

ББК 95.4; 22.251
Ч-823

Подписной индекс в каталоге ПРЕССА РОССИИ: 13109
ISSN: 2073-5499

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2012. № 3(13)

Учредитель: ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Учредители серии: Г. Н. Григорьев, Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров, Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Т. Н. Петрова, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин, А. А. Шуканов

Редакционная коллегия: Ивлев Д. Д. – ответственный редактор, Максимова Л. А., Матченко Н. М. – зам. ответственного редактора, Тихонов С. В. – ответственный секретарь, Баженов В. Г., Буренин А. А., Георгиевский Д. В., Глаголев В. В., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Каюмов Р. А., Климов Д. М., Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Кулиев В. Д., Ломакин Е. В., Маркин А. А., Манжиров А. В., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р. И., Победря Б. Е., Радаев Ю. Н., Радченко В. П., Ревуженко А. Ф., Редкозубов С. А., Сенашов С. И., Спорыхин А. Н., Трещев А. А., Чернышов А. Д., Хромов А. И., Шашкин А. И.

Международный совет: Амензаде Р. Ю. (Азербайджан), Варданян С. В. (Армения), Мирсалимов В. М. (Азербайджан), Тамуж В. П. (Латвия), Чигарев А. В. (Белоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19.

Email: predel21@mail.ru.

WWW: <http://predel.chgpu.edu.ru>.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-36234 от 15.05.2009 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2012

В. Г. Зубчанинов, В. И. Гульятеев, А. А. Алексеев

ОБ ЭФФЕКТЕ БАУШИНГЕРА И ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ МЕТАЛЛОВ

Тверской государственной технической университет

Аннотация. В работе исследуется влияние допуска на остаточную деформацию при определении предела текучести, а также влияние на эффект Баушингера и радиус-функцию гипотетической сферической поверхности текучести в теории пластического течения.

Ключевые слова: пластичность, упругость, сложное нагружение, поверхность текучести, процессы деформирования.

УДК: 539.3

В теории пластичности тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} могут быть представлены в линейном координатном шестимерном пространстве E_6 в виде векторов [1], [2]

$$\bar{S} = S_0 \hat{i}_0 + \bar{\sigma}, \quad \bar{\varepsilon} = \Theta_0 \hat{i}_0 + \bar{\Theta}, \quad (1)$$

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\Theta} = \Theta_k \hat{i}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5), \quad (2)$$

где $\{\hat{i}_k\}$ – ортонормированный базис А. А. Ильюшина в E_5 ,

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{22} - S_{33}), S_3 = \sqrt{2}S_{12}, S_4 = \sqrt{2}S_{23}, S_5 = \sqrt{2}S_{13}, \\ \Theta_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, \Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\Theta_{11}, \Theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_{22} - \Theta_{33}), \Theta_3 = \sqrt{2}\Theta_{12}, \Theta_4 = \sqrt{2}\Theta_{23}, \Theta_5 = \sqrt{2}\Theta_{13} \end{cases} \quad (3)$$

– компоненты векторов напряжений и деформаций,

$$\sigma_0 = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}/3, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \Theta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0 \quad (4)$$

– компоненты шаровых тензоров и девиаторов соответственно. Модули векторов $\bar{\sigma}$ и $\bar{\Theta}$ в пятимерном подпространстве формоизменения E_5

$$\sigma = \sqrt{S_k S_k} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_k \Theta_k} = \sqrt{\Theta_{ij} \Theta_{ij}} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (5)$$

В теории пластического течения вводятся две основополагающие гипотезы [2]. Первая – о разложении полных деформаций на упругие ε_{ij}^e и пластические ε_{ij}^p части, что позволяет ввести понятие о мгновенных поверхностях текучести $f(\bar{\sigma}, \bar{\Theta}^p) = 0$, разделяющих в пятимерном подпространстве формоизменения E_5 область активного пластического деформирования и упругой разгрузки [2], [3]. Принцип градиентальности Драккера позволяет определить приращения векторов упругих и пластических деформаций

$$\begin{cases} d\bar{\Theta}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, & d\bar{\Theta}^p = d\lambda \operatorname{grad} f, & (d\bar{\sigma} \cdot \operatorname{grad} f > 0), \\ d\bar{\Theta}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, & d\bar{\Theta}^p = 0, & (d\bar{\sigma} \cdot \operatorname{grad} f < 0) \end{cases} \quad (6)$$

для активного и пассивного процессов деформирования соответственно.

Вторая гипотеза относится к возможности разложения полного вектора напряжений

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^0 + \bar{a}, \quad (7)$$

где $\bar{\sigma}^0$ – вектор активных напряжений, \bar{a} – вектор добавочных остаточных микронапряжений в E_5 . Математические модели в теории течения отличаются формой поверхности текучести. В простейшем случае предполагается, что она имеет форму сферы

$$2f = \bar{\sigma}^0 \cdot \bar{\sigma}^0 - C_p^2(s^p) = 0 \quad (8)$$

при трансляционно-изотропном упрочнении материала. Здесь $\sigma^0 = C_p(s^p)$ – функция изотропного упрочнения, s^p – длина дуги траектории пластического деформирования. При $s^p = 0$ имеем $\sigma^0 = \sigma^T = \sqrt{2/3} \sigma_T$, где σ_T – начальный предел текучести при простом нагружении, определяемый по техническому допуску на остаточную деформацию $\Theta_*^p \approx \sqrt{3/2} \varepsilon_{11}^p = 0,245\%$ ($\varepsilon_*^p = 0,2\%$). Принимается универсальный закон упрочнения Одквиста-Ильюшина

$$\sigma = \Phi(s), \quad (9)$$

мало отличающийся от закона единой кривой при простом нагружении $\sigma = \Phi(\Theta)$.

Эффект Баушингера при знакопеременном нагружении в E_5 оценивается параметром $\gamma = |\sigma_M^T|/\sigma_K^T$, где σ_K^T – новый предел текучести на диаграмме растяжения в некоторой точке K , σ_M^T – вторичный предел текучести при разгрузке из той же точки при "протыкании" поверхности текучести по диаметральному направлению в результате излома траектории на 180° в E_5 при допуске Θ_*^p [3].

Радиус $\sigma^0 = C_p$ гипотетической текущей сферической поверхности текучести [3]

$$\sigma^0 = C_p = \frac{\sigma_K^T - \sigma_M^T}{2} = \frac{1 - \gamma \operatorname{sgn} \sigma_M^T}{2} \sigma_K^T. \quad (10)$$

Для исследования функции $\sigma^0 = C_p(s^p)$ был проведен опыт на знакопеременное нагружение на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ имени А. А. Ильюшина в Тверском государственном техническом университете. Трубчатый образец из стали 45 с толщиной стенки $h = 1$ мм, радиусом срединной поверхности $R = 15,5$ мм и длиной рабочей части $l = 110$ мм подвергался многократному знакопеременному нагружению через равные $\Delta\Theta_1 = 0,5\%$ (рис. 1, 2) с последующим знакопеременным нагружением на $|\Delta\Theta| = 0,75\%$. На рис. 3 представлены полученные опытные зависимости параметра γ от s^p , характеризующие эффект Баушингера, а на рис. 4 – изменение радиуса σ^0 гипотетической сферической поверхности текучести, построенных при различных допусках на остаточную деформацию $\varepsilon_*^p = (0,2; 0,1; 0,05; 0,025)\%$, что составляет $\Theta_*^p = (0,245; 0,1225; 0,06125; 0,030625)\%$ соответственно в линейном девиаторном пространстве с базисом А. А. Ильюшина.

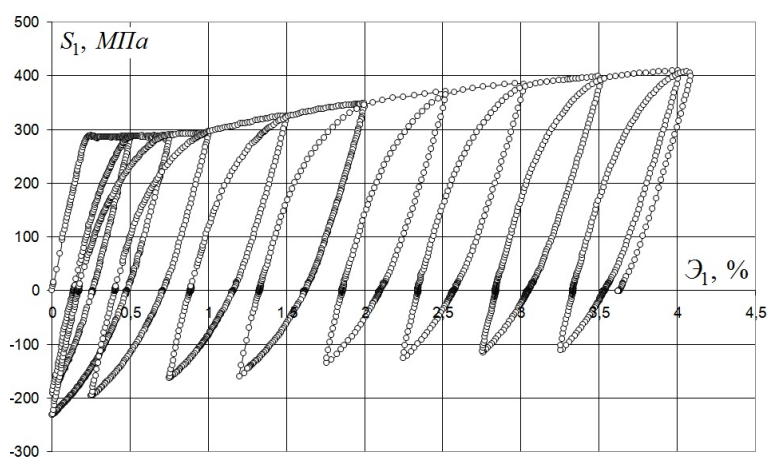


Рис. 1. Диаграмма знакопеременного нагружения $S_1 - \epsilon_1$

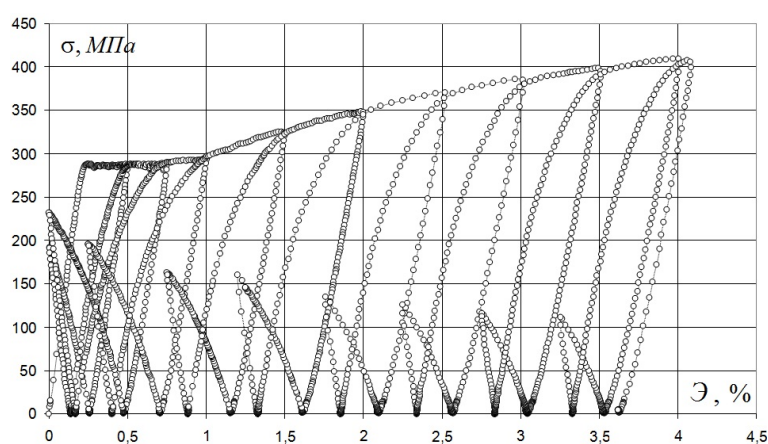


Рис. 2. Диаграмма деформирования $\sigma - \epsilon$

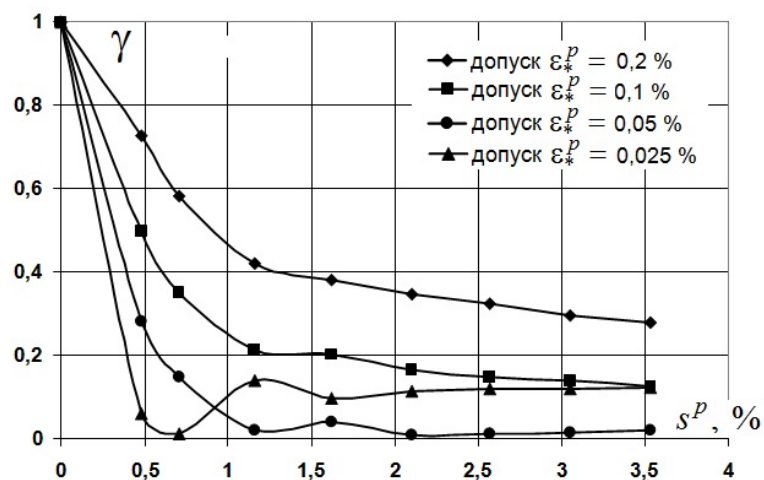


Рис. 3. Эффект относительного изменения предела текучести в процессе деформирования по Баушингеру

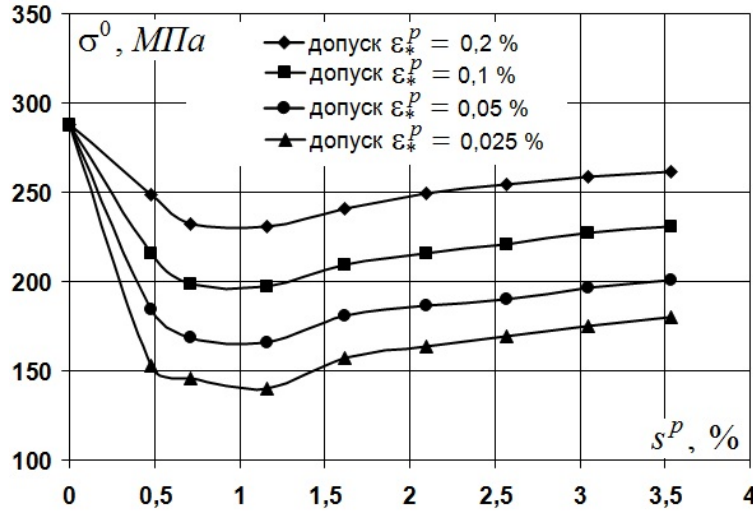


Рис. 4. Изменение радиуса гипотетической поверхности текучести при различных допусках на остаточную деформацию

За технический предел текучести σ_T в теории пластичности принимается такое напряжение при растяжении, при котором остаточные деформации становятся одного порядка с упругими ($\varepsilon \approx 10^{-3}$). За такую остаточную деформацию принимают $\varepsilon_*^p = 0,2\% = 2 \cdot 10^{-3}$ ($\mathcal{E}_*^p = 0,245\%$). При данном допуске поверхность соответствует сфере Мизеса для начально изотропных тел. При меньших допусках очертание сферы Мизеса искажается и теряет свою форму [4]. На девиаторной плоскости окружность Мизеса и шестиугольник Сен-Венана приобретают тройную симметрию [5]. При этом начальные условия текучести Мизеса и Сен-Венана имеют вид

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma^T, \quad (11)$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_m - \sigma_n}{2} = k \quad (m < n; m, n = 1, 2, 3),$$

где σ_k ($k = 1, 2, 3$) – главные нормальные напряжения, k – предел текучести при плоском чистом сдвиге. Уже при $\varepsilon_*^p = 0,1\%$ классическая теория пластичности лежит за пределами ее инженерного контроля [2]–[4]. В некоторых математических моделях этому, к сожалению, вообще не придают значения. В процессе нагружения при трансляции поверхности она вытягивается в направлении развития процесса [3].

По результатам исследования можно сделать выводы:

1. Эффект Баушингера для стали 45 с площадкой текучести выражается уменьшением по модулю вторичного предела текучести σ_M^T и параметра γ с ростом длины дуги пластического деформирования s^p . Параметр γ при различных допусках на остаточную деформацию стремится к некоторому стационарному значению при $s^p > 3\%$.

2. С ростом допуска на остаточную деформацию \mathcal{E}_*^p параметр γ увеличивается.

3. Радиус гипотетической сферической поверхности $\sigma^0 = C_p(s^p)$ совершает временное понижение типа "нырка", а затем увеличивается. При повышении допуска \mathcal{E}_*^p примерно до технического и более очертание поверхности стремится к сферической.

4. В некоторых математических моделях теории течения временное убывание функции $\sigma^0 = C_p(s^p)$ в начале процесса пластического деформирования не связывают с определением пределов текучести по допуску на остаточные деформации и искажением гипотетической

"технической" сферической поверхности текучести, что абсолютно нереально и не вызывает доверия к ним.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : АН СССР, 1963. – 273 с.
- [2] *Зубчанинов, В. Г.* Механика процессов пластических сред / В. Г. Зубчанинов. – М. : Физматлит, 2010. – 352 с.
- [3] *Зубчанинов, В. Г.* О соотношениях между напряжениями и деформациями в теории пластичности при сложном нагружении / В. Г. Зубчанинов // Проблемы прочности и пластичности : межвуз. сб. ННГУ. – 2011. – № 73. – С. 120–131.
- [4] *Новожилов, В. В.* Вопросы механики сплошных сред / В. В. Новожилов. – Л. : Судостроение, 1989. – 397 с.
- [5] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.

Зубчанинов Владимир Георгиевич,

доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь

e-mail: vgz@rambler.ru

Гулятьев Вадим Иванович,

кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой строительства и энергетики, Тверской государственный технический университет, г. Тверь

e-mail: vig0@mail.ru

Алексеев Андрей Алексеевич,

кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь

e-mail: kafsm@yandex.ru

V. G. Zubchaninov, V. I. Gulyaev, A. A. Alekseev

**ABOUT BAUSHINGER'S EFFECT AND THE YIELD SURFACE
AT PLASTIC DEFORMATION OF METALS**

Tver State Technical University

Abstract. In article research influence of the admission on residual deformation at definition of a limit of fluidity, and also influence on Baushinger's effect and radius function of a hypothetical spherical yield surface in the plastic-flow theory.

Keywords: plasticity, elasticity, complex loading, the yield surface, the deformation process.

REFERENCES

- [1] *Ilyushin, A. A.* Plasticity. Bases of the general mathematical theory / A. A. Ilyushin. – M. : AN USSR, 1963. – 273 p.
- [2] *Zubchaninov, V. G.* Mechanics of processes of plastic environments / V. G. Zubchaninov. – M. : Fizmatlit, 2010. – 352 p.
- [3] *Zubchaninov, V. G.* About ratios between tension and deformations in the plasticity theory at difficult loading / V. G. Zubchaninov // Durability and plasticity problems : interuniversity collection of NNGU. – 2011. – No. 73. – P. 120–131.
- [4] *Novozhilov, V. V.* Questions of mechanics of continuous environments / V. V. Novozhilov. – L. : Shipbuilding, 1989. – 397 p.
- [5] *Ishlinsky, A. Yu.* Mathematical theory of plasticity / A. Yu. Ishlinsky, D. D. Ivlev. – M. : Fizmatlit, 2001. – 704 p.

Zubchaninov, Vladimir Georgievich

Dr. Tech. Sci., Professor, Department of the Resistance of materials, elasticity and plasticity theories, Tver State Technical University, Tver

Gulyaev, Vadim Ivanovich

Cand. Tech. Sci., Assoc. Professor, Head of the Department of the Building and energy, Tver State Technical University, Tver

Alekseev, Andrey Alekseevich

Cand. Tech. Sci., Assoc. Professor, Department of the Resistance of materials, elasticity and plasticity theories, Tver State Technical University, Tver

ВОЗДЕЙСТВИЕ НА КРИВОЛИНЕЙНУЮ ТРЕЩИНУ ТЕРМОУПРУГИМ ПОЛЕМ НАПРЯЖЕНИЙ

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Аннотация. Проведено исследование влияния на искривленную трещину в растягиваемой плоскости термоупругого поля напряжений, наведенного тепловым источником.

Ключевые слова: искривленная трещина, тепловой источник, термоупругое поле напряжений, коэффициенты интенсивности напряжений.

УДК: 539.375

Постановка задачи. Рассмотрим неограниченную плоскость, ослабленную трещиной длины 2ℓ в начале координат. В реальных материалах из-за структурных и технологических факторов поверхности трещины имеют неровности и искривления. Рассмотрим задачу механики разрушения о трещине в плоскости, полагая, что контур трещины имеет шероховатости (малые отклонения от прямолинейной формы). Берега трещины свободны от внешних нагрузок. На бесконечности пластина подвергается однородному растяжению вдоль оси ординат $\sigma_y^\infty = \sigma_0$. Для торможения роста трещины на пути ее распространения с помощью нагрева тепловым источником области S до температуры T_0 создается зона сжимающих напряжений.

Принимаем следующие допущения:

- все упругие характеристики материала пластины не зависят от температуры;
- материал пластины представляет собой однородное и изотропное тело.

Считаем, что в момент $t = 0$ произвольная область S на пути роста трещины в пластине мгновенно нагревается до постоянной температуры $T = T_0$. Остальная часть пластины в начальный момент имеет температуру $T = 0$.

Трещина, образуемая в пластине, считается близкой к прямолинейной форме, допуская лишь малые отклонения линии трещины от прямой $y = 0$.

Уравнение линии трещины принимается в виде $y = f(x)$, $-\ell \leq x \leq \ell$.

На основании принятого допущения о форме линии трещины функции $f(x)$ и $f'(x)$ являются малыми величинами.

Решение кривой задачи термоупругости. Для решения задачи термоупругости вначале определяем температурное поле в плоскости. Температурное поле в плоскости определяется из решения краевой задачи теории теплопроводности

$$a\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad T = \begin{cases} T_0 & (x, y \in S) \\ 0 & (x, y \notin S) \end{cases} \quad \text{при } t = 0, \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа; a – коэффициент температуропроводности материала плоскости.

Для обобщенного плоского напряженного состояния считается, что пластина теплоизолирована на боковых поверхностях.

Для определенности, не нарушая общности задачи, пусть область S представляет собой прямоугольник со сторонами $2x_0$ и $2y_0$, а центр прямоугольника O_1 имеет координаты (L, b) .

Решение краевой задачи (1) для плоскости будет иметь вид:

$$T_1(x, y, t) = \frac{T_0}{4} \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{x-L+x_0}{2\sqrt{at}} \right) + \operatorname{Erf} \left(\frac{x_0+L-x}{2\sqrt{at}} \right) \right] \times \\ \times \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{y-b+y_0}{2\sqrt{at}} \right) + \operatorname{Erf} \left(\frac{y_0+b-y}{2\sqrt{at}} \right) \right], \quad (2)$$

$$\operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-u^2) du.$$

Краевые условия на берегах трещины имеют вид

$$\sigma_n = 0, \quad \tau_{nt} = 0, \quad (3)$$

где n, t – натуральные координаты.

Решение плоской задачи термоупругости получим методом суперпозиции

$$\sigma_x = \sigma_{x_1} + \sigma_{x_0}, \quad \sigma_y = \sigma_{y_1} + \sigma_{y_0}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy_1} + \tau_{xy_0}, \quad (4)$$

где $\sigma_{x_0}, \sigma_{y_0}, \tau_{xy_0}$ есть решение задачи термоупругости для пластины без трещины.

С помощью метода термоупругого потенциала перемещений [1] для термоупругих напряжений в пластине без трещины получим

$$\sigma_{x_0} = -2\mu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_{y_0} = -2\mu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy_0} = 2\mu \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (5)$$

$$\Delta F = (1 + \nu)\alpha T(x, y, t), \quad (6)$$

где μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона материала; α – коэффициент линейного температурного расширения.

Дифференцируя (6) по времени t и учитывая уравнение теплопроводности (1), находим

$$\Delta \left[\frac{\partial F}{\partial t} - (1 + \nu)\alpha a T \right] = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что функция $\frac{\partial F}{\partial t} - (1 + \nu)\alpha a T$ является гармонической во всей плоскости. Следовательно, она может быть либо постоянной величиной, либо некоторой функцией времени $F_1(t)$. Не нарушая общности, функцию $F_1(t)$ можно считать равной нулю.

Следовательно, для термоупругого потенциала F получается уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (1 + \nu)\alpha a T. \quad (7)$$

Интегрирование его приводит к формуле

$$F = (1 + \nu)\alpha a \int_0^t T(x, y, t) dt + F_0(x, y). \quad (8)$$

Здесь $F_0(x, y)$ – термоупругий потенциал, соответствующий начальной температуре, в рассматриваемом случае

$$\Delta F_0 = (1 + \nu)\alpha T_0 \quad (x, y \in S) \\ \Delta F_0 = 0 \quad (x, y \notin S). \quad (9)$$

Решая (9), получаем

$$F_0(x, y) = -\frac{(1+\nu)\alpha T_0}{2\pi} \iint_S \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi d\eta, \quad (10)$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

С помощью (2), (8), (10) и (5) находим

$$\begin{aligned} \sigma_{y_0} = & -\frac{\mu(1+\nu)\alpha T_0}{4\sqrt{\pi}} \left\{ 4\sqrt{\pi} A(x, y) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y-b+y_0}{x-L+x_0}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_0+b-y}{x_0+L-x}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_0+b-y}{x-L+x_0}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{y-b+y_0}{x+L+x_0}\right) \right] - \right. \\ & \left. - \int_0^t \frac{1}{\tau\sqrt{a\tau}} \left[(x-L+x_0) \exp\left(-\frac{(x-L+x_0)^2}{4a\tau}\right) + (x_0+L-x) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \exp\left(-\frac{(x_0+L-x)^2}{4a\tau}\right) \right] \cdot \left[\operatorname{Erf}\left(\frac{y-b+y_0}{2\sqrt{a\tau}}\right) + \operatorname{Erf}\left(\frac{y_0+b-y}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right] d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $A(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y \in S) \\ 0 & (x, y \notin S) \end{cases}$,

$$\begin{aligned} \tau_{xy_0} = & -\frac{\mu(1+\nu)\alpha T_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{(x-x_0-L)^2 + (y-b+y_0)^2}{(x-x_0-L)^2 + (y-y_0-b)^2} + \right. \\ & \left. + \ln \frac{(x-L+x_0)^2 + (y-y_0-b)^2}{(x-L+x_0)^2 + (y-b+y_0)^2} - \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[\exp\left(-\frac{(x-L+x_0)^2}{4a\tau}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \exp\left(-\frac{(x_0+L-x)^2}{4a\tau}\right) \right] \left[\exp\left(-\frac{(y-b+y_0)^2}{4a\tau}\right) - \exp\left(-\frac{(y_0+b-y)^2}{4a\tau}\right) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Граничные условия (3) на берегах трещины принимают вид:

$$\sigma_{n_1} - i\tau_{nt_1} = -(\sigma_{y_0}(x, 0) - i\tau_{xy_0}(x, 0)). \quad (13)$$

Рассмотрим некоторую произвольную реализацию шероховатой (с малыми отклонениями от прямолинейной формы) поверхности берегов трещины.

Поскольку функции $f(x)$ и $f'(x)$ являются малыми величинами, функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \varepsilon H(x) \quad -\ell \leq x \leq \ell, \quad (14)$$

ε – малый параметр.

Компоненты тензора напряжений $\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \tau_{xy_1}$ разложим по малому параметру

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x^{(0)} + \varepsilon\sigma_x^{(1)} + \dots, \quad \sigma_{y_1} = \sigma_y^{(0)} + \varepsilon\sigma_y^{(1)} + \dots, \quad \tau_{xy_1} = \tau_{xy}^{(0)} + \varepsilon\tau_{xy}^{(1)} + \dots$$

Значения напряжений при $y = f(x)$ найдем, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $y = 0$.

Используя процедуру метода возмущений с учетом предыдущих формул, находим граничные условия при $y = 0$, $-\ell \leq x \leq \ell$:

в нулевом приближении:

$$\sigma_y^{(0)} = -\sigma_{y_0}(x, 0), \quad \tau_{xy}^{(0)} = -\tau_{xy_0}(x, 0) \quad \text{при } y = 0, \quad -\ell \leq x \leq \ell, \quad (15)$$

в первом приближении:

$$\sigma_y^{(1)} = N, \quad \tau_{xy}^{(1)} = T \quad \text{при } y = 0, -\ell \leq x \leq \ell. \quad (16)$$

$$\text{Здесь } N = 2\tau_{xy}^{(0)} \frac{dH}{dx} - H \frac{\partial \sigma_y^{(0)}}{\partial y}, \quad T = \left(\sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)} \right) \frac{dH}{dx} - H \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial y}.$$

Для решения краевых задач в каждом приближении используем комплексные потенциалы Колосова–Мухелишвили [2]. Используя формулы Колосова–Мухелишвили и граничное условие (15), задачу в нулевом приближении сведем к определению двух аналитических функций $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ из краевого условия:

$$\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + z\overline{\Phi_1'(z)} + \overline{\Psi(z)} = f_1(x) - if_2(x) \quad \text{при } y = 0, \quad |x| \leq \ell \quad (17)$$

С целью расщепления задачи (17) будем искать искомые функции в предположении, что

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \frac{1}{2}(Z_I - iZ_{II}); \quad \Psi_1(z) = iZ_{II} - \frac{1}{2}z(Z_I' - iZ_{II}'); \\ Z_I' &= \frac{dZ_I}{dz}; \quad Z_{II}' = \frac{dZ_{II}}{dz}, \end{aligned} \quad (18)$$

где Z_I и Z_{II} – неизвестные функции.

На основании формул Колосова–Мухелишвили получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= ReZ_I - yImZ_I' + 2ImZ_{II} + yReZ_{II}'; \\ \sigma_{y_1} &= ReZ_I + yImZ_I' - yReZ_{II}'; \\ \tau_{xy_1} &= -yReZ_I' + ReZ_{II} - yImZ_{II}'. \end{aligned} \quad (19)$$

Согласно (19) граничные условия (17) на берегах трещины в задаче термоупругости в нулевом приближении примут вид

$$ReZ_I = -\sigma_{y_0}(x, 0) \quad \text{при } y = 0, |x| \leq \ell,$$

$$ReZ_{II} = -\tau_{xy_0}(x, 0) \quad \text{при } y = 0, |x| \leq \ell.$$

Решение задачи об определении искоемых функций Z_I и Z_{II} по заданной действительной части на берегах трещины дается следующими формулами:

$$Z_I = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - \ell^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sigma_{y_0}(x, 0) \sqrt{\ell^2 - x^2}}{z - x} dx, \quad (20)$$

$$Z_{II} = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - \ell^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\tau_{xy_0}(x, 0) \sqrt{\ell^2 - x^2}}{z - x} dx. \quad (21)$$

С помощью соотношений (20), (21) и (19) можно вычислить искомые компоненты напряжений в любой точке плоскости, возникшие от действия теплового источника в нулевом приближении.

После нахождения компонент напряжений в нулевом приближении находим функции N и T согласно формулам (16). Последовательность решения задачи в первом приближении аналогична нулевому приближению.

Решение задачи об определении искоемых функций $Z_I^{(1)}(z)$ и $Z_{II}^{(1)}(z)$ дается следующими формулами:

$$Z_I^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - \ell^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{N(x, 0) \sqrt{\ell^2 - x^2}}{z - x} dx, \quad (22)$$

$$Z_{II}^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - \ell^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{T(x, 0) \sqrt{\ell^2 - x^2}}{z - x} dx. \quad (23)$$

В механике разрушения наибольший интерес представляет определение поведения напряжений вблизи концов трещины.

Вблизи правого конца трещины (ближайшего к тепловому источнику), представляющего в рассматриваемой задаче наибольший интерес, положим $z - \ell = re^{i\theta}$, где r – малая величина, θ – полярный угол. Из формул (20)–(23) следует, что при малых $r = |z - \ell|$ верны следующие асимптотические формулы:

$$Z_I = \frac{K_I^{(1)}}{\pi\sqrt{z^2 - \ell^2}}; \quad Z_{II} = \frac{K_{II}^{(1)}}{\pi\sqrt{z^2 - \ell^2}},$$

где

$$K_I^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi\ell}} \int_{-\ell}^{\ell} \sigma_{y_0}(t, 0) \frac{\sqrt{\ell+t}}{\sqrt{\ell-t}} dt - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi\ell}} \int_{-\ell}^{\ell} N \frac{\sqrt{\ell+t}}{\sqrt{\ell-t}} dt, \quad (24)$$

$$K_{II}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi\ell}} \int_{-\ell}^{\ell} \tau_{xy_0}(t, 0) \frac{\sqrt{\ell+t}}{\sqrt{\ell-t}} dt - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi\ell}} \int_{-\ell}^{\ell} T \frac{\sqrt{\ell+t}}{\sqrt{\ell-t}} dt. \quad (25)$$

Окончательное решение поставленной задачи найдем с помощью суммирования решения двух задач: о растяжении пластины усилиями σ_0 на бесконечности (задача Гриффитса) и задачи термоупругости для температурного поля.

В результате для коэффициентов интенсивности напряжений будем иметь

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi\ell} + K_I^{(1)}, \quad K_{II} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\pi\ell}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{df}{dt} \frac{\sqrt{\ell+t}}{\sqrt{\ell-t}} dt + K_{II}^{(1)}. \quad (26)$$

Аналогично можно рассмотреть случай, когда область S в окрестности каждой вершины трещины представляют собой совокупность прямолинейных областей.

Зная коэффициенты интенсивности напряжений для любого момента времени с помощью обобщенного критерия хрупкого разрушения, называемого также критерием максимального окружного напряжения σ_θ [3], [4], проводим анализ развития трещины. Согласно этому критерию, начальное развитие трещины в момент ее страгивания происходит в плоскости, для которой сингулярная часть нормальных растягивающих напряжений σ_θ имеет максимальную интенсивность. Величину угла $\theta = \theta_*$, характеризующую направление этой плоскости, находим из соотношения

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\sqrt{2\pi r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right] = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_*.$$

Для вычисления критической нагрузки $\sigma_0 = \sigma_0^*$ и угла отклонения θ_* имеем [4] следующие уравнения:

$$\theta_* = 2 \arctg \left[\frac{1 - \sqrt{1 + 8\lambda^2}}{4\lambda} \right], \quad \left(\lambda = \frac{K_I}{K_{II}} \right), \quad (27)$$

$$4\sqrt{2}K_I\lambda^3 \frac{1 + 3\sqrt{1 + 8\lambda^2}}{(12\lambda^2 + 1 - \sqrt{1 + 8\lambda^2})^{3/2}} = K_C(T). \quad (28)$$

Уравнения (27)–(28) позволяют численным расчетом исследовать влияние термоупругого поля, наведенного тепловым источником, на развитие трещины.

В соотношениях критерия хрупкого разрушения характеристика трещиностойкости (вязкость разрушения) зависит от температуры T . Знание зависимости трещиностойкости материала от температуры необходимо для полного анализа прочности конструкции. Как показывают результаты исследований [5], в практическом диапазоне изменения температуры зависимость K_C от температуры вне интервала хладноломкости можно с достаточной точностью аппроксимировать полиномом второй степени от температуры

$$K_C = A_0 + A_1T + A_2T^2, \quad (29)$$

где A_0 есть константа K_{C_0} при температуре $T = 0$, A_1 , A_2 – некоторые эмпирические постоянные.

Подставляя в условие (28) найденные коэффициенты интенсивности напряжений и вместо величины $K_C(T)$ соотношение (29), получаем в неявной форме зависимость длины трещины от приложенной нагрузки, времени и геометрических и физических параметров задачи.

Анализируя численно зависимость коэффициента интенсивности напряжений, можно определить влияние интенсивности теплового источника, геометрических параметров зоны повышенных температур и пластины, времени на значение критических коэффициентов интенсивности напряжений. На основании результатов расчета можно сделать некоторые выводы. Как известно, трещина устойчива, если растягивающее напряжение σ_0 , необходимое для ее поддержания в подвижно-равновесном состоянии, возрастает с увеличением длины трещины. Условие устойчивого роста трещины имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \left[-\frac{1-\nu}{2\mu} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{K_C^2}{E} \right] > 0.$$

Исследование показало, что рост трещины нормального разрыва происходит устойчиво (величина K_I убывает по мере приближения трещины к зоне повышенных температур, т. е. к тепловому источнику). По мере расположения трещины в зоне сжатия растягивающие напряжения частично компенсируются термоупругими напряжениями (полями), и это в определенной мере приводит к "упрочнению" пластины.

Зависимость угла отклонения трещины θ_* $\left(\frac{K_{II}}{K_I}\right)$ представлена на рис. 1 при следующих значениях свободных параметров:

$$t_* = 4at/L^2 = 10; \quad \varepsilon = x_0/L = 0,6; \quad \varepsilon_1 = y_0/L = 0,1; \quad b/L = 0,2; \quad \nu = 0,3.$$

При большом удалении вершины трещины от области S (теплового источника) уменьшение интенсивности напряжений при вершине трещины невелико. По мере приближения вершины трещины к тепловому источнику из-за неравномерного нагрева берегов растущей трещины траектория излома меняет направление. Начало роста трещины возникало под углом $14^\circ - 20^\circ$ к оси симметрии пластины в зависимости от геометрических параметров зоны повышенных температур (область S).

При приближении вершины трещины к области S уменьшение интенсивности напряжений становится все более весомым и достигает наибольшего значения, когда трещина непосредственно попадает в зону повышенных температур. Степень уменьшения интенсивности напряжений тем больше, чем выше температура области S (нагретая зона).

На рис. 2 представлена диаграмма остаточной прочности (зависимость безразмерной предельной растягивающей нагрузки $\sigma_* = \sigma_0 \sqrt{\pi L} / K_C$ от безразмерной длины трещины $\ell_* = \ell / \ell_0$) пластины для следующих значений свободных параметров: $\nu = 0,3$; $\varepsilon_0 = 0,6$; $\varepsilon_1 = 0,1$; $t_* = 10$; $A = \frac{K_{C0}}{T_0}$; $A = \frac{K_{C0}}{2T_0}$; $A = 0$ (кривые 1-3), где $\ell_0 = \frac{K_{C0}^2}{\pi[\mu T_0(1+\nu)\alpha]^2}$.

В рассмотренном случае причиной торможения трещины являются сжимающие напряжения термоупругих полей и изменение вязкости разрушения материала. Как известно, вязкость разрушения большинства металлов монотонно возрастает с увеличением температуры.

Как показывает численный анализ, наиболее эффективным способом торможения трещины с помощью теплового источника является изменение симметрии поля напряжений в окрестности вершины трещины. Этот способ основывается на том, что вторжение трещины в зону действия термоупругих напряжений вызывает перераспределение напряженных полей в кончике трещины и вблизи теплового источника. Заканчивается это тем, что в результате меняется направление растягивающих напряжений, и трещина вынуждена повернуться в сторону источника тепла. Это приводит к снижению темпа разрушения и, в конечном счете, к кратковременным и полным остановкам роста трещины. Этот результат имеет чрезвычайно важное практическое значение, так как позволяет активно бороться с опасными сквозными трещинами эксплуатационного или технологического происхождения, достигая полного торможения таких трещин путем создания с помощью источника тепла области повышенных температур на пути трещины.

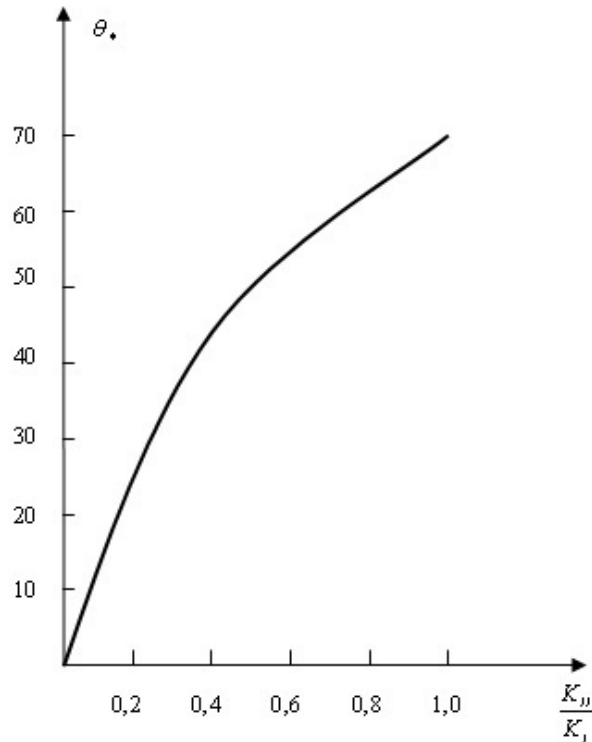


Рис. 1

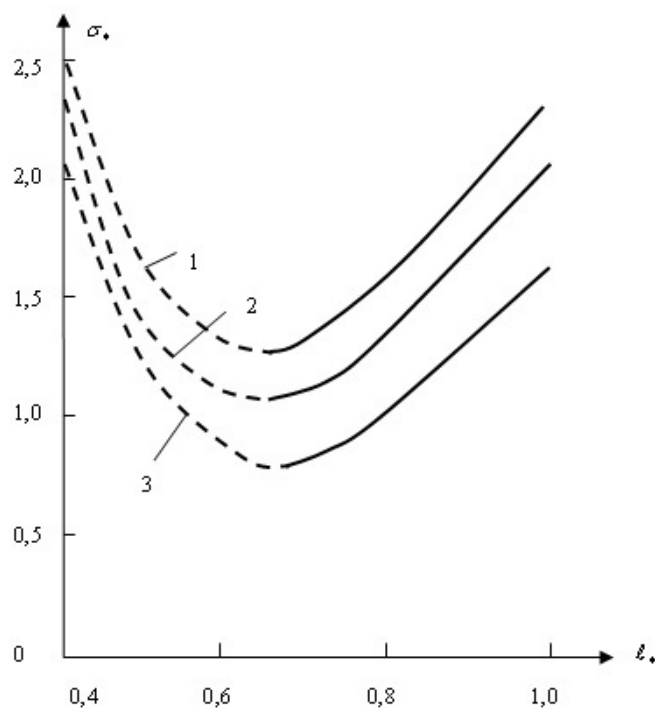


Рис. 2

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Паркус, Г. Неуставившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – М. : Физматлит, 1963. – 252 с.
- [2] Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [3] Панасюк, В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев : Наук. думка, 1991. – 416 с.
- [4] Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
- [5] Панасюк, В. В. Механика разрушения и прочность материалов : справ. пособие. Т. 1. Основы механики разрушения материалов / В. В. Панасюк, А. Е. Андрейкив, В. З. Паргон. – Киев : Наук. думка, 1988. – 488 с.

Мустафаев Азер Байрам оглы,

кандидат физико-математических наук, докторант, Институт математики и механики НАН
Азербайджана, г. Баку

e-mail: irakon63@hotmail.com

A. B. Mustafayev

INFLUENCE ON CURVILINEAR CRACK THERMOELASTIC FIELD OF STRESSES

Institute of mathematics and mechanics of NAN of Azerbaijan

Abstract. Research of influence on the curved crack in a stretched plane thermoelastic field of stresses induced by a thermal source is lead.

Keywords: curved crack, thermal source, thermoelastic field of stresses, stresses of intensity factors.

REFERENCES

- [1] *Parkus, H.* Institutionary Warmes-pannungen / H. Parkus. – Wien : Springer, 1963. – 252 p.
- [2] *Muskhelishvili, N. I.* Some basic problem in the mathematical theory of elasticity / N. I. Muskhelishvili. – Moscow : Nauka, 1966. – 707 p.
- [3] *Panasyuk, V. V.* The mechanics of the quasi brittle fracture of materials / V. V. Panasyuk. – Kiev : Naukova Dumka. 1991. – 416 p.
- [4] *Cherepanov, G. P.* Mechanics of brittle fracture / G. P. Cherepanov. – Moscow : Nauka, 1974. – 640 p.
- [5] *Panasyuk, V. V.* The mechanics of fracture and strength of materials / V. V. Panasyuk, O. Ye. Andreikiv, V. Z. Parton. – Kiev : Naukova Dumka, 1988. – 488 p.

Mustafayev, Azer Bairam oglu

Candidate of Phys. Math., Doctorant, Institute of Mathematics and Mechanics of NAN of Azerbaijan, Baku

РЕШЕНИЕ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Тульский государственный университет

Аннотация. Рассмотрена задача расчета пологих сферических оболочек из материалов, свойства которых зависят от вида напряженного состояния. Оценено влияние разнородности, связанности и геометрической нелинейности на напряженно-деформированное состояние сферической оболочки из графита АРВ.

Ключевые слова: разнородность, геометрическая нелинейность, связанность, термоупругость, оболочки.

УДК: 539.384.6

Одной из основных задач развития промышленности России является создание новых высокоэффективных материалов, таких как графиты, композиты, наноматериалы, углепластики, стеклопластики. Их свойства зачастую противоречат классическим теориям механики деформируемого твердого тела. Для успешного внедрения прогрессивных материалов и экономичных пространственных конструкций, выполненных из них, необходимо применение новых математических моделей расчета, которые учитывают зависимость свойств материала от вида реализуемого в точке напряженного состояния, связанность полей напряжений и температур, геометрическую нелинейность.

Используя методику, предложенную в работах Н. М. Матченко и А. А. Трещева [1], [2] в рамках закона теплопроводности Фурье, классических условий динамического равновесия и гипотез Кирхгофа-Лява были получены разрешающие уравнения для решения связанной задачи об изгибе сферических оболочек из изотропных разнородных материалов в условиях термомеханического нагружения.

Уравнения состояния термоупругого изотропного разнородного материала получим в пространстве главных напряжений, применив операции дифференцирования к термодинамическому потенциалу Гиббса [1], в форме $e_k = -\partial\Gamma/\partial\sigma_k$ и $L = \partial\Gamma/\partial T$. Переходя к цилиндрической системе координат и используя статическую гипотезу Кирхгофа-Лява, принимаем $\sigma_z = 0$, тогда, с учетом осесимметричного нагружения, получим:

$$\begin{aligned} e_r &= A\sigma_r + C\sigma_\phi + A_t\theta^\circ + B\alpha_r\sigma_r + D(\alpha_r + \alpha_\phi)\sigma_\phi + \\ &\quad + (0,5B - D)[(1 - \alpha_r^2)\sigma_r - \alpha_\phi^2\sigma_\phi]\alpha_r + B_t\alpha_r\theta^\circ; \\ e_\phi &= A\sigma_\phi + C\sigma_r + A_t\theta^\circ + B\alpha_\phi\sigma_\phi + D(\alpha_\phi + \alpha_r)\sigma_r + \\ &\quad + (0,5B - D)[(1 - \alpha_\phi^2)\sigma_\phi - \alpha_r^2\sigma_r]\alpha_\phi + B_t\alpha_\phi\theta^\circ; \\ L &= (A_t + B_t\alpha_r)\sigma_r + (A_t + B_t\alpha_\phi)\sigma_\phi + C_\sigma\theta^\circ/T_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где e_r, e_ϕ – радиальные и окружные деформации, σ_r, σ_ϕ – радиальные и окружные напряжения, A, B, C, D, A_t, B_t – константы потенциала [1], [2], $A = 0,5(1/E^+ + 1/E^-)$, $B = 0,5(1/E^+ - 1/E^-)$, $A_t = 0,5(\alpha_{t1}^+ + \alpha_{t1}^-)$, $C = -0,5(\nu^+/E^+ + \nu^-/E^-)$, $B_t = 0,5(\alpha_{t1}^+ - \alpha_{t1}^-)$, $D = -0,5(\nu^+/E^+ - \nu^-/E^-)$, $E^+, E^-, \nu^+, \nu^-, \alpha_{t1}^+, \alpha_{t1}^-$ – модули упругости, коэффициенты Пуассона и коэффициенты линейного теплового расширения материала при одноосном растяжении (+) и одноосном сжатии (-) соответственно; $\alpha_r = \sigma_r/S$, $\alpha_\phi = \sigma_\phi/S$ – нормированные напряжения, $S = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\phi^2}$ – модуль вектора полного напряжения, L – плотность энтропии, $\theta^\circ = T - T_0$ – изменение температуры, T – текущая температура оболочки в точке, T_0 – начальная температура оболочки.

Так как рассматриваемая задача физически и геометрически нелинейная, решение будем искать в приращениях функций. Линеаризацию проводим на начальном этапе построения разрешающей системы уравнений согласно методу последовательных нагружений.

Приращения деформаций $\delta e_r, \delta e_\phi$ выразим через приращения напряжений $\delta\sigma_r, \delta\sigma_\phi$ и изменений температур $\delta\theta^\circ$ с учетом уравнений (1):

$$\delta e_r = \Delta_{11}\delta\sigma_r + \Delta_{12}\delta\sigma_\phi + \Delta_{13}\delta\theta^\circ; \quad \delta e_\phi = \Delta_{21}\delta\sigma_r + \Delta_{22}\delta\sigma_\phi + \Delta_{23}\delta\theta^\circ, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= \frac{\partial e_r}{\partial \sigma_r} = A + B(\alpha_r^3 + 2\alpha_r\alpha_\phi^2) + D\alpha_\phi^3 - D\alpha_r\alpha_\phi^2 + \\ &+ (0,5B - D)[\alpha_r^3 + 2\alpha_r\alpha_\phi^2 - \alpha_r^5 - \alpha_\phi^5 - 4\alpha_r^3\alpha_\phi^2 + 2\alpha_r^2\alpha_\phi^3] + B_t\theta^\circ\alpha_\phi/S; \\ \Delta_{12} &= \Delta_{21} = \frac{\partial e_r}{\partial \sigma_\phi} = \frac{\partial e_\phi}{\partial \sigma_r} = C - B\alpha_r^2\alpha_\phi + D(2\alpha_r\alpha_\phi + \alpha_r^3 + \alpha_\phi^3) + \\ &+ (0,5B - D)[\alpha_\phi^3 + 2\alpha_\phi\alpha_r^2 - \alpha_\phi^5 - \alpha_r^5 - 4\alpha_r^2\alpha_\phi^3 + 2\alpha_r^3\alpha_\phi^2] + B_t\theta^\circ\alpha_r/S; \\ \Delta_{22} &= \frac{\partial e_\phi}{\partial \sigma_\phi} = A + B(\alpha_\phi^3 + 2\alpha_r^2\alpha_\phi) + D\alpha_r^3 - D\alpha_r^2\alpha_\phi + \\ &+ (0,5B - D)[\alpha_\phi^3 + 2\alpha_\phi\alpha_r^2 - \alpha_\phi^5 - \alpha_r^5 - 4\alpha_r^2\alpha_\phi^3 + 2\alpha_r^3\alpha_\phi^2] + B_t\theta^\circ\alpha_r/S; \\ \Delta_{13} &= \frac{\partial e_r}{\partial \theta^\circ} = A_t + B_t\alpha_r; \quad \Delta_{23} = \frac{\partial e_\phi}{\partial \theta^\circ} = A_t + B_t\alpha_\phi. \end{aligned}$$

Выразим из уравнений (2) приращения главных напряжений:

$$\begin{aligned} \delta\sigma_r &= B_{11}\delta e_r + B_{12}\delta e_\phi + B_{13}\delta\theta^\circ; \\ \delta\sigma_\phi &= B_{21}\delta e_r + B_{22}\delta e_\phi + B_{23}\delta\theta^\circ, \end{aligned} \quad (3)$$

где $B_{11} = \Delta_{22}/\Delta$; $B_{12} = -\Delta_{21}/\Delta$; $B_{21} = -\Delta_{12}/\Delta$; $B_{22} = \Delta_{11}/\Delta$; $B_{13} = (\Delta_{13}\Delta_{21} - \Delta_{23}\Delta_{11})/\Delta$; $B_{23} = (\Delta_{23}\Delta_{12} - \Delta_{13}\Delta_{22})/\Delta$; $\Delta = \Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21}$.

Для расширения границ применимости решения задачи максимальные прогибы ограничиваем толщиной оболочки. Тогда компоненты тензора деформаций будем записывать согласно теории Т. Кармана [3]:

$$e_r = u_{,r} - kw + 0,5w_{,r}^2 - zw_{,rr}; \quad e_\phi = \frac{u}{r} - kw - \frac{z}{r}w_{,r}, \quad (4)$$

где u, w – радиальные перемещения и прогибы срединной поверхности, k – кривизна оболочки, r – радиальная координата, z – вертикальная координата, отсчитываемая от срединной поверхности оболочки.

Пренебрегая малыми высшего порядка, получим выражения для приращений деформаций:

$$\begin{aligned} \delta e_r &= (\delta u)_{,r} - k\delta w + w_{,r}(\delta w)_{,r} - z(\delta w)_{,rr}; \\ \delta e_\phi &= \frac{\delta u}{r} - k\delta w - \frac{z}{r}(\delta w)_{,r}. \end{aligned} \quad (5)$$

Определим приращения усилий:

$$\begin{aligned}
\delta N_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_r dz = \int_{-h/2}^{h/2} (B_{11} \delta e_r + B_{12} \delta e_\phi + B_{13} \delta \theta^\circ) dz; \\
\delta N_\phi &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_\phi dz = \int_{-h/2}^{h/2} (B_{21} \delta e_r + B_{22} \delta e_\phi + B_{23} \delta \theta^\circ) dz; \\
\delta M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_r z dz = \int_{-h/2}^{h/2} (B_{11} \delta e_r + B_{12} \delta e_\phi + B_{13} \delta \theta^\circ) z dz; \\
\delta M_\phi &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_\phi z dz = \int_{-h/2}^{h/2} (B_{21} \delta e_r + B_{22} \delta e_\phi + B_{23} \delta \theta^\circ) z dz.
\end{aligned} \tag{6}$$

Уравнения равновесия для сферической оболочки под воздействием равномерно распределенной нагрузки с учетом геометрической нелинейности имеют вид:

$$\begin{aligned}
M_{r,rr} - M_{\varphi,r}/r + 2M_{r,r}/r + k(N_r + N_\varphi) + N_r w_{,rr} &= -q; \\
N_{r,r} + (N_r - N_\varphi)/r - k[M_{r,r} + (M_r - M_\varphi)/r] &= 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Пренебрегая малыми высшего порядка, получим линеаризованные уравнения:

$$\begin{aligned}
(\delta M_r)_{,rr} - (\delta M_\phi)_{,r}/r + 2(\delta M_r)_{,r}/r + \\
+ k(\delta N_r + \delta N_\phi) + (\delta N_r) w_{,rr} + N_r (\delta w)_{,rr} &= -\delta q; \\
(\delta N_r)_{,r} + (\delta N_r - \delta N_\phi)/r - k[(\delta M_r)_{,r} + (\delta M_r - \delta M_\phi)/r] &= 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Уравнение притока тепла получим, подставляя выражение для плотности энтропии разносопротивляющегося материала в уравнение теплопроводности Фурье:

$$\lambda \theta^\circ_{,zz} - \rho C_\sigma \theta^\circ_{,t} - \left(A_t (\sigma_r + \sigma_\phi)_{,t} + B_t (S)_{,t} \right) T_0 + U = 0, \tag{9}$$

где λ – коэффициент теплопроводности, C_σ – теплоемкость материала при постоянном напряжении, U – удельная мощность источников тепла.

Получим уравнение теплопроводности в приращениях:

$$\begin{aligned}
\lambda (\delta \theta^\circ)_{,zz} - \rho C_\sigma (\delta \theta^\circ)_{,t} - \\
- \left[A_t (\delta \sigma_r + \delta \sigma_\phi)_{,t} + B_t (\alpha_r (\delta \sigma_r)_{,t} + \alpha_\phi (\delta \sigma_\phi)_{,t}) \right] T_0 + U = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Два уравнения равновесия и уравнение теплопроводности решаются совместно для учета связанности полей напряжений и температур. Подставляя в уравнения (8) и (10) зависимости (3), (5), (6), получим систему линеаризованных дифференциальных уравнений в частных производных относительно приращений прогибов, радиальных перемещений и изменений температур:

$$\begin{aligned}
J_{11}(\delta w)_{,rrrr} + K_{11}(\delta w)_{,rrr} + K_{12}(\delta w)_{,rr} + K_{13}(\delta w)_{,r} + K_{14}(\delta w) + J_{14}(\delta u)_{,rrr} + \\
+ K_{15}(\delta u)_{,rr} + K_{16}(\delta u)_{,r} + K_{17}(\delta u) = \delta q - K_{q1}; \\
K_{21}(\delta w)_{,rrr} + K_{22}(\delta w)_{,rr} + K_{23}(\delta w)_{,r} + K_{24}(\delta w) + K_{25}(\delta u)_{,rr} + \\
+ K_{26}(\delta u)_{,r} + K_{27}(\delta u) = -K_{q2}; \\
\lambda \cdot (\delta \theta^\circ)_{,zz} + K_{31} \cdot (\delta \theta^\circ)_{,t} + K_{32} \cdot (\delta u)_{,rt} + K_{33} \cdot (\delta w)_{,t} + K_{34} \cdot (\delta w)_{,rt} + \\
+ K_{35} \cdot (\delta w)_{,rrt} + K_{36} \cdot (\delta u)_{,t} + U + K_{37} \cdot (\delta u)_{,r} + K_{38} \cdot (\delta u) + K_{39} \cdot (\delta w)_{,rr} + \\
+ K_{310} \cdot (\delta w) + K_{311} \cdot (\delta w)_{,r} + K_{312} \cdot (\delta \theta^\circ) = 0,
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
K_{11} = & 2\frac{J_{11}}{r} + J_{12} - \frac{J_{21}}{r} + 2J_{11,r}; \quad K_{12} = 2J_{12,r} + k(I_{11} + I_{21}) - \frac{1}{r}J_{21,r} + \frac{2}{r}J_{11,r} + \\
& + N_r + J_{11,rr} + w_{,rr}I_{11} - \frac{1}{r}J_{22} + J_{13} + \frac{2}{r}J_{12}; \quad K_{13} = \frac{2}{r}J_{13} + k(I_{12} + I_{22}) + J_{12,rr} - \\
& - \frac{1}{r}J_{22,r} + 2J_{13,r} + w_{,rr}I_{12} - \frac{J_{23}}{r} - \frac{2}{r}J_{12,r}; \quad K_{14} = -\frac{1}{r}J_{23,r} + w_{,rr}I_{13} + \frac{2}{r}J_{13,r} + \\
& + k(I_{13} + I_{23}) + J_{13,rr}; \quad K_{15} = J_{15} - \frac{J_{24}}{r} + 2J_{14,r} + 2\frac{J_{24}}{r}; \quad K_{16} = J_{14,rr} - w_{,rr}I_{14} + \\
& + 2J_{15,r} + k(I_{14} + I_{24}) + \frac{2}{r}J_{15} - \frac{1}{r}J_{24,r} - \frac{J_{25}}{r} + \frac{2}{r}J_{14,r}; \quad K_{q1} = J_{16,rr} - \frac{J_{26,r}}{r} - \\
& - I_{16}w_{,rr} + k(I_{16} + I_{26}) + \frac{2}{r}J_{16,r}; \quad K_{17} = -\frac{1}{r}J_{25,r} + w_{,rr}I_{15} + J_{15,rr} + \frac{1}{r}J_{15,r} + \\
& + k(I_{15} + I_{25}); \quad K_{21} = I_{11} - kJ_{11}; \quad K_{22} = I_{12} + \frac{I_{11} - I_{21}}{r} + kJ_{12} - \frac{k}{r}(J_{11} - J_{21}) + \\
& + I_{11,r} + kJ_{11,r}; \quad K_{23} = I_{13} + \frac{I_{12} - I_{22}}{r} + kJ_{13} - \frac{k}{r}(J_{12} - J_{22}) + I_{12,r} + kJ_{12,r}; \\
K_{24} = & \frac{I_{13} - I_{23}}{r} - \frac{k}{r}(J_{13} - J_{23}) + I_{13,r} - kJ_{13,r}; \quad K_{25} = I_{14} - kJ_{14}; \quad K_{26} = I_{15} + \\
& + \frac{I_{14} - I_{24}}{r} - kJ_{15} + \frac{k}{r}(J_{14} - J_{24}) + I_{14,r} + kJ_{14,r}; \quad K_{27} = \frac{I_{15} - I_{25}}{r} - \\
& - \frac{k}{r}(J_{15} - J_{25}) + I_{15,r} + kJ_{15,r}; \quad K_{q2} = I_{16,r} + (I_{16} - I_{26})/r - \\
& - k(J_{16,r} + (J_{16} - J_{26})/r); \quad K_{32} = -T_0 [A_t (B_{11} + B_{21}) + B_t (\alpha_r B_{11} + \alpha_\varphi B_{21})]; \\
K_{31} = & -\rho * C_\sigma - T_0 [A_t (B_{13} + B_{23}) + B_t (\alpha_r B_{13} + \alpha_\varphi B_{23})]
\end{aligned}$$

$$K_{33} = T_0 \left[\begin{array}{l} A_t k (B_{11} + B_{21}) + \frac{A_t}{R} (B_{12} + B_{22}) + \\ + B_t \left(\alpha_r B_{11} k + \frac{\alpha_r B_{12}}{R} + \alpha_\varphi B_{21} k + \frac{\alpha_\varphi B_{22}}{R} \right) \end{array} \right];$$

$$K_{34} = T_0 \left[\begin{array}{l} A_t w_{,r} (B_{11} + B_{21}) - \frac{A_t z}{r} (B_{12} + B_{22}) + \\ + B_t \alpha_r (B_{11} w_{,r} - \frac{z B_{12}}{r}) + B_t \alpha_\varphi (B_{21} w_{,r} - \frac{z B_{22}}{r}) \end{array} \right];$$

$$K_{35} = T_0 [A_t (B_{11} + B_{21}) z + B_t \alpha_r B_{11} z + B_t \alpha_\varphi B_{21} z];$$

$$K_{36} = -T_0 \left[\frac{A_t}{r} (B_{12} + B_{22}) + \frac{B_t \alpha_r B_{12}}{r} + \frac{B_t \alpha_\varphi B_{22}}{r} \right];$$

$$K_{37} = -T_0 \left(A_t (B_{11} + B_{21})_{,t} + B_t \alpha_{r,t} B_{11} + B_t \alpha_{\varphi,t} B_{21} + B_t \alpha_r B_{11,t} + B_t \alpha_\varphi B_{21,t} \right);$$

$$K_{38} = -T_0 \left(A_t (B_{12} + B_{22})_{,t} + B_t \alpha_{r,t} B_{12} + B_t \alpha_{\varphi,t} B_{22} + B_t \alpha_r B_{12,t} + B_t \alpha_\varphi B_{22,t} \right) / r;$$

$$K_{39} = z T_0 \left(A_t (B_{11} + B_{21})_{,t} + B_t \alpha_{r,t} B_{11} + B_t \alpha_{\varphi,t} B_{21} + B_t \alpha_r B_{11,t} + B_t \alpha_\varphi B_{21,t} \right);$$

$$K_{310} = T_0 \left[\begin{array}{l} k \left(\begin{array}{l} A_t (B_{11} + B_{21})_{,t} + B_t \alpha_{r,t} B_{11} + \\ + B_t \alpha_{\varphi,t} B_{21} + B_t \alpha_r B_{11,t} + B_t \alpha_\varphi B_{21,t} \end{array} \right) + \\ + \left(\begin{array}{l} A_t (B_{12} + B_{22})_{,t} + B_t \alpha_{r,t} B_{12} + \\ + B_t \alpha_{\varphi,t} B_{22} + B_t \alpha_r B_{12,t} + B_t \alpha_\varphi B_{22,t} \end{array} \right) / R \end{array} \right];$$

$$K_{311} = T_0 \left[\begin{array}{l} \frac{z}{r} \left(\begin{array}{l} A_t (B_{12} + B_{22})_{,t} + B_t \alpha_{r,t} B_{12} + \\ + B_t \alpha_{\varphi,t} B_{22} + B_t \alpha_r B_{12,t} + B_t \alpha_\varphi B_{22,t} \end{array} \right) - \\ - w_{,r} \left(\begin{array}{l} A_t (B_{11} + B_{21})_{,t} + B_t \alpha_{r,t} B_{11} + \\ + B_t \alpha_{\varphi,t} B_{21} + B_t \alpha_r B_{11,t} + B_t \alpha_\varphi B_{21,t} \end{array} \right) \end{array} \right];$$

$$K_{312} = -T_0 [A_t (B_{13,t} + B_{23,t}) + B_t (\alpha_r B_{13,t} + \alpha_\varphi B_{23,t})].$$

Разрешающую систему линейных дифференциальных уравнений необходимо дополнить граничными и начальными условиями в приращениях. Граничные условия для жесткой заделки по контуру запишутся следующим образом:

$$\delta w = 0; \quad (\delta w)_{,r} = 0; \quad \delta u = 0.$$

Для центра оболочки:

$$(\delta w)_{,r} = 0; \quad \delta u = 0.$$

Температурные начальные условия в приращениях примут вид:

$$\delta \theta^\circ (z = h/2) = 0; \quad \delta \theta^\circ (z = -h/2) = 0.$$

С помощью метода конечных разностей перейдем к системе линейных алгебраических уравнений. Решать систему будем дважды на каждом этапе нагружения согласно двухшаговому методу последовательного возмущения параметров В. В. Петрова [4]. Это позволит

многократно сократить погрешность линеаризации методом последовательных нагружений, уменьшить требуемое количество шагов по нагрузке и затраты машинного времени. Для полного учета эффекта разносопротивляемости на первом этапе необходимо дополнительно решить задачу о малых прогибах оболочки итерационным методом упругих решений А. А. Ильюшина. Алгоритм программы был реализован в среде MATLAB.

С помощью разработанной программы была рассчитана жестко защемленная пологая сферическая оболочка радиусом в плане 1 м со стрелой подъема 0.08 м и толщиной 0.03 м из конструкционного графита АРВ с характеристиками: $E^+ = 0.375$, $E^- = 0.613$, $\nu^+ = 0.2$, $\nu^- = 0.35$, $\alpha_{t1}^+ = 4 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, $\alpha_{t1}^- = 6 \cdot 10^{-6} K^{-1}$. Максимальная поперечная нагрузка была принята равной 12 кПа. Начальная температура оболочки 300 К. На верхней поверхности температура понижалась до 290 К, а на нижней повышалась до 320 К.

Сравнивались четыре различных варианта постановки задачи: с учетом связанности, разносопротивляемости и геометрической нелинейности (на рисунках 1-4 сплошная линия), с учетом связанности, геометрической нелинейности, но с осредненными из опытов на одноосные растяжение и сжатие механическими характеристиками (на рисунках 1-4 штрихпунктирная линия), с учетом связанности и разносопротивляемости без геометрической нелинейности (на рисунках 1-4 сплошная линия с маркерами), с учетом разносопротивляемости и геометрической нелинейности, но без учета связанности (на рисунках 1-4 штриховая линия).

На рис. 1 показаны прогибы оболочки. Поправка в величину максимального прогиба за счет разносопротивляемости составила 45 %, за счет геометрической нелинейности – 24 %. Влияние связанности на прогибы оболочки, выполненной из графита АРВ, не превышает 3 %.

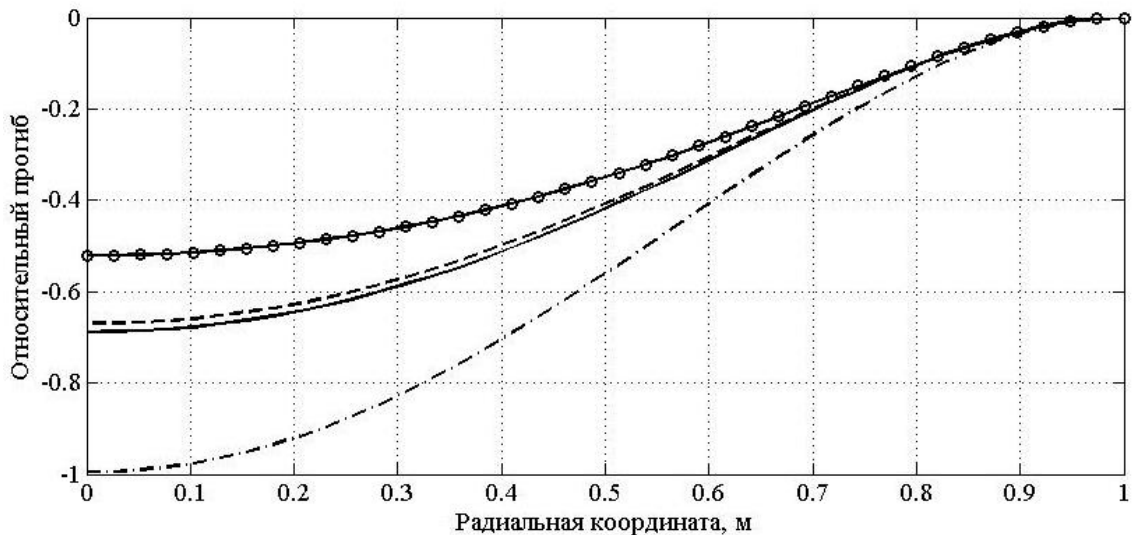


Рис. 1. Прогибы оболочки

На рис. 2 представлены радиальные перемещения срединной поверхности оболочки. Влияние разносопротивляемости на радиальные перемещения составило 51 %, связанности – 3 %. Расхождение геометрически нелинейного и линейного расчетов в величине максимального перемещения срединной поверхности составило 33 %.

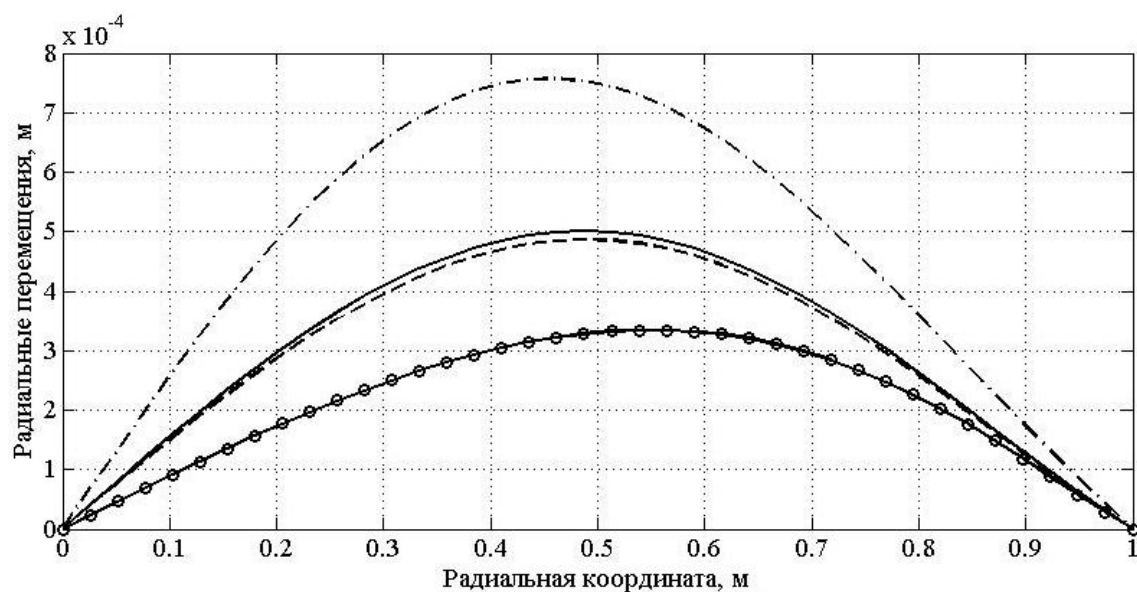


Рис. 2. Радиальные перемещения

На рис. 3 представлено распределение радиальных напряжений на верхней и нижней поверхностях оболочки вдоль радиуса. Поправки в радиальные напряжения за счет учета зависимости свойств материала от вида напряженного состояния достигают на верхней поверхности 29 %, на нижней – 56 %. Расхождения между геометрически линейным расчетом и расчетом по нелинейной теории типа Т. Кармана в величине напряжений не превосходят 33 %. Влияние связанности проявляется незначительно. Расхождение между несвязанной и связанной постановками задачи в величине радиальных напряжений составляет 4 %.

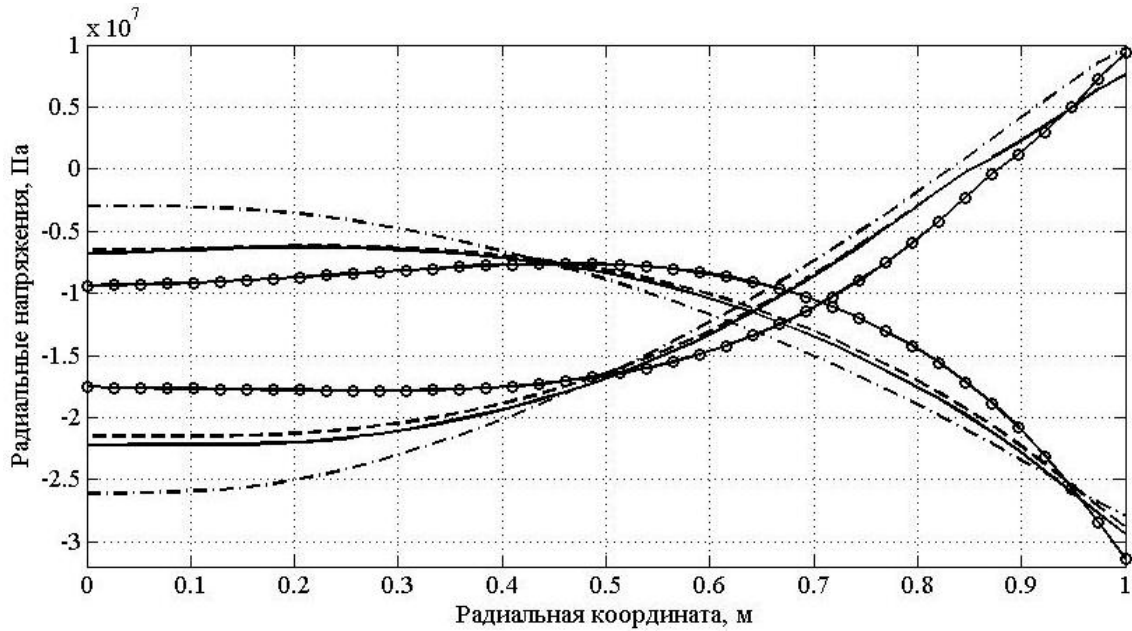


Рис. 3. Радиальные напряжения

На рис. 4 представлено распределение окружных напряжений на верхней и нижней поверхностях оболочки вдоль радиуса. Поправки в окружные напряжения за счет разнотвердости достигают на верхней поверхности 19 %, на нижней – 25 %. Расхождение между геометрически линейным и нелинейным расчетами в величине окружных напряжений составляет 33 %. Учет связанности полей напряжений и температур вносит поправки до 4 % в распределение окружных напряжений.

Связанная задача о больших прогибах сферической оболочки из изотропных разнотвердых материалов под воздействием поперечной нагрузки и температуры до сих пор не решалась. На основании результатов проведенной работы можно сделать вывод, что рассматриваемые физические эффекты вносят значительные коррективы в НДС конструкций. Поправки в величины напряжений достигают 56 %, что существенно влияет на несущую способность конструкции. Так как большинство оболочек из новых материалов проектируются тонкими, особую важность приобретает учет геометрической нелинейности. Было показано, что геометрически линейные расчеты не могут удовлетворительно описать НДС гибких конструкций. Постановка задачи с учетом связанности полей напряжений и температур обеспечивает повышенную точность вычисления температурных напряжений, что крайне важно в графитовых оболочках, применяемых в конструкциях энергетической отрасли. Таким образом, учет рассмотренных физических эффектов и геометрической нелинейности позволит обеспечить должный уровень безопасности и экономичности оболочек из новых эффективных материалов.

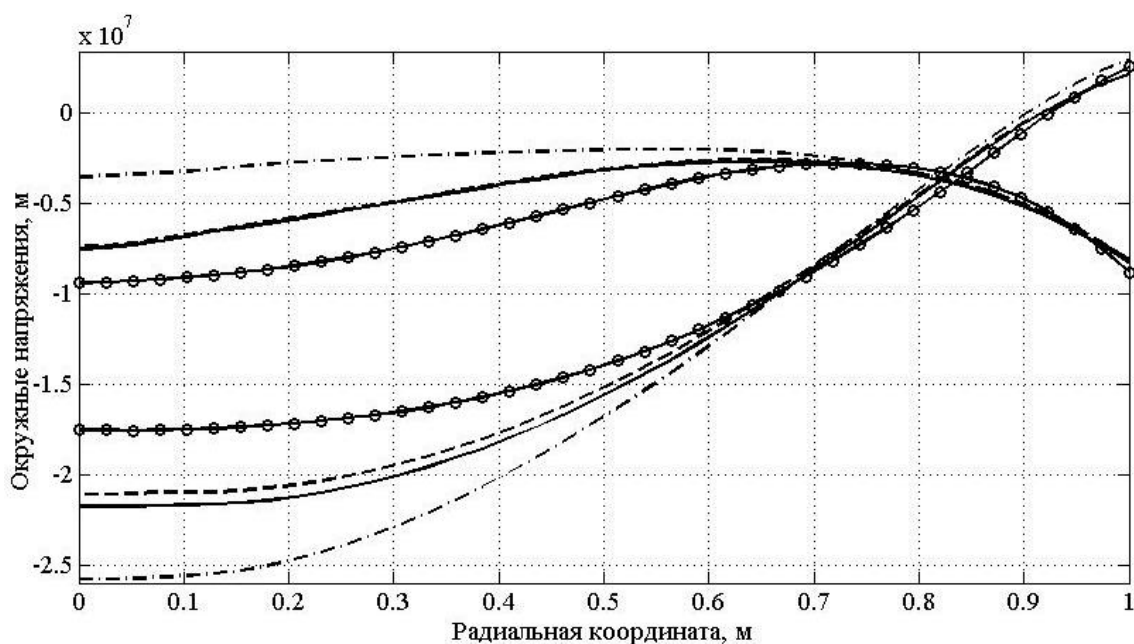


Рис. 4. Окружные напряжения

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Матченко, Н. М.* Теория деформирования разнородных материалов. Прикладные задачи теории упругости / Н. М. Матченко, А. А. Трещев. – М. : Тула ; РААСН ; ТулГУ, 2004. – 211 с.

[2] *Трещев, А. А.* Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А. А. Трещев. – М. : Тула ; РААСН ; ТулГУ, 2008. – 264 с.

[3] *Karman, Th.* Festigkeitsprobleme in Maschinenbau. Enzyklopadie der Mathematischen Wissenschaften. Bd IV. Mechanik, Teilband 4, Hft 3, Art 27, Punkt 8. Ebene Platten. – Leipzig : V. G. Teubner, 1910. – S. 311-385. Перепечатка: Karman Th. Collected works. – London, 1956. – Vol. 1. – 530 p.

[4] *Петров, В. В.* Методы расчета конструкций из нелинейно деформируемого материала : учеб. пособие / В. В. Петров, И. В. Кривошеин. – М. : Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. – 208 с.

Трещев Александр Анатольевич,

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: taa58@yandex.ru

Делягин Михаил Юрьевич,

аспирант кафедры "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: m.delyagin@yandex.ru

A. A. Treschev, M. YU. Delyagin

**SOLUTION OF THE CONNECTED TASK OF THERMOELASTICITY OF
SPHERICAL SHELL MADE OF DIFFERENTLY RESISTANT MATERIAL
CONSIDERING GEOMETRIC NONLINEARITY**

Tula State University

Abstract. The calculation of shallow spherical shells made of materials which properties depend on the type of stress has been considered. The effect of different resistance, connectedness and geometric nonlinearity on the stress-strain state of spherical shell made of graphite APB has been estimated.

Keywords: different resistant, geometric nonlinearity, connectedness, thermoelasticity, shells.

REFERENCES

- [1] *Matchenko, N. M.* Deforming theory differently resisting materials. Application-oriented tasks of the theory of elasticity / N. M. Matchenko, A. A. Treshchev. – M. : Tula ; RAASN ; TulGU, 2004. – 211 p.
- [2] *Treshchev, A. A.* The theory of deforming and durability of materials, sensitive to a type of a tension. Defining ratios / A. A. Treshchev. – M. : Tula ; RAASN ; TulGU, 2008. – 264 p.
- [3] *Karman, Th.* Festigkeitsprobleme in Maschinenbau. Enzyklopadie der Mathematischen Wissenschaften. Bd IV. Mechanik, Teilband 4, Hft 3, Art 27, Punkt 8. Ebene Platten. – Leipzig : B. G. Teubner, 1910. – S. 311-385. Reprint : Karman Th. Collected works. – London, 1956. – Vol. 1. – 530 p.
- [4] *Petrov, V. V.* Methods of calculation of constructions from non-linearly deformable material : manual / V. V. Petrov, I. V. Krivoshein. – M. : Publishing house of Association of construction higher education institutions, 2009. – 208 p.

Treschev, Alexander Anatolievich

Dr. Tech. Sci., Professor, Head of the Department of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula

Delyagin, Mihail Yurievich

Postgraduate student, Departament of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula

А. А. Трещев, М. Б. Шерешевский

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НДС ПОЛОГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ В ПЛАНЕ ОБОЛОЧКИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ СВОЙСТВ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ

Тульский государственный университет

Аннотация. В работе дается постановка задачи изгиба пологой прямоугольной в плане ортотропной оболочки положительной гауссовой кривизны из разносопротивляющихся материалов. На основе теории, предложенной А. А. Трещевым [1], выводятся разрешающие уравнения. Далее приводится методика получения численного решения, некоторые результаты, а также их анализ.

Ключевые слова: ортотропная оболочка, разносопротивляющийся материал, разрешающие уравнения, полая оболочка положительной гауссовой кривизны.

УДК: 539.384.6

Многие новые анизотропные конструкционные материалы не подчиняются классическим законам упругопластического деформирования. Механические характеристики таких материалов зачастую зависят от вида напряженного состояния. К материалам, обладающим подобными свойствами, относят ряд полимеров и большинство композитов. Зависимость деформационных характеристик от вида напряженного состояния для рассматриваемых материалов достаточно сложна и не сводится только к неодинаковому их поведению при одноосных растяжении и сжатии. Экспериментально установлено, что жесткость большинства разносопротивляющихся материалов может зависеть не только от знаков возникающих напряжений, но и от количественных соотношений механических и температурных факторов, влияющих на напряженное состояние. Классические теории, базирующиеся на гипотезах о существовании однозначной зависимости между напряжениями и деформациями, очевидно, не могут правильно оценить напряженно-деформированные состояния сплошных сред, обладающих указанными особенностями. Цель работы – адаптировать определяющие соотношения теории анизотропных разносопротивляющихся материалов А. А. Трещева [1] для расчета пологих оболочек положительной гауссовой кривизны, получить разрешающую систему уравнений, разработать алгоритм численного решения системы, решить на его основе тестовую задачу и провести анализ полученных результатов.

В качестве физических зависимостей будем использовать соотношения, выдвинутые в работе [1], с учетом гипотез Кирхгофа и при совпадении осей декартовой системы координат с главными осями анизотропии:

$$\begin{aligned} e_{11} &= (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11})\sigma_{11} + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{22}; \\ e_{22} &= [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11} + (A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22})\sigma_{22}; \\ e_{12} &= (A_{1212} + B_{1212}\sqrt{2}\alpha_{12})\tau_{12}; \end{aligned} \quad (1)$$

или

$$e_{11} = A_{111}\sigma_{11} + A_{122}\sigma_{12}; \quad e_{12} = A_{66}\tau_{12}; \quad e_{22} = A_{12}\sigma_{11} + A_{222}\sigma_{12}, \quad (2)$$

где

$$C_{11} = A_{2222}/\Delta; \quad C_{22} = A_{1111}/\Delta; \quad C_{12} = -A_{1122}/\Delta; \quad C_{66} = 1/A_{1212}; \\ \Delta = A_{1111}A_{2222} - A_{1122}^2;$$

$\alpha_{ij} = \sigma_{ij}/S$ – тензор нормированных напряжений с нормой пространства S , S – модуль вектора полного напряжения в нормированном девятимерном "пространстве", введенном в монографии [1],

$$S = \sqrt{\sigma_k \sigma_k}$$

A_{ijklm} , B_{ijklm} – константы, подлежащие определению из экспериментов по деформированию образцов материала на одноосное растяжение и одноосное сжатие поочередно вдоль осей x_1 , x_2 , x_3 и под углом 45° к ним

$$A_{kkkk} = (1/E_k^+ + 1/E_k^-)/2; \quad B_{kkkk} = (1/E_k^+ - 1/E_k^-)/2; \\ A_{ijij} = -(v_{ij}^+/E_j^+ + v_{ij}^-/E_j^-)/2; \quad B_{ijij} = -(v_{ij}^+/E_j^+ - v_{ij}^-/E_j^-)/2; \\ A_{ijij} = (1/E_{ij}^+ + 1/E_{ij}^-) - 0,25[(1/E_i^+ + 1/E_j^+ + 1/E_i^- + 1/E_j^-) - \\ -2(v_{ji}^+/E_i^+ + v_{ji}^-/E_i^-)]; \\ B_{ijij} = \sqrt{2}(1/E_{ij}^+ - 1/E_{ij}^-) - 0,125\sqrt{2}[(1/E_i^+ + 1/E_j^+ - 1/E_i^- - 1/E_j^-) - \\ -4(v_{ji}^+/E_i^+ - v_{ji}^-/E_i^-)];$$

E_i^\pm , v_{ij}^\pm – модули деформаций и коэффициенты поперечной деформации при растяжении и сжатии в направлениях соответствующих главных осей анизотропии.

Геометрические соотношения представляем в рамках уровня точности теории Т. Кармана :

$$e_{11} = \varepsilon_{11} + x_3\chi_{11}; \quad e_{22} = \varepsilon_{22} + x_3\chi_{22}; \quad \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} + x_3\chi_{12}, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon_{11} = u_{,1} + k_1w + 0,5w_{,1}^2; \quad \varepsilon_{22} = v_{,2} + k_2w + 0,5w_{,2}^2; \\ 2\varepsilon_{12} = u_{,2} + v_{,1} + w_{,1}w_{,2}; \\ \chi_{11} = -w_{,11}; \quad \chi_{22} = -w_{,22}; \quad \chi_{12} = -2w_{,12}; \quad (4)$$

ε_{ij} – деформации в срединной поверхности; χ_{ij} – кривизны срединной поверхности; u, v, w – перемещения вдоль координатных осей x_1, x_2 и x_3 соответственно.

Так как задача является нелинейной как физически, так и геометрически, было принято решить ее двухшаговым методом последовательных возмущений параметров [2]. В основе данного метода лежит то, что мы разбиваем всю нагрузку на малые приращения и принимаем, что малому приращению нагрузки соответствуют столь же малые приращения перемещений, деформаций и напряжений. Поэтому для его использования необходимо получить наши разрешающие уравнения, выраженные в приращениях.

Следуя методике последовательных нагружений, запишем геометрические соотношения для оболочки в приращениях

$$\delta e_{11} = \delta\varepsilon_{11} + x_3\delta\chi_{11}; \quad \delta e_{22} = \delta\varepsilon_{22} + x_3\delta\chi_{22}; \\ \delta\gamma_{12} = \delta(2\varepsilon_{12}) + x_3\delta\chi_{12}, \quad (5)$$

где

$$\varepsilon_{11} = (\delta u)_{,1} + k_1\delta w + w_{,1}(\delta w)_{,1}; \quad \delta\varepsilon_{22} = (\delta v)_{,2} + k_2\delta w + w_{,2}(\delta w)_{,2}; \\ \delta(2\varepsilon_{12}) = (\delta u)_{,2} + (\delta v)_{,1} + w_{,2}(\delta w)_{,1} + w_{,1}(\delta w)_{,2}; \\ \delta\chi_{11} = -(\delta w)_{,11}; \quad \chi_{22} = -(\delta w)_{,22}; \quad \chi_{12} = -2(\delta w)_{,12}.$$

Физические зависимости в приращениях представим следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta e_{11} &= \frac{\partial e_{11}}{\partial \sigma_{11}} \delta \sigma_{11} + \frac{\partial e_{11}}{\partial \sigma_{22}} \delta \sigma_{22} + \frac{\partial e_{11}}{\partial \tau_{12}} \delta \tau_{12}, \\ \delta e_{22} &= \frac{\partial e_{22}}{\partial \sigma_{11}} \delta \sigma_{11} + \frac{\partial e_{22}}{\partial \sigma_{22}} \delta \sigma_{22} + \frac{\partial e_{22}}{\partial \tau_{12}} \delta \tau_{12}, \\ \delta e_{12} &= \frac{\partial e_{12}}{\partial \sigma_{11}} \delta \sigma_{11} + \frac{\partial e_{12}}{\partial \sigma_{22}} \delta \sigma_{22} + \frac{\partial e_{12}}{\partial \tau_{12}} \delta \tau_{12},\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\delta \sigma_{11} &= \hat{B}_{11} \delta e_{11} + \hat{B}_{12} \delta e_{22} + \hat{B}_{13} \delta e_{12}, \\ \delta \sigma_{22} &= \hat{B}_{21} \delta e_{11} + \hat{B}_{22} \delta e_{22} + \hat{B}_{23} \delta e_{12}, \\ \delta \tau_{12} &= \hat{B}_{31} \delta e_{11} + \hat{B}_{32} \delta e_{22} + \hat{B}_{33} \delta e_{12},\end{aligned}\tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}\hat{B}_{11} &= \frac{\Delta_{22}\Delta_{33} - \Delta_{32}\Delta_{23}}{\Delta}; \quad \hat{B}_{12} = \hat{B}_{21} = \frac{\Delta_{32}\Delta_{13} - \Delta_{12}\Delta_{33}}{\Delta}; \\ \hat{B}_{13} = \hat{B}_{31} &= \frac{\Delta_{12}\Delta_{23} - \Delta_{22}\Delta_{13}}{\Delta}; \quad \hat{B}_{22} = \frac{\Delta_{11}\Delta_{33} - \Delta_{13}\Delta_{31}}{\Delta}; \\ \hat{B}_{23} = \hat{B}_{32} &= \frac{\Delta_{21}\Delta_{13} - \Delta_{11}\Delta_{23}}{\Delta}; \quad \hat{B}_{33} = \frac{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21}}{\Delta} \\ \Delta_{11} &= \frac{\partial e_{11}}{\partial \sigma_{11}}; \quad \Delta_{12} = \Delta_{21} = \frac{\partial e_{11}}{\partial \sigma_{22}} = \frac{\partial e_{22}}{\partial \sigma_{11}}; \quad \Delta_{13} = \Delta_{31} = \frac{\partial e_{11}}{\partial \tau_{12}} = \frac{\partial e_{12}}{\partial \sigma_{11}}; \\ \Delta_{22} &= \frac{\partial e_{22}}{\partial \sigma_{22}}; \quad \Delta_{23} = \Delta_{32} = \frac{\partial e_{22}}{\partial \tau_{12}} = \frac{\partial e_{12}}{\partial \sigma_{22}}; \quad \Delta_{33} = \frac{\partial e_{12}}{\partial \tau_{12}}.\end{aligned}$$

Перейдем от приращений напряжений к приращениям усилий и моментов

$$\begin{aligned}\delta N_{11} &= C_{11} \delta \varepsilon_{11} + C_{12} \delta \varepsilon_{22} + C_{13} \delta (2\varepsilon_{12}) + D_{11} \delta \chi_{11} + D_{12} \delta \chi_{22} + D_{13} \delta \chi_{12}; \\ \delta N_{22} &= C_{21} \delta \varepsilon_{11} + C_{22} \delta \varepsilon_{22} + C_{23} \delta (2\varepsilon_{12}) + D_{21} \delta \chi_{11} + D_{22} \delta \chi_{22} + D_{23} \delta \chi_{12}; \\ \delta N_{12} &= C_{31} \delta \varepsilon_{11} + C_{32} \delta \varepsilon_{22} + C_{33} \delta (2\varepsilon_{12}) + D_{31} \delta \chi_{11} + D_{32} \delta \chi_{22} + D_{33} \delta \chi_{12}; \\ \delta M_{11} &= D_{11} \delta \varepsilon_{11} + D_{12} \delta \varepsilon_{22} + D_{13} \delta (2\varepsilon_{12}) + F_{11} \delta \chi_{11} + F_{12} \delta \chi_{22} + F_{13} \delta \chi_{12}; \\ \delta M_{22} &= D_{21} \delta \varepsilon_{11} + D_{22} \delta \varepsilon_{22} + D_{23} \delta (2\varepsilon_{12}) + F_{21} \delta \chi_{11} + F_{22} \delta \chi_{22} + F_{23} \delta \chi_{12}; \\ \delta M_{12} &= D_{31} \delta \varepsilon_{11} + D_{32} \delta \varepsilon_{22} + D_{33} \delta (2\varepsilon_{12}) + F_{31} \delta \chi_{11} + F_{32} \delta \chi_{22} + F_{33} \delta \chi_{12},\end{aligned}\tag{7}$$

где

$$C_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{B}_{ij} dx_3; \quad D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{B}_{ij} x_3 dx_3; \quad F_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{B}_{ij} x_3^2 dx_3.$$

Уравнения равновесия в приращениях имеют вид

$$\begin{aligned}(\delta N_{11})_{,1} + (\delta N_{12})_{,2} &= 0; \quad (\delta N_{22})_{,2} + (\delta N_{12})_{,1} = 0; \\ (\delta Q_1)_{,1} + (\delta Q_2)_{,2} + (\delta w)_{,11} N_{11} + w_{,11} \delta N_{11} - k_1 \delta N_{11} + \\ + (\delta w)_{,22} N_{22} + w_{,22} \delta N_{22} - k_2 \delta N_{22} + 2(\delta w)_{,12} N_{12} + 2w_{,12} \delta N_{12} &= -q; \\ \delta Q_1 &= (\delta M_{11})_{,1} + (\delta M_{12})_{,2}; \quad \delta Q_2 = (\delta M_{22})_{,2} + (\delta M_{12})_{,1}.\end{aligned}\tag{8}$$

Подставляя зависимости (7) в уравнения (8), учитывая при этом соотношения (5) и (6), получим линеаризованную систему разрешающих дифференциальных уравнений относительно приращений функций u , v и w .

$$\begin{aligned}
& \delta w_{,1} \delta w_{22} D_{1212} - \delta w_{,11} Q_{1111,1} - \delta w_{,22} Q_{1122,1} - 2\delta w_{,12} Q_{1212,2} + 1/2 \cdot \delta w_{,1}^2 D_{1111,1} + \\
& + 1/2 \cdot \delta w_{,2}^2 D_{1122,1} + \delta u_{,1} D_{1111,1} + \delta u_{,2} D_{1212,2} + \delta v_{,2} D_{1122,1} + \delta v_{,1} D_{1212,2} - \delta w_{,111} Q_{1111} - \\
& - \delta w_{,122} Q_{1122} - 2\delta w_{,122} Q_{1212} + \delta u_{,11} D_{1111} + \delta u_{,22} D_{1212} + \\
& + \delta v_{,12} D_{1122} + \delta v_{,12} D_{1212} + w_{,11} \delta w_{,1} D_{1111} + w_{,12} \delta w_{,2} D_{1212} + w_{,1} \delta w_{,22} D_{1212} + \\
& + \delta w_{,1} w_{,22} D_{1212} + w_{,12} \delta w_{,2} D_{1122} + w_{,2} \delta w_{,12} D_{1122} + w_{,1} \delta w_{,11} D_{1111} + \delta w_{,12} w_{,2} D_{1212} + \\
& + k_1 \delta w_{,1} D_{1111} + k_2 \delta w_{,1} D_{1122} + \delta w_{,1} D_{1111} \delta w_{,11} + \delta w_{,2} D_{1122} \delta w_{,12} + \delta w_{,12} \delta w_{,2} D_{1212} + \\
& + k_2 \delta w D_{1122,1} + \delta w_1 \delta w_2 D_{1212,2} + k_1 \delta w D_{1111,1} + \delta w_{,1} w_{,2} D_{1212,2} + \\
& + w_{,2} \delta w_{,2} D_{1122,1} + w_{,1} \delta w_{,1} D_{1111,1} + w_{,1} \delta w_{,2} D_{1212,2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1/2 \delta w_{,2}^2 D_{2222,2} + 1/2 \cdot \delta w_{,1}^2 D_{1122,2} - \delta w_{,222} Q_{2222} + \delta v_{,11} D_{1212} + \delta v_{,22} D_{2222} \\
& - \delta w_{,112} Q_{1122} - 2\delta w_{,112} Q_{1212} - 2\delta w_{,12} Q_{1212,1} - \delta w_{,11} Q_{1122,2} - \delta w_{,22} Q_{2222,2} + \delta u_{,12} D_{1212} + \\
& + \delta u_{,12} D_{1122} + D_{1212,1} \delta v_{,1} + D_{1212,1} \delta u_{,2} + D_{1122,2} \delta u_{,1} + \\
& + D_{2222,2} \delta v_{,2} + D_{1122,2} k_1 \delta w + D_{2222,2} k_2 \delta w + w_{,11} \delta w_{,2} D_{1212} + \\
& + w_{,22} \delta w_{,2} D_{2222} + \delta w_{,12} \delta w_{,1} D_{1212} + \delta w_{,12} \delta w_{,1} D_{1122} + \delta w_{,12} w_{,1} D_{1212} + \\
& + \delta w_{,12} w_{,1} D_{1122} + \delta w_{,11} \delta w_{,2} D_{1212} + \delta w_{,11} w_{,2} D_{1212} + \delta w_{,22} w_{,2} D_{2222} + \delta w_{,22} \delta w_{,2} D_{2222} + \\
& + \delta w_{,1} w_{,12} D_{1122} + \delta w_{,1} w_{,12} D_{1212} + \delta w_{,2} D_{1122} k_1 + \delta w_{,2} k_2 D_{2222} + \delta w_{,2} D_{1212,1} w_{,1} + \\
& + \delta w_{,2} D_{2222,2} w_{,2} + \delta w_{,2} D_{1212,1} \delta w_{,1} + \delta w_{,1} w_{,2} D_{1212,1} + \delta w_{,1} w_{,1} D_{1122,2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& w_{,111}\delta w_{,1}Q_{1111} + w_{,222}\delta w_{,2}Q_{2222} + 2\delta w_{,2}w_{,112}Q_{1212} + \delta w_{,2}w_{,112}Q_{1122} + 2\delta w_{,1}w_{,122}Q_{1212} + \\
& + \delta w_{,1}w_{,122}Q_{1122} + Q_{2222,22}k_2\delta w + Q_{2222,22}w_{,2}\delta w_{,2} + Q_{1122,11}k_2\delta w + Q_{1122,11}w_{,2}\delta w_{,2} + \\
& + Q_{1111,11}k_1\delta w + Q_{1111,11}\delta w_{,1}w_{,1} + 2Q_{1212,12}\delta w_{,1}w_{,2} + 2Q_{1212,12}\delta w_{,1}\delta w_{,2} + \\
& + 2Q_{1212,12}w_{,1}\delta w_{,2} + 2\delta w_{,122}\delta w_{,1}Q_{1212} + \delta w_{,122}\delta w_{,1}Q_{1122} + 2\delta w_{,122}w_{,1}Q_{1212} + \\
& + \delta w_{,122}w_{,1}Q_{1122} + \delta w_{,111}w_{,1}Q_{1111} + \delta w_{,111}\delta w_{,1}Q_{1111} + 4\delta w_{,12}w_{,12}Q_{1122} + \\
& + 2\delta w_{,12}\delta w_{,1}Q_{1212,2} + 2\delta w_{,12}\delta w_{,1}Q_{1122,2} + 2\delta w_{,12}\delta w_{,2}Q_{1212,1} + 2\delta w_{,12}\delta w_{,2}Q_{1122,1} + \\
& + 2\delta w_{,12}w_{,1}Q_{1212,2} + 2\delta w_{,12}w_{,1}Q_{1122,2} + 2\delta w_{,12}w_{,2}Q_{1212,1} + 2\delta w_{,12}w_{,2}Q_{1122,1} - \\
& - \delta w_{,22}w_{,11}Q_{1122} + 2\delta w_{,22}w_{,11}Q_{1212} + 2\delta w_{,22}k_2Q_{2222} + 2\delta w_{,22}w_{,1}Q_{1212,1} + \\
& + 2\delta w_{,22}\delta w_{,2}Q_{2222,2} + 2\delta w_{,22}\delta w_{,1}Q_{1212,1} + \delta w_{,22}w_{,22}Q_{2222} + 2\delta w_{,22}w_{,2}Q_{2222,2} + \\
& + 2\delta w_{,22}k_1Q_{1122} + 2\delta w_{,11}Q_{1212}\delta w_{,22} + \delta w_{,11}w_{,11}Q_{1111} - \delta w_{,11}w_{,22}Q_{1122} + \\
& + 2\delta w_{,11}w_{,22}Q_{1212} + 2\delta w_{,11}k_1Q_{1111} + 2\delta w_{,11}w_{,2}Q_{1212,2} + 2\delta w_{,11}\delta w_{,2}Q_{1212,2} + \\
& + 2\delta w_{,11}w_{,1}Q_{1111,1} + 2\delta w_{,11}\delta w_{,1}Q_{1111,1} + 2\delta w_{,11}k_2Q_{1122} + \delta w_{,222}w_{,2}Q_{2222} + \\
& + \delta w_{,222}\delta w_{,2}Q_{2222} + 2\delta w_{,112}\delta w_{,2}Q_{1212} + \delta w_{,112}\delta w_{,2}Q_{1122} + 2\delta w_{,112}w_{,2}Q_{1212} + \\
& + \delta w_{,112}w_{,2}Q_{1122} + 1/2 \cdot w_{,22}\delta w_{,1}^2 D_{1122} + 2w_{,22}\delta w_{,1}Q_{1212,1} + 1/2 \cdot w_{,22}\delta w_{,2}^2 D_{2222} + \\
& + 2w_{,22}\delta w_{,2}Q_{2222,2} + w_{,22}\delta u_{,1}D_{1122} + w_{,22}\delta v_{,2}D_{2222} + 1/2 \cdot w_{,11}\delta w_{,1}^2 D_{1111} + \\
& + 2w_{,11}\delta w_{,1}Q_{1111,1} + 1/2 \cdot w_{,11}\delta w_{,2}^2 D_{1122} + 2w_{,11}\delta w_{,2}Q_{1212,2} + w_{,11}\delta u_{,1}D_{1111} + \\
& + w_{,11}\delta v_{,2}D_{1122} + 2w_{,12}\delta w_{,1}Q_{1212,2} + 2w_{,12}\delta w_{,1}Q_{1122,2} + 2w_{,12}\delta w_{,2}Q_{1212,1} + \\
& + 2w_{,12}\delta w_{,2}Q_{1122,1} + 2w_{,12}D_{1212}\delta v_{,1} + 2w_{,12}D_{1212}\delta u_{,2} + 2\delta w_{,1}k_1Q_{1111,1} + \\
& + 2\delta w_{,1}k_2Q_{1122,1} + 2\delta w_{,2}k_2Q_{2222,2} + 2\delta w_{,2}k_1Q_{1122,2} - \delta v_{,2}k_2D_{2222} - \\
& - \delta v_{,2}D_{1122}k_1 - \delta u_{,1}k_1D_{1111} - \delta u_{,1}D_{1122}k_2 - \delta wD_{2222}k_2^2 - \delta wk_1^2D_{1111} - \\
& - 1/2 \cdot \delta w_{,1}^2k_1D_{1111} - 1/2 \cdot \delta w_{,1}^2D_{1122}k_2 - 1/2 \cdot \delta w_{,2}^2k_2D_{2222} - 1/2 \cdot \delta w_{,2}^2D_{1122}k_1 + \\
& + Q_{1122,22}k_1\delta w + Q_{1122,22}\delta w_{,1}w_{,1} - \delta w_{,1111}K_{,1111} - \delta w_{,2222}K_{2222} + \delta v_{,222}Q_{2222} + \\
& + \delta u_{,111}Q_{1111} + \delta w_{,11}^2Q_{1111} + \delta w_{,22}^2Q_{2222} + Q_{2222,22}\delta v_{,2} + 1/2 \cdot Q_{2222,22}\delta w_{,2}^2 + \\
& + Q_{1122,11}\delta v_{,2} + 1/2 \cdot Q_{1122,11}\delta w_{,2}^2 + 1/2 \cdot Q_{1111,11}\delta w_{,1}^2 + Q_{1111,11}\delta u_{,1} + \\
& + 2Q_{1212,12}\delta v_{,1} + 2Q_{1212,12}\delta u_{,2} - 2\delta w_{,1122}K_{1122} - 4\delta w_{,1122}K_{1212} - 2\delta w_{,122}K_{1122,1} - \\
& - 4\delta w_{,122}K_{1212,1} - 2\delta w_{,111}K_{1111,1} - 4\delta w_{,12}K_{1212,12} - \delta w_{,22}K_{2222,22} - \delta w_{,22}K_{1122,11} - \\
& - \delta w_{,11}K_{1111,11} - \delta w_{,11}K_{1122,22} - 2\delta w_{,222}K_{2222,2} - 4\delta w_{,112}K_{1212,2} - 2\delta w_{,112}K_{1122,2} + \\
& + 2\delta v_{,112}Q_{1212} + \delta v_{,112}Q_{1122} + 2\delta u_{,122}Q_{1212} + \delta u_{,122}Q_{1122} + 2\delta w_{,12}^2Q_{1212} + \\
& + 2\delta w_{,12}^2Q_{1122} + 1/2 \cdot Q_{1122,22}\delta w_{,1}^2 + Q_{1122,22}\delta u_{,1} + 2\delta u_{,12}Q_{1212,2} + 2\delta u_{,12}Q_{1122,2} + \\
& + 2\delta v_{,12}Q_{1212,1} + 2\delta v_{,12}Q_{1122,1} + 2\delta u_{,11}Q_{1111,1} + 2\delta u_{,22}Q_{1212,1} + 2\delta v_{,11}Q_{1212,2} + \\
& + 2\delta v_{,22}Q_{2222,2} + w_{,22}\delta w_{,1}w_{,1}D_{1122} + w_{,22}\delta w_{,2}w_{,2}D_{2222} + w_{,22}\delta wD_{1122}k_1 + \\
& + w_{22}\delta wk_2D_{2222} + w_{11}\delta w_{,1}w_{,1}D_{1111} + w_{,11}\delta w_{,2}w_{,2}D_{1122} + w_{,11}\delta wk_1D_{1111} + \\
& + w_{,11}\delta wD_{1122}k_2 + 2w_{,12}\delta w_{,1}w_{,2}D_{1212} + 2w_{,12}\delta w_{,1}\delta w_{,2}D_{1212} + 2w_{,12}\delta w_{,2}w_{,1}D_{1212} - \\
& - \delta w_{,1}w_{,1}k_1D_{1111} - \delta w_{,1}w_{,1}D_{1122}k_2 - \delta w_{,2}w_{,2}k_2D_{2222} - \delta w_{,2}w_{,2}D_{1122}k_1 - \\
& - 2\delta wk_2k_1D_{1122} = -dq.
\end{aligned}$$

Для уменьшения погрешности расчетов методом последовательных нагружений можно в качестве значений параметров на первом шаге итераций использовать результаты, полученные с помощью метода упругих параметров Ильюшина для аналогичного случая, но без учета геометрической нелинейности.

Зависимости напряжений от деформаций в форме, используемой в методе упругих решений, будут выглядеть следующим образом

$$\sigma_{11} = C_{11}e_{11} + C_{12}e_{12} - R_{11}; \quad \tau_{12} = C_{66}e_{12} - R_{12}; \quad \sigma_{22} = C_{12}e_{11} + C_{22}e_{12} - R_{22} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{2222}/\Delta; \quad C_{22} = A_{1111}/\Delta; \quad C_{12} = -A_{1122}/\Delta; \quad C_{66} = 1/A_{1212}; \\ \Delta &= A_{1111}A_{2222} - A_{1122}^2; \\ R_{12} &= B_{1212}\sqrt{2}\alpha_{12}\tau_{12}/A_{1212}; \quad R_{11} = (A_{2222}B_{1111} - B_{1122}A_{1111})\alpha_1\sigma_{11}/\Delta + \\ &+ (A_{2222}B_{1111} - A_{1122}B_{2222})\alpha_2\sigma_{22}/\Delta + (A_{2222} - A_{1122})B_{1122}\alpha_1\sigma_{22}/\Delta; \\ R_{22} &= (A_{1111}B_{1122} - B_{1111}A_{1122})\alpha_1\sigma_{11}/\Delta + \\ &+ (A_{1111}B_{2222} - A_{1122}B_{1122})\alpha_2\sigma_{22}/\Delta + (A_{1111} - A_{1122})B_{1122}\alpha_1\sigma_{22}/\Delta. \end{aligned}$$

Геометрические зависимости будут представлены в следующем виде:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = u_{,1} + k_1 w, \\ \varepsilon_{22} = v_{,2} + k_2 w, \\ \varepsilon_{12} = u_{,2} + v_{,1}, \\ \chi_{11} = -w_{,11}, \\ \chi_{22} = -w_{,22}, \\ \chi_{12} = -2w_{,12}, \end{cases} \quad (10)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – удлинения; ε_{12} – сдвиг; χ_1, χ_2 – кривизны; χ_{12} – кручение.

Полные деформации

$$e_{11} = \varepsilon_1 + x_3\chi_1; \quad e_{22} = \varepsilon_2 + x_3\chi_2; \quad e_{12} = \varepsilon_{12} + 2x_3\chi_{12}. \quad (11)$$

Интегрируя выражения для напряжений (9) по толщине оболочки в соответствии с правилами

$$N_k = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kk} dx_3; \quad N_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_3; \quad M_k = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kk} x_3 dx_3; \quad M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3,$$

получаем для внутренних усилий в срединной плоскости

$$\begin{aligned} N_1 &= C_{11}\varepsilon_1 h + C_{12}\varepsilon_2 h - I_{11}; \quad N_2 = C_{12}\varepsilon_1 h + C_{22}\varepsilon_2 h - I_{22}; \quad N_{12} = C_{66}\varepsilon_{12} h - I_{12}; \\ M_1 &= D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 - J_{11}; \quad M_2 = D_{12}\chi_1 + D_{22}\chi_2 - J_{22}; \quad M_{12} = 2D_{66}\chi_{12} - J_{12}, \end{aligned}$$

где $D_{ij} = \frac{C_{ij}h^3}{12}$, $I_{ij} = \int R_{ij} dx_3$, $J_{ij} = \int R_{ij} x_3 dx_3$.

Далее, подставив в выражения для усилий геометрические соотношения (10), а затем получившиеся зависимости в уравнения равновесия

$$\begin{cases} N_{1,1} + N_{12,1} = 0, \\ N_{2,2} + N_{12,1} = 0, \\ Q_{1,1} + Q_{2,2} - k_1 N_1 - k_2 N_2 = -q_3, \\ M_{1,1} + M_{12,2} = Q_1, \\ M_{2,2} + M_{12,1} = Q_2, \end{cases} \quad (12)$$

получаем систему из трех дифференциальных уравнений с тремя неизвестными перемещениями

$$\begin{cases} \Delta_1 u + v_{,12}(C_{12} + C_{66})h + L_1(w) - (I_{11,1} + I_{12,2}) = 0, \\ \Delta_2 v + u_{,12}(C_{12} + C_{66})h + L_2(w) - (I_{12,1} + I_{22,2}) = 0, \\ -\Delta_3^2 w - (C_{11}hk_1 + C_{12}hk_2)(u_{,1} + k_1 w) - (C_{12}hk_1 + C_{22}hk_2)(v_{,2} + k_2 w) + \\ + I_{11}k_1 + I_{22}k_2 - I_{12} \cdot 2w_{,12} - J_{11,11} - J_{22,22} - 2J_{12,12} = -q_3, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= C_{11}h \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + C_{66}h \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \quad \Delta_2 = C_{22}h \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + C_{66}h \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \\ \nabla_1 &= C_{11}h \frac{\partial}{\partial x_1} + C_{12}h \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad \nabla_2 = C_{12}h \frac{\partial}{\partial x_1} + C_{22}h \frac{\partial}{\partial x_2}; \\ \Delta_3^2 &= D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}. \\ L_1(w) &= (C_{11}hk_1 + C_{12}hk_2) \frac{\partial w}{\partial x_1}, \\ L_2(w) &= (C_{12}hk_1 + C_{22}hk_2) \frac{\partial w}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

В качестве примера рассматривается задача о нагружении прямоугольной в плане полой оболочки положительной гауссовой кривизны внешней равномерно распределенной нагрузки, приложенной перпендикулярно поверхности оболочки. В качестве граничных условий принято жесткое защемление по всему контуру оболочки, т.е. прогибы и углы поворота равны нулю:

$$w = 0, w_{,i} = 0, i = 1, 2.$$

Полученные результаты расчета по предложенной модели сравнивались с результатами расчета, базирующимися на применении физических соотношений, принятых в классической теории анизотропных материалов, на основе программного комплекса ANSYS. Размеры оболочки в плане были приняты равными $a = b = 1,5$ м, толщина оболочки $h = 0,1$ м, стрела подъема $f = 0,1$ м, главные кривизны $k_1 = k_2 = 0,176$, величина внешней нагрузки $q = 4500$ Па. В качестве материала для оболочки был принят графит 16K9-27/ATJ-S со следующими характеристиками: $E_1^+ = 16,56$ МПа, $E_1^- = 12,42$ МПа, $E_2^+ = 10,35$ МПа, $E_2^- = 8,28$ МПа, $E_{12}^+ = 11,04$ МПа, $E_{12}^- = 9,315$ МПа, $\nu_{12}^+ = 0,14$, $\nu_{12}^- = 0,095$.

Полученные разрешающие дифференциальные уравнения второго порядка в перемещениях неоднородны и достаточно сложны, поэтому для их решения можно использовать численные методы решения, из которых в данном случае наиболее просто реализуется метод конечных разностей. При этом разбиение поверхности оболочки проводилось с постоянным шагом λ на $k-1$ участков, где k – это количество точек разбиения поверхности оболочки.

На рис. 1 приведены результаты оценки сходимости конечно-разностной схемы для разного количества шагов разбиения. Легко увидеть, что по мере увеличения числа точек разбиения схема уверенно сходится.

Здесь $k = 1$ соответствует 5 точкам разбиения, $k = 2-7$ точкам, $k = 3-9$, $k = 4-11$, $k = 5-13$, $k = 6-15$, $k = 7-19$, $k = 8-21$.

На рис. 2-4 приведены некоторые наиболее характерные результаты расчета напряженно-деформированного состояния оболочки, описанной выше. Сплошной линией построены графики, полученные в результате расчета, пунктирной – полученные для классической модели в программном комплексе ANSYS. Проанализировав их, становится ясно, что учет влияния разносопротивляемости при расчете пологих прямоугольных в плане оболочек значительно влияет на точность расчета некоторых параметров НДС. К примеру, в нашем случае, разница конечных прогибов может достигать 30%.

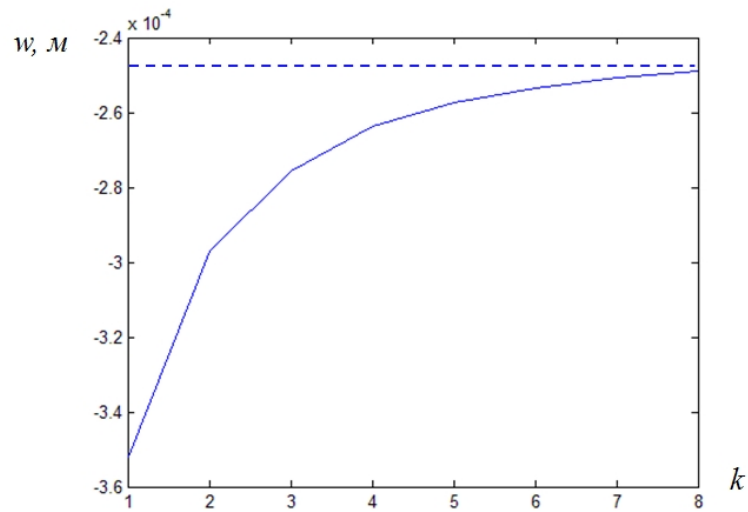


Рис. 1. График зависимости максимальных прогибов w от числа точек разбиения оболочки

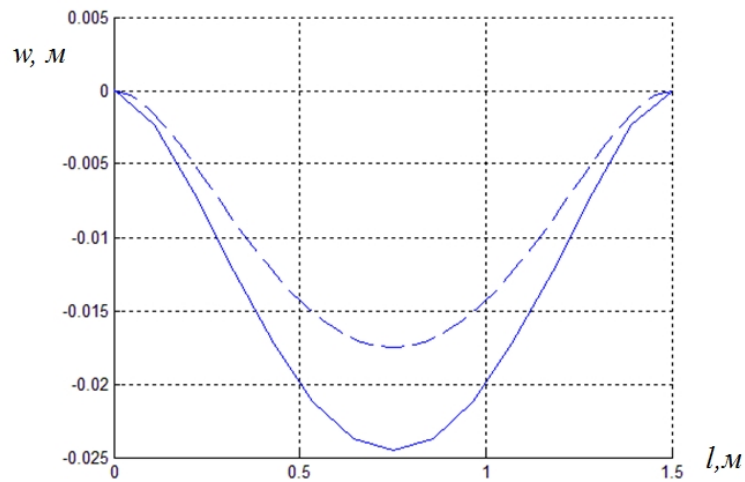


Рис. 2. Прогибы по сечению вдоль оси x_1

Из вышесказанного следует сделать вывод, что учет влияния вида напряженно-деформированного состояния на работу материала является необходимым, так как позволяет получить значительно более точные результаты по сравнению с результатами, полученными с использованием классических методик.

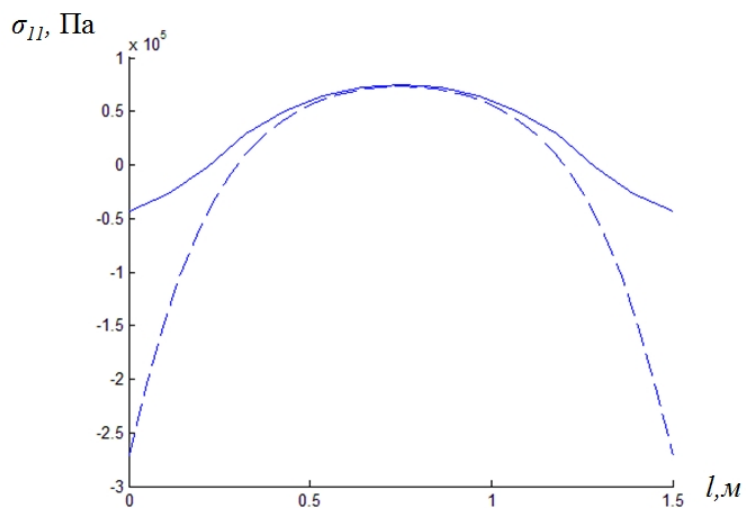
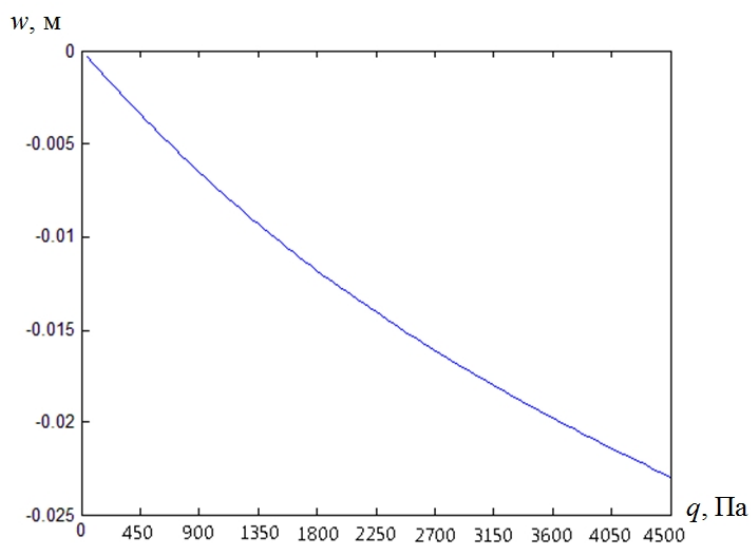
Рис. 3. Нормальные напряжения по сечению вдоль оси x_1 

Рис. 4. График зависимости прогибов от нагрузки

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Трещев, А. А.* Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А. А. Трещев. – Москва ; Тула : РААСН ; ТулГУ, 2008. – 264 с.

[2] *Петров, В. В.* Методы расчета конструкций из нелинейно деформируемого материала : учеб. пособие / В. В. Петров, И. В. Кривошеин. – М. : Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. – 208 с.

Трещев Александр Анатольевич,

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: taa58@yandex.ru

Шерешевский Михаил Борисович,

аспирант кафедры "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: m.shereshevskii@gmail.com

A. A. Treschev, M. B. Shereshevskii

**DETERMINATION OF STRESS-STRAIN STATE OF SLOPING
RECTANGULAR IN PLAN SHELL WITH POSITIVE GAUSS CURVATURE
MADE OF ORTHOTROPIC MATERIAL WITH THE ACCOUNT OF
DIFFERENT RESISTANT PROPERTIES**

Tula State University

Abstract. The article concerns bending of sloping rectangular in plan shell with positive gauss curvature made of different resistant materials. Resolving equations is deduced on the basis of the theory suggested by A.A. Treschev. Article also contains description of method of getting numeral solution, some results and their analysis.

Keywords: orthotropic shell, different resistant material, resolving equations, sloping shell with positive gauss curvature

REFERENCES

[1] *Treshchev, A. A.* The theory of deforming and durability of materials, sensitive to a type of a tension. Defining ratios / A. A. Treshchev. – M : RAASN ; Tula : TulGU, 2008. – 264 p.

[2] *Petrov, V. V.* Methods of calculation of constructions from non-linearly deformable material : manual / V. V. Petrov, I. V. Krivoshein. – M. : Publishing house of Association of construction higher education institutions, 2009. – 208 p.

Treschev, Alexander Anatolievich

Dr. Tech. Sci., Professor, Head of the Department of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula

e-mail: taa58@yandex.ru

Shereshevskii, Mikhail Borisovich

Postgraduate student, Department of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula

e-mail: m.shereshevskii@gmail.com

А. П. Янковский

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ. 2. УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

Аннотация. На основе второго варианта теории Тимошенко сформулирована задача упругопластического изгиба слоистых пластин с учетом их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. Исследовано механическое поведение кольцевых пластин, показавшее, что применение классической теории Кирхгофа к расчету упругопластического изгиба относительно толстых слоистых пластин может привести к предсказанию неоправданно заниженной податливости тонкостенных металлокомпозитных конструкций. Проведенные расчеты выявили развитие значительных деформаций поперечных сдвигов в слоях из низкопрочных фазовых материалов, учет которых обязателен и за счет которых и происходит в основном накопление пластических деформаций в таких пластинах.

Ключевые слова: слоистые металлокомпозиты, регулярная структура, упругопластическое деформирование, изгибаемые пластины, теория Тимошенко, теория Кирхгофа.

УДК: 539.375

Введение. В работе [1] была предложена итерационная модель, описывающая упругопластическое поведение слоистых металлокомпозитных сред регулярной структуры, состоящих из изотропных фазовых материалов. В настоящем исследовании на основе структурных соотношений из [1] представлены результаты моделирования упругопластического изгиба слоистых металлокомпозитных пластин с учетом их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу.

1. Упругопластический изгиб слоистых металлокомпозитных пластин регулярной структуры с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. При изучении механического поведения линейно-упруго или линейно-вязкоупруго изгибаемых тонкостенных элементов конструкций типа пластин и оболочек слоистой или волокнистой структуры учитывать их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу целесообразно лишь тогда, когда модули упругости фазовых материалов различаются на несколько порядков (в 30 и более раз) [2]–[6] и др. В металлокомпозитных тонкостенных конструкциях модули упругости фазовых материалов различаются менее чем на порядок [7], [8], поэтому при исследовании их упругого поведения в условиях изгиба достаточно использовать классическую теорию Кирхгофа – Лява [6], [9] и др., не учитывающую поперечные сдвиги.

Однако при изучении упругопластического деформирования изгибаемых армированных металлокомпозитных тонкостенных элементов конструкций может оказаться необходимым

Поступила 02.07.2012

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-90405-Укр_а) и Президиума СО РАН (Постановление № 10 от 15.01.09, номер проекта 115).

учитывать их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу. Действительно, в [1] была предложена итерационная модель упругопластического поведения слоистого металлокомпози́та регулярной структуры, основанная на применении идеи метода секущего модуля [10], [11]. Покажем, что для некоторых металлокомпози́ций при одних и тех же деформациях секущие модули (которым в линейно-упругом случае соответствуют модули упругости) фазовых материалов могут различаться в десятки раз и даже на два порядка.

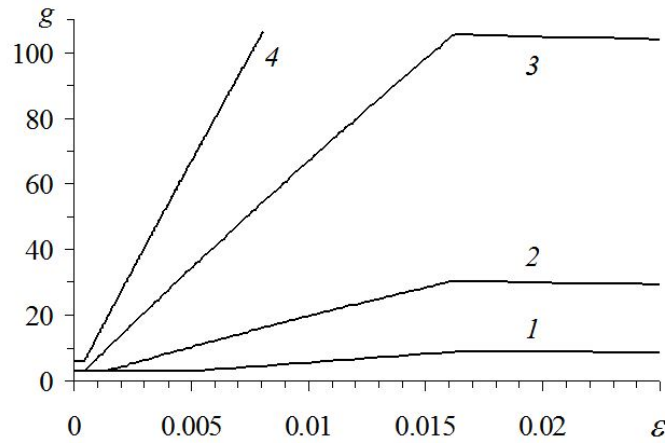


Рис. 1. Зависимости отношений секущих модулей фазовых материалов для некоторых металлокомпози́ций

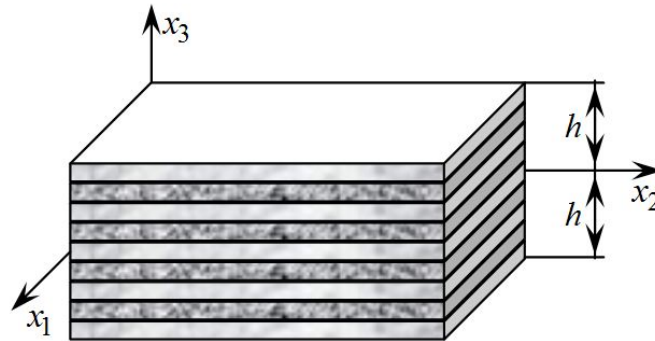


Рис. 2. Элемент слоистой металлокомпози́тной пластины регулярной структуры

С этой целью рассмотрим идеализированную диаграмму растяжения–сжатия фазового материала в виде диаграммы с линейным упрочнением [10]:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s = \sigma_s/E, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s + E_s(\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s), & |\varepsilon| > \varepsilon_s, \end{cases} \quad (1)$$

где σ , ε – напряжение и деформация; E , E_s – модуль Юнга и модуль линейного упрочнения; σ_s , ε_s – предел текучести и предельная упругая деформация фазового материала. Секущий модуль определяется так [10]:

$$G_s(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon) / \varepsilon. \quad (2)$$

На рис. 1 изображены зависимости

$$g(\varepsilon) = G_s^{(2)}(\varepsilon) / G_s^{(1)}(\varepsilon) \quad (3)$$

для некоторых композиций: Д16–11Н8М18К14Т (кривая 1), АДН–11Н8М18К14Т (линия 2), АДМ–11Н8М18К14Т (кривая 3), АДМ–W (линия 4) (механические характеристики фазовых материалов приведены в табл. 1, где ν – коэффициент Пуассона). В равенстве (3) принято: $G_s^{(1)}$, $G_s^{(2)}$ – секущие модули низкопрочного (связующего) и высокопрочного (армирующего) материалов.

Таблица 1

Механические характеристики фазовых материалов [7], [8], [12]

Материал	E , ГПа	ν	σ_s , МПа	E_s , ГПа
Алюминиевый сплав Д16	71	0,33	380	1,250
Алюминиевый сплав АДН	71	0,32	100	0,824
Алюминиевый сплав АДМ	71	0,32	30	0,143
Магнийевый сплав ИМВ-2	45	0,3	26	0,965
Сталь 11Н8М18К14Т	210	0,31	3400	9,545
Вольфрам (W)	410	0,3	3300	—

Левые горизонтальные участки кривых на рис. 1 согласно (1)–(3) соответствуют линейно-упругому деформированию обоих фазовых материалов, возрастающие участки – пластическому деформированию низкопрочной фазы (связующего), а правые убывающие участки – пластическому деформированию обоих фазовых материалов. (Вольфрам ведет себя упруго-хрупко [7], [8], поэтому ниспадающий участок на кривой 4 отсутствует. Зависимости (3), близкие к кривым 3, 4, на рис. 1 получаются и для композиций ИМВ-2–11Н8М18К14Т и ИМВ-2–W соответственно.)

Как видно из рис. 1, для некоторых металлокомпозиций отношение секущих модулей (2) может быть больше 30, следовательно, при изучении упругопластического изгиба тонкостенных элементов конструкций из таких композиций необходимо учитывать их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу. На сегодняшний день поперечный сдвиг учитывался либо в изотропных, упругопластически деформируемых пластинах и оболочках [9], [13] и др., либо в изотропных пластинах и оболочках, усиленных подкрепляющими ребрами [9] и др.

В связи с этим рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат x_1 , x_2 , x_3 тонкостенный элемент толщиной $2h$, состоящий из регулярно чередующихся слоев, параллельных отсчетной плоскости (x_1 , x_2), которую совместим со срединной плоскостью элемента, а ось x_3 направим по толщине элемента (рис. 2).

Для описания ослабленного сопротивления тонкостенного элемента поперечному сдвигу воспользуемся вторым вариантом теории Тимошенко [2], т. е. сдвиговые деформации в поперечном направлении x_3 зададим распределенными по толщине элемента в следующем виде:

$$\varepsilon_{i3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{i3}^0(x_1, x_2) + \frac{x_3 + h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(+)}(x_1, x_2) - \frac{x_3 - h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(-)}(x_1, x_2), \quad (4)$$

$$|x_3| \leq h, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad i = 1, 2,$$

где ε_{i3}^0 , $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ – функции только двух переменных x_1 , x_2 , подлежащие определению и имеющие следующий смысл: $\varepsilon_{i3}^{(+)}$, $\varepsilon_{i3}^{(-)}$ – деформации поперечного сдвига на верхней ($x_3 = h$) и нижней ($x_3 = -h$) лицевых поверхностях элемента соответственно, при $\varepsilon_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$ функции ε_{i3}^0 определяют деформации поперечного сдвига в срединной плоскости $x_3 = 0$; G – область, занимаемая пластиной в плане.

Согласно теории Тимошенко, обжатием тонкостенного элемента пренебрегаем, т. е. считаем, что прогиб u_3 не зависит от координаты x_3 :

$$u_3 = u_3(x_1, x_2). \quad (5)$$

Используя дифференциальные соотношения Коши [10], [14] (в настоящем исследовании ограничимся геометрически линейной постановкой задачи изгиба относительно толстых пластин)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

с учетом (4), (5) получим [2]

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_i} + 2 \left[\frac{x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \varepsilon_{i3}^0 + \right. \\ \left. + \frac{x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} + h \right) \varepsilon_{i3}^{(+)} - \frac{x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} - h \right) \varepsilon_{i3}^{(-)} \right], \quad |x_3| \leq h, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad i = 1, 2; \quad (7)$$

$$\varepsilon_{ii}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} - x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i^2} + 2 \left[\frac{x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \frac{\partial \varepsilon_{i3}^0}{\partial x_i} + \right. \\ \left. + \frac{x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} + h \right) \frac{\partial \varepsilon_{i3}^{(+)}}{\partial x_i} - \frac{x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} - h \right) \frac{\partial \varepsilon_{i3}^{(-)}}{\partial x_i} \right], \quad |x_3| \leq h, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad i = 1, 2; \quad (8)$$

$$\varepsilon_{12}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) - x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \times \\ \times \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}^0}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{23}^0}{\partial x_1} \right) + \frac{x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} + h \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}^{(+)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{23}^{(+)}}{\partial x_1} \right) - \frac{x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} - h \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}^{(-)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{23}^{(-)}}{\partial x_1} \right), \quad (9)$$

$$|x_3| \leq h, \quad (x_1, x_2) \in G,$$

где u_i – перемещения в направлении x_i ; $u_i^0(x_1, x_2)$ – перемещения точек срединной плоскости ($x_3 = 0$).

Таким образом, в соотношениях (4), (7)–(9) неизвестными являются функции u_i^0 , u_3 , ε_{i3}^0 , $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ ($i = 1, 2$), зависящие только от двух переменных x_1, x_2 .

В качестве статической гипотезы теории Тимошенко используется приближенное равенство [2]:

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) \equiv 0. \quad (10)$$

Так как материалы слоев тонкостенного элемента предполагаются изотропными и выполняются соотношения (26) из [1], то матрица $\overset{m}{A}$ в равенстве (8) из [1] (см. там же (25)) имеет блочно-диагональную структуру, причем она имеет те же ненулевые компоненты, что и матрицы $\overset{m}{A}_n$ в соотношениях (6) из [1] (см. там же (7)). Следовательно, линейные определяющие соотношения (8) из [1] с учетом (10) и (2) из [1] можно переписать в следующем виде (исключив предварительно из рассмотрения ε_{33}):

$$\sigma_{ii} = \sum_{j=1}^2 \overset{m}{A}_{ijj} \varepsilon_{jj} \quad (i = 1, 2), \quad \sigma_{kl} = 2 \overset{m}{A}_{klkl} \varepsilon_{kl} \quad (k \neq l, \quad k, l = 1, 2, 3), \quad (11)$$

где

$$2 A_{1212}^m \equiv a_{66}^m, \quad 2 A_{1313}^m \equiv a_{55}^m, \quad 2 A_{2323}^m \equiv a_{44}^m, \quad A_{iijj}^m \equiv a_{ij}^m - a_{i3}^m a_{3j}^m / a_{33}^m \quad (i, j = 1, 2),$$

$$A_{iijj}^m = A_{jjii}^m, \quad A_{klkk}^m = A_{lkkk}^m = A_{lklk}^m = A_{klkl}^m; \quad (12)$$

a_{ij}^m – компоненты матрицы A , которая предполагается известной из решения на предыдущей m -й итерации. (В настоящем разделе для сокращения записи используемых соотношений пока будем опускать верхний индекс " $m+1$ ", означающий номер текущей итерации.)

На основании выражений (11) с учетом (4), (8), (9) можем определить все внутренние силовые факторы в тонкостенном элементе:

$$F_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} dx_3 = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left(\bar{A}_{ijkl}^m \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} - B_{ijkl}^m \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_k \partial x_l} + 2 C_{ijkl}^m \frac{\partial \varepsilon_{k3}^0}{\partial x_l} + 2 C_{ijkl}^{m(+)} \frac{\partial \varepsilon_{k3}^{(+)}}{\partial x_l} - 2 C_{ijkl}^{m(-)} \frac{\partial \varepsilon_{k3}^{(-)}}{\partial x_l} \right),$$

$$M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} x_3 dx_3 = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left(B_{ijkl}^m \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} - E_{ijkl}^m \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_k \partial x_l} + 2 H_{ijkl}^m \frac{\partial \varepsilon_{k3}^0}{\partial x_l} + 2 H_{ijkl}^{m(+)} \frac{\partial \varepsilon_{k3}^{(+)}}{\partial x_l} - 2 H_{ijkl}^{m(-)} \frac{\partial \varepsilon_{k3}^{(-)}}{\partial x_l} \right),$$

$$F_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dx_3 = 2 D_{i3i3}^m \varepsilon_{i3}^0 + 2 D_{i3i3}^{m(+)} \varepsilon_{i3}^{(+)} - 2 D_{i3i3}^{m(-)} \varepsilon_{i3}^{(-)}, \quad i, j = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in G,$$

$$(13)$$

где (см. (12))

$$\bar{A}_{ijkl}^m \equiv \int_{-h}^h A_{ijkl}^m dx_3, \quad B_{ijkl}^m \equiv \int_{-h}^h A_{ijkl}^m x_3 dx_3, \quad C_{ijkl}^m \equiv \int_{-h}^h A_{ijkl}^m \frac{x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) dx_3,$$

$$C_{ijkl}^{m(\pm)} \equiv \int_{-h}^h A_{ijkl}^m \frac{x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} \pm h \right) dx_3, \quad D_{i3i3}^m \equiv \int_{-h}^h A_{i3i3}^m \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} dx_3,$$

$$D_{i3i3}^{m(\pm)} \equiv \int_{-h}^h A_{i3i3}^m \frac{x_3 \pm h}{2h} dx_3, \quad E_{ijkl}^m \equiv \int_{-h}^h A_{ijkl}^m x_3^2 dx_3, \quad H_{ijkl}^m \equiv \int_{-h}^h A_{ijkl}^m \frac{x_3^2}{h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) dx_3,$$

$$H_{ijkl}^{m(\pm)} \equiv \int_{-h}^h A_{ijkl}^m \frac{x_3^2}{2h} \left(\frac{x_3}{2} \pm h \right) dx_3, \quad i, j, k, l = 1, 2. \quad (14)$$

Внутренние силовые факторы (13) должны удовлетворять общеизвестным уравнениям равновесия [2], [3], [5]

$$\frac{\partial F_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{i2}}{\partial x_2} + X_i(x_1, x_2) + \sigma_{i3}^{(+)} - \sigma_{i3}^{(-)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\frac{\partial M_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial x_2} + m_i(x_1, x_2) + h \left(\sigma_{i3}^{(+)} + \sigma_{i3}^{(-)} \right) = F_{i3} \quad (i = 1, 2), \quad (15)$$

где $\sigma_{i3}^{(\pm)} = \sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm h)$ – заданные напряжения на верхней (+) и нижней (-) лицевых поверхностях пластины; X_i – приведенные распределенные внешние нагрузки, действующие в направлении x_i и порожденные объемными силами; m_i – приведенные распределенные внешние моменты от объемных сил.

К уравнениям (15) необходимо добавить четыре статических граничных условия на лицевых поверхностях пластины (см. (11) с учетом (4), (12)):

$$\sigma_{i3}^{(\pm)}(x_1, x_2) = 2 A_{i3i3}^m(x_1, x_2, \pm h) \varepsilon_{i3}^{(\pm)}(x_1, x_2), \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

где левые части – известные функции. (В рамках первого варианта теории Тимошенко, используемого, например, в [3], [5], [13] и др., граничные условия (16) не могут быть удовлетворены).

Из равенств (16) следует (далее в окончательных соотношениях будем восстанавливать верхний индекс "m + 1", означающий номер текущей итерации)

$$\varepsilon_{i3}^{(\pm)}(x_1, x_2) = \sigma_{i3}^{(\pm)}(x_1, x_2) / \left(2 A_{i3i3}^m(x_1, x_2, \pm h) \right), \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

т. е. текущие приближения деформаций поперечного сдвига на лицевых поверхностях тонкостенного элемента на (m + 1)-й итерации можно считать известными, так как m-е приближения "эффективных жесткостей" A_{i3i3}^m согласно (12) предполагаются известными из решения на предыдущей итерации.

После подстановки внутренних силовых факторов (13) в уравнения равновесия (15) окончательно получим

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{A}_{ijkl}^m \frac{\partial}{\partial x_l} u_k^{m+1} - B_{ijkl}^m \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} u_3^{m+1} + 2 C_{ijkl}^m \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{m+1} \right) = -X_i - \sigma_{i3}^{(+)} + \sigma_{i3}^{(-)} - \\ & - 2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl}^{(+)} \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{(+)} - C_{ijkl}^{(-)} \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{(-)} \right), \\ & \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(B_{ijkl}^m \frac{\partial}{\partial x_l} u_k^{m+1} - E_{ijkl}^m \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} u_3^{m+1} + 2 H_{ijkl}^m \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{m+1} \right) - 2 D_{i3i3}^m \varepsilon_{i3}^{m+1} = \\ & = -m_i - h \left(\sigma_{i3}^{(+)} + \sigma_{i3}^{(-)} \right) - 2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(H_{ijkl}^{(+)} \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{(+)} - H_{ijkl}^{(-)} \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{(-)} \right) + \\ & + 2 D_{i3i3}^{(+)} \varepsilon_{i3}^{(+)} - 2 D_{i3i3}^{(-)} \varepsilon_{i3}^{(-)} \quad (i = 1, 2), \\ & 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{i3i3}^m \varepsilon_{i3}^{m+1} \right) = -X_3 - \sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)} - 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{i3i3}^{(+)} \varepsilon_{i3}^{(+)} - D_{i3i3}^{(-)} \varepsilon_{i3}^{(-)} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где в силу (17) правые части – известные функции.

Для однозначного интегрирования системы (18) необходимо использовать общеизвестные статические ([2], [3] и др.)

$$\begin{aligned} F_{11}n_1^2 + F_{22}n_2^2 + 2F_{12}n_1n_2 &= F_{nn}, \quad (F_{22} - F_{11})n_1n_2 + F_{12}(n_1^2 - n_2^2) = F_{n\tau}, \quad F_{13}n_1 + F_{23}n_2 = F_{n3}, \\ M_{11}n_1^2 + M_{22}n_2^2 + 2M_{12}n_1n_2 &= M_{nn}, \quad (M_{22} - M_{11})n_1n_2 + M_{12}(n_1^2 - n_2^2) = M_{n\tau}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma \end{aligned} \quad (19)$$

и кинематические (см. (5), (7))

$$u_3^{m+1}(x_1, x_2) = u_{30}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma; \quad (20)$$

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_{i0}(x_1, x_2, x_3), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad |x_3| \leq h, \quad i = 1, 2 \quad (21)$$

граничные условия. Здесь

$$n_1 = \cos \alpha, \quad n_2 = \sin \alpha; \quad (22)$$

$F_{nn}, F_{n\tau}$ – заданные на контуре Γ нормальная и касательная мембранные силы; F_{n3} – заданная на контуре Γ поперечная сила; $M_{nn}, M_{n\tau}$ – заданные на контуре Γ изгибающий и крутящий моменты; u_{30} – заданный на контуре Γ прогиб; u_{i0} – заданные на торцевой поверхности перемещения в тангенциальных направлениях x_i ($i = 1, 2$); Γ – контур, ограничивающий область G , занимаемую пластиной в плане; α – угол, задающий направление внешней нормали к контуру Γ .

Согласно (7) граничные условия (21) нельзя удовлетворить в каждой точке (x_1, x_2, x_3) торцевой поверхности пластины при произвольной зависимости функций u_{i0} от поперечной координаты x_3 , поэтому подобно статическим граничным условиям (см. (19)) кинематические условия (21) на кромке пластины будем удовлетворять в интегральном смысле, т. е. проинтегрируем граничные условия (21) по толщине пластины с весами 1 и x_3 , тогда с учетом (7) получим

$$\begin{aligned} 2h u_i^0(x_1, x_2) + \frac{h^2}{3} \varepsilon_{i3}^{(+)}(x_1, x_2) - \frac{h^2}{3} \varepsilon_{i3}^{(-)}(x_1, x_2) &= \bar{u}_{i0}(x_1, x_2), \\ -\frac{2}{3}h^3 \frac{\partial}{\partial x_i} u_3^{m+1} + \frac{16}{15}h^3 \varepsilon_{i3}^0(x_1, x_2) + \frac{2}{3}h^3 \varepsilon_{i3}^{(+)}(x_1, x_2) + \frac{2}{3}h^3 \varepsilon_{i3}^{(-)}(x_1, x_2) &= \\ &= \bar{\bar{u}}_{i0}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\bar{u}_{i0}(x_1, x_2) \equiv \int_{-h}^h u_{i0}(x_1, x_2, x_3) dx_3, \quad \bar{\bar{u}}_{i0}(x_1, x_2) \equiv \int_{-h}^h u_{i0}(x_1, x_2, x_3) x_3 dx_3. \quad (24)$$

Для приведения статических граничных условий (19) к разрешающему виду в них необходимо подставить выражения для внутренних силовых факторов (13):

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 n_i n_j \left(\bar{A}_{ijkl}^m \frac{\partial}{\partial x_l} u_k^{m+1} - B_{ijkl}^m \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} u_3^{m+1} + 2 C_{ijkl}^m \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{m+1} \right) = F_{nn} - \\
& - 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 n_i n_j \left(C_{ijkl}^{(+)} \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{(+)} - C_{ijkl}^{(-)} \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{(-)} \right), \\
& \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^i n_{3-i} n_j \left(\bar{A}_{ijkl}^m \frac{\partial}{\partial x_l} u_k^{m+1} - B_{ijkl}^m \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} u_3^{m+1} + 2 C_{ijkl}^m \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{m+1} \right) = F_{n\tau} - \\
& - 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^i n_{3-i} n_j \left(C_{ijkl}^{(+)} \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{(+)} - C_{ijkl}^{(-)} \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{(-)} \right), \\
& \sum_{i=1}^2 n_i D_{i3i3}^m \varepsilon_{i3}^{m+1} = \frac{1}{2} F_{n3} - \sum_{i=1}^2 n_i \left(D_{i3i3}^{(+)} \varepsilon_{i3}^{(+)} - D_{i3i3}^{(-)} \varepsilon_{i3}^{(-)} \right), \\
& \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 n_i n_j \left(B_{ijkl}^m \frac{\partial}{\partial x_l} u_k^{m+1} - E_{ijkl}^m \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} u_3^{m+1} + 2 H_{ijkl}^m \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{m+1} \right) = M_{nn} - \\
& - 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 n_i n_j \left(H_{ijkl}^{(+)} \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{(+)} - H_{ijkl}^{(-)} \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{(-)} \right), \\
& \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^i n_{3-i} n_j \left(B_{ijkl}^m \frac{\partial}{\partial x_l} u_k^{m+1} - E_{ijkl}^m \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} u_3^{m+1} + 2 H_{ijkl}^m \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{m+1} \right) = M_{n\tau} - \\
& - 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^i n_{3-i} n_j \left(H_{ijkl}^{(+)} \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{(+)} - H_{ijkl}^{(-)} \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{k3}^{(-)} \right), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma,
\end{aligned} \tag{25}$$

где согласно (17) правые части – известные функции на контуре Γ .

Так как система разрешающих уравнений (18) является системой дифференциальных уравнений в частных производных десятого порядка [2], [3], [5], [9], то для ее однозначного интегрирования в каждой точке контура Γ должны быть заданы пять статических граничных условий (25) или пять кинематических граничных условий (20), (23). Возможно задание и пяти смешанных из (20), (23), (25) граничных условий.

2. Модельная задача. Рассмотрим осесимметричный изгиб кольцевой слоистой пластины регулярной структуры, имеющей постоянную толщину $2h$ и ограниченной кромками радиусов r_0, r_1 ($r_0 < r_1$). Положения точек пластины задаются в цилиндрической системе координат x_1, x_2, x_3 , где x_1 – полярный радиус, x_2 – полярный угол, x_3 – осевая координата. Нагружение и закрепление пластины не зависят от окружного направления x_2 , внешние силы в этом направлении также отсутствуют.

В силу (11), (12) и указанных особенностей нагружения и закрепления рассматриваемой пластины решение задачи о ее упругопластическом изгибе не будет зависеть от окружной координаты x_2 , а функции

$$u_2(x_1, x_3) \equiv 0, \quad \varepsilon_{12}(x_1, x_3) \equiv \varepsilon_{23}(x_1, x_3) \equiv 0, \quad \sigma_{12}(x_1, x_3) \equiv \sigma_{23}(x_1, x_3) \equiv 0. \tag{26}$$

Для функций $\varepsilon_{13}(x_1, x_3)$, $u_1(x_1, x_3)$, $\varepsilon_{11}(x_1, x_3)$ остаются справедливыми соотношения (4), (7), (8), где следует заменить частные производные обычными производными по переменной x_1 .

Предполагается, что на лицевых поверхностях $x_3 = \pm h$ касательные напряжения отсутствуют ($\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$), поэтому из (17) имеем

$$\varepsilon_{i3}^{(\pm)}(x_1) \equiv 0, \quad i = 1, 2. \quad (27)$$

Согласно (4), (7), (8), (26), (27) и осевой симметрии задачи имеем

$$\varepsilon_{13}^{m+1}(x_1, x_3) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{13}^0{}^{m+1}(x_1), \quad |x_3| \leq h, \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1; \quad (28)$$

$$u_1^{m+1}(x_1, x_3) = u_1^0{}^{m+1}(x_1) - x_3 \frac{d}{dx_1} u_3^{m+1}(x_1) + \frac{2x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \varepsilon_{13}^0{}^{m+1}(x_1); \quad (29)$$

$$\varepsilon_{11}^{m+1}(x_1, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_1} u_1^{m+1} = \frac{d}{dx_1} u_1^0{}^{m+1}(x_1) - x_3 \frac{d^2}{dx_1^2} u_3^{m+1}(x_1) + \frac{2x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \frac{d}{dx_1} \varepsilon_{13}^0{}^{m+1}(x_1), \quad (30)$$

$$|x_3| \leq h, \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1.$$

Окружная деформация вместо (6) с учетом (29) выражается так [10]:

$$\varepsilon_{22}^{m+1}(x_1, x_3) = \frac{1}{x_1} u_1^{m+1} = \frac{1}{x_1} u_1^0{}^{m+1}(x_1) - \frac{x_3}{x_1} \frac{d}{dx_1} u_3^{m+1}(x_1) + \frac{2x_3}{h^2 x_1} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \varepsilon_{13}^0{}^{m+1}(x_1), \quad (31)$$

$$|x_3| \leq h, \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1.$$

На основании (11), (12), (26), (28), (30), (31) по аналогии с (13), учитывая (14), определим внутренние силовые факторы в кольцевой пластине

$$F_{ii}^{m+1}(x_1) = \bar{A}_{ii11}^m \frac{d}{dx_1} u_1^0{}^{m+1} - B_{ii11}^m \frac{d^2}{dx_1^2} u_3^{m+1} + 2C_{ii11}^m \frac{d}{dx_1} \varepsilon_{13}^0{}^{m+1} + \frac{1}{x_1} \bar{A}_{ii22}^m u_1^0{}^{m+1} - \quad (32)$$

$$- \frac{1}{x_1} B_{ii22}^m \frac{d}{dx_1} u_3^{m+1} + \frac{2}{x_1} C_{ii22}^m \varepsilon_{13}^0{}^{m+1}, \quad i = 1, 2;$$

$$F_{13}^{m+1}(x_1) = 2D_{1313}^m \varepsilon_{13}^0{}^{m+1}(x_1); \quad (33)$$

$$M_{ii}^{m+1}(x_1) = B_{ii11}^m \frac{d}{dx_1} u_1^0{}^{m+1} - E_{ii11}^m \frac{d^2}{dx_1^2} u_3^{m+1} + 2H_{ii11}^m \frac{d}{dx_1} \varepsilon_{13}^0{}^{m+1} + \frac{1}{x_1} B_{ii22}^m u_1^0{}^{m+1} - \quad (34)$$

$$- \frac{1}{x_1} E_{ii22}^m \frac{d}{dx_1} u_3^{m+1} + \frac{2}{x_1} H_{ii22}^m \varepsilon_{13}^0{}^{m+1}, \quad i = 1, 2, \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1.$$

Уравнения равновесия в рассматриваемом осесимметричном случае имеют вид [3]

$$\frac{dF_{11}}{dx_1} + \frac{F_{11} - F_{22}}{x_1} = -X_1(x_1), \quad \frac{dM_{11}}{dx_1} + \frac{M_{11} - M_{22}}{x_1} = F_{13}; \quad (35)$$

$$\frac{dF_{13}}{dx_1} + \frac{F_{13}}{x_1} = -p_3(x_1), \quad (36)$$

где

$$p_3(x_1) \equiv X_3(x_1) + \sigma_{33}^{(+)}(x_1) - \sigma_{33}^{(-)}(x_1), \quad m_1(x_1) \equiv 0; \quad (37)$$

$X_i, \sigma_{33}^{(\pm)}$ имеют тот же смысл, что и в (15).

Так как правая часть в уравнении (36) согласно (37) – известная функция, то его можно проинтегрировать

$$F_{13}(x_1) = \frac{x_1^0}{x_1} F_{13}^0 - \frac{1}{x_1} \int_{x_1^0}^{x_1} s p_3(s) ds, \quad (38)$$

где $F_{13}^0 \equiv F_{13}(x_1^0)$ – постоянная интегрирования; x_1^0 – координата одной из кромок ($x_1^0 = r_0$ или $x_1^0 = r_1$).

В силу того, что компоненты a_{ij}^m матрицы A (см. (25) в [1]) предполагаются уже известными из решения рассматриваемой задачи на предыдущей m -й итерации, зная из (38) поперечную силу $F_{13}(x_1)$, на основании (33) с учетом (14), (12) можем найти

$$\varepsilon_{13}^{m+1}(x_1) = F_{13}^{m+1}(x_1) / \left(2D_{1313}^m(x_1) \right). \quad (39)$$

Если на одной из кромок пластины задано значение перерезывающей силы $F_{13}(x_1^0) = F_{13}^0$, то согласно (39) с учетом (38) одна из разыскиваемых функций $\varepsilon_{13}^{m+1}(x_1)$ на текущей $(m+1)$ -й итерации определена. Если же ни на одной из кромок кольцевой пластины поперечная сила не задана, то значение F_{13}^0 в (38) может быть определено лишь в процессе решения исследуемой задачи, а значит, из (39) получим параметрическую зависимость функции $\varepsilon_{13}^{m+1}(x_1)$ от F_{13}^0 .

Введем в рассмотрение функцию

$$\theta^{m+1}(x_1) \equiv d u_3^{m+1} / dx_1, \quad (40)$$

тогда система разрешающих уравнений, состоящая из соотношений (35) и выражений (32), (34), примет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx_1} \left(x_1 \overset{m+1}{F}_{11} \right) - \left(\overset{m}{\bar{A}}_{2211} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{u}_1^0 - \overset{m}{B}_{2211} \frac{d^2}{dx_1^2} \overset{m+1}{u}_3 + 2 \overset{m}{C}_{2211} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0 + \frac{1}{x_1} \overset{m}{\bar{A}}_{2222} \overset{m+1}{u}_1^0 - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{x_1} \overset{m}{B}_{2222} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{u}_3 + \frac{2}{x_1} \overset{m}{C}_{2222} \overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0 \right) = -x_1 X_1(x_1), \\
& \frac{d}{dx_1} \left(x_1 \overset{m+1}{M}_{11} \right) - \left(\overset{m}{B}_{2211} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{u}_1^0 - \overset{m}{E}_{2211} \frac{d^2}{dx_1^2} \overset{m+1}{u}_3 + 2 \overset{m}{H}_{2211} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0 + \frac{1}{x_1} \overset{m}{B}_{2222} \overset{m+1}{u}_1^0 - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{x_1} \overset{m}{E}_{2222} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{u}_3 + \frac{2}{x_1} \overset{m}{H}_{2222} \overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0 \right) = x_1 F_{13}(x_1), \\
& \overset{m}{\bar{A}}_{1111} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{u}_1^0 - \overset{m}{B}_{1111} \frac{d^2}{dx_1^2} \overset{m+1}{u}_3 + 2 \overset{m}{C}_{1111} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0 + \frac{1}{x_1} \overset{m}{\bar{A}}_{1122} \overset{m+1}{u}_1^0 - \\
& \quad - \frac{1}{x_1} \overset{m}{B}_{1122} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{u}_3 + \frac{2}{x_1} \overset{m}{C}_{1122} \overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0 = \overset{m+1}{F}_{11}(x_1), \\
& \overset{m}{B}_{1111} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{u}_1^0 - \overset{m}{E}_{1111} \frac{d^2}{dx_1^2} \overset{m+1}{u}_3 + 2 \overset{m}{H}_{1111} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0 + \frac{1}{x_1} \overset{m}{B}_{1122} \overset{m+1}{u}_1^0 - \\
& \quad - \frac{1}{x_1} \overset{m}{E}_{1122} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{u}_3 + \frac{2}{x_1} \overset{m}{H}_{1122} \overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0 = \overset{m+1}{M}_{11}(x_1).
\end{aligned} \tag{41}$$

Подставим (40) в систему (41) и перепишем ее с учетом того, что функция $\overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0(x_1)$ предполагается уже известной из (39):

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{\bar{F}}_{11} - \overset{m}{\bar{A}}_{2211} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{u}_1^0 + \overset{m}{B}_{2211} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{\theta} - \frac{1}{x_1} \overset{m}{\bar{A}}_{2222} \overset{m+1}{u}_1^0 + \frac{1}{x_1} \overset{m}{B}_{2222} \overset{m+1}{\theta} = -x_1 X_1(x_1) + \\
& \quad + 2 \overset{m}{C}_{2211} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0 + \frac{2}{x_1} \overset{m}{C}_{2222} \overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0, \\
& \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{\bar{M}}_{11} - \overset{m}{B}_{2211} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{u}_1^0 + \overset{m}{E}_{2211} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{\theta} - \frac{1}{x_1} \overset{m}{B}_{2222} \overset{m+1}{u}_1^0 + \frac{1}{x_1} \overset{m}{E}_{2222} \overset{m+1}{\theta} = x_1 F_{13}(x_1) + \\
& \quad + 2 \overset{m}{H}_{2211} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0 + \frac{2}{x_1} \overset{m}{H}_{2222} \overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0,
\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 \overset{m}{\bar{A}}_{1111} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{u}_1^0 - x_1 \overset{m}{B}_{1111} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{\theta} + \overset{m}{\bar{A}}_{1122} \overset{m+1}{u}_1^0 - \overset{m}{B}_{1122} \overset{m+1}{\theta} - \overset{m+1}{\bar{F}}_{11} = -2x_1 \overset{m}{C}_{1111} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0 - 2 \overset{m}{C}_{1122} \overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0, \\
& x_1 \overset{m}{B}_{1111} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{u}_1^0 - x_1 \overset{m}{E}_{1111} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{\theta} + \overset{m}{B}_{1122} \overset{m+1}{u}_1^0 - \overset{m}{E}_{1122} \overset{m+1}{\theta} - \overset{m+1}{M}_{11} = -2x_1 \overset{m}{H}_{1111} \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0 - 2 \overset{m}{H}_{1122} \overset{m+1}{\varepsilon}_{13}^0, \\
& \frac{d}{dx_1} \overset{m+1}{u}_3 = \overset{m+1}{\theta}(x_1), \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1,
\end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$\bar{F}_{11}^{m+1}(x_1) \equiv x_1 \bar{F}_{11}^{m+1}(x_1), \quad \bar{M}_{11}^{m+1}(x_1) \equiv x_1 \bar{M}_{11}^{m+1}(x_1). \quad (43)$$

В силу соотношений (38), (39) правые части равенств (42) – известные функции (возможно, параметрически зависящие от заранее неизвестной постоянной интегрирования \bar{F}_{13}^{m+1} , см. (38)).

Для однозначного интегрирования системы (42) на кромке x_1^0 должны быть заданы статические (см. (19), (22), (43) при $\alpha = 0, \pi$)

$$\bar{F}_{11}^{m+1}(x_1^0) \equiv x_1^0 F_{nn}, \quad \bar{M}_{11}^{m+1}(x_1^0) \equiv x_1^0 M_{nn}, \quad F_{13}(x_1^0) = F_{13}^0 \quad (x_1^0 = r_0 \text{ и/или } x_1^0 = r_1) \quad (44)$$

или кинематические (см. (20), (23), (27))

$$\bar{u}_1^0(x_1^0) \equiv \frac{\bar{u}_{10}}{2h}, \quad \bar{u}_3^0(x_1^0) \equiv u_{30}, \quad \bar{\theta}^0(x_1^0) - \frac{8}{5} \varepsilon_{13}^{m+1}(x_1^0) = -\frac{3\bar{u}_{10}}{2h^3} \quad (x_1^0 = r_0 \text{ и/или } x_1^0 = r_1) \quad (45)$$

граничные условия, где значения $\bar{u}_{10}, \bar{u}_{10}$ определяются равенствами, аналогичными (24). Возможно задание и смешанных из (44), (45) граничных условий.

Так как линейная система (42) содержит производные лишь первого порядка от неизвестных функций $\bar{F}_{11}^{m+1}(x_1), \bar{M}_{11}^{m+1}(x_1), \bar{\theta}^0(x_1), \bar{u}_3^0(x_1), \bar{u}_1^0(x_1)$, то двухточечная граничная задача для нее (см. (42), (44), (45)) с учетом (38), (39) может быть проинтегрирована численно методом пристрелки [15].

3. Обсуждение результатов расчетов. В качестве конкретных примеров исследуем упругопластический изгиб кольцевых пластин постоянной толщины $2h = 10$ см, ограниченных кромками радиусов $r_0 = 1$ м, $r_1 = 2$ м и состоящих из регулярно чередующихся алюминиевых (сплавы Д16, АДН, АДМ) и стальных (марки 11Н8М18К14Т) слоев при относительном объемном содержании фазовых материалов $\omega_1 = \omega_2 = 0,5$ (см. (1) в [1]). Конструкции равномерно нагружены в поперечном направлении $p_3(x_1) = const > 0$ ($X_1(x_1) \equiv 0$, см. (35), (37), (42)); внешние их кромки свободны, т. е. $F_{nn} = 0, M_{nn} = 0, F_{13}^0 = 0$ при $x_1^0 = r_1$ (см. (44)), а внутренние – жестко закреплены, т. е. согласно (21) $u_{i0} \equiv 0$ при $x_1^0 = r_0$, а значит, в силу равенств (24) в граничных условиях (45) следует принять $\bar{u}_{10} = 0, \bar{u}_{10} = 0, u_{30} = 0$ при $x_1^0 = r_0$.

З а м е ч а н и е. Процедура получения кинематических граничных условий (23) из равенств (21) с учетом (24) для жестко закрепленной кромки в случаях использования кинематических гипотез теории Кирхгофа или первого варианта теории Тимошенко приводит к общеизвестным граничным условиям в заделке в рамках этих теорий [3], [5], [9], [13], в частности для кирхгофовских пластин в (23), (45) достаточно принять $\varepsilon_{i3}^{m+1} = \varepsilon_{i3}^{m+1(\pm)} \equiv 0$ и учесть, что $\bar{u}_{i0} \equiv 0, \bar{u}_{i0} = 0$.

В качестве меры податливости изгибаемых пластин примем следующую величину:

$$u_3^m = \max_{r_0 \leq x_1 \leq r_1} u_3(x_1) = u_3(r_1). \quad (46)$$

Относительную разность решений, полученных по классической и уточненной теориям, на основании (46) можно оценить по формуле

$$U_3 = [u_3^T - u_3^K] / u_3^T \times 100 \%, \quad (47)$$

где u_3^T, u_3^K – значения u_3^m , рассчитанные по теориям Тимошенко и Кирхгофа соответственно. (Решение по классической теории получается по формулам (42)–(45), если в (39) принять $D_{1313}^m \rightarrow \infty$ или, что то же самое, в (42), (45) положить $\varepsilon_{13}^{m+1} \equiv 0$. При этом согласно (26) из [1]

с учетом (5), (6), (10), (26) деформированные состояния в регулярно чередующихся фазовых материалах полностью совпадают).

Проведем верификацию предложенной модели описания упругопластического изгиба слоистых металлокомпозитных пластин регулярной структуры, учитывающей ослабленное сопротивление поперечному сдвигу (модели).

Многочисленные исследования, проведенные ранее и посвященные изучению влияния учета поперечных сдвигов в тонкостенных композитных конструкциях при их линейно-упругом деформировании [2], [3], [6] и др., показывают, что это влияние существенно лишь для относительно толстых элементов конструкций (поэтому здесь рассматриваются пластины с относительной толщиной 0,1) при значительном различии модулей упругости фазовых материалов (в 30 и более раз [6]).

Естественно ожидать подобные свойства решений и в случае упругопластического изгиба слоистых металлокомпозитных пластин регулярной структуры, так как предложенная в [1] структурная модель основана на применении итерационного процесса типа метода секущего модуля, аналогичного модулю упругости. Следовательно, для пластин с "жесткими слоями" (например, из Д16–11Н8М18К14Т-композиции, для которой отношение секущих модулей (3) согласно кривой 1 на рис. 1 не превышает значения 10) решения рассматриваемой задачи, полученные по второму варианту теории Тимошенко (см. разделы 1, 2) и по теории Кирхгофа, должны различаться незначительно.

На рис. 3 изображены зависимости $u_3(x_1)$ для слоистых пластин из разных композиций при разных уровнях нагружения p_3 (см. (37)). Кривые 1', 2' получены по теории Тимошенко, а линии 1'', 2'' – по теории Кирхгофа (кривые с одинаковыми номерами определены при одних и тех же значениях p_3).

Для получения некоторого наглядного представления о характере распределения деформаций в фазовых материалах слоистых пластин на рис. 4, 5 изображены их поперечные сечения в радиальном направлении (внешние прямоугольные контуры) и кривые, характеризующие следы поверхностей равного уровня, на которых интенсивности деформаций сдвига Γ_n (см. (4) в [1]) имеют постоянные значения. Номера кривых k на этих рисунках определяются отношением $k = \Gamma_n / \Gamma_1^s$ ($n = 1, 2$), где согласно (4) из [1] $\Gamma_1^s = \sqrt{3}\varepsilon_s^{(1)}$, $\varepsilon_s^{(1)}$ – предельная упругая деформация связующего материала композиции (в данном исследовании – соответствующего алюминиевого сплава; см. (1) и табл. 1). Следовательно, кривые 1 на рис. 4, 5 определяют положение точек, в которых деформированное состояние в фазовых материалах эквивалентно предельной упругой деформации связующего компонента (т. е. в связующем материале эти линии соответствуют упругопластической границе).

Исследуем сначала деформирование пластин с "жестким" связующим. На рис. 3 кривые 1', 1'' рассчитаны для пластины из Д16–11Н8М18К14Т-композиции при $p_3 = 7$ МПа. В этом случае оказалось $U_3 = 3,5\%$ (см. (47)), т. е., как и предполагалось, решения, полученные по обеим рассматриваемым теориям, различаются незначительно, так как отношение секущих модулей фазовых материалов не превосходит 10.

Расчет пластины из АДН–11Н8М18К14Т-композиции показал, что зависимости $u_3(x_1)$, определенные по обеим теориям при $p_3 = 6,3$ МПа, визуально почти неотличимы от линий 1', 1'' на рис. 3, т. е. и для этой композиции при указанном уровне нагружения вполне можно использовать классическую теорию Кирхгофа. На рис. 4 изображены картины упругопластического деформирования фазовых материалов в такой пластине, рассчитанные по теории Тимошенко. Сплошные кривые на рис. 4 определяют деформированное состояние в АДН-слоях, а пунктирные – в стальных слоях (при этом сплошные и пунктирные линии с номером 4 визуально неразличимы). Напомним, что согласно классической теории деформированные состояния в обоих фазовых материалах слоистой пластины полностью совпадают и в данном случае определяются линиями равного уровня, почти неотличимыми от пунктирных кривых на рис. 4.

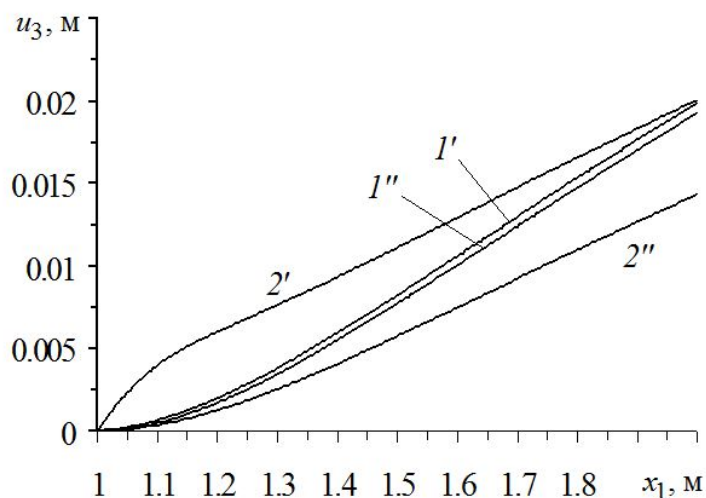


Рис. 3. Зависимости прогибов от полярного радиуса

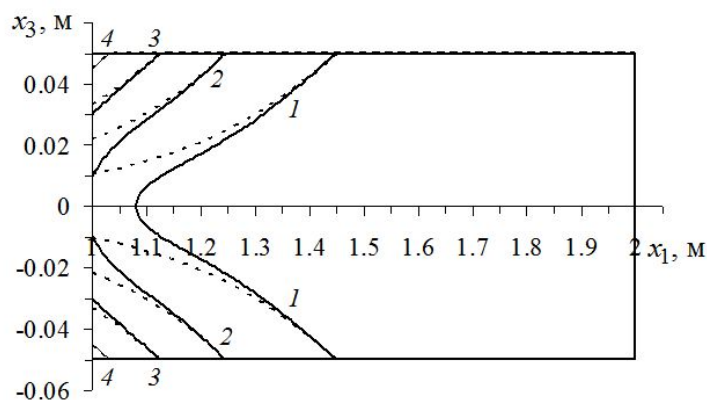


Рис. 4. Характерные зоны упругопластического деформирования фазовых материалов в слоистой пластине из АДН–11Н8М18К14Т-композиции (сплошные линии — в АДН-слоях, пунктирные — в стальных слоях)

Сравнение сплошных и пунктирных линий на рис. 4 с одинаковыми номерами показывает, что деформированное состояние в АДН-слоях в окрестности срединного слоя пластины, определяемое по теории Тимошенко, существенно отличается от деформированного состояния, рассчитанного по теории Кирхгофа.

Как видно из рис. 4, значения Γ_1 и Γ_2 не превосходят $4,3\Gamma_1^s$. Согласно поведению кривой 2 на рис. 1 отношение секущих модулей фазовых материалов (3) не превышает 15, поэтому и зависимости $u_3(x_1)$, рассчитанные по обеим теориям, для этой композиции получились близкими. При увеличении поперечной нагрузки p_3 отношение секущих модулей при использовании этой композиции может стать больше 30, а значит, различие решений станет более существенным, однако при этом потребуются привлечение геометрически нелинейной постановки задачи, что выходит за рамки настоящего исследования.

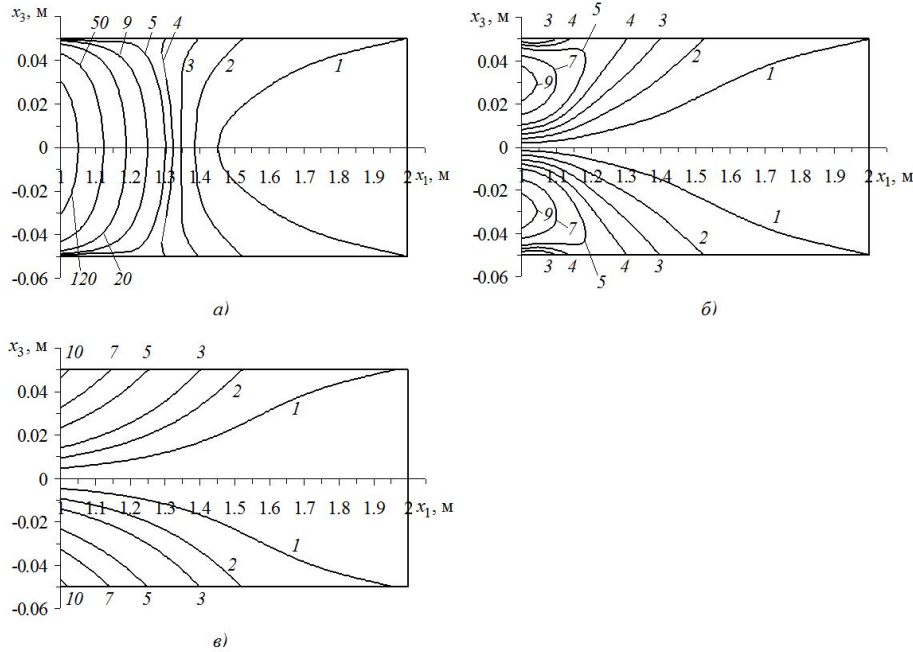


Рис. 5. Характерные зоны упругопластического деформирования фазовых материалов в слоистой пластине из АДМ–11Н8М18К14Т-композиции:
 а – в АДМ-слоях, б – в стальных слоях (расчеты по теории Тимошенко);
 в – в обоих фазовых материалах (расчет по теории Кирхгофа)

Близость кривых $1'$, $1''$ на рис. 3, рассчитанных для пластин из композиций с отношением секущих модулей фазовых материалов, близким к 10, позволяет сделать вывод о том, что можно доверительно относиться к модели упругопластического изгиба тонкостенного слоистого элемента регулярной структуры, развитой в настоящем исследовании и учитывающей его ослабленное сопротивление поперечным сдвигам.

Исследуем теперь механическое поведение изгибаемой пластины из АДМ–11Н8М18К14Т-композиции, т. е. с низкопрочными связующими слоями (см. табл. 1). Кривые $2'$, $2''$ на рис. 3 определены для этой пластины при $p_3 = 4,3$ МПа. Как видно, разность решений, полученных по обеим теориям, при этом значительна: $U_3 = 28,5\%$ (см. (47)). Более того, кривая $2'$ в окрестности левого конца ведет себя даже качественно иначе по сравнению с линией $2''$ (и кривыми $1'$, $1''$), что объясняется развитием значительных деформаций поперечного сдвига в АДМ-слоях. Действительно, на рис. 5 изображены картины деформирования фазовых материалов в такой пластине: в АДМ-слоях (рис. 5, а) и в стальных слоях (рис. 5 б; кривые на рис. 5 а, б рассчитаны по теории Тимошенко). Видно, что картины деформирования фазовых материалов, определенные по уточненной теории, в этом случае качественно разные. Кривая 1 на рис. 5 а определяет положение упругопластической границы в АДМ-слоях (правее этой линии материал АДМ-слоев остается упругим). Кривые равного уровня ($\Gamma_1 = const$) на рис. 5 а в окрестности внутренней кромки $x_1 = 1$ м близки к параболам, следовательно, согласно (28) и равенству (22) из [1] в АДМ-слоях в окрестности жестко закрепленной кромки ($1 \leq x_1 \leq 1,2$ м) доминируют деформации поперечного сдвига $\varepsilon_{13}^{(1)}$ (причем $\max \Gamma_1 = 190\Gamma_1^s$, т. е. пластические деформации получают значительное развитие). На рис. 5 б подобное поведение линий равного уровня ($\Gamma_2 = const$) не наблюдается, т. е. в стальных слоях такой пластины деформации поперечного сдвига $\varepsilon_{13}^{(2)}$ не доминируют над линейными (радиальными $\varepsilon_{11}^{(2)}$ и окружными $\varepsilon_{22}^{(2)}$) деформациями (при этом $\max \Gamma_2 = 10\Gamma_1^s$).

Сопоставление номеров кривых на рис. 5 а и на рис. 5 б (а также значений $\max \Gamma_1$, $\max \Gamma_2$) показывает, что в АДМ-слоях развиваются деформации почти в 20 раз больше, чем в стальных слоях. Именно развитие значительных пластических деформаций поперечного сдвига в АДМ-слоях в окрестности жестко закрепленной внутренней кромки и определяет необычное на первый взгляд поведение кривой 2' на рис. 3, которое качественно отличается от поведения остальных линий на этом рисунке.

Картина деформирования фазовых материалов рассматриваемой металлокомпозитной пластины, рассчитанная по теории Кирхгофа, изображена на рис. 5 в. Напомним, что в рамках этой теории деформированные состояния в регулярно чередующихся слоях изгибаемой пластины полностью совпадают. По поведению кривых на рис. 5 в можно заключить, что согласно классической теории в окрестности заделки реализуется деформированное состояние, которое при увеличении нагрузки p_3 стремится к состоянию, соответствующему пластическому шарниру. Сравнение линий равного уровня на рис. 5 в с аналогичными кривыми на рис. 5 а, б показывает, что в случае АДМ-11Н8М18К14Т-композиции классическая теория Кирхгофа ни качественно, ни количественно не описывает упругопластическое деформирование фазовых материалов в относительно толстых слоистых пластинах регулярной структуры.

Во всех приведенных выше расчетах величины u_3^m (см. (46)) имели порядок 1/5 (и меньше) от толщины пластины $2h = 10$ см (см. рис. 3), поэтому все полученные в настоящем исследовании результаты, основанные на геометрически линейной постановке задачи изгиба, являются вполне корректными [16]. При этом максимальные значения интенсивностей деформаций сдвига фазовых материалов остаются меньшими критических значений, соответствующих пределам прочности [7], [8], [12]. При больших уровнях нагружения p_3 металлокомпозитных пластин необходимо использовать уже геометрически нелинейную постановку задачи [9], [13], [16] и др., что выходит за рамки настоящего исследования.

Дополнительные расчеты показали, что для адекватного описания упругопластического изгиба пластин из ИМВ-2-11Н8М18К14Т-композиции, АДМ-W-композиции и ИМВ-2-W-композиции (см. табл. 1) также необходимо использовать теорию Тимошенко, потому что в этих случаях решение по классической теории ни качественно, ни количественно не согласуется с уточненным решением.

Заключение. Проведенный анализ упругопластического изгиба слоистых пластин регулярной структуры показывает, что для относительно толстых тонкостенных элементов металлокомпозитных конструкций учет их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу при упругопластическом деформировании низкопрочных связующих слоев обязателен, иначе расчеты по классической теории Кирхгофа будут предсказывать неоправданно заниженную (на десятки процентов и даже в разы) податливость этих конструкций при наличии высокопрочных армирующих слоев.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Янковский, А. П. Моделирование упругопластического изгиба металлокомпозитных слоистых пластин регулярной структуры. 1. Структурная модель / А. П. Янковский // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – № 2 (12). – С. 102–111.
- [2] Малмейстер, А. К. Сопротивление полимерных и композитных материалов / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. – Рига : Зинатне, 1980. – 571 с.
- [3] Васильев, В. В. Механика конструкций из композитных материалов / В. В. Васильев. – М. : Машиностроение, 1988. – 269 с.
- [4] Андреев, А. Н. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: изгиб, устойчивость, колебания / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский. – Новосибирск : Наука, 2001. – 288 с.
- [5] Пикуль, В. В. Механика оболочек / В. В. Пикуль. – Владивосток : Дальнаука, 2009. – 536 с.

[6] *Немировский, Ю. В.* О границах применимости некоторых теорий расчета изгибаемых армированных пластин / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Научный вестник НГТУ. – 2004. – №3 (18). – С. 91–113.

[7] *Композиционные материалы : справочник* / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др. ; под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М. : Машиностроение, 1990. – 512 с.

[8] *Композиционные материалы : справочник* / под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев : Наукова думка, 1985. – 592 с.

[9] *Карпов, В. В.* Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения : в 2 ч. Ч. 1. : Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения / В. В. Карпов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 288 с.

[10] *Малинин, Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М. : Машиностроение, 1968. – 400 с.

[11] *Ильюшин, А. А.* Труды. Т. 3 : Теория термовязкоупругости / А. А. Ильюшин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 288 с.

[12] *Никитенко, А. Ф.* Ползучесть и длительная прочность металлических материалов / А. Ф. Никитенко. – Новосибирск : НГАСУ, 1997. – 278 с.

[13] *Абросимов, Н. А.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н. А. Абросимов, В. Г. Баженов. – Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.

[14] *Прикладная теория пластичности : учебное пособие* / К. М. Иванов [и др.]; под ред. К. М. Иванова. – СПб. : Политехника, 2009. – 375 с.

[15] *Холл, Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл, Дж. Уатт. – М. : Мир, 1979. – 312 с.

[16] *Вольмир, А. С.* Гибкие пластинки и оболочки / А. С. Вольмир. – М. : ОГИЗ ГИТТЛ, 1956. – 420 с.

Янковский Андрей Петрович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры строительной механики, Сибирский государственный университет путей сообщения, ведущий научный сотрудник лаборатории физики быстропротекающих процессов, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск

e-mail: lab4nemir@rambler.ru,

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

A. P. Yankovskii

MODELING OF THE ELASTIC-PLASTIC BENDING OF METAL-COMPOSITE LAYERED PLATES OF REGULAR STRUCTURE. 2. REFINED MODEL OF DEFORMATION

S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences

Abstract. On the basis of the second variant of Timoshenko theory the problem of elastoplastic bending layered plates taking into account their weakened resistance to transverse shift is formulated. The mechanical behaviour of ring plates is investigated. It has shown that application of the classical Kirchhoff theory to calculation of the elastoplastic bending for thick layered plates leads to a prediction of unreasonable understated compliance of thin-walled designs. The executed calculations have shown the presence of significant transverse shift deformations in layers of low-strength phase material, which account is obligatory and due to which there is an accumulation of plastic deformations in such plates.

Keywords: layered metal-composite, regular structure, elastoplastic deformation, bending plates, Timoshenko theory, Kirchhoff theory.

REFERENCES

- [1] *Yankovskii, A. P.* Simulation of an elasto-plastic bend of the metalcomposite layered plates of the regular structure. 1. Structural model / A. P. Yankovskii // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Mechanics of definable state. – 2012. – No. 2 (12). – P. 102–111.
- [2] *Malmeyster, A. K.* Resistance of polymeric and composite materials / A. K. Malmeyster, V. P. Tamuzh, G. A. Teters. – Threshing barn : To Zinatn, 1980. – 571 p.
- [3] *Vasilyev, V. V.* Mechanics of constructions from composite materials / V. V. Vasilyev. – M. : Mechanical engineering, 1988. – 269 p.
- [4] *Andreev, A. N.* Multi-layer anisotropic jackets and plates : bend, stability, oscillations / A. N. Andreev, Yu. V. Nemirovsky. – Novosibirsk : Science, 2001. – 288 p.
- [5] *Pikul, V. V.* Mechanics of jackets / V. V. Pikul. – Vladivostok : Dalnauka, 2009. – 536 p.
- [6] *Nemirovsky, Yu. V.* About boundaries of applicability of some theories of calculation of the bent reinforced plates / Yu. V. Nemirovsky, A. P. Yankovsky // Scientific messenger of NGTU. – 2004. – No. 3 (18). – P. 91–113.
- [7] *Composition materials : reference manual / V. V. Vasilyev, V. D. Protasov, V. V. Bolotin and other; under a general edition of V. V. Vasilyev, Yu. M Tarnopolsky.* – M. : Mechanical engineering, 1990. – 512 p.
- [8] *Composition materials : reference manual / Under the editorship of D. M. Karpinosa.* – Kiev : Naukova thought, 1985. – 592 p.
- [9] *Karpov, V. V.* Durability and stability of reinforced jackets of rotation : in 2 p. P. 1 : Models and algorithms of research of durability and stability of the reinforced jackets of rotation / V. V. Karpov. – M. : FIZMATLIT, 2010. – 288 p.
- [10] *Malinin, N. N.* Application-oriented theory of plasticity and creep / N. N. Malinin. – M. : Mechanical engineering, 1968. – 400 p.
- [11] *Ilyushin, A. A.* Works. Vol. 3 : Thermoviscoelasticity theory / A. A. Ilyushin. – M. : FIZMATLIT, 2007. – 288 p.
- [12] *Nikitenko, A. F.* Creep and the long durability of metal materials / A. F. Nikitenko. – Novosibirsk : NGASU, 1997. – 278 p.
- [13] *Abrosimov, N. A.* Non-linear tasks of dynamics of composite constructions / N. A. Abrosimov, V. G. Bazhenov. – N. Novgorod : NNGU publishing house, 2002. – 400 p.

[14] *Application-oriented theory of plasticity : manual* / K. M. Ivanov [etc.]; under the editorship of K. M. Ivanov. – SPb. : Polytechnique, 2009. – 375 p.

[15] *Hall, J.* The modern numerical methods of the solution of the ordinary differential equations / J. Hall, J. Uatt. – M. : World, 1979. – 312 p.

[16] *Volmir, A. S.* Flexible plates and jackets / A. S. Volmir. – M. : OGIZ GITTL, 1956. – 420 p.

Yankovskii, Andrey Petrovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of construction mechanics, Leading Researcher associate of laboratory "Physics of fast-proceeding processes", S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk

e-mail: lab4nemir@rambler.ru,

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОРТОТРОПНЫХ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ДВУХ СИСТЕМ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ КОГЕЗИОННЫХ ТРЕЩИН В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Азербайджанский технический университет

Аннотация. Рассматривается задача механики разрушения о взаимодействии ортотропных упругих включений, поверхность которых равномерно покрыта однородной цилиндрической пленкой, и прямолинейных трещин со связями между берегами в концевых зонах, коллинеарных осям абсцисс и ординат в изотропной плоскости. Считается, что упругая плоскость ослаблена двумя периодическими системами прямолинейных когезионных трещин, берега которых вне концевых зон свободны от внешних усилий. Кусочно-однородная среда подвергнута продольному сдвигу.

Ключевые слова: ортотропные упругие включения, когезионные трещины, продольный сдвиг, перфорированная плоскость.

УДК: 539.375

1. Постановка задачи. Пусть имеется изотропная упругая плоскость, ослабленная периодической системой круговых отверстий, имеющих радиусы λ ($\lambda < 1$) и центры в точках $P_m = m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\omega = 2$.

Круговые отверстия плоскости заполнены шайбами без натяга из ортотропного упругого материала, поверхность которых равномерно покрыта однородной цилиндрической пленкой. Кроме того, считается, что упругая плоскость ослаблена двумя периодическими системами прямолинейных когезионных трещин, берега которых вне концевых зон свободны от внешних усилий. Рассматриваемая плоскость подвергнута сдвигу усилиями $\tau_y = \tau_y^\infty$, $\tau_x = 0$ (сдвиг на бесконечности).

На основании симметрии краевых условий и геометрии области D , занятой средой напряжения, являются периодическими функциями с основным периодом ω . При деформации кусочно-однородного составного тела в случае идеального контакта смежные точки контуров на границе включение – покрытие, а также покрытие – плоскость будут иметь одинаковые перемещения и напряжения.

По мере увеличения внешней нагрузки на продолжении прямолинейных трещин будут возникать зоны предразрушения. Используется модель трещины со связями между берегами в концевых зонах предразрушения [1]. Концевые зоны трещин моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале среды. Взаимодействие берегов этих зон моделируется путем введения между берегами зоны предразрушения связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры зон предразрушения зависят от вида материала.

При действии внешней нагрузки на составное тело в связях, соединяющих берега концевых зон предразрушения, возникают касательные усилия $q_y(x)$ и $q_x(y)$ соответственно. Эти напряжения заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

Выражая напряжения и смещение через аналитическую функцию [2]

$$\tau_x - i\tau_y = f'(z), \quad w = \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} f(z),$$

где μ – постоянная материала среды; $i = \sqrt{-1}$, краевые условия поставленной задачи запишем в виде

$$\left(1 + \frac{\mu_b}{\mu_t}\right) f_b(\tau_1) + \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_t}\right) \overline{f_b(\tau_1)} = 2f_t(\tau_1), \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) f_t(\tau) + \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) \overline{f_t(\tau)} = 2f_s(\tau), \quad (2)$$

$$f'_s(t) - \overline{f'_s(t)} = f_x(t), \quad f'_s(t_1) - \overline{f'_s(t_1)} = f_y(t_1), \quad (3)$$

где $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$; $\tau_1^- = (\lambda - h) e^{i\theta} + m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); h – толщина покрытия; t и t_1 – абсциссы точек берегов трещин, направленных по осям абсцисс и ординат, соответственно. Величины, относящиеся к покрытию, шайбе и плоскости, в дальнейшем обозначаются соответственно индексами t , b и s :

$$f_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{– на свободных берегах трещин, коллинеарных оси абсцисс,} \\ -2iq_y(t) & \text{– на берегах концевых зон трещин,} \end{cases}$$

$$f_y(t_1) = \begin{cases} 0 & \text{– на свободных берегах трещин коллинеарных оси ординат,} \\ -2iq_x(t_1) & \text{– на берегах концевых зон трещин.} \end{cases}$$

Основные соотношения рассматриваемой задачи дополняются соотношениями, связывающими раскрытие берегов зон предразрушения (концевые зоны) и усилия в связях. Без потери общности эти соотношения представим в виде

$$w^+(x, 0) - w^-(x, 0) = C(x, q_y(x)) q_y(x), \quad (4)$$

$$w^+(0, y) - w^-(0, y) = C(y, q_x(y)) q_x(y). \quad (5)$$

Здесь функции $C(x, q_y(x))$ и $C(y, q_x(y))$ представляют собой эффективные податливости связей; $(w^+ - w^-)$ – раскрытие берегов зон трещин в плоскости.

2. Решение краевой задачи. Решение краевой задачи ищем в виде

$$f_s(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z), \quad (6)$$

$$f_b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}, \quad f_t(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{2k} z^{2k+1}, \quad (7)$$

$$f_1''(z) = F_1(z) = \tau_y^\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (8)$$

$$F_2(z) = \frac{1}{i\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t - z) dt, \quad (9)$$

$$F_3(z) = \frac{1}{i\omega} \int_{L_2} g_1(t_1) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) dt_1,$$

где интегралы в (9) берутся по линиям $L_1 = \{-\ell, -a\} + [a, \ell]$; $L_2 = \{-r, -b\} + [b, r]$; $\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi z}{\omega}} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$; $g(t)$, $g_1(t_1)$ – искомые функции, характеризующие раскрытие берегов трещин с концевыми зонами;

$$g(x) = \frac{\mu_s}{2} \frac{d}{dx} [w^+(x, 0) - w^-(x, 0)] \quad \text{на } L_1,$$

$$g_1(y) = \frac{\mu_s}{2} \frac{d}{dy} [w^+(0, y) - w^-(0, y)] \quad \text{на } L_2.$$

К основным представлениям (6)–(9) добавляются дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи

$$\int_{-\ell}^{-a} g(t) dt = 0, \quad \int_a^{\ell} g(t) dt = 0,$$

$$\int_{-r}^{-b} g_1(t_1) dt_1 = 0, \quad \int_b^r g_1(t_1) dt_1 = 0. \tag{10}$$

Введем обозначения:

$$z_3 = x + \mu_3 y; \quad \mu_3 = \alpha_3 + i\beta_3; \quad \bar{\mu}_3 = \alpha_3 - i\beta_3 \quad (\beta > 0) \text{ – комплексный параметр.}$$

Задача об антиплоской деформации (сложный сдвиг) анизотропного тела сводится к такой же задаче для изотропного тела, у которого поперечное сечение получается из заданного путем аффинного преобразования

$$z_3 = x_3 + iy_3, \quad x_3 = x + \alpha_3 y, \quad y_3 = \beta_3 y,$$

$$x = x_3 - (\alpha_3/\beta_3) y_3, \quad y = (1/\beta_3) y_3.$$

Рассмотрим случай ортотропного стержня. Направляя оси x и y нормально к плоскостям упругой симметрии, запишем уравнения обобщенного закона Гука следующим образом:

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{\mu_1} \tau_{yz}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{\mu_2} \tau_{xz},$$

где μ_1 , μ_2 – модули сдвига для плоскостей yz и xz ; $\mu_1 = 1/a_{44}$; $\mu_2 = 1/a_{55}$; $a_{45} = 0$.

Задачу о продольном сдвиге ортотропного тела можно свести к задаче для изотропного тела несколькими способами, используя замену переменных. Одна из таких замен имеет вид:

$$x = x_3 \sqrt{\frac{2\varphi}{1+\varphi}}, \quad y = y_3 \sqrt{\frac{2}{1+\varphi}}, \quad \varphi = \frac{a_{44}}{a_{55}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Неизвестные функции $g(x)$ и $g_1(y)$ и коэффициенты a_{2k} , b_{2k} , α_{2k} должны быть определены из краевых условий (1)–(3). Для составления уравнений относительно неизвестных коэффициентов преобразуем краевое условие (2) к виду

$$\left(1 + \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) f_t(\tau) + \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) \overline{f_t(\tau)} = 2[f_1(\tau) + f_2(\tau) + f_3(\tau)]. \tag{11}$$

Относительно функций $f_2(\tau)$ и $f_3(\tau)$ будем считать, что они разлагаются на контуре $|\tau| = \lambda$ в ряды Фурье.

Для вывода разрешающих уравнений подставим в граничные условия (1)–(2) вместо функций $f_b(z)$, $f_t(z)$, $f_1(z)$ их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки, а вместо $f_2(z)$ и $f_3(z)$ – ряды Фурье на контуре $|\tau| = \lambda$ и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$ в обеих частях краевых условий, получим после некоторых преобразований совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
b_{2k} &= \left(1 + \frac{\mu_b}{\mu_t}\right) a_{2k} \frac{\lambda_3^{2k+1}}{2(2k+1)\lambda^{2K+1}}, \\
b_{-2k-2} &= \left(1 + \frac{\mu_b}{\mu_t}\right) \bar{a}_{2k} \frac{(\lambda-h)^{4k+2} \lambda_3^{-2k-1}}{2(2k+1)\lambda^{-2k-2}}, \\
\frac{\lambda_3 a_0}{4\lambda} (g_1 + f^2 h_1) &= \tau_y^\infty + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} r_{0,k}, \quad \frac{\lambda_3 \bar{a}_0}{4} [h_2 f^2 + g_2] = -\alpha_2, \\
\frac{\lambda_3^{2k+1} a_{2k}}{4\lambda^{2k+1}} (g_1 + f^{4k+2} h_1) &= \alpha_2 \lambda^2 r_{0,1} + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{2p+2} \lambda^{2p+2} r_{p,k} + \frac{c_{2k}}{\lambda^{2k}}, \\
\frac{\lambda_3^{2k+1} \bar{a}_{2k} \lambda^{2k}}{4\lambda^{2k+1}} (g_2 + f^{4k+2} h_2) &= -\alpha_{2k+2}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
g_1 &= \left(1 + \frac{\mu_b}{\mu_t}\right) \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu_s}\right), \quad g_2 = \left(1 + \frac{\mu_b}{\mu_t}\right) \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_s}\right), \\
h_1 &= \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_t}\right), \quad h_2 = \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_t}\right), \\
r_{p,k} &= \frac{(2p+2k+1)! g_{p+k+1}^*}{(2p)!(2k+1)! 2^{2p+2k+1}}, \quad f = \frac{\lambda-h}{\lambda}, \\
g_{p+k+1}^* &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2(p+k+1)}}, \quad g = \frac{a_{44}}{a_{55}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \\
\lambda_3 &= \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{2g}{1+g}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+g}\right)^2}, \quad r_{0,0} = 0.
\end{aligned}$$

Требуя теперь, чтобы функции (6)–(9) удовлетворяли граничному условию на берегах когезионных трещин, получим систему двух сингулярных интегральных уравнений относительно $g(x)$ и $g_1(y)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} g(t) ctg \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt - Im [F_*(x)] = f_x(x) \quad \text{на } L_1, \tag{13}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_2} g_1(t_1) cth \frac{\pi}{\omega} K(t_1-y) dt_1 - Im [F_{**}(y)] = f_y(y) \quad \text{на } L_2, \tag{14}$$

$$F_*(x) = F_1(x) + F_3(x), \quad F_{**}(y) = F_1(y) + F_2(y).$$

Бесконечные алгебраические системы (12) совместно с сингулярными интегральными уравнениями (13)–(14) и соотношениями (4)–(5) являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить $g(x)$, $g_1(y)$ и коэффициенты a_{2k} , b_{2k} , α_{2k} . Алгебраические системы (12) и интегральные уравнения (13)–(14) оказались связанными и должны решаться совместно. После определения комплексных потенциалов $f_s(z)$, $f_b(z)$ и $f_t(z)$ можно найти напряженно-деформированное состояние кусочно-однородной среды.

Величины, характеризующие длину концевых зон трещин (зон предразрушения), входят в разрешающие уравнения как неизвестные параметры, подлежащие определению. Так как в составном теле напряжения ограничены, то решение каждого сингулярного интегрального уравнения (15), (16) следует искать в классе всюду ограниченных функций (напряжений).

Воспользовавшись разложением функции $ctg \frac{\pi}{\omega}(z)$ и $cth \frac{\pi}{\omega}(z)$ в основной полосе периодов, а также учитывая, что $g(x) = -g(-x)$, $g_1(y) = -g_1(-y)$, и применяя замену переменных, интегральные уравнения (13)–(14) приведем к стандартной форме. Использование квадратурных формул [3], [4] позволяет заменить основные разрешающие уравнения (13)–(14) двумя конечными алгебраическими уравнениями относительно приближенных значений p_k^0 , R_v^0 искомых функций в узловых точках:

$$\sum_{k=1}^n a_{m,k} p_k^0 - \frac{1}{2} Im [F_* (\eta_m)] = f_x (\eta_m) \quad (m = 1, 2, \dots, M-1), \quad (15)$$

$$\sum_{v=1}^n a_{m,v}^* R_v^0 - \frac{1}{2} Im [F_{**} (\eta_m)] = f_y (\eta_m). \quad (16)$$

Здесь

$$a_{m,k} = \frac{1}{2M} \left[\frac{1}{\sin \theta_m} ctg \frac{\theta_m + (-1)^{|m-k|} \theta_k}{2} + B (\eta_m, \tau_k) \right],$$

$$a_{m,v}^* = \frac{1}{2M} \left[\frac{1}{\sin \theta_m} ctg \frac{\theta_m + (-1)^{|m-v|} \theta_v}{2} + B_* (\eta_m, \tau_v) \right].$$

К системам (15)–(16) необходимо добавить дополнительные условия (10), которые в дискретной форме принимают вид

$$\sum_{k=1}^M \frac{p_k^0}{\sqrt{1/2(1-\lambda_1^2)(\tau_k+1)+\lambda_1^2}} = 0,$$

$$\sum_{v=1}^M \frac{R_v^0}{\sqrt{1/2(1-\lambda_2^2)(\tau_v+1)+\lambda_2^2}} = 0. \quad (17)$$

Системы (15), (16), (17) являются связанными с бесконечными алгебраическими системами (12), в которых вместо коэффициентов C_{2k} подставлено квадратурное соотношение.

В правую часть полученных систем (15)–(17) входят неизвестные значения напряжений $q_y (\eta_m)$, $q_x (\eta_m)$ в узловых точках, принадлежащих конечным зонам соответствующих трещин. Неизвестные напряжения в связях $q_y (\eta_m)$ и $q_x (\eta_m)$, возникающие на берегах конечных зон L_1 и L_2 соответственно, определяются из дополнительных условий (4)–(5). Используя построенное решение, уравнения (4)–(5) представим в виде

$$\frac{d}{dx} [C (x, q_y(x)) q_y(x)] = \frac{2}{\mu} g(x), \quad (18)$$

$$\frac{d}{dy} [C (y, q_x(y)) q_x(y)] = \frac{2}{\mu} g_1(y). \quad (19)$$

Требуя выполнения условий (18) и (19) в узловых точках, принадлежащих конечным зонам L_1 и L_2 соответственно, получим еще две системы из M_1 и M_2 уравнений, каждая – для определения значений $q_y (\eta_{m_1})$ и $q_x (\eta_{m_2})$ ($m_1 = 1, 2, \dots, M_1$; $m_2 = 1, 2, \dots, M_2$). При этом используется метод конечных разностей. Так как в составном кусочно-однородном теле напряжения ограничены, то решение сингулярных интегральных уравнений следовало бы искать в классе всюду ограниченных функций (напряжений). Следовательно, к полученным системам необходимо добавить условия ограниченности напряжений на концах конечных зон трещин. Записывая эти условия, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M (-1)^k p_k^0 ctg \frac{\theta_k}{2} = 0, \quad \sum_{k=1}^M (-1)^{k+M} p_k^0 tg \frac{\theta_k}{2} = 0, \\ \sum_{v=1}^M (-1)^{v+M} R_v^0 tg \frac{\theta_v}{2} = 0, \quad \sum_{v=1}^M (-1)^v R_v^0 ctg \frac{\theta_v}{2} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Так как размеры концевых зон неизвестны, объединенная алгебраическая система уравнений оказалась нелинейной даже при линейно-упругих связях. Для ее решения использовали метод последовательных приближений. В случае нелинейного закона деформирования связей при определении усилий в связях использовался также итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [5]. Для определения предельного состояния, при котором происходит рост трещин, использовали деформационный критерий разрушения [6].

При использовании полученного решения, условиями, определяющими предельную внешнюю нагрузку, найдены следующие:

$$\begin{aligned} C(d, q_y(d)) q_y(d) = \delta_c, \\ C(d_1, q_x(d_1)) q_x(d_1) = \delta_c. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь δ_c – характеристика трещиностойкости материала плоскости; d и d_1 – координаты точек у основания зон предразрушения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 70. – No. 14. – P. 1741–1987.
- [2] *Мирсалимов, В. М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. – Баку : Элм, 1984. – 124 с.
- [3] *Каландия, А. И.* Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. – М. : Наука, 1973. – 304 с.
- [4] *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [5] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1948. – 376 с.
- [6] *Панасюк, В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев : Наукова думка, 1991. – 416 с.

Гасанов Фуад Фазиль оглы,

кандидат технических наук, доцент, Азербайджанский технический университет, г. Баку

e-mail: HFF74@mail.ru

e-mail: irakon63@hotmail.com

F. F. Hasanov

**INTERACTION OF PERIODIC SYSTEM OF ORTHOTROPIC ELASTIC
INCLUSIONS AND TWO SYSTEMS OF RECTILINEAR COHESIVE CRACKS
IN ISOTROPIC MEDIUM**

Azerbaijan Technical University

Abstract. The problem of mechanics of fracture about interaction orthotropic elastic inclusions which surface is uniform is considered is covered by a homogeneous cylindrical film, and rectilinear of a bridged cracks collinear to axes abscissa and ordinates in isotropic planes. It is considered, that the elastic plane is weakened by two periodic systems rectilinear cohesive cracks which faces outside of end zones are free from external forces. Sectionally-homogeneous it is subjected to longitudinal shear.

Keywords: orthotropic elastic inclusions, cohesive cracks, the longitudinal shear, the punched plane.

REFERENCES

- [1] The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 70. – No. 14. – P. 1741–1987.
- [2] *Mirsalimov, V. M.* Corrupting elastic and elasto-plastic bodies since cracks / V. M. Mirsalimov. – Baku : Elm, 1984. – 124 p.
- [3] *Kalandiya, A. I.* Mathematical methods of the two-dimensional elasticities / A. I. Kalandiya. – M. : Science, 1973. – 304 p.
- [4] *Mirsalimov, V. M.* Not one-dimensional elasto-plastic task / V. M. Mirsalimov. – M. : Science, 1987. – 256 p.
- [5] *Ilyushin, A. A.* Plasticity / A. A. Ilyushin. – M. ; L. : Gostekhteoretizdat, 1948. – 376 p.
- [6] *Panasyuk, V. V.* Mechanics of quasibrittle corrupting materials / V. V. Panasyuk. – Kiev : Naukova thought, 1991. – 416 p.

Hasanov, Fuad Fazil oglu

Cand. Tech. Sci., Assoc. Professor, Azerbaijan Technical University, Baku

М. М. Алиев, С. В. Шафиева, Н. Г. Каримова

КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ РАЗНОПРОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ВСЕСТОРОННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Альметьевский государственный нефтяной институт

Аннотация. В работе предлагаются новые критерии разрушения для разнопрочных материалов. Критерии получены на основе разложения в степенной ряд экспоненциальной зависимости между первым инвариантом тензора и вторым инвариантом девиатора тензора напряжений. Характеристики прочности, входящие в критерии, определяются из двух простых испытаний на одноосное растяжение и сжатие. Произведено сравнение предложенных критериев с подобными критериями и результатами экспериментов.

Ключевые слова: разнопрочные материалы, критерии прочности и разрушения, тензор напряжений, полимеры, горные породы.

УДК: 539.4

Введение

Разнопрочными являются материалы, различно сопротивляющиеся растяжению и сжатию. К таким материалам относятся как искусственно созданные композиты, керамика, графиты, некоторые виды металлов, так и природные материалы, например, горные породы.

Для таких материалов наибольшее распространение получил критерий прочности О. Мора и его обобщения, а также критерий Мизеса–Надаи–Шлейхера.

Плоская задача теории предельного равновесия впервые была обобщена В. В. Соколовским [1] на случай криволинейной зависимости между сопротивлением сдвигу и нормальным напряжением. Для случая аппроксимации этой зависимости синусоидой и циклоидой было получено разрешающее уравнение плоской деформации пластичного материала.

Многочисленные исследования песков [2] показали, что угол внутреннего трения не является постоянным, а меняется в зависимости от напряженного состояния, причем криволинейность графика сдвига наиболее заметна в диапазоне малых давлений. Здесь предложена параболическая зависимость между касательным и нормальным напряжениями.

В работе [3] зависимость изменения угла внутреннего трения от давления принята в виде логарифмической кривой.

Согласно исследованиям зависимость между вторым инвариантом девиатора тензора напряжений J_2 и первым инвариантом тензора напряжений I_1 имеет нелинейную форму, а при большой интенсивности среднего давления асимптотически приближается к прямой, параллельной гидростатической оси.

Критерии прочности для разнопрочных материалов

Основываясь на результатах экспериментов в сложных напряженных состояниях, Х. Альтенбах и К. Туштев предложили принять форму поверхности прочности полимеров, работающих в условиях высокого давления, в экспоненциальном виде [4]:

$$\eta + (\eta + k) \exp\left(\frac{\xi}{\xi_0} - 1\right) - k = 0, \quad (1)$$

где k и ξ_0 – постоянные материала;

$\eta = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$ – полярная координата в девиаторной плоскости; $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ – длина гидростатической оси, соответствующей направлению; $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$; $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ – главные напряжения.

Согласно [1] связь между η и ξ представим в виде синусоидальной зависимости

$$\eta = A \sin\left(\frac{B - \xi}{A}\right), \quad (2)$$

где A и B – постоянные, зависящие от характеристик прочности материала.

Представив (2) в виде

$$\frac{B - \xi}{A} = \arcsin \frac{\eta}{A} \quad (3)$$

и разложив в ряд Тейлора около некоторой точки, получим

$$B - \xi = \eta + \frac{\eta^3}{6A^2} + \frac{3\eta^5}{40A^4} + \dots$$

Отсюда, оставляя два члена полинома, будем иметь выражение критерия прочности в виде

$$\eta^3 + C(\eta + \xi) = D. \quad (4)$$

Критерий (4) содержит два неизвестных параметра, которые могут быть определены из двух простых испытаний на одноосное растяжение и на одноосное сжатие. Таким образом,

$$C = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}(\sigma_c^3 - \sigma_p^3)}{(\sqrt{2} + 1)\sigma_p - (\sqrt{2} - 1)\sigma_c} = 6A^2;$$

$$D = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\sigma_p^3 + \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3}}C\sigma_p = 6A^2B,$$

где σ_p, σ_c – пределы прочности материала при одноосном растяжении и сжатии соответственно.

Принимая из ряда три члена полинома, критерий прочности приводим к виду

$$\eta^5 + \eta^3 C_1 + C_2(\eta + \xi) = D_1, \quad (5)$$

где $C_2 = 40A^2$; $D_1 = 40A^4B$; $C_1 = \frac{20}{3}A^2$.

Входящие в (5) постоянные связаны с C и D следующими зависимостями:

$$C_1 = \frac{10}{9}C; \quad C_2 = \frac{20}{3}C; \quad D_1 = \frac{20}{3}D.$$

Рассмотрим зависимость между η и ξ в виде экспоненциальной функции

$$B_1 - \xi = A_1 \left(e^{\frac{\eta}{A_1}} - 1 \right).$$

Разложение функции $e^{\frac{\eta}{A_1}} - 1$ в ряд Тейлора дает полинома вида

$$B_1 - \xi = \eta + \frac{\eta^2}{2A_1} + \frac{\eta^3}{6A_1^2} + \dots \quad (6)$$

Взяв в рассмотрение первые два члена полинома (6), получим квадратичный вариант критерия прочности

$$\eta^2 + C_3(\eta + \xi) = D_2. \quad (7)$$

В этом случае при тех же испытаниях получим

$$C_3 = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(\sigma_c^2 - \sigma_p^2)}{(\sqrt{2} + 1)\sigma_p - (\sqrt{2} - 1)\sigma_c} = 2A_1;$$

$$D_2 = \frac{2}{3}\sigma_p^2 + \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3}}\right)C_3\sigma_p = 2A_1B_1.$$

При использовании первых трех членов полинома получим вариант критерия в виде

$$\eta^3 + z\sqrt{C_4}\eta^2 + C_4(\eta + \xi) = D_3. \quad (8)$$

Здесь

$$C_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \frac{m_3}{m_1} - \frac{m_3}{m_1}} = 6A_1^2;$$

$$D_3 = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\sigma_p^3 + \frac{2}{3}z\sqrt{C_4}\sigma_p^2 + \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3}}\right)C_4\sigma_p = 6A_1^2B_1,$$

где $m_1 = \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3}}\right)\sigma_p - \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3}}\right)\sigma_c$; $m_2 = \frac{2}{3}z(\sigma_p^2 - \sigma_c^2)$; $m_3 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(\sigma_p^3 - \sigma_c^3)$; $z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим возможность применения критерия (4) для горных пород, различно сопротивляющихся на растяжение и сжатие. Критерий (4) в координатах $I_1 - \sqrt{J_2}$ будет иметь выражение

$$\sqrt{J_2}^3 + C_5(\sqrt{J_2} + I_1) = D_4, \quad (9)$$

где $\sqrt{J_2} = \frac{\eta}{\sqrt{2}}$; $I_1 = \sqrt{3}\xi$.

При испытаниях на растяжение и сжатие будем иметь

$$C_5 = \frac{\sigma_c^3 - \sigma_p^3}{3\sqrt{3}(b_1\sigma_p - b_2\sigma_c)}; \quad D_4 = \frac{1}{3\sqrt{3}}\sigma_p^3 + b_1C_5\sigma_p,$$

где $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + 1$; $b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} - 1$.

Критерий (7) в координатах $I_1 - \sqrt{J_2}$ будет иметь выражение

$$J_2 + C_6(\sqrt{J_2} + I_1) = D_5. \quad (10)$$

Здесь $C_6 = \frac{\sigma_c^2 - \sigma_p^2}{3(b_1\sigma_p - b_2\sigma_c)}$; $D_5 = \frac{1}{3}\sigma_p^2 + b_1C_6\sigma_p$.

При отбрасывании члена $\sqrt{J_2}$ критерий прочности (10) является критерием П. П. Баландина [5].

Используя первые три члена полинома (6), из критерия (8) получим

$$\sqrt{J_2}^3 + z\sqrt{C_7}J_2 + C_7(\sqrt{J_2} + I_1) = D_6. \tag{11}$$

В этом случае

$$C_7 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_5}{m_4} \right)^2 - \frac{m_5}{m_4} \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{m_5}{m_4} \right)^2 - \frac{m_6}{m_4} - \frac{m_6}{m_4}};$$

$$D_6 = \frac{1}{3\sqrt{3}}\sigma_p^3 + \frac{\sqrt{C_7}}{\sqrt{6}}\sigma_p^2 + b_1C_7\sigma_p;$$

$$m_4 = b_1\sigma_p - b_2\sigma_c; \quad m_5 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_p^2 - \sigma_c^2); \quad m_6 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(\sigma_p^3 - \sigma_c^3).$$

Сравнение критериев прочности с результатами экспериментов

Проведем сравнение предложенных критериев (4), (7) и (8) с критерием Альтенбаха–Туштева [4] и экспериментальными данными.

В координатной системе $\xi - \eta$ (результаты экспериментальных данных в [4] приведены в этих координатах) строим кривые для полиэфирного связующего с характеристиками прочности $\sigma_p = 47,72$ МПа, $\sigma_c = 62,66$ МПа (рис. 1) и для эпоксидного связующего с характеристиками прочности $\sigma_p = 83$ МПа, $\sigma_c = 126$ МПа [4](рис. 2).

Как видно из рисунков, при средних всесторонних давлениях ($I_1 = 300$ МПа) совпадение экспериментальных данных имеет место для всех трех критериев, а с увеличением I_1 результаты расходятся.

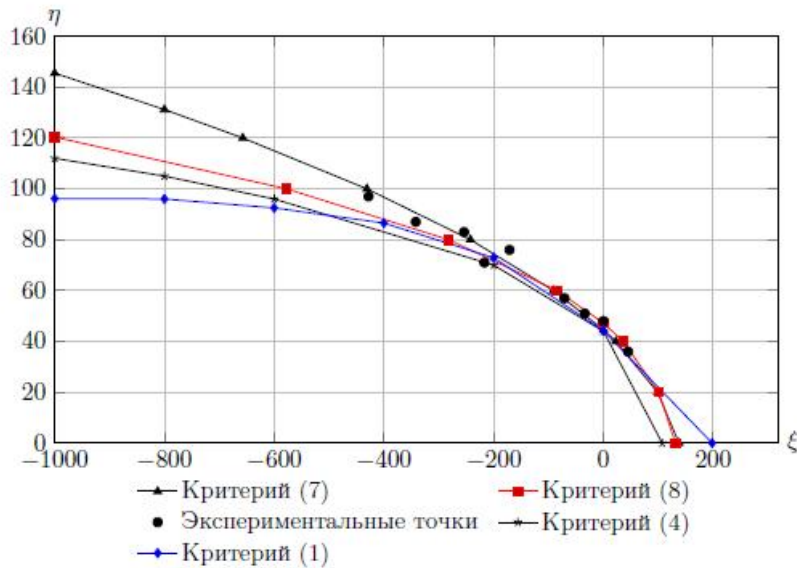


Рис. 1. Предельные кривые для полиэфирного связующего

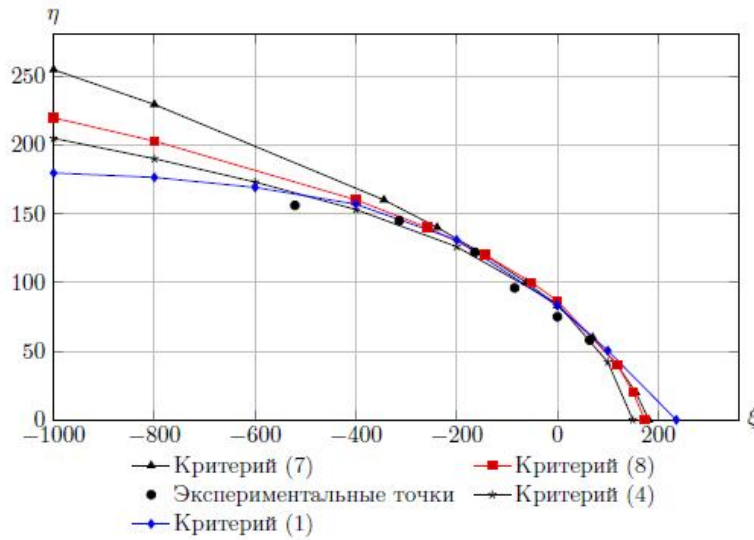


Рис. 2. Предельные кривые для эпоксидного связующего

Проведем сравнение предложенных критериев (9), (10), (11) с критерием $MSDP_u$, предложенным в [6] и экспериментальными данными.

В координатной системе $I_1 - \sqrt{J_2}$ построим кривые для каменной соли с характеристиками прочности $\sigma_p = 1,5$ МПа, $\sigma_c = 15$ МПа [6] и сравним поверхности критериев с экспериментальными данными (рис. 3).

С целью сравнения было рассчитано среднеквадратичное отклонение Δ рассмотренных критериев по отношению к экспериментальным данным. В итоге получено: с большей точностью описывает экспериментальные данные критерий разрушения (11) (отклонение $\Delta = 15,43\%$), затем идет критерий $MSDP_u$ (отклонение $\Delta = 17,62\%$) и критерий разрушения (10) (отклонение $\Delta = 19,57\%$). Критерий (9) имеет чрезмерно большое отклонение.

То же самое проделано для антропогенной (искусственной) соли с характеристиками прочности $\sigma_p = 3$ МПа, $\sigma_c = 37$ МПа [6] (рис. 4).

Для этого материала с большей точностью описывает экспериментальные данные критерий разрушения (11) (отклонение $\Delta = 2,39\%$). Далее идет критерий разрушения (10) (отклонение $\Delta = 16,09\%$), затем критерий $MSDP_u$ (отклонение $\Delta = 16,8\%$).

Результаты сравнения показывают, что критерии (10), (11) и $MSDP_u$ удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными для каменной и искусственной соли. В отличие от критериев (10) и (11), в которых используются только два параметра σ_p и σ_c , в критерии разрушения $MSDP_u$ присутствует много различных параметров, которые должны определяться из экспериментов. При этом критерий (11) имеет наилучший результат совпадения с данными экспериментов. Кубический критерий (9) не может быть применен как критерий разрушения каменной и искусственной соли.

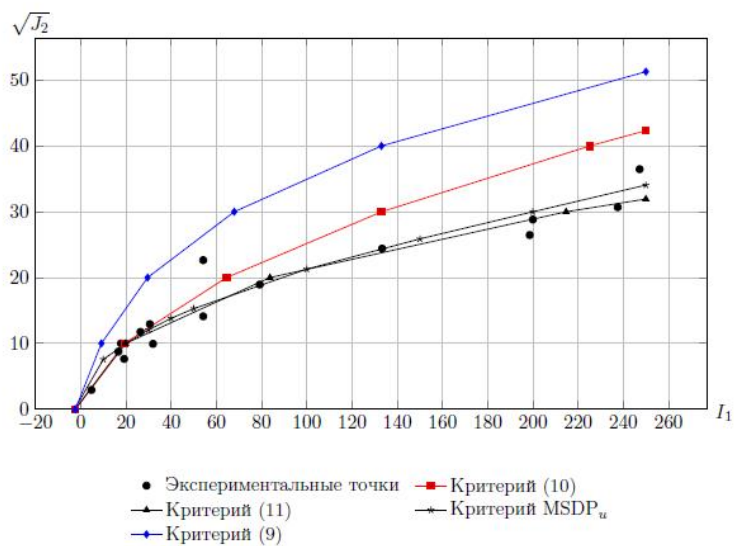


Рис. 3. Предельные кривые для каменной соли

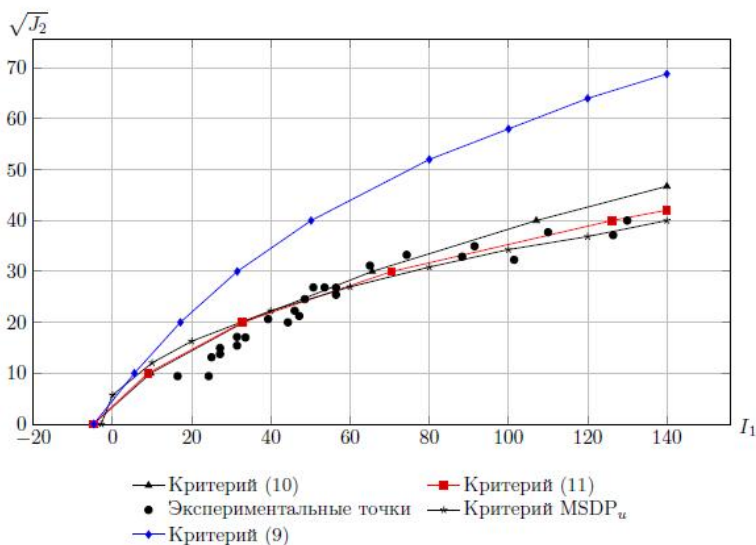


Рис. 4. Предельные кривые для искусственной соли

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
- [2] Березанцев, В. Г. Влияние криволинейности огибающей предельных кругов на несущую способность оснований / В. Г. Березанцев, И. В. Ковалев // Прочность и пластичность. – М. : Наука, 1971. – С. 397–402.
- [3] Ярошенко, В. А. Материалы по проектированию сложных фундаментов и оснований и по производству изысканий / В. А. Ярошенко // Фундаментпроект. – 1964. – № 3.

[4] *Альтенбах, Х.* Новый критерий статической прочности изотропных полимеров / Х. Альтенбах, К. Туштев // Механика композитных материалов. – 2001. – Т. 37. – № 5/6. – С. 732–739.

[5] *Баландин, П. П.* К вопросу о гипотезах прочности / П. П. Баландин // Вестник инженеров и техников. – 1937. – № 1. – С. 19–24.

[6] *Aubertin, M.* A general plasticity and failure criterion for materials of variable porosity / M. Aubertin, L. Li, R. Simon, B. Bussiere. – EPM-RT-2003-11.

Алиев Мехрали Мирзали оглы,

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой "Транспорт и хранение нефти и газа", Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск

e-mail: mmaliev@rambler.ru

Шафиева Светлана Владимировна,

старший преподаватель кафедры "Прикладная механика", Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск

e-mail: shafieva_sv@mail.ru

Каримова Наталья Геннадьевна,

кандидат технических наук, доцент кафедры "Прикладная механика", Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск

e-mail: karimovang@mail.ru

M. M. Aliev, S. V. Shafieva, N. G. Karimova

CRITERIA FOR STRENGTH AND FRACTURE OF MATERIALS DIFFERENT STRENGTHS WITH THE INFLUENCE OF HYDROSTATIC PRESSURE

Almetyevsk State Oil Institute

Abstract. In this paper we propose new criteria for the destruction of different strengths of materials. The criteria are derived from the power series expansion of the exponential relationship between the first and second invariant of the tensor invariant of the deviatoric stress tensor. Strength characteristics included in the criteria defined by two simple tests for uniaxial tension and compression. A comparison of the proposed criteria with similar criteria and experimental results

Keywords: different strengths material, strength and failure criteria, stress tensor, polymers, rocks

REFERENCES

- [1] Sokolovskij, V. V. The theory of plasticity / V. V. Sokolovskij. – M.: Higher school, 1969. – 608 p.
- [2] Bereancev, V. G. Influence curvilinear envelope limit circle bearing capacity grounds / V. G. Bereancev, I. V. Kovalev // Strength and ductility. – M.: Science, 1971. – P. 397–402.
- [3] Yaroshenko, V. A. Materials for the design of complex foundations and bases for the production of research / V. A. Yaroshenko // Fundamentproject. – 1964. – No. 3.
- [4] Altenbakh, H. New criterion of static strength of isotropic polymers / H. Altenbakh, K. Tushtev // Mechanics of Composite Materials. – 2001. – Vol. 37. – No. 5/6. – P. 732–739.
- [5] Balandin, P. P. On the strength of the hypotheses / P. P. Balandin // Vestnik of engineers and technicians. – 1937. – No. 1. – P. 19–24.
- [6] Aubertin, M. A general plasticity and failure criterion for materials of variable porosity / M. Aubertin, L. Li, R. Simon, B. Bussiere. – EPM-RT-2003-11.

Aliev, Mekhrali Mirzali ogly

Dr. Tech. Sci., Professor, Head of the Department of Transportation and storage of oil and gas, Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk

e-mail: mmaliev@rambler.ru

Shafieva, Svetlana Vladimirovna

Senior Lecturer, Department of Applied Mechanics, Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk

e-mail: shafieva_sv@mail.ru

Karimova, Natalia Gennadjevna

Cand. Tech. Sci., Assoc. Professor, Department of Applied Mechanics, Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk

e-mail: karimovang@mail.ru

Е. А. Деревянных

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе рассматривается предельное состояние кусочно-неоднородных призматических стержней [3]. Предполагается, что составляющие стержня являются идеально-пластическими, обладающими независимыми предельными условиями при наличии трансляционной анизотропии.

Ключевые слова: кручение, напряжение, предел текучести, предельное состояние, треугольные стержни.

УДК: 539.374

Рассмотрим кручение стержня, поперечное сечение которого есть треугольник, разделенный на три зоны (рис. 1 а). Каждая зона обладает своей анизотропией. Касательные напряжения направлены вдоль сторон треугольника.

В первой зоне (рис. 1 б) условие пластичности имеет вид [2]:

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = k_0^2, \quad k_0, k_1, k_2 - \text{const}, \quad (1)$$

во второй зоне (рис. 1 в) условие пластичности примет вид:

$$(\bar{\tau}_{xz} - \bar{k}_1)^2 + (\bar{\tau}_{yz} - \bar{k}_2)^2 = \bar{k}_0^2, \quad \bar{k}_0, \bar{k}_1, \bar{k}_2 - \text{const}, \quad (2)$$

в третьей зоне (рис. 1 г) условие пластичности задано уравнением

$$\left(\hat{\tau}_{xz} - \hat{k}_1\right)^2 + \left(\hat{\tau}_{yz} - \hat{k}_2\right)^2 = \hat{k}_0^2, \quad \hat{k}_0, \hat{k}_1, \hat{k}_2 - \text{const}. \quad (3)$$

Положим

$$\tau_{xz} = k(\theta) \cos \theta, \quad (4)$$

$$\tau_{yz} = k(\theta) \sin \theta, \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}. \quad (6)$$

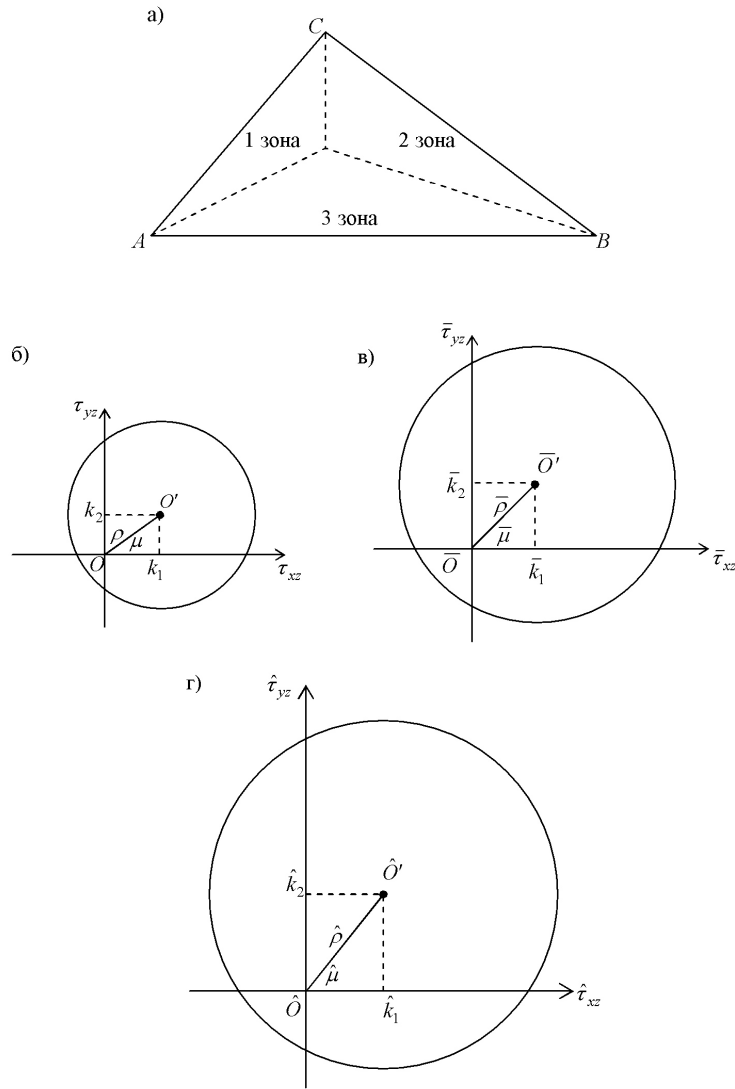


Рис. 1

Из (1), (4), (5) найдем

$$k(\theta) = \rho \cos(\theta - \mu) + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(\theta - \mu)}, \quad k(\theta) > 0, \quad (7)$$

где

$$\rho = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \frac{k_1}{\rho} = \cos \mu, \quad \frac{k_2}{\rho} = \sin \mu, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{k_2}{k_1}. \quad (8)$$

Дифференциальное уравнение равновесия при кручении имеет вид:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

Подставляя выражения (4), (5) в уравнение равновесия (9), получим:

$$(k' \cos \theta - k \sin \theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + (k' \sin \theta + k \cos \theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

где

$$k' = \frac{dk}{d\theta}. \quad (11)$$

Соответствующие уравнения для определения характеристик имеют вид:

$$\frac{dx}{k' \cos \theta - k \sin \theta} = \frac{dy}{k' \sin \theta + k \cos \theta} = \frac{d\theta}{0}. \quad (12)$$

Из уравнения (12) следует, что характеристики суть прямые [1]

$$y = \frac{k' \sin \theta + k \cos \theta}{k' \cos \theta - k \sin \theta} \cdot x + \Phi(\theta), \quad \theta = const. \quad (13)$$

Рассмотрим различные случаи кручения треугольных стержней, разделенных на три зоны, при трансляционной анизотропии.

На рис. 2 представлен случай кручения треугольных стержней при $\mu = 0$.

Построим линии разрыва напряжений в каждой зоне.

Линии разрыва таковы, что на них перпендикуляры, образованные векторами касательных напряжений, должны быть равны между собой.

Линия разрыва CR образована векторами касательных напряжений $\bar{\tau}_2$ и $\bar{\tau}_3$, линия разрыва AR — векторами $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_3$, линия разрыва BR — векторами $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$.

Линии разрыва AR , BR , CR пересекаются в одной точке R .

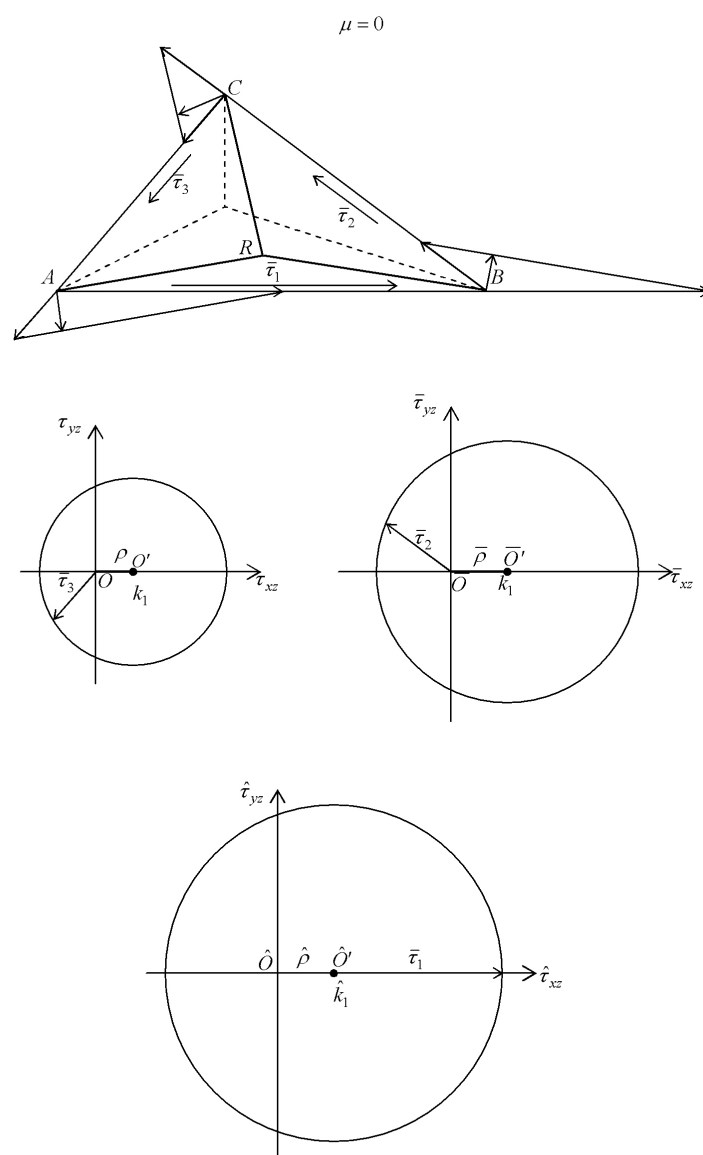


Рис. 2

На рис. 3 представлен случай кручения треугольных стержней при $\mu = \frac{\pi}{4}$.

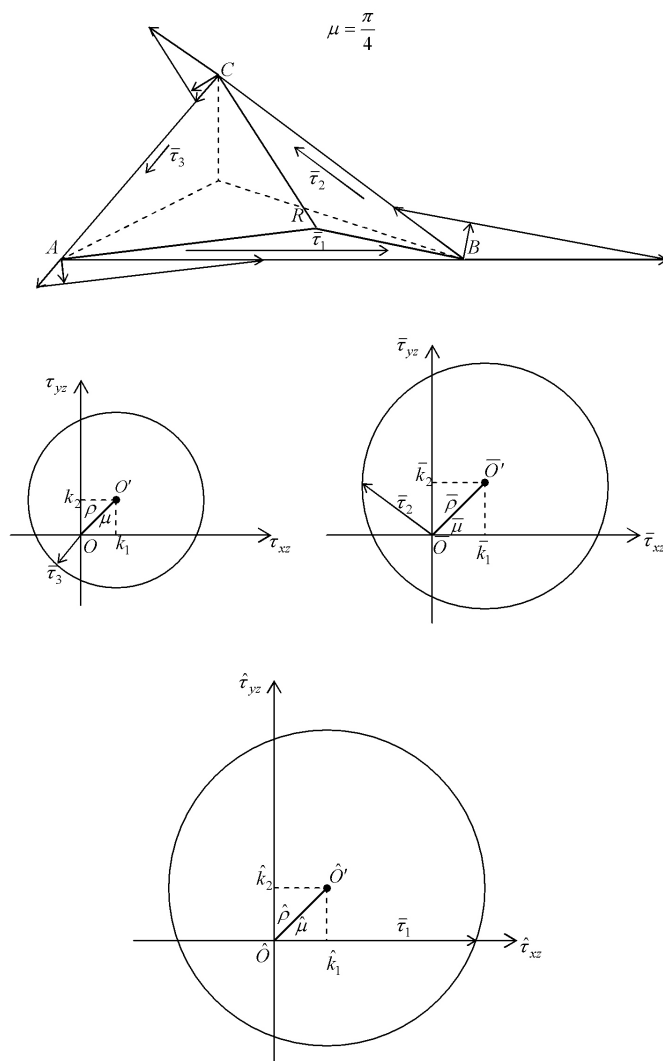


Рис. 3

На рис. 4 представлен случай кручения треугольных стержней при $\mu = \frac{\pi}{2}$.

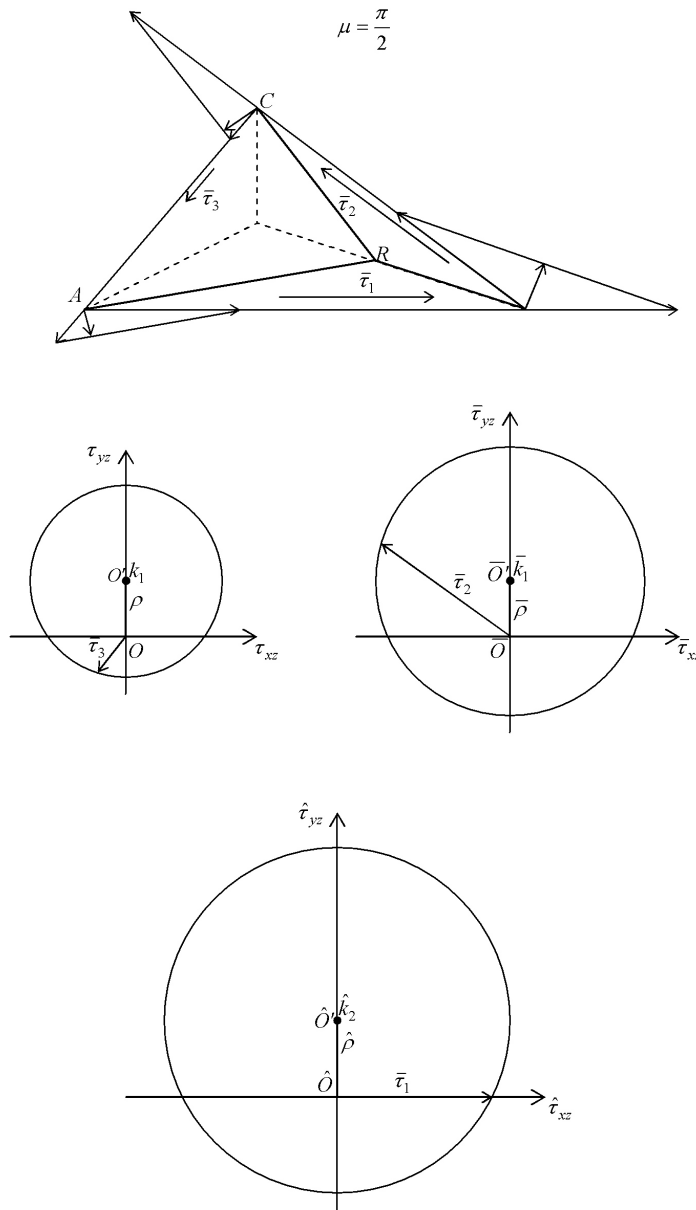


Рис. 4

Таким образом, дано построение напряженного состояния треугольных стержней, разделенных на три зоны, при трансляционной анизотропии.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д. Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – Ч. 3. – С. 576–579.
- [3] *Митрофанова, Т. В.* О предельном состоянии анизотропных призматических стержней при кручении / Т. В. Митрофанова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – Ч. 3. – С. 601–609.

Деревянных Евгения Анатольевна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru

E. A. Derevyannih

**LIMIT CONDITION OF ANISOTROPIC PRISMATIC PIECEWISE AND
NON-UNIFORM CORES AT TORSION**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. In work the limit condition of piecewise and non-uniform prismatic cores is considered. It is supposed that components of a core are idealnoplastichesky, possessing independent limit conditions, with transmitting anisotropy.

Keywords: torsion, tension, fluidity limit, limiting condition, prismatic cores.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* Theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 231 p.
- [2] *Ivlev, D. D.* About ratios of transmitting idealnoplastichesky anisotropy at torsion / D. D. Ivlev, B. G. Mironov // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Mechanics of definable state. – 2010. – No. 2 (8). – Part. 3. - P. 576–579.
- [3] *Mitrofanova, T. V.* About a limit condition of anisotropic prismatic cores at torsion / T. V. Mitrofanova // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Mechanics of definable state. – 2010. – No. 2 (8). – Part. 3. – P. 601–609.

Derevyannih Evgeniya Anatolevna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru

МИХАИЛ ИВАНОВИЧ ЕРХОВ



Михаил Иванович Ерхов принадлежит к числу выдающихся, крупнейших ученых механиков-прочнистов.

Редколлегия и редакция с глубоким уважением помещают материалы, посвященные светлой памяти Михаила Ивановича Ерхова.

Б. Г. Миронов

Д. Д. Ивлев

Ректор

МИХАИЛ ИВАНОВИЧ ЕРХОВ

Михаил Иванович Ерхов принадлежит к числу выдающихся, крупнейших ученых России в области строительной механики и расчета сооружений. Ему принадлежат замечательные результаты в области определения несущей способности тел и конструкций при статических и динамических нагрузках. Им сформулированы общие теоремы динамической теории идеальной пластичности, развита теория динамического предельного сопротивления, получены результаты, вошедшие в золотой фонд науки о сопротивлении материалов.

М. И. Ерхов родился 22 августа 1933 г. в деревне Пеньки Тамбовской области. Высшее образование получил в Московском институте инженеров городского строительства при Мосгорисполкоме, где обучался на факультете промышленного и городского строительства с 1950 по 1955 г.

Вначале работал мастером СУ-61 треста "Строитель" Главмосстроя (1955–1956 гг.), затем инженером Центрального проектного бюро Главмосстроя (1956–1957 гг.), строил жилье для москвичей.

В 1957 г. М. И. Ерхов переходит на работу в Центральный научно-исследовательский институт им. Кучеренко – ЦНИИСК, в котором он проработал 24 года (по 1984 г.), занимая последовательно должности младшего научного сотрудника, старшего научного сотрудника, с 1972 г. – заведующего отделом расчета сооружений – отделом, руководителем которого в свое время был знаменитый Василий Захарович Власов.

Расчеты конструкций, оснований сооружений по предельным нагрузкам ведут свое начало от Кулона и Сен-Венана. Выдающиеся результаты по теории предельного состояния тел и конструкций в ЦНИИСК были получены А. А. Гвоздевым, А. Р. Ржанициным, А. И. Овечкиным, Г. А. Гениевым, рядом других исследователей.

В ЦНИИСК определились научные интересы Михаила Ивановича Ерхова.

Диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук М. И. Ерхов защитил в 1961 г.

Докторскую диссертацию на соискание степени доктора технических наук защитил Михаил Иванович в ЦНИИСК в 1971 г.

В 1984 г. М. И. Ерхов переходит на работу в Российский университет дружбы народов, где возглавил кафедру сопротивления материалов. Пять лет – с 1988 по 1993 г. – был деканом инженерного факультета РУДН.

М. И. Ерхову принадлежит около 150 научных работ, опубликованных в центральной и отраслевой печати. Его работы посвящены определению потери несущей способности, определению прогибов элементов конструкций: рам, пластин, оболочек при различных краевых условиях, оптимальному проектированию жесткопластических тел при статической и динамической нагрузках, вопросам расчета многопролетных трубопроводов и т. д.

Фундаментальные исследования М. И. Ерхова по динамике жесткопластических конструкций подытожены в его монографии "Теория идеальнопластических тел и конструкций", Москва, "Наука", 1978 г.

Под руководством М. И. Ерхова выполнены кандидатские и докторские диссертации, к числу его учеников принадлежат известные крупные ученые.

Михаил Иванович принимал участие в создании и экспертизе важнейших сооружений России.

М. И. Ерхов пользовался известностью и признанием среди широких кругов научно-технической общественности. Он – ЗДНТ РФ, был избран членом-корреспондентом Академии архитектуры и строительных наук, участвовал в качестве эксперта в работе ВАК РФ, возглавлял диссертационные советы и т. д., и т. п.

Михаил Иванович был скромным, обаятельным человеком высокой культуры и нравственности, человеком с чувством глубокого внутреннего достоинства.

Михаил Иванович Ерхов принадлежит к числу ученых, определивших развитие целой отрасли науки о расчете конструкций и сооружений на прочность.

Скончался М. И. Ерхов 15 августа 2002 года.

Имя Михаила Ивановича Ерхова – в ряду лучших представителей мировой науки о прочности твердых деформируемых тел и конструкций.

**СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ
ЕРХОВА МИХАИЛА ИВАНОВИЧА****1959**

1. Конечное соотношение между силами и моментами при пластической / М. И. Ерхов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1959. – № 3.

1960

2. Пластическое состояние оболочек, пластин и стержней из идеально пластического материала / М. И. Ерхов // Известия АН СССР ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – № 6.

3. Несущая способность надземного тонкостенного трубопровода / М. И. Ерхов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1960. – № 6.

1961

4. Симметричная деформация цилиндрической оболочки за пределом упругости / М. И. Ерхов // Вопросы теории пластичности и прочности строительных конструкций : сборник ЦНИИСК. – М. : Стройиздат, 1961.

5. Предельное равновесие идеально пластических стержней произвольного сечения при сложном напряженном состоянии / М. И. Ерхов // Вопросы теории пластичности и прочности строительных конструкций : сборник ЦНИИСК. – М. : Стройиздат, 1961.

6. Определение несущей способности многопролетного тонкостенного трубопровода / М. И. Ерхов // Вопросы теории пластичности и прочности строительных конструкций : сборник ЦНИИСК. – М. : Стройиздат, 1961.

1962

7. Приближенные уравнения упруго-пластических оболочек / М. И. Ерхов // Исследования по строительной механике : сборник ЦНИИСК. – М. : Стройиздат, 1962.

8. Несущая способность безмоментной несимметрично загруженной цилиндрической оболочки / М. И. Ерхов // Исследования по строительной механике : сборник ЦНИИСК. – М. : Стройиздат, 1962.

1963

9. Пластическая зона трубопровода / М. И. Ерхов // Исследования по расчету оболочек, стержневых и массивных конструкций : сборник ЦНИИСК. – М. : Стройиздат, 1963.

1964

10. О несущей способности симметрично загруженной цилиндрической оболочки / М. И. Ерхов // Расчет тонкостенных пространственных конструкций : сборник ЦНИИСК. – М. : Стройиздат, 1964.

11. Несущая способность конической оболочки / М. И. Ерхов // Расчет тонкостенных пространственных конструкций : сборник ЦНИИСК. – М. : Стройиздат, 1964.

1966

12. Предельное равновесие пологих оболочек вращения / М. И. Ерхов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1966. – № 4.

13. О приближенном решении задач динамики жесткопластических оболочек / М. И. Ерхов // Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. – М. : Наука, 1966.

1967

14. Импульсивное нагружение шарнирно опертой полой сферической оболочки / М. И. Ерхов // Тезисы докладов на Всесоюзной конференции по статике и динамике тонкостенных пространственных конструкций. – Киев, 1967.

15. Динамика жесткопластических пологих оболочек вращения с шарнир / М. И. Ерхов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1967. – № 4.

1968

16. О приближенном решении задач динамики жесткопластических конструкций / М. И. Ерхов // Новые методы расчета строительных конструкций : сборник ЦНИИСК им. Кучеренко. – М. : Стройиздат, 1968.

17. О несущей способности конической оболочки / М. И. Ерхов // Новые методы расчета строительных конструкций : сборник ЦНИИСК им. Кучеренко. – М. : Стройиздат, 1968.

1969

18. Вопросы прочности идеально пластических оболочек / М. И. Ерхов // Строительные конструкции. Вып. 4. "Исследование прочности конструкций из неупругих материалов" : труды ЦНИИСК им. Кучеренко. – 1969.

19. К вопросу о резании грунтов / М. И. Ерхов // Сборник НИИПОСП "Онования, фундаменты и подземные сооружения" . – М. : Стройиздат, 1969.

1970

20. Приближенная теория динамически нагруженных пластических оболочек / М. И. Ерхов // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластиною. – М. : Наука, 1970.

21. Вопросы расчета конструкций за пределом упругости на динамическую нагрузку / М. И. Ерхов // Строительные конструкции. Вып. 6. "Расчет оболочек" . Труды ЦНИИСК им. Кучеренко. – 1970.

22. Об экстремальных принципах динамики жесткопластического тела / М. И. Ерхов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1970. – № 5.

23. Теория предельного равновесия динамически нагруженных тел и математическое программирование / М. И. Ерхов // Теория и расчет сооружений. Вып. 13. Труды ЦНИИСК им. Кучеренко. – 1970. Совм. с Себекиной В. И.

24. К определению несущей способности оболочек / М. И. Ерхов // Теория и расчет сооружений. Вып. 13. Труды ЦНИИСК им. Кучеренко. – 1970.

25. Определение усилий резания хрупких материалов / М. И. Ерхов // Сборник НИИПОСП "Онования, фундаменты и подземные сооружения" . № 59. – М. : Стройиздат, 1970. Совм. со Смородиновым М. И.

1971

26. О теории предельного равновесия динамически нагруженных тел / М. И. Ерхов // Известия АН СССР. Механика. – 1971.

27. К приближенному решению задач динамики жесткопластических конструкций / М. И. Ерхов // Третий всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. – М. : Наука, 1971.

28. Предельное равновесие части полупространства при вдавливании жесткого штампа / М. И. Ерхов // Сборник ЦНИИСК им. Кучеренко "Новые методы расчета строительных конструкций" . – М. : Стройиздат, 1971.

29. К расчету конструкций за пределом упругости на динамическую нагрузку / М. И. Ерхов // Сборник ЦНИИСК им. Кучеренко "Новые методы расчета строительных конструкций" . – М. : Стройиздат, 1971.

30. Локальное загрузение пологих оболочек вращения за пределом упругости / М. И. Ерхов // Сборник ЦНИИСК им. Кучеренко "Новые методы расчета строительных конструкций" . – М. : Стройиздат, 1971.

1975

31. Применение математического программирования к расчету пластинок и оболочек в динамической теории предельного равновесия / М. И. Ерхов, В. И. Себекина // Труды IX Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – Л. : Судостроение, 1975.

1976

32. О применении математического программирования к динамике жесткопластического тела / М. И. Ерхов, В. И. Себекина // Известия АН СССР ОТН. Механика твердого тела. – 1976. – № 2.

33. Теоремы динамической теории пластичности / М. И. Ерхов // Аннотации докладов IV Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. – Киев : Наукова думка, 1976.

1977

34. К вопросу об оценке решения задач жесткопластических конструкций / М. И. Ерхов // Сборник ЦНИИСК им. Кучеренко "Исследование напряженного и деформированного состояния строительных конструкций". – М., 1977.

35. Развитие методов расчета сооружений за 60 лет / М. И. Ерхов, А. Ф. Смирнов, О. О. Андреев, А. И. Цейтлин, Я. М. Айзенберг, Т. Е. Вельский, В. А. Камейко, Ф. В. Расс, И. Л. Пименов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1977. – № 5.

36. Несущая способность динамически нагруженных конструкций / М. И. Ерхов // Доклады международной конференции по облегченным конструкциям покрытий для строительства в обычных и сейсмических районах. – М. : Стройиздат, 1977.

1978

37. Теория идеально пластических тел и конструкций / М. И. Ерхов. – М. : Наука, 1978. – 352 с.

1979

38. К теории оптимального проектирования динамически нагруженных жесткопластических тел / М. И. Ерхов // Механика деформируемого твердого тела : труды ин-та гидродинамики СО АН СССР. – Вып. 41. – 1979.

1981

39. Большие прогибы жестко пластических круглых пластинок с шарнирным опиранием края / М. И. Ерхов, Л. В. Кислова // Исследования по строительной механике и методам расчета. – М. : Госстройиздат, 1981. – С. 4–11.

40. Вышучивание и устойчивость подъемистых арок / М. И. Ерхов, М. А. Гучмазова // Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума по устойчивости в механике деформируемого твердого тела. – Калинин, 1981.

41. Оптимальное проектирование динамически нагруженных жесткопластических тел и конструкций / М. И. Ерхов // Аннотации докладов V Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. – Алма-Ата, 1981.

1982

42. Большие прогибы жесткопластических круглых пластинок / М. И. Ерхов, Л. В. Кислова // Сборник ЦНИИСК им. Кучеренко "Исследования по строительной механике и методам расчета". – М. : Стройиздат, 1982.

1983

43. Метод расчета жесткопластических пластинок и оболочек с учетом больших прогибов / М. И. Ерхов, И. А. Монахов, В. И. Себекина // Строительная механика и расчет сооружений. – 1983. – № 5. – С. 21–25.

44. Распространение поперечных волн в балке на упругом основании / М. И. Ерхов, Н. Л. Кондратов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1983. – № 2.

45. О теории оптимального проектирования жесткопластических тел при динамической нагрузке // Сборник ЦНИИСК им. Кучеренко "Исследования по теории и методам расчета строительных конструкций". – М. : Стройиздат, 1983.

46. Экстремальные принципы динамики жесткопластического тела с учетом изменения конфигурации / М. И. Ерхов, А. И. Данилов // Тезисы докладов VIII Всесоюзной конференции по прочности и пластичности. – Пермь, 1983.

47. Метод расчета упругопластических арок из упрочняющегося материала с учетом конечных перемещений / М. И. Ерхов, М. А. Гучмазова // Проблемы устойчивости и предельной несущей способности конструкций. Межвуз. тематический сборник трудов ЛИСИ. – Л., 1983.

48. Экстремальные принципы динамики жесткопластических систем при конечных изменениях конфигурации / М. И. Ерхов, А. И. Данилов // Строительство. Деп. Во ВНИИС реф. Журнал. – 1983. – Вып. 12.

1984

49. Экстремальные принципы динамики жесткопластических систем при конечных изменениях конфигурации / М. И. Ерхов, А. И. Данилов // Сборник научных трудов ЦНИИСК им. Кучеренко "Исследования по расчету конструкций и сооружений на различные воздействия". – М. : Стройиздат, 1984. – С. 11–115.

50. Об основных неравенствах в теории жесткопластических пологих оболочек при больших прогибах / М. И. Ерхов, В. В. Кислов // Сборник научных трудов ЦНИИСК им. Кучеренко "Исследования по расчету конструкций и сооружений на различные воздействия". – М., 1984.

51. О несущей способности части идеально пластического полупространства при действии шероховатого прямоугольного штампа / М. И. Ерхов, А. В. Пелевин // Сборник научных трудов ЦНИИСК им. Кучеренко "Исследования по теории и методам расчета строительных конструкций". – М., 1984.

1985

52. Большие прогибы двухслойной круглой пластинки за пределом упругости / М. И. Ерхов, Л. В. Кислова // Сборник научных трудов ЦНИИСК им. Кучеренко "Исследования по строительной механике". – М., 1985.

53. О несущей способности идеально пластического полупространства при действии круглого шероховатого штампа / М. И. Ерхов, А. В. Пелевин // Сборник научных трудов ЦНИИСК им. Кучеренко "Исследования по строительной механике". – М., 1985.

54. Слабые разрывы при больших прогибах идеально пластических круглых пластинок и оболочек вращения // Тезисы докладов V Всесоюзной конференции по статике и динамике пространственных конструкций. – Киев, 1985.

55. Большие прогибы двухслойных и однослойных круглых пластинок и пологих оболочек вращения за пределами упругости. // Тезисы докладов Всесоюзной научно-практической конференции "Применение композиционных материалов на полимерных и металлических матрицах". – Пермь, 1985.

1986

56. Большие прогибы круглых жесткопластических защемленных по контуру пластинок / М. И. Ерхов, А. В. Старов // Сборник научных трудов ЦНИИСК им. Кучеренко "Исследования по строительной механике и надежности конструкций". – М., 1986.

57. Деформирование и предельная несущая способность геометрически и физически нелинейных рам и арок / М. И. Ерхов, В. В. Ананян // Тезисы докладов II Всесоюзного симпозиума по устойчивости в механике деформируемого твердого тела. – Калинин, 1986.

58. О теории оптимального проектирования динамически нагруженных упругопластических тел // Аннотации докладов VI Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. – Ташкент, 1986.

1987

59. Расчет динамически нагруженного жесткопластического стержня при больших перемещениях / М. И. Ерхов, А. И. Данилов // Сб. УДН им. П. Лумумбы "Исследования по расчету элементов пространственных систем". – М. : Изд-во УДН, 1987. – С. 15–22.

60. Геометрически нелинейное деформирование идеально пластической круглой пластинки с шарнирно неподвижным краем / М. И. Ерхов, А. В. Старов // Тезисы докладов Уральской научно-технической конференции "Геометрическое моделирование и начертательная геометрия". – Пермь, 1987.

61. Расчет жесткопластических защемленных по контуру пологих оболочек вращения с учетом больших прогибов / М. И. Ерхов, А. В. Старов // Сборник УДН им. П. Лумумбы "Исследования по расчету элементов пространственных систем". – М. : Изд-во УДН, 1987.

62. Пределы применимости теории больших прогибов идеально пластических круглых пластинок / М. И. Ерхов, А. В. Старов // Труды XIV Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. – М. : Наука, 1987.

63. Об одном методе определения нижней границы несущей способности оболочек / М. И. Ерхов // Сборник УДН им. П. Лумумбы "Исследования по расчету элементов пространственных систем". – М. : Изд-во УДН, 1987.

64. Теория упругости : учебное пособие. – М. : Изд-во УДН, 1987.

65. Деформирование жесткопластической круглой пластинки с шарнирно неподвижным краем / М. И. Ерхов, А. В. Старов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987. – № 5.

66. Расчет физически и геометрически нелинейных рам и арок / М. И. Ерхов, В. В. Ананян // Сборник ЦНИИСК им. Кучеренко "Численные методы расчета строительных конструкций". – М., 1987.

1988

67. Большие прогибы круглой локально нагруженной пластинки / М. И. Ерхов // Тезисы докладов Уральской научно-технической конференции "Начертательная геометрия". – Пермь, 1988.

68. Большие прогибы идеально защемленных балок / М. И. Ерхов, Мухаммед Аль-Касти // Тезисы докладов II конференции научно-учебного центра физико-химических методов исследования УДН им. Лумумбы. – М. : Изд-во УДН, 1988.

69. Теория пластичности : учебное пособие. – М. : Изд-во УДН, 1988.

1989

70. Оптимизация идеально пластических конструкций при кратковременных динамических нагрузках / М. И. Ерхов, В. В. Шевко // Тезисы докладов конференции "Вопросы надежности и оптимизации строительных конструкций, машин и механизмов". – Севастополь, 1989.

71. Оптимизация динамически нагруженных пластических систем / М. И. Ерхов, В. В. Шевко // Тезисы докладов II Всесоюзной конференции "Проблемы снижения материалоемкости силовых конструкций". – Горький, 1989.

72. Оптимизация динамически нагруженных жесткопластических конструкций / М. И. Ерхов, В. В. Шевко // Деп. в ВИНТИ 11.10.89. №6201-B89.

73. Экстремальные принципы динамики упругопластических тел / М. И. Ерхов, А. И. Данилов // Тезисы докладов III Всесоюзной конференции по прочности и пластичности. – Сыктывкар, 1989.

74. Оптимальное проектирование жесткопластических систем при динамическом нагружении / М. И. Ерхов, В. В. Шевко // Аннотации докладов Всесоюзной конференции "Проблемы оптимизации надежности в строительной механике". – Вильнюс, 1989.

75. Большие прогибы идеально пластических шарнирно опертых балок при различных распределенных нагрузках / М. И. Ерхов, Мухаммед Аль-Касти // Деп. в ВИНТИ 20.12.89. №8869.

76. Большие прогибы локально нагруженных идеально пластических балок с различным опиранием / М. И. Ерхов, Мухаммед Аль-Касты // Строительная механика и расчет сооружений. – 1989. – № 6.

1990

77. Оптимальное проектирование жесткопластической цилиндрической оболочки при динамическом нагружении / М. И. Ерхов, В. В. Шевко // Деп. в ВИНТИ 23.04.90 №2145-B90.

78. Экспериментальное и теоретическое исследование упругопластических стержневых систем с учетом геометрической нелинейности / М. И. Ерхов, Мухаммед Аль-Касты // Тезисы докладов III конференции научно-учебного центра физико-химических методов исследования. – М. : Изд-во УДН, 1990.

79. Критерий оптимального проектирования в математической теории динамической пластичности / М. И. Ерхов // Тезисы докладов II Всесоюзной школы-семинара "Актуальные проблемы оптимизации конструкций". – Владимир, 1990.

80. Основы динамики упругих систем : учебное пособие. – М. : Изд-во УДН, 1990.

81. Большие прогибы жесткопластической круглой пластинки с шарнирно подвижным опиранием / М. И. Ерхов, А. В. Старов // Сборник УДН им. Лумумбы "Исследования по строительной механике пространственных систем". – М. : Изд-во УДН, 1990.

82. Большие прогибы идеально пластических балок при различных условиях опирания / М. И. Ерхов, Мухаммед Аль-Касты // Сборник УДН им. Лумумбы "Исследования по строительной механике пространственных систем". – М. : Изд-во УДН, 1990.

1991

83. Деформирование упругопластических геометрически нелинейных пространственных рам / М. И. Ерхов, Ф. В. Рекач // Строительная механика и расчет сооружений. – 1991. – № 5.

84. Оптимизация динамически нагруженной идеально пластической цилиндрической оболочки / М. И. Ерхов, В. В. Шевко // Тезисы докладов конференции "Вопросы надежности и оптимизации строительных конструкций, машин и механизмов". – Севастополь, 1991.

1992

85. Общие теоремы динамической теории пластичности / М. И. Ерхов // Доклады на VII Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. – М., 1992.

86. Большие прогибы локально нагруженных идеально пластических балок с различным опиранием / М. И. Ерхов, Мухаммед Аль-Касты // Строительная механика и расчет сооружений. – 1992. – № 6.

87. Деформирование упругопластических геометрически нелинейных пространственных рам / М. И. Ерхов, Ф. В. Рекач // Строительная механика и расчет сооружений. – 1992. – № 5.

88. Оптимизация динамически нагруженного идеально пластического диска при ограничении перемещений / М. И. Ерхов, Мухаммед Али Мухамед Насер // Материалы XXVIII научной конференции инженерного факультета РУДН "Вопросы прочности пространственных систем". – М. : Изд-во РУДН, 1992.

89. О динамическом деформировании жесткопластических трехслойных пологих оболочек вращения / М. И. Ерхов, Г. Ф. Гайлис // Материалы XXVIII научной конференции инженерного факультета РУДН "Вопросы прочности пространственных систем". – М. : Изд-во РУДН, 1992.

1993

90. Оптимизация динамически нагруженного жесткопластического диска / М. И. Ерхов, Мухаммед Али Мухамед Насер // Современные проблемы теории пластин, оболочек и вопросы проектирования гражданских и промышленных сооружений. – М. : Изд-во РУДН, 1993.

1994

91. Методика расчета жесткопластических рам на динамическое нагружение / М. И. Ерхов, Насер Хусейн Аль Хусейн // Расчет и проектирование гражданских, промышленных и гидротехнических сооружений : межвуз. сб. научных трудов. – М. : МБК "Биоконтроль", 1994.

92. Сопrotивление материалов / М. И. Ерхов // Иллюстрированный толковый словарь русской научной и технической лексики. – М. : Изд-во "Русский язык", 1994.

93. Деформирование геометрически и физически нелинейных рам / М. И. Ерхов, Маруан Михаил Саад // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений : межвуз. сб. научных трудов. – М. : МБК "Биоконтроль", 1994.

1995

94. Динамика жесткопластических рам при сильных сейсмических воздействиях / М. И. Ерхов // Доклады на 10 Международной школе по механике сплошных сред. – Пермь, 1995.

95. Динамика одноэтажных идеально пластических рам при сильных сейсмических воздействиях / М. И. Ерхов, А. Лоизос // Тезисы докладов XXXI конференции инженерного факультета РУДН. – М. : Изд-во РУДН, 1995.

96. Статическое деформирование жесткопластических рам / М. И. Ерхов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений : межвуз. сб. научных трудов. Вып. 6. – М. : МБК "Биоконтроль 1995.

97. Несущая способность пересекающихся тонкостенных оболочек при больших прогибах / М. И. Ерхов // Тезисы докладов 10 зимней школы по механике сплошных сред. – Пермь, 1995.

98. Большие прогибы предварительно растянутой круглой жесткопластической пластинки при действии равномерно распределенной нагрузки / М. И. Ерхов // Труды XVII международной конференции по теории пластин и оболочек. – Казань : УНИИПРЕС, 1995.

99. Решение задачи оптимизации жесткопластической локально динамически нагруженной балки / М. И. Ерхов, П. Рандриаманджара // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений : межвуз. сб. научных трудов. Вып. 5. – М. : МБК "Биоконтроль", 1995.

100. Метод решения нелинейной краевой задачи об оптимизации жесткопластической динамически нагруженной круглой пластинки с помощью минимизации функционала / М. И. Ерхов, И. Д. Михайлов, П. Рандриаманджара // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений : межвуз. сб. научных трудов. Вып. 5. – М. : МБК "Биоконтроль", 1995.

1996

101. Большие прогибы круглой жесткопластической пластинки с шарнирно подвижным краем при действии равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенных моментов на опоре и предварительного напряжения / М. И. Ерхов // Исследование пространственных систем : материалы семинара кафедры сопротивления материалов РУДН. – М. : Изд-во РУДН, 1996.

1997

102. Деформирование жесткопластического свода при сейсмических воздействиях в виде импульса ускорения основания / М. И. Ерхов // Проблемы теории и практики в инженерных исследованиях. – М. : Изд-во РУДН, 1997. – С. 21–23.

103. Большие прогибы жесткопластической круглой пластинки с шарнирно неподвижным краем при действии распределенной нагрузки и предварительного растяжения / М. И. Ерхов // Теоретические основы строительства : материалы российско-польского семинара. – Варшава : ОВИН, 1997.

1998

104. Большие прогибы жесткопластических пологих оболочек вращения с шарнирно неподвижным краем от внутренней равномерно распределенной нагрузки и краевых моментов / М. И. Ерхов // Проблемы теории и практики в инженерных исследованиях. – М. : Изд-во РУДН, 1998.

105. Большие прогибы предварительно напряженной жесткопластической пологой оболочки вращения с краевым моментом / М. И. Ерхов // Актуальные проблемы механики оболочек : труды международной конференции. – Казань : УНИПРЕСС, 1998.

106. Большие прогибы растянутой жесткопластической балки с шарнирными опорами при действии равномерно распределенной нагрузки и краевого момента / М. И. Ерхов, Вуйя Коку // Проблемы теории и практики в инженерных исследованиях. – М. : Изд-во РУДН, 1998.

107. Большие прогибы жесткопластических круглых пластинок с шарнирно подвижным краем, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой и растяжением / М. И. Ерхов // Тезисы докладов Международного конгресса МКПК-98 "Пространственные конструкции в новом строительстве и при реконструкции зданий и сооружений". – М. : Центр проектной документации в строительстве, 1998.

108. Большие прогибы жесткопластических круглых пластинок с шарнирно подвижным краем, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой и растяжением / М. И. Ерхов // Доклады Международного конгресса МКПК-98 "Пространственные конструкции в новом строительстве и при реконструкции зданий и сооружений". – М. : Центр проектной документации в строительстве, 1998.

109. Большие прогибы жесткопластических круглых пластинок с шарнирно подвижным краем при действии равномерно распределенной нагрузки, растяжения и краевых моментов / М. И. Ерхов // Современные проблемы механики и прикладной математики. – Воронеж : ВГУ, 1998.

110. Большие прогибы предварительно напряженной жесткопластической балки с шарнирно неподвижными опорами при равномерно распределенной нагрузке / М. И. Ерхов // Материалы международной научно-практической конференции "Современное строительство". – Пенза, 1998.

1999

111. Большие прогибы предварительно напряженной жесткопластической балки с шарнирными опорами при равномерно распределенной нагрузке и краевых моментах / М. И. Ерхов, А. И. Монахов // Вестник отделения строительных наук Российской Академии архитектуры и строительных наук. – М., 1999. – Вып. 2. – С. 151–154.

112. Динамика жесткопластических прямоугольных пластинок / М. И. Ерхов, Г. Ф. Гайлис // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия "Строительство". – 1999. – № 1. – С. 38–45.

113. Большие прогибы предварительно напряженной жесткопластической балки с шарнирными опорами при локальной распределенной нагрузке и краевых моментах / М. И. Ерхов, А. И. Монахов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений : межвузовский сборник научных трудов. – М. : Изд-во Ассоциации строительных вузов, 1999. – Вып. 8. – С. 3–9.

114. Большие прогибы предварительно напряженной жесткопластической пологой оболочки вращения при действии давления с краевыми моментами / М. И. Ерхов, Вуйя Коку Эммануэль // Проблемные доклады ведущих ученых международной конференции "Сооружения, конструкции, технологии и строительные материалы XXI века". – Белгород, 1999. – С. 47–53.

115. Большие прогибы предварительно напряженной жесткопластической пологой оболочки вращения с краевым моментом / М. И. Ерхов, Вуйя Коку Эммануэль // Актуальные

проблемы теории и практики инженерных исследований : сб. научных трудов. – М. : Изд-во "Машиностроение", 1999. – С. 244–249.

116. Два вида кривых состояний равновесия при статическом нагружении / М. И. Ерхов, В. И. Себекина // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. – М. : Изд-во "Наука", 1999. – С. 37–42.

2000

117. Большие прогибы жесткопластической предварительно напряженной балки с защемленными опорами при распределенной нагрузке и краевых моментах / М. И. Ерхов // Сооружения, конструкции, технологии и строительные материалы XXI века : сборник докладов международной конференции. – Белгород, 2000. – С. 2731.

118. Большие прогибы жесткопластической балки с одной защемленной и другой шарнирно опертой опорой при действии локальной неравномерно распределенной нагрузки / М. И. Ерхов // Сооружения, конструкции, технологии и строительные материалы XXI века : сборник докладов международной конференции. – Белгород, 2000. – С. 3–6.

2001

119. Большие прогибы жесткопластической балки с защемленными опорами при распределенной нагрузке и краевых моментах / М. И. Ерхов, А. И. Монахов // Вестник РУДН. Серия : Инженерные исследования. – 2001. – № 1. – С. 52–56.

120. Большие прогибы шарнирно опертой балки при действии локальной неравномерно распределенной нагрузки / М. И. Ерхов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений : межвуз. сб. научных трудов. – М. : Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2001. – Вып. 10. – С. 3–6.

Д. Д. Ивлев

С М. И. ЕРХОВЫМ

В конце пятидесятих годов прошлого века в журналах начали появляться статьи за подписью *М. И. Ерхов*. Статьи интересные и весьма толковые. Не помню, где и как мы познакомились с Михаилом Ивановичем, то ли в редакции, то ли на каком-либо семинаре и т. п., но с тех пор начались наши дружеские отношения, которые уже больше никогда не прекращались.

В те времена до 1966 года я работал в Воронежском университете, в Воронеже, Михаил Иванович – в ЦНИИСК, в Москве.

Как-то он приехал ко мне в Воронеж, мы запаслись несколькими бутылками тогда появившегося болгарского сухого красного вина, кажется, "Бычье сердце" и отправились на реку Воронеж в районе СХИ, первого рыбацкого. Плотины тогда не было, вода в реке была быстрой, прохладной, солнце было в самый раз, мы отлично провели время.

Надо сказать, что о самой науке мы говорили мало, нас больше интересовало то, что нас окружало, и по всем этим вопросам мы откровенно обменивались мнениями.

К моменту защиты Михаилом Ивановичем кандидатской диссертации мы были в самых дружеских отношениях, но я не помню, оппонировал я его кандидатскую или нет. Материалов под рукой нет.

Докторскую диссертацию Михаила Ивановича на соискание ученой степени доктора технических наук в ЦНИИСК оппонировали (в порядке выступлений) я, И. С. Цурков, Г. С. Шапиро. Отмечали защиту на углу Нового Арбата, на Новинском бульваре в здании, где пароход. Все было очень достойно.

Когда я переехал в Москву, меня пригласили в ЦНИИСК на полставки, но с этим делом не задержалось, у меня совершенно не было времени регулярно ездить в ЦНИИСК. К тому же подоспела другая история. Я был введен в докторский совет ЦНИИСК. Как-то я поехал на защиту кандидатской одного молодого человека из Средней Азии, консультантами у него были два энергичных средних лет сотрудника ЦНИИСК. Диссертант не владел материалом, я не выдержал, задал пару-тройку вопросов, на которые не получил вразумительных ответов, кое-кто из членов совета решился тоже задать вопросы, результат был тот же, и диссертанта завалили.

Что началось! Паника. Диссертант тут же был объявлен невменяемым по болезни (здоров как бык), и повторная защита была назначена через пару дней. Мне позвонили, я было отказался приехать, ссылаясь на дела, но мне сказали, что, так как я главный закоперщик, то без меня защита состояться не может. Я приехал. Не буду пересказывать, что было дальше, но защита прошла, мое голосование здесь уже никакой роли не играло. Через неделю-другую в Совете ЦНИИСК я уже не числился. На наших отношениях с Михаилом Ивановичем этот эпизод никак не сказался.

Точно такая же история вскоре произошла в Совете очень почтенного и уважаемого института, куда меня ввели. Там я тоже не вытерпел, и диссертация была завалена. Повторная защита прошла по той же схеме, детали были весьма поучительны, но рассказывать об этом я не буду. Естественно, что через две недели членом этого Совета я не состоял.

Все это происходило до того, как Е. И. Шемякин ввел меня в экспертный совет ВАК.

Михаил Иванович писал прекрасные работы. Естественно, он в совершенстве владел всеми дисциплинами МДТТ, виртуозно владел строительной механикой. На механико-математическом факультете МГУ курсу строительной механики практически не уделялось

внимания. Сейчас я убежден, что строительная механика одна из фундаментальных наук о прочности тел и конструкций со своей философией, психологией, образом мышления. По влиянию на образ мышления, психологию исследователя ни Сопромат, ни Теория упругости ее заменить не могут.

Строительной механикой я занимался недостаточно, с течением времени начал ощущать пробелы в образовании.



М. И. Ерхов, Д. Д. Ивлев

У Михаила Ивановича была одна особенность. В свое время наши граждане повышали свой уровень, посещали университеты марксизма-ленинизма. Я как мог отвиливал от этих почетных обязанностей, но с течением времени эти университеты охватили весь круг трудящихся и учеба пошла по второму кругу. Изловили всех, кто университет не посещал, и решением парткома меня обязали уровень повысить. Со смутным чувством я отправился в дом Политпросвещения на Садовом кольце. Лектор попался – увлеченный кандидат наук, он сообщил, что несколько ночей не спал, так как ему пришли в голову совершенно оригинальные мысли, с которыми он с нами поделится, но предупредил, что лекция носит творческий, экспериментальный характер. Ничего нового для себя я не услышал и в перерыве отправился домой, решив, будь, что будет.

Кстати, вскоре подоспели новые времена.

Но вот, к моему удивлению, Михаил Иванович, добросовестно прослушав курс марксистского университета, добровольно отправился слушать курс во второй раз. Кстати, во второй раз по своей инициативе курс посетил и Леонид Викторович Ершов. Что они нашли в этом, я понять не мог.

Михаил Иванович был неперменным членом докторских советов в Чебоксарах, никогда не пропускал заседания, его вопросы, замечания, выступления были всегда кстати и очень содержательными.

Михаил Иванович очень любил своего старшего брата Владимира Ивановича. Я, конечно, был знаком с Владимиром Ивановичем, он был исключительно душевным, обаятельным

человеком. Руководил он одним из подразделений важного оборонного предприятия. Кончина Владимира Ивановича тяжело сказалась на Михаиле Ивановиче, похоронены оба на Митинском кладбище в Москве.

Михаил Иванович был очень незаурядным человеком, обладавшим глубоким, пронизательным умом. Он обладал великолепным, присущим ему чувством юмора, был надежным товарищем и другом. Русский человек, он был патриотом России в лучшем значении этого слова. Светлая ему память.

ИЗ ТРУДОВ МИХАИЛА ИВАНОВИЧА ЕРХОВА

1. ОБОБЩЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ. ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ

Обобщенные переменные. Напряженное и деформированное состояние в телах и конструкциях описываются с помощью напряжений $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ и деформаций $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots$, а также скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_x, \dots, \dot{\gamma}_{xy}, \dots$. Однако во многих задачах о расчете конструктивных систем целесообразнее использовать другие переменные: нормальные и поперечные силы, изгибающие и крутящие моменты и т. д. Для единства и общности удобно ввести вместо напряжений и деформаций понятия обобщенных напряжений Q_i и обобщенных деформаций q_i , где $i = 1, 2, \dots, n$, n – число переменных, необходимых для описания напряженного и деформированного состояний. Например, можно положить:

$$\begin{aligned}\sigma_x = Q_1, \sigma_y = Q_2, \sigma_z = Q_3, \tau_{xy} = Q_4, \tau_{yz} = Q_5, \tau_{zx} = Q_6, \\ \varepsilon_x = q_1, \varepsilon_y = q_2, \varepsilon_z = q_3, \gamma_{xy} = q_4, \gamma_{yz} = q_5, \gamma_{zx} = q_6.\end{aligned}$$

Однако использование обобщенных напряжений и деформаций естественно применять при расчете конструктивных систем (стержневых систем, пластинок, оболочек и т. д.). Обобщенные напряжения Q_i и деформации q_i при этом определяются напряжениями и деформациями благодаря допущениям и предпосылкам, используемым в теориях различного рода конструкций. Например, в теории изгиба пластинок обобщенными напряжениями являются изгибающие и крутящие моменты, а обобщенными деформациями – изменения кривизн и кручения срединной поверхности; в теории оболочек – изгибающие и крутящие моменты, нормальные и сдвигающие силы (обобщенные напряжения), изменения кривизн и кручения, деформации срединной поверхности (обобщенные деформации).

Выбор обобщенных напряжений и соответствующих им обобщенных деформаций (и их скоростей) определяется видом функции внутренней энергии D (здесь c – некоторый коэффициент): $D = c(Q_1q_1 + Q_2q_2 + \dots + Q_nq_n)$, для упругих систем или видом функции скорости диссипации \dot{D} для пластических систем: $\dot{D} = Q_1\dot{q}_1 + Q_2\dot{q}_2 + \dots + Q_n\dot{q}_n$.

Каждому напряжению Q_i соответствует скорость деформации \dot{q}_i . Если для изгибаемой балки взять $Q_1 = M$, где M – изгибающий момент, то $q_1 = \varepsilon$ – кривизна оси балки и $\dot{q}_1 = \dot{\varepsilon}$ – скорость кривизны.

Диссипативная функция для оболочек имеет вид:

$$\dot{D} = M_1\dot{\varepsilon}_1 + M_2\dot{\varepsilon}_2 + M_{12}\dot{\varepsilon}_{12} + N_1\dot{\varepsilon}_1 + N_2\dot{\varepsilon}_2 + N_{12}\dot{\gamma}_{12},$$

где M_1, M_2, M_{12} – внутренние изгибающие и крутящий моменты, N_1, N_2, N_{12} – внутренние нормальные и сдвигающая силы; $\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_{12}$ – скорости изменения кривизн и кручения срединной поверхности, $\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\gamma}_{12}$ – скорости деформации, 1 и 2 – индексы осей срединной поверхности.

Для напряжений Q_i принцип максимума Мизеса записывается в виде (здесь и далее имеется в виду жесткопластический материал, для которого скорости упругих деформаций равны нулю) $(Q_i - Q_i^0)\dot{q}_i \geq 0$, где Q_i^0 – возможные значения напряжения, удовлетворяющие условию текучести в случае идеальной пластичности или уравнению поверхности нагружения в случае упрочняющегося пластического материала.

Для идеально пластических систем условие текучести имеет вид:

$$f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \leq 0, \quad (1)$$

причем пластичность характеризуется выполнением равенства (1) и условием $\dot{f} = 0$, для упругого (или жесткого) состояния $f < 0$ или $\dot{f} < 0$. Ассоциированный закон пластического течения для идеально пластических систем имеет вид:

$$\dot{q}_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial Q_i}, \quad (2)$$

где $\lambda \geq 0$ при $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial Q_1} dQ_1 + \frac{\partial f}{\partial Q_2} dQ_2 + \dots = 0$,

$\lambda = 0$ при $f < 0$ или при $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial Q_1} dQ_1 + \frac{\partial f}{\partial Q_2} dQ_2 + \dots < 0$.

В особенной точке поверхности текучести, описываемой конечным числом гладких функций $f_j(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \leq 0$, $j = 1, 2, \dots, r$, скорость деформации имеет вид:

$$\dot{q}_i = \sum_r \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial Q_i}, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (3)$$

где $\lambda_j \geq 0$ при $f_j = 0$, $\frac{\partial f_j}{\partial Q_1} dQ_1 + \frac{\partial f_j}{\partial Q_2} dQ_2 + \dots = 0$,

$\lambda_j = 0$ при $f_j < 0$ или при $f_j = 0$, $\frac{\partial f_j}{\partial Q_1} dQ_1 + \frac{\partial f_j}{\partial Q_2} dQ_2 + \dots < 0$, т. е. вектор скорости пластической деформации \dot{q} в особенной точке поверхности текучести заключен внутри угла, ограниченного крайними нормальными к поверхности текучести в данной точке.

Аналогично можно записать ассоциированный закон пластического деформирования для упрочняющегося материала в обобщенных напряжениях и скоростях пластической деформации.

Можно показать, что значение предельной нагрузки для тел и конструкций из идеального жесткопластического материала и из идеального упругопластического материала одно и то же. Предельная нагрузка, определяющая несущую способность тел и конструкций из идеально пластического материала, соответствует превращению тела (конструкции) в механизм, причем его деформирование осуществляется при постоянном значении достигнутого значения нагрузки. Пусть предельное значение нагрузки обозначено $P_{1пр}$, $P_{2пр}$, $P_{3пр}$, тогда скорость изменения этой нагрузки (ее приращение) будет равна нулю, т. е. $\dot{P}_{1пр} = 0$, $\dot{P}_{2пр} = 0$, $\dot{P}_{3пр} = 0$. Для тела (конструкции) из идеального упругопластического материала скорости деформаций слагаются из упругой и пластической составляющей: $\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_x^e + \dot{\epsilon}_x^p$, ..., $\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{xy}^e + \dot{\gamma}_{xy}^p$, Тогда согласно принципу скоростей виртуальных работ справедливо уравнение:

$$\int_V \{ \dot{\sigma}_x (\dot{\epsilon}_x^e + \dot{\epsilon}_x^p) + \dots + \dot{\tau}_{xy} (\dot{\gamma}_{xy}^e + \dot{\gamma}_{xy}^p) + \dots \} dV = \int_S (\dot{P}_{1пр} \dot{u} + \dot{P}_{2пр} \dot{v} + \dot{P}_{3пр} \dot{w}) ds = 0.$$

Для идеально пластического материала поверхность текучести неизменна. В силу этого вектор скорости (приращения) напряжений $\dot{\sigma}_x, \dots, \dot{\tau}_{xy}, \dots$ из данной точки на поверхности текучести может быть направлен лишь по касательной к поверхности. Учитывая, что вектор скорости (приращения) деформаций согласно ассоциированному закону пластического деформирования нормален к поверхности текучести, произведение этого вектора с вектором скорости напряжений равно нулю, т. е. $\dot{\sigma}_x \dot{\epsilon}_x^p + \dots + \dot{\tau}_{xy} \dot{\gamma}_{xy}^p + \dots = 0$ (или в векторной форме $\dot{\sigma} \dot{\epsilon} = 0$). Тогда в силу приведенного уравнения скоростей виртуальных работ:

$$\dot{\sigma}_x \dot{\epsilon}_x^e + \dots + \dot{\tau}_{xy} \dot{\gamma}_{xy}^e + \dots = 0.$$

В силу закона Гука (для скоростей изменения напряжений и скоростей упругих деформаций) отсюда следует, что $\dot{\sigma}_x = 0$, ..., $\dot{\tau}_{xy} = 0$, ..., а следовательно, $\dot{\epsilon}_x^e = 0$, ..., $\dot{\gamma}_{xy}^e = 0$,

Согласно этому напряжения и упругие деформации остаются постоянными, а тело (конструкция) деформируется только за счет пластических деформаций. Таким образом, упругое деформирование не оказывает влияния на деформирование тел при предельном значении нагрузки, которое одинаково для идеального жесткопластического и упругопластического материала.

Очевидно, что если предельное значение нагрузки одинаково для жесткопластического и упругопластического материалов, то его проще и удобнее определять для какого-либо тела (или конструкции), считая материал жесткопластическим. В последующем будем это использовать.

Приведенное рассуждение о постоянстве напряжений и упругих деформаций можно дополнить в терминах обобщенных напряжений и деформаций.

Поверхности текучести. Поскольку уравнения теории конструктивных систем (стержневых, тонкостенных и др.) формулируются в обобщенных напряжениях и скоростях деформации, условие пластичности целесообразно формулировать также в обобщенных напряжениях; в этом случае уравнение условия пластичности в пространстве обобщенных напряжений Q_i соответствует некоторой поверхности, называемой поверхностью текучести.

Простейшим случаем является случай одноосного напряженного состояния, возникающий при растяжении-сжатии стержня или при его изгибе. Если стержень с размерами прямоугольного поперечного сечения $b, 2h$ (рис. 1, а) растягивается или сжимается центральной нормальной силой N , то нормальные напряжения (растягивающие или сжимающие) будут равномерными по сечению и равными $\sigma_n = N/(2bh)$. Для идеально пластического стержня $\sigma_n \leq \sigma_T, \sigma_T$ – предел текучести; предельное значение нормальной силы равно: $N_T = 2\sigma_Tbh$, причем при растяжении $N > 0 (\sigma_n > 0)$, а при сжатии $N < 0 (\sigma_n < 0)$.

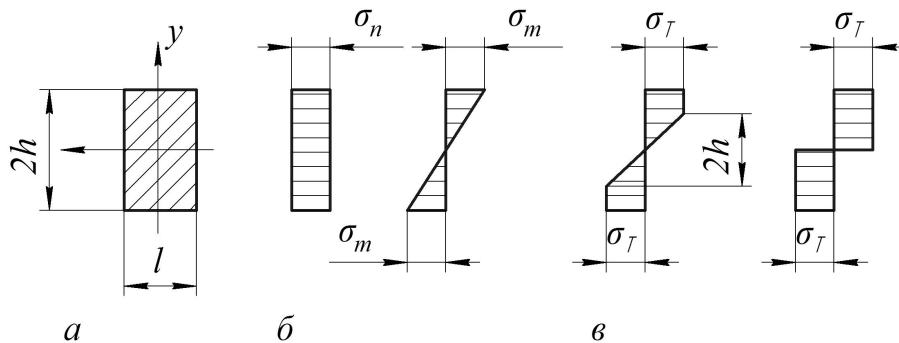


Рис. 1

При изгибе нормальные напряжения по сечению распределяются в упругой стадии по закону треугольника (рис. 1, б) и изгибающий момент $M = \frac{2}{3}\sigma_mbh^2$, где σ_m – абсолютное значение нормального напряжения в крайнем волокне. После достижения σ_m значения σ_T увеличение M приведет к ломаной эпюре нормальных напряжений, причем $|\sigma_m| = \sigma_T$ при $h - h_0 \leq y \leq h_0 - h$ и причем $|\sigma_m| < \sigma_T$ при $h_0 - h < y < h - h_0$ (рис. 1, б). Напряжения $|\sigma_m|$ не могут превосходить σ_T , поэтому предельная эпюра σ_m будет выглядеть в виде двух прямоугольников высотой h , в пределах которых $|\sigma_m| = \sigma_T$. Предельное значение изгибающего момента в сечении $M_T = \sigma_Tbh^2$, что в 1,5 раза превышает максимальный упругий изгибающий элемент $M_e = \frac{2}{3}\sigma_Tbh^2$.

Для более сложных случаев зависимости между внутренними усилиями в поперечном сечении стержня будут получены несколько ниже как частный случай соответствующих зависимостей для оболочек. Рассмотрим двухслойное сечение стержня с толщиной слоев δ , расстоянием между ними h и единичной шириной (рис. 2). Такое сечение соответствует, например, сечению двутавра, если пренебречь стенкой (стержень может быть образован двумя

листами толщиной δ , расстояние между которыми сохраняется благодаря наличию заполнителя, практически не сопротивляющегося растяжению-сжатию). При действии нормальной силы напряжения в слоях $\sigma_n = N/(2\delta)$, предельное значение силы $N_T = \sigma_T 2\delta$. Безразмерное усилие n определяется отношением $n = N/N_T = 2\sigma_n \delta / 2\sigma_T \delta = \sigma_n / \sigma_T$, соответственно $\sigma_n = n\sigma_T$.

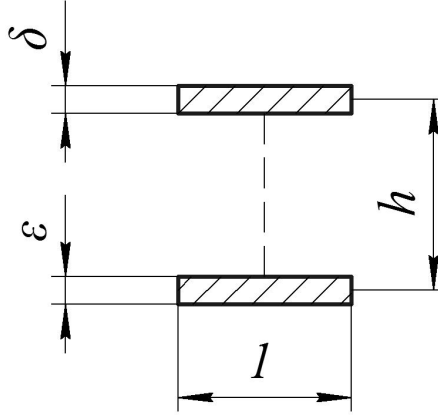


Рис. 2

При действии изгибающего момента (считая слои δ тонкими и распределение нормальных напряжений σ_m на них постоянным) $\sigma_m = M/(\delta h)$; предельное значение момента равно $M_T = \sigma_T \delta h$. Безразмерное усилие m равно $m = M/M_T = \sigma_m \delta h / (\sigma_T \delta h) = \sigma_m / \sigma_T$, соответственно, $\sigma_m = m\sigma_T$.

При одновременном действии N и M напряжения от них в одном слое будут складываться, а в другом – вычитаться; в результате получим:

$$\sigma^H = \sigma_n + \sigma_m = (n + m)\sigma_T, \quad \sigma^B = \sigma_n - \sigma_m = (n - m)\sigma_T, \quad (4)$$

где индексы H и B обозначают наружный и внутренний слой соответственно (знаки перед m могут быть противоположными, но разными для различных слоев).

Рассматривая оболочку двухслойного сечения и обозначая оси координат индексами 1 и 2, получим, что на ее элемент (единичных размеров в плане) будут действовать усилия $N_1, N_2, N_{12}, M_1, M_2, M_{12}$. Напряжения от усилий в слоях аналогично (4) будут равны:

$$\sigma_i^{H(B)} = (n_{i(-)}m)\sigma_T, \quad \tau_{12}^{H(B)} = (n_{12(-)}m_{12})\sigma_T, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

где знаки в скобках соответствуют индексам в скобках, $n_{12} = N_{12}/N_T$, $m_{12} = M_{12}/M$.

Для оболочек имеет место плоское напряженное состояние ($\sigma_3 = 0, \tau_{13} = 0, \tau_{23} = 0$), условие пластичности Мизеса при замене x, y на 1, 2 приобретает вид:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_2^2 + 3\tau_{12}^2 \leq \sigma_T^2. \quad (6)$$

Подставляя выражения (5) в соотношение (6), получим выражение поверхности текучести для двухслойных оболочек в усилиях $n_1, n_2, n_{12}, m_1, m_2, m_{12}$:

$$\begin{aligned} & (n_1^2 - n_1n_2 + n_2^2 + 3n_{12}^2) + (m_1^2 - m_1m_2 + m_2^2 + 3m_{12}^2) + \\ & + 2(n_1m_1 - 0, 5n_1m_2 - 0, 5n_2m_1 + n_2m_2 + 3n_{12}m_{12})^2 \leq 1, \end{aligned} \quad (7)$$

являющееся точными для двухслойных оболочек [5].

Оболочки со сплошным (однослойным) сечением можно приближенно представить как двухслойные (рис. 3) с высотой каждого слоя h и равномерным в пределах слоя распределением напряжений. Тогда $N = 2\sigma_n h$, $M = \sigma_m h^2$, $n = N/N_T = \sigma_n / \sigma_T$, $m = M/M_T = \sigma_m / \sigma_T$,

откуда $\sigma_n = n\sigma_T$, $\sigma_m = m\sigma_T$ и имеют место формулы (5), и следовательно (7). Ясно, что для однослойных оболочек выражение (7) приближенное, причем из сравнения с точным выражением [2] следует, что оно всюду не превосходит последнее.

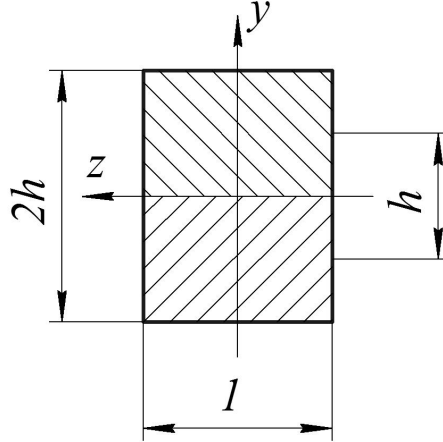


Рис. 3

Полагая в (7) $n_1 = n_2 = n_{12} = 0$, получим выражение поверхности текучести для чистого моментного состояния:

$$m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 + 3m_{12}^2 \leq 1, \quad (8)$$

являющееся точным (при однослойном и двухслойном сечениях) и относящееся, например, к изгибаемым пластинкам.

Полагая в (7) $m_1 = m_2 = m_{12} = 0$, получим точное выражение поверхности для безмоментного напряженного состояния:

$$n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 + 3n_{12}^2 \leq 1. \quad (9)$$

Дальнейший анализ выражений (7), (8), (9) показывает, что уравнение

$$(n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 + 3n_{12}^2) + (m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 + 3m_{12}^2) = \kappa^2, \quad 0,75 \leq \kappa^2 \leq 1,09 \quad (10)$$

соответствует поверхности текучести, когда при $\kappa^2 = 0,75$ всюду находится внутри точной поверхности текучести для однослойных оболочек, а при $\kappa^2 = 1,09$ – вне ее. В зависимости от целей расчета можно принимать из указанного диапазона какое-либо значение κ^2 (в частности $\kappa^2 = 0,5(1,09 + 0,75) = 0,92$, $\kappa^2 = 1,0$).

При плоском напряженном состоянии (при $\sigma_3 = 0$) для главных напряжений условие пластичности Треска–Сен–Венана принимает вид:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_T, \quad |\sigma_1| \leq \sigma_T, \quad |\sigma_2| \leq \sigma_T. \quad (11)$$

Подставляя (5) в (11), получим выражение поверхности текучести для двухслойных оболочек ($\tau_{12} = 0$):

$$|(n_1 \pm m_1) - (n_2 \pm m_2)| \leq 1, \quad |n_1 \pm m_1| \leq 1, \quad |n_2 \pm m_2| \leq 1, \quad (12)$$

являющееся приближенным для однослойных оболочек (так же, как (7)). Выражение (12) существенно проще (7).

Во всех представленных выражениях поверхности текучести можно считать: $n = N/N_T$, $m = M/M_T$, как в случае однослойных, так и двухслойных оболочек, при этом

точность этих выражений различная. Поверхности текучести для стержней произвольного поперечного сечения можно рассматривать как частный случай приведенных поверхностей для оболочек. Используя безразмерные усилия в стержнях $n = N/N_T$, $m = M/M_T$, рассмотрим эти поверхности (индексы осей усилий приняты такими же, как и в теории оболочек).

Для стержней сплошного сечения возможно действие следующих усилий (рис. 4): m_1 , m_{12} , n_1 , n_{12} . Отсюда согласно (10):

$$n_1^2 + 3n_{12}^2 + m_1^2 + 3m_{12}^2 = \kappa^2, \quad 0,75 \leq \kappa^2 \leq 1,09, \quad (13)$$

причем в частных случаях некоторые усилия могут быть равны нулю.

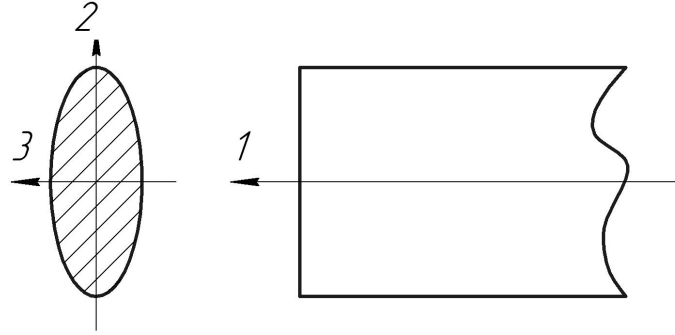


Рис. 4

Для стержней двухслойного поперечного сечения из выражений (7) и (12) следует:

$$n_1^2 + 3n_{12}^2 + m_1^2 + 3m_{12}^2 \pm 2(n_1m_1 + 3n_{12}m_{12}) \leq 1, \quad |n_1 \pm m_1| \leq 1. \quad (14)$$

Для стержней несплошного сечения возможно действие m_1 , m_{12} , n_1 , n_2 , n_{12} (при действии m_2 стержни относят к оболочкам, например, труба), из уравнения (10) следует:

$$n_1^2 - n_1n_2 + n_2^2 + 3n_{12}^2 + m_1^2 + 3m_{12}^2 = \kappa^2, \quad 0,75 \leq \kappa^2 \leq 1,09. \quad (15)$$

Закон течения (2) формулируется по отношению к приведенным выше поверхностям текучести (8), (9), (10), (13), (15), а закон течения (3) – по отношению к (7), (12), (14). Например, для стержней прямоугольного сечения (рис. 1) согласно (13)

$$\dot{\epsilon}_1 : \dot{\epsilon}_{12} : \frac{h}{2} \dot{\alpha}_1 : \frac{h}{2} \dot{\alpha}_{12} = n_1 : 3n_{12} : m_1 : 3m_{12}.$$

2. НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим жесткопластические стержневые системы при наличии изгибающих моментов и нормальных сил в стержнях. Поскольку распределение внутренних усилий в стержнях в общем случае можно считать неравномерным, в местах их максимального абсолютного значения при действии внешней нагрузки образуются полностью пластические сечения. Если при некотором значении нагрузки таких сечений образуется столько, что система превращается в механизм и не может воспринимать большего значения нагрузки, то происходит (пластическое) разрушение системы, а соответствующее значение нагрузки называется предельным (разрушающим). При этом для статически определимых систем необходимо образование одного пластического сечения, для n раз статически неопределимых систем в общем случае необходимо образование $n+1$ пластических сечений; в этих условиях стержневая система превращается в механизм. Предельное значение нагрузок можно определять с помощью теорем о нижней и верхней границах предельных нагрузок. В простейших случаях можно непосредственно определять предельные нагрузки, удовлетворяя исходные уравнения и соотношения.

Балки. Для статически определимых балок определение предельной нагрузки (несущей способности) осуществляется достаточно просто. Рассмотрим однопролетную шарнирно опертую балку, нагруженную сосредоточенной силой P (рис. 5). Реакция на опоре A равна $R_A = P \left(1 - \frac{x_0}{l}\right)$. Эпюра изгибающих моментов M изображена на рис. 5. Максимальное значение $M = P \left(1 - \frac{x_0}{l}\right) x_0$ будет при $x = x_0$. При возрастании нагрузки P , например для балки прямоугольного сечения, в месте максимального изгибающего момента нормальные напряжения будут изменяться согласно рис. 1, б: предельное значение эпюры моментов соответствует значению $M_T = \sigma_T b h^2$. (Значение M_T будет достигаться и в балках другого поперечного сечения).

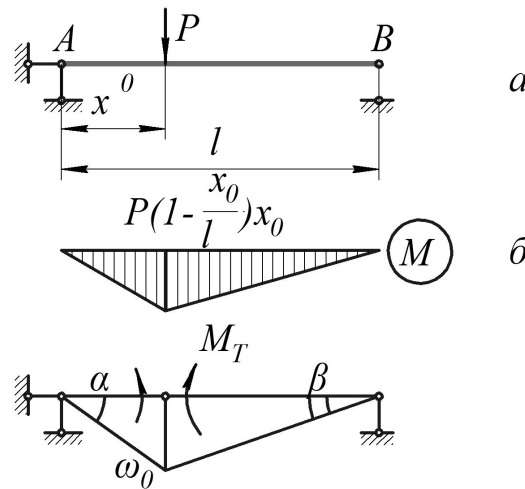


Рис. 5

Для идеального пластического материала $M = M_T$; в связи с этим при значении $M = M_T$ при $x = x_0$ балка превращается в механизм, три шарнира расположены на одной линии. Поворот сечения при $x = x_0$ не стеснен и не ограничен, такое сечение становится по свойствам равнозначным шарниру при $M = M_T$ и называется пластическим шарниром. Свойства шарнира в этом сечении имеют место лишь при указанном действии нагрузки, при обратном действии нагрузки сечение будет работать как упругое или жесткое. Предельное значение нагрузки определяется из условия равенства $M = M_T$ при $x = x_0$: $P \left(1 - \frac{x_0}{l}\right) x_0 = M_T$, откуда

$$P_{\text{пр}} = \frac{M_T l}{(l - x_0) x_0}. \quad (16)$$

Значение $P_{\text{пр}}$ согласно (16) определено с помощью рассмотрения условий равновесия балки, т. е. согласно теореме статическим методом (эту теорему часто называют статической).

Значение нагрузки $P_{\text{пр}}$ можно определить кинематическим методом (согласно теореме, называемой часто кинематической). При образовании пластического шарнира в сечении $x = x_0$ скорости прогибов балки можно изобразить в виде треугольника (рис. 5, 6), причем максимальная скорость прогиба w_0 будет при $x = x_0$, черный кружок обозначает пластический шарнир.

Изгибающий момент M_T в сечении $x = x_0$ совершает работу на сумме углов $(\dot{\alpha} + \dot{\beta})$. В силу малости углы $\dot{\alpha} = \frac{\dot{w}_0}{x_0}$, $\dot{\beta} = \frac{\dot{w}_0}{l-x_0}$.

Скорость внутренней работы (мощность внутреннего момента M_T) при $x = x_0$:
 $\dot{A} = M_T (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = M_T \dot{w}_0 \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{l-x_0} \right)$.

Скорость работы внешней силы P (мощность нагрузки) $\dot{W} = P \dot{w}_0$. Приравнявая $\dot{A} = \dot{W}$, получим $P \dot{w}_0 = M_T \dot{w}_0 \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{l-x_0} \right)$, или сокращая на w_0 :

$$P_{\text{пр}} = \frac{M_T l}{(l-x_0)x_0},$$

что совпадает с (16).

Если $x_0 = 0,5l$, то $P_{\text{пр}} = 4 \frac{M_T}{l}$.

При действии равномерно распределенной нагрузки p (рис. 6) опорная реакция $R_A = 0,5pl$. Изгибающий момент в сечении x $M = 0,5px(l-x)$; он максимален при $x = 0,5l$ и $M = 0,125pl^2$. Приравнявая последнее значение M_T , получим значение $p_{\text{пр}}$, соответствующее образованию пластического шарнира при $x = 0,5l$:

$$p_{\text{пр}} = \frac{8M_T}{l^2}, \quad (17)$$

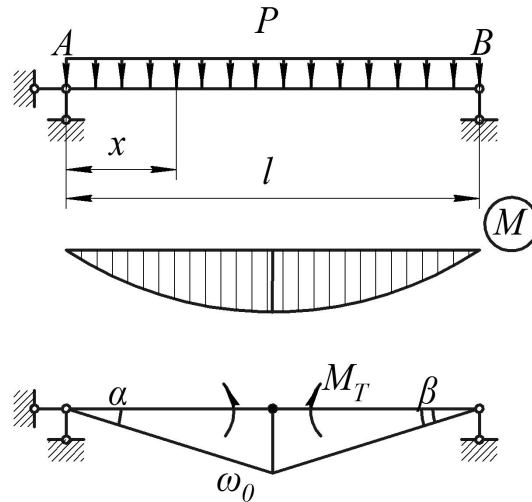


Рис. 6

Кинематический метод дает: $\dot{A} = M_T(\dot{\alpha} + \dot{\beta})$ при $x = 0,5l$. Поскольку $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = \frac{\dot{w}_0}{0,5l} = \frac{2\dot{w}_0}{l}$, $\dot{A} = 4M_T \frac{\dot{w}_0}{l}$. Мощность нагрузки равна произведению p на площадь треугольника скоростей прогибов (рис. 6) $\dot{W} = p \dot{w}_0 l / 2$. Приравнявая $\dot{A} = \dot{W}$ и сокращая на w_0 , получим $P_{\text{пр}} = \frac{8M_T}{l^2}$, что совпадает с (17).

Если для балки (рис. 5) назначить схему пластического деформирования (разрушения) с пластическим шарниром при $x = x_1 \neq x_0$ (рис. 7), то $x_0 \leq x_1 \leq l$, $\dot{w}_0 = \dot{w}_1 \frac{x_0}{x}$, $\dot{\alpha} = \frac{\dot{w}_1}{x_1}$, $\dot{\beta} = \frac{\dot{w}_1}{l-x_1}$; и мощность внутреннего момента M_T при $x = x_1$: $\dot{A} = M_T(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = M_T \dot{w}_1 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{l-x_1} \right)$. Мощность силы $P \dot{W} = P \dot{w}_0 = \dot{w}_1 \frac{x_0}{x_1}$. Приравнявая $\dot{A} = \dot{W}$, получим

$$P_{\text{пр}}^* = \frac{M_T}{x_0} \left(1 + \frac{x_1}{l-x_1} \right). \quad (18)$$

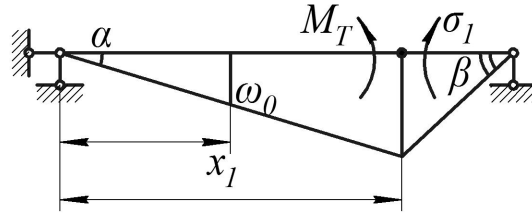


Рис. 7

Очевидно, что $\min P_{\text{пр}}^*$ согласно (18) будет при $x_1 = x_0$, откуда $P_{\text{пр}} = M_T \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{l-x_0} \right)$, что совпадает с выражением (16). Точно так же можно задавать значение $0 \leq x_1 \leq x_0$, в результате чего опять получим значение (16).

Задавая схему разрушения (рис. 7) для случая нагружения балки, равномерно распределенной нагрузкой p , получим $\dot{A} = M_T(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = M_T \dot{W}_1 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{l-x_1} \right)$, $\dot{W} = p \dot{w}_0 l/2$, из равенства $\dot{A} = \dot{W}$ следует

$$p_{\text{пр}}^* = 2M_T \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{l-x_1} \right). \quad (19)$$

Минимум $p_{\text{пр}}^*$ согласно (19) определяется из равенства нулю производной $\frac{dp_{\text{пр}}^*}{dx} = 0$, откуда $x_1 = 0,5l$, $p_{\text{пр}} = \frac{8M_T}{l^2}$, что совпадает с выражением (17).

Очевидно, что несущая способность чисто упругих статически определимых стержневых систем меньше несущей способности идеально пластических систем во столько раз, во сколько M_l меньше M_T : для стержней прямоугольного сечения $M_l = \frac{2}{3} \sigma_T b h^2$, $M_T = \sigma_T b h^2$, $M_T/M_l = 1,5$, т. е. несущая способность чисто упругих систем в 1,5 раза ниже несущей способности идеально пластических.

Для n раз статически неопределимых балок в общем случае для разрушения необходимо образование $n - 1$ пластических шарниров (сечений). Например, для однажды статически неопределимой балки (рис. 8) необходимо образование двух пластических шарниров (сечений). Поскольку согласно эпюре M (рис. 8, а) $M_B > M_C$, при некотором значении силы \bar{P} пластический шарнир образуется на опоре B : $M_B = M_T$, откуда $\bar{P} = 5,333M_T/l$. При дальнейшем увеличении силы P момент $M_B = M_T$ не изменяется, балка становится шарнирно опертой; значение момента в точке C от действия нагрузки ΔP , прикладываемой после достижения значения \bar{P} , равно $0,25\Delta Pl$ (рис. 8, б). Суммируя это значение со значением M_C , достигнутом при $P = \bar{P}$, и приравнявая его M_T , получим $0,15625\bar{P}l + 0,25\Delta Pl = M_T$, откуда при $\bar{P} = 5,333M_T/l$ следует $\Delta P = 0,667M_T/l$. Поскольку при этом в балке имеются два пластических шарнира, она превратилась в механизм и не сможет воспринимать дальнейшее прекращение нагрузки. Предельная нагрузка

$$P_{\text{пр}} = \bar{P} + \Delta P = 5,333 \frac{M_T}{l} + 0,667 \frac{M_T}{l} = 6 \frac{M_T}{l}. \quad (20)$$

Значение предельной силы $P_{\text{пр}}$ можно сразу определить из условия равновесия сечений балки при образовании двух пластических шарниров в сечениях B и C (рис. 8, г), поскольку моменты в этих сечениях максимальны (статический метод). Обозначая R_A реакцию опоры A , имеем:

$$\begin{aligned} \sum M_C = R_A 0,5l = M_T; \quad R_A = \frac{2M_T}{l}; \\ \sum M_B = R_A l - P \cdot 0,5l = -M_T; \quad P = 2 \frac{R_A l + M_T}{l}, \end{aligned}$$

откуда с учетом значения R_A следует $P_{\text{пр}} = \frac{\sigma M_T}{l}$, что совпадает с выражением (20).

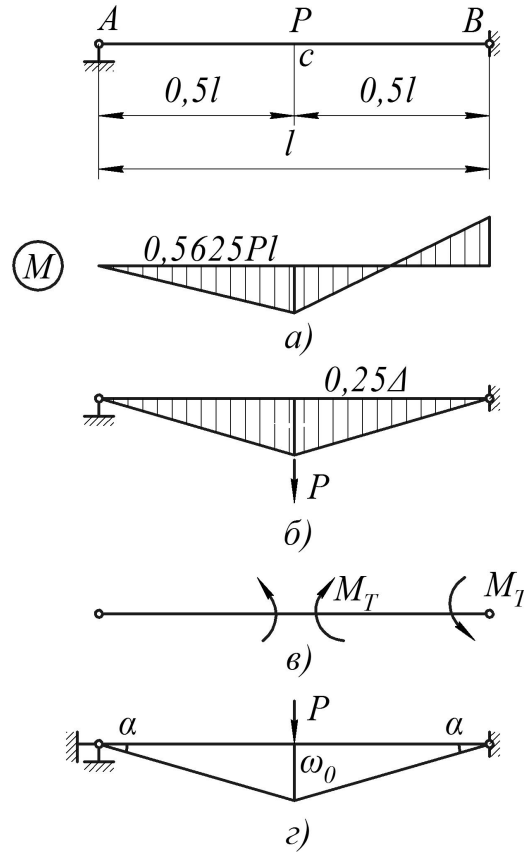


Рис. 8

Особенно просто определить $P_{\text{пр}}$ кинематическим методом. Скорости прогибов при образовании пластических шарниров в сечениях B и C изображены на рис. 8, г. При этом $\dot{\alpha} = \frac{2\dot{w}}{l}$, $\dot{A} = M_T \cdot 2\dot{\alpha} + M_T \dot{\alpha} = 6M_T \frac{\dot{w}_0}{l}$, $\dot{W} = P\dot{w}_0$. Из равенства $\dot{A} = \dot{W}$ получаем $P_{\text{пр}} = \frac{\sigma M_T}{l}$, что совпадает с выражением (20).

Простоту и наглядность кинематического метода можно показать на примере определения предельной распределенной нагрузки $q_{\text{пр}}$, приложенной к балке (рис. 9). Назначая пластические шарниры в стадии разрушения в точках B и C , имеем $\dot{\alpha} = \frac{\dot{w}_0}{x_0}$, $\dot{\beta} = \frac{\dot{w}_0}{l-x_0}$; $\dot{A} = M_T (\dot{\alpha} + 2\dot{\beta}) = M_T \dot{w}_0 \left(\frac{1}{x_0} + \frac{2}{l-x_0} \right)$, $\dot{W} = p \frac{\dot{w}_0 l}{2}$. Приравнявая $\dot{A} = \dot{W}$, получим формулу

$$P_{\text{пр}} = \frac{2M_T}{l} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{2}{l-x_0} \right). \quad (21)$$

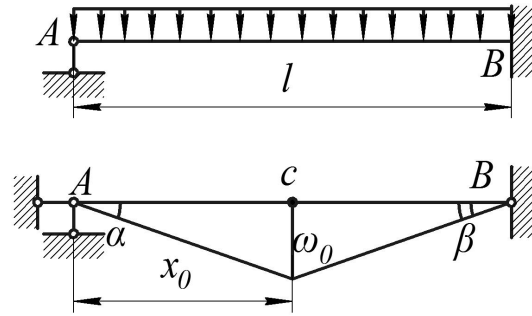


Рис. 9

Теперь следует определить значение x_0 , соответствующее минимуму $P_{\text{пр}}^*$:

$\frac{dP_{\text{пр}}^*}{dx_0} = -\frac{1}{x_0^2} + \frac{2}{(l-x_0)^2} = 0$ или $x_0^2 + 2lx_0 - l^2 = 0$. Решая последнее уравнение, получим $x_0 = l(\sqrt{2} - 1)$, причем полученный отрицательный корень не имеет смысла. Подставляя полученное значение x_0 в (21), будем иметь

$$P_{\text{пр}} = \frac{2}{(\sqrt{2} - 1)^2} \frac{M_G}{l^2}. \quad (22)$$

Значение (22) можно получить и статическим методом. Применение кинематического метода не вызывает возражений, если в результате найдено точное значение предельной нагрузки. Однако доказательство этого может быть выполнено после использования статического метода. В более сложных случаях (равнотонкостенные системы и т. д.) точное решение задач о предельном значении нагрузки получить затруднительно; при решении таких задач используются численные методы с применением ЭВМ. Приближенные решения дают кинематический (оценка предельной нагрузки "сверху") и статический (оценка предельной нагрузки "снизу") методы; истинное значение предельной нагрузки находится между верхней и нижней оценками. Близость этих оценок является критерием эффективности используемых методов расчета. Если же пользоваться одним каким-либо методом – статическим или кинематическим, то предпочтение следует отдать первому, поскольку он дает значение предельной нагрузки, отклоняющееся от истинного значения в благоприятную для инженеров сторону ("с запасом").

Рамы. Определение предельной нагрузки для статически определимых рам осуществляется так же, как в балках (см. ниже). Для статически неопределимых рам имеется ряд особенностей. Прежде всего следует отметить, что рамы являются многоэлементными системами, степень статической неопределимости которых может быть относительно велика. Сечения различных стержней рамы могут быть различными; к рамам могут быть приложены многообразные виды нагрузок. Все это делает определение несущей способности рам довольно трудоемким. С этой целью целесообразно применять ЭВМ; при этом необходимо использовать методы теории предельного равновесия – статический и кинематический.

Статический метод, как известно, заключается в отыскании такого равновесного напряженного состояния, которое соответствовало бы максимальному значению предельной нагрузки при удовлетворении условий пластичности. Кинематический метод состоит в отыскании такого механизма разрушения, который соответствовал бы минимальному значению предельной нагрузки при удовлетворении условий закрепления. Точное значение предельной нагрузки соответствует максимальному из всех статически возможных и минимальному из всех кинематически возможных; если точное значение трудно найти, то находят нижнюю (статическим методом) и верхнюю (кинематическим методом) границы (оценки) предельной нагрузки, причем точное значение должно располагаться между ними.

Рассмотрим пример расчета дважды статически неопределимой рамы (рис. 10), у которой все стержни имеют одинаковые сечения. При сосредоточенных нагрузках изгибающий момент изменяется линейным образом вдоль стержней, а абсолютное максимальное значение он может иметь в сечениях 1–4 (сечении 5 – естественный шарнир, $M_5 = 0$). Влиянием нормальных сил в стержнях рамы чаще всего пренебрегают (из-за сложности расчета). Определим предельную нагрузку статическим методом. Реакцию в шарнирной опоре 5 можно представить в виде двух реактивных сил: H_5 , R_5 (рис. 10); тогда изгибающие моменты M_1 , M_2 , M_3 , M_4 можно выразить через H_5 , R_5 из условий равновесия

$$\begin{aligned} M_4 &= -H_5 \cdot 2l; \quad M_3 = -H_5 \cdot 2l + R_5 l; \\ M_2 &= -H_5 \cdot 2l + R_5 \cdot 2l - Pl; \quad M_1 = 2R_5 \cdot 2l - Pl - 4Pl. \end{aligned} \quad (23)$$

Исключая из уравнений (23) H_5 , R_5 , получим два условия равновесия:

$$\begin{aligned} M_2 &= -2M_3 + M_4 = -Pl; \\ M_1 - 2M_3 + 2M_4 &= -5Pl. \end{aligned} \quad (24)$$

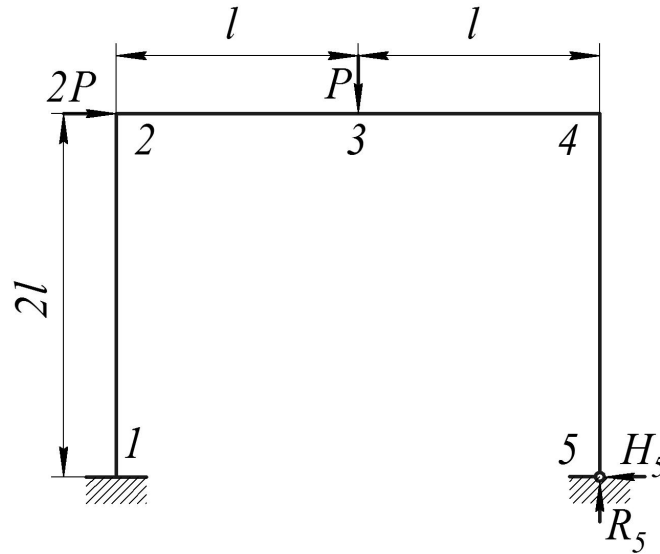


Рис. 10

В двух уравнениях (24) четыре неизвестных: M_1 , M_2 , M_3 , M_4 . Формально они могут принимать значения

$$-M_T \leq M_1 \leq M_T, \quad -M_T \leq M_2 \leq M_T, \quad -M_T \leq M_3 \leq M_T, \quad -M_T \leq M_4 \leq M_T,$$

хотя из вида эпюры моментов в упругой стадии можно сделать предположения о возможном знаке изгибающих моментов. Математически следует рассмотреть все возможные напряженные состояния, удовлетворяющие (24), ограничениям на значения M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , и из них выбрать то, которое дает максимальное значение нагрузки. При этом следует стремиться к тому, чтобы изгибающие моменты в сечениях 1–4 по абсолютной величине были максимальны, и при точном решении они должны соответствовать некоторой форме разрушения.

Перебор возможных напряженных состояний показывает, что максимальное значение предельной нагрузки достигается при $M_1 = -M_T$, $M_2 = M_T$, $M_4 = -M_T$, причем из (24) следует

$$P_{\text{пр}} = \frac{3}{4} \frac{M_T}{l}, \quad (25)$$

в $M_3 = \frac{3}{8}M_T$, т. е. выполняются ограничения на значения M_1, M_2, M_3, M_4 .

Если, например, взять $M_1 = -M_T, M_2 = M_T, M_3 = M_T, M_4 = -M_T$, то из (24) следует $p^0 = \frac{1}{3}\frac{M_T}{l}$ и $M_4 = \frac{2}{3}M_T$. Это значение p^0 меньше (25), а значения M_1, M_2, M_3, M_4 при этом не соответствуют какой-либо форме разрушения; следовательно, решение неприемлемо.

Если взять $M_1 = -M_T, M_3 = M_T, M_4 = -M_T$, то из (24) следует $P = \frac{M_T}{l}, M_2 = 2M_T$, что нарушает условие пластичности.

Определим предельную нагрузку кинематическим методом. Назначим три схемы разрушения (рис. 11) и посчитаем для каждой предельную нагрузку.

Для схемы на рис. 11, а $\dot{\Delta} = \dot{\alpha}l, \dot{W} = P^*\dot{\Delta} = P^*\dot{\alpha}l$; в сечении 3 скорость угла перелома равна $2\dot{\alpha}$, при этом для рамы $\dot{A} = M_T(\dot{\alpha} + 2\dot{\alpha} + \dot{\alpha}) = 4M_T\dot{\alpha}$. Из равенства $\dot{A} = \dot{W}$ следует

$$P_{\text{пр}}^* = \frac{4M_T}{l}. \quad (26)$$

Для схемы на рис. 11, б $\dot{\Delta} = 2\dot{\alpha}l, \dot{W} = 2P^*\dot{\Delta}_1 = 4P^*\dot{\alpha}l$. Из равенства $\dot{A} = \dot{W}$ следует ($\dot{A} = M_T(\dot{\alpha} + \dot{\alpha} + \dot{\alpha}) = 3M_T\dot{\alpha}$),

$$P_{\text{пр}}^* = \frac{3}{4}\frac{M_T}{l}. \quad (27)$$

Для схемы на рис. 11, в $\dot{\Delta}_1 = 2\dot{\alpha}l, \dot{\Delta}_2 = \dot{\alpha}l, \dot{W} = 2P^*\dot{\Delta}_1 + P^*\dot{\Delta}_2 = 5P^*\dot{\alpha}l$, сечение 2 жесткое, в сечениях 3 и 4 скорость угла перелома равна $2\dot{\alpha}$, при этом для рамы $\dot{A} = M_T(\dot{\alpha} + 2\dot{\alpha} + 2\dot{\alpha}) = 5M_T\dot{\alpha}$. Из равенства $\dot{A} = \dot{W}$ следует

$$P_{\text{пр}}^* = \frac{M_T}{l}. \quad (28)$$

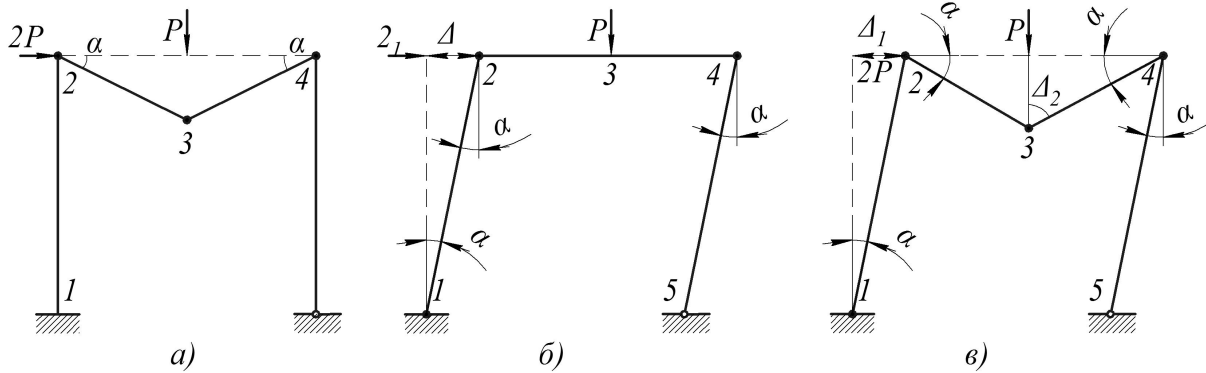


Рис. 11

Наименьшее сечение $P_{\text{пр}}^*$ соответствует значению (27), которое совпадает со значением (25). Следовательно, значение (25) является точным; распределение моментов $M_1 = -M_T, M_2 = M_T, M_3 = \frac{3}{8}M_T, M_4 = -M_T$ соответствует схеме разрушения (рис. 11, б).

Для встречающихся на практике сложных рам определение предельной нагрузки целесообразно осуществлять численными методами с помощью ЭВМ.

Арки. При расчете арок целесообразно пренебрегать влиянием нормальных сил. Рассмотрим круговую двухшарнирную арку, нагруженную сосредоточенной силой $2P$ в вершине (рис. 12) и имеющей двухслойное сечение. Реакция на опоре обозначена F и составляет угол χ с касательной к оси арки на опоре. При принятом правиле знаков (рис. 12) продольная сила и изгибающий момент из условий равновесия равны

$$n = -2kf \cos(\varphi_0 - \chi - \varphi), \quad m = -f(\cos \chi - \cos(\varphi_0 - \chi - \varphi)), \quad (29)$$

где $k = M_T/2RN_T$, R – радиус арки, M_T , N_T – предельные значения изгибающего момента M и нормальной силы N , $n = N/N_T$, $m = M/M_T$, $f = FR/M_T$.

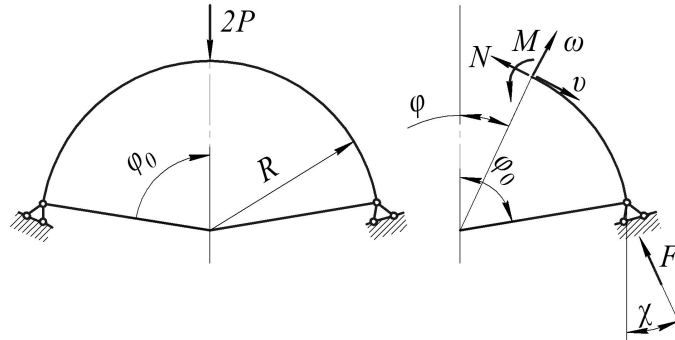


Рис. 12

Предельная нагрузка выражается через f (в силу симметрии рассматриваем правую половину арки):

$$p = PR/M = f \sin(\varphi_0 - \chi). \quad (30)$$

Условие текучести принимается согласно (14) $|n_1 \pm m_1| = 1$, причем в дальнейшем используются уравнения сторон I и II (рис. 13):

$$m - n - 1 = 0; \quad -m - n - 1 = 0. \quad (31)$$

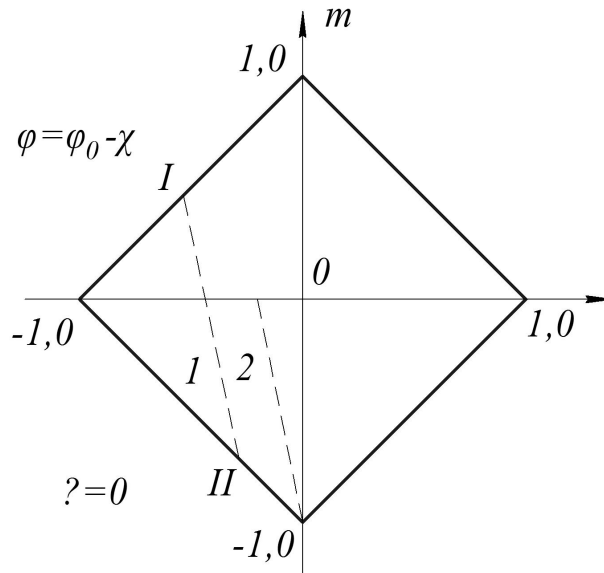


Рис. 13

Используем статический метод. Выражения (29) являются уравнением прямой линии в параметрической форме в плоскости n, m , наклонной к оси n под углом, равным $\arctg(1/2k)$, и изображенной на рис. 13 штриховыми линиями. Для превращения арки в пластический механизм необходимо образование трех пластических сечений (шарниров); пусть одно образуется в замке (вершине) арки, два других – в симметрично расположенных сечениях при значениях углов $(\varphi_0 - \chi)$ (рис. 14).

где произвольные постоянные определены из условия $\dot{\omega} = 0, \dot{\nu} = 0$ при $\varphi = \varphi_0$; $\dot{\theta}_0$ – скорость угла поворота опорного сечения. На участке $0 \leq \varphi \leq \varphi_0 - \chi$ аналогично можно получить

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{II} &= -\dot{\theta}_0 R \sin(\varphi_0 - \varphi) - \dot{\theta}_2 R \sin(\varphi_0 - \chi - \varphi) + \dot{\Delta}_2 \sin(\varphi_0 - \chi - \varphi); \\ \dot{\nu}_{II} &= -\theta_0 R [1 - \cos(\varphi_0 - \varphi)] - \dot{\theta}_2 R [1 - \cos(\varphi_0 - \chi - \varphi)] - \dot{\Delta}_2 \cos(\varphi_0 - \chi - \varphi) - \dot{\Delta}_2/2, \end{aligned}$$

где учтено условие непрерывности прогиба при $\varphi = \varphi_0 - \chi$; $\dot{\Delta}_1 = [\dot{\nu}]_{\varphi=\varphi_0}$, $\dot{\Delta}_2 = [\dot{\nu}]_{\varphi=\varphi_0-\chi}$ – скорости сосредоточенных осевых удлинений в пластических сечениях; $\dot{\theta}$ – скорость угла поворота в сечении $\varphi = \varphi_0 - \chi$. Определяя мощность нагрузки и внедрения сил, приравнявая их, можно определить значение предельной нагрузки p . Используя значения χ согласно (33), значение определенной таким образом величины p совпадает со значением, полученным выше статическим методом (30); следовательно оно является точным.

Однако это решение не удовлетворяется для всех значений φ_0 : в области относительно малых значений φ_0 реализуется схема деформирования с одним пластическим сечением по середине арки. Если вектор скорости пластической деформации в этом единственном пластическом сечении соответствует вершине A (рис. 13), то из уравнений (35) при граничных условиях $\dot{\omega} = 0, \dot{\nu} = 0$ при $\varphi = \varphi_0$ следует $\dot{\omega} = -c_2(ctg\varphi_0 \sin\varphi - \cos\varphi)$, $\dot{\nu} = c_2(\cos ec\varphi_0 - ctg\varphi_0 \cos\varphi - \sin\varphi)$, где c_2 – произвольная постоянная.

При $\varphi = 0$

$$\dot{\Delta}_1 = [\dot{\nu}] = 2c_2(1 - \cos\varphi_0) \cos ec\varphi_0; R\theta_1 = 2c_2 \cos ec\varphi_0. \quad (36)$$

Определяя и приравнявая мощности внешних и внутренних сил, получим

$$p = \cos ec\varphi_0. \quad (37)$$

Согласно ассоциированному закону течения в вершине A (рис. 13)

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\Delta}_1} \geq \frac{1}{2\chi R}. \quad (38)$$

Определяя отношение $\dot{\theta}_1/\dot{\Delta}_1$ согласно (36), в соответствии с соотношением (38) получим ограничение значений φ_0 , для которых справедлива формула (37): $\varphi_0 < \arccos(l - 2k)$. Статический метод также приводит к значению (37), если в качестве допустимых величин n и m принять $n = -2 \sin\varphi, m = -p(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)$, что соответствует прямой 2 на рис. 13. На рис. 15 изображен график значений несущей способности двухшарнирной арки при $\kappa = 0,01$.

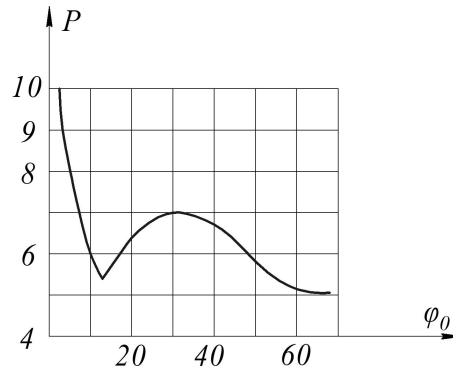


Рис. 15

Аналогичным образом определяется несущая способность однослойных арок; подобное решение можно получить и для других видов нагрузок.

3. НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ПЛАСТИНОК И ОБОЛОЧЕК

Для пластинок и оболочек имеют место допущения Кирхгофа – Лява. В общем случае точное решение задач о несущей способности пластинок и оболочек можно получить в редких случаях; основные способы решения основаны на определении нижней (статическим методом) и верхней (кинематическим методом) границ предельной нагрузки, при этом истинное значение предельной нагрузки находится между ними. Применение численных методов (с помощью ЭВМ) позволяет решать задачу встречающейся на практике сложности. Рассмотрим ряд решений задач о несущей способности пластинок и оболочек.

Пластинка. Точное решение получено для круглых осесимметрично нагруженных пластинок. Пусть круглая пластинка нагружена равномерно распределенным давлением p в пределах площади круга $0 \leq r \leq a$ (рис. 16), где $a \leq R$, r – текущая координата радиуса. Кольцевое направление полярных координат обозначим φ , толщину пластинки – $2h$. Поскольку материал пластинки жесткопластический, она остается недеформированной вплоть до достижения нагрузкой, предельного значения. В сечениях $r = const$ действуют изгибающие моменты M_r , в сечениях $\varphi = const$ – M_φ (в силу симметрии крутящие моменты $M_{r\varphi}$ равны нулю). Поперечная сила Q действует в сечениях $r = const$. Дифференциальные уравнения равновесия круглой пластинки имеет вид

$$\frac{d}{dr}(rQ) + pr = 0, \quad \frac{d}{dr}(rM_r) - M_\varphi - rQ = 0 \quad (39)$$

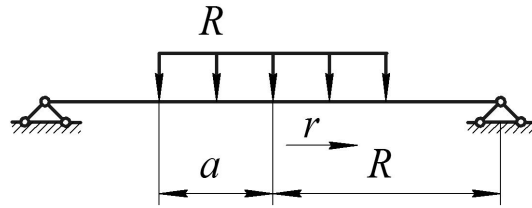


Рис. 16

Поперечная сила $Q = 0$ при $r = 0$ (если не имеется в виду сосредоточенная сила), поскольку M_2 имеется при $r = 0$. Так как $p = const$, то $rQ = \int_0^r rp \, dr = -\frac{pr^2}{2}$. Второе уравнение (39) при этом приобретает вид

$$\frac{d}{dr}(rM_r) - M_\varphi = -\frac{pr^2}{2}. \quad (40)$$

Скорости изменения кривизны срединной поверхности пластинки в радиальном и кольцевом направлениях определяются формулами

$$\dot{\kappa}_r = -\frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial r^2}; \quad \dot{\kappa}_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r},$$

где $\dot{\omega}$ – скорость прогиба пластинки.

Условие текучести для круглой пластинки согласно (8), если его умножить на $M_T = \sigma_T h^2$, имеет вид

$$M_r^2 - M_r M_\varphi + M_\varphi^2 = M_T. \quad (41)$$

Поскольку $M_{r\varphi} = 0$, условие текучести (41) в осях M_r, M_φ является эллипсом и в обозначениях M_r, M_φ повторяет выражение (6) в обозначениях σ_1, σ_2 . Если соотношения (11) умножить на h^2 , то получим условие текучести для круглой пластинки в моментах M_r, M_φ (индексы 1 и 2 в 11) следует поменять на r и φ на основе условия пластичности

Треска – Сен – Венана: $|M_r - M_\varphi| \leq U_T$, $|M_T| \leq M_T$, $|M_\varphi| \leq M_T$, изображаемое в плоскости M_r, M_φ в виде шестиугольника (рис. 17). Ассоциированный закон пластического течения в данном случае означает, что вектор пластической деформации (с компонентами $\dot{\epsilon}_r$, $\dot{\epsilon}_\varphi$) нормален к сторонам шестиугольника и обозначен на рис. 17 стрелками.

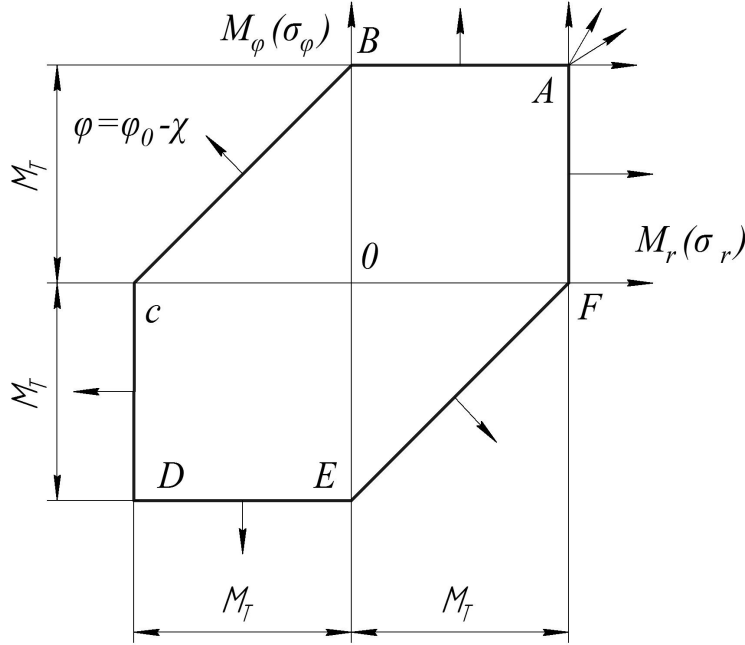


Рис. 17

Скорость прогиба \dot{w} должна быть непрерывна, т. е. $[\dot{w}] = 0$, скорости изменения кривизны могут быть равны, т. е. $[\frac{d\dot{w}}{dr}] \neq 0$, $[\frac{d^2\dot{w}}{dr^2}] \neq 0$. Условие $[\frac{d\dot{w}}{dr}] = 0$ удовлетворяется при $|u_r| = M_T$ (например на линии АГ, рис. 17). В силу условий равновесия невозможен скачок в значениях M_r , т. е. $[M_r] = 0$; скачок M_φ возможен, т. е. $[M_\varphi] \neq 0$. Здесь квадратные скобки означают скачок заключенной в них величины.

В центре пластинки $M_r = M_\varphi$ (при $r = 0$), причем согласно правилу знаков моменты M_r и M_φ . Этому соответствуют режимы А, АВ, АF (рис. 17). Режимы А и АF неудовлетворительны, так как если соответствующие им значения M_r и M_φ подставить в уравнение (40) то уравнения равновесия и граничные условия не удовлетворяются.

Если считать пластинку шарнирно опертой (граничные условия $M_r = 0$, $w = 0$, при $r = R$, то подходящим режимом является режим АВ (рис. 17), согласно которому $M_\varphi = M_T$, $0 < M_r < M_T$. Поскольку $p = const$ при $0 \leq r \leq a$ и $p = 0$ при $a \leq r \leq R$, с учетом $M_\varphi = M_T$ из уравнения (40) получим ($rQ = -pa^2/r$ при $r \geq a$):

$$M_r = M_T - \frac{pr^2}{6} + \frac{c_1}{r}, (0 \leq r \leq a), \quad (42)$$

$$M_r = M_T - \frac{pa^2}{6} + \frac{c_2}{r}, (a \leq r \leq R),$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные. Из условия M_r при $r = 0$ ($M_r \neq \infty$) следует $c_1 = 0$; из условия непрерывности M_r при $r = a$ следует $c_2 = pa^3/3$. Тогда из (42) можно получить

$$M_r = M_T - \frac{pr^2}{3}, (0 \leq r \leq a), \quad (43)$$

$$M_r = M_T - \frac{pa^2}{2} + \frac{pa^3}{3}, (a \leq r \leq R).$$

Поскольку $M_r = 0$ при $r = R$, из второго выражения (43) следует

$$p = \frac{6M_T R}{a^2(3R - 2a)}. \quad (44)$$

Полная нагрузка на пластинку равна $P = p\pi a^2$; учитывая выражение (44), значение

$$P = \frac{6\pi M_T}{3 - 2\left(\frac{a}{R}\right)}. \quad (45)$$

Для полостью нагруженной пластинки $a = R$ и из (44) и (45) следует $p = \frac{6M_T}{R^2}$; $P = 6\pi M_T$. При сосредоточенной нагрузке в центре пластинки $a = 0$ и из (44) следует $p \rightarrow \infty$, но из (45) получим конечные значения

$$P = 2\pi M_T. \quad (46)$$

Поскольку для режима АВ (рис. 17) $\dot{\epsilon}_r = 0$, имеем уравнение $\frac{d^2\dot{\omega}}{dr^2} = 0$, интегрируя которое и определяя постоянные из условий $\dot{\omega}$ при $r = R$ и $\dot{\omega} = \dot{\omega}_0$ при $r = 0$, можно получить распределение скоростей прогиба пластинки

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}_0(1 - r/R),$$

согласно которому скорости $\dot{\omega}$ пластинки изображаются в виде конуса с вершиной, равной $\dot{\omega} = \dot{\omega}_0$, где $\dot{\omega}$ – скорость прогиба в центре пластинки, являющаяся по своему значению неопределенной (рис. 18).



Рис. 18

Если рассматривать защемленную на краю круглую пластинку (граничные условия $\dot{\omega}$, $M_r < 0$ при $r = R$), то в окрестности ее центра также реализуются режим АВ (рис. 17). С возрастанием r согласно режиму АВ M_r убывает, становится равным нулю при $r = \rho$. С дальнейшим возрастанием r , т. е. при $r > \rho$, следует ожидать, что будет реализовываться режим ВС, согласно которому $M_r < 0$. Режим ВС заканчивается в точке C ; поэтому при $r = R$ значение M_r может стать равным $M_r = M_T$ (режим СД неприемлем).

При нагрузке $p = const$, расположенной в пределах площади круга $0 \leq r \leq a$, следует рассмотреть два случая: $\rho < a$ и $\rho > a$.

Рассмотрим случай $\rho < a$. При $r \leq \rho$ справедливо выражение (43) поскольку в зоне $0 \leq r \leq \rho$ имеет место режим АВ (рис. 17) и $p = const$, откуда следует $\rho^2 = 6M_T/p$ или

$$p = 6M_T/\rho^2. \quad (47)$$

Определив значение ρ , по уравнению (47) можно найти предельное давление p .

При $r > \rho$ имеет место режим ВС, согласно которому $M_\varphi - M_r = M_T$, или $M_\varphi = M_T + M_r$. Подставив M_φ в уравнение (40), получим

$$M_r = M_T \cdot \ln \frac{r}{\rho} - \frac{1}{4}p(r^2 - \rho^2), (\rho \leq r \leq a), \quad (48)$$

$$M_r = M_T \cdot \ln \frac{r}{\rho} - \frac{1}{2}pa^2 \ln \frac{r}{a} - \frac{1}{4}p(a^2 - \rho^2), (a \leq r \leq R),$$

где произвольные постоянные, возникающие при интегрировании (40), определяются с помощью условий непрерывности M_r при $r = \rho$, а также M_r и Q при $r = a$.

Поскольку $M_r = -M_T$ при $r = R$, учитывая (47), из второго выражения (48) получим

$$1 + \ln \frac{R}{\rho} = 3 \frac{a^2}{\rho^2} \ln \frac{R}{a} + \frac{3}{2} \left(\frac{a^2}{\rho^2} - 1 \right). \quad (49)$$

При известных a и R можно определить ρ . Так как $\rho = a$ при $a \cong 0,606R$, то $\rho < a$ при $a > 0,606R$.

Рассмотрим случай $\rho > a$. В этом случае при $0 \leq r \leq a$ имеет место первое выражение (42), при $a \leq r \leq \rho$ – второе выражение (42).

Поскольку $M_r = 0$ при $r = \rho$, то

$$\rho = \frac{6M_T \rho}{a^2 (3\rho - 2a)}. \quad (50)$$

В зоне $\rho \leq r \leq R$ находим ($M_\varphi = M_T + M_r$) из (40) при $p = 0$:

$$M_r = \left(M_T - \frac{pa^2}{2} \right) \ln \frac{r}{\rho}. \quad (51)$$

Условие $M_r = -M_T$ при $r = R$ и выражение (51) приводят к уравнению

$$1 - \frac{2a}{3\rho} \left(1 + \ln \frac{R}{\rho} \right) = 0, \quad (52)$$

справедливому при $a < 0,606R$. После определения ρ по (49) и (52) значение предельного давления p определяется соответственно по (47) и (50).

Скорости прогибов в центральной зоне $0 \leq r \leq \rho$ определяются из условия $\frac{d^2 \dot{\omega}}{dr^2} = 0$ (согласно режиму АВ; рис. 17); в зоне $\rho \leq r \leq R$ согласно закону течения для режима ВС (рис. 17) $\dot{\omega}_r : \dot{\omega}_\varphi = -1 : 1$ или $\dot{\omega}_r + \dot{\omega}_\varphi = 0$, откуда следует дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \dot{\omega}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\omega}}{dr} = 0.$$

Решая дифференциальные уравнения для скоростей прогибов в зонах $0 \leq r \leq \rho$ и $0 \leq r \leq R$, а также учитывая непрерывность $\dot{\omega} d\dot{\omega}/dr$ при $r = \rho$, значение $\dot{\omega} = \dot{\omega}_0$ при $r = 0$ и $\dot{\omega} = 0$ при $r = R$, можно получить

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \dot{\omega}_0 \left(1 - \left(\frac{r}{\rho} \right) / \left(1 + \ln \frac{R}{\rho} \right) \right), (0 \leq r \leq \rho); \\ \dot{\omega} &= \dot{\omega}_0 \left(\ln \frac{R}{r} / \left(1 + \ln \frac{R}{\rho} \right) \right), (\rho \leq r \leq R). \end{aligned} \quad (53)$$

Согласно (53) в зоне $0 \leq r \leq \rho$ скорости $\dot{\omega}$ изображаются в виде конуса с вершиной $\dot{\omega} = \dot{\omega}_0$, а в зоне $\rho \leq r \leq R$ – логарифмической кривой (53). Следует отметить, что при $r = R$, $d\dot{\omega}/dr \neq 0$, т. е. в месте защемления пластинки имеется перелом скорости прогиба.

Для полностью нагруженной защемленной пластинки из (49) следует уравнение $5 + \ln(R^2/\rho^2) = 3R^2/\rho^2$, откуда $\rho \cong 0,3R$. При этом из (47) получим $\rho \cong 11,26M_T/R^2$, что превосходит соответствующее значение для шарнирно опертой пластинки $p \cong 6M_T/R^2$ на 88%.

Считая $\rho = \pi r a^2$, из (50) можно получить

$$\rho = 3Pa / (3p - 6\pi M_T). \quad (54)$$

Из (52) следует

$$\rho = R \exp \{ 2\pi M_T / (2\pi M_T - P) \}. \quad (55)$$

Из (54) и (55) при $a \rightarrow 0$ следует $\rho \rightarrow 0$ и

$$p \rightarrow 2\pi M_T. \quad (56)$$

Значение сосредоточенной предельной нагрузки (56) совпадает с (46), отсюда следует, что несущая способность круглой пластинки при действии сосредоточенной в центре нагрузки не зависит от граничных условий.

Аналогично можно получить решение для круглых пластинок при произвольном осесимметричном нагружении. Однако для пластинок других форм точное решение получить затруднительно; в этих случаях целесообразно применение численных методов с помощью ЭМВ. При определении нижней границы несущей способности удобно использовать условия текучести (8), поскольку в общем случае ориентация главных напряжений неизвестна. При определении верхней границы несущей способности необходимо назначить некоторые схемы разрушения, для которых выбирают наименьшую предельную нагрузку. Хотя определение предельной нагрузки на пластинку кинематическим методом проще, чем статическим, результаты получаются менее приемлемыми; значение верхней границы неопределенным образом отклоняется от истинного значения предельной нагрузки в неблагоприятную сторону с инженерной точки зрения (не "в запас прочности"). Если рассмотреть в плане пластинку, то схему разрушения можно назначить в виде пирамиды с вершиной O_1 (рис. 19); по ребрам l_i образуются шарниры текучести при значении момента $M = M_T$, области между ребрами остаются жесткими. Нагрузка может быть как сосредоточенной, так и распределенной по площади пластинки. Пусть сосредоточенная сила приложена в точке O . Если $\dot{\gamma}_i$ – скорость угла перелома вдоль i -го ребра, то скорость работы моментов M_T по i ребру равна $M_T \dot{\gamma}_i l_i$, где l_i – длина ребра; суммируя по всем ребрам, скорость работы моментов в пластинке равна $\sum M_T \dot{\gamma}_i l_i$. Скорость работы сосредоточенной силы P равна $P \dot{w}_0$, где \dot{w}_0 – скорость прогиба точки O . Значение предельной нагрузки согласно кинематическому методу равно

$$P^* \dot{w}_0 = M_T \sum_i \dot{\gamma}_i l_i. \quad (57)$$

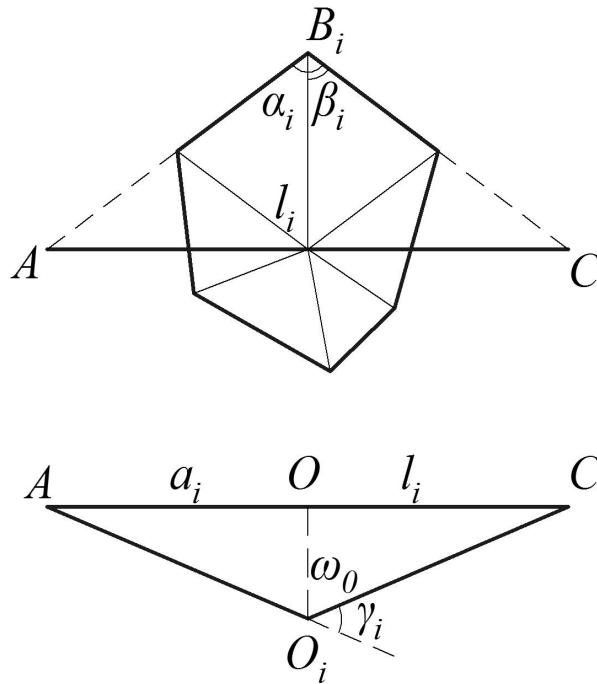


Рис. 19

Проведя плоскость, перпендикулярную ребру B_iO , через точку O (рис. 19), можно определить $\dot{\gamma}_i$:

$$\dot{\gamma}_i = \left(\frac{\dot{w}_0}{a_i} + \frac{w_0}{b_i} \right) = \dot{w}_0 (ctg\alpha_i + ctg\beta_i)/l_i, \quad (58)$$

где $\alpha_i, \beta_i,$ – углы между i -м ребром и соседними сторонами пластинки (рис. 19); $a_i = l_i \operatorname{tg} \alpha_i, b_i = l_i \operatorname{tg} \beta_i.$ Подставляя (58) в (57), получим

$$P^* = M_T \sum_i (ctg \alpha_i + ctg \beta_i). \quad (59)$$

Для пластинки в форме правильного n – угольника $\alpha_i = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2} (1 - \frac{2}{n}),$ $ctg \alpha_i = tg \frac{\pi}{n},$ откуда

$$P^* = 2n M_T tg \frac{\pi}{n}.$$

Для шарнирно опертой пластинки при $n \rightarrow \infty$ получим формулу (46).

Оболочки. Оболочки относятся к одним из наиболее сложных видов пространственных систем. При решении задач об их несущей способности сталкиваются с определенными трудностями. Получены приемлемые решения задач, например, об осесимметрично нагруженных оболочках вращения; однако в общем случае необходимо привлекать численные методы.

В некоторых случаях напряженное состояние оболочек можно разделить на две части – часть, зависящую лишь от внутренних сил, и часть, зависящую от внутренних моментов (в одних случаях такое разделение осуществляется естественным путем, в других его следует рассматривать как некоторое приближение). Пропорция между безмоментными и чисто моментными компонентами напряженного состояния в пределах удовлетворения условия пластичности согласно теореме о нижней несущей способности должна определяться из условия максимума предельного значения нагрузки. Однако нельзя утверждать, что такие решения всегда целесообразны и достаточно эффективны.

Здесь уместно заметить, что безмоментное решение задач о равновесии оболочек в теории идеальной пластичности получает новое качество по сравнению с известным из теории упругих оболочек: оно соответствует нижней границе несущей способности оболочек (при удовлетворении соответствующих граничных условий).

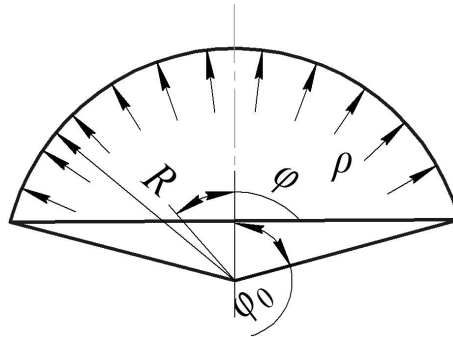


Рис. 20

Рассмотрим задачу о несущей способности сферической оболочки, находящейся под действием внутреннего давления p (рис. 20). Уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{d}{d\varphi} (N_1 \sin \varphi) - N_2 \cos \varphi + Q \sin \varphi = 0;$$

$$\frac{d}{d\varphi} (M_1 \sin \varphi) + M_2 \cos \varphi + QR \sin \varphi = 0; \quad (60)$$

$$\frac{d}{d\varphi} (Q \sin \varphi) - N_1 \sin \varphi - N_2 \sin \varphi - \rho \sin \varphi = 0,$$

где N, M – внутренние силы и изгибающие моменты; 1 и 2 – меридиональное и окружное направления; φ – угол между нормалью к поверхности в данной точке и осью вращения сферы;

Q – поперечная сила в сечениях нормальных меридианов; R – радиус срединной поверхности оболочки.

В выражении поверхности текучести (10) можно ввести обозначения $n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 = n$, $m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 = m$, причем каждое из этих выражений является уравнением эллипса соответственно в осях n_1, n_2 и m_1, m_2 (рис. 21). Заменяя эллипсы в осях n_1, n_2 и m_1, m_2 описанными шестиугольниками, получим относительно более простое выражение текучести $n^2 + 3n_1^2 + m^2 + 3m_1^2 \leq k^2$, $0.75 \leq k^2 \leq 1.09$;

$$|n_1| \leq n; \quad |n_2| \leq n; \quad |n_1 - n_2| \leq n;$$

$$|m_1| \leq m; \quad |m_2| \leq m; \quad |m_1 - m_2| \leq m; \quad (61)$$

где $n = N/N_T$, $m = M/M_T$.

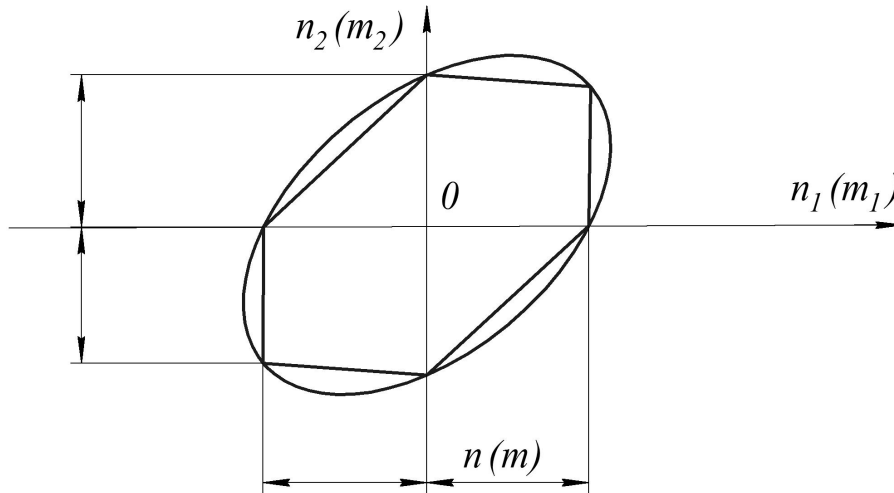


Рис. 21

Поверхность текучести (61) при расчете сферической оболочки можно упростить; если взять две плоскости

$$m_2 = m, \quad m = 0.612, \quad n_1 = -n, \quad n = 0.612, \quad (62)$$

то точки, принадлежащие им и их пересечению (ребру), находятся внутри поверхности (61). Будем использовать значения m_2 и n_1 согласно (62).

Из (60) с учетом (62) следует

$$n_2 = \frac{pR}{4\sigma_T h} \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \frac{n}{\cos^2 \varphi}; \quad m_1 = m + \frac{R}{h} \left\{ \left(\frac{pR}{2\sigma_T h} + 2n \right) \left[1 - \frac{\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\sin \varphi} \right] \right\}. \quad (63)$$

Для шарнирно опертой оболочки $m_1 = 0$ при $\varphi = \varphi_0$; учитывая это, из (63) получим

$$\frac{p^0}{\sigma_T} = \frac{2R^2}{R^2 \theta(\varphi_0)} - \left\{ m + \frac{2Rn}{h} \theta(\varphi_0) \right\}; \quad \theta(\varphi_0) = \frac{\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \varphi_0} - 1; \quad m = n = 0.612. \quad (64)$$

Если p^0/σ_T по (64) менее $4h/R$, т. е. несущей способности безмоментной сферической оболочки, то следует считать

$$p^0/\sigma_T = 4h/R, \quad n_1 = n_2 = -1, \quad m_2 = 0. \quad (65)$$

Формулы (64) и (65) дают значение нижней границы несущей способности.

Верхнюю границу несущей способности p^* можно получить, считая значения m и n предельными ($n_1 = -1$, $m_2 = 1$), что соответствует использованию "описанной" относительно точной поверхности текучести:

$$|m_1| \leq 1; |m_2| \leq 1; |m_1 - m_2| \leq 1,$$

$$|n_1| \leq 1; |n_2| \leq 1; |n_1 - n_2| \leq 1. \quad (66)$$

В этом случае

$$\frac{p^*}{\sigma_T} = \frac{2h^2}{R^2\theta(\varphi_0)} + \frac{4h}{R}; n_1 = -1, m_2 = 1, \quad (67)$$

однако при этом необходимо показать, что ребру ($n_1 = -1$, $m_2 = 1$) поверхности текучести (66) соответствуют некоторые допустимые скорости перемещений и деформаций. Для ребра ($n_1 = -1$, $m_2 = 1$) в соответствии с ассоциированным законом течения $\varepsilon_2 = 0$, $|\dot{\varepsilon}| \geq 0$, $\dot{\varepsilon}_1 = 0$, $\dot{\varepsilon}_2 = 0$. Формулы, связывающие скорости деформации $\dot{\varepsilon}$, скорости изменения кривизны $\dot{\kappa}$ и скорости перемещений срединной поверхности оболочки имеют вид:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{R} \left(\frac{d\dot{u}}{d\varphi} - \dot{\omega} \right), \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{R} (\dot{u} \operatorname{ctg} \varphi - \dot{\omega});$$

$$\dot{\kappa}_1 = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{d\dot{u}}{d\varphi} + \frac{d\dot{\omega}}{d\varphi^2} \right), \quad \dot{\kappa}_2 = -\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{R^2} \left(\dot{u} + \frac{d\dot{\omega}}{d\varphi} \right);$$

где $\dot{\omega}$, \dot{u} – скорости прогиба и перемещения вдоль меридиана.

Приравняв нулю $\dot{\varepsilon}_2$ и $\dot{\kappa}_1$ и решая полученные дифференциальные уравнения относительно $\dot{\omega}$ и \dot{u} , получим допустимые скорости $\dot{\omega}^*$ и \dot{u}^* : $\dot{\omega}^* = \dot{\omega}_0^* \cos [1 - \psi(\varphi)/\psi(\varphi_0)]$;

$$\dot{u}^* = \dot{\omega}^* \operatorname{tg} \varphi, \quad \psi(\varphi) = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right). \quad (68)$$

Граничные условия для $\dot{\omega}^*$ и \dot{u}^* удовлетворяются: $\dot{\omega}^* = \dot{\omega}_0^*$ при $\varphi = 0$ и $\dot{\omega}^* = 0$ при $\varphi = \varphi_0$; $\dot{u}^* = 0$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$ при $\varphi = 0$ – перелом деформированной оболочки.

Следовательно, выражения (64) и (65) определяют нижнюю границу предельной нагрузки p^0 на шарнирно опертую сферическую оболочку, а выражение (67) – верхнюю границу p^* . На рис. 22 дан график зависимости предельной нагрузки от φ_0 при различных R/h ; штриховая линия соответствует (64) и (65), сплошная – (67). Диапазон возможных значений предельной нагрузки можно уменьшить.

Для защемленной на краю сферической оболочки напряженное состояние, соответствующее граням поверхности текучести (61) $n_1 = -n$, $m_2 = m_1$, будет в центральной зоне $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$, в зоне $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_0$ напряженное состояние $n_1 = -n$, $m_2 = m_1 : m$. При $\varphi = \varphi_1$, обе зоны сопрягаются и $m_1 = 0$. В зоне $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ напряженное состояние описывается теми же формулами, что и в случае шарнирно опертой оболочки, при замене φ_0 на φ_1 ; имеют место формулы (64), (65) и (67) при замене в них φ_0 на φ_1 .

Поскольку в зоне $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_0$ соблюдается условие $m_2 = m_1 : m$, из (60) с учетом условия $m_1 = 0$ при $\varphi = \varphi_1$ следует

$$m_1 = (m/\theta(\varphi_1)) \ln(\cos \varphi / \cos \varphi_1) + m \ln(\sin \varphi / \sin \varphi_1).$$

Считая $m_1 = -m$ при $\varphi = \varphi_0$, получим уравнение, из которого можно определить φ_1 в зависимости от φ_0 :

$$\ln(\cos \varphi_0 / \cos \varphi) + \theta(\varphi_1) \ln(\sin \varphi_0 / \sin \varphi_1) + \theta(\varphi_1) = 0.$$

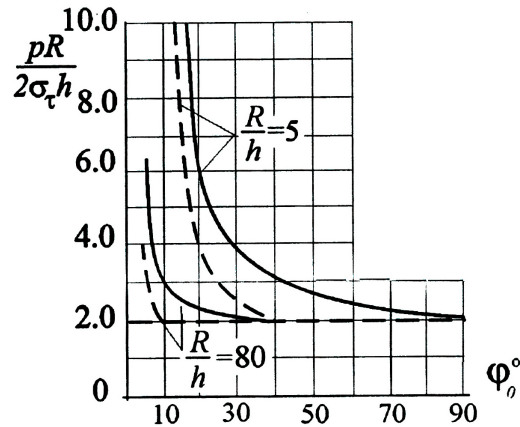


Рис. 22

Следует показать, что ребрам поверхности текучести ($n_1 = -1; m_2 = 1$) и ($n_1 = -1; m_2 - m_1 = 1$) соответствует некоторое допустимое распределение скоростей перемещений. В зоне $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ скорости \dot{w}, \dot{u} выражаются формулами, подобными формулам для шарнирно опертой оболочки при других условиях определения произвольных постоянных. В зоне $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_0$ закон течения $\dot{\epsilon}_2 : \dot{\epsilon}_1 = 1 : (-1), |\dot{\epsilon}_1| \geq 0, \dot{\epsilon}_2 = 0$, откуда можно \dot{w}^* и \dot{u}^* . Окончательно получим в зоне $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$:

$$\dot{w}^* = \dot{w}_0 \cos \varphi [1 + \psi(\varphi)/\Gamma(\varphi_1)]; \dot{u}^* = \dot{w}^* \operatorname{tg} \varphi; \Gamma(\varphi_1) = \sin \varphi_1 \cdot \ln(\operatorname{tg} \varphi_1 / \operatorname{tg} \varphi_0) - \psi(\varphi_1),$$

в зоне $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_0$:

$$\dot{w}^* = \dot{w}_0 \cdot \sin \varphi_1 \cos \varphi \cdot \ln(\operatorname{tg} \varphi / \operatorname{tg} \varphi_0) / \Gamma(\varphi_1); \dot{u}^* = \dot{w}^* \operatorname{tg} \varphi.$$

Эти выражения удовлетворяют граничным условиям: $\dot{w}^* = 0$ и $\dot{u}^* = 0$ при $\varphi = \varphi_0$; $\dot{w}^* = \dot{w}_0^*$ при $\varphi = 0$; $d\dot{w}^*/d\varphi \neq 0$ при $\varphi = \varphi_0$.

Приемлемые решения задач о несущей способности получены также для других видов оболочек вращения (пологих, цилиндрических и т. п.). Однако в большинстве случаев необходимо прибегать к численному решению уравнений пластических оболочек.

4. НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ

К задачам о несущей способности трехмерных тел приводит, например, воздействие жестких штампов на идеально пластическое полупространство. Известно (см., например, [4]), что в случае плоской деформации (рис. 23) предельная нагрузка $P = 2a\tau_T(2 + \pi)$, причем размер штампа в направлении, перпендикулярном чертежу, бесконечен, τ_T – предел текучести материала полупространства на сдвиг. Движение пластических зон указано на рис. 23 стрелками.

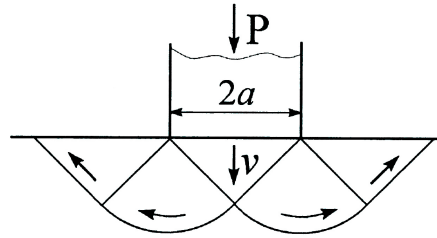


Рис. 23

Это решение получено интегрированием уравнений равновесия на основе теории линий скольжения. Однако при отсутствии плоской деформации (например, при действии жесткого штампа ограниченной площади контактов с полупространством), т. е. для трехмерных тел, теория линий скольжения развита недостаточно. В связи с этим определение несущей способности трехмерных тел целесообразно осуществлять статическим и кинематическим методами теории предельного сопротивления. Рассмотрим задачу о действии жесткого штампа на часть полупространства (четверть пространства – рис. 24), часто встречающегося в конструктивных и технологических приложениях.

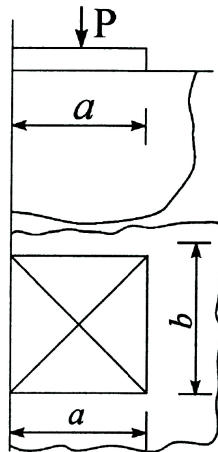


Рис. 24

Нижняя граница несущей способности. При конечном соотношении a/b получим пространственное состояние, при $b \rightarrow \infty$ – случай плоской деформации. Для случая плоской деформации напряженное состояние под штамп в области 2 можно представить как сумму напряженных состояний двух полос 1 (рис. 25), в каждой из которых осуществляется простое сжатие при напряжении $\sigma_T = 2\tau_T$. Напряженное состояние в область 1 определяется согласно кругу Мора 1 (рис. 26):

$$\sigma_\alpha = 2\tau_T \cos^2 \alpha, \quad \sigma_{90^\circ + \alpha} = 2\tau_T \sin^2 \alpha, \quad \tau = \tau_T \sin 2\alpha,$$

где α – угол между направлением полос 1 и нормальным напряжением σ_α .

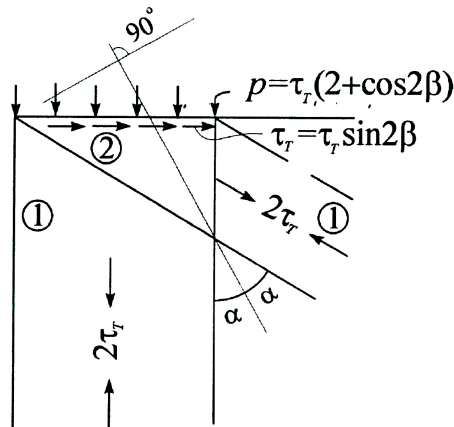


Рис. 25

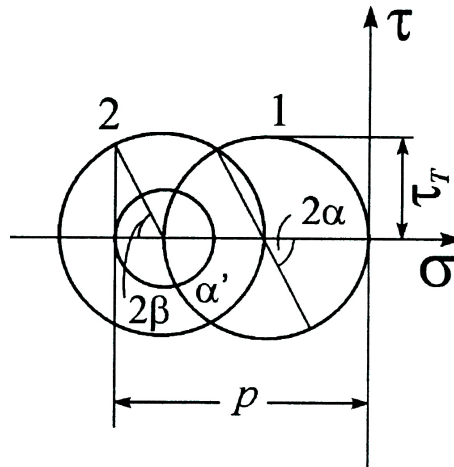


Рис. 26

Напряженное состояние в области 2 (рис. 25) можно определить согласно кругу Мора 2 (рис. 26). Так как между двумя полосами 1 (рис. 25) угол равен 2α , максимальное и минимальное главные напряжения в области 2 равны

$$\sigma_{\max} = 4\tau_T \cos^2 \alpha, \quad \sigma_{\min} = 4\tau_T \sin^2 \alpha, \quad (69)$$

причем главные напряжения совпадают с биссектрисой угла 2α (рис. 25) и нормалью к ней.

Поскольку согласно условию пластичности Треска Сен-Венана $\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 2\tau_T$, можно определить минимальное значение угла α в соответствии с выражением (69); $\alpha_{\min} = 30^\circ$. При значениях $\alpha > \alpha_{\min}$ под штампом будет жесткая зона.

Нормальные напряжения под штампом равны нормальной составляющей нагрузки p . Значение p и касательные напряжения под штампом, соответствующие углу β на диаграмме Мора (рис. 26), равны

$$p = \tau_T (2 + \cos 2\beta), \quad \tau = \tau_T \sin 2\beta, \quad (70)$$

где β – угол между нормалью к биссектрисе угла 2α и плоскостью контакта штампа с частью полупространства (рис. 25). Плоскость контакта может составлять с вертикальной гранью части полупространства угол, больший 30° . Если плоскость контакта перпендикулярна биссектрисе угла 2α (рис. 25), то согласно выражениям (70) $p = 3\tau_T$, $\tau = 0$ максимальное значение β для четверти пространства равно 30° .

В направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, главное нормальное напряжение можно положить равным $2\tau_T$.

Рассмотрим напряженное состояние под штампом в условиях пространственной задачи (при конечном размере b на рис. 24). Напряженное состояние в плоскости чертежа можно оставить прежним (рис. 25). В плоскости, перпендикулярной чертежу, следует привлечь напряжения, удовлетворяющие условию пластичности и граничным условиям под штампом в напряжениях. Если считать, что касательные напряжения перпендикулярно чертежу на рис. 25 отсутствуют, то напряженное состояние в области 2' (рис. 27) можно представить как сумму напряженных состояний в двух наклонных полосах 1 простого сжатия величиной $2\tau_T$; угол между этими полосами равен $2\alpha'$ (рис. 27). Напряженное состояние в области 2' можно определить согласно кругу Мора 2' (рис. 26), заключенного внутри круга 2 и концентрического с ним; при этом $\alpha' = 0,5 \arccos \left[\frac{(\cos 2\beta)}{2} \right], \alpha' \geq 30^\circ$.

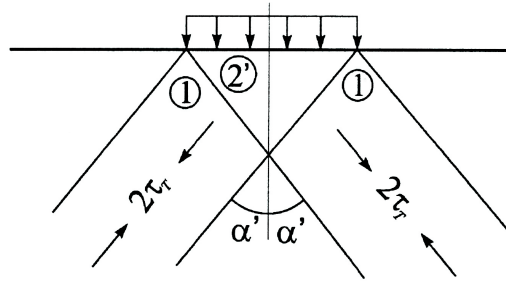


Рис. 27

В направлении размера b в зоне 2' (см. рис. 27) материал под штампом "жесткий".

Верхняя граница несущей способности. В расчетах соответствующих технологических процессов (например, процесс резания материала) из двух границ решения – нижней и верхней – предпочтение имеет верхняя, так как она дает усилие (например, резания) "с запасом".

Рассмотрим распределение скоростей перемещений согласно рис. 28; стрелками обозначены направления движения зон скольжения материала, штамп движется вертикально вниз.

Имеет место скачок $\Delta \dot{\nu}$ в тангенциальной составляющей скорости перемещения на поверхности скольжения. Мощность диссипации внутренней энергии отсюда определяется как интеграл $\dot{D} = \int_S \tau_T \Delta \dot{\nu} dS$, где S – поверхность разрыва компоненты $\dot{\nu}$, находящейся в касательной плоскости к поверхности разрыва. Подсчитывая мощность давления штампа как произведение значения давления P_1^* на скорость вертикального перемещения и приравнивая ее мощности внутренней энергии, получим выражение верхней границы предельной нагрузки:

$$\begin{aligned}
 P_1^* = P_1^* ab = \tau_T \frac{a-d}{\cos \alpha_1} & \left\{ \frac{b-2c}{\sin \alpha_1} + \left[(a-d)^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha_1 + C^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \tau_T d (b-2c) [2(\alpha_2 + \alpha_3) + \operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \alpha_3] + \right. \\
 & + \tau_T cd \left[\alpha_2 + \alpha_3 + \left(1 + \frac{d^2}{c^2} \sin^2 \alpha_2 \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_2 + \alpha_3 + \operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \alpha_3) \right] + \\
 & + \tau_T cd \left[\beta_1 + \beta_2 + \left(1 + \frac{c^2}{d^2} \sin^2 \beta_1 \right)^{\frac{1}{2}} (\beta_1 + \beta_2 + \operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2) \right] + \\
 & \left. + \tau_T c (a-d) \times \left[\beta_1 + \beta_2 + \left(1 + \frac{c^2}{(a-d)^2} \sin^2 \beta_1 \right)^{\frac{1}{2}} (\beta_1 + \beta_2 + \operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2) \right] \right\}, \quad (71)
 \end{aligned}$$

где принято, что на поверхности контакта штампа с частью полупространства трение отсутствует. При учете трения предельная нагрузка равна

$$P^* = P_1^*/\chi(\mu); \chi(\mu) = 1 - \mu [acctg\beta_1 + (b - c) dctg\alpha_2 + (b - c)(a - d)tg\alpha_1], \quad (72)$$

где принято, что на поверхности контакта штампа с частью полупространства трение отсутствует. При учете трения предельная нагрузка равна

$$P^* = P_1^*/\chi(\mu); \chi(\mu) = 1 - \mu [acctg\beta_1 + (b - c) dctg\alpha_2 + (b - c)(a - d)tg\alpha_1], \quad (73)$$

где μ – коэффициент трения штампа по материалу $p_\mu/ab < \tau_T$. Если $p_\mu/ab \geq \tau_T$, то

$$P^* = P_1^* + \tau_T [acctg\beta_1 + (b - c) dctg\alpha_2 + (b - c)(a - d)tg\alpha_1]. \quad (74)$$

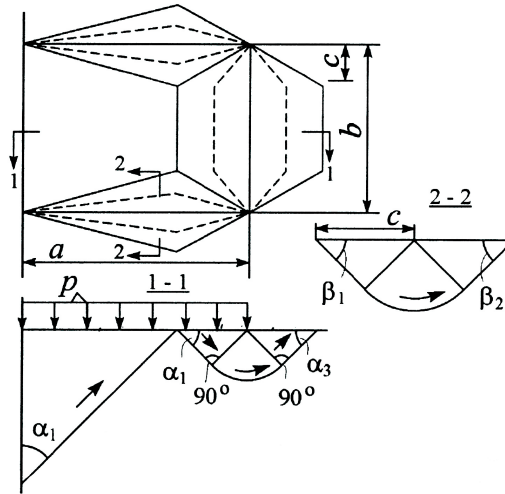


Рис. 28

Минимум P_1^* и P^* согласно (71), (72), (73) по параметрам, от которых зависит правая часть этих выражений, может быть определена лишь численно.

Для простоты рассмотрим частные случаи. При $c = d = 0$ значение α (рис. 28 – α_1), соответствующее минимуму P^* по (72), определяется из уравнения

$$\mu(a/b) \sin \alpha (1 + \cos^2 \alpha) - (a \cos^3 \alpha)/b - \cos 2\alpha + \mu \sin 2\alpha = 0. \quad (75)$$

Для квадратного штампа ($a = b$) при $\mu = 0,5$ из (74) $\alpha \cong 34^\circ 08'$, причем $P_\mu^*/a = 2,965\tau_T > \tau_T$, следовательно, следует принимать $P_\mu^* = a^2\tau_T$. Тогда значение α определяется из уравнения

$$(a \cos^3 \alpha)/b + \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = 0. \quad (76)$$

При $a = b$ из (75) следует $\alpha = 42^\circ 50'$, что дает $P^* = 4,4a^2\tau_T$. Если размер a пренебрежительно мал в сравнении с b , т. е. при $a \rightarrow 0$, получим $\alpha = 35^\circ 15'$, что дает $P^* = 2,8332\tau_T$ при $\tau^* = \tau_T$; это значение следует сравнивать со значением нижней границы (70) при $\beta = 30^\circ$: $P^0 = 2,52\tau_T$, $\tau^0 = 0,866\tau_T$.

Для гладкого штампа согласно (71) значение α определяется из уравнения $(a \cos^3 \alpha)/b + \cos 2\alpha = 0$, причем в случае квадратного штампа отсюда $\alpha \cong 52^\circ$, а значение $P^* = 3,325a^2\tau_T$. При $a \rightarrow 0$ в сравнении с b $\alpha = 45^\circ$ и $P^* = 2b\tau_T$, что совпадает с нижней границей $P^0 = 2b\tau_T$ определяемой для одноосного сжатия при $\sigma_T = 2\tau_T$. Отсюда следует вывод, что с уменьшением a/b значения P^* и P^0 приближаются к точным.

5. ДИНАМИКА ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В теории идеально пластических тел возникает новый класс задач, который принципиально не может быть сформулирован и решен в рамках теории упругости (даже с какой угодно большой погрешностью), – задачи по динамике жесткопластических тел и конструкций. К таким задачам приводит рассмотрение кратковременных воздействий большой интенсивности на тела (конструкции). Эксперименты показывают, что воздействие упомянутых нагрузок вызывает либо остаточные перемещения (деформации) конструкции, либо – разрушение ее, диссипация энергии воздействия происходит в основном за счет развития пластических деформаций. Постановка задач динамики жесткопластических систем сводится к следующему. На тело или конструкцию действует высокоинтенсивная кратковременная нагрузка; после уменьшения ее интенсивности до значения, которое меньше предельного статического, движение тела прекращается. Рассмотрим задачу о воздействии равномерно распределенной высокоинтенсивной кратковременной нагрузки интенсивностью p на шарнирно опертую балку пролетом $2l$ (рис. 29). Предельная статическая нагрузка на балку равна (см. п. 4)

$$p_0 = 2M_T/l^2, \quad (77)$$

где M_T – предельное значение изгибающего момента M . Пусть зависимость интенсивности нагрузки p от времени имеет вид "прямоугольного" импульса (рис. 30): $p = \text{const}$ при $0 \leq t \leq t_p$, $p = 0$ при $t = t_p$, где t – время, t_p – время сброса нагрузки. Уравнение движения балки имеет вид:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \gamma \ddot{\omega} \cdot p, \quad (78)$$

где γ – плотность материала на единицу длины балки $\ddot{\omega}$ – прогиб, каждая точка над буквой означает производную по времени ($\ddot{\omega} = \partial^2 \omega / \partial t^2$).

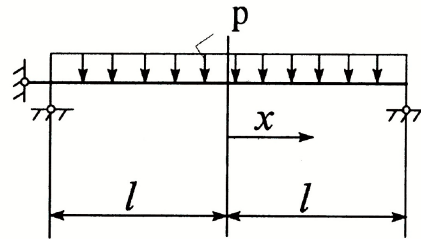


Рис. 29

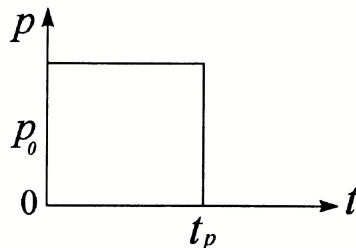


Рис. 30

Воздействие "умеренных" делений p . При значениях p , относительно немного превосходящих p_0 , движение балки должно осуществляться, как и в статике, с одним пластическим

шарниром посредине. Если посредине балки $M = M_T$ и образуется шарнир, то форма деформирования балки имеет вид, изображенный на рис. 31. Движение разбиваем на два интервала: $0 \leq t \leq t_p$ и $t_p \leq t \leq t_K$, где t_K – время окончания движения.

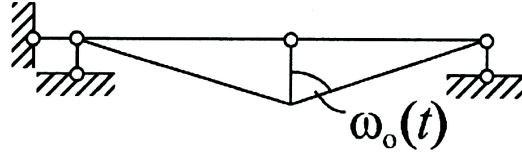


Рис. 31

Интервал $0 \leq t \leq t_p$. Прогибы балки описываются функцией $\omega(x, t) = \omega_0(t)(1 - x/l)$, где $\omega_0(t)$ – функция прогиба центра. Ускорение балки равно $\ddot{\omega}(x, t) = \ddot{\omega}_0(t)(1 - x/l)$, подставляя которое в (78), получим

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \ddot{\omega}(t)\gamma(1 - x/l) - p. \quad (79)$$

Интегрируя уравнение (79) по x , выражение M приобретает вид

$$M = M_T + (\gamma\ddot{\omega}_0 x^2)(3 - x/l)/6 - px^2/2, \quad (80)$$

причем произвольные постоянные при интегрировании (79) определяются из условий: $\partial M/\partial x = 0$ при $x = 0$, $M = M_T$ при $x = 0$. Удовлетворяя условию $M = 0$ при $x = l$ и подставляя согласно (77) значение $M_T = \frac{p_0 l^2}{2}$, из (80) получим, что $\ddot{\omega}_0(t) = 3(p - p_0)/2\gamma$. Интегрируя полученное выражение по t с учетом начальных условий: $\dot{\omega}_0 = 0$ и $\omega_0 = 0$ при $t = 0$ (нулевые начальные условия), получим

$$\omega_0(t) = 3(p - p_0)t^2/4\gamma. \quad (81)$$

Если подставить значение $\ddot{\omega}_0$ в (80), можно убедиться, что условие пластичности удовлетворяется, т. е. всюду $M \leq M_T$.

Интервал $t_p \leq t \leq t_K$. При $t > t_p$ нагрузка сбрасывается (рис. 30) и $p = 0$, но движение балки продолжается по инерции вплоть до момента t_K . Оказывается, что все условия задачи удовлетворяются, если прогиб балки имеет тот же вид $\omega(x, t) = \omega_0(t)(1 - x/l)$; выполняя ту же процедуру, что и в интервале $0 \leq t \leq t_p$, получим выражение (80), в котором следует считать $p = 0$; из условия равенства $M = 0$ при $x = l$; при этом следует, что $\ddot{\omega}_0 = \frac{-3p_0}{2\gamma}$. Интегрируя это выражение $\ddot{\omega}_0$ по времени и учитывая, что из решения для интервала $0 \leq t \leq t_p$ следуют условия: $\dot{\omega}_0(t) = 3(p - p_0)t_p/2\gamma$ и $\omega_0(t) = 3(p - p_0)t_p/4\gamma$ при $t = t_p$, получим

$$\omega_0(t) = 3pt_p(2p - t_p)/4\gamma - 3p_0 t^2/4\gamma. \quad (82)$$

Время окончания движения t_K определяется из условия, что в этот момент времени скорость равна $\dot{\omega}_0 = 0$. Отсюда следует

$$t_K = pt_p/p_0. \quad (83)$$

Подставляя t_K согласно (83) в (82), получим остаточный прогиб центра балки и остаточные прогибы балки

$$\omega_0(t_K) = 3pt_p^2(p - p_0)/4p_0\gamma, \quad (84)$$

$$\omega_0(x, t_K) = 3pt_p^2(p - p_0)(2 - x)/4p_0l\gamma.$$

Воздействие "высоких" давлений p . Приведенное выше решение справедливо для некоторого значения \bar{p} , если $p > \bar{p}$, то это решение несправедливо. Это следует из того, что выражение M (80) при $x = 0$ имеет максимум (что и должно быть) лишь при $p \leq \bar{p}$; дифференцируя (80) по x , имеем $\frac{dM}{dx} = \frac{\gamma\dot{\omega}_0}{6} \left(6x - \frac{3x^2}{l}\right) - px|_{x=0} = 0$; $\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{\gamma\dot{\omega}_0}{6} \left(6 - \frac{6x}{l}\right) - p|_{x=0} = p - 3p_0$, причем $\frac{d^2M}{dx^2} < 0$ (максимум) при $x = 0$ для $p < 3p_0$ и $\frac{d^2M}{dx^2} > 0$ (минимум) при $x = 0$ для $p > 3p_0$. Если $p > 3p_0$, то M имеет минимум при $x = 0$ в окрестности центра, следовательно, превосходит M_T . Таким образом, если $p > \bar{p} = 3p_0$, имеет место воздействие "высоких" давлений. В этом случае начальная форма движения балки имеет форму трапеции (рис. 32) с плоским участком на половине балки в пределах $0 \leq x \leq x_1^0$ и движение разбивается на три интервала.

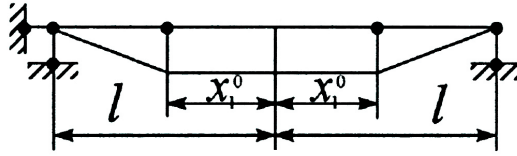


Рис. 32

Интервал $0 \leq t \leq t_p$. В зоне $0 \leq x \leq x_1$ имеется пластический участок, в котором $M = M_T$, а следовательно, и поперечная сила $Q = 0$. Поскольку в этой зоне момент постоянный, из (78) следует, что при $0 \leq x \leq x_1^0$

$$\ddot{\omega} = p/\gamma = const. \quad (85)$$

Согласно рис. 32 прогибы балки можно выразить следующим образом:

$$\omega(x, t) = \omega_0(t) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq x_1^0,$$

$$\omega(x, t) = \omega_0(t) (l-x)/(l-x_1^0) \quad \text{при} \quad x_1^0 \leq x \leq l, \quad (86)$$

где x_1^0 не зависит от t , но зависит от значения p .

Рассматривая зону $x_1^0 \leq x \leq l$ и подставляя в (78) выражение $\ddot{\omega} = \dot{\omega}_0(l-x)/(l-x_1^0) = p(l-x)/\gamma(l-x_1^0)$ в соответствии с (85) и (86) после интегрирования полученного дифференциального уравнения, получим

$$M = M_T + p(x_1 - x)^3/6(l-x_1), \quad (87)$$

где произвольные постоянные определены из условий: $dM/dx = 0$ и $M = M_T$ при $x = x_1^0$. Подставляя в (87) значение $M_T = p_0 l^2/2$ и используя граничное условие $M = 0$ или $x = l$, из (87) можно получить уравнение

$$p/3p_0 = l^2/(l-x_1^0)^2, \quad (88)$$

из которого при заданном p определяется x_1^0 . Условие пластичности в этом интервале времени не нарушается, поскольку $M/M_T = 1 - (x-x_1)^3/(l-x_1)^3 \leq 1$.

Интервал $t_p \leq t \leq t_k$. При $t = t_p, p = 0$, но движение балки продолжается по инерции, причем координата $(x_1(t))$ уменьшается от $x_1 = x_1^0$ при t_p до $x_1 = 0$ при $t = t_1$. Следовательно, $x_1 = x_1(t)$. Тогда скорости прогибов балки можно выразить следующим образом:

$$\dot{\omega}(x, t) = pt_p/\gamma \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq x_1(t), \quad (89)$$

$$\dot{\omega}(x, t) = pt_p(l-x)/\gamma[l-x_1(t)] \quad \text{при} \quad x_1(t) \leq x \leq l,$$

причем скорость зоны $0 \leq x \leq x_1(t)$ определяется непрерывностью скоростей при $t = t_p$, а скорость при $t = t_p$ равна pt_p/γ согласно решению для интервала $0 \leq t \leq t_p$.

В зоне $x_1(t) \leq x \leq l$ ускорение определяется дифференцированием второго выражения (89) по времени $\ddot{\omega}(x, t) = pt_p(l-x)\dot{x}_1/(l-x_1)^2$; подставляя его в (78) и интегрируя по x , получим

$$M = pt_p\dot{x}_1(lx^2 - x^3/3 - 2lx_1x - 2x_1^3/3 + lx_1^2) / 2(l-x)^2 + p_0l^2/2, \quad (90)$$

где постоянные интегрирования определены из условий: $M = M_T, dM/dx = 0$ при $x_1 = x_1$.

Поскольку $M = 0$ при $x = l$, из (90) следует уравнение

$$x_1(l-x_1) = -3p_0l^2/(2pt_p), \quad (91)$$

которое методом разделения переменных ($\dot{x}_1 = dx_1/dt$) сводится к виду $(l-x_1)dx_1 = -(3p_0l^2/2pt_p)dt$. Интегрируя и учитывая начальное условие: $x_1 = x_1^0$ при $t = t_p$, получим зависимость между x_1 и t :

$$(1-x_1/l)^2 = 3p_0t/pt_p.$$

Поскольку $x_1 = 0$ при $t = t_1$, то $t_1 = pt_0/3p_0$.

В конце второго интервала при $t = t_1$ из вида функции $\omega_0(t)$ (рис. 32) и интегрирования первого выражения (89) по времени следует $\partial\omega/\partial x = 0$;

$$\omega = pt_1^2(2p/3p_0 - 1)/2\gamma \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad t = t_1 \quad (92)$$

(при интегрировании использовано условие $\omega = pt_p^2/2\gamma$ при $t = t_p$).

При $x = x_1(t)$ имеют место скачки в производных от прогиба ω , которые должны удовлетворять определенным условиям (совместности). Рассмотрим эти условия.

Прогиб является функцией $\omega = \omega(x, t)$, и он должен быть непрерывен при условии сплошности балки: $[\omega(x, t)] = 0$, где квадратные скобки означают скачок заключенной в них величины: дифференцируя это равенство, получим $[\dot{\omega}] + \dot{x}_1[\partial\omega/\partial x] = 0$. Но $[\dot{\omega}] = 0$ из того же условия, отсюда следует, что $[\partial\omega/\partial x] \neq 0$ при $\dot{x}_1 = 0$ и $[\partial\omega/\partial x] = 0$ при $\dot{x}_1 \neq 0$. Дифференцируя последнее равенство $[\partial\omega/\partial x] = 0$ при $\dot{x}_1 \neq 0$, получим условие для скачков

$$[\partial\dot{\omega}/\partial x] + \dot{x}_1[\partial^2\omega/\partial x^2] = 0. \quad (93)$$

Дифференцируя равенство $[\dot{\omega}] = 0$, получим

$$[\ddot{\omega}] + \dot{x}_1[\partial\dot{\omega}/\partial x] = 0. \quad (94)$$

Условия (93) и (94) должны выполняться при $x = x_1$. В рассматриваемом случае при $x = x_1$ имеем

$$-[\ddot{\omega}]/\dot{x}_1 = [\partial\dot{\omega}/\partial x] = -pt_p/\gamma(l-x_1). \quad (95)$$

Из (93) и (95) с учетом (91) следует

$$[\partial^2\omega/\partial x^2] = -[\partial\dot{\omega}/\partial x]/\dot{x}_1 = -2p^2t_p^2/3p_0\gamma l^2. \quad (96)$$

При движении точки x_1 в области $x < x_1$, $\partial^2\omega/\partial x^2 = 0$. Следовательно, скачок (96) должен равняться $\partial^2\omega/\partial x^2$ при $x > x_1$, что следует из второго равенства (89); таким образом,

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = -2p^2t_p^2/3p_0\gamma l^2 \quad \text{при} \quad x_1(t) < x < x_1^0. \quad (97)$$

Интегрируя (97) по x с учетом условий (91), можно получить значения $\omega(x, t_1)$ в зоне $x_1(t) < x < x_1^0$:

$$\omega(x, t_1) = \frac{pt_p^2}{\gamma} \left[\frac{p}{3p_0} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \quad \text{при } x_1(t) < x < x_1^0, \quad (98)$$

При $x = x_1^0$ согласно (98) прогиб $\omega(x_1^0, t_1) = pt_p^2 \left[\frac{p(l^2 - x_1^0)}{3p_0 l^2} - \frac{1}{2} \right] / \gamma$. В зоне $x_1^0 \leq x \leq l$ прогиб определяется выражением $\omega(x, t_1) = \omega(x_1^0, t_1) (l - x) / (l - x_1)$.

Интервал $t_1 \leq t \leq t_k$. При $t > t_1$, $x_1 = 0$ и характер движения аналогичен движению в интервале $t_p \leq t \leq t_k$ при действии "умеренных" давлений. В этом случае также имеем выражение $\omega = -3p_0/2\gamma$, интегрируя которое по времени с учетом первого (89) и второго (91) условий при $t = t_1$, получим выражения скорости прогиба и прогиба центра балки

$$\dot{\omega}_0 = \frac{3p_0(t_1 - t)}{2\gamma} + \frac{pt_p}{\gamma}; \quad \omega_0 = \frac{pt_p(t - t_1)}{\gamma} - \frac{3p_0(t - t_1)^2}{4\gamma} + \frac{pt_p^2}{2\gamma} \left(\frac{2}{3} \frac{p}{p_0} - 1 \right).$$

Поскольку $\dot{\omega}_0 = 0$ при $t = t_k$ следует значение $t_k = pt_p/p_0$. Подставляя значение t_k в выражение ω_0 , определим значение остаточного прогиба середины балки $\omega_0(t_k) = pt_p^2(2p - \frac{3p}{2})/3p_0\gamma$. Так как рост прогибов в третьем интервале осуществляется по закону прямой линии $\omega(l, t) = 0$, остаточные прогибы балки равны:

$$\omega(x, t_k) = \frac{pt_p^2}{\gamma} \left[\frac{p}{3p_0} \left(2 - \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \quad \text{при } 0 \leq x \leq x_1^0;$$

$$\omega(x, t_k) = \omega(x_1^0, t_k) (l - x) / (l - x_1^0) \quad \text{при } x_1^0 \leq x \leq l.$$

Аналитическое решение задач о динамике пластических конструкций можно получить также для других видов балок, а также круглых пластинок, пологих оболочек вращения. Однако для более сложных случаев решение получается лишь численно.

6. БОЛЬШИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Жесткопластическая схема деформирования материала предполагает пренебрежение упругим деформациям (и соответствующими перемещениями). Пластические деформации при этом превосходят упругие; в определенных случаях это может служить качественным обоснованием учета больших перемещений при деформировании жесткопластических тел или конструкций. Однако в общем случае учет больших перемещений при деформировании жесткопластических конструкций приводит к значительным математическим трудностям, разрешимым относительно несложными методами в достаточно простых случаях.

Рассмотрим задачу о больших прогибах балки с шарнирно неподвижными опорами, нагруженной равномерно распределенной возрастающей нагрузкой интенсивностью p (рис. 33). Влиянием продольных (вдоль оси \bar{x}) перемещений пренебрегаем.

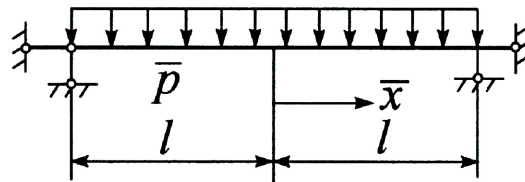


Рис. 33

Уравнение равновесия балки с учетом больших прогибов имеет вид

$$d^2m/dx^2 + nd^2\omega/\partial x^2 + p = 0, \tag{99}$$

где введены безразмерные величины $m = M/M_T$, $x = \bar{x}/l$, $n = N/N_T$, $\omega = 2\bar{\omega}/h$, $p = \bar{p}l^2/M_T$. $\bar{\omega}$ – прогиб балки, $2h$ – высота прямоугольного сечения с единичной шириной, \bar{x} – продольная координата, $2l$ – пролет.

При малых прогибах решение рассмотрено в п. 2, согласно которому при $x = 0$ образуется пластический шарнир ($M = M_T$), прогибы: $\omega = \omega_0(1, x)$. Нормальная сила (в силу уравнения равновесия $dn/dx = 0$) здесь и далее будет приниматься независимой от x , т. е. $n = const$ по x . Учитывая отмеченное, уравнение (99) дает выражение $m = 1 - n - px^2/2$, откуда в связи с равенством $m = 0$ при $x = 1$ следует $p = 2(1 - n^2)$: $\max p = 2$ при $n = 0$ (т. е. нормальная сила отсутствует при малых прогибах; при интегрировании уравнения (99) использовались условия $dm/dx = 0$ и $m = 1 - n^2$ при $x = 0$, причем последнее соответствует точному выражению условия текучести [5] при действии изгибающегося момента m и нормальной силы n : $m + n^2 = 1$).

При больших прогибах образуются две зоны (рассматриваем половину балки). В зоне $0 \leq x \leq x_1$, $m = 1 - n^2 = const$, $n = const$, причем из (99) следует

$$\omega = \omega_0 - px^2/2n, \dot{\omega} = \dot{\omega}_0 - (p/n)x^2/2, \tag{100}$$

где в качестве "времени" взят возрастающий параметр нагрузки p и точкой обозначено дифференцирование по нему.

Зона $x_1 \leq x \leq 1$ – жесткая, в ней $n = const$, а прогибы и их скорости равны:

$$\omega = \omega_1(1 - x)/(1 - x_1); \dot{\omega} = \left\{ \frac{\omega_1}{1 - x_1} \right\} (1 - x), \tag{101}$$

где ω_1 – прогиб при $x = x_1$.

При $x = x_1$ должны удовлетворяться условия (93) и (94). Согласно (100) и (101) имеем

$$[\partial \dot{\omega} / \partial x] = - \{ \omega_1 / (1 - x_1) \} + (p/n)x_1, \quad [\partial^2 \omega / \partial x^2] = p/n \quad \text{при } x = x_1. \tag{102}$$

Подставляя значения (102) в (93), получим

$$\left\{ \frac{\omega_1}{1-x_1} \right\} = \left\{ \frac{px_1}{n} \right\},$$

откуда с учетом $\omega_1 = \omega_0 = 0$ при $x_1 = 0$ после интегрирования следует

$$\omega_1 = px_1(1-x_1)/n. \quad (103)$$

Из (103) и первого выражения (101) можно получить

$$\omega_0 = px_1(2-x_1)/2n. \quad (104)$$

При этом удовлетворяется условие (94).

Подставляя (103) в первое выражение (101), получим распределение прогибов в зоне $x_1 \leq x \leq 1$:

$$\omega = px_1(1-x)/n. \quad (105)$$

Проинтегрируем (100) с учетом $\frac{dm}{dx} = 0$ и $m = 1 - n^2$ при $x = x_1$, в результате имеем:

$$m = 1 - n^2 - p(x-x_1)^2/2, \quad (106)$$

причем в силу (101), (105) в этой зоне $\frac{d^2\omega}{dx^2} = 0$. Поскольку $m = 0$ при $x = 1$, из (106) следует

$$p = 2(1-n^2)/(1-x_1)^2. \quad (107)$$

Значение n определим из условия максимума безусловной функции

$$\Phi = \frac{2(1-n^2)}{(1-x_1)^2} + \lambda \frac{(1-n^2)x_1(2-x_1)}{(1-x_1)^2 n} - \lambda\omega_0,$$

где λ – множитель Лагранжа и в качестве условия для максимума p по (107) использовано выражение (104).

Составляя уравнения $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = 0$ и решая их, получим $\lambda = -2n$:

$$n = \sqrt{(2x_1 - x_1^2)/(2 - 2x_1 + x_1^2)}. \quad (108)$$

Теперь значение p согласно (107) и (108) определяется выражением

$$p = 4/(2 - 2x_1 + x_1^2). \quad (109)$$

После подстановки (108) в (104) получается равным

$$\omega_0 = 2\sqrt{2x_1 - x_1^2}/2\sqrt{2 - 2x_1 + x_1^2} = 2n. \quad (110)$$

Выражениями (109) и (110) дана связь в параметрической форме между p и ω_0 с параметром x_1 . При $\omega_0 = 2$ получим $x_1 = 1, 0$, $n = 1, 0$, $p = 4$: это означает, что балка будет деформироваться как нить. При $x_1 = 0$ прогибы равны нулю $\omega_0 = 0$, хотя при этом $p = 2$.

Таким образом, предельное равновесие ($p = 2$) при "малых" прогибах осуществляется при нулевых прогибах.

Аналогично может быть получено решение ряда других задач о больших прогибах жесткопластических систем (стержневых пластинок, оболочек и др.).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ерхов, М. И.* Теория упругости / М. И. Ерхов. – М. : Изд-во УДН, 1987.
- [2] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : ГГТИ, 1948.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – М. : Наука, 1971.
- [4] *Прагер, В.* Теория идеально пластического тела / В. Прагер, Ф. Г. Ходжи. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1956.
- [5] *Ерхов, М. И.* Теория идеально пластических тел и конструкций / М. И. Ерхов. – М. : Наука, 1978.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток.

Варданян Седрак Ваникович (vardanyan_s@yahoo.com) – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (cotedurhone_mail.ru) – доктор физико-математических наук (1996), профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский лесотехнический институт, г. Королев Московской области.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

Ивлев Дюис Данилович (ivlev21@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный открытый университет, г. Москва.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (irakon63@hotmail.com) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва.

Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Учреждение Российской академии наук "Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН", г. Москва.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marycbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стил `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Зубчанинов В. Г., Гултыяев В. И., Алексеев А. А.</i> Об эффекте Баушингера и поверхности текучести при пластическом деформировании металлов	3
<i>Мустафаев А. Б.</i> Воздействие на криволинейную трещину термоупругим полем напряжений	9
<i>Трещев А. А., Делягин М. Ю.</i> Решение связанной задачи термоупругости для сферической оболочки из разносопротивляющегося материала с учетом геометрической нелинейности	18
<i>Трещев А. А., Шерешевский М. Б.</i> Определение НДС пологой прямоугольной в плане оболочки положительной гауссовой кривизны из ортотропного материала с учетом свойств разносопротивляемости	27
<i>Янковский А. П.</i> Моделирование упругопластического изгиба металлокомпозитных слоистых пластин регулярной структуры. 2. Уточненная модель деформирования	38
<i>Гасанов Ф. Ф.</i> Взаимодействие периодической системы ортотропных упругих включений и двух систем прямолинейных когезионных трещин в изотропной среде	57
<i>Алиев М. М., Шафиева С. В., Каримова Н. Г.</i> Критерии прочности и разрушения разнопрочных материалов с учетом влияния всестороннего давления	64
<i>Деревянных Е. А.</i> Предельное состояние анизотропных призматических кусочно-неоднородных стержней при кручении	72
Михаил Иванович Ерхов	81
Михаил Иванович Ерхов	83
<i>Ивлев Д. Д.</i> С М. И. Ерховым	95
<i>Ерхов М. И.</i> Из трудов Михаила Ивановича Ерхова	99
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	136
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	139
СОДЕРЖАНИЕ	141

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2012. № 3(13)**

Отв. за выпуск: А. В. Балашникова, Е. А. Деревянных

Технические редакторы: Л. Н. Улюкова, В. Ю. Лашманова, Н. А. Осипова,
Л. А. Судленкова

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова, Е. А. Деревянных

Макет: А. В. Балашникова, Е. А. Деревянных

Подписано в печать 28.12.2012 г. Формат 70x100/8. Бумага писчая.

Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e.

Усл. печ. л. 17,88. Тираж 400 экз. Цена свободная. Заказ №

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38