

ББК 95.4; 22.251  
Ч-823

Подписной индекс в каталоге ПРЕССА РОССИИ: 13109  
ISSN: 2073-5499

ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА  
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2012. № 1(11)

**Учредитель:** ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Учредители серии:** Г. Н. Григорьев, Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров, Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Т. Н. Петрова, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин, А. А. Шуканов

**Редакционная коллегия:** Ивлев Д. Д. – ответственный редактор, Максимова Л. А., Матченко Н. М. – зам. ответственного редактора, Тихонов С. В. – ответственный секретарь, Баженов В. Г., Буренин А. А., Георгиевский Д. В., Глаголев В. В., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Каюмов Р. А., Климов Д. М., Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Кулиев В. Д., Ломакин Е. В., Маркин А. А., Манжиров А. В., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р. И., Победря Б. Е., Радаев Ю. Н., Радченко В. П., Ревуженко А. Ф., Редкозубов С. А., Сенашов С. И., Спорыхин А. Н., Трещев А. А., Чернышев А. Д., Хромов А. И., Шашкин А. И.

**Международный совет:** Амензаде Р. Ю. (Азербайджан), Варданян С. В. (Армения), Мирсалимов В. М. (Азербайджан), Тамуж В. П. (Латвия), Чигарев А. В. (Белоруссия)

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

**Тел.:** (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19.

**Email:** predel21@mail.ru.

**WWW:** <http://predel.chgpu.edu.ru>.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-36234 от 15.05.2009 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2012



## К ВОПРОСУ О ПЕРЕКУСЫВАНИИ ПОЛОСЫ

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В работе выводятся аналитические формулы для линий скольжения, в задаче о сжатии полосы идеально-гладкими штампами. Используется метод Риммана интегрирования уравнений гиперболического типа. В результате интегралы выражаются через функции Ломмеля от двух переменных. Полученные соотношения для координат характеристик в пластической области используются для определения предельной нагрузки.

**Ключевые слова:** пластичность, плоская деформация, точные решения, линии скольжения, предельная нагрузка, сжатие полосы.

УДК: 539.374

В теории идеальной пластичности, в рамках плоской деформации, рассматривается ряд задач, в которых сетка линий скольжения строится по известным значениям, заданным на дугах пересекающихся окружностей. Это и внедрение прямоугольного штампа, и волочение сквозь короткую матрицу, и, наконец, задача о перекусывании полосы (например, [1] — [4]). Общей характерной чертой данных публикаций является привлечение тех или иных конечно-разностных аппроксимаций, приближающих линии скольжения с требуемой точностью. Другой способ решения этой задачи состоит в использовании квадратурных формул метода Риммана, интегрирования уравнений гиперболического типа. Но на данном пути получены лишь формулы для кривизны линий скольжения, построенных на дугах окружностей (см. [4], [5]). В данной работе, следуя способу, изложенному в [6], выводятся в параметрическом виде уравнения самих линий скольжения, а затем полученные соотношения используются для аналитического решения задачи о перекусывании полосы.

### Вывод уравнений линий скольжения

Пусть в системе координат  $xOy$  центры окружностей расположены в точках с координатами  $(0, R)$   $\alpha$ -линия и  $(-R, 0)$   $\beta$ -линия. Параметрические уравнения окружностей имеют следующий вид:

$$\alpha\text{-линия} \begin{cases} x = R \sin \alpha \\ y = R - R \cos \alpha \end{cases} \quad \text{и} \quad \beta\text{-линия} \begin{cases} x = -R + R \cos \beta \\ y = R \sin \beta \end{cases} .$$

Используя переменные, введенные Михлиным  $\begin{cases} X = x \cos \theta + y \sin \theta \\ Y = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$  при  $\theta = \alpha + \beta$ , будем иметь следующие краевые условия начальной характеристической задачи:

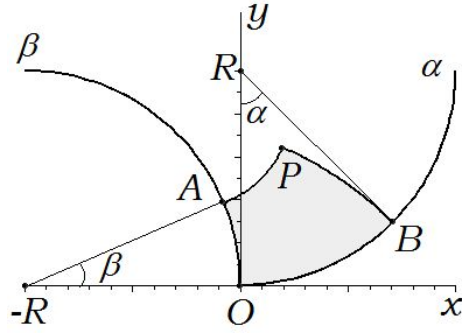


Рис. 1. Задача Гурса для дуг окружностей

$$\begin{aligned} \text{для } \alpha\text{-линии } & \begin{cases} \alpha = 0 \\ \theta = \beta \end{cases}, \begin{cases} X = R - R \cos \beta \\ Y = R \sin \beta \end{cases}, \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \beta} = R \sin \beta \\ \frac{\partial Y}{\partial \beta} = R \cos \beta \end{cases}, \\ \text{и для } \beta\text{-линии } & \begin{cases} \beta = 0 \\ \theta = \alpha \end{cases}, \begin{cases} X = R \sin \alpha \\ Y = R \cos \alpha - R \end{cases}, \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \alpha} = R \cos \alpha \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = -R \sin \alpha \end{cases}. \end{aligned}$$

Как известно, переменные Михлина  $X$  и  $Y$  удовлетворяют телеграфному уравнению:  $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} + f = 0$ , решение которого задаётся формулой Риммана [5]:

$$f(a, b) = J_0(2\sqrt{ab}) f(0, 0) + \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta.$$

Для переменной  $X$  будем иметь:

$$X(a, b) = \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) R \cos \alpha d\alpha + \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) R \sin \beta d\beta.$$

Для переменной  $Y$  будем иметь:

$$Y(a, b) = \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) (-R \sin \alpha) d\alpha + \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) R \cos \beta d\beta.$$

Обратная подстановка к физическим координатам  $x, y$  дает квадратурные формулы интересующих нас линий скольжения:

$$\begin{cases} x(a, b) = X(a, b) \cos(a+b) - Y(a, b) \sin(a+b), \\ y(a, b) = X(a, b) \sin(a+b) + Y(a, b) \cos(a+b). \end{cases}$$

Рассмотрим вычисление интегралов, фигурирующих в выражениях для  $X(a, b)$  и  $Y(a, b)$ :

$$Int_1 = \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \cos \alpha d\alpha, \quad Int_2 = \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \sin \beta d\beta,$$

$$Int_3 = \int_0^a J_0\left(2\sqrt{(a-\alpha)b}\right) \sin \alpha d\alpha, \quad Int_4 = \int_0^b J_0\left(2\sqrt{a(b-\beta)}\right) \cos \beta d\beta.$$

При этом будем иметь:

$$\begin{cases} X(a, b) = R(Int_1 + Int_2), \\ Y(a, b) = R(-Int_3 + Int_4). \end{cases}$$

Рассмотрим  $Int_1 = \int_0^a J_0\left(2\sqrt{(a-\alpha)b}\right) \cos \alpha d\alpha$ . Введем следующую замену:  $t = \sqrt{b(a-\alpha)}$ ,

тогда:  $\alpha = a - \frac{t^2}{b}$ ,  $d\alpha = -\frac{2}{b}t dt$ . Границы преобразуются:  $\alpha = a \rightarrow t = 0$ ,  $\alpha = 0 \rightarrow t = \sqrt{ba}$ . В итоге получим:

$$\begin{aligned} Int_1 &= \int_{\sqrt{ba}}^0 J_0(2t) \cos\left(a - \frac{t^2}{b}\right) \left(-\frac{2}{b}t\right) dt = \\ &= \frac{2}{b} \int_0^{\sqrt{ba}} J_0(2t) \cos\left(a - \frac{t^2}{b}\right) t dt = \\ &= \frac{2}{b} \int_0^{\sqrt{ba}} t J_0(2t) \left(\cos(a) \cos\left(\frac{t^2}{b}\right) + \sin(a) \sin\left(\frac{t^2}{b}\right)\right) dt = \\ &= \frac{2}{b} \cos(a) \int_0^{\sqrt{ba}} t \cos\left(\frac{t^2}{b}\right) J_0(2t) dt + \frac{2}{b} \sin(a) \int_0^{\sqrt{ba}} t \sin\left(\frac{t^2}{b}\right) J_0(2t) dt. \end{aligned}$$

Согласно [7]:

$$\begin{aligned} \int_0^x x^{\nu+1} \left\{ \begin{array}{l} \sin ax^2 \\ \cos ax^2 \end{array} \right\} J_\nu(bx) dx = \\ = \frac{b^\nu}{(2a)^{\nu+1}} \left[ U_{\nu+1}(2ax^2, bx) \left\{ \begin{array}{l} \sin ax^2 \\ \cos ax^2 \end{array} \right\} \mp U_{\nu+2}(2ax^2, bx) \left\{ \begin{array}{l} \cos ax^2 \\ \sin ax^2 \end{array} \right\} \right], \quad (1) \end{aligned}$$

где  $U_\nu(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z}{w}\right)^{2k+\nu} J_{2k+\nu}(w)$  – функция Ломмеля двух переменных.

Значит,

$$\int_0^{\sqrt{ba}} t \cos\left(\frac{t^2}{b}\right) J_0(2t) dt = \frac{b}{2} \left[ U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) + U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) \right],$$

$$\int_0^{\sqrt{ba}} t \sin\left(\frac{t^2}{b}\right) J_0(2t) dt = \frac{b}{2} \left[ U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) \right].$$

Продолжая вычисление  $Int_1$ , окончательно получим:

$$\begin{aligned} Int_1 &= \frac{2}{b} \left( \cos(a) \frac{b}{2} \left[ U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) + U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sin(a) \frac{b}{2} \left[ U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) \right] \right) = \\ &= \left[ U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \cos^2(a) + U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) \cos(a) \right] + \\ &\quad + \left[ U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \sin^2(a) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) \sin(a) \right] = \\ &= U_1(2a, 2\sqrt{ba}). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь  $Int_4 = \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \cos \beta d\beta$ , замена:  $t = \sqrt{a(b-\beta)}$ , тогда:

$\beta = b - \frac{t^2}{a}$ ,  $d\beta = -\frac{2}{a}t dt$ . Границы преобразуются:  $\beta = b \rightarrow t = 0$   
 $\beta = 0 \rightarrow t = \sqrt{ba}$ . В результате имеем:

$$Int_4 = \int_{\sqrt{ba}}^0 J_0(2t) \cos\left(b - \frac{t^2}{a}\right) \left(-\frac{2}{a}t\right) dt = \frac{2}{a} \int_0^{\sqrt{ba}} J_0(2t) \cos\left(b - \frac{t^2}{a}\right) t dt.$$

Так как полученное выражение симметрично  $Int_1$  относительно замены  $a \leftrightarrow b$ , то  $Int_4 = U_1(2b, 2\sqrt{ba})$ .

Поступая аналогично с выражениями  $Int_2$ ,  $Int_3$ , будем иметь:

$$Int_1 = \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \cos \alpha d\alpha = U_1(2a, 2\sqrt{ba}),$$

$$Int_2 = \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \sin \beta d\beta = U_2(2b, 2\sqrt{ba}),$$

$$Int_3 = \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \sin \alpha d\alpha = U_2(2a, 2\sqrt{ba}),$$

$$Int_4 = \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \cos \beta d\beta = U_1(2b, 2\sqrt{ba}).$$

Подставляя полученные значения интегралов  $Int_1$ ,  $Int_2$ ,  $Int_3$ ,  $Int_4$  в  $X(a, b)$  и  $Y(a, b)$ , будем иметь следующие выражения:

$$\begin{cases} X(a, b) = R(U_1(2a, 2\sqrt{ba}) + U_2(2b, 2\sqrt{ba})), \\ Y(a, b) = R(U_1(2b, 2\sqrt{ba}) - U_2(2a, 2\sqrt{ba})). \end{cases}$$

Переходя от переменных Михлина  $X$  и  $Y$  к физическим координатам  $x$  и  $y$ , получим следующие уравнения для линий скольжения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x(a, b) = R \cos(a+b) \left( U_1(2a, 2\sqrt{ba}) + U_2(2b, 2\sqrt{ba}) \right) - \\ \quad - R \sin(a+b) \left( U_1(2b, 2\sqrt{ba}) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \right), \\ y(a, b) = R \sin(a+b) \left( U_1(2a, 2\sqrt{ba}) + U_2(2b, 2\sqrt{ba}) \right) + \\ \quad + R \cos(a+b) \left( U_1(2b, 2\sqrt{ba}) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \right). \end{cases} \quad (2)$$

В качестве иллюстрации (рис. 2) приведем сетку линий скольжения для значений параметров  $0 < a < \frac{\pi}{2}$  и  $-\frac{\pi}{2} < b < 0$ , и хотя аргументами функций Ломмеля являются мнимые числа, сами значения этих функций остаются действительными.

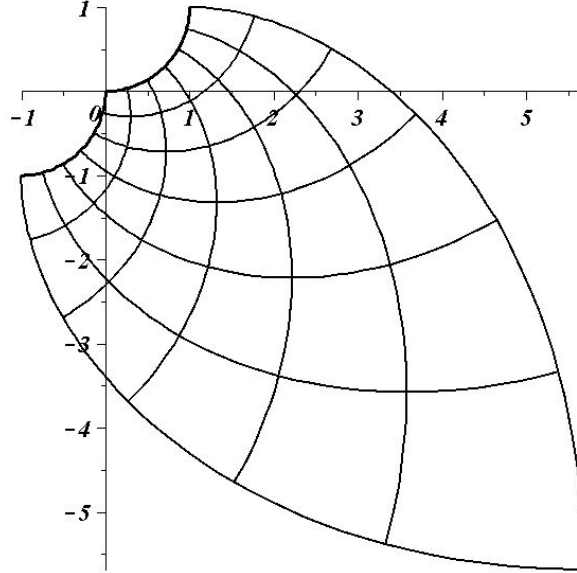


Рис. 2. Сетка линий скольжения для сравнения [5]

### Вспомогательные соотношения

Используем формулы (2) для вывода соотношений, потребующихся в дальнейшем.

Выразим  $x(a, b)$ ,  $y(a, b)$  в случае  $\begin{cases} a = z, \\ b = -z; \end{cases}$  при условиях  $\begin{cases} z \in \mathbb{R}, \\ z \geq 0. \end{cases}$  Имеем:

$$\begin{cases} x(z, -z) = R \left( U_1(2z, 2\sqrt{-z^2}) + U_2(-2z, 2\sqrt{-z^2}) \right) = R (U_1(2z, 2zi) + U_2(-2z, 2zi)), \\ y(z, -z) = R \left( U_1(-2z, 2\sqrt{-z^2}) - U_2(2z, 2\sqrt{-z^2}) \right) = R (U_1(-2z, 2zi) - U_2(2z, 2zi)). \end{cases}$$

Преобразуем выражения  $U_1(z, zi)$ ,  $U_2(-z, zi)$ ,  $U_1(-z, zi)$ ,  $U_2(z, zi)$ , используя определение функций Ломмеля двух переменных и свойства функций Бесселя:

$$U_1(z, zi) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left( \frac{z}{zi} \right)^{2m+1} J_{2m+1}(zi) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left( \frac{1}{i} \right)^{2m+1} (i)^{2m+1} J_{2m+1}(z) =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m I_{2m+1}(z), \\
U_1(-z, zi) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{-z}{zi}\right)^{2m+1} J_{2m+1}(zi) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{-1}{i}\right)^{2m+1} (i)^{2m+1} J_{2m+1}(z) = \\
& - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m I_{2m+1}(z) = -U_1(z, zi), \\
U_2(z, zi) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{z}{zi}\right)^{2m+2} J_{2m+2}(zi) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{i}\right)^{2m+2} (i)^{2m+2} J_{2m+2}(z) = \\
& \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m I_{2m+2}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (-1)^{2m+2} I_{2m+2}(z) = U_2(-z, zi).
\end{aligned}$$

Получим

$$U_1(z, zi) = -U_1(-z, zi) = I_1(z) - I_3(z) + I_5(z) - I_7(z) + \dots, \quad (3)$$

$$U_2(z, zi) = U_2(-z, zi) = I_2(z) - I_4(z) + I_6(z) - I_8(z) + \dots. \quad (4)$$

Чтобы упростить (4), воспользуемся [8] формулой (9.6.36):

$$1 = I_0(z) - 2I_2(z) + 2I_4(z) - 2I_6(z) + 2I_8(z) + \dots.$$

$$\text{Получим } U_2(z, zi) = U_2(-z, zi) = \frac{I_0(z) - 1}{2}.$$

Для (3) будем иметь следующее выражение:

$$U_1(z, zi) = -U_1(-z, zi) = \frac{1}{2} \int I_0(z) = z {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right),$$

где  $z {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right)$  – обобщенная гипергеометрическая функция.

Таким образом, получим:

$$x(z, -z) = -y(z, -z) = R \left( z {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; z^2\right) + \frac{I_0(2z)}{2} - \frac{1}{2} \right).$$

Эта формула позволяет найти расстояние от точки, лежащей на оси симметрии  $y = -x$ , до начала координат, в зависимости от соответствующего значения дуговой координаты.

### Решение задачи о перекусывании полосы

Рассмотрим классическую задачу о перекусывании полосы в рамках плоской деформации для идеальной жестко-пластической модели среды. Полоса толщиной  $2H$  из материала, предел которой известен и равен  $k$ , симметрично сжимается с двух сторон абсолютно жесткими штампами шириной  $2a$ . Предполагая, что контакт происходит без трения, и считая, что давление под штампом распределено равномерно, получим для верхней половины область пластического поведения материала, обозначенного на рис. 3 как  $ABEOD$ . Нижняя часть симметрична верхней относительно оси  $Ox$  и на рисунке не представлена. Пластическая зона состоит из:

- треугольника  $ABC$  – однородного напряженного состояния, линии скольжения взаимно перпендикулярные, прямые, подходящие к границе  $AB$  под углом  $\frac{\pi}{4}$ ;
- двух веерообразных  $DAC$  и  $CBE$  – линии скольжения прямые, сходящиеся в центрах  $A$  и  $B$  и дуги окружностей, заключенных между сторонами  $AD$ ,  $AC$  и  $BE$ ,  $BC$  соответственно.



- криволинейного четырехугольника  $CEOD$  – линии скольжения представляют собой кривые, параметрические уравнения которых выражаются с помощью формул (2).

Поиск поля скоростей выходит за рамки данной статьи. Решение будем проводить в „напряжениях”. В ходе решения необходимо найти угол  $\chi$  раскрытия вееров  $DAC$  и

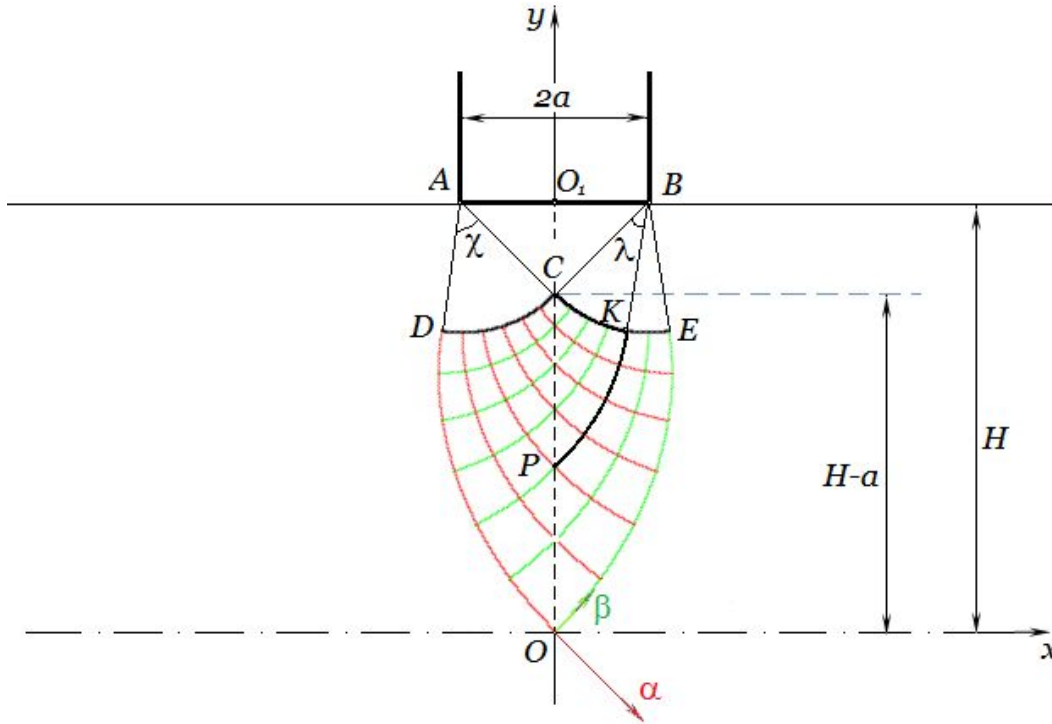


Рис. 3. Пластическая зона  $ABEOD$  под штампом

$CBE$ , а также значение предельной нагрузки  $P^*$  на штамп  $AB$ , при которой реализуется предложенное пластическое состояние.

Используя введенные выше соотношения, запишем зависимость между углом  $\lambda$  раскрытия веера  $CBK$  и длиной  $CP$  в следующем виде:

$$CP = y(\lambda) = a \left( 2\lambda {}_1F_2 \left( \frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; \lambda^2 \right) + I_0(2\lambda) - 1 \right). \quad (5)$$

Тогда для поиска  $\chi$  – угла раскрытия веера  $CBE$  будет иметь уравнение:  $CO = y(\chi)$ . Или после подстановки

$$H = a \left( 2\chi {}_1F_2 \left( \frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; \chi^2 \right) + I_0(2\chi) \right). \quad (6)$$

Выразим зависимость между  $\sigma_C$  и  $\sigma_P$ :

$$\begin{cases} \sigma_C - \theta_C 2k = \sigma_K - \theta_K 2k & \text{вдоль } \alpha\text{- линии } CK, \\ \sigma_K + \theta_K 2k = \sigma_P + \theta_P 2k & \text{вдоль } \beta\text{- линии } KP. \end{cases}$$

Так как  $\theta_C = \theta_P = \frac{\pi}{4}$ , а  $\theta_K = -\frac{\pi}{4} + \lambda$ , то, исключая  $\sigma_K$ , получим распределение  $\sigma$  вдоль  $CO$  в зависимости от угла  $\lambda$ :

$$\sigma_P = \sigma_C + 4k\lambda.$$

Константу  $\sigma_C$  найдем, приравнявая к нулю сумму проекций всех сил, действующих вдоль прямой  $O_1O$  и направленных вдоль оси  $Ox$ :

$$0 = \int_{O_1}^O \sigma_x dy = \int_{O_1}^C \sigma_x dy + \int_C^O \sigma_x dy.$$

Используя соотношения Леви  $\begin{cases} \sigma_x = \sigma - k \sin 2\theta, \\ \sigma_y = \sigma + k \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} = k \cos 2\theta, \end{cases}$  найдем  
в точке  $P$   $\begin{cases} \sigma_x = \sigma_C + 4k\lambda + k, \\ \tau_{xy} = 0; \end{cases}$  в точке  $C$   $\begin{cases} \sigma_x = \sigma_C + k, \\ \sigma_y = \sigma_C - k; \end{cases}$  тогда

$$\int_{O_1}^C \sigma_x dy = (\sigma_C + k)a,$$

$$\int_C^O \sigma_x dy = \int_C^O (\sigma_C + k + 4k\lambda) dy. \quad (7)$$

Так как зависимость  $y = y(\lambda)$  известна – формула (5), – то вычисление интеграла (7) произведем подстановкой

$$dy = \frac{dy}{d\lambda} d\lambda, \quad \begin{aligned} y = y_C &\rightarrow \lambda = 0, \\ y = y_O &\rightarrow \lambda = \chi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\sigma_C + k)a + \int_C^O (\sigma_C + k + 4k\lambda) dy = \\ &= (\sigma_C + k)a + (\sigma_C + k) \int_0^\chi \frac{dy}{d\lambda} d\lambda + 4k \int_0^\chi \lambda \frac{dy}{d\lambda} d\lambda = \\ &= (\sigma_C + k)a + (\sigma_C + k)(y(\chi) - y(0)) + 4k \int_0^\chi \lambda \frac{dy}{d\lambda} d\lambda = \\ &= (\sigma_C + k)a + (\sigma_C + k)(H - a) + 4k \int_0^\chi \lambda \frac{dy}{d\lambda} d\lambda = \\ &= (\sigma_C + k)H + 4k \left( \lambda y(\lambda) \Big|_0^\chi - \int_0^\chi y(\lambda) d\lambda \right) = \\ &= (\sigma_C + k)H + 4k\chi(H - a) - 4k \int_0^\chi y(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Выражая  $\sigma_C$ , получим

$$\sigma_C = \frac{4k}{H} \int_0^\chi y(\lambda) d\lambda - 4k\chi + 4k\chi \frac{a}{H} - k.$$

Так как

$$\int y(z)dz = \int \left( 2z {}_1F_2 \left( \frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; z^2 \right) + I_0(2z) - 1 \right) dz = \\ = z \left( {}_1F_2 \left( \frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; z^2 \right) + z {}_1F_2 \left( \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 2; z^2 \right) - 1 \right),$$

то

$$\sigma_C = \frac{4k}{H} \chi \left( {}_1F_2 \left( \frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; \chi^2 \right) + \chi {}_1F_2 \left( \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 2; \chi^2 \right) - 1 \right) - 4k\chi + 4k\chi \frac{a}{H} - k. \quad (8)$$

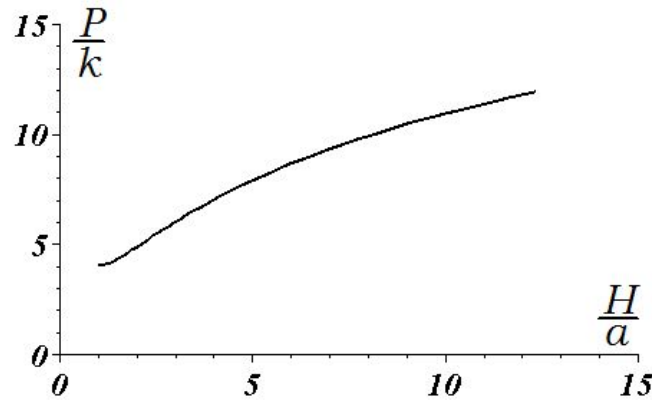


Рис. 4. Зависимость предельной нагрузки от геометрических параметров

Значение предельной нагрузки найдем следующим образом:

$$P^* = \int_A^B \sigma_y dx = \int_A^B (\sigma_C - k) dx = (\sigma_C - k)2a,$$

$$P^* = 2a \left( \frac{4k}{H} \chi \left( {}_1F_2 \left( \frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; \chi^2 \right) + \chi {}_1F_2 \left( \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 2; \chi^2 \right) - 1 \right) - 4k\chi + 4k\chi \frac{a}{H} - 2k \right). \quad (9)$$

Формулы (6), (9) выражают зависимости  $\begin{cases} H = H(\chi) \\ P^* = P^*(H(\chi), \chi) \end{cases}$ , что фактически означает связь между величиной предельной нагрузки и геометрическими параметрами задачи (рис. 4).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.
- [2] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. школа, 1969. – 608 с.
- [3] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 402 с.
- [4] *Друянов, Б. А.* Теория технологической пластичности / Б. А. Друянов, Р. И. Непершин. – М. : Машиностроение, 1990. – 272 с.

- [5] Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Наука, 1956. – 407 с.
- [6] Чеботарев, А. С. Интегрирование уравнений плоской деформации одной задачи теории идеальной пластичности / А. С. Чеботарев. – Воронеж : Вестник ВГУ. Серия Физика Математика. – № 2. – 2007. С. 198-204.
- [7] Прудников, А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Наука, 1983.
- [8] Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 832 с.

*A. S. Chebotarev*

## ON THE COMPRESSION OF THE BAND

*Voronezh State University*

**Abstract.** In this work we derived the analytical formulas for the slip lines, in the problem of compression of the band with ideally smooth stamps. Riemann's method of integration of the equations of hyperbolic type is used. As a result, the integrals are expressed through Lommel functions of two variables. The received relations for the coordinates of the characteristics in the plastic area are used to determine the limit load

**Keywords:** plasticity, flat deformation problem, sliding lines, exact solutions, limit load, band compression

*Чеботарев Андрей Сергеевич*

*кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** xeba@amm.vsu.ru

*Chebotarev Andrew Sergeevich*

*Associate professor of faculty of applied mathematics information technologies and mechanics, candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Voronezh State University*

## К ВОПРОСУ О ВОЛОЧЕНИИ ПОЛОСЫ ЧЕРЕЗ ПРЯМОЛИНЕЙНУЮ МАТРИЦУ

Воронежский государственный университет

**Аннотация.** В работе исследовано напряженное состояние под прямолинейной матрицей при волочении полосы. Получены аналитические уравнения для линий скольжения, скоростей вдоль характеристик, напряжений в пластической зоне и предельной силы волочения. Показано, что полученные аналитические формулы сходятся с численными расчетами.

**Ключевые слова:** идеальная пластичность, плоская деформация, предел текучести, волочение полосы, линии скольжения, сила волочения.

УДК: 539.374

Рассматривается классическая задача о волочении полосы, исследуемая в работах [1-4], [8], при плоской деформации для идеальной жесткопластической модели среды. Полоса толщиной  $2H$  из материала, предел текучести которого есть  $k$ , протаскивается со скоростью  $U$  сквозь жесткую прямоугольную гладкую матрицу с углом раствора  $2\gamma$ . До сужения материала скорость его  $V$ , после сужения —  $U$ , и части полос движутся как твердое тело. Используя свойство несжимаемости материала, имеем  $V = \frac{H}{h}U$ , где  $h$  — толщина полосы после сужения материала. Для упрощения расчетов не учитывается трение на границе матрицы; с учетом симметрии задачи для верхней половины предполагаемое поле линий скольжения представлено на рис. 1. Отметим, что решение зависит от предполагаемой границы жесткопластического тела. И как отмечено в работе [8], это определяет решение не единственным образом.

Здесь в треугольнике  $ABC$  однородное напряженное состояние, линии скольжения взаимно ортогональны и подходят к границе  $AB$  под углом  $\frac{\pi}{4}$ . Так называемые центрированные поля [3]  $ACD$  и  $BCE$  содержат неизвестные углы  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно. В криволинейном четырехугольнике  $ODCE$  необходимо решить задачу Гурса по данным на линиях скольжения  $CD$  и  $CE$ .

При введении криволинейных координат  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_0}{2k} - \left( \frac{\sigma}{2k} - \varphi \right) \right] \\ \beta = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\sigma_0}{2k} + \left( \frac{\sigma}{2k} + \varphi \right) \right], \end{cases}$$

где  $\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ , составляющая скоростей  $u, v$  вдоль  $\alpha$  и  $\beta$ , удовлетворяет телеграфному уравнению:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} + f = 0. \quad (1)$$

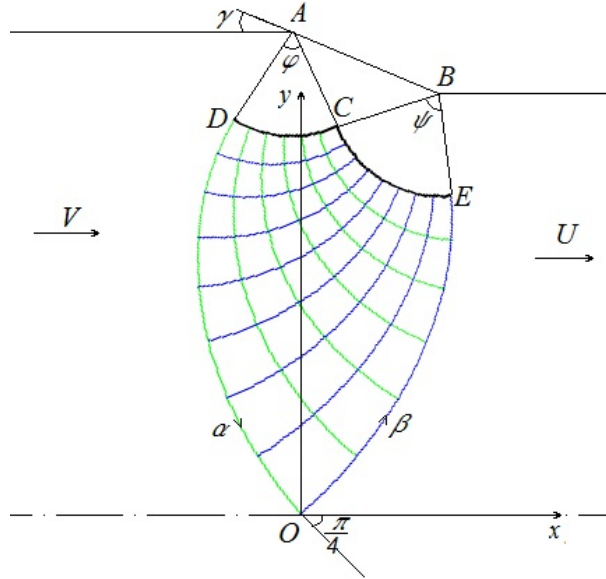


Рис. 1. Пластическая зона для верхней половины, состоящая из вееров  $ACD$  и  $CBE$ , равномерной зоны  $ABC$  и четырехугольника  $ODCE$

Решение задачи Гурса определяется формулой Римана [4]:

$$f(a, b) = f(0, 0)J_0(2\sqrt{ab}) + \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta. \quad (2)$$

### Задача Гурса для скоростей

Введем две системы координат:

$xOy$  — система координат, абсцисса которой лежит на оси симметрии полосы волочения, а начало координат расположено в точке  $O$ , находящейся на пересечении  $\alpha$  и  $\beta$  линий скольжения, выходящих из граничных точек  $A$  и  $B$ , ограничивающих зону пластического деформирования.

$x_1Oy_1$  — система координат, повернутая в точке  $O$  относительно  $xOy$  на угол  $\frac{\pi}{4}$ , так как линии скольжения подходят к оси симметрии под углом  $\frac{\pi}{4}$ . Найдем граничные условия для скоростей. Исходя из рис. 2, видно, что на  $\alpha$ -линии нормальная составляющая скорости будет  $v = V \cos \lambda$ , а касательная составляющая  $u$  направлена под углом  $\alpha$  к линии скольжения. Также известно, что линии скольжения составляют с осью симметрии угол, равный  $\frac{\pi}{4}$ . Исходя из этих данных и того, что угол  $\alpha < 0$ , мы получаем, что угол  $MKN = \frac{\pi}{4} - \alpha$ . Далее, учитывая, что углы  $KMN$  и  $\lambda$  накрестлежащие, мы получаем  $\lambda = \frac{\pi}{4} + \alpha$ , а проекция  $v = V \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ . Проводя аналогичные рассуждения на  $\beta$ -линии и учитывая, что  $\beta > 0$ , получаем  $u = U \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$ . Используя уравнения Гейрингер:

$$du - v d\varphi = 0 \quad \text{вдоль } \alpha\text{-линии,}$$

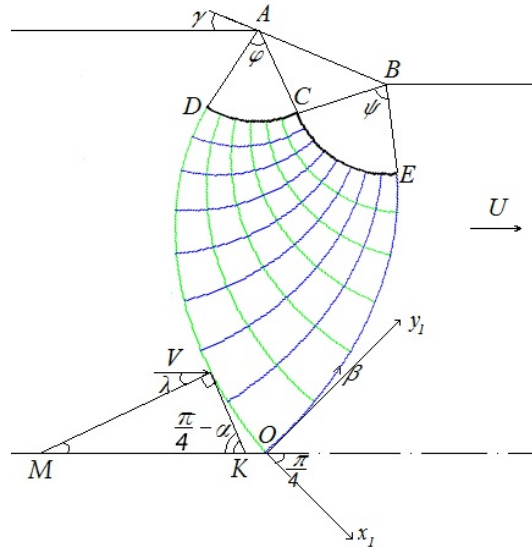


Рис. 2. Граничные условия для скоростей в четырехугольнике  $ODCE$

$$dv - u d\varphi = 0 \quad \text{вдоль } \beta - \text{ линии,}$$

имеем следующие граничные условия для скоростей [8] на линиях скольжения:

$$\begin{cases} u = U \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \\ v = V \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right), \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \alpha} = v = V \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \\ \frac{\partial v}{\partial \beta} = -u = -U \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right), \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \beta} = U \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} = -V \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right). \end{cases}$$

В системе координат  $x_1Oy_1$  переменные  $u$  и  $v$  удовлетворяют телеграфному уравнению (1), решение которого определяется формулой Римана (2):

$$\begin{aligned} u(a, b) &= \frac{U}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{ab}) + V \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) d\alpha + \\ &\quad + U \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) d\beta, \\ v(a, b) &= \frac{V}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{ab}) - V \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) d\alpha - \\ &\quad - U \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) d\beta. \end{aligned}$$

Используя тригонометрические формулы, получим:

$$u(a, b) = \frac{U}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{ab}) + \frac{V}{\sqrt{2}} \left[ \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \cos(\alpha) d\alpha - \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \sin(\alpha) d\alpha \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{U}{\sqrt{2}} \left[ \int_0^b J_0 \left( 2\sqrt{a(b-\beta)} \right) \cos(\beta) d\beta - \int_0^b J_0 \left( 2\sqrt{a(b-\beta)} \right) \sin(\beta) d\beta \right], \\
v(a, b) = & \frac{V}{\sqrt{2}} J_0 \left( 2\sqrt{ab} \right) - \frac{V}{\sqrt{2}} \left[ \int_0^a J_0 \left( 2\sqrt{(a-\alpha)b} \right) \sin(\alpha) d\alpha - \int_0^a J_0 \left( 2\sqrt{(a-\alpha)b} \right) \cos(\alpha) d\alpha \right] - \\
& - \frac{U}{\sqrt{2}} \left[ \int_0^b J_0 \left( 2\sqrt{a(b-\beta)} \right) \sin(\beta) d\beta - \int_0^b J_0 \left( 2\sqrt{a(b-\beta)} \right) \cos(\beta) d\beta \right].
\end{aligned}$$

Рассмотрим вычисление интегралов:

$$\begin{aligned}
Int_1 &= \int_0^a J_0 \left( 2\sqrt{(a-\alpha)b} \right) \cos \alpha d\alpha, & Int_2 &= \int_0^b J_0 \left( 2\sqrt{a(b-\beta)} \right) \sin \beta d\beta, \\
Int_3 &= \int_0^a J_0 \left( 2\sqrt{(a-\alpha)b} \right) \sin \alpha d\alpha, & Int_4 &= \int_0^b J_0 \left( 2\sqrt{a(b-\beta)} \right) \cos \beta d\beta.
\end{aligned}$$

Рассмотрим  $Int_1 = \int_0^a J_0 \left( 2\sqrt{(a-\alpha)b} \right) \cos \alpha d\alpha$ . Введем следующую замену:  $t = \sqrt{b(a-\alpha)}$ , тогда:

$\alpha = a - \frac{t^2}{b}$ ,  $d\alpha = -\frac{2}{b} t dt$ . Границы преобразуются:  $\alpha = a \rightarrow t = 0$   
 $\alpha = 0 \rightarrow t = \sqrt{ba}$ . В итоге получим:

$$\begin{aligned}
Int_1 &= \int_{\sqrt{ba}}^0 J_0(2t) \cos \left( a - \frac{t^2}{b} \right) \left( -\frac{2}{b} t \right) dt = \\
&= \frac{2}{b} \int_0^{\sqrt{ba}} J_0(2t) \cos \left( a - \frac{t^2}{b} \right) t dt = \\
&= \frac{2}{b} \int_0^{\sqrt{ba}} t J_0(2t) \left( \cos(a) \cos \left( \frac{t^2}{b} \right) + \sin(a) \sin \left( \frac{t^2}{b} \right) \right) dt = \\
&= \frac{2}{b} \cos(a) \int_0^{\sqrt{ba}} t \cos \left( \frac{t^2}{b} \right) J_0(2t) dt + \frac{2}{b} \sin(a) \int_0^{\sqrt{ba}} t \sin \left( \frac{t^2}{b} \right) J_0(2t) dt.
\end{aligned}$$

Согласно [6]:

$$\begin{aligned}
& \int_0^x x^{\nu+1} \left\{ \begin{array}{l} \sin ax^2 \\ \cos ax^2 \end{array} \right\} J_\nu(bx) dx = \\
&= \frac{b^\nu}{(2a)^{\nu+1}} \left[ U_{\nu+1}(2ax^2, bx) \left\{ \begin{array}{l} \sin ax^2 \\ \cos ax^2 \end{array} \right\} \mp U_{\nu+2}(2ax^2, bx) \left\{ \begin{array}{l} \cos ax^2 \\ \sin ax^2 \end{array} \right\} \right].
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $U_\nu(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{z}{w} \right)^{2k+\nu} J_{2k+\nu}(w)$  – функция Ломмеля двух переменных [9].

Значит,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\sqrt{ba}} t \cos \left( \frac{t^2}{b} \right) J_0(2t) dt = \frac{b}{2} \left[ U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) + U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) \right], \\
& \int_0^{\sqrt{ba}} t \sin \left( \frac{t^2}{b} \right) J_0(2t) dt = \frac{b}{2} \left[ U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) \right].
\end{aligned}$$



Продолжая вычисление  $Int_1$  окончательно получим:

$$\begin{aligned} Int_1 &= \frac{2}{b} \left( \cos(a) \frac{b}{2} \left[ U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) + U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sin(a) \frac{b}{2} \left[ U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) \right] \right) = \\ &= \left[ U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \cos^2(a) + U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) \cos(a) \right] + \\ &\quad + \left[ U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \sin^2(a) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) \sin(a) \right] = \\ &= U_1(2a, 2\sqrt{ba}). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь  $Int_4 = \int_0^b J_0 \left( 2\sqrt{a(b-\beta)} \right) \cos \beta d\beta$ , замена:  $t = \sqrt{a(b-\beta)}$ , тогда:  $\beta = b - \frac{t^2}{a}$ ,  $d\beta = -\frac{2}{a} t dt$ . Границы преобразуются:  $\beta = b \rightarrow t = 0$ ,  $\beta = 0 \rightarrow t = \sqrt{ba}$ . В результате имеем:

$$Int_4 = \int_{\sqrt{ba}}^0 J_0(2t) \cos\left(b - \frac{t^2}{a}\right) \left(-\frac{2}{a} t\right) dt = \frac{2}{a} \int_0^{\sqrt{ba}} J_0(2t) \cos\left(b - \frac{t^2}{a}\right) t dt.$$

Так как полученное выражение симметрично  $Int_1$  относительно замены  $a \leftrightarrow b$ , то  $Int_4 = U_1(2b, 2\sqrt{ba})$ .

Поступая аналогично с выражениями  $Int_2, Int_3$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} Int_1 &= U_1(2a, 2\sqrt{ba}), \\ Int_2 &= U_2(2b, 2\sqrt{ba}), \\ Int_3 &= U_2(2a, 2\sqrt{ba}), \\ Int_4 &= U_1(2b, 2\sqrt{ba}). \end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя полученные значения интегралов  $Int_1, Int_2, Int_3, Int_4$  в  $u(a, b)$  и  $v(a, b)$ , будем иметь следующие выражения:

$$\left\{ \begin{aligned} u(a, b) &= \frac{HV}{h\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{ab}) + \frac{V}{\sqrt{2}} \left[ U_1(2a, 2\sqrt{ba}) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \right] + \\ &\quad + \frac{HV}{h\sqrt{2}} \left[ U_1(2b, 2\sqrt{ba}) - U_2(2b, 2\sqrt{ba}) \right] \\ v(a, b) &= \frac{V}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{ab}) - \frac{V}{\sqrt{2}} \left[ U_1(2a, 2\sqrt{ba}) + U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \right] - \\ &\quad - \frac{HV}{h\sqrt{2}} \left[ U_1(2b, 2\sqrt{ba}) + U_2(2b, 2\sqrt{ba}) \right]. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Уравнения (5) выражают скорости вдоль линий скольжения в криволинейном четырехугольнике  $CDEO$ .

Из условия того, что точка  $C$  принадлежит однородному напряженному состоянию, реализованному в области  $ABC$ , характеристиками являются прямые. Напряженное состояние постоянное,  $u$  и  $v$  постоянные, так что на границе  $AB$  выполнено условие непротекания  $u = v$ . В силу того, что координаты точки  $C(-\psi, \varphi)$ , из уравнения  $u(-\psi, \varphi) = v(-\psi, \varphi)$  найдем неявное задание кривой  $u = v$  в плоскости  $(\alpha, \beta)$ . Подставив полученные формулы (5), получим:

$$\frac{H-h}{h} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) + \frac{2H}{h} U_1(2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) + 2U_1(-2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) = 0. \tag{6}$$

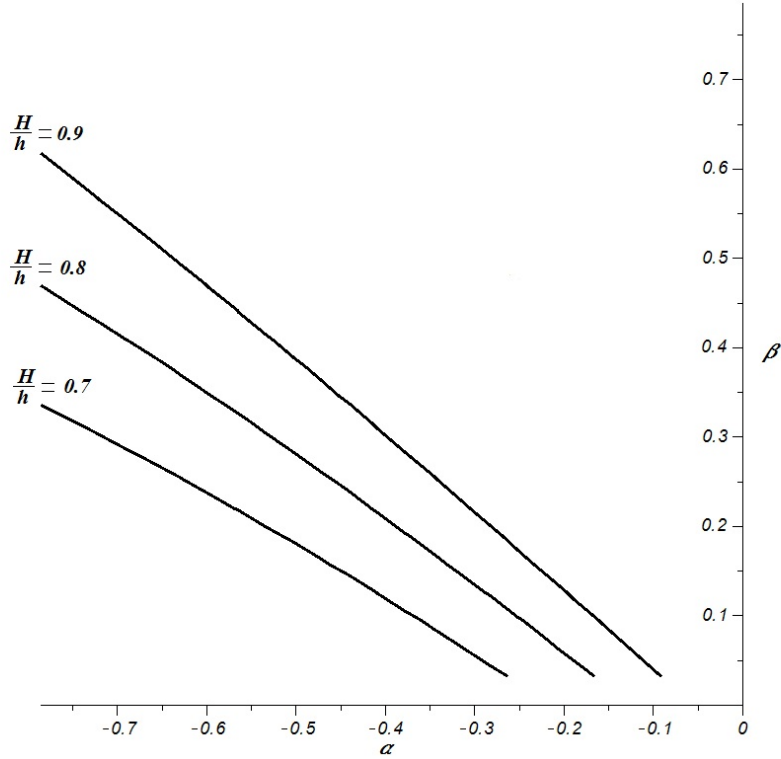


Рис. 3. Кривая  $u = v$  в плоскости  $(\alpha, \beta)$  при различных соотношениях  $\frac{h}{H}$

С помощью данной формулы при различных значениях  $\varphi$  и  $\psi$  можно построить линию непротекания. При различных  $\frac{h}{H} = 0.7, 0.8, 0.9$  построим график линии непротекания в плоскости  $(\alpha, \beta)$  (рис. 18). Можно заметить, что при большем сужении значения функции уменьшаются. Так как линии скольжения пересекают ось под углом  $\frac{\pi}{4}$ , то можно воспользоваться соотношением, связывающим углы  $\varphi$  и  $\psi$  [3],  $\psi = \varphi + \gamma$ , и (6) запишется в виде:

$$\frac{H-h}{h} J_0\left(2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}\right) + \frac{2H}{h} U_1\left(2\varphi, 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}\right) + 2U_1\left(-2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}\right) = 0. \quad (7)$$

В уравнении (7) определяется угол  $\varphi$  при фиксированных переменных  $H, h, \gamma$ .

Построим график пересечения линии непротекания при  $\frac{h}{H} = 0.66$  с линией  $\varphi - \psi + \gamma = 0$  при  $\gamma = \frac{\pi}{12}$ .

#### Задача Гурса для координат

Пусть в системе координат  $xOy$  центры окружностей расположены в точках с координатами  $(0, R)$   $\alpha$ -линия и  $(-R, 0)$   $\beta$ -линия (рис.5).

Параметрическое уравнение окружностей имеют следующий вид:

$$\alpha - \text{линия} \begin{cases} x = R \sin \alpha \\ y = R - R \cos \alpha \end{cases} \quad \text{и} \quad \beta - \text{линия} \begin{cases} x = -R + R \cos \beta \\ y = R \sin \beta. \end{cases}$$

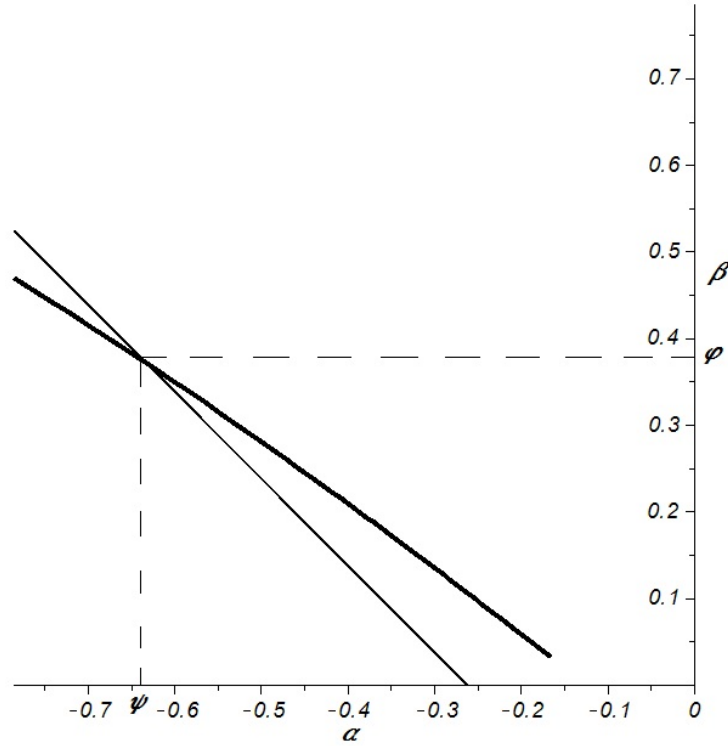


Рис. 4. Условие определения угла раскрытия веера  $\varphi$ , используя соотношения для скоростей

Используя переменные, введенные Михлиным,

$$\begin{cases} X = x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \\ Y = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta), \end{cases} \text{ при } \theta = \alpha + \beta$$

будем иметь следующие краевые условия начальной характеристической задачи:

для  $\alpha$ -линии

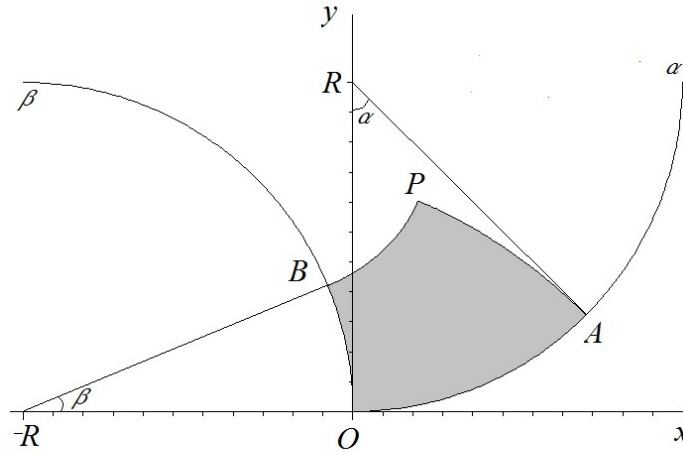
$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \theta = \beta, \end{cases} \quad \begin{cases} X = R - R \cos \beta \\ Y = R \sin \beta, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \beta} = R \sin \beta \\ \frac{\partial Y}{\partial \beta} = R \cos \beta, \end{cases}$$

для  $\beta$ -линии

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \theta = \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} X = R \sin \alpha \\ Y = R \cos \alpha - R, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \alpha} = R \cos \alpha \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = -R \sin \alpha. \end{cases}$$

Как известно, переменные Михлина  $X$  и  $Y$  удовлетворяют телеграфному уравнению (1), решение которого задается формулой Римана [4]. Для переменной  $X$  будем иметь:

$$X(a, b) = \int_0^a J_0 \left( 2\sqrt{(a - \alpha)b} \right) R \cos \alpha d\alpha + \int_0^b J_0 \left( 2\sqrt{a(b - \beta)} \right) R \sin \beta d\beta.$$

Рис. 5. Радиусы кривизны  $\alpha$  и  $\beta$  линий

Для переменной  $Y$  будем иметь:

$$Y(a, b) = \int_0^a J_0 \left( 2\sqrt{(a-\alpha)b} \right) (-R \sin \alpha) d\alpha + \int_0^b J_0 \left( 2\sqrt{a(b-\beta)} \right) R \cos \beta d\beta.$$

Обратная подстановка к физическим координатам  $x, y$  дает квадратурные формулы линий скольжения:

$$\begin{cases} x(a, b) = X(a, b) \cos(a+b) - Y(a, b) \sin(a+b) \\ y(a, b) = X(a, b) \sin(a+b) + Y(a, b) \cos(a+b). \end{cases}$$

При этом легко заметить, что

$$\begin{cases} X(a, b) = R(Int_1 + Int_2) \\ Y(a, b) = R(-Int_3 + Int_4). \end{cases}$$

В результате получаем:

$$\begin{cases} x_2(a, b) = R \cos(a+b) \left[ U_1 \left( 2a, 2\sqrt{ba} \right) + U_2 \left( 2b, 2\sqrt{ba} \right) \right] - \\ \quad - R \sin(a+b) \left[ U_1 \left( 2b, 2\sqrt{ba} \right) - U_2 \left( 2a, 2\sqrt{ba} \right) \right] \\ y_2(a, b) = R \sin(a+b) \left[ U_1 \left( 2a, 2\sqrt{ba} \right) + U_2 \left( 2b, 2\sqrt{ba} \right) \right] + \\ \quad + R \cos(a+b) \left[ U_1 \left( 2b, 2\sqrt{ba} \right) - U_2 \left( 2a, 2\sqrt{ba} \right) \right]. \end{cases} \quad (8)$$

Отметим, что приведенная система уравнений (8) записана в системе координат  $(x_2, y_2)$  с центром в точке  $C$  (рис. 6).

Ось симметрии, проходящая через точку  $O$  в этой системе координат, имеет уравнение прямой  $y = kx + b$ , где угловой коэффициент  $k = \operatorname{tg} \left( \gamma + \frac{\pi}{4} \right)$ , а величина  $b = -CL$  (рис. 7).

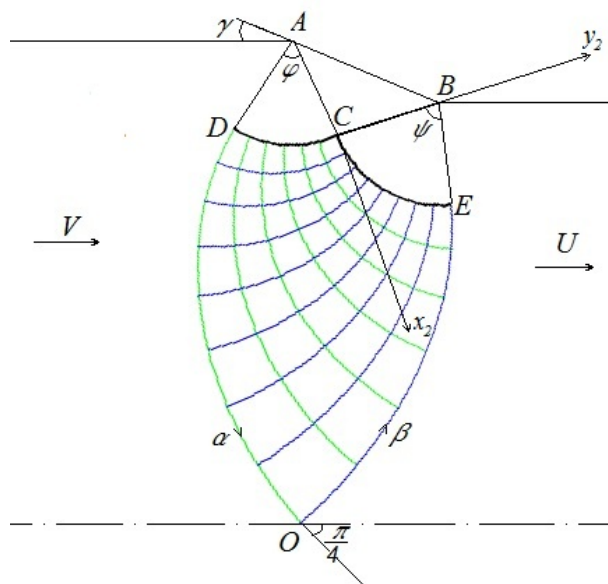


Рис. 6. Определение угла раскрытия веера

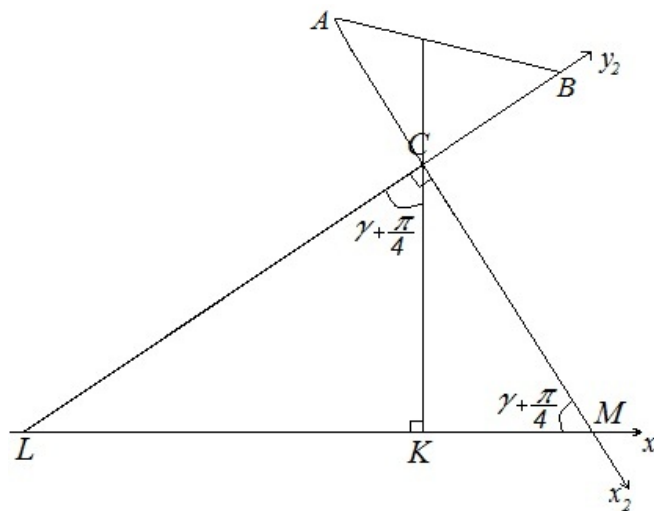


Рис. 7. Нахождение коэффициентов  $k$  и  $b$

Из рис. 6 легко заметить, что  $\sin \gamma = \frac{\frac{H}{2} - \frac{h}{2}}{AB}$ , а  $BC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$ . Таким образом, получается, что  $BC = \frac{H - h}{2\sqrt{2} \sin \gamma}$ .

Из рис. 7 видно, что  $CK + BC \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) = \frac{h}{2}$ , следовательно  $CK = \frac{h}{2} - \frac{H-h}{2\sqrt{2}\sin\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right)$ .

Из прямоугольного треугольника  $CLK$  можно выписать соотношение  $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right) = \frac{CK}{CL}$ , следовательно,  $CL = \frac{\sqrt{2}h \sin\gamma - H \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) + h\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right)}{2\sqrt{2}\sin\gamma \cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right)}$ .

Таким образом, уравнение оси симметрии в системе координат  $x_2Cy_2$  имеет вид:

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right) x + \frac{(h-H) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) - \sqrt{2}h \sin\gamma}{2\sqrt{2}\sin\gamma \cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right)}. \quad (9)$$

Запишем теперь условие для определения угла  $\varphi$  — угла раскрытия веера  $CAD$ :  $\alpha$ -линия  $DO$  пересекается с осью симметрии, значит, подставляя  $x(\chi + \gamma, -\varphi)$  и  $y(\chi + \gamma, -\varphi)$  из системы (8) в уравнение (9), получим следующее уравнение для определения  $\varphi$ :

$$y(\varphi + \gamma, -\varphi) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right) x(\varphi + \gamma, -\varphi) + \frac{(h-H) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) - \sqrt{2}h \sin\gamma}{2\sqrt{2}\sin\gamma \cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right)}. \quad (10)$$

Подставляя (8) в (10), получим уравнение для определения угла раскрытия веера  $\varphi$  при фиксированных переменных  $H, h, \gamma$ .

Сравним полученные формулы (7) и (10). Для этого при фиксированном соотношении  $\frac{H}{h}$ , равном 0.7, 0.8, 0.9, построим график зависимости углов  $\varphi$  соответственно от  $\gamma$  (рис. 8).

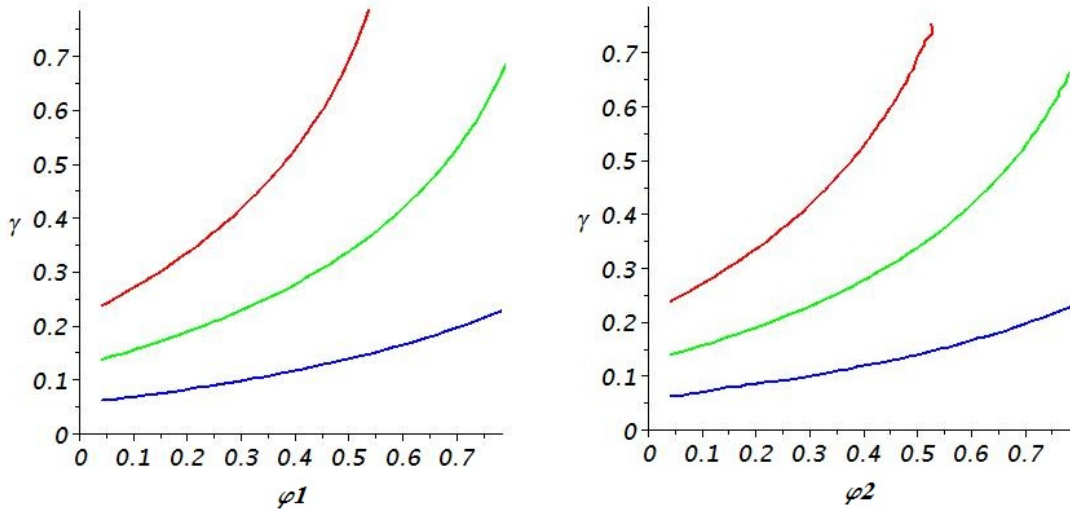


Рис. 8.  $\varphi_1$  - угол раскрытия веера, полученный с помощью соотношений для скоростей вдоль линий скольжения;  $\varphi_2$  - угол раскрытия веера, полученный с помощью уравнений линий скольжения в координатах

#### Нахождение напряжения в четырехугольнике $ODCE$

Чтобы найти напряжения в точке  $O$ , повернем оси  $x_2Oy_2$  на угол  $\frac{\pi}{4} + \gamma$ , полученные оси обозначим  $x_3Oy_3$  (рис. 9). Спроектируем все напряжения вдоль  $\alpha$ -линии на ось  $x_3O$ .

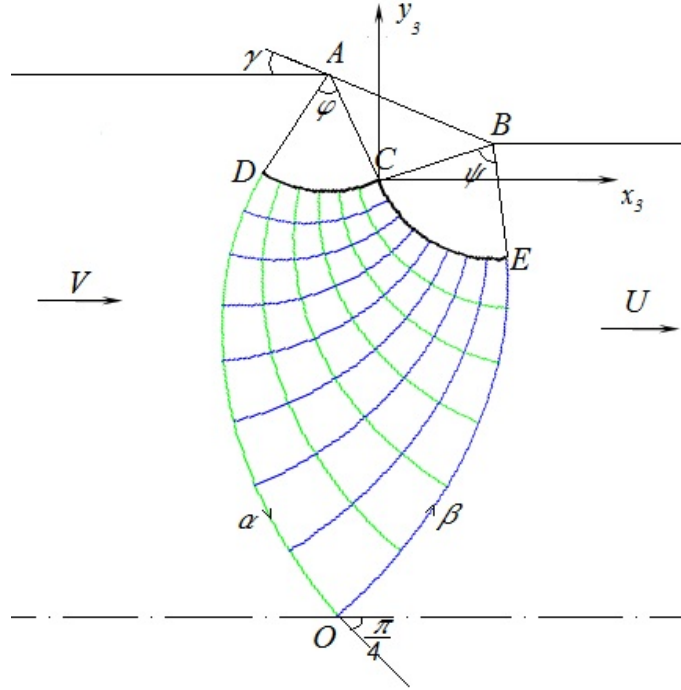


Рис. 9

Так как вдоль  $\alpha$ -линии выполняются соотношения Генки, то, взяв на  $\alpha$ -линии произвольную точку  $M$ , получаем :

$$\frac{\sigma_O}{2k} - \theta_O = \frac{\sigma_M}{2k} - \theta_M.$$

Известно, что  $\theta_O = -\frac{\pi}{4}$ . Подставляя это значение, получаем:

$$\sigma_M = \sigma_O + 2k \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right).$$

В силу произвольности точки  $M$  можно записать  $\sigma_M = \sigma$ , и, следовательно:

$$\sigma = \sigma_O + 2k \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right). \tag{11}$$

Аналогично получаем:

$$\sigma_D = \sigma_O - 2k(\varphi + \gamma).$$

Проекция напряжений вдоль кривой  $OD$  на ось  $x_3O$  будет находиться по формуле (рис. 10):

$$P_x^{AD} = (\sigma_D \sin \theta_D - \tau \cos \theta_D)AD,$$

$$P_x^{\check{D}O} = \int_S (\sigma \sin \theta - \tau \cos \theta) dS = \int_S \left( \left[ \sigma_O + 2k \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) \right] \sin \theta - \tau \cos \theta \right) dS.$$

Для перехода от криволинейного интеграла к определенному нам необходимо знать радиус кривизны вдоль  $\alpha$ -линии.

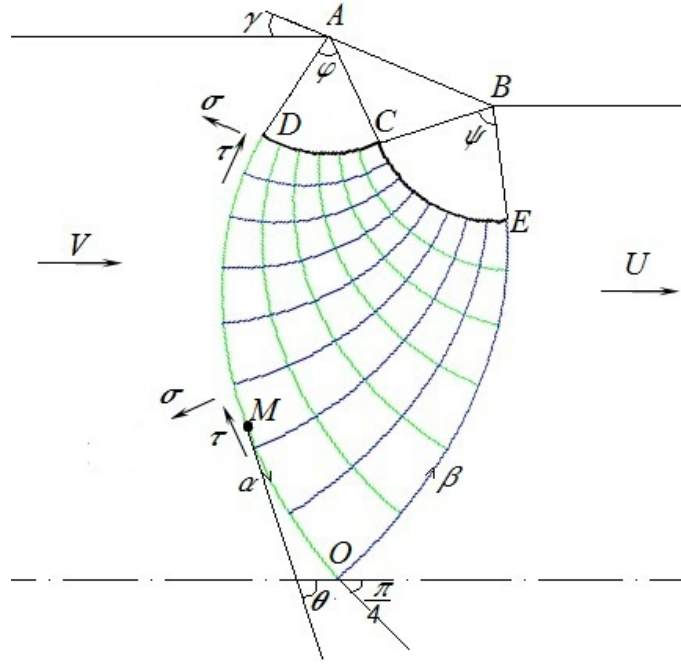


Рис. 10

Так как согласно [4]  $R$  удовлетворяет телеграфному уравнению (1), решение которого задаётся формулой Римана, получаем:

$$R(a, b) = R(0, 0)J_0(2\sqrt{ab}) + \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \frac{\partial R}{\partial \alpha} d\alpha + \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \frac{\partial R}{\partial \beta} d\beta.$$

Как видно из (рис. 5),  $R(0, 0) = R$ ,  $\frac{\partial R}{\partial \alpha} = 0$ ,  $\frac{\partial R}{\partial \beta} = -R$ .

Получаем формулу для кривизны вдоль  $\alpha$ -линии:

$$R(a, b) = R \left( J_0(2\sqrt{ab}) - \frac{\sqrt{ab}}{a} J_1(2\sqrt{ab}) \right).$$

Воспользуемся полученной формулой. Как было показано выше,  $R = \frac{H-h}{2\sqrt{2}\sin(\gamma)} = AD$ . При замене  $dS = R(a, -\varphi)da$  в криволинейном интеграле пределы интегрирования будут  $0 \leq a \leq \varphi + \gamma$ , при этом вдоль линии скольжения  $\tau = k$ . Получим:

$$P_x^{\vec{D}O} = AD \int_0^{\varphi+\gamma} [\sigma_O + 2k(a - \varphi - \gamma)] \sin \left( a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \left( J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) -$$

$$-k \cos \left( a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \left( J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da.$$



Проекция напряжений вдоль  $AD$  будет:

$$P_x^{AD} = (\sigma \sin \theta - \tau \cos \theta)AD = -(\sigma_O - 2k(\varphi + \gamma)) \sin \left( \frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) - k \cos \left( \frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) AD.$$

Так как противонапряжение отсутствует, то  $P_x^{DO} + P_x^{AD} = 0$ , получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_O \left( \int_0^{\varphi+\gamma} \sin \left( a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \left( J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da - \sin \left( \frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) \right) = \\ = k \left( \int_0^{\varphi+\gamma} \cos \left( a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \left( J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da + \cos \left( \frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) \right) - \\ - 2k \left( \int_0^{\varphi+\gamma} (a - \varphi - \gamma) \sin \left( a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \left( J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da + \right. \\ \left. + (\varphi + \gamma) \sin \left( \frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) \right). \end{aligned}$$

Перейдем к вычислению интегралов. Для начала воспользуемся тригонометрическими формулами синуса и косинуса разности углов:

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi+\gamma} \sin \left( a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \left( J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da = \\ = \cos \left( \frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) \left[ \int_0^{\varphi+\gamma} \sin a J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da - \int_0^{\varphi+\gamma} \sin a \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da \right] - \\ - \sin \left( \frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) \left[ \int_0^{\varphi+\gamma} \cos a J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da - \int_0^{\varphi+\gamma} \cos a \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da \right] = \\ = \cos \left( \frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) (I1 - I2) - \sin \left( \frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) (I3 - I4). \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi+\gamma} \cos \left( a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \left( J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da = \\ = \cos \left( \frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) (I3 - I4) + \sin \left( \frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) (I1 - I2), \\ \int_0^{\varphi+\gamma} (a - \varphi - \gamma) \sin \left( a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \left( J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da \\ \int_0^{\varphi+\gamma} a \sin \left( a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \left( J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\varphi + \gamma) \int_0^{\varphi + \gamma} \sin\left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma\right) \left( J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da = \\
& = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma\right) (I5 - I6) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma\right) (I7 - I8) - \\
& -(\varphi + \gamma) \left( \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma\right) (I1 - I2) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma\right) (I3 - I4) \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения напряжения в точке  $O$  необходимо вычислить интегралы:

$$\begin{aligned}
I1 &= \int_0^{\varphi + \gamma} \sin(a) J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da, & I2 &= \int_0^{\varphi + \gamma} \sin(a) \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da, \\
I3 &= \int_0^{\varphi + \gamma} \cos(a) J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da, & I4 &= \int_0^{\varphi + \gamma} \cos(a) \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da, \\
I5 &= \int_0^{\varphi + \gamma} a \sin(a) J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da, & I6 &= \int_0^{\varphi + \gamma} a \sin(a) \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da, \\
I7 &= \int_0^{\varphi + \gamma} a \cos(a) J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da, & I8 &= \int_0^{\varphi + \gamma} a \cos(a) \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da.
\end{aligned}$$

Рассмотрим  $I1 = \int_0^{\varphi + \gamma} \sin(a) J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da$ . Введем следующую замену:  $\sqrt{a} = x$ , тогда:  $da = 2x dx$ . Границы преобразуются  $a=0, \rightarrow x=0$   
 $\theta = \varphi + \gamma, \rightarrow x = \sqrt{\varphi + \gamma}$ . В итоге получим:

$$I1 = \int_0^{\sqrt{\varphi + \gamma}} 2x \sin(x^2) J_0(2\sqrt{-\varphi}x) dx.$$

Используя формулу (3), получим:

$$I1 = U_1\left(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}\right) \sin(\varphi + \gamma) - U_2\left(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}\right) \cos(\varphi + \gamma).$$

Проводя аналогичные рассуждения, получаем:

$$I3 = U_1\left(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}\right) \cos(\varphi + \gamma) + U_2\left(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}\right) \sin(\varphi + \gamma).$$

Рассмотрим  $I2 = \int_0^{\varphi + \gamma} \sin(a) \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da$ . Проводя аналогичную замены, получаем:

$$I2 = 2\sqrt{-\varphi} \int_0^{\sqrt{\varphi + \gamma}} \sin(x^2) J_1(2\sqrt{-\varphi}x) dx.$$

$$u = \sin(x^2), \quad du = 2x \cos(x^2) dx,$$

Решим этот интеграл по частям:  $dv = J_1(2\sqrt{-\varphi}x) dx, \quad v = -\frac{J_0(2\sqrt{-\varphi}x)}{2\sqrt{-\varphi}}.$

$$\begin{aligned}
 I2 &= -J_0(2\sqrt{-\varphi}x) \sin(x^2) \Big|_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} + \int_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} 2x \cos(x^2) J_0(2\sqrt{-\varphi}x) dx = \\
 &= -J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}) \sin(\varphi+\gamma) + U_1 \left( 2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)} \right) \cos(\varphi+\gamma) + \\
 &\quad + U_2 \left( 2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)} \right) \sin(\varphi+\gamma).
 \end{aligned}$$

Аналогично получаем:

$$\begin{aligned}
 I4 &= -J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}) \cos(\varphi+\gamma) + 1 - U_1 \left( 2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)} \right) \sin(\varphi+\gamma) + \\
 &\quad + U_2 \left( 2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)} \right) \cos(\varphi+\gamma).
 \end{aligned}$$

$I5$  будем вычислять по частям после аналогичной замены:

$$\begin{aligned}
 I5 &= \int_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} 2x^3 \sin(x^2) J_0(2\sqrt{-\varphi}x) dx, \\
 dv &= 2x^3 \sin(x^2), \\
 v &= \int 2x^3 \sin(x^2) dx = \sin(x^2) - x^2 \cos(x^2), \\
 u &= J_0(2\sqrt{-\varphi}x) \quad du = -2\sqrt{-\varphi} J_1(2\sqrt{-\varphi}x), \\
 I5 &= J_0(2\sqrt{-\varphi}x) (\sin(x^2) - x^2 \cos(x^2)) \Big|_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} + \\
 &\quad + \int_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} (\sin(x^2) - x^2 \cos(x^2)) 2\sqrt{-\varphi} J_1(2\sqrt{-\varphi}x) dx = \\
 &= J_0(2\sqrt{-\varphi}x) (\sin(x^2) - x^2 \cos(x^2)) \Big|_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} + 2\sqrt{-\varphi} \left[ \int_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} \sin(x^2) J_1(2\sqrt{-\varphi}x) dx - \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} x^2 \cos(x^2) J_1(2\sqrt{-\varphi}x) dx \right] = J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}) (\sin(\varphi+\gamma) - (\varphi+\gamma) \cos(\varphi+\gamma)) - \\
 &\quad - J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}) \sin(\varphi+\gamma) + U_1 \left( 2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)} \right) \cos(\varphi+\gamma) + \\
 &\quad + U_2 \left( 2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)} \right) \sin(\varphi+\gamma) - \varphi \left[ U_2 \left( 2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)} \right) \cos(\varphi+\gamma) + \right. \\
 &\quad \left. + U_3 \left( 2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)} \right) \sin(\varphi+\gamma) \right] = \\
 &= U_1 \left( 2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)} \right) \cos(\varphi+\gamma) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +U_2\left(2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}\right)(\sin(\varphi+\gamma)+\varphi\cos(\varphi+\gamma))+ \\
& +\varphi U_3\left(2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}\right)\sin(\varphi+\gamma)-(\varphi+\gamma)\cos(\varphi+\gamma)J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}).
\end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned}
I7 &= (\varphi+\gamma)\sin(\varphi+\gamma)J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)})-U_1\left(2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}\right)\sin(\varphi+\gamma)+ \\
& +U_2\left(2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}\right)(\cos(\varphi+\gamma)-\varphi\sin(\varphi+\gamma))+ \\
& +\varphi U_3\left(2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}\right)\cos(\varphi+\gamma).
\end{aligned}$$

Рассмотрим  $I6 = \int_0^{\varphi+\gamma} a \sin(a) \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da$ . После аналогичной замены данный интеграл преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
I6 &= 2\sqrt{-\varphi} \int_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} x^2 \sin(x^2) J_1(2\sqrt{-\varphi}x) dx = \\
& = -\varphi \left( U_2\left(2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}\right)\sin(\varphi+\gamma) - U_3\left(2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}\right)\cos(\varphi+\gamma) \right).
\end{aligned}$$

Аналогично:

$$I8 = -\varphi \left( U_2\left(2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}\right)\cos(\varphi+\gamma) + U_3\left(2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}\right)\sin(\varphi+\gamma) \right).$$

В итоге получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 I1 = U_1 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \sin(\varphi + \gamma) - \\
 \quad - U_2 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \cos(\varphi + \gamma), \\
 I3 = U_1 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \cos(\varphi + \gamma) + \\
 \quad + U_2 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \sin(\varphi + \gamma), \\
 I2 = -J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \sin(\varphi + \gamma) + \\
 \quad + U_1 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \cos(\varphi + \gamma) + \\
 \quad + U_2 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \sin(\varphi + \gamma), \\
 I4 = -J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \cos(\varphi + \gamma) + 1 - \\
 \quad - U_1 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \sin(\varphi + \gamma) + \\
 \quad + U_2 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \cos(\varphi + \gamma), \\
 I5 = U_1 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \cos(\varphi + \gamma) + \\
 \quad + U_2 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) (\sin(\varphi + \gamma) + \varphi \cos(\varphi + \gamma)) + \\
 \quad + \varphi U_3 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \sin(\varphi + \gamma) - \\
 \quad - (\varphi + \gamma) \cos(\varphi + \gamma) J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}), \\
 I6 = -\varphi \left( U_2 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \sin(\varphi + \gamma) - \right. \\
 \quad \left. - U_3 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \cos(\varphi + \gamma) \right), \\
 I7 = (\varphi + \gamma) \sin(\varphi + \gamma) J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) - \\
 \quad - U_1 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \sin(\varphi + \gamma) + \\
 \quad + U_2 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) (\cos(\varphi + \gamma) - \varphi \sin(\varphi + \gamma)) + \\
 \quad + \varphi U_3 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \cos(\varphi + \gamma), \\
 I8 = -\varphi \left( U_2 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \cos(\varphi + \gamma) + \right. \\
 \quad \left. + U_3 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \sin(\varphi + \gamma) \right).
 \end{array} \right. \quad (12)$$

Подставим полученные  $I1 - I8$ . После простых преобразований получаем:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\varphi+\gamma} \sin \left( a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \left( J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da = \\
 & = -\frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) + \sin \left( \frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) - \sqrt{2} U_1 \left( 2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right), \\
 & \int_0^{\varphi+\gamma} \cos \left( a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \left( J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma\right) - \sqrt{2} U_2\left(2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}\right), \\
&\int_0^{\varphi+\gamma} (a - \varphi - \gamma) \sin\left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma\right) \left( J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da = \\
&= \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \right] U_1\left(2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} U_2\left(2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}\right) - \\
&\quad \varphi \sqrt{2} U_3\left(2(\varphi+\gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi+\gamma)}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma\right) (\varphi + \gamma).
\end{aligned}$$

Из соотношения  $P_x^{AO} = P_x^{AD} + P_x^{DO} = 0$  выразим  $\sigma_O$ , учитывая, что  $\varphi + \gamma = \psi$ :

$$\sigma_O = \frac{\frac{k}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) - 2k [U_1(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) - \varphi \sqrt{2} U_3(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi})]}{-\frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) - \sqrt{2} U_1(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi})}. \quad (13)$$

#### Нахождение силы волочения

Перейдем к нахождению среднего напряжения волочения. Для этого спроектируем все напряжения вдоль кривой  $OEB$  на ось  $x$ . Сумма всех проекций будет равна  $\frac{P}{2}$ .

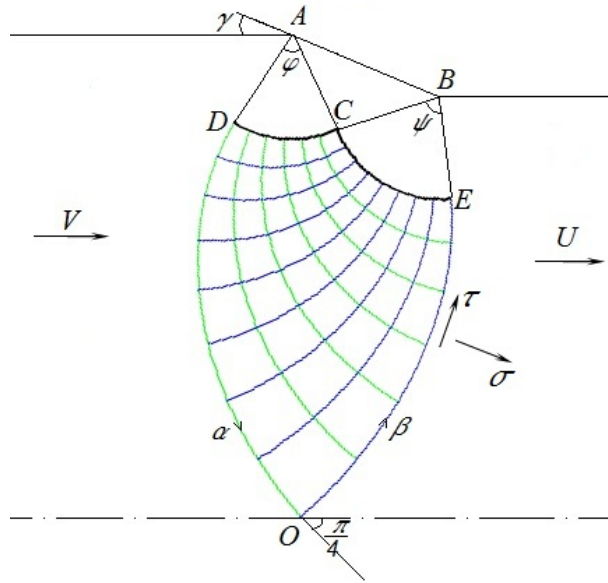


Рис. 11

Так как вдоль  $\beta$ -линии выполняются соотношения Генки, то взяв на  $\beta$ -линии произвольную точку  $M$ , получаем  $\eta = \frac{\sigma_M}{2k} + \theta_M$ , а в точке  $O$  это уравнение примет вид  $\eta = \frac{\sigma_O}{2k} + \theta_O$ . Приравняв последние два уравнения, получим:

$$\eta = \frac{\sigma_O}{2k} + \theta_O = \frac{\sigma_M}{2k} + \theta_M.$$

Известно, что  $\theta_O = -\frac{\pi}{4}$ . Подставляя это значения, получаем

$$\sigma_M = \sigma_O + 2k \left( -\theta - \frac{\pi}{4} \right).$$

В силу произвольности точки  $M$  можно записать  $\sigma_M = \sigma$  и следовательно:

$$\sigma = \sigma_O + 2k \left( -\theta - \frac{\pi}{4} \right).$$

Аналогично получаем:

$$\sigma_E = \sigma_O - 2k\varphi.$$

Проекция напряжений вдоль кривой  $OB$  на ось  $x_3O$  будет находиться по формуле (рис. 11):

$$P_x^{EB} = (\sigma_E \cos \theta_E - \tau \sin \theta_E) BE,$$

$$P_x^{\check{O}E} = \int_S (\sigma \cos \theta - \tau \sin \theta) dS = \int_S \left( \left[ \sigma_O + 2k \left( -\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] \cos \theta - \tau \sin \theta \right) dS.$$

Для перехода от криволинейного интеграла к определенному нам необходимо знать радиус кривизны вдоль  $\beta$ -линии.

Так как согласно [4]  $S$  удовлетворяет телеграфному уравнению (1), решение которого задётся формулой Римана, то получаем:

$$S(a, b) = S(0, 0) J_0 \left( 2\sqrt{ab} \right) + \int_0^a J_0 \left( 2\sqrt{(a-\alpha)b} \right) \frac{\partial S}{\partial \alpha} d\alpha + \int_0^b J_0 \left( 2\sqrt{a(b-\beta)} \right) \frac{\partial S}{\partial \beta} d\beta.$$

Как видно из (рис. 5):  $S(0, 0) = -R$ ,  $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -R$ ,  $\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0$ .

Получаем формулу для кривизны вдоль  $\beta$ -линии:

$$S(a, b) = -R \left( J_0(2\sqrt{ab}) + \frac{\sqrt{ab}}{b} J_1(2\sqrt{ab}) \right).$$

Для радиуса кривизны знак  $+$  или  $-$  соответствует положению центра кривизны по отношению к линии другого семейства [3]. Как было показано выше, радиус  $R = \frac{H-h}{2\sqrt{2} \sin \gamma} = BE$ .

При замене  $dS = S(\psi, b)db$  в криволинейном интеграле получаем:

$$\begin{aligned} P_x^{\check{O}E} &= BE \int_{-\varphi}^0 \left( \left[ \sigma_O + 2k(-b - \varphi) \right] \cos \left( b + \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \left( J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) - \right. \\ &\quad \left. - k \sin \left( b + \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \left( J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) \right) db, \\ P_x^{EB} &= \left( (\sigma_O - 2k\varphi) \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) - k \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right) BE. \end{aligned}$$

Так как  $P_x^{\check{O}E} + P_x^{EB} = \frac{P}{2}$ , получаем:

$$\frac{P}{2kh} = \frac{H-h}{2\sqrt{2} \sin \gamma} \left[ (\sigma_O - 2k\varphi) \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) - k \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) + \right.$$

$$+ \int_{-\varphi}^0 \left( [\sigma_O + 2k(-b - \varphi)] \cos \left( b + \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \left( J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) - \right. \\ \left. - k \sin \left( b + \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \left( J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) \right) db \Big].$$

Для нахождения искомой величины нам необходимо вычислить интегралы:

$$\int_{-\varphi}^0 \sin \left( b + \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \left( J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db, \\ \int_{-\varphi}^0 \cos \left( b + \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \left( J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db, \\ \int_{-\varphi}^0 b \sin \left( b + \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \left( J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db.$$

Поменяем местами пределы интегрирования и воспользуемся известными тригонометрическими формулами синуса и косинуса суммы углов. В итоге получим:

$$\int_{-\varphi}^0 \sin \left( b + \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \left( J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db = \\ = -\sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \left[ \int_0^{-\varphi} \cos(b) J_0(2\sqrt{\psi b}) db + \int_0^{-\varphi} \cos(b) \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) db \right] - \\ - \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \left[ \int_0^{-\varphi} \sin(b) J_0(2\sqrt{\psi b}) db + \int_0^{-\varphi} \sin(b) \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) db \right], \\ \int_{-\varphi}^0 \cos \left( b + \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \left( J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db = \\ = -\cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \left[ \int_0^{-\varphi} \cos(b) J_0(2\sqrt{\psi b}) db + \int_0^{-\varphi} \cos(b) \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) db \right] + \\ + \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \left[ \int_0^{-\varphi} \sin(b) J_0(2\sqrt{\psi b}) db + \int_0^{-\varphi} \sin(b) \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) db \right], \\ \int_{-\varphi}^0 b \sin \left( b + \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \left( J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db = \\ = -\cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \left[ \int_0^{-\varphi} b \cos(b) J_0(2\sqrt{\psi b}) db + \int_0^{-\varphi} b \cos(b) \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) db \right] +$$



$$+ \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left[ b \int_0^{-\varphi} \sin(b) J_0(2\sqrt{\psi b}) db + \int_0^{-\varphi} b \sin(b) \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) db \right].$$

Легко заметить, что в данных формулах все интегралы аналогичны интегралам  $I1 - I8$ . Подставим ранее полученное решение данных интегралов (12) и после приведения подобных получим:

$$\begin{aligned} & \int_{-\varphi}^0 \sin\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left( J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db = \\ & = -\frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) - \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} U_2(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}), \\ & \int_{-\varphi}^0 \cos\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left( J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) - \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} U_1(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}), \\ & \int_{-\varphi}^0 b \sin\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left( J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db = \\ & = \sqrt{2}\psi U_3(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) + U_1(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) + U_2(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) \right). \end{aligned}$$

Подставим полученные формулы в выражение  $\frac{P}{2kh} = \frac{P_x^{\check{O}E} + P_x^{\check{E}B}}{kh}$ . После упрощения получим:

$$\begin{aligned} \frac{P}{2kh} = & \left( \frac{H-h}{2\sqrt{2}kh \sin \gamma} \right) \left[ \sigma_O \left( \frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) - \sqrt{2} U_1(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) \right) + \right. \\ & \left. + 2k U_1(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) \left( \sqrt{2}\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 2\sqrt{2}\psi U_3(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) + \frac{k}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Построим график зависимости между средним напряжением волочения и относительным уменьшением толщины для различных значений угла раствора матрицы.

Легко заметить, что (рис. 12) идентичен представленному в [4].

### Обсуждение результатов

В ходе данной работы были получены скорости в четырехугольнике  $OCDE$  по решению задачи Гурса (5), уравнения линий скольжения с дуг окружностей в параметрическом виде (8), неявная зависимость для скоростей на линии непротекания  $u = v$  (6), формулы для определения угла раскрытия веера  $\varphi$  (угол  $DAC$ ) двух типов: из соотношений для скоростей (7) и для координат (10). Была получена аналитическая зависимость для среднего напряжения  $\sigma$  в точке  $O$  из граничных условий вдоль  $\alpha$ -линии  $ODA$  (13) (выполнение граничных условий в интегральном смысле). Была получена аналитическая формула для силы волочения (14). Попутно были вычислены интегралы, содержащие функции Бесселя, тригонометрические функции и степенные, в виде комбинаций функций Ломмеля от двух переменных (4), (12). Сравнение с численными расчетами показывают хорошую сходимость численных методов даже при небольшом числе точек разбиения.

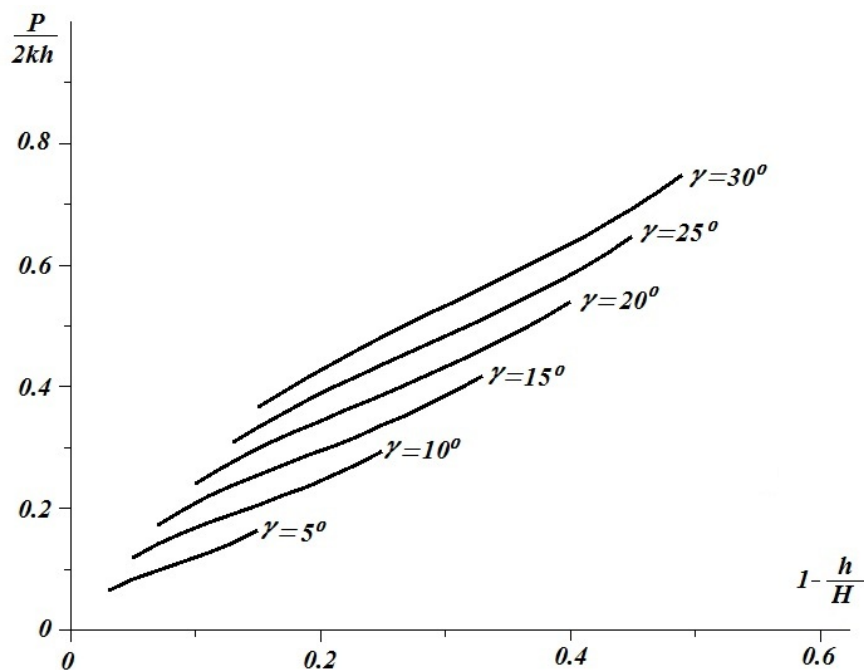


Рис. 12. График зависимости между средним напряжением волочения и относительным уменьшением толщины для различных значений угла раствора матрицы

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 136 с.
- [2] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
- [3] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.
- [4] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Наука, 1956. – 408 с.
- [5] *Чеботарев, А. С.* Интегрирование уравнений плоской деформации одной задачи теории идеальной пластичности / А. С. Чеботарев. – Воронеж : Вестник ВГУ. Серия Физика Математика. – № 2. – 2007. С. 198-204.
- [6] *Прудников, А. П.* Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Наука, 1983.
- [7] *Абрамовиц, М.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
- [8] *Быковцев, Г. И.* К теории волочения жесткопластической полосы через криволинейные матрицы / Г. И. Быковцев, Ю. М. Мяснянкин. – Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр., 1964. – №3. – С. 113-116.
- [9] *Ватсон, Г. Н.* Теория Бесселевых функций. Часть первая / Г. Н. Ватсон. – М. : Издательство иностранной литературы, 1949. – 798 с.

I. N. Zinovjev, A. S. Chebotarev

## TO THE QUESTION OF DRAWING A STRAIGHT THROUGH BAND MATRIX

*Voronezh State University*

**Abstract.** Intense-deformed condition was searched under linear matrix at drawing stripe. The analytical equations were obtained for the slip lines, velocities along the characteristics, tensions in the plastic zone and the maximum drawing force. We showed that the derived analytical formulae correspond to the numerical calculations.

**Keywords:** ideal plasticity, plane strain, the limit fluidity, drawing the strip, slip lines, the power of drawing.

*Зиновьев Илья Николаевич*

*студент магистратуры 1 курса кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** bekiz@email.ru

*Чеботарёв Андрей Сергеевич*

*кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** xeba@amm.vsu.ru

*Zinovjev Ilya Nikolaevich*

*Graduate student 1st course, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh*

*Chebotarev Andrey Sergeevich*

*Candidate of Phys. And Math., Assoc. Professor, Voronezh State University, Voronezh*

## ОБ ОДНОМ ВИДЕ АНИЗОТРОПИИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева

**Аннотация.** В работе рассматривается случай анизотропии при кручении призматических стержней, при которой имеет место зависимость между параметрами ориентации анизотропии. В отличие от работы [1], параметры анизотропии не предполагаются постоянными.

**Ключевые слова:** напряжение, идеальная пластичность, кручение, трансляционная анизотропия, параметры анизотропии.

УДК: 539.374

1. Уравнения равновесия кручения призматических стержней, боковая поверхность которых свободна от напряжений, имеет вид

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  – компоненты напряжений в плоскости поперечного сечения стержня.

Условие предельного состояния запишем в виде

$$(\tau_x - s_x)^2 + (\tau_y - s_y)^2 = k_1^2, k_1 - const, \quad (2)$$

где  $s_x$ ,  $s_y$  – параметры анизотропии,  $k_1$  – предел текучести при сдвиге.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинами и отнесем все величины, имеющие размерность напряжений, к некоторой характерной величине  $k$ . Сохраним обозначения для  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $s_x$ ,  $s_y$ . Условие (2) примет вид

$$(\tau_x - s_x)^2 + (\tau_y - s_y)^2 = k_1^2. \quad (3)$$

Положим

$$\tau_x = k(\theta) \cos \theta, \quad \tau_y = k(\theta) \sin \theta, \quad \frac{\tau_y}{\tau_x} = tg \theta. \quad (4)$$

Из (3), (4) получим

$$k^2(\theta) - 2k(\theta)(s_x \cos(\theta) + s_y \sin(\theta)) - T^2 = 0, \quad (5)$$

где

$$T^2 = 1 - s_x^2 - s_y^2, \quad s_x^2 + s_y^2 = s^2 = k_2.$$

Положим

$$s_x = s(\varphi) \cos \varphi, \quad s_y = s(\varphi) \sin \varphi, \quad \left( \frac{s_y}{s_x} = tg \varphi \right). \quad (6)$$

В дальнейшем положим

$$\varphi = \varphi(\theta). \quad (7)$$

Соотношение (5) с учетом (6) запишем в виде

$$k^2(\theta) - 2k(\theta)s(\varphi) \cos(\theta - \varphi) - T^2 = 0. \quad (8)$$

Из (8) получим

$$k(\theta) = s(\varphi) \cos(\theta - \varphi) \pm \sqrt{s^2 \cos^2(\theta - \varphi) + T^2}. \quad (9)$$

В дальнейшем в выражении (9) ограничимся верхним знаком, так как предел текучести  $k(\theta) > 0$ .

Из (1), (4) получим

$$(k' \cos \theta - k(\theta) \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} + (k' \sin \theta + k(\theta) \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad k' = \frac{dk}{d\theta}, \quad (10)$$

где согласно (9)

$$k'(\theta) = \frac{dk}{d\theta} = \frac{ds(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\theta} \cos(\theta - \varphi) - s(\varphi) \sin(\theta - \varphi) - \frac{\sqrt{2} \frac{d\varphi}{d\theta} 2s(\varphi) \cos^2(\theta - \varphi) - s^2(\varphi) \sin 2(\theta - \varphi)}{\sqrt{2 - s^2(\varphi)(1 - \cos 2(\theta - \varphi))}}, \quad (11)$$

из (11) следует

$$\frac{dx}{k' \cos \theta - k(\theta) \sin \theta} = \frac{dy}{k' \sin \theta + k(\theta) \cos \theta} = \frac{d\theta}{0}. \quad (12)$$

Из (12) определим

$$y = \frac{k' \sin \theta + k(\theta) \cos \theta}{k' \cos \theta - k(\theta) \sin \theta} x + C, \quad \text{где } C - const.$$

В качестве примера рассмотрим случай

$$\varphi = \theta + \mu, \quad \text{где } \mu - const. \quad (13)$$

Из (11), (13) следует

$$\frac{dy}{dx} = -ctg(\theta - \Phi), \quad tg\Phi = \frac{\sin \alpha \sin \mu}{\sin \alpha \cos \mu + \cos \alpha}, \quad tg\alpha = \frac{k_2}{k_1}. \quad (14)$$

Угол  $\theta$  – определяет угол наклона касательной к контуру  $L$  призматического стержня, величина  $\Phi$  определяется согласно  $\alpha$  и  $\mu$ , таким образом, прямые характеристик

$$y = -ctg(\theta - \Phi)x + const \quad (15)$$

могут быть определены.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 576–579.

*B. G. Mironov, S. V. Tixonov*

## ABOUT ONE TYPE OF ANISOTROPY AT TORSION

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** In work the anisotropy case is considered at torsion of prismatic cores at which dependence between parameters of orientation of anisotropy takes place. Unlike work [1], parameters of anisotropy aren't assumed as constants.

**Keywords:** tension, ideal plasticity, torsion, transmitting anisotropy, anisotropy parameters.

*Миронов Борис Гурьевич*

*доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

**e-mail:** strangcheb@mail.ru

*Тихонов Сергей Владимирович*

*кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

**e-mail:** strangcheb@mail.ru

*Mironov, Boris Guryevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Tixonov, Sergey Vladimirovich*

*Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

Е. Е. Кузнецов, Н. М. Матченко

## О СИНГУЛЯРНОСТИ ПОТЕНЦИАЛА КЛАССИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНО УПРУГОГО ТЕЛА

Тулский государственный университет

**Аннотация.** Доказана сингулярность трехмерного векторного пространства главных напряжений. Показано, что гипотеза о непрерывности потенциала линейно упругого тела является некорректной.

**Ключевые слова:** тензор напряжения, главные напряжения, кратность главных напряжений, плоскости сингулярности, ребра сингулярности, упругий потенциал Гука.

УДК: 539.375

1. Напряженное состояние деформируемого твердого тела, отнесенного к лабораторной декартовой системе координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), характеризуется тензором напряжения  $\sigma_{ij}$ . Напряженное состояние также характеризуется главными напряжениями  $\bar{\sigma}_i$  и триэдром главных направлений.

*Теорема.* Трехмерное векторное пространство главных напряжений является сингулярным.

Наряду с неупорядоченными главными напряжениями  $\sigma_i$  введем ранжированные (упорядоченные) главные напряжения  $\sigma_i^r$ . Условие ранжирования примем в виде неравенств  $\sigma_1^r \geq \sigma_2^r \geq \sigma_3^r$ .

Для ранжированных главных напряжений справедливы зависимости [4]

$$\sigma_1^r = \sigma + \left(1 - \frac{1}{3}\mu\right)T, \quad \sigma_2^r = \sigma + \frac{2}{3}\mu T, \quad \sigma_3^r = \sigma - \left(1 + \frac{1}{3}\mu\right)T, \quad (1.1)$$

где  $\sigma = (\sigma_1^r + \sigma_2^r + \sigma_3^r)/3$  – среднее напряжение,  $T = (\sigma_1^r - \sigma_3^r)/2$  – максимальное касательное напряжение,  $\mu = (2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r)(\sigma_1^r - \sigma_3^r)^{-1}$  – параметр Лоде, который изменяется в пределах  $-1 \leq \mu \leq 1$ .

Компоненты тензора напряжения  $\sigma_{ij}$  связаны с ранжированными главными напряжениями соотношениями

$$\sigma_{ij} = \sum_{s=1}^3 \sigma_s^r n_{si} n_{sj}, \quad (1.2)$$

где  $n_{sj}$  – направляющие косинусы ранжированных главных напряжений. Направляющие косинусы  $n_{sj}$  являются функциями трех углов, определяющих ориентацию орта ранжированных главных напряжений, относительно лабораторной системы координат  $x_i$ . Девять направляющих косинусов связаны шестью уравнениями ортогональности

$$n_{ik} n_{jk} = \delta_{ij} \quad \text{или} \quad n_{ik} n_{kj} = \delta_{ij}, \quad (1.3)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Поступила 10.03.2011

Подставляя (1.1) в (1.2), получим

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + \alpha_{ij} M_1 + \beta_{ij} M_3, \quad (1.4)$$

где

$$M_1 = (1 - \mu)T, \quad M_3 = (1 + \mu)T, \quad \alpha_{ij} = \delta_{ij}/3 + n_{1i}n_{1j}, \quad \beta_{ij} = \delta_{ij}/3 - n_{3i}n_{3j}. \quad (1.5)$$

Из (1.4) следует, что, компоненты тензора напряжения  $\sigma_{ij}$  однозначно определяются шестью параметрами: тремя инвариантами  $\sigma$ ,  $M_1$ ,  $M_3$  и тремя углами, задающими направление ранжированных главных напряжений.

В трехмерном векторном пространстве главных напряжений через ось среднего напряжения и оси векторов главных напряжений проведем три плоскости. Эти плоскости разделяют векторное пространство главных напряжений на шесть сегментов. Поскольку на этих плоскостях выполняются условия кратности главных напряжений, то плоскости, разделяющие векторное пространство главных напряжений на сегменты, будем называть плоскостями кратности или плоскостями сингулярности.

В свою очередь, ось среднего напряжения делит каждую из плоскостей сингулярности на полуплоскости сингулярности.

На полуплоскостях сингулярности выполняется одно из условий

$$1 + \mu = 0, \quad \text{или} \quad \sigma_2^r = \sigma_3^r, \quad \text{или} \quad M_3 = 0 \quad (1.6)$$

и

$$1 - \mu = 0, \quad \text{или} \quad \sigma_2^r = \sigma_1^r, \quad M_1 = 0. \quad (1.7)$$

Таким образом, на полуплоскостях сингулярности промежуточное главное напряжение является кратным.

Величина промежуточного главного напряжения определяется из условия равенства нулю матрицы

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_2^r & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_2^r & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_2^r \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Поскольку главное напряжение  $\sigma_2^r$  является кратным, то ранг матрицы (1.1) равен единице и все ее миноры равны нулю [3]:

$$(\sigma_{11} - \sigma_2^r)(\sigma_{22} - \sigma_2^r) = \sigma_{12}^2, \quad (\sigma_{22} - \sigma_2^r)(\sigma_{33} - \sigma_2^r) = \sigma_{23}^2, \quad (\sigma_{11} - \sigma_2^r)(\sigma_{33} - \sigma_2^r) = \sigma_{13}^2; \quad (1.9)$$

$$(\sigma_{11} - \sigma_2^r)\sigma_{23} = \sigma_{12}\sigma_{13}, \quad (\sigma_{22} - \sigma_2^r)\sigma_{13} = \sigma_{12}\sigma_{23}, \quad (\sigma_{33} - \sigma_2^r)\sigma_{12} = \sigma_{13}\sigma_{23}. \quad (1.10)$$

В соотношениях (1.9) и (1.10) независимыми являются любые из трех соотношений. Например, если попарно перемножить левые и правые части соотношений (1.10), то получим зависимости (1.9).

Исключая из (1.10) девиаторную часть промежуточное собственное значение  $\sigma_2^r$ , получим два условия совместности компонент тензора девиатора  $\sigma'_{ij}$

$$\sigma'_{11} - \frac{\sigma_{12}\sigma_{13}}{\sigma_{23}} = \sigma'_{22} - \frac{\sigma_{12}\sigma_{23}}{\sigma_{13}} = \sigma'_{33} - \frac{\sigma_{13}\sigma_{23}}{\sigma_{12}}, \quad (1.11)$$

где  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma$ ,  $\sigma = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$ .

На полуплоскостях сингулярности компоненты тензора напряжения вычисляются по формулам



$$\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + 2(\delta_{ij}/3 + n_{1i}n_{1j})T \quad (1.12)$$

или

$$\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + 2(\delta_{ij}/3 - n_{3i}n_{3j})T. \quad (1.13)$$

При подстановке (1.12) и (1.13) в уравнения (1.9), (1.10) или (1.11) последние удовлетворяются тождественно.

На полуплоскостях кратности главных напряжений независимых характеристик тензора  $\sigma_{ij}$  остается только четыре:  $\sigma$ ,  $T$  и два угла, задающих направление напряжения  $\vec{\sigma}_1^T$  или  $\vec{\sigma}_3^T$ .

Заметим, что *сингулярность трехмерного векторного пространства главных напряжений является топологическим свойством и не зависит ни от класса симметрии деформируемого твердого тела, ни его механических свойств.*

*Следствие.* Поскольку векторное пространство главных напряжений разделяется плоскостями сингулярности на шесть сегментов, то построение непрерывных потенциальных функций компонент тензора девиатора напряжения возможно только в пределах каждого из сегментов.

**2.** Модель классического линейно упругого изотропного тела [1], подчиняющегося закону Гука, предполагает существование потенциала деформирования

$$U = U(\sigma_i) \quad (2.1).$$

Причем

$$U = \frac{\sigma^2}{2K} + \frac{1}{12G}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2], \quad (2.2)$$

где  $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$  – среднее напряжение,  $K$  и  $G$  – механические характеристики упругих свойств материала.

В линейной теории упругости связь между напряжениями и деформациями определяются соотношениями [1]

$$e_i = \frac{\partial U}{\partial \sigma_i} = \frac{\sigma}{3K} + \frac{1}{2G}(\sigma_i - \sigma), \quad (2.3)$$

где  $e_i$  – главные деформации.

Получение соотношений (2.3) основано на предположении, что потенциальная функция  $U$  во всем пространстве главных напряжений является гладкой и непрерывной.

*Теорема.* В силу наличия в пространстве главных напряжений плоскостей сингулярности предположение о непрерывности потенциала  $U$  является некорректным.

Рассмотрим напряженное состояние, соответствующее плоскости сингулярности, на которой

$$\sigma_2 = \sigma_3. \quad (2.4)$$

Последовательно заменяя в потенциале (2.2) напряжения  $\sigma_3$  на  $\sigma_2$  и наоборот, на плоскости кратности получим два значения потенциальной функции

$$U = U^{(12)}, \quad U = U^{(13)}, \quad (2.5)$$

где

$$U^{(12)} = \frac{\sigma^2}{2K} + \frac{1}{6G}(\sigma_1 - \sigma_2)^2, \quad U^{(13)} = \frac{\sigma^2}{2K} + \frac{1}{6G}(\sigma_1 - \sigma_3)^2. \quad (2.6)$$

Связь между напряжениями и деформациями в этом случае определяется соотношениями

$$e_i = \frac{\partial U}{\partial \sigma_i} = \frac{\sigma}{K} + \lambda \frac{\partial U^{(12)}}{\partial \sigma_i} + \lambda_* \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \sigma_i}, \quad (2.7)$$

где  $\lambda, \lambda_*$  – множители Лагранжа. Причем  $\lambda \geq 0, \lambda_* \geq 0, \lambda + \lambda_* = 1$ .

Отсюда, с учетом (2.4), следует

$$\begin{aligned} e &= \frac{\sigma}{3K}, \quad e_1 - e = \frac{1}{3G}[\lambda(\sigma_1 - \sigma_2) + (1 - \lambda)(\sigma_1 - \sigma_3)], \\ e_2 - e &= -\frac{\lambda}{3G}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad e_3 - e = -\frac{1 - \lambda}{3G}(\sigma_1 - \sigma_3), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $e = (e_1 + e_2 + e_3)/3$  – средняя деформация.

Соотношениям (2.8) можно придать вид

$$e = \frac{\sigma}{3K}, \quad e_1 - e = \frac{T}{3G}, \quad e_2 - e = -\frac{\lambda}{3G}T, \quad e_3 - e = -\frac{1 - \lambda}{3G}T. \quad (2.9)$$

Таким образом, для потенциальной поверхности  $U$ , соответствующей закону Гука, имеются две замкнутые системы уравнений, описывающих поведение линейно упругой среды. Одна система уравнений, в сегментах между плоскостями кратности, соответствует гладким участкам поверхности  $U$ , вторая – принадлежит плоскостям кратности главных напряжений.

Множитель Лагранжа  $\lambda$  не определен в рамках связи напряжений и деформаций, а определяется в процессе решения краевых задач.

**3.** На плоскостях сингулярности компоненты тензора напряжения  $\sigma_{ij}$  должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (3.1)$$

Здесь и далее запятая перед индексом обозначает частную производную по координате лабораторной системы координат с этим индексом.

Подставляя (1.12) и (1.13) в уравнения равновесия, получим

$$\sigma_{,i} - n_{si}n_{sj}\delta_s T_{,i} - (n_{sj,1}n_{si,j} + n_{si}n_{sj,j})\delta_s T = 0. \quad (3.2)$$

К уравнениям (3.2) необходимо добавить уравнения ортогональности направляющих косинусов

$$n_{s1}^2 + n_{s2}^2 + n_{s3}^2 = 0. \quad (3.3)$$

Поскольку среда изотропная, то на плоскостях сингулярности условие изотропии сводится к совпадению главного напряжения  $\sigma_s^r$  и главной деформации  $e_s^r$

$$e_s = e_{1j} \frac{n_{sj}}{n_{s1}} = e_{2j} \frac{n_{sj}}{n_{s2}} = e_{3j} \frac{n_{sj}}{n_{s3}} = \frac{\sigma}{3K} + \frac{T}{3G}. \quad (3.4)$$

Компоненты тензора деформации  $e_{ij}$  выражаются через компоненты вектора перемещения  $\vec{u}$  соотношениями Коши

$$e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2. \quad (3.5)$$

Подставляя (3.5) в зависимость между средним напряжением и деформацией (2.8) и в соотношения (3.4), запишем

$$u_{i,j}\delta_{ij} = \frac{\sigma}{3K}, \quad (u_{1,j} + u_{j,1}) \frac{n_{sj}}{n_{s1}} = (u_{2,j} + u_{j,2}) \frac{n_{sj}}{n_{s2}} = (u_{3,j} + u_{j,3}) \frac{n_{sj}}{n_{s3}} = \frac{2}{3} \left( \frac{\sigma}{K} + \frac{T}{G} \right). \quad (3.6)$$

Системы уравнений (3.2), (3.3) и (3.6) связывают неизвестные  $\sigma, T, n_{si}$  и  $u_i$ .

Аналогичные уравнения были получены Д.Д. Ивлевым [2] при использовании кусочно-линейного потенциала.

Таким образом, к классическим уравнениям линейной теории упругости необходимо добавить уравнения на плоскостях сингулярности.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Безухов, Н. И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – М. : Высш. школа, 1961. – 534 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* О математическом описании поведения изотропного тела при помощи кусочно линейного потенциала / Д. Д. Ивлев // ПММ. – 1961. – Т. 25, № 5. – С. 897–905.
- [3] *Курош, А. Г.* Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Гостехтеоретиздат, 1952. – 335 с.
- [4] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. школа, 1969. – 608 с.

*Y. Y. Kuznetsov, N. M. Mattchenko*

### ABOUT SINGULARITY POTENTIAL OF CLASSICAL LINEARLY ELASTIC BODY

*Tula State University*

**Abstract.** The singularity of three-dimensional vector space of the main stresses is proved. It is shown, that the hypothesis about a continuity of potential of linearly elastic body is incorrect.

**Keywords:** tensor stress, the main stress, frequency rate of the main stresses, singularity planes, the singular edges, elastic potential of Hooks.

*Кузнецов Евгений Евгеньевич*

*кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: ekc\_05@mail.ru*

*Матченко Николай Михайлович*

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: ekc\_05@mail.ru*

*Kuznetsov, Yevgeniy Yevgenyevich*

*Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Building, Building Materials and Designs, Tula State University, Tula*

*Mattchenko, Nikolay Mihaylovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Mathematical Modeling, Tula State University, Tula*

Ю. Н. Радаев

## „КОНЕЧНЫЕ“ ДВОЯКО-СТОХАСТИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ АЗИМУТАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В ДЛИННОМ ВОЛНОВОДЕ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН*

**Аннотация.** Квадраты азимутальных чисел связанных термоупругих волн, распространяющихся вдоль длинного волновода с круговым поперечным сечением, представляют собой собственные значения полупериодической и периодической краевых задач для дифференциального уравнения, определяющего окружные формы волн. Хорошо известно, что они равны квадратам целых чисел. „Конечные“ двояко-стохастические возмущения азимутальных чисел термоупругих волн в длинном волноводе наблюдаются при переходе от круговой геометрии волновода к эллиптической, характеризуемой величиной фокусного расстояния. „Окружные“ формы волн при этом удовлетворяют дифференциальному уравнению Матье. Классическая периодическая и полупериодическая задачи Штурма–Лиувилля для дифференциального уравнения Матье приводятся к *одной* спектральной задаче для линейного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве бесконечных квадратично суммируемых двусторонних последовательностей. Указанный оператор затем расщепляется в сумму диагонального оператора и одного бесконечномерного симметричного двояко-стохастического оператора, возмущающего диагональный оператор. С помощью овалов Кассини получены двусторонние оценки возмущенных азимутальных чисел в зависимости от параметра „конечного“ возмущения, позволяющие достаточно точно их локализовать с целью последующего более эффективного применения численных методов расчета связанного термоупругого волнового поля в длинном цилиндрическом волноводе.

**Ключевые слова:** термоупругость, дифференциальное уравнение Матье, функции Матье, азимутальное число, волновое число, спектральная задача, диагонализация, овал Кассини, двояко-стохастическая матрица.

УДК: 539.374

Работа посвящена проблеме локализации азимутальных чисел связанных термоупругих волн третьего типа (GNIII), распространяющихся вдоль цилиндрического волновода эллиптического поперечного сечения. В статье [1] волновое поле было представлено в координатах эллиптического цилиндра через волновые потенциалы, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца.

Один из возможных подходов к вычислению эллиптических азимутальных чисел и „окружных“ форм волн рассматривался в публикации [2].

---

Поступила 30.04.2012

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00184-а „Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости“)*

1. Волновые потенциалы термоупругой волны третьего типа в волноводе эллиптического сечения

Введем в пространстве ортогональные криволинейные координаты эллиптического цилиндра  $u, v, z$  согласно ( $2c$  — расстояние между фокусами эллипса,  $u$  — „радиальная“ координата,  $v$  — „угловая“ координата,<sup>1</sup>  $z$  — вертикальная координата)

$$x_1 = c \operatorname{ch} u \cos v, \quad x_2 = c \operatorname{sh} u \sin v, \quad x_3 = z. \quad (1)$$

Физические компоненты векторов и тензоров относительно координат эллиптического цилиндра (1) будем заключать в треугольные скобки.

Для сокращения записи уравнений введем следующее обозначение:

$$\sqrt{\phantom{x}} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v}. \quad (2)$$

Заметим также, что выполняется равенство

$$\sqrt{\phantom{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\operatorname{ch} 2u - \cos 2v}.$$

Физические компоненты тензора деформаций и напряжений в координатах эллиптического цилиндра вычисляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\langle uu \rangle} &= \frac{1}{c\sqrt{\phantom{x}}} \frac{\partial u_{\langle u \rangle}}{\partial u} + \frac{u_{\langle v \rangle}}{c\sqrt{3}} \sin v \cos v, & \varepsilon_{\langle vv \rangle} &= \frac{1}{c\sqrt{\phantom{x}}} \frac{\partial u_{\langle v \rangle}}{\partial v} + \frac{u_{\langle u \rangle}}{c\sqrt{3}} \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u, \\ \varepsilon_{\langle zz \rangle} &= \frac{\partial z}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{\langle vz \rangle} &= \frac{1}{c\sqrt{\phantom{x}}} \frac{\partial u_{\langle z \rangle}}{\partial v} + \frac{\partial u_{\langle v \rangle}}{\partial z}, & 2\varepsilon_{\langle uz \rangle} &= \frac{1}{c\sqrt{\phantom{x}}} \frac{\partial u_{\langle z \rangle}}{\partial u} + \frac{\partial u_{\langle u \rangle}}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{\langle uv \rangle} &= \frac{1}{c\sqrt{\phantom{x}}} \left( \frac{\partial u_{\langle v \rangle}}{\partial u} + \frac{\partial u_{\langle u \rangle}}{\partial v} \right) - \frac{u_{\langle u \rangle}}{c\sqrt{3}} \sin v \cos v - \frac{u_{\langle v \rangle}}{c\sqrt{3}} \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\langle uu \rangle} &= \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{\langle uu \rangle} - \alpha \theta, & \sigma_{\langle vv \rangle} &= \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{\langle vv \rangle} - \alpha \theta, \\ \sigma_{\langle zz \rangle} &= \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{\langle zz \rangle} - \alpha \theta, & \sigma_{\langle uv \rangle} &= 2\mu \varepsilon_{\langle uv \rangle}, \\ \sigma_{\langle uz \rangle} &= 2\mu \varepsilon_{\langle uz \rangle}, & \sigma_{\langle vz \rangle} &= 2\mu \varepsilon_{\langle vz \rangle}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\lambda, \mu$  — упругие постоянные Ламе (для изотермической деформации);  $\alpha$  — термомеханическая постоянная ( $\alpha = 1/3(3\lambda + 2\mu)\beta^*$ );  $\beta^*$  — коэффициент объемного теплового расширения;  $\theta$  — абсолютная температура, точнее, ее превышение (инкремент) над отсчетной (референциальной) температурой  $\theta_0$ ; дилатация  $\varepsilon$  вычисляется, как обычно, по формуле

$$\varepsilon = \varepsilon_{\langle uu \rangle} + \varepsilon_{\langle vv \rangle} + \varepsilon_{\langle zz \rangle}. \quad (5)$$

В случае волны, распространяющейся вдоль волновода (т. е. вдоль координатной оси  $z$ ), для повторного дифференцирования по вертикальной координате имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -k^2,$$

где  $k$  — волновое число (постоянная распространения) связанной термоупругой волны.

Физические компоненты поля перемещений могут быть выражены, следуя [1], с помощью формул ( $C_1, C_2, C'_1, C'_2$  — произвольные постоянные;  $k_\perp$  — волновое число поперечной упругой

<sup>1</sup> „Угловая“ эллиптическая координата при  $c \neq 0$  в действительности никогда не является углом между радиус-вектором, проведенным в текущую точку эллипса, и горизонтальной осью  $x_1$ .

волны)

$$\begin{aligned} u_{<u>} &= \frac{1}{c\sqrt{f}} \left\{ C'_1 a_1 \frac{\partial}{\partial u} \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \frac{\partial}{\partial u} \Omega|_{\gamma=\gamma_2} \pm ikC_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} + k_{\perp} C_2 \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\}, \\ u_{<v>} &= \frac{1}{c\sqrt{f}} \left\{ C'_1 a_1 \frac{\partial}{\partial v} \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \frac{\partial}{\partial v} \Omega|_{\gamma=\gamma_2} \pm ikC_1 \frac{\partial \psi}{\partial v} - k_{\perp} C_2 \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\}, \\ u_{<z>} &= \pm ik(C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) - C_1(k^2 - k_{\perp}^2)\psi. \end{aligned} \quad (6)$$

Для термоупругой волны третьего типа амплитуда скалярного потенциала  $\Phi$  и комплексная амплитуда температуры  $\Theta$  связаны и выражаются через один скалярный потенциал  $\Omega$  согласно

$$\Phi = a\Omega, \quad \Theta = b\Omega; \quad (7)$$

при этом постоянные  $a$  и  $b$  могут принимать в точности два различных значения

$$a_j = p_j^2 - g^2, \quad b_j = h \frac{\omega \alpha}{\Lambda_*} \gamma_j^2 \quad (j = 1, 2), \quad (8)$$

где мы вводим следующие обозначения:

$$\begin{aligned} p_j^2 &= k^2 - \gamma_j^2, \quad g^2 = k^2 - hh_2^2 h_3^{-2} k_{\parallel}^2, \quad h = h_3^2 \frac{1 + ih_3^2}{1 + h_3^4}, \\ h_2^2 &= \frac{c_l^2}{l^2}, \quad h_3^2 = \frac{\Lambda_* \omega}{\Lambda}, \quad l^{-2} = \frac{\kappa}{\Lambda}; \end{aligned}$$

$\omega$  — циклическая частота;  $c_l$  — скорость продольной упругой волны;  $k_{\parallel}^2$  — квадрат волнового числа чисто упругой продольной волны;  $\kappa$  — теплоемкость (на единицу объема) при отсутствии деформации;  $\Lambda_*$  — коэффициент теплопроводности;  $\Lambda$  — характерная скорость теплопроводности (thermal conductivity rate); постоянные  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ) имеют смысл волновых чисел плоских монохроматических термоупругих волн третьего типа и определяются ниже.

Потенциал  $\Omega$  удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Omega + \gamma^2 \Omega = 0 \quad (\gamma = \gamma_1, \gamma_2). \quad (9)$$

Потенциалы  $\psi$  и  $\chi$  удовлетворяют скалярному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} + k_{\perp}^2 \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \quad (10)$$

Для нахождения волновых чисел плоских монохроматических термоупругих волн третьего типа  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ) можно получить биквадратное уравнение

$$\frac{\gamma^4}{k_{\parallel}^4} (ih_3^2 - 1) + \frac{\gamma^2}{k_{\parallel}^2} (h_1^2 - ih_3^2) - h_2^2 = 0, \quad h_1^2 = 1 + h_2^2 + \frac{\alpha^2}{\rho \Lambda}. \quad (11)$$

Квадраты указанных волновых чисел, следовательно, вычисляются в виде

$$\frac{2\gamma^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + \sqrt{(h_1^2 - ih_3^2)^2 + 4h_2^2(ih_3^2 - 1)}}{ih_3^2 - 1}.$$

Извлекая квадратный корень, приходим к выражению

$$2 \frac{\gamma^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + a_{1,2} + ib_{1,2}}{ih_3^2 - 1}, \quad (12)$$

где  $a_{1,2}$  и  $b_{1,2}$  вычисляются согласно

$$a_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2 + \sqrt{(h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2)^2 + 4h_3^4(2h_2^2 - h_1^2)^2}}{2}}, \quad (13)$$

$$b_{1,2} = \frac{h_3^2(2h_2^2 - h_1^2)}{a_{1,2}}.$$

Выражения для самих волновых чисел  $\gamma$  будут следующими:

$$\sqrt{2(h_3^4 + 1)} \frac{\gamma}{k_{\parallel}} = a'_{1,2;3,4} + ib'_{1,2;3,4}, \quad (14)$$

где введены обозначения

$$a'_{1,2;3,4} = \pm \sqrt{\frac{S^2 + b_{1,2}h_3^2 - a_{1,2} + \sqrt{(S^2 + b_{1,2}h_3^2 - a_{1,2})^2 + (T^2 - a_{1,2}h_3^2 - b_{1,2})^2}}{2}} \quad (15)$$

$$b'_{1,2;3,4} = \frac{T^2 - a_{1,2}h_3^2 - b_{1,2}}{2a_{1,2;3,4}},$$

при этом  $S^2$  и  $T^2$  выражаются на основании формул

$$\begin{aligned} S^2 &= h_3^4 + h_1^2, \\ T^2 &= h_3^2(h_1^2 - 1). \end{aligned} \quad (16)$$

Физические компоненты тензора напряжений определяются на основании формул

$$\begin{aligned} \sigma_{\langle uu \rangle} &= -\lambda k_{\parallel}^2 (C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) - \mu \frac{\text{sh}2u}{c^2 \sqrt{4}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} A \pm ikC_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} + k_{\perp} C_2 \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\} + \\ &\quad + \mu \frac{\sin 2v}{c^2 \sqrt{4}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} A \pm ikC_1 \frac{\partial \psi}{\partial v} - k_{\perp} C_2 \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\} + \\ &\quad + 2\mu \frac{1}{c^2 \sqrt{2}} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} A \pm ikC_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + k_{\perp} C_2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial u \partial v} \right\}, \\ \sigma_{\langle uv \rangle} &= -\mu \frac{\sin 2v}{c^2 \sqrt{4}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) \pm ikC_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} + k_{\perp} C_2 \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\} - \\ &\quad - \mu \frac{\text{sh}2u}{c^2 \sqrt{4}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} (C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) \pm ikC_1 \frac{\partial \psi}{\partial v} - k_{\perp} C_2 \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\} + \\ &\quad + \mu \frac{1}{c^2 \sqrt{2}} \left\{ 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) \pm 2ikC_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + k_{\perp} C_2 \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} \right) \right\}, \\ \sigma_{\langle vv \rangle} &= -\lambda k_{\parallel}^2 (C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) - \mu \frac{\sin 2v}{c^2 \sqrt{4}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} A \pm ikC_1 \frac{\partial \psi}{\partial v} - k_{\perp} C_2 \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\} + \\ &\quad + \mu \frac{\text{sh}2u}{c^2 \sqrt{4}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} A \pm ikC_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} + k_{\perp} C_2 \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\} + \\ &\quad + 2\mu \frac{1}{c^2 \sqrt{2}} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial v^2} A \pm ikC_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - k_{\perp} C_2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial u \partial v} \right\}, \\ \sigma_{\langle uz \rangle} &= \mu \frac{1}{c \sqrt{v}} \left\{ \pm 2ik \frac{\partial}{\partial u} (C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) - C_1 (2k^2 - k_{\perp}^2) \frac{\partial \psi}{\partial u} \mp ikk_{\perp} C_2 \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\}, \\ \sigma_{\langle vz \rangle} &= \mu \frac{1}{c \sqrt{v}} \left\{ \pm 2ik \frac{\partial}{\partial v} (C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) - C_1 (2k^2 - k_{\perp}^2) \frac{\partial \psi}{\partial v} \mp ikk_{\perp} C_2 \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\}, \\ \sigma_{\langle zz \rangle} &= -2\mu \left[ (k^2 - k_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}k_{\perp}^2) (C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) \pm ikC_1 (k^2 - k_{\perp}^2) \psi \right]. \end{aligned}$$

В формулах для физических компонент тензора напряжений введено обозначение

$$A = C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2},$$

помогающее записать их в более или менее обзримой форме.

2. Дифференциальное уравнение Матье и эллиптические азимуты волнового поля

Отделение „угловой“ координаты в волновых потенциалах приводит к угловым („окружным“) гармоникам, зависящим только от „угловой“ координаты эллиптического цилиндра  $v$ . Угловые гармоники (обозначим их общим символом  $Y = Y(v)$ ) являются решениями „углового“ (angular, circumferential) дифференциального уравнения Матье ( $b$  — параметр разделения переменных, называемый также характеристическим параметром уравнения Матье)

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + (b - c^2 \lambda^2 \cos^2 v) Y = 0, \quad (17)$$

где в зависимости от потенциала  $\lambda^2 = k_{\perp}^2 - k^2$  либо  $\lambda^2 = \gamma^2 - k^2$ ; с подлежащими определению характеристическими постоянными (собственными значениями)  $b = b_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), образующими счетное ограниченное снизу множество, обеспечивающими существование  $2\pi$ -периодических решений этого уравнения. Последнее требование совершенно необходимо, если „окружные“ формы волн предполагаются однозначными.

В уравнение Матье (17), следуя традиции, введем новые постоянные

$$a = b - \frac{c^2 \lambda^2}{2}, \quad q = \frac{c^2 \lambda^2}{4}, \quad (18)$$

после чего оно приобретает „каноническую“ форму

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + (a - 2q \cos 2v) Y = 0. \quad (19)$$

Теория „углового“ уравнения Матье (17) достаточно полно обсуждается в классических руководствах [3–8]. Компактное изложение имеется в [9].

„Угловое“ уравнение Матье (19) в силу  $\pi$ -периодичности коэффициента при неизвестной функции всегда имеет решение вида

$$Y(v) = e^{i\nu v} P(v), \quad (20)$$

где характеристический показатель  $\nu$  зависит от постоянных  $a$  и  $q$ , а  $P(v)$  — периодическая (с наименьшим периодом  $\pi$ ) функция, не равная тождественно нулю.

По понятным причинам нас будут интересовать лишь  $2\pi$ -периодические решения уравнения Матье вида (20). Характеристический показатель  $\nu$  в том случае, когда решение уравнения Матье  $2\pi$ -периодично, есть целое число. Те значения постоянной  $a$ , для которых при заданном значении  $q$  выполняется условие  $\nu = s$ , являются собственными значениями. Заметим также, что при  $\nu = s$  решение уравнения Матье (20) имеет период  $\pi$ , если  $s$  четно, и период  $2\pi$ , если  $s$  нечетно.

Собственные функции, обладающие наименьшим периодом  $\pi$ , и соответствующие собственные значения можно определять как решения так называемой периодической задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} \frac{d^2 Y}{dv^2} + (a - 2q \cos 2v) Y = 0, \\ Y(0) = Y(\pi), \\ Y'(0) = Y'(\pi). \end{cases} \quad (21)$$

Собственные функции, обладающие наименьшим периодом  $2\pi$ , и соответствующие собственные значения можно определять как решения полупериодической (антипериодической)



задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} \frac{d^2 Y}{dv^2} + (a - 2q \cos 2v)Y = 0, \\ Y(0) = -Y(\pi), \\ Y'(0) = -Y'(\pi). \end{cases} \quad (22)$$

Соответствующие граничным задачам (21) и (22) дифференциальные операторы называются обычно периодическим и полупериодическим дифференциальными операторами Матье.

Обе задачи, как нетрудно проверить, являются самосопряженными. Их исследование может поэтому опираться на достаточно хорошо разработанную в многочисленных публикациях теорию задач Штурма–Лиувилля (см., например, [10–12]). В частности, сразу можно сделать заключение о вещественности собственных значений как периодической (21), так и полупериодической (22) задач Штурма–Лиувилля.

Периодической задаче Штурма–Лиувилля (21) отвечает возрастающая последовательность собственных значений

$$a_0^{(e)}, a_2^{(o)}, a_2^{(e)}, a_4^{(o)}, a_4^{(e)}, \dots \quad (23)$$

Полупериодической задаче Штурма–Лиувилля (22) отвечает возрастающая последовательность собственных значений

$$a_1^{(o)}, a_1^{(e)}, a_3^{(o)}, a_3^{(e)}, \dots \quad (q > 0); \quad (24)$$

$$a_1^{(e)}, a_1^{(o)}, a_3^{(e)}, a_3^{(o)}, \dots \quad (q < 0). \quad (25)$$

Заметим, что замена параметра  $q \rightarrow -q$  в дифференциальном уравнении Матье никак не влияет на собственные значения периодической задачи (21); собственные значения полупериодической задачи (22) обмениваются указателями  $e \rightarrow o, o \rightarrow e$ .

Хорошо известно, что последовательности (23) и (24), (25) упорядочиваются в одну строку следующим образом:

— при выполнении условия  $q > 0$  имеем

$$a_0^{(e)} < a_1^{(o)} < a_1^{(e)} < a_2^{(o)} < a_2^{(e)} < a_3^{(o)} < a_3^{(e)} < a_4^{(o)} < \dots,$$

т. е.

$$a_{2s}^{(e)} < a_{2s+1}^{(o)} < a_{2s+1}^{(e)} < a_{2s+2}^{(o)} \quad (s = 0, 1, 2, \dots);$$

— при выполнении условия  $q < 0$  имеем

$$a_0^{(e)} < a_1^{(e)} < a_1^{(o)} < a_2^{(o)} < a_2^{(e)} < a_3^{(e)} < a_3^{(o)} < a_4^{(o)} < a_4^{(e)} < \dots,$$

т. е.

$$a_{2s-1}^{(e)} < a_{2s-1}^{(o)} < a_{2s}^{(o)} < a_{2s}^{(e)} \quad (s = 1, 2, 3, \dots).$$

В том случае, когда постоянная  $q = 0$ , получаем  $a_0^{(e)} = 0$ , а остальные собственные значения периодической и полупериодической задач Штурма–Лиувилля (21), (22) совпадают  $a_m^{(e)} = a_m^{(o)} = m^2$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). При этом собственному значению  $a_0^{(e)} = 0$  соответствует лишь одна характеристическая функция; каждому собственному значению  $m^2$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) соответствует ровно две линейно независимых характеристических функции.

Квадраты эллиптических азимутальных чисел есть в точности собственные значения указанных выше краевых задач (с характеристическим параметром  $b$ ; см. (18)) для дифференциального уравнения Матье. Ясно, что сами эллиптические азимутальные числа в зависимости от знака  $q$  упорядочиваются в форме неограниченно возрастающей последовательности.

3. Эквивалентная спектральная задача для линейного оператора в пространстве  $l_2$

Поскольку  $\pi$ -периодическая функция является также и  $2\pi$ -периодической, то любое  $2\pi$ -периодическое решение уравнения Матье можно представить рядом Фурье на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , который удобнее всего взять в комплексной форме:

$$Y(v) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s e^{isv}, \quad (26)$$

где коэффициенты Фурье  $g_s$  образуют бесконечную двустороннюю последовательность и вычисляются по формулам Эйлера–Фурье

$$g_k = \overline{g_{-k}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(v') e^{-ikv'} dv' \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Коэффициенты Фурье  $g_s$  ( $s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ) есть, вообще говоря, комплексные числа. Однако, если  $Y(v)$  – четная функция, то все  $g_s$  – вещественные числа и  $g_k = g_{-k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ); если  $Y(v)$  – нечетная функция, то все  $g_s$  – чисто мнимые числа и  $g_k = -g_{-k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Ясно, что во втором случае мнимую единицу можно вынести за знак суммы в (26) и исключить ее из рассмотрения, что никак не повлияет на исследование спектральной задачи для дифференциального оператора Матье. Таким образом, в дальнейшем, когда это представляется удобным, можно считать, что все  $g_s$  ( $s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ) суть *вещественные* числа, подчиненные дополнительным ограничениям:

– „симметрии“

$$g_k = g_{-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (27)$$

для четного периодического решения;

– „антисимметрии“

$$g_k = -g_{-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (28)$$

для нечетного периодического решения.

Подставляя ряд (26) в дифференциальное уравнение Матье (19), получим трехчленную рекуррентную формулу

$$(s^2 - a)g_s + q(g_{s+2} + g_{s-2}) = 0 \quad (s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots), \quad (29)$$

которая допускает следующую компактную и изящную матричную запись:

$$(\mathbf{H} - a\mathbf{I})\mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (30)$$

где  $\mathbf{I}$  – бесконечная единичная диагональная матрица,  $\mathbf{H}$  – бесконечная симметричная вещественная (при вещественном  $q$ ) пентадиагональная (пятидиагональная) матрица

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & (-2)^2 & 0 & q & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & (-1)^2 & 0 & q & 0 & \dots \\ \dots & q & 0 & 0^2 & 0 & q & \dots \\ \dots & 0 & q & 0 & (1)^2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & q & 0 & (2)^2 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$\mathbf{g}$  – бесконечный квадратично суммируемый вектор-столбец

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \vdots \\ g_{-1} \\ g_0 \\ g_1 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Структура матрицы чрезвычайно важна для построения оценок ее собственных значений. Более полный учет структуры матрицы приводит к их более точной локализации. Бесконечная по всем направлениям симметричная матрица  $\mathbf{H}$  характеризуется тем, что ее наддиагональ и поддиагональ (т. е. диагонали, сверху и снизу ближе всего расположенные к главной диагонали) заполнены нулями; следующие по порядку две диагонали, параллельные главной, заполнены элементами, равными  $q$ ; все остальные наддиагональные и поддиагональные элементы – нулевые. Матрица  $\mathbf{H}$  имеет в качестве „центрального“ элемента единственный нулевой элемент, располагающийся на главной диагонали. Она симметрична не только относительно своей главной диагонали, но и относительно второй („побочной“) диагонали, которая пересекает главную диагональ в том месте, где расположен упомянутый единственный диагональный нулевой элемент. На главной диагонали симметрично относительно нулевого элемента, играющего роль „центра“ матрицы  $\mathbf{H}$ , располагаются в порядке возрастания квадраты натуральных чисел.

Задача (30) — классическая спектральная задача для линейного оператора  $\mathbf{H}$  в гильбертовом пространстве бесконечных двусторонних последовательностей  $G = \{g_s\}$  ( $s = -\infty, +\infty$ ), таких, что они квадратично суммируемы:

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} |g_s|^2 < +\infty,$$

со стандартным скалярным произведением  $(G, C)$ , определяемым согласно

$$(G, C) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s \bar{c}_s.$$

Линейная система алгебраических уравнений (30) имеет нетривиальное решение, только если

$$\det(\mathbf{H} - a\mathbf{I}) = 0. \tag{33}$$

Следовательно,  $2\pi$ -периодические решения „углового“ уравнения Матье (19) существуют только для таких значений  $a$ , которые являются собственными значениями матрицы  $\mathbf{H}$ . Если  $q$  вещественно, то  $\mathbf{H}$  — вещественная симметричная матрица, собственные значения которой также будут вещественными.

Алгебраической проблеме собственных значений посвящена обширная литература (см., например, монографии [13–17]).

#### 4. Локализация эллиптических азимутальных чисел с помощью овалов Кассини

Оценки собственных значений  $h_j = a_j$  бесконечной симметричной матрицы  $\mathbf{H}$  могут быть получены чисто алгебраическими методами [14], [17]. Эти методы направлены не построение оценок собственных чисел матрицы по ее элементам. Достаточно полный обзор алгебраических методов локализации собственных значений матриц и результатов в этой области имеется в [18].

Разложим матрицу  $\mathbf{H}$  в сумму  $\mathbf{H} = \mathbf{P} + \mathbf{L}$  диагональной матрицы  $\mathbf{P}$  и симметричной пентадиагональной остаточной матрицы  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & (-2)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & (-1)^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0^2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & (1)^2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & (2)^2 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 0 & 0 & q & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & q & 0 & \cdots \\ \cdots & q & 0 & 0 & 0 & q & \cdots \\ \cdots & 0 & q & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & q & 0 & 0 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Остаточная матрица  $\mathbf{L}$  играет роль „конечного“ возмущения, накладываемого на диагональную матрицу  $\mathbf{P}$ . В сумме диагональная матрица  $\mathbf{P}$  и „конечное“ возмущение  $\mathbf{L}$  дают матрицу  $\mathbf{H}$ . Квадраты азимутальных чисел волн, распространяющихся вдоль волновода с круговым поперечным сечением, представляют собой диагональные элементы матрицы  $\mathbf{P}$ . Нормированная пентадиагональная матрица  $(2q)^{-1}\mathbf{L}$  симметрична и бистохастична (двойка стохастична).

Обозначим через  $h$ ,  $p$  и  $l$  спектральные параметры матриц  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{L}$  соответственно. Упорядочим собственные значения матриц  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{L}$  по возрастанию влево и вправо от „центральных“ собственных чисел  $h_0$ ,  $p_0 = 0^2$ ,  $l_0$  и введем для них соответствующую двустороннюю нумерацию:

$$\begin{aligned} & \dots, h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1, h_2, \dots, \\ & \dots, (-2)^2, (-1)^2, 0^2, (1)^2, (2)^2, \dots, \\ & \dots, l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2, \dots. \end{aligned}$$

В случае комплексных квадратных матриц размерности, не меньшей, чем 2, имеется следующая спектральная оценка [14], [17]: если дана квадратная матрица  $\mathbf{A} = (a_{kj})$  размера  $n \times n$  ( $n \geq 2$ ) с комплексными элементами, то собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  расположены в объединении замкнутых областей комплексной плоскости, ограниченных овалами Кассини (Cassini ovals):

$$|a - a_{kk}||a - a_{jj}| \leq d_k d_j \quad (\text{по } k, j \text{ не суммировать; } k, j = 1, 2, \dots, n). \quad (34)$$

Величина  $d_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) представляет собой  $k$ -ую усеченную (т. е. за вычетом абсолютного значения диагонального элемента) строчную сумму абсолютных значений элементов матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$d_k = \sum_{j: j \neq k} |a_{kj}|.$$

Применим этот результат непосредственно к матрице  $\mathbf{H}$ . Все собственные значения  $h_s$  этой матрицы будут расположены в объединении замкнутых областей

$$|h - h_{ss}||h - h_{jj}| \leq d_s d_j = 4q^2 \quad (\text{по } s, j \text{ не суммировать; } s, j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots). \quad (35)$$

Данные выше неравенства обеспечивают возможность сразу же получить оценку снизу для наименьшего спектрального значения  $h_0$  матрицы  $\mathbf{H}$ . Действительно, для его локализации воспользуемся овалом Кассини

$$|h||h-1| = 4q^2. \quad (36)$$

Овал Кассини (36), будучи алгебраической кривой четвертого порядка, характеризуется фокусным расстоянием, равным единице, и еще одним параметром  $2q$ , квадрат которого равен постоянному произведению расстояний, измеренных от точек овала до его фокусов; при выполнении условия  $0 < 4q < 1$  он состоит из двух отдельных овалов, локализованных у фокусов  $h = 0$  и  $h = 1$ ; если  $4q = 1$ , то овал Кассини (36) превращается в лемнискату Бернулли.

Овал (36), для которого  $s = 0$ ,  $j = \pm 1$ , будет охватывать все остальные овалы (35) с номерами  $s = 0$ ,  $j = 2, 3, 4, \dots$  и  $j = -2, -3, -4, \dots$ .

Обозначая далее через  $-\underline{d}$  ( $\underline{d} > 0$ ) координату крайне левой точки пересечения овала (36) с вещественной осью  $\text{Im } h = 0$ , для определения  $\underline{d}$  можно получить квадратное уравнение

$$d^2 + d - 4q^2 = 0,$$

откуда

$$\underline{d} = \frac{\sqrt{1 + 16q^2} - 1}{2}.$$

Поэтому минимальное собственное значение  $h_0$  матрицы  $\mathbf{H}$  подчиняется следующему ограничению:

$$-\frac{\sqrt{1 + 16q^2} - 1}{2} < h_0. \quad (37)$$

Для получения оценок остальных собственных значений матрицы  $\mathbf{H}$  следует рассматривать овалы Кассини, заданные уравнениями

$$|h - h_{ss}||h - h_{jj}| = 4q^2 \quad (\text{по } s, j \text{ не суммировать; } j > s \geq 0). \quad (38)$$

Выполнив сдвиг переменной  $h$  на величину  $h_{ss}$  согласно

$$h' = h - h_{ss},$$

приведем уравнение овала (38) к несколько более простому виду

$$|h'||h' - (h_{jj} - h_{ss})| = 4q^2 \quad (\text{по } s, j \text{ не суммировать; } j > s \geq 0). \quad (39)$$

Для не слишком больших значений возмущающего параметра  $q$  (точнее, когда выполняются неравенства  $0 < 4q < 1$ ) овал (38) будет состоять из двух симметричных непересекающихся овалов, левого и правого.

Обозначая через  $-\underline{d}'_{s,j}$  ( $\underline{d}'_{s,j} > 0$ ) координату крайне левой точки пересечения левого овала (39) с вещественной осью  $\text{Im } h' = 0$ , для определения  $\underline{d}'_{s,j}$  можно получить квадратное уравнение

$$d'^2 + (h_{jj} - h_{ss})d' - 4q^2 = 0$$

и найти нужный положительный корень

$$\underline{d}'_{s,j} = \frac{\sqrt{(j^2 - s^2)^2 + 16q^2} - (j^2 - s^2)}{2}.$$

Аналогично, обозначая через  $\bar{d}'_{s,j}$  ( $\bar{d}'_{s,j} > 0$ ) расстояние от центра левого овала (39) до крайне правой точки его пересечения с осью  $\text{Im } h' = 0$ , находим

$$\bar{d}'_{s,j} = \frac{(j^2 - s^2) - \sqrt{(j^2 - s^2)^2 - 16q^2}}{2} \quad (j > s \geq 0).$$

Окончательно двусторонняя оценка для пары собственных значений  $h_s, h_{-s}$  матрицы  $\mathbf{H}$ , локализованных в окрестности невозмущенного собственного значения  $h = s^2$ , устанавливается в следующем виде:

$$s^2 - \overline{d'}_{s-1, s} < \begin{pmatrix} h_s \\ h_{-s} \end{pmatrix} < s^2 + \underline{d'}_{s-1, s}. \quad (40)$$

Двусторонние оценки (40) и следующие из них оценки возмущенных азимутальных чисел в зависимости от параметра „конечного“ возмущения  $q$ , позволяют достаточно точно их локализовать с целью последующего более эффективного применения численных методов расчета термоупругого волнового поля в длинном цилиндрическом волноводе.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Радаев, Ю.Н. Связанное волновое термоупругое поле в длинном волноводе эллиптического поперечного сечения / Ю.Н. Радаев, М.В. Таранова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 183–196.
- [2] Радаев, Ю.Н. Вычисление периодических решений „углового“ уравнения Матье и ассоциированных с ним значений / Ю.Н. Радаев, М.В. Таранова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сб. тр. междунар. конф. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского гос. ун-та, 2011. – С. 331–338.
- [3] Стретт, М.Д.О. Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике / М.Д.О. Стретт. – Харьков, Киев : Гос. научно-техническое изд-во Украины, 1935. – 240 с.
- [4] Мак-Лахлан, Н.В. Теория и приложения функций Матье / Н.В. Мак-Лахлан. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1953. – 476 с.
- [5] Сансоне, Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. I / Дж. Сансоне. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1953. – 348 с.
- [6] Коддингтон, Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1958. – 476 с.
- [7] Arscott, F. M. Periodic differential equations. An introduction to Mathieu, Lamé, and allied functions / F. M. Arscott. – Oxford–Frankfurt : Pergamon Press, 1964. – 284 p.
- [8] Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
- [9] Кампе де Ферье, Ж. Функции математической физики. Справочное руководство / Ж. Кампе де Ферье, Р. Кемпбелл, Г. Петью, Т. Фогель. – М. : Физматгиз, 1963. – 104 с.
- [10] Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М. : Гостехтеоретиздат, 1954. – 352 с.
- [11] Марченко, В.А. Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля / В.А. Марченко. – Киев : Наукова думка, 1972. – 220 с.
- [12] Левитан, Б.М. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака / Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. – М. : Наука, 1988. – 432 с.
- [13] Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М. : Гостехтеоретиздат, 1953. – 492 с.
- [14] Уилкинсон, Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений / Дж.Х. Уилкинсон. – М. : Наука, 1970. – 564 с.
- [15] Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман : под ред. В.Б. Лидского. – М. : Наука, 1969. – 368 с.
- [16] Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М. : Наука, 1978. – 280 с.
- [17] Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 655 с.
- [18] Маркус, М. Обзор по теории матриц и матричных неравенств / М. Маркус, Х. Минк. – М. : Наука, 1972. – 232 с.

Y. N. Radayev

**FINITE BISTOCHASTIC PERTURBATIONS OF AZIMUTHAL NUMBERS OF TYPE-III THERMOELASTIC WAVES IN A LONG CYLINDER***Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of RAS*

**Abstract.** The squared azimuthal numbers of coupled thermoelastic waves propagating via a long waveguide with circular cross-section are the eigenvalues of antiperiodical and periodical boundary value problems for a simple differential equation determining circumferential wave modes. They are known to be the series of squared integers. Finite doubly stochastic (bistochastic) perturbations of the azimuthal numbers of coupled thermoelastic waves are due to elliptical geometry of the cross-section considered as perturbation of the perfect circular geometry. *Circumferential* wave modes in this case are antiperiodic and periodic solutions of the angular (circumferential) Mathieu differential equation. The Sturm–Liouville eigenvalue problem for the angular Mathieu equation is reformulated as an algebraic eigenvalue problem for an infinite linear self-adjoint pentadiagonal matrix operator acting in the complex bi-infinite sequence space  $l_2$ . The matrix operator then is splitted into a diagonal matrix and an infinite symmetric doubly stochastic matrix. Estimations of upper and low bounds for the angular Mathieu eigenvalues and thus for the elliptical azimuthal numbers are obtained by the Cassini ovals technique. These estimations permit to localize elliptical azimuthal numbers and are to be used in subsequent numerical computations.

**Keywords:** thermoelasticity, type-III thermoelasticity, Mathieu equation, Mathieu function, azimuthal number, wavenumber, spectral problem, diagonalization, Cassini oval, bistochastic matrix

*Радаев Юрий Николаевич**доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва*

e-mail: radayev@ipmnet.ru

e-mail: y.radayev@gmail.com

*Radayev Yuri Nickolaevich**Dr. Sc. (Phys.&Math.), Prof. of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

## О СЖАТИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ ПРИ ОБОБЩЕНИИ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА

Чувашский государственный педагогический университет имени И. Я. Яковлева

**Аннотация.** В работе рассматривается сжатие идеальнопластического слоя параллельными жесткими шероховатыми плитами.

**Ключевые слова:** напряжение, деформация, сжатие, слой, идеальная пластичность.

УДК: 539.374

Условие пластичности запишем в виде

$$\begin{aligned} & [(\sigma_x - \sigma_y) - (k_1 - k_2)]^2 + [(\sigma_y - \sigma_z) - (k_2 - k_3)]^2 + [(\sigma_z - \sigma_x) - (k_3 - k_1)]^2 + \\ & + 6 \left[ (\tau_{xy} - k_4)^2 + (\tau_{yz} - k_5)^2 + (\tau_{xz} - k_6)^2 \right] = 6k_0^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  – компоненты напряжения,  $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$  – const, определяющие предел текучести и параметры анизотропии.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам, все величины, имеющие размерность напряжений отнесем к величине предела текучести  $k_0$  и сохраним обозначения напряжений  $\sigma_{ij}$  и констант  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ .

Условие пластичности (1) примет вид

$$\begin{aligned} & [(\sigma_x - \sigma_y) - (k_1 - k_2)]^2 + [(\sigma_y - \sigma_z) - (k_2 - k_3)]^2 + [(\sigma_z - \sigma_x) - (k_3 - k_1)]^2 + \\ & + 6 \left[ (\tau_{xy} - k_4)^2 + (\tau_{yz} - k_5)^2 + (\tau_{xz} - k_6)^2 \right] = 6. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Соотношения связи между напряжениями и скоростями деформаций согласно ассоциированному закону течения имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 6\lambda \cdot \left( \sigma_x - \sigma - (k_1 - \bar{k}) \right), \\ \varepsilon_y &= 6\lambda \cdot \left( \sigma_y - \sigma - (k_2 - \bar{k}) \right), \\ \varepsilon_z &= 6\lambda \cdot \left( \sigma_z - \sigma - (k_3 - \bar{k}) \right), \\ \varepsilon_{xy} &= 6\lambda \cdot (\tau_{xy} - k_4), \\ \varepsilon_{yz} &= 6\lambda \cdot (\tau_{yz} - k_5), \\ \varepsilon_{xz} &= 6\lambda \cdot (\tau_{xz} - k_6), \end{aligned} \quad (4)$$



где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$  – компоненты скорости деформации,  $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ ,  $\bar{k} = \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3)$ .

Из (2), (4) следует

$$6\lambda = \sqrt{\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2}{6} + \frac{(\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2}{6} + \frac{(\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2}{6} + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2}. \quad (5)$$

Из (4) следует условие несжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0. \quad (6)$$

Имеют место формулы Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (7)$$

где  $u, v, w$  – скорости перемещения.

Соотношения (4) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\varepsilon_x}{6\lambda} + \sigma + (k_1 - \bar{k}), \\ \sigma_y &= \frac{\varepsilon_y}{6\lambda} + \sigma + (k_2 - \bar{k}), \\ \sigma_z &= \frac{\varepsilon_z}{6\lambda} + \sigma + (k_3 - \bar{k}), \\ \tau_{xy} &= \frac{\varepsilon_{xy}}{6\lambda} + k_4, \\ \tau_{yz} &= \frac{\varepsilon_{yz}}{6\lambda} + k_5, \\ \tau_{xz} &= \frac{\varepsilon_{xz}}{6\lambda} + k_6. \end{aligned} \quad (8)$$

Предположим

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= C_1 z + k_6, \\ \tau_{yz} &= C_2 z + k_5, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $C_1, C_2 - const.$

Из (4), (9) следует

$$\varepsilon_{xz} \cdot C_2 = \varepsilon_{yz} \cdot C_1. \quad (10)$$

Из (3), (8), (9) получим

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + C_1 = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} + C_2 = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

Из (11) следует

$$\sigma_z = C_1 x + C_2 y + C_3, \quad \sigma = -C_1 x - C_2 y - C_3 - \frac{\varepsilon_z}{6\lambda}, \quad C_3 - const. \quad (12)$$

Условие несжимаемости (6) согласно (7) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (13)$$

Положим

$$\begin{aligned} u &= m_1 x + n_1 y + \varphi_1(z), \\ v &= m_2 x + n_2 y + \varphi_2(z), \\ w &= m_3 x + n_3 y + q(z - a), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $m_i, n_i, q, a - const.$

Согласно (7), (13), (14) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = m_1, \varepsilon_y = n_2, \varepsilon_z = q, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot (n_1 + m_2), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \left( n_3 + \frac{d\varphi_2}{dz} \right), \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \cdot \left( m_3 + \frac{d\varphi_1}{dz} \right), \\ 6\lambda = \sqrt{\frac{(m_1 - n_2)^2}{6} + \frac{(n_1 - q)^2}{6} + \frac{(q - m_1)^2}{6} + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (7), (10), (12), (15) найдем

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_z + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_z}{6\lambda} + (k_3 - k_1) = C_1 x + C_2 y + C_3 + \frac{m_1 - q}{6\lambda} + (k_3 - k_1), \\ \sigma_y = \sigma_z + \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{6\lambda} + (k_2 - k_3) = C_1 x + C_2 y + C_3 + \frac{n_2 - q}{6\lambda} + (k_2 - k_3), \\ \tau_{xy} = \frac{\varepsilon_{xy}}{6\lambda} + k_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n_1 + m_2}{6\lambda} + k_4. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (2), (5), (9), (16) получим

$$\frac{1}{6\lambda} = A \cdot \sqrt{1 - (C_1^2 + C_2^2) z^2}, \quad A = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(m_1 - n_2)^2 + (n_1 - q)^2 + (m_1 - q)^2 + 3(n_1 + m_2)^2}}. \quad (17)$$

Обозначим толщину слоя  $2h$ , предположим, что в некоторой точке  $x_0 y_0$  определено осредненное давление

$$p = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma dz, \quad p - const. \quad (18)$$

Из (12), (17), (18) следует

$$\begin{aligned} C_3 = p + C_1 x_0 + C_2 y_0 + \frac{q}{2h} \int_{-h}^h \frac{dz}{6\lambda} = \\ = p + C_1 x_0 + C_2 y_0 + \frac{qA}{2h} \left[ \sqrt{1 - (C_1^2 + C_2^2) h^2} + \frac{1}{C_1^2 + C_2^2} \arcsin \left( h \cdot \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Максимова, Л. А. О предельном состоянии слоя, сжатого шероховатыми плитами / Л. А. Максимова // ПММ. – 2000. – Т. 64. Вып. 6. – С. 1099–1104.

[2] Максимова, Л. А. О сжатии плиты из идеально пластического анизотропного материала / Л. А. Максимова // Проблемы механики. сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М. : Физматлит. – 2003. – С. 520–523.

*A. V. Balashnikova*

**ABOUT COMPRESSION OF A SPATIAL IDEALNOPLASTICHESKY LAYER  
AT TRANSMITTING ANISOTROPY**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** In work compression of ideally plastic layer by parallel rigid rough plates is considered.

**Keywords:** tension, deformation, compression, layer, ideal plasticity.

*Балашникова Анжелика Вениаминовна*

*аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

**e-mail:** info3006@yandex.ru

*Balashnikova Anshelika Veniaminovna*

*Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

Д. Д. Ивлев, Б. Г. Мионов

## О ДИССИПАТИВНОЙ ФУНКЦИИ В ТЕОРИИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

**Аннотация.** Рассматривается диссипативная функция в теории трансляционной анизотропии при кручении.

**Ключевые слова:** напряжение, деформация, идеальная пластичность, кручение, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Предельное условие для напряжений в случае трансляционной идеальнопластической анизотропии запишем в виде [1]

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = k^2, \quad k_1, k_2, k - \text{const}, \quad (1)$$

где  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  – касательные напряжения.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам и отнесем все величины, имеющие размерность напряжений, к величине  $k$ . Сохраним обозначения для  $\tau_{xz}, \tau_{yz}, k_1, k_2$ . Условие (1) примет вид

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = 1. \quad (2)$$

На рис. 1 показана предельная кривая, соответствующая условию (2). Центр окружности (2) смещен в точку  $O_1(k_1, k_2)$  (рис. 1).

Согласно (1) из ассоциированного закона течения получим

$$\varepsilon_{xz} = 2\lambda(\tau_{xz} - k_1), \quad \varepsilon_{yz} = 2\lambda(\tau_{yz} - k_2), \quad \lambda \geq 0, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$  – компоненты скорости деформации.

Диссипативная функция определяется из соотношения

$$D = D(\varepsilon_{ij}) = \tau_{xz}\varepsilon_{xz} + \tau_{yz}\varepsilon_{yz}. \quad (4)$$

Из (3), (4) найдем

$$D = 2\lambda(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - k_1\tau_{xz} - k_2\tau_{yz}). \quad (5)$$

Согласно (1)

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = 2k_1\tau_{xz} + 2k_2\tau_{yz} + 1 - k_1^2 - k_2^2. \quad (6)$$

Из (3) следует

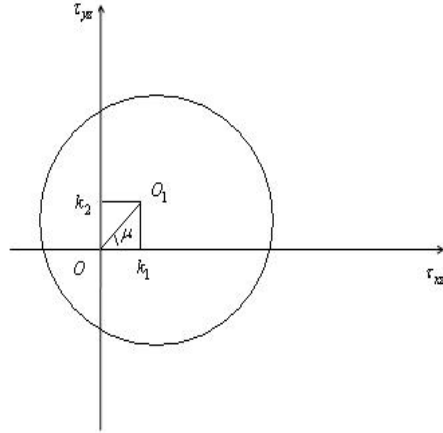


Рис. 1

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\varepsilon_{xz}}{2\lambda} + k_1, \\ \tau_{yz} &= \frac{\varepsilon_{yz}}{2\lambda} + k_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (1), (3) также следует

$$\left(\frac{\varepsilon_{xz}}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{yz}}{\lambda}\right)^2 = 4, \quad \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}. \quad (8)$$

Из (5), (6), (7), (8) получаем искомое выражение диссипативной функции

$$D = k_1\varepsilon_{xz} + k_2\varepsilon_{yz} + \sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}. \quad (9)$$

Диссипативная функция может быть использована в качестве потенциала напряжений

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (10)$$

Из (9), (10) найдем

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= k_1 - \frac{\varepsilon_{xz}}{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}}, \\ \tau_{yz} &= k_2 - \frac{\varepsilon_{yz}}{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) следует условие предельного состояния [1]

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = 1. \quad (12)$$

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 576–579.

*D. D. Ivlev, B. G. Mironov*

**ABOUT DISSIPATIVNY FUNCTION IN THE THEORY OF TRANSMITTING  
IDEALNOPLASTICHESKY ANISOTROPY AT TORSION**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** Dissipativny function in the theory is considered transmitting anisotropy at torsion.

**Keywords:** tension, deformation, ideal plasticity, torsion, transmitting anisotropy.

*Ивлев Дюис Данилович*

*доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

**e-mail:** ivlev21@mail.ru

*Миронов Борис Гурьевич*

*доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

**e-mail:** strangcheb@mail.ru

*Ivlev Dyuis Danilovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Mironov, Boris Guryevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Мионов

## О ДИССИПАТИВНОЙ ФУНКЦИИ В ТЕОРИИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ В СЛУЧАЕ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

**Аннотация.** Рассматривается диссипативная функция в теории трансляционной идеально-пластической анизотропии в случае плоской деформации.

**Ключевые слова:** напряжение, деформация, идеальная пластичность, плоская деформация, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Предельное условие для напряжений в случае трансляционной идеальнопластической анизотропии для случая плоской деформации имеет вид

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = k^2, \quad k, k_i - const, \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненты напряжения.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам и отнесем все величины, имеющие размерность напряжений, к величине  $k$ , сохраним обозначение для компонент напряжений и постоянных  $k_i$ . Условие (1) примет вид

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = 1. \quad (2)$$

Согласно (1) из ассоциированного закона течения будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lambda \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right), \\ \varepsilon_y &= -\lambda \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right), \\ \varepsilon_{xy} &= \lambda (\tau_{xy} - k_3), \quad \lambda \geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$  – компоненты скоростей деформации.

Выражение (3) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} &= \lambda \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right), \\ \varepsilon_{xy} &= \lambda (\tau_{xy} - k_3). \end{aligned} \quad (4)$$

Из (4) согласно (3) следует

$$\lambda^2 = \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \varepsilon_{xy}^2, \quad \lambda = \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}. \quad (5)$$

Диссипативная функция определяется из соотношения

$$D = D(\varepsilon_{ij}) = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + 2\tau_{xy} \varepsilon_{xy}. \quad (6)$$

Из (3), (6) следует

$$D = 2\lambda \left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 - \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) \cdot \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) - k_3 \cdot \tau_{xy} \right]. \quad (7)$$

Из (3) следует

$$k(\theta) = \rho \cos(2\theta - \mu) + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(2\theta - \mu)}, \quad \rho, \mu - \text{const}. \quad (8)$$

Из (4) следует

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} &= \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2\lambda} + \frac{k_1 - k_2}{2}, \\ \tau_{xy} &= \frac{\varepsilon_{xy}}{\lambda} + k_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (5), (7), (8), (9) получим искомое выражение диссипативной функции

$$D = \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right) \cdot (k_1 - k_2) + 2\varepsilon_{xy} k_3 + 2\sqrt{\left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}. \quad (10)$$

Диссипативную функцию можно использовать в качестве потенциала напряжений

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (11)$$

Согласно (10), (11) получим

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} &= \frac{\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}}{\sqrt{\left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}}, \\ \tau_{xy} - k_3 &= \frac{\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (12) следует условие предельного состояния (1).

$$\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = 1. \quad (13)$$

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 580-582.



*D. D. Ivlev, B. G. Mironov, L. A. Maksimova*

**ABOUT DISSIPATIVE FUNCTIONS IN THE THEORY TRANSMITTING  
ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЙ ANISOTROPIES IN CASE OF FLAT  
DEFORMATION**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** Dissipative function in the theory of transmitting ideally plastic anisotropy in case of flat deformation is considered.

**Keywords:** tension, deformation, ideal plasticity, flat deformation, transmitting anisotropy.

*Ивлев Дюис Данилович*

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ivlev21@mail.ru

*Максимова Людмила Анатольевна*

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: maksimova\_ng@mail.ru

*Миронов Борис Гурьевич*

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

*Ivlev Dyuis Danilovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Maksimova, Ludmila Anatolievna*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Mironov, Boris Guryevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, С. В. Тихонов

## О ДИССИПАТИВНОЙ ФУНКЦИИ В ТЕОРИИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ ПРИ ОБОБЩЕНИИ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

**Аннотация.** Рассматривается диссипативная функция в пространственной задаче теории трансляционной анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса.

**Ключевые слова:** напряжение, деформация, идеальная пластичность, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Условие пластичности Мизеса имеет вид

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 6k_0^2, \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  – компоненты напряжения,  $k_0$  – const.

В дальнейшем все величины, имеющие размерность напряжения будем считать отнесенными к величине  $k_0$ .

Обобщенное условие пластичности (1) в случае трансляционной анизотропии запишем в виде

$$\begin{aligned} &(\sigma_x - \sigma_y - (k_1 - k_2))^2 + (\sigma_y - \sigma_z - (k_2 - k_3))^2 + (\sigma_z - \sigma_x - (k_3 - k_1))^2 + \\ &+ 6[(\tau_{xy} - k_4)^2 + (\tau_{yz} - k_5)^2 + (\tau_{xz} - k_6)^2] = 6, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $k_i$  – const.

Согласно ассоциированному закону течения из (2) будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 2\lambda [(\sigma_x - \sigma_y) - (k_1 - k_2) + (\sigma_x - \sigma_z) - (k_1 - k_3)], \\ \varepsilon_y &= 2\lambda [(\sigma_y - \sigma_z) - (k_2 - k_3) + (\sigma_y - \sigma_x) - (k_2 - k_1)], \\ \varepsilon_z &= 2\lambda [(\sigma_z - \sigma_x) - (k_3 - k_1) + (\sigma_z - \sigma_y) - (k_3 - k_2)], \\ \varepsilon_{xy} &= 6\lambda (\tau_{xy} - k_4), \\ \varepsilon_{yz} &= 6\lambda (\tau_{yz} - k_5), \\ \varepsilon_{xz} &= 6\lambda (\tau_{xz} - k_6), \quad \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) следует

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon_y &= 6\lambda (\sigma_x - \sigma_y - (k_1 - k_2)), \\ \varepsilon_y - \varepsilon_z &= 6\lambda (\sigma_y - \sigma_z - (k_2 - k_3)), \\ \varepsilon_z - \varepsilon_x &= 6\lambda (\sigma_z - \sigma_x - (k_3 - k_1)). \end{aligned} \quad (4)$$

Из (3), (4) найдем

Поступила 30.04.2012

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{6\lambda} + (k_1 - k_2) &= (\sigma_x - \sigma_y), \\ \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{6\lambda} + (k_2 - k_3) &= (\sigma_y - \sigma_z), \\ \frac{\varepsilon_z - \varepsilon_x}{6\lambda} + (k_3 - k_1) &= (\sigma_z - \sigma_x).\end{aligned}\quad (5)$$

$$\frac{\varepsilon_{xy}}{6\lambda} + k_4 = \tau_{xy}, \quad \frac{\varepsilon_{yz}}{6\lambda} + k_5 = \tau_{yz}, \quad \frac{\varepsilon_{xz}}{6\lambda} + k_6 = \tau_{xz}.\quad (6)$$

Соотношение (2) перепишем в виде

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma_y)^2 - 2(\sigma_x - \sigma_y) \cdot (k_1 - k_2) + (k_1 - k_2)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 - 2(\sigma_y - \sigma_z) \cdot (k_2 - k_3) + \\ + (k_2 - k_3)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 - 2(\sigma_z - \sigma_x) \cdot (k_3 - k_1) + (k_3 - k_1)^2 + \\ + 6(\tau_{xy}^2 - 2\tau_{xy} \cdot k_4 + k_4^2) + 6(\tau_{yz}^2 - 2\tau_{yz} \cdot k_5 + k_5^2) + 6(\tau_{xz}^2 - 2\tau_{xz} \cdot k_6 + k_6^2) = 6.\end{aligned}\quad (7)$$

Из (5) получим

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 = \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{6\lambda}\right)^2 + 2\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{6\lambda}\right) \cdot (k_1 - k_2) + (k_1 - k_2)^2.\quad (8)$$

Из (5), (8) найдем

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 - 2(\sigma_x - \sigma_y) \cdot (k_1 - k_2) + (k_1 - k_2)^2 = \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{6\lambda}\right)^2.\quad (9)$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned}(\sigma_y - \sigma_z)^2 - 2(\sigma_y - \sigma_z) \cdot (k_2 - k_3) + (k_2 - k_3)^2 &= \left(\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{6\lambda}\right)^2, \\ (\sigma_z - \sigma_x)^2 - 2(\sigma_z - \sigma_x) \cdot (k_3 - k_1) + (k_3 - k_1)^2 &= \left(\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_x}{6\lambda}\right)^2.\end{aligned}\quad (10)$$

Из (6) получим

$$\tau_{xy}^2 = \left(\frac{\varepsilon_{xy}}{6\lambda}\right)^2 + 2\left(\frac{\varepsilon_{xy}}{6\lambda}\right) \cdot k_4 + k_4^2.\quad (11)$$

Из (6), (11) найдем

$$\tau_{xy}^2 - 2\tau_{xy} \cdot k_4 + k_4^2 = \left(\frac{\varepsilon_{xy}}{6\lambda}\right)^2.\quad (12)$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned}\tau_{yz}^2 - 2\tau_{yz} \cdot k_5 + k_5^2 &= \left(\frac{\varepsilon_{yz}}{6\lambda}\right)^2, \\ \tau_{xz}^2 - 2\tau_{xz} \cdot k_6 + k_6^2 &= \left(\frac{\varepsilon_{xz}}{6\lambda}\right)^2.\end{aligned}\quad (13)$$

Из (7), (9), (10), (12), (13) будем иметь

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2) = 6^3 \lambda^2.\quad (14)$$

Диссипативная функция определяется из выражения

$$D = D(\varepsilon_{ij}) = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + 2\tau_{xy} \varepsilon_{xy} + 2\tau_{yz} \varepsilon_{yz} + 2\tau_{xz} \varepsilon_{xz}.\quad (15)$$

Преобразуем выражения (3) к виду

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\varepsilon_x}{6\lambda} + \sigma + (k_1 - \bar{k}), \\ \sigma_y &= \frac{\varepsilon_y}{6\lambda} + \sigma + (k_2 - \bar{k}), \\ \sigma_z &= \frac{\varepsilon_z}{6\lambda} + \sigma + (k_3 - \bar{k}),\end{aligned}\quad (16)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\varepsilon_{xy}}{6\lambda} + k_4, \quad \tau_{yz} = \frac{\varepsilon_{yz}}{6\lambda} + k_5, \quad \tau_{xz} = \frac{\varepsilon_{xz}}{6\lambda} + k_6,$$

// где  $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ ,  $\bar{k} = \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3)$ . // Принимая во внимание условие несжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0, \quad (17)$$

из (15), (16), (17) найдем

$$D = \frac{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2 + 2\varepsilon_{xz}^2}{6\lambda} + k_1\varepsilon_x + k_2\varepsilon_y + k_3\varepsilon_z + 2k_4\varepsilon_{xy} + 2k_5\varepsilon_{yz} + 2k_6\varepsilon_{xz}, \quad (18)$$

где величина  $\lambda$  определяется согласно (14).

Используя условие несжимаемости (17), выражение  $\lambda$  (14) можно преобразовать к виду

$$6\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2 + 2\varepsilon_{xz}^2}. \quad (19)$$

Согласно (18), (19) искомая диссипативная функция имеет вид

$$D = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2 + 2\varepsilon_{xz}^2} + k_1\varepsilon_x + k_2\varepsilon_y + k_3\varepsilon_z + 2k_4\varepsilon_{xy} + 2k_5\varepsilon_{yz} + 2k_6\varepsilon_{xz}. \quad (20)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 583-584.

*D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, S. V. Tihonov*

**ABOUT DISSIPATIVNY FUNCTION IN THE THEORY OF TRANSMITTING  
IDEALNOPLASTICHESKY ANISOTROPY AT GENERALIZATION A  
CONDITION OF PLASTICITY OF MIZES**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** Dissipative function in a spatial task of the theory of transmitting anisotropy is considered under the generalized condition of plasticity of Mizes.

**Keywords:** tension, deformation, ideal plasticity, transmitting anisotropy.

*Ивлев Дюис Данилович*

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ivlev21@mail.ru

*Максимова Людмила Анатольевна*

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: maksimova\_ng@mail.ru

*Тихонов Сергей Владимирович*

кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

*Ivlev Dyuis Danilovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Maksimova, Ludmila Anatolievna*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Tihonov, Sergey Vladimirovich*

*Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

Д. Д. Ивлев, А. В. Ковалев, С. В. Тихонов

## О СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СОСТОЯНИЯХ В ТЕОРИИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
Воронежский государственный университет

**Аннотация.** В работах [1-4] рассмотрены соотношения идеальнопластической трансляционной анизотропии. Ниже обсуждаются пространственные статически определяемые соотношения теории идеальнопластической трансляционной анизотропии.

**Ключевые слова:** напряжение, деформация, идеальная пластичность, статическая определенность, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

1. Рассмотрим функционал

$$D = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - k(\varepsilon_x n_1^2 + \varepsilon_y n_2^2 + \varepsilon_z n_3^2 + 2\varepsilon_{xy}n_1n_2 + 2\varepsilon_{yz}n_2n_3 + 2\varepsilon_{xz}n_1n_3) - \\ - (k_1\varepsilon_x + k_2\varepsilon_y + k_3\varepsilon_z + 2k_4\tau_{xy} + 2k_5\tau_{yz} + 2k_6\tau_{xz}) - v(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \\ + \lambda(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1 = 0), \quad (1.1)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты напряжения,  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты скорости деформации,  $n_i$  – составляющие вектора, определяющего направление одного из главных напряжений,  $v \geq 0$ ,  $\lambda \geq 0$  – неопределимые множители,  $k$ ,  $k_i$  – const.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам, будем считать компоненты, имеющие размерность напряжения, отнесенными к некоторой характерной величине, имеющей напряжения; величины, имеющие размерность длины, – к некоторой характерной величине, имеющей размерность длины.

Из экстремума функционала (1.1)

$$\frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0.$$

получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= v + kn_1^2 + k_1, & \tau_{xy} &= kn_1n_2 + k_4, \\ \sigma_y &= v + kn_2^2 + k_2, & \tau_{yz} &= kn_2n_3 + k_5, \\ \sigma_z &= v + kn_3^2 + k_3, & \tau_{xz} &= kn_1n_3 + k_6. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Из (1.2) следует

$$\sigma = v + \frac{1}{2}k + \bar{k}, \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad \bar{k} = \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3). \quad (1.3)$$

Поступила 30.04.2012

Из (1.2), (1.3) следует

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma - \frac{1}{3}kn_1^2 + k_1 - \bar{k}, & \tau_{xy} &= kn_1n_2 + k_4, \\ \sigma_y &= \sigma - \frac{1}{3}kn_2^2 + k_2 - \bar{k}, & \tau_{yz} &= kn_2n_3 + k_5, \\ \sigma_z &= \sigma - \frac{1}{3}kn_3^2 + k_3 - \bar{k}, & \tau_{xz} &= kn_3n_1 + k_6.\end{aligned}\quad (1.4)$$

Выражение (1.4) определяет статически определимые соотношения для компонент напряжений.

Имеют место три уравнения равновесия.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (1.5)$$

Из (1.1), (1.4), (1.5) имеет место замкнутая статически определимая система уравнений относительно  $\sigma$ ,  $n_i$

$$\begin{aligned}\frac{1}{k} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2n_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} + n_2 \frac{\partial n_1}{\partial y} + n_1 \frac{\partial n_2}{\partial y} + n_3 \frac{\partial n_1}{\partial z} + n_1 \frac{\partial n_3}{\partial z} &= 0, \\ \frac{1}{k} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + n_2 \frac{\partial n_1}{\partial x} + n_1 \frac{\partial n_2}{\partial x} + 2n_2 \frac{\partial n_2}{\partial y} + n_3 \frac{\partial n_2}{\partial z} + n_2 \frac{\partial n_3}{\partial z} &= 0, \\ \frac{1}{k} \frac{\partial \sigma}{\partial z} + n_3 \frac{\partial n_1}{\partial x} + n_1 \frac{\partial n_3}{\partial x} + n_3 \frac{\partial n_2}{\partial y} + n_2 \frac{\partial n_3}{\partial y} + 2n_3 \frac{\partial n_3}{\partial z} &= 0, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Кварилинейная система уравнений (1.6) принадлежит к гиперболическому типу, характеристики многообразия определены [5]. Как видно, согласно (1.6) параметры трансляционной анизотропии  $k_i$  никакого внимания на характер уравнений (1.6) не оказывает.

Отметим соотношения, следующие из (1.4)

$$\begin{aligned}\left(\sigma'_x + \frac{1}{3}k - k'_1\right) \cdot \left(\sigma'_y + \frac{1}{3}k - k'_2\right) &= (\tau_{xy} - k_4)^2, \\ \left(\sigma'_y + \frac{1}{3}k - k'_2\right) \cdot \left(\sigma'_z + \frac{1}{3}k - k'_3\right) &= (\tau_{yz} - k_5)^2, \\ \left(\sigma'_z + \frac{1}{3}k - k'_3\right) \cdot \left(\sigma'_x + \frac{1}{3}k - k'_1\right) &= (\tau_{xz} - k_6)^2, \\ \left(\sigma'_x + \frac{1}{3}k - k'_1\right) \cdot (\tau_{yz} - k_5) &= (\tau_{xy} - k_4) \cdot (\tau_{xz} - k_6), \\ \left(\sigma'_y + \frac{1}{3}k - k'_2\right) \cdot (\tau_{xz} - k_6) &= (\tau_{xy} - k_4) \cdot (\tau_{yz} - k_5), \\ \left(\sigma'_z + \frac{1}{3}k - k'_3\right) \cdot (\tau_{xz} - k_6) &= (\tau_{yz} - k_5) \cdot (\tau_{xz} - k_6),\end{aligned}\quad (1.7)$$

где  $\sigma'_i = \sigma_i - \sigma$ ,  $k'_i = k_i - \bar{k}$ .

2. Из экстремума функционала (1.1)

$$\frac{\partial D}{\partial n_i} = 0.$$

получим

$$\begin{aligned}
k(\varepsilon_x n_1 + \varepsilon_{xy} n_2 + \varepsilon_{xz} n_3) &= \lambda n_1, \\
k(\varepsilon_{xy} n_1 + \varepsilon_y n_2 + \varepsilon_{yz} n_3) &= \lambda n_2, \\
k(\varepsilon_{xz} n_1 + \varepsilon_{yz} n_2 + \varepsilon_z n_3) &= \lambda n_3, \lambda \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

К уравнениям (2.1) следует присоединить условие несжимаемости:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \tag{2.2}$$

Имеет место  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$ , ..., где  $u, v, w$  – компоненты скорости перемещения.

Система четырех уравнений (2.1), (2.2) относительно  $u, v, w, \lambda$  принадлежит к гиперболическому типу, характеристические многообразия систем уравнений (2.1), (2.2). Совпадают с характеристическими многообразиями систем уравнений (1.6) [5].

Отметим, что систему уравнений (2.1) можно переписать в виде, включающем параметры анизотропии  $k_i$ . Систему уравнений (2.1) запишем в виде:

$$\begin{aligned}
k(\varepsilon_x n_1^2 + \varepsilon_{xy} n_1 n_2 + \varepsilon_{xz} n_1 n_3) &= \lambda n_1^2, \\
k(\varepsilon_{xy} n_1 n_2 + \varepsilon_y n_2^2 + \varepsilon_{yz} n_2 n_3) &= \lambda n_2^2, \\
k(\varepsilon_{xz} n_1 n_3 + \varepsilon_{yz} n_2 n_3 + \varepsilon_z n_3^2) &= \lambda n_3^2, \lambda \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Из (1.3), (2.3) найдем

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x \left( \sigma'_x + \frac{1}{3}k - k'_1 \right) + \varepsilon_{xy} (\tau_{xy} - k_4) + \varepsilon_{xz} (\tau_{xz} - k_6) &= \lambda \left( \sigma'_x + \frac{1}{3}k - k'_1 \right), \\
\varepsilon_{xy} (\tau_{xy} - k_4) + \varepsilon_y \left( \sigma'_y + \frac{1}{3}k - k'_2 \right) + \varepsilon_{yz} (\tau_{yz} - k_5) &= \lambda \left( \sigma'_y + \frac{1}{3}k - k'_2 \right), \\
\varepsilon_{xz} (\tau_{xz} - k_6) + \varepsilon_{yz} (\tau_{yz} - k_5) + \varepsilon_z \left( \sigma'_z + \frac{1}{3}k - k'_3 \right) &= \lambda \left( \sigma'_z + \frac{1}{3}k - k'_3 \right).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

3. Предположим, что

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0. \tag{3.1}$$

При условии (3.1) напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  являются главными.

Из (1.4), (3.1) следует

$$kn_1 n_2 = -k_4, kn_2 n_3 = -k_5, kn_1 n_3 = -k_6. \tag{3.2}$$

Из (3.2) найдем

$$kn_1^2 = -\frac{k_4 k_6}{k_5}, kn_2^2 = -\frac{k_4 k_5}{k_6}, kn_3^2 = -\frac{k_5 k_6}{k_4}. \tag{3.3}$$

Из (1.4), (3.3) будем иметь

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sigma - \frac{1}{3}k - \frac{k_4 k_6}{k_5} + k'_1, \\
\sigma_2 &= \sigma - \frac{1}{3}k - \frac{k_4 k_5}{k_6} + k'_2, \\
\sigma_3 &= \sigma - \frac{1}{3}k - \frac{k_5 k_6}{k_4} + k'_3,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения.

Согласно (3.4) очевидно, что условие полной пластичности, в общем случае, места не имеет. Это обстоятельство было отмечено в [4]. Таким образом, при трансляционной идеально-пластической анизотропии могут иметь место статически определяемые системы уравнений гиперболического типа, причем условие полной пластичности не выполняется.

4. Рассмотрим однородное состояние в случае идеальнопластической трансляционной анизотропии (1.4). Компонентам сохраняющим постоянное значение припишем индекс "нулик наверху".

$$\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0, \tau_{xy}^0, \tau_{yz}^0, \tau_{xz}^0 = const \tag{4.1}$$

Соотношения (1.4) перепишем в виде



$$\begin{aligned}
\sigma_x^0 &= \sigma^0 - \frac{1}{3}k + kn_1^{02} + k'_1, & \tau_{xy}^0 &= kn_1^0 n_2^0 + k_4, \\
\sigma_y^0 &= \sigma^0 - \frac{1}{3}k + kn_2^{02} + k'_2, & \tau_{yz}^0 &= kn_2^0 n_3^0 + k_5, \\
\tau_{xz}^0 &= kn_1^0 n_3^0 + k_6.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Из (4.2) найдем

$$\begin{aligned}
kn_1^{02} &= \frac{(\tau_{xy}^0 - k_4)(\tau_{xz}^0 - k_6)}{(\tau_{yz}^0 - k_5)}, \\
kn_2^{02} &= \frac{(\tau_{xy}^0 - k_4)(\tau_{yz}^0 - k_5)}{(\tau_{xz}^0 - k_6)}, \\
kn_3^{02} &= \frac{(\tau_{xz}^0 - k_6)(\tau_{yz}^0 - k_5)}{(\tau_{xy}^0 - k_4)}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Принимая во внимание, что  $n_1^{02} + n_2^{02} + n_3^{02} = 1$ , из (4.3) будем иметь

$$k = \frac{(\tau_{xy}^0 - k_4)(\tau_{xz}^0 - k_6)}{(\tau_{yz}^0 - k_5)} + \frac{(\tau_{xy}^0 - k_4)(\tau_{yz}^0 - k_5)}{(\tau_{xz}^0 - k_6)} + \frac{(\tau_{xz}^0 - k_6)(\tau_{yz}^0 - k_5)}{(\tau_{xy}^0 - k_4)}. \tag{4.4}$$

Из (4.2), (4.3) получим

$$\begin{aligned}
\sigma_x^0 &= \sigma^0 - \frac{1}{3}k + \frac{(\tau_{xy}^0 - k_4)(\tau_{xz}^0 - k_6)}{(\tau_{yz}^0 - k_5)} + k_1 - \bar{k}, \\
\sigma_y^0 &= \sigma^0 - \frac{1}{3}k + \frac{(\tau_{xy}^0 - k_4)(\tau_{yz}^0 - k_5)}{(\tau_{xz}^0 - k_6)} + k_2 - \bar{k}, \\
\sigma_z^0 &= \sigma^0 - \frac{1}{3}k + \frac{(\tau_{xz}^0 - k_6)(\tau_{yz}^0 - k_5)}{(\tau_{xy}^0 - k_4)} + k_3 - \bar{k},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

где  $k$  определяется согласно (4.4).

Соотношения (4.5) определяют связь компонент напряжений  $\sigma_{ij}^0$  при предельном состоянии в случае идеальнопластической трансляционной анизотропии.

Отметим случай

$$\sigma_z^0 = \tau_{xy}^0 = \tau_{yz}^0 = \tau_{xz}^0 = 0. \tag{4.6}$$

Из (4.4), (4.5), (4.6) следует

$$\begin{aligned}
\sigma_x^0 &= \frac{k_5 k_6}{k_4} - \frac{k_4 k_6}{k_5} + k_1 - k_3, \\
\sigma_y^0 &= \frac{k_5 k_6}{k_4} - \frac{k_4 k_5}{k_6} + k_2 - k_3.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 580-582.

*D. D. Ivlev, A. V. Kovalev, S. V. Tihonov*

**ABOUT STATICALLY CERTAIN CONDITIONS IN THE THEORY  
TRANSMITTING IDEALLY PLASTIC ANISOTROPY**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University,  
Voronezh State University*

**Abstract.** In works [1-4] ratios of ideally plastic transmitting anisotropy are considered. Spatial statically definable ratios of the theory of ideally plastic transmitting anisotropy are discussed below.

**Keywords:** tension, deformation, ideal plasticity, static definability, transmitting anisotropy.

*Ивлев Дюис Данилович*

*доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

**e-mail:** ivlev21@mail.ru

*Ковалев Алексей Викторович*

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** kav-mail@mail.ru

*Тихонов Сергей Владимирович*

*кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

**e-mail:** strangcheb@mail.ru

*Ivlev Dyuis Danilovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Kovalev Aleksey Viktorovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh*

*Tixonov, Sergey Vladimirovich*

*Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

**О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНЫХ  
АНИЗОТРОПНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПОЛИГОНАЛЬНОГО  
СЕЧЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ**

*Чувашский государственный педагогический университет имени И. Я. Яковлева*

**Аннотация.** В работе рассматривается предельное состояние составных призматических стержней при кручении. Предполагается, что составляющие стержня являются идеально-пластическими при наличии трансляционной анизотропии. Отметим, что случай составных призматических стержней из изотропного идеальнопластического материала рассматривался Я. Рыхлевским [3].

**Ключевые слова:** кручение, напряжение, предел текучести, предельное состояние, призматические стержни.

УДК: 539.374

Рассмотрим составной прямоугольный призматический стержень, состоящий из двух частей (рис. 1а).

В первой области (рис. 1б) условие пластичности имеет вид [2]:

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = k_0^2, \quad k_0, k_1, k_2 - \text{const}, \quad (1)$$

во второй области (рис. 1в) условие пластичности примет вид:

$$(\bar{\tau}_{xz} - \bar{k}_1)^2 + (\bar{\tau}_{yz} - \bar{k}_2)^2 = \bar{k}_0^2, \quad \bar{k}_0, \bar{k}_1, \bar{k}_2 - \text{const}, \quad (2)$$

при этом  $\bar{k}_0 > k_0$ .

Положим

$$\tau_{xz} = k(\theta) \cos \theta, \quad (3)$$

$$\tau_{yz} = k(\theta) \sin \theta, \quad (4)$$

$$\text{tg} \theta = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}. \quad (5)$$

Из (1), (3), (4) найдем

$$k(\theta) = \rho \cos(\theta - \mu) + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(\theta - \mu)}, \quad k(\theta) > 0, \quad (6)$$

где

$$\rho = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \frac{k_1}{\rho} = \cos \mu, \quad \frac{k_2}{\rho} = \sin \mu, \quad \text{tg} \mu = \frac{k_2}{k_1}. \quad (7)$$

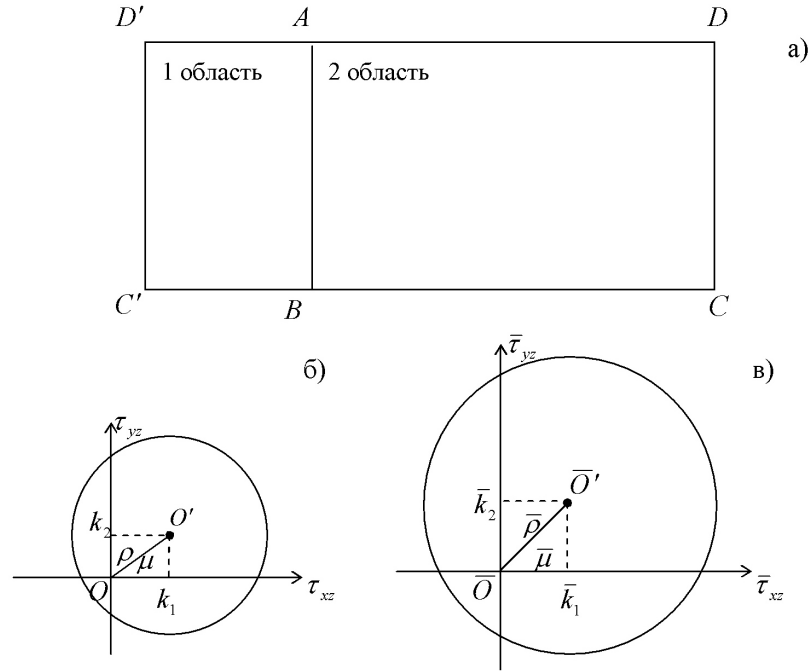


Рис. 1

Единственное дифференциальное уравнение равновесия, соответствующее уравнению пластичности (1), примет вид:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

Подставляя выражения (3), (4) в уравнение равновесия (8), получим:

$$(k' \cos \theta - k \sin \theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + (k' \sin \theta + k \cos \theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

где

$$k' = \frac{dk}{d\theta}. \quad (10)$$

Соответствующие уравнения для определения характеристик имеют вид:

$$\frac{dx}{k' \cos \theta - k \sin \theta} = \frac{dy}{k' \sin \theta + k \cos \theta} = \frac{d\theta}{0}. \quad (11)$$

Из уравнения (11) следует, что характеристики суть прямые

$$y = \frac{k' \sin \theta + k \cos \theta}{k' \cos \theta - k \sin \theta} \cdot x + \Phi(\theta), \quad \theta = \text{const}. \quad (12)$$

Рассмотрим различные случаи кручения прямоугольных стержней при трансляционной анизотропии.

На рис. 2 представлен случай кручения при  $\mu = 0$ .

При  $\mu = 0$ :

в первой области

вдоль границы  $C'B$  величина  $\theta = 0$ ,  $\tau_{xz} = \rho + 1$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ;

вдоль границы  $AD'$  величина  $\theta = \pi$ ,  $\tau_{xz} = -\rho + 1$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ;

вдоль границы  $D'C'$  величина  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = \sqrt{1 - \rho^2}$ ;

во второй области

вдоль границы  $BC$  величина  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\bar{\tau}_{xz} = \bar{\rho} + 1$ ,  $\bar{\tau}_{yz} = 0$ ;

вдоль границы  $CD$  величина  $\bar{\theta} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\bar{\tau}_{xz} = 0$ ,  $\bar{\tau}_{yz} = \sqrt{1 - \bar{\rho}^2}$ ;

вдоль границы  $DA$  величина  $\bar{\theta} = \pi$ ,  $\bar{\tau}_{xz} = -\bar{\rho} + 1$ ,  $\bar{\tau}_{yz} = 0$ .

Построим линии разрыва напряжений в первой области.

Линия разрыва  $C'R$  образована векторами касательных напряжений  $\tau_1$  и  $\tau_4$ , линия разрыва  $D'R$  — векторами  $\tau_3$  и  $\tau_4$ . Линия разрыва  $RL$  проходит через точку  $R$  параллельно прямой  $C'B$ .

Построим линии разрыва напряжений во второй области.

Линия разрыва  $CK$  образована векторами касательных напряжений  $\bar{\tau}_1$  и  $\bar{\tau}_2$ , линия разрыва  $DK$  — векторами  $\bar{\tau}_2$  и  $\bar{\tau}_3$ . Линия разрыва  $KM$  проходит через точку  $K$  параллельно прямой  $CB$ .

В плоскости  $AMNL$  имеем линию разрыва  $LN$ , образованную векторами  $\bar{O}T$  и  $\bar{O}P$ . В плоскости  $LBN$  получим линию разрыва  $BN$ , образованную векторами  $\bar{O}P$  и  $\bar{\tau}_1$ .

Линии разрыва  $LN$  и  $BN$  пересекаются в точке  $N$ . Соединив точки  $N$  и  $M$ , имеем линию разрыва  $NM$ .

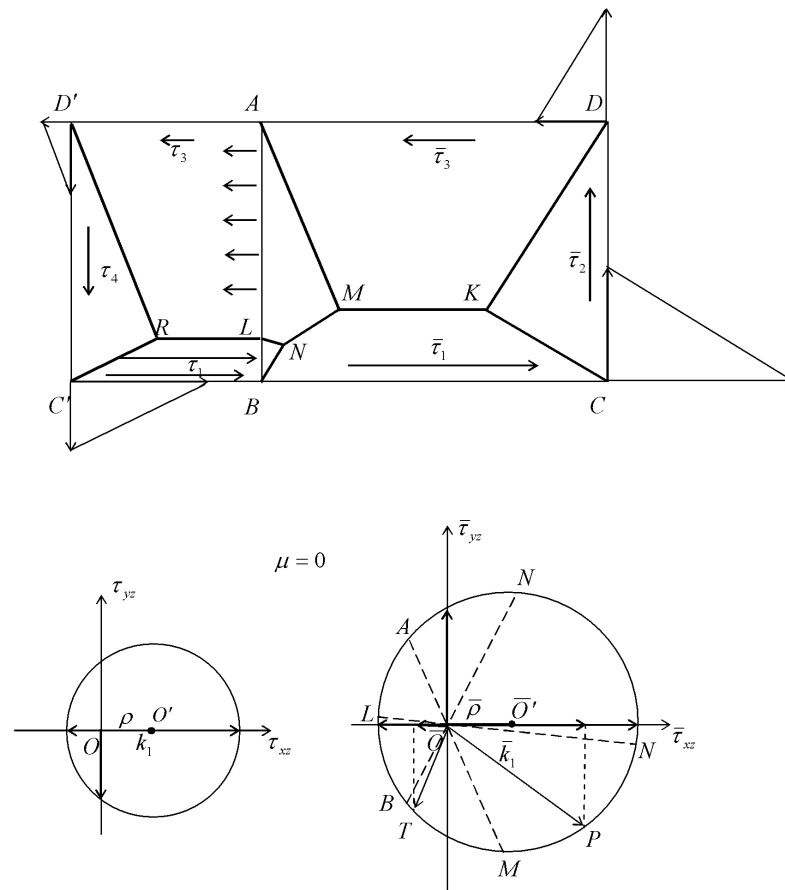


Рис. 2

Аналогично, рассмотрим случаи при  $\mu = \frac{\pi}{4}$  и  $\mu = \frac{\pi}{2}$ .

При  $\mu = \frac{\pi}{4}$ :

в первой области

вдоль границы  $C'B$  величина  $\theta = 0$ ,  $\tau_{xz} = \frac{\sqrt{2}(\rho + \sqrt{2 - \rho^2})}{2}$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ;

вдоль границы  $AD'$  величина  $\theta = \pi$ ,  $\tau_{xz} = \frac{\sqrt{2}(-\rho + \sqrt{2 - \rho^2})}{2}$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ;

вдоль границы  $D'C'$  величина  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = \frac{\sqrt{2}(\rho + \sqrt{2 - \rho^2})}{2}$ ;

во второй области

вдоль границы  $BC$  величина  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\bar{\tau}_{xz} = \frac{\sqrt{2}(\bar{\rho} + \sqrt{2 - \bar{\rho}^2})}{2}$ ,  $\bar{\tau}_{yz} = 0$ ;

вдоль границы  $CD$  величина  $\bar{\theta} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\bar{\tau}_{xz} = 0$ ,  $\bar{\tau}_{yz} = \frac{\sqrt{2}(\bar{\rho} + \sqrt{2 - \bar{\rho}^2})}{2}$ ;

вдоль границы  $DA$  величина  $\bar{\theta} = \pi$ ,  $\bar{\tau}_{xz} = \frac{\sqrt{2}(-\bar{\rho} + \sqrt{2 - \bar{\rho}^2})}{2}$ ,  $\bar{\tau}_{yz} = 0$ .

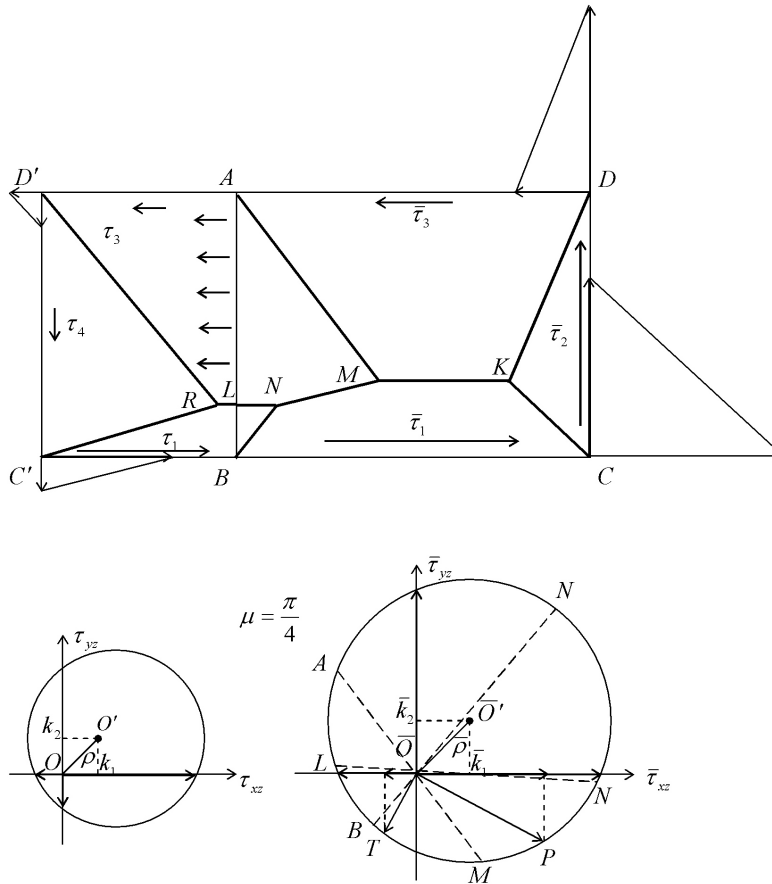


Рис. 3

При  $\mu = \frac{\pi}{2}$ :

в первой области

вдоль границы  $C'B$  величина  $\theta = 0$ ,  $\tau_{xz} = \sqrt{1 - \rho^2}$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ;

вдоль границы  $AD'$  величина  $\theta = \pi$ ,  $\tau_{xz} = \sqrt{1 - \rho^2}$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ;

вдоль границы  $D'C'$  величина  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = -\rho + 1$ ;

во второй области

вдоль границы  $BC$  величина  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\bar{\tau}_{xz} = \sqrt{1 - \bar{\rho}^2}$ ,  $\bar{\tau}_{yz} = 0$ ;

вдоль границы  $CD$  величина  $\bar{\theta} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\bar{\tau}_{xz} = 0$ ,  $\bar{\tau}_{yz} = \bar{\rho} + 1$ ;  
 вдоль границы  $DA$  величина  $\bar{\theta} = \pi$ ,  $\bar{\tau}_{xz} = \sqrt{1 - \bar{\rho}^2}$ ,  $\bar{\tau}_{yz} = 0$ .

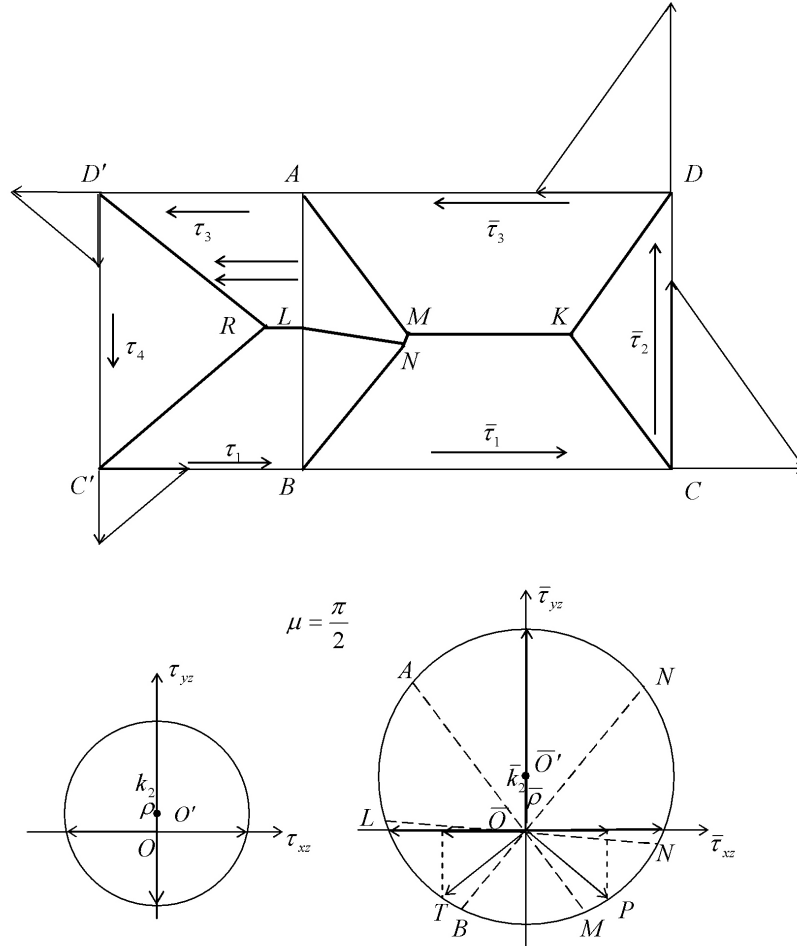


Рис. 4

Таким образом, дано построение напряженного состояния в 1-ой и 2-ой областях составного призматического стержня прямоугольного сечения.

**ЛИТЕРАТУРА**

[1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.  
 [2] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 576–579.  
 [3] *Рыхлевский, Я.* Об обобщении одной классической задачи теории идеальной пластичности/Я. Рыхлевский// Сб. пер. "Механика". – 1979. – № 3.

*E. A. Derevyannih*

**ABOUT A LIMITING CONDITION OF PIECEWISE AND NON-UNIFORM  
ANISOTROPIC PRISMATIC CORES OF POLYGONAL SECTION AT TORSION**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** In work the limiting condition of compound prismatic cores is considered at torsion. It is supposed that components of a core are ideally plastic in the presence of transmitting anisotropy. We should note that the case of compound prismatic cores from an isotropic ideally plastic material was considered by Y. Rykhlevsky [3].

**Keywords:** torsion, tension, fluidity limit, limiting condition, prismatic cores.

*Деревянных Евгения Анатольевна*

*аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

**e-mail:** jane-evgeniya@yandex.ru

*Derevyannih Evgeniya Anatolevna*

*Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*



**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ТОНКОЙ ПЛАСТИНЕ ИЗ  
УПРУГО-ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ  
ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ  
ОТВЕРСТИЕМ ПРИ ДВУОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ**

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева*

**Аннотация.** Рассматривается двuosное растяжение тонкой пластины, ослабленной круговым отверстием. Материал предполагается упруго-идеальнопластическим, в пластической области имеет место трансляционная анизотропия. В нулевом и первом приближениях [1] определено перемещение в упругой и пластической областях.

**Ключевые слова:** перемещение, напряжение, упругость, пластичность, трансляционная анизотропия, растяжение, отверстие, пластина.

УДК: 539.374

Определим перемещение в пластической и упругой областях. Характер изменения деформированного состояния в процессе нагружения представляется следующим образом: вначале возрастают упругие деформации; затем, когда граница упругопластического состояния материала достигает некоторой точки тела, процесс изменения упругих деформаций в ней прекращается, так как изменения напряжений в пластической области в рассматриваемом случае не происходит. При дальнейшем возрастании нагрузок возникают пластические деформации.

Отметим работу [3], в которой рассмотрена анизотропия по Мизесу-Хиллу.

В нулевом исходном осесимметричном состоянии  $v^{(0)} = 0$ . Компоненты напряжения в упругой и пластической областях определены в работе [2].

Согласно [1] и [2] определим перемещение в упругой зоне, будем считать материал несжимаемым, коэффициент Пуассона  $\mu = \frac{1}{2}$

$$u^{(0)e} = \frac{k}{2E} \left[ (2 - \alpha) \rho + \frac{3\alpha}{\rho} \right], \quad v^{(0)e} = 0, \quad (1)$$

где  $E$  – безразмерный модуль упругости, отнесенный к пределу текучести  $k_0$ .

В пластической зоне согласно [2] и ассоциированному закону имеем

$$\begin{aligned} e_{\rho}^{(0)p} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\rho}} = 0, \\ e_{\theta}^{(0)p} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\theta}} = \lambda. \end{aligned} \quad (2)$$

Упругие деформации примут вид

$$\begin{aligned} e_{\rho}^e &= \frac{1}{E} \left( \sigma_{\rho} - \frac{1}{2} \sigma_{\theta} \right), \\ e_{\theta}^e &= \frac{1}{E} \left( \sigma_{\theta} - \frac{1}{2} \sigma_{\rho} \right), \\ e_{\rho\theta}^e &= \frac{\tau_{\rho\theta}}{2G}. \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно [2] из (3) получим

Поступила 30.04.2012

$$\begin{aligned} e_{\rho}^{(0)e} &= \frac{k}{E} \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right), \\ e_{\theta}^{(0)e} &= \frac{k}{E} \left(1 + \frac{\alpha}{\rho}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно [1] запишем соотношения для деформаций

$$\begin{aligned} e_{\rho} &= \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \rho}, \quad e_{\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v^{(n)}}{\partial \theta} + \frac{u^{(n)}}{\rho}, \\ e_{\rho\theta} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v^{(n)}}{\partial \rho} - \frac{v^{(n)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда из (5) в нулевом приближении имеем

$$e_{\rho}^{(0)} = \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \rho}, \quad e_{\theta}^{(0)} = \frac{u^{(0)}}{\rho}, \quad e_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (6)$$

Из (2), (4), (6) найдем

$$u^{(0)p} = \frac{k}{E} [\rho - 2\alpha \ln \rho] + C, \quad v^{(0)p} = 0. \quad (7)$$

Условия сопряжения на упругопластической границе имеют вид

$$u^p|_{\rho=1} = u^e|_{\rho=1}; \quad v^p|_{\rho=1} = v^e|_{\rho=1}. \quad (8)$$

Из (1), (7) и условий сопряжения (8) получим

$$u^{(0)p} = \frac{k}{E} [\alpha + \rho - 2\alpha \ln \rho], \quad v^{(0)p} = 0. \quad (9)$$

Из (2), (4), (6) найдем

$$\lambda^{(0)} = -\frac{2k\alpha \ln \rho}{E\rho}. \quad (10)$$

Рассмотрим первое приближение. Компоненты напряжения в упругой и пластической областях определены в работе [2].

Согласно [1] и [2] в упругой области получим перемещения

$$\begin{aligned} u^{(I)e} &= -\frac{1}{E} (1 + \mu) (k'_1 + k'_2) \frac{1}{\rho} + \frac{1}{E} \left[ \frac{1+\mu}{3\rho^3} - \frac{2}{\rho} \right] (1 - \alpha) P' \cos 2(\theta + \mu) - \\ &- \frac{1}{E} \left[ -\frac{2(1+\mu)}{3\rho^3} + \frac{2}{\rho} \right] P' \cos 2(\theta + \mu) - \frac{1}{E} \left[ (1 + \mu) \left( \rho - \frac{1}{\rho^3} \right) + \frac{4}{\rho} \right] \cos 2\theta, \\ v^{(I)e} &= \frac{1}{E} \left[ \frac{1+\mu}{3\rho^3} + \frac{1-\mu}{\rho} \right] (1 - \alpha) P' \sin 2(\theta + \mu) - \frac{1}{E} \left[ -\frac{2(1+\mu)}{3\rho^3} - \frac{1-\mu}{\rho} \right] P' \sin 2(\theta + \mu) + \\ &+ \frac{1}{E} \left[ (1 + \mu) \left( \rho + \frac{1}{\rho^3} \right) + \frac{2(1-\mu)}{\rho} \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

В пластической зоне согласно [2] и ассоциированному закону имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned} e_{\rho} &= e_{\rho}^p = \lambda [\sigma_{\theta} - A + P' \cos 2(\theta + \mu)], \\ e_{\theta} &= e_{\theta}^p = \lambda [\sigma_{\rho} - A - P' \cos 2(\theta + \mu)], \\ e_{\rho\theta} &= e_{\rho\theta}^p = \lambda [P' \sin 2(\theta + \mu) - \tau_{\rho\theta}]. \end{aligned} \quad (12)$$

В соотношениях (12) присутствуют компоненты пластической деформации, так как только они испытывают приращения в пластической зоне при возрастании нагрузки, причем при  $t = 0$  имеют место равенства  $e_{\rho}^p = e_{\theta}^p = e_{\rho\theta}^p = 0$ . Момент времени  $t = 0$  для каждой точки  $A$  отсчитывается от момента прохождения через нее упругопластической границы.

Полные деформации при  $t = 0$ , т. е. в момент возникновения пластических деформаций, отличны от нуля и совпадают с упругими деформациями, накопленными элементом тела к моменту достижения им предела текучести.

Из (12) получим

$$\begin{aligned} e_{\rho}^{(I)p} &= \lambda^{(0)} \left( \sigma_{\theta}^{(I)} + P' \cos 2(\theta + \mu) \right), \\ e_{\theta}^{(I)p} &= \lambda^{(0)} \left( \sigma_{\rho}^{(I)} - P' \cos 2(\theta + \mu) \right) + \lambda^{(I)} \left( \sigma_{\rho}^{(0)} - 2k \right), \\ e_{\rho\theta}^{(I)p} &= \lambda^{(0)} \left( P' \sin 2(\theta + \mu) - \tau_{\rho\theta}^{(I)} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно [1], (3), (5), (17) дифференциальные уравнения для определения перемещения в пластической области в первом приближении примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(I)}}{\partial \rho} &= \frac{1}{2E} (k'_1 + k'_2 + 3P' \cos 2(\theta + \mu)) - \frac{\alpha}{E\rho} (k'_1 + k'_2 + 3P' \cos 2(\theta + \mu)) - \\ &- \frac{2k\alpha \ln \rho}{E\rho} (k'_1 + k'_2), \\ \frac{\partial v^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{v^{(I)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{(I)}}{\partial \theta} &= -P' \sin 2(\theta + \mu) \left( \frac{1}{G} + \frac{8k\alpha \ln \rho}{E\rho} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Из уравнений (14) получим

$$\begin{aligned} u^{(I)p} &= C_1 + \frac{(\rho - 2\alpha \ln \rho - 2k\alpha \ln^2 \rho)(k'_1 + k'_2)}{2E} + \frac{3\rho - 2\alpha \ln \rho}{2E} P' \cos 2(\theta + \mu), \\ v^{(I)p} &= C_1 + C_2 \rho + \frac{P' \sin 2(\theta + \mu)}{EG} (3G\rho \ln \rho + 2G\alpha \ln \rho + 2G\alpha - E\rho \ln \rho + \\ &+ 8Gk\alpha \ln \rho + 8Gk\alpha). \end{aligned} \quad (15)$$

Из (11), (15) и условий сопряжения (8) найдем коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$ .

$$\begin{aligned} C_1 &= L_1 + L_2 \cos 2(\theta + \mu) - \frac{4}{E} \cos 2\theta, \\ C_2 &= -L_1 - L_2 \cos 2(\theta + \mu) + L_3 \sin 2(\theta + \mu) + \frac{4}{E} (\cos 2\theta + \sin 2\theta), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= -\frac{1}{2E} (1 + 2\mu) (k'_1 + k'_2), \\ L_2 &= \frac{P'}{2E} \left( 2 \left( -\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\mu \right) (1 - \alpha) - 2 \left( \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\mu \right) - 3 \right), \\ L_3 &= \frac{P'}{E} \left( \left( \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\mu \right) (1 - \alpha) - \left( -\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\mu \right) \right). \end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [2] *Кержаев, А. П.* Упругопластическое состояние тонкой пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии / А. П. Кержаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния – 2011. – № 2 (10). – С. 124-130.
- [3] *Павлова, Т. Н.* Упругопластическое состояние тонкой пластины из анизотропного материала, ослабленной отверстием под действием растягивающих усилий / Т. Н. Павлова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния – 2010. – № 2 (8). – С. 112-122.

A. P. Kerzhaev

**ABOUT DEFINITION OF MOVINGS IN THE THIN PLATE FROM  
ELASTOPLASTIC THE MATERIAL AT THE TRANSMITTING ANISOTROPY  
WEAKENED BY THE CIRCULAR OPENING AT BIAXIAL STRETCHING**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** Biaxial stretching of the thin plate weakened by a circular holes is considered. The material is supposed to be elastoplastic, in plastic area transmitting anisotropy takes place. In zero and first approximations [1] moving in elastic and plastic areas is defined.

**Keywords:** moving, tension, elasticity, plasticity, transmitting anisotropy, stretching, hole, plate.

*Кержаев Александр Петрович*

*аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: alex\_kerg@mail.ru*

*Kerzhaev Alexandr Petrovich*

*Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

## К 75-ЛЕТИЮ ВИТАУТА ПЕТРОВИЧА ТАМУЖА



Профессор Витаут Петрович Тамуж является выдающимся ученым-механиком и организатором науки.

От имени коллектива Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, редакции журнала "Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева" сердечно поздравляем Витаута Петровича Тамужа с семидесятипятилетием, желаем крепкого здоровья, многих новых успехов.

Б. Г. Миронов

Ректор

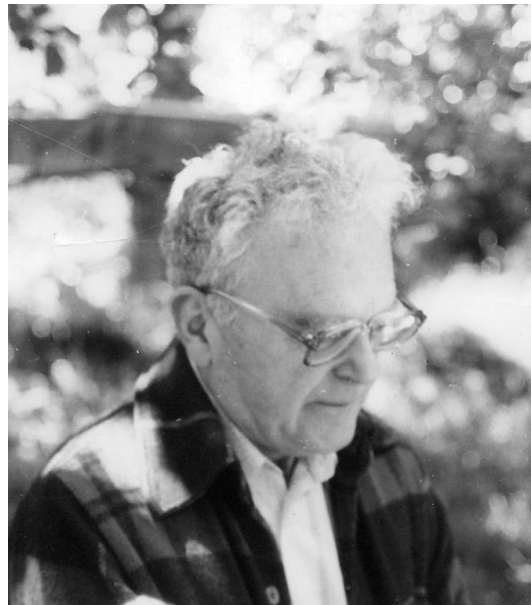
Д. Д. Ивлев

В. П. Тамуж

## О РАБОТЕ В МЕХАНИКЕ

За время моей работы в механике мною (с соавторами) опубликовано 6 книг [1-6]. Если учитывать также повторные издания и переводы на английский и немецкий языки, то получается 11 книг. Опубликовано также более 200 статей. Конечно, никто на свете не может в жизни дать такое число новых результатов (может быть, к такому количеству идей могут приблизиться только самые гениальные ученые, например Леонард Эйлер). Обычные научные сотрудники могут быть довольны, если они причастны к решению одной или нескольких проблем. Я в своей работе могу выделить три основных направления – проблемы.

Первая связана с динамикой жестко-пластического тела, которой занимался в начале шестидесятых годов под руководством многоуважаемого профессора Гавриила Семеновича Шапиро (фото).



*Гавриил Семенович Шапиро*

Обобщая вариационный принцип Гауса применительно к динамике жестко-пластического тела, мы сформулировали выражение, минимум которой выделяет истинное движение из всех кинематически возможных движений жестко-пластической конструкции [7]. Статья была замечена и обсуждена в мировой научной литературе. К сожалению, вторая статья [8] на эту тему прошла незамеченной, наверное, потому, что она опубликована в менее престижном журнале и название ее отражает лишь рассмотренный конкретный пример. В самом деле, сущность статьи заключалась в предложении метода конечных элементов к динамике жестко-пластических тел. Вышеупомянутый функционал [7] тогда сводится к квадратичной форме с линейными ограничениями, т. е. задача сводится к проблеме квадратичного программирования.

Второе направление моих работ в механике относится к шестидесятым годам и связано с переходом на работу в новом, только что созданном Институте механики полимеров в Риге. Первое задание было связано с исследованием циклической усталости нового класса материалов – композитов. Благодаря достаточно современному оборудованию и участию в работе прекрасного экспериментатора П. П. Олдырева удалось показать необратимость накопления повреждений в стеклотекстолите. Наши результаты были опубликованы в 1967 году [9], наглядно показав деградацию свойств тканевого композита при длительном циклическом нагружении (рис. 1).

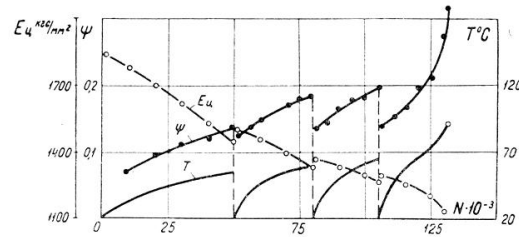


Рис. 1. Влияние отдыха на  $E_u$ ,  $\psi$  и  $T$  при циклическом деформировании стеклотекстолита.  
 $r = -1$ ;  $\sigma_a = 5,6$  кгс/мм<sup>2</sup>.

При определенном уровне деградации наступает полное разрушение образца материала. Мне до сих пор неизвестна какая-нибудь работа, в которой до нас было бы экспериментально четко показано накопление повреждений в материале, приводящее к его разрушению. Экспериментальные результаты измерения деградации свойств материалов с соответствующими моделями были сопоставлены с прямым измерением физическими методами микротрещин в полимерах. Результаты были собраны в книге [1].

В шестидесятых годах в механике твердого тела создалась любопытная ситуация. В англоязычных журналах слово "повреждение" (damage) практически не появлялось. Все занимались механикой разрушения, определяя условия прорастания одиночной трещины в неповрежденном материале. В русских научных журналах (за одним исключением – Г. И. Бренблатт) публиковались только модели описания накопления повреждений. Модели были предложены знаменитыми учеными-механиками: Ю. Н. Работновым, В. В. Новожиловым, А. А. Ильюшиным, Л. М. Качановым и др. Все модели фактически были получены обобщением и развитием идей разных вариантов теорий пластичности (кстати, в семидесятых годах ситуация изменилась прямо на противоположную). Поскольку в Риге была развита статистическая теория пластичности, то логично возникла идея построения теории накопления повреждений, основанная на учете множества разноориентированных микротрещин и их усреднения. Основы этого подхода были заложены в 1968 году [10]. Было показано, что если поврежденное состояние характеризуется скалярной функцией на сфере, то это состояние можно описать лишь бесконечным рядом симметричных тензоров. Наш соавтор А. Ж. Лагздинь развил теорию для общего случая, когда состояние материала характеризуется не только скалярной функцией на сфере, но также векторной функцией (теория локальности деформаций) и даже более сложными объектами в локальной системе координат на сфере. Результаты были собраны и опубликованы в книге [5].

Третья проблема была связана с конечной стадией разрушения, когда магистральная трещина проходит через материал с повреждениями (разно ориентированными микротрещинами). Для решения этой фундаментальной проблемы была использована система уравнений о взаимодействии системы трещин, в двумерном случае выведенная в книге В. В. Панасюка, Саврука, Дацишин. Эта система уравнений является слишком сложной для ее решения, но если ввести малый параметр  $\lambda$  (отношение размера микротрещин к размеру макротрещины)

и разложить решение в ряд, то возможно получить член при  $\lambda^2$ , который показывает влияние микротрещин на коэффициент интенсивности напряжений макротрещины. Результаты были опубликованы в 1984 году [11] и сводятся к довольно сложному, но легко программируемому выражению. Статья, безусловно, не могла бы быть сделана без участия соавтора – Натальи Борисовны Ромалис, безвременно, к большому сожалению, ушедшей от нас. Статья была напечатана в нашем журнале "Механика композитных материалов", который был малознаком ученым, решающим проблемы распространения трещин. Поэтому ссылки на нашу приоритетную статью начали появляться только после выхода обобщающей книги [6] и обзорной статьи [12], когда этот подход был опробован на множестве задач и нагружений, в том числе термических.



## СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ В. П. ТАМУЖА

- [1] Тамуж, В. П. Микромеханика разрушения полимерных материалов / В. П. Тамуж, В. С. Куksenko. – Рига : Зинатне, 1978 – 294 с.
- [1a] Tamuzs, V. Fracture micromechanics of polymer materials / V. Kuksenko, V. Tamuzs // English translation - Martinus Nijhoff Publ. – 1981. – p. 310.
- [2] Тамуж, В. П. Сопротивление жестких полимерных материалов / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. – 2-е изд., дополненное. – Рига : Зинатне, 1972.
- [2a] Тамуж, В. П. Сопротивление полимерных и композитных материалов / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. – 3-е изд., переработанное и дополненное. – Рига : Зинатне, 1980.
- [2b] Tamuzs, V. Mechanik der Polymerwerkstoffe / A. Malmeisters, V. Tamuzs, G. Teters // German translation - Akademie-Verlag. - Berlin. 1977. – p. 597.
- [3] Тамуж, В. П. Разрушение структурно-неоднородных тел / Н. Б. Ромалис, В. П. Тамуж. – Рига : Зинатне, 1989. – 224 с.
- [4] Тамуж, В. П. Разрушение конструкций из композитных материалов / В. П. Тамуж и др.; под ред. В. П. Тамужа и В. Д. Протасова. - Рига : Зинатне, 1986. – 264 с.
- [5] Тамуж, В. П. Метод ориентационного усреднения в механике материалов / А. Ж. Лагздинь, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс, А. Ф. Крегерс. – Рига : Зинатне, 1989. – 190 с.
- [5a] Tamuzs, V. Orientational Averaging in Mechanics of Solids / V. Tamuzs // English translation by Longman Publ. – 1992.
- [6] Tamuzs, V. Fracture of Solids with Microdefects, Nova Science Publishers, Inc., Huntington / V. Tamuzs, N. Romalis and V. Petrova. New York, 2000. – p. 238.
- [7] Тамуж, В. П. Об одном минимальном принципе в динамике жестко-пластического тела / В. П. Тамуж // Прикладная математика и механика. – 1962. – № 4.
- [8] Тамуж, В. П. Пластические деформации круговой арки и кольца под действием динамической нагрузки / В. П. Тамуж // Изв. АН ОН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 2.
- [9] Тамуж, В. П. Изменение свойств стеклотекстолита при циклическом растяжении-сжатии / В. П. Тамуж, П. П. Олдырев // Механика полимеров. – 1967. – № 5.
- [10] Тамуж, В. П. Вариант построения феноменологической теории разрушения / В. П. Тамуж, А. Ж. Лагздиньш // Механика полимеров. – 1968. – № 5.
- [11] Тамуж, В. П. Распространение магистральной трещины в теле с распределенными микротрещинами / В. П. Тамуж, Н. Б. Ромалис // Механика композитных материалов. – 1984. – № 1.
- [12] Tamuzs, V. A survey of macro-microcrack interaction problems / V. Petrova, V. Tamuzs and N. Romalis. – Applied Mechanics Reviews. – 2000. – Vol. 53. – No. 5. p. 117-146.

## ИЗ ВОСПОМИНАНИЙ

Прошло так много времени – уже больше 55 лет, как мы собрались вместе на Ленинских горах. Но это самые светлые, самые лучшие годы и воспоминания. И хочется, чтобы эти воспоминания не исчезли бесследно с нами, но хоть малой, бесконечно малой величиной остались и после нас.

Нашу жизнь можно четко разделить на периоды:

- до поступления в МГУ,
- становление людьми в стенах МГУ и
- наш дальнейший путь вперед.

Итак, первая часть моей жизни.

Родился я в 1935 году в Латвии. Говорят, что еле выжил семимесячным "недоноском". И вряд ли кто мог представить, что после 70 лет этот человек уже весом больше 110 кг будет писать воспоминания.

Первые мои воспоминания относятся к военному времени, но это совсем отдельная история. Помню, что 9 мая 1945 года был светлым красивым весенним днем. Победная канонада прогремела ночью, и день был тихий и солнечный.

Учился в сельской школе на самой окраине Латвии. Учеба шла очень легко, много читал довоенные книги и первые советские издания. В 1953 году газеты писали о новом Московском университете, отсюда и возникло четкое желание учиться именно там. То, что попал на механико-математический факультет, было в некотором смысле случайностью.

В 1954 году было объявлено о выделении для Латвии нескольких мест в разных московских вузах, в том числе в МГУ. Одно место было именно на механико-математическом факультете. Будучи медалистом, я легко прошел собеседование, и моя мечта исполнилась сравнительно просто и легко. Вообще говоря, о будущей специальности у меня было очень смутное представление. Меня сильно увлекала живая природа, и если бы не идеология Лысенко, что там все очень просто, – я бы пошел в биологию. Чистую математику я не хотел. Хотел что-то прикладное, но чтобы там было много математики. Поэтому механика оказалась естественным выбором. Итак, осенью 1954 года я на третьей полке общего вагона прибыл в Москву.

С этого начался московский период, который определил дальнейшую жизнь. Наша академическая группа 1-17 была просто замечательная, во-первых, тем, что, по-видимому, она была последней в списке и состояла из разных национальностей: Ли Хен Вон – из Кореи, Зафар Усманов – из Таджикистана, Карлос Вега – испанец и многие другие. Наша группа была микромоделью идеального общества, где вопрос национальности вообще не возникает, где все усилия и труды подчинены только учебе и науке. Приехав из сельской глубинки в учебный и научный центр высшего мирового уровня, я конечно испытал сильный шок. Были и языковые трудности. Во время первого семестра не было ни часа для отдыха. Помню, что за все это время только один раз позволил сходить в кино, и то только потому, что все говорили об этом фильме – "Бродяга". Первая сессия прошла успешно – одна четверка. Дальше уже было немного легче, но, как правило, повышенную стипендию почти никогда не получал. Всегда одна четверка мешала.

Наши преподаватели были очень разные. Но всех их объединяла полная отдача своему предмету и своим студентам. Всегда с восхищением вспоминаю Наталию Давидовну Айзенштадт. Как она с горящими глазами бегала по рядам и советовала: "За хвост этот интеграл, за хвост его!!" И сама была чуть похожа на знак интеграла.

Другие преподаватели – другие манеры. Изложение теоретической механики уважаемым профессором Слезкиным было отточено до абсолютизма. Все мы помним его спокойный голос: "Зафиксируем...". А когда звучал звонок, изложение прерывалось на полуслове. Записанные лекции были идеальны (особенно для сдачи экзамена). Дифференциальную геометрию читал многоуважаемый профессор С. Фиников, уже имеющий почтенный возраст. Наш острослов Володя Партон так характеризовал его лекцию: "Профессор поворачивается к доске, спиной к студентам. Берет в правую руку мел, в левую – тряпку и начинает работать обеими руками одновременно, комментируя при этом свои действия страстным шепотом".

Но сколь разными ни были наши учителя, их объединяло одно качество: высочайший профессионализм, любовь к науке и увлеченность своими предметами. И это качество передавалось студентам, и в течение отведенного времени – пяти лет – полностью изменилась наша ментальность. Мы научились работать, приобщились к науке, получили крепкую основу для всей жизни, полюбили всю атмосферу нашего здания от зоны "В" до незабываемых 16-10 и 16-24.

Когда на третьем курсе мы распределились по специальностям, то мой выбор "Теория пластичности" опять был случайным. Пока я еще имел довольно смутное представление, что дает каждая кафедра. Выбрал "что-то романтическое", ближе к аэродинамике. Пригласил меня на собеседование Юрий Николаевич Работнов. На кафедре теории пластичности было мало желающих, и он предложил мне это направление. Не помню, согласился ли я или это было моё волевое решение, но следующие мои годы были связаны с теорией пластичности и научным руководителем Гавриилом Семеновичем Шапиро. Он был редактором сборника переводов "Механика", настоящим энциклопедистом механики и, пожалуй, эрудитом номер один по современной теории пластичности. Но, главное, – Гавриил Семенович был интеллигентом высшей пробы. Благодарность ему его ученики сохраняют на всю жизнь.

Наши университетские годы были, конечно, полны не только учебой. После первого курса уже можно было уделить время и другим занятиям. На меня, приехавшего из далекой сельской школы, большое впечатление произвели первые симфонические концерты в актовом зале. Часы, которые мы уделяли посещению Большого театра, Музея Пушкина и Дрезденской галереи, обогатили молодого парнишку, поменяли восприятие жизни.

Еще можно вспомнить о двух моих увлечениях. Интерес к биологии не проходил, хотя времени для серьезных занятий ею не было. Тем не менее, я посещал семинары Гельфанда по биологии. По его рекомендациям читал Шредингера "Что такое жизнь с точки зрения физики". Знакомые ребята с биологического факультета привели на лекции профессора Дубинина о влиянии облучения на наследственность, они проходили одновременно с какими-то агрессивными чтениями Лысенко.

Второе большое увлечение было связано с обществом студентов из Латвии и Прибалтики. Когда в Москве шла подготовка к большому событию – фестивалю молодежи и студентов, наши энергичные литовские друзья-студенты получили в городском комитете комсомола разрешение на открытие ансамбля "Балтикум", в котором участвовали студенты из Литвы, Латвии, Эстонии. Нам выделили помещение в МЭИ, где мы собирались каждое воскресенье до фестиваля и после него. Даже заказали себе особые шапочки-картузы. (Честно говоря, они несколько напоминали головные уборы швейцаров с золотой ленточкой).

Так прошли все пять лет. Жалко, что для всего не хватило времени. Довольно мало общался с однокурсниками. Не бывал на целине, так как каждое лето надо было косить сено нашей милой коровушке.

Наш курс был сильным. И рекомендаций в аспирантуру было больше, чем отведенных мест. На вступительном экзамене отвечал плохо. Получил четверку (с натягом). Профессор

Шапиро был весьма недоволен. Но все же удалось поступить в аспирантуру, и страстное желание остаться еще на три года в МГУ исполнилось.

В дипломной работе решал какую-то задачку по динамике жестко-пластического тела. Ничего особенного не было и в дальнейшем. Был случай. Однажды в читальном зале (уже на 15 этаже!) один мой друг обратил внимание на небольшую статью Пожарицкого в ПММ. Статья была о применении принципа Гауса в системах с сухим трением. Несомненно, идеальная пластичность родственна сухому трению. И пользуясь этой идеей как началом, удалось составить функционал и сформулировать минимальный принцип в динамике жесткопластического тела. Эмоции, когда понял, что с помощью минимизации этого функционала можно получить решение известных частных задач, были очень сильными. Профессор ознакомился с результатами и оценил: "Диссертация готова ... ну ладно – на 60%". Помню, как нес свою первую статью в редакцию ПММ. Был замечательный весенний солнечный день 12 апреля 1961 года. Это был день полета Гагарина. Вся Москва ликовала. Улицы полны народом. Наземный транспорт не ходит. И первая статья готова!

Можно бы еще много вспоминать. Когда уже статья вышла, "конкурирующая фирма" в лице профессора А. Ржаницина дала поручение своему аспиранту М. Рейтману показать, что мои результаты неверны. Рейтман уже написал соответствующую статью, но, как человек честный и этический, изложил также лично мне свои соображения. После моего ответа он забрал свою статью из редакции и мы с ним еще подружились.

Аспирантские годы отличались от прежних. Я уже женился и много можно вспоминать, как искал возможность жить вместе с женой. Поиски работы для нее, временная прописка, изготовление фальшивых временных пропусков для прохождения в общежитие МГУ (перенос печати круто сваренным яйцом) и т. д. Но кончаются и эти три года, приближается распределение. От факультета имел запрос остаться при кафедре. Но меня предупреждали, что поскольку я не имею московской прописки, то комиссия может не согласиться. Чтобы не попасть в Магадан, мне рекомендуют записаться резервным вариантом – запрос в Ригу. Уважаемый энергичный механик Латвии А. К. Малмейстер – тогда ректор Рижского политехнического института – сразу написал запрос. На комиссии председательствовал проректор Вовченко. Увидев на меня запрос из Латвии, он даже не рассматривал какие-то другие варианты. Так завершились мои 8 лет в МГУ и я вступил в новую фазу жизни, которая продолжается еще до сих пор.

Опять мне повезло, что встретился с крупным организатором науки А. К. Малмейстером, который отлично знал московскую школу механики, поскольку консультантом его докторской диссертации был Александр Антонович Ильюшин. Вторая удача связана с тем, что в начале 60-х годов быстро развивалось производство новых высокопрочных синтетических смол и термопластов. Стало ясно, что их рациональное использование требует исследования механических свойств изделий и материалов (в том числе композитов) на их основе. Президент АН СССР М. Келдыш приехал в Ригу и признал наш город подходящим местом для создания центра по механике полимеров. Таким образом в 1963 году был создан первый в Советском Союзе (и, пожалуй, уникальный в мире) Институт механики полимеров, который под этим названием существует до сих пор, хотя его научная направленность намного шире. Директором Института был назначен А. К. Малмейстер, а я стал руководителем одной из лабораторий. Композитные материалы и изделия в 60-х годах считались закрытой темой из-за их применения в военной технике. Благодаря умению и стойкости нашего директора удалось получить много заказов (хоздоговорных работ) от военно-промышленного комплекса, одновременно сохраняя полную академическую свободу.

Синтез мехматовской школы с актуальными задачами механики создал условия для успеха как в научном, так и "карьерном" плане. В 1972 году защитил докторскую диссертацию, где были объединены механика композитов, разрушения и повреждений. Оппонентами согласились быть профессора: В. В. Болотин – безусловно, наиболее требовательный и эрудированный механик того времени, В. Д. Ключников – представитель моей кафедры и А. А.

Лебедев – представитель украинской школы. Наш институт стал известным центром по механике композитных материалов. Журнал "Механика полимеров" довольно скоро изменил свое название на "Механику композитных материалов". (Кстати, более 20 лет я являюсь главным редактором этого журнала, который одновременно издается в Нью-Йорке на английском и в Риге – на русском языках; к моему удовлетворению постоянно (около 10% в год) увеличивает число подписчиков и импакт-фактор.)

Многие ученые защищали свои диссертации по механике композитов в совете при нашем институте. К середине восьмидесятых годов можно было сказать, что основы механики композитов уже созданы. К этому времени композиты успешно применялись в авиационной и космической технике. Эти прикладные разработки были отмечены "закрытыми" Государственными и Ленинскими премиями. Помню один вечер осенью 1984 года в финской бане после успешной защиты какой-то диссертации. Беседовал с мехматовским профессором Николаем Сергеевичем Бахваловым, с которым я был весьма дружен. И в этом приятном разговоре Коля выдвигает обдуманную им идею, что надо получить "открытую-Государственную премию по механике композитов. Сначала я просто расхохотался. Но Николай Сергеевич был не только крупным математиком, создавшим теорию усреднения для расчета композитов, он умел бороться и осуществлять свои идеи. Как говорят, "процесс пошел". Постепенно сформировалась команда, объединяющая ученых из разных центров. От механико-математического факультета туда вошли Николай Сергеевич и Борис Победря, от Риги – четыре человека. Уже летом 1985 года мы с Колей Бахваловым выехали в Ленинградский университет для публичного обсуждения представленной работы. Ее защита прошла успешно, поддержал нас академик Новожилов, который к этому времени был уже болен. К ноябрьским праздникам 1985 года группе из 12 ученых была присуждена Государственная премия за цикл работ по созданию методов расчета конструкций из композитов. До сих пор я горжусь этой наградой.

В 1990 году произошли всем известные катаклизмы. В независимой Латвии сразу прекратились все хозяйственные работы с Россией и СНГ. Маленькой стране "большая механика" тоже была не нужна. Одно время Институт был на грани закрытия. Все, что было хорошо раньше, автоматически стало плохим. Крупные знаменитые производства (например, ВЭФ) были разворованы, закрыты или, в лучшем случае, превратились в кучу мелких предприятий. В том, что наш Институт выстоял, некоторую роль сыграло и мое отношение к процессу: "Все, что я умею в жизни – связано с механикой, поэтому буду ее и наш Институт отстаивать". Благодаря высокому научному уровню удалось интегрироваться в европейскую науку, получить новые европейские проекты, которые до сих пор дают принципиальную часть доходов для нашей работы. За эти годы я стал членом трех престижных Академий: Академии наук Латвии, European Academy of Sciences и Academia Europaea (АЕ). Наиболее престижной, пожалуй, является последняя. Там членами являются около 20 Нобелевских лауреатов, общее число членов ограничено числом две тысячи. От Латвии в АЕ до сих пор приняты только три члена. Очень приятно и интересно участвовать в ежегодных собраниях АЕ в наиболее достойных городах Европы. По работе, по разным приглашениям приходится бывать в разных странах. Недавно посчитал, что если советские республики считать отдельными странами, то я посетил не меньше 65 стран на всех континентах, кроме Антарктиды.

Желание увидеть новые места мне было присуще еще с молодости. Поэтому в некоторые экзотические страны, такие как Чили, Аргентину, Кению, Новую Зеландию, я поехал просто в качестве туриста. Пожалуй, первым таким путешествием была краткая поездка-поход в Крым вместе с Рудольфом Алексеевичем (просто Рудиком) Васиным летом 1955 года после первого курса. Потом, начиная с аспирантуры, я исходил практически все горы (включая Алтай, Памир, Камчатку, Тянь-шань и др.) Советского Союза. Это тогда можно было сделать очень недорого и увидеть необычайно красочные места.

В возрасте 74 лет, конечно, лично новых открытий уже не сделаешь. Но способность быстрой и уверенной оценки представленных результатов не только сохраняется, но и развивается.

Стал руководить аспирантами и докторантами. Многие мои ученики защитили свои диссертации и успешно работают в США, Швеции, России, Израиле и у себя дома – в Латвии. Недавно в Академии наук Латвии меня наградили большой академической медалью за развитие механики в Латвии. Эта награда приятна тем, что она выражает отношение и признание местных коллег. Кроме того, в течение 20 лет коллеги мне поручают быть президентом Латвийского национального комитета по механике.

Нашему курсу очень повезло, что среди нас, среди математиков, училась Алла Ярцева – неординарная личность. Благодаря ее усилиям вышел в свет трехтомник "Мы – математики с Ленинских гор". Мне неизвестен ни один пример аналогичного памятника молодым годам целого курса. Читая эти воспоминания, опять можно было себя представить молодым в стенах незабываемого механико-математического факультета МГУ. И возникал вопрос – почему среди механиков не нашлось личности, кто мог бы решить уже намного более легкую задачу: по образцу и подобию математиков добавить воспоминания механиков, чтобы был создан уникальный письменный памятник нашему курсу и факультету. Очень рад тому, что "процесс пошел". И дай Бог, чтобы нам удалось это прекрасное и трудное дело довести до конца.

## К 60-ЛЕТИЮ СЕРГЕЯ ИВАНОВИЧА СЕНАШОВА



Сергей Иванович Сенашов принадлежит к числу талантливых ученых-механиков, он внес большой оригинальный вклад в теорию пластичности, его работы говорят сами за себя.

От имени коллектива Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, редакции журнала "Вестник ЧГУУ им. И. Я. Яковлева" сердечно поздравляем Сергея Ивановича Сенашова с шестидесятилетием, желаем крепкого здоровья, новых творческих успехов.

Б. Г. Миронов

Д. Д. Ивлев

Ректор

С. И. Сенашов

## ИЗ ВОСПОМИНАНИЙ

*Учителям посвящаю*

*Нам не дано предугадать, как наше слово отзовется...*

Ф. И. Тютчев

Первые и самые главные мои учителя - это мои родители: мама Муза Дмитриевна - учитель математики и отец Иван Михайлович - фронтовик, комсомольский и партийный работник, а также бабушка Мария Александровна, учитель. Они научили самому главному: ходить, говорить, учиться, а также отношению к жизни.

Родился я в Красноярске. Сначала мы жили в школе, но этого я, естественно, не помню, потом - в коммунальной квартире. Хорошо помню грандиозные ледоходы на Енисее. Это было важнейшее событие для всего города: могучая река несла дома, стога и даже коров, после этого обязательно начинался подъем воды и все гадали: затопит или не затопит? Вообще, с рекой была тесно связана жизнь города, но после строительства ГЭС связь нарушилась.

Потом мы переехали в с. Каратузское (юг Красноярского края), затем - в с. Абан, а далее - в небольшой городок Канск. Везде были великолепные сибирские леса с грибами и ягодами, болота, речки, озера. Учеба в это время была просто каким-то довеском к этой замечательной свободной жизни. Все прекратилось с приездом в Красноярск. Пришлось сильно подналечь на учебу. Результатов удалось добиться по всем предметам, за исключением истории (все время путался в съездах КПСС) и английского, здесь отставание было полным.

Потерянный контакт с природой все-таки удалось восстановить и в Красноярске. Это были Красноярские Столбы - прочные гранитные скалы высотой до 100 метров, возвышающиеся среди тайги. До них можно было за час добраться на городском автобусе. На эти скалы уже более 150 лет лазают красноярцы, причем без страховки, а в качестве обуви использовали, примерно до начала 2000-х, обычные калоши.

Осенью 1968 г. я пришел на Столбы и вместе с компанией каких-то совсем незнакомых ребят, под морозящим дождем взобрался на вершины двух скал. И потом один или с друзьями старался хотя бы раз в неделю полазать по скалам. Осваивал новые для себя ходы и новые скалы. Каждое восхождение на новую скалу (без какой-либо страховки!) было ярким событием в жизни, к нему надо было психологически готовиться, настраиваться. "Ну, вот опять не залез, но в следующее воскресенье обязательно пройду, это ход!" Поэтому смело могу про себя сказать словами песни: "...Красноярские Столбы - фактор воспитания!"

В 1970 г. окончил школу и поступил на математический факультет Красноярского государственного университета, только что превратившегося из филиала Новосибирского университета в самостоятельный вуз. На факультете были две враждующие школы: алгебраистов и теории функций. Яркий представитель второй школы, В. Степаненко, вел у нас практические занятия по математическому анализу. Он часто увлекался и забывал давать обязательный материал, но заражал нас своей неистовой любовью к математике, всегда ценил любые наши успехи. Я считаю его одним из своих учителей.

Когда пришло время выбирать специализацию, то я решил пойти на кафедру алгебры, но кафедра в этот момент подверглась полному разгрому, и толковых преподавателей там не



осталось. Куда податься? Тут из Новосибирска приезжает молодой кандидат наук В. О. Бывтев, представитель школы Л. В. Овсянникова. Он предлагает заняться групповыми свойствами дифференциальных уравнений и долго рассказывает, что я должен сделать в курсовой работе. Я целый год ее выполняю, но, как оказалось, делаю все не так и не то. Результат налицо: освоил технику группового анализа и не стал бояться громоздких аналитических выкладок. В дипломной работе построил некоторые новые решения уравнений Навье–Стокса, описывающие нестационарные спиральные течения вязкой несжимаемой жидкости. Председатель ГЭК, молодой доктор наук из Новосибирска, Б. Д. Аннин предложил учиться в заочной аспирантуре. Я с радостью согласился.

К этому времени я уже председатель альпинистской секции университета, имею первый разряд по альпинизму и совершил ряд восхождений в горах Памира, Кавказа, Тянь-Шаня и Саяна. Во время аспирантуры моя альпинистская карьера практически обрывается. Был, правда, один выезд в горы Тувы, где уже на первом восхождении в моего товарища попадает молния, и мы целый день транспортируем его вниз и спасаем его.

В 1975 г. поступаю в заочную аспирантуру Института гидродинамики СО АН и одновременно работаю ассистентом в Красноярском госуниверситете. Б. Д. Аннин ставит мне задачу, которую я решаю всю жизнь: построить новые решения пространственных уравнений идеальной пластичности с условием текучести Мизеса. Мне сначала казалось, что поставленная задача не выполнима. Но, изучая работы механиков, приложивших руку к ее решению: Д. Д. Ивлева, Р. Хилла, В. Прагера, Б. Д. Аннина, М. А. Задояна, и применяя методы группового анализа, мне удалось отыскать некоторые новые решения. Я построил новый класс спирально-симметричных решений, еще один класс решений удалось свести к уравнению минимальных поверхностей и построить некоторые осесимметричные и плоские решения.

Как истинный учитель, Борис Дмитриевич Аннин учил меня проверять и перепроверять все и вся, стараться во всех построенных решениях искать механический смысл. Он настолько хорошо чувствует и понимает механику пластичности, что его фраза: “Я сердцем чувствую, что здесь что-то не так”, заставляла все проверять и перепроверять и находить вкрапшуюся ошибку.

Защита диссертации состоялась через день после похорон М. А. Лаврентьева, директора Института гидродинамики. Это, а также схватка между школами: Г. В. Иванова и Ю. В. Немировского, которая состоялась на защите А. Е. Алексеева, – он защищался до меня, – совсем не способствовали моему спокойствию. Только вмешательство Е. И. Шемякина позволило защите завершиться успешно. Моя защита завершилась после 9 часов вечера. Я уже не надеялся на благоприятный исход, хотя один из членов совета сказал мне: “Ты не сильно-то гордись своими результатами”. Мне было не до гордости, боялся, что завалят, тем более один оппонент не приехал и в срочном порядке он был заменен другим, с которым мы весь день перед защитой писали отзыв. Отзыв от ведущей организации я получил также от Г. И. Быковцева после выступления на его семинаре в Куйбышеве.

После защиты всегда хочется чего-то нового. Усиленно ищу новые методы решения задач пластичности, методов-то много, но к уравнениям пластичности они, увы, не применимы. Судьба сводит меня с А. М. Виноградовым. Он владеет техникой вычисления высших симметрий и законов сохранения, я понимаю, что эту технику можно использовать и для уравнений пластичности. Начинается совместная работа, которая приводит к вычислению всех высших симметрий и законов сохранения для двумерных уравнений пластичности. И самое главное, что эта техника позволяет правильно понять природу дифференциальных уравнений и роль симметрий в их изучении. Идея А. М. Виногорова была в том, что именно законы сохранения созданы для решения краевых задач, а не локальные симметрии. Это глубоко западает в душу. Пытаюсь научиться использовать законы сохранения для решения краевых задач, ищу подходы, но ничего. Рассказываю Б. Л. Рождественскому о том, что вычислил законы сохранения, а он: “А зачем они нужны?”. Я стал говорить, что он-то сам их тоже искал, а в ответ: “Ну и зря!”

После защиты диссертации возвращаюсь в горы. Покорять вершину с друзьями вместе. Восхождение на пик Ленина (7134 м) открывает новые горизонты, потом следуют пики Коммунизма (7495 м) и Е.Корженевской (7105 м). В 1984 г. успешное восхождение на пик Джигит по холодной северной стене приносит звание чемпиона России.

В марте 1989 г. поступаю в докторантуру Института машиноведения РАН в Москве, но перед этим в феврале участвую в трагической экспедиции по северной стене п. Коммунизма. Гигантский ледовый обвал уносит жизни трети состава восходителей.

В Москве я впервые в жизни занимаюсь только наукой: пишу статьи, оформляю диссертацию. В 1991 г. знакомлюсь очно с Д. Д. Ивлевым. В этом же году я защищаю докторскую диссертацию в ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, в Чебоксарах. Это происходит в день моего рождения в замечательном совете, который собрал практически всех ведущих специалистов по механике деформируемого твердого тела в СССР.

Наконец в 1996 г. я понял, как надо аналитически решать краевые задачи двумерной идеальной пластичности с помощью законов сохранения и вместе с моим учеником А. Н. Яхно мы эту идею реализовали, доведя ее до численных расчетов.

Следующее замечательное утверждение, которое вроде бы очевидно, но долго мной не понималось: все решения двумерной пластичности разбиваются на два класса. В первый класс попадают все особые решения, они давно описаны. Во второй класс попадают все остальные решения - они все могут быть построены из одного решения Прандтля с помощью точечных симметрий.

В 2000-2002 годах я руководил несколькими экспедициями и, наконец-то, взойшел на пик Хан-Тенгри (7010 м).

В 2006 г. мне удалось впервые в Красноярске открыть докторский совет по специальности 01.02.04 - Механика деформируемого твердого тела и в этом же году появились мои первые кандидаты наук по этой специальности.

В своей жизни прослеживаю две линии: "героическую", связанную с восхождениями, и "обыденную" - с решением научных задач. Сравнивая их, я пришел к мысли, что важнее и сложнее все-таки научные задачи. Если разбить восхождение на небольшие участки, то на каждом участке приходится решать достаточно рутинные задачи, преодолевая снег, лед и скалы, которые, в сущности, везде одинаковы. Те, кто смелее и техничнее, пройдут маршрут быстрее, а остальные - помедленнее. Но итог один: и те и другие взойдут на вершину, требуется долгое объяснение, чем отличается одно достижение от другого... В науке совсем не так. Мы стоим на грани известного и неизвестного, чтобы переступить эту грань и хоть ненамного отодвинуть границу незнаемого, одной смелости мало, нужно искать новый подход и совсем другое понимание задач, чем было у предшественников. Здесь нет места рутине, но она появляется неизбежно при технических выкладках и оформлении результатов.

Подводя итоги этому периоду жизни, можно выделить следующее:

1. Мои дети: Оля, Таня, Лада, Вася и Миланка.
2. Новые точные решения пространственных задач идеальной пластичности в стационарном и динамическом случаях.
3. Аналитическое решение краевых задач двумерной идеальной пластичности с помощью законов сохранения.
4. Построение новых классов решений двумерных уравнений пластичности из решения Прандтля с помощью симметрий.
5. Ученики – кандидаты наук: А. Яхно, П. Киряков, О. Гомонова, И. Коюпченко, Н. Юферова, Е. Грошак, А. Березнев, В. Волков, Л. Ермолаева, Л. Яхно и надеюсь, в 2012 году станет кандидатом наук Е. Филюшина.

**СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ С. И. СЕНАШОВА****1977**

1. Групповые свойства уравнений идеальной пластичности // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1977. – Вып. 28. – С. 109-117.

**1978**

2. Групповая классификация уравнений идеальной пластичности неоднородных тел // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1978. – Вып. 33. – С. 93-101.

**1979**

3. Групповая классификация уравнений идеальной пластичности с условием текучести общего вида // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1979. – Вып. 37. – С. 101-112.

4. Точные пространственные решения, описывающие пластическое течение анизотропных и неоднородных сред // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1979. – Вып. 43, – С. 101-112.

5. Групповые свойства уравнений деформационной теории пластичности. В сб. Вычислит. матем. и механика сплошных сред. – Красноярск : КрасГУ. – 1979.

**1980**

6. Инвариантные пространственные решения уравнений идеальной пластичности // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1980. – № 3. – С. 159-163.

**1981**

7. Точные пространственные решения уравнений, описывающих пластическое течение анизотропных и неоднородных сред // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1981. Вып. 43. – С. 150-163.

**1982**

8. Групповая классификация уравнений плоской неоднородной теории упругости // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1982. – Вып. 55. – С. 164-170.

**1984**

9. Поля скоростей в задаче Прандтля о сжатии пластического слоя. Журнал прикладной механики и технической физики. – 1984. – № 1. – С. 155-156.

**1985**

10. Групповой анализ уравнений упругости и пластичности. – Новосибирск: Наука, 1985. – 150 с. (совм. с Б. Д. Анниным, В. О. Бытевым).

**1986**

11. Об одном классе точных решений уравнений идеальной пластичности. Журнал прикладной механики и технической физики. – 1986. – № 3. – С. 139-142.

**1987**

12. Высшие симметрии плоской задачи // Краевые задачи уравнений математической физики. – Красноярск: Изд-во КГУ, 1987. – С. 129-139.

13. Точное решение осесимметричной задачи идеальной пластичности // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1987. – Вып. 82. – С. 160-163.

**1988**

14. Symmetries and conservations laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proceedings of the Edinburgh Math. Soc. – 1988. – 31. – P. 415-439 (совм. с А. М. Виноградовым).

15. Антиплоское пластическое течение // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1988. – № 3. – С. 159-161.

**1989**

16. Групповая классификация уравнений вязкоупругого стержня // Моделирование в механике. – Новосибирск: ВЦ и ИТПМ СО АН СССР. Т. 4 (21). – 1989. – № 1. – С. 69-72.

17. Групповые свойства уравнений вязко-пластичности // Современный групповой анализ: методы и приложения. – Баку: ЭЛМ, 1989. – С. 208-210.

18. Об одном способе построения точных решений уравнений идеальной пластичности // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1989. – В. 92. – С. 94-100.

#### 1990

19. Симметрии и инвариантные решения уравнений идеальной пластичности. Современный групповой анализ: методы и приложения. Некоторые задачи математической физики сплошных сред. Препринт № 115. Ленинградский институт информатики и автоматизации. Ленинград: АН СССР, 1990. – С. 4-12.

20. Антиплоское упруго-пластическое течение // Математическое моделирование. – Москва, 1990. – Т. 2. – № 8.

#### 1991

21. О законах сохранения уравнений пластичности // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 320. – № 3. – С. 606-608.

22. Групповой анализ уравнений анизотропной идеально пластической среды // ДАН СССР. – 1991. – Т. 316. – № 6. – С. 1374-1377.

23. Решения уравнений пластичности в случае спирально-винтовой симметрии // ДАН СССР. – 1991. – Т. 317. – № 1. – С. 57-59.

24. Инвариантные решения уравнений вязко-пластичности и решение задачи о винтовом движении бингамовской жидкости между соосными цилиндрами // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1991. – № 4. – С. 95-102 (совм. с В. А. Чугуновым).

25. Эволюционные уравнения и высшие законы сохранения // Уравнения математической физики и теория функций. – Красноярск: КГУ, 1991. – С. 45-50.

#### 1992

26. Точные решения и симметрии уравнений нелинейной теории упругости // Математическое моделирование. – М., 1992. – Т. 4. – № 6. – С. 99-105.

27. Общие решения и симметрии уравнений теории упругости // ДАН СССР. – 1992. – Т. 322. – № 3. – С. 513-515 (совм. с Н. И. Остроблиным).

#### 1993

28. Основы группового анализа для механиков. – Красноярск: Изд-во КГУ, 1993. – 130 с.

29. Группа Ли-Беклунда в нелинейной геометрической оптике. Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 10. – С. 1521-1532 (совм. с В. Ф. Ковалевым и В. В. Пустоваловым).

30. Group analysis of the classical equation of plasticity // Modern Group Analysis V. Developments in Theory, Computation and Application, ed. by N. H. Ibragimov.

31. Симметрии и точные решения уравнений пластичности с условием отрыва // Доклады РАН. – 1994. – Т. 334. – № 3.

32. Законы сохранения и точные решения задачи Коши для уравнений идеальной пластичности // Доклады РАН. – 1994. – Т. 345. – № 5.

33. Группы Ли и классификация упругих материалов // ДАН РАН. – 1994. – Т. 335. – № 6. – С. 712-715.

#### 1995

34. Законы сохранения и точное решение задачи Коши для уравнений идеальной пластичности // ДАН РАН. – 1995. – Т. 345. – № 5. – С. 619-620.

35. Lie groups and mechanics of deformable solid Proceeding of Kargapolov conference. – Berlin, 1995. – P. 243-247.

#### 1997

36. Conservation laws and basic boundary value problems of plasticity. Proceedings of the international conference "Mathematical models and methods of its investigations". Krasnoyarsk : Krasnoyarsk state university. – 1997. – P. 166-167 (совм. с А. Н. Яхно).

**1998**

37. Основные краевые задачи пластичности и законы сохранения // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1998. – В. 113. – С. 146-149 (совм. с А. Н. Яхно).

38. Оптимальная система подалгебр и точные решения уравнений пластичности с условием отрыва. Симметрии в естествознании : сборник докладов между. конференции. – Красноярск, 1998 (совм. с Г. В. Серенковым).

**1999**

39. The solving of the main boundary problems of plasticity by means of conservation laws // Modern Group Analysis VII, Developments in Theory, Computation and Application, ed. by N.H.Ibragimov, K.Razi Naqvi, E.Straume, MARS Publishers, SYMMETRI Foundation, N-7034, Trondheim, Norway (совм. с А. Н. Яхно).

40. The exact solutions of boundary problems for 2-dimensional plasticity Nonlinear problems of mechanics of continua. Northern-Caucasia region (2000). Special issue. 86-93 (совм. с А. Н. Яхно).

**2000**

41. Симметрии и законы сохранений уравнений механики. – Красноярск : Сибирский государственный технологический университет, 2000. – 147 с.

**2001**

42. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. – Новосибирск : Издательство СО РАН, 2001. – 190 с. (совм. с А. Н. Яхно, П. П. Киряковым).

43. Двумерная пластичность: симметрии, законы сохранения и точные решения. Проблемы механики деформируемого твердого тела/ Московский государственный университет, 2001. – С. 283-299 (совм. с А. Н. Яхно).

44. Two-dimensional plasticity: symmetries, conservation laws and exact solutions. Problemas de mecanica de cuerpos deformables y conglomerados. Coleccion de articulos . Universidad Estatal de Mines de Moscu. – 2001. – P. 283-299 (совм. с А. Н. Яхно).

**2002**

45. Симметрии и законы сохранения уравнений фильтрации // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 2002. – С. 109-114 (совм. с А. А. Шулуновой).

**2003**

46. О пластическом течение среды Мизеса со спирально-винтовой симметрией // Проблемы механики : сб.статей. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – С. 719-726.

**2004**

47. Пластическое течение среды Мизеса со спирально-винтовой симметрией // Прикладная математика и механика. – 2004. – Т. 68. – В. 1.

48. Использование симметрий и законов сохранения для решения краевых задач // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 29, Казань : Издательство Казанского математического общества, 2004. – С. 149-150.

49. The 2-dimensional Plasticity: Boundary Problems and Conservation Laws, Reproduction of Solutions/ The Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. V. 50. – 2004. – P. 231-238 (совм. с А. Н. Яхно).

50. The Evolution of Solution of Plane Ideal Plasticity, Proc. of XI international conference "Symmetry Methods in Physics"(Prague, Czech Republic), Joint institute for Nuclear Research. – Dubna, 2004 (совм. с А. Н. Яхно).

**2005**

51. Об эволюции решения Прандтля под действием группы симметрий // Механика твердого тела. – 2005. – № 5. – С. 167-171.

### 2006

52. О свойствах двумерных уравнений анизотропной теории пластичности // Вестник Чувашского гос. пед. университета. 2006. – 1 (48). – С. 138-144.

53. Точные решения уравнений пластичности плоского напряженного состояния : Сб. научных статей // Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести. – Ереван : Изд-во Титутюн: НАН Армения, 2006. – С. 144-147 (совм. с О. В. Ждановым).

54. Решение одной краевой задачи для квазилинейного уравнения второго порядка // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения. – 2006. – С. 56-60 (совм. с О. В. Гомоновой, Н. А. Осмоловской).

55. Группа симметрий и законы сохранения уравнений идеально пластической анизотропной среды // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 16. – С. 82-83 (совм. с И. Н. Коюпченко).

56. О квазилинейных системах дифференциальных уравнений гиперболического типа и их свойствах // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 16. – С. 165-170 (совм. с Н. А. Осмоловской).

57. Symmetries of hyperbolic systems of 2 -dimensional quasilinear equations. Proc. 10 WSEA Intern, conf. on Applied Math. – Dallas, 2006. No. 1-3. P. 112-116 (совм. А. Н. Яхно, Л. В. Яхно).

### 2007

58. Lie-Backlund symmetries of homogeneous system of Bi-dimensional Equations. SEA, Transaction on math., issue 1. – Y. 6. – 2007. – P. 16-27 (совм. А. Н. Яхно, Л. В. Яхно).

59. Об определении типа систем дифференциальных уравнений пластичности // Вестник Чувашского гос. пед. университета. – 2007. № 2. – С. 135-139.

60. Новые решений, описывающие сжатие пластического слоя жесткими плитами // Математические модели и методы механики сплошных сред : сборник научных трудов к 60-летию А. А. Буренина. – Владивосток : ИАПУ, ДВО РАН, 2007. – С. 239-243 (совм. с О. В. Гомоновой).

61. Reproduction of solutions for bidimensional ideal plasticity // Journal of Non-Linear Mechanics. – 2007. – 42. – P. 500-503 (совм. с А. Н. Яхно).

### 2008

62. Предельное состояние деформированных тел и горных пород. – М. : Физматлит, 2008. – 830 с. (совм. с Д. Д. Ивлевым, Л. А. Максимовой, Р. И. Непершиным, Ю. Н. Радаевым, Е. И. Шемякиным).

63. Aplicacion de simetrias y leyes de conservacion a la resolution de encanccioes diferencianles de mecanica. Universidad de Guadalajara. – Mexico, 2008. – 160 p. (совм. с А. Н. Яхно).

64. Симметрии уравнений , описывающих двумерное поле скоростей пластических деформаций : Герценовские чтения, материалы конференции. – СПб. : РГПУ, 2008. – С. 20- 25 (совм. с О. В. Гомоновой).

### 2009

65. Гомотопия решений уравнений минимальных поверхностей // Вестник СибГАУ. – 2009. – В. 2 (23). – Часть 1. – С. 84-85 (совм. с О. Н. Черепановой).

66. Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries // Nonlinear analysis. – 2009. – № 71. – P. 1274-1284 (совм. с А. Н. Яхно).

67. Group analysis of solutions of 2-dimensional differential equations. Lie Groups: New research. Nova science publishers. – New York , 2009. – P. 123-138 (совм. с А. Н. Яхно).

68. Новые точные решения, описывающие двумерное поле скоростей для решения Прандтля // Вестник СибГАУ. – 2009. – В. 4 (25). – Часть 1. – С. 18-21 (совм. с О. В. Гомоновой).

69. Cauchy problem solution for hyperbolic system of the homogeneous 2-dimensional quasilinear equation // Вестник СибГАУ. – 2009. – В. 4 (25). – Часть 1. – С. 26-28 (совм. с А. Н. Яхно).

70. New exact solutions which describe 2 -dimensional velocity field for Prandtl's solution // Vestnik scientific journal of Siberian Aerospace University. – 2009. – 5 (26). – P. 43-45 (совм. с О. В. Гомоновой).

#### 2010

71. Деформация линий скольжения для двумерной идеальной пластичности // Вестник Чувашского гос. пед. университета. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (6). – С. 4-18 (совм. с А. Н. Яхно, Л. В. Яхно).

72. Определение типа систем трехмерных статически определенных уравнений идеальной пластичности // Вестник Чувашского гос. пед. университета. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (6). – С. 130-133 (совм. с Н. Д. Дудиновой).

73. Новые классы решений уравнений минимальных поверхностей // Моиспа1 of Siberian Fed/ Univ., Math. & Ph. – 2010. – № 3 (2). P. 248-255 (совм. с О. Н. Черепановой).

74. Построение новых решений и их характеристик для двумерной идеальной пластичности с помощью симметрий // Вестник Чувашского гос. пед. университета. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 473-491 (совм. с А. Н. Яхно, Л. В. Яхно).

75. Точное решение уравнений пластичности плоского напряженного состояния // Вестник СибГАУ. – 2010. – В. 4 (30). – С. 10-11 (совм. с В. И. Бурмак).

#### 2011

76. Transformation of the Prandtl solution into new solutions of ideal plasticity // Proceeding of 2011 International conference on multimedia technology. – China, Hanzhou, 2011. – v. 7. – Part 2. – P. 6634-6637 (совм. с О. В. Гомоновой).

77. Abrasion of thin long canals by means of viscoelastic mediums under the actions of highfrequency impulses // roc. 13 Intenational Conference on Micro wave and RF Heating, AMPERE, Toulouse. – France, 2011. – P. 337-340 (совм. с О. V. Gomonova, S. Lefeuvre, J. Tao).

78. Законы сохранения в задаче о продольной плоской волне нагрузки в упругопластическом стержне // Вестник СибГАУ. – 2011. – В. 3 (36). – С. 82-85.

79. О построении полей скоростей для известных неособых полей напряжения // Вестник СибГАУ. – 2011. – В. 5 (38). – С. 88-90 (совм. с О. В. Гомоновой).

80. Некоторые точные решения уравнений анизотропной теории пластичности // Вестник СибГАУ. – 2011. – В. 5 (38). – С. 90-92 (совм. с Е. В. Филюшиной).

81. Преобразование точных решений пластичности высшими симметриями // Вестник СибГАУ. – 2011. – В. 5 (38). – С. 92-95 (совм. с Е. В. Филюшиной)

#### 2012

82. Двумерная пластичности // LAMBERT Academic Publishing. 2012. – P. 130 (совм. с О. В. Гомоновой)

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток.

**Варданян Седрак Ваникович (vardanyan\_s@yahoo.com)** – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (cotedurhone\_mail.ru)** – доктор физико-математических наук (1996), профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский лесотехнический институт, г. Королев Московской области.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

**Ивлев Дюис Данилович (ivlev21@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

**Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

**Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.



**Кулиев Валех Джафарович** ([pmdekanat@rambler.ru](mailto:pmdekanat@rambler.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный открытый университет, г. Москва.

**Ломакин Евгений Викторович** ([lomakin@nw.math.msu.su](mailto:lomakin@nw.math.msu.su)) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Максимова Людмила Анатольевна** ([maximova\\_ng@mail.ru](mailto:maximova_ng@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Манжиров Александр Владимирович** ([manzh@ipmnet.ru](mailto:manzh@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

**Маркин Алексей Александрович** ([markin@tsu.tula.ru](mailto:markin@tsu.tula.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Матченко Николай Михайлович** ([ekc\\_05@mail.ru](mailto:ekc_05@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Миронов Борис Гурьевич** ([rektorat@chdpu.edu.ru](mailto:rektorat@chdpu.edu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович** ([irakon63@hotmail.com](mailto:irakon63@hotmail.com)) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

**Михайлов Глеб Константинович** ([gkmikh@mail.ru](mailto:gkmikh@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

**Немировский Юрий Владимирович** ([nemirov@itam.nsc.ru](mailto:nemirov@itam.nsc.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

**Непершин Ростислав Иванович** ([nepershin\\_ri@rambler.ru](mailto:nepershin_ri@rambler.ru)) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технический университет “СТАНКИН”, г. Москва.

**Победря Борис Ефимович** ([rob@mail.ru](mailto:rob@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Радаев Юрий Николаевич** ([radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Учреждение Российской академии наук Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

**Ревуженко Александр Филиппович** ([revuzhenko@yandex.ru](mailto:revuzhenko@yandex.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.

**Редкозубов Сергей Алексеевич (marycbka434@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

**Спорохин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

**Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv)** – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

**Чернышев Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния» издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru)). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

**и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля `predel.sty`. Стил `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Чеботарев А. С.</i> К вопросу о перекусывании полосы .....	3
<i>Зиновьев И. Н., Чеботарев А. С.</i> К вопросу о волочении полосы через прямолинейную матрицу .....	13
<i>Миронов Б. Г., Тихонов С. В.</i> Об одном виде анизотропии при кручении .....	36
<i>Кузнецов Е. Е., Матченко Н. М.</i> О сингулярности потенциала классического линейно упругого тела .....	39
<i>Радаев Ю. Н.</i> „Конечные“ двояко-стохастические возмущения азимутальных чисел гиперболических термоупругих волн в длинном волноводе .....	44
<i>Балашишникова А. В.</i> О сжатии пространственного идеальнопластического слоя при трансляционной анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса .....	56
<i>Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г.</i> О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении .....	60
<i>Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г.</i> О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации .....	63
<i>Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Тихонов С. В.</i> О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса .....	66
<i>Ивлев Д. Д., Ковалев А. В., Тихонов С. В.</i> О статически определяемых состояниях в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии .....	70
<i>Деревянных Е. А.</i> О предельном состоянии кусочно-неоднородных анизотропных призматических стержней полигонального сечения при кручении .....	75
<i>Кержаев А. П.</i> Об определении перемещений в тонкой пластине из упруго-идеальнопластического материала при трансляционной анизотропии, ослабленной круговым отверстием при двусосном растяжении .....	81
К 75-летию Витаута Петровича Тамужа .....	85
<i>Тамуж В. П.</i> О работе в механике .....	86
<i>Тамуж В. П.</i> Из воспоминаний .....	90
К 60-летию Сергея Ивановича Сенашова .....	95
<i>Сенашов С. И.</i> Из воспоминаний .....	96

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	104
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	107
СОДЕРЖАНИЕ .....	109

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2012. № 1(11)**

**Отв. за выпуск:** С. В. Тихонов

**Технические редакторы:** Л. Н. Улюкова, И. А. Федянина

**Компьютерная верстка:** А. В. Балашникова, Е. А. Деревянных

**Макет:** А. В. Балашникова, Е. А. Деревянных

---

Подписано в печать XX.XX.2012 г. Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e.  
Усл. печ. л. XX,XX. Тираж 400 экз. Цена свободная. Заказ №

---

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный  
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38