, когда в кристалле появляются модификации с меньшей симметрией, способные образовывать двойниковые и другие доменные структуры. При понижении

температуры дислокации становятся неподвижными. Так как кристаллические напряжения, необходимые для их движения, оказываются больше, чем ковергентные напряжения двойников и доменных границ.

Границы между доменами являются когерентными, и их движение определено упорядоченным перемещением коллектива атомов, составляющих атомную плоскость, на расстояние, не превышающее межатомные. Переход плоскости атомов из одной правильной структуры в другую, при перемещении границы на одно межатомное расстояние h , соответствует смещению каждого атома на величину α_i . Таким образом структурная деформация перехода $(\alpha_i n_j + \alpha_j n_i)/2h$, где n_i – нормаль к границе, определена изменением формы ячейки домена при переходе через границу и является собственной деформацией перехода [85]. Эта деформация не изменится вследствие искаженности структуры вблизи границы, так как существенны начальное и конечное состояние ячеек.

Используя представления механики сплошной среды, в параграфе 1 границу рассматривали как поверхность разрыва параметров. Кинематическое условие (1.1) на границе разрыва скоростей v_i в случае непрерывных полей перемещений u_i имеет вид $[u_{i,j}]c = [v_i]n_j$, c – скорость границы. Таким образом движущаяся граница оставляет за собой неупругое изменение деформаций

$$[e_{ij}] = ([v_i]n_j + [v_j]n_i)/(2c) \quad (\text{фиг. 3-12}),$$

которое полагаем равным собственной деформации перехода. Мощность работы напряжений на границе равна $\sigma_{ij}n_j[v_i]$.

g – химическая энергия, пропорциональная объему твердого вещества, и, следовательно, мощность на границе пропорциональна скорости $[g]c$; диссипация энергии $D \geq 0$ для необратимых равновесных процессов [88] тоже пропорциональна объему превращенной фазы $D = k|c|$. Тогда закон сохранения энергии запишется в виде $\sigma_{ij}n_j[v_i] + [g]c = k|c|$, здесь пренебрегли разрывом упругой энергии, предполагая, что структурные составляющие микронапряжений в доменах незначительны.

Учитывая постоянство собственных деформаций

$$[v_j]n_i/c = \alpha_i n_j/h = \alpha m_i n_j,$$

получим условие перехода

$$\sigma_{ij}m_j n_i \alpha + [g] = k|c|/c, \quad (2.11)$$

которое отличается от условий скольжения (2.1) наличием химической составляющей $[g]$.

Рассмотрим плоскопараллельные структуры доменов, характерные для термоупругого мартенсита [85] и часто наблюдаемые на микрофотографиях ферроупругих и других сплавов [87]. Ферроупругая фаза имеет двойниковую структуру с границами, разделяющими зеркально симметричные состояния [87]. Эти состояния определяют собственные деформации, отличающиеся лишь знаком [89], поэтому пластическая деформация кристалла будет пропорциональна разности концентраций $\lambda^+ - \lambda^-$ двойниковых доменов.

$$p_{ij} = (\lambda^+ - \lambda^-) \alpha (m_i n_j + m_j n_i)/2. \quad (2.12)$$

Так как двойники химически однородны, условие (2.11) при $[g] = 0$ переходит в уравнение (2.1), а выражение (2.12) эквивалентно (2.1), следовательно, результаты предыдущих разделов полностью переносятся на процессы двойникования.

На фиг. 3-5 показана петля гистерезиса сплава $AuCd$ с характерным для ферроупругости ограничением на предельную пластическую деформацию, что объясняется переходом кристаллов в монодоменные состояния. Эта особенность отражена в формуле (2.4) тем, что λ пропорциональна объемной концентрации одного из двойниковых доменов в кристалле. Начальный участок кривой нагружения (фиг. 3-5) соответствует фазовому переходу, который

мы рассмотрим несколько позже, а петля гистерезиса соответствует процессам двойникового-ния. Обычно экспериментальные данные приводятся для случая, когда ферроупругая модификация кристаллов образована в результате температурного воздействия, которое приводит к равновероятному распределению ориентаций скольжения. Тогда расчет петли гистерезиса (фиг. 3-4) производится по формулам (2.1) и следующим из них интегралам (2.9).

Особенность ферроупругой фазы состоит в том, что она может образовываться и исчезать под воздействием напряжения. Исходная параупругая фаза пластически деформируется лишь при напряжениях, активизирующих дислокации. При понижении температуры неупругое деформирование происходит с появлением доменов ферроупругой фазы, причем обе фазы могут сосуществовать, образуя структуры, нестабильные при воздействии напряжений. Воспользуемся результатами работы [90] для определения направления перехода

$$d\lambda^+ \alpha \sigma_{ij} n_i m_j - d\lambda^- \alpha \sigma_{ij} n_i m_j + (d\lambda^+ + d\lambda^-) [g] \geq 0. \quad (2.13)$$

Первые два слагаемых представляют приращения термодинамических потенциалов двойниковых доменов и равны, как следует из (2.12), работе на пластических деформациях $\sigma_{ij} dp_{ij}$, третье равно фазовому изменению химической составляющей, одинаковой в двойниковых доменах. Неравенство является следствием второго начала термодинамики для изотермического процесса. В зависимости от вида химической реакции величина $\sigma_{ij} dp_{ij}$ может быть отрицательной, возможен спонтанный процесс деформирования [85]. Условия для протекания необратимого процесса следуют из (2.11), причем процессы двойникового-ния симметричны относительно направления перехода (знака ϵ), а фазовый переход в общем случае имеет различные энергии активации 10.

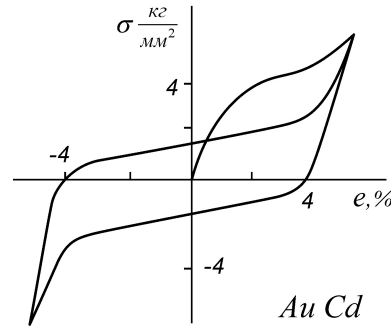
$$2\alpha |\sigma_{ij} n_i m_j| = k_0; \quad -k_1 \leq \alpha \sigma_{ij} n_i m_j + [g] \leq k_2. \quad (2.14)$$

Здесь k_0, k_1, k_2 – положительные постоянные изотермического процесса, определяющие энергию активации двойникового-ния, прямого и обратного фазовых переходов. Выражение для пластических деформаций (2.12) остается прежним, так как параупругая фаза пластически не деформируется и служит началом отсчета деформаций. Возврат деформаций соответствует возврату в параупругое состояние [85]. К этому выводу приводит и теория скольжения с исходными соотношениями (2.12)–(2.14). Действительно, в начальный момент параупругого состояния $\lambda^+ = \lambda^- = 0$ имеет смысл лишь условие $\alpha \sigma_{ij} n_i m_j + [g] = k_2$, поэтому нагрузка произойдет по кривой АВ (фиг. 5-6), определенной интегралами типа (2.10). Разгрузка возможна в двух вариантах, определенных величинами k_0, k_1 . Если $k_1 - [g] < -k_0$, обратный переход происходит по формулам

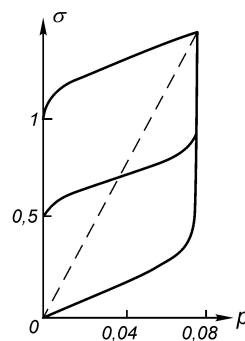
$$\begin{aligned} p &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} (s_1 \xi - k_2 + [g]) F d\xi + \int_{\xi_1}^1 (s\xi - k_1 - [g]) F d\xi; \\ \xi_0 &= (k_2 - [g])/s_1; \quad \xi_1 = (k_2 - k_1)/(s_1 - s); \\ \frac{k'}{k_2} s_1 < s < s_1 - k_2 + k_1; \quad p &= \int_{k_1/s}^1 (s\xi - k_1) F d\xi; \\ k_1 < s < k_1 s_1 / k_2, \end{aligned}$$

которые определяют кривую DCE (фиг. 3-6). Форма двойной петли гистерезиса соответствует экспериментальной [85].

Если $-k_2 + [g] > -k_0$, двойниково-ние начнется раньше и переход произойдет на двойниковую петлю (фиг. 3-5). Формы переходов определены температурной зависимостью параметров $[g], k_1, k_2, k_0$, которые дают многообразия кривых деформирования [90].



Фиг. 3-12 [62]



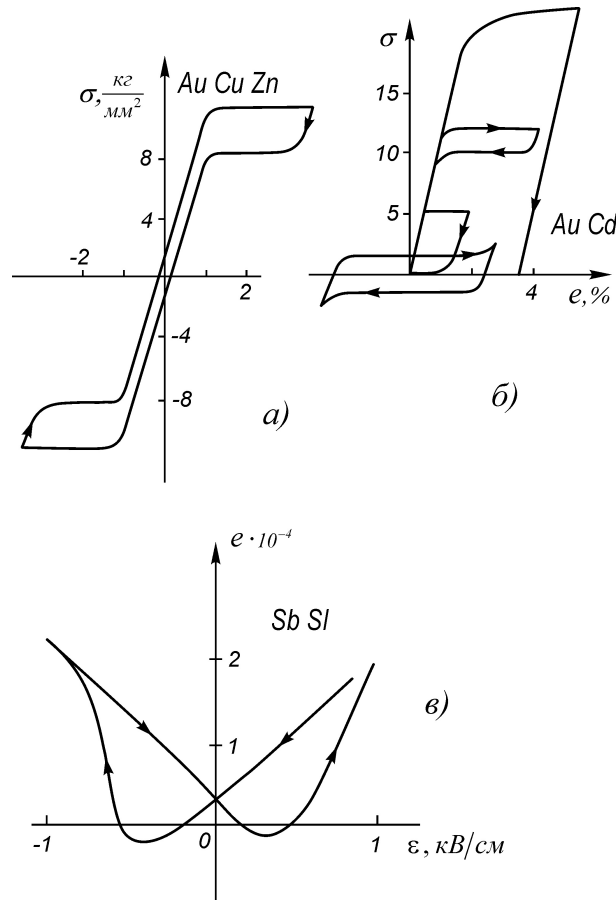
Фиг. 3-13

§ 3. Механическая память материалов с доменной структурой

Существенным аспектом теории скольжения и микронапряжений является зависимость параметров состояния пластически деформируемого материала от предыстории нагружения. Отражение макропроцесса на статическом множестве неоднородных состояний кристаллов в материале является, в определенной мере, механической памятью об истории необратимых деформаций макрообъема. Открытие материалов, претерпевающих обратные термоупругие мартенситные превращения, позволяет физически восстановить процесс необратимого деформирования.

Существует другой класс материалов, в которых неупругие деформации осуществляются движением стенок доменов в кристалле. К ним относятся сегнетоэлектрики [106], в которых тоже имеют место обратные переходы при воздействии температуры и электрических полей. На фиг. 3-12 приведено семейство петель гистерезиса деформаций e_{ij} (поляризации p_i) в зависимости от изменения механических напряжений σ_{ij} (электрической напряженности ε_i), которые указывают и на внешнее сходство процессов в сегнетоэлектриках и металлах с термоупругим мартенситом [104-106]. Двойные петли гистерезиса характерны для температур мартенситного перехода в ферроупругих материалах и сегнетоэлектрических переходов из параэлектрического или антисегнетоэлектрического состояния [106]. Самопересекающиеся петли гистерезиса характеризуют взаимодействие механических напряжений и электрических полей.

Материалов рассматриваемого типа насчитывается несколько сотен [104-106], для некоторых из них налажено промышленное производство. Они находят многочисленное применение в технике. Это исследование связано не только с уникальностью рассматриваемых явлений, но и с проектированием механических манипуляторов для высокоточных операций.



Фиг. 3-14 [63-64]

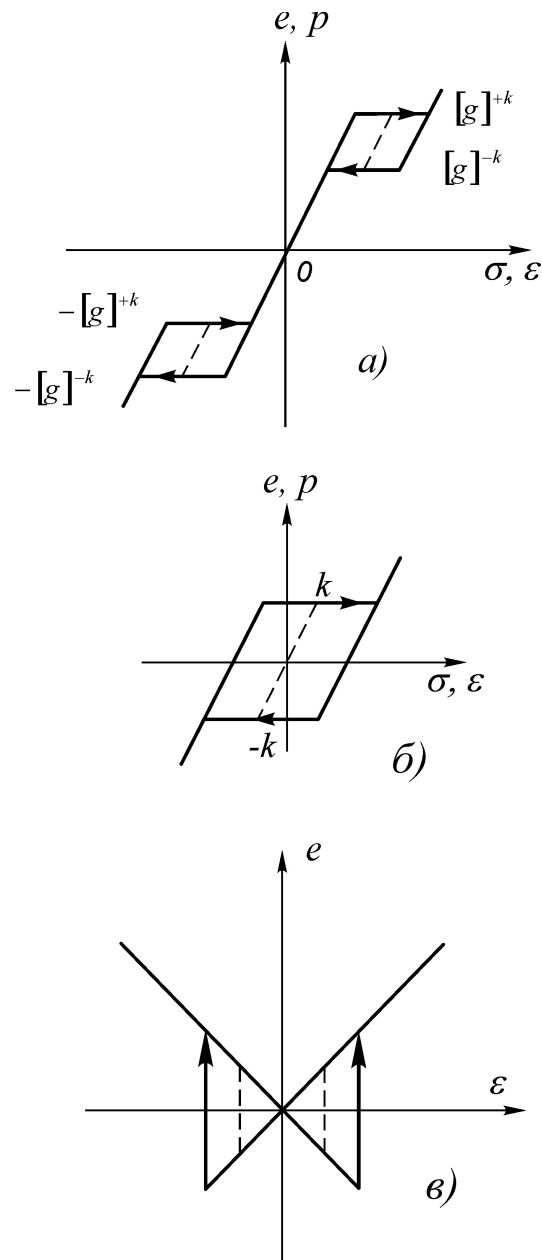
Конструкционные элементы из рассматриваемых материалов одновременно являются движителями и запоминающими устройствами, это позволяет периодически воспроизводить траектории деформаций элементов при работе манипулятора в серийном производстве.

Расчет траекторий тела точек определенной формы и предельных деформаций, которые может запомнить материал, должен основываться на соотношениях между напряжениями и деформациями. Присоединение сравнительно простых уравнений электростатики, что соответствует в данной работе обобщению на сегнетоэлектрики, значительно не усложняет феноменологических соотношений, но расширяет область применения и базу экспериментальных данных для обоснования теории.

Состояние домена, характеризующееся собственной деформацией e_{ij}^0 и спонтанной поляризацией p_i^0 , определяется соотношениями [106], которые аналогичны соответствующим уравнениям упругопластичности:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \mu_{ijkl}\sigma_{kl} + d_{ijk}\epsilon_k + e_{ij}^0 \\ p_i &= \alpha_{ij}\epsilon_j + d_{kli}\sigma_{kl} + p_i^0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где μ , d , α – тензоры податливости, пьезоэлектрических моделей, диэлектрической восприимчивости.



Фиг. 3-15

Начало отсчета деформаций и поляризации производится из параупругого состояния кристалла $e_{ij}^0 = 0, p_i^0 = 0$, которое может переходить в ферроупругое со значением $\pm e_{ij}^0, \pm p_i^0$ в двойниковых состояниях.

Вследствие хаотической ориентации кристаллов и их доменной структуры в поликристаллическом агрегате параметры полей будут случайными функциями. В исследованиях эффективных характеристик среды предполагается статистическая однородность полей. В поликристаллическом образовании свойству статистической изотропности удовлетворяют тензорные поля податливостей и диэлектрической проницаемости, поэтому для средних деформаций и поляризации будут выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} \langle e_{ij} \rangle &= \frac{1+\nu}{E} \langle \sigma_{ij} \rangle - \frac{\nu}{E} \langle \sigma_{ll} \rangle \delta_{ij} + d_{ijk}^* \langle \varepsilon_k \rangle + e_{ij}^{0*} \\ \langle p_i \rangle &= \alpha \langle \varepsilon_i \rangle + d_{kli}^* \langle \sigma_{kl} \rangle + p_i^{0*}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь постоянные α , ν , E и параметры, отмеченные звездочкой, являются эффективными характеристиками состояния поликристалла, операция осреднения обозначена угловыми скобками, а флуктуации будут отмечаться штрихом.

Предполагаем, что уровень флуктуаций σ'_{ij} , ε'_i , обусловленных разориентацией тензоров податливости и диэлектрической проницаемости, пренебрежимо меньше, чем флуктуации, созданные неравномерностью распределения неупругих деформаций и спонтанной поляризации. Флуктуации пьезоэлектрического тензора определены разориентацией доменов, поэтому средние значения $\langle d_{ijk} \rangle$ имеют одинаковый порядок с d'_{ijk} . С учетом этих замечаний линейное приближение относительно флуктуаций

$$\begin{aligned} e'_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma'_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma'_{ll} \delta_{ij} + d'_{ijk} \langle \varepsilon_k \rangle + e_{ij}^{0/}; \\ p'_i &= \alpha \varepsilon'_i + d'_{kli} \langle \sigma_{kl} \rangle + p_i^{0/} \end{aligned} \quad (3.3)$$

не содержит ограничений на порядок величин $e_{ij}^{0/}$, $p_i^{0/}$, что существенно для последующего рассмотрения необратимых процессов.

Условия совместимости и равновесия образуют систему уравнений для определения перемещений u_i и электрического потенциала φ при заданном начальном распределении внутренних микронапряжений s'_{ij} и связанных зарядов ρ в поликристалле

$$\begin{aligned} (\sigma'_{ij} + s'_{ij}), j = 0; \quad e'_{ij} &= (u'_{i,j} + u'_{j,i})/2; \\ -\varepsilon'_i &= \varphi'_{,i}; \quad p'_{i,i} = \rho'. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решение системы уравнений (3.4), (3.3) получим для спектральных разложений по волновым числам ξ_i . Спектры функций в пространстве поликристалла x_i будем обозначать указанием на аргумент ξ

$$\varphi(x) = \int \int \int \varphi(\xi) \exp(i\xi_k x_k) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (3.5)$$

Рассматриваемые случайные поля и распределения зарядов, обычно связанных по поверхности кристаллов, относятся к обобщенным функциям, представленным в виде (3.5).

Из уравнений (3.3), (3.4) получим выражения для спектров

$$\begin{aligned} e'_{ij}(\xi) &= \left[(\xi_i \xi_k \delta_{jl} + \xi_j \xi_l \delta_{ik}) \xi^{-2} - \frac{1}{1-\nu} \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l \xi^{-4} \right] a'_{kl}; \\ \alpha \varepsilon'_i(\xi) &= -a'_j \xi_j \xi_i / \xi^2; \quad \xi = \sqrt{\xi_i \xi_i}; \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= d'_{ijk} \langle \varepsilon_k \rangle + e_{ij}^{0/} + b'_{ij}; \\ a'_i &= d'_{kli} \langle \sigma_{kl} \rangle + p_i^{0/} + b'_i, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где флуктуации b'_i , b'_{ij} выражаются через s'_{ij} , ρ' и являются заданными полями, которые будем предполагать статистически изотропными.

В объеме поликристалла выделим множества кристаллов N с одинаковыми средними по объему кристалла значениями параметров. Введем индикаторную функцию $N(x)$, принимающую значение 1 в области кристаллов N и 0 в остальной области поликристалла. Очевидно, что для кристаллов с различными состояниями N, M и объемными концентрациями $c(N)$, $c(M)$ следует

$$\begin{aligned} \langle N'(x) M'(x) \rangle &= c(N) c(M), \quad N \neq M \\ \langle N'(x) N'(x) \rangle &= c(N) (1 - c(N)). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Средние по кристаллам значения параметров, которые будем отмечать индексами N, M , вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(N) &= \langle N(x) \varepsilon_i(x) \rangle = \langle \varepsilon_i \rangle + \langle N' \varepsilon_i' \rangle; \\ \langle \varepsilon_i \rangle &= \sum_N c(N) \varepsilon_i(N).\end{aligned}\quad (3.9)$$

Пусть начальное распределение микронапряжений и связанных зарядов определяет изотропную структуру функций $N(x)$. Так как внешнее воздействие на поликристалл соответствует однородным полям $\langle \sigma_{ij} \rangle$, $\langle \varepsilon_i \rangle$, то различие этого воздействия на кристаллы определено лишь их геометрическим положением в системе взаимодействующих кристаллов и различием начальных состояний. Для изотропных функций $N(x)$ результат осреднения

$$A_{ijkl} = \int \int \int g_{ijkl}(x-x') \langle N'(x') M'(x) \rangle dx,$$

где спектр ядра оператора задан в виде

$$g_{ijkl}(\xi) = \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l / \xi^{-4}.$$

Представляет изотропный тензор

$$\begin{aligned}A_{ijkl} &= \frac{1}{15} \langle N'(x) M'(x) \rangle \delta_{ijkl}; \\ \delta_{ijkl} &= \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Пусть a_i , a_{ij} (3.7) заданы распределением средних по кристаллам N величин $a_{ij}(N)$, $a_i(N)$

$$a_{ij} = \sum_N a_{ij}(N) N(x), \quad a_i = \sum_N a_i(N) N(x).\quad (3.11)$$

Тогда из соотношения (3.10) можно вычислить значения

$$e_{ij}(N) = \langle e_{ij} \rangle + \langle N'(x) e'_{ij} \rangle / c(N); \quad \varepsilon_i(N) = \langle \varepsilon_i \rangle + \langle \varepsilon_i' N' \rangle / c(N),$$

которые учитывают взаимодействие кристаллов, характеризуемое выполнением соотношений (3.6), (3.7).

$$\begin{aligned}e_{ij}(N) &= \langle e_{ij} \rangle - (\langle a_{kl} \rangle - a_{kl}(N)) \left[\frac{2}{3} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{15} \delta_{ijkl} \right]; \\ \varepsilon \varepsilon_i(N) &= \varepsilon \langle \varepsilon_i \rangle + \frac{1}{3} (\langle a_i \rangle - a_i(N)); \\ a_{ij}(N) &= d_{ijk}(N) \langle \varepsilon_k \rangle + e_{ij}^0(N) + b_{ij}(N); \\ a_i(N) &= d_{kli}(N) \langle \sigma_{kl} \rangle + p_i^0(N) + b_i(N).\end{aligned}\quad (3.12)$$

Состояния кристаллов (3.12) с осредненными параметрами определены соотношениями (3.12) при условии, что заданы $p_i^0(N)$, $e_{ij}^0(N)$, $d_{ijk}(N)$, которые, в свою очередь, являются результатом необратимых процессов. Уравнения (3.12) должны быть дополнены соотношениями, определяющими необратимые процессы в остальном кристалле.

Полидоменный кристалл представляет собой структуру, состоящую из однородных доменов, границы которых являются поверхностями разрыва параметров. При рассмотрении возможных границ между доменами учитываются не только кристаллогеометрические соображения, но и условия, отвечающие минимуму энергии кристалла [106]. Разбиение кристалла на домены обусловлено понижением свободной энергии, однако, это разбиение не может идти беспрерывно, так как на образование границ между доменами затрачивается определенная энергия. Доменную структуру образуют процессы двойникования и фазовых переходов как в металлах при мартенситных превращениях в ферроупругое состояние, так и в диэлектриках при переходе в сегнетоэлектрическую фазу. В теории сплошных сред могут быть учтены лишь некоторые аспекты образования границ доменов. Причины их образования рассматриваются в микроскопических теориях [106].

Пусть под действием внешних полей происходит движение стенки домена в направлении нормали n_i со скоростью s . Перемещения u_i при переходе стенки непрерывны, а скорости v_i , соответствующие движению узлов при перестройке кристаллической решетки, могут быть

разрывы $[v_i]$. Разность параметров, определяющих состояния (3.1) перед стенкой домена (например e'_{ij}) и после ее прохождения, обозначим угловыми скобками $[e_{ij}] = e^2_{ij} - e^1_{ij}$. Условия на поверхности разрывов имеют вид

$$\begin{aligned} [\sigma_{ij}] n_j &= 0; & [u_{i,j}] c &= [v_i] n_j; \\ [p_i] n_i &= 0; & [\varepsilon_i] &= [\varepsilon_j] n_j n_i; \\ \sigma_{ij} n_j [v_i] + \varepsilon_i [p_i] c &= [W] c + D; \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$W = \frac{1}{2} \mu_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + d_{ijk} \sigma_{ij} \varepsilon_k + \frac{1}{2} \varkappa_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j + g. \quad (3.14)$$

Здесь W – внутренняя энергия единицы объема домена;

D – мощность диссипации на поверхности разрыва;

g – химическая и тепловая составляющая энергия в изотермическом процессе.

Разрывы напряжений увеличивают свободную энергию кристалла, следовательно, в случае, когда σ_{ij} , ε_i будут непрерывны, получим соотношения, вытекающие из (3.1)

$$\begin{aligned} [e_{ij}] &= [\mu_{ijkl}] \sigma_{kl} + [d_{ijk}] \varepsilon_k + [e^0_{ij}]; \\ [p_i] &= [\varkappa_{ij}] \varepsilon_j + [d_{ijk}] \sigma_{ik} + [p^0_i]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Разрывы кристаллофизических постоянных определяются взаимной ориентацией кристаллов и фазовой границы. Постоянными перехода являются также $[p^0_i]$, $[e^0_{ij}]$, причем $[e^0_{ij}] = (\alpha_i n_j + \alpha_j n_i)/2$, где α_i соответствует относительным перемещениям узлов решетки кристалла при переходе элементарной ячейки через фазовую границу или стенку домена. Условия непрерывности напряжений σ_{ij} , ε_i будут выполнены, если существуют постоянные перехода α_{ij} , μ_{ij} , такие, что при некоторых ориентациях кристаллов и n_i выполнены уравнения:

$$\begin{aligned} [\mu_{ijkl}] &= (\mu_{ik} n_l + \mu_{il} n_k) n_j + (\mu_{jk} n_l + \mu_{jl} n_k) n_i, \\ [d_{ijk}] &= d_{ik} n_j + d_{jk} n_i; & d_{ik} n_k &= 0; \\ [\varkappa_{ij}] n_j &= 0; & [p^0_i] n_i &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Энергетические соотношения (3.13) определяют условия перехода при воздействии внешних полей. Действительно, из соотношений (3.13), (3.14), (3.15) следует

$$\frac{1}{2} [\mu_{ijkl}] \sigma_{ij} \sigma_{kl} + [d_{ijk}] \sigma_{ij} \varepsilon_k + \frac{1}{2} [\varkappa_{ij}] \varepsilon_i \varepsilon_j + [p^0_i] \varepsilon_i + [e^0_{ij}] \sigma_{ij} + [g] = D/C. \quad (3.17)$$

Предполагаем, что для достаточно медленных процессов диссипация зависит только от объема образовавшейся фазы, тогда величина $k = D/C$ становится постоянной и определяет энергию активации процесса. Заметим также, что условие перехода (3.17) представляет собой разность термодинамических потенциалов фаз $[G] = K$

$$\begin{aligned} G &= W - \sigma_{ij} e_{ij} - \varepsilon_i p_i; \\ -e_{ij} &= \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}; & -p_i &= \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_i}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Разность $[G]$, как известно [5], является движущей силой фазовой границы, а критическое значение $[G] = k$ соответствует потенциальному барьеру в системе ячеек кристалла, преодоление которого происходит в процессе фазового перехода. Так как химическая составляющая потенциала и энергия активации k зависят от температуры, то при температуре, когда $[g] = k$, химическая энергия превращения $[g]$ компенсирует диссипацию, и фазовый переход, как следует из условия (3.17), происходит самопроизвольно при $\sigma_{ij} = \varepsilon_i = 0$.

Пусть структура кристалла состоит из доменов двух видов, тогда объемная концентрация λ вновь образующейся фазы определяет термодинамический потенциал полидоменного кристалла $G = G_1 + \lambda [G]$. Значения средних по кристаллу e_{ij} , p_i , определяемых формулами осреднения аддитивных параметров $e'_{ij} + \lambda [e_{ij}]$ или соотношениями термодинамики (??) при $G = G' + \lambda [G]$, равны

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \left(\mu'_{ijkl} + \lambda [\mu_{ijkl}] \right) \sigma_{kl} + \left(d'_{ijk} + \lambda [d_{ijk}] \right) \varepsilon_k + e_{ij}^0 + \lambda [e_{ij}^0]; \\ p_i &= \left(\alpha'_{ij} + \lambda [\alpha_{ij}] \right) \varepsilon_j + \left(d'_{ijk} + \lambda [d_{ijk}] \right) \sigma_{jk} + p_i^0 + \lambda [p_i^0]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В соответствии с законами термодинамики переход при постоянных σ_{ij} , ε_i осуществляется в сторону фазы, имеющей меньшее значение термодинамического потенциала, поэтому при условии (3.17) в соотношении (3.19) различным состояниям соответствуют неравенства:

$$\begin{aligned} \text{монодоменным} \quad & \lambda = 0, \quad \lambda = 1, \quad |[G]| = k; \\ \text{полидоменным} \quad & d\lambda = 0, \quad |[G]| < k; \\ \text{состояние перехода} \quad & d\lambda > 0 \text{ при } [G] = -k \text{ и } d\lambda < 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Соотношения (3.16) и $[e_{ij}^0] = (\alpha_i n_j + \alpha_j n_i)/2$ можно рассматривать как условия относительно n_i , α_i , μ_{ij}^0 , d_{ij}^0 , неединственность решения которых отвечает существованию нескольких ориентаций границ перехода и, следовательно, возможно образование субструктуры кристалла. В этом случае изменение параметра λ в соотношениях (3.19) описывает процесс безотносительно структуры доменов в кристалле, существенными оказываются лишь вид доменов и их концентрация.

Рассмотрим однопараметрические процессы в отдельном кристалле, определяемые уравнениями (3.17), (3.19), (3.20). На фиг. 3-15 а показан фазовый переход при $g \neq 0$, характерный для превращения параупругого состояния $e_{ij}^{01} = 0$, $\lambda = 0$ в ферроупругое $e_{ij}^{02} = \pm [e_{ij}^0]$, $\lambda = 1$ в области температур, при которых возможно одновременное существование обеих фаз [4].

Процессы двойникования в фероупругих металлах и поляризация в сегнетоэлектриках симметричны относительно прямого и обратного перехода $[g] = 0$, поэтому для начальных состояний $\lambda = \frac{1}{2}$ петля гистерезиса принимает форму (6) (фиг. 5-3). Для сегнетоэлектриков $[d_{ijk}] \neq 0$ петля гистерезиса деформаций (b), в соответствии с соотношениями (3.19), (3.20), будет самопересекаться. Эта форма петель характерна для зависимости термодинамически несопряженных параметров 9б.

Состояния кристаллов N в поликристаллическом агрегате, как видно из соотношений (3.12), индивидуализированы значениями e_{ij}^0 , b_{ij} , p_i , b_i , d_{ijk} . Множеству состояний поставим в соответствие пространство ω указанных параметров, которые могут принимать непрерывные или дискретные значения в зависимости от плотности распределения $f(\omega)$. Поэтому индекс N можно опустить и соответствующие суммы (3.9) при осреднении представить интегралами Лебега

$$\langle e_{ij}^0 \rangle = \int_{\Omega} \lambda [e_{ij}^0] f(\omega) d\omega; \quad \langle p_i^0 \rangle = \int_{\Omega} \lambda [p_i^0] f(\omega) d\omega, \quad (3.21)$$

где Ω – область в пространстве ω , для которой выполнено условие перехода.

Изменение удельного объема фаз через переход для большинства материалов пренебрежительно мало [94, 95], поэтому вместо тензоров, характеризующих механические поля, в дальнейшем будут рассматриваться лишь их девiatorные части. Теперь соотношения (3.12) с учетом (3.3), (3.19) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} &= \frac{\langle \tau_{ij} \rangle}{2\mu} + \frac{3}{5} \left(\langle d_{ijk} \rangle \langle \varepsilon_k \rangle + \lambda [d_{ijk}] \langle \varepsilon_k \rangle - \lambda [e_{ij}^0] + \langle e_{ij}^0 \rangle \right); \\ \alpha \varepsilon_i &= \alpha \langle \varepsilon_i \rangle + \frac{1}{3} \left(\langle d_{kli} \rangle \langle \sigma_{kl} \rangle + \lambda [d_{kli}] \langle \sigma_{kl} \rangle - \lambda [p_i^0] + \langle p_i^0 \rangle \right); \quad 2\mu = E/(1 + \nu); \\ \langle d_{ijk} \rangle &= \int_{\Omega} \lambda [d_{ijk}] d\omega. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Разрывы $[\mu_{ijkl}]$, $[\alpha_{ij}]$ в двойниках с зеркальной симметрией равны нулю, а при фазовых превращениях на основании энергетических оценок слагаемых (3.17) могут оказаться незначительными. В экспериментах это приближение соответствует постоянству упругих модулей

и диэлектрической проницаемости, измеряемых на начальных участках кривой разгрузки. В связи с этим ограничимся условием перехода (3.17) при $[\mu_{ijkl}] = [\alpha_{ij}] = 0$

$$|[G]| = |[d_{ijk}] \sigma_{ij} \varepsilon_k + [e_{ij}^0] \sigma_{ij} + [p_i^0] \varepsilon_i + [g]| = k, \quad (3.23)$$

где постоянная k принимает значения в зависимости от характера перехода (двойникование, прямое или обратное фазовое превращение).

В теории скольжения связь между состояниями поликристалла и отдельных кристаллов задается гипотезой, роль которой выполняют здесь соотношения (3.22), учитывающие изменение поля микронапряжений. К этим соотношениям присоединяется условие скольжения, аналогом которого является условие (3.23). Таким образом, исходные уравнения для построения меноменологических соотношений определены.

Используя известные результаты теории скольжения [91, 98], рассмотрим процессы, описываемые уравнениями (3.22), (3.23) в случае пара- и ферроупругости или спонтанной поляризации, исключая их взаимодействие ($d_{ijk} = 0$).

Для векторных представлений пластических деформаций и спонтанной поляризации уравнения (3.22), (3.23) запишутся однообразно

$$\begin{aligned} \beta_i &= (\lambda [e_{11}^0]; \lambda [e_{12}^0] \dots) = \lambda [p_i^0] = \beta n_i; \\ \sigma_i - \langle \sigma_i \rangle &= \langle \beta n_i \rangle - \beta n_i; \quad |\sigma_i n_i + q| = \tau; \\ [g] &= \beta_0 g, \quad k = \tau \beta_0, \quad n_i n_i = 1, \end{aligned} \quad (3.24)$$

здесь σ_i – напряжения, n_i – ориентация доменов, $\beta = \lambda \beta_0$ – чистый сдвиг, достигающий максимального значения β_0 в монодоменном состоянии, начальное распределение микронапряжений отсутствует.

В трехмерном пространстве векторные уравнения (3.4), справедливые для процессов поляризации, являются лишь моделью пластического скольжения, сохраняющей качественные особенности в тензорном пространстве деформаций 91. Однако, избегая дублирования, будем использовать терминологию теории скольжения, аналог которой в теории сегнетоэлектриков отсутствует. Из соотношений (3.24) следует условие пластического состояния кристаллов

$$\beta = S_i n_i \pm \tau + q, \quad S_i = \langle \sigma_i \rangle + \langle \beta n_i \rangle, \quad (3.25)$$

которое в полярной системе координат βn_i задает поверхность нагружения (фиг. 3-4). Полагая начальное распределение деформаций сосредоточенным в точке $\beta = 0$, из условий (3.20) следует, что в процессе нагружения касание к поверхности (3.25) точки $\beta = 0$ приводит к последующему перераспределению деформаций по внутренней петле. При разгрузке внешняя петля “сметает” ранее образовавшееся распределение, а внутренняя, в силу условий (3.20), “отстывает”, оставив пластические деформации без изменений. Если деформации достигли предельных значений β_0 , то их распределение по сфере радиусом $\beta = \beta_0$ остается постоянным по внутренней петле поверхности нагружения.

Точка $\beta = 0$ и точки пересечения ранее образовавшихся распределений и поверхности нагружения определяют пределы интегрирования при осреднении $\langle \beta n_i \rangle$. Пусть $h = \cos \varphi$, где φ – угол между векторами S_i и n_i , тогда для простого нагружения получим при

$$\langle \beta n_i \rangle + \frac{S_i}{S} \int_{\frac{\tau}{S}}^1 h (Sh - \tau) dh; \quad S_i S_i = S^2. \quad (3.26)$$

Зависимость между интенсивностями пластических деформаций $\gamma = (\langle \beta n_i \rangle \langle \beta n_i \rangle)^{1/2}$ и напряжений $\sigma = S + \gamma$, $\gamma = S/3 + \tau^3/6S^2 - \tau/2$, следующая из (3.26), описывает плавное смыкание с упругим участком деформирования и асимптотически стремится к линейному упрочению. Вычисление интегралов типа (3.26) знакопеременных деформаций и различных вариантов $\pm \tau + q$ не сложно, получающиеся зависимости имеют форму реальных кривых (фиг. 5-2),

сглаживающих схемы на фиг. 3-3. Зависимости $k(T)$, $[q(T)]$, $\beta_0(T)$ при изменении температуры приводят к движению поверхности нагружения (3.25), следствием чего является изменение деформаций в отсутствии напряжений.

При фазовом переходе второго рода в параупругое состояние $\beta_0(T) \rightarrow 0$ имеет место простой возврат деформаций и спонтанная поляризация исчезает. Для фазовых переходов первого рода $[g(T)] - k(T) \rightarrow 0$ деформации исчезают за счет движения доменов, осуществляемого микронапряжениями. действительно, в этом случае поверхность нагружения (3.25) при $[g] - k = 0$ сужается в точку $\beta = 0$, последовательно, сметая ранее образовавшееся распределение деформаций, при этом средняя деформация описывает траекторию в зависимости от истории нагружения “записанной” при температуре перехода из параупругого состояния. При нагреве до полного обратного превращения можно “стереть запись” и вернуть материал в изотропное состояние. При неполном переходе и периодическом изменении температуры в области ферроупругих состояний осуществляется периодический процесс деформирования по траектории соответствующей “записи”, сделанной в области температур прямого перехода. Заметим, что здесь рассматриваются процессы в характерном объеме, в котором память представлена статическими распределениями, в отличие от памяти детерминировано распределенных пластических деформаций по объему определенной конфигурации. Для конструкционных деталей расчет изменения конфигурации во времени по заданной программе является краевой задачей теории пластичности. Согласованность деформаций достигается одновременным воздействием температуры, а в более общем случае, для сегнетоэлектриков, – воздействием электрического поля.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ:

- (1) Вариационный метод теории композитов обобщает материалы, обладающие пластическими свойствами.
- (2) Показано, что вариационное приближение не менее ближе к действительному, чем функциональное.
- (3) Метод апробирован на структурах со сферическими включениями.
- (4) Решена задача о пластическом композите с нитеобразными включениями, что оказалось хорошим подтверждением эмпирического закона Келли, указывающего на специфическую зависимость от объемной концентрации включений.
- (5) Решена задача о предельном равновесии материала со сферическими включениями и различными пределами прочности при сжатии растяжении. Результаты согласуются с эмпирическими данными по бетонам.
- (6) Получены соотношения для микронапряжений в материале с фазовым переходом включений, изменяющих объем.
- (7) Получена модель вязкопластичности, объясняющая характерные зависимости от температуры и концентрации включений, что также связывается с фазовым переходом.
- (8) Получена модель реологически сложной среды, представляющая собой вязкоупругую матрицу и пластические включения.
- (9) Построена модель плоскопараллельных структур доменов в кристалле, основанная на уравнениях имеющих место на границе доменов.
- (10) Модель, определяющая свойства ферроупругого поликристалла, рассчитана на основе полученных уравнений для микронапряжений и соотношений пластичности в разориентированных кристаллах с доменной структурой.
- (11) Указывая на аналогию с ферроупругостью, модель обобщается на сегнетоэлектрические поликристаллы с пьезоэлектрическими свойствами.

Общий вывод результатов исследований состоит в том, что структурные модели пластичности объясняют и прогнозируют неординарные свойства материалов, связанные с перераспределением напряжений в структуре, с возвратом пластических деформаций при фазовом

переходе, со статистическим распределением состояний в кристаллах, которое отражает историю деформирования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Болотин, В. В.* Статистические методы в строительной механике / В. В. Болотин. – М. : Стройиздат, 1965. – 276 с.
- [2] *Болотин, В. В.* Макроскопические характеристики неоднородных твердых тел / В. В. Болотин, В. Н. Москоленко // ДАН СССР. – 1983. – № 5. – С. 1086-1088.
- [3] *Болотин, В. В.* К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композитных материалов / В. В. Болотин, В. Н. Москоленко // Изв. АН СССР, МТТ. – 1969. – № 3. – С. 106-111.
- [4] *Волков, С. Д.* Стахостическая механика композитных материалов / С. Д. Волков, В. П. Ставров. – Минск, 1978. – 206 с.
- [5] *Волков, С. Д.* Статистическая теория прочности / С. Д. Волков. – М. : Машгиз, 1960. – 212 с.
- [6] *Ломакин, В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В. А. Ломакин. – М. : Наука, 1970. – 176 с.
- [7] *Хорошун, Л. П.* Композитные материалы. Стахостические структуры / Л. П. Хорошун // Механика композитных материалов и элементов конструкций. – Киев : Наук.думка, 1982. – Т. 11. – С. 176-190.
- [8] *Хорошун, Л. П.* Методы автоматизированного расчета физико-механических постоянных композитных материалов / Л. П. Хорошун, Б. П. Маслов. – Киев : Наук.думка, 1980. – 156 с.
- [9] *Шермергор, Т. Д.* Теория упругости микро неоднородных сред / Т. Д. Шермергор. – М. : Наука, 1977. – 400 с.
- [10] *Ванин, Г. А.* Микромеханика композиционных материалов / Г. А. Ванин. – Киев : Науч. думка, – 1985. – 304 с.
- [11] *Кристенсен, Р.* Введение в механику композитов / Р. Кристенсен. – М. : Наука, 1982. – 336 с.
- [12] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 230 с.
- [13] *Ивлев, Д. Д.* К теории идеально затвердевающих сред / Д. Д. Ивлев // ДАН. – 1960. – № 4. – С. 742-745.
- [14] *Ивлев, Д. Д.* Теория анизотропно упрочняющихся пластических сред / Д. Д. Ивлев, Г. И. Бьковцев. – М. : Наука, 1971. – 231 с.
- [15] *Ильюшин, А. А.* Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М. : Изд. МГУ, 1971. – 247 с.
- [16] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Изд. АН СССР, 1963. – 271 с.
- [17] *Победря, Б. Е.* Механика композиционных материалов / Б. Е. Победря. – М. : Изд. МГУ, 1984. – 336 с.
- [18] *Арутюнян, Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести / Н. Х. Арутюнян. – М. : М-Л, 1986. – 211 с.
- [19] *Клюшников, В. Д.* Математическая теория пластичности / В. Д. Клюшников. – М. : Изд. МГУ, 1979. – 208 с.
- [20] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 340 с.
- [21] *Работнов, Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1968. – 744 с.
- [22] *Седов, Л. И.* Механика сплошной среды: Т. 1 / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1970. – 536 с.

- [23] *Ишлинский, А. Ю.* Некоторые применения статистики к описанию законов деформирования тел / А. Ю. Ишлинский // Изв. АН СССР. ОТН. – 1944. – № 9. – С. 583-590.
- [24] *Ишлинский, А. Ю.* Уравнения деформирования на вполне упругих и вязкопластических тел / А. Ю. Ишлинский // Изв. АН СССР. ОТН. – 1945. – № 1. – С. 34-35.
- [25] *Новожилов, В. В.* О сложном нагружении и перспективах феномен. подхода к исследованию м-напряжений / В. В. Новожилов // ПММ. – 1964. – № 3. – С. 393-3400.
- [26] *Кадашевич, Ю. И.* О влиянии начальных микронапряжений на деформацию поликристаллов / Ю. И. Кадашевич // ПММ. – 1968. – № 5. – С. 908-922.
- [27] *Кадашевич, Ю. И.* Обобщенная теория упрочнения / Ю. И. Кадашевич // ДАН. – 1980. – № 5. – С. 1096.
- [28] *Кадашевич, Ю. И.* Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера / Ю. И. Кадашевич, В. В. Новожилов // ДАН СССР. – 1957. – Т. 117, № 4. – С. 586-588.
- [29] *Кадашевич, Ю. И.* Теория ползучести, учитывающая микропластические деформации / Ю. И. Кадашевич, В. В. Новожилов // МТТ. – 1976. – № 5. – С. 153-159.
- [30] *Кадашевич, Ю. И.* Теория пластичности и ползучести металлов, учитывающая микронапряжения / Ю. И. Кадашевич, В. В. Новожилов // МТТ. – 1981. – № 5. – С. 99-110.
- [31] *Гузь, О. М.* Про зведення композитних матеріалів з початковими напруженнями / О. М. Гузь // ДАН УРСР. – 1974. – № 11. – С. 142-151.
- [32] *Гузь, А. Н.* К теории композитных материалов с начальными напряжениями : Сб. Механика деформируемых тел и конструкций / А. Н. Гузь. – М. : Машиностроение, 1975. – 40 с.
- [33] *Пригожин, И.* Неравновесная статистическая механика / И. Пригожин. – М. : Мир, 1964. – 321 с.
- [34] *Бережной, И. А.* Об интегральных неравенствах теории упругопластического тела / И. А. Бережной, Д. Д. Ивлев // ПММ. – Вып. 3. – 1980. – С. 540-549.
- [35] *Ершов, Л. В.* Об условиях квазихрупкого разрушения / Л. В. Ершов, Д. Д. Ивлев // ПММ. – Вып. 3. – 1967. – С. 123-127
- [36] *Дудукаленко, В. В.* О направлении роста трещины в условиях плоского напряженного состояния / В. В. Дудукаленко, Н. Б. Ромалис // МТТ. – Вып. 2. – 1973. – С. 129-136.
- [37] *Монин, А. С.* Статистическая гидродинамика : Ч. 1, 2 / А. С. Монин, А. М. Яглом. – М. : Наука, 1965. – 320 с.
- [38] *Иваницкий, Г. Р.* Автоматический анализ микрообъектов / Г. Р. Иваницкий, Л. Л. Литинская, В. Л. Шахматова. – М-Л. : Энергия, 1967. – 224 с.
- [39] *Вайнштейн, А. А.* Корреляционная функция мартенситного превращения / А. А. Вайнштейн, Л. В. Ишкова, Э. О. Корниенк // ФММ. – Вып. 2. – 1976. – С. 422-424.
- [40] *Болотин, В. В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций / В. В. Болотин. – М. : Машиностроение, 1984. – 312 с.
- [41] *Коиндзуми, М.* Новые керамические материалы. Подходы к созданию материалов / М. Коиндзуми, В. Канамар // Коге дзайрё : Eng.M. – 1982. – № 4. – С. 117.
- [42] *Aurbach, A.* Test up to 1600 ° C for establishid the mechanical qualities of certain elastically melted material / A. Aurbach // Proc. 7 cof. silicate. – Iun 1963. – Budapest. – P. 559.
- [43] *Самарин, Ю. П.* Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами / Ю. П. Самарин. – Куйбышев : КГУ, 1979. – 84 с.
- [44] *Самарин, Ю. П.* Систематизация одного класса определяющих соотношений для материалов со сложными реологическими свойствами / Ю. П. Самарин, Ю. А. Ерёмин // Проблемы прочности. – 1988. – № 8. – С. 22-27.
- [45] *Смыслов, А. Ю.* К теории пластичности пористых сред / А. Ю. Смыслов // Изв. Вузов, Машиностроение. – № 4. – 1980. – С. 76-80.
- [46] *Эдвард, Ву.* Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред / Ву. Эдвард // Композиционные материалы. – Т. 2. – 1987. – С. 408-498.

- [47] *Макарова, И. С.* Эффективные свойства многокомпонентных композиционных материалов, содержащих упругопластические включения / И. С. Макарова, Л. А. Сараев // Надежность и неупругое деформирование конструкций, Куйбышев. – 1990. – С. 117-123.
- [48] *Левин, В. М.* К определению упругих и термоупругих постоянных композитных материалов / В. М. Левин // МТТ. – № 6. – 1976. – С. 137-155.
- [49] *Победря, Б. Е.* Механика композиционных материалов / Б. Е. Победря. – М. : Изд. МГУ, 1984. – 336 с.
- [50] *Берг, О. Я.* Высокопрочный бетон / О. Я. Берг, Е. Н. Щербаков, Г. Н. Писанко. – М. : Стройиздат, 1971. – 206 с.
- [51] *Макаринчев, В. В.* Расчет конструкций из ячеистых бетонов / В. В. Макаринчев, Н. И. Левин. – М. : Стройиздат, 1961. – 152 с.
- [52] *Лещинский, М. Ю.* Испытания прочности бетона / М. Ю. Лещинский, Б. Г. Скрамтаев. – М. : Стройиздат, 1973. – 270 с.
- [53] *Эшелби, Яж.* Континуальная теория дислокаций / Яж. Эшелби. – ИЛ, 1963. – 280 с.
- [54] *Основы материаловедения* / Под ред. И. И. Сидорина. – М. : Машиностроение, 1976. – 450 с.
- [55] *Коттрел, А.* Прочность материалов / А. Коттрел // Сборник “Механические свойства материалов”. – М. : Мир, 1966. – С. 7-20.
- [56] *Келли, А.* Упрочнение металлов дисперсными частицами / А. Келли // Сборник “Механические свойства материалов”. – М. : Мир, 1966. – С. 111-136.
- [57] *Малмейстер, А. К.* Упругость и неупругость бетона / А. К. Малмейстер. – Рига : Изд. Латв. АН, 1957. – 211 с.
- [58] *Пирадов, А. В.* Конструкционные свойства легкого бетона и железобетона / А. В. Пирадов. – М. : Стройиздат, 1973. – 133 с.
- [59] *Койте, В.* Общие теоремы теории упругопластических сред / В. Койте. – М. : ИЛ, 1961. – 78 с.
- [60] *Лихачев, В. А.* Эффект памяти формы / В. А. Лихачев, С. Л. Кузьмин, З. П. Каменцева. – Л. : Изд. Ленингр. ун-та, 1987. – 216 с.
- [61] *Тихонов, А. С.* О механизме мартенситной памяти в металлических материалах / А. С. Тихонов, А. П. Герасимов // Физ.-хим. обработка материалов. – 1976. – №5. – С. 78-96.
- [62] *Апаев, Б. А.* Физические представления о фазовых превращениях в запоминающих форму сплавах / Б. А. Апаев, В. И. Вороненко // МиТОМ. – № 5. – С. 28-32.
- [63] *Хандрос, Л. Г.* Матреситные превращения, эффект памяти формы и сверхупругость / Л. Г. Хандрос, И. А. Арбузов // кн. “Металлы, электроны, решетки”. – Киев : Наукова думка, 1975. – С. 109-112.
- [64] *Корнилов, И. И.* Никелид титана и другие сплавы с эффектом памяти формы / И. И. Корнилов, О. К. Белоусов, Е. В. Качура. – М. : Наука, 1977. – 156 с.
- [65] *Хачатурян, А. Г.* Теория фазовых превращений и структура твердых растворов / А. Г. Хачатурян. – М. : Наука, 1974. – 384 с.
- [66] *Андреев, В. В.* Деформация стержня кругового сечения при фазовом переходе / В. В. Андреев, А. М. Косевич, Л. В. Танатаров // ПМТФ, 1961. – № 5. – С. 67-77.
- [67] *Козин, Р. Г.* Упруговязкопластические напряжения в свободной сфере при фазовых превращениях / Р. Г. Козин, К. Н. Шевченко // Изв. АН СССР, МТТ. – 1975. – № 4. – С. 122-130.
- [68] *Козин, Р. Г.* Напряженное состояние цилиндрических изделий при фазовых превращениях / Р. Г. Козин, К. Н. Шевченко // кн. “Материалы атомной техники”. – Вып. 1. – 1975. – С. 87-94.
- [69] *Волков, С. Д.* О методе расчета объемноструктурного упрочнения элементов конструкций / С. Д. Волков // Проблемы прочности. – № 10. – 1970. – С. 9-13.

- [70] *Подстригач, Я. С.* Основные уравнения процессов деформирования многокомпонентных твердых тел при аллотропическом превращении / Я. С. Подстригач, А. И. Бурак, В. И. Асташкин // Прикл. мех. – Т. 13. – 1977. – С. 108.
- [71] *Асташкин, В. И.* Термодинамические основы теории деформаций n -компонентных твердого раствора при аллотропическом превращении / В. И. Асташкин, А. И. Бурак // кн. “Математические методы и физико-механические поля”. – Киев: Наукова думка, 1978. – С. 60-72.
- [72] *Томас, Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М. : Мир, 1964. – 308 с.
- [73] *Соколкин, Ю. В.* Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел / Ю. В. Соколкин, А. А. Ташкинов. – М. : Наука, 1984. – 116 с.
- [74] *Макаров, Э. С.* Вариант построения теории пластичности дилатирующей среды / Э. С. Макаров, Л. А. Толоконников // МТТ. – № 5. – С. 139-143.
- [75] *Архипов, И. К.* Эффективные соотношения между напряжениями и деформациями в корреляционной теории упругопластических деформаций / И. К. Архипов, Л. А. Толоконников // МТТ. – № 2. – 1984. – С. 196-200.
- [76] *Хилл, Р.* Макроскопические меры деформации и работы на пластических деформациях микронееднородной среды / Р. Хилл // ПММ. – Вып. 1. – 1971. – С. 31-39.
- [77] *Немировский, Ю. В.* Прочность элементов конструкций из композитных материалов / Ю. В. Немировский, В. С. Резников. – Новосибирск : Наука, 1986. – 165 с.
- [78] *Маслов, Б. П.* Упруго-пластическое деформирование упрочненных волокнами материалов / Б. П. Маслов // Прикл. мех. – 1974. – Вып. 11. – С. 116-119.
- [79] *Маслов, Б. П.* Эффективные характеристики упругих физически нелинейных неоднородных сред / Б. П. Маслов, Л. П. Хорошун // МТТ/ – № 2/ – 1977. – С. 149-153.
- [80] *Аннин, В. Д.* Современные модели пластических тел / В. Д. Аннин. – Новосибирск : Новосибирский ун-тет, 1975. – 96 с.
- [81] *Кадашевич, Ю. И.* О предельных вариантах теории пластичности, учитывающей начальные микронапряжения / Ю. И. Кадашевич, В. В. Новожилов // МТТ. – № 3. – 1980. – С. 93-96.
- [82] *Курдюмов, Г. В.* О термоупругом равновесии при мартенситных превращениях / Г. В. Курдюмов, Л. Г. Хандрос // ДАН СССР. – Т. 66, № 2. – 1949. – С. 57-70.
- [83] *Арбузова, И. А.* Влияние напряжений на деформацию сплава меди с алюминием и никелем в интервале температур мартенситного превращения / И. А. Арбузова, Л. Г. Хандрос // В кн. “Вопросы физики металлов и металловедения”. – Киев : Изд. АН УССР, 1964. – С. 40-45.
- [84] *Арбузова, И. А.* Эффект памяти формы в сплавах. – М. : Наука, 1979. – 240 с.
- [85] *Швайко, Н. Ю.* К теории пластичности, основанной на концепции скольжения / Н. Ю. Швайко // Прикл. мех. – № 2. – 1976. – С. 12-24.
- [86] *Берштейн, М. Л.* Структура деформированных металлов / М. Л. Берштейн. – М. : Металлургия, 1977. – 430 с.
- [87] *Беран, М. Дж.* Применение статистических теорий / М. Дж. Беран // В кн. “Механика композиционных материалов”. – Т. 2. – М. : Мир, 1978. – С. 243-267.
- [88] *Черепанов, Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1983. – 296 с.
- [89] *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
- [90] *Физика прочности и пластичности* / Под ред. С. Н. Журкова. – Л. : Наука, 1989. – 150 с.
- [91] *Малмейстер, А. К.* Сопротивление полимерных и композитных материалов / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетер. – Рига : Зинатне, 1980. – 572 с.

- [92] Тамуж, В. П. Микромеханика разрушения полимерных материалов / В. П. Тамуж, В. С. Куксенко. – Рига : Зинатне, 1978. – 294 с.
- [93] Механика деформируемого твердого тела: Направления развития / Под ред. Г. С. Шапиро. – М. : Мир, 1983. – 346 с.
- [94] Шапиро, Г. С. О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию / Г. С. Шапиро // МТТ. – № 2. – 1966. – С. 122-125.
- [95] Ильюшин, А. А. Об одной теории длительной прочности / А. А. Ильюшин // МТТ. – № 3. – 1967. – С. 21-25.
- [96] Вакуленко, А. А. Континуальная теория среды с трещинами / А. А. Вакуленко, Л. М. Качанов // МТТ. – № 4. – 1971. – С. 104-110.
- [97] Hashin, Z. Analysis of Composite Materials / Z. Hashin // ASME, Journal of Applied Mechanics. – Vol. 50. – 1983. – P. 481-505
- [98] Green, R. J. A plasticity theory for porous solids / R. Green // Int. J. Mech. Sci. – V.14. – 1972. – P. 215-226
- [99] Bush, H. G. Analytical design method of strength / H. G. Bush // Composite Material: Proc. 6th Symp. – 1973. – N4
- [100] Chou, P. C. The yield criterion of laminated media / P. C. Chou, B. M. Memomy // J.Comp.Mater. – 1973. – V. 7. – P. 22-40
- [101] Cooper, P. A. Trajectory fiber reinforcement of composites / P. A. Cooper, E. M. Wu // Proc. 6th Symp. St. Lois. – 1973. – P. 377-382
- [102] Crezszuk, L. B. Stress concentrations and failure criteria for plates / L. B. Crezszuk // Conf.C.Mat. – 1972. – P. 112-120
- [103] Fisher, L. How to predict structural behavior of R.P. laminates / L. Fisher // Modern Plastics. – 1960. – V. 37, N 10. – P. 120-129
- [104] Мишин, Д. Д. Магнитные материалы / Д. Д. Мишин. – М. : Высшая школа, 1981. – 335 с.
- [105] Желудев, И. С. Основы сегнетоэлектричества / И. С. Желудев. – М. : Атомиздат, 1981. – 506 с.
- [106] Сиротин, Ю. И. Основы кристаллофизики / Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская. – М. : Наука, 1979. – 640 с.
- [107] Granoff, B. Carbon felt, carbon – matrix composites : Dependents of thermal am mech / B. Granoff, H. Pierson, D. Shuster // J.Com.Mat. – 1973. – V. 7. – P. 36-52
- [108] Greenwood, J. H. German work on g.r.p. design / J. H. Greenwood // Composites. – 1977. – V. 8, N 3. – P. 175-184
- [109] Harris, B. The strength of fibre composites / B. Harris // Composites. – 1972. – V. 3, N 4. – P. 152-184
- [110] Naraynaswami, R. Evaluation of the tensor polynomials and Hoffman strengs / R. Naraynaswami, H. M. Adelman // Arch.ingynir. – 1975. – N 1. – P. 57-67
- [111] Peters, P. W. The interlamier shear strength of unidirectional boronaluminium / P. W. Peters // J.Comp.Mat. – 1978. – V. 12. – P. 53-62
- [112] Sagers, K. H. Interlaminar shear strength of carbon / K. H. Sagers, B. Harris // J.Comp.Mat. – 1973. – V. 7. – P. 129-160
- [113] Портной, К. И. Структура и свойства композиционных материалов / К. И. Портной, С. Е. Салибеков, И. Л. Светлов, В. М. Чубаров. – М. : Машиностроение, 1979. – 225 с.
- [114] Конкин, А. А. Углеродные и другие жаростойкие и волокнистые материалы / А. А. Конкин. – М. : Химия, 1974. – 375 с.
- [115] Портной, К. И. Дисперсноупрочненные материалы / К. И. Портной, Б. Н. Бабищ. – М. : Металлургия, 1974. – 200 с.
- [116] Скороход, В. В. Реологические основы теории спекания / В. В. Скороход. – Киев : Наукова думка, 1972. – 149 с.

- [117] *Туманов, А. Т.* Композиционные материалы – материалы будущего / А. Т. Туманов // Вестник АН СССР. – 1975. – № 3. – С. 37-44.
- [118] *Дудукаленко, В. В.* К теории пластической анизотропии / В. В. Дудукаленко // ДАН УССР. – 1961. – № 7. – С. 872-875.
- [119] *Дудукаленко, В. В.* Об экстремальных путях пластического деформирования / В. В. Дудукаленко // ДАН СССР. – 1964. – Т. 157, № 1. – С. 69-72.
- [120] *Дудукаленко, В. В.* Об условии единственности анизотропно упрочняющегося пластического материала / В. В. Дудукаленко // Прикл. мех. – № 1, Вып. 9. – 1968. – С. 117-120.
- [121] *Дудукаленко, В. В.* О пластическом скольжении в ферроупругом материале / В. В. Дудукаленко // МТТ. – 1985. – № 5. – С. 89-96.
- [122] *Дудукаленко, В. В.* Модель процесса образования фазовой структуры, обладающей свойствами голограммной памяти / В. В. Дудукаленко // МТТ. – 1988. – Т. 1, № 6. – С. 80-87.
- [123] *Дудукаленко, В. В.* Процессы ползучести в двухфазных электроплавленных огнеупорах / В. В. Дудукаленко // Надежность и неупругое деформирование конструкций. – // Куйбышев : КПИИ, 1990. – С. 133-139.
- [124] *Дудукаленко, В. В.* К расчету предела пластичности композитных материалов / В. В. Дудукаленко, В. А. Минаев // ПММ. – 1970. – № 5. – С. 942-944.
- [125] *Дудукаленко, В. В.* О деформировании статистически неоднородной пластической среды / В. В. Дудукаленко, В. А. Минаев // МТТ. – 1970. – № 3. – С. 83-86.
- [126] *Дудукаленко, В. В.* О связи масштабного и краевого эффектов в стохастически неоднородных средах / В. В. Дудукаленко, А. В. Чигарев // МТТ. – 1969. – № 4. – С. 70-74.
- [127] *Дудукаленко, В. В.* Об определении вязкости композитной вязкой жидкости / В. В. Дудукаленко, О. И. Иванищева, Б. И. Легеня // Мех. пол. – 1972. – № 5. – С. 949-952.
- [128] *Дудукаленко, В. В.* О влиянии структуры композитного материала на его упругие свойства / В. В. Дудукаленко, О. И. Иванищева, Б. И. Легеня // ПМТФ. – 1973. – № 2. – С. 153-159.
- [129] *Дудукаленко, В. В.* Об исследовании сложных сред с микроструктурой / В. В. Дудукаленко, О. И. Иванищева // Исследования по механике сплошных сред. – Воронеж : ВГУ, 1974. – Вып. 1. – С. 70-76.
- [130] *Дудукаленко, В. В.* К расчету предела пластичности пористых материалов / В. В. Дудукаленко, А. Ю. Смыслов // Прикл. мех. – 1980. – № 5. – С. 32-36.
- [131] *Дудукаленко, В. В.* К теории деформирования грунта с пористой структурой / В. В. Дудукаленко, А. Ю. Смыслов // ПМТФ. – 1980. – № 6. – С. 122-127.
- [132] *Дудукаленко, В. В.* О пластических свойствах материала, содержащего пластинчатые включения / В. В. Дудукаленко, Н. Н. Лысач // МТТ. – 1980. – № 1. – С. 103-109.
- [133] *Дудукаленко, В. В.* Об измерении многоточечных моментов композитных структур / В. В. Дудукаленко, Н. Н. Лысач, С. И. Мешков // ПМТФ. – 1977. – № 6. – С. 145-149.
- [134] *Дудукаленко, В. В.* К расчету эффективных характеристик пластичности неоднородных сред / В. В. Дудукаленко, С. И. Мешков, Л. А. Сараев // ПМТФ. – 1979. – № 5. – С. 150-154.
- [135] *Дудукаленко, В. В.* О вязкоупругих свойствах двухфазного композитного материала / В. В. Дудукаленко, С. И. Мешков // Механика деформируемых сред. Физика структуры и свойств твердых тел. – Куйбышев : КГУ, 1977. – Вып. 2. – С. 102-106.
- [136] *Дудукаленко, В. В.* Об упругопластических свойствах композиционного материала / В. В. Дудукаленко, Н. Н. Лысач // Механика деформируемых сред. – Куйбышев: КГУ, 1979. – Вып. 3. – С. 116-121.
- [137] *Дудукаленко, В. В.* О вязкопластических свойствах композитных сред / В. В. Дудукаленко, Н. Н. Лысач // ВИНТИ. – 1978. – № 37. – С. 65-78.

[138] Дудукаленко, В. В. Об эффекте запоминания формы при фазовых превращениях в твердых телах / В. В. Дудукаленко, Е. Н. Бондарев // Механика деформируемых сред. – Куйбышев : КГУ, 1978. – Вып. 3. – С. 130-136.

[139] Дудукаленко, В. В. Об установившейся ползучести огнеупорных композитов / В. В. Дудукаленко, С. П. Шаповало // ПМТФ. – 1984. – № 4. – С. 142-145.

V. V. Dudukalenko

MODELING OF PLASTIC PROPERTIES OF A MATERIAL ON THE BASIS OF MESOSTRUCTURE PARAMETERS

Samara State University

Abstract. The most important properties of firm bodies and materials are their mechanical properties: elasticity, viscosity, plasticity, durability. At the same time properties of bodies are directly connected with their structure- structure of a material which characterizes the spatial distribution of components. The problem of mechanics of materials consists in design of the compositions which are optimum combining properties of durability, plasticity, rigidity which solve a question of possibility applications of this material or a detail. Composite materials allow to satisfy inconsistent requirements of easy processing material or a forming with high durability at operation. Such technological processes, as agglomeration of powders, polymerization, solidification of the cement solutions and other ways of formation of a sheaf between filler particles satisfy to these conditions. The choice of filler depends on target value swore: high durability, extreme heat conductivity, low specific weight and so forth. High durability of filler is reached by such processing methods, as cultivation of fibrous crystals, grinding in spherical mills, that is receiving particles with the smallest quantity of defects. From the point of view of mechanics calculation of such composition is similar to calculation with casually distributed parameters. If rigidity of inclusion is higher than rigidity of bonding agent, there is a distribution of tension, in which high-strength inclusions prove to be more loaded, and binding only transfers loadings to inclusions and is in a field of smaller intensive tensions. This example shows the multiple-factor dependence of durability of a composite on parameters of its components. So design of structures of compositions includes calculation of the elastic fields and the irreversible processes difficultly cooperating in the material structure. The similar phenomena occur in the heterogeneous systems, in which irreversible processes of deformation, considered at level of material structure, can explain such properties as the acquired anisotropy, effect of consolidation, dependence on loading history. Influences of temperature and plastic deformations change material structure. Character of change of a structure and heterogeneous phase transitions explain such unique phenomena, as memory of forms, superplasticity.

Keywords: tension, deformation, elasticity, plasticity, mesostructure.

Дудукаленко Валентин Владимирович

кандидат физико-математических наук, работа выполнена на кафедре Самарского государственного университета, г. Самара

e-mail: info3006@yandex.ru

Dudukalenko Valentin Vladimirovich

Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Samara State University, Samara

А. Д. Чернышев, Н. В. Минаева, Н. А. Хозяинова

ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСТЯЖЕНИИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ С ОТВЕРСТИЕМ

Воронежская государственная технологическая академия

Аннотация. В статье дается постановка задачи о растяжении упругой пластины конечных размеров с отверстием, нагруженной нормальными напряжениями на внешних границах и на границе отверстия. Решение рассматривается в перемещениях, представленных быстрыми разложениями, позволяющими от дифференциальной системы перейти к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений.

Ключевые слова: упругая пластина конечных размеров, отверстие, быстрые разложения.

УДК: 539

Точное решение задачи о растяжении упругопластической плоскости с круговым отверстием получено Л. А. Галиным [1]. В работе [3, с. 150] рассмотрена упругопластическая пластина с круглым отверстием методом малого параметра. Решение для ограниченной пластины получено конечно-разностным методом [2, с. 306], методом граничных состояний [5]. Подобная задача для упругопластической пластины с анизотропными свойствами рассматривалась также в работе [6] методом малых возмущений.

Ниже предлагается решать задачу в явном аналитическом виде методом быстрых разложений с применением расширения границ [7, 8]. Постановка задачи.

Рассмотрим прямоугольную пластину конечных размеров $(a_1 + a_2) \times (b_1 + b_2)$ с круговым отверстием радиуса R_0 . По условию задачи заданы нормальные напряжения σ_{x0}, σ_{y0} на внешних границах пластины и давление p_0 на границе отверстия. Касательные напряжения на всех границах приняты равными нулю. Задачу будем решать в перемещениях $u(x, y), v(x, y)$ в декартовой системе координат, начало которой разместим в центре кругового отверстия.

Напряженно-деформированное состояние упругой пластины описывается кинематическими соотношениями для деформаций, законом Гука и уравнениями равновесия в форме Ламэ [4, с. 126]:

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \\(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Пластина с отверстием является двусвязной областью, что представляет существенную математическую сложность при выполнении граничных условий. Разрежем пластину вдоль оси Ox и будем рассматривать верхнюю и нижнюю части отдельно как односвязные области. Обозначим Γ_1 полную границу верхней части, Γ_2 – нижней части пластины, Γ_0 – границу разреза при $x \in [-a_1, -R_0] \cup [R_0, a_2], y = 0$. Границу окружности радиуса R_0 обозначим Γ_{01} для верхней части, Γ_{02} – для нижней. На границе разреза введем дополнительные условия непрерывности перемещений и напряжений.

Граничные условия на верхней и нижней границах пластины при $y = -b_1, b_2, x \in [-a_1, a_2]$:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_{y0}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Запишем также ГУ на боковых границах при $x = -a_1, a_2, x \in [-b_1, b_2]$:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_{x0}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Задача для верхней части пластины: $x \in [-a_1, a_2], y \in [-b_1, b_2]$.

Рассмотрим ГУ на полуокружности Γ_{01} . Нормальные и касательные напряжения на границе окружности вычисляются по

$$\sigma_{ij} n_{ij} n_i = -p_0, \quad \sigma_{ij} n_{ij} \tau_i = 0, \quad (4)$$

где $n_i = (x/R, \sqrt{R_0^2 - x^2}/R_0)$, $\tau_i = (-\sqrt{R_0^2 - x^2}/R_0, x/R_0)$ – компоненты векторов нормали и касательной на верхней части окружности. Выразив в (4):

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left(2\mu \frac{x^2}{R_0^2} + \lambda \right) + 2\mu \frac{x\sqrt{R_0^2 - x^2}}{R_0^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(2\mu \left(1 - \frac{x^2}{R_0^2} \right) + \lambda \right) = -p_0, \quad (5)$$

$$2\mu \frac{x\sqrt{R_0^2 - x^2}}{R_0^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(-1 + \frac{2x^2}{R_0^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -0. \quad (6)$$

Представим перемещения $u(x, y)$, $v(x, y)$ в виде быстрых синус-разложений в ряды Фурье по переменной $y \in [0, b_2]$ с граничными функциями, подобранными в виде полиномов наименьшей степени специальным образом [5]:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \varphi_1(x) \left(1 - \frac{y}{b_2} \right) + \varphi_2(x) \frac{y}{b_2} + \varphi_3(x) \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b_2} - \frac{yb_2}{3} \right) + \\ & + \varphi_4(x) \left(\frac{y^3}{6b_2} - \frac{yb_2}{6} \right) + \sum_{m=1}^M u_m(x) \sin \frac{m\pi y}{b_2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v(x, y) = & \psi_1(x) \left(1 - \frac{y}{b_2} \right) + \psi_2(x) \frac{y}{b_2} + \psi_3(x) \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b_2} - \frac{yb_2}{3} \right) + \\ & + \psi_4(x) \left(\frac{y^3}{6b_2} - \frac{yb_2}{6} \right) + \sum_{m=1}^M v_m(x) \sin \frac{m\pi y}{b_2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(x, b_2) = \varphi_2(x), \quad u_{yy}(x, 0) = \varphi_3(x), \quad u_{yy}(x, b_2) = \varphi_4(x), \\ v(x, 0) = \psi_1(x), \quad v(x, b_2) = \psi_2(x), \quad v_{yy}(x, 0) = \psi_3(x), \quad v_{yy}(x, b_2) = \psi_4(x). \end{aligned}$$

Представленные таким образом функции можно почленно дифференцировать четыре раза, причем первая, вторая и третья производные будут сходиться всюду в рассматриваемой области, а четвертая – внутри области, но не на ее границах [8].

Используя это свойство, подставим выражения перемещений и их частные производные первого и второго порядка в уравнения (1), после чего умножим обе части каждого уравнения на $\sin \frac{j\pi y}{b_2}$, $j = 1..M$ и проинтегрируем в пределах $[0, b_2]$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b_2}{\pi j} \varphi_1''(x) - \frac{b_2(-1)^j}{\pi j} \varphi_2''(x) - \frac{b_2^3}{\pi^3 j^3} \varphi_3''(x) - \frac{b_2^3(-1)^j}{\pi^3 j^3} \varphi_4''(x) + \frac{b_2}{2} u_j''(x) \right) + \\ & + \left(\frac{(-1)^j - 1}{\pi j} \psi_1'(x) + \frac{1 - (-1)^j}{\pi j} + \sum_{m=1, m \neq j}^M \frac{jm v_m'(x)}{m^2 - j^2} \left((-1)^{m+j} - 1 \right) + \right. \\ & \left. + b_2^2 \left(\frac{(-1)^j - 1}{\pi^3 j^3} - \frac{1 + 2(-1)^j}{6\pi j} \right) \psi_4'(x) + b_2^2 \left(\frac{1 - (-1)^j}{\pi^3 j^3} - \frac{2 + (-1)^j}{6\pi j} \right) \psi_3'(x) \right) \times \\ & \times (\lambda + 2\mu) + \mu \left(\frac{b_2}{j\pi} \varphi_3(x) + \frac{b_2}{j\pi} (-1)^j \varphi_4(x) - \frac{j^2 \pi^2}{2b_2} u_j(x) \right) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\left(\begin{aligned} & \frac{(-1)^j - 1}{\pi j} \varphi'_1(x) - \frac{(-1)^j - 1}{\pi j} \varphi'_2(x) + \frac{mj u'_m(x) (1 - (-1)^{j+m})}{j^2 - m^2} + \\ & + b_2^2 \left(\frac{(-1)^j - 1}{\pi^3 j^3} - \frac{1 + 2(-1)^j}{6\pi j} \right) \varphi'_4(x) + b_2^2 \left(\frac{(-1)^j - 1}{\pi^3 j^3} - \frac{1 + 2(-1)^j}{6\pi j} \right) \varphi'_3(x) \end{aligned} \right) \times \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \times (\lambda + \mu) + (\lambda + 2\mu) \left(\frac{b_2}{\pi j} \psi_3(x) - \frac{b_2(-1)^j}{\pi j} \psi_4(x) - \frac{j^2 \pi^2}{2b_2} v_j(x) \right) + \\ & + \mu \left(\frac{b_2}{\pi j} \psi''_1(x) - \frac{b_2(-1)^j}{\pi j} \psi''_2(x) - \frac{b_2^3}{\pi^3 j^3} \psi''_3(x) + \frac{b_2^3(-1)^j}{\pi^3 j^3} \psi''_4(x) + \frac{b_2}{2} v''(x) \right) = 0. \end{aligned}$$

Полученные $2M$ обыкновенные дифференциальные уравнения (9), (10) имеют второй порядок и зависят от переменной x . К ним необходимо добавить уравнения, полученные из (1) с учетом (7), (8) при $y = 0$, $x \in [-a_1, a_2]$:

$$(\lambda + \mu) \left(-\frac{1}{b_2} \psi'_1(x) + \frac{1}{b_2} \psi'_2(x) - \frac{b_2}{3} \psi'_3(x) - \frac{b_2}{6} \psi'_4(x) + \sum_{m=1}^M \frac{m\pi v'_m(x)}{b_2} \right) + \quad (11)$$

$$+ (\lambda + 2\mu) \varphi'_1(x) + \mu \varphi_3(x) = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \left(-\frac{1}{b_2} \varphi'_1(x) + \frac{1}{b_2} \varphi'_2(x) - \frac{b_2}{3} \varphi'_3(x) - \frac{b_2}{6} \varphi'_4(x) + \sum_{m=1}^M \frac{m\pi u'_m(x)}{b_2} \right) + \quad (12)$$

$$+ (\lambda + 2\mu) \psi_3(x) + \mu \psi'_1(x) = 0.$$

Аналогично на границе $y = b_2$, $x \in [-a_1, a_2]$:

$$(\lambda + \mu) \left(-\frac{1}{b_2} \psi'_1(x) + \frac{1}{b_2} \psi'_2(x) + \frac{b_2}{6} \psi'_3(x) + \frac{b_2}{3} \psi'_4(x) + \sum_{m=1}^M \frac{m\pi(-1)^m v'_m(x)}{b_2} \right) + \quad (13)$$

$$+ (\lambda + 2\mu) \varphi'_{21}(x) + \mu \varphi_4(x) = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \left(-\frac{1}{b_2} \varphi'_1(x) + \frac{1}{b_2} \varphi'_2(x) + \frac{b_2}{6} \varphi'_3(x) + \frac{b_2}{3} \varphi'_4(x) + \sum_{m=1}^M \frac{m\pi(-1)^m u'_m(x)}{b_2} \right) + \quad (14)$$

$$+ (\lambda + 2\mu) \psi_4(x) + \mu \psi'_2(x) = 0.$$

Выражения для перемещений (7), (8) подставим в ГУ (2):

$$-\frac{1}{b_2} \varphi_1(x) + \frac{1}{b_2} \varphi_2(x) + \frac{b_2}{6} \varphi_3(x) + \frac{b_2}{3} \varphi_4(x) + \sum_{m=1}^M \frac{m\pi(-1)^m u_m(x)}{b_2} + \psi'_2(x) = 0, \quad (15)$$

$$(\lambda + 2\mu) \left(-\frac{1}{b_2} \psi_1(x) + \frac{1}{b_2} \psi_2(x) + \frac{b_2}{6} \psi_3(x) + \frac{b_2}{3} \psi_4(x) + \sum_{m=1}^M \frac{m\pi(-1)^m v_m(x)}{b_2} \right) + \quad (16)$$

$$+ \lambda \varphi'_2(x) = \sigma_{y0}.$$

ГУ на границе продольного разреза пластины заданы кусочно: на прямых отрезках $y \in [-a_1, -R_0] \cup [R_0, a_2]$, $y = 0$ и на дуге Γ_{01} . Используя метод расширения границ, рассмотрим напряжения на всей $y = 0$, $x \in [-a_1, a_2]$ в виде некоторых функций $\sigma_{y0}^*(x)$, $\tau_{xy}^*(x)$, которые при $y = 0$, $x \in [-R_0, R_0]$ опеределаются с учетом (5), (6). Тогда из ГУ на Γ_0 при $x \in [-a_1, a_2]$ будем иметь

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_{y0}^*(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \tau_{xy}^*(x). \quad (17)$$

Из ГУ (17) после подстановки в них (7), (8) получим уравнения:

$$\mu \left(-\frac{1}{b_2} \varphi_1(x) + \frac{1}{b_2} \varphi_2(x) - \frac{b_2}{3} \varphi_3(x) - \frac{b_2}{6} \varphi_4(x) + \sum_{m=1}^M \frac{m\pi u_m(x)}{b_2} + \psi'_1(x) \right) = \tau_{xy}^*, \quad (18)$$

$$(\lambda + 2\mu) \left(-\frac{1}{b_2} \psi_1(x) + \frac{1}{b_2} \psi_2(x) - \frac{b_2}{3} \psi_3(x) - \frac{b_2}{6} \psi_4(x) + \sum_{m=1}^M \frac{m\pi v_m(x)}{b_2} \right) + \quad (19)$$

$$+ \lambda \varphi'_1(x) = \sigma_{y0}^*(x).$$

Таким образом, система (9)-(19) состоит из $8+2M$ дифференциальных уравнений. Из них $4+2M$ независимых уравнений второго порядка, а еще 4 уравнения являются алгебраическими относительно четырех неизвестных $\varphi_3, \varphi_4, \psi_3, \psi_4$. Для интегрирования этой системы требуется $8+4M$ граничных условий. Получим их из ГУ (3) с учетом выражений для перемещений (7), (8).

На левой границе при $x = -a_1, y \in [0, b_2]$ получим алгебраические уравнения, зависящие только от переменной y . Рассмотрим каждое из них в двух крайних точках области. При $y = 0$:

$$\lambda \left(-\frac{1}{b_2} \psi_1(-a_1) + \frac{1}{b_2} \psi_2(-a_1) - \frac{b_2}{3} \psi_3(-a_1) - \frac{b_2}{6} \psi_4(-a_1) + \sum_{m=1}^M \frac{m\pi v_m(-a_1)}{b_2} \right) + (\lambda + 2\mu) \varphi_1'(-a_1) = \sigma_{x0}, \quad (20)$$

$$\frac{1}{b_2} \varphi_2(-a_1) + \frac{1}{b_2} \varphi_1(-a_1) - \frac{b_2}{3} \varphi_3(-a_1) - \frac{b_2}{6} \varphi_4(-a_1) + \sum_{m=1}^M \frac{m\pi u_m(-a_1)}{b_2} + \psi_1'(-a_1) = 0. \quad (21)$$

При $y = b_2$:

$$\left(\frac{1}{b_2} (\psi_2(-a_1) - \psi_1(-a_1)) + \frac{b_2}{6} \psi_3(-a_1) + \frac{b_2}{3} \psi_4(-a_1) + \sum_{m=1}^M \frac{m\pi v_m(-a_1)(-1)^m}{b_2} \right) \times (\lambda + 2\mu) \varphi_1'(-a_1) = \sigma_{x0}, \quad (22)$$

$$\frac{1}{b_2} \varphi_2(-a_1) - \frac{1}{b_2} \varphi_1(-a_1) + \frac{b_2}{6} \varphi_3(-a_1) + \frac{b_2}{3} \varphi_4(-a_1) + \sum_{m=1}^M \frac{m\pi u_m(-a_1)(-1)^m}{b_2} + \psi_2'(-a_1) = 0. \quad (23)$$

Аналогичным образом ГУ на правой границе пластины при $x = a_2, y \in [0, b_2]$ будем рассматривать в двух точках. При $y = 0$:

$$\lambda \left(-\frac{1}{b_2} \psi_1(a_2) + \frac{1}{b_2} \psi_2(a_2) - \frac{b_2}{3} \psi_3(a_2) - \frac{b_2}{6} \psi_4(a_2) + \sum_{m=1}^M \frac{m\pi v_m(a_2)(-1)^m}{b_2} \right) + (\lambda + 2\mu) \varphi_1'(a_2) = \sigma_{x0}, \quad (24)$$

$$\frac{1}{b_2} \varphi_2(a_2) - \frac{1}{b_2} \varphi_1(a_2) - \frac{b_2}{3} \varphi_3(a_2) - \frac{b_2}{6} \varphi_4(a_2) + \sum_{m=1}^M \frac{m\pi u_m(a_2)}{b_2} + \psi_1'(a_2) = 0. \quad (25)$$

При $y = b_2$:

$$\lambda \left(-\frac{1}{b_2} \psi_1(a_2) + \frac{1}{b_2} \psi_2(a_2) + \frac{b_2}{6} \psi_3(a_2) + \frac{b_2}{3} \psi_4(a_2) + \sum_{m=1}^M \frac{m\pi v_m(a_2)(-1)^m}{b_2} \right) + (\lambda + 2\mu) \varphi_2'(-a_2) = \sigma_{x0}, \quad (26)$$

$$\frac{1}{b_2} \varphi_2(a_2) - \frac{1}{b_2} \varphi_1(a_2) + \frac{b_2}{6} \varphi_3(a_2) + \frac{b_2}{3} \varphi_4(a_2) + \sum_{m=1}^M \frac{m\pi u_m(a_2)(-1)^m}{b_2} + \psi_2'(a_2) = 0. \quad (27)$$

Разложим каждое из уравнений (3) с учетом (7), (8) при $x = -a_1, x = a_2$ в ряды Фурье по переменной y . Для этого умножим левую и правую части каждого уравнения на $\sin \frac{j\pi y}{b_2}, j = 1..M$ и проинтегрируем в пределах $[0, b_2]$

$$\begin{aligned}
& \lambda \frac{(-1)^j}{j\pi} (\psi_1(-a_1) - \psi_2(-a_1)) - \lambda \sum_{m=1, m \neq j}^M \frac{mj((-1)^{m+j}-1)}{j^2-m^2} v_m(-a_1) - \\
& - b_2^2 \lambda \left(\frac{1+2(-1)^j}{6j\pi} + \frac{1-(-1)^j}{j^3\pi^3} \right) \psi_4(-a_1) + (\lambda + 2\mu) \frac{b_2}{j\pi} \varphi_1'(-a_1) - \\
& - b_2^2 \lambda \left(\frac{2+(-1)^j}{6j\pi} + \frac{(-1)^j-1}{j^3\pi^3} \right) \psi_3(-a_1) - (\lambda + 2\mu) \frac{b_2(-1)^j}{j\pi} \varphi_2'(-a_1) + \\
& + (\lambda + 2\mu) \left(\frac{b_2^3}{j^3\pi^3} \varphi_4'(-a_1) - \frac{b_2^3(-1)^j}{6j^3\pi^3} \varphi_3'(-a_1) + \frac{u_j'(-a_1)b_2}{2} \right) = \frac{\sigma_{x0}b_2(1-(-1)^j)}{j\pi},
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(-1)^j-1}{j\pi} (\varphi_1(-a_1) - \varphi_2(-a_1)) - b_2^2 \left(\frac{2+(-1)^j}{6j\pi} + \frac{(-1)^j-1}{j^3\pi^3} \right) \varphi_3(-a_1) - \\
& - b_2^2 \left(\frac{2(-1)^j+1}{6j\pi} + \frac{1-(-1)^j}{j^3\pi^3} \right) \varphi_4(-a_1) + \frac{b_2}{j\pi} \psi_1'(-a_1) + \frac{b_2(-1)^j}{j\pi} \psi_2'(-a_1) - \\
& - \frac{b_2^3}{j^3\pi^3} \psi_3'(-a_1) + \frac{b_2^3(-1)^j}{j^3\pi^3} \psi_4'(-a_1) - \sum_{m=1, m \neq j}^M \frac{mj((-1)^{m+j}-1)}{j^2-m^2} u_m(-a_1) + \frac{b_2}{2} v_j'(-a_1) = 0,
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda \left(\frac{(-1)^j-1}{j\pi} (\psi_1(a_2) - \psi_2(a_2)) - \sum_{m=1, m \neq j}^M \frac{mj((-1)^{m+j}-1)}{j^2-m^2} v_m(a_2) \right) - \\
& - b_2^2 \lambda \left(\left(\frac{2(-1)^j+1}{6j\pi} + \frac{1-(-1)^j}{j^3\pi^3} \right) \psi_3(a_2) + \left(\frac{1+2(-1)^j}{6j\pi} + \frac{1-(-1)^j}{j^3\pi^3} \right) \psi_4(a_2) \right) + \\
& + (\lambda + 2\mu) \left(\frac{u'(a_2)b_2}{2} + \frac{b_2}{j\pi} \varphi_1'(a_2) + \frac{b_2(-1)^j}{j\pi} \varphi_2'(a_2) - \frac{b_2^3}{j^3\pi^3} \varphi_3'(a_2) \right) + \\
& + (\lambda + 2\mu) \frac{b_2^3(-1)^j}{6j^3\pi^3} \varphi_4'(a_2) = \frac{\sigma_{x0}b_2(1-(-1)^j)}{j\pi},
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(-1)^j-1}{j\pi} (\varphi_1(a_2) - \varphi_2(a_2)) - \sum_{m=1, m \neq j}^M \frac{mj((-1)^{m+j}-1)}{j^2-m^2} u_m(a_2) - \\
& - b_2^2 \left(\frac{2(-1)^j+1}{6j\pi} + \frac{1-(-1)^j}{j^3\pi^3} \right) \varphi_3(a_2) - b_2^2 \left(\frac{2(-1)^j+1}{6j\pi} + \frac{1-(-1)^j}{j^3\pi^3} \right) \varphi_4(a_2) - \\
& - \frac{b_2(-1)^j}{j\pi} \psi_2'(a_2) - \frac{b_2^3}{j^3\pi^3} \psi_3'(a_2) + \frac{b_2^3(-1)^j}{j^3\pi^3} \psi_4'(a_2) + v_j'(a_2) \frac{b_2}{2} = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Полученные $8+4M$ уравнений (20)-(30) представляют собой систему ГУ, необходимых для интегрирования $8+2M$ дифференциальных уравнений (9)-(19), содержащих $10+2M$ неизвестных функций $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, u_j, v_j, \sigma_{y0}^*, \tau_{xy}^*\}$, $j = 1..M$, зависящих от переменной x . Для замыкания полученной системы необходимо рассмотреть задачу для нижней части пластины.

Задача для нижней части пластины: $x \in [-a_1, a_2]$, $y \in [-b_1, 0]$.

Напряженно-деформированное состояние нижней части пластины рассматривается аналогично вышеизложенному описанию верхней части с несколькими существенными различиями.

Рассмотрим ГУ на полуокружности Γ_{02} . Они также вычисляются по формулам (4), где $n_i = (x/R, -\sqrt{R_0^2 - x^2}/R_0)$, $\tau_i = (\sqrt{R_0^2 - x^2}/R_0, x/R_0)$. С учетом этих координат уравнения (4) в перемещениях примут вид:

$$\begin{aligned}
& \left(\lambda + 2\mu \frac{x^2}{R_0^2} \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \left(2\mu \left(1 - \frac{x^2}{R_0^2} \right) + \lambda \right) \frac{\partial V}{\partial y} + \\
& + 2\mu \frac{x\sqrt{R_0^2 - x^2}}{R_0^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = -p_0,
\end{aligned} \tag{31}$$

$$2\mu \frac{x\sqrt{R_0^2 - x^2}}{R_0^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{x^2}{R_0^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0. \tag{32}$$

Здесь $U(x,y)$, $V(x,y)$ – перемещения для нижней части пластины. Представим их в виде быстрых разложений в ряды Фурье по переменной $y \in [-b_1, 0]$:

$$U(x, y) = \Phi_1(x) \left(1 + \frac{y}{b_1}\right) - \Phi_2(x) \frac{y}{b_1} + \Phi_3(x) \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6b_1} + \frac{yb_1}{3}\right) + \Phi_4(x) \left(-\frac{y^3}{6b_1} + \frac{yb_1}{6}\right) - \sum_{m=1}^M U_m(x) \sin \frac{m\pi y}{b_1}, \quad (33)$$

$$V(x, y) = \Psi_1(x) \left(1 + \frac{y}{b_1}\right) - \Psi_2(x) \frac{y}{b_1} + \Psi_3(x) \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6b_1} + \frac{yb_1}{3}\right) + \Psi_4(x) \left(-\frac{y^3}{6b_1} + \frac{yb_1}{6}\right) - \sum_{m=1}^M V_m(x) \sin \frac{m\pi y}{b_1}, \quad (34)$$

где

$$U(x, -b_1) = \Phi_1(x), U(x, 0) = \Phi_2(x), U_{yy}(x, -b_1) = \Phi_3(x), U_{yy}(x, 0) = \Phi_4(x), \\ V(x, -b_1) = \Psi_1(x), V(x, 0) = \Psi_2(x), V_{yy}(x, -b_1) = \Psi_3(x), v_{yy}(x, 0) = \Psi_4(x).$$

Систему $8+2M$ дифференциальных уравнений для нижней части получаем так же как для верхней – из уравнений Ламэ при $y=0$ и $y=-b_1$ и их разложений в ряды Фурье, из граничных условий при $y=0, y=-b_1$ с учетом (34), (36). Из них $4+2M$ будут обыкновенными дифференциальными уравнениями относительно переменных $\Phi_3, \Phi_4, \Psi_3, \Psi_4$. Для их интегрирования необходимо $8+4M$ ГУ, которые могут быть получены из ГУ (5) для нижней части пластины, $x = -a_1, a_2, y \in [-b_1, 0]$ так же, как это рассматривалось для верхней части пластины. Таким образом, система ГУ будет достаточной для интегрирования $8+2M$ дифференциальных уравнений для нижней части, содержащих $1+2M$ неизвестных функций $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, U_j, V_j, \sigma_{y0}^*, \tau_{xy}^*\}$, $j = 1..M$ переменной x .

Для получения замкнутой системы уравнений для всей пластины объединим системы уравнений, полученные для верхней и нижней частей, и добавим к ним условия сопряжения напряжений и перемещений на границе введенного ранее разреза: $\sigma_{y0}^{*B}(x, y) = \sigma_{y0}^{*H}(x, y)$, $\tau_{xy}^{*B}(x, y) = \tau_{xy}^{*H}(x, y)$ для компонент напряжения верхней и нижней части пластины и $u(x, 0) = U(x, 0)$, $v(x, 0) = V(x, 0)$ для перемещений при $y = 0, x \in [-a_1, -R_0] \cup [R_0, a_2]$ с учетом выражений (7), (8), (33), (34).

Тогда система $16+4M$ уравнений и $16+8M$ ГУ, необходимых для интегрирования этих уравнений, замкнута относительно $16+4M$ входящих в нее неизвестных функций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Галин, Л. А. Плоская упругопластическая задача / Л. А. Галин // Прикл. матем. и мех. – 1946. – № 3. – С. 367–386.
- [2] Демидов, С. П. Теория упругости / С. П. Демидов. – М. : Высшая школа, 1979. – № 1. – С. 5–9.
- [3] Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1987.
- [4] Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970; 1966.
- [5] Пеньков, В. Б. Решение плоских задач анизотропной упругости методом граничных состояний / В. Б. Пеньков, Д. А. Иванычев // Вести высших учебных заведений Черноземья. Научно-технический и производственный журнал. – № 2(20). – Липецк : ЛГТУ, 2010. – С. 31–35.
- [6] Семькина, Т. Д. Учет анизотропии при плоском упругопластическом деформировании листовых материалов / Т. Д. Семькина, Л. П. Цуканова // Вестник ВГУ. Серия : физика, математика. – 2009. – № 1. – С. 159–163.
- [7] Чернышов, А. Д. Решение задач с фазовыми превращениями методом расширения границ / А. Д. Чернышов // Инж.-физич. журнал. – 2009. – № 3. – С. 576–585.

[8] Чернышов, А. Д. Улучшенные ряды Фурье и граничные функции / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сб. трудов Международной конференции. Воронеж, 22-24 июня 2009 г. Ч. 2 – С. 236–238.

A. D. Chernishov, N. V. Minaeva, N. A. Khozyainova

**APPLICATION OF RAPID EXPANSION FOR THE SOLUTION OF THE
PROBLEM STRETCHING OF AN ELASTIC PLATE OF FINITE SIZE WITH
A HOLE**

Voronezh State Technological Academy

Abstract. The article gives the formulation of the tension of an elastic plate of finite size with a hole loaded with normal stresses at the external borders and the hole border. Solution is considered in terms of displacements, presented a rapid degradation, allowing the differential system to a system of algebraic equations for the unknown expansion coefficients.

Keywords: elastic plate of finite size, circular hole, rapid expansion.

Чернышев Александр Данилович

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Воронежская государственная технологическая академия, г. Воронеж

e-mail: chernyshovad@mail.ru

Минаева Надежда Витальевна

доктор физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Воронежская государственная технологическая академия, г. Воронеж

e-mail: nminaeva@yandex.ru

Хозяинова Наталья Алексеевна

аспирант кафедры высшей математики, Воронежская государственная технологическая академия, г. Воронеж

e-mail: riphadgehog@mail.ru

Chernyshov, Alexander Danilovich

Dr. Sci. of Phys. & Math., Professor, Department of Higher Mathematics, Voronezh State Technological Academy, Voronezh

Minaeva, Nadezhda Vitalievna

Dr. Sci. of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Higher Mathematics, Voronezh State Technological Academy, Voronezh

Khozyainova, Natalia Alexeevna

Postgraduate student, Department of Higher Mathematics, Voronezh State Technological Academy, Voronezh

ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛЕННОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Аннотация. Для определенного вида напряжений, удовлетворяющих условию пластичности Мизеса, рассматриваются соотношения для полей скоростей. Получены уравнения для определения характеристик и соотношения вдоль них.

Ключевые слова: пластичность, напряжения, условие пластичности Мизеса, поле скоростей, характеристики, соотношения вдоль характеристик.

УДК: 539.3

1. Цилиндрические координаты. Запишем соотношение между напряжениями и компонентами скоростей деформаций осесимметричной задачи для ассоциированного закона пластического течения, используя соотношения М. Леви [1] и Р. Мизеса [2]:

$$\frac{\sigma_r - \sigma_z}{2\tau_{rz}} = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_z}{\gamma_{rz}}. \quad (1.1)$$

Добавим к уравнению (1.1) условие несжимаемости

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0. \quad (1.2)$$

Если в уравнениях (1.1) и (1.2) компоненты скоростей деформации выразить через скорости u , v соответственно вдоль координат r , z и подставить в выражение для напряжений в уравнение (1.1), то получим систему двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных u , v .

Для напряжения используем выражения, предложенные в работе [3]:

$$\sigma_r = p + \alpha k \cos 2\psi, \quad \sigma_z = p + \beta \cos 2\psi, \quad \tau_{rz} = k \sin 2\psi. \quad (1.3)$$

Таким образом, получаем два дифференциальных уравнения относительно u , v :

$$\frac{(\alpha - \beta) \cos 2\psi}{2 \sin 2\psi} = \frac{\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z}}{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (1.5)$$

Составим характеристический определитель для уравнений (1.4) и (1.5):

$$\begin{vmatrix} z'(-2 \sin 2\psi) - (\alpha - \beta) \cos 2\psi & z'(\alpha - \beta) \cos 2\psi - 2 \sin 2\psi \\ z' & -1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.6)$$

Раскрывая определитель, получим выражение для определения характеристик:

$$z'_{1,2} = \frac{2 \sin 2\psi}{(\alpha - \beta) \cos 2\psi} \pm \sqrt{\frac{4 \sin^2 2\psi}{(\alpha - \beta) \cos^2 2\psi} + 1}. \quad (1.7)$$

Если сравнить выражения для характеристик при определении поля напряжений [3], то нетрудно увидеть, что характеристики совпадают для случая: $\alpha = 1$, $\beta = -1$.

В этом случае тангенсы угла наклона характеристик равны

$$z'_{1,2} = \frac{2 \sin 2\psi \pm 1}{\cos 2\psi}. \quad (1.8)$$

Составим определитель для нахождения соотношений вдоль характеристик:

$$\begin{vmatrix} z'(-2 \sin 2\psi) - (\alpha - \beta) \cos 2\psi & 2 \sin 2\psi \frac{du}{dr} - (\alpha - \beta) \cos 2\psi \frac{dv}{dr} \\ z' - \frac{u}{r} - \frac{du}{dr} & \end{vmatrix} = 0. \quad (1.9)$$

Решая определитель и подставляя z' из формулы (1.8), получим следующие соотношения вдоль характеристик:

$$\frac{1 \pm \sin 2\psi}{\cos 2\psi} u \frac{dr}{r} + \cos 2\psi du + (\sin 2\psi \pm 1) dv = 0. \quad (1.10)$$

2. Сферические координаты. Запишем соотношение между напряжениями и компонентами скоростей деформаций осесимметричной задачи для ассоциированного закона пластического течения, используя соотношения М. Леви [1] и Р. Мизеса [2]:

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2\tau_{r\theta}} = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{\gamma_{r\theta}}. \quad (2.1)$$

Добавим к уравнению (2.1) условие несжимаемости

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi = 0. \quad (2.2)$$

Если в уравнениях (2.1) и (2.2) компоненты скоростей деформации выразить через скорости u , v соответственно вдоль координат r , θ и подставить в выражение для напряжений в уравнение (2.1), то получим систему двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных u , v .

Для напряжений используем выражения, предложенные в работе [3]:

$$\sigma_r = p + \alpha k \cos 2\psi, \quad \sigma_\theta = p + \beta k \cos 2\psi, \quad \tau_{r\theta} = k \sin 2\psi. \quad (2.3)$$

Таким образом, получаем два дифференциальных уравнения относительно u , v :

$$\frac{(\alpha - \beta) \cos 2\psi}{2 \sin 2\psi} = \frac{\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{u}{r}}{\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r}}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{2u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta = 0. \quad (2.5)$$

Составим характеристический определитель для уравнений (2.4), (2.5):

$$\begin{vmatrix} \frac{rd\theta}{dr}(-2 \sin 2\psi) - (\alpha - \beta) \cos 2\psi & \frac{rd\theta}{dr}(\alpha - \beta) \cos 2\psi - 2 \sin 2\psi \\ \frac{rd\theta}{dr} & -1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.6)$$

Раскрывая определитель, получим выражение для характеристик:

$$\frac{rd\theta}{dr} = \frac{2 \sin 2\psi}{(\alpha - \beta) \cos 2\psi} \pm \sqrt{\frac{4 \sin^2 2\psi}{(\alpha - \beta)^2 \cos^2 2\psi} + 1}. \quad (2.7)$$

Если сравнить выражения для характеристик при определении поля напряжений [3], то нетрудно увидеть, что характеристики совпадают для случая: $\alpha = 1$, $\beta = -1$.

В этом случае тангенсы угла наклона характеристик равны

$$\frac{rd\theta}{dr} = \frac{2 \sin 2\psi \pm 1}{\cos 2\psi}. \quad (2.8)$$

Составим определитель для нахождения соотношений вдоль характеристик

$$\begin{vmatrix} \frac{rd\theta}{dr}(-2 \sin 2\psi) - (\alpha - \beta) \cos 2\psi & 2 \sin 2\psi \frac{u}{r} + 2 \sin 2\psi \frac{du}{dr} - (\alpha - \beta) \cos 2\psi \frac{dv}{dr} \\ \frac{rd\theta}{dr} & -\frac{2u}{r} - \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta - \frac{du}{dr} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.9)$$

Решая определитель и подставляя $\frac{rd\theta}{dr}$ из формулы (2.8), получим следующие соотношения вдоль характеристик:

$$\left(\left(3 \frac{1 \pm \sin 2\psi}{\cos 2\psi} - \cos 2\psi \right) u + (\cos 2\psi) v \operatorname{ctg} \theta \right) \frac{dr}{r} + \cos 2\psi du + (\sin 2\psi \pm 1) dv = 0. \quad (2.10)$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Коробкин, В., Д.* Статически определяемые поля напряжений осесимметричной задачи теории пластичности / В. Д. Коробкин // Прикладные задачи механики сплошных сред : межвузовский сб. научных трудов Воронежского государственного университета. – Воронеж, 1999. – С. 143-148.

[2] *Мизес, Р.* Механика твердых тел в пластически деформируемом состоянии / Р. Мизес // Теория пластичности. – М, 1948. – С. 57-69.

[3] *Леви, М.* К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределом упругости / М. Леви // Теория пластичности. – М, 1948. – С. 34-40.

V. D. Korobkin

**FIELD OF VELOCITIES OF STATISTICALLY DETERMINED
AXIAL-SYMMETRIC PROBLEM IN MISES PLASTICITY CONDITION**

Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering

Abstract. To determine certain type of stresses which satisfy Mises plasticity condition correlations for velocity fields are considered. Equations to determine characteristics and correlations along them are obtained.

Keywords: plasticity, stress, Mises plasticity condition, velocity field, characteristics, correlation along characteristics.

Коробкин Валерий Дмитриевич

доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, г. Воронеж

e-mail: v.d.korobkin@yandex.ru

Korobkin, Valerii Dmitrivich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, Voronezh

О СЖАТИИ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ ЖЕСТКИМИ ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ В СЛУЧАЕ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ

Чувашский государственный педагогический университет имени И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе рассматривается сжатие идеальнопластического слоя жесткими шероховатыми плитами в случае трансляционной анизотропии, в случае плоской деформации. Рассматривается предположения о характере изменения касательного напряжения τ_{xy} по толщине слоя.

Ключевые слова: напряжения, деформация, сжатие, слой, трансляционная анизотропия, идеальная пластичность.

УДК: 539.374

Условие пластичности запишем в виде

$$A \cdot \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + B \cdot (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_0^2, \quad (1)$$

где σ_x , σ_y , τ_{xy} – компоненты напряжения, A , B , k_0 , k_1 , k_2 , k_3 – const, определяющие предел текучести и параметры анизотропии.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам, все величины, имеющие размерность напряжений отнесем к величине предела текучести k_0 и сохраним обозначения напряжений σ_{ij} и констант k_1 , k_2 , k_3 .

Условие пластичности (1) примет вид

$$A \cdot \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + B \cdot (\tau_{xy} - k_3)^2 = 1. \quad (2)$$

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Предположим, что толщина пластического слоя равна $2h$ (рис.1).

Величины, имеющие размерность длины, будем считать безразмерными, отнесенными к h .

При условии пластичности (1) рассмотрим предположения о характере изменения касательного напряжения τ_{xy} по толщине слоя:

$$\tau_{xy} = y + k_3. \quad (4)$$

Используя (4), найдем:

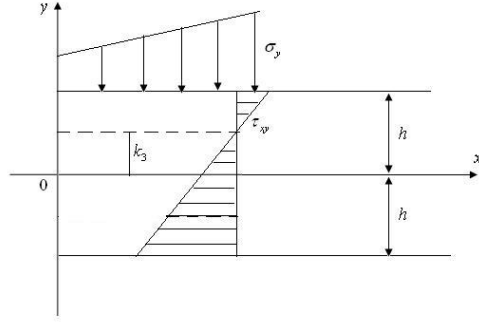


Рис. 1

$$\sigma_x - \sigma_y = \pm 2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \sqrt{1 - B \cdot y^2} + \frac{k_1 - k_2}{2} \right]. \quad (5)$$

Согласно (3), (4) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -x + f(y), \\ \sigma_y &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно (5), (6) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -x + C_1 \pm 2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \sqrt{1 - B \cdot y^2} + \frac{k_1 - k_2}{2} \right], \\ \sigma_y &= -x + C_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Постоянная C_1 может быть определена, например, из условия отсутствия суммарных усилий вдоль оси x при $x = 0$ по свободному краю полосы:

$$\int_{-h}^h \sigma_x dy = 0. \quad (8)$$

Из (7), (8) найдем:

$$C_1 = -\frac{1}{h \cdot \sqrt{A}} \cdot \left(\frac{h}{\sqrt{B}} \cdot \sqrt{1 - Bh^2} + \frac{1}{2} \cdot \arcsin \frac{h}{\sqrt{B}} \right) + (k_2 - k_1). \quad (9)$$

Окончательно будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -x + \frac{2}{\sqrt{A}} \cdot \sqrt{1 - B \cdot y^2} - \frac{1}{h \cdot \sqrt{A}} \cdot \left(\frac{h}{\sqrt{B}} \cdot \sqrt{1 - Bh^2} + \frac{1}{2} \cdot \arcsin \frac{h}{\sqrt{B}} \right), \\ \sigma_y &= -x - \frac{1}{h \cdot \sqrt{A}} \cdot \left(\frac{h}{\sqrt{B}} \cdot \sqrt{1 - Bh^2} + \frac{1}{2} \cdot \arcsin \frac{h}{\sqrt{B}} \right) + (k_2 - k_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Соотношения связи между напряжениями и скоростями деформаций согласно ассоциированному закону течения, имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lambda \cdot A \cdot \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right), \\ \varepsilon_y &= \lambda \cdot A \cdot \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right), \\ 2 \cdot \varepsilon_{xy} &= 2 \cdot B \cdot (\tau_{xy} - k_3), \end{aligned} \quad (11)$$

где ε_{ij} – компоненты скорости деформации.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -c + f_1(y), \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = c, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{12}$$

Положим

$$v = cy + k_3, c - \text{const.}$$

Из (12) найдем:

$$u = C_1 \cdot x + C_2 + \varphi(y).\tag{13}$$

$$\varepsilon_x - \varepsilon_y = 2c = 2\lambda \cdot A \cdot \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right).\tag{14}$$

Согласно (9), (10), (14) получим:

$$\lambda = \frac{C_1}{A \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \sqrt{1 - B \cdot y^2} \right)}.\tag{15}$$

Из (13) получаем:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \lambda \cdot (\tau_{xy} - k_3).\tag{16}$$

Используя (16) найдем:

$$\varphi(y) = \frac{\frac{1}{h} \cdot \left(\frac{h}{\sqrt{B}} \cdot \sqrt{1 - Bh^2} + \frac{1}{2} \cdot \arcsin \frac{h}{\sqrt{B}} \right) + (k_1 - k_2)}{B \cdot \sqrt{A}} \cdot \sqrt{1 - B \cdot y^2}.\tag{17}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рыбакова, Т. И. О сдвливании анизотропного идеальнопластического слоя / Т. И. Рыбакова // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (7). – С. 585-587.

A. V. Balashnikova

**ABOUT COMPRESSION OF IDEAL PLASTIC LAYER BY RIGID ROUGH
PLATES IN CASE OF TRANSMITTING ANISOTROPY**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. In work compression of ideal plastic layer by rigid rough plates in case of transmitting anisotropy in case of flat deformation is considered. It is considered assumptions of nature of change kasatelyny tension

τ_{xy} on thickness of a layer.

Keywords: tension, deformation, compression, layer, ideal plasticity.

Балашникова Анжелика Вениаминовна

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: info3006@yandex.ru

Balashnikova Anshelika Veniaminovna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

О ДИССИПАТИВНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ТРАНСЛЯЦИОННОМ НАПРЯЖЕНИИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет имени И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе рассматривается диссипативная функция при трансляционном напряжении при кручении.

Ключевые слова: напряжение, деформация, предел текучести, кручение, параметры анизотропии, диссипативная функция.

УДК: 539.3

1. Рассмотрим условие пластичности или предельного состояния в случае кручения вида

$$A(\tau_{xz} - k_1)^2 + B(\tau_{yz} - k_2)^2 = k_0^2. \quad (1.1)$$

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам и отнесем все величины, имеющие размерность напряжений, к величине k_0 . Условие (1.1) примет вид

$$A(\tau_{xz} - k_1)^2 + B(\tau_{yz} - k_2)^2 = 1. \quad (1.2)$$

Очевидно, (1.2) представляет уравнение эллипса (рис. 1) с центром (k_1, k_2) и полуосями $\frac{1}{\sqrt{A}}$, $\frac{1}{\sqrt{B}}$.

Согласно ассоциированному закону пластического течения компоненты скорости деформации имеют вид

$$\varepsilon_{xz} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}, \quad \varepsilon_{yz} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}. \quad (1.3)$$

Из (1.2), (1.3) следует

$$\varepsilon_{xz} = 2A\lambda(\tau_{xz} - k_1), \quad \varepsilon_{yz} = 2B\lambda(\tau_{yz} - k_2). \quad (1.4)$$

Отсюда

$$\tau_{xz} - k_1 = \frac{\varepsilon_{xz}}{2A\lambda}, \quad (1.5)$$

$$\tau_{yz} - k_2 = \frac{\varepsilon_{yz}}{2B\lambda}. \quad (1.6)$$

Тогда

$$\sqrt{A}(\tau_{xz} - k_1) = \frac{\varepsilon_{xz}}{2\sqrt{A}\lambda}, \quad (1.7)$$

$$\sqrt{B}(\tau_{yz} - k_2) = \frac{\varepsilon_{yz}}{2\sqrt{B}\lambda}. \quad (1.8)$$

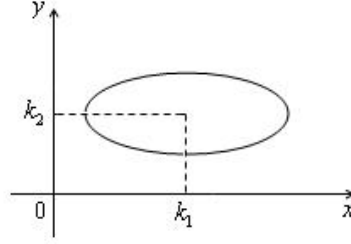


Рис. 1

Согласно (1.7), (1.8) получим

$$A(\tau_{xz} - k_1)^2 + B(\tau_{yz} - k_2)^2 = \frac{\varepsilon_{xz}^2}{4A\lambda^2} + \frac{\varepsilon_{yz}^2}{4B\lambda^2}. \quad (1.9)$$

Из (1.2), (1.9) имеет место уравнение

$$\frac{\varepsilon_{xz}^2}{4A\lambda^2} + \frac{\varepsilon_{yz}^2}{4B\lambda^2} = 1. \quad (1.10)$$

Из (1.10) найдем

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_{xz}^2}{A} + \frac{\varepsilon_{yz}^2}{B}}. \quad (1.11)$$

Диссипативная функция определяется согласно

$$D = \tau_{xz}\varepsilon_{xz} + \tau_{yz}\varepsilon_{yz}. \quad (1.12)$$

Из (1.5), (1.6) следует

$$\tau_{xz} = \frac{\varepsilon_{xz}}{2A\lambda} + k_1, \quad (1.13)$$

$$\tau_{yz} = \frac{\varepsilon_{yz}}{2B\lambda} + k_2. \quad (1.14)$$

Тогда

$$\tau_{xz}\varepsilon_{xz} = \frac{\varepsilon_{xz}^2}{2A\lambda} + k_1\varepsilon_{xz}, \quad (1.15)$$

$$\tau_{yz}\varepsilon_{yz} = \frac{\varepsilon_{yz}^2}{2B\lambda} + k_2\varepsilon_{yz}. \quad (1.16)$$

Из (1.12), (1.15), (1.16) получим

$$D = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\varepsilon_{xz}^2}{A} + \frac{\varepsilon_{yz}^2}{B} \right) + k_1\varepsilon_{xz} + k_2\varepsilon_{yz}. \quad (1.17)$$

Согласно (1.11), (1.17) диссипативная функция имеет вид

$$D = \sqrt{\frac{\varepsilon_{xz}^2}{A} + \frac{\varepsilon_{yz}^2}{B}} + k_1\varepsilon_{xz} + k_2\varepsilon_{yz}. \quad (1.18)$$

2. Рассмотрим условие пластичности или предельного состояния в случае кручения вида

$$(A\tau_{xz} - k_1)^2 + (B\tau_{yz} - k_2)^2 = k_0^2. \quad (2.1)$$

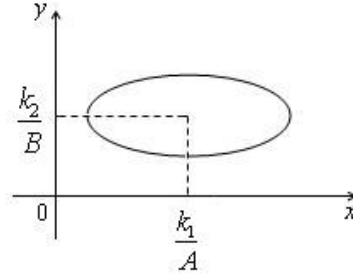


Рис. 2

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам и отнесем все величины, имеющие размерность напряжений, к величине k_0 . Условие (2.1) примет вид

$$(A\tau_{xz} - k_1)^2 + (B\tau_{yz} - k_2)^2 = 1. \quad (2.2)$$

Очевидно, (2.2) представляет уравнение эллипса (рис. 2) с центром $(\frac{k_1}{A}, \frac{k_2}{B})$ и полуосями $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}$.

Согласно ассоциированному закону пластического течения компоненты скорости деформации имеют вид

$$\varepsilon_{xz} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}, \quad \varepsilon_{yz} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}. \quad (2.3)$$

Из (2.2), (2.3) следует

$$\varepsilon_{xz} = 2A\lambda(A\tau_{xz} - k_1), \quad \varepsilon_{yz} = 2B\lambda(B\tau_{yz} - k_2). \quad (2.4)$$

Отсюда

$$A\tau_{xz} - k_1 = \frac{\varepsilon_{xz}}{2A\lambda}, \quad (2.5)$$

$$B\tau_{yz} - k_2 = \frac{\varepsilon_{yz}}{2B\lambda}. \quad (2.6)$$

Согласно (2.5), (2.6) получим

$$(A\tau_{xz} - k_1)^2 + (B\tau_{yz} - k_2)^2 = \frac{\varepsilon_{xz}^2}{4A\lambda^2} + \frac{\varepsilon_{yz}^2}{4B\lambda^2}. \quad (2.7)$$

Из (2.2), (2.7) имеет место уравнение

$$\frac{\varepsilon_{xz}^2}{4A^2\lambda^2} + \frac{\varepsilon_{yz}^2}{4B^2\lambda^2} = 1. \quad (2.8)$$

Из (2.8) найдем

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_{xz}^2}{A^2} + \frac{\varepsilon_{yz}^2}{B^2}}. \quad (2.9)$$

Из (2.5), (2.6) следует

$$\tau_{xz} = \frac{1}{A} \left(\frac{\varepsilon_{xz}}{2A\lambda} + k_1 \right), \quad (2.10)$$

$$\tau_{yz} = \frac{1}{B} \left(\frac{\varepsilon_{yz}}{2B\lambda} + k_2 \right). \quad (2.11)$$

Тогда

$$\tau_{xz}\varepsilon_{xz} = \frac{1}{A} \left(\frac{\varepsilon_{xz}^2}{2A\lambda} + k_1\varepsilon_{xz} \right), \quad (2.12)$$

$$\tau_{yz}\varepsilon_{yz} = \frac{1}{B} \left(\frac{\varepsilon_{yz}^2}{2B\lambda} + k_2\varepsilon_{yz} \right). \quad (2.13)$$

Из (1.12), (2.12), (2.13) получим

$$D = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\varepsilon_{xz}^2}{A^2} + \frac{\varepsilon_{yz}^2}{B^2} \right) + \frac{k_1\varepsilon_{xz}}{A} + \frac{k_2\varepsilon_{yz}}{B}. \quad (2.14)$$

Согласно (2.9), (2.14) диссипативная функция имеет вид

$$D = \sqrt{\frac{\varepsilon_{xz}^2}{A^2} + \frac{\varepsilon_{yz}^2}{B^2}} + \frac{k_1\varepsilon_{xz}}{A} + \frac{k_2\varepsilon_{yz}}{B}. \quad (2.15)$$

Покажем, что возможно построение теории пластичности, в основе которого лежит определение диссипативной функции.

Рассмотрим диссипативную функцию

$$D = k_0 \sqrt{\frac{(\varepsilon_{xz} - n_1)^2}{A} + \frac{(\varepsilon_{yz} - n_2)^2}{B}} + k_1(\varepsilon_{xz} - n_1) + k_2(\varepsilon_{yz} - n_2), \quad (2.16)$$

где $n_1, n_2 - const$.

Компоненты напряжения

$$\tau_{xz} = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{xz}}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{yz}}. \quad (2.17)$$

Из уравнений (2.16), (2.17) получим

$$\tau_{xz} = k_0 \frac{\varepsilon_{xz} - n_1}{A \sqrt{\frac{(\varepsilon_{xz} - n_1)^2}{A} + \frac{(\varepsilon_{yz} - n_2)^2}{B}}} + k_1, \quad (2.18)$$

$$\tau_{yz} = k_0 \frac{\varepsilon_{yz} - n_2}{B \sqrt{\frac{(\varepsilon_{xz} - n_1)^2}{A} + \frac{(\varepsilon_{yz} - n_2)^2}{B}}} + k_2. \quad (2.19)$$

Тогда уравнение пластичности

$$A(\tau_{xz} - k_1)^2 + B(\tau_{yz} - k_2)^2 = k_0^2 \quad (2.20)$$

не зависит от постоянных n_1, n_2 .

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Теория предельного состояния и идеальной пластичности : избранные работы / Д. Д. Ивлев. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2005. – 357 с.

E. A. Derevyannih

**ABOUT COMPRESSION OF A SPATIAL IDEALNOPLASTICHESKY LAYER
AT TRANSMITTING ANISOTROPY**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. In work compression of ideally plastic layer by parallel rigid rough plates is considered.

Keywords: tension, deformation, compression, layer, ideal plasticity.

Деревянных Евгения Анатольевна

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru

Derevyannih Evgeniya Anatolevna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ В СЛУЧАЕ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ

Чувашский государственный педагогический университет имени И. Я. Яковлева

Аннотация. Рассматривается двусное растяжение тонкой пластины, ослабленной круговым отверстием. Материал предполагается упруго-идеальнопластическим, в пластической области имеет место трансляционная анизотропия. В первом приближении [1] определены компоненты напряжений в упругой и пластической областях, определена граница между упругой и пластической областями.

Ключевые слова: напряжение, упругость, пластичность, трансляционная анизотропия, растяжение, отверстие, пластина.

УДК: 539.374

Рассмотрим тонкую пластину из упруго-идеальнопластического анизотропного материала, ослабленную круговым отверстием радиуса a . В плоскости x, y пластина растягивается на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями p_1 и p_2 , контур свободен от усилий.

Условие пластичности в случае трансляционной идеальнопластической анизотропии примем в виде:

$$(\sigma_x - 2 \cdot (k + k_1)) \cdot (\sigma_y - 2 \cdot (k + k_2)) - (\tau_{xy} - k_3)^2 = 0, \quad k, k_1, k_2, k_3 - const, \quad (1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжения в декартовой системе координат.

Будем считать компоненты напряжений безразмерными, отнесенными к некоторой величине k_0 . Припишем компонентам напряжения в пластической зоне индекс “ p ” наверху, а в упругой – индекс “ e ” наверху.

Связь между напряжениями в декартовой системе координат x, y и напряжениями в полярной системе координат ρ, θ имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Из (1), (2) получим условие пластичности в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(p)} \sigma_\theta^{(p)} - \left(\sigma_\rho^{(p)} + \sigma_\theta^{(p)} \right) (2k + k_1 + k_2) + \left(\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)} \right) ((k_1 - k_2) \cos 2\theta - k_3 \sin 2\theta) + \\ + 2\tau_{\rho\theta} ((k_1 - k_2) \sin 2\theta - k_3 \cos 2\theta) - \tau_{\rho\theta}^2 + 4k(k + k_1 + k_2) + 4k_1 k_2 - k_3^2 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В дальнейшем отнесем все величины, имеющие размерность длины, к величине ρ_s^0 – радиусу упругопластической зоны в исходном нулевом приближении.

Решение будем искать в виде разложения по малому безразмерному параметру δ :

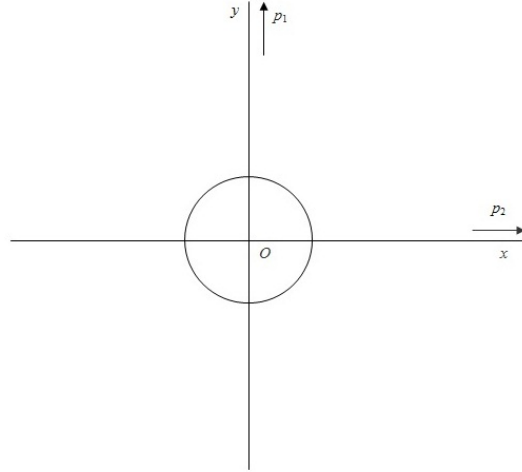


Рис. 1

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(I)} + \delta^2 \sigma_{ij}^{(II)} + \dots, \\ k_1 &= \delta k'_1, \quad k_2 = \delta k'_2, \quad k_3 = \delta k'_3.\end{aligned}\quad (4)$$

Индекс "0" наверху приписан компонентам в нулевом исходном состоянии при $\delta = 0$. Границу упругой и пластической областей обозначим

$$\rho_s = \rho_s^0 + \delta \rho'_s + \delta^2 \rho''_s + \dots$$

В нулевом исходном осесимметричном состоянии положим

$$\tau_{\rho\theta}^0 = 0. \quad (5)$$

В нулевом исходном приближении согласно (3), (4), (5) имеет место

$$\left(\sigma_{\rho}^{(0)p} - 2k\right) \left(\sigma_{\theta}^{(0)p} - 2k\right) = 0. \quad (6)$$

В дальнейшем положим

$$\sigma_{\theta}^{(0)p} = 2k, \quad \left|\sigma_{\rho}^{(0)p}\right| \leq 2k. \quad (7)$$

Для определения компонент напряжений в пластической области в нулевом приближении используем уравнения равновесия в полярной системе координат:

$$\frac{d\sigma_{\rho}^{(0)p}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p}}{\rho} = 0. \quad (8)$$

Из (7), (8) при граничном условии $\sigma_{\rho}^{(0)p} = 0$ при $\rho = \alpha$ получим

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} = 2k \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right), \quad \sigma_{\theta}^{(0)p} = 2k, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0. \quad (9)$$

Решение в упругой области будем искать в виде

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = A - B \frac{1}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = A + B \frac{1}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (10)$$

Условия сопряжения компонент напряжений в нулевом приближении на упругопластической границе имеют вид

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho}^{(0)e} \Big|_{\rho=1}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\theta}^{(0)e} \Big|_{\rho=1}. \quad (11)$$

Удовлетворяя граничному условию $\sigma_{\rho}^{(0)e} = q$ при $\rho = \infty$ и условиям сопряжения (11), определим постоянные A и B .

Напряжения в упругой области имеют вид

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = q - \frac{\alpha k}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = q + \frac{\alpha k}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (12)$$

Из (9), (11), (12) следует:

$$\begin{aligned} 2k(1 - \alpha) &= q - \alpha k, \\ 2k &= q + \alpha k. \end{aligned} \quad (13)$$

Из двух соотношений (13) независимым является одно, с учетом $\alpha = \frac{a}{\rho_s^0}$ получим радиус упругопластической границы в нулевом приближении:

$$\rho_s^0 = \frac{ak}{2k - q}. \quad (14)$$

Для первого приближения согласно (3), (4), (9) имеет место условие пластичности

$$\sigma_{\theta}^{(I)p} = -((k'_1 - k'_2) \cos 2\theta - k'_3 \sin 2\theta) + k'_1 + k'_2. \quad (15)$$

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho}^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{\rho}^{(I)} - \sigma_{\theta}^{(I)}}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta}^{(I)}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения равновесия удовлетворим, полагая

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_{\theta}^{(I)p} &= \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \rho^2}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Из (15), (17) найдем уравнение для определения функции напряжения $\Phi^{(I)}$:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \rho^2} = -((k'_1 - k'_2) \cos 2\theta - k'_3 \sin 2\theta) + k'_1 + k'_2. \quad (18)$$

Согласно (18) функция $\Phi^{(I)}$ имеет вид

$$\Phi^{(I)} = [-((k'_1 - k'_2) \cos 2\theta - k'_3 \sin 2\theta) + k'_1 + k'_2] \frac{\rho^2}{2} + C_1 \rho + C_2. \quad (19)$$

Из (17), (19) получим напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} &= (k'_1 - k'_2) \cos 2\theta - k'_3 \sin 2\theta + k'_1 + k'_2 + \frac{C_1}{\rho}, \\ \sigma_{\theta}^{(I)p} &= -((k'_1 - k'_2) \cos 2\theta - k'_3 \sin 2\theta) + k'_1 + k'_2, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= (k'_2 - k'_1) \sin 2\theta - k'_3 \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (20)$$

В первом приближении граничные условия согласно [1] имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha. \end{aligned} \quad (21)$$

Коэффициент C_1 определим из (20) и граничных условий (21). Тогда из (20) решение в пластической зоне имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{(I)p} &= \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right) (k'_1 + k'_2) + \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right) (k'_1 - k'_2) \cos 2\theta - \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right) k'_3 \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta^{(I)p} &= -((k'_1 - k'_2) \cos 2\theta - k'_3 \sin 2\theta) + k'_1 + k'_2, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= -k'_3 \cos 2\theta + (k'_2 - k'_1) \sin 2\theta.\end{aligned}\quad (22)$$

Граничные условия на бесконечности в упругой зоне запишем в виде

$$\sigma_\rho^e|_{\rho=\infty} = q - \delta \cos 2\theta, \quad \sigma_\theta^e|_{\rho=\infty} = q + \delta \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^e|_{\rho=\infty} = \delta \sin 2\theta, \quad (23)$$

где

$$\delta = \frac{p_1 - p_2}{2}, \quad q = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

На упругопластической границе согласно (22) имеет место

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{(I)p} &= a''_0 + a''_2 \cos 2\theta + a''_4 \sin 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= b''_2 \cos 2\theta + b''_4 \sin 2\theta,\end{aligned}\quad (24)$$

где

$$\begin{aligned}a''_0 &= \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right) (k'_1 + k'_2), \\ a''_2 &= \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right) (k'_1 - k'_2), \\ a''_4 &= -\left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right) k'_3, \\ b''_2 &= -k'_3, \\ b''_4 &= k'_2 - k'_1.\end{aligned}\quad (25)$$

В рассматриваемом случае имеют место формулы раздела (I), (V), (VI) и (VIII), приведенные в [1].

1. Положим, что на границе упругопластической области имеет место (24) при

$$\begin{aligned}a''_0 &= \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right) (k'_1 + k'_2), \\ a''_2 &= b''_2 = a''_4 = b''_4 = 0,\end{aligned}$$

тогда напряжения в упругой области равны

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{(I)e} &= (1 - \alpha) (k'_1 + k'_2) \frac{1}{\rho^2}, \\ \sigma_\theta^{(I)e} &= -(1 - \alpha) (k'_1 + k'_2) \frac{1}{\rho^2}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= 0.\end{aligned}\quad (26)$$

2. Положим, что на границе упругопластической области имеет место (24) при

$$\begin{aligned}a''_2 &= (1 - \alpha) (k'_1 - k'_2), \\ a''_4 &= -(1 - \alpha) k'_3, \\ a''_0 &= b''_2 = b''_4 = 0,\end{aligned}$$

тогда напряжения в упругой области равны

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{(I)e} &= \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2}\right) (1 - \alpha) ((k'_1 - k'_2) \cos 2\theta - k'_3 \sin 2\theta), \\ \sigma_\theta^{(I)e} &= \frac{1}{\rho^4} (1 - \alpha) ((k'_1 - k'_2) \cos 2\theta - k'_3 \sin 2\theta), \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2}\right) (1 - \alpha) ((k'_1 - k'_2) \sin 2\theta + k'_3 \cos 2\theta).\end{aligned}\quad (27)$$

3. Положим, что на границе упругопластической области имеет место (24) при

$$\begin{aligned} b_2''' &= -k_3', \\ b_4''' &= k_2' - k_1', \\ a_0'' &= a_2'' = a_4'' = 0, \end{aligned}$$

тогда напряжения в упругой области равны

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)e} &= \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) (k_3' \sin 2\theta + (k_2' - k_1') \cos 2\theta), \\ \sigma_\theta^{(I)e} &= -\frac{2}{\rho^4} (k_3' \sin 2\theta + (k_2' - k_1') \cos 2\theta), \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) (-k_3' \cos 2\theta + (k_2' - k_1') \sin 2\theta). \end{aligned} \quad (28)$$

4. Положим, что на границе упругопластической области имеет место (24) при

$$a_0'' = a_2'' = a_4'' = b_2''' = b_4''' = 0,$$

на бесконечности заданы усилия

$$\sigma_\rho^{(I)e} \Big|_{\rho=\infty} = a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta,$$

где $a_2 = -1$, $b_2 = 0$.

Тогда напряжения в упругой области равны

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)e} &= -\left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta^{(I)e} &= \left(1 + \frac{3}{\rho^4} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= -\left(-1 - \frac{2}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (29)$$

Результирующее напряжение в упругой области определяется как сумма напряжений (26)-(29):

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)e} &= (1 - \alpha) (k_1' + k_2') \frac{1}{\rho^2} + \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2} \right) (1 - \alpha) ((k_1' - k_2') \cos 2\theta - k_3' \sin 2\theta) + \\ &+ \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) (k_3' \sin 2\theta + (k_2' - k_1') \cos 2\theta) - \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta^{(I)e} &= - (1 - \alpha) (k_1' + k_2') \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^4} (1 - \alpha) ((k_1' - k_2') \cos 2\theta - k_3' \sin 2\theta) - \\ &- \frac{2}{\rho^4} (k_3' \sin 2\theta + (k_2' - k_1') \cos 2\theta) + \left(1 + \frac{3}{\rho^4} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2} \right) (1 - \alpha) ((k_1' - k_2') \sin 2\theta + k_3' \cos 2\theta) + \\ &+ \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) (-k_3' \cos 2\theta + (k_2' - k_1') \sin 2\theta) + \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (30)$$

Из (9), (12) получим

$$\frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = 0, \quad \frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = -2\alpha k,$$

тогда для определения границы раздела упругопластической области в первом приближении получим

$$\rho_s^{(I)} = \frac{\sigma_\theta^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)e}}{\frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho}} = \frac{1}{2\alpha k} \left(\sigma_\theta^{(I)e} - \sigma_\theta^{(I)p} \right). \quad (31)$$

Из (22), (30), (31) получим радиус упругопластической области в первом приближении:

$$\rho_s^{(I)} = \frac{(k_1' + k_2')(\alpha - 2)}{2\alpha k} + \frac{(k_1' - k_2')(4 - \alpha) + 4}{2\alpha k} \cos 2\theta + \frac{k_3'(\alpha - 4)}{2\alpha k} \sin 2\theta. \quad (32)$$

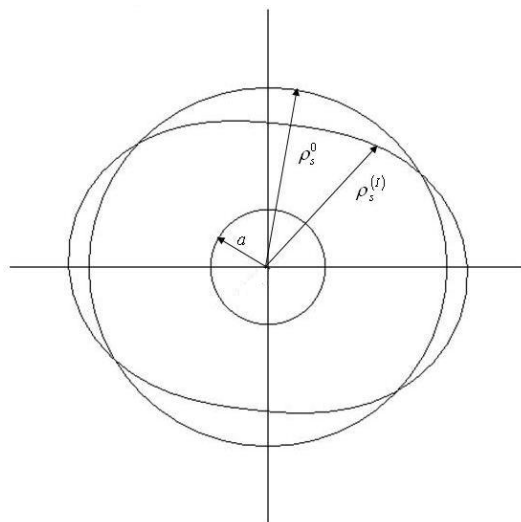


Рис. 2

Таким образом, напряженное состояние в пластической (22) и упругой (30) областях полностью определено, изменение границы раздела упругой и пластической областей определяется из соотношения (32).

На рис. 2 изображена упругопластическая граница в нулевом приближении ρ_s^0 , в первом приближении $\rho_s^{(1)}$ при $\delta = 0,17$; $k = 1,2$; $k_1 = 1,7$; $k_2 = 1,2$; $k_3 = 1,3$; $a = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [2] *Павлова, Т. Н.* Упругопластическое состояние тонкой пластины из анизотропного материала, ослабленной отверстием под действием растягивающих усилий / Т. Н. Павлова // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (6). – С. 112-122.
- [3] *Фоминих, С. О.* Двуосное растяжение упругопластической пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии / С. О. Фоминих // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (7). Ч. 3. – С. 610-622.

A. P. Kerzhaev

**ELASTOPLASTIC STATE OF A THIN PLATE WITH A CIRCULAR OPENING
IN CASE OF TRANSLATIONAL ANISOTROPY**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Biaxial stretching of the thin plate weakened by a circular opening is considered. The material is supposed elastoplastic, in plastic area transmitting anisotropy takes place. As a first approximation [1] components of tension in elastic and plastic areas are defined, the border between elastic and plastic areas is defined.

Keywords: tension, elasticity, plasticity, translational anisotropy, stretching, opening, plate.

Кержаев Александр Петрович

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: alex_kerg@mail.ru

Kerzhaev Alexandr Petrovich

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток.

Варданян Седрак Ваникович (vardanyan_s@yahoo.com) – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (cotedurhone_mail.ru) – доктор физико-математических наук (1996), профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский лесотехнический институт, г. Королев Московской области.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

Ивлев Дюис Данилович (ivlev21@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный открытый университет, г. Москва.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@nw.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета в г. Чебоксары, г. Чебоксары.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (irakon63@hotmail.com) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технический университет “СТАНКИН”, г. Москва.

Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Учреждение Российской академии наук Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marycbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

Спорохин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

Чернышев Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния» издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Кулиев В. Д., Алексеева Т. Н.</i> Краевая трещина в двухслойных материалах под воздействием внешней температуры	3
<i>Зубчанинов В. Г., Гултыяев В. И.</i> Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек из стали 45 при сложном докритическом нагружении	16
<i>Зубчанинов В. Г., Гултыяев В. И.</i> Экспериментальное исследование устойчивости оболочек при сложном нагружении и разгрузении материала	21
<i>Дудукаленко В. В.</i> Моделирование пластических свойств материала на основе параметров мезоструктуры	25
<i>Чернышев А. Д., Минаева Н. В., Хозяинова Н. А.</i> Применение быстрых разложений для решения задачи о растяжении упругой пластины конечных размеров с отверстием	104
<i>Коробкин В. Д.</i> Поле скоростей статически определенной осесимметричной задачи при условии пластичности Мизеса	111
<i>Балашишкова А. В.</i> О сжатии идеальнопластического слоя жесткими шероховатыми плитами в случае трансляционной анизотропии	115
<i>Деревянных Е. А.</i> О диссипативной функции при трансляционном напряжении при кручении	119
<i>Кержаев А. П.</i> Упругопластическое состояние тонкой пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии	124
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	131
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	134
СОДЕРЖАНИЕ	136

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2011. № 2(10)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: Л. Н. Улюкова, И. А. Федянина

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова, Е. А. Деревянных

Макет: А. В. Балашникова, Е. А. Деревянных

Подписано в печать 25.11.2011 г. Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e.
Усл. печ. л. 17,13. Тираж 400 экз. Цена свободная. Заказ №

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38