

ББК 95.4; 22.251
Ч-823

Подписной индекс в каталоге ПРЕССА РОССИИ: 13109
ISSN: 2073-5499

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2012. № 4(14)

Учредитель: ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Учредители серии: Г. Н. Григорьев, Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров, Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Т. Н. Петрова, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин, А. А. Шуканов

Редакционная коллегия: Ивлев Д. Д. – ответственный редактор, Максимова Л. А., Матченко Н. М. – зам. ответственного редактора, Тихонов С. В. – ответственный секретарь, Баженов В. Г., Буренин А. А., Георгиевский Д. В., Глаголев В. В., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Каюмов Р. А., Климов Д. М., Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Кулиев В. Д., Ломакин Е. В., Маркин А. А., Манжиров А. В., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р. И., Победря Б. Е., Радаев Ю. Н., Радченко В. П., Ревуженко А. Ф., Редкозубов С. А., Сенашов С. И., Спорыхин А. Н., Трещев А. А., Чернышов А. Д., Хромов А. И., Шашкин А. И.

Международный совет: Амензаде Р. Ю. (Азербайджан), Варданян С. В. (Армения), Мирсалимов В. М. (Азербайджан), Тамуж В. П. (Латвия), Чигарев А. В. (Белоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19.

Email: predel21@mail.ru.

WWW: <http://predel.chgpu.edu.ru>.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-36234 от 15.05.2009 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2012

ОБ ОДНОЙ ДОСТИЖИМОЙ ОЦЕНКЕ СНИЗУ ТРЕХМЕРНОГО ИНВАРИАНТА НАПРЯЖЕНИЙ КУЛОНА–ТРЕСКА СИСТЕМАМИ "ДВУМЕРНЫХ" КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Аннотация. Приводится построение одной достижимой нижней границы для трехмерного инварианта Кулона – Треска в связи с проблемой поиска критериев пластичности изотропных твердых тел, обеспечивающих наряду с условием пластичности Треска – Сен-Венана гиперболический аналитический тип трехмерных уравнений математических теорий пластичности, основанных на обобщенном ассоциированном законе пластического течения. Построение нижней границы осуществляется с помощью системы трех "двумерных" касательных напряжений, соответствующих трем возможным аналоговым плоским деформированным состояниям и связываемых с данным трехмерным напряженным состоянием. Установлено, что трехмерный инвариант Кулона – Треска достигает нижней границы для любого состояния плоской деформации, ассоциируемого с данным трехмерным состоянием, для которого внеплоское главное нормальное напряжение будет промежуточным (или медианным).

Ключевые слова: идеальная пластичность, текучесть, предел текучести, призма Кулона – Треска, касательное напряжение, главное напряжение, плоское деформированное состояние, промежуточное главное напряжение, медианное главное напряжение.

УДК: 539.374

1. Предварительные сведения и вводные замечания

Математическая теория пластичности — один из основных разделов механики деформируемого твердого тела. Приступая к ее изучению или бросая ретроспективный взгляд, мы вправе ожидать как доказательств экспериментальной обоснованности положенных в ее основу законов, так и математически строгой постановки задач теории пластичности, независимо от *математической размерности* итоговых уравнений. Условия текучести играют фундаментальную роль в современных теориях пластичности, математически воплощая представление о предельной границе чисто упругого поведения твердого тела и, в то же время, определяя аналитический тип уравнений в частных производных, составляющих их собственно математические формулировки. Исключительное место в ряду условий текучести занимает критерий Треска (H. Tresca), поскольку он обеспечивает *гиперболичность* трехмерных уравнений математической теории пластичности, основанной на обобщенном ассоциированном законе течения.

В период 1864–1872 гг. Треска провел большую серию экспериментов по выдавливанию металлов через матрицы различных форм, сделав при этом вывод о постоянстве максимального касательного напряжения в пластическом состоянии [1]. Сен-Венан (B. Saint-Venant, 1870 г.) одним из первых признал важность открытия Треска и использовал критерий максимального касательного напряжения для построения математической теории пластичности.

Впрочем, идея такого условия применительно к прочности твердых тел принадлежит Кулону (С. А. Coulomb) и была существенно раньше высказана им в работе "О применении правил максимума и минимума к некоторым вопросам статики, имеющим отношение к архитектуре" [2], представленной в Королевскую Академию наук в 1773 г. В этой работе Кулон указывает на то, что разрушение сжатой призмы происходит в результате скольжения одной ее части относительно другой по некоторой плоскости, составляющей угол в сорок пять градусов с направлением сжатия. Скольжение возникает при достижении составляющей сжимающей силы в указанной плоскости предельной величины, достаточной для преодоления обусловленного сцеплением сопротивления скалыванию вдоль этой плоскости.

В научной литературе разных стран иногда рассматриваемое условие текучести связывают (с различной степенью обоснованности) также с именами Геста (J. Guest, 1900 г.) и Мора (O. Mohr, 1900 г.).

Таким образом, согласно Треска и Сен-Венану, пластическое состояние наступает, как только максимальное касательное напряжение τ_{\max} достигает некоторого определенного предельного значения k :

$$\tau_{\max} = k. \quad (1)$$

Обозначение k принадлежит Треска и в приведенном выше уравнении имеет смысл предела текучести при чистом сдвиге.

В дальнейшем изложении будут использоваться следующие стандартные обозначения механики деформируемого твердого тела: $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — собственные значения тензора напряжений (главные нормальные напряжения); $d\boldsymbol{\varepsilon}$ — приращение тензора малых деформаций; $d\mathbf{u}$ — приращение вектора перемещений.

Ассоциированный закон течения является в математической теории пластичности определяющим законом и устанавливает, что в пространстве напряжений¹ вектор, представляющий тензор приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}$, ортогонален регулярной поверхности текучести $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ в данном напряженном состоянии $\boldsymbol{\sigma}$:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (d\lambda) \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (f(\boldsymbol{\sigma}) = 0, df(\boldsymbol{\sigma}) = 0), \quad (2)$$

где множитель $d\lambda$ строго положителен в случае *действительного* пластического течения. Уравнения в (2), заключенные в круглые скобки, представляют собой признаки активного нагружения идеально пластического тела, выполнение которых указывает на наличие приращений необратимых пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}$ только тогда, когда действительные напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ находятся на пределе текучести и, кроме того, при малом догружении $d\boldsymbol{\sigma}$ напряжения $\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$ также *будут* находиться на пределе текучести, т. е. $f(\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}) = 0$.

Для изотропного тела критерий текучести связывает некоторой зависимостью главные нормальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad (3)$$

причем функция текучести f на самом деле зависит от трех независимых симметрических комбинаций главных нормальных напряжений; в качестве таковых могут быть выбраны линейная, квадратичная и кубическая симметрические формы главных напряжений.

Математическая формулировка критерия текучести Треска (1) основывается на вычислении величины максимального касательного напряжения

$$\tau_{\max} = \sup_{\mathbf{n}, \mathbf{n}^\perp} |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^\perp| = \sup_{\mathbf{n}, \mathbf{n}^\perp} |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n}^\perp \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^\perp|, \quad (4)$$

где точные верхние грани определяются при условиях $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \mathbf{n}^\perp \cdot \mathbf{n}^\perp = 1, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^\perp = 0$.

¹Это пространство называется пространством Хэя—Вестергарда (Haigh—Westergaard stress space).

Как хорошо известно [3]–[9], при соответствующей нумерации главных осей тензора напряжений, такой, чтобы выполнялись условия $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, в результате получается следующее значение:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \quad (5)$$

Промежуточное (в том числе и медианное) главное нормальное напряжение σ_2 , как следует из (5), никак не влияет на величину максимального касательного напряжения. Тем самым промежуточное главное напряжение исключается из рассмотрения, если определять текучесть согласно Кулону–Треска.

При произвольной нумерации главных осей напряжений условие максимального касательного напряжения Треска выражается в терминах главных нормальных напряжений в форме

$$\max_{i,j} \frac{|\sigma_i - \sigma_j|}{2} = k. \quad (6)$$

Определим инвариант Кулона–Треска выражением, расположенным в правой части (6), т. е.

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\sigma}) = \max_{i,j} \frac{|\sigma_i - \sigma_j|}{2}. \quad (7)$$

Ясно, что величина $2\mathcal{K}$ определяет максимальное расстояние между парами собственных значений тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$; ее часто называют также размахом (spread) тензора напряжений.

В пространстве главных напряжений поверхность текучести, определяемая уравнением (6), представляет собой правильную шестигранную призму (так называемую призму Кулона–Треска), ось которой равнонаклонена к трем взаимно ортогональным прямолинейным образующим этого пространства. Кривая текучести (сечение призмы Кулона–Треска девиаторной плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$) представляет собой правильный шестиугольник с центром в начале координат. Как показывает анализ, в научной литературе чаще всего приводятся не совсем корректные формы уравнения призмы Кулона–Треска. По этой причине ниже дается вывод трех корректных форм указанного уравнения.

2. Уравнение призмы Кулона–Треска в пространстве главных напряжений и его корректные формы

Уравнение призмы Кулона–Треска (6) сначала представим в форме

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2] [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4k^2] [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k^2] = 0. \quad (8)$$

Введем согласно [5, с. 26]

$$\begin{aligned} J'_2 &= -(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3) = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2), \\ J'_3 &= s_1 s_2 s_3 = \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3), \end{aligned} \quad (9)$$

где s_1, s_2, s_3 — собственные значения девиатора тензора напряжений, два главных инварианта девиатора тензора напряжений.

Заметим, что в терминах главных нормальных напряжений инварианты (9) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} J'_2 &= \frac{1}{6}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2), \\ J'_3 &= \frac{1}{27}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2). \end{aligned} \quad (10)$$

Видно, что они выражаются только через разности главных напряжений.

Уравнение призмы Кулона–Треска (8), выраженное через главные инварианты девиатора тензора напряжений, будет иметь следующий вид:

$$-4J_2^3 + 36k^2 J_2^2 - 96k^4 J_2' + 64k^6 + 27J_3^2 = 0. \quad (11)$$

Это уравнение после ряда алгебраических преобразований приводится к несколько более симметричной форме

$$8(2k^2 - J_2')^3 - 4J_2'^2(3k^2 - J_2') + 27J_3'^2 = 0. \quad (12)$$

Уравнение призмы в такой сложной форме, найденное впервые Леви (M. Levy, 1871 г.), правда, в не совсем корректной форме, в современной механике деформируемого твердого тела считается практически бесполезным, никогда не применяется в современных исследованиях и представляет главным образом исторический интерес. Указанное обстоятельство становится еще более очевидным, если сравнить уравнение (12) с критерием текучести Мизеса (R. Mises, 1913 г.), имеющим чрезвычайно простую аналитическую форму

$$J_2' = k^2. \quad (13)$$

Условие пластичности Мизеса устанавливает также в качестве признака пластического состояния критическое значение интенсивности касательных напряжений

$$\tau_i = \sqrt{\frac{2}{3}}k.$$

Здесь τ_i определяется (см., например, [4, с. 26]) как

$$\tau_i = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

А. А. Ильюшиным были установлены оценки ([4, с. 28, 29])

$$\sqrt{2} \geq \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{\max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j|} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \geq \frac{\tau_i}{\tau_{\max}} \geq \sqrt{\frac{2}{3}},$$

указывающие, в том числе, оценку снизу для трехмерного инварианта напряжений Кулона—Треска.

Определим главные касательные напряжения τ_1, τ_2, τ_3 формулами

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (14)$$

Ясно, что они удовлетворяют соотношению

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0, \quad (15)$$

определяющему синоптическую плоскость в пространстве главных касательных напряжений.

В терминах главных касательных напряжений (14) уравнение призмы Кулона—Треска (8) может быть преобразовано к следующему виду:

$$[\tau_1^2 - k^2] [\tau_2^2 - k^2] [\tau_3^2 - k^2] = 0. \quad (16)$$

Это уравнение определяет в пространстве главных касательных напряжений куб, точнее, его шестигранную поверхность. Сечение упомянутого куба синоптической плоскостью (15) дает правильный шестиугольник.

Равенство $\text{sgn}(\tau_\gamma)\tau_\gamma = k$ ($\gamma = 1, 2, 3$) в (16) может достигаться лишь для одного из трех главных касательных напряжений, если ни одно из них не равно нулю, или для двух, если третье главное касательное напряжение при этом равно нулю (тогда какие-либо два из трех главных напряжений равны друг другу). В первом случае, следуя [10], напряженное состояние называется "полупластическим", а во втором — "вполне пластическим".

3. Вывод корректных форм уравнения призмы Кулона—Треска

Приведем сначала вывод уравнения призмы Кулона—Треска в форме (12). Занумеруем собственные значения тензора напряжений в порядке убывания с тем, чтобы можно было принять условие текучести Треска в одной из простейших форм $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$.

Воспользуемся далее спектральным разложением тензора напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (17)$$

где \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений. С учетом условия текучести $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$ и равенства

$$\mathbf{I} = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n},$$

принимая обозначение $s = \sigma_2 - \sigma_3 \geq 0$, имеем

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_3 \mathbf{I} + 2k \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + s \mathbf{m} \otimes \mathbf{m},$$

откуда находим матрицу девиатора тензора напряжений в базисе \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n}

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4k - s & 0 & 0 \\ 0 & 2(s - k) & 0 \\ 0 & 0 & -2k - s \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Вычисляя затем по (18) инварианты J'_2 , J'_3 , получим

$$J'_2 = \frac{1}{3} (3k^2 + (s - k)^2),$$

$$J'_3 = -\frac{2}{27} (3ks^2 + 6k^2s - 8k^3 - s^3).$$

Вводя в последние формулы обозначения Леви $q = -J'_2$, $r = -J'_3$, после очевидных преобразований приходим к

$$(s - k)^2 = -3q - 3k^2,$$

$$2s^3 - 6ks^2 - 12k^2s = -27r - 16k^3. \quad (19)$$

Из соотношений (19) следует исключить величину s . Полагая $s' = s - k$, в результате преобразований приведем второе из уравнений системы (19) к уравнению вида

$$2s'(s'^2 - 9k^2) = -27r.$$

Возводя далее обе части этого уравнения в квадрат и принимая во внимание, что на основании первого уравнения системы (19) имеет место соотношение

$$s'^2 = -3q - 3k^2, \quad (20)$$

находим

$$4 \cdot 3^3 (q + k^2)(q + 4k^2)^2 + (27r)^2 = 0$$

или

$$4(q + k^2)(q + 4k^2)^2 + 27r^2 = 0. \quad (21)$$

Нетрудно проверить, что последнее уравнение может быть представлено как

$$8(2k^2 + q)^3 - 4q^2(3k^2 + q) + 27r^2 = 0, \quad (22)$$

что с точностью до обозначений $q = -J'_2$, $r = -J'_3$ совпадает с (12).

Раскрывая затем скобки в уравнении (21), приходим к форме

$$4q^3 + 36k^2q^2 + 96k^4q + 64k^6 + 27r^2 = 0, \quad (23)$$

что с учетом обозначений $q = -J'_2$, $r = -J'_3$ совпадает с (11).

Уравнение (21) представляется в терминах инвариантов девиатора тензора напряжений формой

$$4(k^2 - J'_2)(4k^2 - J'_2)^2 + 27J'^2_3 = 0. \quad (24)$$

Это, наряду с (11), (12), третья корректная форма уравнения призмы Кулона—Треска.

Заметим, что уравнение (20) указывает на то обстоятельство, что при выполнении критерия текучести Треска справедливо неравенство

$$-3q - 3k^2 \geq 0,$$

и, следовательно, поскольку $q = -J'_2$, можно заключить, что

$$J'_2|_{\tau_{\max}=k} \geq k^2. \quad (25)$$

Таким образом

$$\inf_{\tau_{\max}=k} J'_2 = k^2,$$

причем точная нижняя грань достигается для состояний чистого сдвига $\sigma_1 = k$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -k$, откуда можно заключить, что шестиугольник Треска, который в девиаторной плоскости пространства главных напряжений определяется уравнением (8), описан около окружности радиуса $\sqrt{2}k$.

Весьма интересной оказывается история уравнения призмы Кулона—Треска в формах (21), (22). Так, в переводе на русский язык оригинальной работы Леви [11] (см.: Теория пластичности: сб. статей (ред. Ю. Н. Работнов). – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1948. – С. 20–23) уравнение призмы дано в следующей форме:

$$4(k^2 + q)(4k^2 + q) + 27r^2 = 0,$$

где $q = -J'_2$, $r = -J'_3$, которая становится правильной и совпадает с (21), если скобку $(4k^2 + q)$ возвести в квадрат.

С другой стороны, как указывалось В. В. Соколовским, в оригинальной работе Леви цифры 3 и 4 во втором члене уравнения (22) ошибочно переменены местами, что было обнаружено И. Я. Штаерманом (см. по этому поводу: Соколовский В. В. Теория пластичности. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – С. 67, 68). В. В. Соколовский также отмечает, что указанная выше неточность, допущенная Леви, послужила поводом для необоснованной критики условия пластичности Треска некоторыми авторами.

Как выясняется, то обстоятельство, что Леви привел в своей работе неверное уравнение при обобщении условия пластичности Треска на пространственные напряженные состояния, было замечено еще раньше С. Г. Михлиным (см.: Михлин С. Г. Основные уравнения математической теории пластичности. – Л.: Изд-во АН СССР, 1934. – С. 17). Однако С. Г. Михлин, ссылаясь при этом на Леви, приводит в указанном источнике уравнение призмы в виде

$$8(2k^2 + q)^3 - 3q^2(4k^2 + q) + 27r^2 = 0$$

еще и с ошибочным выражением для r . Это уравнение С. Г. Михлина становится корректным, если поменять местами цифры 3 и 4 и считать, что $q = -J'_2$, $r = -J'_3$.

4. Каноническое условие текучести для состояний плоской деформации

Теория плоской деформации идеально пластического тела — наиболее полно разработанный раздел современной математической теории пластичности. И это результат не только меньшей математической размерности теории плоской деформации. Решающим обстоятельством, обеспечившим создание теории плоской деформации в столь законченной и совершенной форме, является формальная статическая определимость и гиперболичность соотношений этой теории. Новый вариант построения теории плоского деформированного состояния идеально пластического тела изложен в статье [12].

В начальный период развития теории пластичности, когда основное внимание исследователей было сфокусировано именно на плоской деформации, при изучении плоского пластического течения широко использовались представления о линиях скольжения, подчиняющихся

поразительным законам, установленным Г. Генки² и Л. Прандтлем.³ Гиперболичность уравнений теории плоского деформированного состояния обеспечила возможность строгого математического представления полей скольжения в металлах. Статически определяемая задача о плоской пластической деформации вместе с ее гиперболическими соотношениями послужила отправной точкой развития всей математической теории идеальной пластичности.

Основные соотношения теории плоской деформации изотропного тела могут быть получены без привлечения ассоциированного закона течения, исходя из общих уравнений механики сплошных деформируемых сред, условия пластичности изотропного тела (3) и его „двумерной“ формы, а также следующих четырех основных положений:

- 1) кинематического ограничения для векторного поля $d\mathbf{u}$, состоящего в том, что вектор приращения перемещений параллелен некоторой плоскости⁴ и не зависит от расстояния, измеряемого от точки его приложения до этой плоскости;
- 2) статического ограничения, заключающегося в том, что ось, нормальная указанной выше плоскости, является главной осью тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$;
- 3) несжимаемости плоской деформации $\text{tr } d\boldsymbol{\varepsilon} = 0$;
- 4) соосности тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и приращения тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$, выраженной, например, с помощью уравнения перестановочности А. Ю. Ишлинского (см. [13], [14])

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Замечательно то, что условие перестановочности А. Ю. Ишлинского тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и $d\boldsymbol{\varepsilon}$ полностью сохраняет свое значение и в теории пространственной задачи математической теории пластичности. Оно „жестко“ не предписывает коориентированность триэдров главных осей указанных тензоров, а эквивалентно возможности по крайней мере одной их коориентации в пространстве так, как это в действительности имеет место для состояний, соответствующих ребру призмы Кулона–Треска. Именно поэтому математическая теория пластичности А. Ю. Ишлинского не противоречит современным теориям пластичности, которые основываются на обобщенном ассоциированном законе течения.

Вывод „двумерного“ условия текучести $F(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ из данного пространственного (3) невозможен без привлечения ассоциированного закона течения или иных определяющих уравнений, если, конечно, изначально не выдвигать никаких „двумерных“ условий текучести. Предпочтительным, естественно, является вывод „двумерного“ условия текучести, исходя из трехмерного.

Попытаемся построить „двумерное“ условие текучести, исходя из трехмерного критерия текучести Треска и принимая функцию текучести в виде

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (2k)^2] [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - (2k)^2] [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (2k)^2].$$

На основании ассоциированного закона течения (2), сформулированного в главных осях напряжений

$$d\varepsilon_j = \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} d\lambda \quad (j = 1, 2, 3),$$

где здесь и в дальнейшем $d\varepsilon_j$ обозначают собственные значения тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}$, учитывая то, что в условиях плоского деформированного состояния

²Hencky H. Ueber einige statisch bestimmte Faelle des Gleichgewichts in plastischen Koerpern // Z. angew. Math. Mechanik. – 1923. – Bd. 3. – Н. 4. – С. 241–251. Имеется перевод на русский язык: Генки Г. О некоторых статически определенных случаях равновесия в пластических телах : сб. ст. // Теория пластичности. – М. : Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. – С. 80–101.

³Prandtl L. Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz ueber das plastische Gleichgewicht // Z. angew. Math. Mechanik. – 1923. – Bd. 3. – Н. 6. – С. 401–406. Имеется перевод на русский язык: Прандтль Л. Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел : сб. ст. // Теория пластичности. – М. : Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. – С. 102–113.

⁴Которая обычно принимается за координатную плоскость $x_3 = 0$.

третье направление главное и, кроме того, $d\varepsilon_3 = 0$, находим

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 2 [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (2k)^2] [(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) - (2k)^2] \times \\ \times [\sigma_3 - \sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_2] = 0, \quad (26)$$

откуда сразу же следует существенное для теории плоского деформированного состояния уравнение

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad (27)$$

во-первых, исключаяющее главное напряжение σ_3 , а во-вторых, указывающее на то, что внеплоское главное напряжение σ_3 — точно медианное главное нормальное напряжение.

Ясно, что ключевым требованием, касающимся зависимости внеплоского главного напряжения σ_3 от σ_1 , σ_2 , выступает ее симметрия при перестановке индексов 1 и 2 у этих главных нормальных напряжений. Соотношение (27) между тремя главными нормальными напряжениями в случае плоской деформации — симметричная форма главных напряжений σ_1 , σ_2 . И это, как часто утверждается, *единственная* симметричная форма, следующая из (26) и обеспечивающая как медианность внеплоского главного нормального напряжения, так и выполнение кинематического ограничения $d\varepsilon_3 = 0$. Медианность внеплоского главного нормального напряжения σ_3 выступает как весьма существенное требование, поскольку в силу критерия текучести Треска в этом случае главное напряжение σ_3 действительно никак не участвует в какой бы то ни было формулировке указанного критерия.

Как нетрудно также заметить, в силу соотношения (27) третий инвариант девиатора тензора напряжений (см. 10) оказывается равным нулю.

Ясно также, что условие $d\varepsilon_3 = 0$ выполняется, если сразу принять уравнение грани призмы Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, но тогда главное напряжение σ_3 остается неопределенным, т. е. невозможно однозначно указать соотношение $\sigma_3 = \sigma_3(\sigma_1, \sigma_2)$, что препятствует построению „двумерной“ функции текучести

$$F(\sigma_1, \sigma_2) = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3(\sigma_1, \sigma_2)).$$

Таким образом, в пользу соотношения (27), в отличие от других вариантов, имеются *три* существенных рациональных довода: симметрия, заведомое выполнение ограничений $\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$ и равенство нулю третьего инварианта девиатора тензора напряжений.

Внимательное рассмотрение приведенных выше соотношений позволяет констатировать, что заведомо выполненное в случае плоского деформированного состояния уравнение (26) будет удовлетворяться также при выполнении следующего условия:

$$(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) - (2k)^2 = 0$$

или

$$\sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 - (2k)^2 = 0.$$

Из последнего уравнения находим выражение для внеплоского главного напряжения

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 \pm \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 16k^2}}{2}. \quad (28)$$

Так, определяемое из трехмерного критерия текучести Кулона—Треска внеплоское главное напряжение σ_3 в зависимости от σ_1 , σ_2 , очевидно, согласуется с требованием симметрии при перестановке индексов 1 и 2 у главных нормальных напряжений. Сразу же ясно также, что внеплоское главное напряжение не будет в точности медианным.

Остается исследовать, будет ли значение σ_3 , определяемое на основании (28), промежуточным. Для этого введем параметр Лоде (W. Lode)

$$\mu = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}. \quad (29)$$

Абсолютное значение параметра Лоде не превосходит единицы.

Если σ_3 – промежуточное главное напряжение ($\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$), то

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \mu \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

и, следовательно,

$$\mu \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4k^2}.$$

Возводя в квадрат обе части последнего равенства, получим

$$(\mu^2 - 1) \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 4k^2.$$

Это равенство непротиворечиво, только если параметр Лоде по абсолютной величине будет превосходить единицу, а это не согласуется с его смыслом и определением.

Таким образом, внеплоское главное напряжение σ_3 в состоянии плоской деформации, которое определяется на основании (28), никогда не будет промежуточным, а „двумерное“ условие текучести максимального касательного напряжения следует формулировать как

$$\sigma_3 - \sigma_2 = 2k,$$

где σ_3 указывается формулой (28), например, с положительным альтернативным знаком.

Заметим, что в научной литературе часто подчеркивается, что экспериментальные исследования указывают на то, что условие пластичности Мизеса (не исключающее влияния промежуточного главного напряжения на текучесть) значительно лучше согласуется с опытными данными, чем условие пластичности Кулона–Треска (см., например, [4], с. 55, 57; [5], с. 29-34). Обычно при этом ссылаются на экспериментальные данные А. Надаи (A. Nadai) и Лоде (1928 г.). Именно в результате выполненных ими в Геттингене при участии Прандтля экспериментов и был сделан вывод о предпочтительности условия пластичности Мизеса. ”В опытах Надаи и Лоде окончательно установлено условие пластичности Мизеса, причем показано его преимущество перед условием наибольших касательных напряжений.” (Цит. по: Ильюшин А. А. Пластичность. Часть первая. Упруго-пластические деформации. – М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1948. – С. 57.) Имеется перевод на русский язык оригинальной работы Лоде: Лоде В. Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов // Теория пластичности : сб. статей (ред. Ю. Н. Работнов). – М. : Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. – С. 168–205. Таким образом, промежуточное главное нормальное напряжение, согласно Лоде–Надаи, должно влиять на текучесть металлов.

Как нетрудно показать, в случае плоской деформации любой критерий текучести изотропного тела $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ после подстановки в него зависимости $\sigma_3 = \sigma_3(\sigma_1, \sigma_2)$, устанавливаемой из условия

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 0, \tag{30}$$

формально приводится к каноническому виду

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k \tag{31}$$

и, следовательно, описывается в рамках критерия текучести Треска (более точно, *гранью* призмы Кулона–Треска). Поэтому наиболее общий критерий текучести изотропного твердого тела $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ после исключения третьего главного напряжения на основании (30) приводится к „двумерной“ форме $F(\sigma_1, \sigma_2) = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3(\sigma_1, \sigma_2)) = 0$ с некоторой новой ”двумерной“ функцией текучести $F(\sigma_1, \sigma_2)$, а затем – к форме критерия Треска (31).

Другими словами,⁵ если $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ – трехмерная функция текучести изотропного тела, то три уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 0, \quad f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

⁵И более точно.

совместно удовлетворяются лишь при выполнении условия

$$d\sigma_1 - d\sigma_2 = 0$$

вдоль действительного процесса нагружения. Физический смысл уравнений теории плоского деформированного состояния при этом будет сохраняться до тех пор, пока внеплоское главное напряжение σ_3 будет оставаться промежуточным (в том числе медианным).

5. Одна оценка снизу трехмерного инварианта напряжений Кулона—Треска с помощью системы „двумерных“ касательных напряжений

Наряду с трехмерным тензором напряжений σ_3 , характеризующим *действительные* трехмерные напряженные состояния, в том случае, когда напряжения соответствуют состоянию плоской деформации, будем рассматривать „двумерный“ тензор напряжений σ_2 .

Для состояний плоской деформации главные напряжения σ_1, σ_2 (т. е. собственные значения тензора σ_2) найдем, составив „двумерное“ характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_\alpha & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_\alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (\alpha = 1, 2)$$

и определяя его корни

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}. \quad (32)$$

Каноническое условие текучести (31), полученное для состояний плоской деформации, на основании (32) может быть сформулировано в компонентах „двумерного“ тензора напряжений σ_2 в следующем хорошо известном виде:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4k^2. \quad (33)$$

Ясно, что условие текучести в форме (33) инвариантно относительно поворотов системы координат в плоскости течения, поскольку для „двумерного“ тензора напряжений σ_2 будут справедливы равенства

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = (\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 4(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) = \text{tr}\sigma_2 - 4\det\sigma_2,$$

а каждая из величин $\text{tr}\sigma_2, \det\sigma_2$ обладает подобного рода инвариантностью.

С данным трехмерным напряженным состоянием и тензором σ_3 свяжем „двумерные“ касательные напряжения $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$, определив их следующими формулами:

$$\begin{aligned} 2\tau_{12} &= \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \\ 2\tau_{13} &= \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{13}^2}, \\ 2\tau_{23} &= \sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{23}^2}, \end{aligned}$$

и введем трехмерный инвариант напряжений

$$\mathcal{T} = \max(\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}). \quad (34)$$

Используя затем оценку [15], получим неравенство

$$\max_{i,j} \frac{|\sigma_i - \sigma_j|}{2} \geq \max(\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}), \quad (35)$$

указывающее нижнюю достижимую границу для инварианта Кулона—Треска. В силу конструкции инварианта (34), равенство в (35) достигается для любого состояния плоской деформации с двумерной характеристикой ij ($i, j = 1, 2; i \neq j$), для которого главное напряжение σ_s ($s \neq i, s \neq j$), т. е. внеплоское главное напряжение, будет промежуточным (в частности, точно медианным).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Tresca, H.* Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions / *H. Tresca* // Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. – Paris, 1864. – Vol. 59. – P. 754–758.

[2] *Coulomb, C. A.* Essay sur l'application des règles de maximes et minimis á quelques problemes de statique, relatifs a l'architecture / *C. A. Coulomb* // Mémoires de mathématique et de physique, présentés a l'académie Royale des Sciences. Année 1773. – Paris, de l'imprimerie Royale, 1776.

[3] *Надаи, А.* Пластичность. Механика пластического состояния вещества / *А. Надаи*. – М. ; Л. : ОНТИ, 1936. – 280 с.

[4] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Часть первая. Упруго-пластические деформации / *А. А. Ильюшин*. – М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1948. – 376 с.

[5] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / *Р. Хилл*. – М. : Гостехтеоретиздат, 1956. – 407 с.

[6] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / *Л. М. Качанов*. – М. : Наука, 1969. – 420 с.

(Первое издание этой книги: Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – М. : Гостехтеоретиздат, 1956. – 324 с.; более ранний источник: Качанов Л. М. Механика пластических сред. – М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1948. – 216 с.)

[7] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / *В. В. Соколовский*. – М. : Выш. шк., 1969. – 608 с.

(Это последнее третье издание; второе издание: Соколовский В. В. Теория пластичности. – М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1950. – 396 с.; первое издание книги было выпущено в свет издательством АН СССР в 1946 г.: Соколовский В. В. Теория пластичности. – М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1946. – 308 с.)

[8] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / *Д. Д. Ивлев*. – М. : Наука, 1966. – 232 с.

[9] *Радаев, Ю. Н.* Пространственная задача математической теории пластичности (2-е изд., перераб. и доп.) / *Ю. Н. Радаев*. – Самара : Изд-во Самарского гос. университета, 2006. – 340 с.

(Электронная копия опубликована в электронной библиотеке системы федеральных образовательных порталов <http://window.edu.ru/window/library> (рег. N 63-01/0023).)

[10] *Хаар, А.* К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах / *А. Хаар, Т. Карман* // Теория пластичности : сб. статей (ред. Ю. Н. Работнов). – М. : Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. – С. 41–56.

(Оригинальная работа: Haar A., Karman Th. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien // Nachr., kgl. Ges. Wiss. Gött. Math.-phys. – Kl., 1909. – H. 2. – S. 204–218.)

[11] *Леви, М.* К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости / *М. Леви* // Теория пластичности : сб. статей (ред. Ю. Н. Работнов). – М. : Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. – С. 20–23.

(Оригинальная работа: Levy M. Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delá des limites où l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état // Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences. – 1870. – T. 71. – P. 1323–1325.)

[12] *Радаев, Ю. Н.* К теории плоской деформации идеально пластического тела / *Ю. Н. Радаев* // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 2008. – № 3 (62). – С. 272–289.

[13] *Ишлинский, А. Ю.* Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости / *А. Ю. Ишлинский* // Уч. зап. МГУ. Механика. – 1946. – Вып. 117. – С. 90–108.

(Статья воспроизводится также в книге: Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Т. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. – М. : Наука, 1986. – С. 62–83. В

заключительном подстрочном замечании А. Ю. Ишлинский указывает на то, что в действительности статья была написана и представлена в редакцию в начале 1941 г.)

[14] *Радаев, Ю. Н.* О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 2007. – № 6 (56). – С. 102–114.

[15] *Mirsky, L.* The spread of a matrix / L. Mirsky // Mathematika. – 1956. – Vol. 3. – No. 2. – P. 127–130.

Радаев Юрий Николаевич,

доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

e-mail: radayev@ipmnet.ru

e-mail: y.radayev@gmail.com

Y. N. Radayev

**ON A LOWER BOUND OF THE THREE-DIMENSIONAL COULOMB–TRESCA
STRESS INVARIANT BY SYSTEMS OF TWO-DIMENSIONAL SHEAR
STRESSES**

Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Sciences

Abstract. The paper concerns a lower bound of the three-dimensional Coulomb–Tresca invariant of a stress state of a perfectly plastic solid. This problem is of interest in relation to isotropic yield conditions providing hyperbolic analytic type of three-dimensional equations of the mathematical theory of perfect plasticity based on generalized associated flow rule. The lower bound of the three-dimensional Coulomb–Tresca stress invariant is obtained by a system of three two-dimensional shear stresses naturally connected with a given three-dimensional stress state. It is then proved that the three-dimensional Coulomb–Tresca stress invariant reaches the lower bound for any plane strain state related to a given three-dimensional state as non-plane principal stress remains intermediate (in particular median) value.

Keywords: perfect plasticity, yielding, yield limit, Tresca prism, shear stress, principal stress, plane strain, intermediate principal stress, median principal stress

REFERENCES

- [1] *Tresca, H.* Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions / H. Tresca // Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. – Paris, 1864. – Vol. 59. – P. 754–758.
- [2] *Coulomb, C. A.* Essay sur l'application des règles de maximes et minimis á quelques problemes de statique, relatifs a l'architecture / C. A. Coulomb // Mémoires de mathématique et de physique, présentés a l'académie Royale des Sciences. Année 1773. – Paris, de l'imprimerie Royale, 1776.
- [3] *Nadai, A.* Plasticity. Mechanics plastic conditions of substance / A. Nadai. – M. ; L. : ONTI, 1936. – 280 p.
- [4] *Ilyushin, A. A.* Plasticity. Part one. Elasto-plastic deformations / A. A. Ilyushin. – M. ; L. : Gostekhoretizdat, 1948. – 376 p.
- [5] *Hill, R.* Mathematical theory of plasticity / R. Hill. – M. : Gostekhoretizdat, 1956. – 407 p.
- [6] *Kachanov, L. M.* Bases of the theory of plasticity / L. M. Kachanov. – M. : Science, 1969. – 420 p.
(First edition of this book: Kachanov, L. M. Osnovy of the plasticity theory. – M. : Gostekhoretizdat, 1956. – 324 p. ; earlier source: Kachanov L. M. Mekhanika of plastic environments. – M. ; L. : Gostekhoretizdat, 1948. – 216 p.)
- [7] *Sokolovsky, V. V.* Plasticity theory / V. V. Sokolovsky. – M. : Vyssh. sch. 1969 . – 608 p.
(This last third edition; second edition: Sokolovsky V. V. Teoriya of plasticity. – M. ; L. : Gostekhoretizdat, 1950 . – 396 p. ; the first edition of the book was published by publishing house Academy of Sciences of the USSR in 1946 : Sokolovsky V. V. Teoriya of plasticity. – M. ; L. : Publishing house of Academy of Sciences of the USSR, 1946 . – 308 p.)
- [8] *Ivlev, D. D.* Theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Science, 1966. – 232 p.
- [9] *Radayev, Yu. N.* Spatial task of the mathematical theory of plasticity (2nd prod. reslave. and additional) / Yu. N. Radayev. – Samara : Publishing house Samara State University, 2006. – 340 p.
(The electronic copy is published in electronic library of system of the federal educational portals <http://window.edu.ru/window/library> (reg. No. 63-01/0023).)
- [10] *Haar, A.* To the theory of intense conditions in plastic and loose environments / A. Haar, Th. Karman // Plasticity theory : coll. articles (edition Yu. N. Rabotnov). – M. : State publishing

house of foreign literature, 1948. – P. 41–56.

(Original work: Haar A., Karman Th. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien// Nachr., kgl. Ges. Wiss. Gött. Math.-phys. – Kl., 1909. – H. 2. – P. 204–218.)

[11] *Levi, M.* To a question of the general equations internal the movements arising in firm plastic bodies beyond limits elasticity / M. Levi // Plasticity theory : coll. articles (edition Yu. N. Rabotnov). – M. : State publishing house of foreign literature, 1948. – P. 20–23.

(Original work: Levy M. Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état// Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences. – 1870. – Vol. 71. – P. 1323–1325.)

[12] *Radayev, Yu. N.* To the theory of flat deformation of ideally plastic body / Yu. N. Radayev // Vestnik Samara State University. Natural-science series. – 2008. – No. 3 (62). – P. 272–289.

[13] *Ishlinsky, A. Yu.* About the equations of deformation of bodies beyond an elasticity limit / A. Yu. Ishlinsky // Uch. record Moscow State University. Mechanics. – 1946. – Vyp. 117. – P. 90–108.

(Article is reproduced also in the book: Ishlinsky A. Yu. Applied problems of mechanics. Vol. I. Mechanics vyazkoplastichesky and not quite elastic ph. – M. : Science, 1986. – P. 62–83. In the final interlinear remark A. Yu. Ishlinsky indicates that, that actually article was written and presented to edition at the beginning 1941.)

[14] *Radayev, Ю. Н.* About ratios of a perestanochnost Ishlinsky in the mathematical theory of plasticity / Yu. N. Radayev // Vestnik Samara State University. Natural-science series. – 2007. – No. 6 (56). – P. 102–114.

[15] *Mirsky, L.* The spread of a matrix / L. Mirsky // Matematika. – 1956. – Vol. 3. – No. 2. – P. 127–130.

Radayev, Yuri Nikolaevich

Dr. Sci. Phys.&Math., Professor, Leading Researcher, Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow

В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев, Н. Д. Кунашов

ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ В РАМКАХ ДИСКРЕТНОГО ПОДХОДА К РАЗРУШЕНИЮ

Тульский государственный университет

Аннотация. Поставлена задача о нагружении берегов трещины в бесконечной линейно упругой полуплоскости антисимметричными нагрузками. Трещина моделируется физическим разрезом с характерной толщиной δ_0 и слоем, лежащим на ее продолжении. Получена система интегрального и интегродифференциального уравнений. В рамках дискретного подхода приведено решение.

Ключевые слова: трещина, слой взаимодействия, продольный сдвиг, фундаментальное решение, характерный размер.

УДК: 539.375

Постановка задачи. Рассмотрим нагружение берегов трещины в бесконечной линейно-упругой плоскости системой сосредоточенных сил согласно схеме рис. 1.

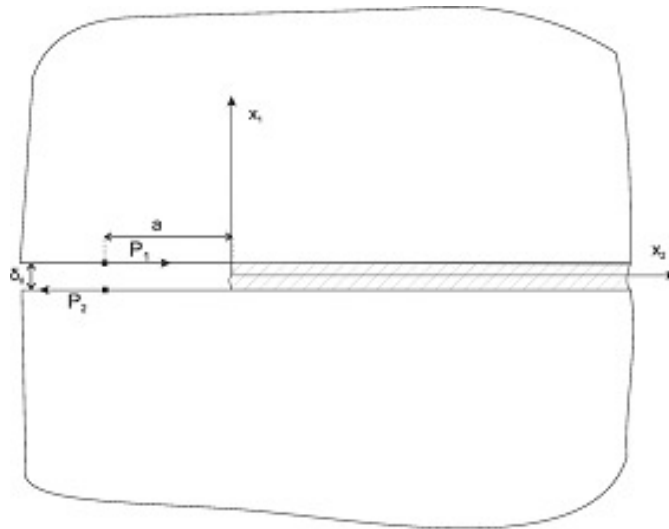


Рис. 1. Схема нагружения

Трещиноподобный дефект представим в виде физического разреза с характерной толщиной δ_0 и слоем, лежащим на его продолжении [1], [2].

Поступила 15.12.2012

Воспользуемся следующими обозначениями для напряжений на границе слоя: $\sigma_{12}^+(x_2) = \sigma_{12} \left(\frac{\delta_0}{2}, x_2 \right)$, $\sigma_{12}^-(x_2) = \sigma_{12} \left(-\frac{\delta_0}{2}, x_2 \right)$, $\sigma_{11}^+(x_2) = \sigma_{11} \left(\frac{\delta_0}{2}, x_2 \right)$, $\sigma_{11}^-(x_2) = \sigma_{11} \left(-\frac{\delta_0}{2}, x_2 \right)$. При дальнейшем изложении положим, что $x_2 = x$, все величины, имеющие размерность длины, отнесем к толщине слоя δ_0 , а напряжения — к параметру $\beta = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}$, для функций, соответствующих полуплоскостям на границе со слоем, будем использовать верхний индекс «р».

Решение поставленной задачи. Считаем, что векторы напряжений на границах слоя равны и противоположны векторам напряжений сопряженных границ полуплоскостей, отсюда компоненты тензора напряжений сопряженных границ полуплоскостей удовлетворяют условию:

$$\sigma_{12}^{p\pm} = \sigma_{12}^\pm, \quad \sigma_{11}^{p\pm} = \sigma_{11}^\pm. \quad (1)$$

Полагаем непрерывность функции перемещения по границе слоя

$$u^{p\pm} = u^\pm. \quad (2)$$

Рассмотрим связь между напряжениями и деформациями в виде закона Гука для случая плоского деформирования [3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= A\sigma_{11} - B\sigma_{22}, \\ \varepsilon_{22} &= A\sigma_{22} - B\sigma_{11}, \\ \sigma_{12} &= C\varepsilon_{12}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $A = \frac{\pi}{2}$; $B = \frac{\nu\pi}{2(1-\nu)}$; $C = \frac{2(1-\nu)}{\pi}$; ν — коэффициент Пуассона.

Средние напряжения и деформации в слое определяем через их граничные значения следующим образом:

$$\bar{\sigma}_{21}(x) = \bar{\sigma}_{12}(x) = 0.5(\sigma_{12}^-(x) + \sigma_{12}^+(x)), \quad (4)$$

$$\bar{\sigma}_{11}(x) = 0.5(\sigma_{11}^-(x) + \sigma_{11}^+(x)), \quad (5)$$

$$\bar{\varepsilon}_{11}(x) = u_1^+(x) - u_1^-(x), \quad (6)$$

$$\bar{\varepsilon}_{22}(x) = 0.5 \left(\frac{\partial u_2^+}{\partial x} + \frac{\partial u_2^-}{\partial x} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = 0.5 \left(\frac{\partial u_1^+}{\partial x} + \frac{\partial u_1^-}{\partial x} \right). \quad (8)$$

Считаем, что в рамках слоя распределение перемещений $u_2(x)$ линейно по координате x_1 . В этом случае

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} = u_2^+(x) - u_2^-(x). \quad (9)$$

Из (8) и (9) приходим к выражению

$$\bar{\varepsilon}_{21}(x) = 0.5 \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} \right) = 0.5 \left(u_2^+(x) - u_2^-(x) + 0.5 \left(\frac{\partial u_1^+}{\partial x} + \frac{\partial u_1^-}{\partial x} \right) \right). \quad (10)$$

Запишем условия равновесия в проекциях на ось x :

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0 \quad (11)$$

и ось x_1 :

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0. \quad (12)$$

Проинтегрируем уравнения (11) и (12) по толщине слоя и получим с учетом $\sigma_{12}^+ = \sigma_{12}^-$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{22}(x)}{\partial x} = -2\sigma_{12}^+(x), \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{21}(x)}{\partial x} = -2\sigma_{11}^+(x), \quad (14)$$

$$\text{где } \bar{\sigma}_{21}(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{21}(x, x_1) dx_1, \quad \bar{\sigma}_{22}(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{22}(x, x_1) dx_1.$$

Представим решение задачи Фламана о распределении перемещений точек границы верхней полуплоскости под действием нагрузок со стороны слоя в форме удобной для последующей численной реализации [1]:

$$u_1(x, x_1) \big|_{x_1=\frac{1}{2}} = u_1^+(x) = \int_0^L \sigma_{11}^+(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \quad (15)$$

$$u_2(x, x_1) \big|_{x_1=\frac{1}{2}} = u_2^+(x) = -P^+ \ln \frac{x+a}{L+a} + \int_0^L \sigma_{12}^+(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi. \quad (16)$$

Здесь a – расстояние от вершины разреза до точки приложения проекций безразмерной силы $P_i^+ = \frac{P_r^+}{\delta_0 \beta}$; $i = r = 1, 2$; P_r^+ – компоненты силы, отнесенные к толщине образца; L – удаленная точка с нулевым перемещением (данную точку будем ассоциировать с бесконечно удаленной точкой); L – расстояние от начала координат до L .

Продифференцируем (15) по x :

$$\frac{\partial u_1^+(x)}{\partial x} = \int_0^L \frac{\sigma_{11}^+(\xi)}{x-\xi} d\xi. \quad (17)$$

Из (10) с учетом (15) и (17) приходим к интегродифференциальному уравнению относительно средней сдвиговой деформации в слое:

$$\bar{\sigma}_{21}(x) = 0.25C \left(- \int_0^L \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}(\xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{x-\xi} \right) + C \left(-P_2^+ \ln \frac{x+a}{L+a} + \int_0^L \bar{\sigma}_{21}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi \right) \quad (18)$$

с граничным условием

$$\bar{\sigma}_{21}|_{x=0} = q_1. \quad (19)$$

Подставляя (15) в выражение (6), с учетом (5) и (3) получаем связь между средними напряжениями слоя:

$$A\bar{\sigma}_{11} - B\bar{\sigma}_{22} = 2 \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi. \quad (20)$$

Продифференцируем (16) и (18) по x :

$$\frac{\partial u_2^+(x)}{\partial x} = - \left(\frac{P_2^+}{x+a_1} \right) + \int_0^L \frac{\sigma_{12}^+(\xi)}{x-\xi} d\xi. \quad (21)$$

Из (21) с учетом (7) и (3) находим

$$A\bar{\sigma}_{22} - B\bar{\sigma}_{11} = \int_0^L \frac{\sigma_{12}^+(\xi)}{x-\xi} d\xi. \quad (22)$$

Принимая во внимание (13) из (22), приходим к следующему интегродифференциальному уравнению:

$$A\bar{\sigma}_{22} - B\bar{\sigma}_{11} = -0.5 \int_0^L \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}(\xi)}{\partial \xi} \frac{1}{x-\xi} d\xi \quad (23)$$

с граничным условием

$$\bar{\sigma}_{22}|_{x=0} = q_2. \quad (24)$$

Таким образом, уравнения (24), (28) образуют систему интегрального и интегродифференциального уравнения относительно средних нормальных напряжений.

В отсутствие нагрузки на торец слоя в (19), (24) положим $q_1 = q_2 = 0$.

После нахождения средних напряжений из уравнений (3), (5), (13), (14) определяем граничные напряжений $\sigma_{12}^+(x)$, $\sigma_{11}^+(x)$, $\sigma_{12}^-(x)$, $\sigma_{11}^-(x)$.

Таким образом, напряжения на границе слоя будут определяться интегродифференциальным уравнением (18) и системой (20) и (23):

$$\begin{cases} A\bar{\sigma}_{11} - B\bar{\sigma}_{22} = 2 \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \\ A\bar{\sigma}_{22} - B\bar{\sigma}_{11} = -0.5 \int_0^L \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}(\xi)}{\partial \xi} \frac{1}{x-\xi} d\xi. \end{cases} \quad (25)$$

Уравнение (18) и система (25) решается при удовлетворении граничных условий:

$$\bar{\sigma}_{22}|_{x=0} = 0, \quad (26)$$

$$\bar{\sigma}_{21}|_{x=0} = 0. \quad (27)$$

Для остальных четырех неизвестных $\sigma_{21}^+(x)$, $\sigma_{11}^+(x)$, $\sigma_{21}^-(x)$, $\sigma_{11}^-(x)$ приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{11}(x) = 0; \\ \bar{\sigma}_{21}(x) = \sigma_{21}^+(x); \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}(x)}{\partial x} = -2\sigma_{21}^+(x); \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}(x)}{\partial x} = -2\sigma_{11}^+(x). \end{cases} \quad (28)$$

Решать интегродифференциальное уравнение (18) и систему интегральных уравнений (25) будем численно. Для этого разобьем слой взаимодействия от кончика трещины до точки L на N элементов [1]. Отнесем значения напряжений на каждом интервале со значением в середине этого интервала. Уравнение (18) в дискретном виде примет вид

$$\bar{\sigma}_{21}^i(x_i) = 0.25C \left(-\sum_0^N \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}^i(\xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{x-\xi} \right) + C \left(-P_2^+ \ln \frac{x+a}{L+a} + \sum_0^N \bar{\sigma}_{21}^i(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi \right). \quad (29)$$

А система уравнений (25)

$$\begin{cases} A\bar{\sigma}_{11}^i - B\bar{\sigma}_{22}^i = 2 \sum_0^N \bar{\sigma}_{11}^i \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi}, \\ A\bar{\sigma}_{22}^i - B\bar{\sigma}_{11}^i = -0.5 \sum_0^N \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}^i(\xi)}{\partial \xi} \frac{1}{x-\xi} d\xi. \end{cases} \quad (30)$$

Таким образом, решение интегродифференциального и системы интегральных уравнений сведется к решению систем линейных алгебраических неизвестных.

Анализ полученных результатов. Для рассматриваемой системы уравнений аналитическое выражение сходимости сопряжено с большими сложностями, однако численное решение задачи позволяет говорить о вычислительной сходимости.

Построим графики зависимости величины напряжений в кончике трещины от количества разбиений на рис. 2 и 3.

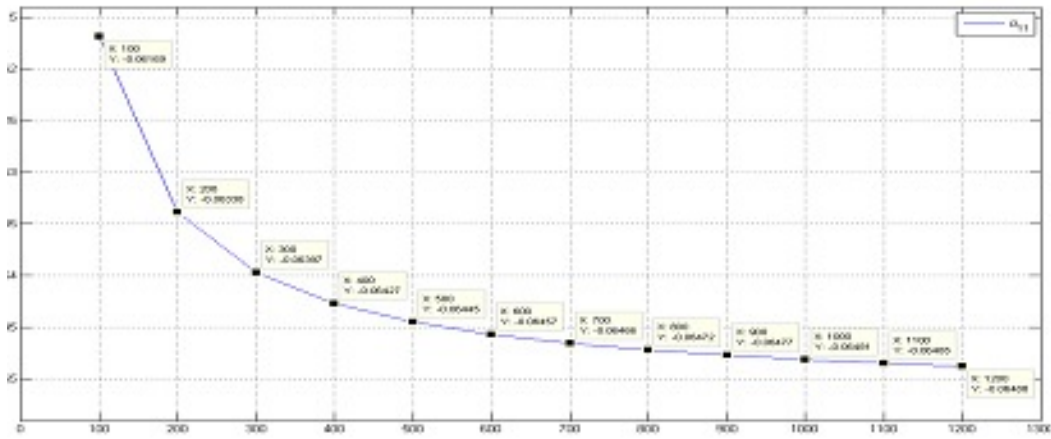


Рис. 2. Зависимость значения σ_{11}^+ от количества разбиений

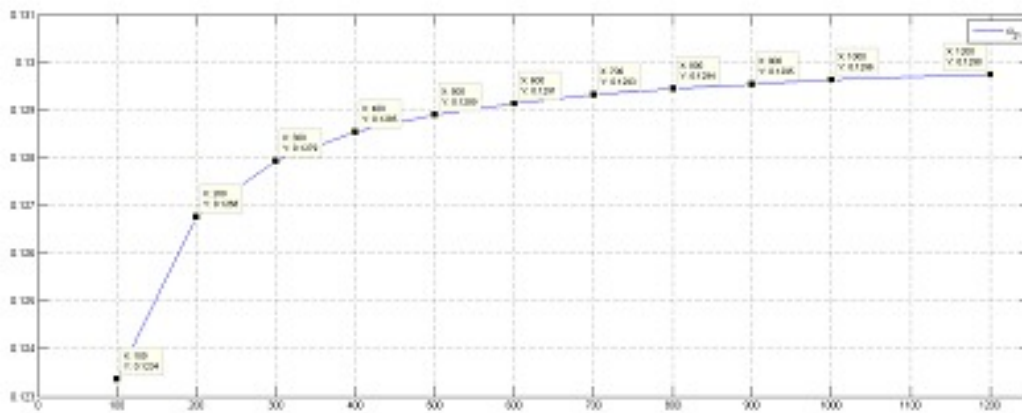


Рис. 3. Зависимость значения σ_{21}^+ от количества разбиений

После решения системы уравнений (25), а так же выражения граничных напряжений в слое через средние (28) получим следующий график для σ_{11}^+ и σ_{21}^+ , соотнесенных к значению σ_{21}^+ на границе трещины.

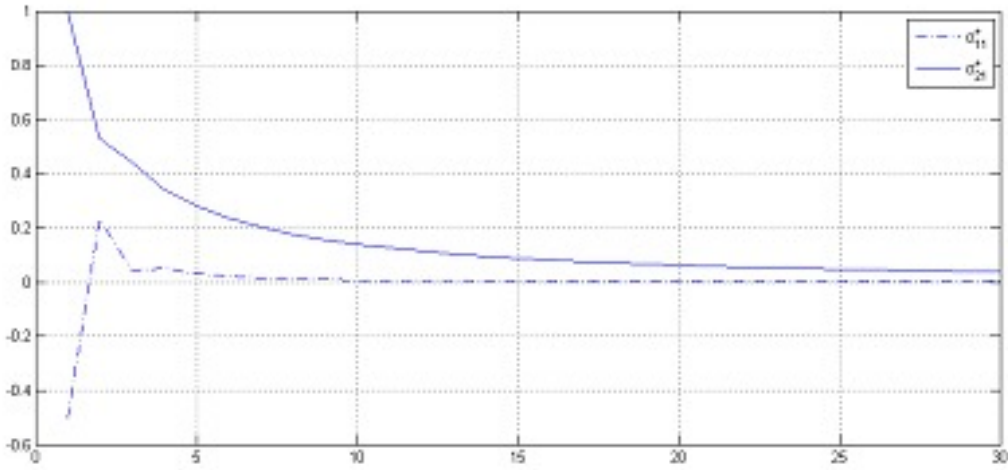


Рис. 4. Распределение напряжений σ_{11}^+ и σ_{21}^+

Сравним полученные результаты с работой [2], где полагалось, что напряжение σ_{12} однородно по толщине слоя.

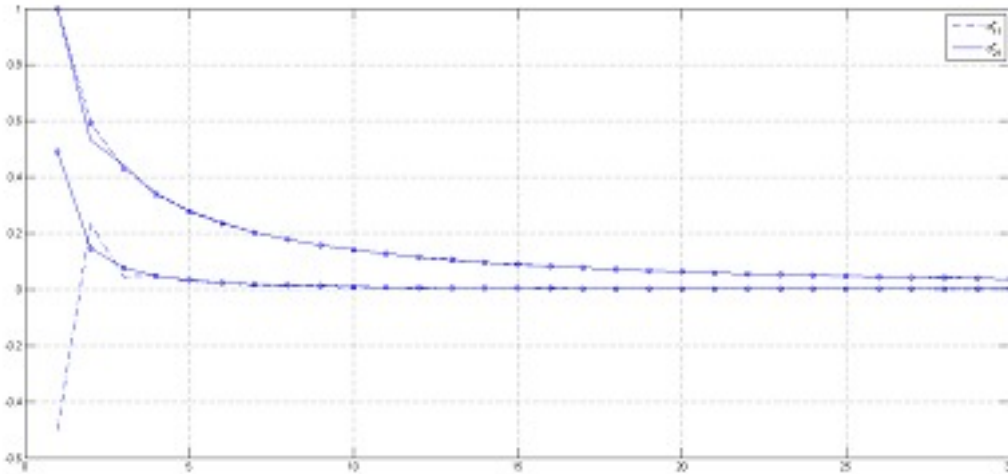


Рис. 5. Сравнения распределения напряжений с моделью, полагающей однородность σ_{12} по толщине слоя

На рис. 5 графики, относящиеся к модели, рассмотренной в [2], помечены звездочками. Видно, что полученные графики распределения напряжений совпадают с результатами работы [2], начиная с 4-го элемента. Однако в отличие от рассматриваемой работы мы получили отрицательное значение напряжения σ_{11}^+ на первом элементе, что является следствием дискретности модели. Для объяснения этого факта рассмотрим напряжения, действующие на первый единичный элемент слоя взаимодействия (рис. 6).

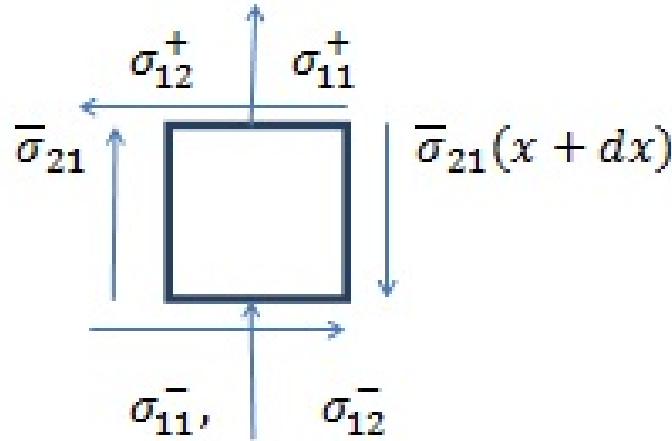


Рис. 6. Векторы напряжений на первом элементе

Разрешая первое уравнение системы (25), получаем распределение среднего сдвигового напряжения по слою $\bar{\sigma}_{21}$. Можно видеть, что это напряжение положительно на первом элементе (в середине элемента) и монотонно убывает с ростом координаты x , $\frac{\partial \bar{\sigma}_{21}}{\partial x} < 0$, начиная со второго элемента.

На первом элементе получим: с левого края в силу граничного условия (27) $\bar{\sigma}_{21} = 0$, а с правого края ввиду положительности среднего значения по элементу полученного из решения первого уравнения системы (25) $\bar{\sigma}_{21} > 0$. Итак, можно сделать вывод, что на первом элементе $\frac{\partial \bar{\sigma}_{21}}{\partial x} > 0$, а значит, в силу уравнения (14) $\sigma_{11}^+ < 0$

Качественное объяснение поведения граничного напряжения σ_{11}^+ находит подтверждение при численном решении системы (25) и уравнения (18).

Рассматривая в слое средние напряжения, отметим, что для случая хрупкого разрушения предложенная модель и модель [2] эквивалентны.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Глаголев, В. В.* Об одной постановке задачи упругопластического разделения / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – № 4. – Т. 50. – С. 187–195.
- [2] *Глаголев, В. В.* Упругая плоскость с физическим разрезом, нагруженная антисимметричной системой сил / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2012. – № 3. – С. 89–92.
- [3] *Лурье, А. И.* Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970.

Глаголев Вадим Вадимович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: vadim@tsu.tula.ru

Глаголев Леонид Вадимович,

магистр кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: len4ic92@rambler.ru

Кунашов Никита Дмитриевич,

аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: nkunashov@ginf.ru

V. V. Glagolev, L. V. Glagolev, N. D. Kunashev

DIRECT SHIFT WITHIN THE LIMITS OF THE DISCRETE APPROACH TO DESTRUCTION

Tula State University

Abstract. Solved problem about stresses on the edge of interaction layer A crack was represented as physical cut and . The crack is modeled physical cut with characteristic thick layer δ_0 and lying on its continuation. Derived system of integral and integrodifferential equations. Solve the problem for equally spaced, equal in magnitude and direction antisymmetric loads.

Keywords: crack, interaction layer, fundamental solution, characteristic size.

REFERENCES

[1] *Glagolev, V. V.* About one statement of a problem elastoplastic division / V. V. Glagolev, A. A. Markin // The application mechanics and the technical physics. – 2009. – No. 4. – Vol. 50. – P. 187–195.

[2] *Glagolev, V. V.* Elastic plane with a physical cut, loaded antisymmetric system of forces / V. V. Glagolev, A. A. Markin // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a firm body. – 2012. – No. 3. – P. 89–92.

[3] *Lurie, A. I.* Theory of elasticity / A. I. Lurie. – M. : Nauka, 1970.

Glagolev, Vadim Vadimovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of applied mathematics and informatics, Tula State University, Tula

Glagolev, Leonid Vadimovich

Master, Department of applied mathematics and informatics, Tula State University, Tula

Kunashev, Nikita Dmitrievich

Postgraduate Student, Department of applied mathematics and informatics, Tula State University, Tula

В. Г. Зубчанинов, Е. Г. Алексева

ЗАПАЗДЫВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ И СКАЛЯРНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Тверской государственный технический университет

Аннотация. Рассмотрен вопрос об общем свойстве запаздывания векторных и скалярных свойств материалов и его влияние на процессы деформирования материалов при сложном нагружении.

Ключевые слова: пластичность, сложное нагружение, свойство запаздывания, скалярные и векторные свойства, след запаздывания.

УДК: 539.3

1. Введение

Связь между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} , а также их векторами напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\varepsilon}$ в девятимерном подпространстве E_5 характеризуется скалярными и векторными свойствами. Для всех случаев простого нагружения постулат изотропии дает векторный закон

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\bar{\varepsilon}} \bar{\varepsilon}, \quad \left(S_{ij} = \frac{\sigma}{\bar{\varepsilon}} \varepsilon_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \right), \quad (1.1)$$

согласно которому скалярные свойства полностью определяются из простейших опытов на растяжение и кручение. Эти опыты позволяют найти закон упругопластического упрочнения

$$\sigma = \Phi(\bar{\varepsilon}). \quad (1.2)$$

Опыты показывают, что точность теории простого нагружения допускает отклонение вектора $\bar{\sigma}$ от пропорциональной зависимости $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$ порядка 6–7 %. Формулы (1.1), (1.2) устанавливают общий физический закон при пропорциональном (простом) нагружении для первоначально изотропных материалов при сложном напряженно-деформированном состоянии.

Явление запаздывания векторных свойств материалов при сложном нагружении было обнаружено впервые в экспериментальных исследованиях В. Прагера и К. Хоэнмзера в 1932 г. [1], в которых стальные трубчатые образцы подвергались одновременному растяжению и кручению по двузвенным ломаным траекториям. По существу в этих опытах был поставлен вопрос о влиянии предшествующих деформаций до излома их траектории на соотношения связи между напряжениями и деформациями при сложном нагружении в теории течения Прандтля-Рейсса для идеальных упругопластических материалов. В этой же работе [1] В. Прагер предложил записывать закон связи между тензорами напряжений и деформаций в виде линейного тензорного соотношения для начально-изотропных сред, а сами тензоры представить в виде векторов линейного координатно-тензорного девятимерного пространства. Однако авторы [1] не обратили внимания на то, что запаздывание вектора напряжений от направления процесса деформирования после излома траектории является

общим свойством векторных свойств для пластических материалов. При этом они не исследовали отдельно скалярные свойства материала и не обнаружили "нырков" напряжений и возникающего запаздывания скалярных свойств того же материала. Все это было сделано в работах А. А. Ильюшина [2]–[7]. В работе [2] было отмечено, что свойство запаздывания векторных свойств материалов – это совершенно общее свойство материалов при сложном нагружении, которое характеризуется следом запаздывания. В работе [3] отмечается: "Опыты показывают, что ориентация (направление) конечных приращений векторов относительно траектории деформации в точке К зависит не от всей траектории, а только от участка в пределах следов запаздывания λ , причем след λ , различный для разных материалов, имеет порядок трех-десяти "упругих" деформаций ε_T . Это и есть закон запаздывания". И далее: "Практически оказывается, что уже при $|\varepsilon| \lambda < 1$, где $|\varepsilon|$ – любая кривизна, участок λ может считаться траекторией малой кривизны, для которой справедливы соотношения"

$$\bar{\sigma} = \sigma \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{ds}, \quad \sigma = \Phi(s), \quad (\hat{\sigma} = \hat{p}_1). \quad (1.3)$$

Опытами В. С. Ленского доказано, что для траектории малой кривизны выполняется соотношение $\bar{\sigma} = \sigma \hat{p}_1$, где $\sigma = \Phi(s)$ – универсальная функция длины дуги s .

Направление нормали к поверхности текучести $F(\bar{\mathcal{E}})$ в точке нагружения К согласно (1.3) совпадает с направлением вектора напряжений, где $\hat{\sigma} = \bar{\sigma}/\sigma$, $\hat{p}_1 = d\bar{\mathcal{E}}/ds$. В работе [5] отмечается, что при простом нагружении $d\bar{\mathcal{E}}/ds \approx \bar{\mathcal{E}}/\bar{\mathcal{E}}$. Следовательно, отличие деформационной теории (1.2) от простейшей теории процессов для траекторий малой кривизны и теории пластического течения Мизеса равносильно отличию простого и близкого к простому нагружениям.

В работе [4] отмечается: "Свойство запаздывания состоит в том, что отклонение вектора напряжений $\bar{\sigma}$ от касательной к траектории деформации $d\bar{\mathcal{E}}/dt$ зависит не от всей траектории деформации, а лишь от ее последнего участка, равного длине следа запаздывания λ ; если радиус R кривизны траектории на участке следа был больше длины следа запаздывания ($R > \lambda$), то вектор напряжений практически совпадал с касательной к траектории деформации. Для процессов, изображаемых траекториями малой кривизны ($R \geq \lambda$), с удовлетворительной точностью установлено, что модуль вектора напряжений $\bar{\sigma}$ (совпадающего с касательной к траектории деформации) зависит только от длины дуги траектории s , т. е. является такой же функцией s , как и при простом нагружении при данной температуре", но только от величины $\bar{\mathcal{E}}$. "Найдено, что теория простого нагружения, вытекающая из постулата изотропии, подтверждается также в процессах, близких к простому нагружению".

В теории течения вектор полных деформаций, в том числе формоизменения, разлагается на вектор упругих деформаций $\bar{\mathcal{E}}^e$ и вектор пластических деформаций $\bar{\mathcal{E}}^p$. Их приращения связаны соотношениями

$$d\bar{\mathcal{E}}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, \quad d\bar{\mathcal{E}}^p = d\lambda \operatorname{grad} f(\bar{\sigma}), \quad (1.4)$$

где G – упругий модуль сдвига, $d\lambda$ – скалярный параметр, $f(\bar{\sigma})$ – функция, описывающая поверхность текучести. В теории Прандтля-Рейсса-Хилла для материалов с упрочнением принимается

$$2f = \bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma} - C_p^2(s^p) = 0, \quad (1.5)$$

где $s^p > 0$ – длина дуги траектории пластических деформаций в девиаторном пространстве E_5 , $ds^p = |d\bar{\mathcal{E}}^p|$. Приращение $d\bar{\mathcal{E}}^p$ согласно (1.4), (1.5) равно

$$d\bar{\mathcal{E}}^p = d\lambda \bar{\sigma}, \quad d\lambda = \frac{ds^p}{\sigma}. \quad (1.6)$$

Из (1.6) следует, что векторы $d\bar{\Xi}^p$ и $\bar{\sigma}$ компланарны. Следовательно, в девiatorном пространстве пластических деформаций $\bar{\sigma}$ направлен по касательной к траектории пластических деформаций. Такой образ процесса в [8]–[10] назван скользящим и для него соответствующий угол сближения ϑ_1 отсутствует.

Принцип градиентности (1.4) и (1.6) накладывает в теории пластического течения весьма жесткое ограничение на векторные свойства материалов. Полная деформация в отмеченной выше теории течения

$$d\bar{\Xi} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} + \frac{\bar{\sigma}d\bar{\Xi}^p}{\sigma^2} \bar{\sigma}, \quad (1.7)$$

или с учетом (1.6)

$$d\bar{\Xi} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} + ds^p \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}, \quad (1.8)$$

где скалярные свойства материала отражены универсальным законом упрочнения Одкависта

$$\sigma = H(s^p), \quad (1.9)$$

определяемым из опыта на простое нагружение при растяжении.

Первой теорией пластичности, учитывающей в ясном виде векторные свойства материалов и принцип запаздывания, была теория процессов А. А. Ильюшина [5]–[6] для двузвенных ломаных траекторий. В дальнейшем эта теория была обобщена на плоские траектории произвольной кривизны \varkappa_1 в форме теории компланарности трех векторов $\bar{\sigma}$, $d\bar{\sigma}$, $d\bar{\Xi}$ [7]. Основное соотношение этой теории было представлено в виде

$$d\bar{\sigma} = Nd\bar{\Xi} + (P - N) \frac{\bar{\sigma}d\bar{\Xi}}{\sigma^2} \bar{\sigma}, \quad (1.10)$$

$$P = \frac{d\bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma}}{d\bar{\Xi} \cdot \bar{\sigma}} = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1}, \quad N = \frac{d\bar{\sigma} \cdot \hat{n}}{d\bar{\Xi} \cdot \hat{n}}, \quad \cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1 = \frac{\bar{\sigma} d\bar{\Xi}}{\sigma ds}, \quad \hat{n} \perp \hat{p}_1, \quad (1.11)$$

где s – длины дуги траектории деформаций в девiatorном пространстве E_5 полных деформаций, ϑ_1 – угол сближения между $\bar{\sigma}$ и направлением единичного вектора, касательного к траектории $\hat{p}_1 = d\bar{\Xi}/ds$, $\hat{\sigma} = \bar{\sigma}/\sigma$ – единичный вектор напряжений.

Соотношения (1.10) представимы в более удобном виде с выделением угла сближения ϑ_1 и дифференциального уравнения для его определения [9], [10]:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = N \frac{d\bar{\Xi}}{ds} + \left(\frac{d\sigma}{ds} - N \cos \vartheta_1 \right) \hat{\sigma}, \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} + \varkappa_1 = -\frac{N}{\sigma} \sin \vartheta_1. \end{cases} \quad (1.12)$$

В теории течения (1.4)–(1.9) параметр $d\lambda$ можно определить из (1.6) через полные деформации

$$d\lambda = \frac{\bar{\sigma}d\bar{\Xi}^p}{\sigma^2} = (2G - P) \frac{\bar{\sigma}d\bar{\Xi}}{\sigma^2} = \left(2G \cos \vartheta_1 - \frac{d\sigma}{ds} \right) \frac{1}{\sigma}.$$

Тогда вместо (1.12) получаем

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = 2G \frac{d\bar{\Xi}}{ds} + \left(\frac{d\sigma}{ds} - 2G \cos \vartheta_1 \right) \hat{\sigma}, \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} + \varkappa_1 = -\frac{2G}{\sigma} \sin \vartheta_1, \end{cases} \quad (1.13)$$

где функция

$$\sigma = \Phi(s) \quad (1.14)$$

– универсальная функция А. А. Ильюшина, малоотличающаяся от функции простого нагружения (1.2) Роша и Эйхингера $\sigma = \Phi(\Theta)$ [8].

Сравнивая соотношения (1.12), (1.13), видим, что теория течения следует из гипотезы компланарности, если принять $N = 2G$. В частности, в теории процессов для траекторий малого кручения ($R \sim \lambda$) $N = \alpha(2G)$, где $\alpha = 0,7 \div 0,8$.

При постоянном \varkappa_1 из (1.13) можно получить приближенное решение для угла сближения

$$\vartheta_1 = \vartheta_1^* + (\vartheta_1^0 - \vartheta_1^*) e^{-k\Delta s}, \quad \vartheta_1^* = -\frac{\varkappa_1}{k}, \quad (1.15)$$

где $k = \alpha \cdot 2G/\sigma^T$, $\sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T$, σ_T – предел текучести, ϑ_1^0 – угол излома траектории деформирования в начальной точке К при $s = s_0$ участка траектории постоянной кривизны, $\Delta s = s - s_0$.

В теории течения, как правило, рассматриваются траектории малой кривизны ($R \gg \lambda$), для которых, по данным опытов В. С. Ленского [11], [12], $\vartheta_1 \approx 0$. Поэтому из (1.15) следует для больших R и малых \varkappa_1 , что $\vartheta_1^* \rightarrow 0$, и $\vartheta_1 = \vartheta_1^0 e^{-k\Delta s}$. В этом случае достаточно для функционала $P = d\sigma/ds$ использовать только один опыт на растяжение. Использование соотношений (1.12), учитывающих параметр \varkappa_1 сложности процесса деформирования и его векторные свойства, позволяет исследовать процессы средней кривизны, близкие к траекториям малой кривизны.

В работе [8] дана несколько измененная формулировка свойства запаздывания, которая названа *принципом запаздывания* векторных свойств материала: "Ориентация вектора напряжений $\bar{\sigma}$ в естественном репере $\{\hat{p}_k\}$ (Френе) зависит от внутренней геометрии только ограничительного отрезка траектории деформации, предшествующего рассматриваемой точке траектории. Длина этого отрезка λ называется *следом запаздывания* (памяти)", отражающим фундаментальное свойство твердых тел. В частности, отмечены как следствия: 1) если начиная с точки К траектория деформации становится прямолинейной, то на расстоянии λ от этой точки вектор напряжений $\bar{\sigma}$ направлен по этой прямой (в пределах точности $(6 - 7^\circ)$ теории простых процессов); 2) на траектории малой кривизны вектор напряжений $\bar{\sigma}$ направлен по касательной к траектории деформаций $\bar{\Theta}(s)$. Траекторией малой кривизны называется такая, для которой $(\lambda\varkappa_1)^2 \ll 1$, где \varkappa_1 – главная кривизна. При этом ничего не говорится об аналитичности или неаналитичности траектории в целом. В [8] также отмечается, что след запаздывания λ у различных материалов при нормальной температуре изменяется от значений $(3 \div 5)$ до $(11 \div 15)$ пределов упругих деформаций при растяжении. Далее в [8] утверждается, что в пределах малых деформаций $3 - 4\%$ это изменение незначительно и величину λ можно считать приближенно *константой материала*, а не процесса. Однако этой мечте В. С. Ленского не суждено было сбыться, хотя бы потому, что экспериментальные исследования на участках, предшествующих участку следа запаздывания, практически никем не проводились.

В работах [12], [13] В. С. Ленский отмечает, что след запаздывания характеризует "память" материала по отношению к векторным свойствам и делается попытка обобщить принцип запаздывания на скалярные свойства материала. В опытах по двузвенным ломаным траекториям с углами излома 90° было замечено, что на диаграммах прослеживания процессов $\sigma = \sigma(s)$ при активном деформировании образуются "нырки" с временным понижением напряжений на $7 - 8\%$ для сталей 38ХА и 30ХГСА. При этом после излома траекторий кривые $\sigma = \sigma(s)$ асимптотически и очень быстро стремились выйти на универсальную зависимость простого нагружения $\sigma = \Phi(\Theta)$ Роша и Эйхингера. При этом для углов излома порядка 45° это понижение практически отсутствовало и диаграмму $\sigma = \Phi(s)$ можно было считать практически универсальной. Этот вывод В. С. Ленского одно время доминировал в развитии теории процессов как непреодолимое препятствие, хотя опытов в диапазоне углов излома $\vartheta_1^0 > 90^\circ$ для пассивных процессов практически не ставилось.

Сформулированный в [12] В. С. Ленским принцип запаздывания скалярных свойств утверждает, что "скалярные свойства материала зависят не от всей предшествующей истории пластического деформирования, а лишь от внутренней геометрии некоторого конечного участка траектории деформации $\lambda_{ск}$, предшествующего рассматриваемому моменту. Величина $\lambda_{ск}$ называется *следом запаздывания скалярных свойств* материала". Расстояние по длине дуги s на диаграмме до точки, в которой диаграмма прослеживания процесса $\sigma = \sigma(s)$ выходила снова на диаграмму простого нагружения, принималось за след запаздывания $\lambda_{ск}$. При этом оказалось, что след запаздывания векторных свойств λ был в 2 – 3 раза больше следа запаздывания скалярных свойств $\lambda_{ск}$.

В работах И. М. Коровина [14], [15], Дао-Зуй-Бика [16], Р. А. Васина [17] в динамической лаборатории НИИ Механики МГУ на машине СН под руководством В. С. Ленского в период 1961–65 гг. были проведены опыты на сложное нагружение при растяжении с кручением стали 38ХА. В этих опытах при различных длинах дуг s_0 до излома двузвенных ломаных дуг допускались углы лишь в диапазоне $0 < \vartheta_1^0 \leq 90^\circ$, т. е. исследовались лишь активные процессы упругопластического деформирования. В работах И. М. Коровина было обнаружено, что после излома траекторий и исчерпания следа запаздывания λ зависимость $\sigma = \sigma(s)$ располагалась приблизительно параллельно универсальной кривой $\sigma = \Phi(\vartheta)$ простого нагружения. Для оценки следа запаздывания вводился допуск на угол сближения $\vartheta_1^0 < 0, 1$, то есть примерно 6° . При этом было отмечено, что при углах излома порядка 45° нырков напряжений не наблюдалось.

В 1979-80 гг. по программам А. А. Ильюшина и В. С. Ленского на автоматизированной испытательной машине на сложное нагружение IS-10TS в Японии группой ученых Охаши, Токуда и др. [18] были проведены экспериментальные исследования по проверке достоверности теории процессов А. А. Ильюшина. Испытания проводились на образцах из малоуглеродистой стали S15C по двузвенным плоским траекториям, в которых первое звено было криволинейным, длиной 2,5% и состояло из двух дуг окружностей постоянной кривизны с радиусами 1% и 0,4%, а второе звено было прямолинейным. Углы излома составляли $0^\circ; \pm 45^\circ; \pm 90^\circ; \pm 135^\circ$. Зависимости $\sigma = \sigma(s)$ после излома были различными для разных траекторий и зависели от истории предварительного нагружения и деформирования на первом участке. Однако все они стремились занять с ростом длины дуги s положение, близкое к диаграмме $\sigma = \Phi(s)$.

При исследовании векторных свойств материала на диаграмме $\vartheta_1 - \Delta s$ явление запаздывания проявлялось весьма четко. При смещении кривых $\vartheta_1 - \Delta s$ до совпадения значение в точке излома К наблюдалось совпадение данных опытов. На этом основании в [18] делается вывод о том, что зависимость $\vartheta_1 - \Delta s$ при деформировании по прямолинейному участку после излома можно отобразить единой кривой независимо от начального значения угла излома и предшествующей ему истории деформирования. Это интересное предположение основано на гипотезе локальной определенности [19]. Тем не менее, эти результаты нуждаются в дополнительной экспериментальной проверке. Другой результат работы [19] состоит в том, что убывание угла ϑ_1 с ростом Δs после излома не зависит от предшествующей истории деформирования. Однако этот результат также нуждается в экспериментальной проверке на более сложных криволинейных траекториях первого участка, в том числе учитывающих их возможную неаналитичность.

В работе В. А. Пелешко [20] результаты опытов работы [19] были использованы для проверки достоверности предложенных материальных функций гипотезы компланарности А. А. Ильюшина. Для малоуглеродистой стали S15C и латуни в [20] были обработаны опыты по программам смещенного веера ломаных траекторий с углами излома $\vartheta_1^0 = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ при предварительной деформации от $s_0 = 2$ до 5% на первом участке. Эти опыты показали, что при углах $\vartheta_1^0 < 60^\circ$ сложное нагружение на зависимость $\sigma - s$ сказывается слабо, а при $\vartheta_1^0 > 60^\circ$ на диаграмме образуются нырки напряжений, на которых уменьшение напряжений различно и может быть существенным. Зависимость

$\sigma - \Delta s$ стремится занять положение ниже диаграммы деформирования при простом растяжении. След запаздывания по скалярным и векторным свойствам не определялся.

В работе О. А. Шишмарева и А. Г. Щербо [21] исследовалось свойство запаздывания векторных и скалярных свойств нержавеющей стали с углами излома $\vartheta_1^0 = 0^\circ, 90^\circ, 110^\circ, 125^\circ, 145^\circ, 160^\circ, 180^\circ$. След запаздывания векторных свойств считался исчерпанным при достижении углом сближения $\vartheta_1^* = 5^\circ$. После нырка напряжений диаграмма $\sigma = \sigma(s)$ занимала положение ниже универсальной кривой простого нагружения $\sigma = \Phi(\Theta)$ и не имела тенденцию к сближению с ней, как показано в работах [14], [15], [18], [20]. След запаздывания скалярных свойств $\lambda_{ск}$, как считали авторы, не исчерпывался вовсе.

Исследования векторных свойств запаздывания также изучались в работах [22], [23]. Подробные исследования свойств запаздывания материалов приведены в работах [9], [10].

2. Общие определяющие уравнения В. Г. Зубчанинова в теории процессов

Векторы напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\Theta}$ в девятиорном координатном пространстве при ортонормированном базисе А. А. Ильюшина $\{\hat{i}_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, 5$) представим в виде [9], [10]

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\Theta} = \Theta_k \hat{i}_k, \quad (2.1)$$

где компоненты этих векторов

$$\begin{cases} S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} S_{11}, & S_2 = \sqrt{2} (S_{22} + \frac{1}{2} S_{11}) = \frac{S_{22} - S_{33}}{\sqrt{2}}, & S_3 = \sqrt{2} S_{12}, & S_4 = \sqrt{2} S_{23}, & S_5 = \sqrt{2} S_{13}, \\ \Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \Theta_{11}, & \Theta_2 = \sqrt{2} (\Theta_{22} + \frac{1}{2} \Theta_{11}) = \frac{\Theta_{22} - \Theta_{33}}{\sqrt{2}}, & \Theta_3 = \sqrt{2} \Theta_{12}, & \Theta_4 = \sqrt{2} \Theta_{23}, & \Theta_5 = \sqrt{2} \Theta_{13}, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \quad \Theta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

– компоненты девятиоров, δ_{ij} – символ Кронекера, $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций,

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ii}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} \quad (2.4)$$

– средние напряжение и деформация,

$$\sigma = \sqrt{S_k S_k} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_k \Theta_k} = \sqrt{\Theta_{ij} \Theta_{ij}} \quad (2.5)$$

– модули векторов и девятиоров напряжений и деформаций соответственно.

Согласно постулату изотропии и постулату физической определенности, определяющие соотношения связи напряжений и деформаций имеют вид [9]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \hat{p}_1 + M \hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3, \quad (2.6)$$

где s – длина дуги траектории деформирования (параметр прослеживания процесса как функция времени t),

$$\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\Theta}}{ds}, \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{\varkappa_1} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{ds^2}, \quad \hat{p}_3 = \frac{1}{\varkappa_2} \left[\varkappa_1 \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 \bar{\Theta}}{ds^2} \right) \right] \quad (2.7)$$

– ортонормированный естественный трехмерный репер Френе в изображающем Z – подпространстве, \varkappa_m ($m = 1, 2$) – параметры кривизны и кручения сложной траектории,

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} = \cos \vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin \vartheta_1 (\cos \vartheta_2 \hat{p}_2 + \sin \vartheta_2 \hat{p}_3) \quad (2.8)$$

– единичный вектор напряжений, $\vartheta_m (m = 1, 2)$ – его угловые сферические координаты в репере $\{\hat{p}_k\}$, называемые углами сближения и депланации,

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 - M_3 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2, \quad M_2 = 0, \\ M_k = M_k \{\varepsilon_0, \Theta, \varkappa_m, T, \beta\}_{s(t)}, \\ \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\sigma}{ds} \{\varepsilon_0, \Theta, \varkappa_m, T, \beta\}_{s(t)}, \end{array} \right. \quad (2.9)$$

– функционалы процесса, зависящие от параметров $\varepsilon_0, \Theta, \varkappa_m$, а также от температуры T и других нетермомеханических параметров β как сложных функций от параметра прослеживания процесса $s(t)$.

Для определения углов сближения $\vartheta_1(s)$ и депланации $\vartheta_2(s)$ имеет место система дифференциально нелинейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vartheta_1}{ds} + \varkappa_1 \cos \vartheta_2 = \frac{1}{\sigma} [-M_1 \sin \vartheta_1 + M_3 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2], \\ \sin \vartheta_1 \left(\frac{d\vartheta_2}{ds} + \varkappa_2 \right) = \varkappa_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \frac{M_3}{\sigma} \cos \vartheta_2. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

3. Математические модели теории процессов

При конкретизации функционалов $M_k, \frac{d\sigma}{ds}, \sigma(s)$ общие определяющие соотношения (2.6)–(2.10) теории процессов становятся одной из ее математических моделей. В работах [9], [10], [24] на основе анализа многочисленных экспериментальных данных при сложном нагружении аппроксимации функционалов процессов были предложены

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \Phi(s) = \sigma^T + 2G_* \Delta s + \sigma_* (1 - e^{-\beta \Delta s}), \\ \sigma = \Phi(s) + A f_0^p \Omega(s), \Omega = -[\gamma \Delta s e^{-\gamma \Delta s} + b(1 - e^{-\gamma \Delta s})], \\ f = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}, A\gamma(1 + b) = \left(\frac{d\Phi_0}{ds} + 2G \right), \\ \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} + \left(\frac{d\Phi_0}{ds} + 2G \right) f_0^p \left(1 - \frac{\gamma \Delta s}{1+b} \right) e^{-\gamma \Delta s}, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

где индекс "нолик" относится к точке излома траектории.

$$M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0) f^q e^{-\gamma_1 \Delta s} - \frac{\sigma \varkappa_1}{\sin \vartheta_1} (1 - \cos \vartheta_2) - M_3 \operatorname{ctg} \vartheta_1 \sin \vartheta_2, \quad (3.2)$$

$$M_3 = \sigma \varkappa_1 \frac{\sin \vartheta_1}{\cos \vartheta_2},$$

где

$$G_p = \frac{\Phi(\Theta)}{2\Theta} = G [1 - \omega(\Theta)] \quad (3.3)$$

– секущий или пластический модуль сдвига, G – упругий модуль сдвига, ω – параметр пластичности А. А. Ильюшина при простом нагружении.

При простом нагружении имеет место универсальный закон упрочнения Роша и Эйхингера $\sigma = \Phi(\Theta)$, а для траекторий малой и средней кривизны – универсальный закон Одквиста-Ильюшина:

$$\sigma = \Phi(s). \quad (3.4)$$

Из соотношений (3.1), (3.2) следует, что для траекторий средней кривизны и малого кручения могут быть приняты аппроксимации

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \Phi(s) - \left(\frac{d\Phi_0}{ds} + 2G \right) f_0^p \Delta s e^{-\gamma \Delta s}, \\ \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} - \left(\frac{d\Phi_0}{ds} + 2G \right) f_0^p (1 - \gamma \Delta s) e^{-\gamma \Delta s}, \\ M_1 = n\sigma, \quad n(s) = \frac{1}{s} + \frac{2G\omega}{\sigma} f_0^p e^{-\gamma_1 \Delta s}. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

При линеаризации (2.10) для траекторий малой и средней кривизны и малого кручения принимается $\sin \vartheta_1 \approx \vartheta_1$, $\cos \vartheta_1 \approx 1$, $\sin \vartheta_2 \approx \vartheta_2$, $\cos \vartheta_2 \approx 1$. В этом случае из (2.10) следует $M_3 = \sigma \varkappa_2 \vartheta_1$,

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} + n(s)\vartheta_1 = -\varkappa_1, \quad \vartheta_1 \frac{d\vartheta_2}{ds} = \varkappa_1 \vartheta_2. \quad (3.6)$$

Второе из уравнений (3.5) допускает решение $\vartheta_2 \equiv 0$, что соответствует теории процессов малого кручения [9]. Полагая в соотношении (3.5) параметры $q = 0$, $\gamma_1 = 0$ и $\omega = \omega_0$ получим приближенное выражение для M_1 , то есть

$$M_1 = \sigma n(s), \quad n(s) = \frac{1}{s} + k, \quad (3.7)$$

где

$$k = \frac{2G\omega_0}{\sigma_0^T}, \quad (3.8)$$

индекс "нолик" относится к точке излома при $\Delta s = 0$. Для параметра ω согласно теории процессов для траекторий средней кривизны принимается значение $\omega_0 = 0,7 - 0,8$.

В этом случае из (3.6) для активных процессов ($0 < \vartheta_1^0 < 90^\circ$) при $\varkappa_1 = const$ следует простое решение [25]

$$\vartheta_1 = \frac{s_0}{s} e^{-k\Delta s} \left\{ \vartheta_1^0 - \vartheta_1^* \left(1 - \frac{1}{ks_0} \right) \right\} + \vartheta_1^* \left(1 - \frac{1}{ks} \right), \quad (3.9)$$

где ϑ_1^0 – начальный угол излома при $s = s_0$, $\Delta s = s - s_0$, $\vartheta_1^* = -\varkappa_1/k$ – значение угла излома при $\Delta s \rightarrow \infty$. При $\varkappa_1 = 0$ решение (3.9) упрощается и принимает вид

$$\vartheta_1 = \frac{s_0}{s} \vartheta_1^0 e^{-k\Delta s}. \quad (3.10)$$

При $\Delta s = 0, s = s_0$ из (3.9) следует $\vartheta_1 = \vartheta_1^0$, а при $\Delta s \rightarrow \infty$ имеем $\vartheta_1 \rightarrow \vartheta_1^*$, то есть происходит стабилизация процесса, но полное исчерпание следа запаздывания как такового не обнаруживается. Если $\varkappa_1 = 0$, то есть при переходе к прямолинейному участку из (3.10) следует, что при $\Delta s \rightarrow \infty$ угол сближения $\vartheta_1 \rightarrow 0$. Это означает, что стабилизация процесса происходит одновременно с исчерпанием следа запаздывания векторных свойств. При плавном переходе от траектории постоянной кривизны к другой, с измененной кривизной, на траектории наблюдается скачок, подобный тому, который имеет место при ее изломе. Например, при переходе к прямолинейному участку при $s = s_*$ получаем

$$\vartheta_1 = \frac{s_*}{s} \vartheta_1^* e^{-k(s-s_*)}, \quad (3.11)$$

откуда следует, что $\vartheta_1 \rightarrow \infty$ при $\Delta s = s - s_* \rightarrow \infty$, то есть происходит исчерпание следа запаздывания. При сложной частичной разгрузке на диаграмме $\sigma = \sigma(s)$ образуется нырок, который хорошо описывается аппроксимациями (3.1), в том числе при $b = 0$.

4. Экспериментальные исследования.

Экспериментальное исследование проводилось на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ в лаборатории механических испытаний кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета. Трубчатые образцы из стали 45 испытывались по двухзвенной и трехзвенной траекториям в пространстве деформаций, представленным на рис. 1а, б соответственно.

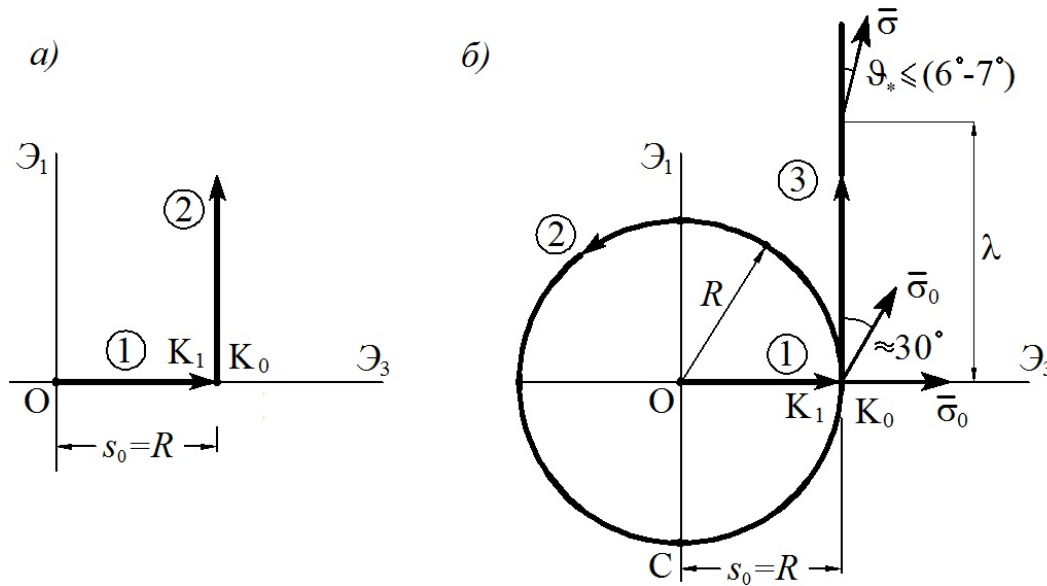


Рис. 1

На первом звене образцы подвергались кручению до точки K_1 , где компоненты вектора деформаций $\Theta_1 = 0$, $\Theta_3 = 2\%$. Затем производился излом траекторий на 90° . На втором звене ломаной траектории (рис. 1а) первой программы реализовывалось свойство запаздывания векторных свойств материала. На втором звене трехзвенной траектории (рис. 1б) была дополнительно реализована полная окружность радиуса $R = \Theta = 2\%$ с выходом в точку K_0 . В этой точке траектория плавно переходила на третье звено в виде той же прямой, что и в первом опыте. В точке K_0 происходило скачкообразное изменение кривизны общей траектории от значения $\varkappa_1 = 50$ до нуля. Это изменение дало эффект, аналогичный наличию угла излома ϑ_1^0 на траектории деформирования в первом опыте. Следовательно, угол излома ϑ_1^0 и кривизна \varkappa_1 в точке K_0 являются параметрами, характеризующими процесс сложного деформирования и его неаналитичность.

На рис. 2 представлены кривые изменения угла излома ϑ_1 от приращения $\Delta s = s - s_0$ длины дуги траектории s , где s_0 – ее значение в точке излома K_0 в каждом из опытов. Кривая 1 отвечает испытанию образца по двухзвенной ломаной, а кривая 2 – испытанию по трехзвенной траектории с дополнительным деформированием по окружности перед гладким выходом на прямолинейный участок. В первом опыте длина следа запаздывания с допуском на отклонение 7° оказалась $\lambda = 4,3\%$, а во втором опыте – $\lambda = 7\%$, т. е. в 1,63 раза больше. При этом радиус окружности $R = 2\%$ был меньше λ , то есть траектория постоянной кривизны по современной классификации не относится к траектории малой кривизны, и она в точке K_0 не является аналитической.

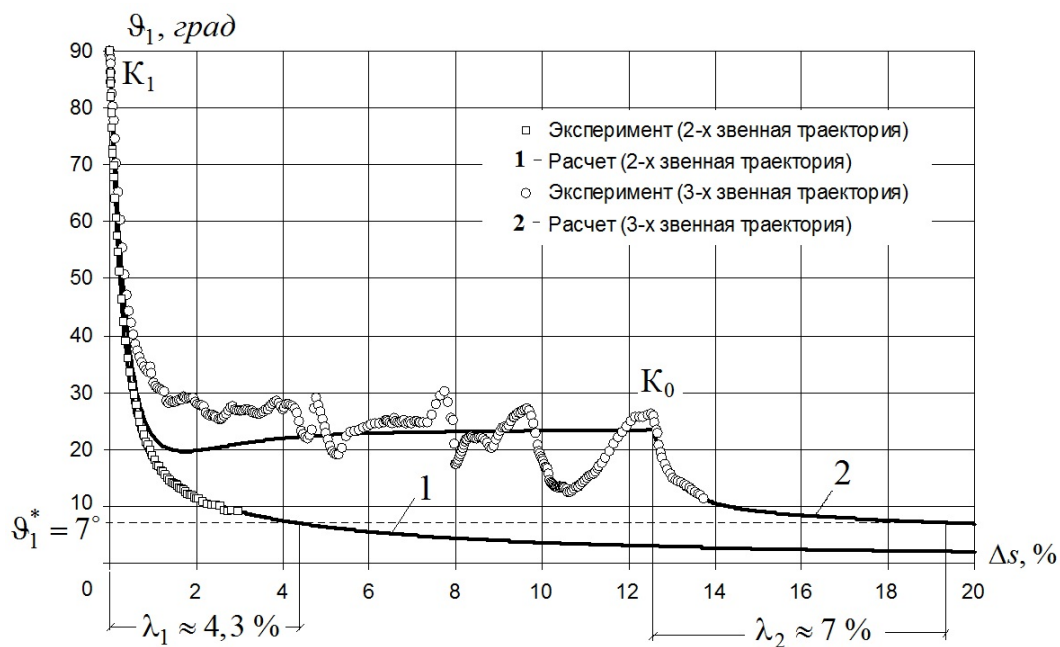


Рис. 2

Согласно общему принципу запаздывания ориентация вектора напряжений относительно направления касательной к траектории зависит не от всей длины траектории, а только от его последнего участка, называемого следом запаздывания λ . При анализе результатов опытов возникает естественный вопрос о том, можно ли до точки K_0 начала последнего участка траекторию заменить иным участком? Опыт показал, что след запаздывания существенно изменяется и, следовательно, ориентация вектора $\vec{\sigma}$ в точках не остается неизменной. В формулировке принципа запаздывания ничего не сказано о том, остается ли он справедливым для неаналитических траекторий, к которым относятся результаты данных опытов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Хоэнземер, К.* К механике пластического поведения стали / К. Хоэнземер, В. Прагер // Теория пластичности : сб. статей. – М. : ГИИЛ, 1948. – С. 257–282.
- [2] *Ильюшин, А. А.* О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошной среды / А. А. Ильюшин // Прикладная математика и механика. – 1954. – Т. 18. – № 6. – С. 641–666.
- [3] *Ильюшин, А. А.* Об основах общей математической теории пластичности / А. А. Ильюшин // Вопросы теории пластичности. – М. : Изд-во АН СССР, 1961. – С. 4–29.
- [4] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
- [5] *Ильюшин, А. А.* Вопросы общей теории пластичности // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24. – Вып. 3. – С. 399–411.
- [6] *Ильюшин, А. А.* Труды (1946–1966). Т. 2 : Пластичность. – М. : Физматлит, 2004. – 480 с.
- [7] *Ильюшин, А. А.* Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М. : МГУ, 1990. – 310 с.
- [8] *Ильюшин, А. А.* О соотношениях и методах современной теории пластичности. / А. А. Ильюшин, В. С. Ленский // Успехи механики деформируемых сред. – М. : Наука, 1975. – С. 240–255.
- [9] *Зубчанинов, В. Г.* Механика процессов пластических сред / В. Г. Зубчанинов. – М. : Физматлит, 2010. – 352 с.
- [10] *Зубчанинов, В. Г.* Устойчивость и пластичность. Т. 2 : Пластичность / В. Г. Зубчанинов. – М. : Физматлит, 2008. – 336 с.
- [11] *Зубчанинов, В. Г.* О соотношениях между напряжениями и деформациями в теории пластичности при сложном нагружении / В. Г. Зубчанинов // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. Нижегород. ун-та, 2011. – № 73. – С. 240–255.
- [12] *Ленский, В. С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упруго-пластических деформаций / В. С. Ленский // Вопросы теории пластичности. – М. : Изд-во АН СССР, 1961. – С. 58–82.
- [13] *Ленский, В. С.* Экспериментальная проверка законов изотропии и запаздывания при сложном нагружении / В. С. Ленский // Известия АН СССР. ОТН. – 1958. – № 11. – С. 15–24.
- [14] *Коровин, И. М.* Некоторые вопросы пластичности материала при нагружении с точкой излома / И. М. Коровин // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1969. – № 3. – С. 152–158.
- [15] *Коровин, И. М.* Экспериментальное определение зависимости напряжение-деформация при сложном нагружении по траектории с одной точкой излома / И. М. Коровин // Инженерный журнал АН СССР. – 1964. – Т. 4. – № 3. – С. 592–600.
- [16] *Дао-Зуй-Бик.* О гипотезе локальной определенности в теории пластичности / Дао-Зуй-Бик // Вестник МГУ. Математики и механика. – 1965. – № 2. – С. 67–75.
- [17] *Васин, Р. А.* Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении / Р. А. Васин // Упругость и неупругость. – М. : МГУ, 1971. – № 1. – С. 59–126.
- [18] *Охаши, И.* Некоторые экспериментальные данные об общем законе пластичности Ильюшина / И. Охаши, М. Токуда, И. Курита и др. // Известия АН СССР. МДТТ. – 1981. – № 6. – С. 53–64.
- [19] *Ленский, В. С.* Гипотеза локальной определенности в теории пластичности / В. С. Ленский // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 5. – С. 154–158.
- [20] *Пелешко, В. А.* Изоморфизм трехчленных соотношений теории пластичности и условия разрешимости краевых задач / В. А. Пелешко // Вестник МГУ. Математика и механика. – 1987. – № 4. – С. 93–96.

[21] *Шиммарев, О. А.* Образ процесса нагружения для двухзвенных ломаных траекторий деформации с углом излома более 90° / О. А. Шиммарев, А. Г. Щербо // Известия АН СССР. МТТ. – 1982. – № 5. – С. 185–189.

[22] *Зубчанинов, В. Г.* Экспериментальное исследование упругопластического деформирования сталей 40, 40Х при сложном нагружении по плоским траекториям / В. Г. Зубчанинов, Д. Е. Иванов, А. В. Акимов // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела : мат. III междунар. науч. симпозиума. – Тверь : Изд-во ТвеПИ, 1993. – Ч. 3. – С. 44–93.

[23] *Акимов, А. В.* Экспериментальное исследование пластических свойств стали 45 на многозвенных пространственных траекториях деформаций / А. В. Акимов, В. Дабуль, В. Г. Зубчанинов, Н. Л. Охлопков // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела : мат. III междунар. науч. симпозиума. – Тверь : Изд-во ТвеПИ, 1993. – Ч. 3. – С. 164–185.

[24] *Зубчанинов, В. Г.* Теория процессов, полная и неполная пластичность сплошных сред и постулат изотропии А. А. Ильюшина / В. Г. Зубчанинов // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела : мат. VII междунар. науч. симпозиума. – Тверь : ТвГТУ. – С. 30–49.

[25] *Зубчанинов, В. Г.* Моделирование процессов сложного упругопластического деформирования материалов / В. Г. Зубчанинов, Е. Г. Алексеева // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – Т. 1. – С. 172–181.

Зубчанинов Владимир Георгиевич,

доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь

e-mail: vgz@rambler.ru

Алексеева Елена Геннадьевна,

кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь

e-mail: kafsm@yandex.ru

V. G. Zubchaninov, E. G. Alekseeva

DELAY OF VECTOR AND SCALAR PROPERTIES OF MATERIALS UNDER COMPLEX LOADING

Tver State Technical University

Abstract. In article considered the question of the common property of delay vector and scalar properties of materials and its influence on processes of deformation of materials under complex loading.

Keywords: plasticity, complex loading, property of delay, scalar and vector properties, the trace of delay.

REFERENCES

- [1] *Hoenzemer, K.* To mechanics of plastic behavior of steel / K. Hoenzemer, V. Prager // *Plasticity theory* : coll. of articles. – M. : GIIL, 1948. – P. 257–282.
- [2] *Ilyushin, A. A.* About communication between tension and small deformations in to mechanics of the continuous environment / A. A. Ilyushin // *Applied mathematics and mechanics*. – 1954. – Vol. 18. – No. 6. – P. 641–666.
- [3] *Ilyushin, A. A.* About bases of the general mathematical theory of plasticity / A. A. Ilyushin // *Questions of the theory of plasticity*. – M. : Publishing house of Academy of Sciences of the USSR, 1961. – P. 4–29.
- [4] *Ilyushin, A. A.* Plasticity. Bases of the general mathematical theory / A. A. Ilyushin. – M. : Publishing house of Academy of Sciences of the USSR, 1963. – 272 p.
- [5] *Ilyushin, A. A.* Questions of the general theory of plasticity // *Applied mathematics and mechanics* / A. A. Ilyushin. – 1960. – Vol. 24. – Issue 3. – P. 399–411.
- [6] *Ilyushin, A. A.* Works (1946–1966). Vol. 2 : Plasticity / A. A. Ilyushin. – M. : Fizmatlit, 2004. – 480 p.
- [7] *Ilyushin, A. A.* Mechanics of the continuous environment / A. A. Ilyushin. – M. : MSU, 1990. – 310 p.
- [8] *Ilyushin, A. A.* About ratios and methods of the modern theory of plasticity. / A. A. Ilyushin, V. S. Lenskii // *Successes of mechanics of deformable environments*. – M. : Nauka, 1975. – P. 240–255.
- [9] *Zubchaninov, V. G.* Mechanics of processes of plastic environments / V. G. Zubchaninov. – M. : Fizmatlit, 2010. – 352 p.
- [10] *Zubchaninov, V. G.* Stability and plasticity. Vol. 2 : Plasticity / V. G. Zubchaninov. – M. : Fizmatlit, 2008. – 336 p.
- [11] *Zubchaninov, V. G.* About ratios between tension and deformations in plasticity theories at difficult loading / V. G. Zubchaninov // *Problems durability and plasticity*. Interhigher education institution coll. Nizhegorod. University, 2011. – No. 73. – P. 240–255.
- [12] *Lenskii, V. S.* Experimental check of the main postulates of the general theories of uprugoplastichesky deformations / V. S. Lenskii // *Theory questions plasticity*. – M. : Publishing house of Academy of Sciences of the USSR, 1961. – P. 58–82.
- [13] *Lenskii, V. S.* Experimental verification of laws of an isotropy and delays at difficult loading / V. S. Lenskii // *News of Academy of Sciences of the USSR. OTN*. – 1958. – No. 11. – P. 15–24.
- [14] *Korovin, I. M.* Some questions of plasticity of a material when loading with break point / I. M. Korovin // *News of Academy of Sciences of the USSR. Mechanics firm bodies*. – 1969. – No. 3. – P. 152–158.

- [15] *Korovin, I. M.* Experimental determination of dependence tension deformation at difficult loading on a trajectory with one point break / I. M. Korovin // Engineering journal of Academy of Sciences of the USSR. – 1964. – Vol. 4. – No. 3. – P. 592–600.
- [16] *Dao-Zuy-Bik.* About a hypothesis of local definiteness in the plasticity theory / Dao-Zuy-Bik // Vestnik of the Moscow State University. Mathematics and mechanics. – 1965. – No. 2. – P. 67–75.
- [17] *Vasin, R. A.* Some questions of communication of tension and deformations at the difficult loading / R. A. Vasin // Elasticity and unelasticity. – M. : MSU, 1971. – No. 1. – P. 59–126.
- [18] *Okhasha, I.* Some experimental data about the general law Ilyushin's plasticity / I. Okhasha, M. Tokuda, I. Kurita, etc. // AN news USSR. MDFB. – 1981. – No. 6. – P. 53–64.
- [19] *Lenskii, V. S.* Hypothesis of local definiteness in the plasticity theory / V. S. Lenskii // AN news USSR. OTN. Mechanics and mechanical engineering. – 1962. – No. 5. – P. 154–158.
- [20] *Peleshko, V. A.* Isomorphism of tripartite ratios of the theory of plasticity and conditions of resolvability of regional tasks / V. A. Peleshko // Vestnik of the Moscow State University. Mathematics and mechanics. – 1987. – No. 4. – P. 93–96.
- [21] *Shishmarev, O. A.* Image of process of loading for two-tier broken lines deformation trajectories with a break corner more than 90° / O. A. Shishmarev, A. G. Shcherbo // AN news USSR. MFB. – 1982. – No. 5. – P. 185–189.
- [22] *Zubchaninov, V. G.* Pilot study of the uprugoplastichesky deformations staly 40, 40H at difficult loading on flat trajectories / V. G. Zubchaninov, D. E. Ivanov, A. V. Akimov // Stability and plasticity in to mechanics of a deformable firm body : mat. III international scientific symposium. – Tver : Publishing house of TvePI, 1993. – Part. 3. – P. 44–93.
- [23] *Akimov, A. V.* Pilot study of plastic properties of steel 45 on multilink spatial trajectories of deformations / A. V. Akimov, B. Dabul, V. G. Zubchaninov, N. L. Okhlopkov // Stability and plasticity in to mechanics of a deformable firm body : mat. III international scientific symposium. – Tver : Publishing house of TvePI, 1993. – Part. 3. – P. 164–185.
- [24] *Zubchaninov, V. G.* Theory of processes full and incomplete plasticity continuous environments and isotropy postulate A. A. Ilyushin / V. G. Zubchaninov // Problems of durability, plasticity and stability in mechanics of the deformable firm body : mat. VII international scientific symposium. – Tver : TvSTU. – P. 30–49.
- [25] *Zubchaninov, V. G.* Modeling of processes of the difficult uprugoplastichesky deformations of materials / V. G. Zubchaninov, E. G. Alekseeva // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Line : Mechanics of definable state. – 2010. – No. 2 (8). – Vol. 1. – P. 172–181.

Zubchaninov, Vladimir Georgievich

Dr. Tech. Sci., Professor, Department of the Resistance of materials, elasticity and plasticity theories, Tver State Technical University, Tver

e-mail: vgz@rambler.ru

Alekseeva, Elena Gennadiевна

Cand. Tech. Sci., Assoc. Professor, Department of the Resistance of materials, elasticity and plasticity theories, Tver State Technical University, Tver

e-mail: kafsm@yandex.ru

В. Г. Зубчанинов, А. А. Алексеев

К ВОПРОСУ ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ЭФФЕКТА БАУШИНГЕРА И ПОСТРОЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ

Тверской государственный технический университет

Аннотация. В работе анализируется эффект изменения радиуса гипотетической поверхности текучести и эффект Баушингера при знакопеременном растяжении-сжатии на основе экспериментальных данных для различных материалов, полученных Г. Б. Тальповым [1].

Ключевые слова: пластичность, знакопеременное нагружение, поверхность текучести, эффект Баушингера.

УДК: 539.3

В математических моделях теории пластичности для описания процессов упругопластического деформирования начально-изотропных тел может быть использована гипотетическая поверхность текучести (граница пределов текучести) как граница, разделяющая области активного пластического деформирования и упругого деформирования или разгрузки в пространствах напряжений или деформаций. Например, современная теория течения базируется на концепции трансляционно-изотропного упрочнения материалов и учитывает эффект Баушингера через смещение центра поверхности текучести и изменения текущего радиуса. Как правило, используется сферическая поверхность в девиаторном векторном пространстве. Ее можно назвать "гипотетической", поскольку она в одном направлении может расширяться, а в другом сужаться и изменять свою форму. В этих направлениях простого нагружения-разгрузки эффект Баушингера может резко изменяться. При этом необходимо знать не только начальную форму и размеры этой границы, но и ее последующие изменения в зависимости от истории нагружения. Для определения конкретных изменений формы, размеров и положения последующих поверхностей текучести необходимы тщательные экспериментальные исследования при различных видах напряженных состояний и при сложных непропорциональных нагружениях.

В данной статье использованы результаты [1] систематических экспериментальных исследований по изучению эффекта Баушингера и границ пределов текучести, проведенных под руководством Г. Б. Тальпова в лаборатории сопротивления материалов НИИ математики и механики ЛГУ (ныне СПбГУ). Эффект Баушингера изучался в основном на сплошных образцах из начально-изотропных металлов при разных уровнях пропорционального нагружения, в том числе при больших деформациях.

Образцы нагружались [1] при однородном напряженно-деформированном состоянии за начальный предел текучести σ_T до некоторого нового значения предела текучести σ_T^K , после чего образец разгружался до нуля и имел остаточную деформацию ε_{11}^P . При повторном нагружении в этом же направлении значение нового предела текучести σ_T^{K1} близко к σ_T^K , и поэтому принималось $\sigma_T^{K1} = \sigma_T^K$. При повторном нагружении обратного знака значение вторичного

предела текучести σ_T^M , взятое по модулю, оказывалось меньше σ_T^K . Этот эффект оценивался в [1] безразмерным параметром

$$\gamma = \frac{\sigma_T^M}{\sigma_T^K} \tag{1}$$

при соответствующей величине пластической деформации ε_{11}^P . Для определения пределов текучести использовался общепринятый технический допуск на остаточную деформацию $\varepsilon_p^* = 0,2\% = 2 \cdot 10^{-3}$.

Для построения гипотетической поверхности текучести (границы пределов текучести) необходимо знать форму этой поверхности. Считается, что на основании постулата изотропии А. А. Ильюшина [2] для начально-изотропных сред при техническом допуске $\varepsilon_p^* = 0,2\%$ начальная (мгновенная) поверхность текучести имеет форму сферы (окружности) Мизеса [3], но в процессе нагружения она искажается и смещается в направлении процесса [4]. Однако, если условно принять, что в процессе деформирования форма гипотетической поверхности текучести остается окружностью (сферой), что заложено в большинстве математических моделей теории пластичности, то указанное предположение позволяет определить координаты ее центра и радиус только из опытов на знакопеременное нагружение при известном экспериментально определенном положении двух ее точек. В этом случае радиус поверхности текучести, изменяющийся в процессе активного нагружения,

$$r = \frac{\sigma_T^K + \sigma_T^M}{2} = \frac{\sigma_T^K}{2} (1 + \gamma), \tag{2}$$

а координата центра при возможном смещении (трансляции) поверхности текучести, характеризующая упрочнение материала,

$$a = \sigma_T^K - r = \frac{\sigma_T^K}{2} (1 - \gamma). \tag{3}$$

На основании табличных экспериментальных значений [1] σ_T^K , σ_T^M , ε_{11}^P , γ на рис. 1 приведены графики зависимостей параметра γ , характеризующего эффект Баушингера, от величины накопленной пластической деформации ε_{11}^P , также приведенные Г. В. Талышовым [1], а на рис. 2 и 3 – построенные нами графики зависимостей от величины ε_{11}^P радиус-функции r поверхности текучести и положения ее центра a , определенные по формулам (2), (3) соответственно.

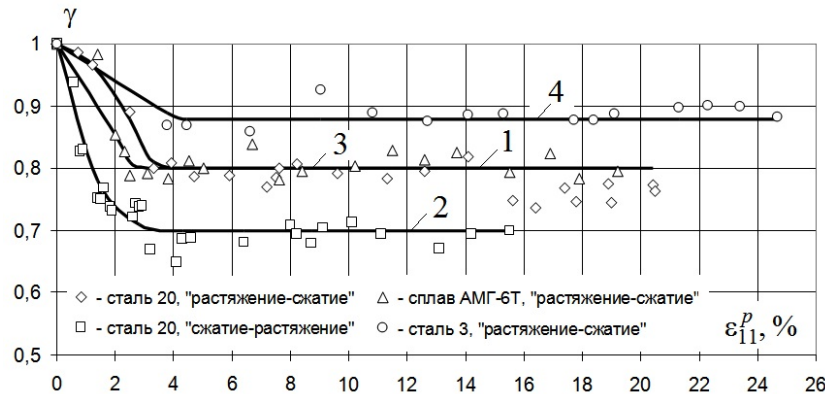


Рис. 1. Эффект относительного изменения предела текучести по Баушингеру в процессе деформирования

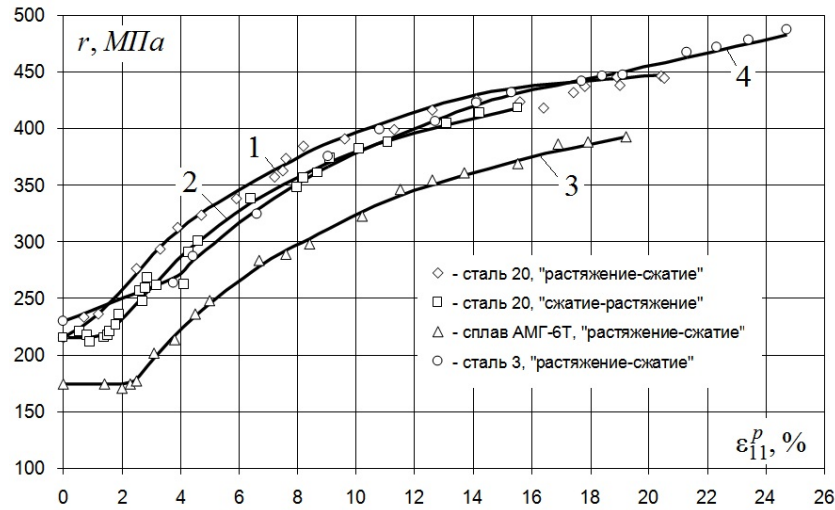


Рис. 2. Изменение радиуса поверхности текучести

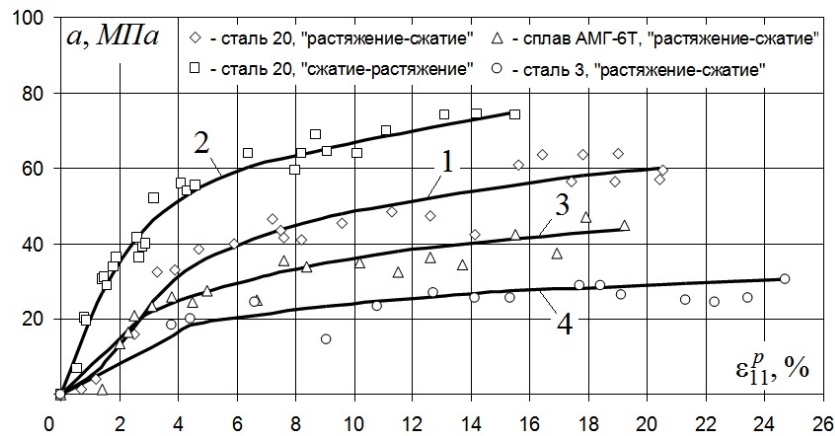


Рис. 3. Изменение координаты центра поверхности текучести

На рис. 1, 2, 3 кривые 1 и опытные точки "ромбики" соответствуют экспериментам на сплошных образцах из отожженной стали 20 при первоначальном растяжении, разгрузке и последующем сжатии при определенном уровне пластической деформации ε_{11}^p . Из рис. 1 видно, что при пластических деформациях $\varepsilon_{11}^p > 3\%$ параметр γ стабилизируется и соответствует уменьшению предела текучести σ_T^M на сжатие в среднем до 80 % от величины σ_T^K . Радиус-функция r гипотетической поверхности текучести при больших пластических деформациях $\varepsilon_{11}^p \approx 20\%$ увеличивается от своего первоначального значения $\sigma_T = 215$ МПа в 2,07 раза (рис. 2). Смещение центра поверхности текучести a незначительно (рис. 3) и составляет при этом же уровне пластической деформации 27 % от величины начального предела текучести σ_T , то есть даже при больших деформациях центр находится внутри начальной поверхности текучести.

Опытные точки "квадратики" и кривые 2 на рис. 1, 2, 3 соответствуют опытным данным сплошных образцов из стали 20 при осевом сжатии, разгрузке до соответствующего уровня

$|\varepsilon_{11}^P|$ и последующем растяжении. При $|\varepsilon_{11}^P| > 3\%$ параметр $\gamma \approx 0,7$ и видна зависимость эффекта Баушингера от вида напряженного состояния для одного и того же материала "за порогом насыщения" [1]. Радиус r границы пределов текучести увеличивается в 1,95 раза, а смещение ее центра составляет 35 процентов от величины $|\sigma_T|$ при максимальном уровне $|\varepsilon_{11}^P| \approx 15,5\%$ (рис. 2, 3).

Кривые 3 и опытные точки "треугольники" на рис. 1, 2, 3 соответствуют пути нагружения "растяжение – сжатие" образцов из сплава АМГ-6Т. Аналогично, эффект Баушингера (рис. 1) выражается в уменьшении предела текучести σ_T^M в среднем до 80 % от величины σ_T^K при $\varepsilon_{11}^P > 3\%$. Смещение центра предельной поверхности текучести при развитых пластических деформациях $\varepsilon_{11}^P \approx 19\%$ составило 26 % от начального значения $\sigma_T = 175\text{МПа}$ при увеличении ее радиуса в 2,25 раза (рис. 2, 3). Аналогичные результаты (кривые 4 и опытные точки "кружочки") на рис. 1, 2, 3 приведены для образцов из стали 3 с $\sigma_T = 230\text{МПа}$ по пути нагружения "растяжение – сжатие" при промежуточном месячном естественном старении. Радиус поверхности текучести увеличивается в 2,12 раза (рис. 2), а смещение ее центра составило всего 13 % от σ_T при развитых пластических деформациях $\varepsilon_{11}^P \approx 25\%$ (рис. 3). Уменьшение предела текучести при знакопеременном нагружении составило в среднем 88 % при $\varepsilon_{11}^P > 3\%$. В [1] отмечается, что величина σ_T^K определялась без предварительного старения, и если "после предварительного растяжения и разгрузки повторное растяжение провести после месячного вылеживания", то оказывается в среднем, что эффект Баушингера "выражается в уменьшении предела текучести до 80 % от его исходного значения". К сожалению, в [1] опытные данные для этого эксперимента не представлены.

При анализе рис. 2 видно, что радиус поверхности текучести r при $\varepsilon_{11}^P > 3\%$ резко увеличивается, а его поведение при малых пластических деформациях менее 3 % требует дополнительного изучения. Например, в [1] при исследовании эффекта Баушингера при путях нагружения "чистый сдвиг – чистый сдвиг" на трубчатых тонкостенных образцах из стали 3 и стали 45 наблюдается небольшое уменьшение радиуса границы пределов текучести на начальном этапе пластического деформирования, после чего он начинает увеличиваться. Похожие результаты получены в лаборатории механических испытаний ТвГТУ на расчетно-экспериментальном комплексе СН-ЭВМ имени А. А. Ильюшина при испытании тонкостенного трубчатого из стали 45 на знакопеременное нагружение с повторными разгрузками и догрузками при разных уровнях пластической деформации и при различных допусках на нее при определении пределов текучести [5]. Отсутствие "нырков" радиуса предельной поверхности на рис. 2 в экспериментах со сплошными образцами может быть связано с различием технологии их изготовления и их геометрической формы.

При анализе смещения центра поверхности текучести (рис. 3) видно, что он с ростом пластических деформаций монотонно увеличивается, возможно стремясь к какому-то пределу для данного материала и вида напряженного состояния. На рис. 4 для тех же экспериментов приведены графики зависимости от величины ε_{11}^P для отношения

$$\frac{a}{r} = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \quad (4)$$

которое напрямую зависит только от параметра γ .

Как и для γ , при $\varepsilon_{11}^P > 3\%$ имеем постоянство отношения $a/r \approx const$, то есть происходит "стабилизация" поверхности текучести с монотонным изменением ее размеров и положения, при этом для всех рассмотренных материалов смещение центра не превышает 20 % от величины r . Таким образом, смещение (трансляция) границы пределов текучести в рассмотренных экспериментах со сплошными образцами было незначительным в сравнении с ее расширением. Однако также установлено, что в опытах с тонкостенными образцами значение a может достигать до 60 % от величины r при сравнительно малых деформациях $\varepsilon_{11}^P \approx 4\%$ [5].

Исходя из имеющихся результатов можно сделать выводы:



Рис. 4. Изменение относительного отношения между смещением и расширением поверхности текучести

1. Эффект Баушингера имеет тенденцию к уменьшению до различных значений для разных материалов. При достижении деформаций порядка 3% коэффициент, характеризующий эффект Баушингера, в дальнейшем остается неизменным.

2. Радиус гипотетической поверхности практически не уменьшается и имеет тенденцию к увеличению для образцов сплошного поперечного сечения.

3. Смещение центра поверхности текучести при трансляционно-изотропном упрочнении увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Тальпов, Г. Б.* Пластичность и прочность стали при сложном нагружении / Г. Б. Тальпов. – Л. : Изд-во Ленинградского университета, 1968. – 135 с.

[2] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : АН СССР, 1963. – 273 с.

[3] *Новожилов, В. В.* Вопросы механики сплошных сред / В. В. Новожилов. – Л. : Судостроение, 1989. – 397 с.

[4] *Зубчанинов, В. Г.* Механика процессов пластических сред / В. Г. Зубчанинов. – М. : Физматлит, 2010. – 352 с.

[5] *Зубчанинов, В. Г.* О допуске на остаточную деформацию при определении пределов текучести металлов / В. Г. Зубчанинов, В. И. Гулятьев, А. А. Алексеев // Сборник материалов 53 Международной научной конференции "Актуальные проблемы прочности". – Витебск, Беларусь : Изд-во УО "ВГТУ", 2012. – Т. 2. – С. 108–110.

Зубчанинов Владимир Георгиевич,

доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь

e-mail: vgz@rambler.ru

Алексеев Андрей Алексеевич,

кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь

e-mail: kafsm@yandex.ru

V. G. Zubchaninov, A. A. Alekseev

ABOUT THE PROBLEM OF RESEARCH BAUSHINGER'S EFFECT AND DRAWING THE YIELD SURFACE

Tver State Technical University

Abstract. In article is analyzed effect of changing radius of a hypothetical yield surface and Baushinger's effect at sign-variable loading on the basis of experimental data by G. B. Talypov for the various materials.

Keywords: plasticity, sign-variable loading, the yield surface, the Baushinger's effect.

REFERENCES

- [1] *Talypov, G. B.* Plasticity and durability became at difficult loading / G. B. Talypov. – L. : Publishing house of the Leningrad University, 1968. – 135 p.
- [2] *Ilyushin, A. A.* Plasticity. Bases of the general mathematical theory / A. A. Ilyushin. – M. : AS USSR, 1963. – 273 p.
- [3] *Novozhilov, V. V.* Questions of mechanics of continuous environments / V. V. Novozhilov. – L. : Shipbuilding, 1989. – 397 p.
- [4] *Zubchaninov, V. G.* Mechanics of processes of plastic environments / V. G. Zubchaninov. – M. : Fizmatlit, 2010. – 352 p.
- [5] *Zubchaninov, V. G.* About the admission on residual deformation at definition limits of fluidity of metals / V. G. Zubchaninov, V. I. Gulyaev, A. A. Alekseev // Collection of materials 53 International scientific conferences "Actual durability problems" . – Vitebsk, Belarus : UO "VSPU" publishing house, 2012. – Vol. 2. – P. 108–110.

Zubchaninov, Vladimir Georgievich

Dr. Tech. Sci., Professor, Department of the Resistance of materials, elasticity and plasticity theories, Tver State Technical University, Tver

e-mail: vgz@rambler.ru

Alekseev, Andrey Alekseevich

Cand. Tech. Sci., Assoc. Professor, Department of the Resistance of materials, elasticity and plasticity theories, Tver State Technical University, Tver

А. Ф. Ревуженко, С. В. Клишин

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ВЫПУСКЕ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН

Аннотация. Выделяется класс краевых задач механики твердого тела и сыпучих сред, в которых возможно однородное распределение деформаций и их скоростей. Соответствующие им краевые условия применяются для постановки численных экспериментов. Результаты используются для выбора потенциалов взаимодействия между частицами дискретных элементов. Рассматривается задача о выпуске раздробленной горной породы.

Ключевые слова: континуальная модель, сплошная среда, гранулированный материал, аффинное преобразование, численный анализ, метод молекулярной динамики, метод дискретных элементов.

УДК: 51.72, 539.3

В последние десятилетия при исследовании напряженно-деформированного состояния горных пород и сыпучих сред большую популярность приобрели методы молекулярной динамики (ММД) [1]–[3]. Данные методы позволяют решать задачи, опираясь непосредственно на представления о дискретном строении реальных твердых тел, причем временная эволюция системы взаимодействующих атомов или частиц, составляющих тело, отслеживается путем интегрирования их уравнений движения. Это позволяет в рамках единого подхода исследовать как малые, так и конечные деформации твердых тел, проследить зарождение и развитие дефектов структуры, детально воспроизвести процессы разрушения и т. д. Кроме того, здесь появляются возможности учета многих нелинейных и динамических эффектов. Одной из модификаций ММД является метод дискретных элементов (МДЭ), весьма эффективно описывающий поведение гранулированных сред, состоящих из частиц произвольного размера и формы. В настоящее время МДЭ получил широкое распространение при исследованиях в механике сыпучих сред и горных пород. Высокая эффективность этого метода обусловлена его универсальностью, относительно невысокой стоимостью вычислительных экспериментов по сравнению с натурными. Реализация данного метода стала возможной благодаря качественному увеличению объемов памяти и быстродействию современных компьютеров.

Однако здесь вступает в действие известное правило, согласно которому, выигрывая в чем-то одном, мы всегда проигрываем в чем-то другом. Один из главных вопросов механики – это вопрос об адекватности математической модели реальной деформируемой среде. Как описать свойства реальной среды, пользуясь ограниченным арсеналом средств, которые дает та или иная математическая модель? В континуальной механике в решении данных проблем накоплен громадный опыт. Здесь формулировка уравнений дается на языке тензоров напряжений, деформаций и их скоростей (в случае необходимости вводятся температура, энтропия

Поступила 14.12.2012

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 10-05-91-002АНФ.

и др.). В результате строятся математические модели процессов, а именно – замкнутые системы уравнений. Для исследования их общих свойств существуют чрезвычайно эффективные методы, которые создавались в течение сотен лет. Это позволяет до решения конкретных задач понять характер распространения различного рода возмущений в теле, выделить класс корректных краевых задач, теоремы о предельных состояниях позволяют сделать оценки предельных нагрузок, не требуя при этом получения полного решения задач, вариационные принципы позволяют делать далеко идущие обобщения и т. д. Таким образом, исследователь может получить оценки самих моделей в целом и определить степень их адекватности.

При использовании методов молекулярной динамики ситуация становится сложнее. Теперь у нас в руках есть только условия на потенциалы взаимодействия частиц и трудно обозримое число параметров, связанное с выбором формы, размеров, начального расположения и скоростей отдельных частиц. Важным является также вопрос о выборе плотности частиц. Полагая плотность равной нулю, мы отказываемся от учета динамических эффектов и рассматриваем только квазистатическое деформирование. С другой стороны, при значении плотности больше нуля в процесс включается динамика и появляются характерные скорости распространения возмущений. Предположим, что мы остановились на том или ином выборе указанных параметров. Каким макросвойствам реальной среды соответствует сделанный выбор? Сразу это неясно. Поэтому затруднительным становится и вопрос об интерпретации решения конкретных задач. Данную проблему можно было бы считать решенной, если бы удалось найти континуальную модель сплошной среды, которая соответствовала бы дискретной модели молекулярной динамики.

В работах [4], [5] предложен метод, который в определенной мере позволяет соединить в себе преимущества континуальных моделей и моделей, основанных на дискретном подходе. Основная задача формулируется следующим образом: по заданной модели дискретных элементов построить континуальную модель среды, которая была бы ей эквивалентна, либо показать, что такой модели не существует. При этом главные вопросы, которые возникают на этом пути, сводятся к следующим: 1) какие именно численные эксперименты необходимо проводить и 2) сколько таких экспериментов необходимо, чтобы быть уверенным в эквивалентности моделей.

Известно, что идеальными в качестве базовых являются эксперименты, в которых реализуется однородное распределение деформаций [6], [7]. Основная идея [4], [5] состоит в том, чтобы базовые физические эксперименты заменить на численные, сохранив при этом всю общепринятую методологию построения континуальных моделей.

Нетрудно доказать [5], что если деформируемое тело: 1) является сплошным и однородным; 2) нагружается при отсутствии массовых и инерционных сил (т. е. квазистатически) и, кроме того, 3) является устойчивым (имеет место единственность решений), то задание аффинного преобразования границы тела гарантирует, что и все его внутренние элементы будут испытывать аффинные деформации независимо от реологии тела.

Таким образом, в рассматриваемой ситуации распределение напряжений и деформаций будет однородным. Поэтому по известным условиям на границе можно независимо друг от друга определить и напряжения, и деформации. Полученных данных достаточно для формулировки определяющих уравнений для рассматриваемых путей нагружения.

Сделаем сопоставление экспериментальной (э) и численной (ч) методик построения континуальных моделей.

Иэ: выбираем материал для исследований. Ич: задаем начальное распределение дискретных элементов, их форму и размеры; задаем потенциал взаимодействия между элементами.

Пэ: определяем класс нагружений, который должен быть реализован. Данный класс зависит от возможностей оборудования и поставленных задач. Пч: определяем параметры нагружения и конкретный тип аффинной деформации.

IIIэ: изготавливаем образцы материала необходимой формы. IIIч: задаем исходную конфигурацию расчетной области деформирования.

IVэ: проводим серии испытаний. IVч: проводим серии численных расчетов. Проверяем выполнение критерия существования континуальной модели. Критерий состоит в следующем. При аффинном преобразовании прямые линии всегда переходят в прямые. Данное свойство является также следствием сплошности среды, причем для несплошной среды оно будет выполняться только приближенно или совсем не выполняться. Это значит, что первоначально прямая линия будет переходить в ломаную линию с разрывами и искривлениями отдельных звеньев. В некоторых случаях такую ломаную можно приближенно принять за прямую. В других случаях отклонения от прямой настолько велики, что ни о какой прямой не может быть и речи [4]. Примем, что в первом случае критерий существования континуальной модели выполняется, а во втором случае – нет. Если критерий не выполняется, то признается, что эквивалентной континуальной модели не существует. В случае выполнения критерия переходим к шагу Vч.

Vэ: обрабатываем экспериментальные результаты с целью формулировки математической модели среды и определения значений параметров, которые фигурируют в данной модели. Vч: применяем процедуру осреднения и определяем связи между макрохарактеристиками среды. На данной основе строим математическую модель и вычисляем макропараметры среды, которые фигурируют в модели.

В [5] рассмотрено сложное нагружение с непрерывным поворотом осей тензора деформаций. Указанный тип деформирования представляет собой суперпозицию течений Куэтта между параллельными пластинами. Это течение обладает одним замечательным свойством. А именно, если на границах реализовать постоянные скорости, то внутри может возникать только линейное распределение скоростей независимо от реологии среды.

Для исследования задачи о движении дискретной среды в трехмерной постановке на основе принципов МДЭ разработаны алгоритм и программное обеспечение, позволяющее численно моделировать движение материала с заданными краевыми условиями.

Численные расчеты проводились в следующем порядке. Задавалась начальная упаковка частиц сферической формы определенных радиусов, в общем случае не равных друг другу. Частицы предполагаются упругими с заданными модулем упругости и коэффициентом Пуассона. Силовое взаимодействие в точке контакта двух частиц описывается законом Герца. Далее выбиралось фиксированное значение параметра нагружения и проводился численный расчет.

Результаты численных экспериментов показали, что через некоторое время после начала нагружения, напряжения, действующие внутри области, переходят в стационарное состояние. В то же состояние переходит и упаковка частиц. При установившемся движении деформации сдвига не сопровождаются изменением объема упаковки, т. е. дилатансия отсутствует, поэтому здесь имеет место условие несжимаемости. Показано, что среда находится в предельном состоянии, причем при выбранном способе нагружения направления осей тензора напряжений незначительно отклоняются от осей тензора деформаций.

Полученные результаты использовались при расчете движения предварительно разупрочненной горной породы под действием силы тяжести. В настоящее время большое распространение получают технологии разработки мощных угольных пластов с применением механизированных крепей, обеспечивающих выпуск угля из подкровельной или межслоевой толщи. В них заложен физический эффект разрушения горной породы и угля, основанный на действии сил горного давления. Это позволило придать механическим комплексам дополнительные функции, связанные с управлением процесса извлечения угля, находящегося над крепью или обрушающегося позади нее. Новые технологии, в которых основным элементом является крепь с выпуском предварительно разупрочненной породы, должны в недалеком будущем заменить традиционные трудоемкие системы разработки – наклонные слои. Их преимущества заключаются в значительном сокращении объемов подготовительных работ, капитальных и эксплуатационных затрат, энергоемкости системы, снижении опасности самовозгорания угля,

а также возможности разработки пластов в сложных условиях и извлечение запасов из оставленных ранее охранных целиков. Все это позволяет повысить эффективность и безопасность отработки пластов, нагрузку на пласт и концентрацию горных работ [8]–[10].

Результатом воздействия на угольный пласт и горную породу является разрушение их на отдельные элементы, которые могут быть представлены как отдельные частицы применительно к реализации метода дискретных элементов.

Для исследования прикладных задач о напряженно-деформированном состоянии горной породы на основе сформулированных принципов разработано программное обеспечение, позволяющее численно моделировать движение сыпучих материалов, обладающих разными физическими свойствами, при различных граничных условиях в трехмерной постановке.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть мощность угольного пласта 8 м, высота отрабатываемого подэтажа 12 м, угол падения пласта равен 80° (рис. 1). Границы исследуемой области представляют собой упругие отрезки с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$ и модулем упругости $E = 2 \cdot 10^4$ МПа. Выпускные отверстия имеют ширину 1 м (центральное отверстие) и 2 м (боковые отверстия). Гранулированный материал (в данном случае уголь и порода) представлен совокупностью частиц с радиусами, равномерно распределенными в интервале 0.05–0.1 м. Основные физические параметры материалов даны в табл. 1.

Таблица 1

Физический параметр	Уголь	Порода
Модуль упругости E , МПа	$5 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^4$
Коэффициент Пуассона ν	0.25	0.3
Плотность ρ , кг/м ³	1 400	2 500
Коэффициент трения μ	0.4	0.4

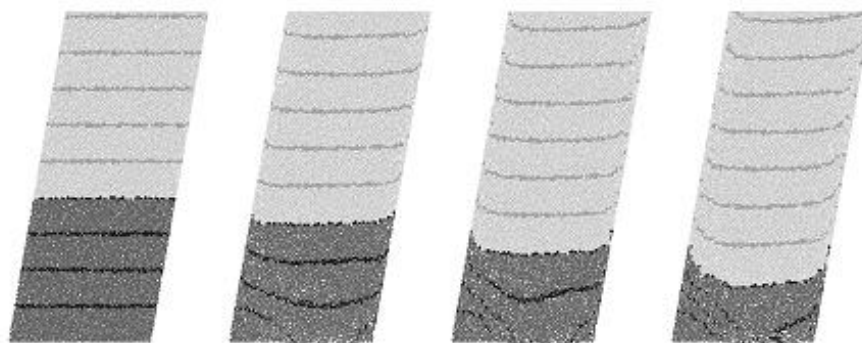


Рис. 1. Этапы площадного выпуска из мощного крутопадающего пласта

Масса каждой частицы вычисляется по заданному радиусу и плотности. Для создания связей между элементами материал усаживался некоторое время, принимая равновесное состояние, характерное для начального нагруженного массива горных пород. Затем для моделирования гравитационного потока части границы, закрывающие выпускные отверстия, удалялись и материал начинал движение.

На рис. 2 изображены стадии течения в различные моменты времени в случае, когда выпускные отверстия открыты одновременно в начальный момент времени. Кинематическая картина качественно повторяет картину схожих экспериментов, проведенных в лабораторных условиях на эквивалентных материалах со сцеплением.

В представленной численной реализации МДЭ частицы при соударении не разрушаются, а разрушаются связи между ними. Как показали численные эксперименты, выпуск разрушенного угля при одном открытом отверстии сопровождается циклами разрыхления и уплотнения в зоне течения и величина плотности потока изменяется скачкообразно в течение всего процесса выпуска. Такой эффект вызван тем, что сцепленные частицы при движении периодически закупоривают выпускные отверстия, вызывая "зависание" всего материала, а затем совокупность вышележащих частиц под действием силы тяжести разрушает образовавшийся затор и движение продолжается с образованием полостей внутри области деформирования. С другой стороны, показано, что при одновременно открытых трех отверстиях материал движется без зависания в зоне выпуска.

Это явление иллюстрируется графиками, представленными на рис. 2, где показана скорость прохождения потока через выпускные отверстия. В данном случае она определяется как количество частиц N_t , прошедших через выпускное отверстие за единицу времени.

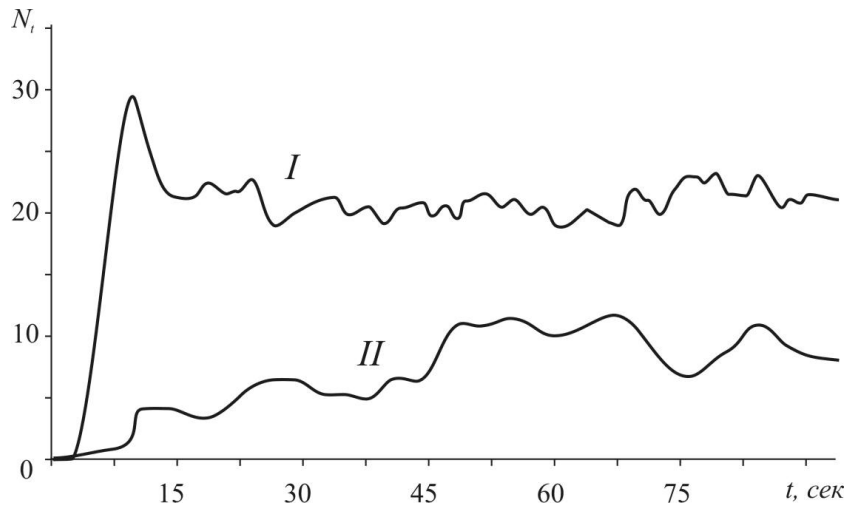


Рис. 2. Скорость прохождения потока сыпучего материала через выпускные отверстия: три открытых отверстия (I); одно открытое отверстие (II)

Напряженно-деформированное состояние горного массива над выработанным пространством и в зоне выпуска демонстрирует рис. 3. Здесь светлым участкам соответствуют слабые напряжения, а темным – высокие напряжения.

Задача о выпуске предварительно разупрочненного угля в системе поэтажного обрушения. Численно исследована задача о гравитационном выпуске горной породы через выпускное отверстие. Пусть исследуемая область имеет форму параллелепипеда со следующими размерами: ширина $l = 30.0$ м, высота $h = 20.0$ м, глубина $d = 5.0$ м, и заполнена гранулированным материалом – совокупностью сферических частиц с радиусами, равномерно распределенными в интервале $0.05\text{--}0.10$ м (рис. 4). Общее их количество $N = 200\,000$. Выпускное отверстие представляет собой щель шириной $l_1 = 1.0$ м, проходящую от передней до задней стенки бункера. Нижний слой частиц (высотой 8 м) представляет собой угольную массу (далее обозначается индексом c), верхний – горную породу (индекс r). Частицы раскрашены для визуализации кинематики процесса движения материала.

Основные физические параметры частиц следующие: модуль упругости $E_c = 5 \cdot 10^3$ МПа, $E_r = 2 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu_c = 0.25$, $\nu_r = 0.3$, плотность $\rho_c = 1\,400$ кг/м³, $\rho_r = 2\,500$ кг/м³, коэффициент трения для обоих материалов $\mu = 0.3$, сцепление отсутствует. На рис. 4, а представлена конфигурация области деформирования в начальный момент времени, на рис. 4, б – в момент развитого движения.

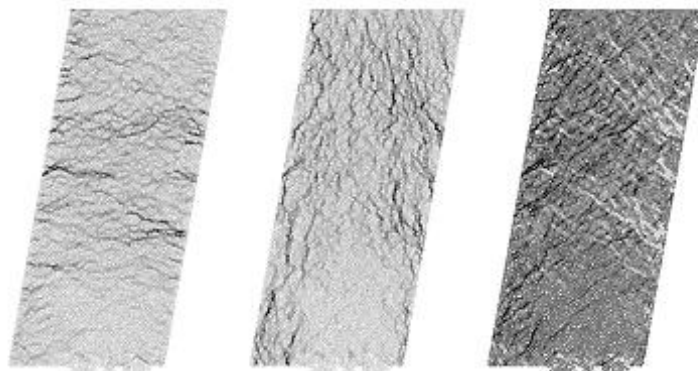


Рис. 3. Напряжения в массиве при выпуске угля:
 σ_{xx} (а); σ_{zz} (б); τ_{xz} (в)

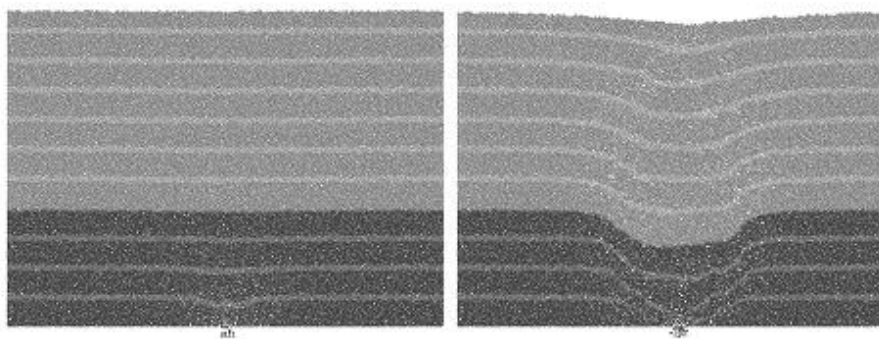


Рис. 4. Кинематическая картина выпуска горной породы:
 начальный момент времени (а); развитие течения (б)

Сегрегация гранулированного материала. Рассмотрена задача о сегрегации частиц при вибрационном воздействии на гранулированный материал. Исходная постановка задачи следующая. Сыпучая среда, состоящая из шаровых частиц с радиусами, равными $r_i = 0.01$ м, заполняет область $-0.5 \leq x \leq 0.5$ м, $-0.5 \leq y \leq |0.5|$, $0 \leq z \leq 1.0$ м (рис. 5, а). На дно области помещена частица с радиусом $R = 0.05$ м. Упругие постоянные, коэффициенты трения и плотности частиц и стенок совпадают. Вибрационное воздействие на материал определяется периодическим движением нижней границы (дна) в вертикальном направлении: $z(t) = 0.0005 \sin(0.04t)$, где t – время (сек). На рис. 5, б–д представлены конфигурации исследуемой области в различные моменты времени (здесь показан срез по плоскости $x = 0$). Видно, что слабое воздействие приводит к значительным перемещениям материала в направлении свободной поверхности и к всплытию тяжелой частицы на поверхность области.

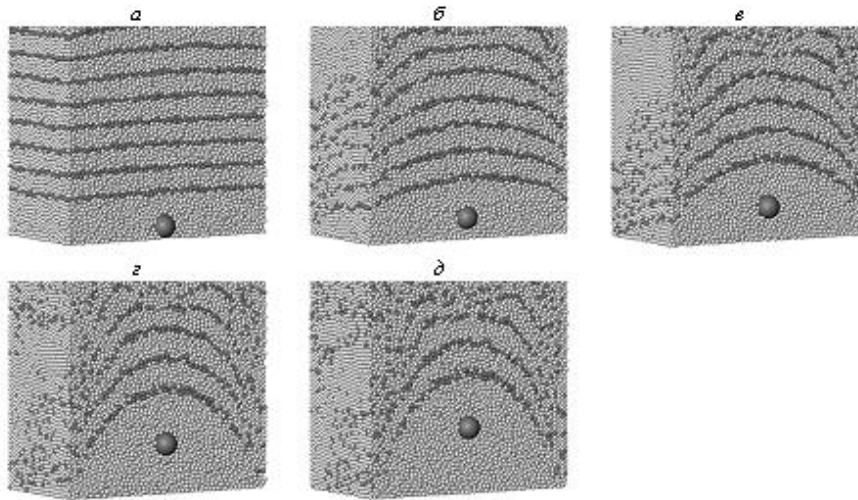


Рис. 5. Кинематическая картина деформирования материала (срез по плоскости $x = 0$) в начальный момент времени (а) и в моменты времени 5 (б); 10 (в); 15 (г); 20 (д) сек.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Haile, J. M.* Molecular dynamics simulation: Elementary Methods / J. M. Haile // Wiley, 1997. – 512 p.
- [2] *Rapaport, D. C.* The Art of Molecular Dynamics Simulation / D. C. Rapaport // Cambridge University Press, 2004. – 2nd edition. – 564 p.
- [3] *Механика – от дискретного к сплошному* / отв. ред. В. М. Фомина. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2008. – 344 с.
- [4] *Ревуженко, А. Ф.* Об одном методе сопоставления моделей молекулярной динамики с континуальными моделями сплошных сред / А. Ф. Ревуженко, С. В. Клишин // Проблемы и достижения прикладной математики и механики: к 70-летию академика В. М. Фомина: сб. науч. тр. – Новосибирск : Параллель, 2010. – С. 577–585.
- [5] *Ревуженко, А. Ф.* Численный метод построения континуальной модели деформирования твердого тела, эквивалентной заданной модели дискретных элементов / А. Ф. Ревуженко, С. В. Клишин // Физическая мезомеханика. – 2012. – № 6.
- [6] *Ревуженко, А. Ф.* Механика сыпучей среды / А. Ф. Ревуженко. – Новосибирск : ЗАО ИПП "Оффсет", 2003. – 373 с.
- [7] *Revuzhenko, A. F.* Mechanics of Granular Media / A. F. Revuzhenko. – Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg, 2006. – 380 p.
- [8] *Клишин, С. В.* Исследование процессов выпуска угля при отработке мощных пологих и крутых угольных пластов / С. В. Клишин, В. И. Клишин // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2010. – № 2. – С. 67–79.
- [9] *Клишин, С. В.* Рациональные режимы механизированной отработки мощных крутопадающих пластов угля подэтажными штреками / С. В. Клишин, В. И. Клишин // Рудник будущего. – 2010. – № 2. С. 53–62.
- [10] *Клишин, С. В.* Применение метода дискретных элементов для решения технологических задач о выпуске угля. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности / С. В. Клишин // Труды XXI Всероссийской конференции, Кемерово, 30 июня – 2 июля 2009 г. / под ред. В. М. Фомина. – Новосибирск : Параллель, 2009. – С. 119–126.

Ревуженко Александр Филиппович,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией механики деформируемого твердого тела и сыпучих сред, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск

e-mail: revuzhenko@yandex.ru

Клишин Сергей Владимирович,

кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики деформируемого твердого тела и сыпучих сред, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск

e-mail: sv.klishin@gmail.com

A. Ph. Revuzhenko, S. V. Klishin

NUMERICAL MODELING OF A TASK ABOUT PRODUCTION OF BULKS

N. A. Chinakal's Mining Institute, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences

Abstract. The class of regional problems of mechanics of a firm body is allocated and loose environments, in which probably uniform distribution of deformations and their speeds. Regional conditions corresponding to them are applied for statements of numerical experiments. Results are used for choice of potentials of interaction between particles of the discrete elements. The task about release shattered mountain is considered breeds.

Keywords: continual model, the continuous environment, granulated material, affine transformation, numerical analysis, method molecular dynamics, method of discrete elements.

REFERENCES

- [1] *Haile, J. M.* Molecular dynamics simulation: Elementary Methods / J. M. Haile // Wiley, 1997. – 512 p.
- [2] *Rapaport, D. C.* The Art of Molecular Dynamics Simulation / D. C. Rapaport // Cambridge University Press, 2004. – 2nd edition. – 564 p.
- [3] *Mechanics – from discrete to the continuous* / editor-in-chief V. M. Fomin. – Novosibirsk : Publishing house SB RAS, 2008. – 344 p.
- [4] *Revuzhenko, A. F.* About one method of comparison of models molecular dynamics with continual models of continuous environments / A. F. Revuzhenko, S. V. Klishin // Problems and achievements the applied mathematics and mechanics: to the 70 anniversary of the academician V. M. Fomina : coll. of scientific works. – Novosibirsk : Parallel, 2010. – P. 577–585.
- [5] *Revuzhenko, A. F.* Numerical method of construction continual model of deformation of the firm body, equivalent the set model of discrete elements / A. F. Revuzhenko, S. V. Klishin // Physical mesomechanics. – 2012. – No. 6.
- [6] *Revuzhenko, A. F.* Mechanics of the loose environment / A. F. Revuzhenko. – Novosibirsk : JSC IPP "Offset", 2003. – 373 p.
- [7] *Revuzhenko, A. F.* Mechanics of Granular Media / A. F. Revuzhenko. – Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg, 2006. – 380 p.
- [8] *Klishin, S. V.* Research of processes of production of coal at to working off of powerful flat and cool coal layers / S. V. Klishin, V. I. Klishin // Physics and technology problems of development of the useful minerals. – 2010. – No. 2. – P. 67–79.
- [9] *Klishin, S. V.* Rational modes of the mechanized working off of powerful krutopadayushchy layers of coal subfloor bord / S. V. Klishin, V. I. Klishin // Future mine. – 2010. – No. 2. P. 53–62.
- [10] *Klishin, S. V.* Application of a method of discrete elements for the solution of technological tasks on production of coal. Numerical methods solutions of tasks of the theory of elasticity and plasticity / S. V. Klishin // Works XXI of the All-Russian conference, Kemerovo, June 30–July 2 2009 / under V. M. Fomin's edition. – Novosibirsk : Parallel, 2009. – P. 119–126.

Revuzhenko, Alexander Philippovich

Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, Head of the Laboratory of Mechanics of Deformable Solid Body and Granular Media, N. A. Chinakal's Mining Institute, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk

Klishin, Sergey Vladimirovich

Cand. Tech. Sci., Senior Researcher of the Laboratory of Mechanics of Deformable Solid Body and Granular Media, N. A. Chinakal's Mining Institute, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk

Д. Д. Ивлев, Р. И. Непершин

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МНОГОГРАННОЙ ПРИЗМЫ ПЛОСКИМ ИНСТРУМЕНТОМ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,

Московский государственный технологический университет "Станкин"

Аннотация. На основе теории плоской деформации идеально пластического тела рассчитывается процесс деформирования правильной многогранной призмы пластическим сжатием ребер плоским инструментом для получения цилиндра. Модель описывает пластическое сжатие ребер крупных слитков многоугольного сечения плоскими бойками и ковку круглых валов после протяжки заготовки плоскими бойками на квадрат.

Ключевые слова: ковка слитков, ковка валов, плоские бойки, идеальная пластичность, деформация ребер, многогранная заготовка, пластические деформации, контактное давление.

УДК: 539.374

Введение

Ковка заготовок применяется для получения высоких механических свойств деталей ответственного назначения за счет измельчения микроструктуры металла при больших пластических деформациях. Пластическое сжатие ребер крупных слитков многоугольного сечения плоскими бойками применяется для получения цилиндрической формы заготовки для последующих операций обработки давлением при больших пластических деформациях с целью повышения механических свойств изделий [1].

Пластическая деформация при сжатии ребер плоским инструментом локализуется около границы контакта с инструментом. Центральная зона заготовки остается недеформированной. При ковке валов с высокими требованиями по прочности измельчение микроструктуры достигается протяжкой заготовки плоским инструментом с кантовкой вокруг оси на 90° с получением квадратного сечения заданной площади. Круглое сечение получают последующим пластическим сжатием ребер плоскими бойками.

Известны близкие к рассматриваемой проблеме автомодельные решения задач о пластическом сжатии неограниченного клина плоским штампом [2] и пространственных задач о введении пирамиды в идеально пластическое полупространство [3], [4] и сдавливании идеально пластической пирамиды плоским штампом [5], [6].

В статье приведена модель формоизменения правильной многогранной призмы в круговой цилиндр пластическим сжатием ребер плоским инструментом. Используется теория плоской деформации идеально пластического тела [7]. После одного цикла деформирования всех ребер число граней удваивается. Повторение циклов пластического сжатия ребер переводит начальный правильный многоугольник в окружность при сохранении площади поперечного сечения призмы.

Постановка задачи и основные уравнения

На рис. 1 показана схема пластического сжатия плоским инструментом противоположных ребер правильной призмы с шестиугольным сечением. Моделирование процесса выполняется по теории плоского пластического течения идеально пластического тела [7] в координатах x, y с началом координат в центре поперечного сечения призмы. Рассматривается пластическое сжатие противоположных ребер неподвижной призмы плоским инструментом.

Деформация ребер призмы с поперечным сечением в виде правильного многоугольника при плоской деформации происходит без изменения площади поперечного сечения. Площадь S и радиусы описанной R_0 и вписанной r_0 окружностей правильного многоугольника с начальным числом сторон N_0 , длиной стороны a_0 и центральным углом $2\alpha_0$ определяются формулами

$$S = \frac{1}{4} N_0 a_0^2 \operatorname{ctg} \alpha_0, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{N_0}, \quad (1)$$

$$R_0 = \frac{a_0}{2 \sin \alpha_0}, \quad r_0 = \frac{a_0}{2} \operatorname{ctg} \alpha_0. \quad (2)$$

Приближение начального многоугольника с площадью S к кругу с той же площадью и радиусом $R^* = \sqrt{S/\pi}$ достигается увеличением числа сторон N . После одного цикла деформации всех ребер с вращением заготовки вокруг оси на угол $2\alpha_0$ число сторон N удваивается, центральный угол уменьшается вдвое и длина стороны a определяется из первой формулы (1) при заданной площади S

$$a = \sqrt{\frac{4S}{N} \operatorname{tg} \alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi}{N}. \quad (3)$$

Радиусы описанной и вписанной окружностей R и r многоугольника с числом сторон N находятся по формулам (2) с заменой a_0 и α_0 на a и α .

Напряженно-деформированное состояние определяется прямолинейными ортогональными линиями скольжения ξ, η около свободных границ и границы контакта с плоским инструментом с образованием жесткой области по Прандтлю.

Линии скольжения и пластическая область определяются длиной границы контакта a и углом наклона свободной границы β . Среднее напряжение σ определяется из интегральных соотношений Генки вдоль линий скольжения

$$\sigma - 2k\varphi = \operatorname{const} \text{ вдоль } \xi, \quad \sigma + 2k\varphi = \operatorname{const} \text{ вдоль } \eta, \quad (4)$$

где φ – угол наклона касательной к линии скольжения ξ с осью x и k – напряжение текучести материала при чистом сдвиге. Нормальные и касательные напряжения в плоскости x, y определяются формулами

$$\sigma_x = \sigma - k \sin 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma + k \sin 2\varphi, \quad \tau_{xy} = k \cos 2\varphi. \quad (5)$$

Скорости пластического течения определяются кинематическими граничными условиями на жесткопластических границах и соотношениями Гейрингер для проекций V_ξ, V_η вектора скорости на линии скольжения

$$dV_\xi - V_\eta d\varphi = 0 \text{ вдоль } \xi, \quad dV_\eta + V_\xi d\varphi = 0 \text{ вдоль } \eta. \quad (6)$$

Напряженное состояние и давление на инструмент

При сжатии ребер плоским инструментом граница контакта и пластическая область увеличиваются от нуля с выдавливанием материала на свободные боковые границы. На рис. 1

показано конечное положение инструмента при сжатии первой пары ребер 1 и 4 шестиугольника, линии скольжения и годограф скоростей. Длина границы контакта a равна длине стороны многоугольника при $N = 2N_0$. Пластическая область симметрична относительно оси y и сохраняет геометрическое подобие с постоянным углом β наклона боковой границы AB относительно стороны начального многоугольника и углом ψ центрированного веера линий скольжения η . Длина границы AB равна длине контакта a . На границе контакта образуется жесткая область по Прандтлю, перемещающаяся вместе с инструментом со скоростью V относительно центра заготовки. Годограф скоростей не зависит от перемещения инструмента h и определяется разрывом скорости $[V] = V/\sqrt{2}$ вдоль жесткопластических границ и углом ψ центрированного веера линий скольжения.

В области однородного напряженного состояния около свободной границы известны граничные условия

$$\sigma = -k, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4} + \psi. \quad (7)$$

На жесткопластической границе AC известно $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Из первого соотношения (4) для этих граничных условий находим $\sigma = -k(1 + 2\psi)$, из второго уравнения (5) находим давление $q = -\sigma_y$ на границе контакта

$$q = 2k(1 + \psi). \quad (8)$$

Вследствие геометрического подобия пластической области $\psi = const$. Погонная сила P , действующая на инструмент, линейно возрастает с увеличением длины границы контакта и перемещения инструмента h .

Конечное значение перемещения $h = R_0 - r$ определяется равенством длины контакта длине стороны a , рассчитываемой по формуле (3) при $N = 2N_0$, где N_0 и R_0 – число сторон и радиус описанной окружности начального многоугольника, r – радиус вписанной окружности многоугольника с числом сторон $N = 2N_0$. Угол наклона свободной границы β определяется из соотношения (рис. 1)

$$tg\beta = \frac{(r - r_0)}{a}, \quad (9)$$

где r_0 и r – радиусы вписанных окружностей многоугольников с числом сторон N_0 и $N = 2N_0$. Затем находится угол ψ :

$$\psi = \frac{\pi}{2} - (\alpha_0 + \beta). \quad (10)$$

Подстановка (10) в (8) определяет давление на инструмент:

$$q = 2k\left[1 + \frac{\pi}{2} - (\alpha_0 + \beta)\right]. \quad (11)$$

При увеличении числа сторон многоугольника длина стороны a и размер пластической области стремятся к нулю, давление на инструмент стремится к давлению на штамп Прандтля $q = 2k(1 + \pi/2)$.

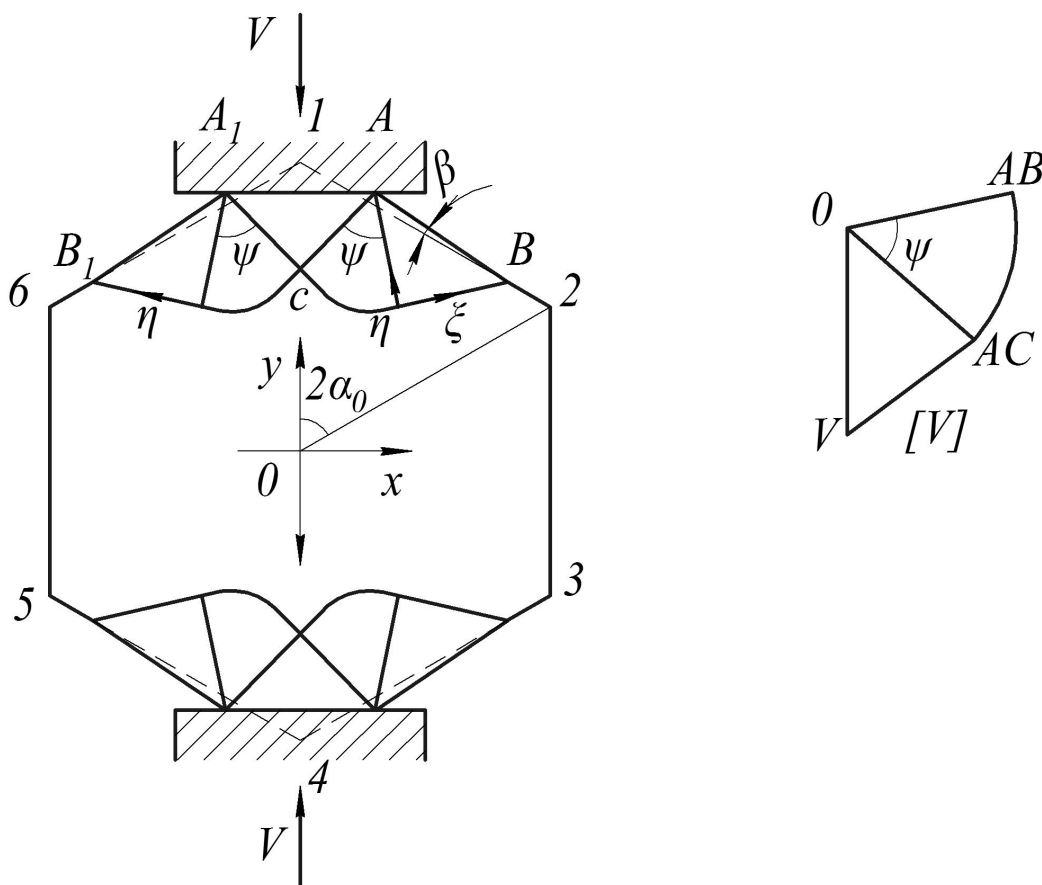


Рис. 1. Линии скольжения и годограф скоростей при сжатии ребер 1 и 4

Деформирование следующей пары ребер 2 и 5 (рис. 1) выполняется после поворота заготовки на угол $2\alpha_0$. Пластическая область, показанная на рис. 2, становится несимметричной. Выдавливание материала на правую свободную границу приводит к образованию границы AB с углом β , как и в случае симметрии пластической области. Сложение перемещений материальных точек на деформированной левой границе приводит к наклонной границе A_1B_1 левой пластической области с длиной стороны a и центральным углом 2α многоугольника с числом сторон $2N_0$.

Угол ψ на рис. 2 определяется равенством напряжения σ в точке C , рассчитываемого от правой и левой границ пластической области:

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \left(\alpha_0 + \frac{\beta}{2}\right). \tag{12}$$

На границе контакта появляется касательное напряжение $\tau_c = k \sin \beta$, определяемое по третьей формуле (5) при $\varphi = -(\pi/4 + \beta/2)$ в точке C .

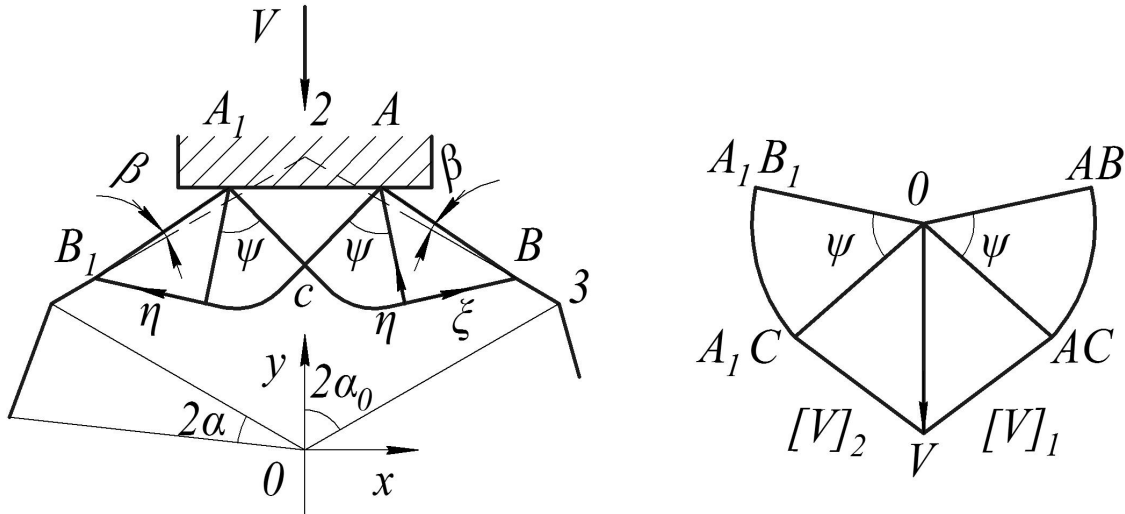


Рис. 2. Линии скольжения и годограф скоростей при сжатии ребер 2 и 5

Давление q на инструмент рассчитывается по формулам (8) и (12):

$$q = 2k[1 + \pi/2 - (\alpha_0 + \beta/2)], \quad (13)$$

и увеличивается на величину $k\beta$ по сравнению с деформированием первой пары ребер. Точка C раздела течения смещается от оси y , и разрывы скорости $[V]_1$ и $[V]_2$ вдоль правой и левой жесткопластических границ различны. Однако вследствие малости угла β и напряжения τ_c это различие мало.

Пластическая область при деформировании последней пары ребер 3 и 6, показанная на рис. 3, вновь становится симметричной. Свободные границы пластической области при повороте ранее полученных наклонных границ на угол β в противоположном направлении становятся параллельными границам начального многоугольника. Угол $\psi = \pi/2 - \alpha_0$, и давление q при деформировании последней пары ребер принимает наибольшее значение, определяемое формулой

$$q = 2k(1 + \pi/2 - \alpha_0). \quad (14)$$

Вследствие малости углов β различие давления q и годографов скоростей при деформировании всех ребер незначительно.

Деформированное состояние

Деформированное состояние при сжатии ребер определяется годографами скоростей, показанными на рис. 1–3. При движении инструмента со скоростью V поле скоростей, удовлетворяющее уравнениям (6) и граничным условиям $V_x = 0$, $V_y = -V$ на границе AC и $V_x = 0$, $V_y = 0$ на границе BC , определяется условием ортогональности линий скольжения на физической плоскости и на плоскости годографа с разрывом скорости $[V]$ на жесткопластических границах. Вследствие незначительного изменения пластической области при сжатии различных пар ребер при расчетах деформированного состояния принимаем симметричное поле линий скольжения и годограф скоростей с разрывом $[V] = V/\sqrt{2}$.

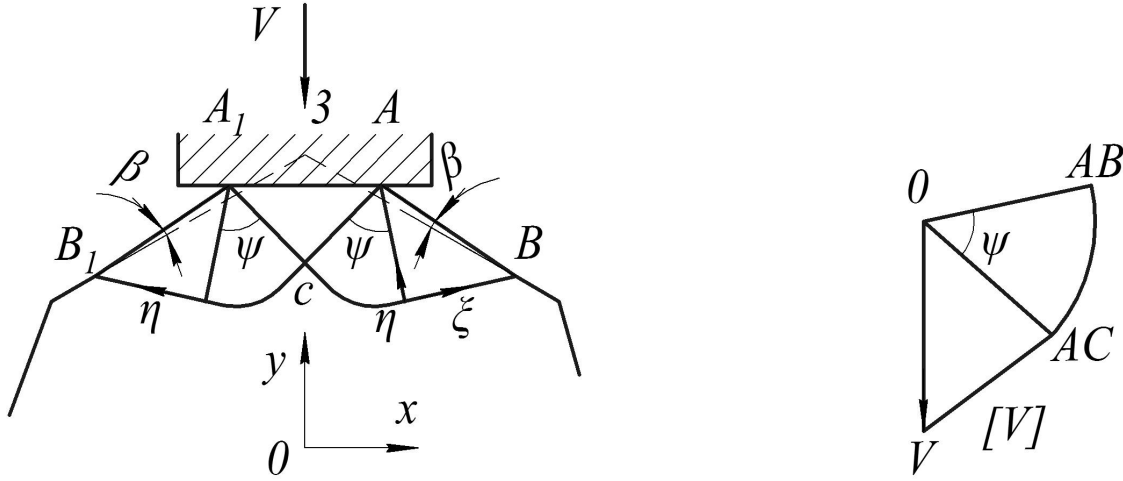


Рис. 3. Линии скольжения и годограф скоростей при сжатии ребер 3 и 6

Деформированное состояние в пластической области при перемещении h инструмента со скоростью V определяется годографом скоростей и расширением границ пластической области при сохранении геометрического подобия $2h/a = const$. Наибольшая деформация возникает в окрестности угловой точки на границе контакта и определяется движением материальных точек через две линии разрыва скорости и центрированный веер линий скольжения.

При пересечении границ пластической области вследствие разрыва скорости $[V]$ и перемещения пластических границ со скоростью $Va/2h$ возникает скачок деформации сдвига, равной отношению разрыва скорости вдоль жесткопластической границы к нормальной скорости перемещения жесткопластической границы. Конечное приращение эквивалентной пластической деформации при пересечении жесткопластической границы определяется формулой

$$e_{p1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{h}{a}. \quad (15)$$

В треугольной области около границы AB деформация e_{p1} определяется по формуле (15) при пересечении материальными точками одной жесткопластической границы. В треугольной области в окрестности точки C деформация e_{p2} определяется пластическим сдвигом с разрывами скорости по двум жесткопластическим границам:

$$e_{p2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{h}{a}. \quad (16)$$

В области центрированного веера деформацию можно найти численным интегрированием от начальной величины e_{p1} при движении материальной точки в поле скоростей с помощью единичной диаграммы, аналогично задаче расчета траектории движения материальных точек при вдавливании клина в пластическое полупространство [8], [9]. Но среднюю деформацию в области центрированного веера можно найти интегрированием интенсивности скорости деформации сдвига Γ , приведенной в [7]:

$$\varepsilon_p = \Gamma / \sqrt{3}, \quad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{V}{\rho}, \quad (17)$$

где ρ – расстояние точки от центра A веера линий скольжения. Интегрируя (17) в полярных координатах $0 \leq \rho \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$, $0 \leq \theta \leq \psi$, находим

$$\tilde{\varepsilon}_p = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{V}{a}. \quad (18)$$

Из формулы (18) находим приращение средней деформации в центрированном поле линий скольжения за время h/V при перемещении инструмента h :

$$\tilde{e}_p = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{h}{a}. \quad (19)$$

Среднюю пластическую деформацию e_{p3} на границе контакта заготовки с инструментом находим из уравнений (16) и (19):

$$e_{p3} = \frac{2\sqrt{3}h}{a}. \quad (20)$$

При первом цикле сжатия всех ребер деформация около свободных границ удваивается. Неоднородное распределение деформаций при прохождении материальных точек через центрированный веер линий скольжения приводит к увеличению пластической деформации от e_{p2} до e_{p3} как на границах контакта, так и на свободных границах многоугольника с одинаковой длиной стороны a . После первого цикла сжатия ребер получается неоднородное распределение деформации в поверхностном слое толщиной $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

При последующих циклах сжатия ребер происходит суммирование деформаций от предыдущего цикла с деформациями e_{p2} и e_{p3} , рассчитанными по формулам (16) и (20) для многоугольника с удвоенным числом сторон. Это приводит к нарастанию пластической деформации в уменьшающемся по толщине поверхностном слое заготовки пропорционально отношению h/a .

Численные результаты

Ниже приведены численные результаты расчета формообразования цилиндра из многогранной призмы, представляющие практический интерес для операцийковки шестигранных слитков и валов из заготовки квадратного сечения. В расчетах использованы безразмерные величины, за единицу длины принята длина стороны сечения начального многоугольника $a_0 = 1$, за единицу напряжения – напряжение текучести $2k = 1$. Для шестигранного слитка $N_0 = 6$, для заготовки с квадратным сечением $N_0 = 4$, конечные формы поперечного сечения после пяти циклов деформирования ребер практически сливаются с кругом при той же площади сечения.

В таблицах 1 и 2 показаны значения безразмерных величин a , h , q , погонной силы P , радиусов описанной и вписанной окружностей R и r после шести циклов деформирования ребер квадратной ($S = 1$, $R^* = 0,5642$) и шестиугольной ($S = 2,598$, $R^* = 0,9094$) заготовок соответственно. С увеличением циклов пластического деформирования ребер длина стороны многоугольника a , величина сжатия ребра h и сила P стремятся к нулю; давление q приближается к $1 + \pi/2$, и радиусы описанной и вписанной окружностей R и r приближаются к радиусу R^* .

Таблица 1

Квадратное сечение

Номер цикла	$a \times 100$	$h \times 100$	q	$P \times 100$	$R \times 10$	$r \times 10$
1	45,51	15,78	1,731	78,78	5,946	5,493
2	22,30	3,406	2,153	48,01	5,715	5,605
3	11,10	0,824	2,362	26,21	5,660	5,633
4	5,541	0,204	2,466	13,67	5,646	5,640
5	2,770	0,050	2,519	6,976	5,643	5,641
6	1,385	0,013	2,545	3,524	5,642	5,642

Таблица 2

Шестиугольное сечение

Номер цикла	$a \times 100$	$h \times 100$	q	$P \times 100$	$R \times 10$	$r \times 10$
1	48,17	10,11	2,013	96,97	9,306	8,989
2	23,88	2,382	2,292	54,74	9,146	9,068
3	11,91	0,587	2,432	28,97	9,107	9,087
4	5,953	0,146	2,501	14,89	9,097	9,092
5	2,976	0,036	2,536	7,547	9,095	9,094
6	1,488	0,009	2,553	3,799	9,094	9,094

Заключение

Анализ напряженно-деформированного состояния при циклическом пластическом сжатии плоским инструментом ребер призмы с поперечным сечением в виде правильного многоугольника показывает возможность получения круглой формы сечения с высокой точностью при условии точного регулирования величины перемещения инструмента и углов поворота заготовки вокруг оси на оборудовании с программным управлением.

Расчетная модель определяет распределение накопленной пластической деформации в поверхностном слое заготовки в зависимости от начальной формы сечения и числа циклов деформирования всех ребер. Идеально пластическая модель показывает скачкообразный характер повышения пластической деформации на границе пластической области. В реальных процессах переход к интенсивной пластической деформации происходит сдвигом при конечной ширине полосы скольжения с малыми деформациями при переходе к упругой области.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Машиностроение*. Энциклопедия. Т. 3–2. Технология заготовительных производств. – М. : Машиностроение, 1996. – 734 с.
- [2] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* Внедрение пирамиды в идеально пластическое полупространство / Д. Д. Ивлев, А. Ю. Ишлинский, Р. И. Непершин // Доклады РАН. – Т. 385. – № 6. – 2002. – С. 766–769.
- [4] *Ивлев, Д. Д.* О внедрении жесткой пирамиды в идеально пластическое полупространство / Д. Д. Ивлев, А. Ю. Ишлинский, Р. И. Непершин // Известия РАН. МТТ. – 2002. – № 4. – С. 57–62.
- [5] *Ивлев, Д. Д.* Смятие идеально пластической пирамиды плоским штампом / Д. Д. Ивлев, А. Ю. Ишлинский, Р. И. Непершин // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391. – № 3. – С. 337–339.
- [6] *Ивлев, Д. Д.* Предельное состояние деформированных тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин, Ю. Н. Радаев, С. И. Сенашов, Е. И. Шемякин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 832 с.
- [7] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / Д. Д. Ивлев, А. Ю. Ишлинский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 701 с.
- [8] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956.
- [9] *Томленов, А. Д.* Теория пластического деформирования металлов / А. Д. Томленов. – М. : Металлургия, 1972. – 408 с.

Ивлев Дюис Данилович,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ivlev21@mail.ru

Непершин Ростислав Иванович,

доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва

e-mail: nepershin_ri@rambler.ru

D. D. Ivlev, R. I. Nepershin

PLASTIC DEFORMATION OF A RIGHT POLYHEDRAL PRISM BY THE FLAT TOOL

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University,

Moscow State University of Technology "Stankin"

Abstract. Deformation of a right polygonal prism to cylinder by edges plastic compression by the flat tool is considered using plane strain ideal plasticity theory. The problem is simulation of large ingot polygonal edges plastic compression by the flat dies, and shaft forging by the flat dies from workpiece with square cross section.

Keywords: polygonal ingot forging, cylinder shaft forging, flat dies, ideal plasticity, edges plastic compression, polygonal prism, plastic strains, contact pressure.

REFERENCES

- [1] *Mechanical Engineering Encyclopedia*. Vol III-2. Blank production technology. – M. : Mashinostroenie, 1996. – 736 p.
- [2] *Sokolovskii, V. V. Theory of Plasticity* / V. V. Sokolovskii. – M. : Vyshaya shkola, 1969. – 608 p.
- [3] *Ivlev, D. D. Pyramid indentation into an ideal plastic half-space* / D. D. Ivlev, A. Yu. Ishlinskii, R. I. Nepershin // *Doklady Physics*. – 2002. – Vol. 47. – No. 8. – P. 630–633.
- [4] *Ivlev, D. D. On the rigid pyramid indentation into an ideal plastic half-space* / D. D. Ivlev, A. Yu. Ishlinskii, R. I. Nepershin // *Izvestia RAS MDS*. – 2002. – No. 4. – P. 57–62.
- [5] *Ivlev, D. D. On the compression of a perfectly plastic pyramid by flat die* / D. D. Ivlev, A. Yu. Ishlinskii, R. I. Nepershin // *Doklady Physics*. – 2003. – Vol. 48. – No. 7. – P. 382–384.
- [6] *Ivlev, D. D. Limit State of Deformed Solids and Rocks* / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, R. I. Nepershin, Yu. N. Radaev, S. I. Senashov, E. I. Shemyakin. – M. : FIZMATLIT Publ, 2008. – 832 p.
- [7] *Ishlinskii, A. Yu. Mathematical Theory of Plasticity* / A. Yu. Ishlinskii, D. D. Ivlev. – M. : FIZMATLIT Publ, 2001. – 701 p.
- [8] *Hill, R. Mathematical Theory of Plasticity* / R. Hill. – M. : GITTL Publ, 1956.
- [9] *Tomlenov, A. D. Theory of Metals Plastic Deformation* / A. D. Tomlenov. – M. : Metallurgy Publ, 1972. – 408 p.

Ivlev, Dyuis Danilovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Nepershin, Rostislav Ivanovich

Dr. Tech. Sci., Professor, Moscow State University of Technology "Stankin", Moscow

А. А. Трещев, В. Г. Теличко, Д. С. Чигинский, Д. С. Астахов

ТЕРМОУПРУГИЙ ПОТЕНЦИАЛ ДЕФОРМАЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ, НАХОДЯЩИХСЯ В УСЛОВИЯХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

Тулльский государственный университет

Аннотация. Рассматривается возможность использования нормированных пространств напряжений для построения потенциальных соотношений для изотропных существенно нелинейных разносопротивляющихся материалов, подверженных одновременному воздействию механического нагружения и поля температуры. Предлагается методика вычисления констант потенциальных соотношений и теплофизических коэффициентов на основе экспериментальных данных.

Ключевые слова: термоупругость, потенциал деформаций, разносопротивляемость, нормированные пространства.

УДК: 539.3

Используя методику нормированных пространств, предложенную в работе Н. М. Матченко и А. А. Трещева [1], получим уравнения состояния для изотропных существенно нелинейных разносопротивляющихся материалов, находящихся в условиях термомеханического нагружения. Считаем, что для пропорционального или близкого к нему нагружения компоненты полной деформации e_{ij} складываются из упругой $e_{ij,e}$ и пластической $e_{ij,p}$ составляющих, а также составляющей деформации, которая возникает от влияния поля температуры $e_{ij,t}$. Тогда термодинамический потенциал Гиббса упрочняющегося материала представим в виде квазилинейного, нелинейного и температурного слагаемого. При этом квазилинейная и нелинейная части данного потенциала будут совпадать с точностью до констант, а нелинейность деформирования будет учитываться показателем степени n .

Для построения общей теории термоупругости нелинейных разносопротивляющихся материалов используются понятия неравновесной термодинамики. Рассмотрим малые изменения температуры, такие когда $\theta^0/T_0 \ll 1$, а поэтому зависимостью механических и теплофизических характеристик материала от температуры можно пренебречь (здесь $\theta^0 = T - T_0$ — изменение температуры от начального ненапряженного состояния; ” — конечная температура в точке тела; T_0 — начальная температура в точке тела в ненапряженном состоянии).

Влияние вида напряженного состояния на деформационные характеристики материала учитываются на базе методик нормированных пространств напряжений, тогда, используя характеристики второго нормированного пространства [1], термодинамический потенциал Гиббса представляется в виде:

$$\Gamma = W_e(\psi, \varphi, S_0) + W_p(\psi, \varphi, S_0) + W_t(\psi, S_0, T), \quad (1)$$

где W_e , W_p , W_t — квазилинейная, нелинейная и температурная составляющие термодинамического потенциала Гиббса; ψ , ϕ , S_0 — инварианты второго нормированного пространства; ψ , ϕ — угол жесткости напряженного состояния и фаза напряжений; S_0 — модуль вектора полного напряжения на октаэдрической площадке или норма второго пространства; T — параметр температуры.

Принимая за естественное состояние среды ненапряженное, приходим к необходимости исключить из разложения W_e члены, имеющие показатель степени ниже второй. Тогда квазилинейную составляющую W_e можно представить в виде

$$W_e = \Phi_e(\psi, \varphi) S_0^2. \quad (2)$$

Нелинейную часть потенциала запишем подобно квазилинейной, при этом фактор нелинейности связей между напряжениями и деформациями учтем показателем степени n :

$$W_p = [\Phi_p(\psi, \varphi) S_0^2]^n, \quad (3)$$

где n — не обязательно целое число.

Температурную составляющую термодинамического потенциала Гиббса (1) выразим через степенной полином от нормы второго пространства S_0 с коэффициентами разложения, зависящими от качественных инвариантов ψ , ϕ и температуры:

$$W_t = a_0(T) + a_1(T, \psi, \varphi) S_0. \quad (4)$$

Тогда вид функции (1) с учетом (2), (3), (4) легко позволяет реализовать положение, по которому энергия Гиббса обращается в ноль только в случае естественного ненапряженного состояния среды.

Коэффициенты a_i представим полиномом в окрестности естественного состояния, и все чисто температурные слагаемые (4) определим одной функцией:

$$a_0(T) = \Gamma_t(\theta^0). \quad (5)$$

Физический смысл выражения (5) заключается в учете взаимного влияния напряженного и термического состояния деформируемой среды. Опираясь на положения классической теории термоупругости, можно предположить, что главную роль здесь играет гидростатическое давление.

Коэффициент a_1 выразим в виде полинома по степеням нормированного напряжения

$$\xi = \sigma / S_0, \quad (6)$$

где $\sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$ — средние нормальные напряжения; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; δ_{ij} — символ Кронекера; $S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$; $\tau = \sqrt{S_{ij} S_{ij} / 3}$ — октаэдрические касательные напряжения; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$ — компоненты деватора напряжений.

Ограничившись квадратичным разложением с сохранением только лишь линейных слагаемых относительно температуры и опуская независимые от θ^0 компоненты, получим

$$a_1(T, \psi) = b_{t1} \theta^0 + b_{t2} \theta^0 \xi, \quad (7)$$

где b_{t1} , b_{t2} — температурные константы, θ^0 — функция температуры.

Отметим, что даже такое простейшее представление позволяет учесть влияние вида напряженного состояния на коэффициенты линейного температурного расширения материала.

Используя полиномиальное разложение функции Φ_e и Φ_p по степеням качественных характеристик напряженного состояния до третьей степени включительно и пренебрегая одновременным влиянием на механические характеристики трех нормированных напряжений, получим термодинамический потенциал Гиббса вида

$$\Gamma = W_e + W_p^n + \Gamma_t(\theta^0) + [(b_{t1} \xi + b_{t2}) \sigma + b_{t1} \eta \tau] \theta^0, \quad (8)$$

где $W_e = (A_e + B_e \xi) \sigma^2 + (C_e + D_e \xi + E_e \eta \cos 3\phi) \tau^2$; A_e , B_e , C_e , D_e , E_e — константы квазилинейной части; $W_p = (A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\phi) \tau^2$; A_p , B_p , C_p , D_p , E_p — константы нелинейной части; $\xi = \cos \psi = \sigma / S_0$ и $\eta = \sin \psi = \tau / S_0$ — гармонические

функции, которые трактуются как нормированные нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке; $\cos 3\phi$ — фазовый инвариант.

В первом нормированном пространстве потенциал Гиббса (1) запишется

$$\Gamma = \Phi_e(I_\alpha, III_\alpha) S^2 + [\Phi_p(I_\alpha, III_\alpha) S^2]^n + W_t(I_\alpha, S, T), \quad (9)$$

где I_α , III_α , S — инварианты первого нормированного пространства, $I_\alpha = \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $III_\alpha = \alpha_k \alpha_k \alpha_k$; S — модуль вектора полного напряжения и норма первого пространства; $\alpha_k = \sigma_k / S$ — нормированные напряжения ($k = 1, 2, 3$); σ_k — главные напряжения.

Используя полиномиальное разложение функции Φ_e и Φ_p по степеням качественных характеристик напряженного состояния до третьей степени включительно и пренебрегая одновременным влиянием на механические характеристики трех нормированных напряжений $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, получим термодинамический потенциал Гиббса вида

$$\Gamma = \{K_e\} [W_0] + (\{K_p\} [W_0])^n + \Gamma_t(\theta^0) + (B_t \theta^0 + A_t \theta^0 I_\alpha) S, \quad (10)$$

где $\{K_e\} = \{A_1, B_1, C_1, D_1\}$, $\{K_p\} = \{A_2, B_2, C_2, D_2\}$ — константы квазилинейной и нелинейной частей; $[W_0] = S^2 \begin{bmatrix} 1; & \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3; & \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1; \\ \alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_3^2 + \alpha_2 \alpha_3^2 + \alpha_2 \alpha_1^2 + \alpha_3 \alpha_1^2 + \alpha_3 \alpha_2^2 \end{bmatrix}$.

Отметим, что пренебрежение членом $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ не вносит заметной погрешности в определяющие соотношения, но позволяет существенно упростить процесс определения констант.

Применив операции дифференцирования в форме $e_{ij} = \partial \Gamma / \partial \sigma_{ij}$ и $L = \partial \Gamma / \partial T$ (где L — плотность энтропии) к термодинамическому потенциалу Гиббса (8), можно получить связь между компонентами тензоров деформаций и напряжений:

$$e_{ij} = 2F \sigma_{ij} + (K - F \sigma_{ij}) \delta_{ij}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} F &= \frac{2}{3} C_e + \left(\frac{1}{3} D_e + \sqrt{2} E_e \right) \xi + \frac{1}{81} E_e (\xi^2 - 1) \eta \cos 3\phi + \frac{1}{3} (D_e - B_e) \xi^3 + \\ &+ \left[18 C_p S_0 + \frac{1}{3} E_p (\xi^2 - 1) \tau \cos 3\phi + 9 \left(D_p + (D_p - B_p) \xi^2 + 3\sqrt{2} E_p \right) \sigma \right] P + \frac{1}{3} \frac{\theta^0 b_{t1}}{S_0}; \\ K &= \frac{2}{3} (A_e - C_e) \sigma + \left(B_e - \frac{2}{3} D_e - \frac{5\sqrt{2}}{2} E_e \right) \xi \sigma + \frac{1}{3} \eta \tau D_e + \frac{\sqrt{2}}{2} E_e S_0 + \frac{b_{t2} \theta^0}{3} + \\ &+ \left[18 (A_p - C_p) S_0 \sigma + 27 \left(B_p - \frac{2}{3} D_p - \frac{5\sqrt{2}}{2} E_p \right) \sigma^2 + 9 D_p \tau^2 + \frac{27\sqrt{2}}{2} E_p S_0^2 \right] P; \\ P &= (27 B_p \sigma^3 + E_p \cos 3\phi \tau^3 + 27 A_p S_0 \sigma^2 + 27 C_p S_0 \tau^2 + 27 D_p \sigma \tau^2)^{n-1} n (1/27 S_0^{-1})^n. \end{aligned}$$

Уравнения состояния термоупругого изотропного разносопротивляющегося материала также можно представить в виде

$$e_{ij} = \frac{2}{3} C_e (2 + \delta_{ij}) \sigma_{ij} + \frac{2}{3} (A_e - C_e) \delta_{ij} \sigma + \frac{1}{3} b_{t2} \theta^0 \delta_{ij} + H_{ij}, \quad (12)$$

где H_{ij} — нелинейные компоненты, включающие температурные составляющие.

Применив формулы Кастильяно к термодинамическому потенциалу Гиббса в форме (10), можно установить связи между главными напряжениями и деформациями:

$$e_{ij} = \left[\{K_e\} + n (\{K_p\} [W_0])^{n-1} \{K_p\} \right] \frac{\partial [W_0]}{\sigma_k} + (A_t + B_t \alpha_k) \theta^0, \quad (13)$$

$$\text{где } \frac{\partial [W_0]}{\partial \sigma_k} = \begin{bmatrix} 2\sigma_k; & \sigma_k [3\alpha_k - (\alpha_k^3 + \alpha_m^3 + \alpha_n^3)]; & \sigma_m + \sigma_n; \\ \sigma_m \sigma_m + \sigma_n \sigma_n + \sigma_k \begin{bmatrix} 2(\alpha_m + \alpha_n) - \alpha_k (\alpha_m^2 + \alpha_n^2) - \\ -\alpha_m (\alpha_k^2 + \alpha_n^2) - \alpha_m (\alpha_k^2 + \alpha_n^2) \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Для решения задачи расчета конструкций [4] и адекватного представления предлагаемых определяющих соотношений применительно к конкретным нелинейным материалам требуется вычисление констант потенциала Гиббса на основе имеющихся экспериментальных данных. Естественным требованием при постулировании новых уравнений состояния является минимальное количество привлекаемых экспериментов для вычисления констант. При этом эксперименты должны, по возможности, проводиться на элементарных образцах и реализовываться при простейших видах напряженного состояния, каковыми являются одноосные растяжение, сжатие и простой сдвиг. Проверка адекватности определяющих соотношений реальным механическим свойствам материалов, выполняется путем сравнения теоретически рассчитанных диаграмм деформирования (с учетом найденных констант) с экспериментальными, установленными при широком наборе сложных видов напряженного состояния.

Для вычисления констант потенциалов при частных напряженных состояниях удобно пользоваться экспериментальным и теоретическим представлением зависимостей между главными деформациями и напряжениями, которые удобно представить в следующем виде:

$$e_k = F_{e,k} S + F_{p,k} S^m + e_k^T; \quad (k = 1, 2, 3), \quad (14)$$

где $m = 2n - 1$; $F_{e,k}$, $F_{p,k}$ — коэффициенты, вычисляемые через константы потенциала $\{K_e\}$ и $\{K_p\}$; e_k^T — часть деформации, полученная вследствие изменения температуры.

При фиксированном показателе степени m коэффициенты $F_{e,k}$, $F_{p,k}$ определяются в результате обработки экспериментальных данных соответствующих диаграмм деформирования, построенных в условиях простого нагружения. Обработку экспериментальных диаграмм целесообразно проводить по методу наименьших квадратов:

$$\begin{aligned} F_{e,k} &= \left[\left(\sum e_k S \right) \left(\sum S^{2m} \right) - \left(\sum e_k S^m \right) \left(\sum S^{m+1} \right) \right] / \Delta_k; \\ F_{p,k} &= \left[\left(\sum e_k S^m \right) \left(\sum S^2 \right) - \left(\sum S^{m+1} \right) \left(\sum e_k S \right) \right] / \Delta_k; \\ \Delta_k &= \left(\sum S^2 \right) \left(\sum S^{2m} \right) - \left(\sum S^{m+1} \right)^2, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\sum e_k S^m = \sum_{i=1}^r e_{ki} S_i^m$; i — текущая точка на диаграмме; r — число точек, выбранных для расчета.

Очевидно, что для констант потенциала (8) достаточно четырех экспериментальных кривых, выбранных из двух различных опытов. Эти кривые назовем эталонными. Так, при использовании диаграмм одноосного растяжения ($\sigma_1 = S$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) и одноосного сжатия

($\sigma_1 = -S$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) из (11) и (14) вытекают следующие зависимости:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= (F_{e.1}^+ - F_{e.1}^-)/4; & B_1 &= (F_{e.1}^+ + F_{e.1}^-)/4; \\
 C_1 &= (F_{e.2}^+ - F_{e.2}^-)/2; & D_1 &= (F_{e.2}^+ + F_{e.2}^-)/2; \\
 A_2 &= \left[(F_{p.1}^+/2n)^{1/n} + (-F_{p.1}^+/2n)^{1/n} \right] / 2; \\
 B_2 &= \left[(F_{p.1}^+/2n)^{1/n} - (-F_{p.1}^+/2n)^{1/n} \right] / 2; \\
 C_2 &= \left[F_{p.2}^+ / (F_{p.1}^+/2n)^{(n-1)/n} - F_{p.2}^- / (-F_{p.1}^+/2n)^{(n-1)/n} \right] / 2n; \\
 D_2 &= \left[F_{p.2}^+ / (F_{p.1}^+/2n)^{(n-1)/n} + F_{p.2}^- / (-F_{p.1}^+/2n)^{(n-1)/n} \right] / 2n,
 \end{aligned} \tag{16}$$

где $F_{e.k}^+$, $F_{p.k}^+$ — константы, вычисленные по диаграммам одноосного растяжения; $F_{e.k}^-$, $F_{p.k}^-$ — то же, но вычисленные по диаграммам одноосного сжатия.

Для окончательного вычисления параметров $F_{e.k}$ и $F_{p.k}$ необходимо определить и зафиксировать оптимальную степень m , которая выделяется путем перебора ее значений в заданном интервале с установленным шагом изменения. Оценка точности в данном случае представляет собой отношение среднеквадратичного отклонения погрешности аппроксимации экспериментальных деформаций к среднему уровню этих деформаций:

$$\delta = \sqrt{\sum (\Delta \bar{e}_k - \Delta e_k)^2 / (r-1)} / \sum e_k / r, \tag{17}$$

где $\Delta e_k = e_k - F_{e.k}S - F_{p.k}S^{2n-1}$; $\Delta \bar{e}_k = \sum \Delta e_k / r$.

Окончательно оптимальное значение показателя степени выбирается из условия минимума суммы оценок (17) по всем четырем эталонным кривым.

Следует заметить, что простое вычисление констант даже при оптимальном показателе степени m из-за высокой чувствительности потенциала к погрешности экспериментальных данных может приводить к негативным фактам. В частности, может оказаться, что точность предсказания «новых» — неэталонных — диаграмм деформирования будет неудовлетворительной, либо могут возникнуть численные неопределенности. Такие неопределенности проявляются для отрицательных значений частей W_e и W_p при некоторых видах напряженного состояния, заключающиеся, например, в аварийном завершении численного счета в процессе возведения W_p в дробную степень. Рекомендуемый процесс вычисления констант описан в [1], [3].

Устойчивость потенциала (8) проверяется по методике, предложенной А. А. Трещевым в работе [3]. Константы потенциала, рассчитанные по четырем эталонным диаграммам, соответствующим двум опытам, приведены в работе [4].

Теплофизические коэффициенты, входящие в уравнения состояния, можно вычислить по результатам обработки опытов, связанных с нагреванием и охлаждением одноосно растягиваемых и одноосно сжимаемых образцов разносопротивляющегося материала. Очевидно, что полная деформация образца определяется суммой изотермической составляющей e_k^W и части деформации, полученной вследствие изменения температуры e_k^T . Тогда при одноосном

растяжении вдоль оси k имеем

$$e_k^+ = e_k^{W^+} + e_k^{T^+};$$

$$e_k^{T^+} = e_k^+ - e_k^{W^+} = (b_{t2} + b_{t1})\theta^0 = \alpha_{t1}^+\theta^0; \quad (18)$$

$$e_m^{T^+} = e_m^+ - e_m^{W^+} = b_{t2}\theta^0 = \alpha_{t2}^+\theta^0,$$

а при одноосном сжатии вдоль оси k

$$e_k^- = e_k^{W^-} + e_k^{T^-};$$

$$e_k^{T^-} = e_k^- - e_k^{W^-} = (b_{t2} - b_{t1})\theta^0 = \alpha_{t1}^-\theta^0; \quad (19)$$

$$e_m^{T^-} = e_m^- - e_m^{W^-} = b_{t2}\theta^0 = \alpha_{t2}^-\theta^0.$$

Отсюда получим

$$b_{t1} = (\alpha_{t1}^+ - \alpha_{t1}^-)/2; \quad b_{t2} = (\alpha_{t1}^+ + \alpha_{t1}^-)/2. \quad (20)$$

В уравнениях (18)–(20) α_{t1}^\pm — коэффициенты линейного теплового расширения в продольном, а α_{t2}^\pm — в поперечном направлениях, полученные при растяжении (+) и при сжатии (–) опытных образцов.

Наличие в полиномиальном разложении (7) только двух констант приводит к ограничениям на экспериментально определяемые коэффициенты теплового расширения:

$$\alpha_{t2}^+ = \alpha_{t2}^- = (\alpha_{t1}^+ + \alpha_{t1}^-)/2. \quad (21)$$

Однако, по крайней мере в своей первой части, ограничение (21) не вызывает возражений. Это объясняется тем, что предположить независимость коэффициентов линейного теплового расширения в поперечном направлении от знака напряжений в продольном направлении вполне естественно. Таким образом, очевидно, что потенциальные соотношения (8) и (10) достаточно универсальны и вполне применимы для расчета напряженно-деформированного состояния конструкций, выполненных из нелинейно разнсопротивляющихся материалов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Матченко, Н. М.* Теория деформирования разнсопротивляющихся материалов. Определяющие соотношения / Н. М. Матченко, А. А. Трещев. – Тула : ТулГУ, 2000. – 149 с.
- [2] *Матченко, Н. М.* Теория деформирования разнсопротивляющихся материалов. Прикладные задачи теории упругости / Н. М. Матченко, А. А. Трещев. – М. ; Тула : РААСН ; ТулГУ, 2004. – 211 с.
- [3] *Трещев, А. А.* Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А. А. Трещев. – М. ; Тула : РААСН ; ТулГУ, 2008. – 264 с.
- [4] *Трещев, А. А.* К решению термомеханической задачи об изгибе круглой пластины из нелинейного материала / А. А. Трещев, Д. С. Чигинский // Наука и технологии. Краткие сообщения ХХХ Российской школы, посвященные 65-летию Победы. – Екатеринбург : УрО РАН, 2010. – Т. 1. – С. 170–172.
- [5] *Чигинский, Д. С.* Вывод уравнений состояния для нелинейных материалов, находящихся в условиях термомеханического нагружения / Д. С. Чигинский // Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики. V Международная конференция по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики : материалы конференции. – Тула : Изд-во ТулГУ, 2009. – Т. 2. – С. 128–133.

Трещев Александр Анатольевич,

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: taa58@yandex.ru

Теличко Виктор Григорьевич,

кандидат технических наук, доцент кафедры "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: katranv@yandex.ru

Чигинский Дмитрий Сергеевич,

кандидат технических наук, ассистент кафедры "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: dmitriy@chiginskiy.ru

Астахов Денис Сергеевич,

аспирант кафедры "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: tvg1981@gmail.com

A. A. Treshchev, V. G. Telichko, D. S. Chiginskiy, D. S. Astakhov

THERMOELASTIC DEFORMATION POTENTIAL FOR NONLINEAR MATERIALS UNDER THERMOMECHANICAL LOADING

Tula State University

Abstract. The possibility of using the normalized stress space for the construction of potential relations for isotropic different resistant strongly nonlinear materials subject to the simultaneous action of mechanical loading and temperature field. A method of calculating the constants of potential relationships and physical characteristics on the basis of experimental data.

Keywords: thermoelasticity, potential strain, different resistance, normalized space.

REFERENCES

- [1] *Matchenko, N. M.* Deformation theory differently resisting materials. Defining ratios / N. M. Matchenko, A. A. Treshchev. – Tula : TulGU, 2000. – 149 p.
- [2] *Matchenko, N. M.* Deformation theory differently resisting materials. Applied tasks of the theory of elasticity / N. M. Matchenko, A. A. Treshchev. – M. : RAASN ; Tula : TulGU, 2004. – 211 p.
- [3] *Treshchev, A. A.* Theory of deformation and durability of the materials sensitive to type of a tension. Defining ratios / A. A. Treshchev. – M. : RAASN ; Tula : TulGU, 2008. – 264 p.
- [4] *Treshchev, A. A.* To the solution of a thermomechanical task about bend of a round plate from a nonlinear material / A. A. Treshchev, D. S. Chiginskiy // Science and technologies. Short messages of XXX The Russian school, the Victories devoted to the 65 anniversary. – Ekaterinburg : OURO of the Russian Academy of Sciences, 2010. – Vol. 1. – P. 170–172.
- [5] *Chiginskiy, D. S.* Conclusion of the equations of a condition for the nonlinear materials being in conditions of the thermomechanical loadings / D. S. Chiginskiy // Social and economic and environmental problems of mining industry, construction and energy drinks. V International conference on problems of the mountain industries, constructions and energy drinks : conference materials. – Tula : Publishing house of TulGU, 2009. – Vol. 2. – P. 128–133.

Treshchev, Alexander Anatolievich

Dr. Tech. Sci., Professor, Head of the Department of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula

e-mail: taa58@yandex.ru

Telichko, Victor Grigorievich

Cand. Tech. Sci., Assoc. Professor, Department of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula

e-mail: katranv@yandex.ru

Chiginskiy, Dmitriy Sergeivich

Cand. Tech. Sci., Assistant, Department of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula

e-mail: dmitriy@chiginskiy.ru

Astakhov, Denis Sergeivich

Postgraduate Student, Department of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula

А. А. Трещев, В. Г. Теличко, А. Н. Царев

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ 3D КОНЕЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Тульский государственный университет

Аннотация. Рассматривается модификация объемного конечного элемента в форме тетраэдра для расчета пространственных конструкций из разнородных материалов. Выведена матрица жесткости для конечного элемента в форме тетраэдра с тремя степенями свободы в узле. Решена примерная задача о расчете толстой цилиндрической оболочки.

Ключевые слова: оболочка, анизотропия, ортотропия, разнородность, трехмерный конечный элемент.

УДК: 539.3

Расчет плит и оболочек ведется, как известно, на базе прикладных технических теорий, позволяющих перейти от трехмерной задачи к двумерной, что существенно упрощает как математическую, так и чисто вычислительную процедуру. Очевидно, что реализация подобного подхода, в основе которого лежит исследование поведения срединной поверхности плиты или оболочки, в МКЭ обуславливает появление специфических конечных элементов. В большинстве случаев для построения матриц, характеризующих такие элементы, используются соответствующие соотношения теории плит и оболочек, основанные на априорных гипотезах об изменении напряженно-деформированного состояния по толщине. Имеется целый ряд таких теорий, отличающихся характером и степенью обоснованности вводимых допущений. Наиболее распространенными из них являются теория тонких пластин и оболочек Кирхгофа-Лява, средней толщины С. П. Тимошенко, Э. Рейсснера и т. д. Однако не все плиты и оболочки, применяемые в строительстве, можно отнести к классу тонких или средней толщины, во-первых, из-за их геометрических размеров, во-вторых, из-за существенной неоднородности материала и его нелинейного поведения, наличия арматуры, трещин и т. д. Более того, с точки зрения МКЭ каждый конечный элемент, являясь частью системы, должен рассматриваться как отдельная конструкция в ее составе, соотношение его геометрических размеров должно отвечать требованиям, при которых допустимо использование кинематических и статических гипотез.

Перечисленные особенности деформирования пространственных конструкций могут быть учтены только с привлечением аппарата общей трехмерной теории с использованием всей совокупности компонент напряжений и деформаций. Поэтому необходим комплексный подход, сочетающий, с одной стороны, часть гипотез технической теории изгиба, с другой – соотношения общей механики. Основой такого подхода могут служить специальные конечные элементы, построенные на базе стандартных объемных элементов.

Рассмотрим объемный конечный элемент в виде тетраэдра (рис. 1) с четырьмя узлами в вершинах [1].

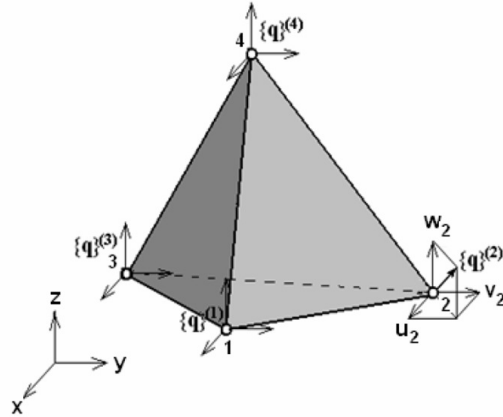


Рис. 1. Конечный элемент в виде тетраэдра

Вектор-столбец узловых перемещений i -го элемента имеет вид

$$\{q\}_i = \left\{ \{q\}_i^{(1)} \{q\}_i^{(2)} \{q\}_i^{(3)} \{q\}_i^{(4)} \right\}, \quad (1)$$

где каждый из векторов представляется тремя проекциями $\{q\}_i^{(k)} = \left\{ q_1^{(k)} q_2^{(k)} q_3^{(k)} \right\} = \{u_k v_k w_k\}$.

Аналогичную структуру имеет вектор узловых сил

$$\{R\}_i = \left\{ \{R\}_i^{(1)} \{R\}_i^{(2)} \{R\}_i^{(3)} \{R\}_i^{(4)} \right\}, \quad (2)$$

где $\{R\}_i^{(k)} = \left\{ R_1^{(k)} R_2^{(k)} R_3^{(k)} \right\}$.

Связь между векторами (2) и (2) $\{R\}_i = [K]_i \{q\}_i$ осуществляется с помощью матрицы жесткости $[K]_i$, которая имеет блочную структуру

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & [K]_{i1}^{(2)} & [K]_{i1}^{(3)} & [K]_{i1}^{(4)} \\ [K]_{i2}^{(1)} & [K]_{i2}^{(2)} & [K]_{i2}^{(3)} & [K]_{i2}^{(4)} \\ [K]_{i3}^{(1)} & [K]_{i3}^{(2)} & [K]_{i3}^{(3)} & [K]_{i3}^{(4)} \\ [K]_{i4}^{(1)} & [K]_{i4}^{(2)} & [K]_{i4}^{(3)} & [K]_{i4}^{(4)} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

а типовой блок определяется по формуле

$$[K]_{ij}^{(k)} = \iiint_{V_i} ([B]^{(j)})^T [D] [B]^{(k)} dV. \quad (4)$$

Для того чтобы построить матрицы для элемента, необходимо выразить перемещения точек внутри элемента через перемещения его узлов, т. е. установить зависимость $\{u\} = [C] \{q\}_i = \left[[C]^{(1)} [C]^{(2)} \dots [C]^{(k)} \dots [C]^{(n)} \right] \{q\}_i$. Матрица интерполяционных функций для тетраэдра будет иметь четыре блока по числу узлов

$$[C] = \left[[C]^{(1)} [C]^{(2)} [C]^{(3)} [C]^{(4)} \right], \quad (5)$$

каждый из которых равен $[C]^{(k)} = E_3 C_k(x, y, z)$, где E_3 – единичная матрица третьего порядка.

Закон изменения перемещений u , v и w по области элемента примем в виде линейных функций координат, т. е.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_4 x + \alpha_7 y + \alpha_{10} z; \\ v(x, y, z) &= \alpha_2 + \alpha_5 x + \alpha_8 y + \alpha_{11} z; \\ w(x, y, z) &= \alpha_3 + \alpha_6 x + \alpha_9 y + \alpha_{12} z. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что функции (6) обеспечивают неразрывность перемещений на границе между элементами. Для определения двенадцати неизвестных коэффициентов имеются 12 условий по общему числу компонент узловых перемещений (4 узла по 3 перемещения в каждом). Например, $u(x_1, y_1, z_1) = u_1 = \alpha_1 + \alpha_4 x_1 + \alpha_7 y_1 + \alpha_{10} z_1$ и т. д. Учитывая очевидные соотношения

$$\begin{aligned} C_1(x, y, z) + C_2(x, y, z) + C_3(x, y, z) + C_4(x, y, z) &= 1; \\ C_1(x, y, z)x_1 + C_2(x, y, z)x_2 + C_3(x, y, z)x_3 + C_4(x, y, z)x_4 &= x; \\ C_1(x, y, z)y_1 + C_2(x, y, z)y_2 + C_3(x, y, z)y_3 + C_4(x, y, z)y_4 &= y; \\ C_1(x, y, z)z_1 + C_2(x, y, z)z_2 + C_3(x, y, z)z_3 + C_4(x, y, z)z_4 &= z, \end{aligned} \quad (7)$$

после преобразований получим

$$\begin{Bmatrix} C_1(x, y, z) \\ C_2(x, y, z) \\ C_3(x, y, z) \\ C_4(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Откуда найдем

$$\begin{aligned} C_1(x, y, z) &= \frac{1}{6V_i}(a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z); & C_2(x, y, z) &= \frac{1}{6V_i}(a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z); \\ C_3(x, y, z) &= \frac{1}{6V_i}(a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z); & C_4(x, y, z) &= \frac{1}{6V_i}(a_4 + b_4 x + c_4 y + d_4 z), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \det \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; & b_1 &= -\det \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; \\ c_1 &= -\det \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}; & d_1 &= -\det \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$a \ 6V_i = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \text{ — шесть объемов тетраэдра.}$$

Физический смысл выражений (9) заключается в том, что каждая из зависимостей представляет собой отношение объема соответствующего заштрихованного тетраэдра с вершиной в данной точке к объему всего конечного элемента (рис. 1), т. е.

$$C_1(x, y, z) = \frac{V_{m234}}{V_i}, C_2(x, y, z) = \frac{V_{m134}}{V_i}, C_3(x, y, z) = \frac{V_{m124}}{V_i}, C_4(x, y, z) = \frac{V_{m123}}{V_i}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} V_{m234} &= \frac{(a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z)}{6}, & V_{m134} &= \frac{(a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z)}{6}, \\ V_{m124} &= \frac{(a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z)}{6}, & V_{m123} &= \frac{(a_4 + b_4 x + c_4 y + d_4 z)}{6}. \end{aligned}$$

Функции, определенные соотношением (10), называют объемными L -координатами и являются нормализованными координатами для тетраэдра. Таким образом,

$$\begin{aligned} L_1 &= C_1(x, y, z); & L_2 &= C_2(x, y, z); \\ L_3 &= C_3(x, y, z); & L_4 &= C_4(x, y, z). \end{aligned} \quad (11)$$

Значения L -координат находятся в интервале 0-1, они удовлетворяют требованиям

$$L_j(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad (12)$$

При этом из четырех L -координат только три являются независимыми, поскольку они связаны между собой выражением

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1. \quad (13)$$

Далее L -координаты будут использоваться для интерполяции узловых перемещений в область тех конечных элементов, которые отображаются на тетраэдр.

Каждый из четырех блоков матрицы деформаций запишем так:

$$[B]^{(k)} = [\Phi] C_k(x, y, z) = \frac{1}{6V_i} \begin{bmatrix} b_k & 0 & 0 \\ 0 & c_k & 0 \\ 0 & 0 & d_k \\ c_k & b_k & 0 \\ 0 & d_k & c_k \\ d_k & 0 & b_k \end{bmatrix}, \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (14)$$

Матрицу, осуществляющую связь между напряжениями и деформациями при объемном напряженном состоянии, запишем в общем виде для анизотропного материала $[D] = [D_{ij}]$ (причем $D_{ij} = D_{ji}$), где $i, j=1, \dots, 6$. При этом будем исходить из предположения, что эта матрица постоянна в пределах элемента.

Подставив (14) и матрицу $[D]$ в выражение (4) и осуществив интегрирование, получим типовой блок матрицы жесткости элемента в виде тетраэдра. Так как все компоненты матрицы $[B]^{(k)}$ (14) являются независимыми от координат постоянными величинами, то интеграл в (4) заменяется выражением

$$[K]_{il}^{(k)} = \frac{1}{36V_i^2} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11} &= D_{11}b_k b_j + D_{44}c_k c_j + D_{66}d_k d_j + D_{14}(c_k b_j + b_k c_j) + \\ &\quad + D_{16}(d_k b_j + b_k d_j) + D_{46}(d_k c_j + c_k d_j); \\ K_{12} &= D_{12}c_k b_j + D_{14}b_k b_j + D_{15}d_k b_j + D_{24}c_k c_j + D_{44}b_k c_j + \\ &\quad + D_{45}d_k c_j + D_{26}c_k d_j + D_{46}b_k d_j + D_{56}d_k d_j; \\ K_{13} &= D_{13}d_k b_j + D_{15}c_k b_j + D_{16}b_k b_j + D_{43}d_k c_j + D_{45}c_k c_j + \\ &\quad + D_{46}b_k c_j + D_{36}d_k d_j + D_{56}c_k d_j + D_{66}b_k d_j; \\ K_{21} &= D_{12}b_k c_j + D_{24}c_k c_j + D_{26}d_k c_j + D_{14}b_k b_j + D_{44}c_k b_j + D_{46}d_k b_j + \\ &\quad + D_{15}b_k d_j + D_{45}c_k d_j + D_{56}d_k d_j; \\ K_{22} &= D_{22}c_k c_j + D_{44}b_k b_j + D_{55}d_k d_j + D_{24}(b_k c_j + c_k b_j) + \\ &\quad + D_{25}(d_k c_j + c_k d_j) + D_{45}(d_k b_j + b_k d_j); \\ K_{23} &= D_{23}d_k c_j + D_{25}c_k c_j + D_{26}b_k c_j + D_{34}d_k b_j + D_{45}c_k b_j + \\ &\quad + D_{46}b_k b_j + D_{35}d_k d_j + D_{55}c_k d_j + D_{56}b_k d_j; \\ K_{31} &= D_{13}b_k d_j + D_{34}c_k d_j + D_{36}d_k d_j + D_{15}b_k c_j + D_{45}c_k c_j + \\ &\quad + D_{56}d_k c_j + D_{16}b_k b_j + D_{46}c_k b_j + D_{66}d_k b_j; \\ K_{32} &= D_{23}c_k d_j + D_{34}b_k d_j + D_{35}d_k d_j + D_{25}c_k c_j + \\ &\quad + D_{45}b_k c_j + D_{55}d_k c_j + D_{26}c_k b_j + D_{46}b_k b_j + D_{56}d_k b_j; \\ K_{33} &= D_{33}d_k d_j + D_{55}c_k c_j + D_{66}b_k b_j + D_{35}(c_k d_j + d_k c_j) + \\ &\quad + D_{36}(b_k d_j + d_k b_j) + D_{56}(b_k c_j + c_k b_j), \\ &\quad j, k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Распределенные объемные силы, вектор-столбец которых $\{G_V\} = \{X_V Y_V Z_V\}$, приводятся к эквивалентным узловым силам, вектор которых имеет блочную структуру $\{P_V\}_i = \left\{ \{P_V\}_i^{(1)} \{P_V\}_i^{(2)} \{P_V\}_i^{(3)} \{P_V\}_i^{(4)} \right\}$, причем каждый блок содержит компоненты вдоль осей x, y, z и равен $\{P_V\}_i^{(k)} = \left\{ P_{1V}^{(k)} P_{2V}^{(k)} P_{3V}^{(k)} \right\}$. Очевидно имеем

$$\{P_V\}_i^{(k)} = \iiint_{V_i} C_k(x, y, z) \{G_V\} dx dy dz. \quad (16)$$

В том случае, когда объемные силы в пределах элемента постоянны,

$$\{P_V\}_i^{(k)} = \frac{V_i}{4} \{G_V\}. \quad (17)$$

Отметим, что если i -й элемент подвергается начальной деформации $\{\varepsilon_t\}$, постоянной в пределах элемента, то вектор-столбец узловых сил, эквивалентный этому воздействию, имеет типовой блок

$$\{P_t\}_i^{(k)} = V_i ([B]^{(k)})^T [D] \{\varepsilon_t\}. \quad (18)$$

Для конкретизации структурной анизотропии материала исследуемой оболочки примем ортотропное тело. Тогда общие уравнения упругости для ортотропного разносопротивляющегося материала и соответственно матрицы $[A] = [D-1]$ примем в соответствии с гипотезами [2]:

$$\{\varepsilon_k\} = [A_{km}] \{S_m\}, \quad (k, m = 1, 2, \dots, 6), \quad (19)$$

где

$$[A_{km}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\{\varepsilon_k\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}, \quad \{S_m\} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{aligned} e_{11} &= (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11}) \sigma_{11} + [A_{1122} + B_{1122}(a_{11} + \alpha_{22})] \sigma_{22} + \\ &\quad + [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})] \sigma_{33}; \\ e_{22} &= [A_{1122} + B_{1122}(a_{11} + \alpha_{22})] \sigma_{11} + (A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22}) \sigma_{22} + \\ &\quad + [A_{2233} + B_{1133}(\alpha_{22} + \alpha_{33})] \sigma_{33}; \\ e_{33} &= [A_{1133} + B_{1133}(a_{11} + \alpha_{33})] \sigma_{11} + (A_{2222} + B_{2222}(\alpha_{22} + \alpha_{33})) \sigma_{22} + \\ &\quad + [A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33}] \sigma_{33}; \\ e_{12} &= (A_{1212} + B_{1212}\sqrt{2}\alpha_{12}) \tau_{12}; \quad e_{13} = (A_{1313} + B_{1313}\sqrt{2}\alpha_{13}) \tau_{13}; \\ e_{23} &= (A_{2323} + B_{2323}\sqrt{2}\alpha_{23}) \tau_{23}. \end{aligned} \quad (21)$$

При этом константы для ортотропного тела вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A_{kkkk} &= (1/E_k^+ + 1/E_k^-) / 2; & B_{kkkk} &= (1/E_k^+ - 1/E_k^-) / 2; \\
 A_{iijj} &= -(\nu_{ij}^+ / E_j^+ + \nu_{ij}^- / E_j^-) / 2; & B_{iijj} &= -(\nu_{ij}^+ / E_j^+ - \nu_{ij}^- / E_j^-) / 2; \\
 A_{ijij} &= (1/E_{ij}^+ + 1/E_{ij}^-) - 0,25 \left[\begin{aligned} &(1/E_i^+ + 1/E_j^+ + 1/E_i^- + 1/E_j^-) - \\ &-2(\nu_{ji}^+ / E_i^+ + \nu_{ji}^- / E_i^-) \end{aligned} \right]; & (22) \\
 B_{ijij} &= \sqrt{2} (1/E_{ij}^+ - 1/E_{ij}^-) - 0,125\sqrt{2} \left[\begin{aligned} &(1/E_i^+ + 1/E_j^+ - 1/E_i^- - 1/E_j^-) - \\ &-4(\nu_{ji}^+ / E_i^+ - \nu_{ji}^- / E_i^-) \end{aligned} \right],
 \end{aligned}$$

где

$$\nu_{ij}^+ / E_j^+ = \nu_{ji}^+ / E_i^+; \quad \nu_{ij}^- / E_j^- = \nu_{ji}^- / E_i^-.$$

Рассмотрим пример расчета толстой цилиндрической оболочки (рис. 2), опертой по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

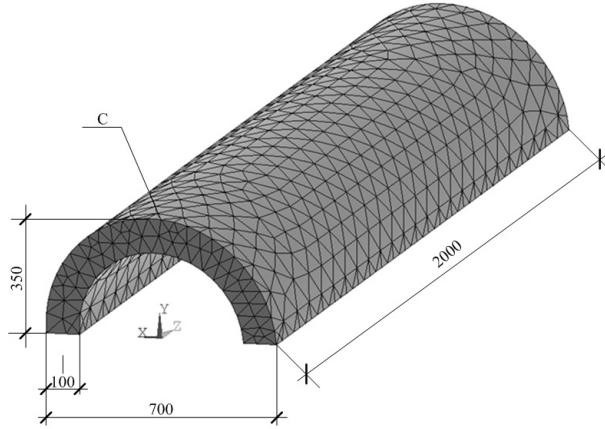


Рис. 2. Конструкция и расчетная схема оболочки

Исходные данные для расчета принимались следующие: размеры в плане оболочки – 2000×700 мм, высота подъема – 350 мм, внутренний радиус – 250 мм. Материал оболочки – графит АТJ-S. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки q варьировалась от 0 до 200 кПа. Расчет велся с помощью метода конечных элементов в сочетании с методом "переменных параметров" упругости.

Результаты расчета представлены на рис. 3–5.

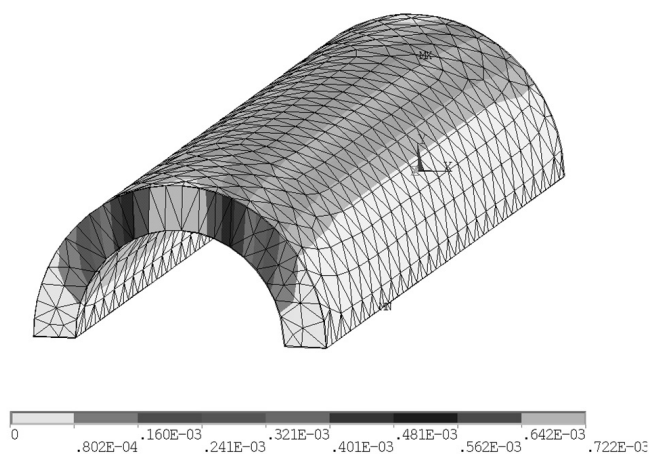


Рис. 3. Распределение вертикальных прогибов w в оболочке, м при нагрузке $q=200$ кПа

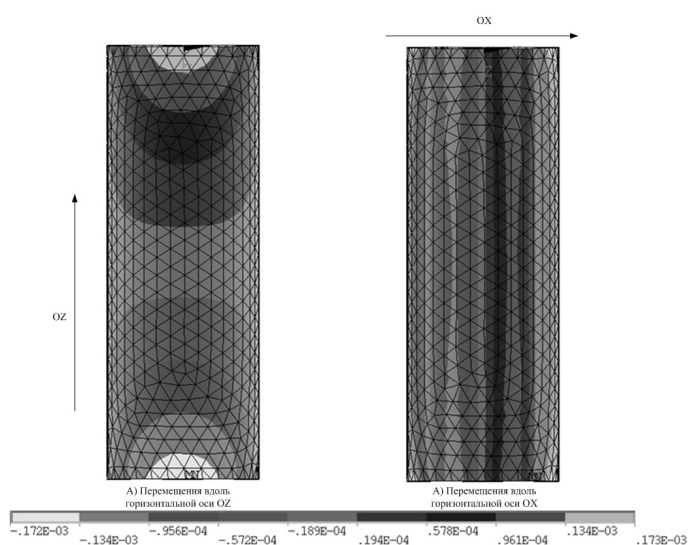


Рис. 4. Горизонтальные перемещения u в оболочке, м при нагрузке $q=200$ кПа

Проведенные авторами исследования напряженно-деформированного состояния толстой цилиндрической оболочки из разносопротивляющегося анизотропного материала показали, что пренебрегать учетом явления разносопротивляемости при расчете толстых оболочечных элементов конструкций нельзя, так как это может привести к значительным погрешностям в определении параметров напряженно-деформированного состояния.

Разработанная авторами вычислительная модель приобретает особую актуальность в связи с широким распространением анизотропных разносопротивляющихся материалов в строительных конструкциях, авиастроении и технологическом оборудовании и в отсутствии надежной теории для расчета конструкций из таких материалов.

Материалы статьи могут быть полезны для специалистов в области прогнозирования поведения конструкций, а также для выполнения проектировочных и проверочных расчетов.

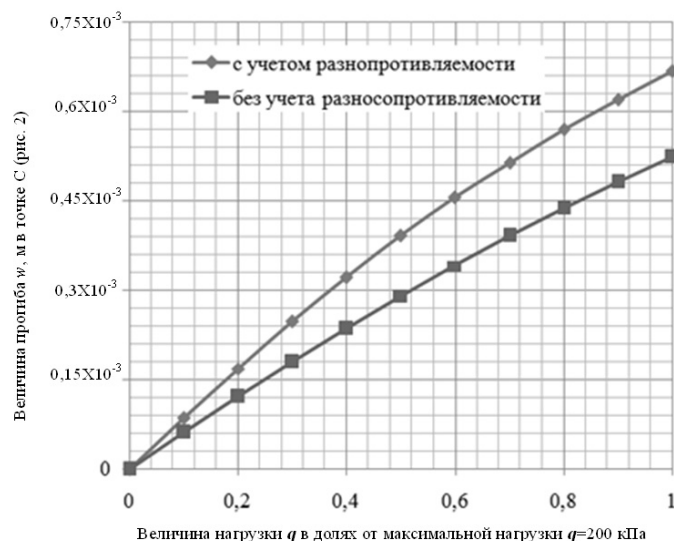


Рис. 5. Величина вертикального прогиба w , м в зависимости от значения равномерно распределенной нагрузки q

ЛИТЕРАТУРА

[1] Клованич, С. Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики / С. Ф. Клованич // Запорожье : Издательство журнала "Світ геотехніки". — 2009. — 400 с.

[2] Трещев, А. А. Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А. А. Трещев. – М. ; Тула : РААСН ; ТулГУ, 2008. – 264 с.

Трещев Александр Анатольевич,

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: taa58@yandex.ru

Теличко Виктор Григорьевич,

кандидат технических наук, доцент кафедры "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: katranv@yandex.ru

Царев Александр Николаевич,

аспирант кафедры "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: tula1146@mail.ru

A. A. Treshchev, V. G. Telichko, A. N. Tsarev

**MODELING OF STRUCTURES MADE OF DIFFERENT RESISTANT
MATERIALS WITH 3D FINITE ELEMENT**

Tula State University

Abstract. A modification of the 3D finite element in the form of a tetrahedron to calculate the spatial structures of different resistant materials. We derive the stiffness matrix for a finite element in the form of a tetrahedron with three degrees of freedom in the node. Solved the problem of calculating the estimated thick cylindrical shell.

Keywords: shell, anisotropy, orthotropy, different resistance, 3D finite element.

REFERENCES

- [1] *Klovanich, S. F.* Method of final elements in nonlinear problems of engineering mechanics / S. F. Klovanich // Zaporozhye : Світ геотехніки journal publishing house — 2009. — 400 p.
[2] *Treshchev, A. A.* The theory of deforming and durability of materials, sensitive to a type of a tension. Defining ratios / A. A. Treshchev. — M. : RAASN ; Tula : TulGU, 2008. — 264 p.

Treshchev, Alexander Anatolievich

Dr. Tech. Sci., Professor, Head of the Department of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula

e-mail: taa58@yandex.ru

Telichko, Victor Grigorievich

Cand. Tech. Sci., Assoc. Professor, Department of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula

e-mail: katranv@yandex.ru

Tsarev, Alexander Nikolayevich

Postgraduate student, Department of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula

e-mail: tula1146@mail.ru

О МАТЕРИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ ВАРИАНТА ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ, ОСНОВАННОГО НА КОНЦЕПЦИИ СКОЛЬЖЕНИЯ

Днепропетровский национальный университет имени О. Гончара

Аннотация. Предложена методика определения с учетом эффекта Баушингера материальных функций варианта теории пластичности, основанного на концепции скольжения.

Ключевые слова: пластичность, теория скольжения, функции упрочнения и пластичности, эффект Баушингера.

УДК: 539

Введение. В основу построения определяющих уравнений связи $\dot{\sigma}_{mn} \sim \dot{\varepsilon}_{mn}$ варианта теории скольжения [1], [2] заложены две материальные функции: функция упрочнения $F(\omega)$ и пластичности $\Pi(\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*)$. Первая из них (F) учитывает взаимодействие систем скольжения, формирует деформационную анизотропию материала и в конечном итоге определяет его векторные свойства. Рассмотрена [2], [3] всевозможная функция упрочнения

$$F(\omega) = a\omega^{-h_1} + a_{2n} \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\omega + a_1 \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)^{-h_2}$$
$$(a, a_{2n}, a_1, h_1, h_2 \sim \text{const}, h_1, h_2 < 1)$$

и ее частные случаи. Простейшие из них приводят к известным вариантам теории пластического течения с изотропным, кинематическим, комбинированным упрочнениями [3] и открывают возможность их естественного обобщения.

Функция пластичности $\Pi[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*]$ учитывает влияние на соотношения связи $\dot{\sigma}_{mn} \sim \dot{\varepsilon}_{mn}$ интенсивности пластической деформации $\varepsilon_i^{(p)}$, ее экстремальных значений λ_k , соответствующих изменения знака скорости $\dot{\varepsilon}_i^{(p)}$ на противоположный, и в конечном итоге описывает скалярные свойства материала. В случае пластического деформирования, при котором $\varepsilon_i^{(p)}$ – неубывающая функция времени ($\dot{\varepsilon}_i^{(p)} \geq 0$), вместо $\Pi[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*]$ принимается $\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}, 0]$. Функция пластичности позволяет в определенной степени нивелировать некоторый произвол, заложенный при выборе функции упрочнения, и корректировать определяющие уравнения связи $\sigma_{mn} \sim \varepsilon_{mn}$ с макроэкспериментом. Отметим, что в ранее предложенной [4] линейной модели плоскопластической среды, основанной на концепции скольжения, было принято $\Pi \equiv k = \text{const}$, что, как показано в [2], значительно ограничивает область применимости соответствующего варианта теории скольжения.

Аналитико-экспериментальное определение функций пластичности. Вопрос определения функции $\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]$ при $\dot{\varepsilon}_i^{(p)} \geq 0$ рассматривался в работах [2], [5]. Кратко приведем полученные там результаты и рассмотрим более детально задачу построения $\Pi[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_1^*]$ при знакопеременном нагружении с учетом эффекта Баушингера. Исследования проведем с использованием функции упрочнения

$$F(\omega) = \ln(C \cdot \operatorname{ctg} \omega) \quad (C = \operatorname{const}), \quad (1)$$

которая ранее не рассматривалась при решении поставленной здесь задачи. В качестве базового воспользуемся экспериментом на знакопеременное кручение тонкостенной трубки (рис. 1). Согласно [6] на первом этапе упругопластического нагружения (участок АВ диаграммы $\tau \sim \gamma$) можем получить

$$d\gamma^p/d\tau = 2B(\alpha)/\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}] \quad (\varepsilon_i^{(p)} = \gamma^{(p)}/\sqrt{3}), \quad (2)$$

где

$$B(\alpha) = \frac{1}{2K(\cos 2\alpha)} \left[E(\cos 2\alpha) - K(\cos 2\alpha) \sin^2 2\alpha - \frac{\pi \ln C}{\pi K(\cos 2\alpha) - 2K(\sin 2\alpha) \ln C} \right] + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \quad (3)$$

и $E(x)$, $K(x)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

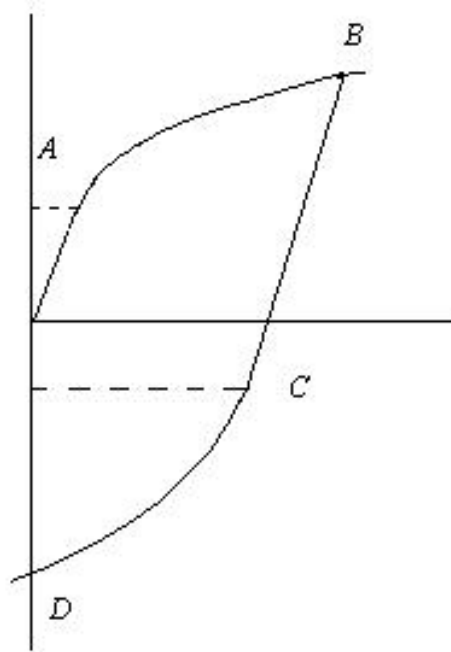


Рис. 1. Диаграмма напряжений при знакопеременном кручении тонкостенной трубки

Параметр α определяется из уравнения

$$E(\cos 2\alpha) - K(\cos 2\alpha) \sin^2 2\alpha - \frac{2}{\pi} [E(\sin 2\alpha) - K(\sin 2\alpha) \cos^2 2\alpha] \ln C = \tau_s/\tau. \quad (4)$$

С другой стороны, из рис. 1 следует

$$d\gamma^{(p)} = d\gamma - d\gamma^{(e)} = \left(\frac{1}{G_t} - \frac{1}{G} \right) d\tau, \quad (5)$$

где G и G_t – упругий и касательный модули участка АВ диаграммы $\tau \sim \gamma$. Сравнивая теоретическую зависимость $d\gamma^{(p)} \sim d\tau$ (2) с экспериментальной (5), получаем формулу для определения функции пластичности

$$\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}] = \frac{2}{3} \frac{EE_t}{E - E_t} B_{11}[\sigma_i/\sigma_s], \quad (6)$$

где

$$E = 3G, \quad E_t = 3G_t, \quad \sigma_i = \sqrt{3}\tau, \quad \sigma_s = \sqrt{3}\tau_s, \quad \dot{\varepsilon}_i^{(p)} \geq 0, \quad B_{11}[\sigma_i/\sigma_s] \equiv B_{11}(q[\sigma_i/\sigma_s])$$

и $q[\sigma_i/\sigma_s] = \alpha$ – решение уравнения (4) относительно α ($\alpha < \pi/4$).

Результаты численных расчетов, проведенных на основании формулы (6), показаны на рис. 2. Интегрируемая сингулярность в начале координат обеспечивает непрерывность касательного модуля $E_t = d\sigma_i/d\varepsilon_i$ на границе пластичности.

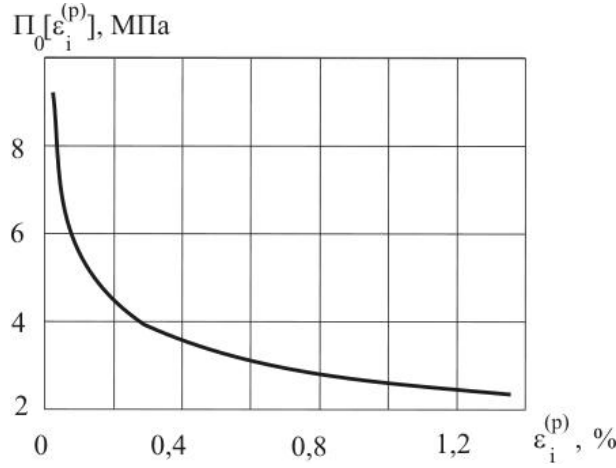


Рис. 2. Функция пластичности $\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]$ стали 45

Рассмотрим теперь при заданном $F(\omega)$ (1) задачу построения функции пластичности $\Pi[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_1^*]$ ($\lambda_1^* = \varepsilon_i^{(p)}(t_C)$) на участке CD диаграммы $\tau \sim \gamma$ (рис. 1). Пластическая деформация на первом этапе нагружения тонкостенной трубки приводит к возникновению деформационной анизотропии, которая в рамках нелинейной модели плоскопластической среды [1] характеризуется сопротивлением сдвигу $R_m(\theta_0, t)$. В частности для $t = t_B$ можем получить [6]:

$$R_m(\theta_0, t_B) = \begin{cases} \tau_B \cos 2\theta_0, & \theta_0 \in [-\alpha(t_B), \alpha(t_B)]; \\ Q_1(\theta_0, t_B), & \theta_0 \in [\alpha(t_B), \frac{\pi}{2} - \alpha(t_B)]; \\ Q_2(\theta_0, t_B), & \theta \in [\frac{\pi}{2} - \alpha(t_B), \frac{\pi}{2} + \alpha(t_B)]; \end{cases} \quad (7)$$

$$R_{m'}(\theta_0 \pm \pi, t_B) = R_m(\theta_0, t_B), \quad R_{-m}(\theta_0, t_B) = R_m(\pi/2 + \theta_0, t_B),$$

где

$$Q_1 = \tau_B \{ \cos 2\theta_0 + (1 - k^2)[K(\psi, k) - K(k)] + E(k) - E(\psi, k) \}, \quad (8)$$

$$Q_2 = \tau_B \{ \cos 2\theta_0 + 2[E(k) - K(k)(1 - k^2)] \},$$

$$(k = \cos 2\alpha_B, \quad \psi = \arcsin(\cos 2\theta_0 / \cos 2\alpha_B)).$$

Эффект Баушингера определяется формулой

$$\tau_s^-(t_B) \equiv Q_2(\pi/2, t_B) = \tau_B [2E(\cos 2\alpha_B) - 2K(\cos 2\alpha_B) \sin^2 2\alpha_B - 1]. \quad (9)$$

С учетом деформационной анизотропии (7)–(9) и изменения на втором этапе нагружения ($t \geq t_C$) направления упругопластического деформирования система интегральных уравнений, описывающая процесс скольжений в переменных $\theta^* = \theta_0 - \pi/2$, $\theta_0^* = \theta_0 - \pi/2$ записывается так [6]:

$$\Pi[\varepsilon_i^{(p)}(t), \lambda_1^*(t_B)] \int_{-\alpha^*(t)}^{\alpha^*(t)} \ln(C \cdot ctg |\theta^* - \theta_0^*|) \varphi'_t(\theta^*, t) d\theta^* = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\theta_0^*, \quad (10)$$

$$\int_{t_C}^t \Pi[\varepsilon_i^{(p)}(\xi), \lambda_1^*(t_B)] \int_{-\alpha^*(\xi)}^{\alpha^*(\xi)} \ln(C \cdot ctg |\theta^* - \theta_0^*|) \varphi'_t(\theta, \xi) d\theta^* d\xi = [\tau(t) + \tau(t_B)] \cos 2\theta_0^* - 2\tau(t_B)[E(\cos 2\alpha_B) - K(\cos 2\alpha_B) \sin^2 2\alpha_B], \quad (11)$$

$$\theta_0^* \in [-\alpha^*(t), \alpha^*(t)], \quad (t \geq t_C, \quad \tau(t) < 0, \quad \alpha_B = \alpha(t_B), \quad \lambda_1^* = \varepsilon_i^{(p)}(t_B)).$$

Здесь $\pm\alpha^*(t)$ – границы множества направлений скольжений, $\varphi'_t(\theta^*, t)$ – скорость изменения интенсивности сдвига, и за параметр времени t принимается длина дуги s ($dt \equiv ds = \sqrt{2} |d\tau|$) траектории нагружения в пятимерном пространстве девиатора напряжений [7].

При известных $\varphi'_t(\theta, t)$, $\alpha^*(t)$ скорость пластической деформации сдвига $\dot{\gamma}^{(p)}$ определяется формулой

$$\dot{\gamma}^{(p)} = \int_{-\alpha^*(t)}^{\alpha^*(t)} \varphi'_t(\theta^*, t) \cos 2\theta^* d\theta^*. \quad (12)$$

Метод решения системы интегральных уравнений (10), (11) известен. С использованием результатов работы [6] можем получить

$$\frac{d\gamma^{(p)}}{d\tau} = 2B(\alpha^*)/\Pi[\varepsilon_i^{(p)}(t), \varepsilon_i^{(p)}(t_C)]. \quad (13)$$

Здесь $B(\alpha^*)$ определяется формулой (3), а параметр $\alpha^*(t)$ ($t \geq t_C$) – уравнением

$$\frac{\tau(t)}{\tau(t_B)} = \frac{2[E(\cos 2\alpha_B) - K(\cos 2\alpha_B) \sin^2 2\alpha_B]}{E(\cos 2\alpha^*) - K(\cos 2\alpha^*) \sin 2\alpha^* - (\pi/2)N(\alpha)} - 1, \quad (14)$$

где

$$N(\alpha) = [E(\sin 2\alpha^*) - K(\sin 2\alpha^*) \cos^2 2\alpha^*] \ln C.$$

Сравнение теоретической формулы (13) с аналогом экспериментальной (5), записанной для второго этапа нагружения, определяет функцию пластичности $\Pi[\varepsilon_i^{(p)}(t), \varepsilon_i^{(p)}(t_C)]$, построенную с учетом эффекта Баушингера. Имеем

$$\Pi[\varepsilon_i^{(p)}(t), \varepsilon_i^{(p)}(t_C)] = \frac{2}{3} \frac{E^* E_t^*}{E^* - E_t^*} B[\sigma_i^*/\sigma_s], \quad (15)$$

где $E^* = 3G$, $E_t = 3G^*$, $\sigma_i^* = \sqrt{3}\tau^*$, $B[\sigma_i^*/\sigma_s] \equiv B(q^*[\sigma_i^*/\sigma_s])$ и $q[\sigma_i^*/\sigma_s] = \alpha^*$ – решение уравнения (14) относительно α^* ($\alpha^* < \frac{\pi}{4}$). График зависимости $\Pi \sim \varepsilon_i^{(p)}(t)$ ($t \geq t_C$) с интегрируемой особенностью в точке $\tau^* = \tau^*(t_C)$ качественно имеет вид, показанный на рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Швайко, Н. Ю. К теории пластичности, основанной на концепции скольжения / Н. Ю. Швайко // Прикладная механика. – 1976. – Т. XII. – № 11. – С. 12–24.
- [2] Швайко, Н. Ю. Сложное нагружение и вопросы устойчивости / Н. Ю. Швайко. – Днепропетровск : Изд-во ДГУ, 1998. – 176 с.
- [3] Швайко, Н. Ю. К теории скольжения с гладкими и сингулярными поверхностями нагружения / Н. Ю. Швайко // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. – М. : Физматлит, 2006. – С. 849–858.
- [4] Леонов, М. Я. Сложная плоская деформация / М. Я. Леонов, Н. Ю. Швайко // Докл. АН СССР. – 1964. – № 2. – С. 1007–1010.
- [5] Швайко, Н. Ю. Аналитическое и экспериментальное исследование деформации стали 45 при сложном нагружении / Н. Ю. Швайко, Н. М. Филькевич // Математические методы и физ.-мех. поля. – 2006. – № 1. – С. 188–197.
- [6] Швайко, Н. Ю. О методах решения интегральных уравнений теории пластичности, базирующейся на концепции скольжения / Н. Ю. Швайко // Математические методы и физ.-мех. поля. – 2010. – № 1. – С. 48–57.
- [7] Ильюшин, А. А. Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : Физматлит, 1963. – 271 с.
- [8] Батдорф, С. Б. Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения / С. Б. Батдорф, Б. Будянски // Механика : сб. пер. иностр. статей. – 1962. – № 1. – С. 135–155.

Швайко Николай Юрьевич,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, г. Днепропетровск

e-mail: shvaiko@sin/net.ua

N. Yu. Shvaiko

**ON MATERIAL FUNCTIONS OF THE THEORY OF PLASTICITY,
BASED ON THE CONCEPT OF SLIP**

O. Honchar Dnipropetrovsk National University

Abstract. The method of definition with Baushinger's effect of material functions of theory of plasticity was proposed.

Keywords: plasticity, concept of slip, function of plasticity and hardening function, Baushinger's effect.

REFERENCES

- [1] *Shvaiko, N. Yu.* On the theory of plasticity, based on the concept of slip / N. Yu. Shvaiko // Applied Mechanics. – 1976. – Vol. XII. – № 11. – P. 12–24.
- [2] *Shvaiko, N. Yu.* Complex loading and problems of stability / N. Yu. Shvaiko // Izd. DGU, Dnepropetrovsk, 1989. – 176 p.
- [3] *Shvaiko, N. Yu.* On sliding theory with smooth and singular load surfaces / N. Yu. Shvaiko // Mat. Metody Fiz.-Mech. Polya. – 2005. – P. 129–137.
- [4] *Leonov, M. Ya.* Complex plane deformation / M. Ya. Leonov, N. Yu. Shvaiko // Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1964. – № 2. – P. 1007–1010.
- [5] *Shvaiko, N. Yu.* Analytical and experimental study of deformation of steel - 45 under complex loading / N. Yu. Shvaiko, N.N. Filkevich // Mat. Metody Fiz.-Mech. Polya. – 2006. – № 1. – P. 188–197.
- [6] *Shvaiko, N. Yu.* On methods for the solution of integral equations of the theory of plasticity, based on the concept of slip / N. Yu. Shvaiko // Mat. Metody Fiz.-Mech. Polya. – 2010. – № 1. – P. 48–57.
- [7] *Il'yushin, A. A.* Plasticity of the General Mathematical Theory / A. A. Il'yushin // Izd. Akad. Nauk SSSR. Moscow. – 1963. – 271 p.
- [8] *Batdorf, S. B.* A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip / S. B. Batdorf, B. Budiansky // NASA Techn Notes. April, 1949. – No. 1871.

Shvaiko, Nikolay Yurievich

Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, Department of theoretical and applied mechanics, O. Honchar Dnipropetrovsk National University, Dnepropetrovsk

НОВЫЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ, ОПИСЫВАЮЩИЕ СЖАТИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ МЕЖДУ ПЛИТАМИ

*Сибирский государственный аэрокосмический университет
им. академика М. Ф. Решетнева*

Аннотация. В работе построены новые поля скоростей для плоской задачи идеальной пластичности, которые, в частности, можно использовать для описания сжатия пластического слоя между жесткими и шероховатыми плитами.

Ключевые слова: поле скоростей, идеальная пластичность, диссипация.

УДК: 539.374

В 1868 г. А. Треска опубликовал две работы о течении металлов под большим давлением. Опираясь на опыты Треска, Б. Сен-Венан получил уравнения идеальной пластичности в двумерном случае:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = 4k^2, \\ 2\tau \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = (\sigma_x - \sigma_y) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

где σ_x , σ_y , τ – компоненты тензора напряжений, k – постоянная пластичности (далее для простоты будем считать ее равной единице), v_x , v_y – компоненты вектора скорости деформации частиц среды.

В следующем году М. Леви привел эту систему к квазилинейному виду заменой

$$\sigma_x = \sigma - \sin 2\theta, \quad \sigma_y = \sigma + \sin 2\theta, \quad \tau = \cos 2\theta,$$

получив следующую систему уравнений, описывающих двумерное напряженно-деформированное состояние идеальной пластической среды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta \right) = 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta \right) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \operatorname{tg} 2\theta + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Большинство исследователей ограничивается рассмотрением только первых двух уравнений системы (1); для полного описания пластического состояния тела (для определения границ жесткой и пластической областей) необходимо знать еще и поле скоростей.

Система уравнений (1)–(2) обычно решается так: находятся решения уравнений (1), а затем на их основе ищется поле скоростей (решаются уравнения (2), описывающие поле скоростей деформации идеальной пластической среды). Заметим, что в силу линейности уравнений (2) поля скоростей для данного напряженного состояния строятся неоднозначно.

Решение Прандтля для уравнений (1) имеет вид:

$$\sigma = -x - \sqrt{1 - y^2}, \quad y = \cos 2\theta. \quad (3)$$

С учетом решения (3) уравнения (2) принимают вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Система уравнений (4) – линейная. Группа, допускаемая этой системой, известна. Она найдена в [1]:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial v_y} - y \frac{\partial}{\partial v_x}, \quad X_3 = v_x \frac{\partial}{\partial v_x} + v_y \frac{\partial}{\partial v_y}, \quad X_4 = v_x^* \frac{\partial}{\partial v_x} + v_y^* \frac{\partial}{\partial v_y},$$

где (v_x^*, v_y^*) – произвольное решение системы уравнений (4).

Выберем линейную комбинацию операторов:

$$X_1 + \gamma X_2 = \partial_x + \gamma \left(x \frac{\partial}{\partial v_y} - y \frac{\partial}{\partial v_x} \right).$$

Ей соответствует следующее решение системы уравнений (4):

$$v_x = -\gamma xy + \delta x + g(y), \quad v_y = \gamma \frac{x^2}{2} + f(y). \quad (5)$$

Здесь f и g – некоторые функции, которые определяются из системы (4).

Второе решение системы (4) находим из линейной комбинации

$$X_1 + \gamma X_3.$$

Оно имеет вид:

$$v_x = e^{\gamma x} f(y), \quad v_y = e^{\gamma x} g(y), \quad (6)$$

где f и g – некоторые функции, определяемые из системы (4).

Вид (6) впервые отмечен в [1], но само решение не найдено. Кроме него, в силу линейности системы другие ее решения также можно искать в виде

$$\begin{aligned} v_x &= \sin \gamma x f_1(y) + \cos \gamma x f_2(y), \\ v_y &= \sin \gamma x g_1(y) + \cos \gamma x g_2(y), \end{aligned} \quad (7)$$

где f_1, f_2, g_1, g_2 – некоторые функции, определяемые из системы (4).

Отметим, что решение в форме (5) найдено Ивлевым-Сенашовым. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} v_x &= -\gamma xy + \delta x - \gamma y \sqrt{1 - y^2} + \gamma \arcsin y + 2\delta \sqrt{1 - y^2} + C_1, \\ v_y &= \frac{\gamma}{2}(x^2 + y^2) - \delta y + C_2. \end{aligned} \quad (8)$$

При $\gamma = 0$ получаем решение Надаи:

$$\begin{aligned} v_x &= \delta x + 2\delta \sqrt{1 - y^2} + C_1, \\ v_y &= -\delta y + C_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Построим решения в формах (5) и (6). Прямая подстановка соотношений (5) или (6) в систему (4), к сожалению, не увенчивается успехом. Данная подстановка приводит к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, сводимых к уравнениям Рикатти, которых нет в справочной литературе [3].

$$\begin{aligned} (f' + \gamma g) \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} + (\gamma f + g') &= 0, \\ \gamma f + g' &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (f_1' - \gamma g_2) \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} + (-\gamma f_2 - g_1) &= 0, \\ (f_2' + \gamma g_1) \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} + (\gamma f_1 - g_2) &= 0, \\ \gamma f_1 + g_2' &= 0, \\ -\gamma f_2 + g_1' &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

В связи с этим поступим следующим образом. Найдем инварианты Римана для уравнений (4). Они имеют вид

$$I_1 = \frac{\sigma}{2} - \theta = -x - \sqrt{1-y^2} - \arccos y = \alpha,$$

$$I_2 = \frac{\sigma}{2} + \theta = -x - \sqrt{1-y^2} + \arccos y = \beta.$$

В терминах этих инвариантов система уравнений (4) запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial \alpha} - \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \frac{\partial v_x}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{\partial v_y}{\partial \beta} + \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \frac{\partial v_x}{\partial \beta} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В этой системе сделаем замену

$$\begin{aligned} v_x &= v_\alpha \sqrt{\frac{1+y}{2}} - v_\beta \sqrt{\frac{1-y}{2}}, \\ v_y &= v_\beta \sqrt{\frac{1+y}{2}} + v_\alpha \sqrt{\frac{1-y}{2}}. \end{aligned}$$

В результате система (10) сведется к следующей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} - \frac{1}{2} v_\alpha &= 0, \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} v_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для системы (13) решение типа (5) следует искать в виде

$$v_\beta = e^{\gamma(\alpha+\beta)} F(\alpha - \beta), \quad v_\alpha = e^{\gamma(\alpha+\beta)} G(\alpha - \beta).$$

Таким образом, без труда получаем два вида решений системы линейных уравнений, которые соответствуют решениям типа (6) и (7):

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \exp\left(\lambda\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \left[A \cos\left(\mu\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + B \sin\left(\mu\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \right], \\ v_\beta &= \lambda \exp\left(\lambda\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \left[A \cos\left(\mu\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + B \sin\left(\mu\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \right] + \\ &+ \mu \exp\left(\lambda\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \left[A \sin\left(\mu\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - B \cos\left(\mu\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где A, B, μ, λ – произвольные постоянные, $\mu^2 + \lambda^2 = 1$;

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \exp\left(\lambda\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \left[A\frac{\alpha-\beta}{2} + B \right], \\ v_\beta &= \lambda \exp\left(\lambda\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \left[A\frac{\alpha-\beta}{2} + B \right] - A \exp\left(\lambda\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \end{aligned} \quad (15)$$

где A, B, μ, λ – произвольные постоянные, $\lambda^2 = 1$.

Итак, для решения Прандтля нами найдено бесконечно много полей скоростей. Естественным образом возникает вопрос: как выбрать из этих полей скоростей наиболее соответствующие решению Прандтля?

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо сравнить диссипацию для разных полей скоростей. Для действительного поля скоростей, согласно модифицированному принципу максимума Мизеса [4], она должна быть максимальна:

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \geq \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^*,$$

здесь величины без звездочки – действительные компоненты тензора напряжений и скоростей деформации, а со звездочкой – возможные.

Вычислим диссипацию:

$$D = \sigma_x e_x + \sigma_y e_y + 2\tau e_{xy} = \frac{e_x^2 + e_y^2 + 2e_{xy}^2}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2 + 2e_{xy}^2}} = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + 2e_{xy}^2}.$$

Поскольку $e_x^2 = e_y^2$, $2e_{xy} = e_x \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = H(y)e_x$, то $D = |e_x| \sqrt{2 + H^2(y)}$.

Для решения Надаи диссипация равна

$$D_1 = \sqrt{2 + H^2(y)} |\delta|.$$

Для решения Ивлева-Сенашовам диссипация имеет вид

$$D_2 = |-\gamma y + \delta| \sqrt{2 + H^2(y)} = |\delta| \left| -\frac{\gamma}{\delta} y + 1 \right| \sqrt{2 + H^2(y)}.$$

Диссипативная функция для решения вида (5)

$$D_3 = e^{\gamma x} |W(y)|,$$

где $W(y)$ – некоторая функция, которую нетрудно вычислить. Поскольку ее вид нам не важен, то и приводить здесь мы ее не будем.

Из сравнения D_1 и D_2 следует что в зависимости от знака $\frac{\gamma}{\delta} D_2 > D_1$ либо в области $y > 0$, либо в области $y < 0$.

Соответственно, $D_3 > D_1$ либо в области $x > 0$, либо в области $x < 0$.

Таким образом, ни одно из решений (5), (8) или (9) не является действительным полем скоростей во всей полосе $|y| \leq 1$. Поэтому, несмотря на простоту решения Надаи, необходимо использовать и решение вида (8) и (или) (5), или их комбинации.

Тем самым получены новые поля скоростей, которые совместны с решением Прандтля, описывающим течение пластического материала при сжатии его между двумя параллельными жесткими и шероховатыми плитами. Кроме этого, в работе найдены решения двух систем линейных уравнений (10), (11), которых нет в справочной литературе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аннин, Б. Д. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности / Б. Д. Аннин, В. О. Бытев, С. И. Сенашов. – Новосибирск : Наука, Сиб. отд-е, 1985. – 143 с.
- [2] Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 421 с.
- [3] Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики // А. Д. Полянин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.
- [4] Ивлев, Д. Д. Предельное состояние деформированных тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 832 с.
- [5] Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
- [6] Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 1 / А. Надаи. – М. : ИЛ, 1954. – 644 с.
- [7] Кирыков, П. П. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Кирыков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. – 192 с.

Сенашов Сергей Иванович,

доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск

e-mail: sen@sibsau.ru

Гомонова Ольга Валерьевна,

кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск

e-mail: gomonova@sibsau.ru

S. I. Senashov, O. V. Gomonova

NEW VELOCITY FIELDS DESCRIBING A PRESSURE OF A PLASTIC LAYER STUCK BETWEEN TWO PLATES

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev

Abstract. New velocity fields for the 2-dimensional ideal plasticity problem are constructed. The fields can be used for description of a pressure of a plastic layer stuck between two rough and rigid plates.

Keywords: velocity fields, ideal plasticity, dissipation.

REFERENCES

- [1] *Annin, B. D.* Group properties of the equations of elasticity and plasticity / B. D. Annin, V. O. Bytev, S. I. Senashov. – Novosibirsk : Nauka, Siberian office, 1985. – 143 p.
- [2] *Kachanov, L. M.* Bases of the theory of plasticity / L. M. Kachanov. – M. : Nauka, 1969. – 421 p.
- [3] *Polyanin, A. D.* Directory on the linear equations mathematical physics / A. D. Polyanin. – M. : Fizmatlit, 2001. – 576 p.
- [4] *Ivlev, D. D.* Limit condition of the deformed bodies and rocks / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, R. I. Nepershin. – M. : Fizmatli, 2008. – 832 p.
- [5] *Sokolovskii, V. V.* Plasticity theory / V. V. Sokolovskii. – M. : Higher school, 1969. – 608 p.
- [6] *Nadai, A.* Plasticity and destruction of firm bodies. Vol. 1 / A. Nadai. – M. : IL, 1954. – 644 p.
- [7] *Kiryakov, P. P.* Appendix of simmetriya and laws preservations to the solution of the differential equations / P. P. Kiryakov, S. I. Senashov, A. N. Yakhno. – Novosibirsk : Publishing house SB RAS, 2001. – 192 p.

Senashov, Sergey Ivanovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk

Gomonova, Olga Valeryevna

Candidate of Phys.& Math., Assoc. Professor, Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk

В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова

ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН В НЕСЖИМАЕМЫХ СРЕДАХ СО СЛАБОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН

Аннотация. На основе метода сращиваемых асимптотических разложений получено новое эволюционное уравнение нестационарных поперечных плоских волн деформации в слабонеоднородной несжимаемой упругой среде. Данное уравнение равным образом отражает нелинейность модельных соотношений и неоднородность среды; приводится его общее решение, строится частное решение для квадратичной функции перемещений на нагружаемой границе в качестве иллюстрации метода.

Ключевые слова: нелинейная упругость, неоднородная среда, несжимаемость, ударная волна, метод возмущений, эволюционное уравнение.

УДК: 539.3

Введение. Динамика ударного деформирования твердых тел – сложный физико-механический процесс, для описания которого необходимо обращение к нелинейным математическим моделям. На основе нелинейно упругих изотропных моделей ранее показано [1], [2], что объемное и сдвиговое деформирование в общем случае нельзя рассматривать как обособленные процессы, а положение, геометрия и скорости волн разрыва деформаций зависят от состояния среды в их окрестности, ударного и послеударного воздействия на границе и поэтому должны быть включены в число неизвестных функций. Высокая математическая сложность возникающих краевых задач диктует обращение к численным методам [3], [4], к приближенным аналитическим методам [5]–[7], либо к комбинированным численно-аналитическим подходам [8], [9]. В последних двух случаях необходимо знать приближенное аналитическое решение задач ударного деформирования. Для этого наиболее эффективным является метод сращиваемых асимптотических разложений [7], [10], [11]. Его применение к задачам с ударными волнами в изотропных средах показало [10], [11], что каждому типу ударных волн соответствует свое нелинейное волновое уравнение эволюционного типа. Эти уравнения, с одной стороны, позволяют отразить основные свойства нелинейного волнового процесса, с другой стороны, математически они проще исходных уравнений задачи и допускают явные представления решений в окрестностях волновых фронтов. Предположение о возможной неоднородности среды должно обязательно повлиять на вид эволюционного уравнения и метод его получения. В предлагаемой статье рассматривается плоская одномерная поперечная ударная волна в слабонеоднородной среде как модельный пример, показывающий совместное влияние на решение нелинейности модели и неоднородности среды.

Поступила 20.12.2012

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проекта 11-01-00360-а, 11-01-98514-р_восток_а, 12-01-90004-Бел_а).

1. Общие соотношения модели и постановка краевой задачи. Движение несжимаемой нелинейно упругой среды задается на основе представления Эйлера в декартовой системе x_1, x_2, x_3 пространственных координат уравнениями

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 = \text{const}, \quad \dot{u}_i = (\delta_{ij} - u_{i,j}v_j), \quad 2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}, \\ \sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \quad \sigma_{ij} = -p_0\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \\ W(I_1, I_2) &= (a - \mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + \\ &\quad + dI_2^2 + kI_1^2 I_2 + \chi I_1^2 I_2 + \dots \\ I_1 &= \alpha_{ii}, \quad I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В системе (1) u_i, v_i — компоненты векторов перемещений и скорости, α_{ij}, σ_{ij} — компоненты тензоров деформаций Альманси и напряжений Эйлера-Коши, p_0 — функция добавочного гидростатического давления, W — функция упругого потенциала, $\mu, a, b, \kappa, \theta, c, d, k, \chi$ — упругие модули среды в адиабатическом приближении, $\rho = \rho_0 = \text{const}$ — плотность среды, причем $\rho_0 = \text{const}$ — условие, выполняемое для лагранжева элементарного объема, для среды в целом $\rho = \rho_0(x_1, x_2, x_3)$ при условии неоднородности материала. Это же условие делает упругие модули зависящими от пространственных координат. В системе (1.1) используется суммирование по повторяющемуся латинскому индексу, многоточием здесь и далее обозначены невыписанные слагаемые с более высокой малостью.

В дополнение к общим соотношениям модели определим неоднородные свойства среды в направлении координатной оси x_1 . Предположим, что для функции ρ_0 и всех упругих модулей справедливо представление

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \tilde{\rho}_0 + \varepsilon^\eta \tilde{\rho}_1 s, \quad \mu = \mu_0 + \varepsilon^\eta \tilde{\mu}_1 s, \quad a = a_0 + \varepsilon^\eta \tilde{a}_1 s, \quad b = b_0 + \varepsilon^\eta \tilde{b}_1 s, \\ \kappa &= \kappa_0 + \varepsilon^\eta \tilde{\kappa}_1 s, \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon^\eta \tilde{\theta}_1 s, \quad c = c_0 + \varepsilon^\eta \tilde{c}_1 s, \quad d = d_0 + \varepsilon^\eta \tilde{d}_1 s, \\ k &= k_0 + \varepsilon^\eta \tilde{k}_1 s, \quad \chi = \chi_0 + \varepsilon^\eta \tilde{\chi}_1 s, \quad s = \frac{x_1}{C_0 T}, \quad C_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}, \quad \eta = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (1.2)$$

в котором T и $C_0 T$ — характерное время и характерное расстояние, $\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1, \mu_0, \tilde{\mu}_1, a_0, \tilde{a}_1, b_0, \tilde{b}_1, \kappa_0, \tilde{\kappa}_1, \theta_0, \tilde{\theta}_1, c_0, \tilde{c}_1, d_0, \tilde{d}_1, k_0, \tilde{k}_1$ — константы, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр задачи, конкретная взаимосвязь которого с краевыми условиями будет установлена позже. Таким образом, среда считается слабо неоднородной с линейным типом неоднородности в направлении оси x_1 .

Рассмотрим полупространство $x_1 \geq 0$, заполненное средой, определенной системами (1.1), (1.2). Для времен $t \leq 0$ предполагаем среду недеформированной. С момента $t = 0$ на границе $x_1 = 0$ происходит ударное нагружение, результатом которого будут известные граничные перемещения

$$u_2 \Big|_{x_1=0, t \geq 0} = f_0(t), \quad f_0(0) = 0, \quad f_0'(0) > 0. \quad (1.3)$$

Под действием нагрузки в среде возникает волновой процесс деформаций с полем перемещений $u_2 = u_2(x_1, t)$, $u_1 = u_3 = 0$ и передним фронтом — поверхностью ударной волны. На этой поверхности следствием геометрических, кинематических [12] и динамических [13] условий совместности и системы (1.1)–(1.2) будут краевые условия

$$\begin{aligned} \rho_0 G^2 &= \mu + \alpha \left(3(u_{2,1}^+)^2 - 3u_{2,1}^+ \gamma + \gamma^2 \right) + \dots, \\ u_2 \Big|_{x_1=\int_0^t G(\xi) d\xi} &= 0, \quad \gamma = [u_{2,1}] \Big|_{x_1=\int_0^t G(\xi) d\xi} = -u_{2,1}^- \Big|_{x_1=\int_0^t G(\xi) d\xi}, \\ \alpha &= a + b + \kappa + d, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где G — скорость ударной волны в направлении единичной внешней нормали.

Поле перемещений $u_2(x_1, t)$ определяем из уравнения движения

$$(\mu + 3\alpha u_{2,1}^2) u_{2,11} + (\mu_{,1} + \alpha_{,1} u_{2,1}^2) u_{2,1} + \dots = \rho_0 \ddot{u}_2 + \dots \quad (1.5)$$

Отметим, что второе не приведенное здесь уравнение движения позволяет по найденному полю перемещений вычислить неизвестное дополнительное гидростатическое давление p_0 . Нелинейность краевой задачи (1.3)–(1.5) приводит к необходимости применения какого-либо из методов малого параметра. Далее рассматривается метод сращиваемых асимптотических разложений.

2. Решение задачи о поперечной ударной волне в слабонеоднородной среде методом малого параметра. Предположим, что основное внешнее решение для метода сращиваемых асимптотических разложений строится на основе следующих безразмерных переменных:

$$s = \frac{x_1}{C_0 T}, \quad m = \frac{t}{T}, \quad w(s, m) = \varepsilon^{-1} \frac{u_2(x_1, t)}{C_0 T}, \quad (2.1)$$

то есть предполагаем, что малый параметр задачи ε прежде всего связан с относительной малостью перемещений на границе и внутри среды. То есть предполагаем исходный баланс между двумя малыми факторами нелинейности и неоднородности (он обеспечивается в нашем случае различными значениями η в формулах (1.2)). Рассмотрим далее как один из наиболее интересных случаев $\eta = 2$. Переходя в уравнении (1.5) к переменным (2.1), получим уравнение

$$\begin{aligned} w_{,ss} \{1 + \varepsilon^2 \mu_1 s + 3(\alpha_0 + \varepsilon^2 \alpha_1 s) \varepsilon^2 w_{,s}^2\} + \varepsilon^2 w_{,s} (\mu_1 + \alpha_1 \varepsilon^2 w_{,s}^2) = \\ = (1 + \varepsilon^2 \rho_1 s) w_{,mm} + \dots, \\ \rho_1 = \frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}_0}, \quad \mu_1 = \frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\mu}_0}, \quad \alpha_0 = \frac{\tilde{\alpha}_0}{\tilde{\mu}_0}, \quad \alpha_1 = \frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\mu}_0}, \\ \tilde{\alpha}_0 = a_0 + b_0 + \kappa_0 + d_0, \quad \tilde{\alpha}_1 = \tilde{a}_1 + \tilde{b}_1 + \tilde{\kappa}_1 + \tilde{d}_1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

а краевое условие (1.3) перейдет в условие

$$w(s, m) \Big|_{s=0} = f(m), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) > 0. \quad (2.3)$$

Неизвестную функцию $w(s, m)$ достаточно представить асимптотическим рядом по четным степеням малого параметра

$$w(s, m) = w_0(s, m) + \varepsilon^2 w_2(s, m) + \varepsilon^4 w_4(s, m) + \dots$$

Подставляя этот ряд в уравнение (2.2) и условие (2.3), получим цепочку краевых задач, решаемую методом последовательных линейных приближений. В результате получим асимптотическое решение, называемое [5] внешним:

$$\begin{aligned} w(s, m) = f(\xi) + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\mu_1 - \rho_1}{4} f'(\xi) s^2 - \frac{\mu_1 + \rho_1}{4} f(\xi) s + \frac{\alpha_0}{2} (f'(\xi))^3 s \right\} + \dots, \\ \xi = m - s. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При получении ряда (2.4) не принимались в расчет краевые условия (1.4) на переднем фронте ударной волны. Эти условия не могут быть выполнены при помощи внешнего решения, справедливого при $\xi \geq 0$, для которого передним фронтом будет поверхность $\xi = 0$. Действительно, ударная волна в соответствии с формулами (1.4) опережает поверхность $\xi = 0$, тогда между волной и этой поверхностью возникает область, где f , f' , и т.д. равны нулю. Это обстоятельство указывает на необходимость определения дополнительного решения, называемого [5] внутренним. Область, где должно быть построено дополнительное решение, определяется по оценке неравномерности ряда (2.4). Она может возникать за счет больших значений s или ξ .

Далее рассмотрим возможную неравномерность по пространственной координате: если $s \sim \varepsilon^{-1}$, то $\varepsilon^2 w_2(s, m) \sim w_0(s, m)$, причем слагаемые, определяющие этот переход, связаны только с неоднородными свойствами среды. Выберем новые безразмерные переменные

$$n = \varepsilon s, \quad p = s - m, \quad w = w(p, n) \quad (2.5)$$

и перейдем к ним в уравнении (2.2):

$$(w_{,pp} + 2\varepsilon w_{,np} + \varepsilon^2 w_{,nn}) \{1 + \mu_1 \varepsilon n + 3(\alpha_0 + \varepsilon \alpha_1 n) \varepsilon^2 (w_{,p} + \varepsilon w_{,n})^2\} + \varepsilon^2 (w_{,p} + \varepsilon w_{,n}) \{\mu_1 + \alpha_1 \varepsilon^2 (w_{,p} + \varepsilon w_{,n})^2\} + \dots = (1 + \varepsilon \rho_1 n) w_{,pp} + \dots \quad (2.6)$$

Определим новую неизвестную функцию $w(p, n)$ асимптотическим рядом

$$w(p, n) = w_0(p, n) + \varepsilon w_1(p, n) + \varepsilon^2 w_2(p, n) + \dots$$

Подставляя его в уравнение (2.6), на нулевом шаге получим уравнение

$$2w_{0,np} + (\mu_1 - \rho_1) n w_{0,pp} = 0 \quad (2.7)$$

и его общее решение

$$v_0(p, n) = v_0 \left(p - \frac{\beta}{2} n^2 \right), \quad v_0 = w_{0,p}, \quad \beta = \frac{\mu_1 - \rho_1}{2}, \\ w_0(p, n) = \int v_0(y) dy, \quad y = p - \frac{\beta}{2} n^2.$$

Это решение показывает, что при $s \sim \varepsilon^{-1}$ необходимо учесть изменение полухарактеристической координаты от p к y . В соответствии с внешним решением $v_0(y) = f'(y)$. Из уравнения эйконала для такого масштаба получим, что $y = 0$ задает положение переднего фронта ударной волны.

Функция $w_1(y, n)$ на следующем шаге метода задается формулой

$$w_1(y, n) = -v_0(y) \frac{\beta^2 n^3}{6} + \frac{\beta \mu_1}{3} v_0(y) n^3 + \frac{\beta}{2} w_0(y) n - \frac{\alpha_0}{2} v_0^3(y) n - \frac{\mu_1}{2} w_0(y) n + g_1(y) + h_1(n), \quad (2.8)$$

где $g_1(y)$ и $h_1(n)$ определяются краевыми условиями (1.4) и сравнением с внешним решением (2.4). Рассматриваемая здесь область носит промежуточный характер, необходимый для дальнейших рассуждений. Решение в ней показало необходимость уточнения полухарактеристики, а вид функции $w_1(p, n)$ был нужен, чтобы показать, что неравномерность ряда для $w(y, n)$ появляется при $y \sim 1$, $n^3 \sim \varepsilon^{-1}$. Поэтому следующими переменными выберем

$$y = p - \frac{\beta}{2} n^2, \quad x = \varepsilon^{1/3} n = \varepsilon^{4/3} s, \quad w = w(y, x). \quad (2.9)$$

Запись в переменных (2.9) уравнения (2.6) показывает необходимость строить новый асимптотический ряд по степеням $\frac{2k}{3}$, $k = 0, 1, \dots$ малого параметра. Нулевой шаг метода теперь приводит к уравнению

$$w_{0,xy} + \left(\frac{\beta^2}{2} - \beta \mu_1 \right) x^2 w_{0,yy} = 0, \quad (2.10)$$

решение которого

$$w_{0,y} = v_0 = v_0(z), \quad z = y - \frac{(\rho_1 - \mu_1)(3\mu_1 + \rho_1)}{24} x^3$$

строится вдоль вновь уточненных характеристик. Если проследить за изменением полухарактеристики с самого начала, получим соотношение

$p - \frac{\beta}{2}n^2 + \frac{\beta(3\mu_1 + \rho_1)}{12}x^3 = s - m - \frac{\beta}{2}\varepsilon^2 s^2 + \varepsilon^4 \frac{\beta(3\mu_1 + \rho_1)}{12}s^3 = const$, а следующее сжатие пространственного масштаба на j -м внутреннем решении происходит для $s \sim \varepsilon^{-\frac{2j}{j+1}}$, причем $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{2j}{j+1} = 2$. Таким образом, получаем необходимость предельного внутреннего перехода со следующим совместным изменением координат:

$$l = \varepsilon^2 s, \quad r = s - m - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varepsilon^{2k} s^{k+1}, \quad w = w(r, l), \quad (2.11)$$

в котором константы A_k определяются предыдущими внутренними решениями, аналогичными рассмотренным ранее.

Если предположить, что $1 - \sum_{k=1}^{\infty} A_k (k+1)l^k = \varphi(l)$, то уравнение (2.2) переходит в уравнение

$$\begin{aligned} & (\varepsilon^4 w_{,ll} + 2\varepsilon^2 w_{,lr} \varphi(l) + w_{,rr} \varphi^2(l) + \varepsilon^2 w_{,r} \varphi'(l)) \{1 + \mu_1 l + 3(\alpha_0 + \\ & + \alpha_1 l) \varepsilon^2 (\varepsilon^2 w_{,l} + \varphi(l) w_{,r})^2\} + \varepsilon^2 (\varepsilon^2 w_{,l} + \varphi(l) w_{,r}) \{ \mu_1 + \\ & + \alpha_1 \varepsilon^2 (\varepsilon^2 w_{,l} + \varphi(l) w_{,r})^2 \} = (1 + \rho_1 l) w_{,rr} + \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из этого уравнения движения, группируя слагаемые с наименьшей степенью ε , получим

$$w_{0,rr} \{ (1 + \mu_1 l) \varphi^2(l) - (1 + \rho_1 l) \} = 0,$$

откуда или $w_{0,rr} = 0$, что не может нас устраивать для гиперболической задачи, или $\varphi(l) = \pm \sqrt{\frac{1 + \rho_1 l}{1 + \mu_1 l}}$. Так как ранее, определяя $\varphi(l)$ как предельную функцию ряда, считали $\varphi(0) = 1$, то из полученных решений оставляем знак «+». Если полученную функцию $\varphi(l)$ представить рядом Тейлора в окрестности $l = 0$, то его коэффициенты оказываются полностью согласованными с решениями, полученными раньше для переменных p , n , затем для y , x и т.д. В новые координаты (2.11) входит не функция $\varphi(l)$, а интеграл от нее, который имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(l) &= \int \sqrt{\frac{1 + \rho_1 l}{1 + \mu_1 l}} dl = \frac{1}{\mu_1} \sqrt{(1 + \rho_1 l)(1 + \mu_1 l)} - \frac{\rho_1 - \mu_1}{2\mu_1} H(l) + K_0, \\ H(l) &= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-\mu_1 \rho_1}} \arctan \sqrt{-\frac{\rho_1}{\mu_1} \frac{1 + \mu_1 l}{1 + \rho_1 l}}, & \mu_1 \rho_1 < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{\mu_1 \rho_1}} \ln \left(\sqrt{\mu_1 (1 + \rho_1 l)} + \sqrt{\rho_1 (1 + \mu_1 l)} \right), & \mu_1 \rho_1 > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

причем K_0 – константа, которая выбирается из условия $\Phi(0) = 0$.

Теперь представим, как обычно, функцию $w(r, l)$ асимптотическим рядом. В соответствии с уравнением (2.12) в этом ряде можно оставить только четные степени ε : $w(r, l) = w_0(r, l) + \varepsilon^2 w_2(r, l) + \dots$. Подставляя ряд в уравнение (2.12), получим на нулевом шаге метода уравнение эволюционного типа

$$\begin{aligned} v_{0,l} + v_{0,r} v_0^2 \frac{3\varphi^3(l)(\alpha_0 + \alpha_1 l)}{2(1 + \mu_1 l)} &= -\frac{v_0}{2} \left(\frac{\mu_1}{1 + \mu_1 l} + \frac{\varphi'(l)}{\varphi(l)} \right), \\ v_0 &= w_{0,r}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Это уравнение имеет ряд интересных особенностей, отражающих все свойства рассматриваемого динамического процесса. Прежде всего укажем, что при переходе к однородной среде $\mu_1 = \rho_1 = \alpha_1 = 0$, $\varphi(l) = 1$, поэтому уравнение (2.13) становится эволюционным уравнением поперечных волн в несжимаемой среде [10], [11]. Вдоль характеристик (2.13) функция v_0 не сохраняет постоянного значения, на ее изменение влияет неоднородность среды. Так как угол

наклона характеристик зависит от строящегося решения, то уравнение (2.13) может объяснять образование ударных волн как результат пересечения характеристик. Общее решение уравнения (2.13) представим в характеристической форме:

$$v_0(r, l)\sqrt{\varphi(l)}\sqrt{1 + \mu_1 l} = K \quad \text{вдоль линий}$$

$$r = \frac{3K^2}{2} \left\{ \frac{\alpha_1 - \alpha_0(\mu_1 - \rho_1)}{2\mu_1^2(1 + \mu_1 l)^2} - \frac{\alpha_0\rho_1 + \alpha_1}{\mu_1^2(1 + \mu_1 l)} - \frac{\alpha_1 - \alpha_0(\mu_1 - \rho_1)}{2\mu_1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_0\rho_1 + \alpha_1}{\mu_1^2} + \rho_1\alpha_1 \left[\frac{l - 2l(1 + \mu_1 l)}{2\mu_1^2(1 + \mu_1 l)^2} + \frac{1}{2\mu_1^3(1 + \mu_1 l)} - \frac{1}{2\mu_1^3} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\ln(1 + \mu_1 l)}{\mu_1^3} \right] \right\} + R, \quad (2.14)$$

где K , R – константы. Таким образом, получаем сложный характер зависимости $r(l)$ вдоль характеристик в отличие от однородной среды, в которой характеристики – прямые с различными углами наклона [10], [11].

Для замыкания задачи и возможности вычисления функции $w(r, l)$ необходимо представить граничные условия (1.4) в переменных (2.11). Предполагая, что на переднем фронте ударной волны переменные r и l связаны зависимостью $r(l) = r_0(l) + \varepsilon^2 r_2(l) + \dots$, где $r_0(l)$, $r_2(l)$ – неизвестные функции, из уравнения эйконала на нулевом шаге получим уравнение

$$\frac{dr_0}{dl} = \frac{\varphi^3(l)(\alpha_0 + \alpha_1 l)}{2(1 + \mu_1 l)} v_0^2(r_0(l), l), \quad r_0(0) = 0. \quad (2.15)$$

Если выбрано частное решение для $v_0(r, l)$ из формул (2.14), то, подставляя его в уравнение (2.15), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, задающее положение ударной волны.

Рассмотрим в качестве одного из наиболее простых примеров краевое условие (2.3), заданное квадратичной функцией:

$$w(s, m) \Big|_{s=0} = m + \frac{am^2}{2}, \quad \varepsilon = \frac{v}{C_0}, \quad v = f'_0(0). \quad (2.16)$$

Внешнее решение этой задачи без труда определяется рядом (2.4) с подстановкой в него (2.16). Оно будет необходимо для определения частного решения $v_0(r, l)$. Для сокращения приводимых выкладок решение (2.14) представим в виде

$$v_0^2\Phi(l) = K^2, \quad \Phi(l) = \varphi(l)(1 + \mu_1 l), \quad r = \frac{K^2}{2}\Upsilon(l) + R, \quad (2.17)$$

где $\Upsilon(l)$ – функция из формулы (2.14), заключенная в фигурных скобках, с умножением на три. Заметим, что $\Phi(0) = 1$, $\Upsilon(0) = 0$. В соответствии с условием (2.16)

$$v_0^2\Phi(l) = \left\{ a \left[r - \frac{v_0^2}{2}\Phi(l)\Upsilon(l) \right] - 1 \right\}^2,$$

откуда получим

$$v_0(r, l) = - \frac{|\sqrt{1 - 2a\Upsilon(l) + 2a^2\Upsilon(l)r} - 1|}{|a\Upsilon(l)|\sqrt{\Phi(l)}},$$

при условии $1 - ar \geq 0$. Поэтому для поля перемещений имеет место формула

$$w_0(r, l) = - \frac{2 [1 - 2a\Upsilon(l) + 2a^2\Upsilon(l)r]^{3/2} - 3a^2\Upsilon(l)r}{3a^2\Upsilon(l)|a\Upsilon(l)|\sqrt{\Phi(l)}} + Q(l), \quad (2.18)$$

где $Q(l)$ – неизвестная функция, определяемая условием $w_0|_{r=r_0(l)} = 0$. Положение ударной волны для нашей задачи можно представить неявным уравнением

$$(\tilde{r}_0 - 1)\sqrt{2\tilde{r}_0 + 1} = -a\sqrt{3}\Upsilon(l), \quad \tilde{r}_0 = \sqrt{1 - 2a\Upsilon(l) + 2a^2\Upsilon(l)r_0(l)}. \quad (2.19)$$

Для функции поля перемещений окончательно можно записать

$$w_0(r, l) = -\frac{1}{|a\Upsilon(l)|\sqrt{\Phi(l)}} \left\{ \frac{2}{3a^2\Upsilon(l)} [1 - 2a\Upsilon(l) + 2a^2\Upsilon(l)r]^{3/2} - \right. \\ \left. - \frac{2}{3a^2\Upsilon(l)} [1 - 2a\Upsilon(l) + 2a^2\Upsilon(l)r_0(l)]^{3/2} - r + r_0(l) \right\}. \quad (2.20)$$

Приведенный здесь достаточно простой пример краевого условия (2.16) показывает, насколько сильно искажается исходный импульс за счет совместного влияния факторов нелинейности модели и неоднородности среды. Действительно, формула (2.18) содержит переменную r (то есть и переменную m) в степенях 1 и $3/2$, тогда как исходная функция – квадратичная. Дополнительный фактор искажения – наличие множителя $\Upsilon(l)$. Заметим также, что внешний вид решения (2.19), (2.20) сравнительно простой только за счет простоты краевого условия (2.16), но на самом деле необходимо дополнительно учитывать представление координат (2.11) и конкретный функции $\Upsilon(l)$.

3. Заключение. В статье рассмотрен один из наиболее простых вариантов включения неоднородности среды в модельные соотношения нелинейно упругого несжимаемого изотропного тела. Уже на стадии изучения плоских одномерных ударных волн присутствие неоднородности серьезно влияет на поведение решения. Получено новое эволюционное уравнение для поперечных волн в слабонеоднородных средах. Показано, что переход к этому уравнению возможен только при совместном изменении обеих независимых координат, причем полухарактеристическая координата для каждого внутреннего решения определяется цепочкой предыдущих внутренних решений и в итоге задается с включением ряда определенного типа. Приведенный метод может быть перенесен на задачи с иными вариантами неоднородности свойств среды, его можно применять к задачам о продольных волнах и к одномерным задачам с волновым фронтом с ненулевой кривизной.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Куликовский, А. Г. Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. – М. : Московский Лицей, 1998. – 412 с.
- [2] Буренин, А. А. Ударные волны в изотропном упругом пространстве / А. А. Буренин, А. Д. Чернышов // ПММ, 1978. – Т. 42. – Вып. 4. – С. 711–717.
- [3] Годунов, С. К. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, Г. П. Прокопов. – М. : Наука, 1976. – 400 с.
- [4] Куликовский, А. Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. – М. : Наука, 2002. – 550 с.
- [5] Ван-Дайк, М. Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – М. : Мир, 1967. – 239 с.
- [6] Бабичева, Л. А. Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических средах / Л. А. Бабичева, Г. И. Быковцев, Н. Д. Вервейко // ПММ, 1973. – Т. 37. – Вып. 1. – С. 145–155.
- [7] Буренин, А. А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями сильных разрывов / А. А. Буренин, Ю. А. Россихин // Прикладные задачи механики деформируемых сред. – Владивосток : Изд-во ДВО АН СССР, 1991. – С. 129–137.

- [8] *Рагозина, В. Е.* Об использовании прифронтовой асимптотики в численных решениях динамических задач теории упругости с ударными волнами / В. Е. Рагозина, И. И. Воронин, Е. Л. Вековшинин // Проблемы естествознания и производства, 1995. – Вып. 115. – С. 25–27.
- [9] *Буренин, А. А.* К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред / А. А. Буренин, П. В. Зиновьев // Проблемы механики. Сборник статей к 90-летию А.Ю. Ишлинского. – М. : Физматлит, 2003. – С. 146–155.
- [10] *Буренин, А. А.* Эволюционное уравнение для волновых процессов формоизменения / А. А. Буренин, В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова // Известия СГУ. Серия «Математика. Механика. Информатика», 2009. – Т. 9. – Вып. 4. – Ч. 2. – С. 14–24.
- [11] *Рагозина, В. Е.* Об эволюционных уравнениях задач ударного деформирования с плоскими поверхностями разрывов / В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова. // Вычислительная механика сплошных сред, 2009. – Т. 2. – № 3. – С. 82–95.
- [12] *Седов, Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1, 2 / Л. И. Седов. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Наука, 1973. Т. 1. – 536 с. Т. 2. – 584 с.
- [13] *Томас, Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М. : Мир, 1964. – 308 с.

Рагозина Виктория Евгеньевна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: ragozina@vlc.ru

Иванова Юлия Евгеньевна,

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: ivanova@iacp.dvo.ru

V. E. Ragozina, Y. E. Ivanova

THE EVOLUTION EQUATION OF PLANE SHOCK WAVES IN INCOMPRESSIBLE MEDIUM WITH WEAK INHOMOGENEITY

*Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far
Eastern Branch of Russian Academy of Sciences*

Abstract. The new evolution equation of nonstationary transverse plane strain waves in a weakly inhomogeneous incompressible elastic medium based on the method of matched asymptotic expansions is obtained. This equation reflects the nonlinear model relations and the inhomogeneity of the medium. Its general solution is given. The particular solution for a quadratic function of loading on the border to illustrate the method is constructed.

Keywords: nonlinear elasticity, inhomogeneous medium, incompressibility, shock wave, perturbation method, evolution equation.

REFERENCES

- [1] *Kulikovskii, A. G.* Nonlinear waves in elastic mediums / A. G. Kulikovskii, E. I. Sveshnikova. – M. : Moscow Lyceum, 1998. – 412 p.
- [2] *Burenin, A. A.* Shock waves in an isotropic elastic space / A. A. Burenin, A. D. Chernyshov // *PMM*, 1978. – Vol. 42. – No. 4. – P. 711–717.
- [3] *Godunov, S. K.* The numerical solution of multi-dimensional gas dynamics problems / S. K. Godunov, A. V. Zabrodin, M. Ya. Ivanov, G. P. Prokopov. – M. : Nauka, 1976. – 400 p.
- [4] *Kulikovskii, A. G.* Mathematical problems in the numerical solution of hyperbolic systems / A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, A. Yu. Semenov. – M. : Nauka, 2002. – 550 p.
- [5] *Van Dyke, M.* Perturbation methods in fluid mechanics / M. Van Dyke. – M. : Mir, 1967. – 239 p.
- [6] *Babicheva, L. A.* Ray method for solving dynamic problems in elastoviscoplastic mediums / L. A. Babicheva, G. I. Bykovtsev, N. D. Verveiko // *PMM*, 1973. – Vol. 37. – No. 1. – P. 145–155.
- [7] *Burenin, A. A.* Ray method for solving nonlinear one-dimensional problems of the dynamic elasticity theory with plane surfaces of strong discontinuities / A. A. Burenin, Yu. A. Rossikhin // *Applied problems in the mechanics of deformable mediums.* – Vladivostok : Far East of the USSR, 1991. – P. 129–137.
- [8] *Ragozina, V. E.* About using of the frontline asymptotic in the numerical solution of dynamic elasticity problems with shock waves / V. E. Ragozina, I. I. Voronin, E. L. Vekovshinin // *Problems of science and manufacture*, 1995. – No. 115. – P. 25–27.
- [9] *Burenin, A. A.* The problem of allocation of surface discontinuities in numerical analysis of the dynamics of deformable mediums / A. A. Burenin, P. V. Zinoviev // *Problems in mechanics. Collection of articles on the 90th anniversary of A.Yu. Ishlinskii.* – M. : Fizmatlit, 2003. – P. 146–155.
- [10] *Burenin, A. A.* The evolutionary equation for wave processes of the shift deformation / A. A. Burenin, V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova // *Proceedings of the SSU. Series "Mathematics. Mechanics. Informatics* 2009. – Vol. 9. – No. 4. – Ch. 2. – P. 14–24.
- [11] *Ragozina, V. E.* About the evolutionary equations of flat problems of a shock straining of solids / V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova // *Computational Continuum Mechanics*, 2009. – Vol. 2. – No 3. – P. 82–95.
- [12] *Sedov, L. I.* Continuum mechanics. Vol. 1, 2 / L. I. Sedov. – 2nd edition revised and updated. – M. : Nauka, 1973. – Vol.1. – 536 p. ; Vol.2. – 584 p.

[13] *Tomas, T.* Plastic Flow and Fracture in Solids / T. Y. Thomas. – Academic Press, 1961 – 267 p.

Ragozina, Victoria Evgenevna

Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Ivanova, Yulia Evgenevna

Cand. Sci. Phys. & Math., Researcher, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok

А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов

РЕШЕНИЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

*Воронежский государственный университет инженерных технологий,
Воронежский государственный архитектурно-строительный университет*

Аннотация. На примере решения сложной нелинейной интегро-дифференциальной задачи методом быстрых разложений показаны его преимущества по сравнению с известными численными и приближенными аналитическими методами. Анализируется множество решений, полученных данным методом, приведены графики действительных решений.

Ключевые слова: быстрые разложения, нелинейные интегро-дифференциальные уравнения, аналитическое решение, неединственность.

УДК: 517.9

Введение

Как известно, нелинейные интегро-дифференциальные задачи решаются в основном численными методами с помощью последовательных приближений, и найти хотя бы одно решение подобной задачи весьма затруднительно. Новый аналитический метод быстрых разложений [1]–[6] позволяет решать сложные интегро-дифференциальные задачи, апробирован в работах [7]–[11]. Покажем эффективность метода быстрых разложений на следующем примере.

Постановка и решение задачи

Рассмотрим нелинейную интегро-дифференциальную задачу с краевыми условиями Дирихле:

$$\begin{aligned} y'' + (y')^2 + \int_0^1 y(t) dt &= -\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} x + \frac{\pi^2}{4} \cos^2 \frac{\pi}{2} x + \frac{2}{\pi} , \\ y(0) = 0 , \quad y(1) = 1 , \quad x \in [0, 1] , \quad y(x) &\in C^{(4)} [0, 1] . \end{aligned} \quad (1)$$

Пример подобран так, чтобы его весьма затруднительно было решить численными методами или другими известными аналитическими методами [12]–[16]. Правая часть задачи (1) записана в виде, который позволяет записать одно из таких решений: $y = \sin(\pi x/2)$. Информация об этом решении позволит дать абсолютную оценку погрешности приближенного решения, полученного методом быстрых разложений, а также его первой и второй производных.

В соответствии с методом быстрых разложений неизвестную функцию $y(x)$ задачи (1) представим в виде суммы граничной функции $M_2(x)$ и быстрого ряда Фурье по синусам [1], [2]:

$$y(x) \approx y(0)(1-x) + y(1)x + y''(0) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3} \right) + y''(1) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} \right) + \sum_{m=1}^N y_m \sin m\pi x, \quad (2)$$

где N – количество используемых членов в ряде Фурье.

Функции $y(x)$ и $y''(x)$ по построению принимают точные значения при $x = 0$ и $x = 1$ независимо от количества учитываемых членов N . Здесь ряд в (2) можно почленно дифференцировать четыре раза. При этом ряды для первых трех производных равномерно сходятся внутри и на границах отрезка $[0, 1]$, четвертая производная равномерно сходится внутри отрезка, а на его границах может не сходиться. Быстрая сходимость ряда (2) позволяет ограничиться всего одним первым слагаемым, так как последующие слагаемые вносят малый вклад, и потому приближенное решение представить суммой

$$\begin{aligned} y(x) &= x + y''(0) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3} \right) + y''(1) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} \right) + y_1 \sin \pi x, \\ y'(x) &= 1 + y''(0) \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} \right) + y''(1) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} \right) + y_1 \pi \cos \pi x, \\ y''(x) &= y''(0)(1-x) + y''(1)x - y_1 \pi^2 \sin \pi x. \end{aligned} \quad (3)$$

В этом случае приближенное решение определяется пятью постоянными величинами

$$y(0), \quad y(1), \quad y''(0), \quad y''(1), \quad y_1,$$

две из которых находятся из граничных условий $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, а остальные три величины $y''(0)$, $y''(1)$, y_1 , используемые в (3), определим при выполнении интегро-дифференциального уравнения (1).

После подстановки выражений из (3) в уравнение (1) будем иметь:

$$\begin{aligned} & y''(0)(1-x) + y''(1)x - y_1 \pi^2 \sin \pi x + \\ & + \left(1 + y''(0) \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} \right) + y''(1) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} \right) + y_1 \pi \cos \pi x \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} - y''(0) \frac{1}{24} - y''(1) \frac{1}{24} + y_1 \frac{2}{\pi} = -\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} x + \frac{\pi^2}{4} \cos^2 \frac{\pi}{2} x + \frac{2}{\pi}. \end{aligned} \quad (4)$$

При написании этого равенства использованы ряды Фурье для $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, которые по построению сходятся на границах отрезка $[0, 1]$. Равенство (4) будем рассматривать как функции от переменной x , к которым можно применить оператор $Ch_0(y(x))$ – оператор быстрого синус-разложения нулевого порядка [6]. Поэтому в (4) можно положить $x = 0$ и затем $x = 1$, в результате будем иметь два алгебраических уравнения

$$\begin{aligned} y''(0) + \left(1 - \frac{1}{3}y''(0) - \frac{1}{6}y''(1) + y_1\pi \right)^2 - \frac{1}{24}[y''(1) + y''(0)] + y_1 \frac{2}{\pi} &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}, \\ y''(1) + \left(1 + y''(0) \frac{1}{6} + y''(1) \frac{1}{3} - y_1\pi \right)^2 - \frac{1}{24}[y''(1) + y''(0)] + y_1 \frac{2}{\pi} &= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для замыкания системы (5) относительно неизвестных $y''(0)$, $y''(1)$, y_1 умножим обе части уравнения (4) на $\sin \pi x$ и затем проинтегрируем по промежутку $[0, 1]$, что соответствует вычислению первого коэффициента Фурье:

$$\begin{aligned}
& y''(0) \left[y''(0) D + y''(1) C + \frac{7}{12\pi} + \frac{4}{\pi^3} - \frac{1}{8} y_1 \right] + \\
& + y''(1) \left[y''(1) \left(\frac{5}{36\pi} + D \right) + y''(0) C + \frac{5}{4\pi} - \frac{4}{\pi^3} - \frac{1}{8} y_1 \right] + \\
& + y_1 \left[\frac{2}{3} \pi y_1 - \frac{1}{8} y''(0) - \frac{1}{8} y''(1) + \frac{4}{\pi^2} - \frac{\pi^2}{2} \right] = -\frac{\pi}{12} - \frac{3}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}, \\
& C = \left(\frac{1}{9\pi} + \frac{1}{3\pi^3} - \frac{12}{\pi^5} \right), \quad D = \left(-\frac{7}{3\pi^3} + \frac{12}{\pi^5} \right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Поскольку для задачи (1) известно точное решение $y = \sin(\pi x/2)$, то известны и точные значения величин:

$$y''(0) = 0, \quad y''(1) = -\frac{\pi^2}{4}, \quad y_1 = \frac{1}{6\pi}.$$

Нелинейная система (5), (6) была решена в среде Maple:

$$y''(0) \approx -0.0165, \quad y''(1) \approx -2.4668, \quad y_1 \approx 0.0508. \tag{7}$$

С учетом (7) приближенное решение из (3) принимает вид

$$y(x) \approx y^*(x) = x - 0.0165 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3} \right) - 2.4668 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} \right) + 0.0508 \sin \pi x. \tag{8}$$

Система (5), (6) допускает неединственное решение, при котором самая короткая траектория соответствует точному решению $y = \sin(\pi x/2)$. На рис. 1 показаны графики всех действительных решений задачи (1). Символами обозначены решения, в которых величины $y''(0)$, $y''(1)$, y_1 получены программой Maple. Одно из таких решений (формула (8)) совпадает с точным решением $y = \sin(\pi x/2)$, график которого изображен кривой.

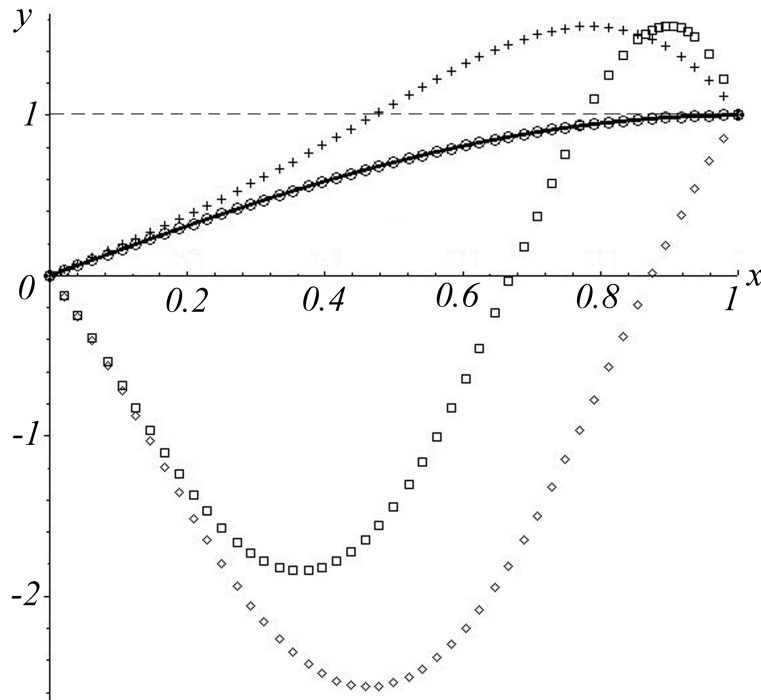


Рис. 1. График всех действительных решений

Оценка погрешности решения

С помощью (8) можно вычислить наибольшее отклонение приближенного решения от точного $\max |\delta y|$, первой и второй производных $\max |\delta y'|$ и $\max |\delta y''|$ на отрезке $[0, 1]$:

$$\max |\delta y| = \max |\sin(\pi x/2) - (y^*(x))| = 0.0024 \quad \text{при } x \approx 0.73,$$

$$\max |\delta y'| = 0.015 \quad \text{при } x = 1, \quad \max |\delta y''| = 0.075 \quad \text{при } x \approx 0.81.$$

Полученные оценки погрешностей согласуются с их теоретическими выражениями [17].

Увеличение точности решения

Если в разложении (2) в ряде Фурье удерживать два члена, приняв $N = 2$, то при подстановке приближенного решения

$$y(x) \approx x + y''(0) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3} \right) + y''(1) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} \right) + y_1 \sin \pi x + y_2 \sin 2\pi x \quad (9)$$

в уравнение (1) получим

$$\begin{aligned} & y''(0)(1-x) + y''(1)x - y_1 \pi^2 \sin \pi x - y_2 4\pi^2 \sin 2\pi x + \\ & + \left(1 + y''(0) \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} \right) + y''(1) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} \right) + y_1 \pi \cos \pi x + y_2 2\pi \cos 2\pi x \right)^2 + \end{aligned} \quad (10)$$

$$+ \frac{1}{2} - y''(0) \frac{1}{24} - y''(1) \frac{1}{24} + y_1 \frac{2}{\pi} = -\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} x + \frac{\pi^2}{4} \cos^2 \frac{\pi}{2} x + \frac{2}{\pi}.$$

Далее, выполняя те же действия, что и с уравнением (4), т. е. подставляя $x = 0$, $x = 1$ и последовательно умножая обе части уравнения (10) на $\sin \pi x$ и $\sin 2\pi x$ и затем интегрируя по промежутку $[0, 1]$, получим нелинейную алгебраическую систему, состоящую из 4 уравнений относительно неизвестных $y''(0)$, $y''(1)$, y_1 , y_2 . Ее решение получено в среде Maple

$$y''(0) \approx 0.0038, \quad y''(1) \approx -2.4674, \quad y_1 \approx 0.0533, \quad y_2 \approx -0.00125. \quad (11)$$

С учетом (11) приближенное решение из (9) принимает вид

$$y(x) \approx y^*(x) = x + 0.0038 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3} \right) - 2.4674 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} \right) + 0.0533 \sin \pi x - 0.00125 \sin 2\pi x. \quad (12)$$

Точные значения неизвестных $y''(0)$, $y''(1)$, y_1 , y_2 при $N = 2$ следующие

$$y''(0) = 0, \quad y''(1) = -\frac{\pi^2}{4}, \quad y_1 = \frac{1}{6\pi}, \quad y_2 = -\frac{1}{240\pi}.$$

С их помощью, как и ранее при $N = 1$, вычислим наибольшее отклонение приближенного решения от точного на отрезке $[0, 1]$:

$$\max |\delta y| = \max |\sin(\pi x/2) - (y^*(x))| = 0.00025 \quad \text{при } x \approx 0.85,$$

$$\max |\delta y'| = 0.0029 \quad \text{при } x = 1, \quad \max |\delta y''| = 0.026 \quad \text{при } x \approx 0.88.$$

Вывод

Столь простое решение с высокой точностью сложной нелинейной задачи (1) методом быстрых разложений позволяет сделать вывод, что предложенный метод имеет очевидные преимущества перед конечно-разностными методами и известными приближенными аналитическими методами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Чернышов, А. Д.* Улучшенные ряды Фурье и граничные функции / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики / Сб. тр. междунар. конф. – Воронеж : ВГУ. – 2009. – Ч. 2. – С. 236–238.
- [2] *Чернышов, А. Д.* Быстрые ряды Фурье / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики / Сб. тр. междунар. конф. – Воронеж : ВГУ. – 2010. – С. 388–394.
- [3] *Чернышов, А. Д.* Построение двумерной граничной функции для быстрых рядов Фурье / А. Д. Чернышов // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – Ч. 2. – С. 535–540.
- [4] *Чернышов, А. Д.* Улучшение дифференцируемости решений краевых задач механики в форме обобщенных рядов Фурье с помощью граничных функций / А. Д. Чернышов // Известия РАН. МТТ. – 2010. – № 1. – С. 174–192.
- [5] *Чернышов, А. Д.* О применении быстрых разложений для решения нелинейных задач механики / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики / Сб. тр. междунар. конф. – Воронеж : ВГУ. – 2011. – С. 412–416.
- [6] *Чернышов, А. Д.* Оператор быстрых разложений и теорема единственности быстрых разложений / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики / Сб. тр. междунар. конф. – Воронеж : ВГУ. – 2012. – Ч. 1. – С. 401–405.
- [7] *Горайнов, В. В.* Контактное тепловое сопротивление слабоупакованных шаров / В. В. Горайнов, А. С. Шахов // XII Международная школа-конференция молодых ученых "Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики" / Сб. тезисов. – Новосибирск : Институт теплофизики СО РАН, 2012. – С. 33.
- [8] *Чернышов, А. Д.* Построение математической модели процесса сушки с использованием быстрых разложений / А. Д. Чернышов, Е. В. Воронова, В. В. Горайнов // Техника и технологии: пути инновационного развития : материалы II-й международной научно-практической конференции. – Курск : Юго-Зап. гос. ун-т, 2012. – С. 206–209.
- [9] *Горайнов, В. В.* Температурные поля в слабоупакованных шарах / В. В. Горайнов, А. С. Шахов // Современное состояние естественных и технических наук : материалы VII-й международной научно-практической конференции. – М. : Издательство "Спутник+", 2012. – С. 62–65.
- [10] *Чернышов, А. Д.* О точности решения задачи теплообмена методом быстрых разложений / А. Д. Чернышов, Е. В. Воронова, В. В. Горайнов // XXXVI Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е. В. Золотова 4–10 сентября 2012 г., Владивосток : сб. материалов [Электронный ресурс]. – Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, 2012. – 544 с.; объем 600 Мб; 1 опт. компакт-диск (CD-ROM). С. 408–412.
- [11] *Горайнов, В. В.* Математическое моделирование процесса сушки зерна при помощи метода быстрых разложений / Е. В. Воронова, В. В. Горайнов // Проблемы теплообмена и гидродинамики в энергомашиностроении : труды VIII школы-семинара молодых ученых и специалистов академика РАН В. Е. Алемасова. – Казань : Издательство Казанского государственного энергетического университета, 2012. – С. 303–305.
- [12] *Хайрер, Э.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. – М. : Мир. – 1990. – 512 с.
- [13] *Андерсон, Д.* Вычислительная гидродинамика и теплообмен : в 2-х т. / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – М. : Мир. – 1990. – 776 с.
- [14] *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Наука, 1987. – 600 с.
- [15] *Амосов, А. А.* Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченкова. – М. : Высш. шк., 1994. – 544 с.

[16] Самарский, А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

[17] Чернышов, А. Д. О возможности вычисления коэффициентов Фурье поточечным методом / А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов, А. О. Соловьев // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – № 2. – Т. 6. – С. 49–53.

Чернышов Александр Данилович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж

e-mail: chernyshovad@mail.ru

Горяйнов Виталий Валерьевич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, г. Воронеж

e-mail: len4ic92@rambler.ru

A. D. Chernyshov, V. V. Gorjajnov

SOLUTION OF A NONLINEAR INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS BY THE METHOD RAPID EXPANSION

Voronezh State University of Engineering Technologies,

Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering

Abstract. On the solution of complex nonlinear integral-differential problem by rapid expansion shows its advantages in comparison with the available numerical and analytical methods. We analyze the set of solutions obtained by this method, the graphs of real solutions.

Keywords: rapid expansion, the nonlinear integral-differential equations, an analytic solution, non-uniqueness.

REFERENCES

[1] *Chernyshov, A. D.* Fourier's improved ranks and boundary functions / A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics / Collection of works of the international conferences. – Voronezh : VSU. – 2009. – Part. 2. – P. 236–238.

[2] *Chernyshov, A. D.* Fourier's fast ranks / A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics / Collection of works of the international conferences. – Voronezh : VSU. – 2010. – P. 388–394.

[3] *Chernyshov, A. D.* Creation of two-dimensional boundary function for fast ranks Fourier / A. D. Chernyshov // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Line : Mechanics of definable state. – 2010. – No. 2 (8). – Part. 2. – P. 535–540.

[4] *Chernyshov, A. D.* Improvement of differentiability of solutions of regional problems of mechanics in the form of Fourier's generalized ranks by means of boundary functions / A. D. Chernyshov // AN news USSR. MFB. – 2010. – No. 1. – P. 174–192.

[5] *Chernyshov, A. D.* About application of fast decomposition for the solution of the nonlinear problems of mechanics / A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics / Collection of works of the international conferences. – Voronezh : VSU. – 2011. – P. 412–416.

[6] *Chernyshov, A. D.* Operator of fast decomposition and uniqueness theorem fast decomposition / A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics / Collection of works of the international conferences. – Voronezh : VSU. – 2012. – Part. 1. – P. 401–405.

[7] *Gorjajnov, V. V.* Contact thermal resistance slaboupakovanny spheres / V. V. Gorjajnov, A. S. Shahov // XII International school conference of young scientists "Topical issues of thermophysics and physical hydraulic gas dynamics" / Collection of theses. – Novosibirsk : Institute of thermophysics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, 2012. – P. 33.

[8] *Chernyshov, A. D.* Creation of the mathematical models of process of drying with use of fast decomposition / A. D. Chernyshov, E. V. Voronova, V. V. Gorjajnov // Equipment and technologies: ways of innovative development: materials II-nd of the international scientific and practical conference. – Kursk : South Western State University, 2012. – P. 206–209.

[9] *Gorjajnov, V. V.* Temperature fields in slaboupakovanny spheres / V. V. Gorjajnov, A. S. Shahov // Current state of natural and technical science : materials VII-th international scientific and practical conference. – M. : Publishing house "Sputnik+", 2012. – P. 62–65.

[10] *Chernyshov, A. D.* About the accuracy of the solution of a task heatmass exchange method of fast decomposition / A. D. Chernyshov, E. V. Voronova, V. V. Gorjajnov // XXXVI Far East

mathematical school seminar of a name of academician E. V. Zolotov on September 4–10 2012, Vladivostok : coll. materials [Electronic resource]. – Vladivostok : IAPU of DVO of the RAS, 2012. – 544 p.; volume is 600 Mb; 1 wholesale. compact disk (CD ROM). P. 408–412.

[11] *Gorjajnov, V. V.* Mathematical modeling of process of drying grains by means of a method of fast decomposition / E. V. Voronova, V. V. Gorjajnov // Problems of a heatmass exchange and hydrodynamics engineers in power mechanical engineering: works VIII of school seminar of the young scientists and experts of the academician of the Russian Academy of Sciences V. E. Alemasova. – Kazan : Publishing house Kazan State Power University, 2012. – P. 303–305.

[12] *Hayrer, E.* Solution of the ordinary differential equations. Nonrigid task / E. Hayrer, S. Nersett, G. Vanner. – M. : Mir. – 1990 . – 512 p.

[13] *Anderson, D.* Computing hydrodynamics and heat exchange : in 2 t. / D. Anderson, J. Tannehill, R. Pletcher. – M. : Mir. – 1990 . – 776 p.

[14] *Bahvalov, N. S.* Numerical methods / N. S. Bahvalov, N. P. Zhidkov, G. M. Kobelkov. – M. : Nauka, 1987. – 600 p.

[15] *Amosov, A. A.* Computing methods for engineers / A. A. Amosov, Yu. A. Dubinskii, N. V. Kopchenova. – M. : Higher school, 1994. – 544 p.

[16] *Samarskii, A. A.* Computing heat transfer / A. A. Samarskii, P. N. Vabishchevich. – M. : Editorial URSS, 2003. – 784 p.

[17] *Chernyshov, A. D.* About possibility of calculation Fourier's coefficients potochechny method / A. D. Chernyshov, V. V. Gorjajnov, A. O. СОЛОВЬЕВ // Vestnik Voronezh State Technical University. – 2010. – No. 2. – Vol. 6. – P. 49–53.

Chernyshov, Alexandr Danilovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of the higher mathematics, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh

Gorjajnov, Vitalij Valerevich

Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of the higher mathematics, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, Voronezh

В. Н. Орлов, А. З. Пчелова

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение с подвижными особыми точками, в общем случае не интегрируемое в квадратурах. Приводится доказательство теоремы существования и единственности решения этого уравнения в области аналитичности. Предлагаются аналитические приближенные решения уравнения с точными и возмущенными значениями начальных условий. Полученные результаты сопровождаются расчетами.

Ключевые слова: подвижная особая точка, нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, приближенное решение, возмущение начальных данных, область аналитичности.

УДК: 517.928.4:517.554

Введение. Решение многих задач из различных областей науки и техники приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям, линейным, либо нелинейным. Теория линейных обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно полно разработана и обладает точными и приближенными методами решения. Теория нелинейных дифференциальных уравнений менее развита, и существующие приближенные методы решения линейных дифференциальных уравнений чаще всего не применимы к нелинейным дифференциальным уравнениям в силу особенности их решений – наличия подвижных особых точек.

В настоящей работе предлагается приближенный метод решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с подвижными особыми точками. Идея этого метода представлена в работах [1]–[9] и состоит в разделении области поиска решения на область аналитичности и окрестность подвижных особых точек, а затем построении приближенных решений в этих областях. В данной работе рассматривается задача построения приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности.

Результаты исследований и их обсуждение. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y'(x) = f_0 + f_1 y(x) + f_2 y^2(x) + f_3 y^3(x) + f_4 y^4(x) + f_5 y^5(x), \quad (1)$$

где f_i , $i = 0, 1, \dots, 5$, – функции вещественной переменной x , в общем случае неразрешимое в квадратурах, решение которого обладает подвижными особыми точками.

С помощью подстановки

$$y = w(x) u(\xi) - \frac{f_4}{5f_5},$$

при условиях

Поступила 19.12.2012

$$\frac{f_4}{5f_5} = \frac{f_3}{2f_4} = \frac{f_2}{f_3},$$

где

$$w = \exp \int \left(f_1 - \frac{f_2 f_4}{10 f_5} \right) dx,$$

$$\xi = \int f_5 w^4 dx,$$

уравнение (1) приводится к виду

$$u'(\xi) = u^5(\xi) + I(x), \quad (2)$$

при этом

$$f_5 w^5 I = \frac{d}{dx} \left(\frac{f_4}{5f_5} \right) + f_0 - \frac{1}{5} \frac{f_1 f_4}{f_5} + \frac{4}{5^5} \frac{f_4^5}{f_5^4}.$$

Уравнение (2) будем называть *нормальной формой* уравнения (1).
Рассмотрим задачу Коши

$$y'(x) = y^5(x) + r(x), \quad (3)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (4)$$

Докажем существование и единственность аналитического решения этой задачи. Известные теоремы о существовании и единственности решения дифференциального уравнения – теорема Коши и теорема Пикара [10], [11], относящиеся к одному подходу доказательства теорем, не позволяют решить нам поставленную задачу. В связи с чем и был принят вариант подхода в доказательстве теорем, предложенный в работах [1]–[9], позволивший в конечном итоге получить решение поставленной задачи.

Теорема 1. Пусть функция $r(x)$ задачи (3)–(4) удовлетворяет следующим условиям:

1) $r(x) \in C^\infty$ в области

$$|x - x_0| < \rho_1,$$

где $\rho_1 = \text{const} > 0$,

$$2) \exists M_1 : \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \leq M_1,$$

где $M_1 = \text{const}$, $n = 0, 1, \dots$.

Тогда решение задачи Коши (3)–(4) является аналитической функцией

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \quad (5)$$

в области

$$|x - x_0| < \rho_2,$$

где

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{4(M_2 + 1)^4} \right\}, \quad M_2 = \max \left\{ |y_0|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что функция $r(x)$ является аналитической в области $|x - x_0| < \rho_1$ и может быть представлена в виде

$$r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n. \quad (6)$$

Подставляя ряд (5) в уравнение (3), учитывая выражение (6), получим

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \right)^5 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n.$$

Выполнив соответствующие преобразования, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} n C_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{D}_n (x - x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} n C_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{D}_n + A_n) (x - x_0)^n, \quad (7)$$

где

$$\hat{D}_n = \sum_{i=0}^n C_{n-i} D_i^*, \quad D_n^* = \sum_{i=0}^n D_{n-i} D_i, \quad D_n = \sum_{i=0}^n C_{n-i} C_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Равенство (7) обратится в тождество при условиях

$$n C_n = \hat{D}_{n-1} + A_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Это рекуррентное соотношение позволяет однозначно определить все коэффициенты $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$. Таким образом, получили формальное единственное представление решения задачи (3)–(4) в области $|x - x_0| < \rho_1$ в виде степенного ряда (5).

На основании соотношения (8) для коэффициентов структуры решения (5) будем иметь

$$C_n = P_{4n+1}(C_0, A_0, A_1, \dots, A_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где P_{4n+1} – полином от $C_0, A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ степени $(4n + 1)$ с положительными коэффициентами.

Докажем сходимость ряда (5) в области $|x - x_0| < \rho_2$.

Обозначим

$$M_2 = \max \left\{ |y_0|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из соотношения (8) с учетом последнего равенства имеем

$$|C_1| \leq 2M_2(M_2 + 1)^4, \quad |C_2| \leq \frac{1}{2} 2^3 M_2(M_2 + 1)^8, \quad |C_3| \leq \frac{1}{3} 2^5 M_2(M_2 + 1)^{12}, \dots$$

Применяя метод математической индукции, для коэффициентов C_n получаем оценку

$$|C_n| \leq \frac{1}{n} 2^{2n-1} M_2 (M_2 + 1)^{4n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Рассмотрим ряд

$$M_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 2^{2n-1} M_2 (M_2 + 1)^{4n} (x - x_0)^n,$$

являющийся мажорирующим для ряда (5). На основании признака Даламбера получаем сходимость этого ряда в области

$$|x - x_0| < \frac{1}{4(M_2 + 1)^4}.$$

Следовательно, эта область будет являться областью сходимости и для ряда (5).

Полагая

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{4(M_2 + 1)^4} \right\},$$

получаем сходимость ряда (5) в области $|x - x_0| < \rho_2$, что и завершает доказательство теоремы.

Оценки, полученные в теореме 1 для коэффициентов C_n ряда (5), позволяют построить приближенное решение

$$y_N = \sum_{n=0}^N C_n (x - x_0)^n \quad (10)$$

задачи Коши (3)–(4).

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1 и 2 теоремы 1, тогда для аналитического приближенного решения (10) задачи Коши (3)–(4) справедлива оценка погрешности

$$|y - y_N| \leq \frac{1}{N+1} 2^{2N+1} M_2 (M_2 + 1)^{4N+4} |x - x_0|^{N+1} \frac{1}{1 - 4(M_2 + 1)^4 |x - x_0|}$$

в области $|x - x_0| < \rho_2$, где

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{4(M_2 + 1)^4} \right\}, \quad M_2 = \max \left\{ |y_0|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. С учетом оценок для коэффициентов C_n , полученных в теореме 1, имеем

$$\begin{aligned} |y - y_N| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n - \sum_{n=0}^N C_n (x - x_0)^n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} 2^{2n-1} M_2 (M_2 + 1)^{4n} |x - x_0|^n \leq \\ &\leq \frac{1}{N+1} 2^{2N+1} M_2 (M_2 + 1)^{4N+4} |x - x_0|^{N+1} \frac{1}{1 - 4(M_2 + 1)^4 |x - x_0|}. \end{aligned}$$

Пример 1. Найдем приближенное решение задачи Коши (3)–(4), где

$$r(x) = 0, \quad y(0) = \frac{1}{\sqrt[4]{11}}.$$

Эта задача имеет точное решение $y = \frac{1}{\sqrt[4]{11-4x}}$.

Вычислим радиус аналитичности с учетом начального условия задачи Коши:

$$\rho_2 = 0,043413185.$$

Выберем значение $x = 0,035$, принадлежащее области аналитичности $|x - x_0| < \rho_2$. Расчеты приведем в таблице 1.

Таблица 1

**Оценка приближенного решения уравнения в случае точного значения
начального условия в области аналитичности**

x	y	y_3	Δ	Δ_1^*	Δ_2^*
0,035	0,550861656	0,550861655	$1,4 \cdot 10^{-9}$	0,149626545	$6,4 \cdot 10^{-6}$

Здесь y – значение точного решения данного уравнения, y_3 – значение приближенного решения, Δ – абсолютная погрешность, Δ_1^* и Δ_2^* – априорная и апостериорная оценки погрешности соответственно.

С помощью теоремы 2 можно решить обратную задачу теории погрешности, связанную с нахождением апостериорной оценки погрешности, а именно определить значение N по заданной точности приближенного решения ε . Для случая $\varepsilon = 6,4 \cdot 10^{-6}$ получаем значение $N = 39$. Фактически для $N = 4, 5, \dots, 39$ получаем уточнения приближенного решения, которые в общей сумме не превышают требуемой точности ε . Следовательно, мы можем ограничиться в структуре приближенного решения значением $N = 3$. Таким образом, получаем апостериорную оценку погрешности Δ_2^* для приближенного решения y_3 , равную значению $\varepsilon = 6,4 \cdot 10^{-6}$.

Выше для задачи Коши рассматривался случай точного значения начального условия и было построено приближенное решение (10). При осуществлении аналитического продолжения возникает задача исследования влияния возмущения начальных данных на приближенное решение

$$\tilde{y}_N(x) = \sum_{n=0}^N \tilde{C}_n(x - x_0)^n, \quad (11)$$

где \tilde{C}_n – возмущенные значения коэффициентов.

Рассмотрим задачу Коши с возмущенным начальным условием

$$y'(x) = y^5(x) + r(x), \quad (12)$$

$$\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0. \quad (13)$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1 и 2 теоремы 1 и известна абсолютная величина возмущения начального условия

$$|\tilde{y}_0 - y_0| = \Delta \tilde{y}_0.$$

Тогда для аналитического приближенного решения (11) задачи Коши (12)–(13) справедлива оценка погрешности

$$\Delta \tilde{y}_N(x) \leq \Delta_1 + \Delta_2$$

в области

$$|x - x_0| < \rho_5,$$

где

$$\Delta_1 \leq \frac{1}{N+1} 2^{2N+1} M_3 (M_3 + 1)^{4N+4} |x - x_0|^{N+1} \frac{1}{1 - 4(M_3 + 1)^4 |x - x_0|},$$

$$\Delta_2 \leq \Delta M \left(1 + \frac{8(M_3 + \Delta M + 1)^4 |x - x_0|}{1 - 4(M_3 + \Delta M + 1)^4 |x - x_0|} \right),$$

$$\Delta M = \Delta \tilde{y}_0, \quad M_3 = \max \left\{ |\tilde{y}_0|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\rho_5 = \min \{ \rho_3, \rho_4 \}, \quad \rho_3 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{4(M_3 + 1)^4} \right\}, \quad \rho_4 = \frac{1}{4(M_3 + \Delta M + 1)^4}.$$

Доказательство. Используя классический подход, имеем

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{y}_N(x) &= |y(x) - \tilde{y}_N(x)| \leq |y(x) - \tilde{y}(x)| + |\tilde{y}(x) - \tilde{y}_N(x)| = \\ &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^N \tilde{C}_n(x-x_0)^n \right| + \left| \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n \right| = \\ &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \tilde{C}_n(x-x_0)^n \right| + \left| \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{C}_n - C_n)(x-x_0)^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |\tilde{C}_n| |x-x_0|^n + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n |x-x_0|^n = \Delta_1 + \Delta_2, \end{aligned}$$

где

$$|\tilde{C}_n - C_n| = \Delta \tilde{C}_n.$$

Для выражения Δ_1 с учетом оценки (9) для коэффициентов C_n по теореме 2 имеем

$$\Delta_1 \leq \frac{1}{N+1} 2^{2N+1} M_3 (M_3 + 1)^{4N+4} |x-x_0|^{N+1} \frac{1}{1 - 4(M_3 + 1)^4 |x-x_0|}.$$

На основании метода математической индукции для выражения $\Delta \tilde{C}_n$ следует оценка

$$\Delta \tilde{C}_n \leq 2^{2n+1} \Delta M (M_3 + \Delta M + 1)^{4n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\Delta M = \Delta \tilde{y}_0$.

Таким образом, для выражения Δ_2 получаем оценку

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n |x-x_0|^n = \Delta \tilde{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n |x-x_0|^n \leq \\ &\leq \Delta M + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n+1} \Delta M (M_3 + \Delta M + 1)^{4n} |x-x_0|^n = \Delta M \left(1 + \frac{8(M_3 + \Delta M + 1)^4 |x-x_0|}{1 - 4(M_3 + \Delta M + 1)^4 |x-x_0|} \right), \end{aligned}$$

справедливую в области

$$|x-x_0| < \rho_4 = \frac{1}{4(M_3 + \Delta M + 1)^4}.$$

С учетом области действия оценки для Δ_1 окончательно для выражения $\Delta \tilde{y}_N(x)$ получаем область

$$|x-x_0| < \rho_5,$$

где

$$\rho_5 = \min \{ \rho_3, \rho_4 \}, \quad \rho_3 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{4(M_3 + 1)^4} \right\}.$$

Таким образом, доказательство теоремы завершено.

Пример 2. Построим первое аналитическое продолжение для приближенного решения задачи Коши, рассмотренной в примере 1.

Начальное условие задачи Коши

$$\tilde{y}_0(0,035) = 0,550861655.$$

Величина возмущения не превышает $\varepsilon = 1,4 \cdot 10^{-9}$. Задача имеет точное решение: $y = \frac{1}{\sqrt[3]{11-4x}}$. Вычислим радиус аналитичности:

$$\rho_5 = 0,043250212.$$

Выберем значение $x = 0,07$, принадлежащее области аналитичности $|x - x_0| < \rho_5$. Расчеты приведем в таблице 2.

Таблица 2

Оценка приближенного решения уравнения в случае возмущенного значения начального условия в области аналитичности

x	y	\tilde{y}_3	Δ	Δ_1^*	Δ_2^*
0,07	0,552651437	0,552651434	$2,9 \cdot 10^{-9}$	0,155813159	$6,2 \cdot 10^{-6}$

Здесь y – значение точного решения, \tilde{y}_3 – значение приближенного решения, Δ – абсолютная погрешность, Δ_1^* и Δ_2^* – априорная и апостериорная оценки погрешности соответственно.

Аналогичным образом, как и в примере 1, получаем решение обратной задачи теории погрешности, а вместе с ней и апостериорную оценку погрешности. Определяем значение N по заданной точности ε приближенного решения (11). В случае $\varepsilon = 6,2 \cdot 10^{-6}$ получаем $N = 40$. Фактически для $N = 4, 5, 6, \dots, 40$ получаем уточнения аналитического приближенного решения, которые в общей сумме не превышают требуемой точности ε . Следовательно, можно ограничиться в структуре аналитического приближенного решения значением $N = 3$. При этом получаем апостериорную оценку погрешности Δ_2^* для приближенного решения \tilde{y}_3 , равную значению $\varepsilon = 6,2 \cdot 10^{-6}$.

Выводы. Доказана теорема существования и единственности решения рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения в вещественной области, для которого построено аналитическое приближенное решение и исследовано влияние возмущения начального условия на приближенное решение. Теоретические результаты подтверждены расчетами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Орлов, В. Н. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов, Н. А. Лукашевич // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 10. – С. 1829–1832.
- [2] Орлов, В. Н. Об одном конструктивном методе построения первой и второй мероморфных трансцендентных Пенлеве / В. Н. Орлов, В. П. Фильчакова // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці. ІМ НАН України. – Киев. – 1998. – Т. 19. – С. 155–165.
- [3] Орлов, В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов // Вестник Казанского гос. тех. ун-та им. А. Н. Туполева. – 2008. – № 2. – С. 42–46.
- [4] Орлов, В. Н. Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати / В. Н. Орлов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского гос. политех. ун-та. – 2008. – № 63. – С. 102–108.
- [5] Орлов, В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // Вестник Московского авиац. ин-та. – 2008. – Т. 15. – № 5. – С. 128–135.
- [6] Орлов, В. Н. Точные границы области применения приближенного решения дифференциального уравнения Абея в окрестности приближенного значения подвижной особой точки / В. Н. Орлов // Вестник Воронежского гос. тех. ун-та. – 2009. – Т. 5. – № 10. – С. 192–195.

[7] Орлов, В. Н. Математическое моделирование решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов, С. А. Редкозубов // Известия института инженерной физики. – 2010. – № 4 (18). – С. 2–6.

[8] Орлов, В. Н. Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области / В. Н. Орлов // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 399–405.

[9] Орлов, В. Н. Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати. Монография / В. Н. Орлов. – Чебоксары : Перфектум, 2012. – 112 с.

[10] Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М.-Л. : Гостехиздат, 1950. – 436 с.

[11] Матвеев, Н. М. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Н. М. Матвеев. – СПб. : Специальная литература, 1996. – 372 с.

Орлов Виктор Николаевич,

доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: orlowvn@ Rambler.ru

Пчелова Алевтина Зионовна,

старший преподаватель кафедры алгебры, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: archelova@mail.ru

V. N. Orlov, A. Z. Pchelova

CONSTRUCTION OF APPROXIMATE SOLUTION OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION IN THE ANALYTICITY REGION

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The article considers a nonlinear ordinary differential equation with movable special points which is not solvable in quadratures in a common case. The proof of the existence and uniqueness theorem for the solution of this equation in the analyticity region is provided. The authors suggest analytical approximate solutions of the equation with exact and approximate values of initial conditions. These results are accompanied by examples of calculations.

Keywords: movable special point, nonlinear ordinary differential equation, approximate solution, perturbation of the initial conditions, analyticity region.

REFERENCES

- [1] Orlov, V. N. Studies of the approximate solution of the second Painleve equation / V. N. Orlov, N. A. Lukashevich // Differential equations. – 1989. – Vol. 25. – No. 10. – P. 1829–1832.
- [2] Orlov, V. N. About one constructive method of first and second Painleve transcendental meromorphic / V. N. Orlov, V. P. Filchakova // Symmetry and Analytic Method in matetychnly physics. IM NAN Ukraine. – Kiev. – 1998. – Vol. 19. – P. 155–165.
- [3] Orlov, V. N. About the approximate solution of the first Painleve equation / V. N. Orlov // Vestnik of A. Tupolev Kazan State Technical University. – 2008. – No. 2. – P. 42–46.
- [4] Orlov, V. N. The method for the approximate solution of Riccati differential equation / V. N. Orlov // Scientific and technical vedomosti of the St. Petersburg State Polytechnical University. – 2008. – No. 63. – P. 102–108.
- [5] Orlov, V. N. About one method for the approximate solution of matrix Riccati differential equations / V. N. Orlov // Vestnik of the Moscow Aviation Institute. – 2008. – Vol. 15. – No. 5. – P. 128–135.
- [6] Orlov, V. N. Precise boundaries of the area of approximate solutions of Abel differential equation in the neighborhood of approximate value of movable special point / V. N. Orlov // Vestnik of the Voronezh State Technical University. – 2009. – Vol. 5. – No. 10. – P. 192–195.
- [7] Orlov, V. N. Mathematical modeling of the Abel differential equation in the neighborhood of movable special point / V. N. Orlov, S. A. Redkozubov // Izvastia of the Institute of Engineering Physics. – 2010. – No. 4 (18). – P. 2–6.
- [8] Orlov, V. N. Precise boundaries for the approximate solution of Abel differential equation in the neighborhood of approximate value of movable special point in the complex domain / V. N. Orlov // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Mechanics of definable state. – 2010. – No. 2 (8). – P. 399–405.
- [9] Orlov, V. N. Method of approximate solution of scalar and matrix Riccati differential equation. Monograph / V. N. Orlov. – Cheboksary : Perfektum, 2012. – 112 p.
- [10] Golubev, V. V. Lectures on the analytic theory of differential equations / V. V. Golubev. – M.; L. : Gostechizdat Publ., 1950. – 436 p.
- [11] Matveev, N. M. Ordinary differential equations / N. M. Matveev. – St. Petersburg : Spetsialnaya literature Publ., 1996. – 372 p.

Orlov, Victor Nikolayevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Department of Algebra, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Pchelova, Alevtina Zinonovna

Senior Lecturer, Department of Algebra, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Е. П. Дац, С. Н. Мокрин, Е. В. Мурашкин

РАСЧЕТ НАКОПЛЕННОЙ ОСТАТОЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ПРОЦЕССЕ «НАГРЕВА-ОХЛАЖДЕНИЯ» УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ШАРА

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН

Аннотация. В рамках классической теории упругопластических деформаций рассчитывается одномерный процесс деформирования материала вследствие локального нагрева и последующего охлаждения. Решена задача о формировании остаточных напряжений в шаре из упругопластического материала при заданном тепловом воздействии. Рассчитаны поля остаточных напряжений и перемещений.

Ключевые слова: упругость, пластичность, температурные напряжения, остаточные деформации, остаточные напряжения, теплопроводность.

УДК: 539.377

Введение. Анализ температурных напряжений в телах, допускающих пластические деформации, отхватывает ряд задач, относящихся к различным областям техники, – от металлургической, ядерной и космической до расчета конструкций и обработки металлов. Формирующиеся поля остаточных напряжений существенным образом влияют на прочностные и эксплуатационные характеристики материалов. Для определения напряженно-деформированного состояния как правило используется несвязанная квазистатическая теория малых термоупругопластических деформаций, когда температурное поле влияет на параметры напряженно-деформированного состояния за счет теплового расширения [1], [6]. Вычисление остаточных напряжений усложняется зависимостью предела текучести от температуры, что отражается на закономерностях формирования зон пластического течения и разгрузки. Для тел со сферической и цилиндрической симметрией при осесимметричном тепловом воздействии удается получить численно-аналитические решения для остаточных напряжений, перемещений и необратимых деформаций в области разгрузки.

Основные модельные зависимости. Рассмотрим шар радиуса R в момент времени $t = 0$, находящийся в свободном состоянии при комнатной температуре T_0 . Материал шара считаем упругопластическим, подчиняющимся математической модели типа Прандтля-Рейса [1], [2], [3] в которой деформации e_{ij} полагаются малыми и принимается их аддитивное разложение на упругую e_{ij}^e и пластическую e_{ij}^p составляющие

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1)$$

Поступила 20.12.2012

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (МК-776.2012.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-33064-мол_a_вед).

Уровень и распределение упругих деформаций и температуры в шаре задают напряжения в нем, определяемые согласно закону Дюгамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - m\theta)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \quad \theta = T(x_i, t) - T_0. \quad (2)$$

Здесь λ , μ – параметры Ламе, $m = 3\alpha K$, K – модуль всестороннего сжатия материала, α – коэффициент линейного температурного расширения материала, $T(x_i, t)$ – текущая температура. Начало процесса пластического течения в материале свяжем с выполнением условия пластичности в форме Треска [2]

$$f(\sigma_i, \theta) = \max |\sigma_i - \sigma_j| - 2k(\theta) = 0, \quad (3)$$

где σ_i – главные напряжения, $k(\theta)$ – предел текучести материала при заданной температуре. Далее в расчетах для $k(\theta)$ принимается простейшая линейная зависимость $k(\theta) = k_0 - \beta\theta$, в которой k_0 – предел текучести материала при комнатной температуре, β – теплофизическая постоянная материала, задающая степень падения предела текучести с повышением температуры и определяемая на основе экспериментальных данных. В условиях принимаемого принципа максимума Мизеса [2], [3] поверхность (3) становится пластическим потенциалом, следствием которого является ассоциированный закон пластического течения

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{e}_{ij}^p = \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial t} = \xi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \xi = \sqrt{\varepsilon_{kl}^p \varepsilon_{lk}^p} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{nm}} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Если к соотношениям (1)–(4) добавить локальные следствия законов сохранения (уравнение движения и уравнение баланса внутренней энергии) и постулировать закон теплопроводности, например, в форме Фурье, то получим замкнутую математическую модель деформирования.

Процесс нестационарного "нагрева-охлаждения" шара. Пусть сплошной шар радиуса R , свободный от нагружающих усилий,

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = 0 \quad (5)$$

начиная с некоторого момента времени t_0 , нагревается так, что на его поверхности температура изменяется согласно закону

$$T(R, t) = \frac{T_m - T_0}{2} \left(1 - \cos \frac{3\pi t}{2} \right) + T_0, \quad (6)$$

где T_m – некоторая максимальная температура нагрева. Такое тепловое воздействие приведет к постепенному росту напряжений и деформаций в материале шара. Кроме того, напряженно-деформированное состояние оказывается сферически симметричным, и дальнейшее решение удобно проводить в сферической системе координат (r, φ, ϑ) , тогда согласно (2) для компонент тензора напряжений имеем

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)e_{rr}^e + 2\lambda e_{\varphi\varphi}^e - m\theta \quad (7)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\varphi\varphi} = 2(\lambda + \mu)e_{\varphi\varphi}^e + \lambda e_{rr}^e - m\theta$$

$$e_{rr}^e = e_{rr}^e = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\varphi\varphi}^e = e_{\varphi\varphi}^e = e_{\vartheta\vartheta}^e = u_r r^{-1}.$$

Подставив полученные выражения (7) в уравнение равновесия, выписанное для случая сферической симметрии,

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \quad (8)$$

получим уравнение для единственной отличной от нуля компоненты вектора перемещений $u = u_r$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) = \frac{m}{w} \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad (9)$$

где $w = (\lambda + 2\mu)$.

Если в уравнении баланса внутренней энергии (локальной формулировке закона сохранения энергии) пренебречь источником тепла, вызванного деформированием (связанностью процессов деформирования и теплопередачи), и принять простейшую линейную зависимость теплового потока от градиента температуры в шаре, будем иметь классическое уравнение теплопроводности [4], [5]. Его решение в рассматриваемом случае и для принятых начальных и краевых условий (5) известно [5]:

$$\theta_1(r, t) = -\frac{2}{rR} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s} \sin \frac{n\pi r}{R} \left(\frac{n\pi a(-1)^n}{2} \int_0^t \left(1 - \cos \frac{3\pi\tau}{2}\right) e^s d\tau \right).$$

Здесь $s = \frac{an^2\pi^2t}{R^2}$, a – коэффициент теплопроводности материала. Из краевого условия (5) следует, что в момент времени $t = \frac{4}{3}$ температура поверхности шара возвращается к первоначальному значению. С этого момента температура поверхности удерживается постоянной до тех пор, пока поле температур не вернется к первоначальному состоянию в момент времени $t = 0$. Решение уравнения теплопроводности в интервале времени $\frac{4}{3} < t < \infty$ имеет вид [5]:

$$\theta_2(r, t) = \frac{2}{rR} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s} \sin \frac{n\pi r}{R} \left(\int_0^R \rho \theta_1 \left(\rho, \frac{4}{3} \right) \sin \frac{n\pi\rho}{R} d\rho \right).$$

По известному распределению температуры

$$\theta(r, t) = \begin{cases} \theta_1(r, t) & 0 < t < \frac{4}{3} \\ \theta_2(r, t) & \frac{4}{3} < t < \infty \end{cases} \quad (10)$$

перемещения находятся интегрированием (9):

$$u = \frac{m}{wr^2} \int_0^r \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + c_1(t)r + \frac{c_2(t)}{r}. \quad (11)$$

Так как в центре шара перемещения отсутствуют, $c_2(t) = 0$.

По известному полю перемещений напряжения определим согласно (7)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{4\mu m}{wr^3} \int_0^r \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + gc_1(t) \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2\mu}{wr^3} \int_0^r \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + gc_1(t) - 2\mu w\theta(r, t) \end{aligned} \quad (12)$$

$$c_1(t) = \frac{4\mu m}{wgR^3} \int_0^R \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho, \quad g = (3\lambda + 2\mu).$$

Зависимости (11), (12) являются решением задачи термоупругого равновесия шара и справедливы вплоть до выхода напряженного состояния на поверхность текучести, что связано с началом пластического течения в момент времени $t = t_1$. Данное обстоятельство связано с ограничениями на скорость нагрева материала шара: она должна быть достаточной, чтобы вызвать соответствующий уровень температурных напряжений. Область пластического течения развивается от поверхности шара R и в некоторый текущий момент времени занимает область $r_1(t) \leq r \leq R$. Вне этой области материал продолжает деформироваться обратимо, и характеристики напряженно-деформированного состояния будут определяться прежними

зависимостями (11), (12) с тем отличием, что неизвестная $c_1(t)$ вычисляется из условия непрерывности напряжений и перемещений на упругопластической границе r_1

$$c_1(t) = \frac{4\mu m}{wgr_1^3} \int_0^{r_1} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{4\mu m}{g} \int_{r_1}^R \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho. \quad (13)$$

В области пластического течения напряженное состояние соответствует точкам поверхности нагружения (3). В нашем случае это точки призмы Треска, определяемые соотношением

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k. \quad (14)$$

Интегрируя уравнение равновесия (8) с учетом соотношения (15) во всей области необратимого деформирования, будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -4 \int_{r_1}^r \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho + c_3(t) \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\vartheta\vartheta} &= -4 \int_{r_1}^r \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho + c_3(t) - 2k(r, t). \end{aligned} \quad (15)$$

Воспользовавшись законом Дюгамеля-Неймана (2), определяем компоненты обратимых деформаций

$$\begin{aligned} e_{rr}^e &= \frac{m\theta(r, t)}{g} + \frac{\lambda k(r, t)}{\mu g} + \frac{\sigma_{rr}(r, t)}{g} \\ e_{\varphi\varphi}^e = e_{\vartheta\vartheta}^e &= \frac{m\theta(r, t)}{g} - \frac{\lambda k(r, t)}{\mu g} + \frac{\sigma_{\varphi\varphi}(r, t)}{g}. \end{aligned} \quad (16)$$

Следствием ассоциированного закона пластического течения (4) и соотношения (1) будет равенство

$$\frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} = e_{rr}^e + 2e_{\varphi\varphi}^e, \quad (17)$$

проинтегрировав которое, получим распределение перемещений в пластической области

$$u = \frac{3m}{gr^2} \int_{r_1}^r \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho - \frac{4r}{g} \int_{r_1}^r \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho + \frac{(r^3 - r_1^3)}{gr^2} c_3(t) + \frac{c_4(t)}{r^2}. \quad (18)$$

Неизвестные константы находятся из условия (5) и условия непрерывности перемещений (11), (18) и напряжений (12), (16) на упругопластической границе r_1

$$c_3(t) = 4 \int_{r_1}^R \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho, \quad c_4(t) = \frac{4r_1^3}{g} \int_{r_1}^R \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho + \frac{3m}{g} \int_0^{r_1} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho. \quad (19)$$

При этом положение упругопластической границы r_1 в заданный момент времени t_n находится из условия равенства нулю функции пластичности (3)

$$f(r_1, t_n) = \frac{2\mu m}{w} \theta(r_1, t_n) - \frac{6\mu m}{wr_1^3} \int_0^{r_1} \theta(\rho, t_n) d\rho - 2k(r_1, t_n) = 0. \quad (20)$$

Из (20) следует, что закон движения границы пластического течения не зависит от изменения необратимой деформации в области течения и полностью определяется разностью температурных напряжений $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}$ в области обратимого деформирования ($0 \leq r \leq r_1$).

Если переписать соотношения Дюгамеля-Неймана (7) с учетом зависимости (18) для области пластического течения:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - e_{rr}^p \right) + 2\lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{e_{rr}^p}{2} \right) - m\theta \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= 2(\lambda + \mu) \left(\frac{u}{r} + \frac{e_{rr}^p}{2} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} - e_{rr}^p \right) - m\theta,\end{aligned}\quad (21)$$

где e_{rr}^p – радиальная компонента пластической деформации, то поверхность нагружения (3) в области течения запишется в виде:

$$f^p(r, t) = f(r, t) - \frac{\mu g}{w} e_{rr}^p(r, t) = 0. \quad (22)$$

Откуда легко находится соотношение для пластической деформации:

$$e_{rr}^p(r, t) = \frac{w}{\mu g} f(r, t) = \frac{2}{g} \left(m\theta(r, t) - \frac{3m}{r^3} \int_0^r \theta(\rho, t) d\rho - \frac{w}{\mu} k(r, t) \right). \quad (23)$$

При замедлении процесса нагрева в некоторый момент времени t_2 на поверхности шара пластическая деформация (23) перестанет расти, что означает начало разгрузки материала шара в окрестности нагрева и связано с выполнением условия в некоторой точке среды r_2 условия

$$\dot{e}_{rr}^p(r_2, t) = 0. \quad (24)$$

Несмотря на развивающуюся область разгрузки, область пластического течения продолжает расти, что означает необходимость интегрирования уравнения равновесия теперь уже в трех областях: области обратимого деформирования ($0 \leq r \leq r_1(t)$), области пластического течения ($r_1(t) \leq r \leq r_2(t)$), области разгрузки ($r_2(t) \leq r \leq R$), где r_2 находится из уравнения (24). Соотношение (23) остается справедливым при наличии области разгрузки, то есть формирование остаточной деформации в области разгрузки, в данном случае, не влияет на рост пластической деформации в области течения.

Остаточную пластическую деформацию $E_{rr}^p(r)$ найдем численно, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} E_{rr}^p(r_2) = e_{rr}^p(r_2, t) \\ \dot{e}_{rr}^p(r_2, t) = 0 \end{cases}. \quad (25)$$

Из (25) очевидно, что $E_{rr}^p(r)$ является огибающей семейства кривых $e_{rr}^p(r, t)$.

Подставив соотношения для напряжений (21) в уравнение равновесия (8), заменив при этом пластическую деформацию e_{rr}^p на остаточную E_{rr}^p , получим дифференциальное уравнение для радиальной компоненты вектора перемещений в области разгрузки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) = \frac{m}{w} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{6\mu}{w} \frac{E_{rr}^p}{r} + \frac{2\mu}{w} \frac{\partial E_{rr}^p}{\partial r} \quad (26)$$

решением которого является функция

$$u = \frac{m}{wr^2} \int_{r_2}^r \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{2\mu r}{w} \int_{r_2}^r \frac{E_{rr}^p(\rho)}{\rho} d\rho + \left(\frac{3(r^3 - r_2^3)}{r^2 w} \right) c_5(t) + \frac{c_6(t)}{r^2}, \quad (27)$$

что позволит вычислить напряжения (21) в области с накопленными необратимыми деформациями ($r_2(t) \leq r \leq R$)

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{4\mu m}{wr^3} \int_{r_2}^r \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{2\mu g}{w} \int_{r_2}^r \frac{E_{rr}^p(\rho)}{\rho} d\rho + \left(\frac{gr^3 - 4\mu r_2^3}{wr^3} \right) c_5(t) - \frac{4\mu}{r^3} c_6(t) \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2\mu m}{wr^3} \int_{r_2}^r \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho - \frac{2\mu m \theta(r, t)}{w} + \frac{2\mu g}{w} \int_{r_2}^r \frac{E_{rr}^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{\mu g}{w} E_{rr}^p(r) + \\ &+ \left(\frac{g}{w} + \frac{2\mu r_2^3}{wr^3} \right) c_5(t) + \frac{2\mu}{r^3} c_6(t).\end{aligned}\quad (28)$$

В термоупругой области ($0 \leq r \leq r_1(t)$) и в области пластического течения ($r_1(t) \leq r \leq r_2(t)$) напряжения вычисляются по известным зависимостям (12) и (16) соответственно с точностью до новых констант интегрирования, которые найдем, исходя из условий непрерывности напряжений и перемещений на упругопластической границе $r_1(t)$, границе разгрузки $r_2(t)$ и граничного условия (5):

$$\begin{aligned}c_1(t) &= \frac{4\mu m}{wgR^3} \int_0^R \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{4\mu m}{wgr_1^3} \int_0^{r_1} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho - \frac{4\mu m}{wgr_2^3} \int_0^{r_2} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \\ &+ \frac{4}{g} \int_{r_1}^{r_2} \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho - \frac{3\mu}{2w} \int_{r_2}^R \frac{E_{rr}^p(\rho)}{\rho} d\rho \\ c_3(t) &= -\frac{4\mu m}{wr_1^3} \int_0^{r_1} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + gc_1(t), \quad c_4(t) = \frac{m}{w} \int_0^{r_1} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + r_1^3 c_1(t) \\ c_5(t) &= -\frac{4\mu m}{gr_1^3} \int_0^{r_1} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{4\mu m}{gr_2^3} \int_0^{r_2} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho - \frac{4w}{g} \int_{r_1}^{r_2} \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho + 3wc_1(t) \\ c_6(t) &= -\frac{4\mu mr_2^3}{wgr_1^3} \int_0^R \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{3m}{g} \int_0^{r_2} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho - \frac{4r_2^3}{g} \int_{r_1}^{r_2} \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho + r_2^3 c_1(t).\end{aligned}\quad (29)$$

С момента времени $t = t_k$ начнем понижать температуру на внешней поверхности шара согласно (6). Процессы пластического течения и разгрузки будут продолжаться до тех пор, пока граница r_2 не "догонит" упругопластическую границу r_1 в некоторый момент времени $t = t_3$.

При дальнейшем охлаждении шара возможен повторный выход напряженного состояния на поверхность нагружения (3), что связано с выполнением условия пластичности Треска на поверхности шара теперь уже с противоположным знаком:

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})|_{r=R, t=t_4} = -2k. \quad (30)$$

Тогда граница повторного пластического течения r_3 , учитывая зависимости (28), является решением уравнения

$$\frac{\mu g}{w} E_{rr}^p(r_3) - f(r_3, t) = 0. \quad (31)$$

Соотношения для напряжений и перемещений в области повторного течения аналогичны зависимостям (16), (18) соответственно, с тем лишь отличием, что знак перед пределом

текучести следует изменить на противоположный

$$u = \frac{3m}{gr^2} \int_{r_3}^r \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{4r}{g} \int_{r_3}^r \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho + \frac{(r^3 - r_3^3)}{gr^2} c_7(t) + \frac{c_8(t)}{r^2}$$

$$\sigma_{rr} = 4 \int_{r_3}^r \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho + c_7(t) \quad (32)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = 4 \int_{r_3}^r \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho + c_7(t) + 2k(r, t).$$

Константы интегрирования для случая повторного течения находятся из условия непрерывности компонент перемещений (11), (27), (32) и напряжений (12), (28), (32) на границах r_2 и r_3 :

$$c_1(t) = \frac{4\mu m}{wgr_3^3} \int_0^{r_3} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho - \frac{4}{g} \int_{r_3}^R \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho - \frac{3\mu}{2w} \int_{r_2}^{r_3} \frac{E_{rr}^p(\rho)}{\rho} d\rho$$

$$c_5(t) = \frac{4\mu m}{gr_3^3} \int_0^{r_3} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho - \frac{4w}{g} \int_{r_3}^R \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho - \frac{3\mu}{2} \int_{r_2}^{r_3} \frac{E_{rr}^p(\rho)}{\rho} d\rho$$

$$c_6(t) = \frac{m}{w} \int_0^{r_2} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{4\mu mr_2^3}{wgr_3^3} \int_0^{r_3} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho -$$

$$- \frac{4r_2^3}{g} \int_{r_3}^R \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho - \frac{2\mu r_2^3}{w} \int_{r_2}^{r_3} \frac{E_{rr}^p(\rho)}{\rho} d\rho$$

$$c_7(t) = -4 \int_{r_3}^R \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho, \quad c_8(t) = \frac{3m}{g} \int_0^{r_3} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho - \frac{4r_3^3}{g} \int_{r_3}^R \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho.$$

Радиальная компонента тензора пластических деформаций в области ($r_3 \leq r \leq R$) находится аналогично (23), при этом знак перед пределом текучести следует изменить на противоположный.

Начало процесса разгрузки при повторном пластическом течении как и прежде (24) свяжем с прекращением роста необратимых деформаций, то есть с равенством нулю скоростей пластических деформаций \dot{e}_{rr}^{2p} .

По аналогии с (25) численно найдем E_{rr}^{2p} как огибающую семейства $e_{rr}^{2p}(r, t)$. Тогда соотношения для перемещений и напряжений в области повторной разгрузки ($r_4 \leq r \leq R$) примут вид

$$u = \frac{m}{wr^2} \int_{r_4}^r \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{2\mu r}{w} \int_{r_4}^r \frac{E_{rr}^{2p}(\rho)}{\rho} d\rho + \left(\frac{3(r^3 - r_4^3)}{r^2 w} \right) c_9(t) + \frac{c_{10}(t)}{r^2}$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{4\mu m}{wr^3} \int_{r_4}^r \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{2\mu g}{w} \int_{r_2}^r \frac{E_{rr}^{2p}(\rho)}{\rho} d\rho + \left(\frac{gr^3 - 4\mu r_2^3}{wr^3} \right) c_9(t) - \frac{4\mu}{r^3} c_{10}(t)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{2\mu m}{wr^3} \int_{r_4}^r \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho - \frac{2\mu m \theta(r, t)}{w} + \frac{2\mu g}{w} \int_{r_4}^r \frac{E_{rr}^{2p}(\rho)}{\rho} d\rho +$$

$$+ \frac{\mu g}{w} E_{rr}^{2p}(r) + \left(\frac{2\mu(r^3 - r_4^3)}{r^3 w} + \frac{3\lambda}{w} \right) c_9(t) + \frac{2\mu}{r^3} c_{10}(t),$$

где r_4 – граница повторной разгрузки, которая находится из условия ($\dot{e}_{rr}^{2p}(r_4, t) = 0$). Соотношения для напряжений и перемещений останутся прежними в областях: термоупругого деформирования ($0 \leq r \leq r_1$) (11), (12), с накопленными необратимыми деформациями ($r_1 \leq r \leq r_3$) (27), (28), повторного пластического течения ($r_3 \leq r \leq r_4$) (32) с точностью до новых констант интегрирования, которые легко вычисляются из условия непрерывности параметров напряженно-деформированного состояния на границах разгрузки и повторного течения:

$$c_1(t) = -\frac{4\mu m}{wgr_4^3} \int_0^{r_4} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{4\mu m}{wgr_3^3} \int_0^{r_3} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{4\mu m}{wgR^3} \int_0^R \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho -$$

$$-\frac{4}{g} \int_{r_3}^{r_4} \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho - \frac{3\mu}{2w} \int_{r_2}^{r_3} \frac{E_{rr}^p(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{3\mu}{2w} \int_{r_4}^R \frac{E_{rr}^p(\rho)}{\rho} d\rho$$

$$c_5(t) = 3wc_1(t), \quad c_7(t) = -\frac{4\mu m}{wr_3^3} \int_0^{r_3} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{2\mu g}{w} \int_{r_2}^{r_3} \frac{E_{rr}^p(\rho)}{\rho} d\rho + gc_1(t)$$

$$c_6(t) = \frac{m}{w} \int_0^{r_2} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + r_2^3 c_1(t)$$

$$c_8(t) = \frac{m}{w} \int_0^{r_3} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{2\mu r_3^3}{w} \int_{r_2}^{r_3} \frac{E_{rr}^p(\rho)}{\rho} d\rho + r_3^3 c_1(t)$$

$$c_9(t) = -\frac{4\mu m}{gr_3^3} \int_0^{r_3} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{4\mu m}{gr_4^3} \int_0^{r_4} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{4w}{g} \int_{r_3}^{r_4} \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho +$$

$$+\frac{3\mu}{2} \int_{r_2}^{r_3} \frac{E_{rr}^p(\rho)}{\rho} d\rho + 3gc_1(t)$$

$$c_{10}(t) = \frac{3m}{g} \int_0^{r_4} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho - \frac{4\mu mr_4^3}{wgr_3^3} \int_0^{r_3} \theta(\rho, t) \rho^2 d\rho + \frac{4r_4^3}{g} \int_{r_3}^{r_4} \frac{k(\rho, t)}{\rho} d\rho +$$

$$+\frac{2\mu r_4^3}{w} \int_{r_2}^{r_3} \frac{E_{rr}^p(\rho)}{\rho} d\rho + r_4^3 c_1(t).$$

На рис. 1, 2 приведены поля перемещений и остаточных напряжений в момент времени, когда тело достигнет своей первоначальной температуры. Расчеты проводились при следующих параметрах материала: $\lambda k_0^{-1} = 1400$, $\mu k_0^{-1} = 932$, $m(T_m - T_0)k_0^{-1} = 21,4$, $\beta(T_m - T_0) = 0,148$.

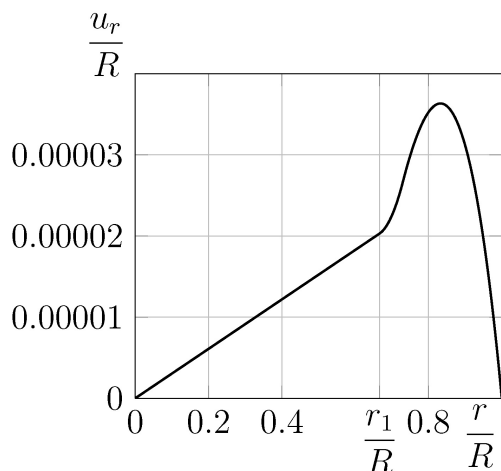


Рис. 1. Распределение остаточных перемещений

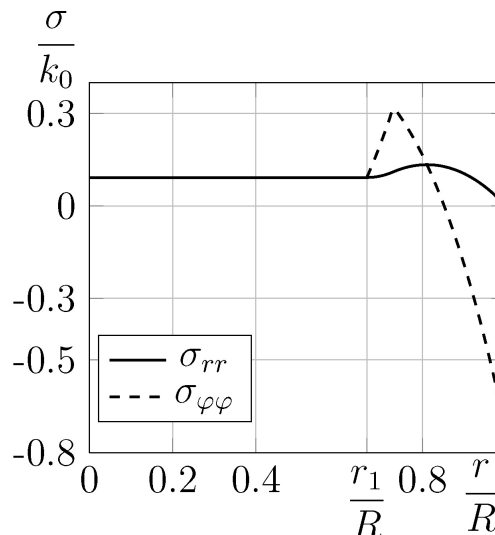


Рис. 2. Распределение остаточных напряжений

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Боли, Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М. : Мир, 1964. – 520 с.
- [2] Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
- [3] Галин, Л. А. Упругопластические задачи / Л. А. Галин. – М. : Наука, 1984. – 232 с.
- [4] Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 487 с.
- [5] Лыков, А. В. Теория теплопроводности / Л. А. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 599 с.
- [6] Рыкалин, Н. Н. Расчеты тепловых процессов при сварке / Н. Н. Рыкалин. – М. : Машиностроение, 1951. – 294 с.

Дац Евгений Павлович,

аспирант, инженер-математик, Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: Dats@dvo.ru

Мокрин Сергей Николаевич,

студент, Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: msn_primat@mail.ru

Мурашкин Евгений Валерьевич,

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: Murashkin@dvo.ru

E. P. Dats, S. N. Mokrin, E. V. Murashkin

THE CALCULATION OF THE ACCUMULATED RESIDUAL STRAIN IN THE HEATING-COOLING PROCESS OF ELASTO-PLASTIC BALL

Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences

Abstract. One-dimensional process of deformation of the material due to local heating and subsequent cooling was calculated by the classical theory of elastic-plastic deformation. The problem of the forming of the residual stresses in a ball of elastic material at a given heat exposure was solved. The residual stress and displacement fields were calculated.

Keywords: elasticity, plasticity, thermal stresses residual strains, residual stresses, thermal conductivity.

REFERENCES

- [1] *Boli, B.* The theory of thermal stress / B. Boli, J. Weiner. – M. : Mir, 1964. – 520 p.
- [2] *Bykovtsev, G. I.* The theory of plasticity / G. I. Bykovtsev, D. D. Ivlev. – Vladivostok : Dalnauka, 1998. – 528 p.
- [3] *Galín, L. A.* Elastoplastic problems / L. A. Galín. – M. : Nauka, 1984. – 232 p.
- [4] *Carslaw, H.* Thermal conductivity of solids / H. Carslaw, D. Jaeger. – M. : Nauka, 1964. – 487 p.
- [5] *Lykov, B.* The theory of heat conduction / B. Lykov. – M. : High school, 1967. – 599 p.
- [6] *Rykalín, N. N.* Calculations of thermal processes in welding / N. N. Rykalín. – M. : Mashinostroenie, 1951. – 294 p.

Dats, Evgeniy Pavlivich

Postgraduate Student, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Mokrin, Sergey Nikolaevich

Student, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Murashkin, Evgenii Valeryevich

Cand. Sci. Phys. & Math., Researcher, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ФУНКЦИЯМ ФАДЛЯ-ПАПКОВИЧА. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Московский государственный открытый университет имени В. С. Черномырдина

Аннотация. В статье [1] изложены основы теории и дана общая схема решения краевой задачи теории упругости в полуполосе (прямоугольнике) в виде разложений по системам функций Фадля-Папковича. В этой заметке даны основные формулы для таких решений. Полученные решения обладают рядом весьма необычных свойств. Некоторые особенности полученных решений обсуждаются в настоящей работе.

Ключевые слова: краевая задача, аналитическое решение.

УДК: 539.3

Актуальность исследуемой проблемы. Эта статья в некоторой степени подытоживает работы авторов, посвященные классической проблеме теории упругости – аналитическим решениям для конечных областей. Приводятся окончательные формулы для напряжений и перемещений для симметричной относительно продольной оси деформации полосы.

Материал и методика исследований. Решение для полуполосы $\{\Pi^+ : x \geq 0, |y| \leq 1\}$ со свободными продольными сторонами $y = \pm 1$ и заданными на торце нормальными напряжениями $\sigma_x(0, y) = \sigma(y)$ имеет такой вид (в [1] даны только формулы для напряжений):

$$\begin{aligned} U(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{U(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{V(\lambda_k, y)}{M_k} \left(\cos b_k x - c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\sigma_x(\lambda_k, y)}{M_k} \left(\cos b_k x - c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\sigma_y(\lambda_k, y) \lambda_k \bar{\lambda}_k}{M_k \lambda_k^2} \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\tau_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

В том случае, когда на торце полуполосы заданы лишь касательные напряжения $\tau_{xy}(0, y) = \tau(y)$, а нормальные равны нулю, имеем

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{U(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\
V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{V(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}, \\
\sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\sigma_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}, \\
\sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\sigma_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \left(2c_k \cos b_k x + \frac{c_k^2 - b_k^2}{b_k} \sin b_k x \right) e^{c_k x} \right\}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\tau_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\},
\end{aligned} \tag{2}$$

В этих формулах введены обозначения: $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, а $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – соответственно продольное и поперечное перемещения, G – модуль сдвига, $c_k = Re\lambda_k$, $b_k = Im\lambda_k$, $c_k < 0$. Числа λ_k ($k \geq 1$) – бесконечный набор комплексных корней уравнения $\lambda + \sin \lambda \cos \lambda = 0$, $M_k = \cos^2 \lambda_k$. Функции Фадля-Папковича имеют вид (μ – коэффициент Пуассона):

$$\begin{aligned}
\sigma_x(\lambda_k, y) &= (1 + \mu)\lambda_k \{ (\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y \}, \\
\sigma_y(\lambda_k, y) &= (1 + \mu)\lambda_k \{ (\sin \lambda_k + \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y \}, \\
\tau_{xy}(\lambda_k, y) &= (1 + \mu)\lambda_k^2 \{ \cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y \}, \\
U(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1 - \mu}{2} \sin \lambda_k - \frac{1 + \mu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1 + \mu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\
V(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1 + \mu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k + \sin \lambda_k \right) \sin \lambda_k y - \frac{1 + \mu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y.
\end{aligned} \tag{3}$$

Числа σ_k и τ_k – коэффициенты Лагранжа раскладываемых функций (аналоги коэффициентов Фурье). Они находятся по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_k &= \int_{-1}^1 \sigma(y) x_k(y) dy, \quad x_k(y) = \frac{\cos \lambda_k y}{2(1 + \mu)\lambda_k \sin \lambda_k}, \\
\tau_k &= \int_{-1}^1 \tau(y) t_k(y) dy, \quad t_k(y) = -\frac{\sin \lambda_k y}{2(1 + \mu) \sin \lambda_k}.
\end{aligned}$$

Здесь $x_k(y)$, $t_k(y)$ – финитные части систем функций биортогональных к функциям Фадля-Папковича $\sigma_x(\lambda_k, y)$ и $\tau_{xy}(\lambda_k, y)$. Соответствующие финитные части для функций $\sigma_y(\lambda_k, y)$, $U(\lambda_k, y)$, $V(\lambda_k, y)$ имеют такой вид [1]:

$$\begin{aligned}
y_k(y) &= -\frac{1}{2(1+\mu)} \left\{ \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k} - [\delta(y-1) + \delta(y+1)] \right\}, \\
u_k(y) &= \frac{1}{(1+\mu)} \left\{ \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k} - [\delta(y-1) + \delta(y+1)] \right\}, \\
v_k(y) &= -\frac{\sin \lambda_k y}{(1+\mu) \sin \lambda_k} \quad (|y| \leq 1).
\end{aligned}$$

Рассмотрим правую полуполосу P^+ . Эту же полуполосу с симметрично искривленными продольными сторонами и торцом назовем правой почти полуполосой. Наряду с правой, рассмотрим также левую полуполосу P^- и соответствующую ей левую почти полуполосу, являющуюся зеркальным отображением правой. Границы почти полуполос таковы, что если к их криволинейным торцам приложить некоторую нагрузку, то обе почти полуполосы превращаются в правую и левую прямоугольные полуполосы с действующими на их торцах нормальными самоуравновешенными напряжениями $\sigma_x(0, y) = \sigma(y)$. Приложим нужную нагрузку и затем склеим получившиеся прямоугольные полуполосы по торцам. В результате получим бесконечную полосу $\{P : |y| \leq 1, |x| < \infty\}$ со свободными продольными сторонами, в которой имеется нетривиальное, симметричное относительно осей x и y поле собственных (начальных) напряжений, такое, что $\sigma_x(0, y) = \sigma(y)$, а $\tau_{xy}(0, y) = 0$. При $x \geq 0$ эти напряжения описываются формулами (2), а слева – теми же формулами, но при $x \leq 0$ и $Re\lambda_k > 0$. Легко проверить, что напряжения (2) удовлетворяют уравнениям равновесия, но уравнения совместности не выполняются и, следовательно, перемещения не могут быть однозначно определены [3]. Однако в том случае, когда известно, как (в результате каких действий) создается поле собственных напряжений в бесконечной полосе P , перемещения определяются вполне однозначно. Рассмотрим два примера.

Дана бесконечная полоса P и соответствующая ей бесконечная почти полоса, симметричная относительно осей x , y и такая, что если на ось y приложить некоторые массовые силы $\delta(x)p_y(y)$ и $\delta'(x)p_x(y)$, действующие в направлении осей y и x соответственно, то почти полоса станет полосой P (функции $p_y(y)$ и $p_x(y)$ четны, d – дельта-функция). Снимем внешнюю нагрузку и будем считать, что при этом на вертикальной оси полосы известны поперечные перемещения $V(0, y) = v(y)$, продольные перемещения $U(0, y) = 0$ по симметрии задачи. Тогда можно записать

$$v(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k V(\lambda_k, y) + \overline{a_k} V(\overline{\lambda_k}, y), \tag{4}$$

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k U(\lambda_k, y) + \overline{a_k} U(\overline{\lambda_k}, y).$$

Отсюда для каждого номера $k \geq 1$ получим систему из двух алгебраических уравнений, решая которую, найдем искомые коэффициенты этих разложений. Окончательные выражения для перемещений и напряжений совпадут с формулами (1), если в них заменить σ_k на v_k . Формулам (1) для $U(x, y)$, $V(x, y)$ теперь можно дать такую физическую трактовку: они описывают перемещения, возникающие в правой половине бесконечной полосы P после снятия внешней нагрузки, вызвавшей напряжения (1).

Рассмотрим другой пример. Пусть в горизонтальной полосе P имеется симметричное относительно осей x и y поле собственных напряжений (1), такое, что $\sigma_x(0, y) = \sigma(y)$. Проведем разрез $\{x = 0, |y| \leq 1\}$ и зададим на нем разрыв продольных перемещений

$$U^+(0, y) - U^-(0, y) = 2u(y) \tag{5}$$

(через $U^\pm(0, y)$ обозначены перемещения соответственно справа и слева на разрезе). Для формулировки краевой задачи для полосы P с разрывом (5) следуем методологии работ [2] или [4]. Тогда краевая задача вновь приводится к разложениям типа (4). Окончательные формулы для перемещений и напряжений выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{U(\lambda_k, y) e^{c_k x}}{\lambda_k M_k} u_k \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}, \\
V(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{V(\lambda_k, y) e^{c_k x}}{M_k} \frac{u_k}{\lambda_k} \left(\cos b_k x - c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}, \\
\sigma_x(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\sigma_x(\lambda_k, y) e^{c_k x}}{M_k} \frac{u_k}{\lambda_k} \left(\cos b_k x - c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}, \\
\sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\sigma_y(\lambda_k, y) e^{c_k x}}{\lambda_k^2 M_k} u_k \lambda_k \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\tau_{xy}(\lambda_k, y) e^{c_k x}}{\lambda_k M_k} u_k \lambda_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Допустим, что форма разрыва $u(y)$ выбрана так, что возникающие при этом нормальные напряжения $\sigma_x(0, y)$ равны начальным (собственным) напряжениям в полосе P , взятым с обратным знаком, т. е.

$$\sigma(y) = -\sigma_x(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\sigma_x(\lambda_k, y) u_k}{M_k} \frac{1}{\lambda_k} \right\}.$$

В этом случае формулы (6) описывают перемещения, которые возникают в предварительно напряженной полосе P в результате сброса собственных напряжений после того, как ее разрезали по оси y . Если в формулах (6) считать, что $u_k = -\sigma_k \lambda_k$, то получим формулы (1) (кроме формулы для $U(x, y)$).

Пусть теперь в полосе P имеется несимметричное относительно оси y поле напряжений (2), которое является следствием приложенных вдоль y массовых сил $\delta'(x)q_y(y)$ и $\delta(x)q_x(y)$. Если снять внешнюю нагрузку, то полоса становится почти полосой. При этом, по симметрии задачи, возникающие в ней продольные перемещения $U(0, y) = u(y)$, а поперечные равны нулю, т. е. $V(0, y) = 0$. Решение задачи дается формулами (2), в которых надо заменить τ_k на $u_k = \int_{-1}^1 u(y) u_k(y) dy$. Таким образом, формулами (2) для $U(x, y)$, $V(x, y)$ описываются перемещения, возникающие в правой половине бесконечной полосы P , после снятия внешней нагрузки, вызвавшей напряжения (2).

Аналогом задачи с разрывом продольных перемещений является задача с разрывом поперечных перемещений. Пусть в горизонтальной полосе P имеется несимметричное относительно оси y поле собственных напряжений (2), такое, что $\tau_{xy}(0, y) = \tau(y)$. Проведем разрез $\{x = 0, |y| \leq 1\}$ и будем считать, что на нем задан разрыв поперечных перемещений

$$V^+(0, y) - V^-(0, y) = 2v(y) \tag{7}$$

($V^\pm(0, y)$ – перемещения справа и слева на разрезе). Следуя опять методологии работ [2], [4], окончательно получим

$$\begin{aligned}
 V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{V(\lambda_k, y)e^{c_k x}}{M_k} v_k \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}, \\
 U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{U(\lambda_k, y)e^{c_k x}}{\lambda_k M_k} \lambda_k v_k \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}, \\
 \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\sigma_x(\lambda_k, y)e^{c_k x}}{M_k} \lambda_k v_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right\}, \\
 \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\sigma_y(\lambda_k, y)e^{c_k x}}{\lambda_k^2 M_k} \lambda_k v_k \left(2c_k \cos b_k x + \frac{c_k^2 - b_k^2}{b_k} \sin b_k x \right) \right\}, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\tau_{xy}(\lambda_k, y)e^{c_k x}}{\lambda_k M_k} \lambda_k v_k \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Они в точности совпадут с соответствующими формулами (2), если принять $\tau_k = \lambda_k v_k$, $v_k = \int_{-1}^1 v(y) v_k(y) dy$ (кроме формулы для $V(x, y)$).

Формулы (8) описывают перемещения, которые возникают в предварительно напряженной полосе P в результате сброса собственных напряжений после того, как ее разрезали вдоль оси y .

Принципиальное отличие классического решения для полосы с разрывом перемещений от решений в виде разложений по функциям Фадля-Папковича заключается в том, что в классическом решении продольные стороны полосы P прямолинейные до деформации остаются прямолинейными и после деформации [3], [6] (за счет добавления или удаления материала). Благодаря этому обстоятельству в классическом решении выполняются условия совместности деформаций.

Еще одна особенность рассматриваемых решений заключается в их неединственности. Обратимся к примеру. Пусть симметричные относительно продольной оси правая и левая почти полуполосы соединяются в бесконечную полосу P так, что на вертикальной оси полосы нормальные напряжения $\sigma_x(0, y) = \sigma(y)$, а касательные $\tau_{xy}(0, y) = 0$. Возникающие при этом собственные напряжения в полосе описываются формулами (1), где σ_k – коэффициенты разложения функции $\sigma(y)$ в ряд Лагранжа по системе функций $\{\sigma_x(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$. Чтобы найти σ_k , нужно функцию $\sigma(y)$, первоначально заданную на отрезке $[-1, 1]$, каким-либо образом продолжить на всю вещественную ось. В зависимости от того, как выполнено это продолжение, коэффициенты Лагранжа σ_k будут разными. Рассмотрим функцию $\sigma(y)$ из статьи [1]:

$$\sigma(y) = \frac{1}{3} - y^2. \tag{9}$$

Если она продолжена периодически (с периодом, равным 2) вне интервала $[-1, 1]$, то

$$\sigma_k = \frac{2}{1 + \mu} \left(\frac{1}{\lambda_k^4} - \frac{\cos \lambda_k}{\lambda_k^3 \sin \lambda_k} - \frac{1}{3\lambda_k^2} \right), \tag{10}$$

а если аналитически (т. е. в соответствии с формулой (9)), то

$$\sigma_k = \frac{-2}{(1 + \mu)\lambda_k^4}. \tag{11}$$

Подставляя (10), (11) в формулы (1), получим два разных решения. Этим решениям соответствуют различные первоначальные профили $U(0, y)$ и $V(x, \pm 1)$ почти полуполос. Таким

образом, неединственность решения краевой задачи для полуполосы с заданными на ее торце напряжениями $\sigma(y)$ означает, что первоначальная форма сторон почти полуполос, соединяемых в бесконечную полосу, может быть подобрана не единственным образом (вопросам неединственности решения краевой задачи плоской упругости в областях с угловыми точками границы и точками смены типа граничных условий посвящена статья [5]).

Результаты исследований и их обсуждение. Получено точное решение краевой задачи теории упругости для полуполосы. Решение строится по той же схеме, что и известные решения Файлона-Рибьера. Окончательные выражения просты, наглядны и легко могут быть использованы в расчетах.

Резюме. Решения несимметричной задачи, а также решения в других канонических областях с угловыми точками границы (треугольник, параллелограмм и т. д.) строятся аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля-Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. МТТ. – 2011. – № 5. – С. 78–98.
- [2] Коваленко, М. Д. Стык двух полуполос / М. Д. Коваленко, С. В. Шибырин // Известия РАН. МТТ. – 1997. – № 1. – С. 56–63.
- [3] Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1949. – 635 с.
- [4] Себряков, Г. Г. Разложения по функциям Фадля-Папковича в задаче для полосы с разрезом / Г. Г. Себряков, М. Д. Коваленко, Н. Н. Цыбин, Т. Д. Шуляковская // Доклады РАН. – 2008. – Т. 439. – № 6. – С. 763–766.
- [5] Шемякин, Е. И. О краевых задачах теории упругости для областей с угловыми точками (плоская деформация) / Е. И. Шемякин // Доклады РАН. – 1996. – Т. 347. – № 3. – С. 342–345.
- [6] Шерман, Д. И. Об одной задаче теории упругости / Д. И. Шерман // Доклады АН СССР. – 1940. – Т. 27. – № 9. – С. 907–913.

Меньшова Ирина Владимировна,

аспирант кафедры высшей и прикладной математики, Московский государственный открытый университет им В. С. Черномырдина, г. Москва

e-mail: pmdekanat@gmail.com

I. V. Menshova

EXPANSIONS IN FADLE-PAPKOVICH FUNCTIONS. THE BASIC FORMULAS

V. Chernomyrdin Moscow State Open University

Abstract. In [1] we set out the fundamentals of the theory and give a general scheme of solution of the boundary-value problem of the elasticity theory in a semi-strip in form of an expansion in systems of the Fadle-Papkovich functions. In this study, we give the basic formulas of such solutions. The obtained solutions have a number of quite unusual properties. Certain features of the obtained solutions are discussed in this study.

Keywords: boundary-value problem, analytical solution.

REFERENCES

- [1] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on functions Fadlya-Papkovich in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovsky // Information RAS. MFB. – 2011. – No. 5. – P. 78–98.
- [2] *Kovalenko, M. D.* Joint of two semi-strips / M. D. Kovalenko, S. V. Shibirin // Information RAS. MFB. – 1997. – No. 1. – P. 56–63.
- [3] *Muskhelishvili, N. I.* Some main objectives mathematical theory of elasticity / N. I. Muskhelishvili. – M. ; L. : Publishing house AS USSR, 1949. – 635 p.
- [4] *Sebryakov, G. G.* Decomposition on Fadlya-Papkovich's functions in a task for a strip with a section / G. G. Sebryakov, M. D. Kovalenko, N. N. Tsybin, T. D. Shulyakovsky // Reports RAS. – 2008. – Vol. 439. – No. 6. – P. 763–766.
- [5] *Shemyakin, E. I.* About regional tasks of the theory of elasticity for areas with angular points (flat deformation) / E. I. Shemyakin // Reports RAS. – 1996. – Vol. 347. – No. 3. – P. 342–345.
- [6] *Sherman, D. I.* About one task of the theory of elasticity / D. I. Sherman // Reports AS USSR. – 1940. – Vol. 27. – No. 9. – P. 907–913.

Menshova, Irina Vladimirovna

Postgraduate Student, Department of Higher and Applied Mathematics, V. Chernomyrdin Moscow State Open University, Moscow

e-mail: pmdekanat@gmail.com

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ ПОПЕРЕЧНОГО РЕБРА ЖЕСТКОСТИ К ПОЛОСЕ

Московский государственный открытый университет имени В. С. Черномырдина

Аннотация. Дается аналитическое решение известной задачи о передаче усилия от ребра жесткости (стрингера) к упругой полосе, когда ребро жесткости перпендикулярно оси полосы. Решение представляется в виде разложений по функциям Фадля-Папковича. Коэффициенты разложений находятся в явном виде.

Ключевые слова: ребро жесткости, полоса, передача нагрузки, функции Фадля-Папковича, аналитическое решение.

УДК: 539.3

Актуальность исследуемой проблемы. Задача о передаче сосредоточенной нагрузки от стрингера к тонкому листу относится к числу наиболее известных проблем теории упругости. Интерес к ней был обусловлен, прежде всего, развитием авиации. В статье впервые дается аналитическое решение одной из таких задач. В основе решения лежат разложения по функциям Фадля-Папковича, теория которых была построена совсем недавно [1], [2].

Материал и методика исследований. Рассмотрим задачу о передаче нагрузки от стрингера к бесконечной полосе $\{|y| \leq 1, |x| < \infty\}$. Стрингер неразрывно впаян в полосу перпендикулярно ее границам и нагружен парой сил P , приложенных к его концам вдоль оси стрингера (рис. 1).

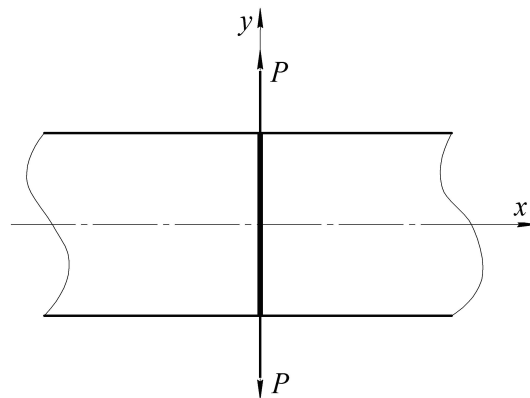


Рис. 1. Схема задачи

Будем считать, что изгибная жесткость стрингера мала и не принимается во внимание. Это допущение логично в силу симметрии задачи.

Обозначим G, t – соответственно, модуль сдвига для пластины и ее толщина, а E_1, f – соответственно, модуль упругости и площадь поперечного сечения стрингера. Коэффициенты Пуассона для стрингера и пластины будем считать одинаковыми и равными μ .

Рассмотрим условие равновесия элементарного участка стрингера dy (рис. 2).

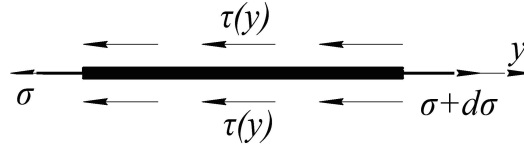


Рис. 2. Условие равновесия элемента стрингера

На этом рисунке через σ обозначены напряжения в стрингере, а через $\tau(y)$ – распределенные усилия в стрингере, создаваемые деформацией левой и правой полулопос.

В соответствии с рис. 2 имеем

$$f d\sigma = 2t\tau(y)dy. \quad (1)$$

Интегрируя (1), получим

$$f\sigma(y) = 2t \int_{-1}^y \tau(y)dy + C. \quad (2)$$

где C – произвольная постоянная интегрирования. Найдем ее. Полагая в (2) $y = 1$, получим

$$f\sigma(1) = P = 2t \int_{-1}^1 \tau(y)dy + C.$$

Но интеграл в последнем выражении, в силу симметрии задачи, равен нулю. Поэтому $C = P$.

На основании закона Гука, из (2) получим

$$\frac{E_1 f}{2Gt} V'(y) = \int_{-1}^y \tau(y)dy + \frac{P}{2t}, \quad (3)$$

где штрихом обозначена производная функции $V(y)$ – перемещения ребра в точке y . В формуле (3) через $V(y)$ обозначено смещение, умноженное на G . Поэтому в знаменателе левой части выражения (3) появился множитель G .

В силу неразрывности перемещений ребра и пластины, перемещение ребра $V(y)$ и поперечное перемещение пластины на оси полосы равны, то есть $V(y) = V(0, y)$. Поэтому

$$V'(y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \{ a_k V_k'(y) \}. \quad (4)$$

Здесь $V_k'(y)$ – функции Фадля-Папковича [2].

Если бы стрингер имел конечный поперечный размер, то показанные на рис. 2 напряжения $\tau(y)$ представляли бы собой касательные напряжения на стыках ребра и пластины. Поэтому можно написать

$$\tau(y) = (1 + \mu) \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \{ a_k \lambda_k^2 \tau_{xy}(\lambda_k, y) \}. \quad (5)$$

Когда ширина стрингера стремится к нулю, напряжения взаимодействия ребра и пластины в математическом выражении превращаются в скачок нормальных напряжений $\sigma_y(0, y)$ на линии склейки стрингера и пластины. Это вполне соответствует классическим постановкам задачи о взаимодействии ребра и пластины.

Так как $\sigma_y(\lambda_k, \pm 1) = 0$, $\forall k \geq 1$, то

$$\int_{-1}^y \tau(y) dy = -\frac{\sigma_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2}.$$

Подставляя это равенство в (3), будем иметь

$$\frac{E_1 f}{2Gt} \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \{ a_k V_k'(y) \} + (1 + \mu) \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \{ a_k \sigma_y(\lambda_k, y) \} = \frac{P}{2t}. \quad (6)$$

Учитывая, что

$$\sigma_y(x, y) = \frac{2}{1 - \mu} \left(\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} + \mu \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \right)$$

и пользуясь обычными представлениями в виде рядов Фадля-Папковича [1], [2] для входящих сюда функций, из (6) получим

$$(1 + \mu) \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \{ a_k \sigma_y(\lambda_k, y) \} = \frac{2}{1 - \mu} \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ a_k \left(\frac{V_k'(y)}{\lambda_k} + \mu U_k(y) \right) \right\}. \quad (7)$$

Но на оси y

$$U(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \{ a_k U_k(y) \} = 0. \quad (8)$$

Поэтому из (7) следует

$$(1 + \mu) \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \{ a_k \sigma_y(\lambda_k, y) \} = \frac{2}{1 - \mu} \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ a_k \frac{V_k'(y)}{\lambda_k} \right\}. \quad (9)$$

Наконец, подставляя это равенство в (6), приходим к равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ a_k V_k'(y) \left(K + \frac{2}{(1 - \mu)\lambda_k} \right) \right\} = \frac{P}{2t}, \quad (10)$$

где

$$K = \frac{E_1 f}{2Gt}. \quad (11)$$

Объединяя (8) и (10) и интегрируя один раз по y выражение (10), получим два разложения по функциям Фадля-Папковича для определения неизвестных коэффициентов разложений $a_k (k \geq 1)$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ a_k V_k(y) \left(D + \frac{2}{(1-\mu)\lambda_k} \right) \right\} = \frac{Py}{2t}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \{ a_k U_k(y) \} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Система уравнений (12) аналогична уже рассматривавшейся в статье [1]. С помощью соотношений биортогональности [2] получим из нее систему обыкновенных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_k \lambda_k M_k S_k + \overline{a_k \lambda_k M_k S_k} = V_k, & (k = 1, 2, \dots), \\ a_k \lambda_k^2 M_k + \overline{a_k \lambda_k^2 M_k} = 0, & (k = 1, 2, \dots), \end{cases} \quad (13)$$

где

$$V_k = -\frac{2}{\lambda_k^2}, \quad S_k = K + \frac{2}{(1-\mu)\lambda_k}, \quad M_k = \frac{\cos^2 \lambda_k}{\lambda_k} (k \geq 1). \quad (14)$$

Решая систему (13), найдем

$$a_k = \frac{P}{2t} \frac{V_k \overline{\lambda_k}}{\lambda_k M_k (\overline{\lambda_k S_k} - \lambda_k S_k)} \quad (k \geq 1). \quad (15)$$

Подставляя теперь найденные выражения в формулы для напряжений и перемещений, представленные в виде рядов по функциям Фадля-Папковича,

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k U(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x},$$

$$V(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k V(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x},$$

$$\sigma_x(x, y) = (1 + \mu) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k \sigma_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = (1 + \mu) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^2 \tau_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x},$$

$$\sigma_y(x, y) = (1 + \mu) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k \sigma_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x}$$

и выделяя из них нуль-ряды так, как это сделано в статье [2], получим окончательное решение задачи:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= \frac{P}{2t} \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{U(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} V_k \frac{Im(\lambda_k \bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k S_k)} \right\}, \\
V(x, y) &= \frac{P}{2t} \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{V(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} V_k \frac{Im(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k S_k)} \right\}, \\
\sigma_x(x, y) &= \frac{P(1+\mu)}{2t} \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\sigma_x(\lambda_k, y)}{M_k} V_k \frac{Im(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k S_k)} \right\}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= \frac{P(1+\mu)}{2t} \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\tau_{xy}(\lambda_k, y)}{M_k} V_k \frac{Im(\lambda_k \bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k S_k)} \right\}, \\
\sigma_y(x, y) &= \frac{P(1+\mu)}{2t} \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\sigma_y(\lambda_k, y)}{M_k \lambda_k^2} V_k \frac{Im(\bar{\lambda}_k \lambda_k^2 e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k S_k)} \right\}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Определим напряжения $\sigma(y)$ в стрингере. Перепишем формулу (10) следующим образом:

$$K \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \{ a_k V_k'(y) \} = \frac{P}{2t} - \frac{2}{1-\mu} \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ a_k \frac{V_k'(y)}{\lambda_k} \right\}. \tag{17}$$

Очевидно, что

$$\sigma(y) = \frac{E_1}{G} \frac{dV(y)}{dy} = \frac{2tK}{f} \frac{dV(y)}{dy}. \tag{18}$$

Формулу для напряжений в стрингере теперь можно получить, воспользовавшись правой или левой частями формулы (17). Предпочтительнее воспользоваться второй половиной этой формулы, так как сходимость ряда справа в (17) выше, чем ряда слева. Нужная формула, после небольших преобразований, приобретает такой вид:

$$\frac{f\sigma(y)}{P} = 1 - \frac{P}{2t} \frac{2}{1-\mu} \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ a_k \frac{V_k'(y)}{\lambda_k} \right\}. \tag{19}$$

На рис. 3 в качестве иллюстрации показан график распределения напряжений в стрингере. Считалось, что $\mu = 0.3$, $P/2t = 1$. Коэффициент, учитывающий соотношение жесткостей ребра и пластины $K = 10$.

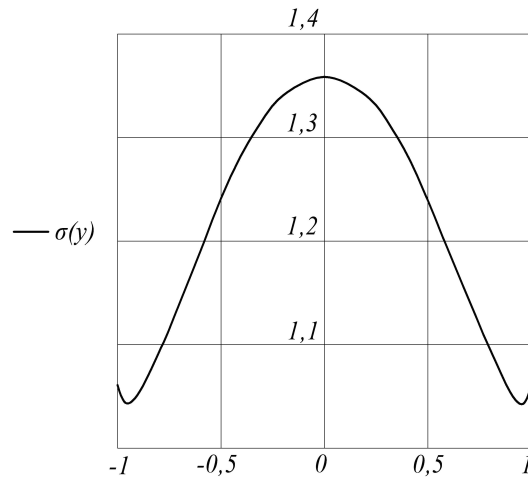


Рис. 3. Распределение напряжений в стрингере

Результаты исследований и их обсуждение. В виде явных разложений по функциям Фадля-Папковича дается решение задачи о передаче усилия от ребра жесткости (стрингера) к упругой полосе для полосы с вертикальным разрезом.

Резюме. Окончательные формулы просты и удобны для вычислений и могут быть легко использованы в инженерной практике.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Галаджиев, С. В.* Особенности напряженного состояния в конечных областях вблизи угловых точек границы / С. В. Галаджиев, О. С. Гоголева, М. Д. Коваленко, Д. В. Трубников // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17. – № 1. – С. 53–60.

[2] *Коваленко, М. Д.* Разложения по функциям Фадля-Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 5. – С. 78–98.

Меньшова Ирина Владимировна,

аспирант кафедры высшей и прикладной математики, Московский государственный открытый университет им В. С. Черномырдина, г. Москва

e-mail: pmdekanat@gmail.com

I. V. Menshova

THE LOAD TRANSFER FROM STIFFENER TO A STRIP

V. Chernomyrdin Moscow State Open University

Abstract. The exact solution of well-known problem about load transfer from stiffener to a strip is given. The solution represents extensions on the Fadde-Papkovich functions, which coefficients are given in obvious form.

Keywords: stringer, plate, load transfer, Fadde-Papkovich functions, analytical solution.

REFERENCES

- [1] *Galadzhiev, S. V.* Features of a tension in final areas near angular points of border / S. V. Galadzhiev, O. S. Gogoleva, M. D. Kovalenko, D. V. Trubnikov // *Mechanics composite materials and designs*. – 2011. – Vol.17. – No. 1. – P. 53–60.
- [2] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on functions Fadlya-Papkovich in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovsky // *Information RAS. MFB*. – 2011. – No. 5. – P. 78–98.

Menshova, Irina Vladimirovna

Postgraduate Student, Department of Higher and Applied Mathematics, V. Chernomyrdin Moscow State Open University, Moscow

e-mail: pmdekanat@gmail.com

О. В. Дудко, А. А. Лаптева, В. Е. Рагозина

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ПЛОСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ, ПО-РАЗНОМУ СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН

Аннотация. Рассматривается процесс динамического деформирования упругого материала, обладающего различным сопротивлением растяжению и сжатию. В рамках выбранной модели исследуются свойства обобщенного решения квазилинейного уравнения движения для случая одномерных плоских и сферических волн, возникающих при нестационарном воздействии на границу разномодульной упругой среды.

Ключевые слова: упругость, разномодульность, динамическое деформирование, сферические волны, плоские волны.

УДК: 539.37

Введение. В современной технике (машиностроении, кораблестроении, строительном деле, самолетостроении и т. д.) повсеместно применяются как новые, так и традиционные конструкционные материалы, которые даже в области упругих деформаций дают различный механический отклик на растяжение и сжатие. Технологическая практика обработки подобных материалов часто связана с высокоскоростным воздействием на них (штамповкой, обработкой взрывом и т. п.). Свойства таких сред, связанные с отсутствием нормальной изотропии, вносят в процессы распространения граничных возмущений определенные качественные особенности, которые следует учитывать при постановке и решении краевых задач.

Со времен Гука теория деформирования базируется на линейной аналитической зависимости напряжений от деформаций. Разложение упругого потенциала в ряд Маклорена в окрестности свободного состояния позволяет построить нелинейную математическую модель упругой среды, обладающую свойством нормальной изотропии – одинаковым сопротивлением растяжению и сжатию. Известный закон Гука соответствует первым двум слагаемым такого разложения. Для ухода от подобной идеализации упругих свойств В. П. Мясниковым и А. И. Олейниковым [1] было предложено видоизменить функцию упругого потенциала среды, разложив его в ряд по сферическим функциям, но сохранив при этом главные инварианты тензора деформаций в том же виде, какой принят при построении изотропной среды. Таким способом получена неаналитическая в нуле зависимость между напряжениями и деформациями, описывающая дилатирующие разномодульные среды. Модель Мясникова-Олейникова позволяет ставить и решать определенный класс краевых задач ударного деформирования, не выходя за рамки упругости [2]. Однако при переходе от прямоугольных декартовых координат к криволинейным потенциал Мясникова-Олейникова существенно усложняет определяющие соотношения и не позволяет воспользоваться классическим математическим аппаратом

Поступила 20.12.2012

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00360-а).

теории. Это обстоятельство заставляет искать альтернативные пути построения математических моделей разномодульных упругих сред (например, [3]), по возможности свободных от перечисленных ограничений.

Система определяющих соотношений динамического деформирования разномодульной упругой среды, условия совместности разрывов обобщенного решения. Описание процесса деформирования упругой среды будем проводить в адиабатическом приближении. Систему модельных соотношений запишем в прямоугольной декартовой системе координат, вводя при этом предположения об отсутствии массовых сил и только упругих свойствах сплошной среды, движение которой будет исследоваться:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \quad \sigma_{ij,j} = \rho(\dot{v}_i + v_j v_{i,j}), \\ v_i &= \dot{u}_i + v_j u_{i,j}, \quad \alpha_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}), \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \left(1 - 2J_1 + 2J_1^2 - 2J_2 - \frac{4}{3} J_1^3 + 4J_1 J_2 - \frac{8}{3} J_3 \right)^{1/2}, \\ J_1 &= \alpha_{kk}, \quad J_2 = \alpha_{ik} \alpha_{ki}, \quad J_3 = \alpha_{ik} \alpha_{kj} \alpha_{ji}.\end{aligned}\tag{1}$$

В соотношениях (1) σ_{ij} , e_{ij} – компоненты тензора напряжений Коши и тензора деформаций Альманси соответственно; u_i , v_i – компоненты вектора перемещений и вектора скорости перемещений точек среды; ρ_0 , ρ – плотность среды в свободном и текущем состоянии; латинским индексом после запятой обозначена частная производная функции по пространственным (эйлеровым) координатам x_i , точкой – частная производная по времени t ; δ_{ij} – символ Кронеккера.

Упругий потенциал W в системе (1) является функцией состояния и в принятом адиабатическом приближении зависит только от деформаций α_{ij} . Функция $W(\alpha_{ij})$ замыкает систему модельных соотношений и, кроме того, определяет механические свойства рассматриваемого материала. Вид $W(\alpha_{ij})$ может быть задан различными способами. Так, в [3–5] была показана возможность постулирования разномодульных свойств материала кусочно-линейными потенциалами напряжений и деформаций, в [1] использовано разложение упругого потенциала в ряд по сферическим функциям, определяющее разномодульное поведение дилатирующих сред. В данной работе воспользуемся способом, основы которого заложены в [1], но в отличие от предложенного там разложения внесем в W слагаемое с модулем первого инварианта I_1 , предполагая малость деформаций:

$$\begin{aligned}W &= \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \nu I_1 |I_1|, \\ I_1 &= e_{kk}, \quad I_2 = e_{ik} e_{ki}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).\end{aligned}\tag{2}$$

Такой вид упругого потенциала позволяет описать разномодульное поведения изотропной упругой среды, исключив из определяющих соотношений эффект взаимного влияния объемных и сдвиговых деформаций, присущий модели [1]. В (2) λ , μ – параметры Ламэ, $\nu > 0$ – упругий модуль, характеризующий наличие микродефектов в среде (или степень разрушенности материала, если рассматриваются горные породы).

В случае одноосного деформирования среды ($u_1 = u(x, t)$, $u_2 = u_3 = 0$) упругий потенциал (2) позволяет получить из соотношений (1) в прямоугольной декартовой системе координат кусочно-линейную зависимость между напряжениями $\sigma_{11} = \sigma$ и деформациями $e_{11} = e = u_{,x}$:

$$\sigma = \{\lambda + 2\mu - 2\nu \operatorname{sign}(e)\}e, \quad \operatorname{sign}(e) = \begin{cases} 1 & \text{при } e > 0 \text{ (растяжение)}, \\ -1 & \text{при } e < 0 \text{ (сжатие)}. \end{cases}\tag{3}$$

Очевидно, что в зависимости (3) коэффициент пропорциональности между σ и e имеет при растяжении и сжатии различные значения: $\rho a^2 = \lambda + 2\mu + 2\nu$ при $e < 0$, $\rho b^2 = \lambda +$

$2\mu - 2\nu$ при $e > 0$, нулевое значение деформаций $e = u_{,x}$ является особой точкой зависимости $\sigma(e)$. Константы a, b ($a > b$) представляют собой фазовые скорости уравнения движения, записанного для одномерного случая в декартовой системе координат:

$$c^2 u_{,xx} = \ddot{u}. \quad (4)$$

Таким образом, $c = a$ в областях сжатия среды, $c = b$ при растяжении. Решение уравнения движения (4) можно представить в форме Даламбера:

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad (5)$$

где неизвестные функции $f(\xi(x, t))$ и $g(\eta(x, t))$ могут быть определены для каждой конкретной краевой задачи в соответствии с заданными краевыми и начальными условиями. Свойства уравнения, подобного (4), рассматривались ранее в [6], где была описана классификация возможных разрывов его обобщенного решения.

В случае сферической симметрии, когда компоненты тензора деформаций и его инварианты выражаются только через ненулевые радиальные перемещения $u_r(r, t)$, упругий потенциал (2) позволяет записать уравнение движения точек среды, используя классический сферический оператор

$$c^2 \left(u_{r,rr} + 2 \frac{u_{r,r}}{r} - 2 \frac{u_r}{r^2} \right) = \ddot{u}_r, \quad (6)$$

и воспользоваться функционально-инвариантным решением

$$u_r = \left(\frac{\Phi(r - ct)}{r} + \frac{H(r + ct)}{r} \right)_{,r} \quad (7)$$

с неизвестными функциями $\Phi(\xi(r, t))$ и $H(\eta(r, t))$. В уравнениях (6), (7) константа c также имеет смысл фазовой скорости и принимает значения a или b в зависимости от характера деформирования. Следует отметить, что при сферической симметрии значение фазовой скорости уравнения (6) определяется не только знаком $u_{,x}$ (как в предыдущем случае одноосного деформирования), а знаком первого инварианта $I_1 = u_{r,r} + 2 \frac{u_r}{r}$ в целом.

Решения уравнений (4) и (6) могут иметь разрыв на некоторой движущейся поверхности $\Sigma(t)$. Если на такой поверхности при непрерывных перемещениях рвутся их первые производные, то по среде распространяется ударная волна, на которой обязаны выполняться динамические [7], кинематические и геометрические [8] условия совместности разрывов первого порядка. Учитывая тензорный характер этих соотношений, для удобства запишем их, предполагая малость деформаций, в прямоугольной декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} [\sigma_{ij}] \nu_j &= -\rho^+ G [v_i], & [v_i] &= -G [u_{i,j}] \nu_j, & [u_{i,j}] &= (\tau \nu_i + \gamma \mu_i) \nu_j & \text{при } [u_i] &= 0, \\ \nu_i \nu_i &= \mu_i \mu_i = 1, & \nu_i \mu_i &= 0, & [w] &= w^+ - w^-, \end{aligned} \quad (8)$$

где w^+ – значение разрывной функции непосредственно перед фронтом волны $\Sigma(t)$, w^- – сразу за ней; G – скорость продвижения поверхности $\Sigma(t)$ в направлении ее единичной положительной нормали $\bar{\nu}$; τ, γ – величины нормального и касательного к волне скачка градиента перемещений.

Если на $\Sigma(t)$ кроме перемещений непрерывными остаются еще и их первые производные, а скачком изменяются вторые производные, то на такой поверхности необходимо потребовать выполнения условий совместности второго порядка [7, 8]:

$$\begin{aligned} [\sigma_{ij,j}] &= \rho^+ [\dot{v}_i], & [\dot{v}_i] &= G^2 [u_{i,sr}] \nu_s \nu_r, & [u_{i,jk}] &= (n \nu_i + m \mu_i) \nu_j \nu_k \\ & \text{при } [u_{i,j}] &= 0, & [u_i] &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В этом случае G – скорость распространения поверхности слабого разрыва, n, m – нормальный и касательный скачки второй производной перемещений при переходе через поверхность $\Sigma(t)$.

Возникновение области постоянных перемещений при одноосном нестационарном нагружении разномодульной упругой среды. Будем называть границей L нагружаемую поверхность разномодульной упругой среды. В прямоугольной декартовой системе координат такой поверхностью будет плоская граница полупространства $x \geq 0$, а в сферической системе – внешняя граница сферы радиуса R .

Рассмотрим случай плоских одномерных поверхностей разрывов. Положим, что до начала граничного воздействия разномодульное упругое полупространство с границей L не деформировано. Пусть с момента времени $t = 0$ на границу L начинает действовать нагрузка, приводящая к движению точек граничной плоскости таким образом, что сначала полупространство подвергается сжатию, а затем с момента $t = t_1$ – растяжению по закону $u(0, t) = \varphi(t)$. Функцию $\varphi(t)$ полагаем гладкой и дважды непрерывно дифференцируемой: $\varphi(t) \geq 0$ при $0 \leq t \leq t_2$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) > 0$ при $0 \leq t < t_1$, $\varphi'(t_1) = 0$, $\varphi'(t) < 0$ при $t > t_1$ (рис. 1, а).

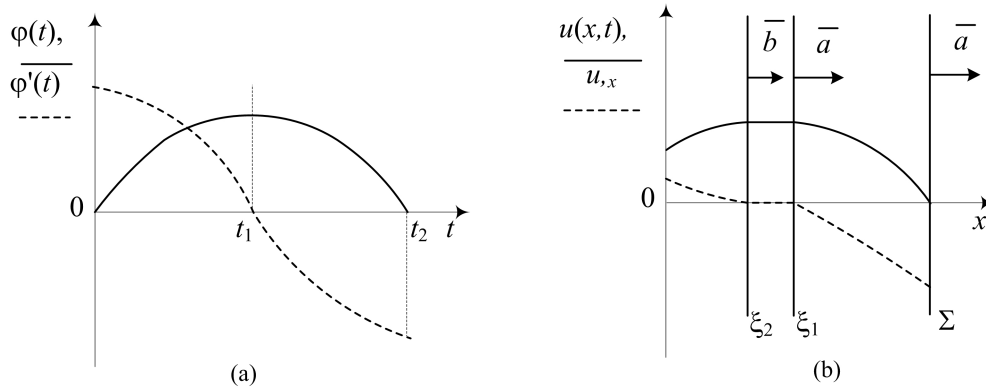


Рис. 1. Возникновение области постоянных перемещений при одноосном деформировании разномодульного упругого полупространства: (а) – краевое условие на границе полупространства; (б) – решение задачи при $t_1 \leq t \leq t_2$

Тогда в момент времени $t = 0$ от границы L отделяется ударная волна $\Sigma(t)$, которая со скоростью $G = a$ несет в недеформированное полупространство сжимающие граничные возмущения (рис. 1, б). Решение задачи в форме (5) при $0 \leq t < t_1$, согласно условиям (8) на волне $\Sigma(t)$ и заданной граничной функции перемещений $\varphi(t)$, в этом случае имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq at, \\ 0 & \text{при } x \geq at. \end{cases} \quad (10)$$

В момент времени $t = t_1$ на границе L возникают два слабых разрыва: быстрый $\xi_1(t)$ со скоростью распространения a и координатой фронта $x = a(t - t_1)$ и медленный $\xi_2(t)$ со скоростью b и координатой фронта $x = b(t - t_1)$. Поскольку скорость быстрого слабого разрыва больше скорости медленного (в работе принято $a > b$), то, продвигаясь в полупространство, они образуют между собой слой, ширина которого увеличивается с течением времени при $t > t_1$ (рис. 1, б). Решение задачи в областях между волновыми фронтами и границей полупространства, согласно представлению (5), условиям на простой волне (9) и заданной

граничной функции $\varphi(t)$, при $t \geq t_1$ будет иметь вид

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq b(t - t_1), \\ \varphi(t_1) = \text{const} & \text{при } b(t - t_1) \leq x \leq a(t - t_1), \\ \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) & \text{при } a(t - t_1) \leq x \leq at, \\ 0 & \text{при } x \geq at. \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, между слабыми волнами $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ возникает недеформированный слой $b(t - t_1) \leq x \leq a(t - t_1)$, внутри которого, согласно полученному решению (11), скорость перемещений точек среды равна нулю (т. е. среда движется как жесткое целое). Недеформированный слой постоянных перемещений ($u(x, t) = \text{const}$, $u_{,x} = 0$ при $b(t - t_1) \leq x \leq a(t - t_1)$) является переходным между областью сжатия ($u_{,x} < 0$ при $a(t - t_1) \leq x \leq at$) и областью растяжения ($u_{,x} > 0$ при $0 \leq x \leq b(t - t_1)$).

Возникновение сферического слоя постоянной плотности при всестороннем нагружении разномодульной сферы. Рассмотрим теперь аналогичную задачу, но теперь нагружаемой границей L будет являться поверхность сферы радиуса R . Считаем этот радиус достаточно большим, чтобы в пределах времени нагружения не рассматривать эффекты, которые могут возникнуть при достижении граничными возмущениями центра сферы $r = 0$. Для задания граничной нагрузки по типу «сжатие-растяжение» функцию перемещений $u_r(0, t) = \varphi(t)$ на границе L необходимо положить отрицательной, поскольку распространение граничных возмущений будет происходить в сторону уменьшения значений радиуса r : $\varphi(t) \leq 0$ при $0 \leq t \leq t_2$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) < 0$ при $0 \leq t < t_1$, $\varphi'(t_1) = 0$, $\varphi'(t) > 0$ при $t > t_1$ (рис. 2, а).

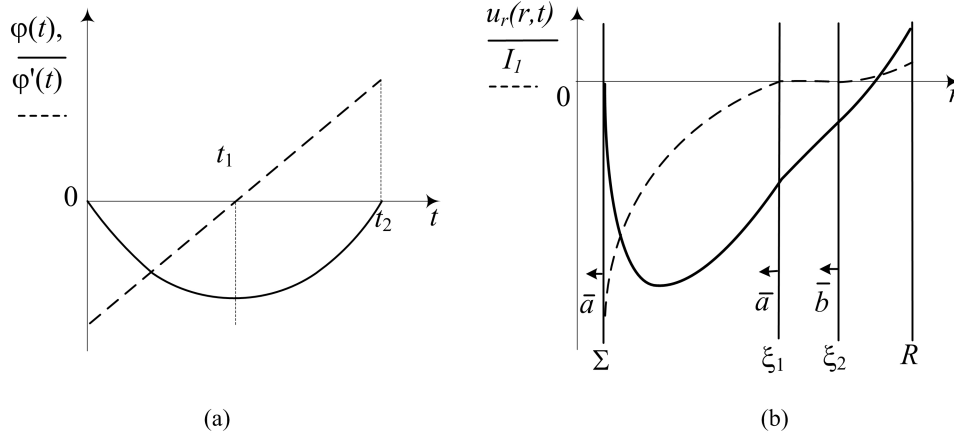


Рис. 2. Возникновение сферического слоя постоянной плотности в случае одномерных сходящихся сферических волн: (а) – краевое условие на границе сферы; (б) – решение задачи при $t_* < t < t_2$

Для того, чтобы продемонстрировать особенности решения задачи в данной постановке, конкретизируем вид функции $\varphi(t)$. Пусть $\varphi(t) = v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2}$, $v_0 < 0$ и $a_0 > 0$. В результате такого воздействия в момент времени $t = 0$ от границы сферы L отделяется ударная волна $\Sigma(t)$ со скоростью $G = a$ и координатой фронта $r = R - at$. Перед фронтом среда не деформирована, за волной происходит сжатие среды (рис. 2, б). Решение задачи, записанное в форме (7) при

$0 \leq t < t_1$, в этом случае имеет вид

$$u_r(r, t) = \begin{cases} \frac{2V_0at + A_0(R^2 + a^2t^2 - r^2) + 2(r-R)(V_0 + A_0R)e^{\frac{r-R+at}{2}}}{2r^2} & \text{при } R-at \leq r \leq R, \\ 0 & \text{при } 0 < r \leq R-at, \end{cases} \quad (12)$$

$$V_0 = a^{-1}v_0R^2, \quad A_0 = a^{-2}a_0R^2.$$

В момент времени $t = t_1$ на сферической границе L происходит смена характера воздействия со сжимающего на растягивающее. При этом знак первого инварианта тензора деформаций I_1 все еще остается отрицательным, т. е. продолжается дальнейшее сжатие среды и перемещения за фронтом волны сжатия $\Sigma(t)$ по-прежнему вычисляются согласно решению (12). Выход первого инварианта деформаций I_1 на нулевое значение происходит в момент времени $t_* = \frac{R}{a} \ln \frac{A_0R}{A_0R+v_0} > t_1$. Такую реакцию разномодульной упругой среды в случае сферических волн назовем *эффектом запаздывания*. В момент времени $t = t_*$ от внешней границы L отделяются и начинают двигаться к центру сферы две слабые волны: $\xi_1(t)$ со скоростью распространения a и координатой фронта $r = R - a(t - t_*)$ и $\xi_2(t)$ со скоростью b и фронтом $r = R - b(t - t_*)$. Между слабыми волнами $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ образуется сферический слой, где инвариант $I_1 = 0$. Поскольку именно первый инвариант отвечает за изменение объемных деформаций, слой $R - a(t - t_*) \leq r \leq R - b(t - t_*)$, где значение I_1 равно нулю, будет областью постоянной плотности ($\rho/\rho_0 = 1$). При этом следует отметить, что равенство нулю первого инварианта $I_1 = u_{r,r} + 2\frac{u_r}{r}$ в целом не означает, что деформации в этом слое отсутствуют, как это было в случае плоских одномерных волн. За волной $\xi_2(t)$ среда переходит в растянутое состояние ($I_1 > 0$) (рис. 2, б). Решение задачи между полученными волновыми фронтами $\Sigma(t)$, $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ и границей сферы $r = R$ при $t > t_*$ имеет вид:

$$u_r(r, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < r \leq R-at, \\ \frac{\Phi'(r-R+at) - \Phi(r-R+at)}{r} & \text{при } R-at \leq r \leq R-a(t-t_*), \\ \frac{R^2\varphi'(t_*) + a(V_0 + A_0at_*)(t-t_*)}{r^2} & \text{при } R-a(t-t_*) \leq r \leq R-b(t-t_*), \\ \frac{F'(r-R+b(t-t_*))}{r} - \frac{F(r-R+b(t-t_*))}{r^2} & \text{при } R-b(t-t_*) \leq r \leq R, \end{cases}$$

где введены обозначения

$$\Phi(\eta) = -V_0(\eta+at) - \frac{A_0}{2}(\eta^2 + 2R\eta + 2R^2) + (V_0R + A_0R^2)e^{\frac{\eta}{R}},$$

$$F(\theta) = D_0 + D_1\theta + D_2\theta^2 + S_0e^{\frac{\theta}{R}}, \quad S_0 = R^4\frac{a_0}{b^2},$$

$$D_0 = -R^2\varphi(t_*) - \frac{R^3}{b}\varphi'(t_*) - \frac{R^4}{b^2}\varphi''(t_*), \quad D_1 = -\frac{R^2}{b}\varphi'(t_*) - \frac{R^3}{b^2}\varphi''(t_*), \quad D_2 = -\frac{R^2\varphi''(t_*)}{2b^2}.$$

Заключение. Представленные здесь решения краевых задач с одномерными плоскими и сферическими волнами показали принципиальное отличие процесса распространения граничных возмущений в кусочно-линейной разномодульной среде от известных результатов линейной теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мясников, В. П. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разносопротивляющейся среды / В. П. Мясников, А. И. Олейников // Доклады АН СССР. – 1992. – Т. 322. – № 1. – С. 57–60.
- [2] Дудко, О. В. О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // О. В. Дудко, А. А. Лаптева, К. Т. Семенов // Дальневосточный математический журнал. – 2005. – Т. 6. – № 1–2. – С. 94–105.
- [3] Буренин, А. А. К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // А. А. Буренин, В. М. Ярушина // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. статей к 75-летию Е. И. Шемякина / под ред. Д. Д. Ивлева и Н. Ф. Морозова. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – С. 100–106.
- [4] Ивлев, Д. Д. К построению теории упругости / Д. Д. Ивлев // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 138. – № 6. – С. 1321–1324.
- [5] Быковцев, Г. И. Общие свойства уравнений нелинейной теории упругости при кусочно-линейных потенциалах / Г. И. Быковцев // Прикл. матем. и мех. – 1996. – Т. 6. – Вып. 3. – С. 505–515.
- [6] Маслов, В. П. Общая теория уравнений движения разномодульной упругой среды / В. П. Маслов, П. П. Мосолов // Прикл. матем. и мех. – 1985. – Т. 49. – Вып. 3. – С. 419–437.
- [7] Томас, Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М. : Мир, 1964. – 308 с.
- [8] Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.

Дудко Ольга Владимировна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: dudko@iacp.dvo.ru

Лаптева Анастасия Александровна,

младший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: lanastal@mail.ru

Рагозина Виктория Евгеньевна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: ragozina@vlc.ru

O. V. Dudko, A. A. Lapteva, V. E. Ragozina

ABOUT THE OCCURRENCE OF PLANE AND SPHERICAL WAVES IN AN ELASTIC MEDIUM, DIFFERENT RESISTANCE TO TENSION AND COMPRESSION

Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences

Abstract. The process of dynamic deformation of an elastic material with different resistance to tension and compression are considered. The properties of generalized solutions of quasi-linear equations of motion for the case of one-dimensional plane and spherical waves generated by an unsteady impact on multimodulus elastic medium's boundary are investigated in the framework of the chosen model.

Keywords: elasticity, multimodulus, dynamic deformation, spherical waves, plane waves.

REFERENCES

- [1] *Myasnikov, V. P.* The main general relations of the model isotropic elastic different resistance medium / V. P. Myasnikov, A. I. Oleynikov // DAN SSSR. – 1992. – Vol. 322. – No. 1. – P. 57–60.
- [2] *Dudko, O. V.* About distribution of flat one-dimensional waves and their interaction with barrier in the media differently reacting to a stretching and compression / O. V. Dudko, A. A. Lapteva, K. T. Semyonov // Far Eastern Mathematical Journal. – 2005. – Vol. 6. – No. 1–2. – P. 94–105.
- [3] *Burenin, A. A.* To modeling the deformation of materials with different resistance to tension and compression // A. A. Burenin, V. M. Yarushina // Problems in mechanics of deformable bodies and rocks. Collection of articles on the 75th anniversary of the E. I. Shemyakin / Edited by D. D. Ivlev and N. F. Morozov. – M. : FITHMATLIT, 2006. – P. 100–106.
- [4] *Ivlev, D. D.* On the construction of the elasticity theory / D. D. Ivlev // DAN SSSR. – 1961. – Vol. 138. – No. 6. – P. – 1321–1324.
- [5] *Bykovtsev, G. I.* General characteristics of the equations of the non-linear theory of elasticity at piecewise linear potentials / G. I. Bykovtsev // PMM. – 1996. – Vol. 6, Issue 3. – P. 505–515.
- [6] *Maslov, V. P.* General theory of motion equations of an elastic multimodulus medium / V. P. Maslov, P. P. Mosolov // PMM. – 1985. – Vol. 49. – Issue 3. – P. 419–437.
- [7] *Tomas, T.* Plastic Flow and Fracture in Solids / T. Y. Thomas. – M. : Mir, 1961. – 267 p.
- [8] *Bykovtsev, G. I.* Theory of plasticity / G. I. Bykovtsev, D. D. Ivlev. – Vladivostok : Dalnauka, 1998. – 528 p.

Dudko, Olga Vladimirovna

Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Lapteva, Anastasia Alexandrovna

Junior Researcher, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Ragozina, Victoria Evgenevna

Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok

АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОБ УДАРНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН

Аннотация. Приведено решение автомодельной задачи об ударном нагружении границы упругопластического полупространства, допускающего значительный уровень необратимых деформаций. Получено, что пластические деформации в рамках используемой модели больших упругопластических деформаций могут накапливаться внутри простых волн двух типов. Причем скорость распространения одной из них меньше скорости распространения квази-продольной упругой ударной волны, а скорость распространения другой меньше скорости квазипоперечной ударной волны.

Ключевые слова: упругопластичность, ударные волны, волны Римана, автомодельные задачи.

Процессы распространения возмущений в механике твердого тела изучались достаточно широко в рамках нелинейной теории упругости, что отображено в работах различных авторов [1], [6], [7]. Изучение подобных процессов в моделях упругопластических тел проводилось ранее в основном для малых деформаций [2], [5], [8]. Это связано с тем, что при построении упругопластической теории, допускающей большие деформации, одной из принципиальных трудностей является выбор разделения опытно наблюдаемых полных деформаций на экспериментально не измеряемые обратимую (упругую) и необратимую (пластическую) составляющие. До сих пор не существует общепринятого мнения по этому поводу, и модели больших упругопластических деформаций принципиально различаются именно таким разделением.

Здесь будет использоваться теория больших упругопластических деформаций, построенная в рамках теории пластического течения. Подобных моделей создано за последнюю половину века достаточно много [9], [10], [12], хотя общепринятой модели до настоящего времени не существует. Будем использовать в дальнейшем модель, разработанную на Дальнем востоке, представленную в статьях Г. И. Быковцева, В. П. Мясникова, А. А. Буренина, Л. В. Ковтанюк [3], [4], [11].

В представленной работе изучается процесс накопления необратимых (пластических) деформаций в простой волне в случае, когда последние полагаются большими, на примере одномерной автомодельной задачи. Несмотря на то, что автомодельные задачи являются наиболее простыми из динамических, они позволяют получить качественную картину описания происходящих процессов.

Основные соотношения. Для описания среды, допускающей большие упругопластические деформации, принята математическая модель, подробно описанная в [3], [4], поэтому здесь приведем только необходимые итоговые зависимости. В качестве тензора деформаций выберем тензор деформаций Альманси:

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}, \quad (1)$$

где u_i – компоненты вектора перемещений; индексом после запятой обозначена производная по соответствующей пространственной переменной, e_{ij} и p_{ij} – упругие и пластические деформации соответственно. Связь между компонентами тензора напряжения и упругими деформациями задается с помощью формулы Мурнагана:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - 2e_{kj}), \\ W &= \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2^+ l I_1 I_2 + m I_1^3 + n I_3 + \dots,\end{aligned}\quad (2)$$

где $W = W(e_{ij})$ – упругий потенциал, I_1, I_2, I_3 – инварианты тензора упругих деформаций e_{ij} , λ и μ – параметры Ламе, l, m, n – упругие модули третьего порядка, ρ и ρ_0 – плотность среды в текущем и свободном состоянии.

Для того чтобы описать изменение напряжений в областях, где деформации и напряжения непрерывные и дифференцируемые функции, воспользуемся законом сохранения импульса:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{dv_i}{dt}, \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j u_{i,j}, \quad (3)$$

Здесь v_i – компоненты вектора скорости. Изменение тензоров обратимых и необратимых деформаций в области пластического течения:

$$\begin{aligned}\frac{dp_{ij}}{dt} &= \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj} - p_{ik} \varepsilon_{kj}^p + r_{ik} p_{kj} - p_{ik} r_{kj}, \\ \frac{de_{ij}}{dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} (e_{ij} v_{k,j} + v_{k,i} e_{kj} - r_{ij} e_{kj} + e_{ik} r_{kj} - \varepsilon_{ij}^p e_{kj} + e_{ik} \varepsilon_{kj}^p),\end{aligned}\quad (4)$$

где r_{ij} – кососимметричный тензор с компонентами:

$$\begin{aligned}r_{ij} &= w_{ij} + A^{-1} \left\{ B^2 (\varepsilon_{ik} e_{kj} - e_{ik} \varepsilon_{kj}) + B^2 (\varepsilon_{ik} e_{km} e_{mj} - e_{ik} e_{km} \varepsilon_{mj}) + \right. \\ &\quad \left. + e_{ik} \varepsilon_{km} e_{ms} e_{sj} - e_{ik} e_{km} e_{ms} \varepsilon_{sj} \right\}, \\ A &= 8 - 8L_1 + 3L_1^2 - L_2 - \frac{1}{3}L_1^3 + \frac{1}{2}L_3, \quad B = 2 - L_1, \\ L_1 &= e_{ii}, \quad L_2 = e_{ij} e_{ji}, \quad L_3 = e_{ij} e_{jk} e_{ki}, \\ w_{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}).\end{aligned}\quad (5)$$

Скорости пластического деформирования согласно ассоциированному закону пластического течения:

$$\varepsilon_{ij}^p = \psi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, p_{ij}, \chi_{ij}) = k, \quad (6)$$

χ_{ij} – параметры истории деформирования.

Постановка задачи об ударе жестким телом по полупространству. Рассмотрим задачу об ударе жестким телом по упругопластическому полупространству. Выберем систему координат таким образом, что ось x_2 будет направлена по границе полупространства, а ось x_1 направлена вглубь тела по направлению нормали к границе (рис. 1)

Полагается, что среда изначально находится в свободном состоянии при $x_1 > 0$. Далее происходит удар по границе $x_1 = 0$, соответственно на границе мгновенно изменяются напряженное состояние, в результате чего по среде начинают распространяться возмущения.

В рассматриваемом случае движение среды одномерно, т. е.

$$u_1 = u_1(x_1, t), \quad u_2 = u_2(x_1, t), \quad u_3 = 0. \quad (7)$$

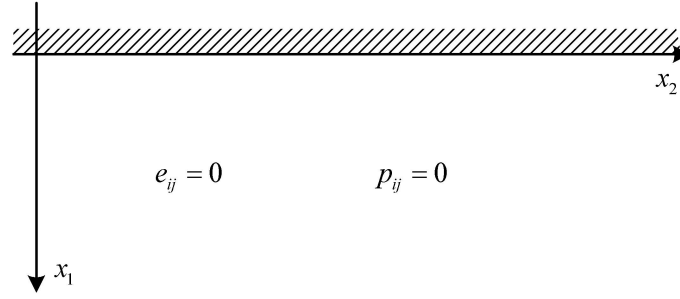


Рис. 1.

Введем автомодельную переменную следующего вида:

$$\xi = \frac{x_1}{c_1 t}. \quad (8)$$

Здесь $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, и положим, что компоненты вектора перемещения выражаются зависимостями:

$$u_1 = c_1 t T(\xi), \quad u_2 = c_1 t \Theta(\xi), \quad u_3 = 0, \quad (9)$$

где T и Θ – компоненты безразмерного вектора перемещений в координатном пространстве. Отметим, что согласно соотношениям (11) и (9)

$$u_{1,1} = T'(\xi), \quad u_{2,1} = \Theta'(\xi),$$

$$v_1 = \dot{u}_1 = \dot{c}_1 (T - T'\xi), \quad v_2 = \dot{u}_2 = \dot{c}_1 (\Theta - \Theta'\xi).$$

Поскольку решается задача ударной нагрузки, то изменение упругих деформаций будет осуществляться на ударных волнах. Рассмотрим возможности возникновения ударных волн в случае одномерного автомодельного движения. Пусть в упругопластической среде распространяется поверхность $\Sigma(t)$ разрывов обратимых деформаций. Положение поверхности в любой момент времени укажем с помощью зависимостей

$$x_i = x_i(y^1, y^2, t).$$

Поверхностные координаты y^β ($\beta = 1, 2$) будем полагать ортогональными. В каждой точке поверхности $\Sigma(t)$, где определена единственная нормаль с компонентами ν_i ($\nu_i \nu_i = 1$), имеем $\nu_i x_{i,\beta} = 0$. Разрывы компонент тензора градиента перемещений представимы в виде

$$[u_{i,j}] = \tau \nu_i \nu_j + g^{\alpha\beta} \tau_\alpha x_{i,\beta} \nu_j = \tau \nu_i \nu_j + \tau^\beta x_{i,\beta} \nu_j = (\tau \nu_i + \gamma \mu_i) \nu_j, \quad (10)$$

$$\tau = [u_{k,k}], \quad \gamma^2 = \tau^\beta \tau_\beta, \quad \mu_i = \tau^\beta \gamma^{-1} x_{i,\beta}, \quad \mu_i \mu_i = 1, \quad \mu_i \nu_i = 0.$$

В (10) $g^{\alpha\beta}$ – контравариантные компоненты метрического тензора поверхности, такие, что $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$ и $g_{\beta\gamma} = x_{i,\beta} x_{i,\gamma}$. Единичные векторы ν_i и μ_i определяют плоскость поляризации ударной волны $\Sigma(t)$ в рассматриваемый момент времени. Величины τ и γ следует называть продольной и поперечной интенсивностями разрыва на $\Sigma(t)$. Разрыв величины в (10) обозначен квадратными скобками. Для определенности полагаем, что $[a] = a^+ - a^-$, где a^+ – значение разрывной на $\Sigma(t)$ величины, вычисленное перед $\Sigma(t)$, a^- – значение этой же величины непосредственно за $\Sigma(t)$. Представление (10) позволяет записать следующие зависимости

для разрывов полных деформаций d_{ij} и скоростей движения частиц среды v_i :

$$\begin{aligned} [d_{ij}] &= a_{ij}\tau + b_{ij}\gamma + c_{ij}\gamma^2, \\ [v_i] &= -G\tau(1 - G^{-1}v_j\nu_j - \tau)\nu_i - G(1 - \tau)\gamma\mu_i - G(\tau\nu_k + \gamma\mu_k)u_{i,k}, \\ a_{ij} &= \left(1 + \frac{\tau}{2}\right)\nu_i\nu_j - \frac{1}{2}(u_{k,i}\nu_j + u_{k,j}\nu_i)\nu_k, \\ 2b_{ij} &= \mu_i\nu_j + \mu_j\nu_i - (u_{k,i}\nu_j + u_{k,j}\nu_i)\mu_k, \quad 2c_{ij} = \nu_i\nu_j. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) знаки "плюс" у величин, вычисляемых перед $\Sigma(t)$, опущены, поскольку в дальнейшем будут встречаться только такие величины и интенсивности разрывов, через G обозначена скорость движения поверхности разрывов.

Динамические условия совместности разрывов, следующие из закона сохранения импульса, запишем в виде

$$[\sigma_{ij}]\nu_i = \rho(v_k\nu_k - G)[v_i]. \quad (12)$$

Из уравнений (12) в случае плоского автомодельного движения можно получить следующую систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} A\tau + B\gamma &= 0, \\ C\tau + D\gamma &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} A &= f_{ij}a_{ji} + \rho(v_k\nu_k - G)\{G\tau + v_s\nu_s - Gu_{i,j}\nu_i\nu_j\}, \\ B &= f_{ij}b_{ji} + \rho G(v_k\nu_k - G)u_{i,j}\mu_j\nu_i, \\ C &= \rho(2G - v_k\nu_k)v_s\nu_s - \rho G\tau(v_k\nu_k - G), \\ D &= f_{ij}c_{ji}, \quad q_{ij} = 2\mu RN_{ijkl}a_{lk} - \rho Gu_{i,j}(v_k\nu_k - G), \\ n_{ij} &= 2\mu RN_{ijkl}b_{lk}, \quad m_{ij} = 2\mu RN_{ijkl}c_{lk}, \\ h_{ij} &= \rho Gu_{i,j}(v_k\nu_k - G), \quad f_{ij} = RN_{klji}(\lambda\delta_{kl} + 2\mu\nu_k\nu_l). \end{aligned}$$

Если считать известными предварительные деформации, движение перед $\Sigma(t)$, то (13) представит собой систему двух скалярных уравнений относительно неизвестных G , τ , γ . Нетривиальное решение системы (13), необходимым условием которого является равенство нулю определителя $AD - BC = 0$, позволяет определить положение поверхности ударной волны и соответственно вычислить скорость ее распространения. Так же, зная одну из составляющих волнового вектора разрыва τ или γ , можем из уравнений системы вычислить другую. В результате система (13) описывает два типа ударных волн: квазипродольную и квазипоперечную.

Поскольку рассматривается плоская деформация среды, т. е. σ_{33} является главным напряжением. Тогда для главных напряжений, имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \\ \sigma_3 &= \sigma_{33}. \end{aligned} \quad (14)$$

Предел текучести запишем, используя условие пластичности треска

$$f = \frac{1}{2} \max |\sigma_i - \sigma_j| = k, \quad (15)$$

в нашем случае это:

$$f = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2k.$$

Используя соотношения (4) найдем зависимость $\psi = f(e_{ij}, T', T'', \Theta', \Theta'', e'_{ij})$.

Для этого распишем, $\frac{de_{11}}{dt} - \frac{de_{22}}{dt}$, заменяя ε^p_{ij} , используя формулу (6), (15) и (12), расписав напряжения, используя формулу Мурнагана, r_{ij} по формуле (14) и заменяя производную по времени на производную по автомодельной переменной. Таким образом, получаем $\psi = f(e_{ij}, T', T'', \Theta', \Theta'', e'_{ij})$. Расписать ее в явном виде не представляется возможным из-за ее объема.

Используя продифференцированный тензор деформации Альманси, заменяя производные пластических деформаций по формуле (2) и уравнение движения (3), получаем систему пяти дифференциальных уравнений с пятью неизвестными вида

$$\begin{pmatrix} F_1(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \\ \dots \\ F_5(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T'' \\ \Theta'' \\ e'_{11} \\ e'_{21} \\ e'_{22} \end{pmatrix} = 0. \quad (16)$$

Тривиальное решение системы, когда $T'', \Theta'', e'_{11}, e'_{21}, e'_{22}$ равны нулю, описывает области, где деформации и скорости будут постоянными величинами.

Нетривиальное решение система допускает, если

$$\det \begin{pmatrix} F_1(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \\ \dots \\ F_5(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \end{pmatrix} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, для описания нетривиального решения из системы (16) получаем следующую:

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} F_1(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \\ \dots \\ F_5(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \end{pmatrix} = 0, \\ d'_{11} = T'' - (T'' + \Theta''), \\ \sigma'_1 - \sigma'_2 = 0, \\ \sigma_{11,1} = \rho \frac{dv_1}{dt}, \\ \sigma_{21,1} = \rho \frac{dv_2}{dt}, \end{cases} \quad (18)$$

которая описывает слой пластического течения, где деформации, напряжения, скорости перемещений точек среды не являются постоянными. Здесь второе уравнение – производная от тензора деформации Альманси, третье – производная от предела текучести, а четвертое и пятое – уравнения движения. Таким образом, получается замкнутая система. Решение (18) описывает область, в которой напряжение, деформации и скорости изменяются непрерывно. Данные области называются простыми волнами.

Из проведенных численных расчетов, было установлено, что возможно существование двух решений, каждое из которых описывает слой пластического течения. Причем, большая скорость распространения слоя находится между значениями скоростей квазипродольной и квазипоперечной упругих волн, а меньшая – за скоростью квазипоперечной упругой волны.

Численное решение. Таким образом, возмущения в результате удара по границе полупространства $x_1 = 0$ (рис. 2) по среде начнут распространяться посредством различных волн, причем ударные волны будут нести изменение упругих деформаций, а изменение пластических деформаций осуществляться на простых волнах Римана, то есть в некотором слое, на рис. 2 это области $(\xi^+; \xi^-)$. Из полученных результатов следует, что возможно существование

двух простых волн: одна из них располагается между квазипродольной и квазипоперечной ударными волнами (ξ_1^+ ; ξ_1^-), а другая – между квазипоперечной ударной волной и границей упругопластического полупространства (ξ_2^+ ; ξ_2^-).

В процессе решения конкретной краевой задачи возможны случаи с различными волновыми картинками (в зависимости от выполнения условия пластичности в соответствующей области), когда возмущения распространяются посредством только ударных упругих волн, пластическое течение начинается только в одной области (одна простая волна (рис. 2, *b*)), пластическое течение возникает в двух областях (рис. 2, *a*).

Приведем пример решения для случая с простой волной, близкой к границе полупространства ξ_2 , пластическое течение возникает в слое, расположенном за квазипоперечной упругой ударной волной (рис. 2, *b*).

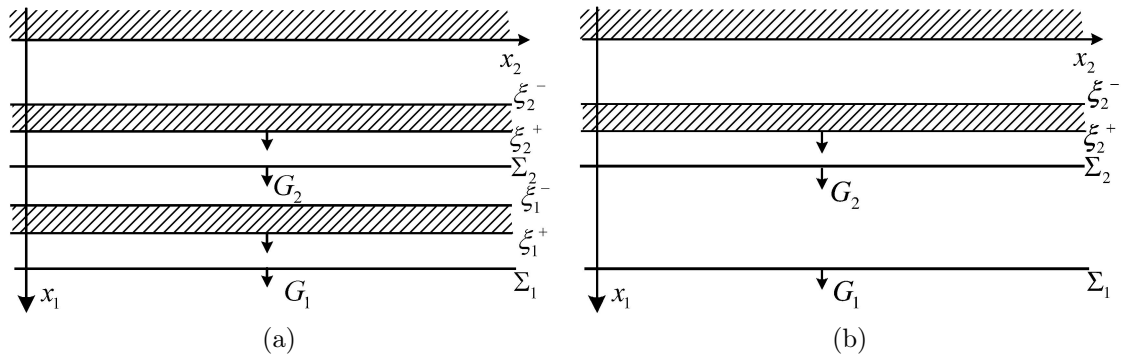


Рис. 2

Данное решение получено при следующих граничных условиях: $u_{1,1} = 0.02$ и $u_{2,1} = 0.03$, и безразмерных параметрах материала $\lambda = 0.5$, $\mu = 0.25$. Предварительные пластические деформации были выбраны равными нулю.

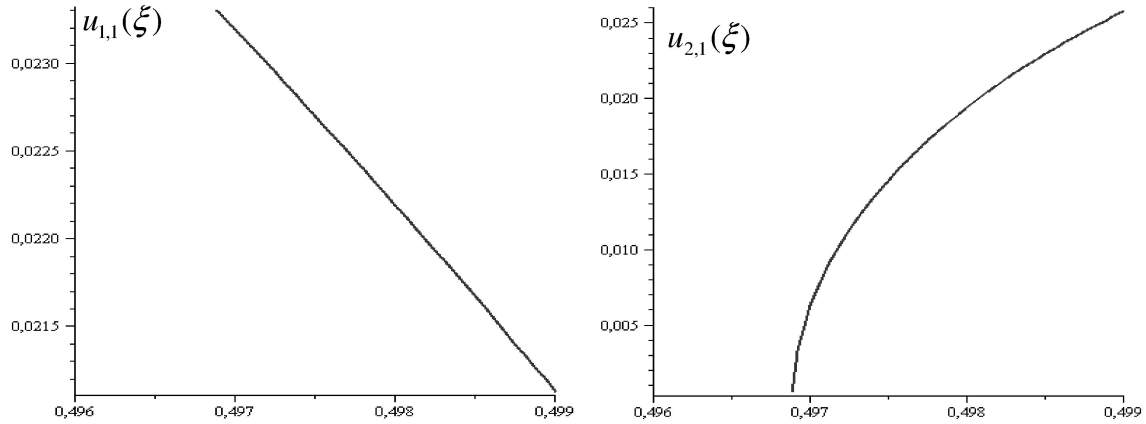


Рис. 3

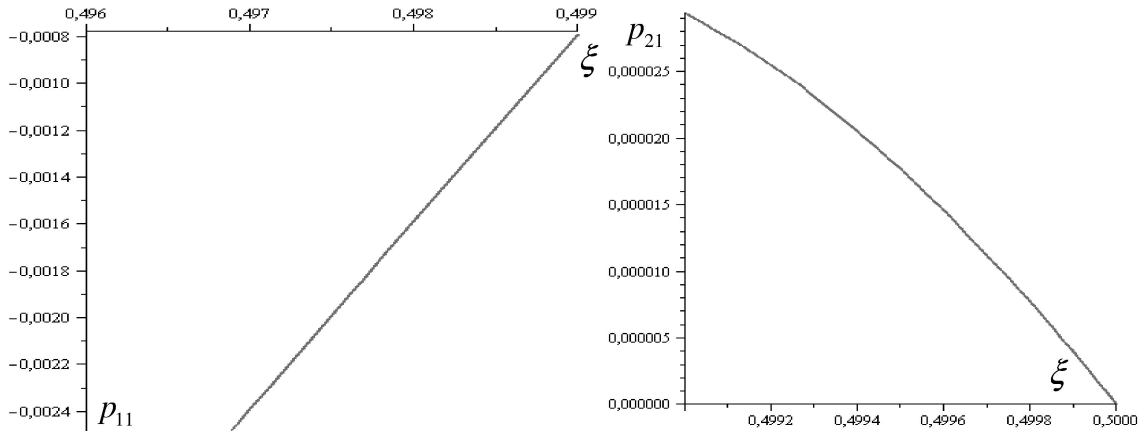


Рис. 4

На (рис. 3) изображена зависимость компонент градиента вектора перемещений от авто-модельной переменной ξ , а на (рис. 4) показан рост пластических деформаций p_{ij} от авто-модельной переменной внутри простой волны (ξ_2^+ ; ξ_2^-).

Из представленных результатов видно, что пластические деформации накапливаются внутри простых волн, причем скорости распространения их меньше, чем скорости соответствующих им упругих ударных волн, что согласуется с классическими результатами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Агапов, И. Е. О соударении двух нелинейно-упругих тел с плоскими границами / И. Е. Агапов, А. А. Буренин, А. В. Резунов // Прикладные задачи механики деформируемых сред : сб. статей. – Владивосток : ДВО АН СССР. – 1990. – С. 206–215.
- [2] Блейх, Г. Г. Плоские волны в упругопластическом полупространстве, вызванные совместным действием нормальной и касательной поверхностных нагрузок / Г. Г. Блейх, Дж. Нельсон // ПММ. – 1966. – № 1. – С. 145–156.
- [3] Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Доклады РАН. – 1996. – Т. 347. – № 2. – С. 199–201.
- [4] Буренин, А. А. Упругие эффекты при интенсивном необратимом деформировании / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток : Изд-во ДВГТУ, 2011. – 270 с.
- [5] Быковцев, Г. И. Автомоделные решения уравнений динамики идеального упругопластического тела при условии пластичности Треска / Г. И. Быковцев, А. В. Колокольчиков, П. Н. Сыгуров // ЖПМТФ. – 1984. – № 6.
- [6] Куликовский, А. Г. Автомоделная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова // ПММ. – 1985. – Т. 49. Вып. 2. – С. 284–291.
- [7] Куликовский, А. Г. Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. – М. : Московский лицей, 1998. – 412 с.
- [8] Ковшов, А. Н. О преломлении упругой волны в упругопластическое полупространство / А. Н. Ковшов // МТТ. – 1972. – № 6. – С. 82–88.
- [9] Lee, E. H. Elastic-plastic deformation at nit strains / E. H. Lee // Trans ASME : J. Appl. Mech. – 1969. – Vol. 36. – No. 1. – P. 1–6.
- [10] Левитас, В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении / В. И. Левитас. – Киев : Наукова думка, 1987. – 232 с.

[11] *Мясников, В. П.* Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях / В. П. Мясников // Вестник ДВО РАН. – 1996. – № 4. – С. 8–13.

[12] *Роговой, А. А.* Определяющие соотношения для конечных упруго–неупругих деформаций / А. А. Роговой // Прикладная механика и техническая физика. – 2005. – Т. 46. – № 5. – С. 138–149.

Манцыбора Александр Анатольевич,

кандидат физико-математических наук, Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: manzubor@iacp.dvo.ru

Русанов Максим Михайлович,

аспирант, Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: maxprimat@mail.ru

A. A. Mantsybora, M. M. Rusanov

AUTOMODEL PROBLEM ABOUT STRESS DEFORMATION ELASTICPLASTIC BODY

Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences

Abstract. The solution of the automodel problem of elasticplastic half-space boundary shock loading with large level of irreversible deformation was shown. Within the model used large elasticplastic deformations, the plastic deformations can grow inside two types of simple wave. And the speed of propagation of one of them less quasilongitudinal elastic shock wave propagation and other less speed quasitransverse elastic shock wave.

Keywords: elasticplastic, shock wave, Riman wave, automodel problem.

REFERENCES

- [1] *Agapov, I. E.* On the collision of two nonlinear elastic body with the flat boundaries / I. E. Agapov, A. A. Burenin, A. V. Rezun // Applied problems of mechanics of deformable environments : coll. articles. – Vladivostok : DVO AS USSR, 1990. – P. 206–215.
- [2] *Bleich, G. G.* Plane waves in elasticplastic halfspace caused by the combined action of normal and tangent surface loads / G. G. Bleich, J. Nelson // AMM. – 1966. – Vol. 1. – P. 145–156.
- [3] *Burenin, A. A.* About simple model of elasticplastic medium at finite strains / A. A. Burenin, G. I. Bykovtsev, L. V. Kovtanyuk // Reports RAS. – 1996. – Vol. 347. – No. 2. – P. 199–201.
- [4] *Burenin, A. A.* Elastic effects under intensive irreversible deformation / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk. – Vladivostok : Publishing House of FESTU, 2011. – 270 p.
- [5] *Bykovtsev, G. I.* Automodel solutions of equations of ideal elastoplastic body at Treska condition / G. I. Bykovtsev, A. V. Bells, P. N. Sygurov // JAMTP. – 1984. – No. 6.
- [6] *Kulikovskiy, A. G.* Automodel problem of loading on elastic half-space boundary / A. G. Kulikovskiy, E. I. Sveshnikova // AMM. – 1985. – Vol. 49. – Rel. 2. – P. 284–291.
- [7] *Kulikovskiy, A. G.* Nonlinear waves in elastic media / A. G. Kulikovskiy, E. I. Sveshnikova. – M. : Moskov litsey lyceum, 1998. – 412 p.
- [8] *Kovshov, A. N.* About refraction of elastic waves in elasticplastic half-space / A. N. Kovshov // MFB. – 1972. – No. 6. – P. 82–88.
- [9] *Lee, E. H.* Elastic-plastic deformation at nit strains / E. H. Lee // Trans ASME : J. Appl. Mech. – 1969. – Vol. 36. – No. 1. – P. 1–6.
- [10] *Levitas, V. I.* Large elasticplastic deformations of materials at high pressure / V. I. Levitas. – Kyiv : Naukova Dumka, 1987. – 232 p.
- [11] *Myasnikov, V. P.* Mouton equations for elasticplastic materials at high strains / V. P. Myasnikov // Vestnik of the FEB RAS. – 1996. – No. 4. – P. 8–13.
- [12] *Rogovoy, A. A.* Defining relations for finite elastic-nonelastic deformation / A. A. Rogovoy // Prikladnaya mechanic and Technical Physics. – 2005. – Vol. 46. – No. 5. – P. 138–149.

Mantsybora, Alexander Anatolyevich

Cand. Sci. Phys. & Math., Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Rusanov, Maxim Mikhaylovich

Postgraduate Student, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Н. В. Макарова, М. В. Полоник, Е. Е. Рогачев

АБРАЗИВНЫЙ ИЗНОС НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН,
Дальневосточный федеральный университет*

Аннотация. В рамках модели механики контактного взаимодействия и на основе полученных экспериментальных данных рассмотрен ряд задач, позволяющих определить зависимость прочностных свойств композитных материалов с изменением их структурных параметров. Представленные в интегральной форме решения учитывают как геометрические параметры упрочненных областей и их количество, так и трибологические характеристики материала.

Ключевые слова: трибология, механика контактного взаимодействия, композитные материалы, истирание, бетон.

УДК: 539.421, 691.327

Введение. В транспортных, гидротехнических сооружениях, поверхности которых подвергаются абразивному изнашиванию, широкое применение в качестве как конструкционных, так и защитных материалов получили зернистые композиты на полимерных либо цементных вяжущих. В процессе эксплуатации таких неоднородных материалов более мягкая структура разрушается, более твердая – обнажается, что приводит к потере эффективной толщины и изменению конструктивной схемы элементов, что необходимо учитывать при прогнозировании их ресурса.

При моделировании таких процессов для строительных композитов следует учитывать неоднородность материалов и их сложную структуру. Неоднородность материалов, как геометрическая, так и механическая, влияет в процессе эксплуатации на характер напряженного состояния вплоть до разрушения. Построенная на ряде допущений и идеализации свойств тел и условий их взаимодействия теория Герца для исследования процесса истирания строительных композитов неприемлема. Учет неоднородности материалов и их сложной структуры требует специальных постановок задач [1]–[4]. Таким образом, наиболее приемлемым здесь является использование инструментов механики фрикционного взаимодействия [1], [2], позволяющих учитывать как усложненные граничные условия, неоднородность тел и их формоизменение при трении, так и поверхностную микроструктуру, с определением напряжения в области контакта и приповерхностных слоев.

Следует отметить, что применение теоретических и экспериментальных методов механики контакта для оценки прочности и долговечности таких строительных композитов, как бетон на цементном вяжущем, затруднено из-за особенностей структуры по сравнению с конструкциями из металла, керамики и других материалов. Таким образом, в течение длительного времени изучение стойкости к истиранию таких материалов осуществляется экспериментально. Составы бетонных смесей также выбираются по результатам экспериментов [5]–[7].

Цель данного исследования – на основе полученных экспериментальных данных и использовании модели фрикционного взаимодействия [2] рассмотреть ряд задач, позволяющих определить зависимость прочностных свойств композитных материалов с изменением их структурных параметров. Представленные в интегральной форме решения учитывают как геометрические параметры упрочненных областей и их количество, так и трибологические характеристики материала (параметры, характеризующие степень упрочнения и относительный размер упрочненной зоны).

Полученные результаты позволяют сформулировать рекомендации для подбора состава и технологических параметров строительных композитов с высокой прочностью и износостойкостью.

Определяющие модельные соотношения в установившемся режиме изнашивания. Для моделирования процесса истирания строительных композитов будем использовать математические инструменты механики фрикционного взаимодействия [2]. Для анализа изменения контактных давлений во времени и формоизменения поверхности полупространства при изнашивании упругого полупространства бесконечным штампом с плоским основанием будем использовать систему уравнений [2]:

$$\begin{aligned} u_z(x, y, t) &= A[p(x, y, t)], \\ \frac{d\omega_*}{dt} &= K_\omega(x, y)p^\alpha(x, y, t)V_\infty^\beta(x, y, t), \quad \iint_{\Omega} p(x, y, t)dx dy = P(t), \\ u_z(x, y, t) + \omega_*(x, y, t) &= D(t) - f(x, y, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $u_z(x, y, t)$ и $\omega_*(x, y, t)$ – соответственно суммарные упругие и износные перемещения поверхностей взаимодействующих тел, имеющих начальную форму $f_i(x, y)$; $p(x, y, t)$ – давления на площадке контакта; α и β – параметры материалов. Для неоднородных и неоднородно-упрочненных поверхностей характерно, что коэффициент износа $K_\omega = K_\omega(x, y)$ принадлежит к классу кусочно-постоянных функций:

$$K_\omega(x, y) = \begin{cases} K_{\omega_1}, & (x, y) \in \Omega \setminus \omega \\ K_{\omega_2}, & (x, y) \in \omega \end{cases}. \quad (2)$$

При выполнении условий существования установившегося режима изнашивания, т. е. при условии, что скорость сближения взаимодействующих тел под нагрузкой $dD(t)/dt$ (или величина нормальной нагрузки $P(t)$) стремится к постоянному значению D_∞ (или P_∞) при $t \rightarrow +\infty$, при этом относительная скорость скольжения поверхностей $V(x, y, t) = V(x, y)$ и область контакта $\Omega(t) = \Omega$ также не зависят от времени, установившееся распределение контактных давлений:

$$p_\infty(x, y) = p^* \left[\frac{D_\infty (V^*)^\beta}{K_\omega(x, y) V^\beta(x, y)} \right]^{1/\alpha}, \quad (3)$$

где V^* и p^* – некоторые характерные значения скорости и давления.

При заданном асимптотическом значении P_∞ нормальной нагрузки величина D_∞ определяется из третьего уравнения системы (1):

$$D_\infty = \frac{P_\infty^\alpha}{(p^*)^\alpha (V^*)^\beta} \left[\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{K_\omega^{1/\alpha}(x, y) V^{\beta/\alpha}(x, y)} \right]^{-\alpha}. \quad (4)$$

Установившаяся форма $f_\infty(x, y)$ изношенной поверхности полупространства, соответствующая контактному давлению $p_\infty(x, y)$, имеет вид:

$$f_\infty(x, y) = A[p_\infty(x, y)] = A \left[\left(\frac{(p^*)^\alpha (V^*)^\beta D_\infty}{K_\omega(x, y) V^\beta(x, y)} \right)^{1/\alpha} \right]. \quad (5)$$

Таким образом, установившаяся форма зависит от коэффициента износа $K_\omega(x, y)$ и характера движения штампа, т. е. функции $V(x, y)$.

Оператор A для полупространства:

$$A[p(x, y, t)] = \frac{(1 - \nu^2)}{\pi E} \iint_{\Omega} p(x', y', t) \varphi(x', y', x, y) dx' dy', \quad (6)$$

где $\varphi(x', y', x, y) = [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{-1/2}$, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

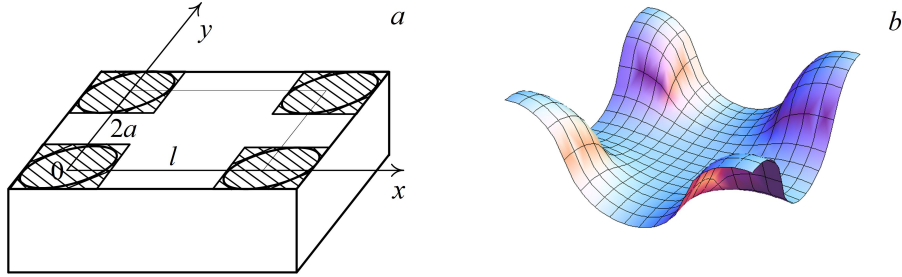


Рис. 1.

Зависимость трибологических характеристик от геометрической формы упроченной зоны. Рассмотрим изнашивание упругой области бесконечным штампом с плоским основанием ($f_0(x, y) = 0$), движущимся поступательно в разных направлениях по поверхности $z = 0$ исходной области. Квадратная область контакта Ω содержит в себе упроченные и неупроченные зоны (рис. 1, а). Упроченные зоны ω – фигуры различной конфигурации (квадрат, восьмиугольник, круг – с радиусом вписанной окружности a), расположенные в вершинах исходной области контакта. Будем считать, что начало системы координат находится в центре левой нижней упроченной зоны. Расстояние между центрами упроченных зон, лежащих на одной оси, равно l . Давление, приложенное к изношенной поверхности, и скорость истирания будем считать постоянными: установившийся режим.

Введем безразмерные параметры $m = K_{\omega_2}/K_{\omega_1}$ и $\tilde{a} = a/l$, характеризующие соответственно степень упрочнения и относительный размер упроченной зоны: $0 < \tilde{a} \leq 0.5$ и $m_0 \leq m < 1$, где m_0 – предельное минимальное значение m , определяемое технологией упрочнения.

Используя формулы (3)–(4), найдем установившееся распределение давления:

$$\frac{p_\infty(x, y)}{p^*} = \begin{cases} \bar{p}_1, & (x, y) \in \Omega \setminus \omega \\ \bar{p}_2, & (x, y) \in \omega \end{cases}, \quad (7)$$

$$\bar{p}_1 = \frac{1}{(1 + \tilde{S}_\omega m_2)} \left(\frac{P_\infty}{p^* l^2} \right), \quad \bar{p}_2 = \left(\frac{1}{m(1 + \tilde{S}_\omega m_2)} \right)^{1/\alpha} \left(\frac{P_\infty}{p^* l^2} \right), \quad m_2 = \frac{1}{m^\alpha} - 1, \quad (8)$$

P_∞ – асимптотическое значение нагрузки на область; \tilde{S}_ω принимает значения: $4\tilde{a}^2$ – для квадрата, $\pi\tilde{a}^2$ – окружности, $8(\sqrt{2} - 1)\tilde{a}^2$ – восьмиугольника.

В установившемся режиме изнашивания форму поверхности при известном распределении давления (7) получим из уравнений (5)–(6):

$$\tilde{f}_\infty(x, y) = \frac{f_\infty(x, y)}{l} = \frac{1}{l} \left(\iint_{\omega} \Delta \bar{p} \varphi(x', y', x, y) dx' dy' + \iint_{\Omega} c_1 \varphi(x', y', x, y) dx' dy' \right), \quad (9)$$

$$\Delta \bar{p} = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} p^* (\bar{p}_2 - \bar{p}_1) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{P_\infty}{l^2} \frac{m_2}{1 + \tilde{S}_\omega m_2}, \quad c_1 = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} p^* \bar{p}_1 = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{P_\infty}{l^2} \frac{1}{1 + \tilde{S}_\omega m_2},$$

$$f_1(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{P_\infty}{l^3} \frac{m_2}{1 + \tilde{S}_\omega m_2} \iint_\omega \varphi(x', y', x, y) dx' dy'. \quad (10)$$

Сведение поверхностного интеграла к повторному позволяет получить интегральное решение в виде:
для квадрата:

$$f_1(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{P_\infty}{l^3} \frac{m_2}{1 + 4\tilde{a}^2 m_2} \sum_{i,j=0}^1 \int_{l(j-\tilde{a})}^{l(j+\tilde{a})} dy' \int_{l(i-\tilde{a})}^{l(i+\tilde{a})} \varphi(x', y', x, y) dx'; \quad (11)$$

для окружности:

$$f_1(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{P_\infty}{l^3} \frac{m_2}{1 + \pi \tilde{a}^2 m_2} \sum_{i,j=0}^1 \int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}} dx' \int_{-\sqrt{\tilde{a}^2 - x'^2}}^{\sqrt{\tilde{a}^2 - x'^2}} \varphi(x', y', x - i, y - j) dy'; \quad (12)$$

для восьмиугольника:

$$f_1(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{P_\infty}{l^3} \frac{m_2}{1 + 8(\sqrt{2} - 1)\tilde{a}^2 m_2} \sum_{i,j=0}^1 \left(\int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}} dx' \int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}} \varphi(x', y', x - i, y - j) dy' - \right. \\ \left. - \int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}(1-\sqrt{2})} dx' \int_{-\tilde{a}}^{-\sqrt{2}\tilde{a}-x'} \varphi(x', y', x - i, y - j) dy' - \int_{(\sqrt{2}-1)\tilde{a}}^{\tilde{a}} dx' \int_{\sqrt{2}\tilde{a}-x'}^{\tilde{a}} \varphi(x', y', x - i, y - j) dy' - \right. \\ \left. - \int_{(\sqrt{2}-1)\tilde{a}}^{\tilde{a}} dx' \int_{-\tilde{a}}^{x'-\sqrt{2}\tilde{a}} \varphi(x', y', x - i, y - j) dy' - \int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}(1-\sqrt{2})} dx' \int_{x'+\sqrt{2}\tilde{a}}^{\tilde{a}} \varphi(x', y', x - i, y - j) dy' \right). \quad (13)$$

Используя (11)–(13), удалось получить аналитическую запись формы поверхности (не приводится в силу громоздкости). На рис. 1, *b* представлен график поверхности на одном периоде $f_1(x, y)/\lambda$, где $\lambda = (1 - \nu^2)P_\infty/\pi El^2$, т. е. в области, заключенной между вершинами упрочненных зон (квадратная область со стороной l).

Для определения трибологических характеристик запишем уравнение поверхности вдоль прямой $x = y$:

$$\Phi(\xi) = f_1\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}, \frac{\xi}{\sqrt{2}}\right), \quad \xi = \frac{x}{l} = \frac{y}{l}, \quad 0 \leq \xi \leq \sqrt{2}. \quad (14)$$

Для более удобного определения амплитуды и площади диагонального сечения выполним поворот функции $\Phi(\xi)$, перенеся ее в начало координат: $\Phi_1(\xi) = \Phi(\sqrt{2}) - \Phi(\xi)$.

С учетом новой функции амплитуда и площадь диагонального сечения соответственно вычисляются по формулам:

$$L = \Phi_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad S = \int_0^{\sqrt{2}} \Phi_1(\xi) d\xi. \quad (15)$$

Ниже на рис. 2 приведены графики зависимости амплитуды (L/λ) и площади (S/λ) для упрочненных областей, представленных: квадратами (пунктирная линия), восьмиугольниками (сплошная линия), окружностями (пунктир с точкой), от размера упрочненной зоны при заданных значениях $m = \{0.5; 0.7; 0.9\}$ и $\alpha = 1$.

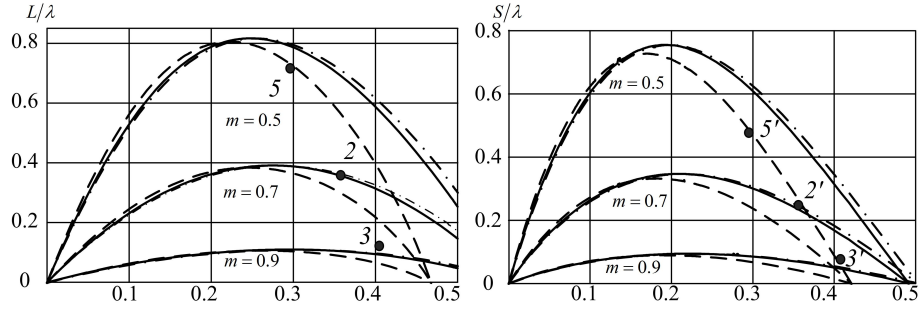


Рис. 2.

Определение зависимости трибологических характеристик от количества упрочненных зон. Как и ранее, будем считать, что изнашивание упругой области происходит бесконечным штампом с плоским основанием ($f_0(x, y) = 0$), движущимся поступательно в разных направлениях по поверхности $z = 0$ исходной области. Область контакта Ω состоит из упрочненной и неупрочненной зон. Упрочненные зоны представляют из себя квадратные области со стороной $2a$, центры которых расположены в вершинах $k \times k$ квадратной сетки (k – число вершин). Вершины упрочненных областей распределены равномерно. Будем считать, что начало системы координат находится в центре левой нижней упрочненной зоны и расстояние между двумя дальними вершинами, лежащими на координатной оси, равно $l(a < l)$. Безразмерные параметры $m = K_{\omega_2}/K_{\omega_1}$ и $\tilde{a} = a/l(k-1)$, характеризующие соответственно степень упрочнения и относительный размер упрочненной зоны в одном периоде, изменяются в пределах: $0 < \tilde{a} \leq 0.5$ и $m_0 \leq m < 1$, где m_0 – предельное минимальное значение m , определяемое технологией упрочнения.

Согласно (3)–(4) найдем установившееся распределение давления в виде кусочно-постоянной функции (7). Используя уравнения (8)–(10), получим форму поверхности: для квадрата:

$$f_1(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{P_\infty}{l^3} \frac{m_2}{1 + 4\tilde{a}^2 m_2} \sum_{i,j=0}^{k-1} \int_{\frac{l}{k-1}(j-\tilde{a})}^{\frac{l}{k-1}(j+\tilde{a})} dy' \int_{\frac{l}{k-1}(i-\tilde{a})}^{\frac{l}{k-1}(i+\tilde{a})} \varphi(x', y', x, y) dx'; \quad (16)$$

для окружности:

$$f_1(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{P_\infty}{l^3} \frac{m_2}{1 + \pi\tilde{a}^2 m_2} \sum_{i,j=0}^{k-1} \int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}} dx' \int_{-\sqrt{\tilde{a}^2 - x'^2}}^{\sqrt{\tilde{a}^2 - x'^2}} \varphi(x', y', x - \frac{i}{k-1}, y - \frac{j}{k-1}) dy'; \quad (17)$$

для восьмиугольника:

$$f_1(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{P_\infty}{l^3} \frac{m_2}{1 + 8(\sqrt{2}-1)\tilde{a}^2 m_2} \sum_{i,j=0}^{k-1} \left(\int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}} dx' \int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}} \varphi dy' - \int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}(1-\sqrt{2})} dx' \int_{-\tilde{a}}^{-\sqrt{2}\tilde{a}-x'} \varphi dy' - \int_{(\sqrt{2}-1)\tilde{a}}^{\tilde{a}} dx' \int_{\sqrt{2}\tilde{a}-x'}^{\tilde{a}} \varphi dy' - \int_{(\sqrt{2}-1)\tilde{a}}^{\tilde{a}} dx' \int_{-\tilde{a}}^{-\tilde{a}} \varphi dy' - \int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}} dx' \int_{x'+\sqrt{2}\tilde{a}}^{\tilde{a}} \varphi dy' \right), \quad \varphi = \varphi(x', y', x - \frac{i}{k-1}, y - \frac{j}{k-1}). \quad (18)$$

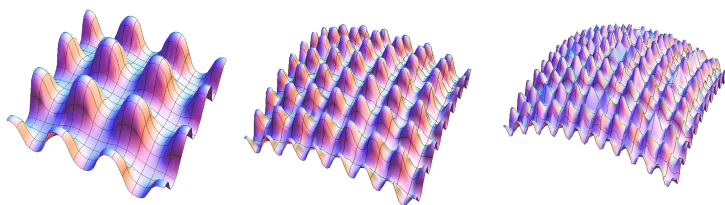


Рис. 3.

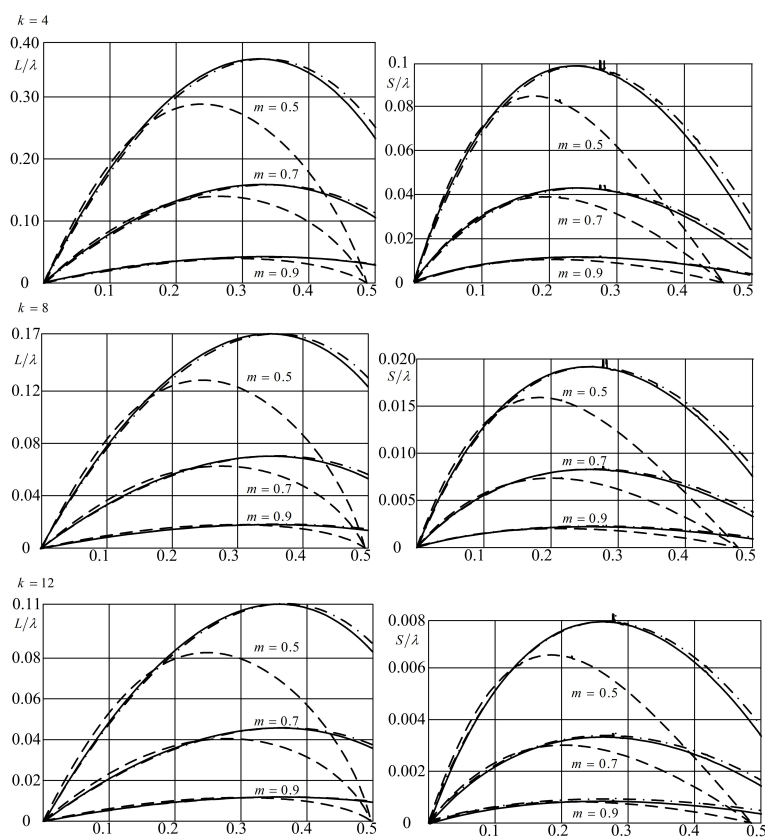


Рис. 4.

Полученный аналитический вид функций (16)–(18) не приводится из-за громоздкости. На рис. 3 представлены графики поверхности $f_1(x, y)/\lambda$, где $k = \{4; 8; 12\}$. Для определения искомых трибологических характеристик воспользуемся (14)–(15). На рис. 4 приведены графики L/λ и S/λ , $m = \{0.5; 0.7; 0.9\}$, $\alpha = 1$, для $k = \{4; 8; 12\}$.

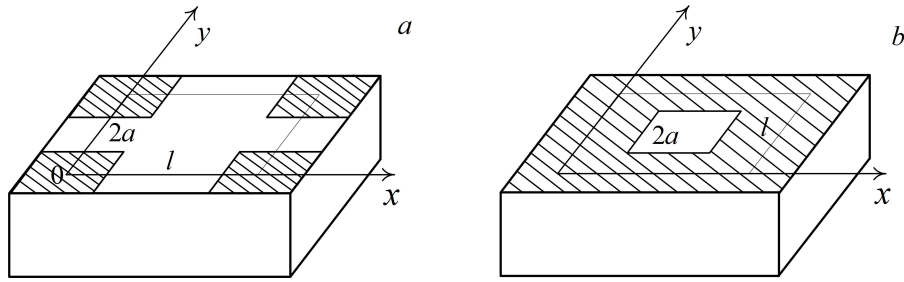


Рис. 5.

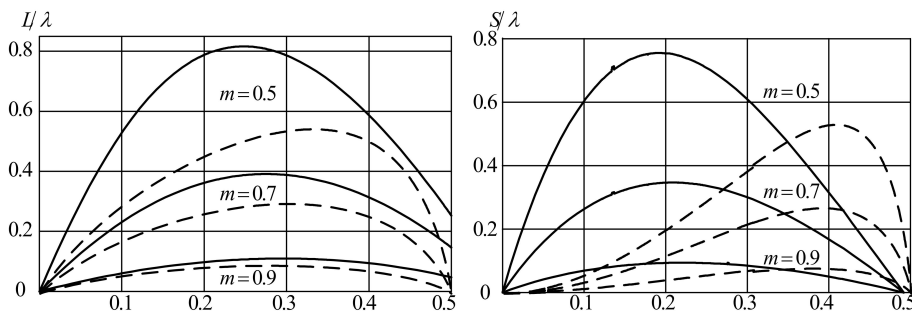


Рис. 6.

Определение зависимости трибологических характеристик от упрочненных и разупрочненных областей. Область контакта при истирании задана Ω , содержит в себе упрочненные и неупрочненные зоны (рис. 5 *a, b*). В установившемся режиме изнашивания форму поверхности при известном распределении давления (7) получим из уравнения (10) при $\tilde{S}_w = 4a^2$ для истираемой поверхности, представленной на рис. 5, *a*, и $\tilde{S}_w = 1 - 4a^2$ – для поверхности, представленной на рис. 5, *b*. На рис. 6 представлены зависимости трибологических характеристик L/λ и S/λ , $m = \{0.5; 0.7; 0.9\}$, сплошная и пунктирная линии – соответственно для истираемых поверхностей рис. 5, *a, b*.

Экспериментальные исследования. Для определения зависимостей сопротивления бетона истирающему воздействию выполнили ряд экспериментов, где составы бетонной смеси отличались объемным содержанием крупной фракции, микрокремнекислота, суперпластификатора, водоцементного соотношения, расхода цемента.

Методика испытаний соответствовала требованиям ГОСТ 13087-81 [8]. Сопротивление истиранию оценивалось как потеря веса образца ΔG ($г/см^2$) и как уменьшение линейного размера Δh ($мм$). Испытания проводились на стандартном истирающем круге, причем общая длина пути образца составляла 600 м (20 циклов по 30 м).

После испытаний были исследованы геометрические и физические параметры полученных поверхностей. Для определения параметра \tilde{a} были измерены размеры оголившихся зерен крупного заполнителя a и расстояния между их центрами l . Твердость заполнителя и цементно-песчаной матрицы были определены с использованием прибора Польшди. Параметр упрочнения был определен как $m = K_{\omega_2}/K_{\omega_1} = d_2/d_1$, где d_2, d_1 – значения полученных диаметров отпечатков на металлическом стержне при испытании соответственно цементной матрицы и крупного заполнителя.

Таблица 1

Типы бетонных смесей и результаты испытаний

Смесь	Δh , мм	ΔG , г/см^2	m	\bar{a}
1	3,69	0,92	0,75	0,44
2	4,29	0,93	0,7	0,37
3	3,46	0,90	0,85	0,41
4	4,59	1,23	0,65	0,33
5	5,13	1,30	0,55	0,29

Полученные экспериментальные данные согласуются с результатами численной реализации предложенной модели. На рис. 2 для сравнения приведены точки $(2,2')$, $(3,3')$, $(5,5')$, соответствующие трибологическим характеристикам образцов бетона составов 2, 3, 5, представленным в таблице 1. Так, наиболее износостойкий бетон (состав 3) имеет, в соответствии с моделью, наименьшие L и S ; наоборот, меньшую износостойкость показал бетон состава 5, для которого из представленных образцов полученные L и S максимальны.

На основе выполненных исследований получены следующие выводы:

1. Модель механики фрикционного взаимодействия применена для моделирования процесса изнашивания стохастически неоднородных поверхностей.
2. Выполнены экспериментальные исследования образцов бетона различной структуры, позволяющие получить геометрические и физические параметры истираемых поверхностей и установить их влияние на стойкость к истиранию.
3. Экспериментальные результаты подтверждают теоретические предсказания. Сравнение результатов с экспериментальными данными показало, что данная модель может быть использована для оптимизации структуры бетона.
4. Реализация данной модели позволила дать рекомендации для получения износостойких бетонов без дополнительного упрочнения поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Горячева, И. Г. Контактные задачи теории упругости для системы изнашивания штампов / И. Г. Горячева // Известия РАН СССР. МТТ. – 1987. – № 6. – С. 62–68.
- [2] Горячева, И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М. : Наука, 2001. – 478 с.
- [3] Александров, В. М. Плоские контактные задачи теории упругости для неклассических областей при наличии износа / В. М. Александров, Е. В. Коваленко // Известия РАН СССР. – МТТ. – 1982. – № 4. – С. 98–108.
- [4] Галин, Л. А. Контактные задачи теории упругости при наличии износа / Л. А. Галин // ПММ. – 1977. – Т. 41. – № 5. – С. 807–812.
- [5] Itoh, Y. An experimental study on abrasion of concrete due to sea ice / Y. Itoh, A. Yoshida, M. Tsuchiya, K. Katoh // Proc. of offshore technology conference. – 1988. – OTC 5687.
- [6] Saeki, H. Study of the abrasion of concrete due to sea ice / H. Saeki, Y. Asai, K. Izumi, T. Takeuchi // The 20th Marine Development Symposium : Japan, 1988.
- [7] Макарова, Н. В. Об учете неоднородности при моделировании процесса истирания бетона / Н. В. Макарова // Вестник гражданских инженеров. – 2009. – № 3. – С. 137–139.
- [8] ГОСТ 13087–81. Бетоны. Методы определения истираемости.

Макарова Наталья Валентиновна,

кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: maknat@bk.ru

Полоник Марина Васильевна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: polonic@iacp.dvo.ru

Рогачев Егор Егорович,

магистр, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

e-mail: egor1805@mail.ru

N. V. Makarova, M. V. Polonik, E. E. Rogachev

ABRASION DETERIORATION OF INHOMOGENEOUS MATERIALS

Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences,

Far Eastern Federal University

Abstract. Within the model of the mechanics of contact interaction and on the basis of the experimental data a number of tasks are examined that allow to determine the dependence of the strength of composite materials with changes in their structural parameters. Presented in integral form solutions include both geometric parameters of hardened areas and quantities, and tribological properties of the material.

Keywords: tribology, the mechanics of contact interaction, composite materials, abrasion, concrete.

REFERENCES

- [1] *Goryacheva, I. G.* Contact problem of elasticity of wear stamps / I. G. Goryacheva // Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. MTT. – 1987. – No. 6. – P. 62–68.
- [2] *Goryacheva, I. G.* Mechanics of friction interaction / I. G. Goryacheva. – M. : Nauka. – 2001. – 478 p.
- [3] *Alexandrov, V. M.* Plane contact problem of elasticity in the presence of non-classical areas of wear / V. M. Alexandrov, E. V. Kovalenko // Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. – MTT. – 1982. – No. 4. – P. 98–10.
- [4] *Galín, L. A.* Contact problem of elasticity in the presence of wear / L. A. Galín // J. Appl. – 1977. – Vol. 41. – No. 5. – P. 807–812.
- [5] *Itoh, Y.* An experimental study on abrasion of concrete due to sea ice / Y. Itoh, A. Yoshida, M. Tsuchiya, K. Katoh // Proc. of offshore technology conference. – 1988. – OTC 5687.
- [6] *Saeki, H.* Study of the abrasion of concrete due to sea ice / H. Saeki, Y. Asai, K. Izumi, T. Takeuchi // The 20th Marine Development Symposium : Japan, 1988.
- [7] *Makarova, N. V.* About consideration of the heterogeneity in modeling of abrasion wear of concrete / N. V. Makarova // Vestnik grazhdanskih inzhenerov. – 2009. – No. 3. – P. 137–139.
- [8] GOST 13087–81. Concrete. Methods for determination of abrasion.

Makarova, Natalya Valentinovna

Cand. Tech. Sci., Senior Researcher, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Polonik, Marina Vasilyevna

Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Rogachev, Egor Egorovich

Master, Far Eastern Federal University, Vladivostok

Е. А. Деревянных

О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ АНИЗОТРОПНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ КРУЧЕНИИ В СЛУЧАЕ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе рассматривается предельное состояние призматических стержней [1] при кручении. Предполагается, что составляющие стержня являются идеальнопластическими при наличии трансляционной анизотропии. Найдены линии разрыва напряжений при различных случаях кручения треугольных стержней.

Ключевые слова: кручение, напряжение, предел текучести, предельное состояние, треугольные стержни.

УДК: 539.374

В работе рассматривается призматический стержень, поперечное сечение которого есть произвольный треугольник. Касательные напряжения направлены вдоль сторон треугольника. Рассмотрим изотропный случай кручения призматических стержней, поперечное сечение которого есть треугольник (рис. 1 а). Предположим, что условие пластичности представляет собой прямоугольник (рис. 1 б).

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = k_0^2, \quad k_0, k_1, k_2 = \text{const}, \quad (1)$$

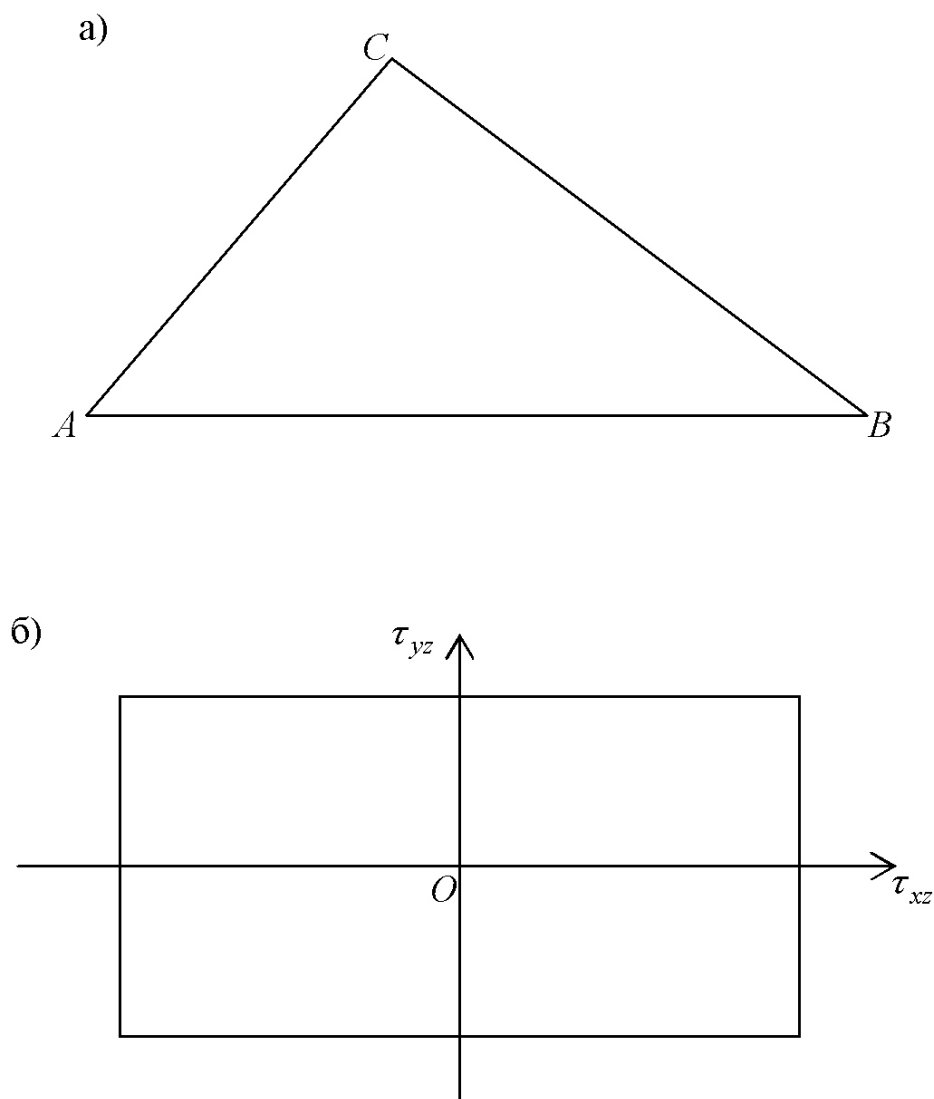


Рис. 1

На рис. 2 представлен изотропный случай кручения треугольных стержней. Построим линии разрыва напряжений.

Линии разрыва таковы, что на них перпендикуляры, образованные векторами касательных напряжений, должны быть равны между собой.

Линия разрыва CR образована векторами касательных напряжений $\bar{\tau}_2$ и $\bar{\tau}_3$, линия разрыва AR – векторами $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_3$, линия разрыва BR – векторами $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$.

Линии разрыва AR , BR , CR пересекаются в одной точке R .

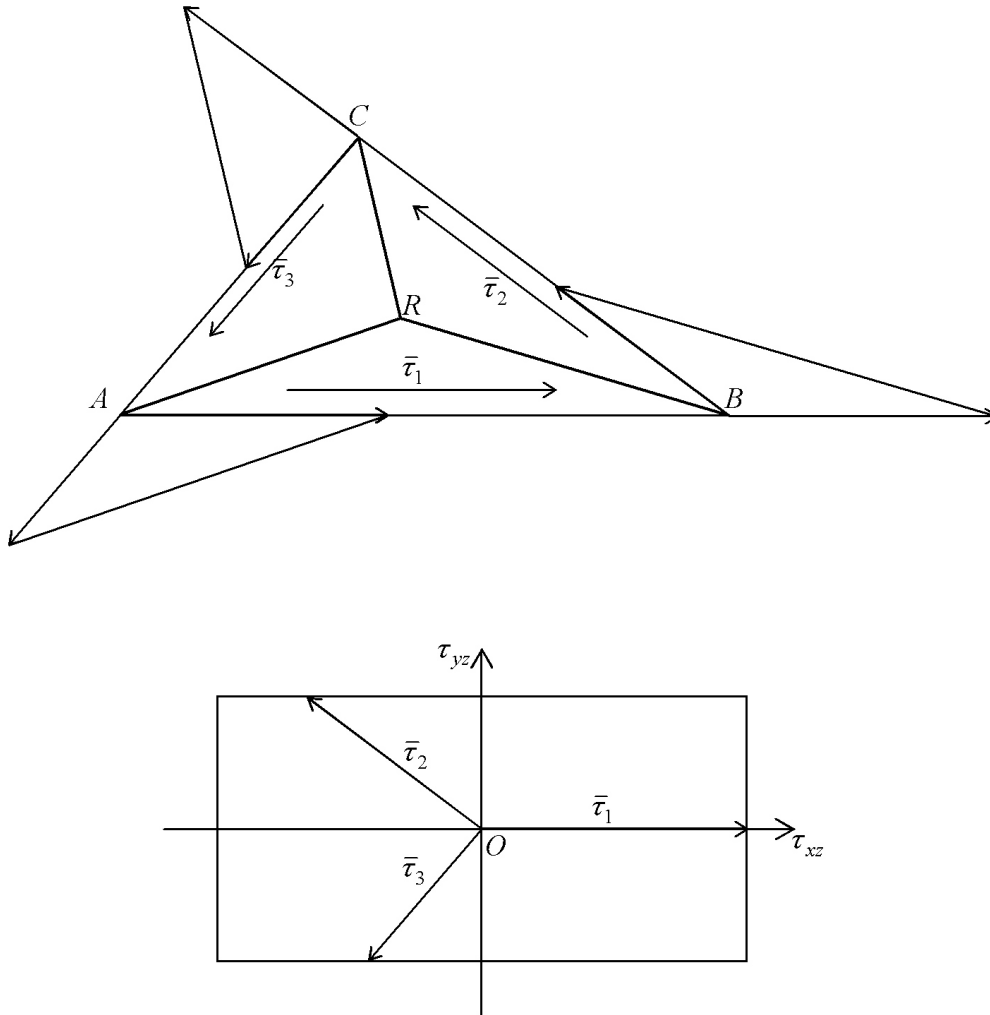


Рис. 2

Рассмотрим различные случаи кручения треугольных стержней (рис. 3 а) при трансляционной анизотропии в предположении, что условие пластичности представляет собой прямоугольник (рис. 3 б).

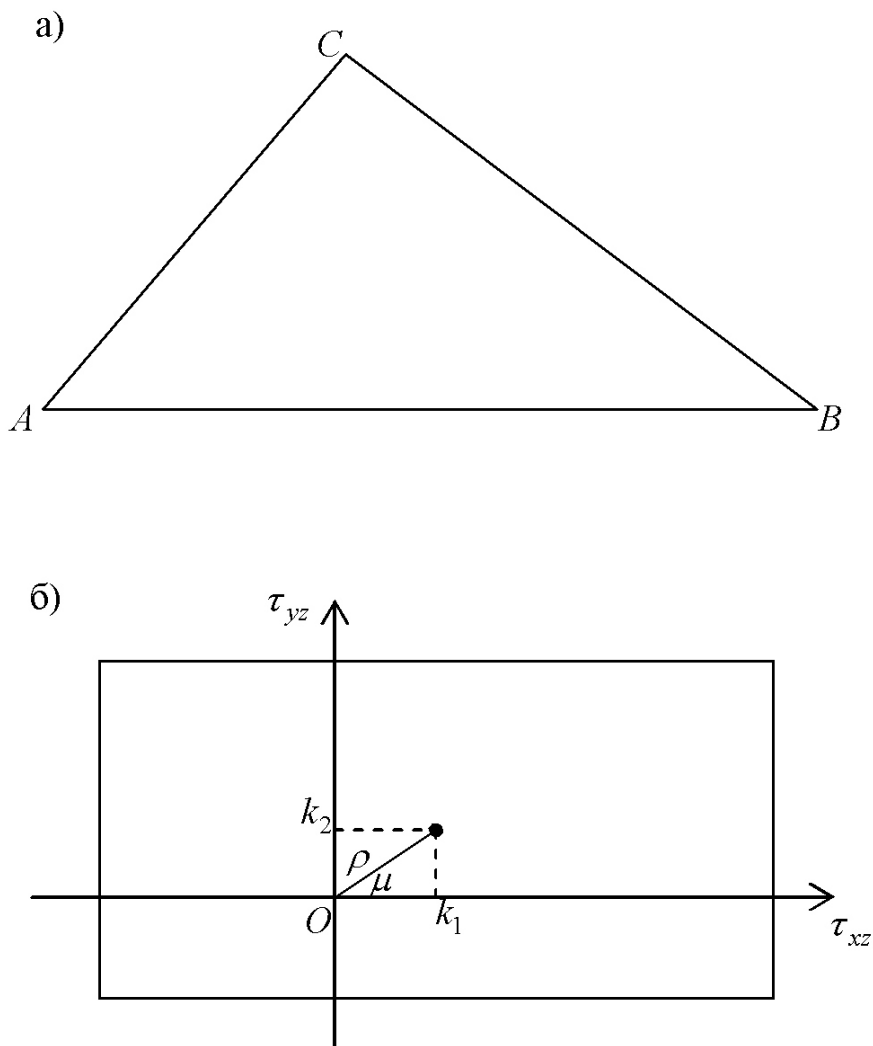
Имеем

$$tg\mu = \frac{k_2}{k_1}, \quad (2)$$

где $\mu = const.$

Обозначим через φ угол наклона прямоугольника, представляющего условие пластичности, к положительному направлению оси τ_{xz} .

Предположим, что φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.



На рис. 4 представлен случай кручения анизотропных треугольных стержней при $\varphi = 0$.

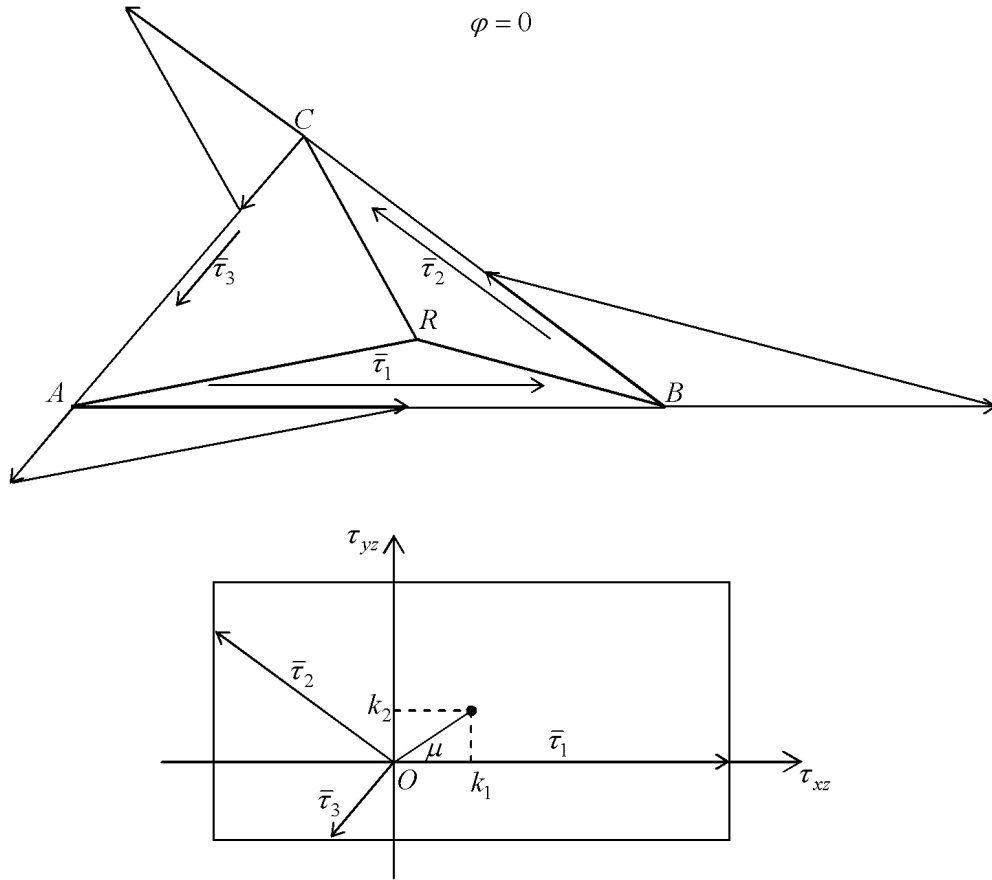


Рис. 4

На рис. 5 представлен случай кручения анизотропных треугольных стержней при $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

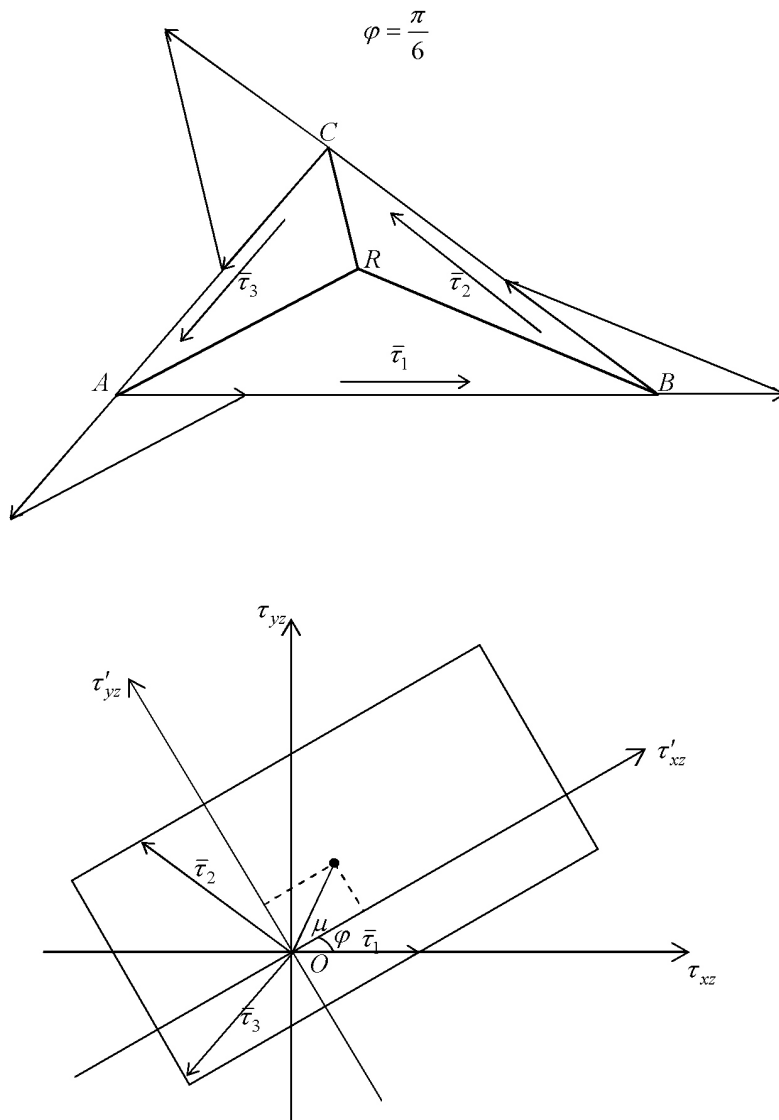


Рис. 5

На рис. 6 представлен случай кручения анизотропных треугольных стержней при $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

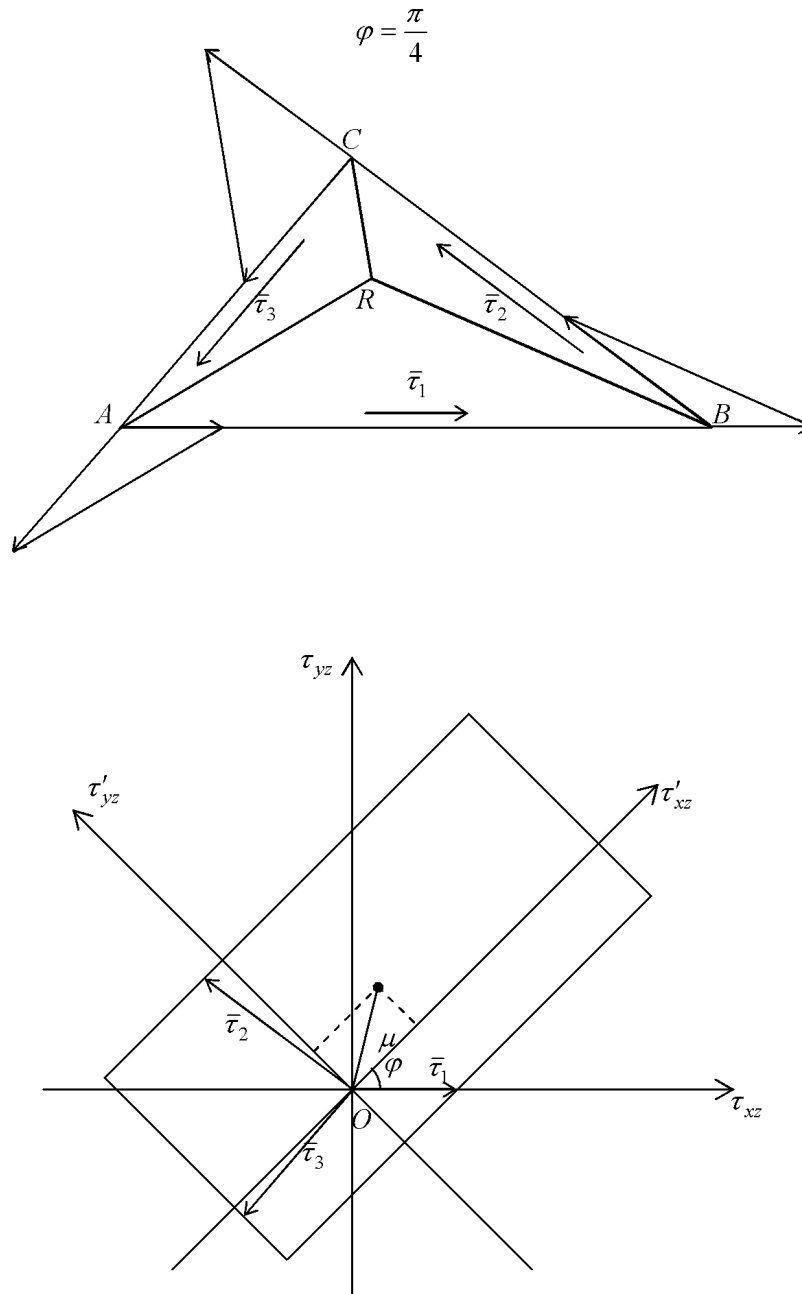


Рис. 6

На рис. 7 представлен случай кручения анизотропных треугольных стержней при $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

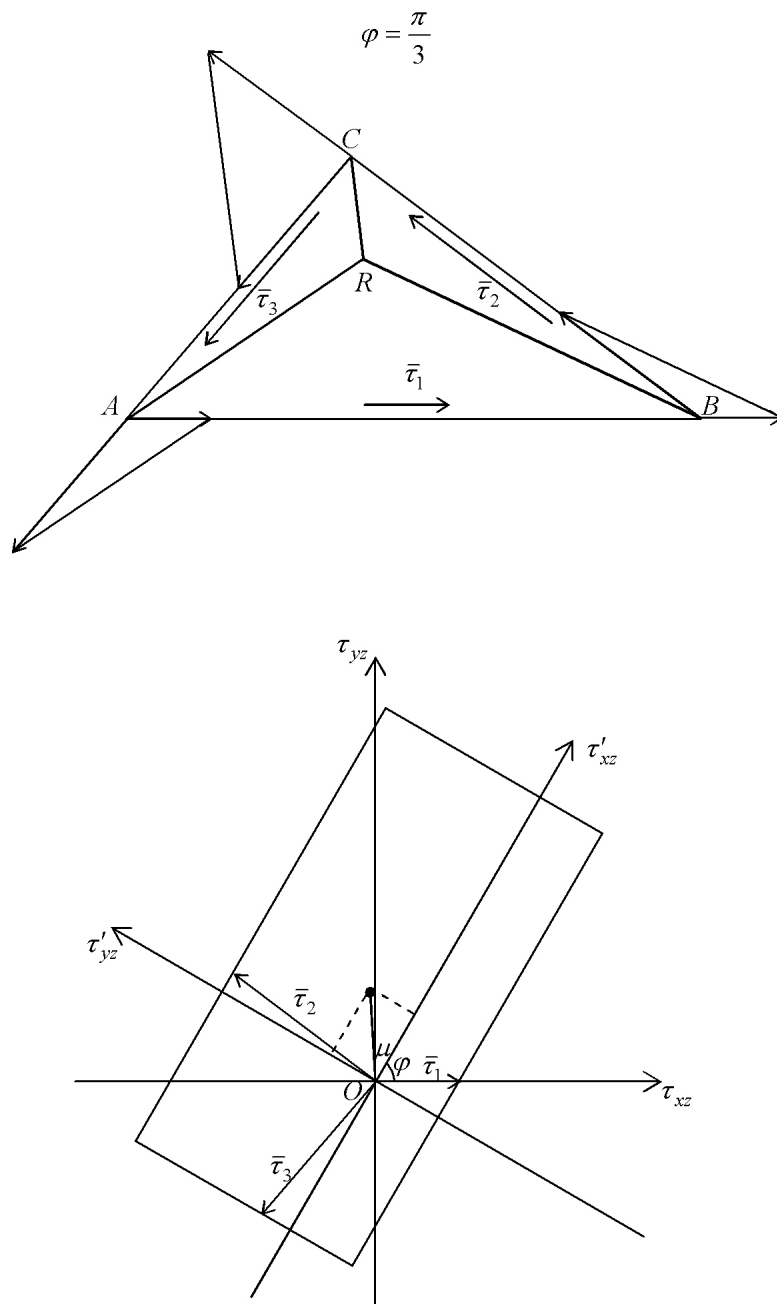


Рис. 7

На рис. 8 представлен случай кручения анизотропных треугольных стержней при $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

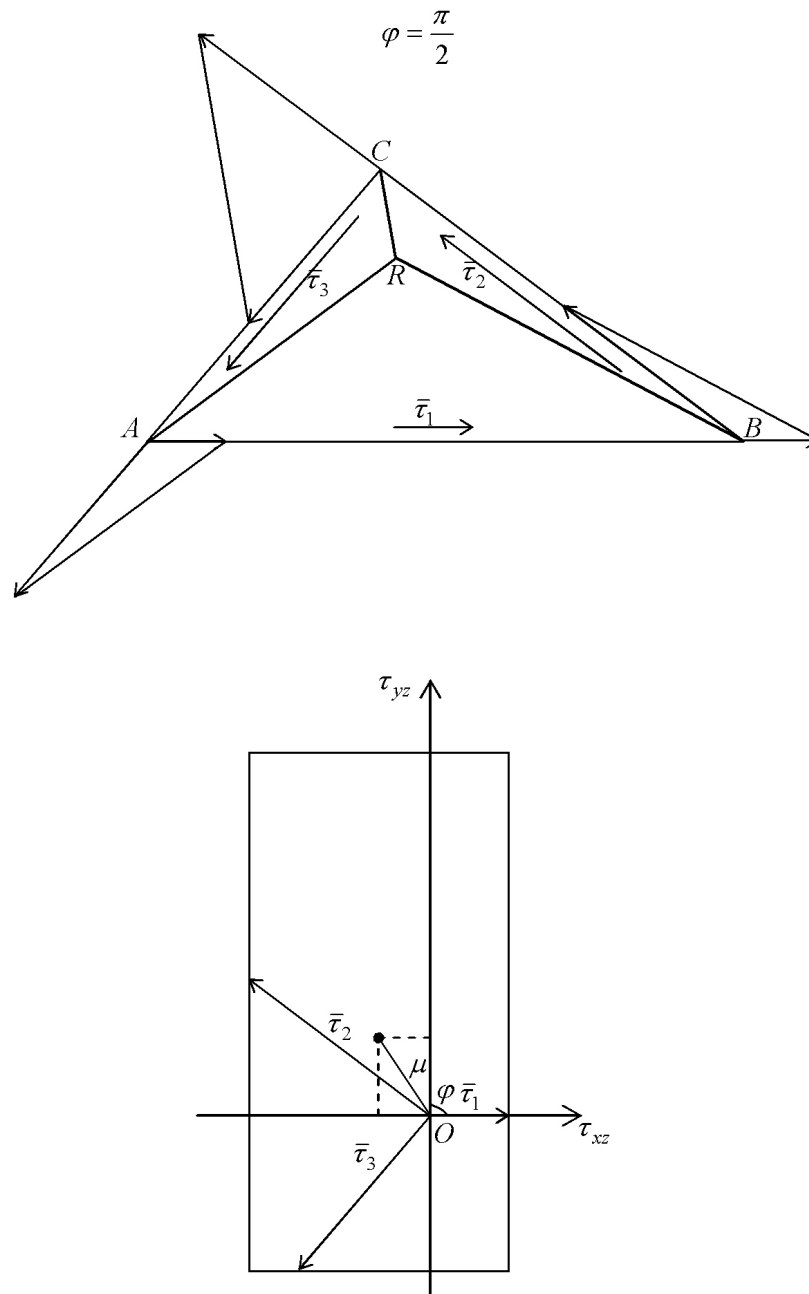


Рис. 8

Таким образом, рассмотрено построение напряженного состояния треугольных стержней при трансляционной анизотропии.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Митрофанова, Т. В.* О предельном состоянии анизотропных призматических стержней при кручении / Т. В. Митрофанова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – Ч. 3. – С. 601–609.

Деревянных Евгения Анатольевна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru

E. A. Derevyannih

**LIMIT CONDITION OF ANISOTROPIC PRISMATIC PIECEWISE AND
NON-UNIFORM CORES AT TORSION**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. In work the limit condition of piecewise and non-uniform prismatic cores is considered. It is supposed that components of a core are idealnoplastichesky, possessing independent limit conditions, with transmitting anisotropy.

Keywords: torsion, tension, fluidity limit, limiting condition, prismatic cores.

REFERENCES

[1] *Mitrofanova, T. V.* About a limit condition of anisotropic prismatic cores at torsion / T. V. Mitrofanova // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Mechanics of definable state. – 2010. – No. 2 (8). – Part. 3. – P. 601–609.

Derevyannih Evgeniya Anatolevna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

ВАГИФ МИРАХМЕДОВИЧ МИРСАЛИМОВ



Вагиф Мирахмедович Мирсалимов принадлежит к числу крупнейших механиков нашего времени.

От имени коллектива Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, редакции журнала "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева" сердечно поздравляем Вагифа Мирахмедовича Мирсалимова с семидесятилетием, желаем крепкого здоровья, многих новых успехов.

Б. Г. Миронов

Д. Д. Ивлев

Ректор

ВАГИФ МИРАХМЕДОВИЧ МИРСАЛИМОВ

Мирсалимов В. М. родился 30 января 1941 года. В 1964 году окончил механический факультет Новочеркасского ордена Трудового Красного Знамени политехнического института им. С. Орджоникидзе по специальности "Эксплуатация автомобильного транспорта". В 1966 году окончил механико-математический факультет Ростовского-на-Дону государственного университета по специальности "Механика".

В 1967-1970 гг. – аспирант Института проблем механики АН СССР под руководством д.ф.-м.н. Г. П. Черепанова.

В 1970 г. защитил кандидатскую диссертацию в МГУ им. М. В. Ломоносова.

В 1970-1972 гг. – младший научный сотрудник Института математики и механики АН Азербайджанской ССР, в 1972–1978 гг. – доцент кафедры "Высшая математика" Липецкого политехнического института, в 1978–1983 гг. – заместитель директора по научной работе СКБ при ИММ АН Азербайджанской ССР.

С 1983 по 2011 г. – заведующий кафедрой "Сопrotивление материалов", после объединения кафедр "Теоретическая механика" и "Сопrotивление материалов" с 2011 г. по настоящее время – заведующий кафедрой "Техническая механика".

В 1980 г. защитил докторскую диссертацию. С 1985 г. – профессор.

В. М. Мирсалимов является автором более 350 опубликованных работ, в том числе трех монографий: "Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами" (Баку : Элм, 1984); "Неоднoмерные упругопластические задачи" (М. : Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1987); "Напряженное состояние и качество непрерывного слитка" (М. : Металлургия, 1990), а также трех учебных пособий.

Под его руководством подготовлено 84 кандидата и 11 докторов наук, среди которых граждане Азербайджана, Иордания, Ирана, Мадагаскара, России, Узбекистана.

Научная деятельность В. М. Мирсалимова характеризуется широтой рассмотренных проблем во многих направлениях развития механики и научных основ материаловедения в машиностроении. Постановка рассмотренных им задач учитывает сложность геометрии тел (как, правило, рассматривались многосвязные тела), разнообразие свойств (в основном пластичность и вязкоупругость, а также микроструктура и анизотропия), действие механических распределенных и сосредоточенных усилий, штампов), температурных полей. При всей широте разрабатываемых проблем В. М. Мирсалимов добивается при рассмотрении любой задачи глубины изучения новых закономерностей. Им разработаны ряд эффективных методов для исследования плоского напряженно-деформированного состояния многосвязных анизотропных и изотропных тел с отверстиями и трещинами, дана оценка влияния многосвязности на коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещин. Изучен вопрос о местах накопления энергии вблизи горных выработок, что позволяет выбрать выработку оптимальной формы или найти более рациональное ее подкрепление. Проведен углубленный теоретический анализ проблемы многосвязности в механике деформирования и разрушения конструктивных элементов машин, приборов, сооружений и горных массивов.

Результаты фундаментальных исследований, полученные в работах В. М. Мирсалимова и его учеников, позволяют дать конкретные решения целого комплекса прикладных проблем первостепенной значимости для современного научно-технического прогресса. Они относятся к материалоемкости и надежности узлов и деталей машин, приборов, строительных

конструкций. Эффективные методы анализа напряженно-деформированного состояния перфорированных пластин и панелей в прямой и обратной постановке дают возможность по заданию исходных предпосылок деформирования упругих и упругопластических тел определить облегченные формы равнопрочных конструктивных элементов несущего типа. В таких конструкциях за счет привнесения специальных вырезов и отверстий достигается более равномерное накопление энергии упругих деформаций, не превышающей заданного уровня. Тем самым достигается более равномерная работа конструкционного материала. Во всех частях детали при этом происходит равностепенное накопление усталостных повреждений. Это необходимо учесть с целью снижения общего веса конструкции.

Приоритетными научными достижениями в области механики деформирования и разрушения неоднородных сред создана научная база для прочностных расчетов конструкций сложной геометрии из композиционных материалов для энергооборудования и приборостроения.

Созданные методы решения задач термоупругости для многосвязных тел являются базой точных прочностных расчетов для тепловыделяющих элементов активной зоны ядерных реакторов.

В. М. Мирсалимов является создателем нового научного направления – механики разрушения – в Азербайджане. В связи с потребностями экономии веса, увеличения предельных нагрузок, повышения несущей способности и живучести машин, конструкций и оборудования в ответственных отраслях техники, а также в энергетическом, транспортном, химическом, металлургическом и других отраслях машиностроения значительное развитие получила механика разрушения, являющаяся основой расчетно-экспериментального определения и повышения трещиностойкости конструкций и изделий.

С целью разработки и внедрения новых подходов к проектированию, изготовлению и эксплуатации энергооборудования по критериям трещиностойкости В. М. Мирсалимовым был проведен большой цикл работ, охватывающий следующие вопросы:

- создание научных основ механики разрушения (развитие методов решения краевых задач для тел с трещинами, получение данных о напряженно-деформированных состояниях в зонах трещин для типовых элементов конструкций, формулировка критериев разрушения при различных условиях нагружения тел с трещинами);
- разработка методов испытания конструкционных материалов при наличии в них трещин для соответствующих схем и режимов нагружения, имитирующих эксплуатационные;
- развитие новых методов расчета прочности элементов оборудования по характеристикам и критериям трещиностойкости;
- разработка методов повышения трещиностойкости на различных стадиях проектирования, изготовления и эксплуатации конструкций и оборудования.

В. М. Мирсалимовым проведено исследование комплекса сложных взаимосвязанных явлений и факторов, влияющих на процесс формирования непрерывнолитого слитка. Рассмотрены особенности тепловой работы машин непрерывной разливки стали. Разработаны рациональные режимы вторичного охлаждения слябов высокопрочных сталей. Предложены эффективные методы расчета параметров локального разрушения для непрерывнолитого стального слитка. Разработаны методы и получены результаты оптимизации формирования качественных слитков. Результаты этих исследований подытожены В. М. Мирсалимовым в монографии "Напряженное состояние и качество непрерывнолитого слитка" (Проблемы сталеплавленного производства) (М. : Металлургия, 1990).

Научная школа, созданная В. М. Мирсалимовым в Азербайджане, сегодня является ведущей научной школой в области прочности и разрушения сред и элементов конструкций сложной многосвязной геометрии, что приобретает первостепенную важность в связи с проблемами создания и использования композиционных материалов с заданными свойствами и их применения в современном машиностроении, судостроении, авиастроении.

В последние годы получены существенные результаты в области механики контактного разрушения, обратных задач теории упругости и механики разрушения, моделирования зарождения трещин в деформируемых телах и конструкциях.

В. М. Мирсалимов выполнял большую научно-организационную работу, являясь в 1984–1991 гг. членом регионального специализированного совета по присуждению ученой степени доктора наук при Тбилисском математическом институте им. А. М. Размадзе АН Грузинской ССР, в 1986–1994 гг. – председателем специализированного совета по присуждению ученой степени кандидата наук при АзПИ им. Ч. Ильдрыма (Азербайджанском техническом университете), а также являясь членом диссертационных советов при ИММ АН Азербайджанской ССР и в Азербайджанском государственном университете. В настоящее время является членом диссертационного совета в ИММ НАН Азербайджана. В разные годы был экспертом ВАК Азербайджана.

Доктор физико-математических наук В. М. Мирсалимов является заведующим кафедрой "Техническая механика" Азербайджанского технического университета, главный научный сотрудник института математики и механики НАН Азербайджана, заслуженный деятель науки, лауреат премии Совета Министров СССР, действительный член Нью-йоркской академии наук.

**СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ
МИРСАЛИМОВА ВАГИФА МИРАХМЕДОВИЧА****1969**

1. О воздействии ребер жесткости на развитие трещин // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1969. – № 1 (совм. с Черепановым Г. П.).
2. Напряженная посадка вязко-упругих тел // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1969. – № 2 (совм. с Черепановым Г.П.).

1970

3. О воздействии ребер жесткости и подкрепляющих отверстий на развитие трещин // Изв. АН СССР. МТТ. – 1970. – № 5.
4. О структуре пластических деформаций в вершине трещины // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1970. – № 6.

1971

5. О влиянии пластичности на динамику роста трещин // Изв. АН СССР. МТТ. – 1971. – № 1 (аннотация доклада).
6. О бигармонических решениях задач для упруго-пластических тел при наличии неоднородности напряженного поля // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1971. – № 3.
7. Влияние разгружающих отверстий на развитие трещины // Проблемы прочности. – 1971. – № 4.
8. Обратная упругая задача для плоскости, ослабленной двумя одинаковыми отверстиями // Матер. Респуб. науч. конф. по матем. и мех., посвящ. XXIV съезду КПСС. – Баку : ЭЛМ, 1971.

1972

9. О предельной скорости распространения трещины при квазихрупком разрушении // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1972. – № 1.
10. Об одном способе торможения растущих трещин // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1972. – № 1.
11. Некоторые упругопластические задачи в условиях плоской деформации // Изв. АН СССР. МТТ. – 1972. – № 3 (аннотация доклада).
12. Некоторые задачи теории упругости и пластичности с неизвестной границей // Изв. АН СССР. МТТ. – 1972. – № 5 (аннотация доклада).

1973

13. О влиянии пластических деформаций на развитие трещины // Проблемы прочности. – 1973. – № 1.
14. О посадочных напряжениях вязко-упругих тел // Докл. АН Аз.ССР. – 1973. – Т. 29. – № 6.
15. Решение упруго-пластических задач для плоскости с круговым отверстием при наличии неравномерного температурного поля // Докл. АН Аз.ССР. – 1973. – Т. 29. – № 10.

1974

16. Некоторые упруго-пластические задачи для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий // ПМТФ. – 1974. – № 4.
17. Некоторые обратные задачи теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. – 1974. – № 5 (аннотация доклада).

18. Об оптимальной форме отверстия для перфорированной пластины при изгибе // ПМТФ. – 1974. – № 6.

1975

19. Упругопластическая задача для массива, ослабленного отверстиями // Изв. АН СССР. МТТ. – 1975. – № 2.

20. Некоторые задачи механики деформируемого тела с неизвестной границей // Изв. АН СССР. МТТ. – 1975. – № 2 (аннотация доклада).

21. Обратная двоякопериодическая задача термоупругости // Изв. АН СССР. МТТ. – 1975. – № 3 (аннотация доклада).

22. Упруго-пластическое распределение напряжений в тонкой пластине, ослабленной двоякопериодической системой круговых отверстий // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1975. – № 3.

23. Обратная задача теории упругости для анизотропной среды // ПМТФ. – 1975. – № 4.

24. Оптимальная форма отверстий для перфорированной пластины // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1975. – № 5.

25. Об одной упруго-пластической задаче для массива, ослабленного двумя одинаковыми круговыми выработками // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 1975. – № 5.

26. Об одной контактной задаче теории упругости // Прикладная механика. – 1975. – № 9.

27. Некоторые двоякопериодические упругопластические задачи в условиях плоской деформации // Изв. АН СССР. МТТ. – 1975. – № 6.

28. Решение некоторых упруго-пластических задач // ПМТФ. – 1975. – № 6.

1976

29. Некоторые упруго-пластические задачи для плоскости, ослабленной периодической системой круглых отверстий // ПММ. – 1976. – № 1.

30. Упруго-пластическая задача для тонкой пластины, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий // Прикладная механика. – 1976. – № 3.

31. Устойчивость тонких полос в процессе непрерывной прокатки полос. Сообщение 1 // Изв. ВУЗов "Черная металлургия". – 1976. – № 3 (совм. с Железновым Ю. Д., Григорьевым Г. Г., Гуровым А. С.).

32. Обратная задача термоупругости для плоскости, ослабленной бесконечным рядом одинаковых отверстий // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1976. – № 2.

33. Поперечный изгиб пластины, опирающейся на периодическую систему точечных опор // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1976. – № 3.

34. Некоторые задачи механики разрушения перфорированных пластин // Изв. АН СССР. МТТ. – 1976. – № 4 (аннотация доклада).

35. Упруго-пластическая задача для тонкой пластины, ослабленной периодической системой круглых отверстий // ПМТФ. – 1976. – № 5.

36. Решение двоякопериодической задачи термопластичности // Проблемы прочности. – 1976. – № 9.

1977

37. Устойчивость тонких полос в процессе непрерывной прокатки полос. Сообщение 2 // Изв. ВУЗов "Черная металлургия". – 1977. – № 1 (совм. с Железновым Ю. Д., Григорьевым Г. Г., Гуровым А. С.).

38. Исследование предельного поля напряжений возле трещин, исходящих из контуров отверстий перфорированной пластины // ПМТФ. – 1977. – № 2.

39. К математическому моделированию оптимизации получения качественных слитков // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1977. – № 3 (совм. с Максудовым Ф. Г., Емельяновым В. А.).

40. Обратная двоякопериодическая задача термоупругости // Изв. АН СССР. МТТ. – 1977. – № 4.

41. Решение периодической задачи термопластичности // Прикладная механика. – 1977. – № 6.

42. Термоупругопластическая задача для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1977. – № 6.

1978

43. Взаимодействие периодической системы упругих включений и прямолинейных трещин в изотропной среде // ПМТФ. – 1978. – № 1.

44. Коэффициенты интенсивности напряжений для перфорированных пластин с трещинами // Проблемы прочности. – 1978. – № 3.

45. Обратная неоднородная задача изгиба решеток // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1978. – № 2.

46. Взаимодействие двоякопериодической системы жестких включений и прямолинейных трещин в изотропной среде // Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 2.

47. Уругопластическая задача для массива, ослабленного периодической системой круглых выработок // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1978. – № 5.

48. Уругопластическая задача для массива, ослабленного двоякопериодической системой круглых выработок // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1978. – № 6.

49. Уругопластическая задача для тонкой пластины, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1978. – № 6.

50. Уруго-пластическое равновесие тонкой пластины, ослабленной периодической системой круглых отверстий с трещинами // Прикладная механика. – 1978. – № 10.

1979

51. Уруго-пластическое равновесие пластины, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий и трещинами, выходящими на контуры отверстий // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1979. – № 2.

52. Равнопрочная выработка в горном массиве // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 1979. – № 4.

53. Хрупкое разрушение полосы со сварным швом при прокатке // Межвузовский сб. "Тонколистовая прокатка". – Воронеж, 1979 (совм. с Кляпицыным В. А., Абиевым А. Г.).

54. Определение оптимального режима охлаждения при непрерывном литье // Докл. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1979. – Т. 35. – № 8 (совм. с Максудовым Ф. Г., Бабичевой Л. А.).

1980

55. Исследование напряжений в полосе с двумя полукруговыми вырезами по кромке // Изв. ВУЗов. Черная металлургия. – 1980. – № 9.

56. Выбор режима охлаждения непрерывного слитка с позиций механики разрушения // "Прогрессивные способы получения стальных слитков": сб. статей. – Киев, 1980 (совм. с Емельяновым В. А. и др.).

57. Хрупкое разрушение пластины, ослабленной периодической системой круглых отверстий с выходящими на их контуры трещинами // Прикладная механика. – 1980. – Т. 16. – № 11.

1981

58. Решение задачи термоупругости для изотропной среды, ослабленной периодической системой круглых отверстий и прямолинейными трещинами // Прикладная механика. – 1981. – Т. 17. – № 1.

59. Некоторые краевые задачи механики деформируемого твердого тела с неизвестной границей // Физико-химическая механика материалов. – 1981. – № 3 (аннотация доклада).

1983

60. О влиянии подкрепляющих ребер жесткости на развитие трещин, исходящих из контура кругового отверстия // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1983. – № 4 (совм. Исаевым А. Г.).

1984

61. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. – Баку : Элм, 1984.

62. Продольный сдвиг линейно-армированного материала, ослабленного системой трещин // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1984. – № 1 (совм. с Мехтиевым Р. К.).

63. Взаимодействие двоякопериодической системы жестких включений и прямолинейных трещин при изгибе пластин // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1984. – № 2.

1985

64. Устройство для испытания конструкционных материалов на трещиностойкость при циклическом нагружении // Заводская лаборатория. – 1985. – Т. 51. – № 4 (совм. с Максудов Ф. Г., Искендерзаде Ф. А., Мардахаевым А. В.).

65. Контактная задача для пластины с трещиной, усиленной ребрами жесткости // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1985. – № 3 (совм. с Алиевой Г. М.).

1986

66. Некоторые краевые задачи конструкционного торможения трещин // Физико-химическая механика материалов. – 1986. – Т. 22. – № 1.

1987

67. Об одном способе решения упругопластических задач для многосвязной области // Современные проблемы математической физики Т. II : мат. всес. симп. – Тбилиси, 1987.

68. Неоднородные упругопластические задачи. – М. : Наука, 1987.

69. Об одном способе решения двоякопериодических задач для упругих плоскостей с криволинейными отверстиями // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1987. – № 3 (совм. с Мехтиевым А. Э.).

1989

70. Решение задачи теории пластичности для перфорированных пластин // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1989. – № 2–3 (совм. с Аллахяровым Э. Г.).

1990

71. Напряженное состояние и качество непрерывного слитка. – М. : Металлургия, 1987 (совм. с Емельяновым В. А.).

72. Об одном методе решения задач для пластин, перфорированных некруговыми отверстиями // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности : матер. IX Всес. конф. . – Новосибирск, 1990 (совм. с Мехтиевым А. Э.).

1991

73. Плоские задачи механики разрушения перфорированных тел // Abstracts "Continuum mechanics and related problems of analysis". – Тбилиси, 1991.

1992

74. Устройство для измерения угловых деформаций // А. с. №. 1768930. – 1992 (совм. с Мардахаевым А. В., Аскеровым Р. И.).

75. Устройство для измерения угловых деформаций // А. с. №. 1772596. – 1992 (совм. с Мардахаевым А. В., Аскеровым Р. И.).

1996

76. Fracture of plates of variable thickness // Materials Science. – 1996. – Vol. 32. – № 3.

77. The breaking crack build-up in perforated planes by uniform ring switching // Int. Journal of Fracture. – 1996. – Vol. 79. – № 1 (совм. с Аллахяровым А. Э.).

1997

78. Dynamic cracks in an elastoplastic body // Engineering Fracture Mechanics. – 1997. – Vol. 56. – № 2.

1998

79. Влияние переменности толщины пластины на распространение трещины // Тез. докл. Воронежской школы "Современные проблемы механики и прикладной математики". – Воронеж, 1998 (совм. с Исаевым А. Г.).

80. Механика разрушения тонких пластин переменной толщины // Труды ИММ АН Аз. Респ. – 1998. – Т. VIII.

81. Расчетный метод определения запаса живучести железнодорожных рельсов // Уч. записки АзГУ. – 1998. – Т. VI. – Вып. 5 (совм. с Гасанов Ф. А.).

1999

82. Оптимальное проектирование профиля поверхности трения контактной пары "втулка-вал" // Сб. науч. тр. "Оптимальное проектирование механических систем". – Баку : ЭЛМ, 1999 (совм. с Гаджиевым В. Д.).

83. Предельно равновесное состояние детали типа втулки при наличии трещин со связями между берегами // Сб. науч. тр. "Оптимальное проектирование механических систем". – Баку : ЭЛМ, 1999 (совм. с Гаджиевым В. Д.).

84. Определение натяга для посадки кольцевых включений в перфорированную пластину ситового устройства, обеспечивающее снижение концентрации напряжений // Сб. науч. тр. "Оптимальное проектирование механических систем". – Баку : ЭЛМ, 1999 (совм. с Касумовым Р. Ф.).

2000

85. Подрастание трещины при скоростном деформировании // Сб. науч. тр. АзГУ "Механика разрушения и оптимизация деформируемых тел и конструкций". – Баку : ЭЛМ, 2000.

86. Solution of plane problem of the non homogeneous theory of elasticity for the finite area slackened by the cracks // Trans. of Acad. of sciences of Azerbaijan, series of phys.-tech. and math. sciences. – 2000. – Vol. XX. – № 1.

2001

87. Минимизация параметров разрушения детали типа втулки контактной пары // Механика. Машиностроение. – 2001. – № 1 (совм. с Гаджиевым В. Д.).

88. Влияние теплового источника на динамику роста трещины // Вестник ДГУ. – 2001. – № 4 (совм. с Кадиевым Р. И.).

89. Модельные представления для исследования зародышевой трещины в деталях контактной пары // Сб. науч. тр. "Механика". – Баку : АЗИСУ, 2001. – № 11 (совм. с Гаджиевым В. Д.).

2002

90. Торможение роста движущейся трещины со связями между берегами с помощью теплового поля // Механика, Машиностроение. – 2002. – № 1 (совм. с Кадиевым Р. И.).

91. Обратная задача теории упругости для составного цилиндра контактной пары // Механика. Машиностроение. – 2002. – № 2 (совм. с Гаджиевым Г. Х.).

92. О структуре пластических деформаций в вершине трещины при воздействии локального теплового источника // Межвуз. науч.-техн. журнал : сб. науч. тр. по механике. Часть I. – 2002. – № 12 (совм. с Кадиевым Р. И.).

93. Рост трещины со связями между берегами при воздействии теплового поля напряжений // Межвуз. науч.-техн. журнал : сб. науч. тр. по механике. Часть I. – 2002. – № 12 (совм. с Кадиевым Р. И.).

94. Напряженно-деформированное состояние составного цилиндра контактной пары при наличии трещины с взаимодействующими берегами // Механика. Машиностроение. – 2002. – № 3–4 (совм. с Гаджиевым Г. Х.).

95. Оптимальное проектирование плунжерных пар топливных насосов двигателя по критериям трещиностойкости // Мат. межд. науч.-практ. конф "Прогресс транспортных средств и систем – 2002". Часть 2. – Волгоград, 2002 (совм. с Гаджиевым В. Д.).

96. Limit-equilibrium state of bush of contact pair in the presence of cracks with yielded end areas // Trans. of NASA, series of phys.-tech. and math. sciences, issue. Math. and Mech. – 2002. – Vol. XXII. – № 4. (совм. с Гаджиевым В. Д.)

2003

97. Круговое отверстие в полиномиальном поле напряжений для сложной модели // Механика. Машиностроение. – 2003. – № 1 (совм. с Исаевым А. Г., Ахмедовым Р. Н.).

98. Inverse problem of fracture mechanics for the contacting pair bushing // Trans. of NASA, series of phys.-tech. and math. sciences, issue. Math. and Mech. – 2003. – Vol. XXIII. – № 1.

99. Обратная задача теории изгиба пластин, опирающихся на колонны // Механика. Машиностроение. – 2003. – № 2 (совм. с Казымовым Х. И.).

100. Контактная задача теории упругости для тела с трещиной при воздействии температурного поля // Изв. ТулГУ, серия : мат., мех., инфор. – 2003. – Т. 9. – Вып. 2 (совм. с Кадиевым Р. И.).

101. Контактная задача теории упругости для плоскости с трещиной при воздействии наведенного теплового поля напряжений // Механика. Машиностроение. – 2003. – № 3 (совм. с Кадиевым Р. И.).

102. Об одном способе снижения износа втулки составного цилиндра контактной пары // Сб. докл. межд. конгресса "Механика и трибология транспортных систем". – Ростов-на-Дону, 2003. – Т. 1 (совм. с Гаджиевым Г. Х.).

103. Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра контактной пары // Проблемы механики : сб. статей к 90-летию акад. А. Ю. Ишлинского. – М. : Физматлит, 2003 (совм. с Гаджиевым Г. Х.).

2004

104. Влияние наведенного теплового поля напряжений на рост трещины в упругопластической пластине // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2004. – № 1 (совм. с Кадиевым Р. И.).

105. Arrest of moving crack in elasto-plastic plate by a heat source // Int. Sc.-Tech. Journal Reliability and life of machines and structures. – 2004. – № 2 (совм. с Кадиевым Р. И.).

106. Минимизация параметров разрушения в изгибаемых пластинах, опирающихся на колонны // Механика. Машиностроение. – 2004. – № 3 (совм. с Казымовым Х. И.).

107. Минимизация износа внутренней поверхности втулки составного цилиндра контактной пары // Трение и износ. – 2004. – Т. 25. – № 3 (совм. с Гаджиевым Г. Х.).

108. Закрытие трещины в листовом элементе под действием локального теплового поля // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2004. – № 6 (совм. с Кадиевым Р. И.).

109. Оптимальное проектирование контактной пары составной цилиндр - плунжер // Трение и износ. – 2004. – Т. 25. – № 5 (совм. с Гаджиевым Г. Х.).

110. Закрытие трещины в плоскости с помощью наведенного термоупругого поля напряжений // Математическое моделирование. – 2004. – Т. 16. – № 7 (совм. с Кадиевым Р. И.).

111. Напряженное состояние составного цилиндра контактной пары при наличии трещины со связями между берегами // Изв. ТулГУ, серия : мат., мех., инфор. – 2004. – Т. 10. – Вып. 2 (совм. с Гаджиевым Г. Х.).

2005

112. Торможение трещины со связями между берегами с помощью наведенного термоупругого поля напряжений // ПМТФ. – 2005. – Т. 46. – № 1 (совм. с Кадиевым Р. И.).

113. Зарождение дефекта типа трещины во втулке контактной пары // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17. – № 2.

114. Моделирование закрытия трещины во втулке контактной пары // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. – № 4.

115. Оптимальное проектирование узла трения // Изв. ТулГУ, серия : мат., мех., инфор. – 2005. – Вып. 2.

116. Исследование зарождения трещины в круговом нагреваемом диске // Мат. межд. научн. конф. "Прогресс трансп. средств и систем". – Волгоград, 2005 (совм. с Калантарлы Н. М.).

117. Обратная задача механики разрушения составной перфорированной пластины // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. – № 5 (совм. с Бахышовым Ф. А.).

2006

118. Равнопрочная поверхность трения для втулки контактной пары // Тезисы докл. межд. симп. по проблемам мех. деф. тела, посв. 95-летию А. А. Ильюшина. – М., 2006.

119. Решение задачи механики разрушения о зарождении трещины в круговом диске // Сб. ст. "Проблемы механики деформируемых твердых тел и конструкций и горных пород", посв. 75-летию Е. И. Шемякина. – М. : Физматлит, 2006 (совм. с Калантарлы Н. М.).

120. Обратная периодическая задача теории изгиба пластины с упругими включениями // Изв. РАН. МТТ. – 2006. – № 3.

121. Зарождение трещины в круговом нагреваемом диске // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18. – № 1 (совм. с Калантарлы Н. М.).

122. Минимизация теплового состояния втулки контактной пары // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2006. – № 5.

123. Минимизация напряженного состояния составного цилиндра // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2006. – № 6.

124. Оптимальное проектирование составного цилиндра // Материалы, технологии, инструменты. – 2006. – № 3.

125. Решение задачи о развитии полости в вязком теле // Изв. ТулГУ, серия : мат., мех., инфор. – 2006. – Вып. 2 (совм. с Фараджевым Р. Г.).

126. Минимизация параметров разрушения составного цилиндра контактной пары // Сб. ст. "Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород", посв.75-летию Е. И. Шемякина. – М. : Физматлит, 2006.
127. Трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары // ФХММ. – 2006. – № 2.
128. Поперечный изгиб перфорированной пластины, ослабленной прямолинейными трещинами // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та. – 2006. – № 1 (48) (совм. с Алиевой Х. Г.).
129. Минимизация напряженного состояния диска, насаженного на вращающийся вал // Трение и износ. – 2006. – Т. 27. – № 3.
130. Обратная двоякопериодическая задача теории изгиба пластины с упругими включениями // ПМТФ. – 2006. – Т. 47. – № 4.
131. Минимизация напряженного состояния втулки контактной пары // Трение и износ. – 2006. – Т. 27. – № 4.
132. Предельно-равновесное состояние втулки контактной пары при наличии трещин с пластическими концевыми зонами // ПМТФ. – 2006. – Т. 47. – № 5.
133. Решение задачи механики контактного разрушения втулки контактной пары // Межд. научн.-техн. сб. "Надежность и долговечность машин сооружений". – Киев, 2006. – № 1 (26) (совм. с Гаджиевым В. Д.).
134. Напряженное состояние в многослойной цилиндрической структуре, ослабленной системой трещин // Изв. ТулГУ, серия : Актуальные вопросы механики. – 2006. – Вып. 2.

2007

135. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары // ПММ. – 2007. – Т. 71. – Вып. 1.
136. Обратная задача теории упругости о посадке диска на вращающийся вал // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2007. – № 1.
137. Оптимальное проектирование составной пластины, ослабленной периодической системой трещин // Изв. РАН. МГТ. – 2007. – № 1.
138. Предельно-равновесное состояние тепловыделяющего массива при наличии трещин с пластическими концевыми зонами // Деформация и разрушение материалов. – 2007. – № 4.
139. Зарождение дефекта типа трещины в среде с пустотами // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2007. – № 4.
140. Развитие трещиновидных полостей в горящем твердом топливе // Матер. XIII междунар. симпозиума "Динам. и технол. проблемы механики констр. и сплошных сред". Избранные докл., изд. МАИ. – М., 2007 (совм. Рустамов Б. Э.).
141. Зарождение трещин в перфорированном тепловыделяющем массиве // ПМТФ. – 2007. – Т. 48. – № 5.
142. Расчет параметров разрушения втулки составного цилиндра контактной пары // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та. Серия : Механика предельного состояния. – 2007. – № 2.
143. Моделирование частичного закрытия трещин в среде с пустотами // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19. – № 11.

2008

144. Обратная износоконтактная задача для фрикционной пары // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2008. – № 1.
145. Моделирование частичного закрытия трещин в среде с пустотами // Математическое моделирование. – 2008. – Т. 20. – № 2.
146. О развитии двоякопериодической системы полостей в вязких телах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2008. – № 3.

147. Снижение износа втулки составного цилиндра контактной пары // Матер. XIV межд. симпоз. "Дин. и техн. проб. мех. констр. и спл. сред". – М., 2008.

148. Обратные износодетерминирующие задачи для втулки фрикционной пары // Мат. межд. научной конф. "Инновации в машиностроении". – Минск, 2008.

2009

149. Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра // Изв. РАН. МТТ. – 2009. – № 1.

150. Минимизация контактного давления для пары трения втулка-плунжер // Трение и износ. – 2009. – Т. 30. – № 1.

151. Обратная задача механики разрушения пластин, опирающихся на колонны // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2009. – № 2.

152. Трещины со связями между берегами в тепловыделяющем перфорированном массиве // Деформация и разрушение. – 2009. – № 3.

153. Обратные контактные задачи теории упругости для втулки фрикционной пары // Трение и смазка в машинах и механизмах. – 2009. – № 3.

154. Обратная задача механики разрушения для диска, посаженного на вращающийся вал // ПМТФ. – 2009. – Т. 50. – № 4.

155. Торможение когезионной трещины локальным изменением толщины пластины // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та. Серия : Механика предельного состояния. – 2009. – № 1 (6) (совм. с Оруджева Р. У.).

156. Влияние зон предразрушения на раскрытие трещиновидной полости в горящем твердом топливе // Деформация и разрушение материалов. – 2009. – № 12.

157. Зарождение трещины во фрикционной накладке // Вестник ТулГУ, серия: Актуальные вопросы механики. – 2009. – Вып. 5 (совм. с Заркешем Д. И.).

158. Контактное разрушение втулки при наличии трещин вблизи поверхности трения // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2009. – № 6.

2010

159. Modeling cracking in thick-walled cylinder // Advances and Application in Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 2. – issue 1 (совм. с Мустафаевым А. Б.).

160. Торможение роста когезионной трещины малыми выточками // Деформация и разрушение материалов. – 2010. – № 7 (совм. с Оруджевой Р. У.).

161. Локальное разрушение горящего твердого ракетного топлива // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2010. – № 3.

162. О частичном закрытии трещиновидной полости в горящем твердом топливе // Деформация и разрушение материалов. – 2010. – № 12.

2011

163. Влияние температурных напряжений на зарождение трещин во фрикционной накладке // Elasticity and anelasticity. Proc. Int. scientific symp. – М., 2011 (совм. с Заркешем Д. И.).

164. Разрушение горящего твердого топлива с криволинейной трещиновидной полостью, скрепленного с внешним цилиндром // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2011. – № 1 (совм. с Рустамовым Б. Э.).

165. Моделирование частичного закрытия трещиновидных полостей в горящем твердом топливе при действии объемных сил // Изв. Саратовского гос. ун-та. Нов. сер. : мат., мех., инфор. – 2011. – Т. 11. – Вып. 1.

166. Периодическая задача о развитии полостей в вязких средах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2011. – № 2.

167. Разрушение горящего твердого топлива, ослабленного трещиновидной полостью // ПМТФ. – 2011. – Т. 52. – № 1 (совм. с Рустамовым Б. Э.).

168. Обратная двоякопериодическая задача теории упругости для композита, армированного однонаправленными волокнами // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2011. – № 3 (совм. с Мамедовой К. С.).

169. Моделирование трещинообразования во втулке при внутреннем сжатии тел // Мат. межд. науч. симп. "Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела". – Тверь, 2011.

2012

170. Минимизация параметров разрушения в составном теле // Механика машин, механизмов и материалов. – 2012. – № 2 (19) (совм. с Мамедовой К. С.).

171. Effect of Damages on Crack-visible of the Cavity Opening Displacement in Burning Solid Fuel // Inter. J. of Damage mechanics. – 2012. – Vol. 21. – № 3 (совм. с Рустамовым Б. Э.).

172. Interaction of prefracture zones and crack-visible cavity in a burning solid with mixed boundary conditions // Acta mechanica. – 2012. – Vol. 223. – № 3 (совм. с Рустамовым Б. Э.).

173. Partial crack closure in a perforated body with heat release // Materials Science. – 2012. – Vol. 47. – № 6 (совм. с Вагари А. Р.).

174. Nucleation of a Crack under inner Compression of Cylindrical Bodies // Acta Polytechnica Hungarica. – 2012. – Vol. 9. – № 2 (совм. с Золгарнейном И.).

175. Partial closure of a crack-like cavity in an isotropic medium // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2012. – Vol. 41. – № 5 (совм. с Рустамовым Б. Э.).

176. Nucleation of a crack in a perforated heat-releasing material with temperature-dependent elastic properties // J. of Applied Mech. And Tech. physics. – 2012. – Vol. 53. – № 4 (совм. с Вагари А. Р.).

177. Обратная задача теории упругости для волокна, подкрепленной облойкой // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2012. – № 4 (совм. с Велиевым Ф. Э.).

178. Cracks with interfacial bonds in the hub of a friction pair // Meccanica. – 2012. – № 7 (совм. с Золгарнейном И.).

В. М. Мирсалимов

ИЗ ВОСПОМИНАНИЙ

Родился я в 1941 г. в г. Баку. Однако на вопрос, откуда родом наша семья, я отвечаю, что мои родители из древнего города Шемаха, а в Баку оказались в 1918 г., когда в Шемахе и некоторых других городах боевыми отрядами дашнаков была устроена резня азербайджанского населения. В Баку мы прожили до 1942 г. Отец мой был инженер, он окончил в 1932 г. Московский энергетический институт. Во время Великой Отечественной войны его послали работать в г. Кировабад (ныне г. Гянджа) на предприятие оборонного значения. Так наша семья осталась жить в Гяндже, и там я окончил среднюю школу. Кстати, в этой же школе примерно сто лет назад учился будущий Маршал Советского Союза И. Х. Баграмян.

В старших классах я задумывался, куда пойти учиться после окончания школы. В семье был культ инженерной профессии, и на мой вопрос, не пойти ли мне учиться на мех-мат университета, старшие братья и сестра (они учились в технических вузах Саратова и Москвы) отвечали: хочешь работать учителем? Это не входило в мои будущие планы. Я решил поступать в Новочеркасский политехнический институт на механический факультет. Выбор этот был случайным. В классе со мной учился товарищ, которому прислали из Новочеркасска проспект НПИ. Описание этого института, его история, а самое главное – исключительный по замыслу комплекс учебных зданий, произвели на меня сильное впечатление. До сих пор убежден, что в то время в СССР не было другого вуза с таким ансамблем учебных зданий.

В средних классах школы со мной произошел забавный случай, который я помню до сих пор. По соседству с нашим домом располагался строительный техникум. Как-то я увидел, что в этом техникуме перевозят большое количество книг. Заинтересовавшись, я подошел к книжным стопкам. После моих расспросов и просьб мне разрешили выбрать одну книгу. Перебирая книги, я остановился на монографии С. П. Тимошенко "Колебания в инженерном деле" 1935 г. издания. В то время я понятия не имел, о чем эта книга, но, полистав, почему-то захотел взять именно ее. Она и сейчас находится в моей библиотеке. Перефразируя слова О. Бисмарка, в шутку можно сказать, что самим провидением суждено мне было стать механиком.

Учась в НПИ, я все больший интерес испытывал к точным наукам (математике и механике), на что обратили внимание мои преподаватели. Благодаря их вниманию и обращению к руководству института ректор НПИ (Б. Н. Авилов-Карнаухов) дал письмо к ректору Ростовского государственного университета (Ю. А. Жданова), в котором охарактеризовал меня как проявляющего особый интерес к математике и механике и просил разрешить мне учиться также и на мех-мате университета. На старших курсах НПИ я одновременно учился на мех-мате РГУ. Окончил я НПИ в 1964 г., а РГУ – в 1966 г.

В РГУ наиболее близко я познакомился с доц. Ю. А. Устиновым (ныне д.ф.-м.н., проф.). О нем у меня остались самые лучшие воспоминания. Юрий Анатольевич – прекрасный ученый, педагог и человек. Он предлагал мне после окончания университета пойти к нему в аспирантуру, но меня в то время тянуло в Москву. Было желание продолжить учебу в Москве. Стал готовиться к поступлению в аспирантуру. Возник вопрос, на какую тему написать реферат. Я обратился к проф. Ю. А. Амензаде с просьбой предложить тему для реферата. Юсиф Аменович предложил написать реферат по теории оболочек.

Значительная часть объема реферата была посвящена работам И. И. Воровича и его учеников. После сдачи документов в Институт проблем механики мой реферат оказался у

проф. А. Л. Гольденвейзера. После беседы с ним у меня сложилось впечатление, что реферат ему понравился. Был назначен экзамен. Вначале все шло хорошо, затем появился проф. В. Б. Лидский и стал "гонять" по математике. До экзамена я не предполагал, что основное внимание будет уделено математике, и, естественно, не готовился. Мои ответы показались Лидскому недостаточно строгими и четкими. Хотя было видно, что Гольденвейзер не разделяет мнения Лидского, они посоветовали подготовиться по математике.

Дальнейшие события пошли согласно поговорке "нет худа без добра". Спустя несколько месяцев мой друг Ф. Г. Шамиев (позже д.ф.-м.н., проф.) встретился на конференции с Черепановым Г. П., который сказал, что хотел бы иметь аспирантов. Ф. Г. Шамиев рекомендовал меня. В сентябре 1967 г. я приехал в Москву для учебы в аспирантуре под руководством Г. П. Черепанова в ИПМ в отделе гидродинамики, руководимом чл.-корр. АН СССР Л. А. Галиным. Геннадий Петрович при первом же знакомстве поставил мне пару задач и сказал, что этот цикл задач можно назвать "меры борьбы с разрушением". Ставил задачи он очень четко, но, как я потом убедился, не любил что-либо разяснять. В первые же месяцы нашей с ним работы на обращение с каким-нибудь вопросом он говорил: разберись сам, пока не разберешься, не приходи. Такое суровое руководство имело положительную сторону, оно приучало к самостоятельности.

В сентябре 1968 г. во Львове проходил III симпозиум по концентрации напряжений. Геннадий Петрович поехать не мог и попросил меня прочесть его доклад (у меня доклада не было, я о конференции узнал поздно). Для этого он дал письмо к проф. В. В. Панасюку (ныне акад. НАН Украины). Приехав во Львов, я передал письмо Владимиру Васильевичу, который все устроил. Во время доклада заседание вел акад. АН УССР Г. Н. Савин. После окончания доклада стали задавать вопросы. На пару вопросов я ответил, но на последующие отвечать было трудно. Выручил Гурий Николаевич, заявив, что "ему поручено только прочитать доклад, вопросы оставьте автору доклада". Во Львове я познакомился со многими замечательными учеными из ФМИ и Львовского государственного университета, дружба и научное сотрудничество с которыми продолжались долгие годы.

К концу второго года учебы в аспирантуре (сентябрь 1969 г.) я стал настойчиво говорить Г. П. Черепанову, что все уже сделал и не пора ли оформлять диссертацию. В ответ Геннадий Петрович сказал: "Давай поступим так: придумай новую задачу и реши ее". Через семь-десять дней я показал постановку и решение новой задачи, и Геннадий Петрович дал добро на оформление диссертации. Оформление кандидатской диссертации заняло у меня две недели. Взяв рукопись для прочтения, Геннадий Петрович сказал: "Займись, чем хочешь". Я решил съездить к родителям в Гянджу. Через десять дней вернулся в Москву. Началось томительное для меня ожидание, когда же Геннадий Петрович прочитает рукопись диссертации. Наконец в начале апреля он отдал мне одобренную рукопись без каких-либо исправлений и рекомендовал сделать несколько докладов на научном семинаре кафедры теории пластичности мех-мата МГУ им. М. В. Ломоносова. В то время я посещал этот семинар. В конце одного из семинаров Юрий Николаевич Работнов спросил у секретаря семинара Р. И. Мазинга, чей будет доклад на следующей неделе. Оказалось, что докладывать некому. Воспользовавшись ситуацией, я представился Юрию Николаевичу и попросил поставить мой доклад по кандидатской диссертации. На следующей неделе я доложил содержание первой главы. Доклад прошел хорошо, был одобрен. Особенно мне понравилось мнение о работе В. Д. Ключникова и А. С. Григорьева. Через несколько дней Геннадий Петрович, не присутствовавший на семинаре, рассказал, что у него был телефонный разговор с Владимиром Дмитриевичем, в котором он отметил, что это только третья часть работы.

Возник вопрос, где защищать диссертацию. ИПМ исключался из-за ненормальных отношений руководства ИПМ и Г. П. Черепанова. К этому времени Геннадий Петрович вынужден был перейти работать профессором на кафедру Московского горного университета под руководством замечательного человека, ученого и организатора Леонида Викторовича Ершова. Учитывая наличие во Львове крупной научной школы по механике разрушения, Геннадий

Петрович предложил защищать диссертацию во Львовском государственном университете им. И. Франко. Он написал соответствующее письмо заведующему кафедрой теории упругости ЛГУ Д. В. Грилицкому. Собрав документы, я приехал во Львов в начале июня 1970 г. Оказалось, что проф. Д. В. Грилицкий находится в г. Каневе на конференции, сотрудники же кафедры сообщили, что приказом ректора в январе и июне (во время сессий) диссертационные советы не имеют права принимать документы к защите. Пришлось ждать Д. В. Грилицкого. После его приезда мы были в ректорате, где нам сказали, что вопрос может быть решен не раньше сентября. Разочарованный таким формализмом, я вернулся в Москву.

После этого Геннадий Петрович решил на защиту в МГУ. Я обратился на кафедру теории пластичности к акад. Ю. Н. Работнову, чтобы доложить содержание всей диссертации, но Юрий Николаевич, посоветовавшись с проф. В. Д. Ключниковым, сказал, что в докладе нет необходимости и можно получить выписку из протокола заседания кафедры о рекомендации работы к защите на ученом совете мех-мата МГУ им. М. В. Ломоносова. В конце июня были утверждены официальные оппоненты: проф. В. Д. Ключников и проф. Д. В. Грилицкий. Через несколько дней я выпустил автореферат. Элеонора Антоновна (технический секретарь ученого совета) предупредила, что имеется большая очередь и преимущество имеют сотрудники и аспиранты МГУ, а у тех, кто со стороны, защита будет в конце декабря. Пришлось полгода ждать.

Г. П. Черепанов говорил, что как бы хорошо я не доложил, по его прогнозам, пять шаров будет против. Элеонора Антоновна была настроена оптимистически и шутила, что все будет хорошо: "У Вас один оппонент – Владимир Дмитриевич, а другой – Дмитрий Владимирович. Это, – говорила она, – хорошая примета".

Наш земляк акад. АН Азерб. ССР А. Х. Мирзаджанзаде часто бывал в Москве, а осенью 1970 г. по просьбе А. Ю. Ишлинского подал документы для участия в конкурсе на замещение вакантной должности зав. отделом в ИПМ АН СССР. Переезжать в Москву он не собирался. Руководство ИПМ, видимо, не хотело, чтобы эту должность занял проф. В. Н. Николаевский. Я иногда виделся с Азадом Халиловичем. Зная отношения между Г. П. Черепановым и Г. И. Баренблаттом, он решил оказать мне поддержку. На одном из заседаний ученого совета ИПМ он познакомил меня с Г. И. Баренблаттом. Узнав, чей я аспирант, Г. И. Баренблатт сказал: "Я сочувствую Вам".

За несколько недель до защиты Элеонора Антоновна сообщила, что Л. И. Седов хотел меня видеть. Она провела меня в его кабинет. Леонид Иванович задал несколько общих вопросов, а затем, улыбаясь, сказал: "Конечно, Вас можно зажать, но мы этого делать не будем". Так от патриарха акад. Л. И. Седова я получил добро.

25 декабря 1970 г. прошла защита моей кандидатской диссертации. Прошла она очень успешно. Мне даже не задали ни одного вопроса. Хорошо выступил Л. А. Галин, хотя он не был членом ученого совета, пришел на заседание ради меня. Прогноз Геннадия Петровича не оправдался. Когда я ему рассказал, как А. Х. Мирзаджанзаде нейтрализовал А. Ю. Ишлинского и Г. И. Баренблатта, он не согласился, сказав, что они взвесили и поняли, что остаются в меньшинстве, и поэтому не пришли. Как бы то ни было, я остался очень благодарен Азаду Халиловичу Мирзаджанзаде, Льву Александровичу Галину, официальным оппонентам Дмитрию Владимировичу Грилицкому и Владимиру Дмитриевичу Ключникову. В. Д. Ключников позже сказал, что из всех оппонируемых им за последние годы кандидатских диссертаций он может отметить три лучшие работы, одна из которых – моя. С тех пор на многие годы Владимир Дмитриевич стал моим "ангелом-хранителем".

ВАК утвердил диссертацию в течение одного месяца. Весной 1971 г. Г. П. Черепанов предложил написать совместную книгу по упругопластическим задачам. Составили примерный план, мне поручалось собрать материал по опубликованным работам и на его основе написать книгу, а Геннадий Петрович затем собирался ее отредактировать. Я принялся за эту работу. По мере погружения в эту проблему я обнаружил много нерешенных задач и заодно занялся их решением. Поэтому в первые годы после защиты кандидатской диссертации мое внимание

больше распространялось на упругопластические задачи и отдалялось от проблем механики разрушения. Начиная с 1970 г. я регулярно по полученным результатам делал доклады у Ю. Н. Работнова и у Л. А. Галина в ИПМ, а также у Э. И. Григолока.

Весной 1973 года я представил машинопись книги по упругопластическим задачам Г. П. Черепанову. В это же время он предложил написать статью по решению некоторых задач неоднородной теории упругости для совместного опубликования в ПММ. В сентябре я представил готовую статью. Геннадий Петрович сказал, что в журнале ПММ строгие требования и он должен тщательно ее отредактировать. Слова были правильные, но я почувствовал, что что-то не так и Геннадий Петрович не искренен. Мои мрачные прогнозы подтвердились, когда написанная мною статья "Некоторые задачи неоднородной теории упругости" была опубликована в ПММ в № 3 за 1974 г. Соавтором Г. П. Черепанова был не знакомый мне Соткилава О. В.

В обмане этом не было необходимости, если бы Геннадий Петрович сказал, что ему так надо, я наверняка согласился бы ради уважения к своему учителю. С тех пор, можно сказать, наше научное общение прекратилось.

Между тем я активно работал над докторской диссертацией. Весной 1976 г. работа над ней была практически завершена. В мае после очередного доклада на семинаре у Ю. Н. Работнова в МГУ я обратился к Юрию Николаевичу за советом по поводу защиты. Юрий Николаевич посоветовал поговорить с Л. А. Галиным, отметив, что его мнение для него очень важно. На следующий день я был у Л. А. Галина в ИПМ. Выслушав меня, Лев Александрович напомнил, что идет реорганизация ВАКа и целесообразно немного подождать.

Я стал задумываться, в каком совете (их было не очень много) защищать диссертацию. Так как диссертация была посвящена краевым задачам механики с неизвестной границей, наиболее подходящим советом был совет при Казанском государственном университете им. В. И. Ульянова-Ленина. В КГУ была известная школа по краевым задачам механики с неизвестной границей (Г. Г. Тумашев, М. Т. Нужин, И. Г. Терегулов и многие другие). Для налаживания контактов с казанской школой механиков мне неоценимую помощь оказал мой друг Виталий Николаевич Паймушин, замечательный ученый, ныне акад. АН Татарстана.

Защита была назначена на 5 июня 1980 г. В апреле (перед рассылкой автореферата диссертации) поступили три анонимных письма одного содержания в отдел науки и учебных заведений ЦК КПСС, в ВАК и в специализированный совет при КГУ. Кому-то очень не хотелось, чтобы я защитил диссертацию. Заместитель председателя специализированного совета при КГУ А. В. Саченков, имеющий репутацию весьма проникательного человека, мне сказал: "Хотя ты не допускаешь мысли, что это тот человек, которого я подозреваю в этом, я советую тебе взять у Г. П. Черепанова отзыв на автореферат, и тогда будет ясная картина". По совету А. В. Саченкова я обратился к Геннадию Петровичу с такой просьбой. Геннадий Петрович сказал мне, что обязательно пришлет отзыв на автореферат, но так этого ни сделал. Вместо этого он стал убеждать официального оппонента Б. Д. Аннина не давать на диссертацию положительного отзыва. Однако Б. Д. Аннин проявил принципиальность и самые лучшие человеческие качества.

Защита диссертации прошла успешно. В отличие от защиты кандидатской диссертации было задано множество вопросов (62). Менее чем через полгода ВАК утвердил диссертацию.

Сейчас я понимаю, насколько важна мне была поддержка Л. А. Галина, В. Д. Клюшникова, Б. Д. Аннина, Х. А. Рахматулина, К. З. Галимова, Л. М. Куршина, А. В. Саченкова, И. Г. Терегулова, В. В. Панасюка, Д. Д. Ивлева, В. Н. Паймушина. Я благодарен судьбе, которая свела меня с ними.

В 2007 г. Новочеркасский политехнический институт (ныне Южно-российский государственный технический университет) отмечал свое столетие. На сайте кафедры "Эксплуатация автомобильного транспорта", которую я окончил, были отмечены лучшие выпускники (8-10 фамилий), среди которых я нашел себя. Несмотря на то, что я не занимаюсь проблемами транспорта, альма-матер не забыла меня.

Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Мионов

О НАЛОЖЕНИИ УСИЛИЙ ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Известно, что как-то в огороде у дедки выросла репка, большая, пребольшая. Дедка приложил все усилия, но репку не вытащил. Это означало, что предельное сопротивление извлечения репки из огородной земли оказалось больше величины усилий, приложенных дедкой к репке.

Пришла помогать бабушка и присоединила свои усилия к дедкиным, но и совместных усилий не хватило, чтобы выдернуть репку. Мы все знаем, чем кончилась эта история. Правда, до сих пор не всем ясна роль мышки.

Для достижения предельного состояния системы в определенных случаях требуется совместное согласованное приложение нескольких независимых усилий.

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

УДК: 539.374

Предположим, что основное напряжение σ_{ij} является суммой составляющих напряжений σ_{ijk} :

$$\sigma_{ij} = \sum_k \sigma_{ijk}. \quad (1)$$

Предположим далее, что квадраты максимальных касательных напряжений определяются по формулам:

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = T^2, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\sigma_{xk} - \sigma_{yk}}{2}\right)^2 + \tau_{xyk}^2 = \kappa_k^2. \quad (3)$$

Удовлетворяя (2), положим

$$\sigma_x = \sigma + T \cos 2\theta, \quad \sigma_y = \sigma - T \cos 2\theta, \quad \tau_{xy} = T \sin 2\theta. \quad (4)$$

Удовлетворяя (3), положим

$$\sigma_{xk} = \sigma_k + \kappa_k \cos 2\theta_k, \quad \sigma_y = \sigma_k - \kappa_k \cos 2\theta_k, \quad \tau_{xyk} = \kappa_k \sin 2\theta_k. \quad (5)$$

Рассмотрим вначале два слагаемых:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{x1} + \sigma_{x2}, \\ \sigma_y &= \sigma_{y1} + \sigma_{y2}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy1} + \tau_{xy2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно (2)–(6) получим:

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = T^2, \quad \left[\left(\frac{\sigma_{x1} - \sigma_{y1}}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_{x2} - \sigma_{y2}}{2}\right)\right]^2 + (\tau_{xy1} + \tau_{xy2})^2 = T^2. \quad (7)$$

Из (2)–(7) найдем:

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1\kappa_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = T^2. \quad (8)$$

Если κ_1, κ_2 являются постоянными значениями, то максимальное значение усилия T будет иметь место при $\theta_1 = \theta_2$.

В этом случае $T = \kappa_1 + \kappa_2$, при несовпадении направления углов $\theta_1 \neq \theta_2$ значение усилия T , естественно, понижается.

Рассмотрим три слагаемых:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{x1} + \sigma_{x2} + \sigma_{x3}, \\ \sigma_y &= \sigma_{y1} + \sigma_{y2} + \sigma_{y3}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy1} + \tau_{xy2} + \tau_{xy3}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9), а также соотношений, вполне аналогичных (7), (4), (5), получим:

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + 2\kappa_1\kappa_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2\kappa_2\kappa_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + 2\kappa_1\kappa_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) = T^2. \quad (10)$$

Очевидно, при $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ имеет место $T = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3$.

При разбросе в рядах трудящихся: $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3$ максимально возможное значение прилагаемого усилия, очевидно, не достигается.

Сделаем замечание. В данном случае рассматривается двумерная задача. Возможны различные обобщения, когда для каких-либо слагаемых σ_{ijk} имеет место условие предельных состояний, отличное от (3), например:

$$A \left(\frac{\sigma_{xk} - \sigma_{yk}}{2}\right)^2 + B\tau_{xyk}^2 = \kappa_k^2, \quad A, B - const. \quad (11)$$

Ивлев Дюис Данилович,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ivlev21@mail.ru

Максимова Людмила Анатольевна,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: maximova_ng@mail.ru

Миронов Борис Гурьевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, B. G. Mironov

**ABOUT IMPOSING OF EFFORTS FOR ACHIEVEMENT OF A LIMIT
CONDITION**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Ivlev, Dyuis Danilovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Maksimova, Ludmila Anatolievna

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

Варданян Седрак Ваникович (vardanyan_s@yahoo.com) – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (cotedurhone_mail.ru) – доктор физико-математических наук (1996), профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский лесотехнический институт, г. Королев Московской области.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

Ивлев Дюис Данилович (ivlev21@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный открытый университет, г. Москва.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (irakon63@hotmail.com) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва.

Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Учреждение Российской академии наук "Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН", г. Москва.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marusbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

Спорохин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Радаев Ю. Н.</i> Об одной достижимой оценке снизу трехмерного инварианта напряжений Кулона–Треска системами "двумерных" касательных напряжений ...	3
<i>Глаголев В. В., Глаголев, Л. В. Кунашов Н. Д.</i> Продольный сдвиг в рамках дискретного подхода к разрушению	17
<i>Зубчанинов В. Г., Алексеева Е. Г.</i> Запаздывание векторных и скалярных свойств материалов при сложном нагружении	26
<i>Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А.</i> К вопросу об исследовании эффекта Баушингера и построении поверхности текучести	40
<i>Ревуженко А. Ф., Клишин С. В.</i> Численное моделирование задачи о выпуске сыпучих материалов	46
<i>Ивлев Д. Д., Непершин Р. И.</i> Пластическое деформировании многогранной призмы плоским инструментом	56
<i>Трещев А. А., Теличко В. Г., Чигинский Д. С., Астахов Д. С.</i> Термоупругий потенциал деформации для нелинейных материалов, находящихся в условиях термомеханического нагружения	66
<i>Трещев А. А., Теличко В. Г., Царев А. Н.</i> Моделирование пространственных конструкций из разносопротивляющихся материалов 3D конечными элементами	74
<i>Швайко Н. Ю.</i> О материальных функциях варианта теории пластичности, основанного на концепции скольжения	83
<i>Сенашов С. И., Гомонова О. В.</i> Новые поля скоростей, описывающие сжатие пластического слоя между плитами	89
<i>Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е.</i> Эволюционное уравнение плоских ударных волн в несжимаемых средах со слабой неоднородностью	95
<i>Чернышов А. Д., Горяйнов В. В.</i> Решение одного нелинейного интегродифференциального уравнения методом быстрых разложений	105
<i>Орлов В. Н., Пчелова А. З.</i> Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности	113
<i>Дац Е. П., Мокрин С. Н., Мурашкин Е. В.</i> Расчет накопленной остаточной деформации в процессе «нагрева-охлаждения» упругопластического шара	123
<i>Меньшова И. В.</i> Разложения по функциям Фадля-Папковича. Основные формулы	133

<i>Меньшова И. В.</i> Передача нагрузки от поперечного ребра жесткости к полосе	140
<i>Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е.</i> О возникновении плоских и сферических волн в упругой среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию	147
<i>Манцыбора А. А., Русанов М. М.</i> Автомодельная задача об ударном деформировании упругопластического тела	155
<i>Макарова Н. В., Полоник М. В., Рогачев Е. Е.</i> Абразивный износ неоднородных материалов	164
<i>Деревянных Е. А.</i> О предельном состоянии анизотропных призматических стержней при кручении в случае трансляционной анизотропии	174
Вагиф Мирахмедович Мирсалимов	185
Вагиф Мирахмедович Мирсалимов	187
<i>Мирсалимов В. М.</i> Из воспоминаний	201
<i>Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г.</i> О наложении усилий для достижения предельного состояния	205
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	208
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	211
СОДЕРЖАНИЕ	213

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2012. № 4(14)**

Отв. за выпуск: А. В. Балашникова, Е. А. Деревянных

Технические редакторы: Л. Н. Улюкова, В. Ю. Лашманова, Н. А. Осипова,
Л. А. Судленкова

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова, Е. А. Деревянных

Макет: А. В. Балашникова, Е. А. Деревянных

Подписано в печать 28.12.2012 г. Формат 70x100/8. Бумага писчая.

Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e.

Усл. печ. л. 27,13. Тираж 400 экз. Цена свободная. Заказ №

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38