

ББК 95.4; 22.251  
Ч-823

Подписной индекс в каталоге ПРЕССА РОССИИ: 13109  
ISSN: 2073-5499

ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА  
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2012. № 2(12)

**Учредитель:** ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Учредители серии:** Г. Н. Григорьев, Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров, Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Т. Н. Петрова, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин, А. А. Шуканов

**Редакционная коллегия:** Ивлев Д. Д. – ответственный редактор, Максимова Л. А., Матченко Н. М. – зам. ответственного редактора, Тихонов С. В. – ответственный секретарь, Баженов В. Г., Буренин А. А., Георгиевский Д. В., Глаголев В. В., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Каюмов Р. А., Климов Д. М., Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Кулиев В. Д., Ломакин Е. В., Маркин А. А., Манжиров А. В., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р. И., Победря Б. Е., Радаев Ю. Н., Радченко В. П., Ревуженко А. Ф., Редкозубов С. А., Сенашов С. И., Спорыхин А. Н., Трещев А. А., Чернышов А. Д., Хромов А. И., Шашкин А. И.

**Международный совет:** Амензаде Р. Ю. (Азербайджан), Варданян С. В. (Армения), Мирсалимов В. М. (Азербайджан), Тамуж В. П. (Латвия), Чигарев А. В. (Белоруссия)

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

**Тел.:** (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19.

**Email:** predel21@mail.ru.

**WWW:** <http://predel.chgpu.edu.ru>.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-36234 от 15.05.2009 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2012



Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова

## О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ ВЗАИМОПРОНИКАЮЩИХ ТВЕРДЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

**Аннотация.** В работе рассматривается предельное состояние взаимопроникающих твердых деформируемых тел. Под взаимопроникающими средами понимаются среды, элементарные объемы которых могут обладать различными свойствами предельного сопротивления.

**Ключевые слова:** напряжение, деформация, пластичность, анизотропия, предельные постоянные.

УДК: 539.374

В работе [1] введены соотношения идеальнопластической трансляционной анизотропии:

$$f = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_0^2, \quad k_i - const, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты напряжения.

Соотношения ассоциированного закона течения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – скорости пластичности деформации.

Положим, что

$$\kappa_i = \kappa_i(x, y), \quad (3)$$

далее введем обозначения

$$\kappa_1 = \sigma_x^{(1)}, \quad \kappa_2 = \sigma_y^{(1)}, \quad \kappa_3 = \tau_{xy}^{(1)}. \quad (4)$$

Далее положим, что

$$\frac{\partial \sigma_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(1)}}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Положим также, что напряжения  $\sigma_{ij}^{(1)}$  удовлетворяют некому предельному соотношению

$$f(\sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}, \tau_{xy}^{(1)}) = 0, \quad (6)$$

какому именно – здесь богатый выбор.

Для простоты

$$\left(\frac{\sigma_x^{(1)} - \sigma_y^{(1)}}{2}\right)^2 + \left(\tau_{xy}^{(1)}\right)^2 = k_1^2, \quad k_1 - const. \quad (7)$$

Соотношения (5), (7) представляют замкнутую статически определимую систему и компоненты  $\sigma_{ij}^{(1)}$  могут быть определены.

Далее рассмотрим условие предельного состояния в виде

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x^{(1)} - \sigma_y^{(1)}}{2}\right)^2 + \left(\tau_{xy} - \tau_{xy}^{(1)}\right)^2 = \bar{\kappa}_1^2. \quad (8)$$

Положим

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \kappa(\theta) \cos 2\theta, \quad \tau_{xy} = \kappa(\theta) \sin 2\theta. \quad (9)$$

При решении системы уравнения (5) положим

$$\frac{\sigma_x^{(1)} - \sigma_y^{(1)}}{2} = \kappa_1(\varphi_1) \cos 2\varphi_1, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \kappa_1(\varphi_1) \sin 2\varphi_1. \quad (10)$$

Заметим, что  $\kappa_1(\varphi_1)$  определено. Из (8), (10) получим

$$(\kappa(\theta) \cos 2\theta - \kappa_1(\varphi_1) \cos 2\varphi_1)^2 + (\kappa(\theta) \sin 2\theta - \kappa_1(\varphi_1) \sin 2\varphi_1)^2 = \bar{\kappa}_1^2. \quad (11)$$

Из (11) следует

$$\kappa(\theta)^2 - 2\kappa(\theta) [\kappa_1(\cos 2(\theta - \varphi_1))] - (\bar{\kappa}_1^2 - \kappa_1^2(\varphi_1)) = 0, \quad (12)$$

$$\kappa_{1,2} = \kappa_1 \cos 2(\theta - \varphi_1) \pm \sqrt{\bar{\kappa}_1^2 - \kappa_1^2 \sin^2(\theta - \varphi_1)}. \quad (13)$$

В дальнейшем нижний знак в (13) отбросим, так как  $\kappa(\theta) > 0$ .

Определение величины  $\kappa(\theta)$ , по существу, решает проблему: согласно [2] компоненты  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  могут быть определены вдоль характеристик и соотношений вдоль них.

Отметим, что вместо (6) может быть рассмотрена система соотношений

$$f_i(\sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)}, \tau_{xy}^{(i)}) = 0.$$

Изучение взаимодействий различных составляющих материала представляет сложную и интересную задачу.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Вопросы теории идеальнопластической трансляционной анизотропии / Д. Д. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 117–120.

[2] *Ивлев, Д. Д.* К теории идеальной пластической анизотропии / Д. Д. Ивлев // ПММ. – 1959. – Т. XXIII. – Вып. 6.



*Ивлев Дюис Данилович,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: ivlev21@mail.ru*

*Максимова Людмила Анатольевна,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: maximova\_ng@mail.ru*

*D. D. Ivlev, L. A. Maksimova*

## THE LIMIT STATE INTERPENETRATING SOLID DEFORMABLE BODIES

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** We consider the limit state interpenetrating solid. Under interpenetrating media understood the medium volume elements that may have different properties limiting resistance.

**Keywords:** stress, deformation, plasticity, anisotropy constant in the limit.

### REFERENCES

[1] *Ivlev, D. D.* Theory questions of ideally-plastic transmitting anisotropies / D. D. Ivlev // Vestnik the Chuvash state pedagogical university of I. J. Jakovleva. Line : Mechanics of a limiting condition. – 2011. – No. 1 (9). – P. 117–120.

[2] *Ivlev, D. D.* Theory of ideal plastic anisotropy / D. D. Ivlev // PMM. – 1959. – Vol. XXIII. – No. 6.

*Ivlev Dyuis Danilovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Maksimova Ludmila Anatolievna*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

Р. И. Непершин

## МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА ТРУБЫ ПРОТАЛКИВАНИЕМ НА РОЛИКОВОЙ МАШИНЕ

*Московский государственный технологический университет "Станкин"*

**Аннотация.** Приведена модель упругопластического изгиба трубы проталкиванием на трехроликовой машине с учетом упрочнения. Рассматривается нестационарный процесс изгиба трубы до заданной кривизны, при перемещении оси гибочного ролика с переходом в стационарную стадию изгиба. Модель может быть полезна для программного управления изгибом длинных труб на роликовых машинах.

**Ключевые слова:** тонкостенная труба, упругопластический изгиб, жесткопластический изгиб, упрочнение, проталкивание, конечное формоизменение, трехроликовая машина.

УДК: 539.374

### Введение

Изгиб тонкостенных труб на роликовых машинах применяется в авиационном, космическом, энергетическом и транспортном машиностроении для получения длинных труб с криволинейной пространственной осью и большим числом изгибов различного радиуса. Для этой цели удобным является метод изгиба проталкиванием трубы в зону изгиба на трехроликовой машине [1]. Этим методом можно получать трубы с переменным радиусом кривизны в различных плоскостях, на заданных участках по длине трубной заготовки без переналадки оборудования.

Ограничением на радиус кривизны трубы является локализация пластической деформации в малой зоне около контакта с центральным роликом, которая при изгибе тонкостенных труб с низким напряжением текучести проявляется в виде пластического шарнира, приводящего к искажению формы сечения трубы (овальность) и потере устойчивости сжатой стенки (образование гофр). Для исключения этих дефектов на практике применяют упругие наполнители трубы, жесткие или многозвенные шарнирные дорны, вводимые в зону изгиба, прижимные матрицы, которые препятствуют образованию гофр и овальности.

В настоящей работе моделируется конечное формоизменение трубы проталкиванием на трехроликовой машине без наполнителей или дорна с контролем предельной кривизны, приводящей к искажению формы сечения по механизму пластического шарнира по Прагеру [2]. Форма упругопластического изгиба трубы с учетом упрочнения рассчитывается в пространственных координатах. Конечное формоизменение моделируется движением материальных элементов при проталкивании трубы через зону изгиба.

### Изгиб трубы проталкиванием

Процесс изгиба трубы проталкиванием показан на рис. 1. Прямолинейная труба, опирающаяся на ролики 2 и 3, проталкивается силой  $P$  в зону изгиба  $ВАС$  при постепенном увеличении кривизны трубы в зоне ролика 1 и одновременном движении оси гибочного ролика 3 из начального положения, показанного штриховыми линиями.

---

Поступила 11.08.2012

Нестационарная стадия процесса состоит из двух периодов. Сначала происходит увеличение кривизны трубы в сечении  $A$  до заданного значения  $\chi^*$  при проталкивании трубы на длину  $s_1$  и перемещении оси ролика 3. На участке  $AC$  происходит упругая разгрузка с образованием остаточной кривизны, тогда как начальная недеформированная часть трубы длиной  $a_1$  покидает зону изгиба, образуя передний прямолинейный участок выше точки  $E$ . На второй стадии нестационарного процесса кривизна  $\chi^*$  в сечении  $A$  остается постоянной, и при движении материальных элементов в зоне разгрузки  $AC$  кривизна трубы уменьшается до значения  $\chi_0$  в сечении  $C$  при дальнейшем проталкивании трубы на длину  $a_1$ .

На стационарной стадии процесса происходит деформация трубы без изменения формы в зоне изгиба  $BAC$  при постоянных значениях  $\chi^*$  и  $\chi_0$  до достижения заданного угла поворота  $\psi$  переднего конца трубы. При переходе к изгибу следующего участка трубы выполняется поворот трубы вокруг оси в заданную плоскость изгиба.

Нестационарная стадия процесса приводит к образованию отрезка оси трубы длиной  $a_1$  с переменной кривизной от нуля до  $\chi_0$  между круговой частью и передним прямолинейным концом трубы.

При горизонтальном движении трубы слева от сечения  $B$  при вертикальной податливости оси ролика 1 происходят малое смещение начального сечения  $A$  и поворот реакции  $R_A$  ролика 1 на угол  $\alpha_A$  вследствие искривления оси трубы в зоне изгиба  $BAC$ . Реакция  $R_C$  поворачивается на угол  $\alpha_C$  при движении оси ролика 3. Траектория движения оси ролика 3 в приводимой модели определяется постоянной длиной дуги  $AC$ , равной  $a_1$ .

В приводимых ниже формулах используются безразмерные величины с характерной длиной, равной наружному диаметру трубы  $D$ , и с характерным напряжением, равным начальному напряжению текучести  $\sigma_0$  материала трубы. Ролики принимаются жесткими телами.

В сечении  $A$  возникает максимальный изгибающий момент  $M_A$ , создаваемый реакциями роликов 2 и 3. При известном моменте  $M_A$  и форме оси трубы в зоне изгиба  $BAC$ , которая определяется ниже, задача расчета силы проталкивания  $P$  и реакций роликов 1, 2 и 3 является статически определимой. Реакция  $R_C$  ролика 3 находится из уравнения

$$R_C [(x_C - x_A) \cos \alpha_C + (y_C - y_A) \sin \alpha_C] = M_A. \quad (1)$$

Сила проталкивания  $P$  и реакции  $R_A$ ,  $R_B$  роликов 1 и 2 находятся из линейной системы уравнений при известных значениях  $M_A$  и  $R_C$

$$\begin{aligned} R_B (\alpha_2 + x_A) - P y_A &= M_A, \\ P + R_A \sin \alpha_A &= R_C \sin \alpha_C, \\ R_A \cos \alpha_A - R_B &= R_C \cos \alpha_C. \end{aligned} \quad (2)$$

Геометрические величины, использованные в приведенных уравнениях, показаны на рис. 1.

Кривизну  $\chi$  оси трубы в сечении  $A$  на нестационарной стадии изгиба задавали линейной функцией проталкивания  $l$  недеформируемой части трубы

$$\chi = \frac{\chi^*}{s_1} l, \quad 0 < l < s_1, \quad (3)$$

где  $\chi^*$  – конечное значение кривизны в сечении  $A$ , обеспечивающее заданную кривизну трубы после разгрузки за роликом 3. Углы  $\alpha_A$ ,  $\alpha_C$ , координаты  $x_A$ ,  $x_C$ ,  $y_A$ ,  $y_C$  оси трубы в сечениях  $A$  и  $C$  и координаты  $x_3$ ,  $y_3$  траектории движения оси ролика 3 определяются формой деформированной осевой линии трубы  $BAC$  при сохранении длины  $a_1$  осевой линии  $AC$ . Алгоритм расчета деформированной формы трубы приведен ниже.

Момент  $M$  в упругопластической зоне на участке нагружения  $BA$  рассчитывали по кривизне  $\chi$  с учетом нормальной силы и упрочнения материала с использованием кинематической гипотезы Бернулли – Эйлера. В зоне контакта ролика 1 с трубой выполняется проверка предельного состояния сечения трубы, приводящего к искажению формы по модели пластического шарнира по Прагеру [2], которая хорошо подтверждается экспериментами [3].

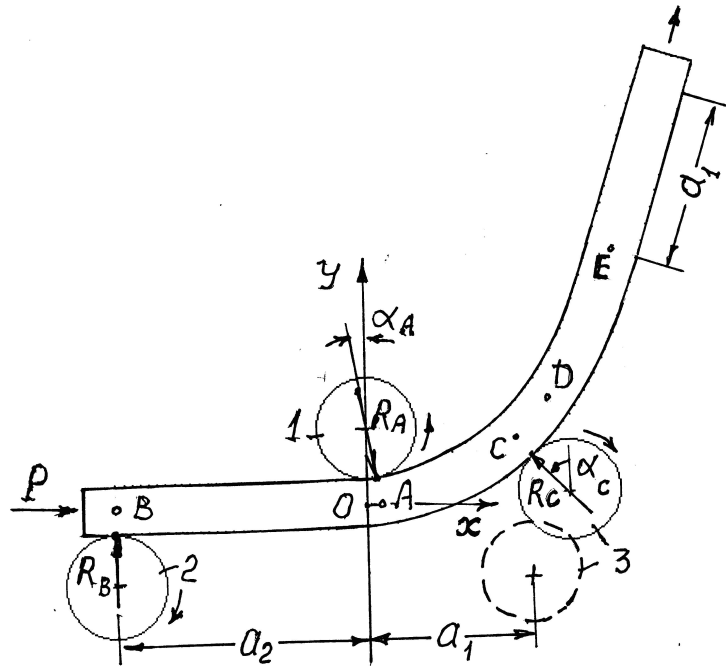


Рис. 1. Изгиб трубы проталкиванием на роликовой машине

### Момент и нормальная сила при изгибе трубы

На рис. 2 показано сечение трубы перпендикулярно к ее оси в зоне изгиба. Ось  $y$  направлена по положительному направлению радиуса кривизны оси трубы. Момент и нормальная сила, замыкающие систему уравнений (1) и (2), определяются распределением нормальных напряжений изгиба трубы с кривизной  $\chi$ . В средней части сечения остается упругий слой толщиной  $h_e$ . При наличии нормальной сжимающей силы  $N$  линия нейтрального сечения с напряжением  $\sigma = 0$  смещается от оси трубы на расстояние  $\xi$ . Расчеты момента  $M$  и нормальной силы  $N$  по распределению нормальных напряжений  $\sigma$  в сечении тонкостенной трубы выполняются в полярных координатах  $r, \phi$ , где  $r = 1/2(1 - h)$  – средний радиус трубы с относительной толщиной стенки  $h$ .

Деформация элемента трубы в сечениях зоны изгиба  $BAC$  определяется кривизной  $\chi$  по гипотезе Бернулли – Эйлера:

$$\varepsilon = \chi(y - \xi), \quad y = r \sin \phi. \quad (4)$$

В упругом слое  $|\varepsilon| \leq 1/E$ , где  $E$  – отношение модуля упругости материала трубы к начальному напряжению текучести  $\sigma_0$ . В этом слое нормальное напряжение определяется законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon = \chi(r \sin \phi - \xi), \quad |\varepsilon| \leq 1/E. \quad (5)$$

В пластических зонах при  $|\varepsilon| > 1/E$  и линейном упрочнении с модулем  $C_p$  нормальные напряжения определяются формулой

$$\sigma = \pm(1 + C_p |\varepsilon_p|), \quad |\varepsilon_p| = |\chi(r \sin \phi - \xi)| - 1/E, \quad (6)$$

где знак "плюс" относится к зоне растяжения, знак "минус" – к зоне сжатия.

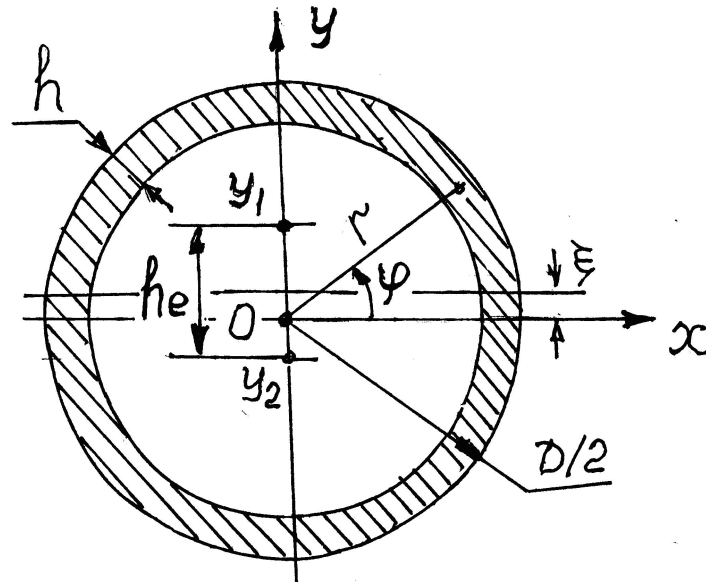


Рис. 2. Уругопластические границы в сечении трубы

На уругопластических границах выполняется равенство  $\sigma = \pm 1$ . Координаты  $y_1, y_2$  уругопластических границ и толщина уругого слоя определяются из первых соотношений (5) и (6) в зависимости от  $\chi$  и  $\xi$ :

$$y_1 = \xi + 1/(\chi E), y_2 = \xi - 1/(\chi E), h_e = 2/(\chi E). \quad (7)$$

Из третьего соотношения (7) находится кривизна  $\chi_1$ , при которой толщина уругого слоя совпадает со средним диаметром трубы и начинается пластическая деформация в точках  $y = \pm \frac{1}{2}(1-h)$ :

$$\chi_1 = \frac{2}{E(1-h)}. \quad (8)$$

Уругопластическим границам  $y_1$  и  $y_2$ , соответствуют углы  $\varphi_1, \varphi_2$ , определяемые формулами

$$\varphi_1 = \arcsin(y_1/r), \varphi_2 = \arcsin(y_2/r). \quad (9)$$

Нормальная сжимающая сила  $N$  и момент  $M$  определяются интегрированием распределений напряжения  $\sigma$ :

$$N = -2hr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma d\varphi, M = 2hr^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma \sin \varphi d\varphi. \quad (10)$$

Подставляя в уравнения (10) выражения (5) и (6) в уругой и пластических зонах при  $r = \frac{1}{2}(1-h)$ , после интегрирования получим

$$N = -h(1-h)[f_1 + f_2 + f_3], \quad (11)$$

$$f_1 = - \left[ \left( \frac{\pi}{2} + \varphi_2 \right) (1 + C_p (\chi \xi - 1/E)) + C_p \chi r \cos \varphi_2 \right],$$

$$f_2 = \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) (1 - C_p (\chi \xi + 1/E)) + C_p \chi r \cos \varphi_1, \quad (12)$$

$$f_3 = \chi E [r (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) + \xi (\varphi_2 - \varphi_1)].$$

$$M = 1/2 h (1 - h)^2 [f_4 + f_5 + f_6], \quad (13)$$

$$f_4 = \cos \varphi_2 (1 + C_p (\chi \xi - 1/E)) + 1/4 \chi C_p r (\pi + 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_2),$$

$$f_5 = \cos \varphi_1 (1 - C_p (\chi \xi + 1/E)) + 1/4 \chi C_p r (\pi - 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_1), \quad (14)$$

$$f_6 = \chi E [1/2 r (\varphi_1 - \varphi_2) - 1/4 r (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2) + \xi (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)],$$

где  $f_1, f_2$  и  $f_4, f_5$  – интегралы, вычисляемые в пластических зонах сжатия и растяжения;  $f_3$  и  $f_6$  – интегралы, вычисляемые в упругом слое.

При упругом изгибе с кривизной  $\chi \leq \chi_1$  момент и кривизна связаны линейной зависимостью

$$M = \chi C_e, \quad C_e = \frac{\pi}{8} E h (1 - h)^3. \quad (15)$$

При малой толщине упругого слоя  $h_e \ll 1$  из формул (7) и (8) получаем уравнения жесткопластического изгиба при  $y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow \xi$ , и  $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \rightarrow \varphi^*$ , где  $\varphi^*$  – полярный угол, определяющий положение нейтрального сечения. В этом случае формулы для нормальной силы и момента принимают вид:

$$N = h(1 - h) (2\varphi^* + \pi C_p \chi \xi), \quad \xi = r \sin \varphi^*, \quad (16)$$

$$M = 1/2 h (1 - h)^2 (2 \cos \varphi^* + \frac{\pi}{2} C_p \chi r). \quad (17)$$

Формулы (16) и (17) определяют изменение момента в зависимости от нормальной силы. При  $N = 0$  из формулы (16) следует  $\varphi^* = \xi = 0$ , и момент принимает максимальное значение

$$M = h (1 - h)^2 (1 + \frac{\pi}{4} C_p \chi r), \quad N = 0. \quad (18)$$

При линейном упрочнении момент жесткопластического изгиба линейно зависит от кривизны, как и при упругом изгибе, но при значительно меньшей изгибной жесткости для стальных труб, так как  $C_p \ll E$ . При заданных значениях  $N > 0$ ,  $C_p$  и  $\chi$  формула (16) представляет трансцендентное уравнение для угла  $\varphi^*$ , после решения которого из уравнения (17) определяется момент.

В случае идеальнопластического тела ( $C_p = 0$ ) уравнения для нормальной силы и момента принимают вид:

$$N = 2h (1 - h) \varphi^*, \quad (19)$$

$$M = h (1 - h)^2 \cos \varphi^*. \quad (20)$$

При  $N = 0$  труба нагружена максимальным моментом  $M = h(1 - h)^2$ ; при  $\varphi^* = \pi/2$  труба нагружена максимальной силой  $N = \pi h(1 - h)$  и  $M = 0$ .

Формула (8) показывает, что в тонкостенных трубах из углеродистой стали при  $h = 0.05$ ,  $\sigma_0 = 3 \times 10^2$  Н/мм<sup>2</sup> и  $E = 2.1 \times 10^5$  Н/мм<sup>2</sup> пластическая деформация начинается при малой кривизне  $\chi_1 = 3 \times 10^{-3}$ . Третья формула (7) показывает, что для того же материала трубы

толщина упругого слоя  $h_e$  уменьшается до 0.1 при кривизне  $\chi = 2.86 \times 10^{-2}$ . На практике кривизна труб, изгибаемых на роликовых машинах, значительно больше этого значения. Поэтому влияние упругого слоя на изгибающий момент при большой кривизне можно не учитывать, принимая модель жесткопластического изгиба трубы.

#### Критическая кривизна трубы

Искривление формы сечения трубы может происходить вследствие высокого локального давления на трубу при малой поверхности контакта с центральным роликом и большой реакции  $R_A$ . Экспериментальное исследование этого дефекта при трехточечном поперечном изгибе трубы приведено в работах [4], [5]. Снижение реакции  $R_A$  при увеличении расстояний  $a_1$  и  $a_2$  между опорами роликов и применение податливого упругого слоя, увеличивающего пятно контакта и снижающего локальное контактное давление на трубу, могут снизить этот дефект.

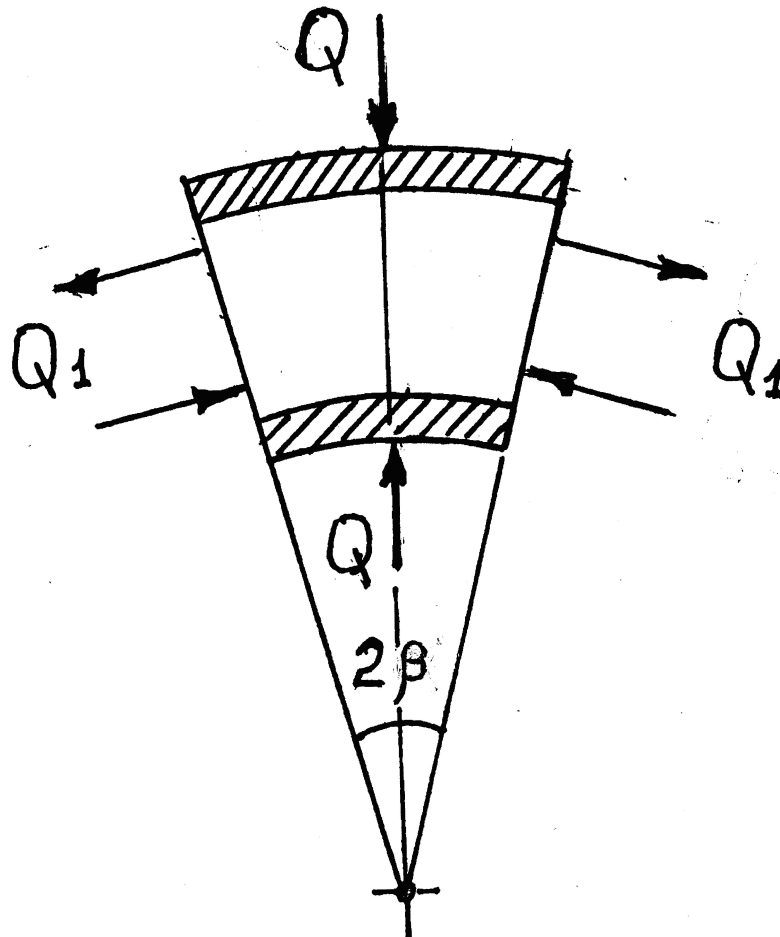


Рис. 3. Пары сил  $Q_1$  момента пластического изгиба и статически эквивалентные силы  $Q$

При изгибе трубы без дорна или наполнителя существует критическая кривизна, при которой происходит искажение формы сечения по механизму пластического шарнира под действием внутренних сил. На рис. 3 показано осевое сечение изгибаемой трубы в зоне контакта с центральным роликом для малой дуги с центральным углом  $2\beta$  и кривизной оси  $\chi$ . Так как в осевом сечении трубы действует нормальная сила сжатия  $N$ , то момент  $M$  создается парой



сил  $Q_1$ , где  $Q_1$  – сила растяжения, определяемая из уравнения (11) при  $f_1 = f_3 = 0$  и  $f_2 > 0$  по второй формуле (12). Для жесткопластической модели изгиба при  $N \ll Q_1$  смещение нейтральной линии  $\xi$  и угол  $\varphi$  малы. В этом случае формула для  $Q_1$  имеет вид

$$Q_1 = h(1-h) \left\{ \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \chi C_p r \left( 1 - \frac{\pi}{2} \varphi \right) \right\}. \quad (21)$$

Проекции сил  $Q_1$  на плоскость среднего сечения по нормали к оси трубы дают статически эквивалентную систему равных и противоположно направленных сил  $Q = 2Q_1 \sin \beta$ , которые могут привести к возникновению четырех пластических шарниров в стенке трубы на ортогональных диаметрах. Критическая сила  $Q_1$ , создающая моменты пластического изгиба, которые приводят к искажению формы сечения трубы, определяется формулой

$$Q_1 \sin \beta = \sigma_s^* h^2 \beta R / r, \quad R = 1 / \chi_{cr}, \quad r = 1/2(1-h), \quad (22)$$

где  $\sigma_s^*$  – напряжение текучести материала в пластическом шарнире с учетом упрочнения, которое можно определить по формуле (6) при  $e_p \approx 0.25$ , что соответствует кривизне 0.5 при образовании пластического шарнира. Для идеальнопластического материала  $\sigma_s^* = 1$ . При малой дуге контакта  $\sin \beta \approx \beta$ . Из формул (21) и (22) следует уравнение для критического значения кривизны трубы  $\chi_{cr}$

$$\chi_{cr} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) + 1/2 \chi_{cr} C_p (1-h) \left( 1 - \frac{\pi}{2} \varphi \right) \right\} = \frac{2h\sigma_s^*}{(1-h)^2}. \quad (23)$$

Для идеально пластического материала ( $C_p = 0$ ,  $\sigma_s^* = 1$ ) получаем

$$\chi_{cr} = \frac{2h}{(\pi - 2\varphi)(1-h)^2}. \quad (24)$$

Для упрочняющегося материала из уравнения (23) находим

$$\chi_{cr} = \frac{\zeta - \pi + 2\varphi}{C_p (1-h)(2 - \pi\varphi)}, \quad \zeta = \left\{ (\pi - 2\varphi)^2 + 8C_p h \sigma_s^* \frac{2 - \pi\varphi}{1-h} \right\}^{1/2}. \quad (25)$$

Формулы (24) и (25) показывают, что при увеличении относительной толщины стенки трубы и упрочнении материала, приводящим к увеличению  $\sigma_s^*$ , критическая кривизна трубы существенно увеличивается без искажения формы сечения.

#### Моделирование формоизменения трубы

При моделировании на ЭВМ формоизменения трубы на трехроликовой машине при изгибе проталкиванием постепенное увеличение кривизны  $\chi$  оси трубы в зоне ролика 1 обеспечивает плавный переход к конечной кривизне без опасности локализации пластической деформации по механизму пластического шарнира, наблюдаемого при поперечном изгибе без осевого движения заготовки [6]. Движение трубы и плавное изменение ее кривизны на нестационарной стадии позволяют существенно повысить конечную кривизну трубы по сравнению с обычным поперечным изгибом и аналогично увеличению кривизны тонкостенной цилиндрической оболочки, получаемой многопереходным процессом изгиба плоского листа на валковых машинах [7], [8].

На первом шаге проталкивания кривизна трубы мала, поэтому принимаем  $N = 0$ ,  $\xi = 0$  и по уравнению (13) рассчитываем момент  $M_A$ , используемый для определения реакций роликов и силы проталкивания  $P$  по уравнениям (1) и (2). Затем принимаем  $N = P$ , из уравнения (11) вычисляем  $\xi$  методом Ньютона и из уравнения (13) находим уточненное значение момента  $M_A$  с последующим определением реакций и силы проталкивания. Полученное значение силы  $N$  используется в качестве начального приближения при увеличении кривизны  $\chi$  в сечении  $A$  на следующем шаге проталкивания.

На каждом шаге проталкивания по реакциям  $R_B$  и  $R_C$  находим распределения  $M$  и  $N$  в зоне изгиба  $BAC$ , начиная от прямолинейной начальной формы трубы. На участке упругого

нагружения при  $M \leq M_1 = \chi_1 C_e$  из первого уравнения (15) определяется кривизна  $\chi$ . На участке упругопластического изгиба около сечения  $A$  по известным значениям  $N$  и  $M$  из уравнений (11) и (13) определяются  $\xi$  и  $\chi$ . На участке  $AC$  кривизна  $\chi$  определяется по формуле упругой разгрузки

$$\chi = \chi_A - (M_A - M)/C_e, \quad (26)$$

где  $\chi_A$  и  $M_A$  – кривизна и момент в точке  $A$  соответственно. Затем интегрированием дифференциальных соотношений

$$d\theta = \chi ds, \quad dx = \cos \theta ds, \quad dy = \sin \theta ds \quad (27)$$

с граничными условиями  $\theta = 0, x = -a_2, y = 0$  в точке  $B$ , где  $\theta$  – угол наклона касательной, находим углы  $\theta$  и координаты  $x, y$  деформированной оси трубы в зоне изгиба  $BAC$  на данном шаге проталкивания.

$$\theta = \int_0^s \chi ds, \quad x = -a_2 + \int_0^s \cos \theta ds, \quad y = \int_0^s \sin \theta ds, \quad 0 \leq s \leq a_1 + a_2. \quad (28)$$

При малой кривизне  $\chi < \chi_1$  на начальной стадии проталкивания происходит упругий изгиб трубы во всей зоне  $BAC$  при малом отклонении оси трубы от начальной прямой. На этой стадии зависимость  $\chi(s)$  линейна, углы  $\theta$  и прогибы  $y$  малы при  $\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$ , интегралы (28) вычисляются точно:

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{\chi_A}{a_2} s^2, \quad x = -a_2 + s, \quad y = \frac{1}{6} \frac{\chi_A}{a_2} s^3, \quad 0 \leq s \leq a_2, \quad (29)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \chi_A \left( a_2 + 2s - \frac{s^2}{a_1} \right), \quad x = s, \quad y = \frac{1}{6} \chi_A (a_2^2 + 3a_2 s + 3s^2 - s^3/a_1), \quad 0 \leq s \leq a_1. \quad (30)$$

Углы  $\alpha = \theta$  и координаты  $x, y$  в точках  $A$  и  $C$ , используемые в формулах (1) и (2), находятся из уравнений (29) при  $s = a_2$  для точки  $A$  и (30) при  $s = a_1$  для точки  $C$ .

При упругопластическом нагружении около точки  $A$  интегралы (28) рассчитывали численным методом с использованием известной формы трубы на предыдущем шаге проталкивания в качестве начального приближения.

Форма трубы после зоны изгиба за точкой  $C$  на нестационарной стадии проталкивания определяется переменной остаточной кривизной материальных элементов, выходящих из зоны изгиба интегралами, аналогичными (28), с граничными условиями для  $\theta, x$  и  $y$  в точке  $C$ . На стационарной стадии изгиба после точки  $C$  труба принимает круговую форму с постоянной остаточной кривизной  $\chi_0$ .

На нестационарной стадии проталкивания происходит непрерывное изменение формы оси трубы. На этой стадии реакции роликов и сила проталкивания, рассчитываемые по формулам (1) и (2), изменяются вследствие изменения момента  $M_A$  и формы трубы при перемещении оси ролика 3.

На стационарной стадии изгибающий момент в сечении  $A$  имеет постоянное значение. Изменение кривизны на участке разгрузки  $AC$  при высокой жесткости  $C_e$  мало. На этой стадии форма трубы на участке  $AC$  близка к окружности со средним радиусом кривизны. Величины  $\alpha_C, x_C, y_C$  в точке  $C$  и координаты оси гибочного ролика 3 с достаточной точностью определяются формулами

$$\alpha_C = a_1 \tilde{\chi}, \quad \tilde{\chi} = 1/2 (\chi_A + \chi_0), \quad \chi_0 = \chi_A - M_A/C_e, \quad (31)$$

$$x_C = \tilde{R} \sin \alpha_C, \quad y_C = \tilde{R} (1 - \cos \alpha_C), \quad \tilde{R} = 1/\tilde{\chi}, \quad (32)$$

$$x_3 = x_C + (1/2 + r_3) \sin\alpha_C, y_3 = y_C - (1/2 + r_3) \cos\alpha_C. \quad (33)$$

Моделирование изгиба тонкостенных труб проталкиванием реализовано в виде ФОРТРАН-программ. Входными данными являются размерные геометрические и механические параметры трубы и машины, переводимые в безразмерную форму для последующих вычислений по приведенным выше уравнениям. Выходные результаты моделирования приводятся в виде численных значений и таблиц, а также в графическом виде.

Ниже приведен пример моделирования изгиба трубы из стали 12Х18Н10Т проталкиванием на машине с радиусами роликов  $r_1 = r_2 = r_3 = 60$  мм до конечного радиуса кривизны оси  $R_0 = 300$  мм и угла поворота  $\psi = 1.25$ . Начальные расстояния между осями роликов  $a_1 = 200$  мм,  $a_2 = 300$  мм выбраны для уменьшения давлений на ролики 1 и 3 и уменьшения переднего недеформируемого конца трубы. Длина проталкивания  $s_1$  на нестационарной стадии изгиба при возрастании кривизны в сечении А равна 200 мм. Диаметр трубы  $D = 60$  мм, толщина стенки  $h = 3.5$  мм с механическими характеристиками стали  $E = 2.1 \times 10^5$  МПа,  $\sigma_0 = 450$  МПа и  $C_p = 2.5$ .

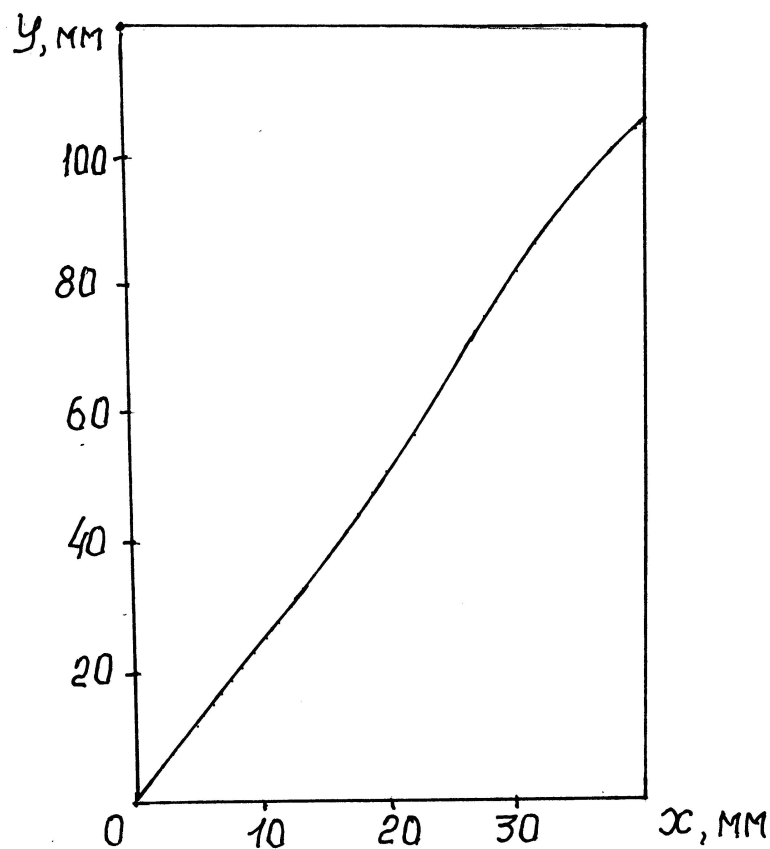


Рис. 4. Траектория движения оси гибочного ролика 3 на рис. 1

Нестационарную стадию изгиба с возрастанием безразмерной кривизны до значения  $\chi^* = 0.2$  в сечении А моделировали 30 равномерными шагами проталкивания. На рис. 1 показана форма трубы и положение ролика 3 в конце стационарной стадии проталкивания при изгибе на угол  $\psi = 1.25$ . Начальное положение ролика 3 показано штриховыми линиями.

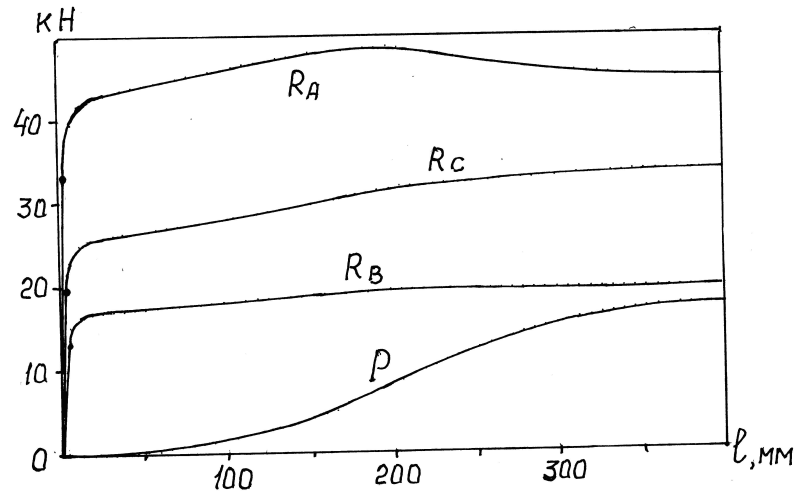


Рис. 5. Зависимости реакций роликов и силы проталкивания на нестационарной стадии изгиба трубы из стали 12X18H10T,  $D = 60$  мм,  $h = 3.5$  мм

На участке  $AC$  происходит изгиб трубы до кривизны  $\chi_0 = 0.193$  после точки  $C$  с поворотом оси трубы на угол  $\alpha_C = 0.733$  после перемещения оси ролика 3 в конечное положение. На участке  $CD$  происходит вращение трубы с постоянной кривизной  $\chi_0$  до достижения угла поворота  $\psi$  переднего конца. На участке  $DE$  кривизна оси трубы изменяется от  $\chi_0$  до нуля в результате начальной нестационарной стадии проталкивания при повороте оси трубы на угол  $\alpha_1 = 0.425$ . Угол поворота оси трубы на стационарной стадии изгиба  $\alpha_C = 0.115$ , угол пружинения после упругой разгрузки  $\alpha_{II} = 0.022$ . Конечный угол поворота оси трубы с учетом пружинения равен заданному значению  $\psi = 1.25$ . Критическая кривизна овального искажения сечения трубы  $\chi_{cr} = 0.189$  близка к заданному значению  $\chi^*$ .

На рис. 4 показана траектория движения оси ролика 3 на нестационарной стадии процесса. На рис. 5 показаны зависимости силы проталкивания  $P$  и реакций роликов  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  от перемещения  $l$  на нестационарной стадии изгиба трубы проталкиванием.

В начале проталкивания до  $l = 4.5$  мм происходит упругий изгиб трубы при  $\chi \leq \chi_1 = 4.55 \times 10^{-3}$  при линейном возрастании момента  $M_A$  и реакций роликов. Конец упругой стадии изгиба показан на рис. 5 темными кружками. На следующем участке проталкивания до  $l = 20-30$  мм происходит упругопластический изгиб трубы при малой нормальной силе  $N = P$ , близкой к нулю. На этом участке толщина упругого слоя  $h_e$  быстро снижается до значения 0.16 при увеличении  $\chi_A$  до 0.03 и асимптотическом приближении момента упругопластического изгиба к моменту жесткопластического изгиба. Дальнейшее формоизменение трубы до конечной кривизны  $\chi^* = 0.2$  происходит по механизму жесткопластического изгиба.

Зависимость силы проталкивания  $P(l)$  на нестационарной стадии изображается  $S$ -образной кривой с точкой перегиба  $l = s_1$ , в которой достигается кривизна  $\chi_A = 0.2$  в сечении  $A$ . В этой точке реакция  $R_A$  максимальна. На втором участке нестационарной стадии кривизна в сечении  $A$  постоянна, и при движении материальных элементов трубы на участке  $AC$  происходит разгрузка до кривизны  $\chi_0 = 0.193$  при проталкивании на длину  $a_1$ . На этом участке происходят плавный выход силы  $P$  и реакций роликов на стационарные значения и остановка перемещения оси ролика 3 при достижении угла  $\alpha_C = 0.733$ .

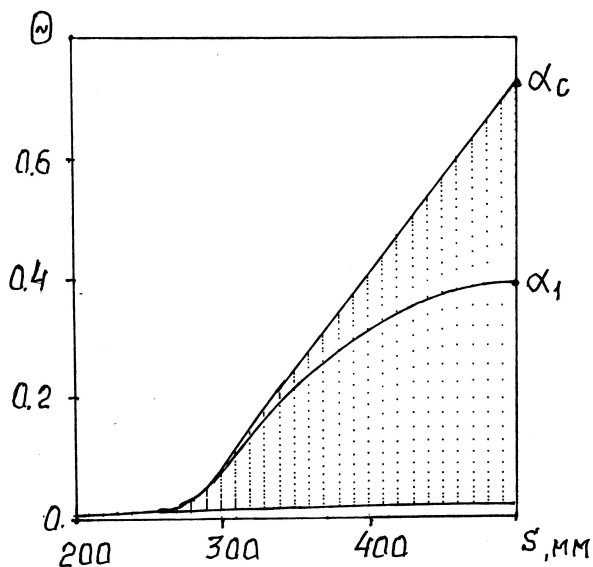


Рис. 6. Зависимости углов наклона касательной  $\theta(s)$  в зоне изгиба трубы на нестационарной стадии проталкивания на рис. 1

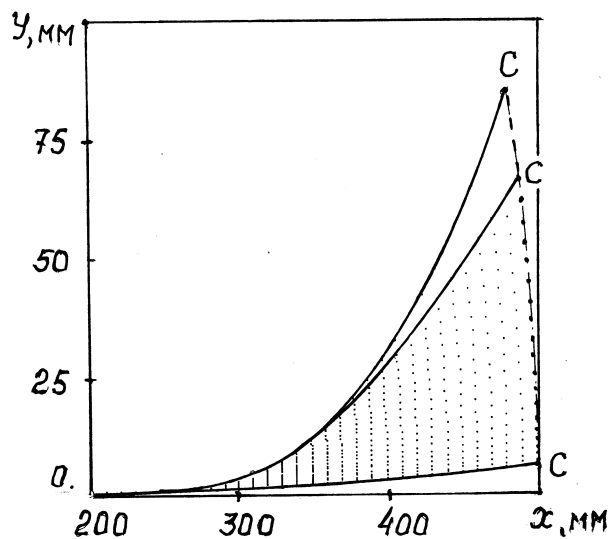


Рис. 7. Зависимости формы оси трубы  $y(x)$  в зоне изгиба трубы на нестационарной стадии проталкивания на рис. 1

На рис. 6 и 7 показаны зависимости углов  $\theta(s)$  и формы оси трубы  $y(x)$  в зоне изгиба ВАС при  $s$  и  $x > 200$  мм на нестационарной стадии процесса, полученные вычислениями интегралов (28). Нижние сплошные кривые на этих графиках определяются формулами (29) и (30) упругой стадии при  $\chi_A = \chi_1$ . При  $s$  и  $x < 200$  мм труба находится в упругом состоянии при малых величинах  $\theta$  и  $y$ . Промежуточные сплошные кривые на рис. 6 и 7 соответствуют

концу первой стадии нестационарного процесса при достижении равенства  $\chi_A = \chi^*$  в точке А. Внешние сплошные кривые соответствуют переходу на стационарную стадию изгиба. Остальные зависимости  $\theta(s)$  и  $y(x)$  трубы изображены точками, выдаваемыми программой на экран монитора в процессе моделирования нестационарной стадии изгиба.

### Заключение

Разработанная модель изгиба труб проталкиванием на роликовых машинах определяет форму трубы и критическую кривизну изгиба без применения дорна или наполнителей. Модель позволяет анализировать изменение нагрузки на ролики и привод машины и формы трубы в зависимости от параметров наладки процесса при исключении дефекта в виде овальности формы сечения.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Машиностроение. Энциклопедия. Том III-2 Технология заготовительных производств. М. : Машиностроение, 1996. – 736 с.
- [2] *Prager, W.* Проблемы теории пластичности / В. Прагер. – М. : Физматлит, 1958. – 136 с.
- [3] *Sowerby, R.* The diametral compression of circular rings by "point" loads / R. Sowerby, W. Johnson, S. K. Samanta // Int. J. Mech. Sci. – 1968. – Vol. 10. – No. 5. – P. 369–383.
- [4] *Thomas, S. G.* Large deformations under transverse loading – I: An experimental survey of the bending of simply supported tubes under a central load / S. G. Thomas, S. R. Reid, W. Johnson // Int. J. Mech. Sci. – 1976. – Vol. 18. – No. 6. – P. 325–333.
- [5] *Johnson, W.* The compression of crossed layers of thin tubes / W. Johnson, S. R. Reid, T. Y. Reddy // Int. J. Mech. Sci. – 1977. – Vol. 19. – No. 7. – P. 423–437.
- [6] *Непершин, Р. И.* Изгиб тонкой полосы круговым инструментом / Р. И. Непершин // Известия РАН. МТТ. – 2007. – № 4. – С. 83–99.
- [7] *Непершин, Р. И.* Формообразование тонкостенной цилиндрической оболочки на трех валковой машине / Р. И. Непершин // Известия РАН. МТТ. – 2011. – № 4. – С. 75–84.
- [8] *Непершин, Р. И.* Формообразование цилиндрических оболочек на валковых машинах. Моделирование на ЭВМ / Р. И. Непершин // Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2012. – 75 с.

*Непершин Ростислав Иванович,*

*доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва*

*e-mail: nepershin\_ri@rambler.ru*

R. I. Nepershin

## SIMULATION OF THE ELASTIC-PLASTIC TUBE BEND BY PUSHING ON THE ROLL MACHINE

*Moscow State University of Technology "Stankin"*

**Abstract.** Simulation of the elastic-plastic tube bend by pushing on three roll machine with work hardening effect consideration is presented. Non steady tube bending process for specified curvature is simulated during bend roll axis displacement with transfer to the steady-state stage of tube bending. Computer simulation can be useful for digital control of long tube bending on the roll machines.

**Keywords:** thin walled tube, elastic-plastic bend, rigid-plastic bend, work hardening, tube pushing, finite tube forming, three roll machine.

### REFERENCES

- [1] Mechanical Engineering. Encyclopedia. Volume III-2. Blank production technology. – M.: Mechanical Engineering Publ., 1996. – 736 p.
- [2] Prager, V. Problems of the theory of plasticity / V. Prager. – M.: FIZMATLIT Publ., 1958. – 136 p.
- [3] Sowerby, R. The diametral compression of circular rings by "point" loads / R. Sowerby, W. Johnson, S. K. Samanta // Int. J. Mech. Sci. – 1968. – Vol. 10. – No. 5. – P. 369–383.
- [4] Thomas, S. G. Large deformations under transverse loading – I: An experimental survey of the bending of simply supported tubes under a central load / S. G. Thomas, S. R. Reid, W. Johnson // Int. J. Mech. Sci. – 1976. – Vol. 18. – No. 6. – P. 325–333.
- [5] Johnson W. The compression of crossed layers of thin tubes / W. Johnson, S. R. Reid, T. Y. Reddy // Int. J. Mech. Sci. – 1977. – Vol. 19. – No. 7. – P. 423–437.
- [6] Nepershin, R. I. Thin plate bending circular tool / R. I. Nepershin // Izvestia RAS MDS. – 2007. – No. 4. – P. 83–99.
- [7] Nepershin, R. I. Shaping of thin-walled cylindrical shell on a triple roll machine / R. I. Nepershin // Izvestia RAS MDS. – 2011. – No. 4. – P. 75–84.
- [8] Nepershin, R. I. Shaping of thin cylindrical shells on the three-roll machine. Computer simulation / R. I. Nepershin. – Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing. – 2012. – 75 p.

*Nepershin Rostislav Ivanovich*

*Dr. Tech. Sci., Professor, Moscow State University of Technology "Stankin", Moscow*

## ОБ ОДНОМ НОВОМ ВАРИАНТЕ ПОСТРОЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛОСКОГО ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА, ИСХОДЯ ИЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ Д. Д. ИВЛЕВА

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН*

**Аннотация.** Созданная Сен-Венаном теория плоской деформации идеальнопластического тела — разработанный с исчерпывающей полнотой раздел современной математической теории пластичности. Ее изложение, как правило, дается во всех руководствах по математической теории пластичности. Решающим обстоятельством, обеспечившим создание теории плоской деформации в столь законченной и совершенной форме, является формальная статическая определимость и гиперболичность соотношений этой теории. Двумерные уравнения теории пластического плоского деформированного состояния могут быть, как известно, получены из трехмерных пространственных уравнений на основании ряда кинематических и статических ограничений. Удивительным оказывается тот факт, что уравнения плоской деформации выводятся также из гиперболических пространственных уравнений, предложенных Д. Д. Ивлевым в 1958 г. для напряженных состояний на ребре призмы Кулона—Треска, простым понижением на одну единицу их математической размерности. Собственно это обстоятельство и позволяет "увидеть" все соотношения теории плоского деформированного состояния "из пространства", объяснить их гиперболичность и указать новый вариант построения теории плоского деформированного состояния идеальнопластических тел.

**Ключевые слова:** идеальная пластичность, плоская деформация, гиперболичность, статическая определимость, математическая размерность.

УДК: 539.374

1. Предварительные сведения и вводные замечания

Сен-Венану (B. Saint-Venant, 1870 г.) первому<sup>1</sup> удалось сформулировать уравнения, удовлетворительно описывающие законы пластического течения металлов на языке механики сплошных деформируемых сред. Ключевым положением теории пластичности Сен-Венана выступала гипотеза о пропорциональности девиатора напряжений и скорости пластических деформаций. Сен-Венан ограничился исследованием плоского деформированного состояния, и поэтому его теория нуждалась в дальнейшем обобщении на случай трехмерного состояния. Поэтому вопрос о выводе уравнений плоского деформированного состояния из трехмерных уравнений в принципе не ставился.

---

Поступила 14.03.2012

<sup>1</sup>De Saint-Venant B. Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / B. De Saint-Venant // Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences. – 1870. – Vol. 70. – P. 473–480;

De Saint-Venant B. Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / B. De Saint-Venant // Liouville J. d. Math. Pures et Appl. Ser. II. – 1871. – Vol. 16. – P. 308–316, 373–382.



Теория плоской деформации идеальнопластического тела — наиболее полно разработанный раздел современной математической теории пластичности. И это результат не только ее сравнительно "невысокой" математической размерности. Решающим обстоятельством, обеспечившим создание теории плоской деформации в столь законченной и совершенной форме, являются формальная статическая определенность и гиперболичность соотношений этой теории. В начальный период развития теории пластичности, когда основное внимание исследователей было сфокусировано именно на плоской деформации, при изучении плоского пластического течения широко использовались представления о линиях скольжения, подчиняющихся поразительным законам, установленным Г. Генки<sup>2</sup> и Л. Прандтлем.<sup>3</sup> Гиперболичность уравнений приводила к возможности математического представления полей скольжения в металлах. Статически определяемая задача о плоской пластической деформации вместе с ее гиперболическими соотношениями послужила отправной точкой развития всей математической теории идеальной пластичности.

Изложение вопросов пластического плоского деформированного состояния, как правило, дается во всех руководствах по математической теории пластичности. Достаточно упомянуть лишь классические монографии, посвященные математической теории пластичности [1–7]; современное изложение имеется в книге [8]. В настоящее время она по-прежнему сохраняет важное прикладное значение и часто служит в качестве весьма полезного инструмента при моделировании многих современных технологических процессов обработки металлов.

Основные соотношения теории плоской деформации изотропного тела могут быть получены без привлечения ассоциированного закона течения, исходя из общих уравнений механики сплошных деформируемых сред, критерия пластичности изотропного тела  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$  ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные нормальные напряжения) и его "двумерной" формы, а также следующих четырех основных положений:<sup>4</sup>

- 1) кинематического ограничения для векторного поля  $d\mathbf{u}$ , состоящего в том, что вектор приращения перемещений параллелен некоторой плоскости<sup>5</sup> и не зависит от расстояния, измеряемого от точки его приложения до этой плоскости;
- 2) статического ограничения, заключающегося в том, что ось, нормальная указанной выше плоскости, является главной осью тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ ;
- 3) несжимаемости плоской деформации  $\text{tr } d\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ ;
- 4) соосности тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и тензора приращений деформации  $d\boldsymbol{\varepsilon}$ , выраженной, например, с помощью уравнения перестановочности А. Ю. Ишлинского

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Относительно приведенного выше положения (4) следует отметить, что соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности, когда, аналогично условию полной пластичности Хаара—Кармана, имеется два соотношения между главными напряжениями,

<sup>2</sup>Hencky, H. Ueber einige statisch bestimmte Faelle des Gleichgewichts in plastischen Koerpern / H. Hencky // Z. angew. Math. Mechanik. — 1923. — Bd. 3. — Н. 4. — S. 241–251. Имеется перевод на русский язык: Генки, Г. О некоторых статически определенных случаях равновесия в пластических телах / Г. Генки // Теория пластичности: сб. ст. — М. : Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. — С. 80–101.

<sup>3</sup>Prandtl, L. Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz ueber das plastische Gleichgewicht / L. Prandtl // Z. angew. Math. Mechanik. — 1923. — Bd. 3. — Н. 6. — S. 401–406. Имеется перевод на русский язык: Прандтль, Л. Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел / Л. Прандтль // Теория пластичности: сб. ст. — М. : Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. — С. 102–113.

<sup>4</sup>Мы будем использовать стандартные обозначения механики деформируемого твердого тела:  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений Коши;  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  — приращение тензора малых деформаций;  $d\mathbf{u}$  — приращение вектора перемещений.

<sup>5</sup>Обычно принимается за координатную плоскость  $x_3 = 0$ .

впервые были предложены и проанализированы А. Ю. Ишлинским [9]; в этой работе использовались определяющие зависимости в форме *соотношений перестановочности* тензора напряжений и приращения тензора пластических деформаций, следующие (как выяснилось позднее [10], [11]) из обобщенного ассоциированного закона пластического течения в случае течения на ребре призмы Кулона—Треска и не предполагающие столь жестких ограничений на скорости пластических деформаций, устанавливаемых традиционным для того времени требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений. А. Ю. Ишлинский называл эти зависимости условиями соосности тензора напряжений и приращения тензора пластических деформаций. Впервые в явной форме он указал на необходимость при построении теории пространственной задачи *двух* условий пластичности, уравнения несжимаемости и условий соосности тензора напряжений и приращения тензора пластических деформаций, которые он принял в форме трех уравнений, следующих из перестановочности этих тензоров.<sup>6</sup> Замечательно то, что условие перестановочности А. Ю. Ишлинского тензоров  $\sigma$  и  $d\varepsilon$  "жестко" не фиксирует коориентированность триэдров главных осей этих тензоров, а эквивалентно возможности по крайней мере одной их коориентации в пространстве так, как это в действительности имеет место для состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска. Именно поэтому математическая теория пластичности А. Ю. Ишлинского не противоречит современным теориям пластичности, которые основываются на обобщенном ассоциированном законе течения.

Двумерные уравнения теории пластического плоского деформированного состояния могут быть, как известно, получены из трехмерных пространственных уравнений. Удивительным оказывается тот факт, что уравнения плоской деформации выводятся также из пространственных уравнений, предложенных Д. Д. Ивлевым в 1958 г. [12] (см. также: Ивлев, Д. Д. Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – С. 5–14.) для напряженных состояний на ребре призмы Кулона—Треска, простым понижением на одну единицу их математической размерности. Собственно это обстоятельство, указанное в [13], и позволяет "увидеть" все соотношения теории плоского деформированного состояния "из пространства".

Ниже приводится альтернативный вариант построения теории плоской деформации идеальнопластического тела, исходя из условия интегрируемости пространственных уравнений Д. Д. Ивлева, математическая размерность которых формально понижена на одну единицу.

## 2. "Двумерное" условие текучести изотропного тела

Вывод "двумерного" условия текучести из пространственного невозможен без привлечения ассоциированного закона течения или иных определяющих уравнений, если, конечно, изначально не выдвигать никаких "двумерных" условий текучести. Предпочтительным, естественно, является вывод "двумерного" условия текучести, исходя из трехмерного, которое для изотропного тела в наиболее общей форме имеет вид уравнения, связывающего главные нормальные напряжения

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \quad (1)$$

Сначала попытаемся построить "двумерное" условие текучести, исходя из трехмерного критерия текучести Треска ( $k$  — предел текучести при сдвиге)

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (2k)^2] [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - (2k)^2] [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (2k)^2] = 0.$$

<sup>6</sup>Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой было предложено значительно позднее Койтером в 1953 г. (см.: Koiter, W. T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic material with a singular yield surface / W. T. Koiter // Quart. Appl. Math. – 1953. – Vol. 11. – №. 3. – P. 350–354.) и на момент написания работы [9] еще не было известно. Тем не менее А. Ю. Ишлинским были сформулированы вполне корректные уравнения пространственной задачи, полностью сохраняющие свое значение и в настоящее время.

На основании сформулированного в главных осях напряжений ассоциированного закона течения<sup>7</sup>

$$d\varepsilon_j = \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} d\lambda$$

и с учетом того, что в условиях плоского деформированного состояния третье направление – главное и, кроме того,  $d\varepsilon_3 = 0$ , находим

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 2 [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (2k)^2] [(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) - (2k)^2] [\sigma_3 - \sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_2] = 0,$$

откуда сразу же следует важнейшее для теории плоского деформированного состояния уравнение

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2),$$

во-первых, исключаяющее главное напряжение  $\sigma_3$ , а во-вторых, указывающее на то, что  $\sigma_3$  – медианное главное нормальное напряжение.<sup>8</sup>

Соотношение  $\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$  между главными нормальными напряжениями в случае плоской деформации, как нетрудно заметить, приводит к заключению, что третий инвариант девиатора тензора напряжений

$$J'_3 = \frac{1}{27}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)$$

оказывается равным нулю.

Ясно также, что условие  $d\varepsilon_3 = 0$  выполняется, если сразу принять уравнение грани призмы Треска  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ , но тогда главное напряжение  $\sigma_3$  остается неопределенным, т. е. невозможно однозначно указать соотношение  $\sigma_3 = \sigma_3(\sigma_1, \sigma_2)$ , что препятствует построению "двумерной" функции текучести

$$\tilde{f}(\sigma_1, \sigma_2) = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3(\sigma_1, \sigma_2)).$$

Таким образом, в пользу соотношения  $\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ , в отличии от других вариантов, имеется существенный рациональный довод: именно при таком выборе зависимости  $\sigma_3 = \sigma_3(\sigma_1, \sigma_2)$  третий инвариант девиатора тензора напряжений становится равным нулю  $J'_3 = 0$ .

В случае плоской деформации, как нетрудно показать, любой критерий текучести изотропной среды  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$  после подстановки в него зависимости  $\sigma_3 = \sigma_3(\sigma_1, \sigma_2)$ , устанавливаемой из условия

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 0, \quad (2)$$

<sup>7</sup>В приводимой ниже записи ассоциированного закона течения  $d\varepsilon_j$  – собственные значения приращения тензора пластических деформаций  $d\varepsilon$ , которые, вообще говоря, отличны от *приращений* собственных значений  $\varepsilon_j$  тензора пластических деформаций  $\varepsilon$ . Множитель  $d\lambda$  считается неопределенным.

<sup>8</sup>На самом деле условие

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 0$$

выполняется также, если

$$(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) - 4k^2 = 0,$$

т. е.

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 16k^2}}{2}.$$

Если к тому же учесть, что при выполнении критерия текучести Треска разность главных напряжений постоянна  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ , то третье главное нормальное напряжение выражается через два других по формуле

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \pm \sqrt{5}k,$$

приводится к виду

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k \quad (3)$$

и, следовательно, описывается в рамках критерия текучести Треска. То есть наиболее общий критерий текучести изотропного тела  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$  после исключения третьего главного напряжения на основании (2) приводится к "двумерной" форме

$$\tilde{f}(\sigma_1, \sigma_2) = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3(\sigma_1, \sigma_2)) = \text{const}$$

с некоторой новой "двумерной" функцией текучести  $\tilde{f}(\sigma_1, \sigma_2)$ , а затем — к форме критерия Треска (3). Другими словами,<sup>9</sup> если  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  — функция текучести изотропного тела, то три уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 0, \quad f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \text{const}$$

совместно удовлетворяются лишь при выполнении условия

$$d\sigma_1 - d\sigma_2 = 0$$

вдоль действительного процесса нагружения.

Весьма интересным оказывается то обстоятельство, что при использовании критерия текучести Мизеса мы по-прежнему имеем условие текучести в форме (3), и удастся также показать, что в условиях плоского деформированного состояния  $\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ , т. е.  $\sigma_3$  — медианное главное нормальное напряжение.

Действительно, при применении критерия текучести Мизеса

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 6k^2 = 0$$

ассоциированный закон течения

$$d\varepsilon_j = \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} d\lambda$$

сразу же приводит (с учетом того, что третье направление главное и  $d\varepsilon_3 = 0$ ) к равенству

$$0 = -2(\sigma_2 - \sigma_3) - 2(\sigma_1 - \sigma_3),$$

откуда сразу же выводится соотношение

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Это соотношение между главными нормальными напряжениями приводит, как указывалось выше, к заключению, что третий инвариант девиатора тензора напряжений  $J'_3$  оказывается равным нулю.

### 3. Основное векторное уравнение теории плоской деформации

Деформацию тела называют плоской, если перемещение частиц тела может происходить только в плоскостях, перпендикулярных некоторому фиксированному направлению (которое мы примем за ось  $x_3$  декартовой системы координат  $x_1, x_2, x_3$ ), и картина перемещений не зависит от выбора плоскости. Поэтому состояние плоской деформации тела определяется следующими кинематическими ограничениями ( $du_1, du_2, du_3$  — компоненты вектора приращения перемещений  $d\mathbf{u}$  относительно декартовой системы координат  $x_1, x_2, x_3$ ):

$$\partial_3(du_1) = 0, \quad \partial_3(du_2) = 0, \quad du_3 = 0. \quad (4)$$

Для изотропного тела исчезновение напряжений сдвига  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$  вытекает как результат отсутствия сдвиговых деформаций  $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$  в условиях плоского деформированного состояния. Следовательно,  $x_3$  — главная ось тензора напряжений,  $\sigma_{33}$  — главное нормальное напряжение:

$$\sigma_{33} = \sigma_3.$$

<sup>9</sup>И более точно.

Остальные главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$  найдем, составив "двумерное" характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_\alpha & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_\alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (\alpha = 1, 2)$$

и определяя его корни

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}. \quad (5)$$

В указанной выше декартовой системе координат уравнения равновесия идеальнопластического тела в случае плоской деформации имеют, как известно, следующий вид (см., например, [7]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} - 2k \left( \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} + 2k \left( \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

и получаются подстановкой в уравнения равновесия

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

соотношений Леви (M. Levy)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= p + k \cos 2\theta, \\ \sigma_{22} &= p - k \cos 2\theta, \\ \sigma_{12} &= k \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $k$  — по-прежнему предел текучести при сдвиге,  $p = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ ,  $\theta$  — угол наклона к оси  $x_1$  главной оси напряжений, соответствующий наибольшему главному нормальному напряжению  $\sigma_1$ .

Подстановка Леви диктуется необходимостью удовлетворить условию пластичности. В случае плоской деформации, как уже отмечалось, любой трехмерный критерий текучести изотропной среды после подстановки в него зависимости  $\sigma_3 = \sigma_3(\sigma_1, \sigma_2)$  приводится к виду

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k \quad (8)$$

и, следовательно, описывается в рамках критерия текучести Треска. Условие текучести  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$  на основании (5) может быть сформулировано в компонентах тензора напряжений в следующем виде:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4k^2. \quad (9)$$

Ясно, что условие текучести в форме (9) инвариантно относительно поворотов системы координат в плоскости течения, поскольку для "двумерного" тензора напряжений

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = (\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 4(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) = \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} - 4\det \boldsymbol{\sigma},$$

а каждая из величин  $\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\det \boldsymbol{\sigma}$  обладает подобного рода инвариантностью.

Очевидно, что пластическому плоскому деформированному состоянию отвечает грань призмы Кулона—Треска, определяемая уравнением  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ , если пытаться интерпретировать критерий текучести в терминах геометрии призмы Кулона—Треска. Заметим, что  $p = \sigma_3$  для условий текучести Мизеса и Треска.

Если ввести обозначение  $\Sigma = \frac{p}{2k}$  и плоское векторное поле  $\mathbf{n}$  с декартовыми компонентами  $n_1 = \cos \theta$ ,  $n_2 = \sin \theta$ , то уравнения (6) приводятся к двумерному векторному уравнению

$$\operatorname{grad} \Sigma + \operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \quad (10)$$

Точно такое же уравнение получается для пространственных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, если при этом рассматривать векторное поле  $\mathbf{n}$  как пространственное (в трехмерном пространстве) векторное поле. Уникальность уравнения (10) состоит

в том, что в зависимости от своей математической размерности оно относится либо к плоской деформации, либо к пространственным напряженным состояниям, соответствующим ребру призмы Кулона—Треска. Тем самым устанавливается аналогия между статическими уравнениями плоского деформированного состояния и пространственными уравнениями для ребра призмы Кулона—Треска, и находит объяснение гиперболичность соответствующих систем уравнений.

Трехмерное (а также двумерное) векторное уравнение (10) может быть преобразовано в вид (см., например, [8])

$$\nabla \Sigma - \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n} + \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

где  $\nabla$  — набла-оператор Гамильтона, двумерный или трехмерный.

В декартовых координатах трехмерное (двумерное) векторное уравнение (10) эквивалентно системе трех скалярных уравнений ( $i, k = 1, 2, 3$ ) (или, соответственно, двух скалярных уравнений ( $i, k = 1, 2$ )):

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x_i} + n_k \frac{\partial n_i}{\partial x_k} + n_i \frac{\partial n_k}{\partial x_k} = 0 \quad (n_k n_k = 1). \quad (12)$$

Уравнение (10) принадлежит к гиперболическому типу. Его характеристическое уравнение имеет три различных вещественных корня. Нормали к характеристическим поверхностям образуют круговой конус с углом полураствора  $\pi/4$  и осью, ориентированной вдоль вектора  $\mathbf{n}$ . Характеристическими являются также интегральные поверхности векторного поля  $\mathbf{n}$  (т. е. поверхности, составленные из векторных линий поля  $\mathbf{n}$ ).

4. Условие интегрируемости основного векторного уравнения теории плоского деформированного состояния

В случае плоского деформированного состояния поле единичных собственных векторов  $\mathbf{n}$  тензора напряжений, соответствующих наибольшему (или наименьшему) главному нормальному напряжению, должно удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Первое из них есть *условие интегрируемости* основного векторного уравнения (10), описывающего равновесие идеальнопластического тела. Мы вернемся к нему ниже.

Второе из соотношений (13) есть условие расслоенности векторного поля  $\mathbf{n}$ . В трехмерном случае оно позволяет выписать три интегрируемых соотношения вдоль линий главных напряжений (изостатических траекторий), которые могут быть положены в основу теории пространственной задачи математической теории пластичности (см. [8]). В двумерном случае оно не является содержательным и выражает геометрически очевидный факт: вихрь плоского векторного поля ортогонален самому полю.

Третье из уравнений (13) представляет собой условие нормировки поля  $\mathbf{n}$ .

После ряда простых символьных преобразований с участием оператора Гамильтона  $\nabla$  уравнение

$$\operatorname{rot} \operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}$$

можно представить в форме

$$\begin{aligned} 2(\operatorname{div} \mathbf{n}) \operatorname{rot} \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \operatorname{rot} \mathbf{n} - \\ - ((\operatorname{rot} \mathbf{n}) \cdot \nabla) \mathbf{n} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (14)$$

Затем, принимая во внимание соотношение

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{n} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{n} + \Delta \mathbf{n},$$

приходим к уравнению

$$2(\operatorname{div} \mathbf{n}) \operatorname{rot} \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \Delta \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \operatorname{rot} \mathbf{n} - ((\operatorname{rot} \mathbf{n}) \cdot \nabla) \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (15)$$

В двумерном случае (т. е. когда  $\mathbf{n}$  является плоским векторным полем) из (15) получается единственное существенное скалярное уравнение. Считая, что проекция вектора  $\operatorname{rot} \mathbf{n}$  на третью координатную ось *положительна* и равна  $|\operatorname{rot} \mathbf{n}|$ , и учитывая равенство

$$((\operatorname{rot} \mathbf{n}) \cdot \nabla) \mathbf{n} = \mathbf{0},$$

выполняющееся в двумерном случае, в итоге имеем простое и симметричное уравнение

$$2(\operatorname{div} \mathbf{n}) |\operatorname{rot} \mathbf{n}| + \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} |\operatorname{rot} \mathbf{n}| - \mathbf{n}^* \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{n} = 0, \quad (16)$$

где  $\mathbf{n}^*$  — дополнительное векторное поле, получающееся в результате поворота в плоскости вектора  $\mathbf{n}$  против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны, указываемой третьим координатным направлением, которое мы сонаправили с вектором вихря  $\operatorname{rot} \mathbf{n}$  (см. рис. 1).

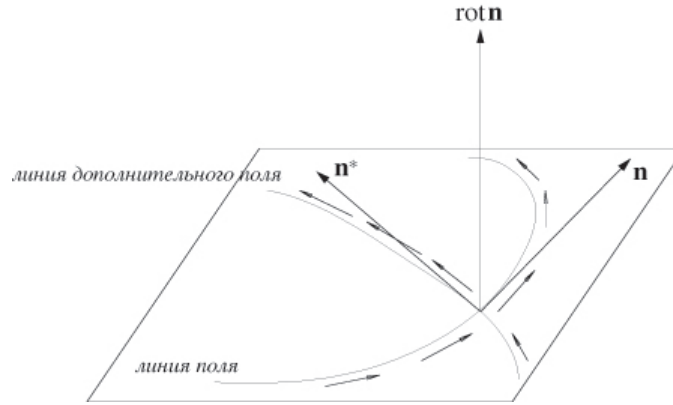


Рис. 1. Ориентация вектора поля  $\mathbf{n}$  и дополнительного вектора  $\mathbf{n}^*$  в плоскости течения

Заметим, что векторные линии поля  $\mathbf{n}$  и дополнительного поля  $\mathbf{n}^*$  представляют собой взаимно ортогональные изостатические траектории в плоскости течения, т. е. изостатическую сетку.

Продолжая рассуждения, уравнение (16) представим в следующей форме:

$$2(\operatorname{div} \mathbf{n}) |\operatorname{rot} \mathbf{n}| + \frac{\partial}{\partial S} |\operatorname{rot} \mathbf{n}| - \frac{\partial}{\partial S^*} \operatorname{div} \mathbf{n} = 0, \quad (17)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial S} = \mathbf{n} \cdot \nabla, \quad \frac{\partial}{\partial S^*} = \mathbf{n}^* \cdot \nabla \quad (18)$$

есть операторы дифференцирования по направлению основного  $\mathbf{n}$  и дополнительного  $\mathbf{n}^*$  векторов.

На основании формулы Гамильтона<sup>10</sup>

$$\kappa = -\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n} = \kappa \mathbf{n}^*, \quad (19)$$

<sup>10</sup>См., например: Аминов, Ю. А. Геометрия векторного поля / Ю. А. Аминов. — М. : Наука, 1990. — С. 23–24.

где  $\kappa$  — вектор кривизны траекторий поля  $\mathbf{n}$ ,  $\kappa$  — кривизна траекторий поля  $\mathbf{n}$ , и учитывая, что расходимость поля  $\mathbf{n}$  равна кривизне ортогональных траекторий поля (т. е. траекторий дополнительного поля  $\mathbf{n}^*$ ), имеем

$$|\text{rot } \mathbf{n}| = \kappa, \quad \text{div } \mathbf{n} = \kappa^*, \quad (20)$$

где

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial S}, \quad \kappa^* = \frac{\partial \theta}{\partial S^*}. \quad (21)$$

Принимая во внимание дериационное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial S} \frac{\partial}{\partial S^*} \theta - \frac{\partial}{\partial S^*} \frac{\partial}{\partial S} \theta + \left( \frac{\partial \theta}{\partial S} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial S^*} \right)^2 = 0, \quad (22)$$

с помощью уравнений (17), (22) получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 2\kappa\kappa^* + \frac{\partial \kappa}{\partial S} - \frac{\partial \kappa^*}{\partial S^*} = 0, \\ \frac{\partial \kappa^*}{\partial S} - \frac{\partial \kappa}{\partial S^*} + \kappa^2 + (\kappa^*)^2 = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Нетрудно проверить, что полученная система уравнений принадлежит к гиперболическому типу. Складывая и вычитая уравнения этой системы, приходим к следующей системе соотношений:

$$\begin{cases} (\kappa + \kappa^*)^2 + \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial \bar{S}} (\kappa + \kappa^*) = 0, \\ (\kappa - \kappa^*)^2 - \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial S^*} (\kappa - \kappa^*) = 0, \end{cases} \quad (24)$$

в которой на основании формул преобразования производных по направлению (по поводу соответствующих, и даже более общих, формул см. пятый раздел настоящей работы)

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial \bar{S}} &= \frac{\partial}{\partial S} - \frac{\partial}{\partial S^*}, \\ \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial S^*} &= \frac{\partial}{\partial S} + \frac{\partial}{\partial S^*} \end{aligned} \quad (25)$$

СИМВОЛЫ

$$\frac{\partial}{\partial \bar{S}}, \quad \frac{\partial}{\partial S^*}$$

есть соответственно операторы дифференцирования по направлению  $\bar{\mathbf{n}}$ , отклоняющемуся по ходу часовой стрелки на угол  $\pi/4$  от направления поля  $\mathbf{n}$ , и направлению  $\bar{\mathbf{n}}^*$ , отклоняющемуся против хода часовой стрелки на угол  $\pi/4$  от направления поля  $\mathbf{n}$  (см. рис. 2).

Поля направлений  $\bar{\mathbf{n}}$  и  $\bar{\mathbf{n}}^*$  определяют два семейства взаимно ортогональных линий скольжения<sup>11</sup> (или характеристических линий), кривизны которых вычисляются согласно

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} &= \frac{\kappa^* - \kappa}{\sqrt{2}} = -\frac{\partial \theta}{\partial \bar{S}}, \\ \bar{\kappa}^* &= \frac{\kappa^* + \kappa}{\sqrt{2}} = \frac{\partial \theta}{\partial S^*}. \end{aligned} \quad (26)$$

<sup>11</sup>Линии скольжения не являются только математическим понятием. Они существуют в действительности, и их можно выявить травлением отполированной поверхности или разреза деформированного металла. Фигуры скольжения часто появляются в виде узоров с правильной лучистой симметрией на поверхностях или на разрезах твердых тел, испытавших деформации за пределом упругости. Линии скольжения (линии сдвигов) всегда играли чрезвычайно важную роль как в теоретических, так и в прикладных исследованиях напряженного состояния пластически деформированного тела. Применение математической теории пластичности и концепции скольжения к задачам геологии и геофизики читатель может найти в монографиях: Надаи, А. Пластичность. Механика пластического состояния вещества / А. Надаи. — М., Л. : ОНТИ, 1936. — 280 с.; Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2 / А. Надаи. — М. : Изд-во Мир, 1969. — 864 с.



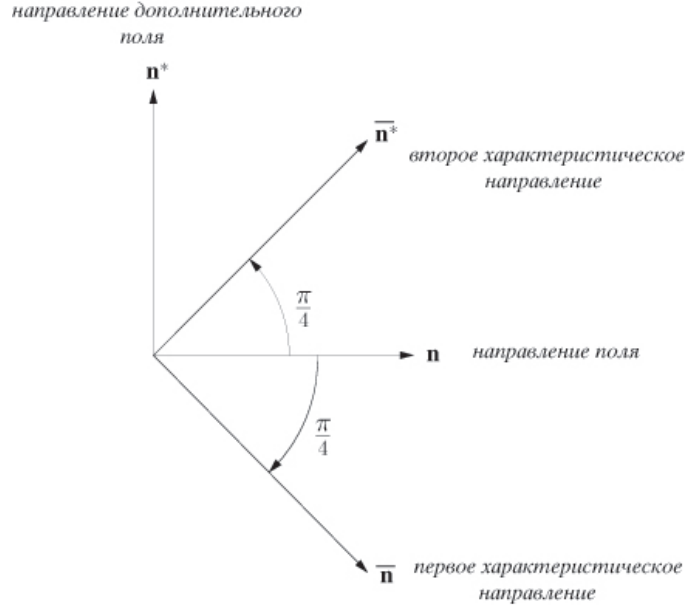


Рис. 2. Ориентации векторов  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}^*$ ,  $\bar{\mathbf{n}}$ ,  $\bar{\mathbf{n}}^*$  в плоскости течения

Перепишывая систему (24) в терминах кривизн линий скольжения, получаем интегрируемые вдоль линий скольжения соотношения

$$\frac{\partial}{\partial S} \frac{1}{\kappa^*} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial S^*} \frac{1}{\bar{\kappa}} = 1. \quad (27)$$

С помощью этих соотношений сразу же устанавливается вторая теорема Генки (см., например, [7]): при движении вдоль выделенной характеристической линии одного семейства радиус кривизны характеристической линии другого семейства изменяется на величину пройденного вдоль первой характеристики расстояния.

Дальнейшее развитие теории полей скольжения не представляет сколько-нибудь существенных трудностей и может быть выполнено, следуя [13].

5. Преобразование производных вдоль координатных линий при трансформации криволинейной координатной сетки

В этом разделе мы рассмотрим вывод формул преобразования операторов  $d_k$  ( $k = 1, 2$ ) дифференцирования вдоль координатных направлений на плоскости при переходе от данной ортогональной сетки к произвольной (необязательно ортогональной) криволинейной сетке. Такие преобразования систематически используются в теории плоского деформированного состояния.

Предположим, что на плоскости имеется локальный ортонормированный базис  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ , а другой локальный базис состоит, вообще говоря, из неортогональных единичных векторов  $\bar{\mathbf{l}}$ ,  $\bar{\mathbf{m}}$ , первый из которых отклоняется от орта  $\mathbf{l}$  на угол  $\psi_1$  по ходу часовой стрелки, а второй отклоняется от орта  $\mathbf{l}$  на угол  $\psi_2$  против хода часовой стрелки. Мы считаем, что оба угла положительны  $\psi_1 > 0$ ,  $\psi_2 > 0$  и  $\psi_1 + \psi_2 \neq \pi$ . Углы  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  могут, вообще говоря, изменяться при движении вдоль координатных линий локальной базисной системы  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$  (рис. 3).

Найдем формулы преобразования дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} d_1 &= \mathbf{l} \cdot \nabla, & d_2 &= \mathbf{m} \cdot \nabla, \\ \bar{d}_1 &= \bar{\mathbf{l}} \cdot \nabla, & \bar{d}_2 &= \bar{\mathbf{m}} \cdot \nabla \end{aligned}$$

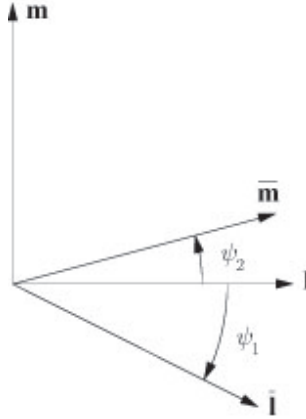


Рис. 3. Трансформация ортогонального локального базиса  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$  в двумерную неортогональную базисную систему  $\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{m}}$

при переходе от одной локальной базисной системы к другой. Эти операторы, как следует из их определения, представляют собой производные вдоль соответствующих координатных линий.

Коэффициенты разложения

$$\mathbf{l} = \bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2$$

на основании

$$\mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{l}} = \cos \psi_1 = k_1 + k_2 \cos(\psi_1 + \psi_2),$$

$$\mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{m}} = \cos \psi_2 = k_2 + k_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)$$

вычисляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}, \\ k_2 &= \frac{\cos \psi_2 - \cos \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Аналогично для разложения

$$\mathbf{m} = \bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2$$

с помощью

$$\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{l}} = -\sin \psi_1 = s_1 + s_2 \cos(\psi_1 + \psi_2),$$

$$\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} = \sin \psi_2 = s_2 + s_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)$$

можно получить

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{-\sin \psi_1 - \sin \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}, \\ s_2 &= \frac{\sin \psi_2 + \sin \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} d_1 &= \mathbf{l} \cdot \nabla = (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \cdot \nabla = k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2, \\ d_2 &= \mathbf{m} \cdot \nabla = (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \cdot \nabla = s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2, \end{aligned}$$

то в итоге искомые формулы преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_1 + \frac{\cos \psi_2 - \cos \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_2, \\ d_2 &= \frac{-\sin \psi_1 - \sin \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_1 + \frac{\sin \psi_2 + \sin \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_2. \end{aligned} \quad (30)$$

В случае преобразования поворота исходного базиса  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ , т. е. когда

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} - \psi, \quad \psi_2 = \psi,$$

полученные формулы несколько упрощаются:

$$\begin{aligned} d_1 &= \sin \psi \bar{d}_1 + \cos \psi \bar{d}_2, \\ d_2 &= -\cos \psi \bar{d}_1 + \sin \psi \bar{d}_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Обратное по отношению к (31) преобразование есть

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 &= \sin \psi d_1 - \cos \psi d_2, \\ \bar{d}_2 &= \cos \psi d_1 + \sin \psi d_2. \end{aligned} \quad (32)$$

Далее в рамках указанного выше случая (поворот исходного базиса  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ ) рассмотрим преобразование повторных дифференциальных операторов. Сначала положим, что угол  $\psi$  постоянен. Несложные вычисления показывают, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} d_1 d_1 &= \sin^2 \psi \bar{d}_1 \bar{d}_1 + \sin \psi \cos \psi (\bar{d}_1 \bar{d}_2 + \bar{d}_2 \bar{d}_1) + \cos^2 \psi \bar{d}_2 \bar{d}_2, \\ d_2 d_2 &= \cos^2 \psi \bar{d}_1 \bar{d}_1 - \sin \psi \cos \psi (\bar{d}_1 \bar{d}_2 + \bar{d}_2 \bar{d}_1) + \sin^2 \psi \bar{d}_2 \bar{d}_2, \end{aligned}$$

откуда следуют формулы

$$\begin{aligned} d_1 d_1 + d_2 d_2 &= \bar{d}_1 \bar{d}_1 + \bar{d}_2 \bar{d}_2, \\ d_1 d_1 - d_2 d_2 &= -\cos 2\psi \bar{d}_1 \bar{d}_1 + \sin 2\psi (\bar{d}_1 \bar{d}_2 + \bar{d}_2 \bar{d}_1) + \cos 2\psi \bar{d}_2 \bar{d}_2, \end{aligned}$$

первая из которых указывает на инвариантность оператора  $d_1 d_1 + d_2 d_2$  при поворотах локального базиса  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ . Замечая, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} -d_1 d_2 &= \sin \psi \cos \psi (\bar{d}_1 \bar{d}_1 - \bar{d}_2 \bar{d}_2) + \cos^2 \psi \bar{d}_2 \bar{d}_1 - \sin^2 \psi \bar{d}_1 \bar{d}_2, \\ -d_2 d_1 &= \sin \psi \cos \psi (\bar{d}_1 \bar{d}_1 - \bar{d}_2 \bar{d}_2) + \cos^2 \psi \bar{d}_1 \bar{d}_2 - \sin^2 \psi \bar{d}_2 \bar{d}_1, \end{aligned}$$

приходим к формулам

$$\begin{aligned} d_1 d_2 - d_2 d_1 &= \bar{d}_1 \bar{d}_2 - \bar{d}_2 \bar{d}_1, \\ d_1 d_2 + d_2 d_1 &= -\sin 2\psi (\bar{d}_1 \bar{d}_1 - \bar{d}_2 \bar{d}_2) + \cos 2\psi (\bar{d}_2 \bar{d}_1 + \bar{d}_1 \bar{d}_2). \end{aligned}$$

Первая из них устанавливает инвариантность оператора  $d_1 d_2 - d_2 d_1$  при поворотах локального базиса  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ .

В случае поворота локального базиса на половину прямого угла имеем

$$\psi = \frac{\pi}{4},$$

и полученные только что формулы позволяют заключить, что

$$\begin{aligned} d_1 d_1 - d_2 d_2 &= \bar{d}_1 \bar{d}_2 + \bar{d}_2 \bar{d}_1, \\ d_1 d_2 + d_2 d_1 &= \bar{d}_2 \bar{d}_2 - \bar{d}_1 \bar{d}_1. \end{aligned}$$

Если угол  $\psi$  не является постоянным, то формулы преобразования повторных операторов несколько усложняются. Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} d_1 d_1 &= \sin^2 \psi (\bar{d}_1 \bar{d}_1 - (\bar{d}_1 \psi) \bar{d}_2) + \sin \psi \cos \psi (\bar{d}_1 \bar{d}_2 + \bar{d}_2 \bar{d}_1 + (\bar{d}_1 \psi) \bar{d}_1 - (\bar{d}_2 \psi) \bar{d}_2) + \\ &\quad + \cos^2 \psi (\bar{d}_2 \bar{d}_2 + (\bar{d}_2 \psi) \bar{d}_1), \\ d_2 d_2 &= \cos^2 \psi (\bar{d}_1 \bar{d}_1 - (\bar{d}_1 \psi) \bar{d}_2) - \sin \psi \cos \psi (\bar{d}_1 \bar{d}_2 + \bar{d}_2 \bar{d}_1 + (\bar{d}_1 \psi) \bar{d}_1 - (\bar{d}_2 \psi) \bar{d}_2) + \\ &\quad + \sin^2 \psi (\bar{d}_2 \bar{d}_2 + (\bar{d}_2 \psi) \bar{d}_1), \end{aligned}$$

откуда находим

$$d_1 d_1 + d_2 d_2 = \bar{d}_1 \bar{d}_1 + \bar{d}_2 \bar{d}_2 + (\bar{d}_2 \psi) \bar{d}_1 - (\bar{d}_1 \psi) \bar{d}_2.$$

На основании формул преобразования

$$\begin{aligned} -d_1 d_2 &= \sin \psi \cos \psi (\overline{d_1 d_1} - \overline{d_2 d_2} - (\overline{d_1 \psi}) \overline{d_2} - (\overline{d_2 \psi}) \overline{d_1}) + \\ &\quad + \cos^2 \psi (\overline{d_2 d_1} - (\overline{d_2 \psi}) \overline{d_2}) - \sin^2 \psi (\overline{d_1 d_2} + (\overline{d_1 \psi}) \overline{d_1}), \\ -d_2 d_1 &= \sin \psi \cos \psi (\overline{d_1 d_1} - \overline{d_2 d_2} - (\overline{d_1 \psi}) \overline{d_2} - (\overline{d_2 \psi}) \overline{d_1}) + \\ &\quad + \cos^2 \psi (\overline{d_1 d_2} + (\overline{d_1 \psi}) \overline{d_1}) - \sin^2 \psi (\overline{d_2 d_1} - (\overline{d_2 \psi}) \overline{d_2}) \end{aligned}$$

приходим к равенству

$$d_1 d_2 - d_2 d_1 = \overline{d_1 d_2} - \overline{d_2 d_1} + (\overline{d_1 \psi}) \overline{d_1} + (\overline{d_2 \psi}) \overline{d_2}.$$

Полученные в этом разделе формулы преобразования дифференциальных операторов  $d_1$ ,  $d_2$  оказываются весьма удобным средством при исследовании систем уравнений в частных производных, с которыми приходится сталкиваться в двумерных задачах математической теории пластичности.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Часть первая. Упруго-пластические деформации / А. А. Ильюшин. – М., Л. : Гостехтеоретиздат, 1948. – С. 324–338.
- [2] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехтеоретиздат, 1956. – С. 155–190.
- [3] *Прагер, В.* Теория идеально пластических тел / В. Прагер, Ф. Г. Ходж. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1956. – С. 161–216.
- [4] *Фрейденталь, А.* Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. – М. : Физматгиз, 1962. – С. 257–294.
- [5] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – С. 141–165.
- [6] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – С. 132–225.  
(Первое издание этой книги: Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Гостехтеоретиздат, 1956. – 324 с.; более ранний источник: Качанов, Л. М. Механика пластических сред / Л. М. Качанов. – М., Л. : Гостехтеоретиздат, 1948. – 216 с.)
- [7] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – С. 192–227.  
(Это последнее третье издание; второе издание: Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М., Л. : Гостехтеоретиздат, 1950. – 396 с.; первое издание книги было выпущено в свет издательством АН СССР в 1946 г.: Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М., Л. : Изд-во АН СССР, 1946. – 308 с.)
- [8] *Радаев, Ю. Н.* Пространственная задача математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев. – Самара : Изд-во Самарского гос. университета, 2006. – 2-е изд., перераб. и доп. – 340 с.  
(Электронная копия опубликована в электронной библиотеке системы федеральных образовательных порталов <http://window.edu.ru/window/library> (рег. N 63-01/0023).)
- [9] *Ишлинский, А. Ю.* Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости / А. Ю. Ишлинский // Уч. зап. МГУ. Механика. – 1946. – Вып. 117. – С. 90–108.  
(Статья воспроизводится также в книге: Ишлинский, А. Ю. Прикладные задачи механики. Т. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. – М. : Наука, 1986. – С. 62–83. В заключительном подстрочном замечании А. Ю. Ишлинский указывает на то, что в действительности статья была написана и представлена в редакцию в начале 1941 г.)
- [10] *Радаев, Ю. Н.* О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 2007. – № 6 (56). – С. 102–114.

[11] Радаев, Ю. Н. О дополнительном тензорном соотношении симметрии в математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев // Вестник Чуваш. гос. пед. университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 3. – С. 109–125.

[12] Ивлев, Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред / Д. Д. Ивлев // Прикл. матем. и механика. – 1958. – Т. 22. – Вып. 1. – С. 90–96.

[13] Радаев, Ю. Н. К теории плоской деформации идеально пластического тела / Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. Естественная серия. – 2008. – № 3 (62). – С. 272–289.

*Радаев Юрий Николаевич,*

*доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва*

*e-mail: radayev@ipmnet.ru*

*e-mail: y.radayev@gmail.com*

Y. N. Radayev

**ON A NEW THEORETICAL VARIANT OF STUDY OF TWO-DIMENSIONAL  
PLANE PROBLEM OF THE PERFECT PLASTICITY BASED ON D. D. IVLEV  
THREE-DIMENSIONAL EQUATIONS**

*Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of RAS*

**Abstract.** A new scheme of derivation and study of plane strain state of a perfectly plastic solid is proposed and discussed. Unlike previous discussions known from the perfect plasticity and originating from the studies by H. Hencky and L. Prandtl, all requisite equations of the plane problem are derived from three-dimensional hyperbolic equations formulated in 1958 by D.D. Ivlev for states corresponding to an edge of the Coulomb–Tresca prism by simple reducing their mathematical dimension. Besides theoretical aspects important for the mathematical plasticity are elucidated. Particularly the later concerns the mathematical plasticity developed by A.Y. Ishlinskii in 1946 and his commutative equation.

**Keywords:** perfect plasticity, plane problem, hyperbolicity, static determination, mathematical dimension

**REFERENCES**

- [1] *Ilyushin, A. A.* Plasticity. Vol. 1: Elastoplastic deformations / A. A. Ilyushin. – M., L. : Gostekhizdat Publ., 1948. – P. 324–338.
- [2] *Hill, R.* Mathematical theory of plasticity / R. Hill. – M. : Gostekhizdat Publ., 1956. – P. 155–190.
- [3] *Prager, V.* Theory of ideally plastic bodies / V. Prager, F. G. Hodge. – M. : Publishing house of foreign literature, 1956. – P. 161–216.
- [4] *Freudental, A.* Mathematical theories of the inelastic continuum / A. Freudental, H. Geiringer. – M. : Fizmatgiz Publ., 1962. – P. 257–294.
- [5] *Ivlev, D. D.* Theory of perfectly plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Science, 1966. – P. 141–165.
- [6] *Kachanov, L. M.* Basics of theory of plasticity / L. M. Kachanov. – M. : Science, 1969. – P. 132–225.  
(Basics of theory of plasticity. 1st ed : Kachanov, L. M. Basics of theory of plasticity / L. M. Kachanov. – M. : Gostekhizdat Publ., 1956. – 324 p.; earlier source: Kachanov, L. M. Mechanics plastic medium / L. M. Kachanov. – M., L. : Gostekhizdat Publ., 1948. – 216 p.)
- [7] *Sokolovsky, V. V.* Theory of plasticity / V. V. Sokolovsky. – M. : High School Publ., 1969. – P. 192–227.  
(This last third edition; second edition: Sokolovsky V. V. Theory of plasticity / V. V. Sokolovsky. – M., L. : Gostekhizdat Publ., 1950. – 396 p.; the first edition of the book was published AN USSR Publ. in 1946: Sokolovsky V. V. Theory of plasticity / V. V. Sokolovsky. – M., L. : AN USSR Publ., 1946. – 308 p.)
- [8] *Radayev, Y. N.* Three-dimensional problem of the mathematical theory of plasticity (2nd ed.) / Y. N. Radayev. – Samara : Samara State Univ., 2006. – 340 p.  
(Available at <http://window.edu.ru/window/library> (reg. N 63-01/0023).
- [9] *Ishlinsky, A. Y.* On the equations of deformation of solids beyond the elastic limit / A. Y. Ishlinsky // MSU. Mechanics. – 1946. – No. 117. – P. 90–108.  
(Ishlinsky, A. Y. Applied problems of mechanics. Vol. I. Mechanics viscoplastic not completely elastic solids / A. Y. Ishlinsky. – M. : Science, 1986. – P. 62–83. The concluding remark interlinear Ishlinskii A. indicates that in fact the article was written and submitted to the editors in early 1941).

[10] *Radayev, Y. N.* On the Ishlinsky commutative equations in the mathematical theory of plasticity / Y. N. Radayev // Vestnik of Samara State University. Natural science series. – 2007. – No. 6 (56). – P. 102–114.

[11] *Radayev, Y. N.* The additional tensor symmetry relations in the mathematical theory of plasticity / Y. N. Radayev // Vestnik of I. Yakovlev State Pedagogical University. Mechanics limit state series. – 2007. – No. 3. – P. 109–125.

[12] *Ivlev, D. D.* On the general equations of the theory of perfectly plastic solids and statics of loose medium / D. D. Ivlev // Прикл. матем. и механика. – 1958. – Vol. 22. – No. 1. – P. 90–96.

[13] *Radayev, Y. N.* To the theory of plane deformation of perfectly plastic solids / Y. N. Radayev // Vestnik of Samara State University. Natural science series. – 2008. – No. 3 (62). – P. 272–289.

*Radayev Yuri Nickolaevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

## О СТАТИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛИМОСТИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

**Аннотация.** В работе показано, что условие пластичности Мизеса удовлетворяет условию полной пластичности и может рассматриваться как статически определенное.

**Ключевые слова:** напряжение, деформация, условие пластичности Мизеса, условие полной пластичности.

УДК: 539.374

Условие пластичности Мизеса запишем в виде

$$f = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 2\kappa, \quad \kappa - const, \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \tau_{xy}$  – компоненты нормальных касательных напряжений.

Обычно связь между напряжениями и скоростями деформации устанавливается путем ассоциированного закона течения

$$\varepsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda \geq 0, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – скорость пластических деформаций.

При использовании соотношений (1), (2) имеет место статически определенная система уравнений.

Условие полной пластичности запишем в виде [1]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - \frac{\kappa}{3} + \kappa_2 n_1^2, \quad \tau_{xy} = \kappa n_1 n_2, \\ \sigma_y &= \sigma - \frac{\kappa}{3} + \kappa_2 n_2^2, \quad \tau_{yz} = \kappa n_2 n_3, \\ \sigma_z &= \sigma - \frac{\kappa}{3} + \kappa_2 n_3^2, \quad \tau_{xz} = \kappa n_3 n_1, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, \quad \kappa - const. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставим соотношения (3) в выражение (1), получим

$$(n_1^2 - n_2^2)^2 + (n_2^2 - n_3^2)^2 + (n_3^2 - n_1^2)^2 + 6(n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_1) = 2. \quad (4)$$

Из (4) следует

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$$

т. е. условие пластичности Мизеса при использовании соотношений (3) является статически определенным.



Соотношения связи между напряжениями  $\sigma_{ij}$  и компонентами скорости деформации  $\varepsilon_{ij}$  при условии (3) следует взять в виде [2]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z &= 0, \\ \varepsilon_x + \varepsilon_{xy} \frac{\sigma_y - \sigma \pm 2/3\kappa}{\tau_{xy}} + \varepsilon_{xz} \frac{\sigma_z - \sigma \pm 2/3\kappa}{\tau_{xz}} &= \\ = \varepsilon_{xy} \frac{\sigma_x - \sigma \pm 2/3\kappa}{\tau_{xy}} + \varepsilon_y + \varepsilon_{yz} \frac{\sigma_z - \sigma \pm 2/3\kappa}{\tau_{yz}} &= \\ = \varepsilon_{xz} \frac{\sigma_x - \sigma \pm 2/3\kappa}{\tau_{xz}} + \varepsilon_{yz} \frac{\sigma_y - \sigma \pm 2/3\kappa}{\tau_{yz}} + \varepsilon_z. \end{aligned} \quad (5)$$

Использование условия пластичности Мизеса (1) в качестве статически определимого открывает широкие возможности для решения в теории предельного состояния.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред / Д. Д. Ивлев // ПММ. – 1958. – Т. 22. – Вып. 1. – С. 90–96.  
 [2] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях, определяющих пластическое течение при условиях пластичности Треска, и его обобщениях / Д. Д. Ивлев // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 124. – № 3. – С. 546–549.

*Максимова Людмила Анатольевна,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

**e-mail:** maximova\_ng@mail.ru

*L. A. Maksimova*

**ABOUT STATIC DEFINABILITY OF A TENSION UNDER CONDITION OF  
MIZES'S PLASTICITY**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** In work it is shown that the condition of plasticity of Mizes satisfies to a condition of full plasticity and can be considered as statically definable.

**Keywords:** tension, deformation, condition of plasticity of Mizes, condition of full plasticity.

**REFERENCES**

[1] *Ivlev, D. D.* About the general equations of the theory of ideal plasticity and a statics of loose environments / D. D. Ivlev // PMM. – 1958. – Vol. 22. – No. 1. – P. 90–96.

[2] *Ivlev, D. D.* About the ratios defining the plastic current under conditions of plasticity of the Crash, and its generalizations / D. D. Ivlev // AN USSR Publ. – 1959. – Vol. 124. – No. 3. – P. 546–549.

*Maksimova Ludmila Anatolievna*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

**О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СЛОЯ  
ИЗ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА  
ПРИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ,  
СЖАТОГО ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ**

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева*

**Аннотация.** В работе рассматривается предельное состояние слоя из идеальнопластического материала при трансляционной анизотропии, сжатого параллельными шероховатыми плитами при неколлинеарных направлениях касательных усилий [1]–[3]. Используются статически определимые условия предельного состояния, обобщающее условие полной пластичности.

**Ключевые слова:** сжатие, слой, идеальная пластичность, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Условие пластичности запишем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + kn_1^2 + k_1 - \bar{k}, \tau_{xy} = \kappa n_1 n_2 + k_4, \\ \sigma_y &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + kn_2^2 + k_2 - \bar{k}, \tau_{yz} = \kappa n_2 n_3 + k_5, \\ \sigma_z &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + kn_3^2 + k_3 - \bar{k}, \tau_{xz} = \kappa n_1 n_3 + k_6, \\ \bar{k} &= \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3), \kappa - const,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$  – компоненты напряжений в декартовой системе координат  $xyz$ ;  $\kappa$  – предел текучести на сдвиг;  $n_1, n_2, n_3$  – направляющие косинусы, определяющие ориентацию третьего главного напряжения  $\sigma_3$  в пространстве  $x, y, z$ .

Соотношения (1) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + \frac{(\tau_{xy} - k_4)(\tau_{xz} - k_6)}{(\tau_{yz} - k_5)} + k'_1, \\ \sigma_y &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + \frac{(\tau_{yz} - k_5)(\tau_{xy} - k_4)}{(\tau_{xz} - k_6)} + k'_2, \\ \sigma_z &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + \frac{(\tau_{xz} - k_6)(\tau_{yz} - k_5)}{(\tau_{xy} - k_4)} + k'_3,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $k'_i = k_i - \bar{k}$ .

$$\frac{(\tau_{xy} - k_4)(\tau_{xz} - k_6)}{(\tau_{yz} - k_5)} + \frac{(\tau_{yz} - k_5)(\tau_{xy} - k_4)}{(\tau_{xz} - k_6)} + \frac{(\tau_{xz} - k_6)(\tau_{yz} - k_5)}{(\tau_{xy} - k_4)} = \kappa.\tag{3}$$

Положим

Поступила 04.06.2012

$$\tau_{xz} = az + k_6, \quad (4)$$

$$\tau_{yz} = bz + k_5,$$

где  $a, b - const.$

Из (3), (4) получим

$$(\tau_{xy} - k_4) = \frac{ab\kappa + \sqrt{a^2b^2\kappa^2 + 4a^2b^2z^2(a^2 + b^2)}}{2(a^2 + b^2)}. \quad (5)$$

Согласно (3), (5) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + \frac{(\tau_{xy} - k_4)az}{bz} + k'_1, \\ \sigma_y &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + \frac{(\tau_{xy} - k_4)bz}{az} + k'_2, \\ \sigma_z &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + \frac{az \cdot bz}{(\tau_{xy} - k_4)} + k'_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Из уравнений равновесия  $\sigma_{ij,j} = 0$  и соотношений (4)–(6) получим

$$\sigma = -ax - by + C + \frac{1}{3}\kappa - \frac{(\tau_{xz} - k_6)(\tau_{yz} - k_5)}{(\tau_{xy} - k_4)}, \quad C - const. \quad (7)$$

Согласно (6), (7) найдем

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -ax - by + C - \frac{(\tau_{xy} - k_4)(\tau_{xz} - k_6)}{(\tau_{yz} - k_5)} - \frac{(\tau_{xz} - k_6)(\tau_{yz} - k_5)}{(\tau_{xy} - k_4)}, \\ \sigma_y &= -ax - by + C - \frac{(\tau_{yz} - k_5)(\tau_{xy} - k_4)}{(\tau_{xz} - k_6)} - \frac{(\tau_{xz} - k_6)(\tau_{yz} - k_5)}{(\tau_{xy} - k_4)}, \\ \sigma_y &= -ax - by + C - \frac{(\tau_{yz} - k_5)(\tau_{xy} - k_4)}{(\tau_{xz} - k_6)} - \frac{(\tau_{xz} - k_6)(\tau_{yz} - k_5)}{(\tau_{xy} - k_4)}, \\ \sigma_z &= -ax - by + C, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  – определяются согласно (4), (5).

Рассмотрим слой пластического материала толщиной  $2h$ , предположим, что оси координат  $x, y$  лежат в срединной плоскости  $z = 0$ . В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам и отнесем все компоненты, имеющие размерности напряжения, к величинам предела текучести  $\kappa$ , а линейные размеры – к величине  $h$ .

На верхней и нижней сторонах слоя согласно (4) получим

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^+ &= a + k_6, \quad \tau_{yz}^+ = b + k_5, \quad z = 1, \\ \tau_{xz}^- &= -a + k_6, \quad \tau_{yz}^- = -b + k_5, \quad z = -1. \end{aligned} \quad (9)$$

Вектора касательных напряжений на верхней и нижней сторонах слоя будут иметь вид

$$\mathbf{T}_1 = \tau_{xz}^+ i + \tau_{yz}^+ j, \quad \mathbf{T}_2 = \tau_{xz}^- i + \tau_{yz}^- j, \quad (10)$$

где  $i, j$  – единичные орты вдоль осей  $x, y$ .

Величины результирующих касательных напряжений на верхней и нижней сторонах слоя согласно (9), (10) будут иметь вид

$$T_1 = \sqrt{\tau_{xz}^{+2} + \tau_{yz}^{+2}} = \sqrt{(a + k_6)^2 + (b + k_5)^2} = \kappa_1, \quad (11)$$

$$T_2 = \sqrt{\tau_{xz}^{-2} + \tau_{yz}^{-2}} = \sqrt{(-a + k_6)^2 + (-b + k_5)^2} = \kappa_2,$$

где  $\kappa_1, \kappa_2$  – безразмерные значения результирующих касательных напряжений на сторонах слоя,  $\kappa_1, \kappa_2 \leq 1$ .

Угол между векторами  $T_1, T_2$  согласно (9), (10) определяется из соотношения

$$\cos \phi = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 T_2} = \frac{k_5^2 + k_6^2 - (a^2 + b^2)}{\kappa_1 \cdot \kappa_2}. \quad (12)$$

Направления векторов  $T_1, T_2$  определяются из соотношений

$$tg \mu_1 = \frac{\tau_{yz}^+}{\tau_{xz}^+} = \frac{b + k_5}{a + k_6}, \quad tg \mu_2 = \frac{\tau_{yz}^-}{\tau_{xz}^-} = \frac{b - k_5}{a - k_6}, \quad \phi = \mu_2 - \mu_1. \quad (13)$$

Величины  $a, b, k_5, k_6$  определяются заданием величин  $\kappa_1, \kappa_2, \mu_1, \mu_2$ .

Предположим, что на верхней и нижней сторонах плиты достигаются предельные значения касательных напряжений  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ . Предположим, что вектор  $T_1$  направлен вдоль оси  $x$ .

$$T_1 = (a + k_6) i, \quad a + k_6 = 1, \quad b + k_5 = 0. \quad (14)$$

Вектор  $T_2$  имеет вид

$$T_2 = (-a + k_6) i + (-b + k_5) j, \quad T_2 = 1. \quad (15)$$

Из (14), (15) следует

$$b^2 = a \cdot (1 - a). \quad (16)$$

В рассматриваемом случае согласно (13)-(16) имеет место

$$a = \cos^2 \frac{\phi}{2}, \quad b = \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}, \quad \mu_1 = 0, \quad \phi = -\mu_2. \quad (17)$$

Согласно (8), (17) получим

$$\sigma_z = -\cos \frac{\phi}{2} \left( x \cdot \cos \frac{\phi}{2} + y \cdot \sin \frac{\phi}{2} \right) + C. \quad (18)$$

Переходя к переменным, получим

$$\xi = x \cdot \cos \frac{\phi}{2} + y \cdot \sin \frac{\phi}{2}, \quad \eta = -x \cdot \sin \frac{\phi}{2} + y \cdot \cos \frac{\phi}{2}. \quad (19)$$

Согласно (18), (19) будем иметь

$$\sigma_z = -\cos \frac{\phi}{2} \cdot \xi + C. \quad (20)$$

Таким образом, согласно (20) возрастание давления  $\sigma_z$  происходит по линейному закону вдоль биссектрисы угла между направлениями  $T_1, T_2$ . Имеет место

$$\sigma_z = -\xi + C, \quad \text{при } \phi = 0; \quad (21)$$

$$\sigma_z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \xi + C, \quad \text{при } \phi = \frac{\pi}{2}.$$

Для определения константы  $C$ , входящей в соотношения (8), воспользуемся предположением, что край плиты  $\xi = 0$  свободен от усилий. Предположим, что среднее значение нормального напряжения  $\sigma_\xi$  по толщине слоя равно нулю:

$$\int_{-1}^1 \sigma_{\xi} dz = 0. \quad (22)$$

Из (8), (18), (22) следует

$$2C = \int_{-1}^1 \left[ \frac{(\tau_{xy} - k_4)(\tau_{xz} - k_6)}{(\tau_{yz} - k_5)} \cdot \cos^2 \frac{\phi}{2} + \frac{(\tau_{yz} - k_5)(\tau_{xy} - k_4)}{(\tau_{xz} - k_6)} \cdot \sin^2 \frac{\phi}{2} + (\tau_{xy} - k_4) \sin \phi \right] dz. \quad (23)$$

Соотношения, определяющие кинематику пластического течения, могут быть записаны в виде [1]

$$k(\varepsilon_x n_1^2 + \varepsilon_{xy} n_1 n_2 + \varepsilon_{xz} n_1 n_3) = \lambda n_1^2, \quad (24)$$

$$k(\varepsilon_{xy} n_1 n_2 + \varepsilon_y n_2^2 + \varepsilon_{yz} n_2 n_3) = \lambda n_2^2, \quad (24)$$

$$k(\varepsilon_{xz} n_1 n_3 + \varepsilon_{yz} n_2 n_3 + \varepsilon_z n_3^2) = \lambda n_3^2, \quad (25)$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0, \quad (25)$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_{xy}, \dots$  – компоненты скорости деформации.

Имеют место формулы Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (26)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

где  $u, v, w$  – скорости перемещения.

Положим

$$u = m_1 x + n_1 y + p_1 + \bar{u}(z), \quad (27)$$

$$v = m_2 x + n_2 y + p_2 + \bar{v}(z), \quad (27)$$

$$w = qz,$$

где  $m_i, n_i, q, a - const.$

Согласно (26), (27) получим

$$\varepsilon_x = m_1, \quad \varepsilon_y = n_2, \quad \varepsilon_z = q, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot (n_1 + m_2), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{d\bar{v}}{dz} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right). \quad (28)$$

Используя (27), (28), выражение (24) перепишем в следующем виде:

$$n_1 \left( \frac{1}{2} \frac{d\bar{u}}{dz} n_1 n_3 + \frac{1}{2} \frac{d\bar{v}}{dz} n_2 n_3 + q n_3^2 \right) - n_3 \left( m_1 n_1^2 + \frac{1}{2} (n_1 + m_2) n_1 n_2 + \frac{1}{2} \frac{d\bar{u}}{dz} n_1 n_3 \right) = 0, \quad (29)$$

$$n_2 \left( \frac{1}{2} \frac{d\bar{u}}{dz} n_1 n_3 + \frac{1}{2} \frac{d\bar{v}}{dz} n_2 n_3 + q n_3^2 \right) - n_3 \left( \frac{1}{2} (n_1 + m_2) n_1 n_2 + n_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d\bar{v}}{dz} n_2 n_3 \right) = 0.$$

Из (29) найдем

$$\bar{u} = \frac{A \cdot R - B}{S \cdot R - T} \cdot z + C, \quad (30)$$

$$\bar{v} = \frac{B - T}{R} \cdot z - \frac{A \cdot R - B}{(S \cdot R - T) R} \cdot \frac{z^2}{2} + \tilde{C},$$

где

$$A = m_1 n_1^2 n_3 + \frac{1}{2} (n_1 + m_2) n_1 n_2 n_3 - q n_1 n_3^2,$$

$$B = \frac{1}{2} (n_1 + m_2) n_1 n_2 n_3 + n_2^2 n_3 - q n_2 n_3^2,$$

$$R = \frac{1}{2} n_2^2 n_3 - \frac{1}{2} n_2 n_3^2, S = \frac{1}{2} n_1^2 n_3 - \frac{1}{2} n_1 n_3^2, \quad T = \frac{1}{2} n_1 n_2 n_3.$$

Таким образом, согласно (4)–(6), (27), (29) компоненты напряжений и скоростей деформации могут быть определены.

Предельная нагрузка зависит от характера деформирования.

### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* О статически определимых состояниях в теории трансляционной идеальной пластической анизотропии / Д. Д. Ивлев, А. В. Ковалев, С. В. Тихонов // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С.101–105.

[2] *Максимова, Л. А.* О предельном состоянии слоя, сжатого шероховатыми плитами / Л. А. Максимова // ПММ. – 2000. – Т. 64. Вып. 6. – С. 1099–1104.

[3] *Максимова, Л. А.* О сжатии плиты из идеально пластического анизотропного материала / Л. А. Максимова // Проблемы механики : сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М. : Физматлит, 2003. – С. 520–523.

*Балашникова Анжелика Вениаминовна,*

*аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: info3006@yandex.ru*

A. V. Balashnikova

**ABOUT LIMITING A CONDITION OF A SPATIAL LAYER FROM AN  
IDEALNOPLASTICHESKY MATERIAL AT THE TRANSMITTING  
ANISOTROPY, COMPRESSED BY PARALLEL ROUGH PLATES**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** In work the limiting condition of a layer from an idealnoplastichesky material is considered at the transmitting anisotropy, compressed by parallel rough plates at not collinear directions of tangents of efforts. Statically definable conditions of the limiting condition, a generalizing condition of full plasticity are used.

**Keywords:** compression, layer, ideal plasticity, transmitting anisotropy.

**REFERENCES**

- [1] *Ivlev, D. D.* About statically definable states in theory of translational ideal-plastic anisotropy / D. D. Ivlev, A. V. Kovalev, S. V. Tichonov // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line: Mechanics of definable state. – 2012. – No. 1 (11). – P.101–105.
- [2] *Maksimova, L. A.* About compression of layer by rough plates / L. A. Maksimova // PMM. – 2000. – Vol. 64. – No. 6. – P. 1099–1104.
- [3] *Maksimova, L. A.* About compression of plate from ideal-plastic anisotropy layer / L. A. Maksimova // Problems of mechanics : sb. st. on the 90th anniversary of Ishlinskiy A. – M. : Phizmatlit, 2003. – P. 520–523.

*Balashnikova Anshelika Veniaminovna*

*Postgraduate student, Departament of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*



## ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО КОЛЬЦА В СЛУЧАЕ КОНТАКТА С ТРЕНИЕМ

Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова

**Аннотация.** В работе рассматривается первая основная задача теории упругости для кольца, составленного из двух однородно-изотропных концентрических колец с различными упругими постоянными, когда на границе раздела сред заданы условия контакта с трением, а на внешних окружностях заданы напряжения в виде рядов Фурье, которые сходятся абсолютно и равномерно.

**Ключевые слова:** упругое равновесие, двухслойное кольцо, контакт с трением.

УДК: 539.311

В различных областях техники применяются многослойные конструкции. Вопрос об устойчивости таких конструкций к разрушению является одним из важнейших и тесно связан с задачей о напряженно-деформированном состоянии конструкции в целом. В связи с этим представляют теоретический и практический интерес задачи теории упругости для различных видов многослойных областей.

Контактные задачи для концентрических колец рассматривались многими авторами (см., например, обзоры [1], [2]). Но во всех этих работах изучались либо задачи о вдавливании штампов, либо некоторые частные задачи для концентрических колец. В такой общей постановке, как в нашей статье, задачи теории упругости не рассматривались.

**Постановка задачи.** Найти упругое равновесие плоско-напряженного кольца, составленного из двух однородно-изотропных концентрических колец  $R_1 \leq r \leq R_2$  и  $R_2 \leq r \leq R_3$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) с модулями упругости  $E^{(1)}$ ,  $E^{(2)}$  и коэффициентами Пуассона  $\nu^{(1)}$ ,  $\nu^{(2)}$  соответственно.

Задача, очевидно, состоит в нахождении напряжений  $\sigma_r(r, \theta)$ ,  $\sigma_\theta(r, \theta)$ ,  $\tau_{r\theta}(r, \theta)$  из уравнений равновесия

$$\begin{cases} r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0, \\ r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

и условия сплошности

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0.$$

На окружности  $r = R_2$  заданы условия контакта с трением:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_2} &= \sigma_\theta^{(2)}(r, \theta) \Big|_{r=R_2}, & \tau_{r\theta}^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_2} &= \tau_{r\theta}^{(2)}(r, \theta) \Big|_{r=R_2}, \\ \tau_{r\theta}^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_2} &= \mu_{\text{тр}} \sigma_\theta^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_2}, & v^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_2} &= v^{(2)}(r, \theta) \Big|_{r=R_2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и ниже верхний индекс (1) соответствует кольцевой области  $R_1 \leq r \leq R_2$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) с параметрами  $\nu^{(1)}$ ,  $E^{(1)}$ , а индекс (2) – области  $R_2 \leq r \leq R_3$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) с параметрами  $\nu^{(2)}$ ,  $E^{(2)}$ ,  $\mu_{\text{тр}}$  – коэффициент трения.

На окружностях  $r = R_1$  и  $r = R_3$  заданы напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_1} &= \sigma_1(\theta), & \tau_{r\theta}^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_1} &= \tau_1(\theta), \\ \sigma_r^{(2)}(r, \theta) \Big|_{r=R_3} &= \sigma_2(\theta), & \tau_{r\theta}^{(2)}(r, \theta) \Big|_{r=R_3} &= \tau_2(\theta). \end{aligned} \quad (2)$$

Заданные функции представимы в виде рядов Фурье, которые сходятся абсолютно и равномерно:

$$\begin{aligned} \sigma_i(\theta) &= c_0^{(i)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n^{(i)} \cos n\theta + d_n^{(i)} \sin n\theta \right], \\ \tau_i(\theta) &= a_0^{(i)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n^{(i)} \cos n\theta + b_n^{(i)} \sin n\theta \right]. \end{aligned}$$

Предположим, что внешние усилия статически уравниваются на каждом из контуров  $r = R_1$  и  $r = R_3$ , т. е. имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_i(\theta) \cos \theta - \tau_i(\theta) \sin \theta] d\theta &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_i(\theta) \sin \theta + \tau_i(\theta) \cos \theta] d\theta &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \tau_i(\theta) d\theta &= 0. \end{aligned}$$

Исходя из внешнего вида граничных функций, видно, что первые два условия выполняются всегда, а из третьего следует

$$a_0^{(i)} = 0.$$

Точка с координатами  $(R_0, 0)$ , где  $R_1 < R_0 < R_2$ , жестко закреплена, т. е.

$$u^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_0, \theta=0} = v^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_0, \theta=0} = \omega^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_0, \theta=0} = 0. \quad (3)$$

**Решение.** Для решения этой задачи построим структуру напряжений и смещений в виде рядов Фурье. Для этого воспользуемся формулами Папковича–Нейбера, выражающими напряжения и перемещения через три гармонические функции, две из которых связаны условиями Коши–Римана. (Формулы Папковича–Нейбера в полярной системе координат даны, например, в монографии [3, 144–145]. Там они приведены там с опечатками. Мы использовали формулы, исправив неточности). Гармонические функции в кольце имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(j)}(r, \theta) &= A_{0,0}^{(j)} + B_{0,0}^{(j)} \ln r + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( A_{n,0}^{(j)} r^n + B_{n,0}^{(j)} r^{-n} \right) \cos n\theta + \left( C_{n,0}^{(j)} r^n + D_{n,0}^{(j)} r^{-n} \right) \sin n\theta \right], \\ \Phi_1^{(j)}(r, \theta) &= A_{0,1}^{(j)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( A_{n,1}^{(j)} r^n + B_{n,1}^{(j)} r^{-n} \right) \cos n\theta + \left( C_{n,1}^{(j)} r^n + D_{n,1}^{(j)} r^{-n} \right) \sin n\theta \right], \\ \Phi_2^{(j)}(r, \theta) &= A_{0,2}^{(j)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( -C_{n,1}^{(j)} r^n + D_{n,0}^{(j)} r^{-n} \right) \cos n\theta + \left( A_{n,0}^{(j)} r^n - B_{n,0}^{(j)} r^{-n} \right) \sin n\theta \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя их в выражения Папковича-Нейбера, получим:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^{(j)}(r, \theta) = & B_{0,0}^{(j)}r^{-2} + 2A_{1,1}^{(j)} + \left[ -2B_{1,0}^{(j)}r^{-3} + 2A_{2,1}^{(j)}r \right] \cos \theta + \left[ -2D_{1,0}^{(j)}r^{-3} + \right. \\
 & \left. + 2C_{2,1}^{(j)}r \right] \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ -n(n-1)A_{n,0}^{(j)}r^{n-2} - n(n+1)B_{n,0}^{(j)}r^{-n-2} + \right. \\
 & \left. + (n+1)(n+2)A_{n+1,1}^{(j)}r^n + (n-1)(n-2)B_{n-1,1}^{(j)}r^{-n} \right] \cos n\theta + \\
 & + \left[ -n(n-1)C_{n,0}^{(j)}r^{n-2} - n(n+1)D_{n,0}^{(j)}r^{-n-2} + (n+1)(n+2) \times \right. \\
 & \left. \times C_{n+1,1}^{(j)}r^n + (n-1)(n-2)D_{n-1,1}^{(j)}r^{-n} \right] \sin n\theta,
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta}^{(j)}(r, \theta) = & -B_{0,0}^{(j)}r^{-2} + 2A_{1,1}^{(j)} + \left[ 2B_{1,0}^{(j)}r^{-3} + 6A_{2,1}^{(j)}r \right] \cos \theta + \left[ 2D_{1,0}^{(j)}r^{-3} + \right. \\
 & \left. + 6C_{2,1}^{(j)}r \right] \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ n(n-1)A_{n,0}^{(j)}r^{n-2} + n(n+1)B_{n,0}^{(j)}r^{-n-2} + \right. \\
 & \left. + (n+1)(n+2)A_{n+1,1}^{(j)}r^n + (n-1)(n-2)B_{n-1,1}^{(j)}r^{-n} \right] \cos n\theta + \\
 & + \left[ n(n-1)C_{n,0}^{(j)}r^{n-2} + n(n+1)D_{n,0}^{(j)}r^{-n-2} + (n+1)(n+2) \times \right. \\
 & \left. \times C_{n+1,1}^{(j)}r^n + (n-1)(n-2)D_{n-1,1}^{(j)}r^{-n} \right] \sin n\theta,
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{r,\theta}^{(j)}(r, \theta) = & \left[ -2B_{1,0}^{(j)}r^{-3} + 2A_{2,1}^{(j)}r \right] \cos \theta - \left[ -2D_{1,0}^{(j)}r^{-3} + 2C_{2,1}^{(j)}r \right] \sin \theta + \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ -n(n-1)C_{n,0}^{(j)}r^{n-2} + n(n+1)D_{n,0}^{(j)}r^{-n-2} - n(n+1)C_{n+1,1}^{(j)} \times \right. \\
 & \times r^n + n(n-1)D_{n-1,1}^{(j)}r^{-n} \left. \right] \cos n\theta + \left[ n(n-1)A_{n,0}^{(j)}r^{n-2} - n(n+1) \times \right. \\
 & \times B_{n,0}^{(j)}r^{-n-2} + n(n+1)A_{n+1,1}^{(j)}r^n - n(n-1)B_{n-1,1}^{(j)}r^{-n} \left. \right] \sin n\theta,
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 2G^{(j)}u^{(j)}(r, \theta) = & -B_{0,0}r^{-1} + (\kappa^{(j)} - 1)A_{1,1}^{(j)}r + \left[ \kappa^{(j)}A_{0,1}^{(j)} - A_{1,0}^{(j)} + B_{1,0}^{(j)}r^{-2} + \right. \\
 & \left. + (\kappa^{(j)} - 2)A_{2,1}^{(j)}r^2 \right] \cos \theta + \left[ \kappa^{(j)}A_{0,2}^{(j)} - C_{1,0}^{(j)} + D_{1,0}^{(j)}r^{-2} + \right. \\
 & \left. + (\kappa^{(j)} - 2)C_{2,1}^{(j)}r^2 \right] \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ -nA_{n,0}^{(j)}r^{n-1} + nB_{n,0}^{(j)}r^{-n-1} + \right. \\
 & \left. + (\kappa^{(j)} - n - 1)A_{n+1,1}^{(j)}r^{n+1} + (\kappa^{(j)} + n - 1)B_{n-1,1}^{(j)}r^{-n+1} \right] \times \\
 & \times \cos n\theta + \left[ -nC_{n,0}r^{n-1} + nD_{n,0}r^{-n-1} + (\kappa^{(j)} - n - 1) \times \right. \\
 & \left. \times C_{n+1,1}^{(j)}r^{n+1} + (\kappa^{(j)} + n - 1)D_{n-1,1}^{(j)}r^{-n+1} \right] \sin n\theta,
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 2G^{(j)}v^{(j)}(r, \theta) = & -(\kappa^{(j)} - 1)C_{1,1}^{(j)}r + \left[ \kappa^{(j)}A_{0,2}^{(j)} - C_{1,0}^{(j)} - D_{1,0}^{(j)}r^{-2} - (\kappa^{(j)} + 2) \times \right. \\
 & \times C_{2,1}^{(j)}r^2 \left. \right] \cos \theta - \left[ \kappa^{(j)}A_{0,1}^{(j)} - A_{1,0}^{(j)} - B_{1,0}^{(j)}r^{-2} - (\kappa^{(j)} + 2) \times \right. \\
 & \left. \times A_{2,1}^{(j)}r^2 \right] \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ -nC_{n,0}^{(j)}r^{n-1} - nD_{n,0}^{(j)}r^{-n-1} - (\kappa^{(j)} + \right. \\
 & \left. + n + 1)C_{n+1,1}^{(j)}r^{n+1} + (\kappa^{(j)} - n + 1)D_{n-1,1}^{(j)}r^{-n+1} \right] \cos n\theta - \\
 & - \left[ -nA_{n,0}r^{n-1} - nB_{n,0}r^{-n-1} - (\kappa^{(j)} + n + 1)A_{n+1,1}^{(j)}r^{n+1} + \right. \\
 & \left. + (\kappa^{(j)} - n + 1)B_{n-1,1}^{(j)}r^{-n+1} \right] \sin n\theta,
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{2G^{(j)}}{\kappa^{(j)} + 1} \omega^{(j)}(r, \theta) = & -C_{1,1}^{(j)} - 2C_{2,1}^{(j)}r \cos \theta + 2A_{2,1}^{(j)}r \sin \theta + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ -(n+1)C_{n+1,1}^{(j)}r^n - (n-1)D_{n-1,1}^{(j)}r^{-n} \right] \cos n\theta + \\ & + \left[ -(n+1)A_{n+1,1}^{(j)}r^n - (n-1)B_{n-1,1}^{(j)}r^{-n} \right] \sin n\theta, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\kappa^{(j)} = 3 - 4\nu^{(j)}$ ,  $G^{(j)} = \frac{E^{(j)}}{2(1 + \nu^{(j)})}$ ,  $j = 1, 2$ .

Неизвестные коэффициенты определим из условий контакта с трением и граничных условий. Подставив выражения (5)–(9) в условия контакта с трением (1), в граничные условия (2) и приравнявая множители при  $\cos n\theta$  и  $\sin n\theta$ , получим систему. При  $n = 0$  система содержит 5 уравнений и 6 неизвестных коэффициентов  $B_{0,0}^{(1)}$ ,  $A_{1,1}^{(1)}$ ,  $C_{1,1}^{(1)}$ ,  $B_{0,0}^{(2)}$ ,  $A_{1,1}^{(2)}$ ,  $C_{1,1}^{(2)}$ :

$$\begin{cases} B_{0,0}^{(1)}R_1^{-2} + 2A_{1,1}^{(1)} = c_0^{(1)}, \\ B_{0,0}^{(2)}R_3^{-2} + 2A_{1,1}^{(2)} = c_0^{(2)}, \\ -B_{0,0}^{(1)}R_2^{-2} + 2A_{1,1}^{(1)} + B_{0,0}^{(2)}R_2^{-2} - 2A_{1,1}^{(2)} = 0, \\ -B_{0,0}^{(1)}R_2^{-2} + 2A_{1,1}^{(1)} = 0, \\ \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ -(\kappa^{(1)} + 1)C_{1,1}^{(1)}R_2 \right] - \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ -(\kappa^{(2)} + 1)C_{1,1}^{(2)}R_2 \right] = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Полагая  $C_{1,1}^{(1)}$  заданным, получаем условие разрешимости системы:

$$- \frac{2(\kappa^{(2)} + 1)(R_2^2 + R_3^2)(R_2^2 + R_1^2)}{G^{(2)}R_1^2R_2^2R_3^2} \neq 0.$$

Это условие выполняется для всех значений  $\kappa^{(2)}$ ,  $G^{(2)}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ . Следовательно, система (11) всегда имеет решение.

При  $n = 1$  условия контакта и граничные условия дают систему 16-го порядка относительно неизвестных  $\kappa^{(1)}A_{0,1}^{(1)} - A_{1,0}^{(1)}$ ,  $B_{1,0}^{(1)}$ ,  $A_{2,1}^{(1)}$ ,  $\kappa^{(2)}A_{0,1}^{(2)} - A_{1,0}^{(2)}$ ,  $B_{1,0}^{(2)}$ ,  $A_{2,1}^{(2)}$ ,  $\kappa^{(1)}A_{0,2}^{(1)} - C_{1,0}^{(1)}$ ,  $D_{1,0}^{(1)}$ ,  $C_{2,1}^{(1)}$ ,  $\kappa^{(2)}A_{0,2}^{(2)} - C_{1,0}^{(2)}$ ,  $D_{1,0}^{(2)}$ ,  $C_{2,1}^{(2)}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -2B_{1,0}^{(1)}R_1^{-3} + 2A_{2,1}^{(1)}R_1 = c_1^{(1)}, \\
 -2B_{1,0}^{(1)}R_1^{-3} + 2A_{2,1}^{(1)}R_1 = b_1^{(1)}, \\
 -2D_{1,0}^{(1)}R_1^{-3} + 2C_{2,1}^{(1)}R_1 = d_1^{(1)}, \\
 -2D_{1,0}^{(1)}R_1^{-3} + 2C_{2,1}^{(1)}R_1 = -a_1^{(1)}, \\
 -2B_{1,0}^{(2)}R_3^{-3} + 2A_{2,1}^{(2)}R_3 = c_1^{(2)}, \\
 -2B_{1,0}^{(2)}R_3^{-3} + 2A_{2,1}^{(2)}R_3 = b_1^{(2)}, \\
 -2D_{1,0}^{(2)}R_3^{-3} + 2C_{2,1}^{(2)}R_3 = d_1^{(2)}, \\
 -2D_{1,0}^{(2)}R_3^{-3} + 2C_{2,1}^{(2)}R_3 = -a_1^{(2)}, \\
 2B_{1,0}^{(1)}R_2^{-3} + 6A_{2,1}^{(1)}R_2 - 2B_{1,0}^{(2)}R_2^{-3} - 6A_{2,1}^{(2)}R_2 = 0, \\
 2D_{1,0}^{(1)}R_2^{-3} + 6C_{2,1}^{(1)}R_2 - 2D_{1,0}^{(2)}R_2^{-3} - 6C_{2,1}^{(2)}R_2 = 0, \\
 \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ \kappa^{(1)}A_{0,1}^{(1)} - A_{1,0}^{(1)} - B_{1,0}^{(1)}R_2^{-2} - \left( \kappa^{(1)} + 2 \right) A_{2,1}^{(1)}R_2^2 \right] - \\
 - \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ \kappa^{(2)}A_{0,1}^{(2)} - A_{1,0}^{(2)} - B_{1,0}^{(2)}R_2^{-2} - \left( \kappa^{(2)} + 2 \right) A_{2,1}^{(2)}R_2^2 \right] = 0, \\
 \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ \kappa^{(1)}A_{0,2}^{(1)} - C_{1,0}^{(1)} - D_{1,0}^{(1)}R_2^{-2} - \left( \kappa^{(1)} + 2 \right) C_{2,1}^{(1)}R_2^2 \right] - \\
 - \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ \kappa^{(2)}A_{0,2}^{(2)} - C_{1,0}^{(2)} - D_{1,0}^{(2)}R_2^{-2} - \left( \kappa^{(2)} + 2 \right) C_{2,1}^{(2)}R_2^2 \right] = 0, \\
 -2B_{1,0}^{(1)}R_2^{-3} + 2A_{2,1}^{(1)}R_2 + 2B_{1,0}^{(2)}R_2^{-3} - 2A_{2,1}^{(2)}R_2 = 0, \\
 -2D_{1,0}^{(1)}R_2^{-3} + 2C_{2,1}^{(1)}R_2 + 2D_{1,0}^{(2)}R_2^{-3} - 2C_{2,1}^{(2)}R_2 = 0, \\
 -2D_{1,0}^{(1)}R_2^{-3} + 2C_{2,1}^{(1)}R_2 + \mu_{\text{тр}} \left[ 2B_{1,0}^{(2)}R_2^{-3} + 6A_{2,1}^{(2)}R_2 \right] = 0, \\
 -2B_{1,0}^{(1)}R_2^{-3} + 2A_{2,1}^{(1)}R_2 - \mu_{\text{тр}} \left[ 2D_{1,0}^{(2)}R_2^{-3} + 6C_{2,1}^{(2)}R_2 \right] = 0.
 \end{array} \right. \quad (12)$$

Исследуем систему на совместность. Очевидно, должны быть выполнены равенства:

$$c_1^{(1)} = b_1^{(1)}, \quad c_1^{(2)} = b_1^{(2)}, \quad d_1^{(1)} = -a_1^{(1)}, \quad d_1^{(2)} = -a_1^{(2)}. \quad (13)$$

Еще одно условие разрешимости системы получим из уравнений (1), (3), (5), (7), (9), (10), (13), (16):

$$\begin{aligned}
 & \mu_{\text{тр}}R_1^3 (3R_2^4 + R_3^4) c_1^{(1)} - \mu_{\text{тр}}R_3^3 (3R_2^4 + R_1^4) c_1^{(2)} + \\
 & + R_1^3 (R_2^4 - R_3^4) d_1^{(1)} - R_3^3 (R_2^4 - R_1^4) d_1^{(2)} = 0.
 \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом условий (13) и (14) система (12) распадается на две системы пятилинейных алгебраических уравнений с 6 неизвестными коэффициентами:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -2B_{1,0}^{(1)}R_1^{-3} + 2A_{2,1}^{(1)}R_1 = c_1^{(1)}, \\
 -2B_{1,0}^{(2)}R_3^{-3} + 2A_{2,1}^{(2)}R_3 = c_1^{(2)}, \\
 2B_{1,0}^{(1)}R_2^{-3} + 6A_{2,1}^{(1)}R_2 - 2B_{1,0}^{(2)}R_2^{-3} - 6A_{2,1}^{(2)}R_2 = 0, \\
 \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ \kappa^{(1)}A_{0,1}^{(1)} - A_{1,0}^{(1)} - B_{1,0}^{(1)}R_2^{-2} - \left( \kappa^{(1)} + 2 \right) A_{2,1}^{(1)}R_2^2 \right] - \\
 - \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ \kappa^{(2)}A_{0,1}^{(2)} - A_{1,0}^{(2)} - B_{1,0}^{(2)}R_2^{-2} - \left( \kappa^{(2)} + 2 \right) A_{2,1}^{(2)}R_2^2 \right] = 0, \\
 -2B_{1,0}^{(1)}R_2^{-3} + 2A_{2,1}^{(1)}R_2 + 2B_{1,0}^{(2)}R_2^{-3} - 2A_{2,1}^{(2)}R_2 = 0;
 \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2D_{1,0}^{(1)}R_1^{-3} + 2C_{2,1}^{(1)}R_1 = d_1^{(1)}, \\ -2D_{1,0}^{(2)}R_3^{-3} + 2C_{2,1}^{(2)}R_3 = d_1^{(2)}, \\ 2D_{1,0}^{(1)}R_2^{-3} + 6C_{2,1}^{(1)}R_2 - 2D_{1,0}^{(2)}R_2^{-3} - 6C_{2,1}^{(2)}R_2 = 0, \\ \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ \kappa^{(1)}A_{0,2}^{(1)} - C_{1,0}^{(1)} - D_{1,0}^{(1)}R_2^{-2} - (\kappa^{(1)} + 2)C_{2,1}^{(1)}R_2^2 \right] - \\ - \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ \kappa^{(2)}A_{0,2}^{(2)} - C_{1,0}^{(2)} - D_{1,0}^{(2)}R_2^{-2} - (\kappa^{(2)} + 2)C_{2,1}^{(2)}R_2^2 \right] = 0, \\ -2D_{1,0}^{(1)}R_2^{-3} + 2C_{2,1}^{(1)}R_2 + 2D_{1,0}^{(2)}R_2^{-3} - 2C_{2,1}^{(2)}R_2 = 0. \end{array} \right. \quad (16)$$

Рассмотрим первую систему. Будем считать переменные  $B_{1,0}^{(1)}$ ,  $A_{2,1}^{(1)}$ ,  $\kappa^{(2)}A_{0,1}^{(2)} - A_{1,0}^{(2)}$ ,  $B_{1,0}^{(2)}$ ,  $A_{2,1}^{(2)}$  – главными, а  $\kappa^{(1)}A_{0,1}^{(1)} - A_{1,0}^{(1)}$  – свободной переменной. Перенесем свободные переменные за знаки равенств и вычислим определитель получившейся системы. Для ее совместности необходимо

$$-32 \frac{R_3^4 - R_1^4}{G^{(2)}R_1^3R_2^2R_3^3} \neq 0.$$

Это условие выполняется при любых значениях  $\nu^{(1)}$ ,  $\nu^{(2)}$ ,  $E^{(1)}$ ,  $E^{(2)}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $\mu_{\text{тр}}$ . Следовательно, первая из систем всегда разрешима. Аналогично доказывается, что вторая система также разрешима при всех значениях  $\nu^{(1)}$ ,  $\nu^{(2)}$ ,  $E^{(1)}$ ,  $E^{(2)}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $\mu_{\text{тр}}$ . Таким образом, система (12) имеет решение всюду, где справедливы равенства (13) и (14).

При  $n \geq 2$  система состоит из 16 уравнений относительно коэффициентов  $A_{n,0}^{(j)}$ ,  $B_{n,0}^{(j)}$ ,  $C_{n,0}^{(j)}$ ,  $D_{n,0}^{(j)}$ ,  $A_{n+1,1}^{(j)}$ ,  $B_{n-1,1}^{(j)}$ ,  $C_{n+1,1}^{(j)}$ ,  $D_{n-1,1}^{(j)}$ . Запишем ее в матричной форме:

$$A_n X_n = B_n, \quad (17)$$

где

$$A_n = \begin{bmatrix} K_n(R_1) & 0_{2,4} & 0_{2,4} & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & K_n(R_1) & 0_{2,4} & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & 0_{2,4} & K_n(R_3) & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & 0_{2,4} & 0_{2,4} & K_n(R_3) \\ M_n^{(1)}(R_2) & 0_{2,4} & -M_n^{(2)}(R_2) & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & M_n^{(1)}(R_2) & 0_{2,4} & -M_n^{(2)}(R_2) \\ P_n^{(1)}(R_2) & 0_{1,4} & -P_n^{(2)}(R_2) & 0_{1,4} \\ 0_{1,4} & P_n^{(1)}(R_2) & 0_{1,4} & -P_n^{(2)}(R_2) \\ P_n^{(1)}(R_2) & -\mu_{\text{тр}}Q_n^{(1)}(R_2) & 0_{1,4} & 0_{1,4} \\ \mu_{\text{тр}}Q_n^{(1)}(R_2) & P_n^{(1)}(R_2) & 0_{1,4} & 0_{1,4} \end{bmatrix},$$

$$K_n(R_i)^T = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{1}{n}\right)R_i^{n-2} & \left(1 - \frac{1}{n}\right)R_i^{n-2} \\ -\left(1 + \frac{1}{n}\right)R_i^{-n-2} & -\left(1 + \frac{1}{n}\right)R_i^{-n-2} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)R_i^n & \left(1 + \frac{1}{n}\right)R_i^n \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)R_i^{-n} & -\left(1 - \frac{1}{n}\right)R_i^{-n} \end{bmatrix},$$

$$M_n^{(j)}(R_i)^T = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{1}{n}\right) R_i^{n-2} & -\frac{R_i^{n-1}}{2G^{(j)}} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right) R_i^{-n-2} & -\frac{R_i^{-n-1}}{2G^{(j)}} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) R_i^n & -\frac{\left(1 + \frac{\kappa^{(j)} + 1}{n}\right) R_i^{n+1}}{2G^{(j)}} \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) R_i^{-n} & -\frac{\left(1 - \frac{\kappa^{(j)} + 1}{n}\right) R_i^{-n+1}}{2G^{(j)}} \end{bmatrix},$$

$$P_n(R_i) = \left( \left(1 - \frac{1}{n}\right) R_i^{n-2}, -\left(1 + \frac{1}{n}\right) R_i^{-n-2}, \left(1 + \frac{1}{n}\right) R_i^n, -\left(1 - \frac{1}{n}\right) R_i^{-n} \right),$$

$$Q_n(R_i) = \left( \left(1 - \frac{1}{n}\right) R_i^{n-2}, \left(1 + \frac{1}{n}\right) R_i^{-n-2}, \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) R_i^n, \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) R_i^{-n} \right),$$

$$0_{2,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$0_{1,4} = (0, 0, 0, 0),$$

$$X_n^T = \left( A_{n,0}^{(1)}, B_{n,0}^{(1)}, A_{n+1,1}^{(1)}, B_{n-1,1}^{(1)}, C_{n,0}^{(1)}, D_{n,0}^{(1)}, C_{n+1,1}^{(1)}, D_{n-1,1}^{(1)}, A_{n,0}^{(2)}, B_{n,0}^{(2)}, A_{n+1,1}^{(2)}, B_{n-1,1}^{(2)}, C_{n,0}^{(2)}, D_{n,0}^{(2)}, C_{n+1,1}^{(2)}, D_{n-1,1}^{(2)} \right),$$

$$B_n^T = \frac{1}{n^2} \left( c_n^{(1)}, b_n^{(1)}, d_n^{(1)}, -a_n^{(1)}, c_n^{(2)}, b_n^{(2)}, d_n^{(2)}, -a_n^{(2)}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right).$$

В связи с тем, что в системе присутствуют параметры  $\nu^{(1)}$ ,  $\nu^{(2)}$ ,  $E^{(1)}$ ,  $E^{(2)}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $\mu_{\text{тр}}$ , исследовать определитель на нули в общем случае трудно. При решении конкретных задач необходимо вычислить определитель системы, построить его график относительно  $n$ . Численными методами найти те значения  $n$ , при которых определитель обращается в нуль. Считая, что решение найдено с некоторой погрешностью, подставить ближайшие натуральные числа, и, если при всех таких  $n$  определитель отличен от нуля, система совместна и имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера.

Например,

$$A_{n,0}^{(1)} = \frac{1}{n^2} \left[ c_n^{(1)} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} - b_n^{(1)} \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + d_n^{(1)} \frac{\Delta_{13}}{\Delta} + a_n^{(1)} \frac{\Delta_{14}}{\Delta} + c_n^{(2)} \frac{\Delta_{15}}{\Delta} - b_n^{(2)} \frac{\Delta_{16}}{\Delta} + d_n^{(2)} \frac{\Delta_{17}}{\Delta} + a_n^{(2)} \frac{\Delta_{18}}{\Delta} \right], \quad (18)$$

где  $\Delta_{ij}$  – минор 15-го порядка,  $\Delta$  – определитель матрицы  $A_n$ .

Неизвестными остаются три коэффициента  $C_{1,1}^{(1)}$ ,  $\kappa^{(1)} A_{0,1}^{(1)} - A_{1,0}^{(1)}$ ,  $\kappa^{(1)} A_{0,2}^{(1)} - C_{1,0}^{(1)}$ . Найдем их из условия закрепления (3). Подставляя (8)–(10) в условия закрепления (3), найдем:

$$C_{1,1}^{(1)} = 2C_{2,1}^{(1)} R_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ -(n+1)C_{n+1,1}^{(1)} R_0^n - (n-1)D_{n-1,1}^{(1)} R_0^{-n} \right], \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \kappa^{(1)} A_{0,1}^{(1)} - A_{1,0}^{(1)} = & B_{0,0}^{(1)} R_0^{-1} - (\kappa^{(1)} - 1)A_{1,1}^{(1)} - B_{1,0}^{(1)} R_0^{-2} - (\kappa^{(1)} - 2)A_{2,1}^{(1)} R_0^2 + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ -nA_{n,0}^{(1)} R_0^{n-1} + nB_{n,0}^{(1)} R_0^{-n-1} + (\kappa^{(1)} - n - 1) \times \right. \\ & \left. \times A_{n+1,1}^{(1)} R_0^{n+1} + (\kappa^{(1)} + n - 1)B_{n-1,1}^{(1)} R_0^{-n+1} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \kappa^{(1)}A_{0,2}^{(1)} - C_{1,0}^{(1)} = & C_{1,1}^{(1)}R_0 + D_{1,0}^{(1)}R_0^{-2} + (\kappa^{(1)} + 2)C_{2,1}^{(1)}R_0^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ -nC_{n,0}^{(1)} \times \right. \\ & \times R_0^{n-1} - nD_{n,0}^{(1)}R_0^{-n-1} - (\kappa^{(1)} + n + 1)C_{n+1,1}^{(1)}R_0^{n+1} + \\ & \left. + (\kappa^{(1)} + n - 1)D_{n-1,1}^{(1)}R_0^{-n+1} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Покажем, что ряды, дающие напряжения и смещения, сходятся равномерно и абсолютно в соответствующих кольцах. Для этого оценим выражения (18) в пределе при  $n \rightarrow \infty$ . Рассмотрим систему  $\tilde{A}_n X_n = B_n$ , где

$$\tilde{A}_n = \begin{bmatrix} \tilde{K}_n(R_1) & 0_{2,4} & 0_{2,4} & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & \tilde{K}_n(R_1) & 0_{2,4} & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & 0_{2,4} & \tilde{K}_n(R_3) & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & 0_{2,4} & 0_{2,4} & \tilde{K}_n(R_3) \\ \tilde{M}_n^{(1)}(R_2) & 0_{2,4} & -\tilde{M}_n^{(2)}(R_2) & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & \tilde{M}_n^{(1)}(R_2) & 0_{2,4} & -\tilde{M}_n^{(2)}(R_2) \\ \tilde{P}_n^{(1)}(R_2) & 0_{1,4} & -\tilde{P}_n^{(2)}(R_2) & 0_{1,4} \\ 0_{1,4} & \tilde{P}_n^{(1)}(R_2) & 0_{1,4} & -\tilde{P}_n^{(2)}(R_2) \\ \tilde{P}_n^{(1)}(R_2) & -\mu_{\text{тр}}\tilde{Q}_n^{(1)}(R_2) & 0_{1,4} & 0_{1,4} \\ \mu_{\text{тр}}\tilde{Q}_n^{(1)}(R_2) & \tilde{P}_n^{(1)}(R_2) & 0_{1,4} & 0_{1,4} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{K}_n(R_i) = \begin{bmatrix} -R_i^{n-2} & -R_i^{-n-2} & R_i^n & R_i^{-n} \\ R_i^{n-2} & -R_i^{-n-2} & R_i^n & -R_i^{-n} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{M}_n^{(j)}(R_i) = \begin{bmatrix} R_i^{n-2} & R_i^{-n-2} & R_i^n & R_i^{-n} \\ -\frac{R_i^{n-1}}{2G^{(j)}} & -\frac{R_i^{-n-1}}{2G^{(j)}} & -\frac{R_i^{n+1}}{2G^{(j)}} & -\frac{R_i^{-n+1}}{2G^{(j)}} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{P}_n(R_i) = (R_i^{n-2}, -R_i^{-n-2}, R_i^n, -R_i^{-n}),$$

$$\tilde{Q}_n(R_i) = (R_i^{n-2}, R_i^{-n-2}, R_i^n, R_i^{-n}).$$

Тогда  $\tilde{\Delta}_{ij} \sim \Delta_{ij}$ ,  $\tilde{\Delta} \sim \Delta$ , где  $\tilde{\Delta}_{ij}$  – минор 15-го порядка,  $\tilde{\Delta}$  – определитель матрицы  $\tilde{A}_n$ .

$$\tilde{\Delta}_{11} = \frac{32(G^{(2)} - G^{(1)})^2}{G^{(1)2}G^{(2)2}R_2^{12}R_3^8} \left[ -R_1^{-n-4}R_2^{12} - R_1^{-n}R_2^8 + R_1^{-n-4}R_2^4R_3^8 - 2R_1^{-n-4} \times \right.$$

$$\times R_2^8R_3^4 + R_1^{-n-2}R_2^2R_3^8 - 2R_1^{-n-2}R_2^6R_3^4 - R_1^{-n}R_3^8 + 2R_1^{-n}R_2^4R_3^4 +$$

$$\left. + 2R_1^{-n-6}R_2^{10}R_3^4 - R_1^{-n-6}R_2^{14} + R_1^{-n-2}R_2^{10} - R_1^{-n-6}R_2^6R_3^8 \right],$$

$$\tilde{\Delta} = \frac{64(G^{(2)} - G^{(1)})^2}{G^{(1)2}G^{(2)2}R_1^8R_2^{14}R_3^8} \left[ R_1^8 - 2R_1^4R_2^4R_3^8 + R_2^8R_3^8 - 2R_1^8R_2^4R_3^4 - 2R_2^{12}R_3^4 - \right.$$

$$\left. - 4R_1^4R_2^8R_3^4 - 2R_1^4R_2^{12} + R_2^6 + R_1^8R_3^8 \right],$$

$$\frac{\tilde{\Delta}_{11}}{\tilde{\Delta}} = \frac{R_1^8R_2^2}{2} \left[ -R_1^{-n-4}R_2^{12} - R_1^{-n}R_2^8 + R_1^{-n-4}R_2^4R_3^8 - 2R_1^{-n-4}R_2^8R_3^4 + \right.$$

$$\left. + R_1^{-n-2}R_2^2R_3^8 - 2R_1^{-n-2}R_2^6R_3^4 - R_1^{-n}R_3^8 + 2R_1^{-n}R_2^4R_3^4 + 2R_1^{-n-6} \times \right.$$

$$\left. \times R_2^{10}R_3^4 - R_1^{-n-6}R_2^{14} + R_1^{-n-2}R_2^{10} - R_1^{-n-6}R_2^6R_3^8 \right] \rightarrow 0.$$

Следовательно,  $\Delta_{11}/\Delta \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Аналогично доказываем, что для  $\forall i, j$   $\Delta_{ij}/\Delta \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .



Таким образом,

$$A_{n,0}^{(1)} = \frac{1}{n^2} \left[ c_n^{(1)} \alpha_n - b_n^{(1)} \beta_n + d_n^{(1)} \gamma_n + a_n^{(1)} \delta_n + c_n^{(2)} \varepsilon_n - b_n^{(2)} \varphi_n + d_n^{(2)} \psi_n + a_n^{(2)} \xi_n \right],$$

где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0.$$

Аналогичную структуру имеют все остальные коэффициенты.

Выполнение этих условий обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость рядов (4) в соответствующих областях и на их границах, а также возможность почленного дифференцирования этих рядов. Таким образом, все произведенные в ходе решения задачи действия с рядами (4) корректны.

Итак, имеет место

**Теорема.** Задача об упругом равновесии плоско-напряженного кольца, составленного из двух однородно-изотропных кольцевых областей с различными модулями упругости и различными коэффициентами Пуассона, на стыке которых заданы условия контакта с трением (1), а граничные условия представлены в виде (2), точка с координатами  $(R_0, 0)$ , где  $R_1 < R_0 < R_2$ , жестко закреплена, имеет единственное решение, если для фиксированных  $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, E^{(1)}, E^{(2)}, R_1, R_2, R_3, \mu_{\text{тр}}$  определитель системы (17) отличен от нуля при всех натуральных  $n$  и выполнены условия (13) и (14). Решение записывается в виде рядов (5)–(10), коэффициенты которых находятся по формулам Крамера из систем (11), (15), (16), (17) и из равенств (19)–(21).

**Численные расчеты.** Рассмотрим задачу о равновесии кольца, составленного из меди и железа в следующей постановке: пусть область  $1 \leq r \leq 2$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) занимает медь ( $\nu^{(1)} = 0.34, E^{(1)} = 1.23 \cdot 10^{11}$  Па), а область  $2 \leq r \leq 4$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) – железо ( $\nu^{(2)} = 0.29, E^{(2)} = 1.96 \cdot 10^{11}$  Па).

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=1} &= \cos 2\theta, & \tau_{r\theta}^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=1} &= \sin 2\theta, \\ \sigma_r^{(2)}(r, \theta) \Big|_{r=4} &= 3 \cos 2\theta, & \tau_{r\theta}^{(2)}(r, \theta) \Big|_{r=4} &= 3 \sin 2\theta. \end{aligned}$$

На границе раздела сред выполняются условия контакта с трением (1), где  $\mu_{\text{тр}} = 0.51$  – коэффициент трения. Точка с координатами  $(1, 0)$  жестко закреплена.

Очевидно, для такой постановки задачи условия (13) и (14) выполняются. Перейдем к рассмотрению системы (17), вычислим ее определитель. Численными методами найдем те значения  $n$ , при которых определитель обращается в нуль, для этого решим уравнение  $\Delta_n = 0$ . Это уравнение не имеет решения при  $n \geq 2$ . Определитель отличен от нуля, следовательно, система совместна и имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера.

Итак,

$$\begin{aligned} A_{2,0}^{(1)} &= -0.6367371894, & B_{2,0}^{(1)} &= 0.1011773944, & A_{3,1}^{(1)} &= 0.02779916563, \\ B_{1,1}^{(1)} &= -1.356871876, & C_{2,0}^{(1)} &= 0.08940780309, & D_{2,0}^{(1)} &= -0.02421436392, \\ C_{3,1}^{(1)} &= 0.002794118556, & D_{1,1}^{(1)} &= 0.1704332505, & A_{2,0}^{(2)} &= 0.9056405971, \\ B_{2,0}^{(2)} &= -7.654464062, & A_{3,1}^{(2)} &= 0.02412437340, & B_{1,1}^{(2)} &= 10.45298034, \\ C_{2,0}^{(2)} &= -0.05635721284, & D_{2,0}^{(2)} &= 1.167743193, & C_{3,1}^{(2)} &= -0.0004445075239, \\ D_{1,1}^{(2)} &= -1.462049032, & C_{1,1}^{(1)} &= -0.1788156062, & C_{1,1}^{(2)} &= -0.2751421042, \\ \kappa^{(1)} A_{0,1}^{(1)} - A_{1,0}^{(1)} &= 2.144119450, & \kappa^{(2)} A_{0,1}^{(2)} - A_{1,0}^{(2)} &= 3.549073751, \\ \kappa^{(1)} A_{0,2}^{(1)} - C_{1,0}^{(1)} &= -0.4377988922, & \kappa^{(2)} A_{0,2}^{(2)} - C_{1,0}^{(2)} &= -0.7246707063. \end{aligned}$$

Все остальные коэффициенты равны нулю.

Построим графики приближения найденного решения к граничным функциям, например, в кольце  $1 \leq r \leq 2$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) (рис. 1).

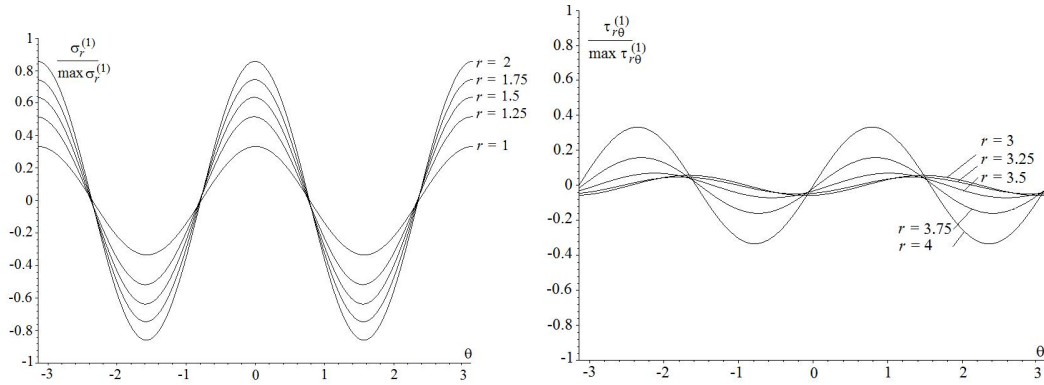


Рис. 1. Приближение к граничным функциям

Построим также график, иллюстрирующий поведение решений в области контакта, например, для нормальной компоненты напряжения (рис. 2).

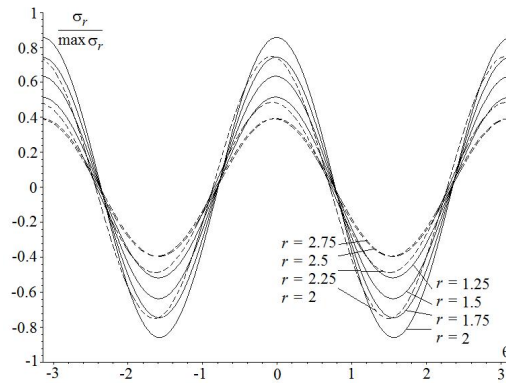


Рис. 2. Поведение в области контакта

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Механика* контактных взаимодействий / под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – М. : Физматлит, 2001. – 672 с.
- [2] *Теплый, М. И.* Контактные задачи для областей с круговыми границами / М. И. Теплый. – Львов : Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983. – 176 с.
- [3] *Уфлянд, Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – Л. : Наука, 1967. – 402 с.

*Данилова Светлана Владимировна,*

аспирант кафедры системного анализа и математического моделирования, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары

e-mail: sveta\_yumanova@mail.ru

*Кулагина Марина Фокеевна,*

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и математического моделирования, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары

e-mail: kulagina\_mf@mail.ru

*S. V. Danilova, M. F. Kulagina*

**THE FIRST MAIN PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR THE  
COMPOUND RING IN CASE OF CONTACT TO THE FRICTION**

*I. Chuvash State University*

**Abstract.** In work the first main problem of the theory of elasticity for a ring made of two is homogeneous-isotropic concentric rings with various elastic constants when on border of section of environments conditions of contact to a friction are set is considered and on external circles displacement in the form of numbers Fourie which converge absolutely and in regular intervals are set.

**Keywords:** elastic balance, two-layer ring, contact to a friction.

**REFERENCES**

- [1] *Mechanic of contact interactions* / edited of I. I. Vorovich, V. M. Alexandrov. – M. : FIZMATLIT, 2001. – 672 p.
- [2] *Tepliy, M. I.* Contact problems for domains with circular boundaries / M. I. Tepliy. – Lviv : Vischa shkola. The Publishing house of Lviv University, 1983. – 176 p.
- [3] *Uflyand, Ya. S.* Integral transforms in the theory of elasticity / Ya. S. Uflyand. - L. : Nauka, 1967. – 402 p.

*Danilova Svetlana Vladimirovna*

*Postgraduate Student, Department of System Analysis and Mathematical Modelling, I. Chuvash State University, Cheboksary*

*Kulagina Marina Fokeevna*

*Candidate of Phys.& Math., Assoc. Professor, Department of System Analysis and Mathematical Modelling, I. Chuvash State University, Cheboksary*

## МЕТОД ЛЯПУНОВА–МОВЧАНА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

*Московский государственный университет*

**Аннотация.** При помощи метода Ляпунова–Мовчана исследуется задача об устойчивости колебаний упругой цилиндрической оболочки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Найдена критическая скорость.

**Ключевые слова:** аэроупругость, цилиндрическая оболочка, устойчивость, метод Ляпунова–Мовчана.

УДК: 539.3

**Введение.** Задачи аэроупругой устойчивости имеют важное приложение к таким проблемам механики, как устойчивость колебаний обшивки летального аппарата. В работе [1] впервые было исследовано явление "панельного флаттера" после того, как А. А. Ильюшин в 1947 г. открыл закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей.

Дальнейшие исследования этого явления позволили дать новые постановки задачи "панельного флаттера" [2]. Материалы книги [2] помогли лучше понять сложность проблемы. Использование новых постановок, представленных в [2], видимо, поможет обнаружить новые механические эффекты, которые не могут быть найдены при помощи "поршневой теории". Постановка с использованием "поршневой теории" является математически более простой по сравнению с новыми постановками, представленными в [2], и потому в некоторых случаях более предпочтительной.

Текущая работа представляет собой аналитические исследования устойчивости колебаний цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа. Поскольку задача в самом общем виде является сложной, то она решается при некоторых предположениях, позволяющих получить некий результат.

Целью настоящей работы является определение критической скорости набегающего потока газа, при которой колебания оболочки будут устойчивыми в смысле Ляпунова–Мовчана. Некоторые идеи построения функционала Ляпунова–Мовчана были взяты из работ [3], [4], [5]. Также была полезна книга [6], в которой изложены основы этого метода.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается цилиндрическая оболочка постоянной толщины из однородного, упругого, изотропного материала, подчиняющегося закону Гука. Оболочка обтекается сверхзвуковым потоком газа. Предполагается, что оболочка жестко закреплена с одного края и свободна с другого.

Уравнения движения и граничные условия в безразмерных переменных примут вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{E_0}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} \alpha^2 + \nu \alpha \beta \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0 \partial \varphi} - \frac{\partial w_0}{\partial x_0} \right) \right) + \frac{E_0}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0^3} \alpha^3 \beta + \\
& + \frac{E_0}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0 \partial \varphi} \alpha \beta \right) - \frac{E_0}{24(1+\nu)} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0 \partial \varphi^2} \alpha \beta^3 = \rho' \frac{\partial^2 u_0}{\partial t_0^2} \alpha^2, \\
& \frac{E_0}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0 \partial \varphi} \alpha \beta + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0^2} \alpha^2 \right) + \frac{E_0}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0 \partial \varphi} \alpha \beta + \beta^2 \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right) \right) + \\
& + \frac{E_0(3-\nu)}{24(1-\nu^2)} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0^3 \partial \varphi} \alpha^2 \beta^2 = \rho' \frac{\partial^2 v_0}{\partial t_0^2} \alpha^2, \\
& - \frac{E_0}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x_0^4} \alpha^4 + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x_0^2 \partial \varphi^2} \alpha^2 \beta^2 + \frac{\partial^4 w_0}{\partial \varphi^4} \beta^4 \right) - \frac{E_0}{6(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} \beta^4 + \frac{E_0}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \alpha \beta + \right. \\
& \left. + \beta^2 \left( \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - w_0 \right) \right) - \frac{E_0}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x_0^3} \alpha^3 \beta + \frac{E_0}{24(1+\nu)} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x_0 \partial \varphi^2} \alpha \beta^3 + \frac{E_0(\nu-3)}{24(1-\nu^2)} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x_0^2 \partial \varphi} \alpha^2 \beta^2 - \\
& - \left( a_0 \frac{\partial w_0}{\partial x_0} + \frac{\partial w_0}{\partial t_0} \right) \alpha = \rho' \frac{\partial^2 w_0}{\partial t_0^2} \alpha^2, \\
& x_0 = 0 : u_0 = v_0 = w_0 = 0, \frac{\partial w_0}{\partial x_0} = 0, \\
& x_0 = 1 : \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \alpha + \nu \beta \left( \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - w_0 \right) + \frac{\alpha^2 \beta}{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} = 0, \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} \alpha^2 + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} \beta^2 + \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \alpha \beta + \nu \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \beta^2 = 0, \\
& \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \beta + \frac{\partial v_0}{\partial x_0} \alpha + \frac{\alpha \beta^2}{4} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0 \partial \varphi} = 0, - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0^3} \alpha^3 + (\nu - 2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0 \partial \varphi^2} \alpha \beta^2 + \frac{(\nu-3)\alpha \beta^2}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0 \partial \varphi} - \\
& - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} \alpha^2 \beta + \frac{(1-\nu)\beta^3}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} = 0.
\end{aligned}$$

В полученных уравнениях введены следующие безразмерные переменные:

$$w_0 = \frac{w}{h}, v_0 = \frac{v}{h}, u_0 = \frac{u}{h}, E_0 = \frac{E}{\rho_0 c_0^2}, \rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, a_0 = \frac{a}{c_0}, x_0 = \frac{x}{L}, t_0 = \frac{c_0 t}{L}, \alpha = \frac{h}{L}, \beta = \frac{h}{R},$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\rho$  – плотность материала,  $t$  – время,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – перемещения точек срединной плоскости вдоль образующей в кольцевом и радиальном направлениях соответственно,  $h$  – толщина оболочки,  $L$  – ее длина,  $R$  – радиус,  $c_0$  – скорость звука,  $\rho_0$  – плотность газа,  $x$  – координата вдоль образующей,  $\varphi$  – координата в кольцевом направлении,  $a$  – скорость потока газа, набегающего по направлению оси  $OX$ ,  $OX$  – ось, вдоль которой изменяется координата  $x$ .

## 2. Нахождение критической скорости для случая $\frac{\partial u_0}{\partial \varphi} = 0$ , $\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \Big|_{x_0=1} = 0$ .

Для исходной системы уравнений и граничных условий, учитывая условия

$$\frac{\partial u_0}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \Big|_{x_0=1} = 0,$$

уравнения движения и граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{E_0}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} \alpha^2 + \nu \alpha \beta \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0 \partial \varphi} - \frac{\partial w_0}{\partial x_0} \right) \right) + \frac{E_0}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0^3} \alpha^3 \beta + \\
& + \frac{E_0}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0 \partial \varphi} \alpha \beta - \frac{E_0}{24(1+\nu)} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0 \partial \varphi^2} \alpha \beta^3 = \rho' \frac{\partial^2 u_0}{\partial t_0^2} \alpha^2, \\
& \frac{E_0}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0^2} \alpha^2 + \frac{E_0}{1-\nu^2} \beta^2 \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right) + \frac{E_0(3-\nu)}{24(1-\nu^2)} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0^2 \partial \varphi} \alpha^2 \beta^2 = \rho' \frac{\partial^2 v_0}{\partial t_0^2} \alpha^2, \\
& - \frac{E_0}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x_0^4} \alpha^4 + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x_0^2 \partial \varphi^2} \alpha^2 \beta^2 + \frac{\partial^4 w_0}{\partial \varphi^4} \beta^4 \right) - \frac{E_0}{6(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} \beta^4 + \frac{E_0}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \alpha \beta + \right. \\
& \left. + \beta^2 \left( \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - w_0 \right) \right) - \frac{E_0}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x_0^3} \alpha^3 \beta + \frac{E_0(\nu-3)}{24(1-\nu^2)} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x_0^2 \partial \varphi} \alpha^2 \beta^2 - \left( a_0 \frac{\partial w_0}{\partial x_0} + \frac{\partial w_0}{\partial t_0} \right) \alpha = \rho' \frac{\partial^2 w_0}{\partial t_0^2} \alpha^2,
\end{aligned} \tag{1}$$

$$x_0 = 0 : u_0 = v_0 = w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial x_0} = 0,$$

$$x_0 = 1 : \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \alpha - \nu \beta w_0 + \frac{\alpha^2 \beta}{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} \alpha^2 + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} \beta^2 + \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \alpha \beta = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial x_0} \alpha + \frac{\alpha \beta^2}{4} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0 \partial \varphi} = 0, \quad - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0^3} \alpha^3 + (\nu - 2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0 \partial \varphi^2} \alpha \beta^2 - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} \alpha^2 \beta = 0.$$

**3. Применение метода Ляпунова–Мовчана.** Исследование устойчивости проводится с предположением, что  $\frac{\partial^2 u_0}{\partial t_0^2} = 0$  при  $x_0 \in [0, 1]$ . Если это условие не выполнено, то задача является значительно более сложной. Тогда граничные условия (2) и система уравнений (1) с учетом граничных условий (2) переписутся в виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \varphi^2} - \nu \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} + \frac{\alpha^2}{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0^2 \partial \varphi} - \frac{1-\nu}{24} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \varphi^3} \beta^2 = 0, \\
& \frac{E_0}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0^2} \alpha^2 + \frac{E_0}{1-\nu^2} \beta^2 \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right) + \frac{E_0(3-\nu)}{24(1-\nu^2)} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0^2 \partial \varphi} \alpha^2 \beta^2 = \rho' \frac{\partial^2 v_0}{\partial t_0^2} \alpha^2, \\
& - \frac{E_0}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x_0^4} \alpha^4 + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x_0^2 \partial \varphi^2} \alpha^2 \beta^2 + \frac{\partial^4 w_0}{\partial \varphi^4} \beta^4 \right) + \frac{E_0}{24(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} \beta^4 (\nu(1-\nu) - 4) + \\
& + \frac{E_0(\nu+2)}{2(1+\nu)} \beta^2 \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - E_0 \beta^2 w_0 - \frac{E_0 \nu}{6(1-\nu^2)} \alpha^2 \beta^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} - \frac{E_0}{12(1+\nu)} \alpha^2 \beta^2 \frac{\partial^3 v_0}{\partial x_0^2 \partial \varphi} - \\
& - \left( a_0 \frac{\partial w_0}{\partial x_0} + \frac{\partial w_0}{\partial t_0} \right) \alpha = \rho' \frac{\partial^2 w_0}{\partial t_0^2} \alpha^2,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$x_0 = 0 : u_0 = v_0 = w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial x_0} = 0,$$

$$x_0 = 1 : \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} \alpha^2 + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} \beta^2 + \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \alpha \beta = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial x_0} \alpha + \frac{\alpha \beta^2}{4} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0 \partial \varphi} = 0, \tag{4}$$

$$- \frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0^3} \alpha^2 + (\nu - 2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0 \partial \varphi^2} \beta^2 - \nu \beta^2 \frac{\partial w_0}{\partial x_0} = 0.$$

Первое уравнение системы (3) получается после дифференцирования первого уравнения системы (1) по  $\varphi$ .

Для использования теоремы Ляпунова–Мовчана об устойчивости вводится мера  $\mu$  и строится функционал  $V$ :

$$\begin{aligned}
\mu &= \left( \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left( \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial t_0} \right)^2 + v_0^2 + \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0 \partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_0} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\partial w_0}{\partial t_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right)^2 + w_0^2 \right) d\varphi dx_0 \Bigg|^{\frac{1}{2}}, \\
V &= \frac{2(1-\nu)}{3-\nu} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left( \rho' \alpha^2 \left( \frac{\partial v_0}{\partial t_0} \right)^2 + \frac{E_0 \alpha^2}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_0} \right)^2 + \frac{E_0 \beta^2}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \right)^2 \right) d\varphi dx_0 + \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left( \rho' \alpha^2 \times \right. \\
&\quad \left( \frac{\partial w_0}{\partial t_0} \right)^2 + \frac{E_0}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} \right)^2 \alpha^4 + \frac{E_0}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} \right)^2 \beta^4 + \frac{E_0 \nu}{6(1-\nu^2)} \alpha^2 \beta^2 \left( w_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} \right) + \\
&\quad \left. + \frac{E_0}{6(1+\nu)} \alpha^2 \beta^2 \frac{\partial v_0}{\partial x_0} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0 \partial \varphi} + \frac{E_0(1-\nu)}{6(1-\nu^2)} \alpha^2 \beta^2 \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0 \partial \varphi} \right)^2 + E_0 \beta^2 w_0^2 - \frac{4E_0}{(3-\nu)(1+\nu)} \beta^2 w_0 \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \right. \\
&\quad \left. + \lambda \left( \rho' \alpha^2 w_0 \frac{\partial w_0}{\partial t_0} + \frac{\alpha}{2} w_0^2 \right) \right) d\varphi dx_0,
\end{aligned}$$

где  $\lambda$  – некоторая константа, подлежащая дальнейшему определению. Граничное условие

$$\left( \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \alpha - \nu \beta w_0 + \frac{\alpha^2 \beta}{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} \right) \Big|_{x_0=1} = 0$$

в силу граничного условия

$$\left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} \alpha^2 + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} \beta^2 + \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \alpha \beta \right) \Big|_{x_0=1} = 0$$

можно переписать в виде:

$$\left( \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \alpha - \nu \beta w_0 \right) \Big|_{x_0=1} = 0.$$

Продифференцировав это граничное условие по  $\varphi$ , получим:

$$\frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \Big|_{x_0=1} = 0. \quad (5)$$

В силу системы уравнений (3) и граничных условий (4),(5) производная функционала по времени имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt_0} &= -\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^1 \left( \frac{E_0 \alpha^4}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} \right)^2 + \frac{E_0}{6(1-\nu^2)} \alpha^2 \beta^2 \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0 \partial \varphi} \right)^2 + \frac{E_0 \beta^4}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} \right)^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{E_0}{12(1+\nu)} \alpha^2 \beta^2 \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} - \frac{E_0}{24(1-\nu^2)} \beta^4 (\nu(1-\nu) - 4) w_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} + \frac{E_0 \nu}{6(1-\nu^2)} \alpha^2 \beta^2 w_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{E_0(\nu+2)}{2(1+\nu)} \beta^2 w_0 \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + E_0 \beta^2 w_0^2 \right) dx_0 + \frac{\alpha a_0}{2} w_0^2 \Big|_{x_0=1} \right) d\varphi - \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} 2a_0 \alpha \frac{\partial w_0}{\partial t_0} \frac{\partial w_0}{\partial x_0} d\varphi dx_0 + \\
&\quad + \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left( \left( \frac{\partial w_0}{\partial t_0} \right)^2 (\rho' \alpha^2 \lambda - 2\alpha) d\varphi dx_0 + 2 \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial w_0}{\partial t_0} \left( \frac{E_0}{24(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} \beta^4 (\nu(1-\nu) - 4) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{E_0 \beta^2 (2-\nu)}{2(3-\nu)} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \right) d\varphi dx_0 + C \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left( -\frac{1+\nu}{2} \left( \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \right)^2 + \nu w_0 \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - \frac{\alpha^2}{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \frac{1-\nu}{24} \beta^2 \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times d\varphi dx_0, \right.
\end{aligned}$$

где  $C$  – некоторая константа, подлежащая дальнейшему определению.

Условия определенной положительности функционала  $V$  по мере  $\mu$  запишутся в следующем виде:  $\rho' \alpha^2 \lambda - 2\alpha < 0, \lambda > 0$ .

Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следуют оценки:



$$\frac{E_0\beta^4}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi^2}\right)^2 + E_0\beta^2 w_0^2 \gg \left|\frac{E_0}{24(1-\nu^2)}\beta^4(\nu(1-\nu)-4)w_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi^2}\right|,$$

$$\frac{E_0\alpha^4}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2}\right)^2 + E_0\beta^2 w_0^2 \gg \left|\frac{E_0\nu}{6(1-\nu^2)}\alpha^2\beta^2 w_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2}\right|,$$

потому соответствующими слагаемыми в производной функционала можно пренебречь. Слагаемое

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial w_0}{\partial t_0} \left(\frac{E_0}{24(1-\nu^2)}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi^2}\beta^4(\nu(1-\nu)-4)\right) d\varphi dx_0$$

с учетом граничного условия

$$\frac{\partial w_0}{\partial\varphi}\Big|_{x_0=1} = 0$$

можно убрать, введя в функционал слагаемое

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{E_0}{24(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial w_0}{\partial\varphi}\right)^2\beta^4(\nu(1-\nu)-4)d\varphi dx_0,$$

которым по аналогичным соображениям можно пренебречь.

Тогда производную можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt_0} = & -\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 \left(\frac{E_0\alpha^4}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2}\right)^2 + \frac{E_0}{6(1-\nu^2)}\alpha^2\beta^2\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0\partial\varphi}\right)^2 + \frac{E_0\beta^4}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi^2}\right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{E_0}{12(1+\nu)}\alpha^2\beta^2\frac{\partial v_0}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} - \frac{E_0(\nu+2)}{2(1+\nu)}\beta^2 w_0\frac{\partial v_0}{\partial\varphi} + E_0\beta^2 w_0^2\right) dx_0 + \frac{\alpha a_0}{2} w_0^2\Big|_{x_0=1} d\varphi - \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} 2a_0 \times \right. \\ & \times \alpha \frac{\partial w_0}{\partial t_0} \frac{\partial w_0}{\partial x_0} d\varphi dx_0 + \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial w_0}{\partial t_0}\right)^2 (\rho'\alpha^2\lambda - 2\alpha) d\varphi dx_0 + 2 \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial w_0}{\partial t_0} \frac{E_0\beta^2(2-\nu)}{2(3-\nu)} \frac{\partial v_0}{\partial\varphi} d\varphi \times \\ & \left. \times dx_0 + C \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial\varphi}\right)^2 + \nu w_0\frac{\partial v_0}{\partial\varphi} - \frac{\alpha^2}{12}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2}\frac{\partial v_0}{\partial\varphi} + \frac{1-\nu}{24}\beta^2\frac{\partial v_0}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi^2}\right) d\varphi dx_0. \end{aligned}$$

Пусть  $0 < B_i < 1$  для  $i = 1, 2, 3$ . Перепишем производную функционала в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt_0} = & \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{E_0\lambda\alpha^4}{12(1-\nu^2)}(1-B_1)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2}\right)^2 - \frac{E_0\lambda}{6(1-\nu^2)}\alpha^2\beta^2\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0\partial\varphi}\right)^2 - E_0\lambda\beta^2(1-B_2)w_0^2 - \right. \\ & \left. - 2a_0\alpha\frac{\partial w_0}{\partial t_0}\frac{\partial w_0}{\partial x_0} + (\rho'\alpha^2\lambda - 2\alpha)(1-B_3)\left(\frac{\partial w_0}{\partial t_0}\right)^2\right) d\varphi dx_0 + \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1+\nu}{2}C\left(\frac{\partial v_0}{\partial\varphi}\right)^2 + (\nu C + \right. \\ & \left. + \frac{E_0(\nu+2)}{2(1+\nu)}\lambda\beta^2)w_0\frac{\partial v_0}{\partial\varphi} - E_0\lambda\beta^2 B_2 w_0^2 - \frac{E_0\alpha^4}{12(1-\nu^2)}\lambda B_1\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2}\right)^2 + \left(-\frac{E_0\lambda\alpha^2\beta^2}{12(1+\nu)} - \frac{\alpha^2 C}{12}\right)\frac{\partial v_0}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} + \right. \\ & \left. + (\rho'\alpha^2\lambda - 2\alpha)B_3\left(\frac{\partial w_0}{\partial t_0}\right)^2 + \frac{E_0\beta^2(2-\nu)}{3-\nu}\frac{\partial w_0}{\partial t_0}\frac{\partial v_0}{\partial\varphi} - \frac{E_0\lambda\beta^4}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi^2}\right)^2 + \frac{1-\nu}{24}C\beta^2\frac{\partial v_0}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi^2}\right) \times \\ & \left. \times d\varphi dx_0 - \frac{a_0\lambda}{2} \int_{-\pi}^{\pi} w_0^2\Big|_{x_0=1} d\varphi. \end{aligned}$$

Под знаком второго интеграла выделяем квадраты, таким образом получаем суммы квадратов, взятых с минусом, и некоторый коэффициент  $A$ , умноженный на  $\left(\frac{\partial v_0}{\partial\varphi}\right)^2$ . Так как остальные слагаемые в производной функционала не содержат  $\frac{\partial v_0}{\partial\varphi}$ , то для неположительности производной необходимо и достаточно, чтобы  $A \leq 0$ . Понятно, что нужно принять  $A = 0$ . Получим уравнение:

$$-\frac{1+\nu}{2}C + \frac{(\nu C + \frac{E_0(\nu+2)}{2(1+\nu)}\lambda\beta^2)^2}{4E_0\lambda\beta^2 B_2} + \frac{(\frac{E_0\lambda\beta^2}{12(1+\nu)} + \frac{C}{12})^2}{\frac{E_0\lambda B_1}{3(1-\nu^2)}} + \frac{(\frac{E_0\beta^2(2-\nu)}{3-\nu})^2}{4(2\alpha - \rho'\alpha^2\lambda)B_3} + \frac{(\frac{1-\nu}{24}C)^2}{\frac{E_0\lambda}{3(1-\nu^2)}} = 0,$$

$$C > 0.$$

Или перепишем в следующем виде:

$$C^2\left(\frac{\nu^2}{4E_0\lambda\beta^2B_2} + \frac{1-\nu^2}{48E_0\lambda B_1} + \frac{(1-\nu)^2(1-\nu^2)}{192E_0\lambda}\right) + C\left(-\frac{1+\nu}{2} + \frac{\nu(\nu+2)}{4(1+\nu)B_2} + \frac{\beta^2(1-\nu)}{24B_1}\right) + \frac{E_0\lambda\beta^2(\nu+2)^2}{16(1+\nu)^2B_2} + \frac{E_0\lambda\beta^4(1-\nu^2)}{48(1+\nu)^2B_1} + \frac{E_0^2\beta^4(2-\nu)^2}{4(3-\nu)^2(2\alpha-\rho'\alpha^2\lambda)B_3} = 0,$$

$$C > 0.$$

Для того чтобы полученная система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\frac{(1+\nu)^2}{4} - \frac{\nu(\nu+2)}{4B_2} - \frac{\beta^2(1-\nu^2)}{24B_1} - \frac{1-\nu}{192(1+\nu)}(\nu-2)^2 \frac{\beta^2}{B_1B_2} - \frac{(1-\nu)^2(1-\nu^2)\beta^2(2+\nu)^2}{192\cdot 4(1+\nu)^2B_2} - \tag{6}$$

$$- \frac{(1-\nu)^2(1-\nu^2)^2\beta^4}{192\cdot 12(1+\nu)^2B_1} - \frac{E_0\beta^4(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2\lambda(2\alpha-\rho'\alpha^2\lambda)B_3} \left(\frac{\nu^2}{4\beta^2B_2} + \frac{1-\nu^2}{48B_1} + \frac{(1-\nu)^2(1-\nu^2)}{192}\right) \geq 0,$$

$$- \frac{1+\nu}{2} + \frac{\nu(\nu+2)}{4(1+\nu)B_2} + \frac{\beta^2(1-\nu)}{24B_1} < 0. \tag{7}$$

В силу первых трех слагаемых неравенства (6) неравенство (7) является следствием неравенства (6). Поэтому система неравенств равносильна неравенству (6). Пусть  $B_1 = \beta^2 C_3$ . Тогда неравенство (6) перепишем в виде:

$$B_2\left(\frac{(1+\nu)^2}{4}B_3C_3 - \frac{E_0\beta^2(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2\lambda(2\alpha-\rho'\alpha^2\lambda)}\frac{1-\nu^2}{48} - \frac{E_0\beta^4(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2\lambda(2\alpha-\rho'\alpha^2\lambda)}\frac{(1-\nu)^2(1-\nu^2)}{192}C_3 - B_3\left(\frac{1-\nu^2}{24} + \frac{(1-\nu)^4\beta^2}{192\cdot 12}\right)\right) - \frac{\nu(\nu+2)}{4}B_3C_3 - \frac{(1-\nu)(\nu-2)^2}{192(1+\nu)}B_3 - \frac{(1-\nu)^2(1-\nu^2)\beta^2(\nu+2)^2}{192\cdot 4(1+\nu)^2}B_3C_3 - \frac{E_0\beta^2(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2\lambda(2\alpha-\rho'\alpha^2\lambda)}\frac{\nu^2}{4}C_3 \geq 0. \tag{8}$$

Исходя из условия неположительности производной функционала, можно записать следующее неравенство:

$$a_0^2 \leq \frac{E_0\beta}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\sqrt{(1-B_1)(1-B_2)(1-B_3)\lambda(2\alpha-\rho'\alpha^2\lambda)}. \tag{9}$$

Из неравенства (8) видно, что при уменьшении величины  $\lambda(2\alpha-\rho'\alpha^2\lambda)$  величина  $B_2$  увеличивается, а потому  $1-B_2$  уменьшается, следовательно, чтобы правая часть неравенства (9) была максимальна, необходимо, чтобы  $\lambda(2\alpha-\rho'\alpha^2\lambda)$  было максимально. Тогда неравенства (8), (9) перепишутся в следующем виде:

$$B_2\left(\frac{(1+\nu)^2}{4}B_3C_3 - \frac{E_0\rho'\beta^2(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2}\frac{1-\nu^2}{48} - \frac{E_0\rho'\beta^4(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2}\frac{(1-\nu)^2(1-\nu^2)}{192}C_3 - B_3\left(\frac{1-\nu^2}{24} + \frac{(1-\nu)^4\beta^2}{192\cdot 12}\right)\right) - \frac{\nu(\nu+2)}{4}B_3C_3 - \frac{(1-\nu)(\nu-2)^2}{192(1+\nu)}B_3 - \frac{(1-\nu)^2(1-\nu^2)\beta^2(\nu+2)^2}{192\cdot 4(1+\nu)^2}B_3C_3 - \frac{E_0\rho'\beta^2(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2}\frac{\nu^2}{4}C_3 \geq 0, \tag{10}$$

$$a_0^2 \leq \frac{E_0\beta}{\sqrt{12(1-\nu^2)\rho'}}\sqrt{(1-B_1)(1-B_2)(1-B_3)}.$$

Пусть

$$B = \frac{\nu(\nu+2)}{4}B_3C_3 + \frac{(1-\nu)(\nu-2)^2}{192(1+\nu)}B_3 + \frac{(1-\nu)^2(1-\nu^2)\beta^2(\nu+2)^2}{192\cdot 4(1+\nu)^2}B_3C_3 + \frac{E_0\rho'\beta^2(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2}\frac{\nu^2}{4}C_3,$$

$$A = \frac{(1+\nu)^2}{4}B_3C_3 - \frac{E_0\rho'\beta^2(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2}\frac{1-\nu^2}{48} - \frac{E_0\rho'\beta^4(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2}\frac{(1-\nu)^2(1-\nu^2)}{192}C_3 - B_3\left(\frac{1-\nu^2}{24} + \frac{(1-\nu)^4\beta^2}{192\cdot 12}\right).$$

Тогда неравенство (10) равносильно системе:  $A > 0, B_2 \geq \frac{B}{A}$ . Так как  $B_2$  должно быть минимально, то  $B_2 = \frac{B}{A}$ .

$$A - B = \frac{B_3 C_3}{4} - \frac{(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2} E_0 \rho' \beta^2 \frac{1-\nu^2}{48} - B_3 \left( \frac{1-\nu^2}{24} + \frac{(1-\nu)^4 \beta^2}{192 \cdot 12} + \frac{(1-\nu)(\nu-2)^2}{192(1+\nu)} \right) - \\ - C_3 \frac{\nu^2(2-\nu)^2}{4(3-\nu)^2} E_0 \rho' \beta^2 - \frac{(1-\nu)^2(1-\nu^2)\beta^2(\nu+2)^2}{192 \cdot 4(1+\nu)^2} B_3 C_3 - C_3 \frac{(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2} \beta^2 E_0 \rho' \beta^2 \frac{(1-\nu)^2(1-\nu^2)}{192}.$$

Для выполнения неравенства  $0 < B_2 < 1$  необходимо и достаточно выполнение неравенств  $A > 0, A - B > 0$ . Тогда рассмотрим величину  $(1 - B_1)(1 - B_2)$  и найдем максимум этой величины по  $C_3$ . Введем следующие обозначения:

$$A_1 = \frac{B_3}{4} - \frac{\nu^2(2-\nu)^2}{4(3-\nu)^2} E_0 \rho' \beta^2 - \frac{(1-\nu)^2(1-\nu^2)\beta^2(\nu+2)^2}{192 \cdot 4(1+\nu)^2} B_3 - \frac{(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2} \beta^2 E_0 \rho' \beta^2 \frac{(1-\nu)^2(1-\nu^2)}{192},$$

$$A_2 = \frac{(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2} E_0 \rho' \beta^2 \frac{1-\nu^2}{48} + B_3 \left( \frac{1-\nu^2}{24} + \frac{(1-\nu)^4 \beta^2}{192 \cdot 12} + \frac{(1-\nu)(\nu-2)^2}{192(1+\nu)} \right),$$

$$A_3 = \frac{(1+\nu)^2}{4} B_3 - \frac{(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2} \beta^2 E_0 \rho' \beta^2 \frac{(1-\nu)^2(1-\nu^2)}{192},$$

$$A_4 = \frac{(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2} E_0 \rho' \beta^2 \frac{1-\nu^2}{48} + B_3 \left( \frac{1-\nu^2}{24} + \frac{(1-\nu)^4 \beta^2}{192 \cdot 12} \right),$$

$$A_5 = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} \frac{\beta}{16} (3\nu + 2 + \frac{(1-\nu)^3 \beta^2 (\nu+2)}{48(1+\nu)}),$$

$$A_6 = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} \frac{\beta}{16} \cdot 2 \frac{(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2} E_0 \rho' \beta^2 \nu,$$

$$A_1 = A_7 B_3 + A_8, A_2 = A_9 B_3 + A_{10}, A_3 = A_{11} B_3 + A_{12}, A_4 = A_{13} B_3 + A_{10},$$

$$B_3^* = -\frac{A_8 - \beta^2 A_{10}}{A_7 - \beta^2 A_9} (0 < B_3^* < 1), a_1 = \frac{A_5}{A_7 - \beta^2 A_9}, a_2 = \frac{A_6}{A_7 - \beta^2 A_9}, a_3 = \frac{A_{11}}{A_7 - \beta^2 A_9}, a_4 = \frac{A_{12}}{A_7 - \beta^2 A_9},$$

$$t = \frac{a_4 + a_2}{a_3 + a_1}.$$

Тогда получим следующее соотношение:

$$(1 - B_1)(1 - B_2) = (1 - \beta^2 C_3) \frac{A_1 C_3 - A_2}{A_3 C_3 - A_4}$$

при условии выполнения следующих неравенств:

$$A_1 C_3 - A_2 > 0, A_3 C_3 - A_4 > 0.$$

Следует отметить тот факт, что из этих неравенств следуют неравенства:

$$A_i > 0, i = 1, 2, 3, 4.$$

Тогда можно записать, что:

$$\frac{A_2}{A_1} < C_3 < \frac{1}{\beta^2}. \quad (11)$$

Вычисление нулей производной дает следующий результат:

$$C_3^* = \frac{A_4}{A_3} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 A_1 (A_2 A_3 - A_1 A_4) (A_3 - \beta^2 A_4)}}{\beta^2 A_1 A_3}.$$

Несложно показать, что больший корень — точка максимума и удовлетворяет неравенству (11). Найдем это максимальное значение. Для этого сначала воспользуемся тем, что  $C_3^*$  удовлетворяет квадратному уравнению, а затем подставим само значение корня. Получим:

$$(1 - B_1)(1 - B_2) = \frac{1}{A_3^2} (\sqrt{A_1 (A_3 - \beta^2 A_4)} - \sqrt{\beta^2 (A_2 A_3 - A_1 A_4)})^2.$$

Пусть

$$A_5 = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} \frac{\beta}{16} (3\nu + 2 + \frac{(1-\nu)^3 \beta^2 (\nu+2)}{48(1+\nu)}), \quad A_6 = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} \frac{\beta}{16} 2 \frac{(2-\nu)^2}{(3-\nu)^2} E_0 \rho' \beta^2 \nu.$$

Тогда

$$\beta^2 (A_2 A_3 - A_1 A_4) = (A_5 B_3 + A_6)^2,$$

$$\sqrt{(1-B_1)(1-B_2)}(1-B_3) = \frac{1-B_3}{A_3} (\sqrt{A_1(A_3 - \beta^2 A_4)} - (A_5 B_3 + A_6)).$$

Потому получается следующая задача:

$$\frac{1-B_3}{A_3} (\sqrt{A_1(A_3 - \beta^2 A_4)} - (A_5 B_3 + A_6)) \rightarrow \sup, \quad \frac{A_2}{A_1} < \frac{1}{\beta^2}.$$

Непосредственное вычисление производной приводит, вообще говоря, к уравнению 6-й степени относительно  $B_3$ . Перепишем задачу в следующем виде:

$$\frac{(1-B_3)(A_1 - \beta^2 A_2)}{\sqrt{A_1(A_3 - \beta^2 A_4) + (A_5 B_3 + A_6)}} \rightarrow \sup, \quad \frac{A_2}{A_1} < \frac{1}{\beta^2}.$$

Так как  $A_3 > A_1$ , то, уменьшив значение дроби, рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{(1-B_3)(A_1 - \beta^2 A_2)}{A_3 + (A_5 B_3 + A_6)} \rightarrow \sup, \quad \frac{A_2}{A_1} < \frac{1}{\beta^2}.$$

После прямых вычислений получаем:

$$\sup = \frac{1}{a_1 + a_3} (\sqrt{t+1} - \sqrt{t+B_3^*})^2, \quad \text{где } t = \frac{a_4 + a_2}{a_3 + a_1}.$$

Результат можно записать в следующем виде:

$$a_0^2 \leq \frac{E_0 \beta}{\sqrt{12(1-\nu^2)\rho'}} \frac{1}{a_1 + a_3} (\sqrt{t+1} - \sqrt{t+B_3^*})^2.$$

### Заключение.

Величина скорости падает по сравнению с осесимметричным случаем [7]. Дополнительное условие  $B_3^* < 1$  ( $B_3^* > 0$  выполняется автоматически) накладывает существенные ограничения на механико-геометрические параметры задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мовчан, А. А. Об устойчивости панели, движущейся в газе / А. А. Мовчан // ПММ. – 1957. – Т. 21. – Вып. 2. – С. 231–243.
- [2] Кийко, И. А. Постановка задачи о флаттере оболочки вращения и полой оболочки, обтекаемых потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью / И. А. Кийко // ПММ. – 1999. – Т. 63. – Вып. 2. – С. 317–325.
- [3] Мовчан, А. А. Об устойчивости процессов деформирования сплошных сред / А. А. Мовчан // Arch. Mech. Stosow. – 1963. – V. 15. – No. 5. – S. 659–682.
- [4] Parks, P. C. A stability criterion for a panel flutter problem via the second method of Liapunov / P. C. Parks // Differential equations and dynamical systems. – New-York – London : Acad. Press, 1967. – P. 287–298.
- [5] Сиразетдинов, Т. К. Устойчивость систем с распределенными параметрами / Т. К. Сиразетдинов. – Новосибирск : Наука, 1987. – 229 с.
- [6] Победря, Б. Е. Лекции по теории упругости / Е. Б. Победря, Д. В. Георгиевский. – М. : Эдиториал УРСС, 1999. – 204 с.
- [7] Квачев, К. В. Исследование устойчивости осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки под действием неконсервативной нагрузки / К. В. Квачев // Современные проблемы математики и механики (в печати).

Квачев Кирилл Вадимович,

аспирант кафедры механики композитов, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва

e-mail: kvachevkirill@yandex.ru

K. V. Kvachev

**THE LYAPUNOV–MOVCHAN METHOD IN ONE STABILITY PROBLEM OF  
CYLINDRICAL SHELL'S OSCILLATIONS**

*Moscow State University*

**Abstract.** Using the Lyapunov–Movchan method the stability problem for elastic cylindrical shell oscillations in supersonic gas stream is investigated. The critical velocity is obtained.

**Keywords:** aeroelasticity, plate, stability, the Lyapunov–Movchan method.

**REFERENCES**

- [1] *Movchan, A. A.* On the stability of the panel, moving in gas / A. A. Movchan // PMM. – 1957. – Vol. 21. – no. 2. – P. 231–243.
- [2] *Kiyko, I. A.* Statement of the problem on the flutter of rotating shells and shallow shell in a gas flow at hypersonic speeds / I. A. Kiyko // PMM. – 1999. – Vol. 63. – no. 2. P. 317–325.
- [3] *Movchan, A. A.* On the stability of the deformation processes of continuous media / A. A. Movchan // Arch. Mech. Stosow. – 1963. – Vol. 15. – No. 5. – P. 659–682.
- [4] *Parks, P. C.* A stability criterion for a panel flutter problem via the second method of Liapunov / P. C. Parks // Differential equations and dynamical systems.– New-York – London : Acad.Press, 1967. – P. 287–298.
- [5] *Sirazetdinov, T. K.* Stability of systems with distributed parameters / T. K. Sirazetdinov // Novosibirsk : Science, 1987. – 229 p.
- [6] *Pobedrya, B. E.* Lectures on the theory of elasticity / E. B. Pobedrya, D. V. Georgievskij // M. : Editorial URSS, 1999. – 204 p.
- [7] *Kvachev, K. V.* Investigation of the stability of axisymmetric vibrations of a cylindrical shell under the action of non-conservative load / K. V. Kvachev // Contemporary Mathematics and Mechanics (in print).

*Kvachev Kirill Vadimovich*

*Postgraduate student, Department of mechanics of composites, M. Lomonosov Moscow State University, Moscow*

## О ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ КЛИНА ПРИ ДЕЙСТВИИ РАВНОМЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева*

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается случай трансляционной анизотропии. Определено предельное давление клина с углом раствора  $2\gamma$ , нагруженного равномерным давлением по одной из его сторон. Материал клина предполагается анизотропным, однородным, жестко-пластическим.

**Ключевые слова:** идеальная пластичность, напряжение, плоская задача, предел текучести, предельное давление клина, равномерное напряженное состояние, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Рассмотрим задачу о нахождении предельной нагрузки для клина при действии равномерного давления  $p$ , приложенного к правой грани. Остановимся на случае тупого клина с углом раствора  $2\gamma > \frac{\pi}{2}$  (рис. 1). Материал клина предполагается анизотропным, однородным, жестко-пластическим.

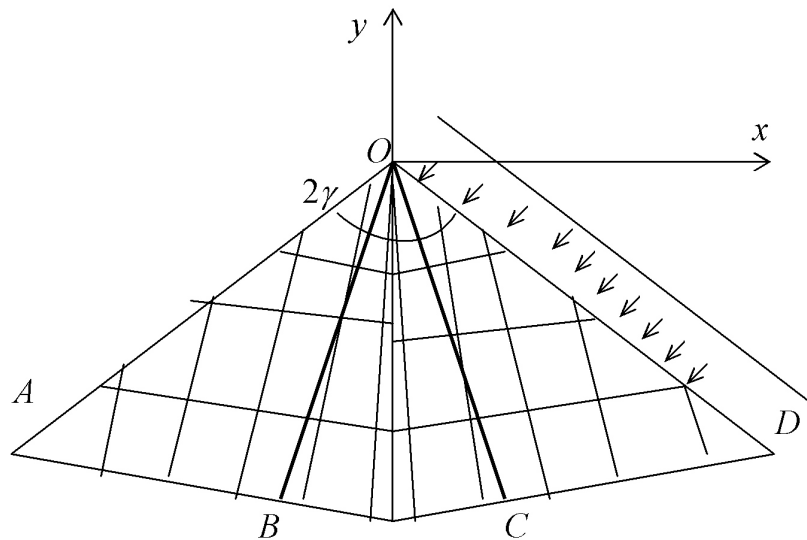


Рис. 1

Пределное условие в случае трансляционной идеальнопластической анизотропии для случая плоской деформации имеет вид [1]

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_0^2, \quad k_0, k_1, k_2, k_3 - \text{const}, \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненты напряжения.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам и отнесем все величины, имеющие размерность напряжений, к величине  $k_0$ , сохраним обозначение для компонент напряжений и постоянных  $k_i$ . Условие (1) примет вид

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = 1. \quad (2)$$

Соотношения (2) перепишем в виде

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 - 2\left(\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right) \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + k_3 \tau_{xy}\right) - P^2 = 0, \quad (3)$$

$$\rho^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + k_3^2 < 1, \quad (4)$$

$$P^2 = 1 - \rho^2.$$

В дальнейшем положим

$$\frac{k_1 - k_2}{2\rho} = \cos \mu, \quad \frac{k_3}{\rho} = \sin \mu, \quad 1 - \rho^2 = P^2. \quad (5)$$

Пусть

$$\sigma_x = p + k(\theta) \sin 2\theta,$$

$$\sigma_y = p - k(\theta) \sin 2\theta, \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = k(\theta) \cos 2\theta.$$

Из (3)–(6) найдем

$$k^2(\theta) + 2k(\theta)\rho[\sin(2\theta - \mu)] - P^2 = 0. \quad (7)$$

Так как  $k(\theta) > 0$ , то в дальнейшем следует ограничиться решением уравнения (7)

$$k(\theta) = -\rho \sin(2\theta - \mu) + \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2(2\theta - \mu)}, \quad \rho, \mu - \text{const}. \quad (8)$$

$$k'(\theta) = \frac{dk}{d\theta} = -2\rho \cos(2\theta - \mu) + \frac{\rho^2 \sin 2(2\theta - \mu)}{\sqrt{1 - \rho^2 \cos^2(2\theta - \mu)}}. \quad (9)$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Согласно [2] из (6), (8), (9) характеристики системы уравнений (10) примут вид

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{k' \sin 2\theta + 2k \cos 2\theta \pm \sqrt{k'^2 + 4k^2}}{k' \cos 2\theta - 2k \sin 2\theta}, \quad k' = \frac{dk}{d\theta}. \quad (11)$$

Характеристики (11) взаимно ортогональны. Соотношения вдоль характеристик, обобщающие интегралы Генки, имеют вид

$$\sigma \pm F(\theta) = \text{const}, \quad F(\theta) = \int \sqrt{k'^2 + 4k^2} d\theta. \quad (12)$$

В соотношениях (11), (12) следует использовать выражения  $k(\theta)$ ,  $k'(\theta)$ , определяемые согласно (8), (9).

Согласно (8), (9), (12) функция  $F(\theta)$  примет вид

$$F(\theta) = 2 \cdot \int \sqrt{\frac{1 - 2\rho \sin(2\theta - \mu) \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 2(2\theta - \mu)} - \rho^2 \cos 2(2\theta - \mu)}{1 - \rho^2 \cos^2(2\theta - \mu)}} d\theta. \quad (13)$$

Используя разложение степенной функции в ряд Тейлора

$$(1 + \alpha)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{8}\alpha^2, \\ (1 + \alpha)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2,$$

и ограничившись степенью  $\alpha^2$ , получим

$$F(\theta) = 2 \cdot \int \left(1 - \rho \sin(2\theta - \mu) + \frac{1}{2}\rho^3 (\sin^3(2\theta - \mu) - \sin(2\theta - \mu) \cos^2(2\theta - \mu))\right) d\theta. \quad (14)$$

Предельное давление определяется из соотношения

$$p^* = k\left(\gamma - \frac{3\pi}{4}\right) + k\left(-\gamma - \frac{\pi}{4}\right) + \int_{-\gamma - \frac{\pi}{4}}^{\gamma - \frac{3\pi}{4}} \sqrt{k'^2 + 4k^2} d\theta. \quad (15)$$

Из (14), (15) получим

$$p^* = k\left(\gamma - \frac{3\pi}{4}\right) + k\left(-\gamma - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cdot \int_{-\gamma - \frac{\pi}{4}}^{\gamma - \frac{3\pi}{4}} \left(1 - \rho \sin(2\theta - \mu) + \frac{1}{2}\rho^3 (\sin^3(2\theta - \mu) - \sin(2\theta - \mu) \cos^2(2\theta - \mu))\right) d\theta. \quad (16)$$

Следовательно, предельное давление равно

$$p^* = 2 - \pi + 4\gamma + 2\rho \sin \mu (\cos 2\gamma - \sin 2\gamma) - \frac{1}{2}\rho^2 \left(\cos^2\left(2\gamma - \mu - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^2\left(-2\gamma - \mu - \frac{\pi}{4}\right)\right). \quad (17)$$

Найдем величину предельного давления тупого клина при различных  $\mu$ .

При  $\mu = 0$  предельное давление тупого клина имеет вид

$$p^* = 2 - \pi + 4\gamma - \rho^2 \sin^2 2\gamma.$$

При  $\mu = \frac{\pi}{4}$  предельное давление тупого клина имеет вид

$$p^* = 2 - \pi + 4\gamma + \sqrt{2}\rho(\cos 2\gamma - \sin 2\gamma) - \frac{1}{2}\rho^2.$$



При  $\mu = \frac{\pi}{2}$  предельное давление тупого клина имеет вид

$$p^* = 2 - \pi + 4\gamma + 2\rho(\cos 2\gamma - \sin 2\gamma) - \rho^2 \cos^2 2\gamma.$$

При  $\mu = \frac{3\pi}{4}$  предельное давление тупого клина имеет вид

$$p^* = 2 - \pi + 4\gamma + \sqrt{2}\rho(\cos 2\gamma - \sin 2\gamma) - \frac{1}{2}\rho^2.$$

При  $\mu = \pi$  предельное давление тупого клина имеет вид

$$p^* = 2 - \pi + 4\gamma - \rho^2 \sin^2 2\gamma.$$

При  $\mu = \frac{5\pi}{4}$  предельное давление тупого клина имеет вид

$$p^* = 2 - \pi + 4\gamma - \sqrt{2}\rho(\cos 2\gamma - \sin 2\gamma) - \frac{1}{2}\rho^2.$$

При  $\mu = \frac{3\pi}{2}$  предельное давление тупого клина имеет вид

$$p^* = 2 - \pi + 4\gamma - 2\rho(\cos 2\gamma - \sin 2\gamma) - \rho^2 \cos^2 2\gamma.$$

При  $\mu = \frac{7\pi}{4}$  предельное давление тупого клина имеет вид

$$p^* = 2 - \pi + 4\gamma - \sqrt{2}\rho(\cos 2\gamma - \sin 2\gamma) - \frac{1}{2}\rho^2.$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 3. – № 2 (8). – С. 580–583.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.
- [3] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов – М. : Наука, 1969. – 420 с.
- [4] *Радаев, С. Ю.* О плоской задаче определения предельного состояния идеальнопластических анизотропных сред / С. Ю. Радаев // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. – 2005. – № 3. – С. 15–21.
- [5] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехиздат, 1956. – 407 с.

*Деревянных Евгения Анатольевна,*

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru

E. A. Derevyannih

**ABOUT A MAXIMUM LOAD FOR A WEDGE AT ACTION OF UNIFORM  
PRESSURE IN CASE OF TRANSMITTING ANISOTROPY**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** In the real work the case of transmitting anisotropy is considered. Limiting pressure for a wedge with a corner of the solution loaded with uniform pressure on one of its parties is defined. The material of a wedge is supposed anisotropic, homogeneous, rigid and plastic.

**Keywords:** ideal plasticity, tension, flat task, fluidity limit, limiting pressure of a wedge, uniform tension, transmitting anisotropy.

**REFERENCES**

[1] *Ivlev, D. D.* The relation of the translational anisotropy ideal-plastic / D.D.Ivlev, L. A. Maksimova, B. G. Mironov // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line: Mechanics of definable state. – 2010. – Vol. 3. – No. 2 (8). – P. 580–583.

[2] *Ivlev, D. D.* Теория идеальной пластичности / D.D.Ivlev. – М. : Science, 1966. – 231 p.

[3] *Kachanov, L. M.* Fundamentals of the theory of plasticity / L. M. Kachanov. – М. : Science, 1969. – 420 p.

[4] *Radayev, S. Y.* About a flat problem of definition of a limiting condition of ideal-plastic anisotropic environments / S. Y. Radayev // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2005. – No. 3. – P. 15–21.

[5] *Hill, R.* Mathematical theory of plasticity / R. Hill. – М. : Gostekhizdat Publ., 1956. – 407 p.

*Derevyannih Evgeniya Anatolevna*

*Postgraduate student, Departament of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

А. И. Рожков, Е. В. Филюшина

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕПЛАНАЦИИ В ЗАДАЧЕ О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М.Ф.Решетнева

**Аннотация.** Построены точные решения, описывающие пластическую депланацию в задаче о кручении стержней.

**Ключевые слова:** кручение стержней, пластичность, точные решения, групповой анализ.

УДК: 539.374

Рассмотрим цилиндрический или призматический стержень, ориентированный в прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$ . Ось  $z$  направим параллельно образующим стержня.

Пусть стержень закручивается вокруг оси  $z$  равными и противоположными парами сил  $M$ . Предположим, что боковая поверхность стержня свободна от нагрузок, влиянием массовых сил будем пренебрегать. Для стержня из идеально пластического материала существует некоторое вполне определенное предельное значение момента  $M^*$ , при котором стержень весь перейдет в пластическое состояние и начнет закручиваться.

Напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется следующими значениями компонент тензора напряжений:

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0. \quad (1)$$

При данном предположении третий инвариант девиатора напряжений равен нулю, поэтому все возможные условия пластичности с точностью до постоянной в правой части сводятся к одному условию:

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2. \quad (2)$$

В дальнейшем для простоты полагаем  $k = 1$ .

Дифференциальное уравнение равновесия запишется в виде:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Так как боковая поверхность предполагается свободной от нагрузок, то вектор касательного напряжения  $\tau$  направлен по касательной к контуру, следовательно

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}} = \frac{dy}{dx} \quad (4)$$

вдоль контура  $L$ .

Касательные усилия уравниваются крутящим моментом:

$$M = \iint_S (x\tau_{xz} - y\tau_{yz}) dx dy, \quad (5)$$

где  $S$  - площадь поперечного сечения стержня.

Задача о кручении призматических стержней из идеально жесткопластического материала является статически определяемой: два уравнения (2) и (3) относительно двух переменных при граничном условии (4) позволяют полностью определить напряженное состояние. Соотношение (5) служит для нахождения величины предельного момента  $M^*$ .

После достижения моментом  $M$  своего предельного значения  $M^*$  стержень начинает закручиваться. Считая деформации настолько малыми, что изменениями геометрии тела можно пренебречь, имеем, что при кручении напряжения в данной точке тела остаются постоянными по величине и направлению. В этом случае соотношения ассоциированного закона течения интегрируются, и так как в начальный момент закручивания все компоненты равны нулю, то

$$\frac{e_{xy}}{e_{yz}} = \frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0$$

или в компонентах вектора перемещений  $u, v, w$

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \tau_{yz} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \tau_{xz}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Предположим, что компоненты перемещений определяются зависимостями

$$u = -\omega zy, \quad v = \omega zx, \quad w = w(x, y), \quad (7)$$

где  $\omega$  - постоянная, называемая круткой, удовлетворяет условиям (6).

Выражения (7) означают, что каждое сечение стержня поворачивается как жесткое целое на угол  $\omega$  и деформируется вдоль оси  $z$ .

Для нахождения функции  $w$ , определяющей деформацию сечения, воспользуемся равенствами (6), (7). Тогда  $w = w(x, y)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{w_x - \omega y}{\sqrt{(w_x - \omega y)^2 + (w_y + \omega x)^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{w_x + \omega x}{\sqrt{(w_x - \omega y)^2 + (w_y + \omega x)^2}} = 0.$$

Дифференцируя, получим

$$(w_y + \omega x)^2 w_{xx} - 2w_{xy}(w_y + \omega x)(w_x - \omega y) + (w_x - \omega y)^2 w_{yy} = 0. \quad (8)$$

В силу однородности уравнение (9) можно переписать в виде

$$(w_y + x)^2 w_{xx} - 2w_{xy}(w_y + x)(w_x - y) + (w_x - y)^2 w_{yy} = 0. \quad (9)$$

Найдем группу непрерывных преобразований, допускаемых уравнений (9) в смысле Ли [2]. Имеет место

**Теорема:**

Группа непрерывных преобразований, допускаемых уравнением (9), порождается операторами:

$$X_1 = x\partial_x - y\partial_y, \quad X_2 = \partial_w. \quad (10)$$

Приведем точные преобразования, соответствующие этим операторам:

$$T_1 : x' = xe^{a_1}, \quad y' = ye^{-a_1}, \quad w' = w.$$

$$T_2 : x' = x, \quad y' = y, \quad w' = w + a_2$$

здесь  $a_1, a_2$  - непрерывные параметры, меняющие в окрестности точки нуль.

Алгебра Ли (10) имеет только две неподобные одномерные подалгебры

$$X_2 + \alpha X_1, \quad X_1,$$

где  $\alpha$  - произвольная постоянная. Найдем инвариантное решение на подалгебре  $X_1$ . В этом случае  $w = f(\xi)$ , где  $\xi = xy$ . Подставляя значение  $w$  в уравнение (9), получим:

$$\xi^2 (f' + 1)^2 f'' - 2(\xi f'' + f')(f' + 1)(f' - 1)\xi + \xi^2 (f' - 1)^2 f'' = 0,$$

где  $f' = \frac{df}{d\xi}$ , которое приводится к виду:

$$2\xi f'' - f'(f'^2 - 1) = 0.$$

Решим данное уравнение при условии, что  $f \neq const$ :

$$f'(\xi) = \pm \sqrt{\frac{1}{1 - \xi C}},$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

Окончательно получаем:

$$f = w(xy) = \pm \frac{2(Cxy - 1)}{C} \sqrt{\frac{1}{1 - Cxy}} + C_1.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} w = \pm y \sqrt{\frac{1}{1 - Cxy}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} w = \pm x \sqrt{\frac{1}{1 - Cxy}},$$

то

$$\tau_{xz} = \frac{e_{xz}}{\sqrt{e_{xz}^2 + e_{yz}^2}}, \quad \tau_{yz} = \frac{e_{yz}}{\sqrt{e_{xz}^2 + e_{yz}^2}},$$

где

$$e_{xz} = \frac{y}{\sqrt{1 - xy}} - y, \quad e_{yz} = \frac{x}{\sqrt{1 - xy}} + x.$$

Это решение можно использовать для описания пластического течения стержня с крутящим моментом

$$M = \iint_S (x\tau_{xz} - y\tau_{yz}) dx dy.$$

Выражаем благодарность д.ф.-м.н., профессору Сенашову Сергею Ивановичу за постановку задачи и внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА.

[1] *Ивлев, Д. Д.* Предельное состояние деформируемых тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин, Ю. Н. Радаев, С. И. Сенашов, Е. Н. Шемякин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008.

[2] *Киряков, П. П.* Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. – Новосибирск : Из-во СО РАН, 2001.

*Рожков Александр Иванович,*

аспирант кафедры информационных экономических систем, Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск

e-mail: alexpro-2004@mail.ru

*Филюшина Елена Владимировна,*

аспирант кафедры информационных экономических систем, Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск

e-mail: filyushina@sibsau.ru

A. I. Rozhkov, E. V. Filyushina

## DEFINITION OF DEPLANATION IN THE PROBLEM OF TORSION BARS

*The Siberian state aerospace university named after M. F. Reshetnev*

**Abstract.** Constructed exact solutions describing the plastic deplanation in the problem of the torsion bars.

**Keywords:** torsion bars, plasticity, exact solution, group analysis.

### REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* Limiting condition of deformable bodies and rocks / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, R. I. Nepershin, Y. N. Radayev, S. I. Senashov, E. N. Shemyakin. – M. : FIZMATLIT, 2008.
- [2] *Kiryakov, P. P.* Appendix of symmetry and laws preservations to the solution of the differential equations / P. P. Kiryakov, S. I. Senashov, A. N. Yahno. – Novosibirsk : SB RAS Publ., 2001.

*Rozhkov Alexandr Ivanovich*

*Postgraduate student, Departament of information economic systems, Siberian state aerospace university of M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk*

*Filyushina Elena Vladimirovna*

*Postgraduate student, Departament of information economic systems, Siberian state aerospace university of M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk*

В. Н. Орлов, М. П. Гузь

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
Российский государственный социальный университет, филиал в г. Чебоксары*

**Аннотация.** В работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение с подвижными особыми точками, в общем случае неразрешимое в квадратурах. Построено приближенное решение в области голоморфности и проведено исследование влияния возмущения начальных данных на приближенное решение. Полученные результаты сопровождаются расчетами.

**Ключевые слова:** нелинейное дифференциальное уравнение, приближенное решение, подвижная особая точка, возмущение начальных данных, влияние.

УДК: 519.87

Обыкновенные дифференциальные уравнения классифицируются на линейные и нелинейные. Нелинейные дифференциальные уравнения относятся к одной из сложных категорий уравнений. Они, чаще всего, неразрешимы в общем случае в квадратурах. Причиной тому является наличие подвижных особых точек у решений этих уравнений. Принимая во внимание, что все разработанные приближенные методы для линейных дифференциальных уравнений не применимы к нелинейным дифференциальным уравнениям, решения которых имеют подвижные особые точки, приходим к актуальности создания приближенного метода решения указанной категории дифференциальных уравнений. Следует также классифицировать и теоремы существования решений дифференциальных уравнений [1], [2]. Напоминаем предлагаемый в работе [3] вариант классификации:

- 1) к первой группе относятся теоремы, устанавливающие лишь сам факт существования решения;
- 2) ко второй группе относятся теоремы, устанавливающие не только факт существования решения, но и позволяющие определить область действия данной теоремы;
- 3) к данной категории относятся теоремы, позволяющие устанавливать факт существования решения, оценить область действия теоремы и построить само приближенное решение со всеми его оценками.

Примерами теорем второй категории могут служить теоремы Коши и Пикара о голоморфности решения дифференциального уравнения [1], [2]. К категории теорем третьего варианта относятся теоремы существования, представленные в работах [3]–[8].

Идея метода доказательства теорем существования, предложенная в работах [3]–[8], основана на применении метода мажорант (Лагранжа) не к правой части дифференциальных уравнений, как это представлено в классической литературе [1], [2], а к самому решению нелинейных дифференциальных уравнений. Такой подход позволяет определить область действия теоремы, построить само приближенное решение и получить все оценки этого решения.

В данной работе идея, предложенная в работах [3]–[8], применяется к следующему нелинейному дифференциальному уравнению:

$$Y'(z) = f_0 + f_1 Y(z) + f_2 Y^2(z) + f_3 Y^3(z) + f_4 Y^4(z), \quad (1)$$

где  $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$  — функции комплексной переменной  $z$ .

С помощью замены переменной

$$Y(z) = wu(\xi) + \frac{f_3 - f_2}{1, 5f_3 - 4f_4},$$

при условии

$$\frac{f_3}{4f_4} = \frac{2f_2}{3f_3} = \frac{1 - 3f_1 f_4}{2f_2 f_4},$$

где

$$w = \exp \left[ \int \left( f_1 + \frac{2}{3} \frac{f_3 - f_2}{1, 5f_3 - 4f_4} f_2 \right) dz \right], \quad \xi = \int f_4 w^3 dz,$$

уравнение (1) приводится к виду

$$u'(\xi) = u^4(\xi) + I(z).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$Y'(z) = Y^4(z) + \Phi(z), \quad (2)$$

$$Y(z_0) = Y_0. \quad (3)$$

**Теорема 1.** Пусть

1)  $\Phi(z) \in C^1$  в области

$$|z - z_0| < \rho_1, \quad (4)$$

где  $\rho_1 = \text{const}$ ;

2)  $\exists M_1: \left| \frac{\Phi^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq M_1$ , где  $M_1 = \text{const}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ .

Тогда решение задачи (2)–(3) является голоморфной функцией

$$Y(z) = \sum_0^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad (5)$$

в области

$$|z - z_0| < \rho_2,$$

где

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{2^2(M_2 + 1)^3} \right\}, \quad M_2 = \max \left\{ |Y_0|, \sup_n \frac{|\Phi^{(n)}(z_0)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

**Доказательство.** По условию теоремы имеем

$$\Phi(z) = \sum_0^{\infty} A_n (z - z_0)^n.$$

Подставим последнее выражение и ряд (5) в (2):

$$\sum_1^{\infty} C_n n (z - z_0)^{n-1} = \left( \sum_0^{\infty} C_n (z - z_0)^n \right)^4 + \sum_0^{\infty} A_n (z - z_0)^n. \quad (6)$$

Выполнив соответствующие операции, получим

$$\sum_1^{\infty} C_n n (z - z_0)^{n-1} = \sum_0^{\infty} D_n^* (z - z_0)^n + \sum_0^{\infty} A_n (z - z_0)^n,$$

где

$$D_n = \sum_{i=0}^n C_{n-i} C_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad D_n^* = \sum_{i=0}^n D_{n-i} D_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



Равенство (6) обратится в тождество при условии

$$nC_n = D_{n-1}^* + A_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Соотношение (7) позволяет однозначно определить все коэффициенты  $C_n$ .

Таким образом получили формальное единственное представление решения задачи (2)–(3) в некоторой окрестности точки  $z_0$  в виде (5).

На втором этапе докажем сходимость ряда (5). Обозначим

$$M_2 = \max \left\{ |Y_0|, \sup_n \frac{|\Phi^{(n)}(z_0)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Предполагая оценку для  $C_n$ :

$$|C_n| \leq \frac{1}{n} \cdot M_2 \cdot 2^{2n-1} \cdot (M_2 + 1)^{3n}, \quad (9)$$

методом математической индукции докажем ее справедливость.

Из (9) имеем

$$(n+1)C_{n+1} = D_n^* + A_n.$$

Из последнего, с учетом оценки (9) и условия 1 теоремы 1, следует

$$|C_{n+1}| \leq \frac{1}{n+1} (|D_n^* + A_n|) \leq \frac{1}{n+1} (|D_n^*| + |A_n|) \leq \frac{1}{n+1} \left( \left| \sum_{i=0}^n D_{n-i} D_i \right| + |A_n| \right),$$

или

$$\begin{aligned} |C_{n+1}| &\leq \frac{1}{n+1} \left( \left| \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^{n-i} C_{n-i-j} C_j \right) \left( \sum_{j=0}^i C_{i-j} C_j \right) \right| + |A_n| \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{n+1} \left( \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^{n-i} \frac{1}{(n-i-j)_1} \cdot M_2 \cdot 2^{2(n-i-j)-1} (M_2 + 1)^{3(n-i-j)} \frac{1}{j_1} \cdot M_2 \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. 2^{2j-1} (M_2 + 1)^{3j} \right) \left( \sum_{j=0}^i \frac{1}{(i-j)_1} \cdot M_2 \cdot 2^{2(i-j)-1} (M_2 + 1)^{3(i-j)} \frac{1}{j_1} \cdot M_2 \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. 2^{2j-1} (M_2 + 1)^{3j} \right) + M_2 \right) \leq \frac{1}{n+1} (M_2^4 \cdot 2^{2n-4} \cdot (M_2 + 1)^{3n} \times \\ &\times \left( \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^{n-i} \frac{1}{(n-i-j)_1} \cdot \frac{1}{j_1} \sum_{j=0}^i \frac{1}{(i-j)_1} \cdot \frac{1}{j_1} \right) + 1 \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{n+1} \cdot M_2 \cdot 2^{2n+1} \cdot (M_2 + 1)^{3n+3}. \end{aligned}$$

При этом

$$(n-i-j)_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } j = n-i; i = n; \\ n-i-j, & \text{если } j = 0, \dots, n-i-1; i = 0, \dots, n-1; \end{cases}$$

$$j_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 0; \\ j, & \text{если } j = 1, \dots, i; \end{cases} \quad (i-j)_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i; \\ (i-j), & \text{если } j = 0, \dots, i-1. \end{cases}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_0^\infty \frac{1}{n} \cdot M_2 \cdot 2^{2n-1} \cdot (M_2 + 1)^{3n} \cdot |z - z_0|^n,$$

являющийся мажорантой для ряда (5). На основании признака Даламбера получаем сходимость этого ряда в области

$$|z - z_0| < \rho_3,$$

где

$$\rho_3 = \frac{1}{2^2(M_2 + 1)^3}.$$

Таким образом, завершаем доказательство теоремы 1.

Оценки, полученные в теореме 1 для коэффициентов  $C_n$  ряда (5), позволяют построить приближенное решение задачи Коши (2)–(3)

$$Y_N = \sum_0^N C_n (z - z_0)^n. \quad (10)$$

**Теорема 2.** Пусть выполняются пункты 1 и 2 теоремы 1, тогда для приближенного решения (10) задачи Коши (2)–(3) справедлива оценка погрешности

$$|Y - Y_N| \leq \frac{1}{N+1} \cdot M_2 \cdot 2^{2N+1} \cdot (M_2 + 1)^{3N+3} \cdot |z - z_0|^{N+1} \cdot \frac{1}{1 - 2^2(M_2 + 1)^3 |z - z_0|},$$

$$\forall z \in K_2 = \{z: |z - z_0| < \rho_2, \rho_2 > 0\},$$

где

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{2^2 \cdot (M_2 + 1)^3} \right\}.$$

**Доказательство.** С учетом оценок для коэффициентов  $C_n$ , полученных в теореме 1, имеем

$$\begin{aligned} |Y - Y_N| &\leq \left| \sum_0^\infty C_n (z - z_0)^n - \sum_0^N C_n (z - z_0)^n \right| \leq \left| \sum_{N+1}^\infty C_n (z - z_0)^n \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{N+1}^\infty \frac{1}{n} \cdot M_2 \cdot 2^{2n-1} \cdot (M_2 + 1)^{3n} \cdot (z - z_0)^n \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{N+1} \cdot M_2 \cdot 2^{2N+1} \cdot (M_2 + 1)^{3N+3} \cdot |z - z_0|^{N+1} \cdot \frac{1}{1 - 2^2(M_2 + 1)^3 |z - z_0|}. \end{aligned}$$

**Пример 1.** Рассмотрим задачу Коши для уравнения  $Y'(z) = Y^4(z) + \Phi(z)$ , где  $\Phi(z) = 0$ ,  $Y(1+i) = 1+i$ . Задача Коши имеет точное решение

$$Y = -\frac{1}{\sqrt[3]{3z - 2,75(1+i)}}.$$

Вычислим радиус голоморфности с учетом начального условия задачи Коши:

$$\rho_3 = \frac{1}{2^2 \cdot (M_2 + 1)^3} = 0,2223951296.$$

Выберем значение  $z = 0,4 + 0,4i$  в полученной области голоморфности. Все расчеты представлены в таблице 1.

Таблица 1

$Z_0$	$Z$	$Y$	$Y_3$	$\Delta$	$\Delta_1$	$\Delta_2$
0,25+0,25i	0,4+0,4i	0,0603703641+ +0,0161761903i	0,0603698900+ +0,0161789535i	0,0000028036	0,0054389714	0,0000050

Здесь  $Y$  — значение точного решения уравнения;  $Y_3$  — значение приближенного решения;  $\Delta$  — абсолютная погрешность;  $\Delta_1$  — априорная погрешность, полученная по теореме 2;  $\Delta_2$  — апостериорная погрешность.

Теорема 2 позволяет решить обратную задачу теории погрешности, определить значение  $N$  по заданной точности приближенного решения  $\varepsilon$ . Для случая  $\varepsilon = 0,0000050$  получаем значение  $N = 9$ . Фактически для  $N = 4, 5, 6, 7, 8, 9$  получаем уточнения приближенного решения, которое в общей сумме не превышает требуемой точности  $\varepsilon = 0,0000050$ .

Таким образом, мы можем ограничиться в структуре приближенного решения значением  $N = 3$ . При этом получаем величину  $\Delta_2$  апостериорной погрешности для приближенного решения  $Y_3$ , равную значению  $\varepsilon = 0,0000050$ .

При получении приближенного решения дифференциального уравнения часто приходится осуществлять аналитическое продолжение. Эта операция приводит к задаче исследование влияния возмущения начальных условий задачи Коши на аналитическое приближенное решение рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения.

$$\tilde{Y}(z_0) = \tilde{Y}_0. \quad (11)$$

Возмущенное начальное условие (11) оказывает влияние на структуру аналитического приближенного решения (5), которое принимает следующий вид:

$$\tilde{Y}_N(z) = \sum_0^N \tilde{C}_n(z - z_0)^n, \quad (12)$$

где  $\tilde{C}_n$  — возмущенные значения коэффициентов.

**Теорема 3.** Пусть

1)  $\Phi(z) \in C^1$  в области  $K_1 = \{z: |z - z_0| < \rho_4, \rho_4 > 0\}$ ;

2)  $\exists M_1: \left| \frac{\Phi^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq M_1$ , где  $M_1 = \text{const}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ;

3) известна оценка погрешности  $|Y_0 - \tilde{Y}_0| = \Delta \tilde{Y}_0$ .

Тогда для аналитического приближенного решения (12) задачи Коши ((2), (11)) справедлива оценка погрешности

$$\Delta \tilde{Y}_N(z) \leq \Delta_1 + \Delta_2,$$

где

$$\Delta_1 \leq \frac{1}{N+1} \cdot M_2 \cdot 2^{2N+1} \cdot (M_2 + 1)^{3N+3} \cdot |z - z_0|^{N+1} \frac{1}{1 - 2^2(M_2 + 1)^3 |z - z_0|},$$

$$\Delta_2 \leq \Delta M \left( 1 + \frac{2(M_2 + \Delta M + 1)^3 |z - z_0|}{1 - 2^2(M_2 + \Delta M + 1)^3 |z - z_0|} \right),$$

$$\Delta M = \Delta \tilde{Y}_0, \quad M_2 = \max \left\{ |\tilde{Y}_0|, \sup_n \frac{|\Phi^{(n)}(z_0)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Доказательство.** Используя классический подход, получаем

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{Y}_N(z) &= |Y(z) - \tilde{Y}_N(z)| \leq |Y(z) - Y_N(z)| + |Y_N(z) - \tilde{Y}_N(z)| \leq \\ &\leq \left| \sum_0^\infty C_n(z - z_0)^n - \sum_0^N C_n(z - z_0)^n \right| + \left| \sum_0^N C_n(z - z_0)^n - \sum_0^N \tilde{C}_n(z - z_0)^n \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{N+1}^\infty C_n(z - z_0)^n \right| + \left| \sum_0^N (\tilde{C}_n - C_n)(z - z_0)^n \right| \leq \\ &\leq \sum_{N+1}^\infty |C_n(z - z_0)^n| + \sum_0^N \Delta \tilde{C}_n |z - z_0|^n = \Delta_1 + \Delta_2, \end{aligned}$$

где  $|\tilde{C}_n - C_n| = \Delta \tilde{C}_n$ .

Выражение для  $\Delta_1$  следует из теоремы 2. На основании рекуррентного соотношения для коэффициентов структуры приближенного решения (5), имеем выражение

$$C_n = P_{3n}(C_0, A_0, A_1, A_2, \dots, A_{3n}), \quad (13)$$

где правая часть соотношения представляет собой полином степени  $3n$  с положительными значениями элементов. При этом  $C_0 = Y_0$  — начальное условие (3),  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{3n}$  — коэффициенты разложения функции уравнения (2) в ряд. Тогда для выражения  $\Delta \tilde{C}_n$ , учитывая

закономерность образования коэффициентов  $C_n$  и их оценку (9), методом математической индукции получаем оценку

$$\Delta \tilde{C}_{N+1} \leq \frac{1}{N+1} \cdot 2^{2N+1} \Delta M (M_2 + \Delta M + 1)^{3N+3},$$

где  $\Delta M = \Delta \tilde{C}_0 = \Delta \tilde{Y}_0$  – возмущение начального условия задачи Коши.

Таким образом, для  $\Delta_2$  следует оценка

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \left| \sum_0^N (\tilde{C}_n - C_n)(z - z_0)^n \right| \leq \sum_0^N \Delta \tilde{C}_n |z - z_0|^n = \Delta \tilde{C}_0 + \sum_1^N \Delta \tilde{C}_n |z - z_0|^n \leq \\ &\leq \Delta M \left( 1 + \frac{2(M_2 + \Delta M + 1)^3 |z - z_0|}{1 - 2^2(M_2 + \Delta M + 1)^3 |z - z_0|} \right). \end{aligned}$$

Оценка  $\Delta_2$  справедлива в области

$$|z - z_0| < \rho_4 = \frac{1}{2^2(M_2 + \Delta M + 1)^3}.$$

Окончательно выражение  $\Delta \tilde{Y}_N(z)$  будет справедливо в области  $|z - z_0| < \rho_5$ , где  $\rho_5 = \min\{\rho_2, \rho_4\}$ .

**Пример 2.** Строим аналитическое продолжение для приближенного решения задачи Коши в примере 1. Начальное условие задачи Коши  $z_0 = 0,4 + 0,4i$ ,  $\tilde{Y}_0 = 0,0603698900 + 0,0161789535i$ . Величина возмущения не превышает значения  $\varepsilon = 0,0000050$ . Все расчеты представлены в таблице 2.

Таблица 2

$Z_0$	$Z$	$Y$	$\tilde{Y}_3$	$\Delta$	$\Delta_1$	$\Delta_2$
$0,4 + 0,4i$	$0,45 + 0,45i$	$0,0724171637 + 0,153787167i$	$0,0724182242 + 0,153749790i$	$0,0000373920$	$0,0011833332$	$0,000045641$

Здесь  $Y$  – значение точного решения уравнения;  $\tilde{Y}_3$  – значение приближенного решения;  $\Delta$  – абсолютная погрешность;  $\Delta_1$  – априорная погрешность, полученная по теореме 3;  $\Delta_2$  – апостериорная погрешность.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – 2-е изд. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 436 с.
- [2] Матвеев, Н. М. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Н. М. Матвеев. – СПб.: Специальная литература, 1996. – 372 с.
- [3] Орлов, В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // Вестник МАИ. – 2008. – Т. 15. – № 5. – С. 128–135.
- [4] Орлов, В. Н. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов, Н. А. Лукашевич // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 10. – С. 1829–1832.
- [5] Орлов, В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. – 2008. – № 2. – С. 42–46.
- [6] Орлов, В. Н. Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати / В. Н. Орлов // Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. – 2008. – № 4. – С. 102–108.
- [7] Орлов, В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». – 2009. – № 4 (35). – С. 23–32.
- [8] Орлов, В. Н. Об одном конструктивном методе построения первой и второй мероморфных трансцендентных Пенлеве / В. Н. Орлов, В. П. Фильчакова // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці. ІМ НАН України. – Киев. – 1998. – Т. 19. – С. 155–165.

Орлов Виктор Николаевич,

доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: orlowvn@rambler.ru

Гузь Марина Павловна,

старший преподаватель кафедры математики, информатики и моделирования, Российский государственный социальный университет, г. Чебоксары

V. N. Orlov, M. P. Guz

**THE ANALYTICAL APPROXIMATE SOLUTION OF A NONLINEAR  
DIFFERENTIAL EQUATION IN THE COMPLEX DOMAIN**

*Chuvash State Pedagogical University named after I.Y. Yakovlev,  
Cheboksary Branch of the Russian State Social University*

**Abstract.** In work the nonlinear differential equation, with mobile special points, generally not solvable in quadratures is considered. The approximate decision in the field of a golomorfnost is constructed and research of influence of indignation of initial data on the approximate decision is carried out. The received results are accompanied by calculations.

**Keywords:** nonlinear differential equation, approximate decision, mobile special point, indignation of initial data, influence.

**REFERENCES**

- [1] *Golubev, V. V.* Lectures on the analytic theory of differential equations / V. V. Golubev. – 2nd ed. – M.; L. : Gostechizdat Publ., 1950. – 436 p.
- [2] *Matveev, N. M.* Ordinary differential equations / N. M. Matveev // St. Petersburg : Spetsialnaya literatura Publ., 1996. – 372 p.
- [3] *Orlov, V. N.* About one method for the approximate solution of matrix Riccati differential equations / V. N. Orlov // Vestnik of MAI. – 2008. – Vol. 15. – No. 5. – P. 128–135.
- [4] *Orlov, V. N.* Studies of the approximate solution of the second Painleve equation / V. N. Orlov, N. A. Lukashevich // Differential equations. – 1989. – Vol. 25. – No. 10. – P. 1829–1832.
- [5] *Orlov, V. N.* About the approximate solution of the first Painleve equation / V. N. Orlov // Vestnik of A. Tupolev Kazan State Technical University. – 2008. – No. 2. – P. 42–46.
- [6] *Orlov, V. N.* The method for the approximate solution of Riccati differential equation / V. N. Orlov // Scientific and technical sheets STU. – 2008. – No. 4. – P. 102–108.
- [7] *Orlov, V. N.* The study of approximate solutions of Abel differential equations in the neighborhood of movable singularities / V. N. Orlov // Vestnik of N. E. Bauman MSTU, Line: «Natural sciences». – 2009. – No. 4 (35). – P. 23–32.
- [8] *Orlov, V. N.* About one constructive method of first and second Painleve transcendental meromorphic / V. N. Orlov, V. P. Filchakova // Symmetry and Analytic Methods in matetychniy physics. IM NAN Ukraine. – Kiev. – 1998. – Vol. 19. – P. 155–165.

*Orlov Viktor Nikolaevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Department of Algebra, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Guz Marina Pavlovna*

*Senior Lecturer, Department of the Mathematics, Informatics and Modeling, Cheboksary Branch of the Russian State Social University, Cheboksary*

**ВЛИЯНИЕ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ  
БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ,  
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПО КРУГОВОМУ ОТВЕРСТИЮ**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Методом малого параметра определяются напряжения в тонкой пластине с круговым отверстием при двусосном растяжении. Отверстие нагружено касательными нагрузками. Показано влияние касательных нагрузок на концентрацию напряжений.

**Ключевые слова:** тонкая пластина, касательные нагрузки, круговое отверстие, двусосное растяжение, метод малого параметра.

УДК: 539.374

1. В работах, рассматривающих напряженное состояние в тонких пластинах при наличии в них отверстия, как правило, не учитывались касательные напряжения на контуре отверстия [1, 2]. В [3] в условиях плоской деформации предполагалось нагружение внутренней поверхности эксцентрической трубы касательными усилиями.

В предлагаемой ниже работе рассматривается наличие касательных нагрузок на контуре отверстия в тонких пластинах, то есть в условиях плоского напряженного состояния, показано, что появление касательных нагрузок на контуре отверстия приводит к тому, что пластическое течение появляется при меньших растягивающих усилиях и уменьшает концентрацию напряжений.

Первоначально рассмотрим равномерное растяжение пластины с круговым отверстием, нагруженным касательными усилиями  $\tau$ . Напряжения, соответствующие такому нагружению, будем отмечать индексом «0»; величины, имеющие размерность напряжений, отнесем к величине предела текучести  $k$ , а линейные величины отнесем к  $r_{s0}$  ( $r_{s0}$  – радиус пластической области).

Вблизи отверстия реализуется пластическое состояние. В качестве условия текучести принимаем условие текучести Треска:

$$(\sigma_{\rho}^0 - 2k)(\sigma_{\vartheta}^0 - 2k) - \tau_{\rho\vartheta}^0 = 0. \quad (1)$$

При осесимметричном нагружении уравнения равновесия таковы:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\rho}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\vartheta}}{\rho} &= 0 \\ \frac{d\tau_{\rho\vartheta}}{d\rho} + \frac{2\tau_{\rho\vartheta}}{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Решая (2) с учетом (1) и граничных условий

$$\sigma_{\rho} = 0, \quad \tau_{\rho\vartheta} = \tau \quad \text{при } \rho = \alpha = \frac{a}{r_{s0}}, \quad (3)$$

получим в пластической зоне  $\alpha \leq \rho \leq 1$ :

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{0p} &= 2 - (4\alpha^2\rho^2 + \tau^2\alpha^2(\rho^2 - \alpha^2))^{1/2}\rho^{-2}; \\ \sigma_\vartheta^{0p} &= 2 - \tau^2\alpha^4\rho^{-2}(4\alpha^2\rho^2 + \tau^2\alpha^2(\rho^2 - \alpha^2))^{-1/2}; \\ \tau_{\rho\vartheta}^{0p} &= \tau\alpha^2\rho^{-2}.\end{aligned}\quad (4)$$

В упругой области решение запишется в виде:

$$\sigma_\rho^{0e} = q_0 - B\rho^{-2}; \quad \sigma_\vartheta^{0e} = q_0 + B\rho^{-2}; \quad \tau_{\rho\vartheta}^{0e} = C\rho^{-2}, \quad (5)$$

здесь  $q_0$  – равномерные усилия на бесконечности.

Константы  $B$  и  $C$  и радиус  $r_{s0}$  определяются из условий сопряжения на упруго-пластической границе:

$$[\sigma_\rho^0] = [\sigma_\vartheta^0] = [\tau_{\rho\vartheta}^0] = 0 \quad \text{при } \rho = 1. \quad (6)$$

Используя (4), (5) и (6), получим:

$$\begin{aligned}2B &= \alpha(4 + \tau^2(1 - 2\alpha^2))(4 + \tau^2(1 - \alpha^2))^{-1/2}; \quad C = \tau\alpha^2; \\ \frac{r_{s0}}{a} &= \frac{1}{\alpha} = ((4 - 2q_0)^2\tau^2 + (4 + \tau^2)^2)^{1/2}(4 - 2q_0)^{-1}(4 + \tau^2)^{-1/2}.\end{aligned}\quad (7)$$

Определим, при каких нагрузках появляются пластические деформации на контуре отверстия ( $r_{s0} = a$ ):

$$q_0 = 1 - \frac{\tau^2}{4}. \quad (8)$$

Отсюда следует, что наличие касательных нагрузок на контуре отверстия понижает величину растягивающих усилий, при которых в пластине появляется пластическое течение.

Определим влияние  $\tau$  на величину радиуса упругопластической зоны. Согласно (7)

$$\frac{r_{s0}}{a} = (2(2 - q_0)^{-2} + \tau^2(4 + \tau^2)^{-1} + \tau^2(4 - 2q_0)^{-2})^{1/2}. \quad (9)$$

Очевидно, что при фиксированном  $q_0$  граница пластической зоны при  $\tau \neq 0$  увеличивается.

2. Рассмотрим двусное растяжение пластины взаимно перпендикулярными усилиями  $p_1$  и  $p_2$  при наличии касательного нагружения на контуре отверстия.

Покажем, что в этом случае первоначально пластическое течение возникает в отдельных точках контура.

Пусть  $q_0 > 1 - \tau^2/4$ , где  $q_0 = (p_1 + p_2)/2k$ . Вся пластина находится в упругом состоянии. На контуре отверстия  $\rho = \alpha$ ,  $\sigma_\rho = 0$ ,  $\tau_{\rho\vartheta} = \tau$ . Граничные условия на бесконечности при  $\rho \rightarrow \infty$ :

$$\sigma_\rho^\infty = q_0 - \delta \cos 2\vartheta, \quad \sigma_\vartheta^\infty = q_0 + \delta \cos 2\vartheta, \quad \tau_{\rho\vartheta}^\infty = \delta \sin 2\vartheta \quad \left( \delta = \frac{p_1 - p_2}{2k} \right).$$

С учетом указанных граничных условий решение получаем в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= q_0 \left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\rho} \right)^2 \right) - \delta \left( 1 + 4 \left( \frac{\alpha}{\rho} \right)^2 + 3 \left( \frac{\alpha}{\rho} \right)^4 \right) \cos 2\vartheta; \\ \sigma_\vartheta &= q_0 \left( 1 + \left( \frac{\alpha}{\rho} \right)^2 \right) + \delta \left( 1 + 3 \left( \frac{\alpha}{\rho} \right)^4 \right) \cos 2\vartheta; \\ \tau_{\rho\vartheta} &= \tau \left( \frac{\alpha}{\rho} \right)^2 + \delta \left( 1 + 2 \left( \frac{\alpha}{\rho} \right)^2 - 3 \left( \frac{\alpha}{\rho} \right)^4 \right) \sin 2\vartheta.\end{aligned}\quad (10)$$



Из (10) следует, что  $\sigma_{\vartheta}$  достигает максимального значения на концах диаметра, совпадающего с направлением меньшей силы ( $\vartheta = 0$ ):

$$\sigma_{\vartheta \max} = 2q_0 + 4\delta. \quad (11)$$

Определим, когда возникает пластическое течение в этих точках, используя условие (1) при  $\rho = \alpha$ . Получим:

$$4(q_0 + 2\delta - 1) + \tau^2 = 0. \quad (12)$$

При равномерном растяжении  $\delta = 0$  и условие (12) совпадает с (8).

С помощью коэффициента  $\delta$  определяется коэффициент концентрации напряжений:

$$\frac{\sigma_{\vartheta \max}}{\sigma_0^0} = 1 + \delta \frac{2}{q_0}. \quad (13)$$

Из (13) получим, что коэффициент концентрации пропорционален  $\delta$  и

$$\delta = \frac{1 - q_0}{2} - \frac{\tau^2}{8}. \quad (14)$$

Очевидно, наличие касательных нагрузок приводит к уменьшению концентрации напряжений.

3. Решим упругопластическую задачу при двусном растяжении пластины, полагая, что пластическая зона охватывает весь контур отверстия, когда  $q_0 > 1 - \tau^2/4$ . Решение проводим методом малого параметра [1], принимая в качестве малого параметра ранее введенную величину  $\delta$ :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \sigma_{ij}^{(n)}. \quad (15)$$

За нулевое приближение принимается решение при равномерном растяжении пластины на бесконечности и нагружении контура отверстия касательными усилиями. Напряжения в пластической области в статически определимых задачах полностью определяются условиями на одном из контуров, так как в рассматриваемой задаче контур и все нагрузки фиксированы, решение в пластической области остается неизменным и совпадает с (4), то есть  $\sigma_{ij}^{(n)p} = 0$  при  $\alpha \leq \rho \leq 1$ . Граничные условия на бесконечности для первого приближения примут вид:

$$\sigma_{\rho}^e = -\cos 2\vartheta, \quad \sigma_{\vartheta}^e = \cos 2\vartheta, \quad \tau_{\rho\vartheta}^e = \sin 2\vartheta. \quad (16)$$

Из условий сопряжения решений на упруго-пластической границе  $\rho = 1 + \delta\rho_{s1} \cos 2\vartheta$  получим:

$$\sigma_{\rho}^e = \tau_{\rho\vartheta}^e = 0, \quad \sigma_{\vartheta}^e + \left[ \frac{d\sigma_{\vartheta}^0}{d\rho} \right] \rho_{s1} = 0 \quad \text{при } \rho = 1. \quad (17)$$

Напряжения в упругой зоне и  $\rho_{s1}$  с учетом (16) и (17) примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^e &= - \left( 1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) \cos 2\vartheta, \\ \sigma_{\vartheta}^e &= \left( 1 + \frac{3}{\rho^4} \right) \cos 2\vartheta, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\vartheta}^e &= \left( 1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) \sin 2\vartheta. \\ \rho_{s1} &= \frac{4}{A}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $A = \alpha(\tau^4 + \tau^2(4\alpha^2 + 8) + 16)(4 + \tau^2(1 - \alpha^2))^{-3/2}$ .

Так как  $A > 0$ , граница пластической области оказывается эллипсом, большая полуось которого совпадает с направлением меньшей силы, что соответствует выводам п. 2.

При  $\tau = 0$ ,  $\rho_{s0} = 2/\alpha$ , можно показать, что при  $\tau \neq 0$   $A \succ 2\alpha$ , то есть согласно (19) наличие касательного нагружения отверстия уменьшает значение разности полуосей эллипса, описывающего границу пластической области, пластическое течение наступает при меньших растягивающих усилиях и коэффициент концентрации напряжений уменьшается.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [2] *Вульман, С. А.* Двухосное растяжение плоскости с эллиптическим отверстием из листового материала / С. А. Вульман, Т. Д. Семькина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: материалы Международной конференции. 20–22 сентября. – Воронеж, 2010. – С. 103–106.
- [3] *Кульпина, Т. А.* Напряженное состояние анизотропной эксцентрической трубы, находящейся под действием внутреннего давления сдвигающего усилия  $\tau_{\rho\vartheta}^{(0)} \neq 0$  / Т. А. Кульпина // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 51–54.

*Семькина Татьяна Дмитриевна,*

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** mech@amm.vsu.ru

*Вульман Светлана Александровна,*

*кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** svulman4@mail.ru

T. D. Semykina, S. A. Vulman

**THE EFFECT ON THE STRESS STATE OF AN INFINITE PLATE SHEAR  
STRESSES DISTRIBUTED OVER A CIRCULAR HOLE**

*Voronezh State University*

**Abstract.** The method of small parameter determines stress in a thin plate with a circular hole under biaxial stretching. Hole is load with tangent loading. It is show action of tangent loading on concentration of stress.

**Keywords:** Lamination, tangent loading, circular hole, biaxial tension, method of small parameter..

**REFERENCES**

- [1] *Ivlev, D. D.* Perturbation method in the theory of elastic-plastic body / D. D. Ivlev, L. V. Ershov. – M. : Science, 1978. – 208 p.
- [2] *Vulman, S. A.* Biaxial stretching plane with elliptic hole of sheet material / S. A. Vulman, T. D. Semykina // Actual problems in applied mathematics, informatics and mechanics: Sb. tr. of International Conference. 20-22 of September. – Voronezh, 2010. – P. 103–106.
- [3] *Kulpina, T. A.* The stress state of anisotropic eccentric tube located under internal pressure of shearing force  $\tau_{\rho\theta}^{(0)} \neq 0$  / T. A. Kulpina // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line: Mechanics of definable state. – 2007. – N. 2. – P. 51–54.

*Semykina Tat'yana D.*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of theoretical and applied mechanics, Voronezh State University, Voronezh*

*Vulman Svetlana A.*

*Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of theoretical and applied mechanics, Voronezh State University, Voronezh*

## ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОНТАКТНОЙ НАГРУЗКИ В ЗАДАЧЕ О ВДАВЛИВАНИИ ШТАМПА В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ

*Тверской государственной технической университет*

**Аннотация.** В данной работе представлено численное решение упругопластической контактной задачи с использованием соотношений гипотезы компланарности. Были получены эпюры осадок поверхности полуплоскости при различных значениях контактной нагрузки и сопоставлены с результатами аналитического решения.

**Ключевые слова:** упругопластическая задача, контактная задача, гипотеза компланарности, деформационная теория пластичности.

УДК: 539.3

**Актуальность исследуемой проблемы.** В соответствии с принципом Сен-Венана характер распределения нагрузки незначительно сказывается в областях, удаленных от точки приложения. Однако часто исследуется область вблизи приложенной нагрузки. Так, в задаче о вдавливании штампа в упругопластическую среду важно понимать, какое влияние оказывает распределение контактной нагрузки на напряженно деформированное состояние в непосредственной близости от нагруженного участка.

**Материал и методика исследований.** В статье рассмотрено решение задачи о вдавливании штампа в полуплоскость в условиях плоской деформации по теории упругопластических процессов. Полученное решение сопоставлено с решением Прандтля для идеально пластического тела. При расчете пластин и оболочек в математической теории упругопластических процессов принимается модель несжимаемого материала [1], [2], [3]. В случае плоской деформации принятие этой модели приводит к неопределенности в уравнениях связи напряжений и деформаций. Этим обусловлена необходимость учета сжимаемости. Наиболее просто задача о плоской деформации в математической теории пластичности решается при использовании соотношений гипотезы компланарности. В компонентах вектора напряжений эти соотношения имеют вид [1], [2], [3]:

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= N\dot{\epsilon}_1 + (P - N)(S_1\dot{\epsilon}_1 + S_2\dot{\epsilon}_2 + S_3\dot{\epsilon}_3)S_1/\sigma^2 \\ \dot{S}_2 &= N\dot{\epsilon}_2 + (P - N)(S_1\dot{\epsilon}_1 + S_2\dot{\epsilon}_2 + S_3\dot{\epsilon}_3)S_2/\sigma^2 \\ \dot{S}_3 &= N\dot{\epsilon}_3 + (P - N)(S_1\dot{\epsilon}_1 + S_2\dot{\epsilon}_2 + S_3\dot{\epsilon}_3)S_3/\sigma^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $N$ ,  $P$  – функционалы пластичности;  $\sigma = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$  – модуль вектора напряжений. Компоненты векторов напряжений и деформаций определяются формулами:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_x - \sigma_0); \\
S_2 &= \sqrt{2}(\sigma_y - \sigma_0) + (\sigma_x - \sigma_0)/\sqrt{2}; \\
S_3 &= \sqrt{2}\tau_{xy}; \\
\Theta_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}}(\epsilon_x - \epsilon_0); \\
\Theta_2 &= \sqrt{2}(\epsilon_y - \epsilon_0) + (\epsilon_x - \epsilon_0)/\sqrt{2}; \\
\Theta_3 &= \sqrt{2}\gamma_{xy}; \\
\sigma_0 &= (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3; \\
\epsilon_0 &= (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)/3,
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}$  – компоненты тензоров напряжений и деформаций.

Для связи  $\sigma_0$  и  $\epsilon_0$  может быть принят закон упругого изменения объема:

$$\epsilon_0 = \sigma_0(1 - 2\mu)E, \tag{3}$$

где  $\mu$  и  $E$  – упругие постоянные.

Подстановка (2) в (1) дает после преобразований соотношения:

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_x - \dot{\sigma}_0 &= N(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_0) + (P - N)\left((\sigma_x - \sigma_0)(2\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y - 3\dot{\epsilon}_0) + \right. \\
&\quad \left. + (\sigma_y - \sigma_0)(\dot{\epsilon}_x + 2\dot{\epsilon}_y - 3\dot{\epsilon}_0) + \tau_{xy}\dot{\gamma}_{xy}\right)(\sigma_x - \sigma_0)/\sigma^2 \\
\dot{\sigma}_y - \dot{\sigma}_0 &= N(\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_0) + (P - N)\left((\sigma_x - \sigma_0)(2\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y - 3\dot{\epsilon}_0) + \right. \\
&\quad \left. + (\sigma_y - \sigma_0)(\dot{\epsilon}_x + 2\dot{\epsilon}_y - 3\dot{\epsilon}_0) + \tau_{xy}\dot{\gamma}_{xy}\right)(\sigma_y - \sigma_0)/\sigma^2 \\
\dot{\tau}_{xy} &= N\dot{\gamma}_{xy} + (P - N)\left((\sigma_x - \sigma_0)(2\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y - 3\dot{\epsilon}_0) + \right. \\
&\quad \left. + (\sigma_y - \sigma_0)(\dot{\epsilon}_x + 2\dot{\epsilon}_y - 3\dot{\epsilon}_0) + \tau_{xy}\dot{\gamma}_{xy}\right)\tau_{xy}/\sigma^2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Для плоской деформации  $\epsilon_z = 0$  и согласно (2) и (3)

$$\epsilon_0 = (\epsilon_x + \epsilon_y)/3, \sigma_0 = E\epsilon_0/(1 - 2\mu), \sigma_z = 3\sigma_0 - \sigma_x - \sigma_y. \tag{5}$$

Подстановка (5) дает возможность преобразовать (4) в матричный вид, позволяющему решать задачу методом конечных элементов [4]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_x \\ \dot{\sigma}_y \\ \dot{\tau}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
E_{11} &= 2N/3 + E/[3(1 - 2\mu)] + (P - N)(\sigma_x - \sigma_0)^2/\sigma^2; \\
E_{12} = E_{21} &= -N/3 + E/[3(1 - 2\mu)] + (P - N)(\sigma_x - \sigma_0)(\sigma_y - \sigma_0)/\sigma^2; \\
E_{13} = E_{31} &= (P - N)(\sigma_x - \sigma_0)\tau_{xy}/\sigma^2; \\
E_{22} &= 2N/3 + E/[3(1 - 2\mu)] + (P - N)(\sigma_y - \sigma_0)^2/\sigma^2; \\
E_{23} = E_{32} &= (P - N)(\sigma_y - \sigma_0)\tau_{xy}/\sigma^2; \\
E_{33} &= N/2 + (P - N)\tau_{xy}^2/\sigma^2.
\end{aligned} \tag{7}$$

В случае плоского напряженного состояния

$$\sigma_z = 0, \sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y)/3, \epsilon_0 = (1 - 2\mu)\sigma_0/E, \epsilon_z = 3\epsilon_0 - \epsilon_x - \epsilon_y. \quad (8)$$

В отличие от плоской деформации, для плоского напряженного состояния уравнения вида (6) целесообразно получать в числовом виде из совместного решения системы уравнений (4) и (8) в процессе решения упругопластической задачи.

Для модели несжимаемого материала ( $\mu = 0,5$ ) при плоской деформации соотношения (7) становятся неопределенными. В задаче о плоском напряженном состоянии при  $\mu = 0,5$  из (8) следует  $\epsilon_0 = \dot{\epsilon}_0 = 0$ , тогда подстановка (8) дает в (4) вместо (7) следующие выражения:

$$\begin{aligned} E_{11} &= 2N + (P - N)\sigma_x^2/\sigma^2; \\ E_{12} = E_{21} &= N + (P - N)\sigma_x\sigma_y/\sigma^2; \\ E_{13} = E_{31} &= (P - N)\sigma_x\tau_{xy}/\sigma^2; \\ E_{22} &= 2N + (P - N)\sigma_y^2/\sigma^2; \\ E_{23} = E_{32} &= (P - N)\sigma_y\tau_{xy}/\sigma^2; \\ E_{33} &= N/2 + (P - N)\tau_{xy}^2/\sigma^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Функционалы  $N$  и  $P$  аппроксимируются функциями, учитывающими сложное нагружение [1], [2], [3]. В упругой стадии работы  $N = P = 2G = E/(1 + \mu)$ .

**Результаты исследований и их обсуждение.** В соответствии с (6) и (7) было получено решение задачи о плоской деформации при воздействии равномерно распределенной нагрузки на участке границы полуплоскости (рис. 1). Усилия на границах расчетной области получены из решения линейно-упругой задачи в предположении, что зона пластического деформирования вблизи приложенной нагрузки мала по сравнению с рассматриваемой расчетной областью.

Решение выполнено для квазипростого нагружения, когда может быть использована единая кривая упрочнения материалов. Все усилия изменялись пропорционально равнодействующей нагрузке  $Q$ , поэтому в общих формулах (6) и (7) для функционалов принимались выражения  $N = 2G_p$ ,  $P = 2G_k$ , соответствующие теории малых упругопластических деформаций. Задача была решена для двух вариантов распределения нагрузки под штампом (рис. 2). В качестве закона связи между напряжениями и деформациями была принята диаграмма Прандтля ( $E = 20000 \text{ кН/м}^2$ ;  $\sigma_T = E\epsilon_T$ ;  $\epsilon_T = 0,001$ ;  $\mu = 0,3$ ).

В результате решения задачи были получены перемещения  $w$  верхней границы полуплоскости (рис. 3, 4), которые не отличаются от перемещений, найденных при решении аналогичной задачи без перехода к скоростям [5].

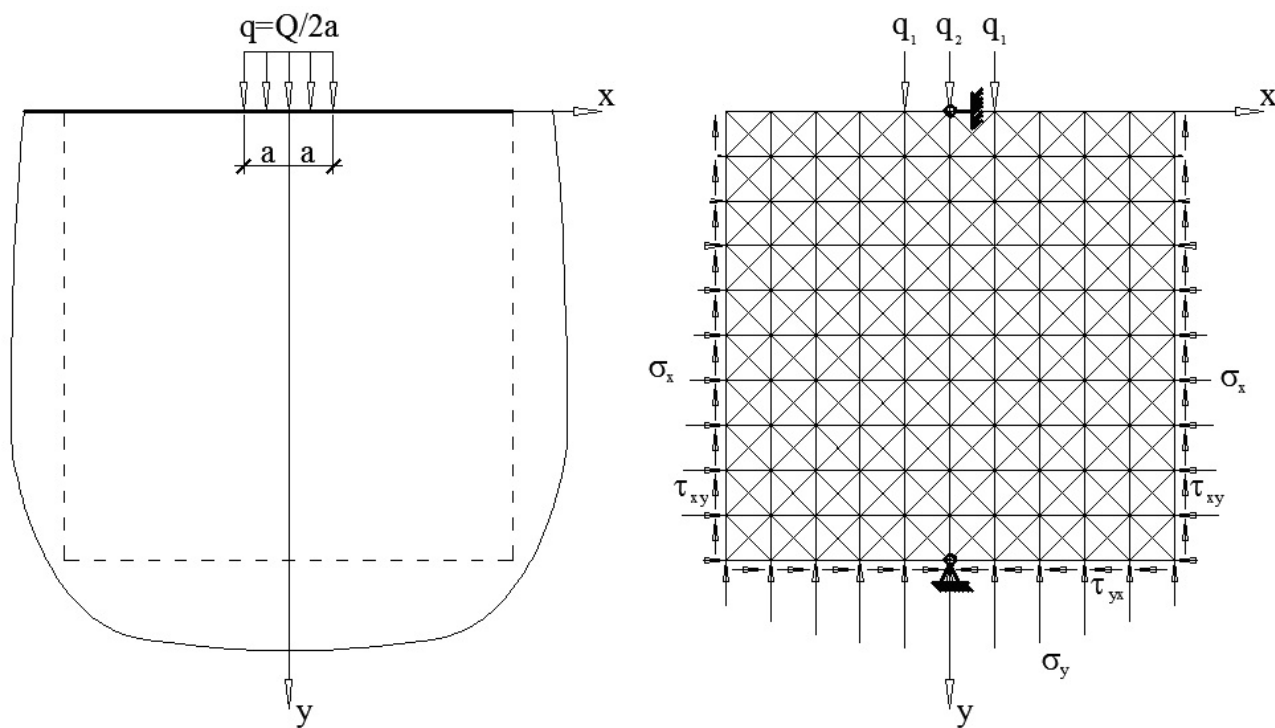


Рис. 1. Расчетная схема и схема МКЭ

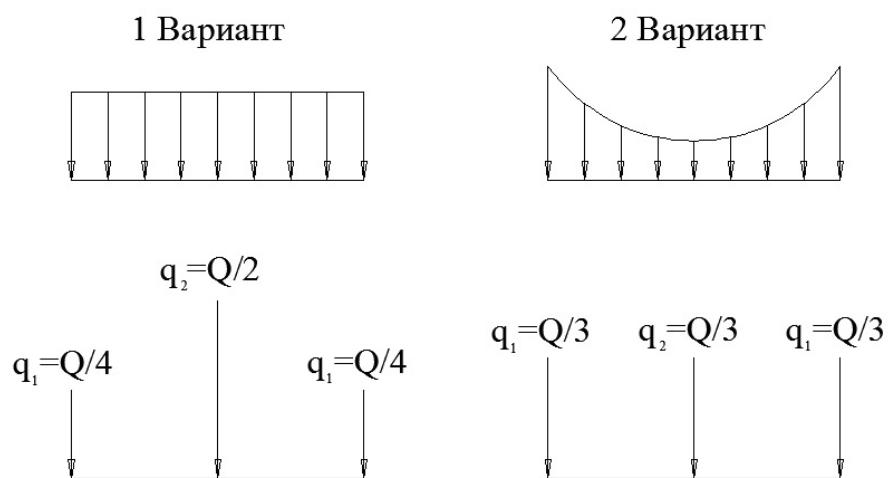


Рис. 2. Варианты распределения контактной нагрузки под штампом

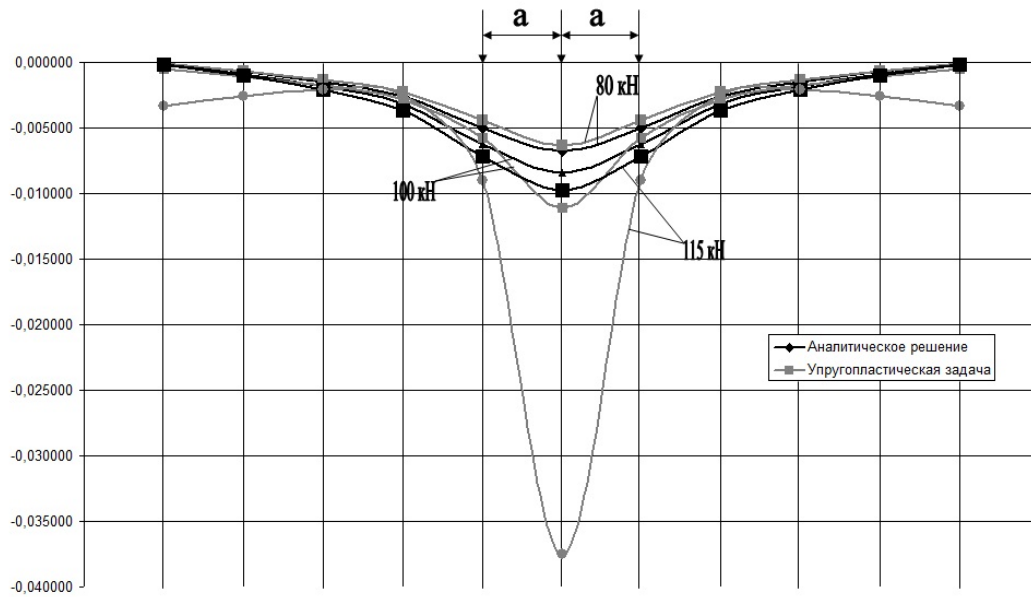


Рис. 3. Перемещения верхней границы полуплоскости

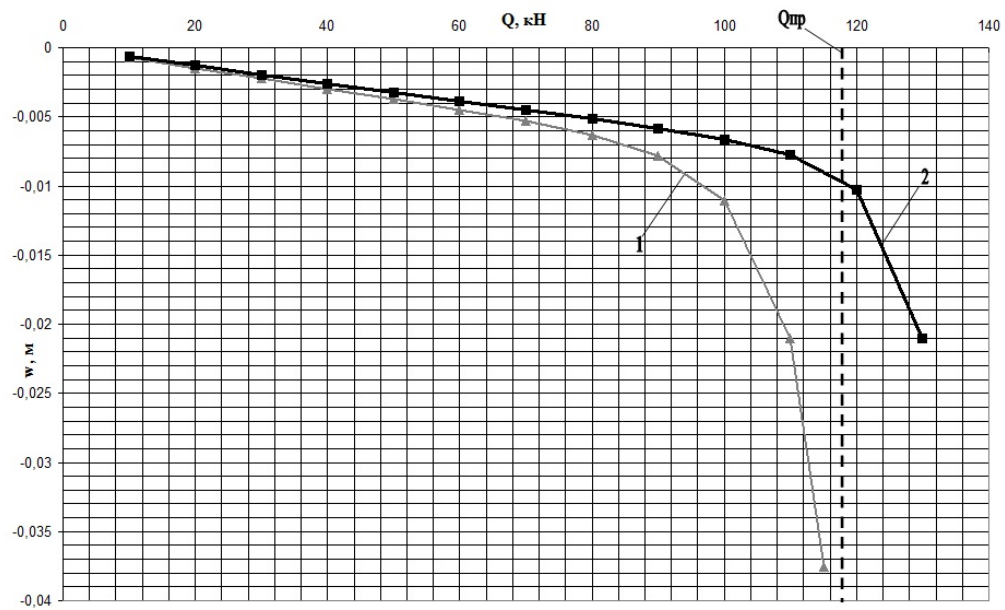


Рис. 4. Зависимость максимальных перемещений от приложенной силы: 1 – уругопластическая задача вариант загрузки 1; 2 – то же для варианта загрузки 2



**Резюме.** Как видно из рис. 3 и 4, развитие пластических деформаций в зоне приложения контактной нагрузки оказывает значительное влияние на величину перемещений в этой области. Уровень нагрузки, для которой принятая расчетная схема достоверна, можно оценить по приближению кривой перемещений поверхности за пределом упругости к линейно упругому аналитическому решению по мере удаления от загруженного участка. При стремлении нагрузки к предельному значению для штампа по решению Прандтля в случае идеально пластического тела ( $Q_{пр} = (2 + \pi)2a\sigma_T/\sqrt{3}$ ) [1], перемещение центральной точки загруженного участка стремится к бесконечности.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Зубчанинов, В. Г.* Механика сплошных деформированных сред / В. Г. Зубчанинов. – Тверь : ТГТУ, 2000. – 703 с.
- [2] *Зубчанинов, В. Г.* Математическая теория пластичности / В. Г. Зубчанинов. – Тверь : ТГТУ, 2002. – 300 с.
- [3] *Зубчанинов, В. Г.* Механика процессов пластических сред / В. Г. Зубчанинов. – М. : Физматлит, 2010. – 352 с.
- [4] *Субботин, С. Л.* Программный комплекс для моделирования процессов сложного нагружения конструкционных материалов / С. Л. Субботин, А. А. Алексеев // Программные продукты и системы. – Тверь : НИИ «Центрпрограммсистем», 2006. – № 4 (76). – С. 46–47.
- [5] *Субботин, С. Л.* Численное решение плоской упругопластической контактной задачи / С. Л. Субботин, М. Б. Сухарев // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: сборник трудов. – Тверь : ТГТУ, 2011. – С. 96–100.

*Субботин Сергей Львович,*

*доктор технических наук, заведующий кафедрой строительного производства, Тверской государственной технической университет, г. Тверь*

*e-mail: sbtn@yandex.ru*

*Сухарев Максим Борисович,*

*арширант кафедры сопротивления материалов теории упругости и пластичности, Тверской государственной технической университет, г. Тверь*

*e-mail: suharevmb@yandex.ru*

S. L. Subbotin, M. B. Suharev

**VALUATION OF INFLUENCE OF CONTACT LOAD DISTRIBUTION ON  
IDENTATION PUNCH INTO ELASTOPLASTIC AREA PROBLEM**

*Tver State Technical University*

**Abstract.** In this work the numerical solution of elastoplastic contact problem with using of correlations of complanarity hypotheses is offered. Diagrams of collapses of half plane surface for different values of contact force were received and compared with the results of analytical solution.

**Keywords:** elastoplastic problem, contact problem, complanarity hypotheses, deformative plasticity theory.

**REFERENCES**

- [1] *Zubchaninov, V. G.* Mechanics of Continuous Deformable Media / V. G. Zubchaninov. – Tver : TSTU, 2000. – 703 p.
- [2] *Zubchaninov, V. G.* The mathematical theory of plasticity / V. G. Zubchaninov. – Tver : TSTU, 2002. – 300 p.
- [3] *Zubchaninov, V. G.* Mechanics of plastic media сред / V. G. Zubchaninov. – М. : Fizmatlit Publ., 2010. – 352 p.
- [4] *Subbotin, S. L.* Software package for the simulation of complex loading of structural materials / S. L. Subbotin, A. A. Alekseev // Software and Systems. – Tver : SRI "Tsentrprogrammssystem", 2006. – N. 4 (76). – P. 46–47.
- [5] *Subbotin, S. L.* The numerical solution of the plane elastic-plastic contact problem / S. L. Subbotin, M. B. Suharev // Problems of strength, ductility and resistance in Solid Mechanics: Proceedin. Tver : TSTU, 2011. – P. 96–100.

*Subbotin Sergey Lvovich*

*Dr. Tech. Sci., Professor, Head of the Department of construction production, Tver State Technical University, Tver*

*Suharev Maxim Borisovich*

*Postgraduate student, Departament of the material resistance elastic and plastic theories, Tver State Technical University, Tver*

А. П. Кержаев

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ ПРИ РАВНОМЕРНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

**Аннотация.** Рассматривается равномерное растяжение тонкой кольцевой пластины, ограниченной двумя окружностями радиусов  $a$  и  $b$ . Материал предполагается упруго-идеальнопластическим, в пластической области имеет место трансляционная анизотропия. В первом приближении [1] определены компоненты напряжений в упругой и пластической областях, определена граница между упругой и пластической областями.

**Ключевые слова:** напряжение, упругость, пластичность, трансляционная анизотропия, растяжение, отверстие, кольцевая пластина.

УДК: 539.374

Рассмотрим тонкую кольцевую пластину из упруго-идеальнопластического анизотропного материала, ограниченную двумя окружностями радиусов  $a$  и  $b$ . На рис. 1 в плоскости  $x, y$  пластина растягивается равномерными усилиями  $p$ , внутренний контур свободен от усилий.

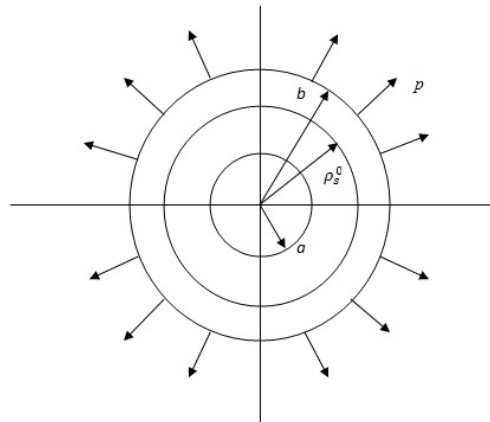


Рис. 1. Кольцевая пластина, растягиваемая равномерными усилиями  $p$

Условие пластичности в случае трансляционной идеальнопластической анизотропии примем в виде

$$(\sigma_x - 2 \cdot (k + k_1)) \cdot (\sigma_y - 2 \cdot (k + k_2)) - (\tau_{xy} - k_3)^2 = 0, \quad k, k_1, k_2, k_3 - const, \quad (1)$$

Поступила 28.06.2012

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненты напряжения в декартовой системе координат.

Будем считать компоненты напряжений безразмерными, отнесенными к величине предела текучести  $k$ . Припишем компонентам напряжения в пластической зоне индекс "р" наверху, а в упругой – индекс "е" наверху.

Связь между напряжениями в декартовой системе координат  $x, y$  и напряжениями в полярной системе координат  $\rho, \theta$  имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta.\end{aligned}\quad (2)$$

Из (1), (2) получим условие пластичности в полярных координатах

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{(p)} \sigma_\theta^{(p)} - A \left( \sigma_\rho^{(p)} + \sigma_\theta^{(p)} \right) + P \left( \sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)} \right) \cos 2(\theta + \mu) + \\ + 2\tau_{\rho\theta} P \sin 2(\theta + \mu) - \tau_{\rho\theta}^2 + B = 0,\end{aligned}\quad (3)$$

где

$$P = \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + k_3^2}, \quad \frac{k_1 - k_2}{P} = \cos 2\mu, \quad \frac{k_3}{P} = \sin 2\mu,$$

$$A = 2 + k_1 + k_2, \quad B = 4(1 + k_1 + k_2) + 4k_1 k_2 - k_3^2.$$

В дальнейшем отнесем все величины, имеющие размерность длины, к величине  $\rho_s^0$  – радиусу упругопластической зоны в исходном нулевом приближении.

Решение будем искать в виде разложения по малому безразмерному параметру  $\delta$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(I)} + \delta^2 \sigma_{ij}^{(II)} + \dots, \\ k_1 &= \delta k'_1, \quad k_2 = \delta k'_2, \quad k_3 = \delta k'_3.\end{aligned}\quad (4)$$

Индекс "0" наверху приписан компонентам в нулевом исходном состоянии при  $\delta = 0$ .

Границу упругой и пластической областей обозначим

$$\rho_s = \rho_s^0 + \delta \rho'_s + \delta^2 \rho''_s + \dots$$

В нулевом исходном осесимметричном состоянии положим

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0.\quad (5)$$

В нулевом исходном приближении согласно (3), (4), (5) имеет место

$$\left( \sigma_\rho^{(0)p} - 2 \right) \left( \sigma_\theta^{(0)p} - 2 \right) = 0.\quad (6)$$

В дальнейшем положим

$$\sigma_\theta^{(0)p} = 2, \quad \left| \sigma_\rho^{(0)p} \right| \leq 2.\quad (7)$$

Для определения компонент напряжений в пластической области в нулевом приближении используем уравнения равновесия в полярной системе координат

$$\frac{d\sigma_\rho^{(0)p}}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{\rho} = 0.\quad (8)$$

Из (7), (8) при граничном условии  $\sigma_\rho^{(0)p} = 0$  при  $\rho = \alpha$  получим

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} = 2 \left( 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right), \quad \sigma_{\theta}^{(0)p} = 2, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0. \quad (9)$$

Решение в упругой области будем искать в виде

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = A - B \frac{\beta^2}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = A + B \frac{\beta^2}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (10)$$

Условия сопряжения компонент напряжений в нулевом приближении на упругопластической границе имеют вид

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} \Big|_{\rho=\beta} = \sigma_{\rho}^{(0)e} \Big|_{\rho=\beta}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)p} \Big|_{\rho=\beta} = \sigma_{\theta}^{(0)e} \Big|_{\rho=\beta}. \quad (11)$$

Удовлетворяя граничному условию  $\sigma_{\rho}^{(0)e} = q$  при  $\rho = \beta$ , где  $q = \frac{p}{k}$ , и условиям сопряжения (11), определим постоянные  $A$  и  $B$ .

Напряжения в упругой области имеют вид

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = 2 - \alpha - (2 - \alpha - q) \frac{\beta^2}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = 2 - \alpha + (2 - \alpha - q) \frac{\beta^2}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (12)$$

Из (9), (11), (12) следует

$$2 - \alpha - (2 - \alpha - q)\beta^2 = 2(1 - \alpha), \quad (13)$$

$$2 - \alpha + (2 - \alpha - q)\beta^2 = 2.$$

Из двух соотношений (13) независимым является одно, с учетом  $\alpha = \frac{a}{\rho_s^0}$  и  $\beta = \frac{b}{\rho_s^0}$  получим радиус упругопластической границы в нулевом приближении

$$\rho_s^0 = \frac{2b^2}{2b^2 - b^2q - a}. \quad (14)$$

Для первого приближения согласно (3), (4), (9) имеет место условие пластичности

$$\sigma_{\theta}^{(I)p} = -P' \cos 2(\theta + \mu) + k'_1 + k'_2. \quad (15)$$

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{\rho}^{(I)} - \sigma_{\theta}^{(I)}}{\rho} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta}^{(I)}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\rho} = 0.$$

Уравнения равновесия удовлетворим, полагая

$$\sigma_{\rho}^{(I)p} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \theta^2}, \quad (17)$$

$$\sigma_{\theta}^{(I)p} = \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \rho^2},$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \theta} \right).$$

Из (15), (17) найдем уравнение для определения функции напряжения  $\Phi^{(I)}$

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \rho^2} = -P' \cos 2(\theta + \mu) + k'_1 + k'_2. \quad (18)$$

Согласно (18) функция  $\Phi^{(I)}$  имеет вид

$$\Phi^{(I)} = [-P' \cos 2(\theta + \mu) + k'_1 + k'_2] \frac{\rho^2}{2} + C_1 \rho + C_2. \quad (19)$$

Из (17), (19) получим напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)p} &= P' \cos 2(\theta + \mu) + k'_1 + k'_2 + \frac{C_1}{\rho}, \\ \sigma_\theta^{(I)p} &= -P' \cos 2(\theta + \mu) + k'_1 + k'_2, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= -P' \sin 2(\theta + \mu). \end{aligned} \quad (20)$$

В первом приближении граничные условия согласно [1] имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha. \end{aligned} \quad (21)$$

Коэффициент  $C_1$  определим из (20) и граничных условий (21). Тогда из (20) решение в пластической зоне имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)p} &= \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right) (k'_1 + k'_2) + \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right) P' \cos 2(\theta + \mu), \\ \sigma_\theta^{(I)p} &= -P' \cos 2(\theta + \mu) + k'_1 + k'_2, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= -P' \sin 2(\theta + \mu). \end{aligned} \quad (22)$$

Граничные условия на внешнем контуре в упругой зоне запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)e} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \beta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \beta. \end{aligned} \quad (23)$$

На упругопластической границе согласно (22) имеет место

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)p} &= a_0'' + a_2'' \cos 2\theta + a_4'' \sin 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= b_2''' \cos 2\theta + b_4''' \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} a_0'' &= (1 - \alpha) (k'_1 + k'_2), \quad a_2'' = (1 - \alpha) (k'_1 - k'_2), \quad a_4'' = -(1 - \alpha) k'_3, \\ b_2''' &= -k'_3, \quad b_4''' = k'_2 - k'_1. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда напряжения в упругой области равны

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho^{(I)e} &= -\frac{(1-\alpha)(k'_1+k'_2)}{\beta^2-1} + \frac{(1-\alpha)(k'_1+k'_2)}{\beta^2-1} \frac{\beta^2}{\rho^2} + \frac{1}{2N} [2(1-2\beta^2+\beta^{-4}) + \\
&+ 2(3-2\beta^2-\beta^4)\rho^{-4} + 4(1-2\beta^{-2}+\beta^4)\rho^{-2}] (1-\alpha) P' \cos 2(\theta+\mu) - \\
&-\frac{1}{2N} [(-4+4\beta^2) + (4\beta^4-4\beta^2)\rho^{-4} + (4-4\beta^4)\rho^{-2}] P' \cos 2(\theta+\mu), \\
\sigma_\theta^{(I)e} &= -\frac{(1-\alpha)(k'_1+k'_2)}{\beta^2-1} - \frac{(1-\alpha)(k'_1+k'_2)}{\beta^2-1} \frac{\beta^2}{\rho^2} + \frac{1}{2N} [2(-1+2\beta^2-\beta^{-4}) + \\
&+ 2(-3+2\beta^2+\beta^4)\rho^{-4} + 4(-3+2\beta^{-2}+\beta^{-4})\rho^2] (1-\alpha) P' \cos 2(\theta+\mu) - \\
&-\frac{1}{2N} [(4-4\beta^2) + (4\beta^2-4\beta^4)\rho^{-4} + (12-16\beta^{-2}+4\beta^{-4})\rho^2] P' \cos 2(\theta+\mu), \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \frac{1}{2N} [2(-1+2\beta^2-\beta^{-4}) + 2(3-2\beta^2-\beta^4)\rho^{-4} + 2(-3+2\beta^{-2}+\beta^{-4})\rho^2 + \\
&+ 2(1-2\beta^{-2}+\beta^4)\rho^{-4}] (1-\alpha) P' \sin 2(\theta+\mu) - \frac{1}{2N} [(4-4\beta^2) - (-4\beta^2+4\beta^4)\rho^{-4} + \\
&+ (6-8\beta^{-2}+2\beta^{-4})\rho^2 + (2-2\beta^4)\rho^{-2}] P' \sin 2(\theta+\mu).
\end{aligned} \tag{26}$$

где

$$N = 6 - 4(\beta^{-2} + \beta^2) + \beta^{-4} + \beta^4.$$

Из (9), (12) получим

$$\left. \frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = 0, \quad \left. \frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = -2(2-\alpha-q)\beta^2,$$

тогда для определения границы раздела упругопластической области в первом приближении получим

$$\rho_s^{(I)} = \frac{\sigma_\theta^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)e}}{\frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho}} = \frac{1}{2(2-\alpha-q)\beta^2} (\sigma_\theta^{(I)e} - \sigma_\theta^{(I)p}). \tag{27}$$

Из (22), (26), (27) получим радиус упругопластической области в первом приближении.

$$\begin{aligned}
\rho_s^{(I)} &= \frac{1}{2(2-\alpha-q)\beta^2} \left[ -\frac{(1-\alpha)(k'_1+k'_2)}{\beta^2-1} - \frac{(1-\alpha)(k'_1+k'_2)}{\beta^2-1} \beta^2 + \frac{1}{2N} [2(-1+2\beta^2-\beta^{-4}) + \right. \\
&+ 2(-3+2\beta^2+\beta^4) + 4(-3+2\beta^{-2}+\beta^{-4})] (1-\alpha) P' \cos 2(\theta+\mu) - \\
&-\frac{1}{2N} [(4-4\beta^2) + (4\beta^2-4\beta^4) + (12-16\beta^{-2}+4\beta^{-4})] P' \cos 2(\theta+\mu) + \\
&\left. + P' \cos 2(\theta+\mu) - k'_1 - k'_2 \right].
\end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, напряженное состояние в пластической (22) и упругой (26) областях полностью определено, изменение границы раздела упругой и пластической областей определяется из соотношения (28).

На рис. 2 изображена упругопластическая граница в нулевом приближении  $\rho_s^0$ , в первом приближении  $\rho_s^{(I)}$  при  $\delta = 0, 17$ ;  $k = 1, 2$ ;  $k_1 = 1, 4$ ;  $k_2 = 1, 2$ ;  $k_3 = 1, 9$ ;  $a = 2$ ;  $b = 4$ .

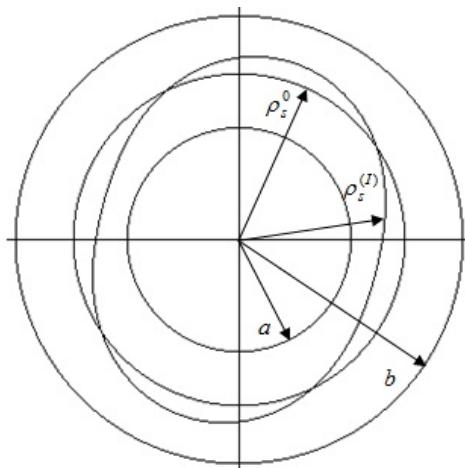


Рис. 2. Уруголастичекая граница в нулевом и первом приближениях

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории уруголастичекого тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

[2] *Кержаев, А. П.* Уруголастичекое состояние тонкой пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии / А. П. Кержаев // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 2 (9). – С. 124-130.

[3] *Павлова, Т. Н.* Уруголастичекое состояние тонкой пластины из анизотропного материала, ослабленной отверстием под действием растягивающих усилий / Т. Н. Павлова // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. – 2010. – № 2 (66). – С. 112-122.

[4] *Фоминых, С. О.* Двусное растяжение уруголастичекой пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии / С. О. Фоминых // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (7). Ч. 3. – С. 610-622.

*Кержаев Александр Петрович,*

*аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: alex\_kerg@mail.ru*



A. P. Kerzhaev

**ELASTOPLASTIC STATE OF A THIN RING PLATE AT TRANSMITTING ANISOTROPY AT UNIFORM STRETCHING**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** Uniform stretching of the thin ring plate limited to two circles of radiuses of  $a$  and  $b$  is considered. The material is supposed elasto-idealplastic, in plastic area transmitting anisotropy takes place. As a first approximation [1] components of tension in elastic and plastic areas are defined, the border between elastic and plastic areas is defined.

**Keywords:** tension, elasticity, plasticity, transmitting anisotropy, uniform stretching, ring plate.

**REFERENCES**

- [1] *Ivlev, D. D.* Perturbation method in the theory of elastic-plastic body / D.D.Ivlev, L.V.Ershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p.
- [2] *Kerzhaev, A. P.* Elastoplastic state of a thin plate with circular apertures in the case of translational anisotropy / A. P. Kerzhaev // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line: Mechanics of definable state. – 2011. – No. 2 (9). – P. 124-130.
- [3] *Pavlova, T. N.* Elastoplastic state of a thin plate of anisotropic material weakened hole under the tensile forces / T. N. Pavlova // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2010. – No. 2 (66). – P. 112-122.
- [4] *Fominykh, S. O.* Biaxial stretching elastic-plastic plate with a circular hole in the case of translational anisotropy / S. O. Fominykh // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line: Mechanics of definable state. – 2010. – No. 2 (7). Ch. 3. – P. 610-622.

*Kerzhaev Alexandr Petrovich*

*Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

А. П. Янковский

## МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА МЕТАЛЛОКОМПЗИТНЫХ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ. 1. СТРУКТУРНАЯ МОДЕЛЬ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН*

**Аннотация.** На базе определяющих соотношений деформационного типа построена итерационная модель, описывающая упругопластическое поведение слоистой металлокомпозитной среды регулярной структуры, состоящей из изотропных фазовых материалов.

**Ключевые слова:** слоистые металлокомпозиты, регулярная структура, структурная теория, упругопластическое деформирование, определяющие соотношения.

УДК: 539.375

**Введение.** В настоящее время в инженерной практике широко используются металлокомпозитные изделия, в частности, слоистой структуры [1 и др.]. Известно, что при интенсивном нагружении металлоконструкции испытывают пластическое деформирование [2 и др.], поэтому актуальной является проблема математического моделирования и расчета упругопластического деформирования тонкостенных металлокомпозитных элементов конструкций. На сегодняшний день эта проблема находится, по сути, в зачаточном состоянии. Так, в [3] рассмотрено упругопластическое деформирование однонаправленно армированных композитов, но такие виды армирования редко встречаются на практике (как правило, лишь в стержневых элементах конструкций). Модели упругопластического поведения (в рамках деформационной теории) перекрестно армированных в плоскости металлокомпозитов предложены в [4; 5], причем в [4] не учитываются напряжения в поперечном направлении в арматуре (как нормальные, так и касательные), а в [5] не учитывается сжимаемость фазовых материалов. В работе [6 и др.] была предложена структурная модель армированного слоя, обладающая теми же особенностями, что и в [4], но построенная на базе определяющих соотношений для идеально-жесткопластических сред. Некоторые простейшие модели неупругого деформирования волокнистых композитов при плоском напряженном состоянии были предложены в [7; 8]. Для определения предельного состояния изгибаемых слоистых металлокомпозитных пластин нерегулярной структуры может быть использована многослойная модель, предложенная в [9] и базирующаяся также на соотношениях идеально-жесткопластической среды.

Целью настоящего исследования является построение модели упругопластического поведения слоистых металлокомпозитов регулярной структуры в рамках теории деформационного типа.

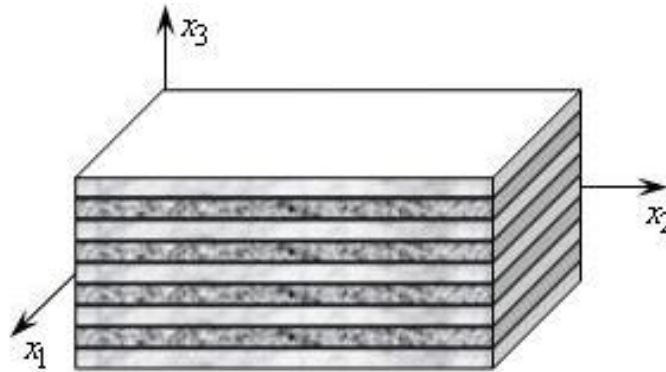


Рис. 1. Представительный элемент слоистого металлокомпозита регулярной структуры

Известно, что при решении упругопластических задач, сформулированных в рамках теорий деформационного типа, целесообразно использовать итерационные процедуры, аналогичные методу секущего модуля [10; 11 и др.]. Как будет показано ниже, при одних и тех же деформациях секущий модуль материала арматуры (или армирующих слоев) может на два порядка быть больше секущего модуля материала связующего [7; 12]. Следовательно, при изучении упругопластического изгиба тонкостенных конструкций из таких металлокомпозиций нужно учитывать их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу, что до настоящего времени делалось лишь при изучении упругого поведения композитных конструкций [8; 13–15 и др.] или упругопластического деформирования изотропных [16 и др.], а также подкрепленных ребрами жесткости [17 и др.] пластин и оболочек. Поэтому второй целью настоящего исследования является построение теории упругопластического изгиба слоистых металлокомпозитных пластин регулярной структуры с учетом их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу.

**Итерационная модель упругопластического деформирования слоистого металлокомпозита регулярной структуры.** Рассмотрим в декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$  гибридный слоистый металлокомпозит (рис. 1), состоящий из  $N$  семейств регулярно чередующихся в направлении  $x_3$  тонких изотропных слоев с относительным объемным содержанием  $\omega_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) в произвольно выделенном представительном элементе. Выполняется условие нормировки

$$\sum_{n=1}^N \omega_n = 1 \quad (\omega_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots, N). \quad (1)$$

Для удобства описания упругопластического поведения слоистого металлокомпозита введем в рассмотрение шестикомпонентные векторы-столбцы напряжений  $\sigma_n$  и деформаций  $\varepsilon_n$  в  $n$ -ом компоненте композиции и аналогичные векторы-столбцы усредненных напряжений  $\sigma$  и деформаций  $\varepsilon$  в композиции, компоненты которых определяются следующими соотношениями [8]:

$$\begin{aligned} \sigma_n^* &= \left\{ \sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \sigma_3^{(n)}, \sigma_4^{(n)}, \sigma_5^{(n)}, \sigma_6^{(n)} \right\} \equiv \left\{ \sigma_{11}^{(n)}, \sigma_{22}^{(n)}, \sigma_{33}^{(n)}, \sigma_{23}^{(n)}, \sigma_{31}^{(n)}, \sigma_{12}^{(n)} \right\}, \\ \varepsilon_n^* &= \left\{ \varepsilon_1^{(n)}, \varepsilon_2^{(n)}, \varepsilon_3^{(n)}, \varepsilon_4^{(n)}, \varepsilon_5^{(n)}, \varepsilon_6^{(n)} \right\} \equiv \left\{ \varepsilon_{11}^{(n)}, \varepsilon_{22}^{(n)}, \varepsilon_{33}^{(n)}, \varepsilon_{23}^{(n)}, \varepsilon_{31}^{(n)}, \varepsilon_{12}^{(n)} \right\}, \\ \sigma^* &= \left\{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \right\} \equiv \left\{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12} \right\}, \\ \varepsilon^* &= \left\{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6 \right\} \equiv \left\{ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12} \right\}, \quad 1 \leq n \leq N, \end{aligned} \quad (2)$$

где звездочка означает операцию транспонирования. Равенства (2) задают соответствия между шестью компонентами  $f_i^{(n)}$ ,  $f_i$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) некоторых векторов  $\mathbf{f}_n$ ,  $\mathbf{f}$  и компонентами соответствующих симметричных тензоров второго ранга  $f_{ij}^{(n)}$ ,  $f_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3; 1 \leq n \leq N$ ).

Так как установить фактическое распределение напряжений и деформаций в композитной среде, состоящей из многочисленных тонких изотропных слоев, весьма затруднительно, то при построении практически пригодных определяющих уравнений упругопластического поведения рассматриваемого металлокомпозита необходимо сделать некоторые допущения в виде исходных предпосылок, аналогичных сделанным в [7; 13; 18].

В пределах представительного элемента, выделенного из металлокомпозита на миниуровне, все слои имеют постоянную толщину и параллельны плоскости  $(x_1, x_2)$ , поэтому слоистый материал представляет собой сплошное макроскопически квазиоднородное анизотропное тело.

На границах между регулярно чередующимися слоями существует полное сцепление – идеальный механический контакт.

В пределах представительного элемента, выделенного из композита на миниуровне, деформации и напряжения во всех слоях кусочно-постоянны (т. е. на границах слоев могут скачком изменяться в направлении  $x_3$ ) и постоянны в композиции в целом. Эффектами высших порядков, связанными с изменением полей деформаций и напряжений на микроуровне в малых окрестностях границ контакта слоев, пренебрегаем.

Усредненные поля деформаций и напряжений в композиции определяются по правилу простой смеси – пропорционально объемному содержанию  $\omega_n$  слоев  $n$ -го семейства.

Все фазовые материалы изотропны и однородны, а упругопластическое поведение в них описывается обобщенными квазилинейными уравнениями деформационного типа [2; 10; 11]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}^{(n)} - \sigma_0^{(n)} &= 2g_n \left( \varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n \right) \left( \varepsilon_{ii}^{(n)} - \varepsilon_0^{(n)} \right), \\ \sigma_{ij}^{(k)} &= 2g_n \left( \varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n \right) \varepsilon_{ij}^{(n)} \quad (j \neq i, \quad i, j = 1, 2, 3), \\ \sigma_0^{(k)} &= K_n \left( \varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n \right) \varepsilon_0^{(n)}, \quad T_n = g_n \left( \varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n \right) \Gamma_n, \quad 1 \leq n \leq N, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_0^{(n)} &\equiv \frac{1}{3} \left( \sigma_{11}^{(n)} + \sigma_{22}^{(n)} + \sigma_{33}^{(n)} \right), \quad \varepsilon_0^{(n)} \equiv \frac{1}{3} \left( \varepsilon_{11}^{(n)} + \varepsilon_{22}^{(n)} + \varepsilon_{33}^{(n)} \right), \\ \Gamma_n &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\left( \varepsilon_{11}^{(n)} - \varepsilon_{22}^{(n)} \right)^2 + \left( \varepsilon_{22}^{(n)} - \varepsilon_{33}^{(n)} \right)^2 + \left( \varepsilon_{33}^{(n)} - \varepsilon_{11}^{(n)} \right)^2 + 6 \left( \varepsilon_{12}^{(n)2} + \varepsilon_{23}^{(n)2} + \varepsilon_{31}^{(n)2} \right)}, \\ T_n &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\left( \sigma_{11}^{(n)} - \sigma_{22}^{(n)} \right)^2 + \left( \sigma_{22}^{(n)} - \sigma_{33}^{(n)} \right)^2 + \left( \sigma_{33}^{(n)} - \sigma_{11}^{(n)} \right)^2 + 6 \left( \sigma_{12}^{(n)2} + \sigma_{23}^{(n)2} + \sigma_{31}^{(n)2} \right)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения (3) с учетом (4) удовлетворяют достаточным условиям сходимости метода последовательных приближений [11, 199], аналогичного методу переменных параметров упругости [10].

В соотношениях (3), (4) приняты следующие обозначения:  $\sigma_0^{(n)}$ ,  $\varepsilon_0^{(n)}$  – среднее нормальное напряжение и средняя линейная деформация в  $n$ -ом фазовом материале;  $T_n$ ,  $\Gamma_n$  – интенсивность касательных напряжений и интенсивность деформаций сдвига в  $n$ -ом компоненте композиции;  $g_n \left( \varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n \right)$  – заданная функция (известная из эксперимента), являющаяся коэффициентом пропорциональности между  $T_n$  и  $\Gamma_n$  в  $n$ -ом фазовом материале;  $K_n \left( \varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n \right)$  – модуль объемного расширения (известен из эксперимента), т. е. коэффициент пропорциональности между  $\sigma_0^{(n)}$  и  $\varepsilon_0^{(n)}$  в  $n$ -ом компоненте композиции.

Зависимость функций  $g_n$ ,  $K_n$  в (3) от аргумента  $\varepsilon_0^{(n)}$  (см. (4)) позволяет учесть эффект разносопротивляемости материала  $n$ -го компонента композиции при растяжении и сжатии, что часто наблюдается в экспериментах [11; 19; 20 и др.].

Так как при решении сложных задач упругопластического деформирования композитных сред целесообразно использовать итерационный процесс, позволяющий линеаризовать определяющие соотношения (3) и являющийся, по сути, обобщением метода секущего модуля [10], то в силу допущения 6 все дальнейшие рассуждения относятся к реализации этого метода. А именно, будем предполагать, что на некоторой  $m$ -ой итерации приближения для деформаций  $\varepsilon_{ij}^{(n)}$  ( $1 \leq n \leq N$ ) во всех компонентах композиции уже известны, т. е. в силу (4) известны приближения функций  $g_n \left( \varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n^m \right)$  и  $K_n \left( \varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n^m \right)$  в соотношениях (3), а значит, следующие  $(m+1)$ -ые приближения неизвестных функций  $\varepsilon_{ij}^{(n)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(n)}$  удовлетворяют линейным уравнениям (см. (3)):

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}^{(n)} - \sigma_0^{(n)} &= 2g_n \left( \varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n^m \right) \left( \varepsilon_{ii}^{(n)} - \varepsilon_0^{(n)} \right), \\ \sigma_{ij}^{(n)} &= 2g_n \left( \varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n^m \right) \varepsilon_{ij}^{(n)} \quad (j \neq i, \quad i, j = 1, 2, 3), \quad \sigma_0^{(n)} = K_n \left( \varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n^m \right) \varepsilon_0^{(n)}, \quad 1 \leq n \leq N. \end{aligned} \quad (5)$$

Для удобства дальнейшего изложения систему равенств (5) запишем в матричной форме

$$\sigma_n^{m+1} = A_n^m \varepsilon_n^{m+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

где  $\sigma_n^{m+1}$ ,  $\varepsilon_n^{m+1}$  –  $(m+1)$ -ые приближения векторов-столбцов  $\sigma_n$ ,  $\varepsilon_n$  (см. (2));  $A_n^m = \begin{pmatrix} a_{ij}^{(n)} \end{pmatrix}$  –  $6 \times 6$  симметричные матрицы, ненулевые компоненты которых согласно (4), (5) имеют выражения:

$$\begin{aligned} a_{ii}^{(n)} &= \frac{1}{3} \left[ 4g_n \left( \varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n^m \right) + K_n \left( \varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n^m \right) \right], \\ a_{ij}^{(n)} &= \frac{1}{3} \left[ K_n \left( \varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n^m \right) - 2g_n \left( \varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n^m \right) \right], \quad j \neq i, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ a_{il}^{(n)} &= 2g_n \left( \varepsilon_0^{(n)}, \Gamma_n^m \right), \quad l = 4, 5, 6, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно (6) и допущениям 1, 6 определяющие уравнения упругопластического деформирования рассматриваемого металлокомпозита на  $(m+1)$ -ой итерации также можно записать в матричной форме

$$\sigma^{m+1} = A^m \varepsilon^{m+1}, \quad (8)$$

где  $\sigma^{m+1}$ ,  $\varepsilon^{m+1}$  –  $(m+1)$ -ые приближения векторов-столбцов  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  (см. (2));  $A^m = \begin{pmatrix} a_{ij}^{(n)} \end{pmatrix}$  –  $6 \times 6$  матрица, элементы которой  $a_{ij}^{(n)}$  подлежат определению на основе известных компонентов  $a_{ij}^{(n)}$  матриц  $A_n^m$  (см. (7)).

В силу допущения 2 и условий сопряжения полей перемещений и напряжений на границах контакта слоев имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(n)} &= \varepsilon_{11}^{(l)}, \quad \varepsilon_{22}^{(n)} = \varepsilon_{22}^{(l)}, \quad \varepsilon_{12}^{(n)} = \varepsilon_{12}^{(l)}, \\ \sigma_{33}^{(n)} &= \sigma_{33}^{(l)}, \quad \sigma_{13}^{(n)} = \sigma_{13}^{(l)}, \quad \sigma_{23}^{(n)} = \sigma_{23}^{(l)}, \quad l = n + 1, \quad 1 \leq n \leq N - 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Равенства (9) с учетом соответствий (2) для  $(m + 1)$ -ых приближений деформаций и напряжений можно записать так:

$$\varepsilon_1^{m+1(n)} = \varepsilon_1^{m+1(l)}, \quad \varepsilon_2^{m+1(n)} = \varepsilon_2^{m+1(l)}, \quad \varepsilon_6^{m+1(n)} = \varepsilon_6^{m+1(l)}, \quad l = n + 1, \quad 1 \leq n \leq N - 1; \quad (10)$$

$$\sigma_3^{m+1(n)} = \sigma_3^{m+1(l)}, \quad \sigma_4^{m+1(n)} = \sigma_4^{m+1(l)}, \quad \sigma_5^{m+1(n)} = \sigma_5^{m+1(l)}, \quad l = n + 1, \quad 1 \leq n \leq N - 1. \quad (11)$$

В силу допущения 3 соотношения (10), (11) справедливы во всех точках представительного элемента.

Согласно допущениям 3, 4 усредненные поля напряжений  $\sigma$  и деформаций  $\varepsilon$  в композиции определяются так:

$$\sigma = \sum_{n=1}^N \omega_n \sigma_n; \quad (12)$$

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^N \omega_n \varepsilon_n. \quad (13)$$

Из равенств (11) с учетом (6), (7) и допущений 3, 5 вытекает

$$\sum_{j=1}^6 a_{ij}^{m(n)} \varepsilon_j^{m+1(n)} = \sum_{j=1}^6 a_{ij}^{m(1)} \varepsilon_j^{m+1(1)} \quad (i = 3, 4, 5, \quad 1 \leq n \leq N). \quad (14)$$

Систему шести равенств (10), (14) запишем в матричной форме

$$B_n^m \varepsilon_n^{m+1} = C^m \varepsilon_1^{m+1}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (15)$$

где ненулевые компоненты  $6 \times 6$  матриц  $B_n^m = \left( b_{ij}^{m(n)} \right)$ ,  $C^m = \left( c_{ij}^m \right)$  согласно (10), (14) имеют выражения:

$$\begin{aligned} b_{ll}^{m(n)} &= 1, \quad c_{ll}^m = 1 \quad (l = 1, 2, 6), \quad b_{ii}^{m(n)} = a_{ii}^{m(n)}, \quad c_{ii}^m = a_{ii}^{m(1)} \quad (i = 4, 5), \\ b_{3j}^{m(n)} &= a_{3j}^{m(n)}, \quad c_{3j}^m = a_{3j}^{m(1)} \quad (j = 1, 2, 3, \quad 1 \leq n \leq N). \end{aligned} \quad (16)$$

В силу соотношений (16)  $\det B_n^m \neq 0$ , поэтому из (15) получаем

$$\varepsilon_n^{m+1} = E_n^m \varepsilon_1^{m+1}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (17)$$

где  $6 \times 6$  матрица

$$E_n^m = B_n^{m-1} C^m; \quad (18)$$

$B_n^{m-1}$  –  $6 \times 6$  матрица, обратная  $B_n^m$ .

Соотношение (17) определяет на  $(m + 1)$ -ой итерации приближения деформаций в  $n$ -ом слое  $\varepsilon_n^{m+1}$  через приближения деформаций в первом слое  $\varepsilon_1^{m+1}$ .

Равенства (12), (13) остаются справедливыми и для  $(m + 1)$ -ых приближений соответствующих векторов, поэтому после подстановки в (12) соотношений (6) получим

$${}^{m+1}\sigma = \sum_{n=1}^N \omega_n A_n^m {}^m\varepsilon_n^{m+1}. \quad (19)$$

Подставим в равенства (13), (19) выражения для деформаций (17), тогда будем иметь

$${}^m\varepsilon_1^{m+1} = \left( \sum_{n=1}^N \omega_n E_n^m \right) {}^m\varepsilon_1^{m+1}; \quad (20)$$

$${}^{m+1}\sigma = \left( \sum_{n=1}^N \omega_n A_n^m E_n^m \right) {}^m\varepsilon_1^{m+1}. \quad (21)$$

Из равенства (20) следует

$${}^m\varepsilon_1^{m+1} = H^m {}^m\varepsilon_1^{m+1}, \quad (22)$$

где  $6 \times 6$  матрица

$$H^m = \left( \sum_{n=1}^N \omega_n E_n^m \right)^{-1}. \quad (23)$$

Равенство (22) определяет на  $(m+1)$ -ой итерации приближения для деформаций в первом слое  ${}^m\varepsilon_1^{m+1}$  через приближения усредненных деформаций в композиции  ${}^m\varepsilon_1^{m+1}$ .

Подставим выражение (22) в соотношение (21), тогда окончательно получим матричное равенство

$${}^{m+1}\sigma = \left( \sum_{n=1}^N \omega_n A_n^m E_n^m \right) H^m {}^m\varepsilon_1^{m+1}. \quad (24)$$

Из сравнения равенств (8) и (24) получаем выражение для искомой матрицы

$$A^m = \left( \sum_{n=1}^N \omega_n A_n^m E_n^m \right) H^m, \quad (25)$$

где нужно учесть выражения для  $6 \times 6$  матриц (23), (18), (16), (7).

Покажем, как метод последовательных приближений может быть реализован в рамках предложенной модели упругопластического поведения слоистого металлокомпозиата. Пусть на некоторой  $m$ -ой итерации известны приближения деформаций  ${}^m\varepsilon_n^m$  ( $1 \leq n \leq N$ ) в каждом слое представительного элемента композиции, тогда согласно (25), (23), (18), (16), (7) известны компоненты  $a_{ij}^m$  матрицы  $A^m$  на этой итерации. Пусть, кроме того, из решения соответствующей граничной задачи с учетом линейных определяющих соотношений (8), где матрица  $A^m$  уже известна, найдены  $(m+1)$ -ые приближения средних деформаций в композиции  ${}^m\varepsilon_1^{m+1}$ . Тогда из равенств (22), (17) с учетом (23), (18), (16), (7) последовательно можем определить следующие приближения деформаций  ${}^{m+1}\varepsilon_1^{m+1}$ ,  ${}^{m+1}\varepsilon_n^{m+1}$  ( $2 \leq n \leq N$ ) в каждом слое композиции в пределах представительного элемента, после чего на  $(m+1)$ -ой итерации во всех слоях можем определить значения  $\varepsilon_0^{m+1}$ ,  $\Gamma_n^{m+1}$  (см. (4) с учетом (2)). Зная на  $(m+1)$ -ой итерации  ${}^{m+1}\varepsilon_n^{m+1}$ ,  $\varepsilon_0^{m+1}$ ,  $\Gamma_n^{m+1}$  ( $1 \leq n \leq N$ ), можем определить новые приближения для компонентов матриц  $B_n^{m+1}$ ,  $C^{m+1}$ ,  $E_n^{m+1}$ ,  $H^{m+1}$ ,  $A^{m+1}$  (см. (16), (18), (23), (25)) и повторить весь алгоритм для получения следующего  $(m+2)$ -го приближения решения и т. д., пока итерационный процесс не сойдется с требуемой точностью.

Таким образом, соотношения (8) с учетом равенств (25), (23), (18), (16), (7) характеризуют в матричной форме определяющие уравнения упругопластического поведения (в рамках деформационной теории) слоистого металлокомпозита регулярной структуры при реализации метода последовательных приближений.

**З а м е ч а н и е.** На основе соотношений (12), (13) (записывая их для компонентов векторов  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\sigma_n$ ,  $\varepsilon_n$ ) с учетом равенств (9), соответствий (2), условия нормировки (1) и допущения 3 получим общеизвестные соотношения для слоистой среды регулярной структуры [7; 18]:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{(n)}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^{(n)}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^{(n)}, \quad \sigma_{33} = \sigma_{33}^{(n)}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{13}^{(n)}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^{(n)} \quad (1 \leq n \leq N), \quad (26)$$

связывающие между собой некоторые компоненты тензора средних деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и тензора средних напряжений  $\sigma_{l3}$  в композиции с компонентами соответствующих тензоров  $\varepsilon_{ij}^{(n)}$ ,  $\sigma_{l3}^{(n)}$  ( $i, j = 1, 2, l = \overline{1, 3}, 1 \leq n \leq N$ ) в  $n$ -ом слое. Применение этих равенств в явном виде (26) приводит на каждой итерации к общеизвестным структурным соотношениям “эффективных жесткостей” слоистого пакета регулярной структуры [7; 18], которые в конечном итоге совпадают с компонентами матрицы  $A^m$  (см. (25)), но запись которых в явном виде приводит к громоздким соотношениям [21]. В неявном виде соотношения (26) используются в настоящем исследовании при формировании матриц  $B_n^m, C^m$  в (15) (см. (16)), а также в равенстве (20).

**Заключение.** Предложенная структурная модель позволяет строить в итерационной форме определяющие соотношения нелинейно-упругого или упругопластического деформирования слоистых металлокомпозитов регулярной структуры, состоящих из изотропных фазовых материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-90405-Укр\_а) и Президиума СО РАН (Постановление № 10 от 15.01.09, номер проекта 115).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Трыков, Ю. П. Остаточные напряжения в слоистых композитах / Ю. П. Трыков, Е. П. Покатаев, В. Г. Шморгун, А. А. Храпов. – М. : Metallurgizdat, 2010. – 240 с.
- [2] Прикладная теория пластичности : учебное пособие / К. М. Иванов [и др.] ; под ред. К. М. Иванова. – СПб. : Политехника, 2009. – 375 с.
- [3] Каримбаев, Т. Д. Математические модели нелинейного деформирования однонаправленно-армированных композиционных материалов / Т. Д. Каримбаев, Б. М. Мыктыбеков, И. М. Панова // Труды ЦИАМ. – М. : Изд-во ЦИАМ, 2005. – № 1334. – 160 с.
- [4] Немировский, Ю. В. Об упруго-пластическом поведении армированного слоя / Ю. В. Немировский // ПМТФ. – 1969. – № 6. – С. 81–89.
- [5] Немировский, Ю. В. Структурная модель механики металлокомпозитов / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Проблемы и достижения прикладной математики и механики: к 70-летию академика В. М. Фомина : сб. науч. тр. – Новосибирск : Параллель, 2010. – С. 98–103.
- [6] Nemirovsky, Yu. V. Yield surfaces for reinforced concrete Axis-symmetrical plates and shells / Yu. V. Nemirovsky // Archiwum inżynierii ladowej. – 1974. – Vol. XX. – No. 4. – P. 575–590.
- [7] Композиционные материалы: справочник / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др. ; под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М. : Машиностроение, 1990. – 512 с.
- [8] Малмейстер, А. К. Сопротивление полимерных и композитных материалов / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. – Рига : Зинатне, 1980. – 571 с.



- [9] *Ерхов, М. И.* Теория идеально пластических тел и конструкций / М. И. Ерхов. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
- [10] *Малинин, Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М. : Машиностроение, 1968. – 400 с.
- [11] *Ильюшин, А. А.* Труды. Т. 3. Теория термовязкоупругости / А. А. Ильюшин / составители: Е. А. Ильюшина, В. Г. Тунгускова. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 288 с.
- [12] *Композиционные материалы : справочник / под ред. Д. М. Карпиноса.* – Киев : Наукова думка, 1985. – 592 с.
- [13] *Васильев, В. В.* Механика конструкций из композитных материалов / В. В. Васильев. – М. : Машиностроение, 1988. – 269 с.
- [14] *Андреев, А. Н.* Многослойные анизотропные оболочки и пластины: изгиб, устойчивость, колебания / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский. – Новосибирск : Наука, 2001. – 288 с.
- [15] *Пикуль, В. В.* Механика оболочек / В. В. Пикуль. – Владивосток : Дальнаука, 2009. – 536 с.
- [16] *Абросимов, Н. А.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н. А. Абросимов, В. Г. Баженов. – Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
- [17] *Карпов, В. В.* Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения : в 2 ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения / В. В. Карпов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 288 с.
- [18] *Пространственно-армированные композиционные материалы : справочник / Ю. М. Тарнопольский, И. Г. Жигун, В. А. Поляков.* – М. : Машиностроение, 1987. – 224 с.
- [19] *Никитенко, А. Ф.* Ползучесть и длительная прочность металлических материалов / А. Ф. Никитенко. – Новосибирск : НГАСУ, 1997. – 278 с.
- [20] *Арутюнян, Р. А.* Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов / Р. А. Арутюнян. – СПб. : Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2004. – 252 с.
- [21] *Немировский, Ю. В.* Определение эффективных термомеханических характеристик слоистого композита регулярной структуры в несимметричной теории упругости / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45. – № 11. – С. 71–79.

*Янковский Андрей Петрович,*

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры строительной механики Сибирского государственного университета путей сообщения, ведущий научный сотрудник лаборатории физики быстропротекающих процессов Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск*

*e-mail: ivlev21@mail.ru*

A. P. Yankovskii

**MODELING OF THE ELASTIC-PLASTIC BENDING OF METAL-COMPOSITE LAYERED PLATES OF REGULAR STRUCTURE. 1. STRUCTURAL MODEL**

*Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics the SB RAS*

**Abstract.** On the basis of the defining relationships of deformation plasticity theory the iteration model describing elastoplastic bending of metal-composite layered plates of regular structure is constructed.

**Keywords:** layered metal-composite, regular structure, structural theory, elastoplastic deformation, defining relationships.

**REFERENCES**

- [1] *Trykov, Y. P.* Residual stresses in laminated composites / Y. P. Trykov, E. P. Pokotaev, V. G. Shmorgun, A. A. Hrapov. – M. : Metallurg Publ., 2010. – 240 p.
- [2] *Applied Theory of Plasticity: Tutorial* / K. M. Ivanov [etc.] ; edited of K. M. Ivanov. – SPb. : Politehnika Publ., 2009. – 375 p.
- [3] *Karimbaev, T. D.* Mathematical models of nonlinear deformation of unidirectionally-reinforced composite materials / T. D. Karimbaev, B. M. Myktybekov, I. M. Panova // Proceedings CIAM. - M. : The Publishing of CIAM, 2005. – No. 1334. – 160 p.
- [4] *Nemirovskiy, Yu. V.* About elastic-plastic behavior of reinforced layer / Yu. V. Nemirovskiy // PMTF. – 1969. – No. 6. – P. 81–89.
- [5] *Nemirovskiy, Yu. V.* Structural model of the mechanics metal-composites / Yu. V. Nemirovskiy, A. P. Yankovskiy // Challenges and achievements of Applied Mathematics and Mechanics: the 70th anniversary of academician V. M. Fomin: collection of scientific papers. - Novosibirsk: Parallel, 2010. - P. 98-103.
- [6] *Nemirovsky, Yu. V.* Yield surfaces for reinforced concrete Axis-symmetrical plates and shells / Yu. V. Nemirovsky // Archiwum inżynierii ladowej. – 1974. – Vol. XX. – No. 4. – P. 575–590.
- [7] *Composite materials: Directory* / V. V. Vasilyev, V. D. Protasov, V. V. Bolotin etc. ; Edited V. V. Vasilyev, Yu. M. Tarnopolskiy. – M. : Mashinostroenie, 1990. – 512 p.
- [8] *Malmeyer, A. K.* Resistance of polymeric and composite materials / A. K. Malmeyer, V. P. Tamuzh, G. A. Teters. - Riga : Zinatne, 1980. - 571 p.
- [9] *Erhov, M. I.* The theory of perfectly plastic solids and structures / M. I. Erhov. – M. : Nauka, 1978. – 352 p.
- [10] *Malinin, N. N.* Applied Theory of Plasticity and Creep / N. N. Malinin. – M. : Mashinostroenie, 1968. – 400 p.
- [11] *Ilyushin, A. A.* Proceedings. Vol. 3. The theory of therm-visco elasticity / A. A. Ilyushin / Compilers: E. A. Ilyushina, V. G. Tunguskova. – M. : FIZMATLIT, 2007. – 288 p.
- [12] *Composite materials: Directory* / Edited of D. M. Karpinos. – Kiev : Naukova dumka, 1985. – 592 p.
- [13] *Vasilyev, V. V.* Mechanic constructions of Composite materials / V. V. Vasilyev. – M. : Mashinostroenie, 1988. – 269 p.
- [14] *Andreev, A. N.* Multilayered anisotropic shells and plates: Bend, Sustainability, Oscillations / A. N. Andreev, Yu. V. Nemirovskiy. - Novosibirsk: Nauka, 2001. – 288 p.
- [15] *Pikul, V. V.* Mechanic of shells / V. V. Pikul. – Vladivostok : Dalnauka, 2009. – 536 p.
- [16] *Abrosimov, N. A.* Nonlinear problems of the dynamics of composite constructions / N. A. Abrosimov, V. G. Bazhenov. – N. Novgorod : The Publishing house of NNGU, 2002. – 400 p.

[17] *Karpov, V. V.* Strength and stability of reinforced shells of revolution. Two parts. Part number 1. Models and algorithms for the study of strength and stability of reinforced shells of revolution / V. V. Karpov. – M. : FIZMATLIT, 2010. – 288 p.

[18] *Space-reinforced composite materials: Directory* / Yu. M. Tarnopolskiy, I. G. Zhigun, V. A. Polyakov. – M. : Mashinostroenie, 1987. – 224 p.

[19] *Nikitenko, A. F.* Creep and rupture strength metallic materials / A. F. Nikitenko. – Novosibirsk : NGASU, 1997. – 278 p.

[20] *Arutyunyan, R. A.* Problem of strain aging and long-term damage in the mechanics of materials / R. A. Arutyunyan. – SPb. : The Publishing House of S.-Pb. University, 2004. – 252 p.

[21] *Nemirovskiy, Yu. V.* Determination of the effective thermomechanical properties of layered composite regular structure in asymmetric theory of elasticity / Yu. V. Nemirovskiy, A. P. Yankovskiy // Applied mechanics. – 2009. – Vol. 45. – No. 11. – P. 71–79.

*Yankovskii Andrey Petrovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of construction mechanics, Leading Researcher associate of laboratory "Physics of fast-proceeding processes" Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics the SB RAS, Novosibirsk*

М. М. Алиев, С. В. Шафиева, Н. Г. Каримова

## КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ РАЗНОПРОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ВСЕСТОРОННЕГО ДАВЛЕНИЯ

*Альметьевский государственный нефтяной институт*

**Аннотация.** В работе предлагаются новые критерии разрушения для разнопрочных материалов. Критерии получены на основе разложения в степенной ряд экспоненциальной зависимости между первым инвариантом тензора и вторым инвариантом девиатора тензора напряжений. Характеристики прочности, входящие в критерии, определяются из двух простых испытаний на одноосное растяжение и сжатие. Произведено сравнение предложенных критериев с подобными критериями и результатами экспериментов.

**Ключевые слова:** разнопрочные материалы, критерии прочности и разрушения, тензор напряжений, полимеры, горные породы.

УДК: 539.4

### **Введение**

Разнопрочными являются материалы, различно сопротивляющиеся растяжению и сжатию. К таким материалам относятся как искусственно созданные композиты, керамика, графиты, некоторые виды металлов, так и природные материалы, например, горные породы.

Для таких материалов наибольшее распространение получил критерий прочности О. Мора и его обобщения, а также критерий Мизеса–Надаи–Шлейхера.

Плоская задача теории предельного равновесия впервые была обобщена В. В. Соколовским [1] на случай криволинейной зависимости между сопротивлением сдвигу и нормальным напряжением. Для случая аппроксимации этой зависимости синусоидой и циклоидой было получено разрешающее уравнение плоской деформации пластичного материала.

Многочисленные исследования песков [2] показали, что угол внутреннего трения не является постоянным, а меняется в зависимости от напряженного состояния, причем криволинейность графика сдвига наиболее заметна в диапазоне малых давлений. Здесь предложена параболическая зависимость между касательным и нормальным напряжениями.

В работе [3] зависимость изменения угла внутреннего трения от давления принята в виде логарифмической кривой.

Согласно исследованиям зависимость между вторым инвариантом девиатора тензора напряжений  $J_2$  и первым инвариантом тензора напряжений  $I_1$  имеет нелинейную форму, а при большой интенсивности среднего давления асимптотически приближается к прямой, параллельной к гидростатической оси.

### **Критерии прочности для разнопрочных материалов**

Основываясь на результатах экспериментов в сложных напряженных состояниях, Х. Альтенбах и К. Туштев предложили принять форму поверхности прочности полимеров, работающих в условиях высокого давления, в экспоненциальном виде [4]

$$\eta + (\eta + k) \exp\left(\frac{\xi}{\xi_0} - 1\right) - k = 0, \quad (1)$$

где  $k$  и  $\xi_0$  – постоянные материала;

$\eta = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$  – полярная координата в девиаторной плоскости;  $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  – длина гидростатической оси, соответствующей направлению  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ;  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  – главные напряжения.

Согласно [1] связь между  $\eta$  и  $\xi$  представим в виде синусоидальной зависимости

$$\eta = A \sin\left(\frac{B - \xi}{A}\right), \quad (2)$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные, зависящие от характеристик прочности материала.

Представив (2) в виде

$$\frac{B - \xi}{A} = \arcsin \frac{\eta}{A} \quad (3)$$

и разложив в ряд Тейлора около некоторой точки, получим

$$B - \xi = \eta + \frac{\eta^3}{6A^2} + \frac{3\eta^5}{40A^4} + \dots$$

Отсюда, оставляя два члена полинома, будем иметь выражение критерия прочности в виде

$$\eta^3 + C(\eta + \xi) = D. \quad (4)$$

Критерий (4) содержит два неизвестных параметра, которые могут быть определены из двух простых испытаний на одноосное растяжение и на одноосное сжатие. Таким образом

$$C = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}(\sigma_c^3 - \sigma_p^3)}{(\sqrt{2} + 1)\sigma_p - (\sqrt{2} - 1)\sigma_c} = 6A^2;$$

$$D = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\sigma_p^3 + \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3}}C\sigma_p = 6A^2B,$$

где  $\sigma_p$ ,  $\sigma_c$  – пределы прочности материала при одноосном растяжении и сжатии соответственно.

Принимая из ряда три члена полинома, критерий прочности приводим к виду

$$\eta^5 + \eta^3 C_1 + C_2(\eta + \xi) = D_1, \quad (5)$$

где  $C_2 = 40A^2$ ;  $D_1 = 40A^4B$ ;  $C_1 = \frac{20}{3}A^2$ .

Входящие в (5) постоянные связаны с  $C$  и  $D$  следующими зависимостями:

$$C_1 = \frac{10}{9}C; C_2 = \frac{20}{3}C; D_1 = \frac{20}{3}D.$$

Рассмотрим зависимость между  $\eta$  и  $\xi$  в виде экспоненциальной функции

$$B_1 - \xi = A_1 \left( e^{\frac{\eta}{A_1}} - 1 \right).$$

Разложение функции  $e^{\frac{\eta}{A_1}} - 1$  в ряд Тейлора дает полинома вида

$$B_1 - \xi = \eta + \frac{\eta^2}{2A_1} + \frac{\eta^3}{6A_1^2} + \dots \quad (6)$$

Взяв в рассмотрение первые два члена полинома (6), получим квадратичный вариант критерия прочности

$$\eta^2 + C_3(\eta + \xi) = D_2. \quad (7)$$

В этом случае при тех же испытаниях получим

$$C_3 = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(\sigma_c^2 - \sigma_p^2)}{(\sqrt{2} + 1)\sigma_p - (\sqrt{2} - 1)\sigma_c} = 2A_1;$$

$$D_2 = \frac{2}{3}\sigma_p^2 + \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3}}\right)C_3\sigma_p = 2A_1B_1.$$

При использовании первых трех членов полинома получим вариант критерия в виде

$$\eta^3 + z\sqrt{C_4}\eta^2 + C_4(\eta + \xi) = D_3. \quad (8)$$

Здесь

$$C_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \frac{m_3}{m_1} - \frac{m_3}{m_1}} = 6A_1^2;$$

$$D_3 = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\sigma_p^3 + \frac{2}{3}z\sqrt{C_4}\sigma_p^2 + \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3}}\right)C_4\sigma_p = 6A_1^2B_1,$$

где  $m_1 = \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3}}\right)\sigma_p - \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3}}\right)\sigma_c$ ;  $m_2 = \frac{2}{3}z(\sigma_p^2 - \sigma_c^2)$ ;  $m_3 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(\sigma_p^3 - \sigma_c^3)$ ;  $z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ .

Рассмотрим возможность применения критерия (4) для горных пород, различно сопротивляющихся на растяжение и сжатие. Критерий (4) в координатах  $I_1 - \sqrt{J_2}$  будет иметь выражение

$$\sqrt{J_2}^3 + C_5(\sqrt{J_2} + I_1) = D_4, \quad (9)$$

где  $\sqrt{J_2} = \frac{\eta}{\sqrt{2}}$ ;  $I_1 = \sqrt{3}\xi$ .

При испытаниях на растяжение и сжатие будем иметь

$$C_5 = \frac{\sigma_c^3 - \sigma_p^3}{3\sqrt{3}(b_1\sigma_p - b_2\sigma_c)}; \quad D_4 = \frac{1}{3\sqrt{3}}\sigma_p^3 + b_1C_5\sigma_p,$$

где  $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + 1$ ;  $b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} - 1$ .

Критерий (7) в координатах  $I_1 - \sqrt{J_2}$  будет иметь выражение

$$J_2 + C_6(\sqrt{J_2} + I_1) = D_5. \quad (10)$$

Здесь  $C_6 = \frac{\sigma_c^2 - \sigma_p^2}{3(b_1\sigma_p - b_2\sigma_c)}$ ;  $D_5 = \frac{1}{3}\sigma_p^2 + b_1C_6\sigma_p$ .

При отбрасывании члена  $\sqrt{J_2}$  критерий прочности (10) является критерием П. П. Баландина [5].

Используя первые три члена полинома (6), из критерия (8) получим

$$\sqrt{J_2}^3 + z\sqrt{C_7}J_2 + C_7(\sqrt{J_2} + I_1) = D_6. \tag{11}$$

В этом случае

$$C_7 = \frac{1}{2} \left( \frac{m_5}{m_4} \right)^2 - \frac{m_5}{m_4} \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{m_5}{m_4} \right)^2 - \frac{m_6}{m_4} - \frac{m_6}{m_4}};$$

$$D_6 = \frac{1}{3\sqrt{3}}\sigma_p^3 + \frac{\sqrt{C_7}}{\sqrt{6}}\sigma_p^2 + b_1C_7\sigma_p;$$

$$m_4 = b_1\sigma_p - b_2\sigma_c; \quad m_5 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_p^2 - \sigma_c^2); \quad m_6 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(\sigma_p^3 - \sigma_c^3).$$

**Сравнение критериев прочности с результатами экспериментов**

Проведем сравнение предложенных критериев (4), (7) и (8) с критерием Альтенбаха–Туштева [4] и экспериментальными данными.

В координатной системе  $\xi - \eta$  (результаты экспериментальных данных в [4] приведены в этих координатах) строим кривые для полиэфирного связующего с характеристиками прочности  $\sigma_p = 47,72$  МПа,  $\sigma_c = 62,66$  МПа (рис. 1) и для эпоксидного связующего с характеристиками прочности  $\sigma_p = 83$  МПа,  $\sigma_c = 126$  МПа [4](рис. 2).

Как видно из рисунков, при средних всесторонних давлениях ( $I_1 = 300$  МПа) совпадение экспериментальных данных имеет место для всех трех критериев, а с увеличением  $I_1$  результаты расходятся.

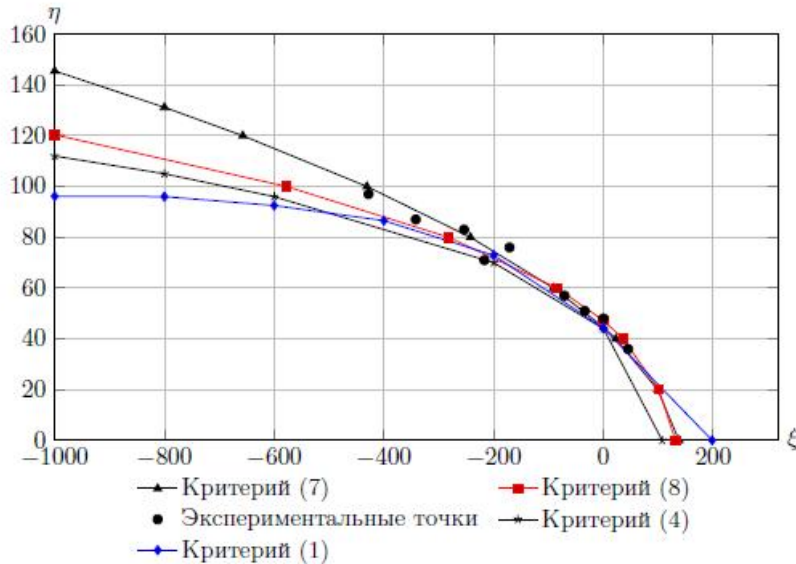


Рис. 1. Предельные кривые для полиэфирного связующего

Проведем сравнение предложенных критериев (9), (10), (11) с критерием  $MSDP_u$ , предложенным в [6] и экспериментальными данными.

В координатной системе  $I_1 - \sqrt{J_2}$  построим кривые для каменной соли с характеристиками прочности  $\sigma_p = 1,5$  МПа,  $\sigma_c = 15$  МПа [6] и сравним поверхности критериев с экспериментальными данными (рис. 3).

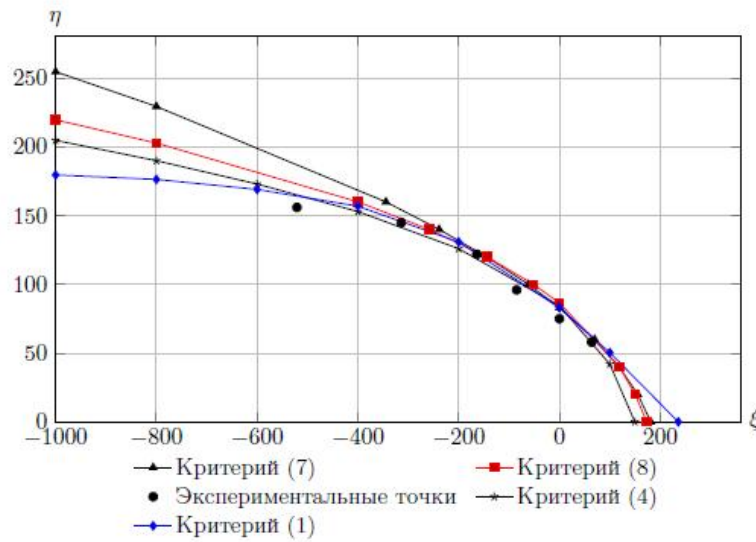


Рис. 2. Предельные кривые для эпоксидного связующего

С целью сравнения было рассчитано среднеквадратичное отклонение  $\Delta$  рассмотренных критериев по отношению к экспериментальным данным. В итоге получено: с большей точностью описывает экспериментальные данные критерий разрушения (11) (отклонение  $\Delta=15,43\%$ ), затем идет критерий  $MSDP_u$  (отклонение  $\Delta=17,62\%$ ) и критерий разрушения (10) (отклонение  $\Delta=19,57\%$ ). Критерий (9) имеет чрезмерно большое отклонение.

То же самое проделано для антропогенной (искусственной) соли с характеристиками прочности  $\sigma_p=3$  МПа,  $\sigma_c=37$  МПа [6] (рис. 4).

Для этого материала с большей точностью описывает экспериментальные данные критерий разрушения (11) (отклонение  $\Delta=2,39\%$ ). Далее идет критерий разрушения (10) (отклонение  $\Delta=16,09\%$ ), затем критерий  $MSDP_u$  (отклонение  $\Delta=16,8\%$ ).

Результаты сравнения показывают, что критерии (10), (11) и  $MSDP_u$  удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными для каменной и искусственной соли. В отличие от критериев (10) и (11), в которых используются только два параметра  $\sigma_p$  и  $\sigma_c$ , в критерии разрушения  $MSDP_u$  присутствует много различных параметров, которые должны определяться из экспериментов. При этом критерий (11) имеет наилучший результат совпадения с данными экспериментов. Кубический критерий (9) не может быть применен как критерий разрушения каменной и искусственной соли.



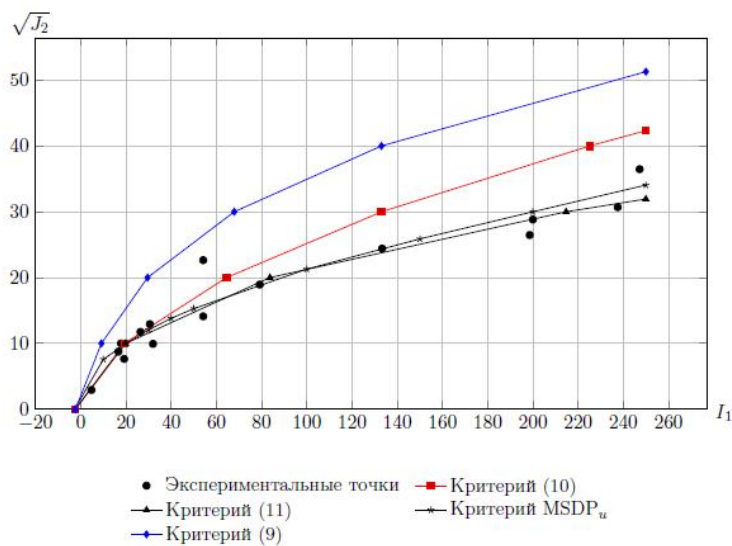


Рис. 3. Предельные кривые для каменной соли

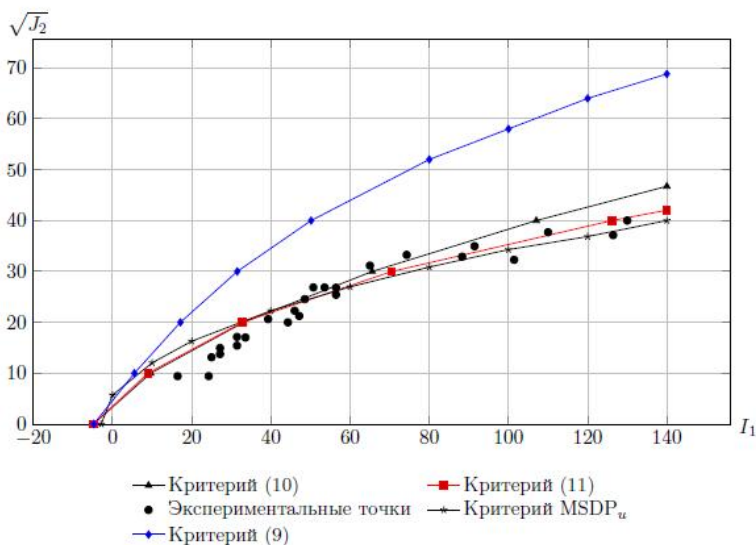


Рис. 4. Предельные кривые для искусственной соли

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
- [2] Березанцев, В. Г. Влияние криволинейности огибающей предельных кругов на несущую способность оснований / В. Г. Березанцев, И. В. Ковалев // Прочность и пластичность. – М. : Наука, 1971. – С. 397–402.
- [3] Ярошенко, В. А. Материалы по проектированию сложных фундаментов и оснований и по производству изысканий / В. А. Ярошенко // Фундаментпроект. – 1964. – № 3.

[4] *Альтенбах, Х.* Новый критерий статической прочности изотропных полимеров / Х. Альтенбах, К. Туштев // Механика композитных материалов. – 2001. – Т. 37. – № 5/6. – С. 732–739.

[5] *Баландин, П. П.* К вопросу о гипотезах прочности / П. П. Баландин // Вестник инженеров и техников. – 1937. – № 1. – С. 19–24.

[6] *Aubertin, M.* A general plasticity and failure criterion for materials of variable porosity / M. Aubertin, L. Li, R. Simon, B. Bussiere. – EPM-RT-2003-11.

*Алиев Мехрали Мирзали оглы,*

*доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой "Транспорт и хранение нефти и газа", Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск*

*e-mail: mmaliev@rambler.ru*

*Шафиева Светлана Владимировна,*

*старший преподаватель кафедры "Прикладная механика", Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск*

*e-mail: shafieva\_sv@mail.ru*

*Каримова Наталья Геннадьевна,*

*кандидат технических наук, доцент кафедры "Прикладная механика", Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск*

*e-mail: karimovang@mail.ru*

M. M. Aliev, S. V. Shafieva, N. G. Karimova

## CRITERIA FOR STRENGTH AND FRACTURE OF MATERIALS DIFFERENT STRENGTHS WITH THE INFLUENCE OF HYDROSTATIC PRESSURE

*Almetyevsk State Oil Institute*

**Abstract.** In this paper we propose new criteria for the destruction of different strengths of materials. The criteria are derived from the power series expansion of the exponential relationship between the first and second invariant of the tensor invariant of the deviatoric stress tensor. Strength characteristics included in the criteria defined by two simple tests for uniaxial tension and compression. A comparison of the proposed criteria with similar criteria and experimental results

**Keywords:** different strengths material, strength and failure criteria, stress tensor, polymers, rocks

### REFERENCES

- [1] Sokolovskij, V. V. The theory of plasticity / V. V. Sokolovskij. – M.: Higher school, 1969. – 608 p.
- [2] Bereancev, V. G. Influence curvilinear envelope limit circle bearing capacity grounds / V. G. Bereancev, I. V. Kovalev // Strength and ductility. – M.: Science, 1971. – P. 397–402.
- [3] Yaroshenko, V. A. Materials for the design of complex foundations and bases for the production of research / V. A. Yaroshenko // Fundamentproject. – 1964.– №. 3.
- [4] Альтенбах, X. A new criterion of static strength of isotropic polymers / X. Альтенбах, К. Тушрев // Mechanics of Composite Materials. – 2001. – Vol. 37. – №. 5/6. – P. 732–739.
- [5] Balandin, P. P. ). On the strength of the hypotheses / P. P. Balandin // Vestnik of engineers and technicians. – 1937. – №. 1. – P. 19–24.
- [6] Aubertin, M. A general plasticity and failure criterion for materials of variable porosity / M. Aubertin, L. Li, R. Simon, B. Bussiere. – EPM-RT-2003-11.

*Aliev Mekhrali Mirzali ogly*

*Dr. Tech. Sci., Professor, Head of the Department of Transportation and storage of oil and gas, Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk*

*Shafieva Svetlana Vladimirovna*

*Senior Lecturer, Department of Applied Mechanics, Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk*

*Karimova Natalia Gennadjevna*

*Cand. Tech. Sci., Assoc. Professor, Department of Applied Mechanics, Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk*

**ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ  
ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО  
УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ**

*Воронежский государственный университет им. В. И. Ленина*

**Аннотация.** На примере нелинейного пространственного уравнения Кадомцева–Петвиашвили описан алгоритм построения системы ортогональных финитных функций для решения широкого класса нелинейных начальных задач с частными производными. Результат проектирования на соответствующее конечномерное подпространство – система обыкновенных дифференциальных уравнений с разреженной матрицей.

**Ключевые слова:** пространственное уравнение Кадомцева–Петвиашвили, метод Галеркина, ортогональные финитные функции, условие Стренга–Фикса.

УДК: 519.63

**1. Введение.**

Предлагается непосредственное построение двух систем ортогональных финитных функций вида  $\left\{f\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\right\}_{i=0}^M$ ,  $\left\{\varphi\left(\frac{y-y_j}{h}\right)\right\}_{j=-\infty}^{\infty}$  – сдвигов функций  $f(x/h)$  и  $\varphi(y/h)$ , специально адаптированных для пространственного уравнения Кадомцева–Петвиашвили так, что после проектирования на соответствующее тестовое пространство матрица Грамма имеет разреженную структуру – ненулевые только слагаемые на двух ее диагоналях – над и под главной диагональю. В этой статье, вообще говоря, показана идея построения систем ортогональных финитных функций (ОФФ) для решения достаточно широкого класса нелинейных многомерных задач с частными производными. Описанные здесь конструкции ОФФ имеют два существенных отличия от классических ОФФ В. Л. Леонтьева. Построенные функции  $f(x)$ ,  $\varphi(y)$  удовлетворяют не одному, а нескольким условиям ортогональности, благодаря чему при проектировании на тестовое пространство исходного нелинейного уравнения нейтрализуется нелинейность  $(u^2)''_{xx}$ . Платой за несколько дополнительных условий ортогональности выступает замена точного условия Стренга–Фикса на приближенное.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим пространственное уравнение Кадомцева–Петвиашвили:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - a \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = b \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) + H(x, y, z, t), \quad (1)$$

где  $(x, y, z, t) \in D = [0, X] \times (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$ ;  $H$  – кусочно непрерывна по  $t$ , дважды непрерывно дифференцируема по  $x$  и один раз – по  $y$  и  $z$ .

Функция  $u(x, y, z, t)$  удовлетворяет начальному условию:

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z), \quad (2)$$

где  $u_0$  – непрерывно дифференцируема по всем переменным.

**3. Описание метода построения систем ортогональных финитных функций для приближенного решения нелинейного уравнения Кадомцева–Петвиашвили.** Пусть  $h$  фиксированное достаточно малое число – шаг равномерной сетки. Определим функции  $f(x)$  и  $\varphi(y)$  с носителями  $[-1, 1]$ , порождающие сдвиги  $\left\{f\left(\frac{x-x_m}{h}\right)\right\}_{m=0}^M$ ,  $\left\{\varphi\left(\frac{y-y_n}{h}\right)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ , на основе которых методом конечных элементов будет строиться приближённое решение задачи (1)-(2). В зависимости от конкретной физической задачи сетки  $x_m, y_n, z_p$  могут иметь разные шаги  $h_1, h_2, h_3$ . Построенные ОФФ  $f$  и  $\varphi$  будут теми же. Пусть

$$f(x) = (a_l x^{2l} + a_{l-1} x^{2l-2} + \dots + a_1 x^2 + 1)up(x). \quad (3)$$

Здесь  $up(x)$  – атомарная функция В. Л. Рвачева [6]. Отметим, что  $up(x)$  – четная, неотрицательная, бесконечно дифференцируемая функция с носителем  $[-1, 1]$ . Ее график имеет характерный колоколообразный вид. Справедлива формула  $up'(x) = 2up(2x-1) - 2up(2x+1)$ . В [6] приведены явные формулы значений атомарной функции в двоично-рациональных точках отрезка  $[0, 1]$ . Неизвестные коэффициенты  $a_1, \dots, a_l$  определим далее из приближенных условий Стренга–Фикса и условий ортогональности. Пусть функция  $f$  удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\int_0^1 f(x)f(x-1)dx = 0, \quad (4)$$

$$\int_0^1 f(x-1)f''(x-1)f'(x)dx = 0, \quad (5)$$

$$\int_0^1 f(x-1)f''(x)f'(x)dx = 0, \quad (6)$$

$$\int_0^1 f(x)f''(x-1)f'(x)dx = 0, \quad (7)$$

$$\int_0^1 f'(x-1)f'(x-1)f'(x)dx = 0. \quad (8)$$

Известно ([5], с. 153), что если функция  $f(x)$  с носителем  $[-1, 1]$  принадлежит  $W_2^{p+1}$ , то эквивалентны следующие условия:

1. Если  $|\alpha| \leq p$ , то

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^\alpha f(t-j)$$

полином от  $t_1, \dots, t_k$  с главным членом  $ct^\alpha$ ,  $c \neq 0$ .

2. Для каждой функции  $u(x) \in W_2^{p+1}(\mathbb{R})$  существуют такие коэффициенты  $w_j$ , что при  $h \rightarrow 0+$  выполнены неравенства

$$\|u - \sum_j w_j f_j\|_{W_2^s} \leq c_s h^{p+1-s} \|u\|_{W_2^{p+1}}, \quad \sum_j |w_j|^2 \leq c \|u\|_{L_2}^2, \quad 0 \leq s \leq p,$$

где  $f_j = f\left(\frac{x-x_j}{h}\right)$  – сдвиги функции  $f\left(\frac{x}{h}\right)$ , постоянные  $c_s$  и  $c$  не зависят от  $u(x)$  и от  $h$ . Показатель  $p+1-s$  является наилучшим для рассматриваемых классов  $W_2^s$  и  $W_2^{p+1}$ .

То есть для точности порядка  $h$  в  $L_2(\mathbb{R})$  необходимо и достаточно условие разбиения единицы:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(x-j) \equiv 1.$$

В конструкции (3) условие  $\forall x \in [0, 1] : f(x) + f(x-1) \equiv 1$ , вообще говоря, невыполнимо.

Потребуем, чтобы финитная функция  $f(x)$  удовлетворяла неточному условию типа Стренга–Фикса на отрезке  $[0, 1]$ :

$$f(x) + f(x-1) \approx 1 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Пусть

$$f(x^i) + f(x^i - 1) = 1, \quad i = 1, \dots, q, \quad (9)$$

где  $x^1, \dots, x^q$  – сетка (необязательно равномерная) на отрезке  $[0, 1]$ .

Итак, объединяя условия ортогональности (4)–(8) и приближенное условие Стренга–Фикса (9), получим алгебраическую систему уравнений для чисел  $a_1, \dots, a_l$ . Число  $l$  в (3) нужно положить равным  $5 + q$ . Численно решая полученную систему, в которой только 5 уравнений нелинейные (одно квадратичное и четыре кубических), находим неизвестные коэффициенты  $a_1, \dots, a_l$ . После чего нормируем производную найденной функции:

$$\|f'(x)\|_{L_2} = 1 \quad (10)$$

и введем обозначения:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \alpha, \quad \int_0^1 f(x-1)f'(x) dx = \beta, \quad \int_0^1 f''(x-1)f''(x) dx = \delta, \quad \int_{-1}^1 x f'(x) dx = \gamma. \quad (11)$$

Функция  $f(x)$  построена (с точностью до знака).

Пусть

$$\varphi(y) = (b_l y^s + b_{s-1} y^{s-1} + \dots + b_1 y + 1) u p(y). \quad (12)$$

Неизвестные коэффициенты  $b_1, \dots, b_s$  определим далее из неточных условий Стренга–Фикса и условий ортогональности. Пусть выполнены следующие соотношения:

$$\int_0^1 \varphi(y)\varphi(y-1) dy = 0, \quad (13)$$

$$\int_0^1 \varphi''(x-1)\varphi(x) dy = 0. \quad (14)$$

Потребуем, чтобы финитная функция  $\varphi(y)$  удовлетворяла неточному условию Стренга–Фикса:

$$\varphi(y) + \varphi(y-1) \approx 1.$$

То есть

$$\varphi(y^i) + \varphi(y^i - 1) = 1, \quad i = 1, \dots, q, \quad (15)$$

где  $y^1, \dots, y^q$  – сетка (необязательно равномерная) на отрезке  $[0, 1]$ .

Объединяя условия ортогональности (13)–(14) и неточное условие Стренга–Фикса (15), получим алгебраическую систему уравнений для чисел  $b_1, \dots, b_s$ . То есть степень  $s$  в (12) нужно положить равной  $2 + q$ . Численно решая полученную алгебраическую систему, в которой только два уравнения нелинейные (квадратичные), находим неизвестные коэффициенты  $b_1, \dots, b_s$ . Наконец, нормируем найденную функцию:

$$\|\varphi(y)\|_{L_2} = 1 \quad (16)$$

и введем обозначения:

$$\|\varphi'(y)\|_{L_2}^2 = \sigma, \quad \int_{-1}^1 \varphi(y) dy = \lambda. \quad (17)$$

Функция  $\varphi(y)$  построена (с точностью до знака).

#### 4. Сведение исходного нелинейного уравнения к линейной системе ОДУ методом Галеркина на построенных системах функций.

Приближенное решение  $U(x, y, z, t, h)$  задачи (1)-(2) будем искать в виде

$$U = \sum_{mnp} A_{mnp}(t) f\left(\frac{x-x_m}{h}\right) \varphi\left(\frac{y-y_n}{h}\right) \varphi\left(\frac{z-z_p}{h}\right) = \sum_{mnp} A_{mnp} f_m \varphi_n \varphi_p. \quad (18)$$

Подставим приближенное решение (18) в начальное условие (2) и умножим скалярно в смысле  $L_2$  обе части полученного равенства на  $f\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$  ( $i = 0, \dots, M$ ). Затем полученное равенство умножим скалярно на  $\varphi\left(\frac{y-y_j}{h}\right)$  ( $j = -\infty, \dots, \infty$ ). После чего полученное равенство умножим скалярно на  $\varphi\left(\frac{z-z_k}{h}\right)$  ( $k = -\infty, \dots, \infty$ ). Используя (4), (10), (11), (13), (14), (16) и (17), получим

$$\begin{aligned} A_{ijk}(0) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_0(x_i + hx, y_j + hy, z_k + hz) f(x) \varphi(y) \varphi(z) dx dy dz = \\ &= u_0(x_i, y_j, z_k) \alpha \lambda^2 + 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставим (18) в (1) и умножим скалярно в смысле  $L_2$  обе части полученного равенства на  $f'_x\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$  ( $i = 0, \dots, M$ ). Из (5)-(8), (10)-(11) и четности  $f$  следует

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \sum_{np} \frac{d}{dt} A_{inp} \varphi_n \varphi_p - \frac{a\delta}{h^4} \sum_{np} [A_{i-1,np} + A_{i+1,np}] \varphi_n \varphi_p - \\ &-\beta \sum_{np} [A_{i-1,np} - A_{i+1,np}] (\varphi_n'' \varphi_p + \varphi_n \varphi_p'') - h\gamma H'_x(x_i, y, z, t) + O(h^3) = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что именно благодаря соотношениям (5)-(8) обнулилось нелинейное слагаемое  $uu_{xx} + u_x u_x$  исходного уравнения (1).

Теперь умножим скалярно обе части этого равенства на  $\varphi\left(\frac{y-y_j}{h}\right)$  ( $j = -\infty, \dots, \infty$ ). После этого умножим скалярно обе части полученного равенства на  $\frac{1}{h} \varphi\left(\frac{z-z_k}{h}\right)$  ( $k = -\infty, \dots, \infty$ ). Из (13)-(14) и (16)-(17) получим

$$\frac{d}{dt} A_{ijk} = \left(\frac{a\delta}{h^3} - \frac{2\beta\sigma}{h}\right) A_{i-1,jk} + \left(\frac{a\delta}{h^3} + \frac{2\beta\sigma}{h}\right) A_{i+1,jk} - h^2 \gamma \lambda^2 H'_x(x_i, y_j, z_k, t). \quad (20)$$

Для каждой пары индексов  $jk$  ( $j, k = -\infty, \dots, \infty$ ) получилась линейная начальная задача (19)-(20) с двухдиагональной матрицей размерности  $M+1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Галлагер, Р.* Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. – М. : Мир, 1984. – 430 с.
- [2] *Ильин, В. П.* Методы и технологии конечных элементов / В. П. Ильин. – Новосибирск : Изд-во НГУ, 2007. – 369 с.
- [3] *Лаевский, Ю. М.* Метод конечных элементов / Ю. М. Лаевский. – Новосибирск : Изд-во НГУ, 1999. – 165 с.
- [4] *Леонтьев, В. Л.* Ортогональные финитные функции и численные методы / В. Л. Леонтьев. – Ульяновск : Изд-во УлГУ, 2003. – 178 с.
- [5] *Агошков, В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы / В. И. Агошков, Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1981. – 416 с.
- [6] *Рвачев, В. А.* Теория приближений и атомарные функции / В. А. Рвачев, В. А. Рвачев. – М. : Знание, 1978. – 64 с.

Северин Григорий Юрьевич,  
кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, Воронежский государственный университет, г. Воронеж  
e-mail: akg.77@mail.ru



G. Yu. Sewerin

**BUILDING SYSTEMS ORTHOGONAL FINITE FUNCTIONS FOR THE  
NUMERICAL SOLUTION OF NONLINEAR SPATIAL  
KADOMTSEV-PETVIASHVILI**

*Voronezh State University*

**Abstract.** On the example of a nonlinear spatial Kadomtsev-Petviashvili-described algorithm for constructing a system of orthogonal functions with compact support for re-sheniya wide class of nonlinear initial value problems in partial differential equations. Result of projecting the corresponding finite-dimensional space system of ordinary differential equations with sparse matrix.

**Keywords:** spatial Kadomtsev-Petviashvili equation, the Galerkin method, orthogonal finite functions, the Strang-Fix condition.

**REFERENCES**

- [1] *Gallager, R.* The finite element method. Fundamentals / R. Gallager. – M. : Mir, 1984. – 430 p.
- [2] *Il'in, V. P.* The finite element methods and technologies / V. P. Il'in. – Novosibirsk : NSU Publ., 2007. – 369 p.
- [3] *Laevsky, Y. M.* The finite element method / Y. M. Laevsky. – Novosibirsk : NSU Publ., 1999. – 165 c.
- [4] *Leontiev, V. L.* Orthogonal finite functions and numerical methods / V. L. Leontiev. – Ulyanovsk : USU Publ., 2003. – 178 p.
- [5] *Agoshkov, V. I.* Introduction to Projective – Grid Methods / V. I. Agoshkov, G. I. Marchuk. – M. : Nauka, 1981. – 416 p.
- [6] *Rvachev, V. A.* Atomic functions and approximation theory / V. A. Rvachev, V. A. Rvachev. – M. : Znanie, 1978. – 64 p.

*Sewerin Grigory Yurievich*

*Candidate of Phys. & Math., Senior Lecturer, Voronezh State University, Voronezh*

## ЭВОЛЮЦИЯ КРИВЫХ НЕСТАБИЛЬНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА

*Московский энергетический институт (технический университет)*

**Аннотация.** Рассмотрена возможность вырождения связи напряжений с производными напряжений по координатам в плоской задаче теории упругости. Для конкретных зависимостей упругих параметров от координат приведена эволюция кривых, на которых выполняются условия вырождения. Показано, что даже малая неоднородность среды приводит к возможности неустойчивости напряжений.

**Ключевые слова:** неустойчивость, плоская задача теории упругости, неоднородная среда.

УДК: 539.32

Вопросы неустойчивости дифференциальных уравнений, где в качестве переменной являются время и соответствующие прикладные задачи, в том числе и задача о выпучивании сжатого стержня из нелинейного реологического материала, рассмотрены в [1]. Аналогичная постановка задачи о вырождении связи между производными возможна и в пространственных переменных. Здесь будут показаны примеры такого вырождения в плоской задаче теории упругости.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для некоторой изотропной неоднородной среды. Пусть модуль Юнга и коэффициент Пуассона зависят от координат  $\nu = \nu(x, y)$ ,  $E = E(x, y)$ . Функцию напряжений  $F$  введем по формуле  $\sigma_{ij} = \delta_{ij} \nabla^2 F - F_{,xy}$ , где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . Справедливо уравнение [2]:

$$\nabla^2(\gamma \nabla^2 F) = q_{,xx} F_{,yy} - 2q_{,xy} F_{,xy} + q_{,yy} F_{,xx}, \quad (1)$$

где  $q = (1 + \nu)/E$ , и  $\gamma = 1/E$  для плоской деформации,  $\gamma = (1 - \nu^2)/E$  для плоского напряженного состояния.

Запишем систему трех уравнений, первое из которых — уравнение (1), второе получается дифференцированием первого по  $x$ , третье — дифференцированием по  $y$ . Отнесем в левую часть системы величины  $F_{,xx}$ ,  $F_{,xy}$ ,  $F_{,yy}$ , в правую — все остальные слагаемые. Система примет вид

$$A \vec{X} = \vec{B}, \quad (2)$$

где  $\vec{X} = \{F_{,xx}, F_{,xy}, F_{,yy}\} = \{\sigma_{xx}, -\sigma_{xy}, \sigma_{yy}\}$  — вектор напряжений, а вектор правой части  $\vec{B}$  зависит от частных производных третьего, четвертого и пятого порядка от функции напряжений. Элементы несимметричной матрицы  $A$  имеют вид:  $a_{11} = \nabla^2 \gamma - q_{,yy}$ ,  $a_{12} = 2q_{,xy}$ ,  $a_{22} = \nabla^2 \gamma - q_{,xx}$ ,  $a_{2k} = a_{1k,x}$ ,  $a_{3k} = a_{1k,y}$ ,  $k = 1, \dots, 3$ . Равенство нулю определителя системы (2) означает вырождение связи между напряжениями и производными напряжений. В общем случае неоднородности определитель зависит от координат, следовательно, вблизи некоторых кривых, определяемых уравнением  $\det A = 0$ , напряжения могут неограниченно расти, если

на этих кривых задана правая часть системы (2). Рассмотрим случай малой неоднородности. Пусть  $\nu = \nu_0 + f(x, y)$ ,  $E = E_0(1 + h(x, y))$ , где  $\nu_0 = \text{const}$  и  $E_0 = \text{const}$  — упругие характеристики некоторого однородного тела. При этом в области определения добавочные слагаемые, характеризующие неоднородность, будем брать малыми величинами, но не для того, чтобы упростить решение, раскладывая его по малому параметру, а для того, чтобы оценить влияние неучтенной неоднородности. Очевидно, для существенно неоднородных тел искажения напряженного состояния, вызванные этой неоднородностью, будут заметными. Интереснее посмотреть на картину особых точек для напряжений с весьма малыми, меньшими даже чем погрешность измерения упругих констант, возмущениями свойств. Такая неоднородность может быть результатом моделирования композитной среды или являться следствием предварительных упругих или неупругих (после разгрузки) деформаций.

**2. Примеры.** Для получения конкретных результатов и для вывода аналитических зависимостей используем систему компьютерной математики Maple [3]. Уравнение  $\det A = 0$  в общем случае является нелинейной неявной связью  $x$  и  $y$ . В системе Maple для построения таких кривых предусмотрен удобный оператор `implicitplot` из пакета `plots`. Определитель матрицы получаем оператором `Determinant` из пакета `LinearAlgebra`. Вычисления, преобразования и построение кривых занимают существенное компьютерное время, сильно зависящее от точности построения кривых. Этим управляет параметр `numpoints`, значение которого выбиралось около 100000.

Рассмотрим плоскую деформацию и следующие функции:  $E = E_0(1 + bx + cy)$ ,  $\nu = \frac{a \sin x}{1 + y^2} + 0.4$ . Значение  $E_0$  в решение не входит, а коэффициенты  $a, b, c$  назначим малыми величинами так, чтобы в области решения добавочные слагаемые были незначительными:  $a = 0.001$ ,  $b = 0.001$ .

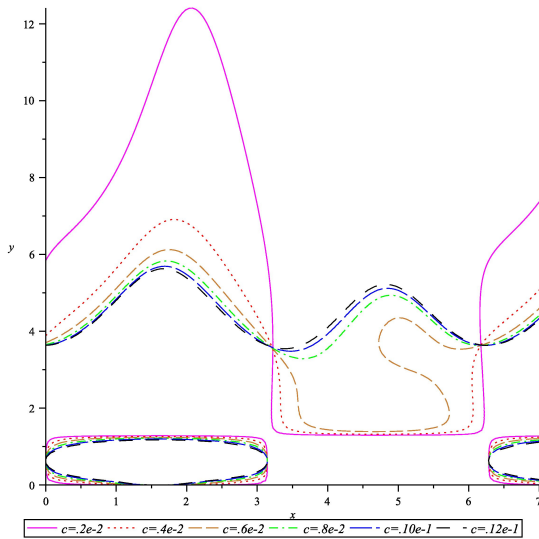


Рис. 1

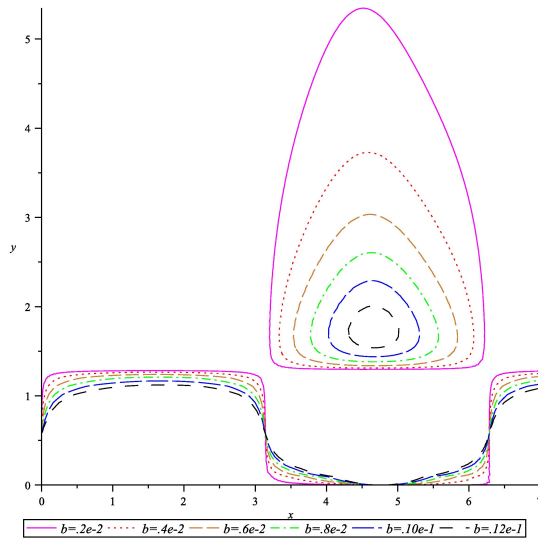


Рис. 2

Эволюция кривых  $\det A = 0$  при изменении одного из параметров  $c = 0.002, \dots, 0.012$  изображена на рис. 1. Аналогично на рис. 2 изображена эволюция кривых при  $a = 0.001$ ,  $c = 0.001$ ,  $b = 0.002, \dots, 0.012$ .

Другой пример. Пусть оба упругих параметра меняются подобным образом:  $E = E_0(1 + ay \sin x)$ ,  $\nu = \nu_0 + ay \sin x$ . Здесь степенью неоднородности управляет один параметр  $a$ . При

$\nu_0 = 1/3$  получаем кривые неустойчивости

$$(ya(8 - 8\sin^2 x + \sin^4 x) - (1 + 2a^2y^2)\sin^3 x + 2\sin x)\sin x = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) распадается на два, одно из которых  $\sin x = 0$  дает вертикальные прямые с периодом  $\pi$ . Очевидно, в силу периодичности закона неоднородности по  $x$ , моделирующего, например, волокнистые структуры, распределение кривых также будет периодичным. На рис. 3 дана эволюция одного периода при изменении параметра  $a$  в пределах  $a = 0.02, \dots, 0.08$ .

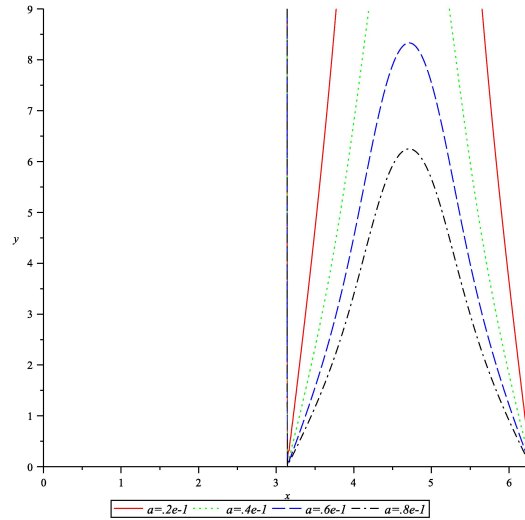


Рис. 3

**3. Выводы.** Кривые неустойчивости в терминологии [1] получены для напряжений в плоской задаче теории упругости на основании известного уравнения для функции напряжений и без каких-либо дополнительных предположений и упрощений. Очевидно, что для однородного упругого тела таких кривых не существует, как и не существует системы (2), правая часть (1) обращается в этом случае в нуль, а в левой напряжений нет, а есть только их производные второго порядка. Приведенные примеры содержат некоторые условные зависимости упругих параметров, возможно, и не отвечающие реальным средам и необходимые только для того, чтобы показать, что даже весьма малые отклонения (меньшие погрешности измерения) от однородности могут давать причудливые кривые, на которых напряжения ведут себя непредсказуемым образом при определенных условиях. Условия же эти являются либо следствием неудачно поставленных граничных условий (заданы не напряжения, а их производные, т. е. правая часть (2)), либо следствием метода численного решения задачи. Последний случай может возникнуть в конечно-разностной схеме, где функции вычисляются через производные. Заметим также, что полученные результаты не зависят от краевых условий задачи, но связаны с областью, в которой эта задача решается (зависимость от  $x, y$ , выбора начала координат, функциональных зависимостей  $\nu = \nu(x, y), E = E(x, y)$ ).

**ЛИТЕРАТУРА**

- [1] *Кирсанов, М. Н.* Точки неустойчивости дифференциального уравнения / М. Н. Кирсанов // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 191–197.
- [2] *Ломакин, В. А.* Теория упругости неоднородных тел / В. А. Ломакин. – М. : Изд-во МГУ, 1976. – 368 с.
- [3] *Кирсанов, М. Н.* Практика программирования в системе Maple / М. Н. Кирсанов. – М. : Издательский дом МЭИ, 2011. – 208 с.

*Кирсанов Михаил Николаевич,*

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики и мехатроники, Московский энергетический институт (технический университет), г. Москва*

*e-mail: mpei2004@yandex.ru*

M. N. Kirsanov

**EVOLUTION CURVES OF INSTABILITY IN A PLANE STRESS PROBLEM OF ELASTICITY THEORY OF AN INHOMOGENEOUS BODY**

*Moscow Power Engineering Institute (Technical University)*

**Abstract.** The possibility of degeneration of the relation of stresses and derivatives of the stresses in the plane problem of the theory elasticity is studied. The evolution of curves on which the conditions degeneration for specific dependencies of the elastic parameters of coordinates is shown. It is shown also that even a small inhomogeneity of the medium leads to possible instability of the stress.

**Keywords:** instability, the plane problem of elasticity theory, inhomogeneous medium.

**REFERENCES**

- [1] *Kirsanov, M. N.* Points of instability of differential equation / M. N. Kirsanov // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line: Mechanics of definable state. – 2010. – No. 2 (8). – P. 191–197.
- [2] *Lomakin, V. A.* Theory of elasticity of inhomogeneous bodies / V. A. Lomakin. – M. : MSU Publ., 1976. – 368 p.
- [3] *Kirsanov, M. N.* Programming practices in the system Maple / M. N. Kirsanov. – M. : MEI Publishing House, 2011. – 208 p.

*Kirsanov, Michail Nikolaevich*

*Dr. Sci. of Phys. & Math., Professor, Department of Theoretical Mechanics and Mechatronics, Moscow Power Engineering Institute (Technical University), Moscow*

А. А. Трещев, Д. А. Ромашин, В. Г. Теличко

## ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ИЗ ОРТОТРОПНОГО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

Тульский государственный университет

**Аннотация.** В рамках работы построены определяющие соотношения для существенно нелинейных материалов, которые характеризуются нелинейной зависимостью интенсивности напряжений от интенсивности деформаций. Построена математическая модель для определения напряженно-деформированного состояния конструкций из таких материалов. Решена модельная задача о поперечном изгибе прямоугольной пластины из углерода AVCO Mod 3a. Представлены отдельные результаты решения указанной задачи.

**Ключевые слова:** разносопротивляемость, упругопластичности, нелинейность, определяющие соотношения, механические характеристики, напряжения, деформации, пластина.

УДК: 539.3; 624.04

В строительстве и других отраслях промышленности в настоящее время получили широкое применение конструкционные материалы, механические свойства которых не соответствуют классическим представлениям об упругопластическом деформировании твердых тел.

Построение математической модели состояния конструкционных материалов, универсально работающей при различных условиях нагружения, представляет собой одно из важнейших направлений механики деформированного твердого тела. Требуется установить взаимно однозначные соотношения между компонентами напряженного и деформированного состояния с указанием системы экспериментов, достаточной для определения констант, входящих в уравнения состояния и характеризующих механические свойства рассматриваемого материала.

Определяющие соотношения для нелинейно-упругих структурно ортотропных тел представим следующим образом:

$$e_{ij} = C_{ijkl} [E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i, \alpha_{qp})] \sigma_{km}; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} C_{kkkk} &= A_{kkkk} [E_{kk}^{\pm}(\varepsilon_i)] + B_{kkkk} [E_{kk}^{\pm}(\varepsilon_i)] \alpha_{kk}; \\ C_{iijj} &= A_{iijj} [E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i)] + B_{iijj} [E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i)] \cdot (\alpha_{ii} + \alpha_{jj}); \\ C_{iiij} &= A_{iiij} [E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i)] + B_{iiij} [E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i)] \cdot (\alpha_{ii} + \sqrt{2} \alpha_{ij}); \\ C_{ijij} &= A_{ijij} [E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i)] + B_{ijij} [E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i)] \sqrt{2} \alpha_{ij}; \\ C_{iijk} &= A_{iijk} [E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i)] + B_{iijk} [E_{jk}^{\pm}(\varepsilon_i)] \cdot (\alpha_{ii} + \sqrt{2} \alpha_{jk}); \\ C_{ijkl} &= A_{ijkl} [E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i)] + B_{ijkl} [E_{jk}^{\pm}(\varepsilon_i)] \sqrt{2} (\alpha_{ij} + \alpha_{km}), \end{aligned}$$

где  $\alpha_{ij} = \sigma_{ij}/S$  – нормированные напряжения;  $S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$  – вектор полного напряжения;  $\sigma_i = \sqrt{3/2} S_{ij} S_{ij}$  – интенсивности напряжений;  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$  – девиатор тензора напряжений;  $\sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$  – среднее напряжение;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\varepsilon_i = \sqrt{2/3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$  – интенсивности деформаций;  $\varepsilon_{ij} = e_{ij} - \delta_{ij} \theta / 3$  – девиатор тензора деформаций;  $\theta = e_{ij} \delta_{ij}$ .

$A_{ijkm}[E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i)]$ ,  $B_{ijkm}[E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i)]$  – констант, подлежащих определению из экспериментов по деформированию образцов материала.

Проводя испытания образцов ортотропного материала на одноосное растяжение и одноосное сжатие поочередно вдоль главных осей анизотропии и под углом 45 к ним получим

$$\begin{aligned} A_{kkkk}[E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i)] &= [1/E_k^+(\varepsilon_i) + 1/E_k^-(\varepsilon_i)]/2; \\ B_{kkkk}[E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i)] &= [1/E_k^+(\varepsilon_i) - 1/E_k^-(\varepsilon_i)]/2; \\ A_{iiij}[E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i)] &= -[\nu_{ij}^+/E_j^+(\varepsilon_i) + \nu_{ij}^-/E_j^-(\varepsilon_i)]/2; \\ B_{iiij}[E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i)] &= -[\nu_{ij}^+/E_j^+(\varepsilon_i) - \nu_{ij}^-/E_j^-(\varepsilon_i)]/2; \\ A_{ijij}[E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i)] &= [1/E_{ij}^+(\varepsilon_i) + 1/E_{ij}^-(\varepsilon_i)] - 0,25\{[1/E_i^+(\varepsilon_i) + \\ &+ 1/E_j^+(\varepsilon_i) + 1/E_i^-(\varepsilon_i) + 1/E_j^-(\varepsilon_i)] - 2[\nu_{ji}^+/E_i^+(\varepsilon_i) + \nu_{ji}^-/E_i^-(\varepsilon_i)]\}; \\ B_{ijij}[E_{ij}^{\pm}(\varepsilon_i)] &= \sqrt{2}[1/E_{ij}^+(\varepsilon_i) - 1/E_{ij}^-(\varepsilon_i)] - 0,125\sqrt{2}\{[1/E_i^+(\varepsilon_i) + \\ &+ 1/E_j^+(\varepsilon_i) - 1/E_i^-(\varepsilon_i) - 1/E_j^-(\varepsilon_i)] - 4[\nu_{ji}^+/E_i^+(\varepsilon_i) - \nu_{ji}^-/E_i^-(\varepsilon_i)]\}. \end{aligned}$$

Функции определяющих соотношений будем вычислять по результатам простейших экспериментов. Принимая нелинейную зависимость, представим материальные функции в зависимости от отношения интенсивности напряжений к интенсивности деформаций. Microcal Origin 6.0 (Microcal Software Inc.) аппроксимируются зависимости для функций  $E_1^+(\varepsilon_i)$ ,  $E_2^+(\varepsilon_i)$ ,  $E_3^+(\varepsilon_i)$ ,  $E_{12}^+(\varepsilon_i)$ ,  $E_{23}^+(\varepsilon_i)$ ,  $E_{13}^+(\varepsilon_i)$ ,  $E_1^-(\varepsilon_i)$ ,  $E_2^-(\varepsilon_i)$ ,  $E_3^-(\varepsilon_i)$ ,  $E_{12}^-(\varepsilon_i)$ ,  $E_{23}^-(\varepsilon_i)$ ,  $E_{13}^-(\varepsilon_i)$ , в каждом эксперименте полученные выражения подставляются в формулы для определения функций определяющих соотношений.

Рассмотрим углерод AVCO Mod 3a.

Графическая зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций при нелинейной аппроксимации для осевых растяжения или сжатия вдоль главной оси анизотропии  $x_1$  представлена на рис. 1.

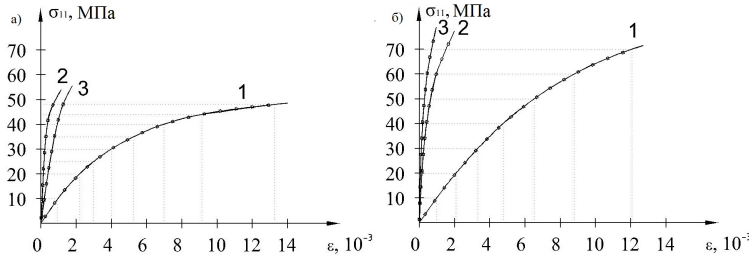


Рис. 1. Кривые напряжения деформации в направлении оси  $x_1$ : а) растяжение; б) сжатие; 1 – продольная деформация  $\varepsilon_{11}$ ; 2, 3 – поперечная деформация  $\varepsilon_{22}$  и  $\varepsilon_{33}$ ; — — — экспериментальные данные, - - - - нелинейные аппроксимации

Графическая зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций при нелинейной аппроксимации для осевых растяжения или сжатия вдоль главной оси анизотропии  $x_2$  представлена на рис. 2.

Графическая зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций для сдвига в плоскости: а)  $x_1x_2$ ; б)  $x_2x_3$ ; в)  $x_1x_3$  представлена на рис. 3.



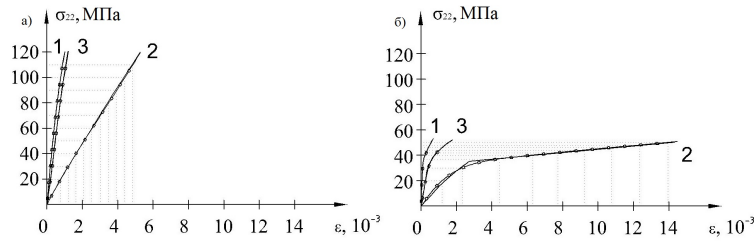


Рис. 2. Кривые напряжения деформации в направлении оси  $x_2$ : а) растяжение; б) сжатие; 2 – продольная деформация  $\varepsilon_{22}$ ; 1, 3 – поперечная деформация  $\varepsilon_{11}$  и  $\varepsilon_{33}$ ; — — — — экспериментальные данные, - - - - нелинейные аппроксимации

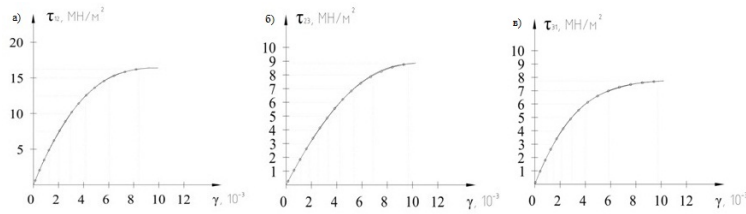


Рис. 3. Кривые напряжения деформации в плоскости: а)  $x_1x_2$ ; б)  $x_2x_3$ ; в)  $x_1x_3$ ; — — — — экспериментальные данные, - - - - нелинейные аппроксимации

Таким образом, аппроксимация деформации достаточно точно описывает диаграммы зависимостей:

$$E_1^+(\varepsilon_i) = [A_1 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i) + A_2 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^2 + A_3 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^3]/(\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i), \text{ где } A_1 = 1,08 \cdot 10^{10}; A_2 = -9 \cdot 10^{11}; A_3 = 3 \cdot 10^{13};$$

$$E_2^+(\varepsilon_i) = [B_1 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i) + B_2 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^2 + B_3 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^3]/(\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i), \text{ где } B_1 = 0,8 \cdot 10^{10}; B_2 = -8,5 \cdot 10^{11}; B_3 = 3 \cdot 10^{12};$$

$$E_3^+(\varepsilon_i) = [C_1 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i) + C_2 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^2 + C_3 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^3]/(\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i), \text{ где } C_1 = 10^{10}; C_2 = -8,1 \cdot 10^{11}; C_3 = 2,6 \cdot 10^{13};$$

$$E_{12}^+(\varepsilon_i) = [D_1 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i) + D_2 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^2 + D_3 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^3]/(\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i), \text{ где } D_1 = 7 \cdot 10^9; D_2 = -2,8 \cdot 10^{11}; D_3 = 5 \cdot 10^{12};$$

$$E_{13}^+(\varepsilon_i) = [F_1 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i) + F_2 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^2 + F_3 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^3]/(\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i), \text{ где } F_1 = 7,1 \cdot 10^9; F_2 = -2 \cdot 10^{11}; F_3 = 4,9 \cdot 10^{12};$$

$$E_{23}^+(\varepsilon_i) = [S_1 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i) + S_2 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^2 + S_3 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^3]/(\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i), \text{ где } S_1 = 8,3 \cdot 10^9; S_2 = -3,7 \cdot 10^{11}; S_3 = 6,1 \cdot 10^{12};$$

$$E_1^-(\varepsilon_i) = [G_1 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i) + G_2 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^2 + G_3 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^3]/(\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i), \text{ где } G_1 = 1,1 \cdot 10^{10}; G_2 = 6,2 \cdot 10^{11}; G_3 = 1,3 \cdot 10^{13};$$

$$E_2^-(\varepsilon_i) = [L_1 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i) + L_2 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^2 + L_3 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^3]/(\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i), \text{ где } L_1 = 1,1 \cdot 10^{10}; L_2 = 2 \cdot 10^{12}; L_3 = 1,3 \cdot 10^{14};$$

$$E_3^-(\varepsilon_i) = [K_1 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i) + K_2 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^2 + K_3 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^3]/(\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i), \text{ где } K_1 = 1,2 \cdot 10^{10}; K_2 = 6,7 \cdot 10^{11}; K_3 = 1,6 \cdot 10^{13};$$

$$E_{12}^-(\varepsilon_i) = [P_1 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i) + P_2 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^2 + P_3 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^3]/(\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i), \text{ где } P_1 = 2,2 \cdot 10^9; P_2 = 2 \cdot 10^{12}; P_3 = 1,3 \cdot 10^{14};$$

$$E_{13}^-(\varepsilon_i) = [H_1 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i) + H_2 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^2 + H_3 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^3]/(\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i), \text{ где } H_1 = 1,7 \cdot 10^9; H_2 = 6,2 \cdot 10^{11}; H_3 = 1,3 \cdot 10^{13};$$

$E_{23}^-(\varepsilon_i) = [Q_1 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i) + Q_2 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^2 + Q_3 \cdot (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)^3] / (\sigma_i(\varepsilon_i)/\varepsilon_i)$ , где  $Q_1 = 1,9 \cdot 10^9$ ;  $Q_2 = 2 \cdot 10^{12}$ ;  $Q_3 = 2,3 \cdot 10^{14}$ .

Из анализов проведенных исследований можно утверждать, что нелинейная аппроксимация кривых деформирования дает результаты, максимально приближенные к экспериментам. Поэтому очевидно, что предложенная модель структурно ортотропных упругопластических разносопротивляющихся материалов наиболее предпочтительна в случае расчета конструкций, работающих при сложных напряженных состояниях. При построении материальных функций проводилась проверка энергетической непротиворечивости по Дуккеру:

$$\delta e_{ij} \delta \sigma_{ij} \geq 0.$$

Для иллюстрации указанного подхода решим модельную задачу. Рассмотрим упругое равновесие тонкой прямоугольной пластины толщиной  $h$  из ортотропного разносопротивляющегося материала под действием поперечной нормально приложенной равномерно распределенной нагрузки  $q$ . Вертикальную ось  $x_3$  направим в сторону прогибов. При решении поставленной задачи введены традиционные для данного класса задач технические гипотезы:

а) нормаль к срединной плоскости после деформации не поворачивается и остается перпендикулярной;

б) при определении параметров напряженного состояния влиянием нормальных напряжений  $\sigma_z$  пренебрегаем.

Опираясь на эти условия, деформированное состояние пластины определим компонентами перемещений точек срединной поверхности  $u_1, u_3 = w$ . Компоненты тензора деформаций выразим через параметры деформации  $\varepsilon_{ij}$  и кривизны  $\chi_{ij}$  срединной поверхности ( $i, j = 1, 2$ ):

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + x_3 \chi_{ij}, \quad (2)$$

где  $2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$ ;  $\chi_{ij} = -w_{,ij}$ .

Выражения для деформаций с учетом принятых гипотез примут вид

$$e_{11} = u_{1,1} - x_3 \cdot w_{,11}; e_{22} = u_{2,2} - x_3 \cdot w_{,22}; e_{12} = 0,5 \cdot (u_{1,2} + u_{2,1}) - x_3 w_{,12}. \quad (3)$$

В ортогональной системе координат закон упругости для анизотропного разносопротивляющегося материала при нелинейной аппроксимации диаграмм деформирования предлагается записать:

$$e_{11} = V_{1111}\sigma_{11} + V_{1122}\sigma_{22}; e_{22} = V_{1122}\sigma_{11} + V_{2222}\sigma_{22}; e_{12} = V_{1212}\tau_{12}, \quad (4)$$

где  $V_{1111}, V_{1122}, V_{2222}, V_{1212}$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} V_{1111} &= A_{1111}[E_{ij}^\pm(\varepsilon_i)] + B_{1111}[E_{ij}^\pm(\varepsilon_i)]\alpha_{11}; \\ V_{1122} &= A_{1122}[E_{ij}^\pm(\varepsilon_i)] + B_{1122}[E_{ij}^\pm(\varepsilon_i)] \cdot (\alpha_{11} + \alpha_{22}); \\ V_{2222} &= A_{2222}[E_{ij}^\pm(\varepsilon_i)] + B_{2222}[E_{ij}^\pm(\varepsilon_i)]\alpha_{22}; \\ V_{1212} &= A_{1212}[E_{ij}^\pm(\varepsilon_i)] + B_{1212}[E_{ij}^\pm(\varepsilon_i)]\sqrt{2}\alpha_{12}. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражая уравнения (4) относительно напряжений, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{1111}e_{11} + C_{1122}e_{22}; \\ \sigma_{22} &= C_{1122}e_{11} + C_{2222}e_{22}; \\ \tau_{12} &= C_{1212}e_{12}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $[C] = [V]^{-1}$ .

Принимая за основу те или иные физические соотношения, мы тем самым не вносим изменения в уравнения статико-геометрической природы. Таким образом, остаются справедливыми основные положения и зависимости классической теории упругости. Поэтому уравнения равновесия пластины запишем в виде

$$\begin{aligned} N_{11,1} + N_{12,2} &= 0; \\ N_{12,1} + N_{22,2} &= 0; \\ M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} &= -q(x_1, x_2) - N_{11}w_{,11} - 2N_{12}w_{,12} - N_{22}w_{,22}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $N_{ij}$  — усилия в срединной поверхности пластины,  $M_{ij}$  — изгибающий и крутящий момент.

Поскольку переход от напряжений к интегральным характеристикам не зависит от физической природы материала, эти характеристики определим традиционным способом:

$$\begin{aligned} N_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_3; & N_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dx_3; & N_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} dx_3; \\ M_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3; & M_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3; & M_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} x_3 dx_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя полученные соотношения в уравнения равновесия (7), приходим к системе разрешающих дифференциальных уравнений изгиба прямоугольных пластин, обладающих ортогональной ортотропией, нелинейно чувствительной к виду напряженного состояния:

$$\begin{aligned} &u_{1,11} D_{1111} + u_{1,1} D_{1111,1} - w_{,111} Q_{1111} - w_{,11} Q_{1111,1} + u_{2,12} D_{1122} + \\ &\quad + u_{2,2} D_{1122,1} - w_{,122} Q_{1122} - w_{,22} Q_{1122,1} + \\ +0, &5u_{1,22} D_{1212} + 0, 5u_{1,2} D_{1212,2} + 0, 5u_{2,12} D_{1212} + 0, 5u_{2,1} D_{1212,2} - \\ &\quad - w_{,122} Q_{1212} - w_{,12} Q_{1212,2} = 0; \\ &u_{1,12} D_{1122} + u_{1,1} D_{1122,2} - w_{,112} Q_{1122} - w_{,11} Q_{1122,2} + u_{2,22} D_{2222} + \\ &\quad + u_{2,2} D_{2222,2} - w_{,222} Q_{2222} - w_{,22} Q_{2222,2} + \\ +0, &5u_{1,12} D_{1212} + 0, 5u_{1,2} D_{1212,1} + 0, 5u_{2,11} D_{1212} + 0, 5u_{2,1} D_{1212,1} - \\ &\quad - w_{,122} Q_{1212} - w_{,12} Q_{1212,1} = 0; \\ &2u_{2,22} Q_{2222,2} + u_{2,112} Q_{1212} + 2u_{1,12} Q_{1122,2} - 2w_{,222} K_{2222,2} - w_{,22} K_{1122,11} + \\ &\quad + (u_{1,1} D_{1111} - w_{,11} Q_{1111} + u_{2,2} D_{1122} - \\ &\quad - w_{,22} Q_{1122}) w_{,22} + 2(0, 5u_{1,2} D_{1212} + 0, 5u_{2,1} D_{1212} - w_{,12} Q_{1212}) w_{,12} + \\ &\quad + (u_{1,1} D_{1212} - w_{,11} Q_{1122} + u_{2,2} D_{2222} - \\ &\quad - w_{,22} Q_{2222}) w_{,22} - 2w_{,122} K_{1122,1} + u_{1,122} Q_{1122} + u_{2,1} Q_{1212,12} - w_{,222} K_{2222} + \\ &\quad + u_{2,2} Q_{2222,22} + u_{2,11} Q_{1212,2} + \\ +u_{2,222} &Q_{2222} - 2w_{,12} K_{1122,12} + 2u_{1,11} Q_{1111,1} - w_{,22} K_{2222,22} + q + u_{1,2} Q_{1212,12} + \\ &\quad + u_{1,22} Q_{1212,12} - 2w_{,122} K_{1212,2} - \\ -2w_{,122} &K_{1212,1} - w_{,11} K_{1122,22} - 2w_{,122} K_{1122,2} + u_{2,12} Q_{1212,1} + u_{1,122} Q_{1212} + \\ &\quad + u_{1,12} Q_{1212,2} + u_{1,1} Q_{1111,11} - \\ -w_{,1111} &K_{1111} - 2w_{,111} K_{1111,1} - w_{,11} K_{1111,11} + u_{2,112} Q_{1122} + 2u_{2,12} Q_{1122,1} + \\ &\quad + u_{2,2} Q_{1122,11} + u_{1,1} Q_{1122,22} + \\ +u_{1,111} &Q_{1111} - 2w_{,1122} K_{1212} - 2w_{,1122} K_{1122} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} D_{1111} &= \int C_{1111} dx_3; & D_{1122} &= \int C_{1122} dx_3; & D_{1212} &= \int C_{1212} dx_3; \\ D_{2222} &= \int C_{2222} dx_3; & Q_{1111} &= \int C_{1111} x_3 dx_3; & Q_{1122} &= \int C_{1122} x_3 dx_3; \\ Q_{1212} &= \int C_{1212} x_3 dx_3; & Q_{2222} &= \int C_{2222} x_3 dx_3; & K_{1111} &= \int C_{1111} x_3^2 dx_3; \\ K_{1122} &= \int C_{1122} x_3^2 dx_3; & K_{1212} &= \int C_{1212} x_3^2 dx_3; & K_{2222} &= \int C_{2222} x_3^2 dx_3. \end{aligned}$$

Для полноты системы разрешающих уравнений необходимо задать граничные условия. Очевидно, что в силу неразделимости задач изгиба и плоского напряженного состояния граничные условия формулируются не только для прогиба, но и для перемещений: жесткое защемление  $w = 0$ ;  $w_k = 0$ ;  $u_1 = 0$ ;  $u_2 = 0$ .

Таким образом, сформулирована замкнутая система дифференциальных уравнений в перемещениях для срединной плоскости, описывающая исследуемую задачу. Задача решается методом последовательных приближений в форме «переменных параметров упругости» Биргера. Для решения дифференциальных уравнений, ввиду сложности выражений для нелинейных членов, использовалась конечно-разностная аппроксимация, которая в данном случае наиболее просто реализуется. Стороны пластины с помощью  $N$  точек разбивается при этом на  $N - 1$  отрезков, имеющих одинаковую длину. Разностные аналоги разрешающих уравнений получим путем замены входящих в них производных конечными разностями по высокоточным шаблонам. Закрепление по контуру принималось в виде жесткой заделки. Рассматривалось напряженно-деформированное состояние при действии 25 % предельной равномерно распределенной поперечной нагрузки.

В результате исследования подтверждено, что учет нелинейности ортотропного материала пластины приводит к изменению напряженно-деформированного состояния, достигающее для напряжений:

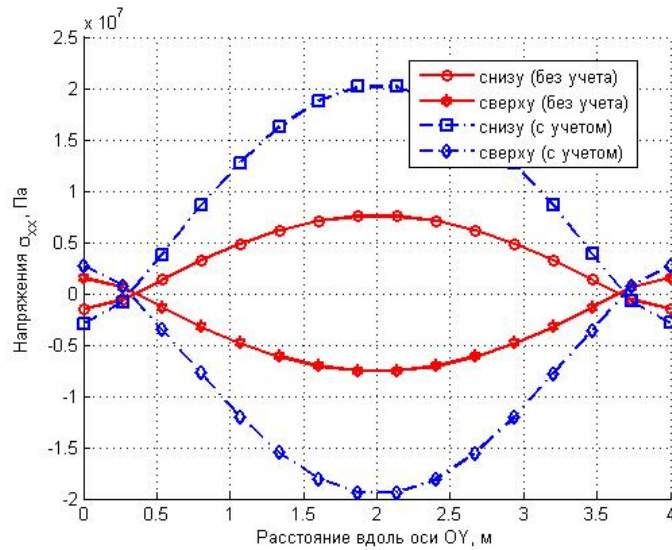


Рис. 4. Распределение напряжений вдоль оси OX

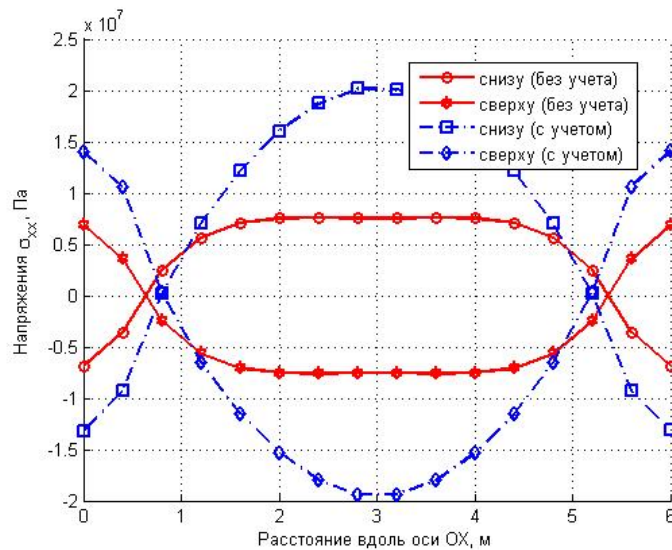


Рис. 5. Распределение напряжений вдоль оси OY

- вдоль главной оси анизотропии X в сжатых зонах – 62,42 %, в растянутых зонах – 60,84 % (рис. 4);

- вдоль главной оси анизотропии  $Y$  в сжатых зонах – 62,37 %, в растянутых зонах – 61,02 % (рис. 5).

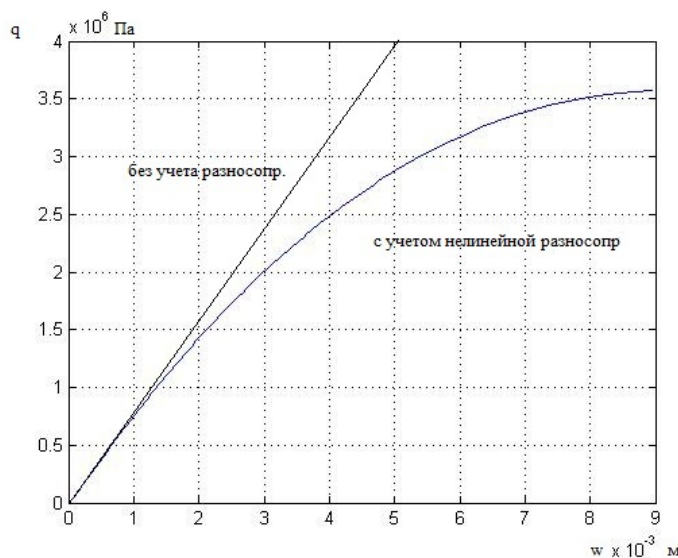


Рис. 6. Зависимость величины прогиба от нагрузки

Анализируя приведенные исследования, следует отметить, что учет нелинейности приводит к весьма существенной разнице в результатах (рис. 6). Использование приведенной методики даст возможность снизить расход материалов, но при использовании других материалов может предотвратить разрушение конструкции.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Трещев, А. А.* Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А. А. Трещев. – Москва – Тула: РААСН – ТулГУ. 2008. – 264 с.
- [2] *Трещев, А. А.* Анизотропные пластины и оболочки из разнотротивляющихся материалов / А. А. Трещев. – Москва – Тула: РААСН – ТулГУ. 2007. – 160 с.
- [3] *Jones, R. M.* Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite / R. M. Jones, D. A. R. Nelson // AIAA Journal. – 1976. – Vol. 14. – No. 10. – P. 1427–1435.
- [4] *Jones, R. M.* Further characteristics of a nonlinear material model for ATJ-S Graphite / R. M. Jones, D. A. R. Nelson // Journal Composit Materials. – 1975. – Vol. 9. – No. 7. – P. 251–265.
- [5] *Трещев, А. А.* Определяющие соотношения для ортотропных нелинейно-упругих разнотротивляющихся материалов / А. А. Трещев, Д. А. Ромашин // Российская академия архитектуры и строительных наук. – Вестник центрального регионального отделения. Вып. 10. – Воронеж: Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, 2011. – С. 135–141.

*Трещев Александр Анатольевич,*

*доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: taa57@yandex.ru*

*Теличко Виктор Григорьевич,*

*кандидат технических наук, доцент кафедры "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: katranv@yandex.ru*

*Ромашин Дмитрий Алексеевич,*

*аспирант, ассистент кафедры "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: D.Romashin@yandex.ru*

A. A. Treshchev, V. G. Telichko, D. A. Romashin

## BEND OF ROUND PLATES FROM ORTOTROPIC NONLINEAR DIFFERENT RESISTANT OF THE MATERIAL

*Tula State University*

**Abstract.** Within the limits of work new defining parities for is essential-nonlinear ortotropic the materials sensitive to a kind of a tension are constructed. The received defining parities can be used for calculation of designs taking into account physical nonlinearity, here AVCO Mod 3a carbon is considered.

**Keywords:** different resistant, elastoplasticity, nonlinearity, defining parities, mechanical characteristics, pressure, deformations, plate.

### REFERENCES

- [1] *Treshchev, A. A.* Deformation and durability theory materials sensitive to type of a tension. Defining ratios / A. A. Treshchev. – M. – Tula: RAASN – TSU. 2008. – 264 p.
- [2] *Treshchev, A. A.* Anisotropic plates and shells of raznosoprotivlyayuschihya materials / A. A. Treshchev. – M. – Tula: RAASN – TSU. 2007. – 160 c.
- [3] *Jones, R. M.* Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite / R. M. Jones, D. A. R. Nelson // AIAA Journal. – 1976. – Vol. 14. – No. 10. – P. 1427–1435.
- [4] *Jones, R. M.* Further characteristics of a nonlinear material model for ATJ-S Graphite / R. M. Jones, D. A. R. Nelson // Journal Composit Materials. – 1975. – Vol. 9. – No. 7. – P. 251–265.
- [5] *Treshchev, A. A.* The defining relations for orthotropic nonlinear elastic materials raznosoprotivlyayuschihya / A. A. Treshchev, D. A. Romashin // PRussian Academy of Architecture and Building Sciences. – Vestnik of the Central Regional Office. No. 10. – Voronezh: Voronezh State Architecture and Engineering, 2011. – P. 135–141.

*Treshchev Alexander Anatolievich*

*Dr. Tech. Sci., Professor, Head of the Department of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula*

**e-mail:** taa57@yandex.ru

*Telichko Victor Grigorievich*

*Cand. Tech. Sci., Assoc. Professor, Department of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula*

**e-mail:** katranv@yandex.ru

*Romashin Dmitry Alekseevich*

*Postgraduate student, Departament of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula*

**e-mail:** D.Romashin@yandex.ru





## К 70-ЛЕТИЮ АНАТОЛИЯ ВЛАСОВИЧА ЧИГАРЕВА



Анатолий Власович Чигарев принадлежит к числу крупнейших ученых механиков по силе таланта, ясности и фундаментальности результатов, гражданской позиции.

От имени коллектива Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, редакции журнала "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева" сердечно поздравляем Анатолия Власовича Чигарева с семидесятилетием, желаем крепкого здоровья, многих новых успехов.

Б. Г. Миронов

Д. Д. Ивлев

Ректор



## АНАТОЛИЙ ВЛАСОВИЧ ЧИГАРЕВ

Анатолий Власович Чигарев родился 02.12.1941. Заведующий кафедрой "Теоретическая механика", доктор физико-математических наук, профессор Белорусского научного технического университета. После окончания математико-механического факультета Воронежского госуниверситета в 1967 году поступил в аспирантуру к профессору Д. Д. Ивлеву. В это время, в связи с бурно растущим применением композитных материалов, во всех развитых странах проводились интенсивные исследования по механике деформирования и разрушения неоднородных сред. Были разработаны методы для расчета эффективных модулей в статике по схемам Фойгта и Рейсса: основополагающими здесь были работы Хилла, Кренера, В. В. Болотина, В. А. Ломакина, Т. Д. Шермергора и др.

В теории распространения упругих волн К. М. Лифшицем и Г. Д. Пархомовским были получены результаты в случаях длинных и коротких волн в приближении однократного рассеяния (борновское приближение). В теории распространения волн была актуальна проблема разработки методов расчета затухания и дисперсии скорости во всем диапазоне длин волн с учетом многократного рассеяния. По результатам в этом направлении, полученным в 1967-1971 гг., А. В. Чигаревым была защищена диссертация на степень кандидата физико-математических наук.

В дальнейшем А. В. Чигаревым развивался статистический вариант метода осреднения для теории распространения гармонических волн в неоднородных упругих средах. Метод позволил решать единообразно прямые и обратные задачи рассеяния для сред, структура которых меняется в диапазоне от периодической до полностью разупорядоченной. Метод замены полевых величин дал возможность впервые рассчитать упругие волновые (эффективные) операторы во всем диапазоне длин волн с учетом многократного рассеяния. Для статической части динамических эффективных операторов были получены уравнения, аналогичные методу самосогласованного поля и обобщенные на случай сред с непрерывным распределением упругих и теплопроводных свойств. Для решения дисперсионных уравнений был разработан метод эталонного уравнения, что позволило впервые описать ряд эффектов затухания и дисперсии скорости, которые изменяются симметрично с акустической ветвью и описывают краевые эффекты. Для длин волн порядка радиуса корреляции было установлено падение групповой скорости, что является проявлением стохастического резонанса.

В средах со структурами, описываемыми квазислучайными функциями были установлены фильтрующие свойства волн, для длин которых выполняются определенные соотношения.

На основе разработанного статистического варианта метода осреднения было найдено дальнейшее развитие метода статистического обращения для последовательного решения обратной задачи рассеяния (метод, реконструирующий свойства среды по алгоритму фоторобота). Статистический вариант метода осреднения был обобщен на гармонические поверхностные волны Релея и Лява, для которых были установлены эффекты затухания волн в направлении распространения и гармонического затухания вглубь среды за счет установленного механизма обмена энергией между разными модами.

Второе направление работ А. В. Чигарева – развитие метода разрывных решений для распространения волн в неоднородных средах. Впервые были получены уравнения для изменения вдоль лучей всех параметров внутренней геометрии фронтов волн, для случайно неоднородных сред были исследованы различные вероятностные модели и установлены законы

изменения средних функций когерентности, дисперсии, интенсивности. Уменьшение корреляции при росте дисперсии свидетельствует, что волновое поле в неоднородной, статистически однородной и изотропной среде хаотизируется вдоль луча. Для марковских моделей происходит рост энтропии.

Третье направление – детерминированный хаос в динамике лучей объемных и поверхностных волн в неоднородных средах – развивается А. В. Чигаревым начиная с 1975 года. В дальнейшем это явление изучалось с более общих позиций поведения линий тока энергии в сплошных средах в зависимости от характера распределения неоднородности. С позиций локализации энергии деформирования были рассмотрены вопросы прогнозирования траекторий трещин и линий скольжения в пластическом состоянии в неоднородных средах.

С 1980 года А. В. Чигарев включается в тематику исследований новосибирской школы академика Е. М. Шемякина по вопросам самоорганизации и хаоса в процессах деформирования и разрушения, теории распространения волн.

В 1986 году Чигаревым А. В. была защищена докторская диссертация в Институте теоретической и прикладной механики СО АН СССР.

Результаты теоретических и практических исследований А. В. Чигарева представлены в более чем 250 публикациях, трех монографиях.

С 1995 года А. В. Чигарев начинает активно заниматься вопросами биомеханики движения, в первую очередь, двуногой ходьбы. В этом направлении защищены две кандидатские диссертации, подготавливается докторская. Изданы учебники "Биомеханика" и другие учебные пособия. Установлены условия перехода нормальной походки в хаотичную. В механике кровообращения исследуется роль пульсовой волны в поддержании нормального кровотока.

С 2005 года А. В. Чигарев совместно с В. Т. Минченей начинает заниматься вопросами динамики микророботов, создаваемых на вибратформе, возбуждаемой источниками типа пьезоэлементов и дисбалансом. Созданы модели движения и управления такими системами в неоднородных средах.

С 1991 года А. В. Чигарев заведует кафедрой "Теоретическая механика" Белорусского национального технического университета. Им была организована исследовательская лаборатория "Динамика и прочность материалов, конструкций и машин" при кафедре теоретической механики.

Наряду с исследованиями в теории деформируемого твердого тела А. В. Чигаревым выполнен ряд работ в области прикладной механики. Разработаны и апробированы рекуператоры энергии пневмогидроаккумуляторного типа для городского автобуса, погрузчика, экскаватора, планетарной мельницы и др.

Изданы учебные пособия с грифом Министерства образования по теоретической механике: Курс теоретической механики. Новое знание. 2010. 379 с. (соавтор Чигарев Ю. В.);

Теоретическая механика. Практикум. Новое знание. 2010-2011. 1 т. Статика; 2 т. Кинематика; 3 т. Динамика точки; 4 т. Динамика системы (соавторы Акимов В. А. и др.).

По биомеханике:

Биомеханика. Из-во Гревцова. 2010. 279 с.;

Биомеханика ходьбы человека. М.: Спутник. 2009. 196 с.

В научной школе механики деформируемого твердого тела под руководством А. В. Чигарева защищено 16 кандидатских и 5 докторских диссертаций.

В настоящее время на кафедре работают: 1 профессор, 16 доцентов, 5 старших преподавателей, 6 ассистентов.

Кафедра ведет учебный процесс на 13 факультетах по 52 специальностям дневной и заочной форм обучения, участвует в разработке и внедрении информационных технологий и прогрессивных методов обучения, которые реализуются на практических и лабораторных занятиях. Во время проведения занятий расчеты задач механики выполняются по специальным компьютерным программам, осуществляется математическое моделирование динамики различных систем и процессов, в том числе по биомеханике.

В 2001 году кафедра стала выпускать специалистов по новой специализации "Компьютерная механика". С 2008 года на базе этой специализации открыта новая специальность "Компьютерная мехатроника, которая представляет собой синтез дисциплин механико-математического профиля с компьютерными технологиями, базирующимися на применении пакетов программ в инженерно-технических расчетах. Специалисты должны уметь проектировать технические системы, решать задачи механики машин, механики приборов, биомеханики, микро- и наномеханики, применять технологии баз данных в практической деятельности.

Будущие специалисты могут работать на предприятиях машиностроения, приборостроения, строительства, энергетики, научно-исследовательских организациях, фирмах, занимающихся проектной и научно-исследовательской деятельностью. Название специальности соответствует принятой в развитых странах "Computational science".

Основные направления учебно-методической работы кафедры:

Подготовка и издание учебников, учебных пособий, учебных изданий, учебно-методических пособий для организации индивидуальной и самостоятельной работы студентов, для контроля знаний студентов, методических материалов и конкурсных заданий для олимпиад.

Разработка учебного комплекса по 23 дисциплинам, читаемым на кафедре: "Теоретическая механика", "Механика необратимых деформаций", "Механика композиционных материалов", "Средства трехмерной компьютерной графики"; "Биомеханика", "Моделирование физических и технических процессов" и т. д.



Нижний ряд: Ручан М. В., Беляцкая Л. Н., Глубокая Э. Э.

Верхний ряд: Горбач Н. И., Акимов В. А., Ширвель П. И., Чигарев А. В., Алехнович Г. Н., Гурвич Ю. А., Мышковец М. В., Беляева Г. И., Шукевич Т. В.

Основные научные направления кафедры: прямые и обратные задачи распространения волн и вибраций в неоднородных средах, детерминированный хаос и самоорганизация в динамике неоднородных сред, накопление повреждений и прогнозирование направления развития трещин, проектирование композитов с заданными свойствами, акустика колеса, рекуперация энергии, биомеханика, вариационные и операторные методы решения задач теории упругости.

Кафедра уделяет много внимания совершенствованию организации научно-исследовательской и научно-технической деятельности Белорусского научного технического университета, интеграции науки и образования, заключающейся во взаимодействии с научными и производственными учреждениями Беларуси, России, Украины, Польши, Германии.

Большое внимание кафедра уделяет НИРС. Ежегодно проводит университетские и республиканские олимпиады по теоретической механике, победители которых участвуют и занимают призовые места в межрегиональных и зональных олимпиадах России.

Кафедра принимает активное участие в подготовке и проведении международных конгрессов по теоретической и прикладной механике, различного уровня конференций и симпозиумов, в том числе ежегодного Республиканского научно-методического семинара преподавателей кафедр теоретической механики, теории механизмов и машин и сопротивления материалов вузов Беларуси.

С 2004 года кафедра издает международный научно-технический сборник "Теоретическая и прикладная механика".

При кафедре имеется научно-исследовательская лаборатория "Динамика систем, механика структур и материалов".

**СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ  
ЧИГАРЕВА АНАТОЛИЯ ВЛАСОВИЧА****1969**

1. О связи масштабного и краевого эффектов в стохастически неоднородных средах // Изв. АН СССР МТТ. – 1969. – № 4.

**1970**

2. Распространение волн в стохастически неоднородной упругой среде // Изв. АН СССР МТТ. – 1970. – № 4.

**1972**

3. Распространение ударных волн в стохастически неоднородной упругой среде // АН УССР. – 1972. – № 5.

**1974**

4. К расчету макроскопических коэффициентов изотропных сред // Прикладная математика и механика. – 1974. – № 5.

5. Деформирование квазиизотропных композитных сред // Изв. АН СССР МТТ. – 1974. – № 5.

**1975**

6. К теории деформирования стохастических сильно изотропных материалов // Изв. АН СССР МТТ. – 1975. – № 5.

**1976**

7. Динамическое деформирование упругих квазиизотропных сред // Прикладная математика и механика. – 1976. – № 4.

**1977**

8. К применению марковского приближения в динамике стохастических сред // Прикладная математика и механика. – 1977. – № 6.

9. К устойчивости лучей в неоднородных средах // Теория дифракции и распространения волн: сб. тр. – Ростов н/Д., 1977.

10. Распространение волн в вязкоупругих средах // АНМ ССР. – Кишинев: "Штинница", 1977 (совм. Мешков С. И., Чебан В. Г., Блиштейн Ю. М.).

**1978**

11. Распространение волн в вязко-упругопластической стохастически неоднородной среде // Изв. АН СССР МТТ. – 1978. – № 6.

12. О возможности возникновения стохастической неустойчивости лучей в неоднородных средах // Акустический журнал. – 1978. – № 5.

**1979**

13. Распространение поверхностных волн через стохастическую неоднородную упругую среду (марковское приближение) // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т. 43. – № 4. – С. 746–752.

14. Рассеяние волн на хаотических армирующих включениях среды // Изв. АНМ. ССР. Серия: Физика. – 1979. – № 1.

15. Вычисление динамического тензора Грина микронеоднородной упругой среды // Прикладная математика и механика. – 1979. – № 5.

**1980**

16. К определению связи между средними тензорами напряжения и деформации в структурно-неоднородных упругих средах // Прикладная математика и механика. – 1980. – Т. 44. – Вып. 3.

17. Распространение волн в упругой микронеоднородной среде // Изв. АН СССР МТТ. – 1980. – № 4.

18. К геометрии волновых фронтов в неоднородных средах // Акустический журнал. – 1980. – Т. XXVI. – Вып. 6.

#### 1981

19. Распространение волн в упругой микронеоднородной среде // Изв. АН СССР МТТ. – 1981. – № 5. Аннотация доклада.

#### 1984

20. К методу эталонного уравнения в динамике структурных неоднородных упругих сред // Прикладная математика и механика. – 1984. – № 5.

#### 1988

21. Определение корреляционных функций композитных материалов стохастической структуры акустическими методами // Механика композитных материалов. – 1988. – № 4.

#### 1989

22. Краевые ветви колебаний в композитных материалах с полностью разупорядоченной структурой // Механика композитных материалов. – 1989. – № 4.

#### 1990

23. Метод осреднения в динамических задачах теории упругости структурно-неоднородных сред // ПММ. – 1990. – Т. 54. – Вып. 2.

24. Упругие свойства композиционных полимерных материалов // Весці АН БССР. Серия физ.-тех. – 1990. – № 3.

25. Проектирование шумовиброизолирующих материалов стохастической структуры // Проблемы акустической экологии: сборник научных статей. – Л., 1990. – Т. 2.

26. Самосогласованный метод вычисления эффективных коэффициентов неоднородных сред с непрерывным распределением физико-механических свойств // ДАН СССР. – 1990. – Т. 313. – № 2.

27. Последовательное решение обратной задачи рассеяния волн в неоднородных средах. Аннотации докл. XI Всесоюзн. акустической конф. – М., 1991.

28. Последовательное решение обратной задачи рассеяния волн в неоднородных упругих средах // ДАН СССР. – 1991. – Т. 320. – № 5.

#### 1993

29. Stochastization of crack growth direction in heterogeneous media // Fracture Mechanics: Successes and Problems, Collection of Abstracts. – 1993. – Part I. – 8 Int.

30. Эффективные упругие модули композитного материала с разбросом свойств компонентов // Весці АНБ. Серия физ.-тех. – 1993. – № 4.

#### 1994

31. Распространение волн в неоднородной вязкоупругой среде с начальными напряжениями // ПММ. – 1994. – Т. 58. – № 3.

32. The statistical variant of averaging method in elastic theory of heterogeneous media // Asymptotics in mechanics: Books of abstracts of Int. Conf. – St. Peterburg, 1994.

33. Распространение гармонических колебаний в слоистых средах с различной степенью упорядоченности // Архитектура и строительство Беларуси. – 1994. – № 56.

#### 1995

34. Optimization of physical and mechanical properties of laminative filters and Combinations // The Third Int. Congress on Industrial and Appl. Math. "ICIAM-95". Book of Abstracts. – 1995.

35. Specific character of the Computerized Symbolic Manipulation in mechanic of inhomogeneous media // Euromech 343 "Computerized Symbolic Manipulation in Mechanics". – 1995.



36. Расчет траектории трещины в композиционном материале в линейном приближении // Доклады АН Беларуси. – 1995. – Т. 39. – № 2.

37. Ползучесть и релаксация вследствие накопления повреждений // Весці АН Беларусі. – 1995. – № 4. (Физико-математические науки).

38. Механика // Энциклапедычны даведнік. – Мн. : Беларуская энцыклапедыя, 1995.

39. Нестационарные упругие волны в неоднородных средах с начальными напряжениями // Весці АН Беларусі. Серия Фіз.-тэх. Навук. – 1995. – № 1.

40. Расчет напряженно-деформированного состояния в упругих телах с начальными напряжениями методом функций Грина // Весці АН Беларусі. Серия Фіз.-тэх. Навук. – 1995. – № 3.

#### 1996

41. Optimization of physical and mechanical properties of laminated filters and combinations // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ICIAM95 special issue). – 1996. – Vol. 5.

42. Optimization of acoustic properties of composite layer // XIXth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. – Kyoto. – Japan. – 1996.

#### 1997

43. A solution of problem about long porous cylindrical bearing // World tribology congress. Abstracts of papers, 8-12 September. – London. – 1997.

44. Проектирование и синтез композитных слоев с заданными свойствами // Весці АН Беларусі. Серия фіз.-техн. навук. – 1997. – № 2.

45. Математическое моделирование процесса получения поверхности с заданными геометрическими свойствами // Трение и износ. – 1997. – Т. 18. – № 1.

#### 1998

46. Перемещения в упругом полупространстве при движении нагрузки по балке, лежащей на его поверхности // ПММ. – 1998. – Т. 62. – Вып. 5.

#### 1999

47. Распространение нестационарных поверхностных волн в неоднородных упругих средах со случайным разбросом параметров // Весці Нацыянальнай Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1999. – № 2.

48 Effect of Thin Metal Coating on Contact Rigidity // International Conference on Multifield Problems, October 6-8. – Stuttgart, 1999.

49. Расчет на прочность опор скольжения с учетом реологии шероховатости их поверхностей // Сб. тез. док. 53-й Международной научно-технической конференции профессоров, преподавателей, научных работников и аспирантов БГПА. Ч.1. – Минск, 1999.

50. Распространение нестационарных поверхностных волн в неоднородных упругих средах со случайным разбросом параметров // Весці Нацыянальнай Акадэміі навук Беларусі. Сур. фіз.-мат. навук. – 1999. – № 2.

51. Моделирование автоколебаний в контакте цапфы с подшипником колеса мобильной машины // Весці НАНБ, сер. фіз.-тэх. Навук. – 1999. – № 1.

52. Effect of Thin Metal Coating on Contact Rigidity // International Conference on Multifield Problems, October 6-8, 1999. – Stuttgart.

#### 2000

53. Механика контактного взаимодействия тела с круговыми границами // Технопринт. – Минск, 2000.

54. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред // Технопринт. – Минск, 2000.

55. Contact Problem for Rough Rigid Disk and Plate with Thin Coating on Cylindrical Hole // Applied Mech. Eng.– 2000. – Vol 5. – № 2.

56. Проблемы создания и применения систем рекуперации энергии // Вестн. нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-техн. науки. – 2000. – № 2.

57. Проблемы создания и применения систем рекуперации энергии // Вестн. НАНБ. Сер. физ.-техн. – 2000. – № 2.

58. Сборник конкурсных задач олимпиад по теоретической механике 1987-1998 г. с анализом их решений (с грифом МО) : Техналот. – Мн., 2000.

59. Теоретическая механика и математические методы (с грифом МО) // Технопринт. – Минск, 2000.

60. Сборник задач по теоретической механике с решениями (статика, кинематика) (с грифом МО) // Технопринт. – Минск, 2000.

61. Сборник конкурсных задач олимпиад по теоретической механике 1987-1998 г. с анализом их решений // Технопринт. – Минск, 2000.

62. Теоретическая механика и математические методы (с грифом МО) // Технопринт. – Минск, 2000.

#### 2001

63. Влияние волнового эффекта на динамику трения качения колеса // Трение и износ мех. науч. журнал. – 2001. – Т. 22. – № 1.

64. Детерминированный хаос в динамике и прочности неоднородных сред // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. – Технопринт: Минск, 2001.

65. Variational determination of the crack trajectory in inhomogeneous media // Int. J. Fracture III, 2001.

66. Using MSC/NASTRAN 4 for Windows for calculation of normal modes and eigenvalues of mobile machine cabin // 2nd European Conf. on Comp. Mech, v. 1, Cracow. – Poland, 2001.

67. Моделирование стохастизации траектории трещины в композитах // VIII Всероссийский съезд по теор. и прикл. механике. – Пермь, 2001.

#### 2002

68. О влиянии неоднородности композиционного материала на траекторию трещины // Доклады НАШ. – 2002. – Т. 46. – № 2.

69. Уравнение фронта трещины с учетом метрических свойств материала // Изв. вузов. Физика. – 2002. – № 12.

70. Устойчивость траектории трещины в неоднородной среде // Известия Академии наук. Механика твердого тела. – 2002. – № 4.

71. Propagation of nonstationary waves in an inhomogeneous medium with initial stresses // Int. Conf. on Multifield Problems. – Stuttgart. – 2002.

#### 2003

72. Stochasticization of crack trajectory in the layer composites // Proc. 3rd Int. Conf. "Strength, Durability and Stability of materials and Structures Sep. 17-19, 2003. Technologija : Kanna, 2003.

А. В. Чигарев

## ИЗ ВОСПОМИНАНИЙ

*Служенье муз не терпит суеты*

*А. С. Пушкин*

*Нам не дано предугадать, как наше слово отзовется...*

*Ф. И. Тютчев*

### Тезисы воспоминаний

Предложение Дюиса Даниловича написать воспоминания в связи с юбилеем оказалось трудновыполнимым. Почти сразу пришлось отказаться от хронологического подхода из-за опасения утонуть в деталях, да и от хронологии пахнет эпитафией.

В связи с модой на информационные технологии показалось уместным использовать объекто-ориентированный подход, а насколько он окажется удачным, покажет время.

#### 1. Лекции

Безусловно лекции закладывают основы знакомства со специальностью, поэтому личность лектора в этом контексте играет важную роль. Геннадий Иванович Быковцев читал нам на 3-м курсе уравнения математической физики, хотя до него уже было много курсов по математике, прочитанных интересными и высококвалифицированными специалистами. Был и курс теоретической механики. Однако Геннадий Иванович, безусловно, запомнился манерой чтения, которая открывала "кухню" получения математических результатов, имевших физическое и механическое истолкование. Импонировала манера подачи материала, раскованность, свободное общение с аудиторией. Запомнилась дотошность в разъяснении материала. С этой точки зрения лекции Валентина Владимировича Дудукаленко выглядели как экспромт, причем некоторые вещи подавались как само собой подразумевающиеся или общеизвестные. Правда, для того чтобы понять, что же подразумевалось на лекции, требовалось немало еще подумать.

Когда Дюис Данилович начал читать в нашей группе лекции по пластичности, то стало понятно, с кого брали пример и Геннадий Иванович Быковцев, и Валентин Владимирович Дудукаленко да и многие другие преподаватели механики. Думаю, что многие из тех, кто будет читать эти строки, могли бы больше сказать о лекциях Дюиса Даниловича, я лишь отмечу, что и сегодня считаю их эталоном. Запомнился экзамен, который проходил во время неполного солнечного затмения.

Ощутить, что такое быть лектором по инициативе Валентина Владимировича Дудукаленко мне пришлось уже на 5-м курсе. Он читал курс "Термодинамика необратимых процессов в механике сплошных сред", придерживаясь недавно вышедшей книжки Циглера. В своей манере экспромта он неожиданно предложил мне прочитать несколько лекций для студентов 4-го курса. Когда он представил меня студентам, с которыми я жил в общежитии, неожиданно покинул аудиторию, я понял, что значит быть лектором. Первый опыт был несомненно полезным.

Благодаря системе повышения квалификации советского времени, я, как и многие другие преподаватели, имел возможность слушать лекции Л. И. Седова, Ю. Н. Работнова, А. А. Ильюшина, Е. И. Шемякина, Р. И. Нигматулина, К. Ф. Черныха, В. В. Болотина и многих других выдающихся механиков, а после 1992 г. – и многих других зарубежных ученых, читавших на английском, немецком, польском языках.

## 2. Семинары

Первый раз мне пришлось выступать на научном семинаре под руководством Дюиса Даниловича по защите курсовой работы на 3-м курсе. Процедура длилась минут 5-10, но произвела на меня впечатление тем, что отличалась от семинаров по истории КПСС. Как выяснилось, задача в курсовой была не совсем корректно сформулирована, о чем и было сообщено моей руководительнице. Для себя я сделал вывод о том, что надо посещать семинары кафедры и учиться постановке задач, их решению, осмыслению. Запомнились активные обсуждения работ с участием Дюиса Даниловича, Геннадия Ивановича Быковцева, Валентина Владимировича Дудукаленко, Александра Даниловича Чернышова и многих других.

Благодаря опять-таки тогдашней системе повышения квалификации удалось поучаствовать в работе многих семинаров в разных вузах и академических институтах СССР и за рубежом. Естественно, больше всего запомнились семинары, на которых больше всего доставалось: семинары под руководством Ю. Н. Работнова, А. А. Ильюшина, Е. И. Шемякина, В. М. Бабича, Д. Д. Ивлева, Л. П. Хорошуна, А.А. Поздеева, Б. Д. Аннина, на которых докладывались результаты кандидатской и докторской диссертаций. Неоднократно выступал на семинарах Евгения Ивановича Шемякина в Новосибирске, а затем в Москве в МГУ, а также на семинарах, которые проводились в ВАКе под его руководством. На одном из семинаров присутствовал Христианович Сергей Алексеевич, отвечать на вопросы которого было непросто.

Запомнился доклад на семинаре А. А. Ильюшина, где также было задано немало вопросов, ответы на которые требовали хорошей подготовки, владение материалом, да и просто хорошей психической устойчивости.

В этом отношении всегда с благодарностью вспоминаю семинары под руководством Д. Д. Ивлева, Г. И. Быковцева, заложивших основы умения активно работать в режиме семинара. Бывали и курьезные случаи. Так, в памяти остался один из семинаров, проходивший под руководством Геннадия Ивановича Быковцева, на котором по указанию парткома нужно было заслушать доклад Тиханова, который в то время был артистом оперного театра, но когда-то в молодости окончил 2 или 3 курса физико-математического факультета университета. За счет неправильного дифференцирования он получал на основе дифференциальной геометрии дополнительные члены, которые трактовал как новые эффекты применительно к полетам ракет. Геннадий Иванович и другие участники указали ему на ошибки, однако докладчик не реагировал адекватно на критику, и тогда почти все участники семинара, не сговариваясь вместе с Геннадием Ивановичем Быковцевым, встали и вышли. Учитывая, что на семинаре присутствовал член парткома, специально направленный для наблюдения за ходом дискуссии, то этот демарш не был забыт, когда началась охота на ведьм.

## 3. Диссертации, защиты

Кандидатскую диссертацию, посвященную деформированию случайно неоднородных сред, я представил вовремя, но была очередь, которая несколько отодвинула защиту. По системе, принятой в школе, я, по рекомендации Дюиса Даниловича, доложил результаты у ведущих специалистов в этой области: В. В. Болотина, Т. Д. Шермергора, Л. П. Хорошуна, Б. М. Даринского. В. А. Ломакин был знаком с моими результатами по конференциям. ВАК утвердил диссертацию в течение 1–1,5 месяцев.

Первый доклад по результатам докторской я опять-таки по рекомендации Дюиса Даниловича сделал на семинаре у Ю. Н. Работнова, который благожелательно беседовал со мной после семинара. Однако вскоре начались на факультете и университете события, которые

затормозили защиту диссертации на десять лет. Реальное движение началось только в 1983 году опять-таки по инициативе Дюиса Даниловича, который направил меня к Евгению Ивановичу Шемякину, бывшему тогда заместителем Председателя СО АН СССР, Директором Института горного дела. У него я прошел хорошую школу, участвуя на протяжении семестра в рабочих семинарах под его руководством, общаясь после лекций, которые он читал в НГУ.

В это время заканчивалась работа совета в Институте теоретической и прикладной механики СО АН СССР, так что на защиту я вышел только в 1986 году. Три года я под руководством Евгения Ивановича доводил диссертацию до слушателей неоднократно докладываясь в Институте гидродинамики на семинарах под руководством Б. Д. Аннина, на семинарах в других ведущих вузах и организациях: в МГУ на семинарах А. А. Ильюшина, В. А. Ломакина, на семинаре под руководством В. М. Бабича в Математическом институте АН СССР в Ленинграде, в Перми на семинарах под руководством А. А. Поздеева, Ю. В. Соколкина и многих других.

Защита запомнилась тем, что самолет одного из оппонентов Т. Д. Шермергора из-за погодных условий приземлился не в Новосибирске, а в Красноярске. Однако в конечном счете к началу работы совета он успел.

Я как-то напечатал критическую статью по поводу БелВАК, однако та система подготовки специалистов высшей квалификации, которая существует в странах СНГ, несмотря на многочисленную критику, продолжает функционировать, а защита диссертации остается вехой в истории жизни каждого научного работника.

#### 4. Школы

Начиная с пятого курса, я регулярно посещал семинары под руководством Д. Д. Ивлева, так как планировал идти к нему в аспирантуру. Это позволило понять внутреннюю структуру и дух школы. В научном плане обсуждения носили принципиальный характер, мнения высказывались достаточно открыто и нередко остро, особенно при разборах своих работ. Это заставляло тщательно вникать в суть задач. Уже в аспирантуре я познакомился с подходом Дюиса Даниловича к оценке работ, по которым не было специалиста на кафедре. Он был всегда в курсе, кто и чем занимался в Союзе, и всегда точно рекомендовал, к кому поехать "доложить" работу. Система финансирования командировок в аспирантуре позволяла это делать, кроме этого были командировки по хоздоговорам. Широта контактов с ведущими учеными страны обеспечивала высокий уровень работ и быстрое приобретение профессионального уровня.

Запомнились еженедельные игры в футбол, проходившие в теплое время в парке. Зимой, насколько мне помнится, коллективных мероприятий не было, но локальные мероприятия были. Как-то в декабре Геннадий Иванович предложил мне и Борису Николаевичу Подболотову, с которым мы тогда вместе снимали две комнаты в частном доме, устроить забег на коньках, по реке длиной километров 15, а может больше. Мы доехали трамваем до конечной остановки и в районе Лесотехнического института спустились к реке, надели коньки и поехали. Было морозно, но солнечно, лед был почти везде хорошего качества, и половину пути мы одолели легко. Вторая половина далась труднее, но в конечном счете все закончилось хорошо.

С 1983 года я стал достаточно тесно взаимодействовать со школой Е. И. Шемякина, в рамках которой я доводил свою докторскую до кондиции. Здесь я попал в нормальную научную атмосферу, которую поддерживал Евгений Иванович. Запомнились многие полезные замечания Б. Д. Аннина, касавшиеся и постановок задач, точности формулировок, трактовки результатов, а также общение с Ю. В. Немировским, Л. В. Баевым и др. Там было у кого и чему учиться.

Заканчивая свои тезисы воспоминаний, хотел бы поблагодарить своих учителей – Дюиса Даниловича Ивлева и Евгения Ивановича Шемякина – и судьбу, которая свела меня с ними. К сожалению или к счастью, времени на более подробные воспоминания пока нет, а эти тезисы хотелось бы закончить оптимистичным – "продолжение следует".



*Р.С. Я знаю Анатолия Власовича с воронежских времен, знаю также его младшего брата Юрия Власовича, тоже профессора.*

*Братья прекрасно работали в Воронежском университете, держались достойно и независимо. Над Воронежской механикой уже тогда начали собираться тучи, братьям надо было расти и расти. Они уже тогда все понимали.*

*Чигаревы уехали в Минск, где получили необходимые условия для развития. А те тучи, что продолжали сгущаться, грянули над Г. И. Быковцевым, по существу, над всей воронежской механикой. Многое далеко не случайно в нашем мире. Пожелаем братьям Чигаревым многих сил и больших успехов на благо братской Белоруссии и России.*

*Д. Ивлев*





Д. Д. Ивлев, Б. Г. Миронов

## О НАЛОЖЕНИИ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ ПРИ ПРЕДЕЛЬНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ТЕЛ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

**Аннотация.** Рассматривается взаимодействие при наложении различных статически допустимых состояний при предельном сопротивлении тел.

**Ключевые слова:** напряжение, предел текучести, предельное состояние.

УДК: 539.374

1. Рассмотрим жесткоидеальнопластическое тело, находящееся под нагрузкой. Нагруженное состояние, очевидно, должно удовлетворять уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1.1)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты напряжения.

Предположим, что напряжения  $\sigma_{ij}$  являются суммой некоторых напряжений

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij(1)} + \sigma_{ij(2)} + \dots + \sigma_{ij(n)}, \quad (1.2)$$

причем каждая из совокупностей напряжений удовлетворяет своему некоторому предельному условию

$$f_m(\sigma_{ij(m)}) = k_{0m}, \quad k_{0m} = \text{const}, \quad (1.3)$$

и могут быть определены.

Предположим далее, что все компоненты напряжения (1.2) в сумме не способны вывести исходное тело в состоянии предельного сопротивления. Для этого необходимы дополнительные усилия.

На примере плоской задачи рассмотрим условие достижения телом состояния предельного сопротивления.

2. Условия пластичности в случае плоской задачи запишем в виде

$$f(\sigma_x - q_1(x, y), \sigma_y - q_2(x, y), \tau_{xy} - q_{12}(x, y)) = 0, \quad (2.1)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  – компоненты напряжений в декартовой системе координат  $xy$ ,  $q_1(x, y)$ ,  $q_2(x, y)$ ,  $q_{12}(x, y)$  – известные функции.

Воспользуемся заменой переменных:

$$\sigma_x = \sigma + k \cos 2\theta, \quad \sigma_y = \sigma - k \cos 2\theta, \quad \tau_{xy} = k \sin 2\theta, \quad (2.2)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \quad k = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (2.3)$$

Согласно (2.2) условие пластичности (2.1) запишется в виде

$$F(\sigma, k, \theta, x, y) = 0. \quad (2.4)$$

Рассмотрим случай, когда условие пластичности (2.4) не зависит от величины среднего напряжения  $\sigma$ , то есть имеет вид

$$F(k, \theta, x, y) = 0. \quad (2.5)$$

Тогда из (2.5) следует

$$k = k(\theta, x, y). \quad (2.6)$$

Подставим выражение (2.2) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (2.7)$$

с учетом (2.6) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \cos 2\theta - 2k \sin 2\theta\right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \sin 2\theta - 2k \cos 2\theta\right) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \\ + \frac{\partial k}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial k}{\partial y} \sin 2\theta = 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \sin 2\theta + 2k \cos 2\theta\right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(-\frac{\partial k}{\partial \theta} \cos 2\theta + 2k \sin 2\theta\right) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \\ + \frac{\partial k}{\partial x} \sin 2\theta - \frac{\partial k}{\partial y} \cos 2\theta = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Обозначим

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 + 4k^2}, \quad \sin 2\alpha = \frac{1}{a} \frac{\partial k}{\partial \theta}, \quad \cos 2\alpha = \frac{2k}{a}, \quad (2.9)$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial y}\right)^2}, \quad \cos 2\beta = \frac{1}{b} \frac{\partial k}{\partial x}, \quad \sin 2\beta = \frac{1}{b} \frac{\partial k}{\partial y}. \quad (2.10)$$

Согласно (2.9) и (2.10) уравнения равновесия (2.8) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - a \sin 2(\theta - \alpha) \frac{\partial \theta}{\partial x} + a \cos 2(\theta - \alpha) \frac{\partial \theta}{\partial y} = -b \cos 2(\theta - \beta), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} + a \cos 2(\theta - \alpha) \frac{\partial \theta}{\partial x} + a \sin 2(\theta - \alpha) \frac{\partial \theta}{\partial y} = -b \sin 2(\theta - \beta). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Уравнения характеристик системы уравнений (2.11) имеют вид:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{\sin 2(\theta - \alpha) \pm 1}{\cos 2(\theta - \alpha)}. \quad (2.12)$$

Преобразуем соотношения (2.12) и запишем в виде:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \operatorname{tg}(\theta - \alpha \pm \frac{\pi}{4}). \quad (2.13)$$

Очевидно, характеристики (2.13) ортогональны.

Вдоль характеристик (2.13) имеют место соотношения:

$$d\sigma \pm a d\theta = b \frac{\cos 2(\beta - \alpha) \pm \sin 2(\theta - \beta)}{\cos 2(\theta - \alpha)} dx. \quad (2.14)$$

Согласно (2.9) и (2.10) соотношения (2.14) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} d\sigma \pm \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 + 4k^2} d\theta = \\ = \frac{2k \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial k}{\partial y} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 + 4k^2} \left(\frac{\partial k}{\partial x} \sin 2\theta - \frac{\partial k}{\partial y} \cos 2\theta\right)}{2k \cos 2\theta + \frac{\partial k}{\partial \theta} \sin 2\theta}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В случае, когда

$$q_1(x, y) = q_2(x, y) = q_{12}(x, y) = 0,$$

из (2.5) и (2.15) имеем:

$$k = k(\theta), \quad (2.16)$$

$$\sigma \pm \int \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 + 4k^2} d\theta = const. \quad (2.17)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* К теории идеальной пластической анизотропии / Д. Д. Ивлев // ПММ. – 1959. – Т. XXIII. – Вып. 6.

*Ивлев Дюис Данилович,*

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ivlev21@mail.ru

*Миронов Борис Гурьевич,*

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

D. D. Ivlev, B. G. Mironov

## FLAT TASK OF THE THEORY OF IDEAL PLASTICITY

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** Interference is considered at the provision of various statically admissible conditions at limiting resistance of ph.

**Keywords:** tension, fluidity limit, limiting condition.

### REFERENCES

[1] *Ivlev, D. D.* Theory of ideal plastic anisotropy / D. D. Ivlev // PMM. – 1959. – Vol. XXIII. – No. 6.

*Ivlev Dyuis Danilovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Mironov Boris Guryevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток.

**Варданян Седрак Ваникович (vardanyan\_s@yahoo.com)** – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (cotedurhone\_mail.ru)** – доктор физико-математических наук (1996), профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский лесотехнический институт, г. Королев Московской области.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

**Ивлев Дюис Данилович (ivlev21@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

**Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

**Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

**Кулиев Валех Джафарович** ([pmdekanat@rambler.ru](mailto:pmdekanat@rambler.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный открытый университет, г. Москва.

**Ломакин Евгений Викторович** ([lomakin@nw.math.msu.su](mailto:lomakin@nw.math.msu.su)) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Максимова Людмила Анатольевна** ([maximova\\_ng@mail.ru](mailto:maximova_ng@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Манжиров Александр Владимирович** ([manzh@ipmnet.ru](mailto:manzh@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

**Маркин Алексей Александрович** ([markin@tsu.tula.ru](mailto:markin@tsu.tula.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Матченко Николай Михайлович** ([ekc\\_05@mail.ru](mailto:ekc_05@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Миронов Борис Гурьевич** ([rektorat@chdpu.edu.ru](mailto:rektorat@chdpu.edu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович** ([irakon63@hotmail.com](mailto:irakon63@hotmail.com)) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

**Михайлов Глеб Константинович** ([gkmikh@mail.ru](mailto:gkmikh@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

**Немировский Юрий Владимирович** ([nemirov@itam.nsc.ru](mailto:nemirov@itam.nsc.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

**Непершин Ростислав Иванович** ([nepershin\\_ri@rambler.ru](mailto:nepershin_ri@rambler.ru)) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва.

**Победря Борис Ефимович** ([rob@mail.ru](mailto:rob@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Радаев Юрий Николаевич** ([radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Учреждение Российской академии наук "Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН", г. Москва.

**Ревуженко Александр Филиппович** ([revuzhenko@yandex.ru](mailto:revuzhenko@yandex.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.

**Редкозубов Сергей Алексеевич (marycbka434@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

**Спорохин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

**Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv)** – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

**Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния» издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru)). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**



**и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Ивлев Д. Д., Максимова Л. А.</i> О предельном состоянии взаимопроникающих твердых деформируемых тел .....	3
<i>Непершин Р. И.</i> Моделирование упругопластического изгиба трубы проталки- ванием на роликовой машине .....	7
<i>Радаев Ю. Н.</i> Об одном новом варианте построения теории плоского деформи- рованного состояния идеальнопластического тела, исходя из пространственных уравнений Д. Д. Ивлева .....	20
<i>Максимова Л. А.</i> О статической определенности напряженного состояния при условии пластичности Мизеса .....	36
<i>Балашикова А. В.</i> О предельном состоянии пространственного слоя из идеальнопластического материала при трансляционной анизотропии, сжатого параллельными шероховатыми плитами .....	39
<i>Данилова С. В., Кулагина М. Ф.</i> Первая основная задача теории упругости для составного кольца в случае контакта с трением .....	45
<i>Квачев К. В.</i> Метод Ляпунова–Мовчана в одной задаче устойчивости колеба- ний цилиндрической оболочки .....	57
<i>Деревянных Е. А.</i> О предельной нагрузке клина при действии равномерного давления в случае трансляционной анизотропии ....	66
<i>Рожков А. И., Фильюшина Е. В.</i> Определение депланации в задаче о кручении стержней .....	71
<i>Орлов В. Н., Гузь М. П.</i> Аналитическое приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в комплексной области .....	75
<i>Семькина Т. Д., Вульман С. А.</i> Влияние на напряжен- ное состояние бесконечной пластины касательных напряжений, распределенных по круговому отверстию .....	83
<i>Субботин С. Л., Сухарев М. Б.</i> Оценка влияния распределения контактной нагрузки в задаче о вдавливании штампа в упругопластическую среду .....	88
<i>Кержаев А. П.</i> Упругопластическое состояние тонкой кольцевой пластины при наличии трансляционной анизотропии при равномерном растяжении .....	95
<i>Янковский А. П.</i> Моделирование упругопластического изгиба металлокомпо- зитных слоистых пластин регулярной структуры. 1. Структурная модель .....	102
<i>Алиев М. М., Шафиева С. В., Каримова Н. Г.</i> Критерии прочности и разру- шения разнопрочных материалов с учетом влияния всестороннего давления ....	112

<i>Северин Г. Ю.</i> Построение систем ортогональных финитных функций для численного решения нелинейного пространственного уравнения Кадомцева–Петвиашвили .....	120
<i>Кирсанов М. Н.</i> Эволюция кривых неустойчивости напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела .....	126
<i>Трещев А. А., Ромашин Д. А., Теличко В. Г.</i> Изгиб прямоугольных пластин из ортотропного нелинейно-упругого разнсопротивляющегося материала.....	131
К 70-летию Анатолия Власовича Чигарева.....	141
Анатолий Власович Чигарев.....	143
<i>Чигарев А. В.</i> Из воспоминаний.....	151
<i>Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г.</i> О наложении напряженных состояний при предельном сопротивлении тел.....	157
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	161
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	164
СОДЕРЖАНИЕ .....	166

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2012. № 2(12)**

**Отв. за выпуск:** А. В. Балашникова, Е. А. Деревянных

**Технические редакторы:** Л. Н. Улюкова, В. Ю. Лашманова, Н. А. Осипова, Л. А. Судленкова

**Компьютерная верстка:** А. В. Балашникова, Е. А. Деревянных

**Макет:** А. В. Балашникова, Е. А. Деревянных

---

Подписано в печать 26.10.2012 г. Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e.  
Усл. печ. л. 21,00. Тираж 400 экз. Цена свободная. Заказ №

---

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный  
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38