

ББК 95.4; 22.251  
Ч-823

Подписной индекс в каталоге ПРЕССА РОССИИ: 13109  
ISSN: 2073-5499

ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА  
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2013. № 1(15)

**Учредитель:** ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Учредители серии:** Г. Н. Григорьев, Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров, Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Т. Н. Петрова, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин, А. А. Шуканов

**Редакционная коллегия:** Радаев Ю. Н. – ответственный редактор, Матченко Н. М. – зам. ответственного редактора, Тихонов С. В. – ответственный секретарь, Баженов В. Г., Буренин А. А., Георгиевский Д. В., Глаголев В. В., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Каюмов Р. А., Климов Д. М., Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Кулиев В. Д., Ломакин Е. В., Максимова Л. А., Маркин А. А., Манжиров А. В., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р. И., Победря Б. Е., Радченко В. П., Ревуженко А. Ф., Редкозубов С. А., Сенашов С. И., Спорыхин А. Н., Трещев А. А., Чернышов А. Д., Хромов А. И., Шашкин А. И.

**Международный совет:** Амензаде Р. Ю. (Азербайджан), Варданян С. В. (Армения), Мирсалимов В. М. (Азербайджан), Тамуж В. П. (Латвия), Чигарев А. В. (Белоруссия)

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

**Тел.:** (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19.

**Email:** predel21@mail.ru.

**WWW:** <http://predel.chgpu.edu.ru>.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-36234 от 15.05.2009 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2013



Адель А. Аль Имам, Н. Д. Вервейко

## ОСОБЕННОСТИ ПРОДОЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ЕГО МИКРОСТРУКТУРЫ В КОЛЬЦЕВОМ ЗАЗОРЕ

Воронежский государственный университет

**Аннотация.** В работе произведен расчет поля скоростей продольного стационарного течения вязкопластического микроструктурного материала в кольцевом зазоре под действием перепада давления. Показано, что учет характерного размера  $h$  микроструктуры приводит к возникновению жесткой области течения, обусловленной наличием микроструктуры, что влияет на объемный расход через поперечное сечение кольцевого зазора.

**Ключевые слова:** микроструктура, застойная зона течения, вязкопластичность, зазор.

УДК: 539.374

### Введение.

Продольное течение различного рода технических материалов в кольцевых зазорах под действием перепада давлений достаточно широко распространено в нефтехимической промышленности, технологических процессах строительных материалов, в работе машин и механизмов. Свойства сложных материалов определяются свойствами жидкости, внесенного в жидкость наполнителя, и все это проявляется в синергетическом эффекте и появлении новых эмерджентных свойств материала, которые можно объяснить влиянием характерного размера  $h$  представительного объема  $\Delta V = h^3$ , вязкостью и появлением предела пластичности таких материалов. Основополагающие идеи математического моделирования реологически сложных материалов заложены Д. Д. Ивлевым [1].

### Постановка задачи.

Ниже рассматривается осесимметричное течение изучаемого материала в кольцевом зазоре (рис. 1) под действием перепада давления  $\partial p / \partial z = Const$ . Поле скоростей  $w(r)$  определяется обыкновенным дифференциальным уравнением 4-го порядка, учитывающим вязкость материала и характерный размер  $\delta = h/R_o$  микроструктуры [2]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\delta^2}{12} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \right] = -q^2, \quad (1)$$

здесь:  $\xi = r/R_o$ ;  $w = \nu/V_o$ ;  $\delta = h/R_o$ ;

$q^2 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{R_o^2}{V_o}$ ;  $r$  – радиальная координата;  $R_o$  – радиус внешнего контура цилиндрической цели;  $V_o$  – характерная скорость течения;  $\mu$  – коэффициент вязкости.

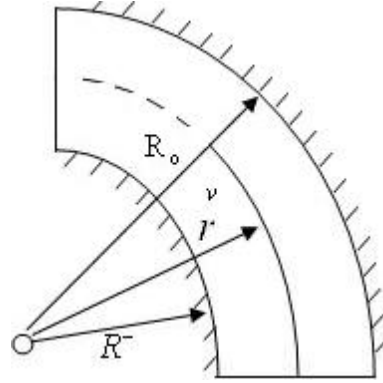


Рис. 1. Схематическое изображение цилиндрического зазора с выделением границы  $r = r^v$  застойной зоны, гипотетически примыкающей к внутренней  $\nu = R^-$  или внешней  $R_0$  границам зазора

Поставим граничные условия для скорости  $w$  течения материала на жестких границах и на границе ядра течения (на границе застойной зоны):

$$\begin{aligned} w(1) &= 0; \quad \left( \frac{dw(\xi)}{d\xi} - \gamma \frac{d^2w(\xi)}{d\xi^2} \right) \Big|_{\xi=1} = 0; \\ w(\xi^v) &= 0; \quad \frac{dw(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi^v} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Условия (2) поставлены в предположении, что область  $\xi \in [\xi^-; \xi^v]$  является застойной, а течение материала происходит в области, примыкающей к внешнему контуру  $r = R_0$  щели.

Вторая гипотетическая возможность течения состоит в примыкании застойной зоны к внешней границе цилиндрического зазора, так что граничные условия (2) должны трансформироваться к виду (3)

$$\begin{aligned} w(\xi^-) &= 0; \quad \left( \frac{dw(\xi)}{d\xi} - \gamma \frac{d^2w(\xi)}{d\xi^2} \right) \Big|_{\xi=\xi^-} = 0; \\ w(\xi^v) &= 0, \quad \frac{dw(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi^v} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

**Приближенное решение задачи течения вязкопластического материала в цилиндрическом зазоре при условии полного прилипания материала к стенкам.**

Точное решение сингулярно возмущенного за счет малого параметра  $\delta$  линейного обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (1) построить не удастся, поэтому воспользуемся методом малого параметра [3], [4]. Представим решение для скорости  $w(\xi, \delta)$  в виде ряда по параметру  $\delta$  и ограничимся членами порядка  $\delta^2$  не выше

$$w(\xi, \delta) = w^0(\xi) + \delta^2 w^1(\xi) + \dots \quad (4)$$

Уравнение (1) для члена  $w^0(\xi)$  ряда (4) упрощается:

$$\frac{d^2 w^0}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dw^0}{d\xi} = -q^2. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$w^0(\xi) = -\frac{q^2}{4} \cdot \xi^2 + C_1 \ln \xi + C_2. \quad (6)$$

Четырех граничных условий (2) или (3) избыточно для определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  в (6) и неизвестной границы  $\xi = \xi^v$  застойной зоны, поэтому необходимо выбрать три из четырех условий и предположить наличие пограничного слоя у стенки, вдоль которой материал движется.

Выбор граничных условий прилипания материала к границам  $\xi = 1$  или в возможном 2-м случае течения к границе  $\xi = \xi^-$  и условий на границе застойной зоны  $\xi = \xi^v$  приводит к невозможности течения, невозможности существования границы ядра течения в области течения.

В самом деле, в случае возможности 1-го варианта течения при граничных условиях (3) для определения постоянных  $C_1$ ,  $C_2$  и границ застойной зоны  $\xi^v$  получим следующую систему уравнений:

$$-\frac{q^2}{4} + C_2 = 0; \quad -(q^2/4)\xi^{v^2} + C_1 \ln \xi^v + C_2 = 0; \quad -\frac{q^2}{2} \xi^v + \frac{C_1}{\xi^v} = 0. \quad (7)$$

Из (7) следует, что  $C_2 = q^2/4$ ;  $C_1 = \frac{q^2 v^2}{2 \xi^v}$ , а граница застойной зоны  $\xi = \xi^v$  определяется из уравнения  $\Phi(\xi^v) = \xi^v (2 \ln \xi^v - 1) + 1 = 0$ . Графическое исследование (рис. 2) решения этого уравнения показывает, что оно имеет единственное точное решение  $\xi^v = 1$ , что соответствует застойной зоне, занимающей всю область течения  $\xi \in [\xi^-, \xi^+]$ , где  $\xi^+ = 1$ , т. е. течение в щели при таком выборе граничных условий отсутствует. Аналогичные исследования гипотезы прилипания застойной зоны к внешней границе цилиндрической щели (граничные условия (3)) показывают невозможность такой ситуации, т. е. невозможность гипотетического течения (3).

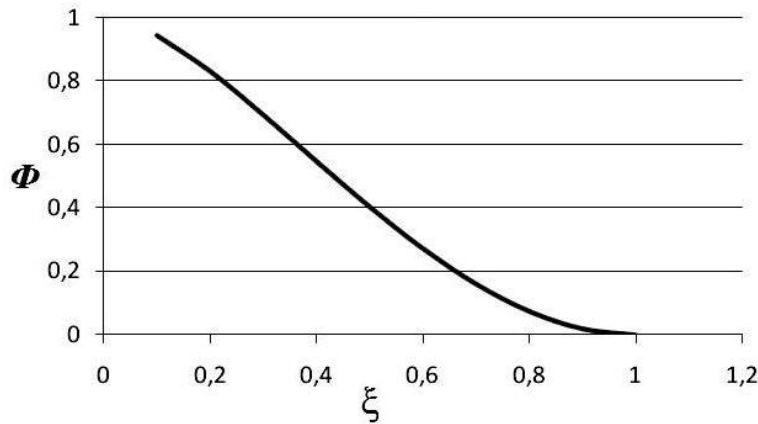


Рис. 2. Графическое представление решения уравнения  $\Phi\left(\xi^v\right) = 0$  для нахождения радиуса  $\xi = \xi^v$  застойной зоны

Таким образом, в условиях прилипания материала к стенкам цилиндрической щели возможно течение только без образования застойных зон (в нулевом приближении разложения  $w(\xi, \delta)$  в степенной ряд), и распределение скорости  $w^p(\xi)$  имеет вид

$$w^0(\xi) = \frac{q^2}{4} \left( 1 - \xi^2 - (1 - \bar{\xi}^2) \frac{\ln \xi}{\ln \bar{\xi}} \right); \quad w^o(1) = 0; \quad w^o(\bar{\xi}) = 0. \quad (8)$$

График распределения скорости  $w^o(\xi)/\frac{q^2}{h}$  приведен на рис. 3.

$$\frac{w^o(\xi)}{q^2/4} = 1 - \xi^2 - (1 - \bar{\xi}^2) \frac{\lg \xi}{\lg \bar{\xi}}, \quad \text{для } \bar{\xi} \in [0, 1; 0, 5; 0, 9].$$

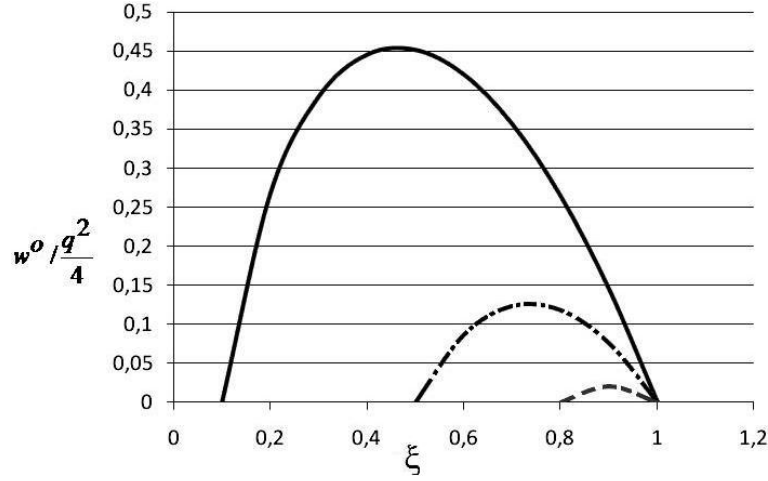


Рис. 3. Графическое изображение распределения относительной скорости течения вязкопластического материала в цилиндрическом щелевом зазоре  $\xi \in [\bar{\xi}; 1]$  в условиях полного прилипания материала к стенкам

Уравнение для первого приближения  $w^1(\xi)$  получим из (1) путем подстановки решения в виде (4) и приравнивания к нулю слагаемых при коэффициенте  $\delta^2$ :

$$\frac{d^2 w^1}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dw^1}{d\xi} = P^1(w^o(\xi)), \quad (9)$$

где  $P^1(w^o) = -\frac{1}{12} \cdot \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\xi} \left( \xi \frac{d^2 w^o}{d\xi^2} \right) \right) - \frac{1}{12} \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{d^2 w^o}{d\xi^2} \right)$ .

После подстановки выражения (8) для  $w^o(\xi)$  в (9) приведем его к виду

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dw^1}{d\xi} \right) = \frac{q^2}{48} \cdot \frac{1}{\xi} \left( 1 - \frac{5}{4} \cdot \frac{1 - \bar{\xi}^2}{\ln \bar{\xi}} \cdot \frac{1}{\xi^2} \right) \quad (10)$$

при нулевых условиях для  $w^1(\xi)$  на границе:  $w^1 = w^1(\bar{\xi}) = 0$ .

Решение уравнения (10) для  $w^1(\xi)$  имеет вид (11)

$$w^1(\xi) = \frac{q^2}{48 \cdot 2} \left[ \ln^2 \xi + \frac{5}{48} \frac{1}{\bar{\xi}^6} \frac{1 - \bar{\xi}^2}{\ln \bar{\xi}} \right] + C_3 \ln \xi + C_4; \quad (11)$$

здесь постоянные  $C_3$  и  $C_4$  определяются из нулевых граничных условий

$$C_3 = -\frac{q^2}{24} \left( \frac{1}{2} (\ln \xi)^2 + \frac{5}{96} \frac{1 - \bar{\xi}^2}{\ln \bar{\xi}} \left( \frac{1}{\bar{\xi}^6} - 1 \right) \right); C_4 = \frac{5}{96 \cdot 12} q^2 \cdot \frac{\bar{\xi}^2 - 1}{\ln \bar{\xi}}. \quad (12)$$

Таким образом, скорость течения  $w(\xi; \delta)$  в приближении с учетом слагаемых порядка  $\delta^2$  имеет вид

$$w(\xi, \delta) = \frac{q^2}{4} (1 - \xi^2 - (1 - \bar{\xi}^2) \frac{\ln \xi}{\ln \bar{\xi}}) + \delta^2 \cdot W^1(\xi). \quad (13)$$

Гипотеза полного пролипания материала к стенкам зазора и отсутствие «качения» представительного объема вдоль границ приводят к слабому влиянию микроструктуры на скорость течения (13), где добавки с параметром  $\delta^2$  имеют порядок  $0,01\delta^2$ , что приводит к выводу, что основное влияние микроструктуры сосредоточено в пограничном слое и в условиях, связанных с «качением» представительного элемента вдоль границы.

**Течение вязкопластического микроструктурного материала в цилиндрической щели при условии прискальзывания на границах щели и наличия пограничного слоя.**

Учет влияния микроструктуры на течение вблизи границы щели приводит к появлению кинематического пограничного слоя (рис. 4) толщиной  $\Delta$ , на внутренней границе которого материал прилипает к границе щели, т. е.  $V(1) = 0$  или  $V(\bar{\xi}) = 0$ , а на внешней границе должно быть проведено сращивание внешнего решения с решением в пограничном слое. Такой подход при малых  $\Delta$  требует выполнения условия проскальзывания на границе пограничного слоя щели.

$$\frac{dW(1)}{d\xi} - \gamma \frac{d^2W(1)}{d\xi^2} = 0 \text{ и } \frac{dW(\bar{\xi})}{d\xi} - \gamma \frac{d^2W(\bar{\xi})}{d\xi^2} = 0. \quad (14)$$

Исследуем возможность течения материалов в цилиндрической щели при условии проскальзывания на внешней границе щели  $\xi=1$  и образования застойной зоны на внутренней границе щели  $\xi=\bar{\xi}$ :

$$\frac{dW(1)}{d\xi} - \gamma \frac{d^2W(1)}{d\xi^2} = 0; W(\bar{\xi}) = 0; \frac{dW(\bar{\xi})}{d\xi} = 0. \quad (15)$$

Для решения задач течения материала в области  $\xi \in [\bar{\xi}, 1]$  найдем постоянные интегрирования  $C_1, C_2$  представления скорости  $W(\xi)$  в виде (6) из условий (15)

$$W(\xi) = -\frac{q^2}{4} \cdot \xi^2 + C_1 \ln \xi + C_2;$$

$$-q^2/2 + C_1 + \gamma(q^2/2 + C_1) = 0; -\frac{q^2}{2} \bar{\xi}^2 + C_1 \ln \bar{\xi} + C_2 = 0; -q^2/2 \bar{\xi} + C_1/\bar{\xi} = 0. \quad (16)$$

Из граничных условий (16) следует

$$C_1 = q^2 \bar{\xi}^2; C_2 = \frac{q^2}{2} (\bar{\xi}^2 - 2 \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \ln \bar{\xi}); \bar{\xi} = \sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}. \quad (17)$$

На рис. 4 представлен график зависимости безразмерной границы  $\bar{\xi} = \frac{r}{R_0} = \sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}$  от параметра  $\gamma < 0$  граничного условия проскальзывания. Из рис. 4 следует, что течение с присутствием застойной зоны возможно при  $\bar{\xi} < 1$  и при  $\gamma \in (0, 1)$ .

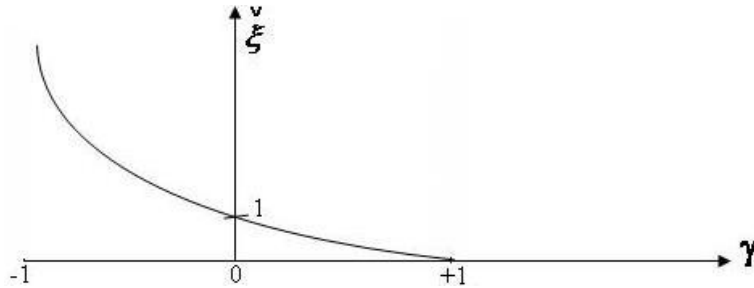


Рис. 4. Схематическое изображение зависимости размера  $\bar{\xi}$  застойной зоны от параметра  $\gamma$

Знание постоянных  $C_1, C_2$  и  $\bar{\xi}$  позволяет представить выражение для скорости течения:

$$W(\xi) = \frac{q^2}{4}(\xi^{\sqrt{2}} - \xi^2) + q^2/2\xi \ln\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi}}\right). \quad (18)$$

На рис. 5 представлен график распределения скорости течения  $w(r)$  (18) в цилиндрической щели в условиях проскальзывания материала на внешней границе щели.

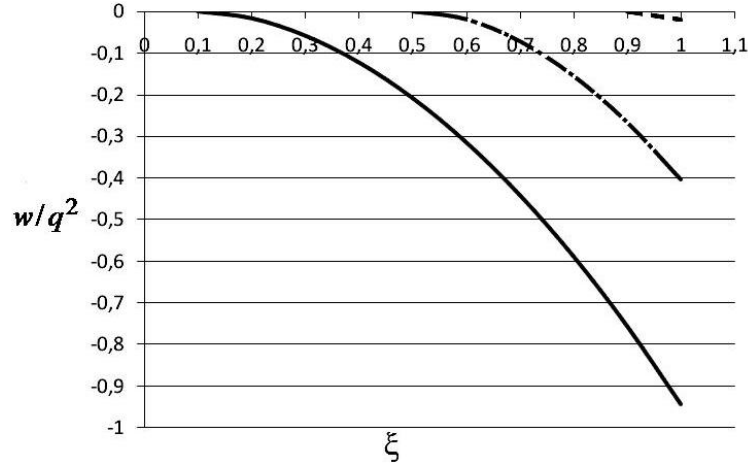


Рис. 5. Графики относительной скорости  $w(\xi)/q^2$  течения вязкопластического микроструктурного материала в цилиндрической щели  $[\bar{\nu}, R_0]$  с наличием застойной зоны  $[\bar{\xi}, \check{\xi}]$  для случаев  $\check{\xi} = 0, 1; 0, 5; 0, 9$

Скорость проскальзывания материала вдоль стенки,  $\xi = 1$  можно получить из (18):

$$W(1) = \frac{q^2/2}{\gamma + 1} \cdot \left( \ln\left(\frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}\right)^{1-\gamma} - \gamma \right). \quad (19)$$

Из (19) следует, что при отсутствии микроструктуры  $\gamma = 0$  скорость проскальзывания отсутствует на внешней границе щели  $\xi = 1$ , т. е.  $w(1)|_{\gamma=0} = 0$ .

На рис. 6 представлен график величины скорости проскальзывания материала на границе щели  $\xi = 1$  как функции  $\gamma$ .

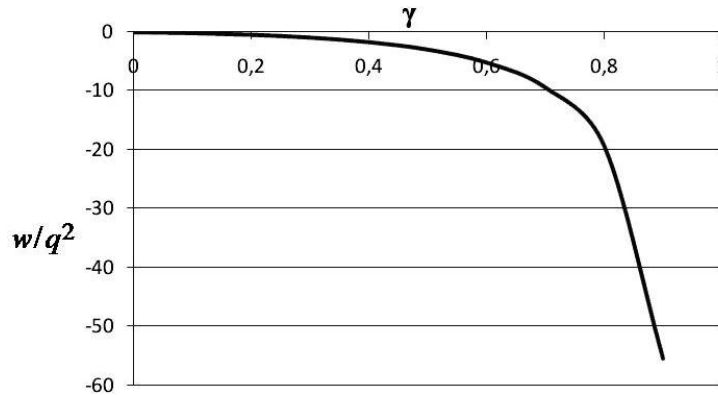


Рис. 6. График зависимости скорости проскальзывания  $w(\xi)/q^2$  от величины микроструктуры  $\gamma$



**Сравнительная оценка влияния микроструктуры на расход через цилиндрический щелевой канал.**

Вычислим расход материала при его продольном течении через цилиндрический щелевой канал в предположении прилипания материала к границам щели  $\xi = \bar{\xi}$  и  $\xi = 1$ .

Такое предположение соответствует течению вязкой жидкости со скоростью  $w^0(\xi)$  (8):

$$Q_o = \int_{\bar{\xi}}^1 2\pi\xi w^0(\xi) d\xi = \frac{\pi q^2}{2} G_o; \quad G_o = \frac{1}{4}(1 - \bar{\xi}^2) \left( -\frac{1 - \bar{\xi}^2}{\ln \bar{\xi}} + 1 + \ln \bar{\xi} \right). \quad (20)$$

Для случая учета проскальзывания материала вдоль внешней стенки щели распределение скорости в щели определяется выражением (18), так что расход  $\overset{V}{Q}$  находится из выражения

$$\overset{V}{Q} = \int_{\bar{\xi}}^1 2\pi\xi w(\xi) d\xi = \frac{\pi q^2}{2} \overset{V}{G}; \quad \overset{V}{G} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{V^2}{\bar{\xi}^2} (7 \frac{V^2}{\bar{\xi}^2} - 6 + 4 \ln \bar{\xi}) \right). \quad (21)$$

На рис. 7 приведены графики расхода материала при его продольном течении в случаях: а) прилипания к границам; б) проскальзывания вдоль границы; при условии, что поперечное сечение области щели, занятой течением, одно и то же:  $\bar{\xi} = \bar{\xi}$ .

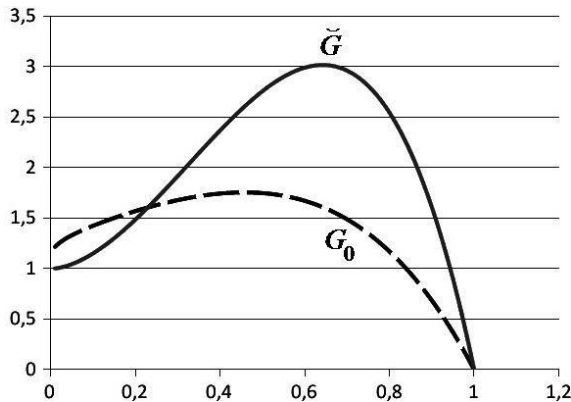


Рис. 7. Графики расхода материала при его продольном течении в зависимости от относительного внутреннего  $\bar{\xi} = R^-/R_0$  радиуса щели (или от относительного радиуса застойной зоны  $\bar{\xi} = \check{R}/R^0$ ) в случаях: а) прилипания к границам —  $G_0$ ; б) проскальзывания вдоль границы —  $\check{G}$

На основе проведенного анализа поведения вязкопластического материала в продольном движении вдоль цилиндрической щели можно сделать вывод, что уменьшение просвета цилиндрической щели за счет застойной зоны ведет к уменьшению расхода (рис. 7), а сам расход  $\check{G}$  через площадь поперечного течения  $\xi \in [\bar{\xi}, 1]$  и  $\xi \in [\check{\xi}, 1]$  при условии совпадения этих площадей значительно увеличивается по сравнению с расходом  $G_0$  за счёт проскальзывания материала вдоль пограничного слоя на внешней границе цилиндрической щели.

**ЛИТЕРАТУРА**

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред / Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 2. – 448 с.
- [2] *Лодж, А. С.* Эластичные жидкости / А. С. Лодж. – М. : Наука, 1969. – 464 с.
- [3] *Быкова, М. И.* Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры / М. И. Быкова, Н. Д. Вerveйко, П. П. Сумец, С. А. Шашкина. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 2010. – 192 с.
- [4] *Ван-Дайк, М.* Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – М. : Мир, 1967. – 310 с.
- [5] *Коул, Дж.* Метод возмущений в прикладной математике / Дж. Коул. – М. : Мир, 1972. – 274 с.

*Аль Имам Адель А.,*

*аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

*e-mail: adelpro76@yahoo.com*

*Вerveйко Николай Дмитриевич,*

*доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

*e-mail: verv38@mail.ru*

*Al-Imam Adel A., N. D. Vervevko*

**FEATURES LONGITUDINAL FLOW OF VISCOPLASTIC MATERIAL TAKING INTO ACCOUNT ITS MICROSTRUCTURE IN THE ANNULUS.**

*Voronezh State University*

**Abstract.** In this paper a calculation of the velocity field of longitudinal steady-state flow of a viscoplastic material microstructure in the annulus under pressure difference. It is shown that taking into account the characteristic size of the microstructure  $h$  leads to a hard area of flow caused by the presence of the microstructure, which affects the flow rate through the cross section of the annular gap.

**Keywords:** microstructure, stationary place of flow, viscoplasticity, annulus.

**REFERENCES**

- [1] *Ivlev, D. D.* Mechanics of plastic media / D. D. Ivlev. – M. : FIZMATLIT, 2001. – Vol. 2. – 448 p.
- [2] *Lodge, A. S.* Elastic liquids / A. S. Lodge. – M. : Nauka, 1969. – 464 p.
- [3] *Bykova, M. I.* Flow and deformation of materials and uniform microstructure / M. I. Bykova, N. D. Vervevko, P. P. Sumets, S. A. Shashkina. – Voronezh Univ. VSU, 2010. – 192p.
- [4] *Van Dyke, M.* Perturbation methods in fluid mechanics / M. Van Dyke. – M. : Mir, 1967. – 310 p.
- [5] *Cole, J.* Perturbation method in applied mathematics / J. Cole. – M. : Mir, 1972. – 274 p.

*Al-Imam, Adel A.*

*Postgraduate student, Voronezh State University, Voronezh*

*Vervevko, Nikolay Dmitrievich*

*Dr. Sci. Tech., Professor, Voronezh State University, Voronezh*

## ВОЛНЫ В УПРУГОЙ ТРУБКЕ С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ В СЛУЧАЕ УЧЕТА ЖЕСТКОСТИ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

*Бакинский государственный университет*

**Аннотация.** В работе рассматривается одномерная задача о пульсирующем течении идеальной несжимаемой жидкости в упругой тонкостенной трубке, когда на границе раздела трубки и окружающей среды задано упругое трение, зависящее от продольной координаты. В частном случае выявлено влияние безразмерного параметра жесткости на волновые характеристики.

**Ключевые слова:** внешняя жесткость, регулярная задача Штурма-Лиувилля, признак Вейерштрасса, скорость волны, затухание.

УДК: 532.529

### **Введение.**

Проблема распространения волн в деформируемых трубках с протекающей в полости жидкостью представляет интерес в нескольких аспектах. В теоретическом аспекте это задача математической физики, а в прикладном – необходимый этап расчета системы, подверженной динамическому воздействию. К настоящему времени совокупность таких задач, специфика исследования которых заложена в фундаментальных работах Л. Эйлера, И. Громеки, Н. Жуковского, составляет широко разработанную область гидроупругости [1], [2], [3], [4]. Однако ряд особенностей, связанных с учетом влияния жесткости окружающей среды, изучен недостаточно. В этой связи представленная работа посвящена постановке и математическому обоснованию одномерной задачи о распространении волн малой амплитуды в идеальной жидкости, протекающей в упругой трубке постоянного кругового сечения, когда жесткость внешней среды является функцией продольной координаты. Поставленная задача приводит к решению регулярной краевой задачи Штурма-Лиувилля. В частном случае постоянной жесткости получены формулы для определения скорости волны и затухания.

1. Как и в большинстве разделов прикладной математики, перед тем, как учесть характерные свойства системы, такие как вязкость жидкости и трубки, необходимо проанализировать простую модель. Поэтому установим здесь уравнения, описывающие течение идеальной несжимаемой жидкости в тонкостенной упругой трубке радиуса  $R$ , длиной  $l$  и толщиной  $h$ . Выпишем гидродинамические уравнения движения и неразрывность в виде [1]

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial t} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $p(x, t)$  – гидродинамическое давление,  $u(x, t)$  – продольная скорость течения жидкости,  $\rho$  – ее плотность,  $w(x, t)$  – радиальное смещение стенки, а  $x \in [0, l]$  – продольная координата.

Такой подход предполагает выполнение неравенства  $R \ll l$ . Пренебрегая инерцией стенки [4], запишем

$$\sigma = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R^2}w.$$

Здесь  $E$  – модуль упругости, а  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Далее положим, что величина  $\sigma$  состоит из двух типов напряжений: гидродинамического –  $p$  и напряжения, возникающего в предположении, что внешняя среда вносит дополнительную жесткость, –  $G\frac{\partial w}{\partial t}$ . Отсюда

$$\sigma = p - G\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Принимая  $G = G(x) = G_0g(x)$ , окончательно имеем

$$p = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R^2}w + G_0g(x)\frac{\partial w}{\partial t}. \quad (2)$$

Таким образом, замкнутая система уравнений гидроупругости описывается соотношениями (1) и (2). В последующих рассуждениях будем считать, что фигурируемые в них функции обладают условиями гладкости, необходимыми для законности проведения соответствующих операций. Теперь, комбинируя уравнения (1), (2) и введя обозначения

$$c_0^2 = \frac{E}{2\rho}, \quad \eta = \frac{h}{R}(1-\nu^2)^{-1},$$

приходим к уравнению относительно  $w$ :

$$c_0^2\eta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{RG_0}{2\rho}g''(x)\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{RG_0}{\rho}g'(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + \frac{RG_0}{2\rho}g(x)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Отсюда при  $g(x) = 1$  реализуется случай однородной внешней жесткости.

2. Применяя метод разделения переменных, сведем решение уравнения (3) к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Предполагая, что функция  $w$  пропорциональна временному множителю  $\exp(i\omega t)$ , можно записать:

$$w = w_1(x)\exp(i\omega t), \quad (4)$$

где  $\omega$  – действительное значение угловой частоты, а  $w_1$  – искомая функция.

Подстановка представления (4) в (3) приводит к уравнению

$$w_1'' + \mu_1(x)w_1' + \mu_2(x)w_1 = 0. \quad (5)$$

Здесь приняты обозначения

$$\mu_1(x) = \frac{2ig_0g'(x)}{\eta + ig_0g(x)},$$

$$\mu_2(x) = \frac{\omega^2/c_0^2 + ig_0g''(x)}{\eta + ig_0g(x)},$$

в которых  $g_0 = \omega R\frac{G_0}{E}$  – безразмерный параметр жесткости. Штрихи здесь и далее означают дифференцирование по  $x$ . Используя замену Лиувилля [5]

$$y = w_1 \exp\left(\frac{1}{2}\int \mu_1(x)dx\right) = \lambda(x)w_1, \quad (6)$$

получим приведенную форму волнового уравнения

$$y'' + I(x)y = 0 \quad (7)$$

при инварианте, равном

$$I(x) = \mu_2(x) - \frac{1}{4}\mu_1^2(x) - \frac{1}{2}\mu_1'(x). \quad (8)$$

Преобразовав уравнение (7) с помощью подстановки

$$q(x) = 1 - \frac{I(x)}{\delta^2},$$

в качестве уравнения задачи получим

$$y'' + \delta^2 y = \delta^2 q(x)y. \quad (9)$$

На потенциал  $q(x)$  наложим условие интегрируемости

$$\int_0^l |q(x)| dx < +\infty. \quad (10)$$

В (9) через  $\delta^2$  обозначено значение  $I(x)$  при  $q(x) = 1$ . Следовательно, согласно (8)

$$\delta^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}(\eta + ig_0)^{-1}.$$

Отсюда по правилу извлечения квадратного корня из комплексного числа можно получить  $\delta = \delta_0 - i\delta_1$ , где для  $\delta_0$  и  $\delta_1$  имеем:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{\omega/c_0\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta^2+g_0^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+g_0^2/\eta^2}+1}{2}}, \\ \delta_1 &= \frac{\omega/c_0\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta^2+g_0^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+g_0^2/\eta^2}-1}{2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение (9) необходимо дополнить краевыми условиями при  $x = 0$  и  $x = l$ , формулировка которых будет дана ниже. Таким образом, решение поставленной задачи удалось свести к решению регулярной краевой задачи типа Штурма-Лиувилля.

**3.** Рассматривая (9) как неоднородное уравнение с известной правой частью и применяя метод вариации произвольных постоянных, уравнение (9) сводим к решению интегрального уравнения

$$y = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \delta \int_x^l \sin \delta(\xi - x) q(\xi) y(\xi) d\xi, \quad (12)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – постоянные интегрирования, которые подлежат определению, исходя из соответствующих граничных условий. Уравнение (12) является интегральным уравнением Вольтерра и решается методом последовательных приближений. Положим

$$y_0 = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x}$$

и пусть для  $n \geq 1$

$$y_n = y_0 + \delta \int_x^l \sin \delta(\xi - x) q(\xi) y_{n-1}(\xi) d\xi.$$

В силу неравенства (10) по признаку Вейерштрасса [6], [7] из равномерной сходимости последовательных приближений следует, что единственное решение интегрального уравнения (12), которое обозначим через  $y(x, \delta)$ , определяется посредством ряда

$$y(x, \delta) = y_0(x, \delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \{y_n(x, \delta) - y_{n-1}(x, \delta)\}.$$

Приведем его другое представление. Приняв обозначение

$$y_n(x, \delta) - y_{n-1}(x, \delta) = \delta^n f_n(x, \delta),$$

получим

$$y(x, \delta) = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x, \delta). \quad (13)$$

В (13) имеем совокупность следующих рекуррентных соотношений:

$$f_1(x, \delta) = \int_x^l \sin \delta(\xi - x) q(\xi) y_0(\xi) d\xi, \dots, \quad (14)$$

$$f_n(x, \delta) = \int_x^l \sin \delta(\xi - x) q(\xi) f_{n-1}(\xi) d\xi.$$

Итак, основываясь на вышеизложенном, можно утверждать, что все решения уравнения (9) при любых  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  удовлетворяют уравнению (12). Непосредственной проверкой можно показать обратное, а именно то, что любое решение (12), имеющее производную второго порядка, при произвольных  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  удовлетворяет уравнению (9). Необходимо отметить, что из структуры ряда в (13) следует, что ряды, получаемые его почленным дифференцированием, также сходятся равномерно. Подстановка выражения (13) в (6) с учетом (4) приводит к следующей формуле для  $w$ :

$$w(x, t) = \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x) \right\} \exp(i\omega t). \quad (15)$$

Учитывая это выражение в равенстве (2), находим

$$p(x, t) = \frac{E}{R} \{ \eta + i g_0 g(x) \} \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x) \right\} \exp(i\omega t). \quad (16)$$

Для последующего описания давления, скорости жидкости и перемещения, что связано с определением  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , можно принять различные граничные условия при  $x = 0$  и  $x = l$ . Типичным случаем является ситуация, при которой на торцах трубки задано пульсирующее давление. Пусть

$$p(0, t) = p_0 \exp(i\omega t) \quad \text{и} \quad p(l, t) = p_l \exp(i\omega t), \quad (17)$$

где  $p_0$  и  $p_l$  – эмпирические постоянные. Теперь перейдем к определению  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Непосредственным сравнением формул (16) и (17) относительно них получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = a,$$

$$\alpha_1 e^{i\delta l} + \alpha_2 e^{-i\delta l} = b.$$

В ней использованы обозначения

$$a = \frac{R\lambda(0)}{E\{\eta+ig_0g(0)\}}p_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(0),$$

$$b = \frac{R\lambda(l)}{E\{\eta+ig_0g(l)\}}p_l - \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(l).$$
(18)

Теперь, определяя  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и используя формулу Эйлера, после довольно громоздких выкладок из (15) и (16) получаем:

$$p(x, t) = \frac{E}{R} \{\eta + ig_0g(x)\} \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \frac{a \sin \delta(l-x) + b \sin \delta x}{\sin \delta l} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x) \right\} \exp(i\omega t),$$
(19)

$$w(x, t) = \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \frac{a \sin \delta(l-x) + b \sin \delta x}{\sin \delta l} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x) \right\} \exp(i\omega t).$$
(20)

Для определения скорости потока проведем следующие рассуждения. Как и выше, разделяя переменные, запишем

$$u(x, t) = U(x) \exp(i\omega t),$$

а через  $\Phi(x)$  обозначим функцию

$$\Phi(x) = \{\eta + ig_0g(x)\} \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \frac{a \sin \delta(l-x) + b \sin \delta x}{\sin \delta l} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x) \right\}.$$

Тогда из первого уравнения системы (1) можно сразу получить выражение для распределения скорости. Оно имеет вид

$$u(x, t) = 2i \frac{c_0^2}{\omega R} \Phi'(x) \exp(i\omega t).$$
(21)

Полученными формулами (19)–(21) поставленная задача может считаться решенной. Таким образом, ряд (13) в сочетании с соотношениями (14) дают конструктивное представление искомого решения.

Отметим, что физическую величину представляют действительные части выражений (19–21). Подчеркнем, что их практическая реализация связана с конкретным заданием функции  $g(x)$  и использованием ЭВМ.

**4.** Решение задачи, когда жесткость окружающей среды постоянна, т. е.  $g(x) = 1$ , а давление на правом торце трубки равно нулю ( $p_l = 0$ ), в силу очевидных равенств  $\lambda(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$ , при которых

$$b = 0, \quad a = \frac{p_0}{E} \frac{R}{\eta + ig_0}, \quad \Phi(x) = \frac{p_0}{E} R \frac{\sin \delta(l-x)}{\sin \delta l},$$

существенно упрощается, и его можно записать следующим образом:

$$p(x, t) = p_0 \frac{\sin \delta(l-x)}{\sin \delta l} \exp(i\omega t), \quad w(x, t) = \frac{p_0}{E} \frac{R}{\eta - ig_0} \frac{\sin \delta(l-x)}{\sin \delta l} \exp(i\omega t),$$

$$u(x, t) = -2i \frac{p_0}{E} \delta \frac{c_0^2}{\omega} \frac{\cos \delta(l-x)}{\sin \delta l} \exp(i\omega t).$$
(22)

Прежде чем рассмотреть влияние учета эффекта жесткости окружающей среды на скорость волны  $c = \omega/\delta_0$  и затухание  $\delta_1$ , зависимости (11) перепишем следующим образом:



$$\frac{c}{c_0} = \sqrt{\eta \left(1 + \frac{g_0^2}{\eta^2}\right)} \left\{ \sqrt{\frac{\sqrt{1+g_0^2/\eta^2}+1}{2}} \right\}^{-1}, \quad (23)$$

$$\delta_1 \frac{c_0}{\omega} = \sqrt{\frac{1}{\eta(1+g_0^2/\eta^2)}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+g_0^2/\eta^2}-1}{2}}.$$

Отсюда при  $g_0/\eta \ll 1$  имеем

$$\frac{c}{c_0} \approx \sqrt{\eta}, \quad \delta_1 \frac{c_0}{\omega} \approx 0.$$

Принимая  $g_0/\eta \gg 1$ , получаем

$$\frac{c}{c_0} \approx \sqrt{2g_0}, \quad \delta_1 \frac{c_0}{\omega} \sim \frac{1}{\sqrt{2g_0}}.$$

Отметим, что результаты последующих численных расчетов согласуются с приведенными выше утверждениями.

Теперь, приняв  $h/R = 5 \cdot 10^{-2}$  и  $\nu = 0,5$ , что соответствует значению  $\eta \approx 0,067$ , в соответствии с формулами (23) приведем численные зависимости  $\frac{c}{c_0}$  и  $\delta_1 \frac{c_0}{\omega}$  от  $g_0$  для  $g_0 \in [0, 1]$ , которые даны на рисунках 1 и 2.

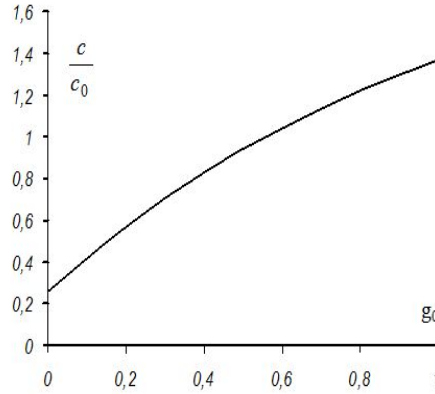


Рис. 1. Зависимость скорости распространения волны от параметра жесткости

Отсюда следует, что с увеличением параметра жесткости скорость распространения волны в системе возрастает и для выбранного диапазона  $g_0$ , приближается к значению 1,37. По данным второго рисунка можно заключить, что для принятого  $\eta$  существует значение  $g_0 \approx 0,25$ , при переходе через которое происходит уменьшение затухания.

Таким образом, в работе получено строгое аналитическое решение задачи о волновом течении идеальной несжимаемой жидкости в упругой трубке с учетом неоднородности внешней среды. В частном случае однородности проведен анализ влияния параметра жесткости на волновые характеристики системы. Показано, что в зависимости от  $g_0$  возможно падение затухания.

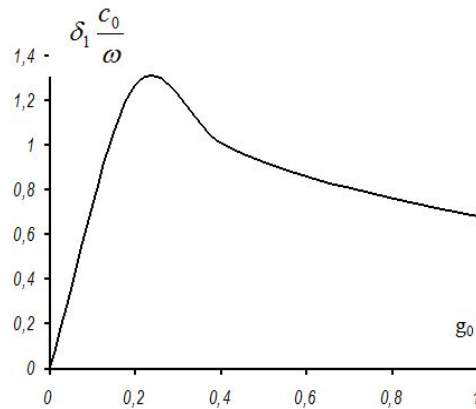


Рис. 2. Зависимость затухания от параметра жесткости

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вольмир, А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1979. – 320 с.
- [2] Гидродинамика кровообращения : сборник переводов / под. ред. С. А. Регирера. – М. : Мир, 1971. – 269 с.
- [3] Педли, Т. Ж. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов / Т. Ж. Педли. – М. : Мир, 1983. – 400 с.
- [4] Лайтфут, Э. Явление переноса в живых системах / Э. Лайтфут. – М. : Мир, 1977. – 520 с.
- [5] Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1971. – 576 с.
- [6] Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М. : Наука, 1969. – 526 с.
- [7] Амензаде, Р. Ю. Волны в неоднородной трубке с протекающей двухфазной жидкостью / Р. Ю. Амензаде, Г. А. Гурбанов, Ф. Б. Нагиев // Механика композитных материалов. – 2003. – Т. 39. – № 4. – С. 555–566.

Амензаде Рафаель Юсиф-оглы,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики и механики сплошных сред, Бакинский государственный университет, г. Баку

e-mail: mehanika.bsu.az@mail.ru

R. Yu. Amenzadeh

WAVES IN AN ELASTIC TUBE WITH FLOWING LIQUID IN THE CASE OF  
RECORDING STIFFNESS ENVIRONMENT

*Baku State University*

**Abstract.** We consider the one-dimensional problem of a pulsating flow of an ideal incompressible fluid in an elastic thin-walled tube, when the interface between the tube and the environment given the elastic friction, depending on the longitudinal coordinate. In the particular case revealed the influence of the dimensionless parameter stiffness on wave characteristics.

**Keywords:** external rigidity, a regular problem of Sturm-Liouville, sign Weierstrass, speed of a wave, attenuation.

REFERENCES

- [1] *Vol'mir, A. S.* Shells in fluid and gas flows / A. S. Vol'mir. – M. : Nauka, 1979. – 320 p.
- [2] *Hydrodynamics of blood circulation:* ed. By S. A. Regirer. – M. : Mir, 1971. – 269 p.
- [3] *Pedley, T. J.* The fluid mechanics of large blood vessels / T. J. Pedley. – M. : Mir, 1983. – 400 p.
- [4] *Laightfoot, E.* Transport phenomena in living systems / E. Laightfoot. – M. : Mir, 1977. – 520 p.
- [5] *Kamke, E.* The handbook of the ordinary differential equations / E. Kamke. – M. : Nauka, 1971. – 576 p.
- [6] *Naimark, M. A.* The linear differential operators / M. A. Naimark. – M. : Nauka, 1969. – 526 p.
- [7] *Amenzadeh, R. Yu.* Waves in an inhomogeneous tube with a flowing two-phase fluid / R. Yu. Amenzadeh, G. A. Gurbanov, F. B. Nagiyev // *Mechanics of composite materials.* – 2003. – Vol. 39. – No. 4. – P. 555–566.

*Amenzadeh, Rafael Yusif ogli*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of the theoretical mechanics and mechanics of the solid environment, Baku State University, Baku*

А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. С. Устинова

## К ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКИМ ИСПЫТАНИЯМ МАТЕРИАЛОВ С УПРУГИМИ, ВЯЗКИМИ И ПЛАСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

*Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,*

*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН*

**Аннотация.** Получено точное решение задачи о деформировании упруговязкопластической среды, заключенной между двумя жесткими коаксиальными цилиндрами, при повороте одного из них. На жестких поверхностях выполняются условия прилипания. Решение строится в рамках модели больших упруговязкопластических деформаций. Рассмотрены обратимое деформирование и вязкопластическое течение при возрастающем и постоянном моменте закручивания. Получены законы движения границ развивающихся областей вязкопластического течения. Рассчитаны поля перемещений, деформаций, напряжений и скоростей.

**Ключевые слова:** упругость, вязкопластичность, большие деформации, остаточные напряжения.

УДК: 539.374

Одним из видов экспериментов при определении постоянных вязкой и вязкопластической сред являются опыты в соосно-цилиндрическом вискозиметре. Различают два типа приборов с контролируемым напряжением сдвига и с контролируемой скоростью. Для обработки таких экспериментов необходимо иметь точные решения соответствующих краевых задач. В теории вязких и неньютоновских жидкостей такие решения давно получены и являются уже классическими [1], [7], [8]. Но существуют процессы интенсивного формоизменения твердых деформируемых тел на стадии пластического течения материалов, когда необходимо учитывать упругие свойства среды. При математическом моделировании подобных процессов необходимо пользоваться математической моделью больших упругопластических деформаций. В [3], [4] в рамках такой модели получено решение задачи о вискозиметрическом течении между двумя жесткими цилиндрами, когда на подвижном цилиндре задается скорость вращения. Здесь приводится решение задачи, когда на вращающемся цилиндре задан момент закручивания. В последнем случае оказалось возможным получить точное аналитическое решение краевой задачи.

**1. Основные модельные соотношения.** Задача решается в рамках модели больших упругопластических деформаций, предложенной в [2] и обобщенной на случай учета вязких свойств материала на стадии пластического течения [6]. В прямоугольной декартовой системе координат кинематика среды определяется зависимостями

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}, \\
\frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2}((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj})), \\
\frac{Dp_{ij}}{dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},
\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$r_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}(\varepsilon_{sk}, e_{sk}).$$

В соотношениях (1.1)  $d_{ij}$  — компоненты тензора деформаций Альманси;  $e_{ij}$ ,  $p_{ij}$  — их обратимые и необратимые составляющие;  $u_i$ ,  $v_i$  — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды;  $\frac{D}{Dt}$  — объективная производная тензоров по времени;  $\varepsilon_{ij}^p$  (источник в уравнении переноса для тензора необратимых деформаций) — компоненты тензора скоростей пластических деформаций. Наличие нелинейной составляющей  $z_{ij}$  тензора вращений  $r_{ij}$ , которая выписана полностью в [2], [6], связано с выполнением требования неизменности тензора пластических деформаций  $p_{ij}$  в процессах разгрузки.

Материал считаем несжимаемым и тогда, следуя [2], [8], получаем

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}) \quad \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0,$$

$$\sigma_{ij} = -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) \quad \text{при} \quad p_{ij} \neq 0,$$

$$W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \dots, \tag{1.2}$$

$$J_k = \begin{cases} L_k, & \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0 \\ I_k, & \text{при} \quad p_{ij} \neq 0 \end{cases}, \quad L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki},$$

$$I_1 = e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \quad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns}.$$

В зависимостях (1.2)  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $p$ ,  $p_1$  — добавочные гидростатические давления,  $W$  — упругий потенциал,  $\mu$  — модуль сдвига,  $b$ ,  $\chi$  — постоянные материала.

В качестве пластического потенциала используется функция нагружения Треска [5]:

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max|\varepsilon_k^p|, \tag{1.3}$$

где  $k$  — предел текучести;  $\eta$  — коэффициент вязкости;  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_k^p$  — главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций.

Связь скоростей необратимых деформаций с напряжениями устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0. \tag{1.4}$$

**2. Упругое деформирование.** Рассмотрим деформирование несжимаемого упруговязкопластического материала, свойства которого описываются модельными зависимостями, приведенными в первом разделе, расположенного между двумя цилиндрическими жесткими стенками  $r = r_0$  и  $r = R$ . Внешний цилиндр  $r = R$  жестко закреплен, а к внутреннему  $r = r_0$  приложен закручивающий момент. Полагаем, что на жестких поверхностях выполняются условия прилипания, тогда граничные условия в цилиндрической системе координат  $r$ ,

$\varphi$ ,  $z$  для векторов перемещений и скорости  $\mathbf{u}(u_r, u_\varphi, 0)$ ,  $\mathbf{v}(0, v_\varphi, 0)$  и компоненты напряжения  $\sigma_{r\varphi}$  имеют вид

$$\mathbf{u}|_{r=R} = \mathbf{v}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=r_0} = -\alpha t. \quad (2.1)$$

Считаем, что в рассматриваемом случае все точки среды движутся по окружностям. Тогда составляющие вектора перемещений и компоненты тензора полных деформаций Альманси, отличные от нуля, имеют вид

$$u_r = r(1 - \cos \theta), \quad u_\varphi = r \sin \theta, \quad d_{rr} = -\frac{1}{2}r^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2}r \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad (2.2)$$

где  $\theta = \theta(r, t)$  – центральный угол закручивания.

Полагаем, что деформирование первоначально является обратимым ( $p_{ij} = 0$ ).

Согласно зависимостям (1.2) компоненты напряжений находятся зависимостями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= -(p + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)r^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 = -s, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -s + \mu r^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu r \frac{\partial \theta}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь и далее оставлены слагаемые до второго порядка деформаций, т. е. обратимые деформации полагаем малыми. Такое ограничение, не являясь принципиальным, позволяет получить точное решение рассматриваемой краевой задачи.

Интегрируя уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0 \quad (2.4)$$

и используя граничные условия (2.1), найдем

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{c(t)}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \omega = \frac{\dot{c}(t)}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \dot{c}(t) = \frac{dc(t)}{dt}, \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{c(t)}{r^2}, \\ \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= \frac{c(t)^2}{4\mu} \left( \frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{c(t)^2}{4\mu} \left( \frac{1}{r_0^4} - \frac{3}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad c(t) = -\alpha t r_0^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $w = \frac{v_\varphi}{r}$  – угловая скорость,  $\sigma_0$  – значение компоненты напряжений  $\sigma_{rr}$  на поверхности  $r = r_0$ .

Из первого соотношения (1.1) получим необходимые для дальнейших вычислений зависимости:

$$e_{r\varphi} = d_{r\varphi} = \frac{1}{2} \frac{c(t)}{\mu r^2}, \quad e_{rr} = -\frac{3}{2} e_{r\varphi}^2, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} e_{r\varphi}^2. \quad (2.6)$$

Полученное решение справедливо в промежутке времени от  $t = 0$  до последующего момента времени  $t = t_0$ , когда от стенки  $r = r_0$  начинает развиваться область пластического течения. Используя условие пластичности (1.3), которое при принятых ограничениях записывается в виде:  $\sigma_{r\varphi}(r_0, t_0) = -k$ , найдем момент начала пластического течения  $t_0 = \frac{k}{\alpha}$ .

**3. Вязкопластическое течение при возрастающем и постоянном моменте закручивания.** С момента времени  $t = t_0$  в окрестности внутреннего жесткого цилиндра развивается область вязкопластического течения  $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ , где  $r_1(t)$  – движущаяся граница пластической области, отделяющая ее от зоны упругого деформирования  $r_1(t) \leq r \leq R(t)$ .

Согласно зависимостям (1.1) кинематика среды определяется соотношениями

$$\begin{aligned} v_\varphi &= r \frac{\partial \theta}{\partial t} = r\omega, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) = \frac{\partial d_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t} = \frac{1}{2} r \frac{\partial \omega}{\partial r}, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \varepsilon_{r\varphi}^e + \varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t}, \\ \varepsilon_{rr}^p &= \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} + 2p_{r\varphi} (r_{\varphi r} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} + 2p_{r\varphi} (r_{r\varphi} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \\ \varepsilon_{rr}^p &= -\varepsilon_{\varphi\varphi}^p = -2\varepsilon_{r\varphi}^p e_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Интегрированием уравнений равновесия в области обратимого деформирования так же, как и ранее, используя условие (2.1), найдем

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{c(t)}{r^2}, \quad \theta = \frac{c(t)}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \omega = \frac{\dot{c}(t)}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (3.2)$$

Для компонент напряжений в области вязкопластического течения  $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ , следуя второй зависимости (1.2), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{zz} = -(p_1 + 2\mu) - 2(b + \mu)e_{r\varphi}^2 = -s_1(t), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -s_1(t) + 4\mu e_{r\varphi}^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu e_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При записи выражений (3.3) использовались кинематические зависимости (2.6). С другой стороны, интегрированием уравнений равновесия можно получить

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{m(t)}{r^2}, \quad e_{r\varphi} = \frac{m(t)}{2\mu r^2}. \quad (3.4)$$

Из условий непрерывности компонент напряжений на упругопластической границе  $r = r_1(t)$  получим, что

$$m(t) = c(t), \quad s(t) = s_1(t).$$

Условие пластического течения (??) в нашем

$$\sigma_{r\varphi}^2 - (k + \eta|\varepsilon_{r\varphi}^p|)^2 = 0. \quad (3.5)$$

Следуя ассоциированному закону пластического течения (1.4) и условию (3.5), найдем

$$\sigma_{r\varphi} = -k + \eta\varepsilon_{r\varphi}^p, \quad \lambda = -\frac{\varepsilon_{r\varphi}^p}{k - \eta\varepsilon_{r\varphi}^p}. \quad (3.6)$$

Сравнение (3.4) и (3.6) позволяет вычислить скорость пластической деформации:

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta} \left( \frac{c(t)}{r^2} + k \right). \quad (3.7)$$

Неизвестную функцию интегрирования  $c(t)$  найдем из условия равенства нулю скоростей пластических деформаций на упругопластической границе  $r = r_1(t)$ :

$$c(t) = -kr_1^2. \quad (3.8)$$

С другой стороны, согласно второму граничному условию (2.1)

$$c(t) = -\alpha tr_0^2, \quad (3.9)$$

что позволяет получить выражение для границы  $r_1(t)$ :

$$r_1 = r_0 \sqrt{\frac{\alpha t}{k}}. \quad (3.10)$$

Используя кинематические зависимости (3.1) и формулу (3.9), найдем компоненту пластических деформаций  $p_{r\varphi}$ :

$$p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left( kt - \frac{\alpha t^2 r_0^2}{2r^2} \right) + g(r). \quad (3.11)$$

Для неизвестной функции  $g(r)$  из условия равенства нулю пластических деформаций на поверхности  $r = r_1$  и соотношения (3.10) получим

$$g(r) = -\frac{1}{2\eta} \frac{k^2 r^2}{\alpha r_0^2}. \quad (3.12)$$

Согласно соотношениям (1.1)  $d_{r\varphi} = p_{r\varphi} + e_{r\varphi}$  тогда для определения угла поворота  $\theta(r, t)$  в области вязкопластического течения из (3.4) и (3.9)–(3.12) следует дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{2} r \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{1}{\eta} \left( kt - \frac{\alpha t^2 r_0^2}{2r^2} \right) - \frac{1}{2\eta} \frac{k^2 r^2}{\alpha r_0^2} - \frac{\alpha t r_0^2}{2\mu r^2},$$

интегрируя которое и используя условие непрерывности функции  $\theta(r, t)$  на упругопластической границе  $r = r_1(t)$ , найдем распределение  $\theta(r, t)$  в области течения:

$$\theta = \frac{2}{\eta} \left( kt \ln \frac{r}{r_1} + \frac{\alpha t^2 r_0^2}{4} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) + \frac{k^2}{4\alpha r_0^2} (r_1^2 - r^2) \right) + \frac{\alpha t r_0^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right). \quad (3.13)$$

Угловую скорость в области течения определим согласно зависимостям (3.1)

$$\omega = \frac{2}{\eta} \left( k \ln \frac{r}{r_1} + \frac{\alpha t r_0^2}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \right) + \frac{\alpha r_0^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right). \quad (3.14)$$

Следуя первой формуле (1.1) разделения полных деформаций на обратимые и необратимые, компоненты пластических деформаций определяются зависимостями

$$p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left( kt - \frac{\alpha t^2 r_0^2}{2r^2} - \frac{k^2 r^2}{2\alpha r_0^2} \right), \quad p_{\varphi\varphi} = 2e_{r\varphi} p_{r\varphi}, \quad p_{rr} = 2d_{r\varphi} (e_{r\varphi} - d_{r\varphi}). \quad (3.15)$$

Пусть с момента времени  $t = t_1$  напряжение  $\sigma_{r\varphi}$  на внутренней поверхности перестает изменяться:

$$\sigma_{r\varphi} \Big|_{r=r_0} = -\alpha t_1. \quad (3.16)$$

Тогда в упругой области, интегрируя уравнения равновесия и используя условие прилипания на жестких стенках, получим

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{c(t)}{r^2}, \quad \theta = \frac{c(t)}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \omega = 0, \quad c(t) = -\alpha t_1 r_0^2. \quad (3.17)$$

Скорость пластической деформации  $\varepsilon_{r\varphi}^p$  в этом случае находится по формуле (3.7), где вместо  $c(t)$  необходимо подставить текущее значение из (3.17). Сравнивая выражения для  $c(t)$  из (3.8) и (3.17), получим, что при постоянном напряжении  $\sigma_{r\varphi}$  на внутренней поверхности граница области вязкопластического течения не изменяется и равна  $r_1 = r_0 \sqrt{\frac{\alpha t_1}{k}}$ .

Компоненту пластических деформаций  $p_{r\varphi}$  найдем интегрированием  $\varepsilon_{r\varphi}^p$  по времени, используя условия равенства пластических деформаций в момент времени  $t = t_1$ :

$$p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left( kt - \frac{\alpha t t_1 r_0^2}{r^2} + \frac{\alpha t_1^2 r_0^2}{2r^2} - \frac{k^2 r^2}{2\alpha r_0^2} \right). \quad (3.18)$$



Для угла поворота и угловой скорости в области  $r_0 \leq r \leq r_1$ , используя условие непрерывности этих параметров на границе  $r_1$ , получим

$$\theta = \frac{2}{\eta} \left( kt \ln \frac{r}{r_1} + \frac{\alpha t_1 t r_0^2}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) - \frac{\alpha t_1^2 r_0^2}{4} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) + \frac{k^2}{4\alpha r_0^2} (r_1^2 - r^2) \right) + \frac{\alpha t r_0^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right), \quad \omega = \frac{2}{\eta} \left( k \ln \frac{r}{r_1} + \frac{\alpha t_1 r_0^2}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \right).$$

#### 4. Течение при уменьшающемся моменте закручивания. Разгрузка.

Далее рассмотрим случай, когда с момента времени  $t = t_2$  напряжение  $\sigma_{r\varphi}$  при  $r = r_0$  уменьшается по абсолютной величине по закону

$$\sigma_{r\varphi} \Big|_{r=r_0} = -\alpha t_1 + \beta(t - t_2). \quad (4.1)$$

Напряжения при этом уменьшаются во всей области деформирования, которая разбивается на части: область обратимого деформирования  $r_1 \leq r \leq R$ , область, где пластические деформации перестают изменяться,  $-r_2(t) \leq r \leq r_1$  и область продолжающегося пластического течения  $r_0 \leq r \leq r_2(t)$ . Граница  $r_2(t)$ , разделяющая последние две области, с течением времени движется в сторону внутреннего жесткого цилиндра  $r = r_0$ . Используя условие непрерывности напряжений, найдем уравнение ее движения:  $r_2 = r_0 \sqrt{\frac{\alpha t_1 - \beta(t - t_2)}{k}}$ .

В упругой области будут справедливы соотношения (3.2), где вместо  $c(t)$  необходимо подставить выражение  $c(t) = r_0^2(-\alpha t_1 + \beta(t - t_2))$ . В области продолжающегося пластического течения, используя условие равенства пластических деформаций в момент времени  $t = t_2$ , получим

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta} \left( k - \frac{r_0^2(\alpha t_1 - \beta(t - t_2))}{r^2} \right), \quad p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left( kt - \frac{r_0^2}{r^2} \left( \alpha t_1 t - \frac{\beta(t - t_2)^2}{2} - \frac{\alpha t_1^2}{2} \right) - \frac{k^2 r^2}{2\alpha r_0^2} \right).$$

Из условия непрерывности пластических деформаций на границе  $r = r_2(t)$  в области с неизменяющимися пластическими деформациями найдем

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = 0, \quad p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left( kt_2 + k \frac{\alpha}{\beta} t_1 - \frac{r_0^2}{r^2} \left( \frac{\alpha^2 t_1^2}{2\beta} + \alpha t_1 t_2 - \frac{\alpha^2 t_1^2}{2} \right) - \frac{k^2 r^2}{2\alpha r_0^2} - \frac{k^2 r^2}{2\beta r_0^2} \right).$$

Согласно зависимостям  $d_{r\varphi} = e_{r\varphi} + p_{r\varphi}$  и  $\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\varphi}^e + \varepsilon_{r\varphi}^p$ , воспользовавшись непрерывностью перемещений и скоростей при  $r = r_1$  и  $r = r_2$ , найдем распределение угла поворота  $\theta(r, t)$  и угловой скорости  $\omega(r, t)$

в области  $r_2(t) \leq r \leq r_1$ :

$$\omega = \frac{r_0^2 \beta}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \theta = \frac{2}{\eta} \left[ k \ln \frac{r}{r_1} \left( \frac{\alpha t_1}{\beta} + t_2 \right) + \left( \frac{k^2}{4\alpha r_0^2} + \frac{k^2}{4\beta r_0^2} \right) (r_1^2 - r^2) + \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \left( \alpha t_1 t_2 + \frac{\alpha^2 t_1^2}{2\beta} - \frac{\alpha t_1^2}{2} \right) \right] + \frac{(\alpha t_1 - \beta(t - t_2)) r_0^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right). \quad (4.2)$$

в области  $r_0 \leq r \leq r_2(t)$ :

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{2}{\eta} \left[ k \ln \frac{r}{r_2} + \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) (\alpha t_1 + \beta(t - t_2)) \right] + \frac{r_0^2 \beta}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \theta = \frac{2}{\eta} \left[ kt \ln \frac{r}{r_2} + \right. \\ & + k \ln \frac{r_2}{r_1} \left( \frac{\alpha t_1}{\beta} + t_2 \right) + \frac{k^2(r_1^2 - r^2)}{4\alpha r_0^2} + \frac{k^2(r_1^2 - r_2^2)}{4\beta r_0^2} + \frac{\alpha r_0^2}{2} \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \left( t_1 t_2 + \frac{\alpha t_1^2}{2\beta} - \frac{t_1^2}{2} \right) + \\ & \left. + \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \left( \alpha t_1 t + \frac{\beta(t - t_2)^2}{2} - \frac{\alpha t_1^2}{2} \right) \right] + \frac{(\alpha t_1 - \beta(t - t_2)) r_0^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right). \end{aligned}$$

В момент времени  $t_3 = \frac{\alpha t_1 + \beta t_2 - k}{\beta}$  граница  $r_2(t)$  достигает внутренней жесткой стенки  $r = r_0$ , при этом  $\sigma_{r\varphi}(r_0, t_3) = -k$ . С момента  $t_3$  пластические деформации всюду остаются неизменными, а напряжения продолжают уменьшаться по абсолютному значению. В конечный момент разгрузки  $t_4 = \frac{\alpha t_1 + \beta t_2}{\beta}$  напряжения  $\sigma_{r\varphi}$  становятся равными нулю во всем слое  $r_0 \leq r \leq R$ , угловая скорость равна нулю во всей области деформирования, для угла поворота получим

в области обратимого деформирования  $r_1 \leq r \leq R$ :  $\theta = 0$ ,  
в пластической области  $r_2(t) \leq r \leq r_1$ :

$$\theta = \frac{2}{\eta} \left[ k \ln \frac{r}{r_1} \left( \frac{\alpha t_1}{\beta} + t_2 \right) + \left( \frac{k^2}{4\alpha r_0^2} + \frac{k^2}{4\beta r_0^2} \right) (r_1^2 - r^2) + \frac{\alpha r_0^2}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \left( t_1 t_2 + \frac{\alpha t_1^2}{2\beta} - \frac{t_1^2}{2} \right) \right].$$

### 5. Течение при изменении направления движения.

Если далее уменьшать напряжение  $\sigma_{r\varphi}$  на поверхности  $r = r_0$  по модулю, то в момент времени  $t = t_5$  при  $r = r_0$  вновь выполнится условие пластичности, но с обратным знаком  $\sigma(r_0, t_5) = k$ , и начнет развиваться новая область вязкопластического течения  $r_0 \leq r \leq r_3(t)$ . В области  $r_3(t) \leq r \leq r_1$ , где пластические деформации не изменяются, и в области обратимого деформирования  $r_1 \leq r \leq R$  будут справедливы зависимости (4.2) и (3.2). В области течения, как и ранее, найдем

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta} \left( \frac{r_0^2(-\alpha t_1 + \beta(t - t_2))}{r^2} - k \right),$$

$$p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left( -kt + 2\frac{\alpha}{\beta} kt_1 + 2kt_2 - \frac{r_0^2}{r^2} \left( \alpha t_1 t - \frac{\beta(t - t_2)^2}{2} - \frac{\alpha t_1^2}{2} \right) - \frac{k^2 r^2}{2\alpha r_0^2} \right), \quad (5.1)$$

$$\omega = \frac{2}{\eta} \left[ -k \ln \frac{r}{r_3} + \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_3^2} \right) (\alpha t_1 + \beta(t - t_2)) \right] + \frac{r_0^2 \beta}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right),$$

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{2}{\eta} \left[ \left( 2\frac{\alpha}{\beta} kt_1 + 2kt_2 - kt \right) \ln \frac{r}{r_3} + k \ln \frac{r_3}{r_1} \left( \frac{\alpha t_1}{\beta} + t_2 \right) + \frac{k^2(r_1^2 - r^2)}{4\alpha r_0^2} + \frac{k^2(r_1^2 - r_3^2)}{4\beta r_0^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha r_0^2}{2} \left( \frac{1}{r_3^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \left( t_1 t_2 + \frac{\alpha t_1^2}{2\beta} - \frac{t_1^2}{2} \right) + \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_3^2} \right) \left( \alpha t_1 t - \frac{\beta(t - t_2)^2}{2} - \frac{\alpha t_1^2}{2} \right) \right] + \\ & + \frac{(\alpha t_1 - \beta(t - t_2)) r_0^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right). \end{aligned}$$

В момент времени  $t_6 = \frac{\alpha t_1 + \beta t_2 + k r_1^2}{r_0^2 \beta}$  граница  $r_3(t)$  достигает поверхности  $r = r_1$ , первоначально ограничивающей пластическую область. Далее для решения задачи уравнения

равновесия необходимо проинтегрировать в упругой области  $r_3 \leq r \leq R$  и в двух областях вязкопластического течения  $r_1 \leq r \leq r_3(t)$ ,  $r_0 \leq r \leq r_1$ , в которых пластические деформации находятся по-разному. В области обратимого деформирования выполняются те же соотношения, что и ранее. В области течения  $r_0 \leq r \leq r_1$  компонента пластических деформаций  $p_{r\varphi}$  и ее скорость  $\varepsilon_{r\varphi}^p$  вычисляются по формулам (5.1). Для области  $r_1 \leq r \leq r_3(t)$ , используя условие непрерывности перемещений, деформаций и скоростей на поверхности  $r = r_3(t)$ , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta} \left( \frac{r_0^2(-\alpha t_1 + \beta(t - t_2))}{r^2} - k \right), \\ p_{r\varphi} &= \frac{1}{\eta} \left( -kt + \frac{\alpha}{\beta} kt_1 + kt_2 - \frac{r_0^2}{r^2} \left( \alpha t_1 t - \frac{\beta(t - t_2)^2}{2} - \frac{\alpha^2 t_1^2}{2\beta} - \alpha t_1 t_2 \right) + \frac{k^2 r^2}{2\beta r_0^2} \right), \\ \omega &= \frac{2}{\eta} \left[ -k \ln \frac{r}{r_3} + \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_3^2} \right) (\alpha t_1 + \beta(t - t_2)) \right] + \frac{r_0^2 \beta}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \\ \theta &= \frac{2}{\eta} \left[ \left( \frac{\alpha}{\beta} kt_1 + kt_2 - kt \right) \ln \frac{r}{r_3} + \frac{k^2(r^2 - r_3^2)}{4\beta r_0^2} + \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_3^2} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left( \alpha t_1 t - \frac{\beta(t - t_2)^2}{2} - \frac{\alpha^2 t_1^2}{2\beta} - \alpha t_1 t_2 \right) \right] + \frac{(\alpha t_1 - \beta(t - t_2)) r_0^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right). \end{aligned}$$

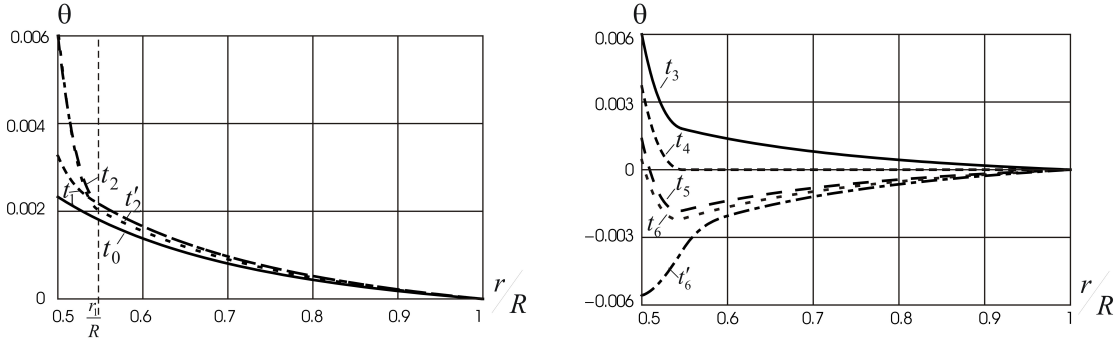


Рис. 1. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса

В области  $r_0 \leq r \leq r_1$  для угла поворота и угловой скорости найдем

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2}{\eta} \left[ -k \ln \frac{r}{r_3} + \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_3^2} \right) (\alpha t_1 + \beta(t - t_2)) \right] + \frac{r_0^2 \beta}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \\ \theta &= \frac{2}{\eta} \left[ \left( \frac{\alpha}{\beta} kt_1 + kt_2 \right) \ln \frac{r}{r_3 r_1} - kt \ln \frac{r}{r_3} + \frac{k^2(r_1^2 - r_3^2)}{4\beta r_0^2} - \frac{k^2(r^2 - r_1^2)}{4\alpha r_0^2} + \right. \\ &+ \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_3^2} \right) \left( \alpha t_1 t - \frac{\beta(t - t_2)^2}{2} - \frac{\alpha^2 t_1^2}{2\beta} - \alpha t_1 t_2 \right) + \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \times \\ &\times \left. \left( \alpha t_1 t - \frac{\beta(t - t_2)^2}{2} - \frac{\alpha^2 t_1^2}{2} \right) \right] + \frac{(\alpha t_1 - \beta(t - t_2)) r_0^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right). \end{aligned}$$

На рис. 1 показано распределение угла поворота в зависимости от радиуса в различные моменты времени при значении постоянных

$$\frac{\alpha\eta}{\mu} = 0.004, \quad \frac{r_0}{R} = 0.5, \quad \frac{k}{\mu} = 0.00621. \quad (5.2)$$

**6. Деформирование при повороте внешнего жесткого цилиндра.** Пусть теперь к внешнему жесткому цилиндру приложен закручивающий момент, а внутренний цилиндр при этом остается неподвижным:

$$\mathbf{u}|_{r=r_0} = \mathbf{v}|_{r=r_0} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = \alpha t. \quad (6.1)$$

Так же, как и при повороте внутренней поверхности, интегрируя уравнения равновесия (2.4) и используя граничные условия (6.1), получим решение упругой задачи:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{c}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \omega = \frac{\dot{c}}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \dot{c} = \frac{dc}{dt}, \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{c}{r^2}, \\ \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= \frac{c^2}{4\mu} \left( \frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{c^2}{4\mu} \left( \frac{1}{r_0^4} - \frac{3}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad c(t) = \alpha t R^2. \end{aligned} \quad (6.2)$$

В момент времени  $t_0 = \frac{kr_0^2}{\alpha R^2}$  на поверхности  $r = r_0$  выполняется условие пластичности (1.3). Далее в материале будут две области: область вязкопластического течения  $r_0 \leq r \leq r_1(t)$  и область обратимого деформирования  $r_1(t) \leq r \leq R$ . Текущее значение границы  $r_1(t)$  определяется по формуле  $r_1 = R\sqrt{\frac{\alpha t}{k}}$ . В области течения, используя кинематические зависимости (3.1), условие пластичности и условие прилипания на внутренней поверхности  $r = r_0$ , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta} \left( \frac{\alpha t R^2}{r^2} - k \right), \quad p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left( -kt + \frac{\alpha t^2 R^2}{2r^2} + \frac{k^2 r^2}{2\alpha R^2} \right), \\ \theta &= \frac{2}{\eta} \left( kt \ln \frac{r_0}{r} - \frac{\alpha t R^2}{4} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{k^2}{4\alpha R^2} (r^2 - r_0^2) \right) + \frac{\alpha t R^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \\ \omega &= \frac{2}{\eta} \left( k \ln \frac{r_0}{r} - \frac{\alpha t R^2}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) \right) + \frac{\alpha R^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Угол поворота и угловая скорость в упругой области находятся интегрированием уравнений равновесия и условий непрерывности этих параметров на поверхности  $r = r_1$ :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{2}{\eta} \left( kt \ln \frac{r_0}{r_1} - \frac{\alpha t^2 R^2}{4} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{k^2}{4\alpha R^2} (r_1^2 - r_0^2) \right) + \frac{\alpha t R^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \\ \omega &= \frac{2}{\eta} \left( k \ln \frac{r_0}{r_1} - \frac{\alpha t R^2}{2} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) \right) + \frac{\alpha R^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Если напряжение на поверхности  $r = R$  становится постоянным с момента времени  $t = t_1$ , то, как и в случае поворота внутреннего цилиндра, область вязкопластического течения перестает увеличиваться. Тогда решение задачи записывается в виде:

– в области вязкопластического течения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta} \left( \frac{\alpha t_1 R^2}{r^2} - k \right), \quad p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left( \frac{\alpha t_1 t R^2}{r^2} - kt - \frac{\alpha t^2 R^2}{2r^2} + \frac{k^2 r^2}{2\alpha R^2} \right), \\ \theta &= \frac{2}{\eta} \left( kt \ln \frac{r_0}{r} - \frac{\alpha t t_1 R^2}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{\alpha t_1^2 R^2}{4} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{k^2}{4\alpha R^2} (r^2 - r_0^2) \right) + \\ &+ \frac{\alpha t_1 R^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \omega = \frac{2}{\eta} \left( k \ln \frac{r_0}{r} - \frac{\alpha t_1 R^2}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

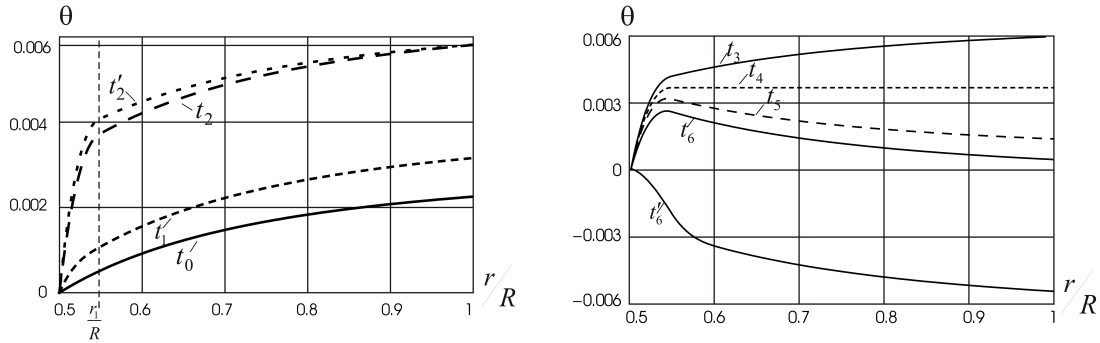


Рис. 2. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса

– в упругой области:

$$\theta = \frac{2}{\eta} \left( kt \ln \frac{r_0}{r_1} - \frac{\alpha t t_1 R^2}{2} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{\alpha t_1^2 R^2}{4} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{k^2}{4\alpha R^2} (r^2 - r_0^2) \right) + \frac{\alpha t_1 R^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \omega = \frac{2}{\eta} \left( k \ln \frac{r_0}{r_1} - \frac{\alpha t_1 R^2}{2} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) \right)$$

При уменьшении момента закручивания на внешнем жестком цилиндре наблюдаются те же эффекты, что и при повороте внутреннего. На рис. 2 показано распределение угла поворота в зависимости от радиуса при повороте внешнего жесткого цилиндра при постоянных (5.2) в процессе всего деформирования.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бахшиян, Ф. А. Вращение жесткого цилиндра в вязкопластичной среде / Ф. А. Бахшиян // ПММ. – 1948. – Т. 12. – Вып. 6. – С. 650–661.
- [2] Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Докл. АН СССР. – 1996. – Т. 347. – №2. – С. 199–201.
- [3] Буренин, А. А. Вискозиметрическое течение упруговязкопластического материала между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. С. Устинова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 18–25.
- [4] Буренин, А. А. Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. С. Устинова // ПМТФ. – 2008. – Т. 49. – № 2. – С. 143–151.
- [5] Знаменский, В. А. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах / В. А. Знаменский, Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 114–118.
- [6] Ковтанюк, Л. В. О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов / Л. В. Ковтанюк, А. В. Шитиков // Вестник ДВО РАН. – 2006. – №4. – С. 87–93.
- [7] Огибалов, П. М. Нестационарные движения вязкопластических сред / П. М. Огибалов, А. Х. Мирзаджанзаде. – М. : Изд-во Московского университета, 1970. – 415 с.
- [8] Сафрончик, А. И. Вращение цилиндра с переменной скоростью в вязкопластичной среде / А. И. Сафрончик // ПММ. – 1959. – Т. 23. – Вып. 6. – С. 998–1014.

*Буренин Анатолий Александрович,*

*член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре*

**e-mail:** `burenin@iacp.dvo.ru`

*Ковтанюк Лариса Валентиновна,*

*доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией необратимого деформирования, Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток*

**e-mail:** `lk@iacp.dvo.ru`

*Устинова Александра Сергеевна,*

*кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории необратимого деформирования, Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток*

**e-mail:** `asustinova@mail.ru`

A. A. Burenin, L. V. Kovtaniuk, A. S. Ustinova

**TO VISKOZIMETRICHESKIM TESTING OF THE MATERIALS WITH THE ELASTIC VISCOUS AND PLASTIC PROPERTIES.**

*Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS*

*Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS*

**Abstract.** The exact solution of the problem of deformation elastoviscoplastic environment enclosed between two rigid coaxial cylinders while turning one of them is obtained. On hard surfaces, the conditions of adhesion are performed. The solution is constructed in the media of large elastoviscoplastic strains. Reversible deformation and viscoplastic flow, unloading and its deformation at turn in the opposite direction are considered. Fields are calculated displacements, strains, stresses and velocities are calculated.

**Keywords:** elasticity, viscoplasticity, large deformations, residual stresses.

**REFERENCES**

- [1] *Bakhshiyani, F. A.* Rotation of a rigid cylinder in a viscoplastic medium / F. A. Bakhshiyani // Prikl. Mat. Mekh. – 1948. – Vol. 12. – №. 6. – P. 650–661.
- [2] *Burenin, A. A.* A Simple Model of Finite Strains in an Elastoplastic Medium / A. A. Burenin, G. V. Bykovtsev, and L. V. Kovtanyuk // Dokl. Akad. Nauk. – 1996. – Vol. 347. – №2. – P. 199–201.
- [3] *Burenin, A. A.* Viscosimetric Flow of an Elastoviscoplastic Material between Rigid Coaxial Cylindrical Surfaces / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, and A. S. Ustinova, // Vestnik ChGPU im. Yakovleva. Mekh. Predelnogo Sost. – 2007. – № 1. – P. 18–25.
- [4] *Burenin, A.A.* On Accounting for the Elastic Properties of a Non-Newtonian Viscosimetric Flow, / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, and A. S. Ustinova // Prikl. Mekh.i Tekhn. Fiz. – 2008. – Vol. 49. – № 2. – P. 143–151.
- [5] *Znamenskii, V. A.* On the equations a viscoplastic body with piecewise-linear potentials / V. A. Znamenskii, D. D. Ivlev // Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekhanika Mashinostroenie. – 1963. – № 6. – P. 114–118.
- [6] *Kovtanyuk, L. V.* On the theory of large elastoplastic deformations of materials with the temperature and rheological effects taken into account / L. V. Kovtanyuk, A. V. Shitikov // Vestnik Dal'nevostochn. Otd. Ross. Akad. Nauk. – 2006. – №4. – P. 87–93.
- [7] *Ogibalov, P. M.* Unsteady Motion of Viscoplastic Media / P. M. Ogibalov and A. Kh. Mirzadzhanzade. – M. : Izd. Mosk. Univ., 1970. – 415 p.
- [8] *Safronchik, A. I.* Rotation of a cylinder at a variable velocity in a viscoplastic medium / A. I. Safronchik // Prikl. Mat. Mekh. – 1959. – Vol. 23. – №. 6. P. 998–1014.

*Burenin, Anatoly Aleksandrovich*

*Corresponding member of the RAS, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Director, Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur*

*Kovtanyuk, Larisa Valentinovna*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Laboratory of Irreversible Deformation, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok*

*Ustinova, Alexandra Sergeevna*

*Candidate of Phys. & Math., Junior Researcher, Laboratory of Irreversible Deformation, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok*



А. В. Балашникова, М. В. Михайлова

**К ВОПРОСУ О СЖАТИИ ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ  
ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ  
АНИЗОТРОПИИ В СЛУЧАЕ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева*

**Аннотация.** Рассмотрим плоский идеальнопластический слой, параллельный оси  $Ox$ , толщиной  $2h$ . Слой сжимается параллельными шероховатыми плитами вдоль оси  $Oy$ .

**Ключевые слова:** сжатие, слой, идеальная пластичность, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Рассмотрим плоский анизотропный слой, предельное состояние которого характеризуется условием пластичности, который впервые ввел Ивлев Д. Д.,

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = \kappa_0^2. \quad (1)$$

Уравнению (1) удовлетворим, полагая

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma + \kappa \cos 2\phi_1, \\ \sigma_y &= \sigma - \kappa \cos 2\phi_1, \\ \tau_{xy} &= \kappa \sin 2\phi_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя (2), найдем зависимость  $\kappa$  от  $\phi_1$ :

$$\kappa = \rho \cos 2(\phi_1 - \alpha) + \sqrt{\kappa_0^2 - \rho^2 \sin^2 2(\phi_1 - \alpha)}, \quad (3)$$

где

$$\rho^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + k_3^2, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2k_3}{k_1 - k_2}.$$

Предположим, что

$$\phi_1 = \phi_1(y). \quad (4)$$

Из (3) следует

$$\kappa = \kappa(y).$$

Уравнения равновесия согласно (2) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{d(\kappa \sin 2\phi_1)}{dy} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{d(\kappa \cos 2\phi_1)}{dy} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно (2), (4) имеем

---

Поступила 04.02.2013

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= C_0, \quad C_0 - \text{const}, \\ \frac{d(\kappa \sin 2\phi_1)}{dy} &= -C_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) найдем

$$\begin{aligned} \sigma &= C_0 x + F(y), \\ \kappa \sin 2\phi_1 &= -C_0 y + d_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно (7) получим

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dy} &= \frac{d(\kappa \cos 2\phi_1)}{dy}, \\ F &= \kappa \cos 2\phi_1 + d_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) согласно (2) будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_0 x + 2F(y) - d_2, \\ \sigma_y &= C_0 x + d_2, \\ \tau_{xy} &= -C_0 y + d_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Из последнего соотношения (7) согласно (3) получим

$$\left[ \left( \tilde{a} \cos 2\phi_1 + \tilde{b} \sin 2\phi_1 \right) + \sqrt{\kappa_0^2 - \left( \tilde{a} \sin 2\phi_1 - \tilde{b} \cos 2\phi_1 \right)^2} \right] 2 \sin 2\phi_1 = 2(-C_0 y + d_1), \quad (10)$$

где  $\tilde{a} = \rho \cos 2\alpha$ ,  $\tilde{b} = \rho \sin 2\alpha$ .

Из уравнения (10) найдем

$$tg 2\phi_1 = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + m^2 - n^2}}{m + n}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} l &= 4C_0 \tilde{a} y - 4\tilde{a} d_1, \quad m = -4C_0 \tilde{b} y + 4\tilde{b} d_1 - 2\tilde{b}^2 + 2\kappa_0^2 - 2\tilde{a}^2, \\ n &= 2\kappa_0^2 - 2\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2 - \left( 2C_0 y - 2d_1 + \tilde{b} \right)^2. \end{aligned}$$

С учетом решения (11) соотношения (10) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_0 x + 2(-C_0 y + d_1) \frac{m+n}{l \pm \sqrt{l^2 + m^2 - n^2}} + d_2, \\ \sigma_y &= C_0 x + d_2, \\ \tau_{xy} &= -C_0 y + d_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Из условия экстремума функционала

$$\bar{A}_2 = \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + 2\varepsilon_{xy} \tau_{xy} - \lambda \left( \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 - \kappa_0^2 \right)$$

определим соотношения ассоциированного закона пластического течения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lambda \cdot \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right), \\ \varepsilon_y &= -\lambda \cdot \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right), \\ 2 \cdot \varepsilon_{xy} &= 2\lambda \cdot (\tau_{xy} - k_3). \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно (13) найдем

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0. \quad (14)$$

Предположим, что

$$v = by, \quad b - const. \quad (15)$$

Из (14), (15) имеем

$$u = -bx + \Phi(y). \quad (16)$$

С учетом (15), (16) получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -b, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = b, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right). \quad (17)$$

Из (17) найдем

$$u = -bx + \Phi(y). \quad (18)$$

Из первых соотношений (15), (16) будем иметь

$$\lambda = \frac{-b}{F(y) - d_2 - \frac{k_1 - k_2}{2}}, \quad (19)$$

где

$$F(y) = (-C_0 y + d_1) \frac{m + n}{l \pm \sqrt{l^2 + m^2 - n^2}}. \quad (20)$$

Используя соотношения (13), (17), с учетом (19) получим

$$\Phi(y) = \int \frac{-2b(-C_0 y + d_1 - k_3)}{F(y) - d_2 - \frac{k_1 - k_2}{2}} dy. \quad (21)$$

Таким образом, деформированное состояние слоя определено в виде

$$\begin{aligned} u &= -bx + \int \frac{-2b(-C_0 y + d_1 - k_3)}{F(y) - d_2 - \frac{k_1 - k_2}{2}} dy, \\ v &= by, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $F(y)$  определяется согласно (19).

В частности, при  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$  рассмотрим предельное состояние плоского анизотропного слоя, которое характеризуется условием пластичности, который впервые ввел Хилл:

$$A \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + B \tau_{xy}^2 = \kappa_0^2 \quad (23)$$

Уравнению (23) удовлетворим согласно (2).

Используя (2), найдем зависимость  $\kappa$  от  $\phi_1$ :

$$\kappa = \frac{\kappa_0}{\sqrt{A \cos^2 2\phi_1 + B \sin^2 2\phi_1}} = \frac{\kappa_0}{\sqrt{\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\phi_1}} = \frac{\kappa_0}{\sqrt{a_2 + b_2 \cos 4\phi_1}}, \quad (24)$$

где  $a_2 = \frac{A+B}{2}$ ,  $b_2 = \frac{A-B}{2}$ .

Предположим, что

$$\phi_1 = \phi_1(y). \quad (25)$$

С учетом (24) следует

$$\kappa = \kappa(y).$$

Уравнения равновесия согласно (24) примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{d(\kappa \sin 2\phi_1)}{dy} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{d(\kappa \cos 2\phi_1)}{dy} &= 0.\end{aligned}\quad (26)$$

Из (2), (25) найдем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial x} &= \tilde{C}_0, \quad \tilde{C}_0 = \text{const}, \\ \frac{d(\kappa \sin 2\phi_1)}{dy} &= -\tilde{C}_0.\end{aligned}\quad (27)$$

Из (26) будем иметь

$$\begin{aligned}\sigma &= \tilde{C}_0 x + F_1(y), \\ \kappa \sin 2\phi_1 &= -\tilde{C}_0 y + d_1.\end{aligned}\quad (28)$$

Согласно (27) получим

$$\begin{aligned}\frac{dF_1}{dy} &= \frac{d(\kappa \cos 2\phi_1)}{dy}, \\ F_1 &= \kappa \cos 2\phi_1 + d_2.\end{aligned}\quad (29)$$

Из (28) соотношения (2) примут вид

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \tilde{C}_0 x + 2F_1(y) - d_2, \\ \sigma_y &= \tilde{C}_0 x + d_2, \\ \tau_{xy} &= -\tilde{C}_0 y + d_1.\end{aligned}\quad (30)$$

Из соотношения (27) согласно выражению (24) получим

$$\frac{\kappa_0 \sin 2\phi_1}{\sqrt{A \cos^2 2\phi_1 + B \sin^2 2\phi_1}} = -\tilde{C}_0 y + d_1.\quad (31)$$

Из уравнения (30) найдем

$$\text{tg} 2\phi_1 = \pm \sqrt{\frac{A (\tilde{C}_0 y - d_1)^2}{\kappa_0^2 - B (\tilde{C}_0 y - d_1)^2}}.\quad (32)$$

С учетом решения (31) соотношения (29) запишутся в виде

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \tilde{C}_0 x \pm 2\sqrt{\frac{\kappa_0^2}{A} - \frac{B}{A} (\tilde{C}_0 y - d_1)^2} + d_2, \\ \sigma_y &= \tilde{C}_0 x + d_2, \\ \tau_{xy} &= -\tilde{C}_0 y + d_1.\end{aligned}\quad (33)$$

Таким образом, определено напряженное состояние слоя.

Из условия экстремума функционала

$$\bar{A}_3 = \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + 2\varepsilon_{xy} \tau_{xy} - \lambda \left( A \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + B (\tau_{xy})^2 - \kappa_0^2 \right)$$

определим соотношения ассоциированного закона пластического течения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \lambda \cdot A \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right), \\ \varepsilon_y &= -\lambda \cdot A \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right), \\ 2 \cdot \varepsilon_{xy} &= 2\lambda \cdot B \tau_{xy}.\end{aligned}\quad (34)$$

Предположим, что

$$v = \bar{b}_1 y, \quad \bar{b}_1 - const. \quad (35)$$

Из (34) найдем

$$u = -\bar{b}_1 x + \Phi_1(y). \quad (36)$$

Согласно (34), (35) получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\bar{b}_1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \bar{b}_1, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right). \quad (37)$$

Из соотношений (33), (35) имеем

$$\lambda = \frac{-\bar{b}_1}{A(F_1(y) - d_2)}, \quad (38)$$

где

$$F_1(y) = \pm \sqrt{\frac{\kappa_0^2}{A} - \frac{B}{A} (\tilde{C}_0 y - d_1)^2}. \quad (39)$$

Используя соотношения (33), (35), с учетом (37) получим

$$\Phi_1(y) = -\frac{b_1}{2\tilde{C}_0} \sqrt{\frac{\kappa_0^2}{A} - \frac{B}{A} (\tilde{C}_0 y - d_1)^2} + \bar{C}'. \quad (40)$$

Таким образом, деформированное состояние слоя определено в виде

$$u = -b_1 x - \frac{b_1}{2\tilde{C}_0} \sqrt{\frac{\kappa_0^2}{A} - \frac{B}{A} (\tilde{C}_0 y - d_1)^2} + \bar{C}', \quad (41)$$

$$v = b_1 y,$$

где  $F_1(y)$  определяется согласно (38).

Важность полученных результатов заключается в том, что при предположении того, что касательное напряжение  $\tau_{xy}$  зависит от  $y$ , при выборе любого уравнения пластичности эта зависимость может быть только линейной. Других вариантов нет.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 3. – № 2 (8). – С. 580–583.
- [2] *Балашникова, А. В.* О сжатии идеальнопластического слоя жесткими шероховатыми плитами в случае трансляционной анизотропии / А. В. Балашникова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2011. – № 2 (10). – С. 115–118
- [3] *Максимова, Л. А.* О сжатии плиты из идеальнопластического анизотропного материала / Л. А. Максимова // Проблемы механики : сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М. : Физматлит, 2003. – С. 520–523.

Михайлова Марина Васильевна,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

Балашникова Анжелика Вениаминовна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: info3006@yandex.ru

*A. V. Balashnikova, M. V. Mihailova*

**TO A QUESTION OF COMPRESSION BY ROUGH PLATES OF THE  
IDEALNOPLASTICHESKY LAYER AT TRANSMITTING ANISOTROPY IN  
CASE OF FLAT DEFORMATION**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** Let's consider the flat idealnoplastichesky layer parallel to an axis of  $Ox$ ,  $2h$  thick. The layer contracts parallel rough plates along an axis  $Oy$ .

**Keywords:** compression, layer, ideal plasticity, transmitting anisotropy.

**REFERENCES**

[1] *Ivlev, D. D.* About ratios of the theory of transmitting idealnoplastichesky anisotropy / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit condition. – 2010. – Vol. 3. – No 2 (8). – P. 580–583.

[2] *Balashnikova, A. V.* About compression of an idealnoplastichesky layer by rigid rough plates in case of transmitting anisotropy / A. V. Balashnikova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit condition. – 2011. – No 2 (10). – P. 115–118

[3] *Maksimova, L. A.* About compression of plate from ideal-plastic anisotropy layer / L. A. Maksimova // Problems of mechanics : sb. st. on the 90th anniversary of Ishlinskiy A. – M. : Phizmatlit, 2003. – P. 520–523.

*Mihailova, Marina Vasilevna*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Balashnikova, Anshelika Veniaminovna*

*Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

А. В. Балашникова, Б. Г. Миронов, М. В. Михайлова

**ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОГО ПЛОСКОГО СЛОЯ,  
СЖАТОГО ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ ПРИ УСЛОВИИ  
ЗАВИСИМОСТИ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ ОТ СРЕДНЕГО ДАВЛЕНИЯ**

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева*

**Аннотация.** В работе исследуется предельное состояние идеальнопластического анизотропного плоского слоя, сжатого параллельными жесткими шероховатыми плитами. Рассматривается плоский анизотропный слой толщины  $2h$ .

**Ключевые слова:** сжатие, слой, идеальная пластичность, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Предположим, что условие пластичности зависит от среднего давления и имеет вид

$$A \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + B (\tau_{xy} - k_3)^2 = (\kappa_0 + a\sigma)^2. \quad (1)$$

Следуя идеям Гартмана, решение будем искать в виде

$$\xi = \kappa_0 + a\sigma = \tilde{\kappa} e^{\lambda x + \psi(y)}, \quad \tilde{\kappa} = const, \quad \lambda = const.$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \tilde{\sigma}_x e^{\lambda x + \psi(y)} + k_1 - b, \\ \sigma_y &= \tilde{\sigma}_y e^{\lambda x + \psi(y)} + k_2 - b, \\ \tau_{xy} &= \tilde{\tau}_{xy} e^{\lambda x + \psi(y)} + k_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Согласно соотношениям (2) условие пластичности (1) запишется в виде

$$A \left( \frac{\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y}{2} \right)^2 + B \tilde{\tau}_{xy}^2 = \tilde{\kappa}^2. \quad (3)$$

Удовлетворим условию (3), полагая

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x &= \tilde{\sigma} + \kappa(\theta) \cos 2\theta, \\ \tilde{\sigma}_y &= \tilde{\sigma} - \kappa(\theta) \cos 2\theta, \\ \tilde{\tau}_{xy} &= \kappa(\theta) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\kappa(\theta) = \frac{\tilde{\kappa}}{\sqrt{\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta}} = \frac{\tilde{\kappa}}{\sqrt{a_1 + b_1 \cos 4\theta}} = \frac{c_2 \tilde{\kappa}}{\sqrt{1 + c_1 \cos 4\theta}}, \quad a_1 = \frac{A+B}{2}, \quad (5)$$
$$b_1 = \frac{A-B}{2}, \quad c_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{a_1}}.$$

Из (2) следует

$$\tilde{\sigma} = \frac{\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y}{2} = \frac{\tilde{\kappa}}{a}, \quad b = \frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{\kappa_0}{a}. \quad (6)$$



Согласно (2), (4) из уравнений равновесия получим

$$\begin{aligned} \lambda \left( \frac{\tilde{\kappa}}{a} + \kappa \cos 2\theta \right) + (\kappa' \sin 2\theta + 2\kappa \cos 2\theta) \frac{d\theta}{dy} + \kappa \sin 2\theta \frac{d\psi}{dy} &= 0, \\ \lambda \kappa \sin 2\theta + (-\kappa' \cos 2\theta + 2\kappa \sin 2\theta) \frac{d\theta}{dy} + \left( \frac{\tilde{\kappa}}{a} - \kappa \cos 2\theta \right) \frac{d\psi}{dy} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно замене

$$\kappa' = \frac{d\kappa}{d\theta}, \quad \rho = \sqrt{\kappa'^2 + 4\kappa^2}, \quad \frac{\kappa'}{\rho} = \cos 2\alpha, \quad \frac{2\kappa}{\rho} = \sin 2\alpha \quad (8)$$

получим

$$\begin{aligned} \lambda \left( \frac{\tilde{\kappa}}{a} + \kappa \cos 2\theta \right) + (\rho \sin 2(\theta + \alpha)) \frac{d\theta}{dy} + \kappa \sin 2\theta \frac{d\psi}{dy} &= 0, \\ \lambda \kappa \sin 2\theta + (-\rho \cos 2(\theta + \alpha)) \frac{d\theta}{dy} + \left( \frac{\tilde{\kappa}}{a} - \kappa \cos 2\theta \right) \frac{d\psi}{dy} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (5), (7) найдем

$$\kappa' = \frac{2\tilde{\kappa}c_1c_2 \sin 4\theta}{\sqrt{(1+c_1 \cos 4\theta)^3}}, \quad \rho = \frac{2c_2\tilde{\kappa}}{(1+c_1 \cos 4\theta)} \sqrt{\frac{c_3 + c_4 \cos 8\theta + 2c_1 \cos 4\theta + 1}{1+c_1 \cos 4\theta}}, \quad (10)$$

где  $c_3 = \frac{c_1+c_2}{2}$ ,  $c_4 = \frac{c_1-c_2}{2}$ .

Согласно (8) получим

$$\begin{aligned} \lambda \left( \frac{\tilde{\kappa}^2}{a^2} - \kappa^2 \right) + \left( \frac{\tilde{\kappa}\rho}{a} - \rho\kappa \sin 2\alpha \right) \frac{d\theta}{dy} &= 0, \\ \lambda \rho \left( \frac{\tilde{\kappa}}{a} \cos 2(\theta + \alpha) + \kappa \cos 2\alpha \right) + \rho \left( \frac{\tilde{\kappa}}{a} \sin 2(\theta + \alpha) - \kappa \sin 2\alpha \right) \frac{d\psi}{dy} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (10) найдем

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dy} &= -\frac{\lambda(1+c_1 \cos 4\theta - a^2)\sqrt{1+c_1 \cos 4\theta}}{2c_2(\sqrt{c_3+c_4 \cos 8\theta+1+2c_1 \cos 4\theta} - a\sqrt{1+c_1 \cos 4\theta})}, \\ \frac{d\psi}{dy} &= -\lambda \frac{c_1 \sin 4\theta \cos 2\theta(1+c_1 \cos 4\theta)^2 + \sin 2\theta \sqrt{(1+c_1 \cos 4\theta)^3} + ac_1c_2 \sin 4\theta}{c_1 \sin 4\theta \sin 2\theta \sqrt{1+c_1 \cos 4\theta} + \cos 2\theta \sqrt{(1+c_1 \cos 4\theta)^3} - ac_2(1+c_1 \cos 4\theta)}, \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно (12) имеем

$$\begin{aligned} y + C &= -\frac{\lambda}{2c_2} \int \frac{\sqrt{c_3+c_4 \cos 8\theta+1+2c_1 \cos 4\theta} - a\sqrt{1+c_1 \cos 4\theta}}{(1+c_1 \cos 4\theta - a^2)\sqrt{1+c_1 \cos 4\theta}} d\theta, \\ \psi &= -\lambda \int \frac{c_1 \sin 4\theta \sin 2\theta \sqrt{1+c_1 \cos 4\theta} + \cos 2\theta \sqrt{(1+c_1 \cos 4\theta)^3} - ac_2(1+c_1 \cos 4\theta)}{c_1 \sin 4\theta \cos 2\theta(1+c_1 \cos 4\theta)^2 + \sin 2\theta \sqrt{(1+c_1 \cos 4\theta)^3} + ac_1c_2 \sin 4\theta} dy. \end{aligned} \quad (13)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left( \frac{\tilde{\kappa}}{a} + \frac{c_2\tilde{\kappa}}{\sqrt{1+c_1 \cos 4\theta}} \cos 2\theta \right) e^{\lambda x + \psi(y)} + k_1 - b, \\ \sigma_y &= \left( \frac{\tilde{\kappa}}{a} - \frac{c_2\tilde{\kappa}}{\sqrt{1+c_1 \cos 4\theta}} \cos 2\theta \right) e^{\lambda x + \psi(y)} + k_2 - b, \\ \tau_{xy} &= \left( \frac{c_2\tilde{\kappa}}{\sqrt{1+c_1 \cos 4\theta}} \sin 2\theta \right) e^{\lambda x + \psi(y)} + k_3, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\theta$ ,  $\psi(y)$  определяются из соотношения (11).

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 3. – № 2 (8). – С. 580–583.

[2] *Балашникова, А. В.* О сжатии идеальнопластического слоя жесткими шероховатыми плитами в случае трансляционной анизотропии / А. В. Балашникова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2011. – № 2 (10). – С. 115–118

[3] *Максимова, Л. А.* О сжатии плиты из идеальнопластического анизотропного материала / Л. А. Максимова // Проблемы механики : сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М. : Физматлит, 2003. – С. 520–523.

*Миронов Борис Гурьевич,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: strangcheb@mail.ru*

*Михайлова Марина Васильевна,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: strangcheb@mail.ru*

*Балашникова Анжелика Вениаминовна,*

*аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: info3006@yandex.ru*

A. V. Balashnikova, B. G. Mironov, M. V. Mihailova

**LIMIT CONDITION OF THE ANISOTROPIC FLAT LAYER SQUEEZED BY  
ROUGH PLATES ON CONDITION OF DEPENDENCE OF A LIMIT OF  
FLUIDITY FROM AVERAGE PRESSURE**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** In work the limit condition of the idealnoplastichesky anisotropic flat layer squeezed by parallel rigid rough plates is investigated. The flat anisotropic layer of thickness is considered  $2h$ .

**Keywords:** compression, layer, ideal plasticity, transmitting anisotropy.

**REFERENCES**

[1] *Ivlev, D. D.* About ratios of the theory of transmitting idealnoplastichesky anisotropy / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit condition. – 2010. – Vol. 3. – No 2 (8). – P. 580–583.

[2] *Balashnikova, A. V.* About compression of an idealnoplastichesky layer by rigid rough plates in case of transmitting anisotropy / A. V. Balashnikova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit condition. – 2011. – No 2 (10). – P. 115–118

[3] *Maksimova, L. A.* About compression of plate from ideal-plastic anisotropy layer / L. A. Maksimova // Problems of mechanics : sb. st. on the 90th anniversary of Ishlinskiy A. – M. : Phizmatlit, 2003. – P. 520–523.

*Mironov, Boris Guryevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Mihailova, Marina Vasilevna*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Balashnikova, Anshelika Veniaminovna*

*Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

## К ЗАДАЧЕ УСИЛЕНИЯ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ ЖЕСТКОЙ НАКЛАДКОЙ ВДОЛЬ ОДНОГО ИЗ БЕРЕГОВ

Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова

**Аннотация.** В работе [1] решена краевая задача для кусочно-однородного упругого тела с полубесконечной трещиной на линии раздела сред, усиленной частично жесткой накладкой вдоль одного из берегов. Задача сведена к матричной краевой задаче Римана с кусочно-постоянным коэффициентом на луче. При построении решения последней считалось, что матрица-коэффициент задачи имеет различные собственные значения, так как случай их совпадения требовал довольно объемных дополнительных исследований и был опущен. Данная работа направлена на восполнение этого пробела.

**Ключевые слова:** трещина, жесткая накладка, кусочно-однородная упругая плоскость, напряжения, гипергеометрическая функция, кратные собственные значения.

УДК: 539.375

Пусть в кусочно-однородной упругой изотропной плоскости  $z = x + iy$ , составленной из разных по упругим свойствам верхней  $\text{Im}z > 0$  и нижней  $\text{Im}z < 0$  полуплоскостей, на линии раздела сред  $y = 0$  расположена полубесконечная открытая трещина  $[0, +\infty)$ . Верхний берег трещины на участке  $[0, l]$  подкреплен абсолютно жесткой накладкой заданной формы, присоединенной к телу идеально жестко с заданным натягом, а остальная часть этого берега и весь нижний берег трещины нагружены заданными напряжениями:

$$\begin{aligned} u^+(x) + iv^+(x) &= s_1(x) + is_2(x) + i\varepsilon x + (u_0 + iv_0), \quad x \in (0, l], \\ \tau_{xy}^+(x) + i\sigma_y^+(x) &= p_1^+(x) + ip_2^+(x), \quad x \in (l, +\infty), \\ \tau_{xy}^-(x) + i\sigma_y^-(x) &= p_1^-(x) + ip_2^-(x), \quad x \in (0, +\infty), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u + iv$  – вектор смещений,  $\tau_{xy} + i\sigma_y$  – вектор напряжений,  $s_1(x)$ ,  $s_2(x)$ ,  $p_1^\pm(x)$ ,  $p_2^\pm(x)$  – заданные функции,  $\varepsilon$  – угол поворота наклейки,  $u_0 + iv_0$  – комплексная константа, выражающая жесткое смещение всего тела, а верхние индексы «+» и «-» у функций означают их значения на верхнем и нижнем берегах трещины соответственно. Функция  $s_1(x)$  определяет величину натяга в точке  $x$ , а  $s_2(x)$  – форму поверхности наклейки. Будем считать, что производные  $s_1'(x)$ ,  $s_2'(x)$  и функции  $p_1^\pm(x)$ ,  $p_2^\pm(x)$  непрерывны по Гельдеру на соответствующих промежутках и  $p_j^\pm(x) = O(x^{-\rho})$ ,  $\rho > 1$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $j = 1, 2$ . Угол поворота  $\varepsilon$  наклейки заранее неизвестен и находится после решения задачи.

Вдоль луча  $(-\infty, 0]$  полуплоскости жестко соединены друг с другом.

На  $\infty$  в верхней и нижней полуплоскостях действуют заданные нормальные продольные напряжения  $\sigma_{x1}^\infty = \sigma$  и  $\sigma_{x2}^\infty = \sigma\mu_2(1 + \kappa_1)/[\mu_1(1 + \kappa_2)]$  соответственно, где  $\mu_1, \kappa_1$  и  $\mu_2, \kappa_2$  –

Поступила 25.02.2013

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-31387).

упругие параметры верхней и нижней полуплоскостей соответственно. Заданы еще главный вектор  $X_0 + iY_0$  внешних сил, действующих на накладку, и момент  $M_0$  этих сил относительно вершины трещины.

Требуется найти комплексные потенциалы, описывающие напряженное состояние составной плоскости, при котором напряжения и вращение в вершине трещины  $z = 0$  и на правом конце накладки  $z = l + i0$  могут иметь интегрируемые особенности, и исследовать поведение напряжений вблизи этих точек.

С помощью видоизмененных формул Колосова–Мусхелишвили применительно к кусочно-однородной плоскости [2] поставленная задача сводится к матричной краевой задаче Римана для комплексных потенциалов  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$  с кусочно-постоянным коэффициентом, имеющим разрыв в точке  $t = 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^+(t) &= \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{H}^-(t) + \mathbf{g}_1(t), \quad t \in (0, 1), \\ \mathbf{H}^+(t) &= \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{H}^-(t) + \mathbf{g}_2(t), \quad t \in (1, +\infty), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{H}(\zeta) = \begin{pmatrix} H_1(\zeta) \\ H_2(\zeta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1^{-1} \\ -m & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -m & 1 - m \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}_1(t) = \begin{pmatrix} 2\mu_1\kappa_1^{-1}[s'(lt) + i\varepsilon] \\ \alpha_3^{-1}p^-(lt) - 2\mu_1\kappa_1^{-1}\alpha_4\alpha_3^{-1}[s'(lt) + i\varepsilon] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(t) = \begin{pmatrix} p^+(lt) \\ \alpha_3^{-1}p^-(lt) - \alpha_4\alpha_3^{-1}p^+(lt) \end{pmatrix},$$

$$H_1(\zeta) = \Phi(l\zeta), \quad H_2(\zeta) = \Omega(l\zeta), \quad \zeta = z/l, \quad t = x/l,$$

$$m = \alpha_1\alpha_3^{-1}, \quad \alpha = (\alpha_2\kappa_1 + \alpha_4)(\alpha_3\kappa_1)^{-1},$$

$$\alpha_1 = \frac{1 + \mu_*\kappa_1}{1 + \kappa_2}, \quad \alpha_2 = \frac{1 - \mu_*}{1 + \kappa_2}, \quad \mu_* = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \alpha_3 = 1 - \alpha_2, \quad \alpha_4 = 1 - \alpha_1,$$

$$s'(x) = s'_1(x) + is'_2(x), \quad p^+(x) = p_2^+(x) - ip_1^+(x), \quad p^-(x) = p_2^-(x) - ip_1^-(x).$$

Компоненты вектор-функции  $\mathbf{H}(\zeta)$ , следовательно, и функции  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$  на  $\infty$  ограничены. В точках  $\zeta = 0$  и  $\zeta = 1 \pm i0$  они могут иметь интегрируемые особенности.

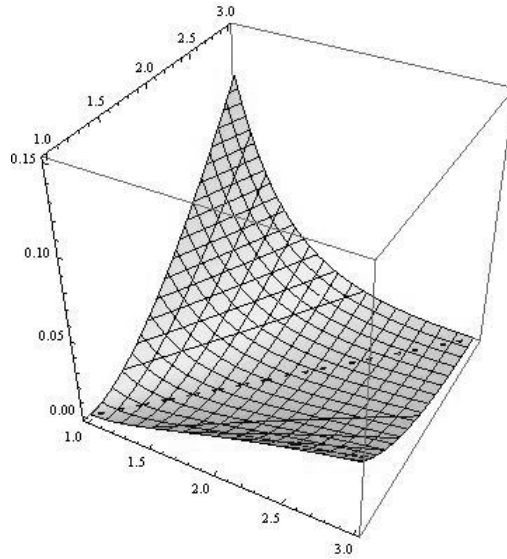


Рис. 1

В работе [1] краевая задача (2) решена явно с помощью гипергеометрической функции Гаусса. Однако решение найдено в предположении, что собственные значения матрицы  $\mathbf{G}_1$  –

различные комплексно-сопряженные числа. Случай совпадения собственных значений матрицы  $\mathbf{G}_1$  приводит к расхождению с условиями, наложенными на параметры гипергеометрической функции, и тем самым исключает возможность использования найденного решения. На рис. 1 изображена поверхность значений параметров  $\mu_*$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ , для которых матрица  $\mathbf{G}_1$  имеет кратное собственное значение. На рисунке видно, что этот случай встречается крайне редко при физически приемлемых сочетаниях упругих параметров, тем не менее он имеет место и поэтому требует дополнительных исследований.

Данная работа посвящена построению решения поставленной задачи для случая, когда матрица  $\mathbf{G}_1$  имеет кратное собственное значение. В этом случае частное решение однородной задачи (2) снова ищется в виде

$$\chi_1(\zeta) = \zeta^\lambda (\zeta - 1)^\mu \mathbf{C} \begin{pmatrix} w_1(\zeta) \\ w_2(\zeta) \end{pmatrix}, \quad \zeta \notin [0, +\infty), \quad (3)$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  – комплексные постоянные,  $\mathbf{C}$  – невырожденная комплексная матрица второго порядка, а  $w_1(\zeta)$ ,  $w_2(\zeta)$  – фундаментальная система решений гипергеометрического уравнения [3], определяемая в плоскости с разрезом  $[0, +\infty)$  формулами

$$\begin{aligned} w_1(\zeta) &= F(a, b; 1; \zeta), \quad w_2(\zeta) = (2\pi i)^{-1} \left( -F(a, b; 1; \zeta) \ln \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} h_n z^n \right), \\ h_n &= 2\psi(n+1) - \psi(a+n) - \psi(b+n), \quad |\zeta| < 1, \zeta \notin [0, 1], \\ \begin{pmatrix} w_1(\zeta) \\ w_2(\zeta) \end{pmatrix} &= \mathbf{P}^\pm \begin{pmatrix} F(a, b; a+b; 1-\zeta) \\ ((\zeta-1)^{1-a-b} F(1-a, 1-b; 2-a-b; 1-\zeta)) \end{pmatrix}, \\ &|\zeta-1| < 1, \operatorname{Im}(\pm\zeta) > 0, \\ \begin{pmatrix} w_1(\zeta) \\ w_2(\zeta) \end{pmatrix} &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \zeta^{-a} F(a, a; a+1-b; \zeta^{-1}) \\ \zeta^{-b} F(b, b; b+1-a; \zeta^{-1}) \end{pmatrix}, \quad |\zeta| > 1, \operatorname{Im}(\pm\zeta) > 0, \\ \mathbf{P}^+ &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}^+ = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} - p_{11} & -p_{12} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \\ p_{11} &= \frac{\Gamma(1-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}, \quad p_{12} = \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{i\pi(a+b-1)}, \\ p_{21} &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{2\pi i \Gamma(a+b)}, \quad q_{11} = \frac{\Gamma(b-a)}{\Gamma(1-a)\Gamma(b)} e^{i\pi a}, \quad q_{12} = \frac{\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(1-b)} e^{i\pi b}, \\ q_{21} &= -\frac{(\pi i + \pi \operatorname{ctg} \pi(1-a))\Gamma(b-a)}{2\pi i \Gamma(1-a)\Gamma(b)} e^{i\pi a}, \quad q_{22} = -\frac{(\pi i + \pi \operatorname{ctg} \pi(1-b))\Gamma(a-b)}{2\pi i \Gamma(a)\Gamma(1-b)} e^{i\pi b}. \end{aligned}$$

В этих формулах  $F(a, b; c; \zeta)$  – гипергеометрическая функция Гаусса с неизвестными комплексными параметрами  $a, b$ , которые, так же, как и постоянные  $\lambda, \mu$  и элементы матрицы  $\mathbf{C}$ , подбираются в соответствии с условиями задачи,  $\Gamma(\zeta)$  – гамма-функция Эйлера,  $\psi(\zeta)$  – дигамма-функция, а у многозначных функций  $\zeta^p$  и  $(\zeta-1)^q$  берутся ветви, однозначные в плоскости с разрезами  $[0, +\infty)$  и  $[1, +\infty)$  соответственно, определяемые условиями  $0 < \arg \zeta < 2\pi$  и  $0 < \arg(\zeta-1) < 2\pi$ .

Сравнивая граничные значения искомого частного решения (3) на берегах разреза с однородными краевыми условиями (2) и учитывая, что для принадлежности решения требуемому классу необходимо

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda &> -1, \quad \operatorname{Re} \mu > -1, \quad \operatorname{Re}(\mu + 1 - a - b) > -1, \\ \operatorname{Re}(a - \lambda - \mu) &\geq 0, \quad \operatorname{Re}(b - \lambda - \mu) \geq 0, \end{aligned}$$

получим

$$\lambda = -\frac{\ln \xi}{2\pi i}, \quad \mu = 0, \quad a = 1 - \frac{\ln \xi}{2\pi i}, \quad b = \frac{3}{2} + \frac{\ln m - \ln \xi}{2\pi i},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \xi(c_1 - c_2) & \xi c_2 \\ mc_1 & mc_2 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \frac{2\xi^2 + \xi(m-1)}{\xi + m}, \quad c_2 = \xi - 1, \\ \xi = -\alpha/2, \quad \alpha > 0,$$

где  $\xi$  – собственное значение матрицы  $\mathbf{G}_1$  кратности 2.

Каноническая матрица однородной задачи (2) имеет вид

$$\mathbf{X}(\zeta) = \zeta^\lambda \mathbf{C} \begin{pmatrix} F(a, b; 1; \zeta) \\ (2\pi i)^{-1} \left( -F(a, b; 1; \zeta) \ln \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} h_n \zeta^n \right) \\ a(1-\zeta)F(a+1, b; 1; \zeta) \\ a(1-\zeta)(2\pi i)^{-1} \left( -F(a+1, b; 1; \zeta) \ln \zeta - a^{-1}F(a, b; 1; \zeta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n (b)_n}{(n!)^2} h_n \zeta^n \right) \end{pmatrix} \quad (4) \\ h_n = 2\psi(n+1) - \psi(a+n) - \psi(b+n), \quad |\zeta| < 1, \quad \zeta \notin [0, 1]$$

$$\mathbf{X}(\zeta) = \zeta^\lambda \mathbf{C} \mathbf{P}^\pm \begin{pmatrix} F(a, b; a+b; 1-\zeta) \\ (\zeta-1)^{1-a-b} F(1-a, 1-b; 2-a-b; 1-\zeta) \\ \frac{a^2}{a+b} (1-\zeta) F(a+1, b; a+b+1; 1-\zeta) \\ (a+b-1)(\zeta-1)^{1-a-b} F(-a, 1-b; 1-a-b; 1-\zeta) \end{pmatrix} \\ |\zeta-1| < 1, \quad \text{Im}(\pm\zeta) > 0$$

$$\mathbf{X}(\zeta) = \zeta^\lambda \mathbf{C} \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \zeta^{-a} F(a, a; a+1-b; \zeta^{-1}) \\ \zeta^{-b} F(b, b; b+1-a; \zeta^{-1}) \\ \frac{a^2}{b-1-a} \zeta^{-a-1} (1-\zeta) F(a+1, a+1; a+2-b; \zeta^{-1}) \\ (a-b) \zeta^{-b} (1-\zeta) F(b, b; b-a; \zeta^{-1}) \end{pmatrix} \\ |\zeta| > 1, \quad \text{Im}(\pm\zeta) > 0$$

Таким образом, общее решение задачи вычисляется по формулам:

$$\Phi(z) = H_1(z/l), \quad \Omega(z) = H_2(z/l), \quad (5)$$

$$H_1(\zeta) = [A_0 + A_1 \zeta + \varepsilon \mu_1 I_1(\zeta) + I_1^*(\zeta)] \chi_{11}(\zeta) + [A_2 + \varepsilon \mu_1 I_2(\zeta) + I_2^*(\zeta)] \chi_{12}(\zeta),$$

$$H_2(\zeta) = [A_0 + A_1 \zeta + \varepsilon \mu_1 I_1(\zeta) + I_1^*(\zeta)] \chi_{21}(\zeta) + [A_2 + \varepsilon \mu_1 I_2(\zeta) + I_2^*(\zeta)] \chi_{22}(\zeta),$$

$$A_0 = -\frac{X + iY}{2\pi l c_3 (\alpha_1 + \alpha_3)} + \frac{a^2 (A_1 + A_2)}{b-a-1}, \quad A_1 = \frac{\sigma}{4c_3}, \quad A_2 = \frac{A_1}{a-b},$$

$$I_j(\zeta) = \frac{1}{\kappa_1 \pi} \int_0^1 \frac{h_j(t) dt}{t-\zeta}, \quad j = 1, 2,$$

$$I_j^*(\zeta) = \frac{\mu_1}{\kappa_1 \pi i} \int_0^1 \frac{h_j(t) s'(lt) dt}{t-\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_1^{+\infty} \frac{h_j(t) p^+(lt) dt}{t-\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{\eta_j(t) p^-(lt) dt}{t-\zeta},$$

$$X + iY = X_0 + iY_0 - i \int_l^{+\infty} p^+(x) dx + i \int_0^{+\infty} p^-(x) dx,$$

$$c_3 = \xi(c_1 q_{11} + c_2(q_{21} - q_{11})), \quad c_4 = \xi(c_1 q_{12} + c_2(q_{22} - q_{12})),$$

$$h_1(t) = [\chi_{22}^+(t) + \alpha_4 \alpha_3^{-1} \chi_{12}^+(t)] / \det \mathbf{X}^+(t), \quad h_2(t) = -[\chi_{21}^+(t) + \alpha_4 \alpha_3^{-1} \chi_{11}^+(t)] / \det \mathbf{X}^+(t),$$

$$\eta_1(t) = -\alpha_3^{-1} \chi_{12}^+(t) / \det \mathbf{X}^+(t), \quad \eta_2(t) = \alpha_3^{-1} \chi_{11}^+(t) / \det \mathbf{X}^+(t),$$

где  $\chi_{ij}(\zeta)$  – элементы канонической матрицы  $\mathbf{X}(\zeta)$ .

Вычислив момент, найдем угол поворота накладки:

$$\varepsilon\mu_1 = - \left( \frac{M_0}{(1 + \kappa_1)l^2} + \frac{\mu_1}{\kappa_1} \int_0^1 ts'_1(lt)dt + \int_0^1 t \operatorname{Re}[(A_0 + A_1t + I_1^*(t))\chi_{11}^+(t) + (A_2 + I_2^*(t))\chi_{12}^+(t)]dt \right) \cdot \left( \int_0^1 t \operatorname{Re}[\chi_{11}^+(t)I_1(t) + \chi_{12}^+(t)I_2(t)]dt \right)^{-1}.$$

Аналогично случаю различных собственных значений матрицы-коэффициента в данном случае вблизи точки  $z = l - i0$  на нижнем берегу трещины напряжения ограничены, а вблизи точки  $z = l + i0$  ведут себя так же, как вблизи вершины штампа, сцепленного жестко со средой. Их поведение описывается степенно-осциллирующей функцией  $(z - l)^{-1/2+i\beta_1}$  с показателем осцилляции  $\beta_1 = (2\pi)^{-1} \ln \kappa_1$  и двумя действительными коэффициентами интенсивности.

Особый интерес представляет поведение напряжений вблизи левого конца накладки  $z = 0$ , являющегося одновременно вершиной трещины. Согласно (4), (5)

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \xi(D_2 - c_2D_1)z^{-1/2+i\delta} - \xi c_2(2\pi i)^{-1}D_1z^{-1/2+i\delta} \ln z + O(1), \\ \Omega(z) &= mD_2z^{-1/2+i\delta} - mc_2(2\pi i)^{-1}D_1z^{-1/2+i\delta} \ln z + O(1), \quad z \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} D_1 &= [A_0 + \varepsilon\mu_1 I_1(0) + I_1^*(0) + a(A_2 + \varepsilon\mu_1 I_2(0) + I_2^*(0))]l^{1/2-i\delta}, \\ D_2 &= [(c_1 + (2\pi i)^{-1}c_2(h_0 + \ln l))D_1 - (2\pi i)^{-1}c_2(A_2 + \varepsilon\mu_1 I_2(0) + I_2^*(0))]l^{1/2-i\delta}, \end{aligned}$$

$$\delta = \ln |\xi|/(2\pi),$$

где несобственные интегралы  $I_j(0)$ ,  $I_j^*(0)$  сходятся.

Из представлений (6) следует, что напряжения в окрестности точки  $z = 0$  наряду со степенно-осциллирующей особенностью, определяемой функцией  $z^{-1/2+i\delta}$ , имеют особенность типа  $z^{-1/2+i\delta} \ln z$ , где  $\delta > 0$ . Описанная в данной работе и в работе [1] асимптотика напряжений в окрестности вершины трещины, когда в зависимости от упругих параметров полуплоскостей напряжения могут иметь там как степенно-осциллирующую особенность  $z^{-\gamma+i\delta}$  ( $1/2 \leq \gamma < 1$ ), так и особенность типа  $z^{-1/2+i\delta} \ln z$ , была получена ранее в работе [4], в которой решена задача о напряженном состоянии составной упругой плоскости, ослабленной трещиной, на одном берегу которой заданы компоненты напряжения, а на другом – компоненты перемещения.

На рис. 2 приведены графики зависимости показателя  $\delta$  осцилляции напряжений от отношения модулей сдвигов  $\mu_* = \mu_2/\mu_1$  и от параметра  $\kappa_2$  в случаях  $\kappa_1 = 1.1$  (сплошная линия),  $\kappa_1 = 1.5$  (штриховая линия с длинными штрихами),  $\kappa_1 = 2.0$  (штриховая линия со средними штрихами),  $\kappa_1 = 2.5$  (штриховая линия с короткими штрихами).

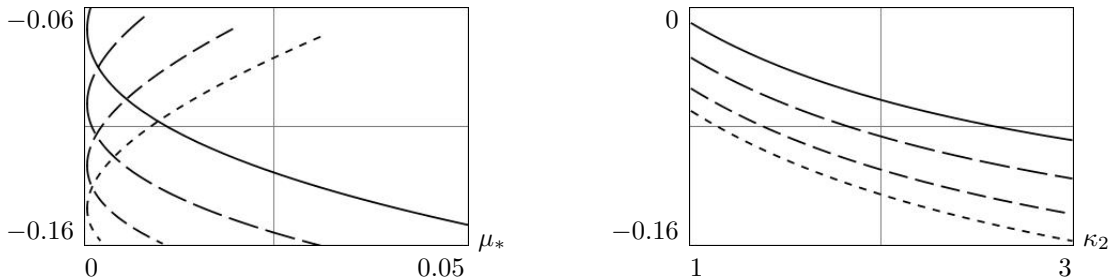


Рис. 2



На основании представлений (6) вблизи точки  $z = 0$  на действительной отрицательной полуоси  $x < 0$  для вектора напряжений  $\sigma_y - i\tau_{xy}$  справедлива асимптотика

$$\sigma_y(x) - i\tau_{xy}(x) = \frac{(K_I - iK_{II})|x|^{i\delta} + (K_{III} - iK_{IV})|x|^{i\delta} \ln|x|}{\sqrt{2\pi|x|}} + O(1), \quad x \rightarrow 0 - 0,$$

$$K_I - iK_{II} = -\sqrt{2\pi}((\xi + m)D_2 - \xi c_2 D_1) e^{-\pi\delta},$$

$$K_{III} - iK_{IV} = (\sqrt{2\pi}i)^{-1}(\xi + m)c_2 D_1 e^{-\pi\delta},$$

где  $K_I, K_{II}, K_{III}, K_{IV}$  – коэффициенты интенсивности напряжений вблизи точки  $z = 0$ .

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Васильева, Ю. О.* Задача о межфазной трещине с жесткой накладкой на части ее берега / Ю. О. Васильева, В. В. Сильвестров // Прикладная математика и механика. – 2011. – Т. 75. – Вып. 6. – С. 1017–1037.
- [2] *Черепанов, Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1983. – 296с.
- [3] *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – 296 с.
- [4] *Акопян, В. Н.* Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной / В. Н. Акопян // Известия НАН Армении. Механика. – 1995. – Т. 48. – № 4. – С. 57–65.

*Васильева Юлия Олеговна,*

кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары

e-mail: vasilyeva.yu@gmail.com

Yu. O. Vasilyeva

**TO THE PROBLEM OF REINFORCING AN INTERFACE CRACK BY A RIGID  
PATCH PLATE ALONG ONE OF ITS EDGES**

*The Chuvash State University named after I. N. Ulyanov*

**Abstract.** In the paper [1] the boundary–value problem for a piecewise–homogeneous elastic body with a semi–infinite interface crack partially reinforced by a rigid patch plate along one of its edges was solved. The problem was reduced to a Riemann–Hilbert boundary–value matrix problem with a piecewise-constant coefficient on a ray. The solution of the last one was found on the assumption that the coefficient matrix had different eigenvalues since the multiple eigenvalues case required extra investigation and was left out. This paper is aimed to fill the gap.

**Keywords:** crack, rigid patch plate, piecewise homogeneous elastic body, stresses, hypergeometric function, multiple eigenvalues

**REFERENCES**

- [1] *Vasilyeva, Yu. O.* The problem of an interface crack with a rigid patch plate on part of its edge / Yu. O. Vasilyeva, V. V. Silvestrov // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* – 2011. – V. 75. – Issue 6. – P. 1017–1037.
- [2] *Cherepanov, G. P.* Fracture mechanics of composite materials / G. P. Cherepanov. – M. : Nauka, 1983. – 296 p.
- [3] *Bateman, H.* Higher transcendental functions. V.1. Hypergeometric function. Legendre function / H. Bateman, A. Erdelyi. – M. : Nauka, 1973.– 296 p.
- [4] *Hakopian, V. N.* On one mixed problem for composite plate, weakened by a crack / V. N. Hakopian // *Proceedings of National Academy of Armenia. Mechanics.* – 1995. – V. 48. – No 4. – P. 57–65.

*Vasilyeva, Yulia Olegovna*

*Candidate Sci. Phys. & Math., Chuvash State University, Cheboksary*

## СТАЦИОНАРНОЕ СДВИГОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ЕГО МИКРОСТРУКТУРЫ В ПЛОСКОМ ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ЦИЛИНДРАМИ

Воронежский государственный университет

**Аннотация.** Приведен расчёт поля скоростей сдвигового течения вязкопластического материала с учетом его характерного линейного размера  $h$  микроструктуры в плоском цилиндрическом зазоре методом малого параметра. Показано влияние микроструктуры материала на размер застойной области.

**Ключевые слова:** вязкопластичность, микроструктура, сдвиг, кольцевой канал.

УДК: 539.374

Наиболее часто сдвиговое течение различных технических материалов между двумя цилиндрами встречается в широко распространенных подшипниках скольжения. В случае смазки с микродобавками из микрочастиц этот материал можно моделировать вязкопластической жидкостью с учетом конечности представленных элементов  $\Delta V = h^3$ . Общий подход к построению реологических уравнений сложных сред развит Д. Д. Ивлевым в [1]. На рис. 1 изображена схема течения, где  $R^-$ ,  $R^+$  – внутренний и внешний радиусы границ области течения,  $w(r)$  – величина окружной скорости течения,  $w_o = w(R^-)$  – скорость внутренней границы,  $w(R^+) = 0$  – условие на внешней границе.

Уравнение стационарного движения микроструктурного вязкопластического материала имеет вид [2]

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_{r\varphi} = 2\mu\varepsilon_{r\varphi}$ ;  $\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\varphi}^c + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_{r\varphi}^c$ ;  $\varepsilon_{r\varphi}^c = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right)$ ,

$\sigma_{r\varphi}$  – касательная компонента тензора напряжений,  $\varepsilon_{r\varphi}$  – компонента тензора скорости деформаций,  $h$  – характерный линейный размер микроструктуры.

Дифференциальное уравнение (1) для напряжения  $\sigma_{r\varphi}$  интегрируется [3]

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}^o r_o^2 / r^2, \quad (2)$$

и для скорости деформаций  $\varepsilon_{r\varphi}$  получаем выражение

$$\varepsilon_{r\varphi} / \varepsilon_{r\varphi}^o = (r_o / r)^2. \quad (3)$$

Подстановка в (3) выражения скорости деформаций  $\varepsilon_{r\varphi}$  через скорость  $w(r)$  приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка для  $w(r)$ :

$$h^2 / 6 (w' - \frac{w}{r})'' + \frac{h^2}{6} \frac{1}{r} (w' - \frac{w}{r})' - (w' - \frac{w}{r}) = \varepsilon_{r\varphi}^o \cdot \frac{r_o^2}{r^2}. \quad (4)$$

Граничные условия при наличии застойной зоны при  $r \geq R^*$  имеют вид

$$w(R^-) = w_o; w'(R^-) + \gamma w''(R^-) = 0; w(R^*) = 0; w'(R^*) = 0; K_o = \mu \Delta \varepsilon_{r\varphi}^c(R^*), \quad (5)$$

здесь  $K_o$  – предел пластичности,  $\mu$  – коэффициент вязкости.

Количество граничных условий позволяет определить 4 постоянных интегрирования и границу  $R^*$  застойной зоны.

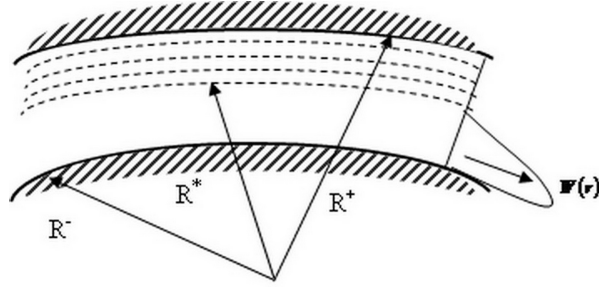


Рис. 1. Схематическое изображение течения в кольцевом канале с застойной зоной  $r \in [R^*, R^+]$

Точное решение сингулярно возмущенного дифференциального уравнения 4-го порядка (4) представляется громоздким, и для исследования воспользуемся методом малого параметра [4].

Внешнее  $\hat{w}$  по малому  $h$  решение удовлетворяет уравнению (4) при  $h \rightarrow 0$ :

$$\hat{w}^t = \frac{\hat{w}^2}{r} = \varepsilon_{r\varphi}^0 \frac{r_0^2}{r^2} \quad (6)$$

Уравнение (6) имеет точное решение:

$$\hat{w}(r) = C_1 \cdot r + C_2 \frac{1}{r}, \quad (7)$$

здесь  $C_1 = w_o/r_o$ ,  $C_2 = -\frac{\varepsilon_{r\varphi}^0 r_o}{2}$  – постоянные интегрирования.

Использование граничных условий только на одном конце границы  $r = R^-$  или  $r = R^*$  приводит к значениям постоянных  $C_1$  и  $C_2$ :  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 0$ , т. е. к невозможности движения без учета влияния параметра  $h$  микроструктуры.

Построим внешнее решение задачи при выполнении первых граничных условий:

$$\begin{aligned} \hat{w}(R^-) = W^-; \hat{w}(r^*) = 0, \text{ т. е.,} \\ C_1 \cdot R^- + C_2/R^- = W^-; C_1 \cdot R^* + C_2/R^* = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Получим из условий (8)

$$\begin{aligned} C_1 = W^- \cdot \left( \frac{R^{*4} \cdot R^-}{R^{*2} \cdot R^- - R^{-2}} \right); C_2 = W^- \cdot \left( \frac{R^{*2} \cdot R^-}{R^{*2} \cdot R^- - R^{-2}} \right); \\ \hat{w}(r) = \left( \frac{R^{*2} \cdot R^-}{R^{*2} \cdot R^- - R^{-2}} \right) W^- \left( -\frac{r}{R^{*2}} + \frac{R^*}{r} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

На рис. 2 представлен график (9) зависимости скорости  $\frac{\hat{w}}{w^-}$  течения от границы  $R^*$  застойной зоны и радиуса  $r$ .

На рис. 3 представлен график зависимости скорости  $\hat{w}(r)$  в нулевом внешнем разложении скорости в ряд по малому параметру  $h$ .

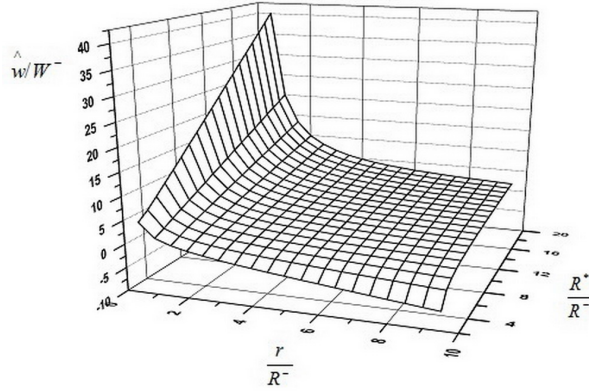


Рис. 2. Пространственный график распределения скорости течения  $\hat{w}(r)$  для различных значений  $R^*$  застойной зоны

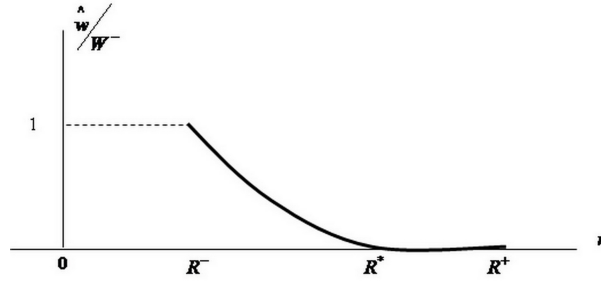


Рис. 3. Поведение безразмерной скорости течения  $\hat{w}(r)/W^-$  в нулевом приближении разложения решения  $w(r)$  в степенной ряд по  $h$

Найдем радиус  $R^*$  застойной зоны, исходя из внешнего решения  $\hat{w}(r) = AW^- \left( -\frac{r}{R^*} + \frac{R^*}{r} \right)$ , где  $(A = \frac{R^* R^-}{R^{*2} - R^{-2}})$ , и условия выполнения предельного напряжения на границе застойной зоны

$$\tau_{r\varphi}(R^*) = K_0 = 2\mu\varepsilon_{r\varphi}(R^*), \quad (10)$$

здесь

$$\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\varphi}^c + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_{r\varphi}^c = \varepsilon_{r\varphi}^c + \frac{h^2}{6} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \varepsilon_{r\varphi}^c \right). \quad (11)$$

После подстановки значения  $\varepsilon_{r\varphi}^c = (1/2) (\partial w / \partial r - w/r)$  в уравнение (10) получим

$$(K_0/2\mu) = -(B/r^2) (1 + 2h^2/3r^2) / r = R^*, \quad (12)$$

здесь  $B = W^- R^{*2} R^- / (R^{*2} - R^{-2})$ .

Уравнение (12) является уравнением для  $R^*$ :

$$3K_0/2\mu R^{*4} - \left( 3K_0 R^{-2} / 2\mu + 3W^- R^- \right) R^{*2} - 2W^- R^- h^2 = 0. \quad (13)$$

Для малых  $h^2$  уравнение (13) имеет решение для радиуса  $R^*$  застойной зоны:

$$R_0^{*2} = R^{-2} + 2\mu \frac{R^- W^-}{K_0}. \quad (14)$$

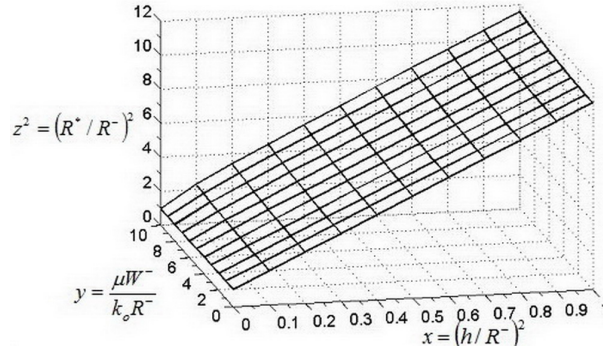


Рис. 4. Схематическое изображение поведения квадрата радиуса застойной зоны  $(R^*/R^-)^2$  в зависимости от  $(h/R^-)^2$  и  $(K_0 R^-/\mu W^-)$

Уравнение для радиуса  $R^*$  застойной зоны с учетом характерного размера  $h^2$  микроструктуры можно получить из (11):

$$R^{*2} \approx R_0^{*2} + \frac{4rW^-R^-}{3R_0^*K_0} h^2. \quad (15)$$

После подстановки значения  $R_0^{*2}$  из (12) в (15) получим

$$R_0^{*2} \approx R^{-2} + 2\mu \frac{R^-W^-}{K_0} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{R_0^{*2}}\right). \quad (16)$$

Из выражения (16) для радиуса  $R^*$  застойной зоны следует, что сам радиус  $R^*$  увеличивается с ростом относительного характерного линейного размера  $(h/R^-)$  микроструктуры, при этом толщина  $R^+ - R^*$  застойной зоны уменьшается. Скорость роста  $R^*/R^-$  в зависимости от  $(h/R^-)$  определяется безразмерным параметром  $\lambda = (\mu W^-/K_0 R^-)$ , из чего можно сделать вывод о том, что увеличение вязкости  $\mu$  и скорости движения  $W^-$  границы, а также уменьшение предела пластичности  $K_0$  и радиуса  $R^-$  ведут к усилению влияния микроструктуры  $(h/R)$  на радиусе застойной зоны (рис. 4).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.
- [2] *Рейнер, М.* Реология / М. Рейнер. – М. : Наука, 1965. – 223 с.
- [3] *Быкова, М. И.* Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры / М. И. Быкова. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 2010. – 192 с.
- [4] *Коул, Дж.* Методы возмущений в прикладной математике / Дж. Коул. – М. : Мир, 1972. – 274 с.

*Вервейко Николай Дмитриевич,*

доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: ver38@mail.ru

*Ноаман Салам Абдулхалек,*

аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: salam\_000@yahoo.com

N. D. Verveyko, S. A. Noaman

**STATIONARY SHEAR FLOW MICROSTRUCTURE VISCOPLASTIC  
MATERIAL IN THE PLANE AREA BETWEEN TWO CYLINDERS**

*Voronezh State University*

**Abstract.** The calculation of the velocity field of the shear flow of a viscoplastic material, in view of its characteristic linear dimension  $h$  of the microstructural, in a flat cylindrical gap by method of small parameter. Shows the effect of the microstructure material on the size of the stagnation region.

**Keywords:** viscoplasticity, microstructure, shear, ring channel.

**REFERENCES**

- [1] *Ivlev, D. D.* The theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Science, 1966. – 231 p.
- [2] *Reyner, M.* Reology / M. Reyner. – M. : Science, 1965. – 223 p.
- [3] *Bekova, M. I.* Flow and deformation microstructure materials / M. I. Bekova, N. D. Verveyko, P. P. Sumes, S. A. Shashkina. – Voronezh : Voronezh State University, 2010. – 192 p.
- [4] *Coul, Dg.* Perturbation method in applied mathematical / Dg. Coul. – M. : Peace, 1972. – 274 p.

*Verveyko, Nikolay Dmitrievich*

*Dr. Tech. Sci., Professor, Department of theoretical and applied mathematical, Voronezh State University, Voronezh*

*Salam, Abdulkhalek Noaman*

*Postgraduate student, Department of theoretical and applied mathematical, Voronezh State University, Voronezh*

В. Г. Зубчанинов, В. И. Гульятев, А. А. Алексеев, В. Н. Ведерников

## ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ИССЛЕДОВАНИИ ЭФФЕКТА БАУШИНГЕРА И ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ СТАЛИ У8

*Тверской государственной технической университет*

**Аннотация.** В работе исследуется влияние допуска на остаточную деформацию при определении новых и вторичных пределов текучести, на эффект Баушингера, радиус-функцию и положение центра гипотетической сферической поверхности текучести в теории пластического течения при знакопеременном деформировании для упрочняющегося материала стали У8 без площадки текучести.

**Ключевые слова:** пластичность, упругость, сложное нагружение, эффект Баушингера, поверхность текучести.

УДК: 539.3

В теории пластичности тензорам напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$  в линейном координатном шестимерном евклидовом пространстве  $E_6$  ставятся в соответствие векторы напряжений и деформаций [1], [2]

$$\bar{S} = \bar{S}^0 + \bar{\sigma}, \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^0 + \bar{\Theta}, \quad (1)$$

где

$$\bar{S}^0 = S_0 \hat{i}_0, \quad \bar{\varepsilon}^0 = \Theta_0 \hat{i}_0 - \quad (2)$$

векторы напряжений и деформаций в одномерном подпространстве объемного растяжения и сжатия;

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\Theta} = \Theta_k \hat{i}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5) - \quad (3)$$

векторы напряжений и деформаций в пятимерном девиаторном подпространстве;  $E_5$ ;  $\{\hat{i}_k\}$  – ортонормированный фиксированный базис А. А. Ильюшина в  $E_5$ ,

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, & S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, & S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{22} - S_{33}), & S_3 = \sqrt{2}S_{12}, & S_4 = \sqrt{2}S_{23}, & S_5 = \sqrt{2}S_{13}, \\ \Theta_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, & \Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\Theta_{11}, & \Theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_{22} - \Theta_{33}), & \Theta_3 = \sqrt{2}\Theta_{12}, & \Theta_4 = \sqrt{2}\Theta_{23}, & \Theta_5 = \sqrt{2}\Theta_{13} - \end{cases} \quad (4)$$

компоненты векторов напряжений и деформаций,

$$\sigma_0 = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}/3, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \Theta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0 - \quad (5)$$

компоненты шаровых тензоров (среднее напряжение и деформация) и тензоров-девиаторов соответственно. Модули векторов  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{\Theta}$  в пятимерном подпространстве формоизменения  $E_5$  равны модулям тензоров-девиаторов:

Поступила 24.02.2013



$$\sigma = \sqrt{S_k S_k} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \vartheta = \sqrt{\vartheta_k \vartheta_k} = \sqrt{\vartheta_{ij} \vartheta_{ij}}, \quad (k = 1, 2, \dots, 5), \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (6)$$

В теории пластического течения вводятся две основополагающие гипотезы [2]. Первая гипотеза состоит в разложении тензора-девиатора деформаций на упругие  $\varepsilon_{ij}^e$  и пластические  $\varepsilon_{ij}^p$  части, что позволяет ввести понятие о мгновенной гипотетической поверхности текучести  $f(\bar{\sigma}, \bar{\vartheta}^p) = 0$  как границе, разделяющей в пятимерном подпространстве формоизменения  $E_5$  область активного пластического деформирования и область упругого деформирования и разгрузки [2], [3]. Принцип градиентальности Драккера позволяет определить приращения векторов упругих и пластических деформаций [2]

$$\begin{cases} d\bar{\vartheta}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, & d\bar{\vartheta}^p = d\lambda \text{ grad } f, \quad (d\bar{\sigma} \cdot \text{grad } f > 0), \\ d\bar{\vartheta}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, & d\bar{\vartheta}^p = 0, \quad (d\bar{\sigma} \cdot \text{grad } f < 0) \end{cases} \quad (7)$$

для активного и пассивного процессов деформирования соответственно.

Вторая гипотеза, введенная В. Прагером, относится к возможности разложения полного вектора напряжений (рис. 1)

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^0 + \bar{a}, \quad (8)$$

где  $\bar{\sigma}^0$  – вектор активных напряжений,  $\bar{a}$  – вектор добавочных остаточных микронапряжений в  $E_5$ .

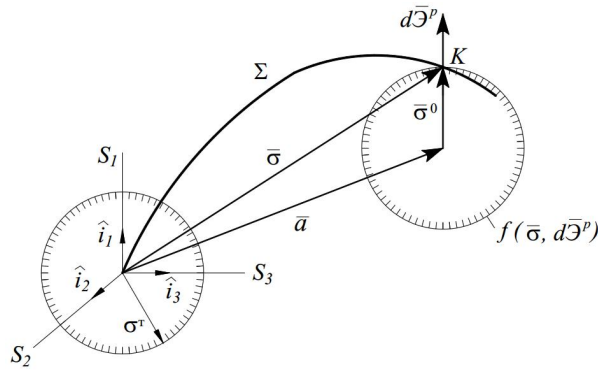


Рис. 1

Определяющие соотношения и все математические модели теории течения, опирающиеся на понятие поверхности текучести, отличаются ее формой. В наиболее распространенном на практике варианте теории с трансляционно-изотропным (комбинированным) упрочнением материала предполагается, что она имеет форму сферы:

$$2f = (\bar{\sigma} - \bar{a}) \cdot (\bar{\sigma} - \bar{a}) - C_p^2(s^p) = 0, \quad (9)$$

которая может изменять свои размеры и местоположение при неизменной форме. Здесь  $\sigma^0 = C_p(s^p)$  – скалярная функция изотропного упрочнения, равная радиусу поверхности текучести,  $s^p$  – длина дуги траектории пластического деформирования. В начальном состоянии при  $s^p = 0$  радиус гипотетической начальной поверхности текучести  $\sigma^0 = \sigma^T = \sqrt{2/3} \sigma_T$  (рис. 1), где  $\sigma_T$  – начальный предел текучести при простом нагружении, определяемый по техническому допуску на остаточную деформацию  $\vartheta_*^p \approx \sqrt{3/2} \varepsilon_{11}^p = 0,245\%$  ( $\varepsilon_*^p = 0,2\%$ ). Принимается универсальный закон упрочнения Одквиста-Ильюшина

$$\sigma = \Phi(s), \quad (10)$$

мало отличающийся от закона единой кривой при простом нагружении  $\sigma = \Phi(\Theta)$ . За новый предел текучести принимается точка  $K$  начала разгрузки на диаграмме (10).

Эффект Баушингера при знакопеременном нагружении в  $E_5$  оценивается безразмерным параметром

$$\gamma = |\sigma_M^T| / \sigma_K^T \quad (11)$$

при соответствующей величине дуги траектории пластического деформирования  $s^p$ , где  $\sigma_K^T$  – новый предел текучести на диаграмме растяжения в некоторой точке  $K$  начала разгрузки,  $\sigma_M^T$  – вторичный предел текучести при разгрузке из той же точки  $K$  и последующем знакопеременном нагружении с изломом траектории на  $180^\circ$  в  $E_5$ , определяемый по допуску на остаточную деформацию  $\Theta_*^p$  при “протыкании” поверхности текучести по диаметральному направлению [3].

Радиус  $\sigma^0 = C_p$  гипотетической текущей сферической поверхности текучести [3] при условии сохранения ее формы определяется по формуле

$$\sigma^0 = C_p = \frac{\sigma_K^T - \sigma_M^T}{2} = \frac{1 - \gamma \text{sign} \sigma_M^T}{2} \sigma_K^T, \quad (12)$$

а смещение ее центра в результате пластического деформирования – по формуле

$$a = \sigma_K^T - C_p = \frac{\sigma_K^T + \sigma_M^T}{2}. \quad (13)$$

Экспериментальное исследование функций  $\sigma^0 = C_p(s^p)$  и  $a(s^p)$  проводилось в опыте при знакопеременном нагружении-разгрузке на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ имени А. А. Ильюшина в лаборатории механических испытаний кафедры “Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности” Тверского государственного технического университета. В опыте использовался тонкостенный трубчатый образец из стали У8 без площадки текучести с толщиной стенки  $h = 1$  мм, радиусом срединной поверхности поперечного сечения  $R = 15,5$  мм и длиной рабочей части  $l = 110$  мм, который подвергался многократному знакопеременному нагружению через равные приращения  $\Delta\Theta_1 = 0,5\%$  при растяжении (рис. 2, 3) с последующим знакопеременным нагружением на  $|\Delta\Theta| \approx 0,75\% - 0,9\%$  при сжатии. Опыт в режиме непрерывного деформирования продолжался в течение 8 часов. На рис. 4 представлены полученные опытные зависимости параметра  $\gamma$  от длины дуги траектории пластического деформирования  $s^p$ , характеризующие эффект Баушингера, а на рис. 5 – изменение радиуса  $\sigma^0$  гипотетической сферической поверхности текучести. Представленные зависимости построены при различных допусках на остаточную деформацию  $\varepsilon_*^p = (0,25; 0,2; 0,1; 0,05; 0,025)\%$ , что в линейном девиаторном пространстве А. А. Ильюшина составляет  $\Theta_*^p = (0,30625; 0,245; 0,1225; 0,06125; 0,030625)\%$  соответственно, то есть рассмотрены значения как больше, так и меньше общепринятого допуска. На рис. 6 приведен график смещения центра гипотетической сферической поверхности текучести в зависимости от параметра  $s^p$  для тех же допусков на остаточную деформацию  $\Theta_*^p$  при определении пределов текучести.

С ростом допуска на остаточную деформацию радиус поверхности текучести  $\sigma^0$  увеличивается, а смещение ее центра  $a$  уменьшается. Максимальное отклонение для рассмотренных крайних допусков на остаточную деформацию  $\varepsilon_*^p = 0,25\%$  и  $\varepsilon_*^p = 0,025\%$  для радиуса  $\sigma^0$  гипотетической поверхности текучести составляет примерно  $50\%$  (рис. 5), а для смещения ее центра – примерно  $70\%$  (рис. 6). При максимально достигнутом уровне пластической деформации  $s^p$  значения параметра  $a$  при различных допусках на остаточную деформацию не превысили значения начальных пределов текучести  $\sigma^T$ , а значит, центр текущей поверхности находится внутри начальной поверхности текучести.

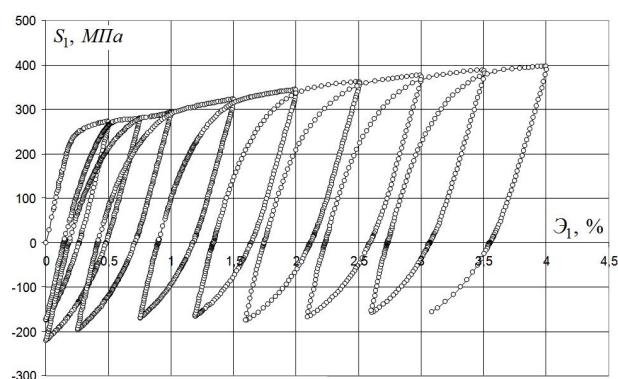


Рис. 2. Локальная диаграмма знакопеременного нагружения  $S_1 - \varepsilon_1$

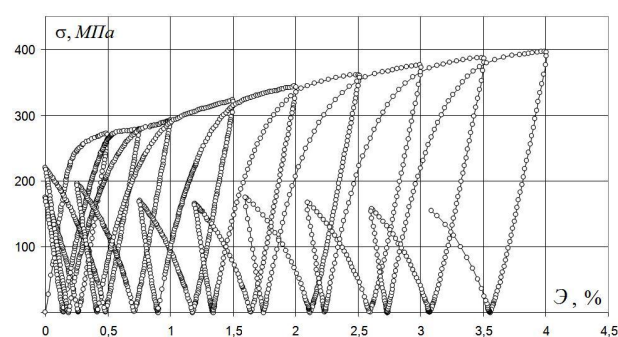


Рис. 3. Диаграмма деформирования  $\sigma - \varepsilon$

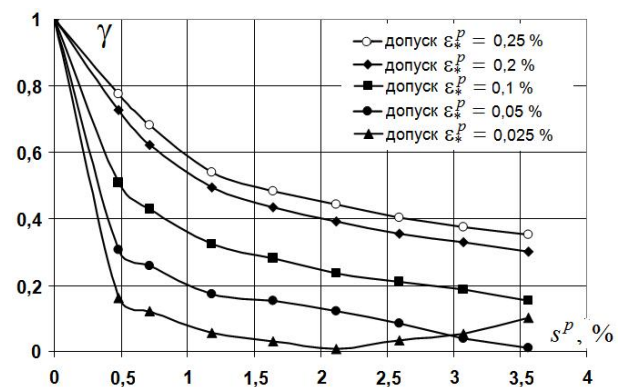


Рис. 4. Эффект относительного изменения предела текучести в процессе деформирования по Баушингеру

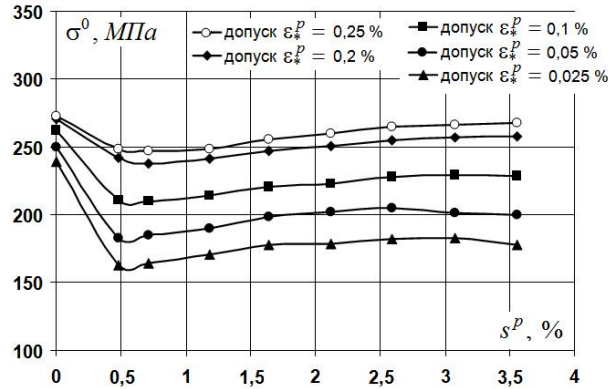


Рис. 5. Изменение радиуса гипотетической поверхности текучести при различных допусках на остаточную деформацию

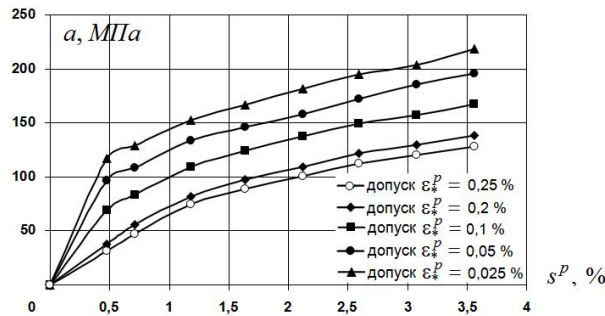


Рис. 6. Смещение центра гипотетической поверхности текучести

За технический предел текучести  $\sigma_T$  в теории пластичности принимается такое напряжение при растяжении, при котором остаточные деформации становятся одного порядка с упругими ( $\varepsilon \approx 10^{-3}$ ). Для многих материалов переход из упругого состояния к области проявления пластических деформаций имеет плавный характер, поэтому условно в механике за такую остаточную деформацию как правило принимают  $\varepsilon_*^p = 0,2\% = 2 \cdot 10^{-3}$  ( $\mathfrak{E}_*^p = 0,245\%$ ). Начальная поверхность текучести в девиаторном пространстве А. А. Ильюшина при данном допуске на остаточную деформацию описывается сферой Мизеса для начально изотропных тел. При меньших допусках очертание сферы Мизеса искажается и теряет свою форму [4]. На девиаторной плоскости окружность Мизеса и вписанный в нее шестиугольник Сен-Венана приобретают тройную симметрию [5]. При этом начальные условия текучести Мизеса и Сен-Венана определяются формулами [2]

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma^T, \quad (14)$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_m - \sigma_n}{2} = k \quad (m < n; m, n = 1, 2, 3),$$

где  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — главные нормальные напряжения,  $k$  — предел текучести при плоском чистом сдвиге. Уже при  $\varepsilon_*^p = 0,1\%$  классическая теория пластичности лежит за пределами ее инженерного контроля [2], [3], [4]. К сожалению, в некоторых математических моделях теории течения величине допуска на остаточную деформацию не придают значения и не связывают их с определением предела текучести. В процессе нагружения при трансляции предельной поверхности она вытягивается в направлении развития процесса вследствие развития деформационной анизотропии [3], при этом все известные экспериментальные результаты имеют даже качественные различия в положении и эволюции формы последующих поверхностей

текучести. Трудность учета экспериментально обнаруживаемых специфических изменений формы и положения поверхности текучести осложняет развитие математических моделей теории пластичности, базирующихся на понятии поверхности текучести с учетом искажения (эволюции) ее формы.

По результатам проведенного экспериментального исследования можно сделать выводы:

1. Эффект Баушингера для стали У8 без площадки текучести выражается уменьшением по модулю вторичного предела текучести  $\sigma_M^T$  и параметра  $\gamma$  с ростом длины дуги пластического деформирования  $s^p$ . Параметр  $\gamma$  при различных допусках на остаточную деформацию стремится к некоторому стационарному значению при  $s^p > 3$  %.

2. С ростом допуска на остаточную деформацию  $\mathcal{E}_*^p$  параметр  $\gamma$  увеличивается и при максимально достигнутом значении  $s^p$  для общепринятого допуска  $\varepsilon_*^p = 0,2$  % ( $\mathcal{E}_*^p = 0,245$  %) составляет 0,3.

3. Радиус гипотетической сферической поверхности  $\sigma^0 = C_p(s^p)$  совершает временное понижение типа “нырка”, а затем увеличивается. При повышении допуска  $\mathcal{E}_*^p$  примерно до технического и более очертание поверхности стремится к сферической. При этом отклонение радиуса при крайних значениях допуска на остаточную деформацию достигает 50 %.

4. Отклонения зависимости параметра смещения  $a$  центра предельной поверхности от  $s^p$  для рассмотренных различных допусков на остаточную деформацию при определении пределов текучести достигают 70 %.

5. В некоторых математических моделях теории течения временное убывание функции  $\sigma^0 = C_p(s^p)$  в начале процесса пластического деформирования не связывают с определением пределов текучести по допуску на остаточные деформации и искажением гипотетической сферической поверхности текучести, что абсолютно нереально и не вызывает доверия к ним.

6. Необходимы экспериментальные исследования эффекта Баушингера, обобщающие его на случай сложных нагружений-разгружений.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : АН СССР, 1963. – 273 с.
- [2] *Зубчанинов, В. Г.* Механика процессов пластических сред / В. Г. Зубчанинов. – М. : Физматлит, 2010. – 352 с.
- [3] *Зубчанинов, В. Г.* О соотношениях между напряжениями и деформациями в теории пластичности при сложном нагружении / В. Г. Зубчанинов // Проблемы прочности и пластичности : межвуз. сб. – Нижний Новгород : ННГУ, 2011. – № 73. – С. 120–131.
- [4] *Новожилов, В. В.* Вопросы механики сплошных сред / В. В. Новожилов. – Л. : Судостроение, 1989. – 397 с.
- [5] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.

*Зубчанинов Владимир Георгиевич,*

*доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь*

*e-mail: vgz@rambler.ru*

*Гультияев Вадим Иванович,*

*кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой строительства и энергетики, Тверской государственный технический университет, г. Тверь*

*e-mail: vig0@mail.ru*

*Алексеев Андрей Алексеевич,*

*кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь*

*e-mail: kafsm@yandex.ru*

*Ведерников Владимир Николаевич,*

*кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь*

*e-mail: kafsm@yandex.ru*

V. G. Zubchaninov, V. I. Gulyaev, A. A. Alekseev, V. N. Vedernikov

**ABOUT THE EXPERIMENTAL STUDY OF BAUSHINGER'S EFFECT  
AND THE YIELD SURFACE ON CARBON STEEL**

*Tver State Technical University*

**Abstract.** In article research influence of the admission on residual deformation at definition of a new and secondary offset yield strength, Baushinger's effect, initial and subsequent radius function and position of the center of a hypothetical spherical yield surfaces in the plastic-flow theory at sign-variable loading on carbon steel.

**Keywords:** plasticity, elasticity, complex loading, Baushinger's effect, the yield surface.

**REFERENCES**

- [1] *Talypov, G. B.* Plasticity and durability became at difficult loading / G. B. Talypov. – L. : Publishing house of the Leningrad University, 1968. – 135 p.
- [2] *Ilyushin, A. A.* Plasticity. Bases of the general mathematical theory / A. A. Ilyushin. – M. : AS USSR, 1963. – 273 p.
- [3] *Novozhilov, V. V.* Questions of mechanics of continuous environments / V. V. Novozhilov. – L. : Shipbuilding, 1989. – 397 p.
- [4] *Zubchaninov, V. G.* Mechanics of processes of plastic environments / V. G. Zubchaninov. – M. : Fizmatlit, 2010. – 352 p.
- [5] *Zubchaninov, V. G.* About the admission on residual deformation at definition limits of fluidity of metals / V. G. Zubchaninov, V. I. Gulyaev, A. A. Alekseev // Collection of materials 53 International scientific conferences "Actual durability problems" . – Vitebsk, Belarus : UO "VSPU" publishing house, 2012. – Vol. 2. – P. 108–110.

*Zubchaninov, Vladimir Georgievich*

*Dr. Tech. Sci., Professor, Department of the Resistance of materials, elasticity and plasticity theories, Tver State Technical University, Tver*

*e-mail: vgz@rambler.ru*

*Gulyaev, Vadim Ivanovich*

*Cand. Tech. Sci., Assoc. Professor, Head of the department of the building and energy, Tver State Technical University, Tver*

*Alekseev, Andrey Alekseevich*

*Cand. Tech. Sci., Assoc. Professor, Department of the Resistance of materials, elasticity and plasticity theories, Tver State Technical University, Tver*

*Vedernikov, Vladimir Nikolaevich*

*Cand. Tech. Sci., Assoc. Professor, Department of the Resistance of materials, elasticity and plasticity theories, Tver State Technical University, Tver*

## ОБ УЧЕТЕ АССОЦИИРОВАННОЙ СЖИМАЕМОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ В СЛУЧАЕ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В рамках теории течения с помощью метода возмущений [4] выработан подход, позволяющий определить напряженное состояние в сжимаемых упругопластических телах в случае плоской деформации.

**Ключевые слова:** напряжение, деформация, пластичность, упругость, сжимаемость.

УДК: 539.374

Учет сжимаемости при упругопластическом деформировании тел приводит к существенному усложнению математических расчетов при определении напряженно-деформированного состояния. Этому вопросу посвящен ряд статей, среди которых на настоящий момент следует выделить работы [1], [2], [3], [4]. В работах [1], [4] представлен подход, позволяющий получить решение задачи определения напряженно-деформированного состояния для случая плоской деформации материала, сжимаемого по упругим деформациям (рассмотрен случай малой упругой сжимаемости). В работах [2], [3] предложен алгоритм решения задач определения напряженно-деформированного состояния для случаев плоской деформации и плоского напряженного состояния, позволяющих снять предположение о малой упругой сжимаемости материала. При этом условие пластичности выбрано кусочно-линейным в отличие от [1], [4]. В работе [5] рассмотрено влияние изотропного упрочнения и сжимаемости на решение плоских упругопластических задач. Показано сильное влияние упругой сжимаемости материала и малое влияние упрочнения на напряженно-деформированное состояние.

Рассмотрим длинное упругопластическое цилиндрическое тело, подвергающееся действию сил, не меняющихся в направлении длины тела и нормальных к этому направлению (примером такого тела может являться толстостенная цилиндрическая труба, подверженная действию внутреннего давления), для которого определено условие пластичности в форме [6]

$$\alpha\sigma_1 + \sqrt{S_{ij}S_{ij}} - 2k = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_1$  – первый инвариант тензора напряжений,  $S_{ij}$  – девиатор тензора напряжений,  $\alpha$  – скорость дилатансии,  $k$  – предел текучести.

Полные деформации тела в пластической зоне  $e_{ij}$  состоят из упругой  $e_{ij}^e$  и пластической  $e_{ij}^p$  составляющих, где индекс  $e$  означает принадлежность к упругой зоне, индекс  $p$  – к пластической. То есть

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p. \quad (2)$$



Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука, а приращение пластических деформаций — ассоциированным законом пластического течения, тогда из (1) и (2) имеем

$$de_{ij} = \frac{1+\mu}{E}d\sigma_{ij} - \frac{3\mu}{E}\delta_{ij}d\sigma + d\lambda\frac{df}{d\sigma_{ij}}, \quad (3)$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $\sigma = \frac{\sigma_1}{3}$ ,  $d\lambda$  — скалярный положительный множитель,  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $f = \alpha\sigma_1 + \sqrt{S_{ij}S_{ij}} - 2k$ .

Уравнения равновесия, соотношения Коши и соотношения (1), (3) составляют систему уравнений, описывающих поведение сжимаемого упругопластического тела.

В случае плоской деформации в цилиндрической системе координат соотношения (1), (3) возможно записать в форме

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + 6\tau_{r\theta}^2 = 3(2k - \alpha\sigma_1)^2, \quad (4)$$

$$de_r = \frac{1}{E}(d\sigma_r - \mu(d\sigma_\theta + d\sigma_z)) + \frac{d\lambda}{3}(3\sigma_r - (1 + 3\alpha^2)(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) + 6k\alpha),$$

$$de_\theta = \frac{1}{E}(d\sigma_\theta - \mu(d\sigma_r + d\sigma_z)) + \frac{d\lambda}{3}(3\sigma_\theta - (1 + 3\alpha^2)(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) + 6k\alpha),$$

$$0 = \frac{1}{E}(d\sigma_z - \mu(d\sigma_\theta + d\sigma_r)) + \frac{d\lambda}{3}(3\sigma_z - (1 + 3\alpha^2)(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) + 6k\alpha),$$

$$de_{r\theta} = \frac{1-\mu}{E}d\tau_{r\theta} + d\lambda\tau_{r\theta}. \quad (5)$$

Найти точное аналитическое решение системы, состоящей из уравнения равновесия, соотношений Коши и соотношений (4), (5), затруднительно. Однако приближенное аналитическое решение можно найти при помощи метода возмущений.

Предположим, что  $\mu = \mu_0 + \delta\mu_1$ , где  $\mu_0 = 0.5$ ,  $\delta$  — малый параметр,  $\mu_1$  — известная постоянная. Аналогично  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)}$ ,  $e_{ij} = e_{ij}^{(0)} + \delta e_{ij}^{(1)}$ ,  $\lambda = \lambda^{(0)} + \delta\lambda^{(1)}$ , а  $\alpha = \delta\alpha^{(1)}$ ,  $k = k^{(0)}$ .

Следуя [4], подставив эти разложения в уравнения равновесия, соотношения Коши и соотношения (4), (5), приравняв выражения при одинаковых степенях  $\delta$ , в каждом приближении получаем систему дифференциальных уравнений.

В нулевом приближении имеет место плоская деформация упругопластического несжимаемого материала, а значит, будет справедливо условие несжимаемости

$$e_r + e_\theta = 0. \quad (6)$$

При этом решением третьего уравнения системы (5) будет

$$\sigma_z^{(0)} = \frac{\sigma_\theta^{(0)} + \sigma_r^{(0)}}{2}, \quad (7)$$

а системы (4), (5) с учетом (6), (7) переписутся в виде

$$(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)})^2 + 4\tau_{r\theta}^{(0)2} = 4k^2, \quad (8)$$

$$e_r^{(0)} - e_\theta^{(0)} = \frac{3}{2E}(\sigma_{re}^{(0)} - \sigma_{\theta e}^{(0)}), \quad (9)$$

$$d\lambda^{(0)} = \frac{de_r^{(0)} - de_\theta^{(0)} - \frac{1+\mu^{(0)}}{E}d(\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)})}{\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}}. \quad (10)$$

В первом приближении в упругой зоне для  $e_r^{(1)}$  и  $e_\theta^{(1)}$  имеем

$$e_r^{(1)} + e_\theta^{(1)} = -\frac{6\mu^{(0)}}{E}\sigma_z^{(0)}, \quad (11)$$

$$e_r^{(1)} - e_\theta^{(1)} = \frac{1}{2E}(3(\sigma_{re}^{(1)} - \sigma_{\theta e}^{(1)}) + 2\mu^{(1)}(\sigma_{re}^{(0)} - \sigma_{\theta e}^{(0)})). \quad (12)$$

В пластической зоне, линеаризуя условие пластичности (4), получим

$$\sigma_{\theta p}^{(1)} - \sigma_{rp}^{(1)} = \frac{-12k\alpha^{(1)}\sigma_z^{(0)}}{\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}}. \quad (13)$$

Из (13), вводя функцию напряжений

$$\sigma_{rp}^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2\Phi}{d\theta^2}, \quad \sigma_{\theta p}^{(1)} = \frac{d^2\Phi}{dr^2},$$

определим напряженное состояние в пластической области для  $\sigma_{rp}^{(1)}$  и  $\sigma_{\theta p}^{(1)}$ . Линеаризовав третье выражение из системы (5) и решив его относительно

$$\chi^{(1)} = 2\sigma_{zp}^{(1)} - \sigma_{rp}^{(1)} - \sigma_{\theta p}^{(1)},$$

получим

$$\sigma_{zp}^{(1)} = \frac{1}{2}(\sigma_{rp}^{(1)} + \sigma_{\theta p}^{(1)} + \chi^{(1)})$$

при

$$\chi^{(1)} = e^{-\frac{2}{3}E\lambda_0} \int \left( \frac{\mu^{(1)} d\sigma_{zp}^{(0)}}{d\lambda_0} - Ek\alpha^{(1)} \right) e^{\frac{2}{3}E\lambda_0} d\lambda_0 + \chi_e^{(1)},$$

$$\chi_e^{(1)} = 4\mu^{(1)}\sigma_{ze}^{(0)}.$$

Для определения  $r_{s1}$  предположим, что по аналогии со случаем идеальной пластичности [4] выполняется условие

$$\left[ \sigma_\theta^{(1)} + \frac{d\sigma_\theta^{(0)}}{dr} r_{s1} \right] |_{r=r_{s0}} = 0,$$

где  $r_{s0}$  – радиус упругопластической границы в нулевом приближении, квадратные скобки обозначают разность значений выражений, заключенных в скобки, соответствующих упругой и пластической областям.

Таким образом, с помощью метода малого параметра в двух приближениях можно получить напряженное состояние и радиус границы раздела зон в упругопластической задаче. Полагая в полученных выражениях  $\alpha^{(1)} = 0$ , очевидно, приходим к результатам работ [1], [4]. Заметим, что предложенный алгоритм решения задачи определения напряженного состояния допускает распространение на любое необходимое количество приближений.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Об условиях пластичности сжимаемого упругопластического материала при плоской деформации / Д. Д. Ивлев, Е. В. Макаров, Ю. М. Марушкой // Изв. РАН. МТТ. – 1978. – № 4. – С. 80–87.

[2] *Артемов, М. А.* Учет сжимаемости материала при определении напряженно-деформированного состояния в упругопластическом теле в случае плоской деформации / М. А. Артемов, И. А. Ларин // Вестник ВГТУ. – 2009. – Т. 5. – № 7. – С. 39–42.

[3] *Артемов, М. А.* Учет сжимаемости материала при определении напряжений и деформаций в упругопластическом теле в случае плоского напряженного состояния / М. А. Артемов, Н. С. Потапов // Вестник ВГТУ. – 2009. – Т. 5. – № 8. – С. 25–29.

[4] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 209 с.

[5] *Киликовская, О. А.* Влияние упрочнения и сжимаемости материала на решение упруго-пластических задач о деформации пространства с цилиндрической полостью / О. А. Киликовская, Н. В. Овчиникова // Изв. РАН. МТТ. – 2012. – № 1. – С. 75–91.

[6] *Друкер, Д.* Механика. Новое в зарубежной механике : в 2 т. Т. 2 : Определяющие законы механики грунтов. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование / Д. Друкер, В. Прагер. – М. : Мир, 1975. – С. 166–177.

*Ковалев Алексей Викторович,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** kovalev@amm.vsu.ru

A. V. Kovalev

**ON THE INCLUSION OF THE ASSOCIATED COMPRESSION  
ELASTOPLASTIC BODIES IN THE CASE OF PLANE STRAIN**

*Voronezh State University*

**Abstract.** In the framework of the theory of flow through the perturbation method [4] developed an approach that allows to determine the stress state in a compressible elastic-plastic bodies in the case of plane strain.

**Keywords:** tension, deformation, plasticity, elasticity, compressibility.

**REFERENCES**

[1] *Ivlev, D. D.* About conditions of plasticity of the squeezed uprugoplastichesky material at flat deformation / D. D. Ivlev, E. V. Makarov, Yu. M. Marushkey // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a firm body. – 1978. – No 4. – P. 80–87.

[2] *Artemov, M. A.* The accounting of compressibility of a material at definition intense the deformed condition in an uprugoplastichesky body in case of flat deformation / M. A. Artemov, I. A. Larin // Vestnik VGTU. – 2009. – Vol. 5. – No 7. – P. 39–42.

[3] *Artemov, M. A.* The accounting of compressibility of a material at determination of tension and deformations in an uprugoplastichesky body in case of a flat tension / M. A. Artemov, N. S. Potapov // Vestnik VGTU. – 2009. – Vol. 5. – No 8. – P. 25–29.

[4] *Ivlev, D. D.* Method of indignations in the theory uprugoplastichesky body / D. D. Ivlev, L. V. Yershov. – M. : Nauka, 1978. – 209 p.

[5] *Kilikovsky, O. A.* Hardening and compressibility influence material on the solution of uprugoplastichesky tasks on deformation spaces with a cylindrical cavity / O. A. Kilikovsky, N. V. Ovchinnikova // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a firm body. – 2012. – No 1. – P. 75–91.

[6] *Druker, D.* Mechanics. New in foreign mechanics : in 2 vol. Vol. 2 : Defining laws of mechanics of soil. Mechanics of soil and plastic analysis or limit design / D. Druker, V. Prager. – M. : Mir, 1975. – P. 166–177.

*Kovalev, Aleksey Viktorovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh*

Л. В. Ковтанюк, В. П. Матвеевко, А. А. Буренин

## ТЕЧЕНИЕ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ ПО ТРУБЕ В УСЛОВИЯХ ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН*

*Институт механики сплошных сред УрО РАН*

*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН*

**Аннотация.** Приводится точное решение классической задачи Пуазейля о прямолинейном движении среды по цилиндрической трубе. Считается, что среда обладает упругими, вязкими и пластическими свойствами, поэтому решение строится в рамках модели больших упруго-пластических деформаций с учетом вязких свойств среды при ее пластическом течении. В условиях прилипания на граничной поверхности устанавливаются момент и место зарождения течения, особенности его развития с ростом перепада давления, рассчитываются параметры пластического течения и напряженных состояний при последующем постоянном перепаде давления и при торможении течения при уменьшении воздействия перепадом давления, включая полную остановку. Указываются закономерности продвижения упругопластических границ и упругопродетформированного ядра в зависимости от характера изменения перепада давления.

**Ключевые слова:** упругость, пластичность, вязкость, большие деформации, вязкопластическое течение.

УДК: 539.374

**Введение.** Развитие технологической практики настоятельно требует на современном этапе учета упругих свойств материалов при их интенсивном формоизменении. Связано это с неконтролируемыми изменениями в геометрии изделия, получаемыми приемами, включающими в себя интенсивное необратимое деформирование (штамповка, формовка, волочение и др.), в процессах разгрузки при снятии технологической оснастки. Часто в таких процессах в готовом изделии формируется недопустимый с точки зрения эксплуатационных свойств уровень остаточных напряжений. Отмеченные эффекты задаются упругими свойствами интенсивно деформируемых материалов, поэтому их учет уже на стадии конструирования математической модели деформирования оказывается обязательным. За свою почти полувековую историю теория больших упругопластических деформаций накопила достаточно большое количество геометрически и термодинамически непротиворечивых моделей [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Несмотря на это, использование подобных замкнутых моделей в практике создания программных комплексов, ориентированных на расчет технологических приемов, связанных с интенсивным формоизменением, до настоящего времени совершенно незначительно. Также незначительным следует признать количество полученных аналитических и

---

Поступила 01.02.2013

Работа выполнена в рамках программы совместных фундаментальных исследований УрО РАН, СО РАН, ДВО РАН (проекты УрО РАН №10-С-1-1015, ДВО РАН №12-П-СУ-03-002).

численно-аналитических решений в рамках построенных моделей больших упругопластических деформаций. Продвижение в последнем связано с математической моделью, предложенной в [5], где выполнены основные качественные особенности, свойственные теории малых упругопластических деформаций типа Прандтля-Рейса: тензор необратимых деформаций (не его компоненты) неизменен в процессах обратимого деформирования и разгрузки, напряжения определяются только уровнем и распределением обратимых деформаций, итоговое разгрузочное состояние не зависит от пути разгрузки в пространстве напряжений. Выполнить данные жесткие требования, не обязательные при построении модели, а иногда и опытно не состоятельные, удалось в [5], сохранив при этом геометрическую и термодинамическую корректность построенной модели. Именно данное обстоятельство позволило получить решения ряда задач [7], [8], [9], [10], [11] теории больших упругопластических деформаций, включая учет вязких свойств материалов в процессах их пластического течения.

Здесь представим решение еще одной из них. Именно решение задачи Пуазейля о движении среды, обладающей упругими, пластическими и вязкими свойствами, по цилиндрической трубе, вызываемом изменяющимся во времени перепадом давления, в условиях прилипания материала на его граничной поверхности.

**1. Исходные соотношения используемой модели деформирования.** Движение среды зададим способом Эйлера, используя прямоугольную систему пространственных декартовых координат  $x_i$ , с помощью закона  $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, t)$ . Исторически первое [1] геометрически непротиворечивое разделение полных деформаций на обратимую и необратимую составляющие связано в наших обозначениях с разложением

$$g_{ij} = a_{k,i}a_{k,j} = (\delta_{ik} - 2e_{ik})(\delta_{kj} - 2p_{kj}), \quad a_{k,i} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i}. \quad (1.1)$$

В (1.1)  $e_{ij}$ ,  $p_{ij}$  – компоненты обратимых и необратимых деформаций. Позднее использовалось другое разделение деформаций [2], в котором множители менялись местами. В [5] метрический тензор  $g_{ij}$  представляется в форме

$$g_{ij} = (\delta_{ik} - e_{ik})(\delta_{ks} - 2p_{ks})(\delta_{sj} - e_{sj}), \quad e_{ij} = e_{ji}, \quad p_{ij} = p_{ji}. \quad (1.2)$$

Исходя из (1.2) и следуя уравнению изменения тензора дисторсии и уравнению баланса энтропии [12], для компонент обратимой и необратимой составляющих тензора полных деформаций можно получить дифференциальные уравнения их изменения (переноса) в форме

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} \left( (\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj}) \right), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $u_i$  и  $v_i$  – компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды. В (1.3) не определены компоненты  $z_{ij}$  и оператор объективной производной  $D/Dt$ . Для того, чтобы получить геометрически и термодинамически непротиворечивую модель, необходимо положить:

$$\begin{aligned} \frac{Dn_{ij}}{Dt} &= \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \quad r_{ij} = -r_{ji} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}(\varepsilon_{sk}, e_{sk}), \\ z_{ij} &= A^{-1} [(\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj})B^2 + B(\varepsilon_{ik}e_{ks}e_{sj} - e_{ik}e_{ks}\varepsilon_{sj}) + e_{ik}\varepsilon_{ks}e_{st}e_{tj} - e_{ik}e_{ks}\varepsilon_{st}e_{tj}], \\ A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3, \\ B &= 2 - E_1, \quad E_1 = e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Объективная производная в (1.4) записана для произвольного тензора с компонентами  $n_{ij}$ . Заметим, что при равенстве нулю нелинейной составляющей  $z_{ij}$  тензора вращений  $r_{ij}$  производная (1.4) переходит в производную Яуманна. Когда источник  $\varepsilon_{ij}^p$  (тензор скоростей пластических деформаций) в уравнении переноса тензора  $p_{ij}$  равен нулю, компоненты тензора  $p_{ij}$  изменяются так же, как при повороте системы координат, или, что то же, как при движении среды без деформирования. Соотношения (1.3) и (1.4) диктуют следующее разделение полных деформаций Альманси  $d_{ij}$  на обратимую и необратимую составляющие:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j})/2 = s_{ij} + p_{ij} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}, \\ s_{ij} &= e_{ij} - e_{ik}e_{kj}/2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Тензор с компонентами  $e_{ij}$  задает тензор обратимых деформаций с компонентами  $s_{ij}$ , но не тождественен последнему. Введение в рассмотрение тензора с компонентами  $e_{ij}$  связано не только с удобством в записи уравнения его переноса (1.3), но и с возможностью записать для упругопластической среды аналог формулы Мурнагана как следствие закона сохранения энергии. Если предположить, что в случае упругопластической среды термодинамический потенциал (плотность распределения свободной энергии) – функция только обратимых деформаций, то, следуя закону сохранения энергии, можно получить [12]

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -P\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}) & \text{при } p_{ij} \equiv 0, \\ -P_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) & \text{при } p_{ij} \neq 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Соотношения (1.6) записаны для рассматриваемого далее случая несжимаемой среды,  $P$  и  $P_1$  – добавочные гидростатические давления,  $W = W(e_{ij})$  – упругий потенциал, который, полагая среду изотропной, зададим в форме [13]

$$\begin{aligned} W &= -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 + \dots, \\ J_k &= \begin{cases} L_k & \text{при } p_{ij} \equiv 0, \\ I_k & \text{при } p_{ij} \neq 0, \end{cases} \quad L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{kj}, \quad I_1 = s_{kk}, \quad I_2 = s_{st}s_{ts}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Параметр  $\mu$  отождествляется обычно с модулем сдвига,  $b$  и  $\chi$  – упругие постоянные более высокого порядка. Из соотношений (1.6) и (1.7) следует, что во всей области деформирования напряжения в среде определяются уровнем и распределением обратимых деформаций. Полагаем, что необратимые деформации накапливаются в среде в условиях соответствия напряжений поверхности нагружения, а скорость их роста задается ассоциированным законом пластического течения, т. е.

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \partial f / \partial \sigma_{ij}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \kappa, \quad \lambda > 0. \quad (1.8)$$

Соотношениями (1.8) вводится новая постоянная материала  $\kappa$  – предел текучести. В качестве функции нагружения далее будем использовать условие пластичности Треска, обобщенное на случай учета вязких свойств среды при ее пластическом течении [14]:

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| - 2\kappa + 2\eta \max |\varepsilon_k^p|. \quad (1.9)$$

Здесь  $\sigma_i$  – компоненты главных напряжений,  $\varepsilon_k^p$  – компоненты главных скоростей пластических деформаций,  $\eta$  – коэффициент вязкости.

**2. Упругое деформирование.** Пусть несжимаемый упруговязкопластический материал, деформационные свойства которого заданы выше, заполняет круглую трубу радиуса  $R$  с недеформируемыми стенками. Рассмотрим деформирование материала и его продвижение по трубе в условиях растущего со временем перепада давления. Следует заметить, что в рамках жесткопластической модели Шведова – Бингама получен ряд точных решений задач антиплоского течения [15], [16], [17], [18], [19], включая обсуждаемую постановку. При отказе

от предположения о недеформируемости среды, составляющей жесткие ядра, или в застойных зонах математическое моделирование течений значительно усложняется. Деформации в таких областях преимущественно обратимы, и постановка краевых задач обязана осуществляться в перемещениях, в то время как в областях течения задача решается в скоростях перемещений. На границах областей следует требовать выполнения условий непрерывности перемещений, поскольку равенство скоростей и компонент напряжений оказывается недостаточным и может приводить к ошибочным решениям [20]. Вычисление компонент перемещений в областях течения, как известно [21], – непростая задача. В таких областях необратимые деформации необходимо большие, что как раз и требует рассмотрения в рамках модели больших упругопластических деформаций.

Решение поставленной краевой задачи теории больших упруговязкопластических деформаций в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  будем искать в классе функций

$$u = u_z(r, t), \quad v = v_z(r, t), \quad P = P(r, z, t).$$

Согласно соотношениям (1.5) только две компоненты тензора деформаций в рассматриваемом случае отличны от нуля:

$$d_{rr} = -u_{,r}^2/2, \quad d_{rz} = u_{,r}/2. \quad (2.1)$$

Полагаем, что деформирование начинается из свободного состояния материала и первоначально является обратимым ( $d_{ij}, p_{ij}$ ). Следуя формуле Мурнагана (1.6), при упругом потенциале (1.7) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} &= -s(z, r, t) - (b + \mu)u_{,r}^2/2 = -p(z, t), \\ \sigma_{zz} &= -p(z, t) + \mu u_{,r}^2, \quad \sigma_{rz} = \mu u_{,r}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $s(z, r, t)$  – новая неизвестная функция добавочного гидростатического давления. Независимость  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  от  $r$  будет установлена в дальнейшем. В соотношениях (2.2) не выписаны слагаемые с третьей и более высокими степенями  $u_{,r}$ . Таким образом, обратимые деформации считаются малыми, и учитываются только старшие нелинейные слагаемые в зависимостях напряжений от обратимых деформаций. Это ограничение не принципиально, но позволяет получить точные решения последовательности краевых задач развития и торможения течения в обозримой форме. Для материалов, наиболее характерно проявляющих упругопластические свойства (металлы), такое ограничение естественно. Далее силами инерции будем пренебрегать, считая процессы деформирования и течения достаточно медленными. Тогда из уравнений равновесия будет следовать, что из диагональных компонент тензора напряжений только  $\sigma_{zz}$  зависит от  $r$ , а  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -p(z, t)$  от  $r$  не зависят. Интегрирование уравнений равновесия приводит к зависимостям

$$\sigma_{rz} = c(t)r/2 + c_1(t)/r, \quad p = c(t)z + p_0(t). \quad (2.3)$$

Неизвестные функции интегрирования  $c(t), c_1(t), p_0(t)$  необходимо определить из краевых условий. Заметим, что  $c_1(t) = 0$ , так как напряжение  $\sigma_{rz}$  обязано быть конечным при  $r = 0$ ,  $p_0(t)$  следует считать известной (задаваемой) функцией контрольного давления в сечении трубы  $z = 0$ . Деформирование и продвижение материала по трубе свяжем с воздействием градиента давления

$$\partial p / \partial z = -\psi(t), \quad \psi(0) = 0. \quad (2.4)$$

Считаем, что во всем процессе деформирования на стенках трубы выполнены условия жесткого сцепления

$$u(R, t) = 0, \quad v(R, t) = 0. \quad (2.5)$$

Для указанных условий нагружения решение получаем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= -\psi(t)r/2, \quad p = -\psi(t)z + p_0(t), \\ u &= -\frac{\psi(t)}{4\mu}r^2 + x(t), \quad v = -\frac{\dot{\psi}(t)}{4\mu}r^2 + \dot{x}(t), \quad \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}. \end{aligned} \quad (2.6)$$



Для определенности полагаем далее  $\psi(t)$  линейной функцией времени  $\psi(t) = \alpha t$  ( $\alpha = \text{const}$ ). С учетом краевых условий (2.5) окончательно получаем

$$u = h(r, t), \quad v = \frac{\partial h(r, t)}{\partial t}, \quad h(r, t) = \frac{\alpha t}{4\mu} (R^2 - r^2). \quad (2.7)$$

Это решение при возрастающей функции  $\psi(t)$  справедливо в промежутке времени от 0 до последующего момента времени  $t = t_0$ , начиная с которого от стенки  $r = R$  развивается область пластического течения. Условие его возникновения (1.9) в принятых допущениях принимает форму

$$\sigma_{rz}(R, t_0) = -\kappa, \quad t_0 = 2\kappa/(\alpha R). \quad (2.8)$$

Согласно формуле (1.3) через найденное поле перемещений (2.7) упругие деформации выражаются зависимостями

$$e_{rz} = -\frac{\alpha tr}{4\mu}, \quad e_{rr} = -\frac{3}{2}e_{rz}^2, \quad e_{zz} = \frac{1}{2}e_{rz}^2. \quad (2.9)$$

**3. Развивающееся пластическое течение и течение при постоянном перепаде давления.** В последующий за  $t_0$  любой текущий момент времени  $t$  в среде присутствует область течения  $m(t) \leq r \leq R$ . Движущаяся поверхность  $r = m(t)$  отделяет область течения от упругого ядра  $r \leq m(t)$ , где в среде присутствуют только обратимые (упругие) деформации. В области обратимого деформирования так же, как и ранее, выполняются зависимости (2.6) для напряжений, перемещений и скоростей. В области течения  $m(t) \leq r \leq R$  согласно соотношениям (1.6) при  $p_{ij} \neq 0$ , (1.7) и (2.9) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} &= -s_1(z, r, t) - 2(\mu + b)e_{rz}^2 = -p_1(z, t), \\ \sigma_{zz} &= -p_1(z, t) + 4\mu e_{rz}^2, \quad \sigma_{rz} = 2\mu e_{rz}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Следствием интегрирования уравнений равновесия, как и ранее, является независимость функции  $p_1$  от  $r$ , а также имеем выражения

$$p_1(z, t) = q(t)z + n(t), \quad \sigma_{rz} = q(t)r/2, \quad e_{rz} = q(t)r/4\mu. \quad (3.2)$$

Условия непрерывности напряжений на упругопластической границе  $r = m(t)$  заставляют считать, что

$$q(t) = -\psi(t) = -\alpha t, \quad n(t) = p_0(t), \quad p_1(t) = p(t).$$

Условие пластического течения (1.9) в рассматриваемом случае переписывается в форме

$$f(\sigma_{rz}, \varepsilon_{rz}^p) = \sigma_{rz}^2 - (\kappa - \eta \varepsilon_{rz}^p)^2 = 0. \quad (3.3)$$

Следуя ассоциированному закону пластического течения (1.8), из условия (3.3) найдем

$$\sigma_{rz} = -\kappa + \varepsilon_{rz}^p, \quad \lambda = \frac{\varepsilon_{rz}^p}{\eta \varepsilon_{rz}^p - \kappa}. \quad (3.4)$$

Сравнение зависимостей (3.2) и (3.4) при учете условия (2.4) позволяет вычислить скорость пластических деформаций:

$$\varepsilon_{rz}^p = (\kappa - \psi(t)r/2)/\eta. \quad (3.5)$$

Положение упругопластической границы  $r = m(t)$  задается условием равенства на ней нулю скорости пластических деформаций (3.5):

$$m(t) = 2\kappa/\psi(t) = 2\kappa/(\alpha t). \quad (3.6)$$

Распределение скоростей в области течения следует из равенства (3.5) при учете краевого условия (2.5)

$$v(r, t) = \frac{\partial h(r, t)}{\partial t} + g(r, t), \quad g(r, t) = \frac{2}{\eta} \left( \frac{\psi}{4} (R^2 - r^2) - \kappa(R - r) \right). \quad (3.7)$$

Используя условие непрерывности скоростей (2.6) и (3.7) на упругопластической границе, в области упругого ядра  $r \leq m(t)$  найдем

$$v(r, t) = \frac{\partial h(r, t)}{\partial t} + g(m, t), \quad u = h(r, t) - \frac{2}{\eta} \left( \frac{\kappa^2}{\alpha} \ln \frac{t_0}{t} + \kappa R(t - t_0) - \frac{\alpha R^2}{8} (t^2 - t_0^2) \right). \quad (3.8)$$

Как уже отмечалось, в задачах упругопластичности необходимо построение непрерывного на упругопластической границе поля перемещений. Для нахождения перемещений в области течения необходимо определить компоненту пластической деформации  $p_{rz}$ . Интегрируя уравнение (3.5) при условии равенства нулю пластических деформаций на границе  $r = m(t)$ , получаем

$$p_{rz} = \frac{1}{\eta} \left( \kappa t - \frac{\alpha t^2}{4} \right) - \frac{\kappa^2}{\eta \alpha r}. \quad (3.9)$$

По известным упругим (3.2) и пластическим (3.9) деформациям, используя соотношения (1.3) и (2.1), определяем полные деформации и, следовательно, перемещения в области течения:

$$u = h(r, t) + \frac{2}{\eta} \left( \frac{\kappa^2}{\alpha} \ln \frac{R}{r} + \kappa t(R - r) + \frac{\alpha t^2}{8} (R^2 - r^2) \right). \quad (3.10)$$

Здесь использованы условие непрерывности перемещения при  $r = m(t)$  и уравнение (3.6).

Таким образом, решение задачи о развитии вязкопластического течения при растущем перепаде давления можно считать завершенным. Подчеркнем, что выбор простейшей зависимости  $\psi(t) = \alpha t$  связан только с конкретизацией задачи и получением наиболее простых окончательных зависимостей, решающих задачу. При любой другой монотонно возрастающей функции  $\psi(t)$  приведенные вычисления можно повторить.

Пусть, начиная с момента времени  $t = t_1$ , функция  $\psi(t)$  остается постоянной:  $\psi(t) = \alpha t_1$ . Тогда согласно соотношениям (3.6) область течения не увеличивается, а пластические деформации растут в пределах слоя  $m(t_1) = m_1 \leq r \leq R$ . Процесс накопления пластических деформаций и деформированное состояние в движущемся упругом ядре  $r \leq m_1$  подчинены зависимостям, непосредственно следующим из полученного выше решения:

– в упругом ядре:

$$u = h(r, t_1) + h_1(m_1) + g(m_1, t_1), \quad v = g(m_1, t_1), \\ h_1(m_1) = \frac{2\kappa^2}{\eta\alpha} \ln \frac{R}{m_1} - \frac{\alpha t_1^2}{4\eta} (R^2 - m_1^2). \quad (3.11)$$

– в области течения:

$$u = h(r, t_1) + g(r, t_1) + h_1(r), \quad v = g(r, t_1), \\ p_{rz} = \frac{t}{\eta} \left( \kappa - \frac{\alpha t_1 r}{2} \right) + \frac{\alpha r t_1^2}{4\eta} - \frac{\kappa^2}{\alpha \eta r}, \quad p_{zz} = 2e_{rz} p_{rz}, \quad p_{rr} = -p_{zz} - 2p_{rz}^2. \quad (3.12)$$

В (3.12) следует использовать зависимость для обратимых деформаций из соотношений (3.2).

**4. Течение при уменьшении перепада давления. Разгрузка.** Пусть, начиная с некоторого момента времени  $t = t_2 > t_1$ , функция  $\psi(t)$  убывает, например, по закону

$$\psi(t) = \alpha t_1 (1 - \beta(t - t_2)), \quad \beta = \text{const}. \quad (4.1)$$

В любой последующий за  $t_2$  момент времени  $t$  в среде будут присутствовать три по-разному деформирующиеся области: область упругого ядра  $r \leq m_1$ , область  $m_1 \leq r \leq l(t)$ , где необратимые деформации присутствуют, но не накапливаются, и область продолжающегося течения  $l(t) \leq r \leq R$ . Цилиндрическая поверхность  $r = l(t)$  будет новой упругопластической границей, движущейся от поверхности  $r = m_1$  к внешней границе среды  $r = R$ . Иначе говоря, радиус упругого ядра, которое движется как продеформированное целое, возрастает за счет

присоединения к нему области  $m_1 \leq r \leq l(t)$ , где наряду с обратимыми имеются и неизменяющиеся необратимые деформации. Заметим, что неизменным остается тензор необратимых деформаций, в то время как его компоненты могут меняться. В рассматриваемом случае не меняется величина  $p_{rz}$ , а  $p_{rr}$  и  $p_{zz}$  изменяются в данной области. В упругой области аналогично предыдущим зависимостям для любого момента времени  $t > t_2$  для перемещений и скоростей получаем

$$u = -\frac{\alpha t_1 (1 - \beta(t - t_2))}{4\mu} r^2 + w(t), \quad v = -\frac{\alpha t_1 \beta}{4\mu} r^2 + \dot{w}(t). \quad (4.2)$$

Здесь  $w(t)$  – неизвестная функция, определяемая из краевого условия. В каждой точке области  $m_1 \leq r \leq R$  течение продолжается до момента времени, пока ее не достигнет движущаяся поверхность  $l(t)$ . После этого во всей области  $m_1 \leq r \leq l(t)$  скорость пластической деформации  $\varepsilon_{rz}^p = 0$  и, следовательно, величина  $p_{rz}$  остается постоянной. Это приводит к тому, что и в указанной области оказываются справедливыми зависимости (4.2). В области  $l(t) \leq r \leq R$ , где течение продолжается, аналогично выводу зависимости (3.5) найдем

$$\varepsilon_{rz}^p = (\kappa - \alpha t_1 (1 - \beta(t - t_2)) r/2) / \eta. \quad (4.3)$$

Требование  $\varepsilon_{rz}^p(l(t)) = 0$  позволяет записать закон продвижения границы  $r = l(t)$ :

$$l(t) = \frac{2\kappa}{\alpha t_1 (1 - \beta(t - t_2))}. \quad (4.4)$$

Используя, как и ранее, кинематические зависимости (1.1) и (4.3) и условие (2.7), определим скорость в области продолжающегося течения:

$$v = F(r, t) = \frac{2}{\eta} \left( \frac{\alpha t_1 (1 - \beta(t - t_2))}{4} (R^2 - r^2) + \kappa(r - R) \right) + \frac{\alpha t_1 \beta}{4\mu} (R^2 - r^2). \quad (4.5)$$

Условие равенства скоростей на границе области течения  $r = l(t)$  позволяет найти неизвестную функцию  $w(t)$  в соотношениях (4.2) и получить, что функция  $v = F(l, t)$  задает зависимость скорости движения ядра от времени. Для определения перемещений в области течения необходимо вычислить компоненту  $p_{rz}$  необратимых деформаций. Интегрируя равенство (4.3) с использованием начального условия в момент изменения режима течения при  $t = t_2$ , получим

$$p_{rz} = \frac{t}{\eta} \left( \kappa - \frac{\alpha t_1 r}{2} \right) + \frac{\alpha r t_1^2}{4\eta} - \frac{\kappa^2}{\alpha \eta r} + \frac{\alpha t_1 \beta r}{4\eta} (t - t_2)^2. \quad (4.6)$$

Отсюда при известном законе продвижения упругопластической границы (4.4) определим необратимые деформации в области ядра  $m_1 \leq r \leq l(t)$ :

$$p_{rz} = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{2\kappa}{\beta} - \frac{2\kappa^2}{\alpha r} \left( 1 + \frac{1}{t_1 \beta} \right) + \frac{\alpha t_1 r}{2} \left( t_1 - \frac{1}{\beta} \right) - \alpha t_1 t_2 r + 2\kappa t_2 \right). \quad (4.7)$$

По известным скоростям точек среды, упругим и пластическим деформациям найдем перемещения, учитывая их равенство на границах  $m_1$  и  $l(t)$ :

– в области пластического течения  $l(t) \leq r \leq R$ :

$$\begin{aligned} u &= g(\tilde{r}, t_1)t + h_1(\tilde{r}) - \kappa_1 h_2(\hat{r}, t) + h_3(r, t) + \frac{\alpha t_1 \beta}{4\eta} (t - t_2)^2 (\tilde{r}^2 - R^2), \\ h_2(\hat{r}, l) &= \frac{1}{\eta} \left( \alpha t_1 \left( \frac{1}{4\beta} + \frac{t_2}{2} \right) (\hat{r}^2 - l^2) - 2\kappa \left( \frac{1}{\beta} + t_2 \right) (\hat{r} - l) + \frac{2\kappa^2}{\alpha t_1 \beta} \ln \frac{\hat{r}}{l} \right), \\ h_3(r, t) &= \frac{\alpha t_1}{4\mu} (1 - \beta(t - t_2)) (R^2 - r^2), \end{aligned} \quad (4.8)$$

причем

$$\kappa_1 = 0, \quad \tilde{r} = \hat{r} = r, \quad (4.9)$$

– в области  $m_1 \leq r \leq l(t)$ , примыкающей к ядру:

$$\kappa_1 = 1, \quad \tilde{r} = l, \quad \check{r} = \hat{r} = r, \quad (4.10)$$

– в упругой области:

$$\kappa_1 = 1, \quad \tilde{r} = l, \quad \hat{r} = \check{r} = m_1. \quad (4.11)$$

Упругопластическая граница  $r = l(t)$  в своем продвижении по среде в момент времени

$$t_3 = \beta^{-1} - 2\kappa/(\alpha R t_1 \beta) + t_2$$

выходит на границу  $r = R$ . Следовательно, с момента времени  $t = t_3$  вязкопластическое течение прекращается. Перемещения в момент времени  $t = t_3$  определяются зависимостями (4.8), (4.10) при  $m_1 \leq r \leq R$  и (4.8), (4.11) при  $r \leq m_1$  соответственно, если в них положить  $l = R$ . Скорость в момент времени  $t_3$  и при дальнейшем ( $t > t_3$ ) убывании функции  $\psi(t)$  по закону (4.1) до конечного момента разгрузки  $t_k = \beta^{-1} + t_2$  во всей области деформирования определяется по формуле

$$v = \alpha t_1 \beta (r^2 - R^2) / (4\mu). \quad (4.12)$$

В этом же промежутке времени перемещения определяются зависимостью

$$u = h_1(\tilde{r}) - h_2(\tilde{r}, R) + h_3(r, t) \quad (4.13)$$

при  $\tilde{r} = r$  в области  $m_1 \leq r \leq R$  и при  $\tilde{r} = m_1$  в области упругого деформирования.

В конечный момент разгрузки  $t = t_k$  функция  $h_3(r, t)$  станет равной нулю. Следовательно, с этого момента времени движение среды останавливается, и перемещения далее остаются постоянными. Заметим, что в этот момент времени скорость продвижения точек среды в ядре изменяется скачкообразно. До момента времени  $t = t_k$  распределение скорости задается зависимостью (4.12) ( $t < t_k$ ), а с этого момента ( $t > t_k$ ) скорость обращается в нуль. То же происходило при смене режимов нагружения с растущего перепада давления на постоянный и с постоянного на уменьшающийся. Следовательно, к скачкообразному изменению в распределении скорости приводит разрыв в производной по времени функции  $\psi(t) = \partial p / \partial z$ . Существенная нестационарность подобного изменения требует, по-видимому, учета сил инерции и связанного с этим волнового перераспределения скоростей, что выходит за рамки используемого здесь квазистатического подхода.

В качестве иллюстрации особенностей течения и деформирования в ядре при учете упругих свойств среды на рисунке приведены следующие из полученных решений последовательности задач развития и торможения течения зависимости распределения безразмерной скорости  $\gamma = v\eta/(\mu R)$  от безразмерной пространственной координаты  $\rho = r/R$  в разные моменты безразмерного времени  $\tau = \alpha R t / \mu$ . Приняты следующие значения постоянных:

$$\frac{\kappa}{\mu} = 0.00621, \quad \frac{\mu^2}{\alpha R \eta} = 100, \quad \frac{\alpha R}{\beta \mu} = 0.04.$$

Отметим, что с ростом перепада давления скорость среды увеличивается. При постоянном перепаде давления упругое ядро движется как продеформированное целое быстрее, чем точки среды в области течения. Когда перепад давления уменьшается, движение упругого ядра вследствие упругого эффекта замедляется быстрее в сравнении с движением в области вязкопластического течения. Еще более отчетливо упругое последствие проявляется при остановке течения, когда все точки среды уже будут двигаться в обратную сторону и упругие деформации уменьшаются до нуля при полной разгрузке ( $\psi = 0$ ).

Полученное аналитическое решение может оказаться полезным в теории смазок, в расчетах технологических режимов волочения металлов (приведенные выше числовые значения постоянных соответствуют стали), процессов транспортировки тяжелых углеводородов и др. Также полученное точное решение классической задачи Пуазейля для сред со сложными упруговязкопластическими свойствами может послужить основанием для тестирования алгоритмов и программ численных расчетов в моделировании процессов с большими необратимыми деформациями при учете упругих эффектов.

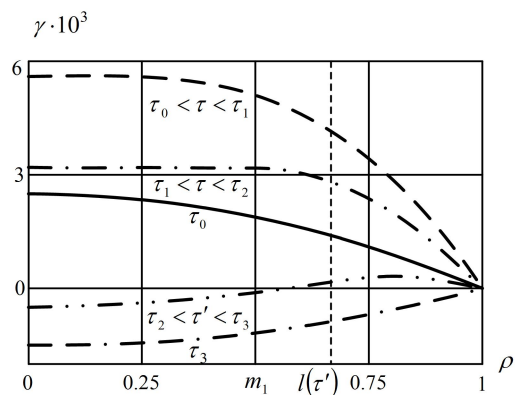


Рис. 1. Изменение скорости в процессе деформирования

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lee, E. H. Elastic-plastic deformation at finite strains / E. H. Lee // Trans ASME : Ser. E. J. Appl. Mech. – 1969. – V. 36. – № 1. – P. 1–6.
- [2] Clifton, R. J. On the equivalence of and / R. J. Clifton // Trans. ASME : Ser. E. J. Appl. Mech. – 1972. – V. 39. – P. 287–289.
- [3] Левитас, В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении / В. И. Левитас. – Киев : Наук. думка, 1987. – 231 с.
- [4] Мясников, В. П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях / В. П. Мясников // Вестник ДВО РАН. – 1996. – № 4. – С. 8–13.
- [5] Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Докл. РАН. – 1996. – Т. 347. – № 2. – С. 199–201.
- [6] Роговой, А. А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций / А. А. Роговой // ПМТФ. – 2005. – Т. 46. – № 5. – С. 138–149.
- [7] Ковтанюк, Л. В. О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу / Л. В. Ковтанюк // Докл. РАН. – 2005. – Т. 400. – № 6. – С. 764–767.
- [8] Буренин, А. А. Продавливание упруговязкопластического материала между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. Л. Мазелис // ПММ. – 2006. – Т. 70. – Вып. 3. – С. 481–489.
- [9] Буренин, А. А. Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчетом упругого отклика после остановки течения и разгрузки / А. А. Буренин, А. С. Устинова // Успехи механики сплошных сред : сб. науч. тр. к 70-летию академика В. А. Левина. – Владивосток : Дальнаука, 2009. – С. 91–102.
- [10] Буренин, А. А. Об упругих деформациях и вязкопластическом течении в тяжелом слое, помещенном на наклонной плоскости / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2010. – № 2. – С. 158–170.
- [11] Ковтанюк, Л. В. О конечном продвижении упруговязкопластической пробки по цилиндрической трубе / Л. В. Ковтанюк // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 1. – С. 68–75.
- [12] Буренин, А. А. Упругие эффекты при интенсивном необратимом деформировании / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток : Изд-во ДВГТУ, 2011. – 280 с.
- [13] Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.

[14] *Знаменский, В. А.* Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах / В. А. Знаменский, Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 114–118.

[15] *Мясников, В. П.* Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязкопластической среды / В. П. Мясников // ПМТФ. – 1961. – № 2. – С. 79–86.

[16] *Быковцев, Г. И.* О вязко-пластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления / Г. И. Быковцев, А. Д. Чернышов // ПМТФ. – 1964. – № 4. – С. 94–96.

[17] *Огибалов, П. М.* Нестационарные движения вязко-пластических сред / П. М. Огибалов, А. Х. Мирзаджанзаде. – М. : Изд-во МГУ, 1970. – 415 с.

[18] *Георгиевский, Д. В.* Жесткие зоны в статически определимых и неопределимых задачах вязкопластического течения / Д. В. Георгиевский // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. – М. : Физматлит, 2006. – С. 135–141.

[19] *Резунов, А. В.* Задача о чистом сдвиге вязко-пластического материала между двумя цилиндрическими поверхностями / А. В. Резунов, А. Д. Чернышов // Механика деформируемого твердого тела. – Куйбышев : Изд-во "Волжская коммуна", 1975. – Вып. 1. – С. 32–36.

[20] *Ивлев, Д. Д.* Из истории дискуссий в механике. Три дискуссии / Д. Д. Ивлев // Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник. – Минск : БНТУ, 2012. – Вып. 27. – С. 5–10.

[21] *Ивлев, Д. Д.* Об определении перемещений в упругопластических задачах теории идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев // Успехи механики деформируемых сред. К 100-летию со дня рождения академика Б. Г. Галеркина. – М. : Наука, 1975. – С. 236–240.

*Ковтанюк Лариса Валентиновна,*

*доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией необратимого деформирования, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток*

*e-mail: lk@iacp.dvo.ru*

*Матвеев Валерий Павлович,*

*академик, директор, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь*

*e-mail: mvp@icmm.ru*

*Буренин Анатолий Александрович,*

*член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре*

*e-mail: burenin@iacp.dvo.ru*

L. V. Kovtanyuk, V. P. Matveenko, A. A. Burenin

## THE FLOW OF ELASTO-VISCOUS-PLASTIC MEDIUM THROUGH A TUBE IN THE CONDITIONS OF CHANGING DIFFERENTIAL PRESSURE

*Institute of automation and control processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences*

*Institute of continuous media mechanics of Ural branch of Russian Academy of Sciences*

*Institute of machining and metallurgy of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences*

**Abstract.** The exact solution of the classical problem of Poiseuille of rectilinear movement of the environment on cylindrical tube is provided. It is believed that the environment has elastic, viscous and plastic properties, so the solution is constructed in the framework of the model of large elasto-plastic deformations taking into account the viscous properties of the medium with its plastic flow. In the conditions of adhesion on the boundary surface, set the time and place the origin of the flow, the peculiarities of its development with the growth of the pressure drop is calculated parameters of plastic flow and stress States with subsequent constant pressure drop and braking flow at reducing the effects of pressure drop, including a full stop. Specify the patterns promotion of elasto-plastic boundaries and elastic deformed kernel depending on the nature of the change of the differential pressure.

**Keywords:** elasticity, plasticity, viscosity, large deformations, visco-plastic flow

### REFERENCES

- [1] Lee, E. H. Elastic-plastic deformation at finite strains / E. H. Lee // Trans ASME : Ser. E. J. Appl. Mech. – 1969. – Vol. 36. – Num. 1. – P. 1–6.
- [2] Clifton, R. J. On the equivalence of and / R. J. Clifton // Trans. ASME : Ser. E. J. Appl. Mech. – 1972. – Vol. 39. – P. 287–289.
- [3] Levitas, V. I. Large elastoplastic deformation of materials at high pressure / V. I. Levitas. – Kyiv : Sciences. Dumka. – 1987. – 231 p.
- [4] Myasnikov, V. P. Equations of motion of elastoplastic materials with the large strains / V. P. Myasnikov. – J. FEB RAS. – 1996. – Num. 4. – P. 8–13.
- [5] Burenin, A. A. About one simple model for an elastic-plastic medium at finite strains / A. A. Burenin, G. I. Bykovtsev, L. V. Kovtanyuk // Reports of Russian Academy of Sciences. – 1996. – Vol. 347. – Num. 2. – P. 199–201.
- [6] Rogovoy, A. A. Defining relations for finite elastic-inelastic deformations / A. A. Rogovoy // Applied mathematics and technical physics. – 2005. – Vol. 46. – Num. 5. – P. 138–149.
- [7] Kovtanyuk, L. V. About jacking elastic-viscous-plastic material through the rigid circular cylindrical matrix / L. V. Kovtanyuk // Reports of Russian Academy of Sciences. – 2005. – Vol. 400. – Num. 6. – P. 764–767.
- [8] Burenin, A. A. Punching of elastic-viscous-plastic material between the rigid coaxial cylindrical organic surfaces / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, A. L. Mazelis // PMM. – 2006. – Vol. 70. – Num. 3. – P. 481–489.
- [9] Burenin, A. A. Development and braking screw viscous-plastic flow with the calculation of the elastic response after stopping the flow and discharge / A. A. Burenin, A. S. Ustinova // Advances in mechanics of continuous media. Collection of articles on the 70th anniversary of academician V. A. Levin. – Vladivostok: Dalnauka. – 2009. – P. 91–102.
- [10] Burenin, A. A. Of elastic deformations and viscous-plastic during the heavy layer placed on the inclined plane / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk // Izvestiya ran. Mekh. – 2010. – Num. 2. – P. 158–170.

- [11] *Kovtanyuk, L. V.* About destination promotion elastic-viscous-plastic tube along the cylindrical tube / L. V. Kovtanyuk // Vestnik CSPU them. I.Ya. Yakovlev. – 2006. – Num. 1. – P. 68–75.
- [12] *Burenin, A. A.* Elastic effects in intensive irreversible deformation of a / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk. – Vladivostok : Izd FESTU, 2011. – 280 p.
- [13] *Lurie, A. I.* Nonline theory of elasticity / A. I. Lurie. M: Nauka. – 1980. – 512 p.
- [14] *Znamensky, V. A.* On the equations of viscous-plastic body with piecewise-linear potentials / V. A. Znamensky, D. D. Ivlev // Izv. USSR ACADEMY OF SCIENCES. REL. Mechanics and machine construction. – 1963. – Num. 6. – P. 114–118.
- [15] *Myasnikov, V. P.* Some exact solutions for rectilinear motions of a viscous-plastic medium / V. P. Myasnikov // Applied mathematics and technical physics. – 1961. – Num. 2. – P. 79–86.
- [16] *Bykovtsev, G. I.* Of visco-plastic flow in a non-looping cylinder when available differential pressure / G. I. Bykovtsev, A. D. Chernyshov // Applied mathematics and technical physics. – 1964. – Num. 4. – P. 94–96.
- [17] *Ogibalov, P. M.* Unsteady motion of viscous-plastic media / P. M. Ogibalov, A. H. Mirzadzhanzade. – M. : Publishing house of Moscow state University. – 1970. – 415 p.
- [18] *Georgievsky, D. V.* Hard zones in statically defined and indeterminate tasks viscoplastic flow / A. I. Georgievsky // Problems of mechanics of deformable solids and rocks. Sat. Art. to the 75th anniversary of E.I. Shemyakin. – M: Fizmatlit. – 2006. – P. 135–141.
- [19] *Rezunov, A. V.* The problem of pure shift viscous-plastic material between the two cylindrical surfaces / A. V. Rezunov, A. D. Chernyshov // Mechanics of solids. – Kuybishev : publisher Volzhskaya Kommuna, 1975. – Vol. 1. – P. 32–36.
- [20] *Ivlev D. D.* Of the history of discussions in mechanics. Three discussion / D. D. Ivlev // Theoretical and applied mechanics. International scientific and technical collection. – Minsk : Belarusian state technical University, 2012. – Vol. 27. – P. 5–10.
- [21] *Ivlev, D. D.* About the determination of displacements in elastoplastic problems in the theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev // Advances in mechanics of deformable media. To the 100th anniversary of the birth of academician LTD Galerkin method. – M. : Nauka. – 1975. – P. 236–240.

*Kovtanyuk, Larisa Valentinovna*

*Dr. Sci. Phys. & Math., chair. lab. mechanics of irreversible deformation of the Institute of automation and control processes, Feb RAS, Vladivostok*

*Matveenko, Valeriy Pavlovich*

*Academician, Head of Institute of continuous media mechanics, Ural branch RAS, Perm*

*Burenin, Anatoily Aleksandrovich*

*Corresponding member of the RAS, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Director of the Institute of machinery and metallurgy, Feb RAS, Komsomolsk-on-Amur*



М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова

## РАЗЛОЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА ПО ФУНКЦИЯМ ФАДЛЯ-ПАПКОВИЧА В ОБРАТНО-СИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛУПОЛОСЫ

Московский государственный открытый университет имени В. С. Черномырдина

**Аннотация.** Рассматриваются разложения Лагранжа по функциям Фадля-Папковича, возникающим при решении обратнo-симметричной краевой задачи теории упругости для прямоугольной полуполосы.

**Ключевые слова:** обратнo-симметричная задача, функции Фадля-Папковича, разложения Лагранжа.

УДК: 539.3 + 517.95

**Актуальность исследуемой проблемы.** Функции Фадля-Папковича возникают естественным путем при решении краевой задачи двумерной теории упругости в полуполосе с произвольными граничными условиями на продольных сторонах полуполосы (не совпадающими с условиями периодичности, так как в этом случае получаются известные решения Файлона-Рибьера в тригонометрических рядах) и с любыми граничными условиями на ее торце. Разложениями Лагранжа по функциям Фадля-Папковича называют разложения только одной функции по какой-либо одной системе функций Фадля-Папковича. Разложения Лагранжа являются аналогами рядов Фурье и играют такую же роль в решении краевых задач для полуполосы, какую ряды Фурье играют в периодических решениях Файлона-Рибьера. Впервые они изучались в статье [1], а в статье [2] использовались для решения краевых задач в полуполосе для случая симметричной деформации полуполосы. Однако для обратнo-симметричной деформации они практически не изучались.

**Материал и методика исследований.** Рассмотрим несимметричную относительно оси  $x$  деформацию полуполосы  $\{\Pi^+ : x \geq 0, |y| \leq 1\}$ , у которой продольные стороны  $y = \pm 1$  свободны, а на торцах заданы какие-либо граничные условия. Решение соответствующей краевой задачи будем искать в виде разложений по функциям Фадля-Папковича [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k \sigma_x(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k \sigma_y(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k \tau_{xy}(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x},\end{aligned}\tag{1}$$

Поступила 04.02.2013

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код-проекта 13-08-00118).

$$U(x, y) = C_2 y + \sum_{k=1}^{\infty} a_k U(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} U(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x},$$

$$V(x, y) = -(C_1 + C_2 x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k V(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} V(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x} \quad (Re \lambda_k < 0).$$

$U(x, y) = Gu(x, y)$ ,  $V(x, y) = Gv(x, y)$ , где  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  – соответственно продольное и поперечное перемещения,  $G$  – модуль сдвига. Элементарные решения не учтены в формулах (1), за исключением постоянных  $C_1, C_2$ , соответствующих жестким смещениям.

Функции Фадля-Папковича в случае обратно-симметричной деформации полуполосы имеют вид ( $\mu$  – коэффициент Пуассона):

$$\sigma_x(\lambda_k, y) = (1 + \mu)\lambda_k \{ (2 \sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \sin \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y \},$$

$$\sigma_y(\lambda_k, y) = (1 + \mu)\lambda_k^2 \{ \cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y \},$$

$$\tau_{xy}(\lambda_k, y) = (1 + \mu)\lambda_k \{ (\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y \}, \quad (2)$$

$$U(\lambda_k, y) = \left( \sin \lambda_k - \frac{1 + \mu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \sin \lambda_k y + \frac{1 + \mu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y,$$

$$V(\lambda_k, y) = - \left( \frac{1 - \mu}{2} \sin \lambda_k + \frac{1 + \mu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1 + \mu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y,$$

причем  $\tau_{xy}(\lambda_k, \pm 1) = \sigma_y(\lambda_k, \pm 1) = 0$ ,  $\lambda_k$  – все комплексные нули целой функции

$$L(\lambda) = \lambda - \sin \lambda \cos \lambda. \quad (3)$$

Для них можно установить следующую асимптотическую формулу:

$$\lambda_k \approx (k + 2)\pi - \frac{3\pi}{4} + \frac{i}{2} \ln[4(k + 2)\pi - 3\pi]. \quad (4)$$

Удовлетворяя с помощью выражений (1) граничным условиям, заданным на торце полуполосы, приходим к задаче определения коэффициентов  $a_k$  из разложений по функциям Фадля-Папковича, например (элементарное решение можно считать известным):

$$\begin{aligned} \sigma(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) + \overline{a_k} \sigma_x(\overline{\lambda_k}, y), \\ \tau(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) + \overline{a_k} \tau_{xy}(\overline{\lambda_k}, y). \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты  $a_k$  определяются отсюда в явном виде с помощью биортогональных систем функций, которые находятся из решения уравнений:

$$\begin{aligned} a) \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(\lambda, y) X_k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, & b) \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y(\lambda, y) Y_k(y) dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, \\ c) \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}(\lambda, y) T_k(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, & d) \int_{-\infty}^{\infty} U(\lambda, y) U_k(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, \\ e) \int_{-\infty}^{\infty} V(\lambda, y) V_k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, & \lambda_k \in \Lambda \quad (k \geq 1). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\sigma_x(\lambda, y)$ ,  $\sigma_y(\lambda, y)$  и т. д. – порождающие функции. Соответствующие финитные части функций биортогональных систем определяются так, как описано в статье [2]. Окончательные формулы для них таковы ( $|y| \leq 1$ ):

$$\begin{aligned}
 a) \quad x_k(y) &= \frac{1}{2(1+\mu)\lambda_k^2} \left( \frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k} - y \right); & b) \quad y_k(y) &= \frac{-1}{2(1+\mu)} \frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k}; \\
 c) \quad t_k(y) &= \frac{1}{2(1+\mu)\lambda_k} \frac{\cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k}; & d) \quad u_k(y) &= \frac{1}{(1+\mu)} \frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k}; \\
 e) \quad v_k(y) &= \frac{1}{(1+\mu)\lambda_k} \left( \frac{\cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k} - \frac{1}{\lambda_k} \right).
 \end{aligned} \tag{7}$$

Финитные части функций биортогональных систем, отвечающих нулевым корням характеристического уравнения  $\lambda - \sin \lambda \cos \lambda = 0$ , выглядят так ( $|y| \leq 1$ ):

$$x_0(y) = \frac{3}{2}y, \quad u_0(y) = \frac{3}{2(1+\mu)}y, \quad v_0(y) = \frac{3}{4(1+\mu)}(y^2 - 1/3). \tag{8}$$

Они находятся из следующих соотношений, аналогичных (6):

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(\lambda, y) X_0(y) dy &= 3(1+\mu)L(\lambda); \\
 \int_{-\infty}^{\infty} U(\lambda, y) U_0(y) dy &= \frac{3L(\lambda)}{2\lambda}; \\
 \int_{-\infty}^{\infty} V(\lambda, y) V_0(y) dy &= \frac{-3L(\lambda)}{2\lambda^2}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Правые части этих равенств выбраны таким образом, что при  $\lambda \rightarrow 0$  из (9) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} y X_0(y) dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} y U_0(y) dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} V_0(y) dy = 1. \tag{10}$$

Функции (8) получаются отсюда так же, как и функции (7). Найдем, например, функцию  $x_0(y)$ . Полагая в первом равенстве (9)  $\lambda = k\pi$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), получим выражение для определения  $x_0(y)$ :

$$\int_{-1}^1 x_0(y) \sin k\pi y dy = \frac{-3(-1)^k}{k\pi}.$$

Для решения краевых задач с заданными разрывами перемещений или напряжений потребуются функции [2]

$$\Phi(\lambda_k, y) = \Phi^S(\lambda_k, y) + i\Phi^C(\lambda_k, y), \quad \Psi(\lambda_k, y) = \Psi^S(\lambda_k, y) + i\Psi^C(\lambda_k, y), \tag{11}$$

$$F(\lambda_k, y) = 2\Phi(\lambda_k, y) - \Psi(\lambda_k, y) = F^S(\lambda_k, y) + iF^C(\lambda_k, y),$$

где

$$\Phi^S(\lambda_k, y) = -\tau_{xy}(\lambda_k, y), \quad \Phi^C(\lambda_k, y) = \frac{1}{2}[\sigma_y(\lambda_k, y) - \sigma_x(\lambda_k, y)],$$

$$\Psi^S(\lambda_k, y) = (1+\mu) \frac{dU(\lambda_k, y)}{dy} - \frac{3+\mu}{2} \tau_{xy}(\lambda_k, y), \quad \Psi^C(\lambda_k, y) = \sigma_y(\lambda_k, y),$$

$$F^S(\lambda_k, y) = - \left[ (1+\mu) \frac{dU(\lambda_k, y)}{dy} + \frac{1-\mu}{2} \tau_{xy}(\lambda_k, y) \right], \quad F^C(\lambda_k, y) = -\sigma_x(\lambda_k, y)$$

или на основании (2)

$$\Phi^S(\lambda_k, y) = -(1+\mu)\lambda_k \{ (\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y \},$$

$$\begin{aligned}\Phi^C(\lambda_k, y) &= (1 + \mu)\lambda_k\{(\lambda_k \cos \lambda_k - \sin \lambda_k) \sin \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y\}, \\ \Psi^S(\lambda_k, y) &= (1 + \mu)\lambda_k^2\{\cos \lambda_k \cos \lambda_k y + y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y\}, \\ \Psi^C(\lambda_k, y) &= (1 + \mu)\lambda_k^2\{\cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y\},\end{aligned}\tag{12}$$

$$F^S(\lambda_k, y) = -(1 + \mu)\lambda_k\{(2 \sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y\},$$

$$F^C(\lambda_k, y) = (1 + \mu)\lambda_k\{(\lambda_k \cos \lambda_k - 2 \sin \lambda_k) \sin \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y\}.$$

Для функций  $\Phi(\lambda_k, y)$  и  $\Psi(\lambda_k, y)$  выполняется равенство

$$\frac{d\Psi(\lambda_k, y)}{dy} = i\lambda_k\Phi(\lambda_k, y).\tag{13}$$

Функции, биортогональные к функциям Фадля-Папковича  $\Phi(\lambda_k, y)$ ,  $\Psi(\lambda_k, y)$  и  $F(\lambda_k, y)$ , определяются как решения уравнений

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda, y)\phi_\nu(y)dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\lambda, y)\psi_\nu(y)dy = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, y)f_\nu(y)dy &= \frac{\lambda_\nu L(\lambda)}{\lambda(\lambda - \lambda_\nu)}, \quad \lambda_\nu \in \Lambda \quad (\nu \geq 1).\end{aligned}\tag{14}$$

Обозначив здесь

$$\begin{aligned}\phi_\nu(y) &= \phi_\nu^S(y) - i\phi_\nu^C(y), \quad \psi_\nu(y) = \psi_\nu^S(y) - i\psi_\nu^C(y), \\ f_\nu(y) &= f_\nu^S(y) - if_\nu^C(y),\end{aligned}\tag{15}$$

получим следующие уравнения для определения  $\phi_\nu(y)$ ,  $\psi_\nu(y)$ ,  $f_\nu(y)$ :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^S(\lambda, y)\phi_\nu^S(y)dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_\nu^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^C(\lambda, y)\phi_\nu^C(y)dy = \frac{\lambda_\nu L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_\nu^2}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^S(\lambda, y)\psi_\nu^S(y)dy &= \frac{\lambda\lambda_\nu L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_\nu^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^C(\lambda, y)\psi_\nu^C(y)dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_\nu^2}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} F^S(\lambda, y)f_\nu^S(y)dy &= \frac{\lambda_\nu L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_\nu^2)}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} F^C(\lambda, y)f_\nu^C(y)dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_\nu^2}.\end{aligned}\tag{16}$$

Ниже приведены аналогичные (7) формулы для финитных частей этих функций ( $|y| \leq 1$ ) (для них оставлены прежние обозначения).

$$\begin{aligned}\phi_k^S(y) &= \frac{\sin \lambda_k y}{2(1 + \mu) \sin \lambda_k}, \quad \phi_k^C(y) = \frac{-\cos \lambda_k y}{2(1 + \mu) \sin \lambda_k}, \quad \psi_k^S(y) = \frac{\lambda_k \sin \lambda_k y}{2(1 + \mu) \sin \lambda_k}, \\ \psi_k^C(y) &= \frac{1}{2(1 + \mu)} \left\{ \frac{-\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k} + [\delta(y + 1) + \delta(y - 1)] \right\},\end{aligned}\tag{17}$$

$$f_k^S(y) = \frac{-1}{2(1 + \mu)\lambda_k} \left\{ \frac{\cos \lambda_k y}{\lambda_k \sin \lambda_k} + \frac{1}{2} \left( y^2 - \frac{1}{3} \right) \right\}, \quad f_k^C(y) = \frac{-1}{2(1 + \mu)\lambda_k^2} \left\{ \frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k} - y \right\}.$$

Нулевым корням характеристического уравнения отвечают следующие финитные функции (в том случае, когда они есть):

$$\phi_0^C(y) = \frac{3}{4}y, \quad \psi_0^S(y) = \frac{3}{8}\left(y^2 - \frac{1}{3}\right), \quad f_0^C(y) = \frac{-3}{2}y, \quad f_0^S(y) = \frac{-3}{8}\left(y^2 - \frac{1}{3}\right). \quad (18)$$

Они определяются из следующих соотношений, подобных (6):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^C(\lambda, y)\phi_0^C(y)dy &= -\frac{3(1+\mu)L(\lambda)}{2}, & \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^S(\lambda, y)\psi_0^S(y)dy &= \frac{3(1+\mu)L(\lambda)}{2\lambda}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} F^C(\lambda, y)f_0^C(y)dy &= -3(1+\mu)L(\lambda), & \int_{-\infty}^{\infty} F^S(\lambda, y)f_0^S(y)dy &= -\frac{3(1+\mu)L(\lambda)}{2\lambda}. \end{aligned} \quad (19)$$

Дадим формальные примеры разложений Лагранжа по всем рассмотренным выше функциям Фадля-Папковича. В общем случае эти разложения выглядят так:

$$\begin{aligned} U(y) &= u_0y + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{\lambda_k M_k} U(\lambda_k, y) + \frac{\overline{u_k}}{\lambda_k M_k} U(\overline{\lambda_k}, y), \\ V(y) &= v_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{M_k} V(\lambda_k, y) + \frac{\overline{v_k}}{M_k} V(\overline{\lambda_k}, y), \\ \sigma_x(y) &= x_0y + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{M_k} \sigma_x(\lambda_k, y) + \frac{\overline{x_k}}{M_k} \sigma_x(\overline{\lambda_k}, y), \\ \sigma_y(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{\lambda_k^2 M_k} \sigma_y(\lambda_k, y) + \frac{\overline{y_k}}{\lambda_k^2 M_k} \sigma_y(\overline{\lambda_k}, y), \\ \tau(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k}{\lambda_k M_k} \tau_{xy}(\lambda_k, y) + \frac{\overline{\tau_k}}{\lambda_k M_k} \tau_{xy}(\overline{\lambda_k}, y), \\ \Phi^S(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k^S}{\lambda_k M_k} \Phi^S(\lambda_k, y) + \frac{\overline{\phi_k^S}}{\lambda_k M_k} \Phi^S(\overline{\lambda_k}, y), \\ \Phi^C(y) &= \phi_0^C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k^C}{\lambda_k M_k} \Phi^C(\lambda_k, y) + \frac{\overline{\phi_k^C}}{\lambda_k M_k} \Phi^C(\overline{\lambda_k}, y), \\ \Psi^S(y) &= \psi_0^S + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k^S}{\lambda_k^2 M_k} \Psi^S(\lambda_k, y) + \frac{\overline{\psi_k^S}}{\lambda_k^2 M_k} \Psi^S(\overline{\lambda_k}, y), \\ \Psi^C(y) &= \psi_0^C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k^C}{\lambda_k^2 M_k} \Psi^C(\lambda_k, y) + \frac{\overline{\psi_k^C}}{\lambda_k^2 M_k} \Psi^C(\overline{\lambda_k}, y), \\ F^S(y) &= f_0^S + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k^S}{M_k} F^S(\lambda_k, y) + \frac{\overline{f_k^S}}{M_k} F^S(\overline{\lambda_k}, y), \\ F^C(y) &= f_0^C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k^C}{M_k} F^C(\lambda_k, y) + \frac{\overline{f_k^C}}{M_k} F^C(\overline{\lambda_k}, y). \end{aligned} \quad (20)$$

Знаменатели в этих формулах получаются как значения правых частей соответствующих выражений (6), (16) при  $\lambda = \lambda_k$ , а  $M_k = \sin^2 \lambda_k / \lambda_k$ .

Условимся некоторую функцию  $f(y)$  называть самоуравновешенной (СУ) и самоуравновешенной по моменту (СУМ), если для нее соответственно  $\int_{-1}^1 f(y)dy = 0$  и  $\int_{-1}^1 f(y)ydy = 0$ .

1. *Разложения по  $U(\lambda_k, y)$ .* Раскладываемая функция  $U(y) = y$ . Она не СУМ. В этом случае

$$u_k = \int_{-1}^1 y u_k(y) dy = \int_{-1}^1 y \frac{1}{(1+\mu)} \frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k} dy = \frac{2(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k)}{(1+\mu)\lambda_k^2 \sin \lambda_k},$$

$$u_0 = \int_{-1}^1 y u_0(y) dy = \int_{-1}^1 y \frac{3}{2(1+\mu)} y dy = \frac{1}{1+\mu}.$$

Пусть СУМ раскладываемая функция  $U(y) = y(y^2 - 3/5)$ . Коэффициенты ее разложения в ряд Лагранжа равны

$$u_k = \int_{-1}^1 y(y^2 - 3/5) u_k(y) dy = \frac{4[\lambda_k \cos \lambda_k (15 - \lambda_k^2) - \sin \lambda_k (15 - 6\lambda_k^2)]}{5(1+\mu)\lambda_k^4 \sin \lambda_k},$$

$$u_0 = \int_{-1}^1 y(y^2 - 3/5) u_0(y) dy = 0.$$

Не СУМ раскладываемая функция  $U(y) = y$ . Тогда

$$u_k = \int_{-1}^1 y u_k(y) dy = \int_{-1}^1 y \frac{1}{(1+\mu)} \frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k} dy = \frac{2(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k)}{(1+\mu)\lambda_k^2 \sin \lambda_k}, \quad (21)$$

$$u_0 = \int_{-1}^1 y u_0(y) dy = \int_{-1}^1 y \frac{3}{2(1+\mu)} y dy = \frac{1}{1+\mu}.$$

Соответствующий ряд Лагранжа с коэффициентами (21) будет таким:

$$y = \frac{y}{1+\mu} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{\lambda_k M_k} U(\lambda_k, y) + \frac{\overline{u_k}}{\lambda_k M_k} U(\overline{\lambda_k}, y) \quad (|y| < 1).$$

Еще одно разложение. Не СУМ функция  $U(y) = \sin(\pi y)$ . Здесь

$$u_k = \int_{-1}^1 \sin(\pi y) \frac{1}{(1+\mu)} \frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k} dy = \frac{2\pi}{(1+\mu)(\lambda_k^2 - \pi^2)},$$

$$u_0 = \int_{-1}^1 \sin(\pi y) \frac{3}{2(1+\mu)} y dy = \frac{3}{\pi(1+\mu)}.$$

2. *Разложения по  $V(\lambda_k, y)$ .* Числа  $v_k$  и  $v_0$  находятся по формулам:

$$v_k = \int_{-1}^1 V(y) v_k(y) dy = \int_{-1}^1 V(y) \frac{1}{(1+\mu)\lambda_k} \left( \frac{\cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k} - \frac{1}{\lambda_k} \right) dy, \quad (22)$$

$$v_0 = \int_{-1}^1 V(y) v_0(y) dy = \int_{-1}^1 V(y) \frac{3}{4(1+\mu)} \left( y^2 - \frac{1}{3} \right) dy.$$

Так как функции  $v_0(y)$ ,  $v_k(y)$  СУ, то можно считать, что раскладываемая функция  $V(y)$  тоже СУ. В противном случае к разложению Лагранжа нужно будет добавить легко определяемую постоянную.

Пусть раскладываемая функция  $V(y) = \operatorname{sgn}(y) \sin(2\pi y)$ . Учитывая, что она СУ, получим:

$$v_k = 2 \int_0^1 \sin(2\pi y) \frac{1}{(1+\mu)} \frac{\cos \lambda_k y}{\lambda_k \sin \lambda_k} dy = \frac{4\pi(\cos \lambda_k - 1)}{(1+\mu)\lambda_k \sin \lambda_k (\lambda_k^2 - 4\pi^2)},$$

$$v_0 = 2 \int_0^1 \sin(2\pi y) \frac{3}{4(1+\mu)} \left(y^2 - \frac{1}{3}\right) dy = \frac{-3}{4(1+\mu)}.$$

Другой пример. СУ функция  $V(y) = 5y^4 - \frac{30}{7}y^2 + \frac{3}{7}$  ортогональна к параболу  $y^2 - 1/3$ . Поэтому в ее разложении Лагранжа (20)  $v_0 = 0$ .

Рассмотрим не СУ раскладываемую функцию  $y^2$ . Сделаем ее СУ, положив  $V(y) = y^2 - 1/3$ . По формулам (22) найдем

$$v_k = 2 \int_0^1 \left(y^2 - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{(1+\mu)} \frac{\cos \lambda_k y}{\lambda_k \sin \lambda_k} dy = \frac{4[3\lambda_k \cos \lambda_k + (\lambda_k^2 - 3) \sin \lambda_k]}{3(1+\mu)\lambda_k^4 \sin \lambda_k}, \quad (23)$$

$$v_0 = 2 \int_0^1 \left(y^2 - \frac{1}{3}\right) \frac{3}{4(1+\mu)} \left(y^2 - \frac{1}{3}\right) dy = \frac{2}{15(1+\mu)}.$$

Искомое разложение с коэффициентами (23) будет иметь вид

$$y^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{15(1+\mu)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{M_k} V(\lambda_k, y) + \frac{\bar{v}_k}{M_k} V(\bar{\lambda}_k, y) \quad (|y| < 1).$$

3. *Разложения по  $\sigma_x(\lambda_k, y)$  (или  $F^C(\lambda_k, y)$ ).* Эти функции СУМ. Поэтому будем рассматривать только СУМ раскладываемые функции. Например,  $\sigma_x(y) = y(y^2 - 3/5)$ . Тогда имеем

$$x_0 = 0, \quad x_k = 2 \int_0^1 y \left(y^2 - \frac{3}{5}\right) \frac{1}{2(1+\mu)} \frac{\sin \lambda_k y}{\lambda_k^2 \sin \lambda_k} dy.$$

Подставляя найденные значения в соответствующие ряды (20), получим нужные разложения.

4. *Разложения по  $\sigma_y(\lambda_k, y)$  (или  $\Psi^C(\lambda_k, y)$ ).* Пусть, например, раскладываемая функция  $\sigma_y(y) = (y^3 - y)/3$ . Коэффициенты ее разложения в ряд Лагранжа равны

$$y_k = \int_{-1}^1 \frac{y^3 - y}{3} \frac{-1}{2(1+\mu)} \frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k} dy = \frac{-2[3\lambda_k \cos \lambda_k + (\lambda_k^2 - 3) \sin \lambda_k]}{3(1+\mu)\lambda_k^4 \sin \lambda_k}.$$

Соответствующий ряд (20) равномерно сходится к  $\sigma_y(y)$  на всем отрезке  $[-1, 1]$ .

5. *Разложения по  $\tau_{xy}(\lambda_k, y)$  (или  $\Phi^S(\lambda_k, y)$ ).* Эти функции СУ. Поэтому будем рассматривать разложения в ряд Лагранжа только СУ функций. Например,  $\tau(y) = y^2 - 1/3$ . Можно проверить, что в этом случае  $\tau_k = -y_k$ .

6. *Разложения по  $\Phi^C(\lambda_k, y)$ .* Если раскладываемая функция  $\Phi^C(y)$  СУМ, то

$$\phi_0^C = 0, \quad \phi_k^C = \int_{-1}^1 \Phi^C(y) \frac{-1}{2(1+\mu)} \frac{\sin \lambda_k y}{\lambda_k \sin \lambda_k} dy.$$

Если нет, то ее нужно сделать СУМ, добавив к ней  $Ay$  ( $A$  - некоторая постоянная) и  $(-Ay)$  к сумме ряда. Это позволяет улучшить сходимость ряда Лагранжа.

7. *Разложения по  $\Psi^S(\lambda_k, y)$ .* Пусть, например, раскладываемая функция  $\Psi^S(y) = y^2 - 1/3$ . Тогда

$$\psi_k^S = \int_{-1}^1 \left( y^2 - \frac{1}{3} \right) \frac{-1}{2(1+\mu)} \frac{\cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k} dy = \frac{-2[3\lambda_k \cos \lambda_k + (\lambda_k^2 - 3) \sin \lambda_k]}{3(1+\mu)\lambda_k^3 \sin \lambda_k},$$

$$\psi_0^S = \int_{-1}^1 \frac{3}{8} \left( y^2 - \frac{1}{3} \right) \left( y^2 - \frac{1}{3} \right) dy = \frac{1}{15}.$$

8. *Разложения по  $F^S(\lambda_k, y)$ .* Пусть раскладываемая функция  $F^S(u) = 5y^4$ . Сделаем ее СУ и ортогональной к функции  $y^2 - 1/3$ , добавив к ней функцию  $3(1 - 10y^2)/7$ . Тогда получим

$$f_0^S = 0, \quad f_k^S = \int_{-1}^1 \left( 5y^4 - \frac{30}{7}y^2 + \frac{3}{7} \right) \frac{-1}{2(1+\mu)} \frac{\cos \lambda_k y}{\lambda_k^2 \sin \lambda_k} dy. \quad (24)$$

Соответствующее разложение с коэффициентами (24) имеет такой вид:

$$5y^4 = \left( \frac{30}{7}y^2 - \frac{3}{7} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k^S}{M_k} F^S(\lambda_k, y) + \frac{\overline{f_k^S}}{M_k} F^S(\overline{\lambda_k}, y) \quad (|y| < 1).$$

**Результаты исследований и их обсуждение.** Выписаны интегральные соотношения для определения систем функций, биортогональных к функциям Фадля-Папковича, возникающим при решении обратно-симметричной краевой задачи теории упругости в полуполосе. Получены явные формулы для биортогональных функций. Даны примеры разложений по различным системам функций Фадля-Папковича. Коэффициенты разложений при этом определяются в простом явном виде. Рассмотрены особенности разложений в ряды Лагранжа. В частности, особое внимание уделено полиномиальным слагаемым, входящим в состав разложений по системам функций Фадля-Папковича.

**Резюме.** Разложения Лагранжа по функциям Фадля-Папковича служат основой при решении краевых задач теории упругости в полуполосе или в прямоугольнике. Опираясь на полученные результаты, можно построить точные аналитические решения различных обратно-симметричных задач подобно тому, как это было сделано в статье [2] для случая симметричной деформации.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коваленко, М. Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям / М. Д. Коваленко // Доклады РАН. – 1997. – Т. 352. – № 4. – С. 480–482.  
 [2] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля-Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. МТТ. – 2011. – № 5. – С. 78–98.

Коваленко Михаил Денисович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Московский государственный открытый университет имени В. С. Черномырдина, г. Москва

e-mail: pmdekanat@gmail.com

Меньшова Ирина Владимировна,

аспирант кафедры высшей и прикладной математики, Московский государственный открытый университет имени В. С. Черномырдина, г. Москва

e-mail: pmdekanat@gmail.com



*M. D. Kovalenko, I. V. Menshova*

**THE LAGRANGE EXPANSIONS IN FADLE-PAPKOVICH FUNCTIONS  
FOR ANTISYMMETRIC BOUNDARY VALUE PROBLEM  
OF THE ELASTICITY THEORY IN THE RECTANGULAR SEMI-STRIP**

*V. Chernomyrdin Moscow State Open University*

**Abstract.** The Lagrange expansions in Fadle-Papkovich functions are considered. These functions are typical for an antisymmetric boundary value problem of the elasticity theory in the rectangular semi-strip.

**Keywords:** antisymmetric boundary-value problem, Fadle-Papkovich functions, Lagrange expansions.

**REFERENCES**

[1] *Kovalenko, M. D.* Lagrange expansion and nontrivial representations of zero in homogeneous solutions / M. D. Kovalenko // Reports of RAS. – 1997. – Vol. 352. – No 4. – P. 480–482.

[2] *Kovalenko, M. D.* Expansion in terms of functions Fadl-Papkovich in the band. Fundamentals of the theory / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya // News RAS. MRB. – 2011. – No 5. – P. 78–98.

*Kovalenko, Mikhail Denisovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of Higher and Applied Mathematics,  
V. Chernomyrdin Moscow State Open University, Moscow*

**e-mail:** pmdekanat@gmail.com

*Menshova, Irina Vladimirovna*

*Postgraduate Student, Department of Higher and Applied Mathematics, V. Chernomyrdin Moscow  
State Open University, Moscow*

**e-mail:** pmdekanat@gmail.com

Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко

## ШЕСТЬ ВАРИАНТОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕКТОРА ИНТЕНСИВНОСТИ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Тулльский государственный университет

**Аннотация.** Показано, что векторное пространство главных напряжений состоит из шести независимых сегментов. Отсюда следует шесть вариантов представления вектора напряжения в трехмерном векторном пространстве главных напряжений.

**Ключевые слова:** векторное пространство главных напряжений, ранжированные главные напряжения, инварианты, параметр Лоде.

УДК: 539.1

1. Деформируемое твердое тело отнесем к лабораторной системе декартовых координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Напряженное состояние элемента сплошной среды характеризуется симметричным тензором напряжений  $\sigma_{ij}$ . Если известны компоненты тензора напряжения  $\sigma_{ij}$ , то значения главных напряжений  $\lambda$  находятся посредством решения характеристического уравнения [1], [2], [3]

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0, \quad (1.1)$$

где

$$I_1 = \sigma_{ii}, \quad I_2 = (\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj})/2, \quad I_3 = |\sigma_{ij}| \quad (1.2)$$

– первый, второй и третий инварианты тензора напряжения.

Решая кубическое уравнение (1.1) найдем значения ранжированных напряжений

$$\sigma_{\max}, \quad \sigma_{\text{int}}, \quad \sigma_{\min},$$

где  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\text{int}}$ ,  $\sigma_{\min}$  – максимальное (maximal), промежуточное (intermediate) и минимальное (minimal) главное напряжение. Условие ранжирования задается неравенством  $\sigma_{\max} \geq \sigma_{\text{int}} \geq \sigma_{\min}$ .

**Пример 1.** Пусть известны компоненты тензора напряжений  $\sigma_{11} = 96.1$ ,  $\sigma_{22} = 73.18$ ,  $\sigma_{33} = 1.64$ ,  $\sigma_{12} = 27.78$ ,  $\sigma_{13} = -21.66$ ,  $\sigma_{23} = 36.44$ . Напряжения отнесены к величине  $\sigma = 1$  МПа.

По формулам (1.2) вычислим  $I_1 = 170.92$ ,  $I_2 = -4741.46$ ,  $I_3 = -195526.6$ . Решая уравнение (1.1), получим

$$\sigma_{\max} = 114.75, \quad \sigma_{\text{int}} = 78, \quad \sigma_{\min} = -21.84. \quad (1.3)$$

Поскольку значениям ранжированных напряжений соответствуют шесть различных сочетаний главных напряжений

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \quad \sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3, \quad \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1, \quad \sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1, \quad \sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2, \quad \sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2, \quad (1.4)$$

то по результатам решения уравнения (1.1) имеется шесть вариантов представления вектора напряжений в векторном пространстве главных напряжений.

2. Проекции главных напряжений на девиаторную плоскость обозначим  $\sigma'_i = \sqrt{2/3}\sigma_i$ . Положительно направленные проекции главных осей  $o\sigma'_i$  расположены на девиаторной плоскости под углом  $2\pi/3$ .

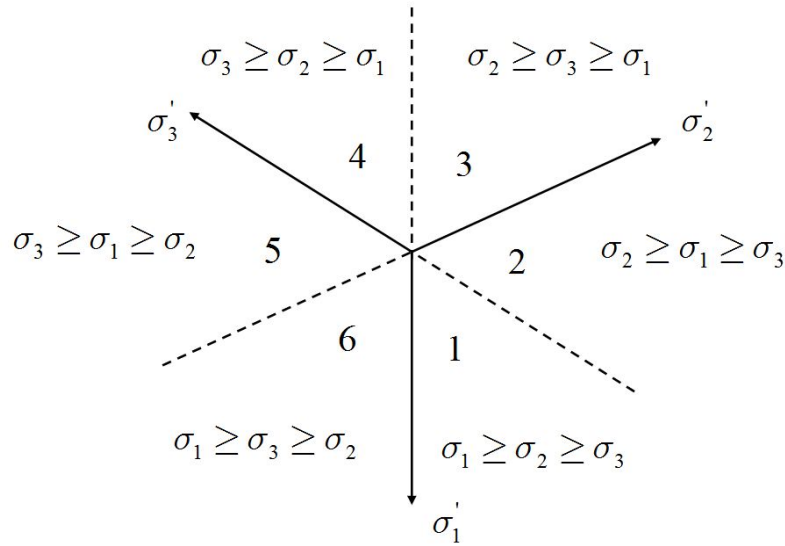


Рис. 1

Если через ось гидростатического давления и направления главных осей провести плоскости, то пространство главных напряжений разделится на шесть сегментов с раствором угла  $\pi/3$ , а девиаторная плоскость, соответственно, разделится на шесть равных секторов. Биссектриса каждого из секторов является линией сдвига. Арабскими цифрами ( $n = 1, \dots, 6$ ) введем нумерацию секторов (сегментов). Отсчет секторов будем проводить против хода часовой стрелки от оси  $o\sigma'_1$ .

В каждом из сегментов под номером  $n$  связь между неупорядоченными главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и главными ранжированными напряжениями  $\sigma_{\max}, \sigma_{int}, \sigma_{\min}$  представлена в виде таблицы 1.

Таблица 1

**Зависимости между ранжированными и неупорядоченными главными напряжениями**

$n$	Неравенства	$\sigma_{\max}$	$\sigma_{int}$	$\sigma_{\min}$
1	$\sigma_1^{(1)} \geq \sigma_2^{(1)} \geq \sigma_3^{(1)}$	$\sigma_1^{(1)}$	$\sigma_2^{(1)}$	$\sigma_3^{(1)}$
2	$\sigma_2^{(2)} \geq \sigma_1^{(2)} \geq \sigma_3^{(2)}$	$\sigma_2^{(2)}$	$\sigma_1^{(2)}$	$\sigma_3^{(2)}$
3	$\sigma_2^{(3)} \geq \sigma_3^{(3)} \geq \sigma_1^{(3)}$	$\sigma_2^{(3)}$	$\sigma_3^{(3)}$	$\sigma_1^{(3)}$
4	$\sigma_3^{(4)} \geq \sigma_2^{(4)} \geq \sigma_1^{(4)}$	$\sigma_3^{(4)}$	$\sigma_2^{(4)}$	$\sigma_1^{(4)}$
5	$\sigma_3^{(5)} \geq \sigma_1^{(5)} \geq \sigma_2^{(5)}$	$\sigma_3^{(5)}$	$\sigma_1^{(5)}$	$\sigma_2^{(5)}$
6	$\sigma_1^{(6)} \geq \sigma_3^{(6)} \geq \sigma_2^{(6)}$	$\sigma_1^{(6)}$	$\sigma_3^{(6)}$	$\sigma_2^{(6)}$

Так как пространство главных напряжений состоит из шести независимых сегментов, то в векторном пространстве главных напряжений имеется шесть вариантов представления вектора напряжений  $\vec{\Sigma}$

$$\vec{\Sigma}^{(n)} = \vec{\sigma}_1^{(n)} + \vec{\sigma}_2^{(n)} + \vec{\sigma}_3^{(n)}.$$

3. Рассмотрим тригонометрическую форму решения уравнения (1.1) [3]

$$\sigma_1 = \sigma + \sqrt{2/3}\Sigma_d \cos \phi_\sigma, \quad \sigma_{2,3} = \sigma + \sqrt{2/3}\Sigma_d \cos(\phi_\sigma \mp 2\pi/3), \quad (3.1)$$

где  $\sigma = I_1/3$  – гидростатическое давление,  $\Sigma_d = \sqrt{I_2 + I_1^2/3}$  – модуль девиаторных напряжений,  $\phi_\sigma$  – фаза тензора девиаторных напряжений. Из соотношений (3.1) следует выражение для вычисления фазового инварианта [1]

$$\cos 3\phi_\sigma = (2I_1^3 + 9I_1I_2 + 27I_3)/[2(I_1^2 + 3I_2)^{3/2}]. \quad (3.2)$$

Для вычисления фазы воспользуемся тождеством

$$\cos^3 \phi_\sigma - 0.75 \cos \phi_\sigma - 0.25 \cos 3\phi_\sigma = 0. \quad (3.3)$$

Решением уравнения (3.3) являются три значения функции  $\cos \phi_\sigma$ :  $(\cos \phi_\sigma)_I$ ,  $(\cos \phi_\sigma)_{II}$ ,  $(\cos \phi_\sigma)_{III}$ . Поскольку функция  $\cos \phi_\sigma$  является четной, то результатом решения уравнения (3.3) будет шесть значений фаз:  $\phi_\sigma^{(1)} \leq \phi_\sigma^{(2)} \leq \dots \leq \phi_\sigma^{(6)}$ . Каждое значение фазы соответствует одному из сочетаний главных напряжений и определяет положение вектора девиаторных напряжений на девиаторной плоскости.

В соответствии с (3.1) положительное направление отсчета угла  $\phi_\sigma^{(n)}$  на девиаторной плоскости направленно в сторону против часовой стрелки от положительного направления оси  $o\sigma'_1$ .

Главные напряжения в каждом из сегментов вычисляются по формулам

$$\sigma_1^{(n)} = \sigma + \sqrt{2/3}\Sigma_d \cos \phi_\sigma^{(n)}, \quad \sigma_{2,3}^{(n)} = \sigma + \sqrt{2/3}\Sigma_d \cos(\phi_\sigma^{(n)} \mp 2\pi/3).$$

Пример 2. Для напряженного состояния, характеризующегося тензором напряжений, компоненты которого приведены в примере 1, значение фазового инварианта, вычисленного в соответствии с рекомендацией (3.2), будет  $\cos 3\phi_\sigma^{(n)} = -0.7073$ . Подставляя значение фазового инварианта в уравнение (3.3), найдем шесть значений угла  $\phi_\sigma^{(n)}$ :  $\phi_\sigma^{(1)} = 45^\circ$ ,  $\phi_\sigma^{(2)} = 75^\circ$ ,  $\phi_\sigma^{(3)} = 165^\circ$ ,  $\phi_\sigma^{(4)} = -165^\circ = 195^\circ$ ,  $\phi_\sigma^{(5)} = -75^\circ = 285^\circ$ ,  $\phi_\sigma^{(6)} = -45^\circ = 315^\circ$ .

4. Биссектриса каждого из секторов является линией сдвига. Угол между вектором  $\vec{\Sigma}_d^{(n)}$  и линией сдвига называется углом вида напряженного состояния  $\omega_\sigma$  [3], [4]. Положительное направление отсчета угла вида напряженного состояния  $\omega_\sigma$  в каждом из секторов производится от сдвиговой линии в сторону минимального напряжения.

Исследуя влияние промежуточного главного напряжения на пластическое деформирование металлов, В. Лоде [5] ввел характеристику напряженного состояния

$$\mu_\sigma = [2\sigma_2^{(1)} - \sigma_1^{(1)} - \sigma_3^{(1)}] / [\sigma_1^{(1)} - \sigma_3^{(1)}]. \quad (4.1)$$

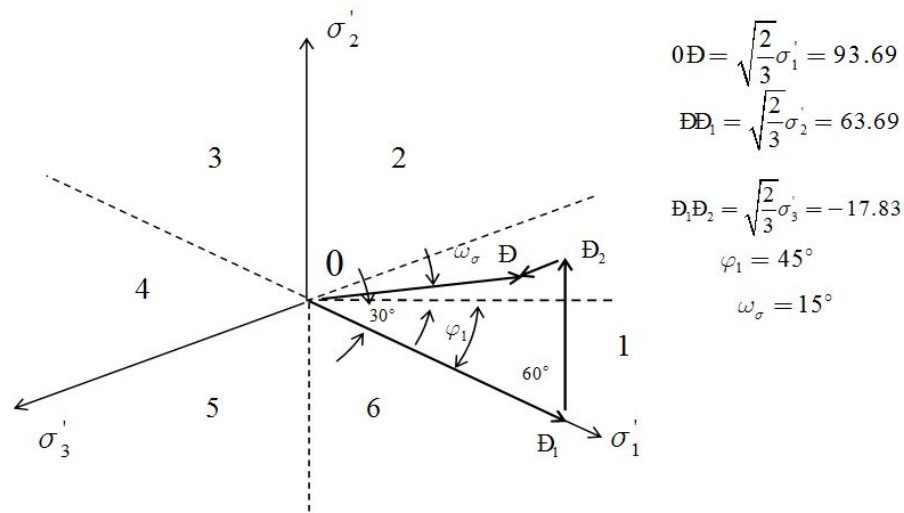
Параметр Лоде изменяется в диапазоне  $-1 \leq \mu_\sigma \leq 1$ . При одноосном напряжении  $\mu_\sigma = -1$ , при одноосном сжатии  $\mu_\sigma = 1$ , а при кручении  $\mu_\sigma = 0$ .

Для напряженного состояния, характеризующегося в первом секторе ранжированными главными напряжениями

$$\sigma_1^{(1)} = \sigma_{\max} = 114.75, \quad \sigma_2^{(1)} = \sigma_{int} = 78, \quad \sigma_3^{(1)} = \sigma_{\min} = -21.84,$$

получим  $\mu_\sigma = 0.464$ .

На рис. 2 показано графическое построение вектора интенсивности тензора девиаторных напряжений в первом секторе.



$$\begin{aligned} 0D &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma'_1 = 93.69 \\ DD_1 &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma'_2 = 63.69 \\ D_1D_2 &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma'_3 = -17.83 \\ \varphi_1 &= 45^\circ \\ \omega_\sigma &= 15^\circ \end{aligned}$$

Рис. 2.  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Зависимость между углом вида напряженного состояния и параметром Лоде записывается в виде

$$m_\sigma = tg\omega_\sigma = \mu_\sigma / \sqrt{3}. \quad (4.2)$$

Из соотношения (4.2) следует, что параметр Лоде представляет собой нормированное значение параметра вида напряженного состояния  $m_\sigma = tg\omega_\sigma$ .

Несложно показать, что в числовом примере имеем

$$\mu_\sigma = 0.464, \quad \omega_\sigma = atgm_\sigma = 60^\circ - \phi_\sigma^{(1)} = 15^\circ.$$

А. А. Ильющин [2] предложил универсальную формулу для вычисления параметра Лоде, справедливую для любого из секторов

$$\mu_\sigma = (2\sigma_{int} - \sigma_{max} - \sigma_{min}) / (\sigma_{max} - \sigma_{min}). \quad (4.3)$$

Рассмотрим второй вариант -  $\phi_\sigma = \phi_\sigma^{(2)} = 75^\circ$ . Вектор интенсивности девиаторных напряжений расположен во втором секторе. Поскольку во втором секторе  $\sigma_2^{(2)} \geq \sigma_1^{(2)} \geq \sigma_3^{(2)}$ , то из соотношений (1.3) следует

$$\sigma_2^{(2)} = \sigma_{max} = 114.75, \quad \sigma_1^{(2)} = \sigma_{int} = 78, \quad \sigma_3^{(2)} = \sigma_{min} = -21.84. \quad (4.4)$$

Параметр Лоде в секторе 2 вычисляется по формуле

$$\mu_\sigma = [2\sigma_1^{(2)} - \sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)}] / [\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)}]. \quad (4.5)$$

Для напряженного состояния, характеризующегося главными напряжениями (2.6), получим  $\mu_\sigma = 0.464$ .

Зависимость между углом вида напряженного состояния  $\omega_\sigma$  и параметром Лоде  $\mu_\sigma$  сохраняется в виде в (4.2). Тогда

$$\omega_\sigma = \text{atg}(\mu_\sigma / \sqrt{3}) = 90^\circ - \phi_\sigma^{(2)} = 15^\circ.$$

Следовательно, во втором секторе положительное направление отсчета угла  $\omega_\sigma$  задается от линии сдвига в направлении по ходу часовой стрелки.

На рис. 3 показано графическое построение вектора интенсивности тензора девиаторных напряжений во втором секторе.

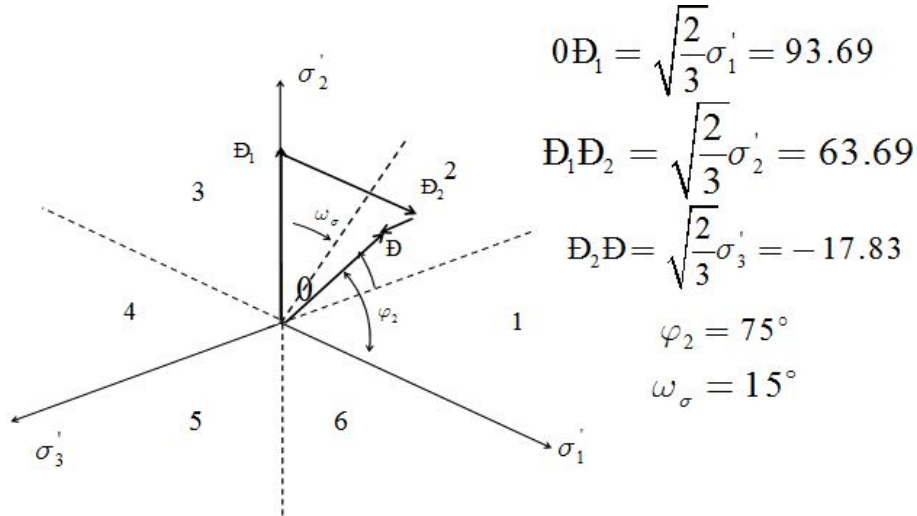


Рис. 3

Рассмотрим третий вариант -  $\phi_\sigma = \phi_\sigma^{(3)} = 165^\circ$ . Так как для третьего сектора справедливо неравенство  $\sigma_2^{(3)} \geq \sigma_3^{(3)} \geq \sigma_1^{(3)}$ , то

$$\sigma_1^{(3)} = \sigma_{min} = -21.84, \quad \sigma_2^{(3)} = \sigma_{max} = 114.75, \quad \sigma_3^{(3)} = \sigma_{int} = 78. \quad (4.6)$$

Параметр Лоде в секторе 3 вычисляется по формуле

$$\mu_\sigma = [2\sigma_3^{(3)} - \sigma_2^{(3)} - \sigma_1^{(3)}] / [\sigma_2^{(3)} - \sigma_1^{(3)}]. \quad (4.7)$$

Для напряженного состояния, характеризующегося главными напряжениями (4.6), из (4.7) получим  $\mu_\sigma = 0.464$ . Вычислим угол вида напряженного состояния

$$\omega_\sigma = \text{atg}(\mu_\sigma/\sqrt{3}) = \phi_\sigma^{(3)} - 150 = 15^\circ.$$

В третьем секторе положительное направление отсчета угла  $\omega_\sigma$  задается от линии сдвига в направлении против хода часовой стрелки.

На рис. 4 показано графическое построение вектора интенсивности тензора девиаторных напряжений в третьем секторе.

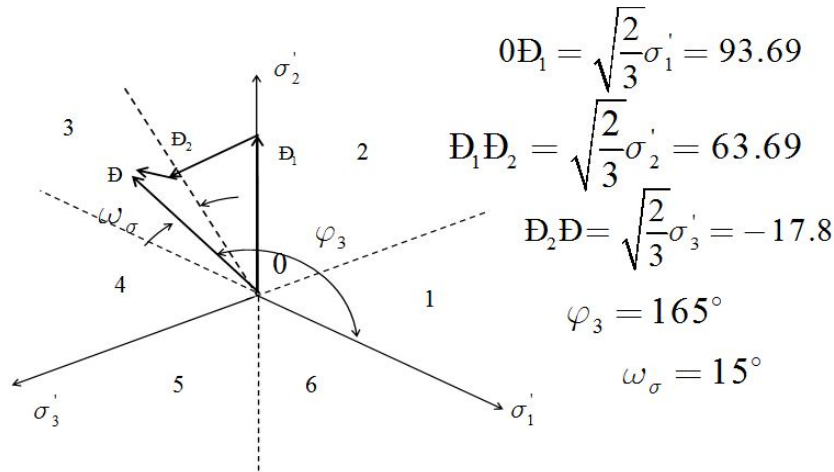


Рис. 4

В монографиях [1], [5] в формуле для вычисления параметра Лоде в секторе 3 допущена ошибка. Причем первоначально ошибка была допущена в монографии [5], а затем повторена в монографии [1]. Суть ошибки состоит в том, что в знаменателе перепутаны обозначения минимального и максимального главного напряжения.

Сопоставляя построение вектора тензора девиаторных напряжений, можно установить зависимость между фазовым инвариантом  $\phi_\sigma$  и углом вида напряженного состояния  $\omega_\sigma$  для каждого из секторов

$$\omega_\sigma = [(2n - 1)\pi/6 - \phi_\sigma^{(n)}](-1)^n$$

или

$$\phi_\sigma^{(n)} = (2n - 1)\pi/6 - (-1)^n \omega_\sigma,$$

где  $n$  – номер сектора.

Обратим внимание на то, что в нечетных секторах девиаторной плоскости положительное направление угла вида напряженного состояния  $\omega_\sigma$  совпадает с ходом часовой стрелки, а в четных секторах направлено против хода часовой стрелки.

### Выводы

1. В трехмерном векторном пространстве главных напряжений имеется шесть вариантов независимого представления вектора напряжений.
2. Положение вектора девиаторных напряжений в каждом секторе определяется углом  $\phi_\sigma^{(n)}$ .
3. Параметр Лоде  $\mu_\sigma$  является нормированным значением параметра вида напряженного состояния  $m_\sigma$ .

4. В отличие от фазы параметр Лоде для всех секторов имеет одно и то же значение.
5. Направление отсчета угла вида напряженного состояния  $\omega_\sigma$  изменяется при переходе из сектора в сектор.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Джонсон, У.* Теория пластичности для инженеров / У. Джонсон, П. Меллор. – М. : Машиностроение, 1979. – 567 с.
- [2] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.
- [3] *Лоде, В.* Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов / В. Лоде // Теория пластичности : сб. ст. – М. : Гост. издат. иностранной литературы, 1948. – С. 168–205.
- [4] *Работнов, Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела : учебное пособие для мех-мат. и физ. спец. университетов / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1988. – 711 с.
- [5] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.

*Кузнецов Евгений Евгеньевич,*

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: smithe71@yandex.ru

*Матченко Илья Николаевич,*

доктор физико-математических наук, доцент кафедры городского строительства и архитектуры, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc\_05@mail.ru

*Матченко Николай Михайлович,*

доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики пластического формоизменения, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc\_05@mail.ru



Y. Y. Kuznetsov, I. N. Mattchenko, N. M. Mattchenko

## SIX VARIANTS OF REPRESENTATION OF A VECTOR TENSOR SPACE PRINCIPAL STRESS

*Tula State University*

**Abstract.** It is shown, that the vector space of the main stress consists of six independent segments. From here follows six variants of representation of a vector of a stress in three-dimensional vector space of the main stress.

**Keywords:** vector spaces of the main stress, main arrange stress, invariants, parameter Lode.

### REFERENCES

- [1] *Johnson, W.* The theory of plasticity for engineers / W. Johnson, P. Mellor. – M. : Mechanical Engineering, 1979. – 567 p.
- [2] *Ilyushin, A. A.* Plasticity / A. A. Ilyushin. – M. ; L. : RI, 1948. – 376 p .
- [3] *Lod, V.* influence the average principal stress on the strength of the metal : Fri. Art. The theory of plasticity / B. Lode. – M. : Guest. izdat. Foreign Literature, 1948. – S. 168–205.
- [4] *Rabotnov, Y. N.* Fracture Mechanics : a textbook for mehmata . and nat . specials. Universities / Y. N. Rabotnov . – M. : Nauka, 1988 . – 711 p.
- [5] *Hill, R.* The mathematical theory of plasticity / R. Hill. – M. : GITTL, 1956 . – 407 p.

*Kuznetsov, Yevgeniy Yevgenevich*

*Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor of Department of building, building materials and designs, Tula State University, Tula*

*Mattchenko, Ilya Nikolaevich*

*Dr. of Phys. & Math. Sci., Assoc. Professor of department of building, city construction and architecture, Tula State University, Tula*

*Mattchenko, Nikolay Mihailovich*

*Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, Department of mechanics plastic forming, Tula State University, Tula*

Е. Е. Кузнецов, Н. М. Матченко

## О ПАРАМЕТРЕ ЛОДЕ

Тулский государственный университет

**Аннотация.** Рассматривается параметр вида напряженного состояния, введенный В. Лоде. Показано, что в монографиях Р. Хилла, У. Джонсона и П. Меллора, В. Г. Зубчанинова при применении этого параметра допущены ошибки.

**Ключевые слова:** главные напряжения, ранжированные главные напряжения, параметр Лоде.

УДК: 539.1

Деформируемое твердое тело отнесем к лабораторной системе декартовых координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Напряженное состояние элемента сплошной среды характеризуется тензором напряжения  $\sigma_{ij}$  или главными напряжениями  $\sigma_i$  и триэдром главных направлений. Растягивающие напряжения считаем положительными.

Рассмотрим трехмерное векторное пространство главных напряжений  $\vec{\sigma}_i$ . Пусть главные напряжения образуют правую систему координат. В векторном пространстве главных напряжений выделим девиаторную плоскость. Проекции главных напряжений на девиаторную плоскость обозначим  $\sigma'_i = \sqrt{2/3}\sigma_i$ . Положительно направленные проекции главных осей  $o\sigma'_i$  расположены на девиаторной плоскости под углом  $2\pi/3$ . Если пунктирными линиями нанести отрицательные направления осей, то девиаторная плоскость разделится на шесть равных секторов. Цифрами 1, 2, ..., 6 обозначим нумерацию секторов и в каждом из секторов укажем соотношения между главными напряжениями, записанные в виде неравенств (табл. 1).

Таблица 1

1	2	3	4	5	6
$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$	$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$	$\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1$	$\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$	$\sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2$	$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$
$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$	$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$	$\sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2$	$\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$	$\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1$	$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$
$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$	$\sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2$	$\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$	$\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1$	$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$	$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

В. Лоде, исследуя влияние промежуточного главного напряжения на пластические деформирование металлов, ввел параметр вида напряженного состояния [3]:

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \quad (1)$$

причем  $-1 \leq \mu_\sigma \leq 1$ . При одноосном растяжении  $\mu_\sigma = -1$ , при одноосном сжатии  $\mu_\sigma = 1$ , а при кручении  $\mu_\sigma = 0$ . Неравенство в соотношениях (1) показывает, что Лоде напряженное состояние отнес к сектору 1.

Введем ранжированные главные напряжения

Поступила 16.03.2013

$$\sigma_{\max} \geq \sigma_{int} \geq \sigma_{\min}, \quad (2)$$

где  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$ ,  $\sigma_{int}$ , – максимальное, минимальное и промежуточное главные напряжения. С учетом неравенства (2) параметр Лоде можно записать в виде

$$\mu_{\sigma} = \frac{2\Sigma_{int} - \Sigma_{\max} - \Sigma_{\min}}{\Sigma_{\max} - \Sigma_{\min}}.$$

В таблице 2 приведены зависимости между неупорядоченными главными напряжениями и ранжированными главными напряжениями.

**Таблица 2**

	1	2	3	4	5	6
$\sigma_{\max}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_3$	$\sigma_1$
$\sigma_{int}$	$\sigma_2$	$\sigma_1$	$\sigma_3$	$\sigma_2$	$\sigma_1$	$\sigma_3$
$\sigma_{\min}$	$\sigma_3$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_2$

В таблице 3 выписаны соотношения, определяющие параметр Лоде в каждом из секторов.

**Таблица 3**

№ сектора	1	2	3
$\mu_{\sigma}$	$\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$	$\frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3}$	$\frac{2\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}$
№ сектора	4	5	6
$\mu_{\sigma}$	$\frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_3 - \sigma_1}$	$\frac{2\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_3 - \sigma_2}$	$\frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$

В монографиях Р. Хилла [4], У. Джонсона и П. Меллора [1] параметр Лоде для сектора 3 выписан в виде

$$\mu_{\sigma} = \frac{2\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}. \quad (3)$$

Сравнивая соотношение (3) с соответствующим значением параметра Лоде в секторе 3 таблицы 3, видим, что в монографиях [1], [4] в выражении (3) допущена ошибка. Действительно, из соотношения (3) в случае одноосного сжатия ( $\sigma_{\min} = \sigma_1$ ) получим  $\mu = -1$ , а при одноосном растяжении ( $\sigma_{\max} = \sigma_2$ ) получим  $\mu = 1$ , что противоречит механическому смыслу параметра Лоде. Ошибка в соотношении (3) заключается в том, что в знаменателе перепутаны местами максимальное и минимальное главные напряжения. Причем ошибку в написании параметра Лоде первым допустил в своей монографии Р. Хилл [4], а У. Джонсон и П. Меллора затем тиражировали ее в своей монографии [1], переведенной во многих странах.

В монографии В. Г. Зубчанинова [2] для главных напряжений используются соотношения вида

$$\sigma_1 = \sigma + \sqrt{\frac{2}{3}}\tau \cos \varphi, \quad \sigma_2 = \sigma + \sqrt{\frac{2}{3}}\tau \cos \left( \varphi + \frac{2\pi}{3} \right), \quad \sigma_3 = \sigma + \sqrt{\frac{2}{3}}\tau \cos \left( \varphi - \frac{2}{3}\pi \right), \quad (4)$$

где  $\sigma = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$  – гидростатическое давление,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\tau = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$  – модуль девиатора напряжений,  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma$  – компоненты тензора девиатора напряжений,  $\varphi$  – фазовый инвариант напряжений, причем  $\phi = [ark \cos(3\sqrt{6} |s_{ij}| / \Sigma_d^3)]/3$ . Фазовый инвариант определяет ориентацию вектора интенсивности девиаторных напряжений  $\vec{\Sigma}_d$  на девиаторной плоскости.

Рассмотрим сектор 1. В этом секторе для главных напряжений справедливо неравенство  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . В соответствии с таблицей 1 параметр Лоде рассчитывается по формуле (1).

Подставляя выражения (4) в соотношение (1), установим в секторе 1 связь между параметром Лоде и фазовым инвариантом  $\varphi$ :

$$\mu_\sigma = -\sqrt{3}\operatorname{tg}(\phi + \pi/6) = \sqrt{3}\operatorname{ctg}(\phi + 2\pi/3). \quad (5)$$

В монографии [2] на рис. 2.10б и в первом абзаце на стр. 60 утверждается, что положительное направление фазового инварианта  $\varphi$  осуществляется в девиаторной плоскости от оси  $o\sigma'_1$  в направлении против часовой стрелки.

В этом случае в секторе 1 фазовый инвариант должен изменяться в диапазоне  $0 \leq \varphi \leq \pi/3$ .

Подставляя в (5) значение  $\varphi = 0$ , получим  $\mu_\sigma = -1$ . Это соответствует одноосному растяжению. При чистом сдвиге  $\varphi = \pi/6$ . И из (5) следует  $\mu_\sigma = -3$ . При одноосном сжатии  $\varphi = \pi/3$ . Из (5) следует  $\mu_\sigma = \mp\infty$ . Значения  $\mu_\sigma$  при фазовых инвариантах  $\varphi = \pi/6$  и  $\varphi = \pi/3$  противоречат механическому смыслу параметра Лоде. Это противоречие обусловлено тем, что соотношениями (4) устанавливается положительное направление отсчета фазового инварианта  $\varphi$  в девиаторной плоскости от оси  $o\sigma'_1$  в направлении по часовой стрелке, в то время как в монографии [2] на рис. 2.10 показано положительное направление против часовой стрелки. При положительном отсчете угла  $\varphi$  в направлении от оси  $o\sigma'_1$  по часовой стрелке диапазон изменения угла  $\varphi$  в секторе 1 соответствует интервалу  $5\pi/3 \leq \varphi \leq 2\pi$  или  $-\pi/3 \leq \varphi \leq 0$ .

Пусть  $\varphi = -\pi/3$  или  $\varphi = 5\pi/3$ , тогда  $\mu_\sigma = 1$ . В этом случае напряженное состояние соответствует одноосному сжатию. Положим  $\varphi = 11\pi/6$  или  $\varphi = -\pi/6$ , тогда  $\mu_\sigma = 0$  и напряженное состояние соответствует чистому сдвигу. Если  $\varphi = 2\pi$  или  $\varphi = 0$ , то  $\mu_\sigma = -1$  и напряженное состояние соответствует одноосному растяжению.

Отсюда следует, что в монографии [2] при определении положительного направления отсчета фазового инварианта  $\varphi$  допущена ошибка.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *Джонсон, У.* Теория пластичности для инженеров / У. Джонсон, П. Меллор. – М. : Машиностроение, 1979. – 567 с.

[2] *Зубчанинов, В. Г.* Механика сплошных деформируемых сред / В. Г. Зубчанинов. – Тверь : ТГТУ, Чудо, 2000. – 703 с.

[3] *Лоде, В.* Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов / В. Лоде // Теория пластичности : сб. ст. – М. : Гос. изд-во иностранной литературы, 1948. – С. 168–205.

[4] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.

*Кузнецов Евгений Евгеньевич,*

*кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: smithe71@yandex.ru*

*Матченко Николай Михайлович,*

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики пластического формоизменения, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: ekc\_05@mail.ru*

Y. Y. Kuznetsov, N. M. Mattchenko

## ABOUT PARAMETER LODE

*Tula State University*

**Abstract.** The parameter of a kind of the intense condition, entered Century Lode is considered at research of influence of an ranged main stress on plastic properties of metals. It is shown, that in monographs R. Hill's, U. Johnson's and P. Mellor's, V. Zubchaninov's at application of this parameter make mistakes.

**Keywords:** main stress, the main ranged stress, parameter Lode.

### REFERENCES

- [1] *Johnson, W.* The theory of plasticity for engineers / W. Johnson, P. Mellor. – M. : Mechanical Engineering, 1979. – 567 p.
- [2] *Zubchaninov, V. G* Mechanics of Continuous Deformable Media / V. G Zubchaninov. – Tver : TGTU, CHuDo, 2000. – 703 p.
- [3] *Lod, V.* influence the average principal stress on the strength of the metal : Fri. Art. The theory of plasticity / B. Lode. – M. : Guest. izdat. Foreign Literature, 1948. – S. 168–205.
- [4] *Hill, R.* The mathematical theory of plasticity / R. Hill. – M. : GITTL, 1956 . – 407 p.

*Kuznetsov, Yevgeniy Yevgenevich*

*Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor of Department of building, building materials and designs, Tula State University, Tula*

*Mattchenko, Nikolay Mihailovich*

*Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, Department of mechanics plastic forming, Tula State University, Tula*

## О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ФАЗОВОГО ИНВАРИАНТА ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Тулльский государственный университет

**Аннотация.** Рассмотрено трехмерное векторное пространство главных напряжений. Положение вектора интенсивности девиаторных напряжений на девиаторной плоскости задается фазовым инвариантом. Показано, что в монографиях учебного характера В. Г. Зубчанинова, Л. М. Качанова, А. А. Маркина с соавторами, В. В. Соколовского, Л. А. Толоконникова при геометрическом представлении фазового инварианта на девиаторной плоскости допущены ошибки.

**Ключевые слова:** тензор напряжения, главные напряжения, векторное пространство главных напряжений, девиаторная плоскость, вектор интенсивности девиаторных напряжений, фазовый инвариант.

УДК: 539.1

### 1. Тригонометрическая форма представления главных напряжений

Деформируемое твердое тело отнесем к лабораторной системе декартовых координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Напряженное состояние элемента сплошной среды характеризуется тензором напряжения  $\sigma_{ij}$  или главными напряжениями  $\sigma_i$  и триэдром главных направлений. Растягивающие напряжения считаем положительными.

Если известны компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , то главные напряжения можно вычислить, используя тригонометрическую форму представления главных напряжений. Рассмотрим некоторые из них. В учебных монографиях приводятся различные соотношения для вычисления главных напряжений:

– в монографии Ю. Н. Работнова [9] приведены соотношения

$$\sigma_1 = \sigma + \sqrt{\frac{2}{3}}\Sigma_d \cos \phi, \quad \sigma_2 = \sigma + \sqrt{\frac{2}{3}}\Sigma_d \cos \left( \phi - \frac{2}{3}\pi \right), \quad \sigma_3 = \sigma + \sqrt{\frac{2}{3}}\Sigma_d \cos \left( \phi + \frac{2}{3}\pi \right); \quad (1.1)$$

– в монографии Л. А. Толоконникова [11], а затем в монографиях В. Г. Зубчанинова [4] и А. А. Маркина с соавторами [8] используются зависимости

$$\sigma_1 = \sigma + \sqrt{\frac{2}{3}}\Sigma_d \cos \varphi, \quad \sigma_2 = \sigma + \sqrt{\frac{2}{3}}\Sigma_d \cos \left( \varphi + \frac{2\pi}{3} \right), \quad \sigma_3 = \sigma + \sqrt{\frac{2}{3}}\Sigma_d \cos \left( \varphi - \frac{2}{3}\pi \right); \quad (1.2)$$

– в монографии В. В. Соколовского [10], а затем Л. М. Качанова [7] приводятся соотношения

$$\sigma_1 = \sigma + \sqrt{\frac{2}{3}}\Sigma_d \cos \left( \omega - \frac{\pi}{3} \right), \quad \sigma_2 = \sigma + \sqrt{\frac{2}{3}}\Sigma_d \cos \left( \omega + \frac{\pi}{3} \right), \quad \sigma_3 = \sigma - \sqrt{\frac{2}{3}}\Sigma_d \cos \omega, \quad (1.3)$$

где  $\sigma = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$  – гидростатическое давление,  $\Sigma_d = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}$  – модуль девиатора напряжений,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma$  – компоненты тензора девиатора напряжений,  $\varphi, \varphi, \omega$  – фазовые инварианты девиатора напряжений, причем

$$\cos 3\phi = \cos 3\varphi = -\cos 3\omega = 3\sqrt{6} |S_{ij}| / \Sigma_d^3. \tag{1.4}$$

**2. Геометрическое представление фазового инварианта.** Рассмотрим трехмерное векторное пространство главных напряжений  $\vec{\sigma}_i$ . Пусть главные напряжения образуют правую систему координат. В векторном пространстве главных напряжений выделим девиаторную плоскость (рис. 2.1). Проекции главных напряжений на девиаторную плоскость обозначим  $\sigma'_i = \sqrt{2/3}\sigma_i$ . Заметим, что во многих работах, посвященных механике деформированного твердого тела [1], [2], [3], [4], [5], [6], [12], содержится некорректность методического характера: проекции главных напряжений на девиаторную плоскость имеют такое же обозначение, как и главные напряжения.

Положительно направленные проекции главных осей  $o\sigma'_i$  расположены на девиаторной плоскости под углом  $2\pi/3$ . Если пунктирными линиями нанести отрицательные направления осей, то девиаторная плоскость разделится на шесть равных секторов. Арабскими цифрами введем нумерацию секторов. Отсчет секторов проводится против хода часовой стрелки от оси  $o\sigma'_1$ . На (рис. 2.1) для каждого из секторов в виде неравенств указаны соотношения между главными напряжениями. Фазовые инварианты  $\varphi, \varphi, \omega$  задают ориентацию вектора интенсивности девиаторных напряжений на девиаторной плоскости.

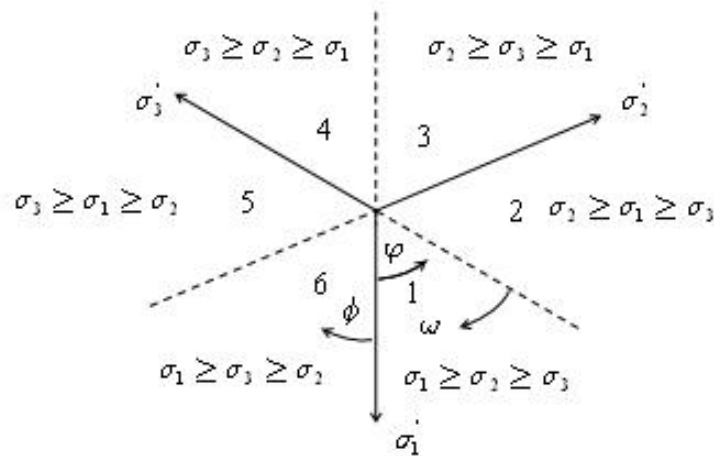


Рис. 2.1.

Тригонометрической форме представления решения уравнения (1.1) соответствует зависимость между значениями фазового инварианта и сочетаниями главных напряжений, показанная в таблице 2.1.

Таблица 2.1

$\phi$	$0 - \pi/3$	$\pi/3 - 2\pi/3$	$2\pi/3 - \pi$	$\pi - 4\pi/3$	$4\pi/3 - 5\pi/3$	$5\pi/3 - 2\pi$
неравенства	$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$	$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$	$\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1$	$\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$	$\sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2$	$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$
№ сектора	1	2	3	4	5	6

Из таблицы 2.1 видно, что угол  $\phi$  отсчитывается от положительной оси  $o\sigma'_1$  в направлении против хода часовой стрелки (рис. 2.1).

В ряде учебных монографий содержатся ошибки, связанные с направлением отсчета фазового инварианта. Например, в монографиях Л. А. Толоконникова [11], а затем В. Г. Зубчанинова [6] и А. А. Маркина [8] в качестве тригонометрического решения уравнения используются зависимости (1.2).

В таблице 2.2 приведена зависимость между значениями фазового инварианта  $\varphi$  и сочетаниями главных напряжений.

Таблица 2.2

$\varphi$	$0 - \pi/3$	$\pi/3 - 2\pi/3$	$2\pi/3 - \pi$	$\pi - 4\pi/3$	$4\pi/3 - 5\pi/3$	$5\pi/3 - 2\pi$
неравенства	$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$	$\sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2$	$\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$	$\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1$	$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$	$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$
№ сектора	6	5	4	3	2	1

Из таблицы 2.2 видно, что угол  $\varphi$  отсчитывается от положительной оси  $o\sigma'_1$  в направлении по ходу часовой стрелки (рис. 2.1). Однако в монографиях Л. А. Толоконникова [11], В. Г. Зубчанинова [6] и А. А. Маркина [8] ошибочно указано направление отсчета фазового инварианта против хода часовой стрелки.

В монографиях В. В. Соколовского [10], а затем Л. М. Качанова [7] приводится тригонометрическая форма решения уравнения в виде (1.3).

В таблице 2.3 приведена зависимость между значениями фазового инварианта  $\omega$  и сочетаниями главных напряжений.

Таблица 2.3

$\omega$	$0 - \pi/3$	$\pi/3 - 2\pi/3$	$2\pi/3 - \pi$	$\pi - 4\pi/3$	$4\pi/3 - 5\pi/3$	$5\pi/3 - 2\pi$
неравенства	$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$	$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$	$\sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2$	$\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$	$\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1$	$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$
№ сектора	1	6	5	4	3	2

Из таблицы 2.3 видно, что угол  $\omega$  отсчитывается от отрицательной оси  $o\sigma'_3$  в направлении по ходу часовой стрелки (рис. 2.1).

Однако в монографиях В. В. Соколовского [10] и Л. М. Качанова [7] ошибочно указано направление отсчета от отрицательной оси  $o\sigma'_3$  в направлении против хода часовой стрелки.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Буренин, А. А. К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию / А. А. Буренин, В. М. Якушина // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – С. 100–106.

[2] Быковцев, Г. И. Кусочно-линейные потенциалы в нелинейной механике / Г. И. Быковцев, Н. Г. Быковцева // ДАН РАН. – 1994. – Т. 335. – № 3. – С. 310–312.

[3] Джонсон, У. Теория пластичности для инженеров / У. Джонсон, П. Меллор. – М. : Машиностроение, 1979. – 567 с.

[4] Зубчанинов, В. Г. Механика сплошных деформируемых сред / В. Г. Зубчанинов. – Тверь : ТГТУ, ЧуДо, 2000. – 703 с.

[5] Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 234 с.

[6] Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 1960. – 704 с.



- [7] Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.
- [8] Маркин, А. А. Процессы упругопластического конечного деформирования / А. А. Маркин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христинич. – Тула : Изд-во ТулГУ, 2011. – 375 с.
- [9] Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела : учебное пособие для мех.-мат. и физ. спец. университетов / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1988. – 711 с.
- [10] Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969. – 605 с.
- [11] Толоконников, Л. А. Механика деформируемого твердого тела / Л. А. Толоконников. – М. : Высшая школа, 1990. – 318 с.
- [12] Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.

*Кузнецов Евгений Евгеньевич,*

*кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: smithe71@yandex.ru*

*Матченко Николай Михайлович,*

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики пластического формоизменения, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: ekc\_05@mail.ru*

Y. Y. Kuznetsov, N. M. Mattchenko

## ABOUT GEOMETRICAL INTERPRETATION PHASE INVARIANT TRSOR STRESS

*Tula State University*

**Abstract.** The three-dimensional vector space of the main stress. Position of a vector of intensity on deviator planes is set phase deviator. It is shown, that in monographers of educational character of V. G. Zubchaninov's, L. M. Kachanov's, A. A. Markin's with co-authors by V. V. Sokolovsky's, L. A. Tolokonnikov's at geometrical representation phase invariant on deviator planes are make mistakes.

**Keywords:** tensor stress, the main stress, vector space of the main stress, deviator a plane, a vector of intensity deviator stress, phase invariant.

### REFERENCES

- [1] *Burenin, A. A.* To the simulation of deformation of materials , different resistance to tension and compression / A. A. Burenin, V. M. Yakushina // Fri. Problems in Mechanics of Solids and rock. – M. : FIZMATLIT, 2006. – P. 100–106.
- [2] *Bykovtsev, G. I.* piecewise linear potentials in nonlinear mechanics / G. I. Bykovtsev, N. G. Bykovtseva // DAN RAS. – 1994. – Vol. 335. – No 3. – P. 310–312.
- [3] *Johnson, W.* The theory of plasticity for engineers / W. Johnson, P. Mellor. – M. : Mechanical Engineering, 1979. – 567 p.
- [4] *Zubchaninov, V. G.* Mechanics of Continuous Deformable Media / V. G. Zubchaninov. – Tver : TGTU, CHuDo, 2000. – 703 p.
- [5] *Ivlev, D. D.* The theory of perfect plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 234 p.
- [6] *Ishlinsky, A. J.* The mathematical theory of plasticity / A. J. Ishlinskii, D. D. Ivlev. – M. : FIZMATLIT, 1960. – 704 p.
- [7] *Kachanov, L. M.* Fundamentals of the theory of plasticity / L. M. Kachanov. – M. : Nauka, 1969. – 420 p.
- [8] *Markin, A. A.* The processes of elastic-plastic finite deformation : Monograph / A. A. Markin, M. Sokolova, D. V. Hristich. – Tula : publ Tula State University, 2011. – 375 p.
- [9] *Rabotnov, Y. N.* Fracture Mechanics : A manual for Faculty of Mechanics and Mathematics. and phys. specials. Universities / Y. N. Rabotnov. – M. : Nauka, 1988. – 711 p.
- [10] *Sokolov, V. V.* Theory of Plasticity / V. V. Sokolovsky. – M. : Higher School, 1969. – 605 p.
- [11] *Tolokonnikov, L. A.* Fracture Mechanics / L. A. Tolokonnikov. – M. : Higher School, 1990. – 318 p.
- [12] *Hill, R.* The mathematical theory of plasticity / R. Hill. – M. : GITTL, 1956. – 407 p.

*Kuznetsov, Yevgeniy Yevgenevich*

*Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor of Department of building, building materials and designs, Tula State University, Tula*

*Mattchenko, Nikolay Mihailovich*

*Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, Department of mechanics plastic forming, Tula State University, Tula*

## НОВАЯ ФОРМУЛА СУММИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ (Ч. 1)

*Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)*

**Аннотация.** Существует много способов суммирования рядов частного вида (например, [1] и ссылки в [2], стр. 170–183).

Важнейшую роль при суммировании функциональных рядов играет формула суммирования Плана. Согласно работе [3] эта формула получена в статье Плана, опубликованной около двух веков назад, в 1820 г. (G. A. A. Plana, *Mat. Acad. Torino*, 25, 403–408). Автору настоящей статьи не удалось ознакомиться с текстом работы Плана.

Последующее использование формулы суммирования Плана в литературе грешит серьезными недостатками. Так, в работе [4] сформулированные на с. 38 условия теоремы Плана, как показывает пример, проводимый нами ниже, оказываются недостаточными для того, чтобы получить формулу суммирования Плана (11) в [4]. Имеются также работы (например, [5]), в которых без доказательства теоремы Плана используются другие условия.

Поэтому возникла необходимость четко сформулировать и доказать теорему Плана.

Формула суммирования Плана, как показано ниже, не всегда применима для сходящихся рядов. Автором данной работы предлагается новая формула суммирования ( $K_\alpha$ -формула суммирования), которая применима для достаточно широкого класса сходящихся рядов. Из  $K_\alpha$ -формулы суммирования, как частный случай, получается формула суммирования Плана.

$K_\alpha$ -формула суммирования найдет разнообразие приложений во многих областях математики, механики и физики. Ниже в качестве примера показано применение  $K_\alpha$ -формулы суммирования к теории дзета-функций Римана и к теории теплопроводности стержней.

**Ключевые слова:** ряды, формула суммирования Плана, функциональные ряды.

УДК: 539.1

### 1. Некоторые теоремы. Формула суммирования Плана

В дальнейшем будем предполагать, что  $z = \tau + i\eta$ .

**Теорема 1.** Пусть

1°. Функция  $f(z)$  не равна нулю при  $z = k$ , где  $k = m, m+1, \dots, m+j = n$  (число  $m$  либо равно нулю, либо любому натуральному числу).

2°. Функция  $f(z)$  регулярна внутри и на границе односвязного прямоугольника  $m \leq \operatorname{Re} z \leq n$ ,  $|\operatorname{Im} z| \leq h$ .

Тогда имеет место утверждение

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^n f(k) &= \frac{1}{2} [f(m) + f(n)] + \int_m^n f(\tau) d\tau + \\
&+ i \int_0^h \frac{f(m+i\eta) - f(m-i\eta) + f(n-i\eta) - f(n+i\eta)}{e^{2\eta\pi} - 1} d\eta + \\
&+ e^{-2\pi h} \int_m^n \frac{[f(\tau+ih) + f(\tau-ih)](2 \cos 2\pi\tau - e^{-2\pi h})}{1 - 2 \cos 2\pi\tau \cdot e^{-2\pi h} + e^{-4\pi h}} d\tau.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл  $\int_C f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz$ .

Контур интегрирования  $C$  показан на рис. 1.

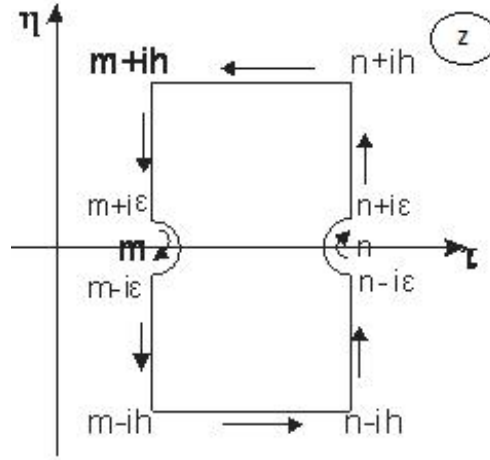


Рис. 1

Согласно теореме Коши о вычетах в силу 1° имеем

$$\int_C f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz = 2\pi i \sum_{k=m+1}^{n-1} \operatorname{res}_{z=k} [f(z) \operatorname{ctg} \pi z] = 2i \sum_{k=m+1}^{n-1} f(k). \tag{1.2}$$

Обозначим через  $C^+$  верхнюю половину  $C$ , а через  $C^-$  – нижнюю половину  $C$ . Тогда

$$\begin{aligned}
\int_{C^+} f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz &= \int_{\Gamma_\varepsilon^+} f(z) (\operatorname{ctg} \pi z + i) dz + \int_{n+i\varepsilon}^{n+ih} f(z) (\operatorname{ctg} \pi z + i) dz + \\
&+ \int_{n+ih}^{m+ih} f(z) (\operatorname{ctg} \pi z + i) dz + \int_{m+i\varepsilon}^{m+ih} f(z) (\operatorname{ctg} \pi z + i) dz + \\
&+ \int_{C_\varepsilon^+} f(z) (\operatorname{ctg} \pi z + i) dz - i \int_{C^+} f(z) dz,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
\int_{C^-} f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz &= \int_{C_\varepsilon^-} f(z) (\operatorname{ctg} \pi z - i) dz + \int_{m-i\varepsilon}^{m-ih} f(z) (\operatorname{ctg} \pi z - i) dz + \\
&+ \int_{m-ih}^{n-ih} f(z) (\operatorname{ctg} \pi z - i) dz + \int_{n-i\varepsilon}^{n-ih} f(z) (\operatorname{ctg} \pi z - i) dz + \\
&+ \int_{\Gamma_\varepsilon^-} f(z) (\operatorname{ctg} \pi z - i) dz + i \int_{C^-} f(z) dz.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

В силу 2° находим

$$\int_{C^+} f(z)dz = - \int_{m+\varepsilon}^{n-\varepsilon} f(\tau)d\tau, \quad \int_{C^-} f(z)dz = \int_{m+\varepsilon}^{n-\varepsilon} f(\tau)d\tau, \quad (1.5)$$

так как в данном случае справедлива интегральная теорема Коши. Преобразуем интегралы, входящие в (1.3) и (1.4), используя подстановки:

1. С подстановкой  $z = n + i\eta$ :

$$\int_{n+i\varepsilon}^{n+i\eta} f(z)(ctg\pi z + i)dz = 2 \int_{\varepsilon}^h \frac{f(n + i\eta)}{e^{2\eta\pi} - 1} d\eta. \quad (1.6)$$

2. С подстановкой  $z = n - i\eta$ :

$$\int_{n-i\eta}^{n-i\varepsilon} f(z)(ctg\pi z - i)dz = -2 \int_{\varepsilon}^h \frac{f(n - i\eta)}{e^{2\eta\pi} - 1} d\eta. \quad (1.7)$$

3. С подстановкой  $z = m + i\eta$ :

$$\int_{m+i\eta}^{m+i\varepsilon} f(z)(ctg\pi z + i)dz = -2 \int_{\varepsilon}^h \frac{f(m + i\eta)}{e^{2\eta\pi} - 1} d\eta. \quad (1.8)$$

4. С подстановкой  $z = m - i\eta$ :

$$\int_{m-i\varepsilon}^{m-i\eta} f(z)(ctg\pi z - i)dz = 2 \int_{\varepsilon}^h \frac{f(m - i\eta)}{e^{2\eta\pi} - 1} d\eta. \quad (1.9)$$

5. С подстановкой  $z = \tau + ih$ :

$$\int_{n+ih}^{m+ih} f(z)(ctg\pi z + i)dz = 2ie^{-2\pi h} \int_m^n \frac{f(\tau + ih)e^{2i\pi\tau}}{1 - e^{-2\pi(h-i\tau)}} d\tau. \quad (1.10)$$

6. С подстановкой  $z = \tau - ih$ :

$$\int_{m-ih}^{n-ih} f(z)(ctg\pi z - i)dz = 2ie^{-2\pi h} \int_m^n \frac{f(\tau - ih)e^{-2i\pi\tau}}{1 - e^{-2\pi(h+i\tau)}} d\tau. \quad (1.11)$$

7. С подстановкой  $z = m + \varepsilon \cdot e^{i\theta}$ :

$$\begin{aligned} \int_{C^+} f(z)(ctg\pi z + i)dz &= i \int_{\pi/2}^0 f(m + \varepsilon e^{i\theta}) [ctg(\pi \varepsilon e^{i\theta}) + i] \varepsilon e^{i\theta} d\theta, \\ \int_{C^-} f(z)(ctg\pi z - i)dz &= i \int_{-\pi/2}^0 f(m + \varepsilon e^{i\theta}) [ctg(\pi \varepsilon e^{i\theta}) - i] \varepsilon e^{i\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (1.12)$$

8. С подстановкой  $z = n + \varepsilon \cdot e^{i\theta}$ :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{\varepsilon}^{+}} f(z) \operatorname{ctg} \pi z + i dz &= i \int_{\pi}^{\pi/2} f(n + \varepsilon e^{i\theta}) [\operatorname{ctg}(\pi \varepsilon e^{i\theta}) + i] \varepsilon e^{i\theta} d\theta, \\
\int_{\Gamma_{\varepsilon}^{-}} f(z) \operatorname{ctg} \pi z - i dz &= i \int_{3\pi/2}^{\pi} f(n + \varepsilon e^{i\theta}) [\operatorname{ctg}(\pi \varepsilon e^{i\theta}) - i] \varepsilon e^{i\theta} d\theta.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Замечая, что

$$\int_C f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz = \int_{C^+} f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz + \int_{C^-} f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz,$$

в силу формул (1.3)–(1.13) находим

$$\begin{aligned}
&+ i \int_{\pi/2}^0 f(m + \varepsilon \cdot e^{i\theta}) [\operatorname{ctg}(\pi \varepsilon \cdot e^{i\theta}) + i] \varepsilon e^{i\theta} d\theta + \\
&+ i \int_0^{-\pi/2} f(m + \varepsilon e^{i\theta}) [\operatorname{ctg}(\pi \varepsilon e^{i\theta}) - i] \varepsilon e^{i\theta} d\theta + \\
&+ i \int_{\pi}^{\pi/2} f(n + \varepsilon e^{i\theta}) [\operatorname{ctg}(\pi \varepsilon e^{i\theta}) + i] \varepsilon e^{i\theta} d\theta + i \int_{3\pi/2}^{\pi} f(n + \varepsilon e^{i\theta}) [\operatorname{ctg}(\pi \varepsilon e^{i\theta}) - i] \varepsilon e^{i\theta} d\theta.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Из (1.14), переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , что законно в силу 2; после несложных вычислений приходим к утверждению теоремы.

**Теорема 2.** Оставив только первое условие 1<sup>о</sup> в теореме 1, далее предположим:

2<sup>о</sup>. Функция  $f(z)$  регулярна внутри и на границах односвязной полосы  $m \leq \operatorname{Re} z \leq n$ ,  $|\operatorname{Im} z| < \infty$ .

3<sup>о</sup>. Равенство

$$\lim_{|\eta| \rightarrow \infty} e^{-2\pi|\eta|} |f(\tau + i\eta)| = 0 \tag{1.15}$$

выполняется равномерно по  $\tau$ .

Тогда имеет место утверждение

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^n f(k) &= \frac{1}{2} [f(m) + f(n)] + \int_m^n f(\tau) d\tau + \\
&+ i \int_0^{\infty} \frac{f(m+i\eta) - f(m-i\eta) + f(n-i\eta) - f(n+i\eta)}{e^{2\eta\pi} - 1} d\eta.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Доказательство очевидно, так как последнее слагаемое в правой части равенства (1.1) в силу условия (1.15) при  $h \rightarrow \infty$  обращается в нуль.

Замечая, что

$$i[f(n - i\eta) - f(n + i\eta)] = 2 \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{f^{(2r-1)}(n)}{(2r-1)!} \eta^{2r-1} + q_{2k+1}(n, \eta),$$

где  $q_{2k+1}(n, \eta)$  – остаточный член ряда Тейлора для случая комплексной переменной:

$$q_{2k+1}(n, \eta) = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \eta^{2k+1} \int_0^1 (1-u)^{2k} [f^{(2k+1)}(n + i\eta u) + f^{(2k+1)}(n - i\eta u)] du, \tag{1.16^1}$$

формулу (1.16) можно записать так:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{1}{2} [f(m) + f(n)] + \int_m^n f(\tau) d\tau + i \int_0^\infty \frac{f(m+i\eta) - f(m-i\eta)}{e^{2\eta\pi} - 1} d\eta + \sum_{r=1}^k \frac{f^{(2r-1)}(n)}{(2r)!} \beta_{2r} + \int_0^\infty \frac{q_{2k+1}(n, \eta)}{e^{2\eta\pi} - 1} d\eta. \quad (1.16^2)$$

Здесь  $\beta_{2r}$  – число Бернулли,  $k$  – любое натуральное число.

Заметим, что остаточный член  $q_{2k+1}(n, \eta)$ , определяемый по формуле (1.16<sup>1</sup>), можно записать в форме Дарбу; она похожа на форму, полученную Лагранжем для случая вещественной переменной.

**Теорема 3.** Оставив только первое условие 1<sup>о</sup> в теореме 1, далее предположим:

2<sup>о</sup>. Функция  $f(z)$  регулярна в односвязной области  $Re z \geq m$ .

3<sup>о</sup>. Равенство

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} e^{-2\pi|\eta|} |f(\tau \pm i\eta)| = 0 \quad (1.17)$$

выполняется равномерно при  $m \leq \tau < \infty$ .

4<sup>о</sup>.

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \frac{i [f(\tau - i\eta) - f(\tau + i\eta)]}{e^{2\eta\pi} - 1} d\eta = 0. \quad (1.18)$$

5<sup>о</sup>. Несобственный интеграл

$$\int_m^\infty f(\tau) d\tau \quad (1.19)$$

сходится и  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) = 0$ .

Тогда

$$\sum_{k=m}^\infty f(k) = \frac{f(m)}{2} + \int_m^\infty f(\tau) d\tau + i \int_0^\infty \frac{f(m+i\eta) - f(m-i\eta)}{e^{2\eta\pi} - 1} d\eta. \quad (1.20)$$

Если в равенстве (1.16) провести предельный переход  $n \rightarrow +\infty$ , то в силу условий данной теоремы приходим к (1.20). Доказательство теоремы 3 закончено.

**Теорема 4.** Утверждения теорем 1, 2, 3 (1.1), (1.16), (1.20) остаются в силе, если заменить только вторые условия этих теорем на следующие:

- а) в теореме 1: пусть функция  $f(z)$  регулярна в односвязной области  $D$  ( $D: m < Re z < n, |Im z| < h$ ) и непрерывна в замкнутой области  $\bar{D}$  ( $\bar{D}: m \leq Re z \leq n, |Im(z)| \leq h$ );
- б) в теореме 2: пусть функция  $f(z)$  регулярна в односвязной области  $D$  ( $D: m < Re z < n, |Im z| < \infty$ ) и непрерывна в замкнутой полосе  $\bar{D}$  ( $\bar{D}: m \leq Re z \leq n, |Im(z)| < \infty$ );
- в) в теореме 3: пусть функция  $f(z)$  регулярна в односвязной области  $Re z > m$  и непрерывна в  $Re z \geq m$ .

Если при доказательстве теоремы 4 с условием (а) опираться на обобщенную интегральную теорему Коши для функции  $f(z)$ , на обобщенную теорему Коши о вычетах для функции  $f(z)ctg(\pi z)$  и взять в качестве контура интегрирования контур  $C$  (рис. 1), что допустимо, то ее доказательство копируется с доказательства теоремы 1.

Ввиду особой важности данной теоремы в теории суммирования рядов приведем ее доказательство другим способом.

Теорему 4 с условием (а) можно доказать следующим образом:

1. Выбирая контур интегрирования  $L_{\varepsilon, \rho}$ , как показано на рис. 2 (при  $\rho=0$  этот контур совпадает с контуром  $C$ ), в силу теоремы Коши о вычетах получаем

$$\int_{L_{\varepsilon, \rho}} f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz = 2i \sum_{k=m+1}^{n-1} f(k) \quad (\varepsilon > 0, \quad \rho > 0, \quad \rho + \varepsilon < 1).$$

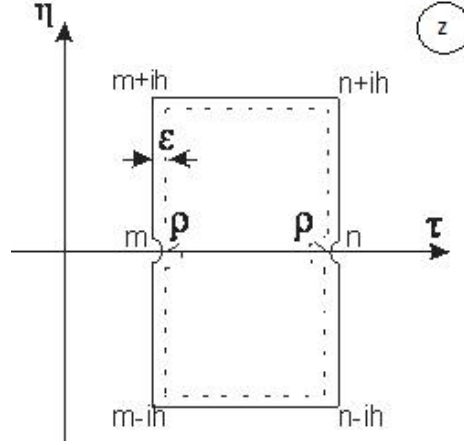


Рис. 2

2. Обозначая через  $L_{\varepsilon, \rho}^+$  верхнюю половину  $L_{\varepsilon, \rho}$ , а через  $L_{\varepsilon, \rho}^-$  – нижнюю половину  $L_{\varepsilon, \rho}$ , имеем

$$\begin{aligned} \int_{L_{\varepsilon, \rho}} f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz &= \int_{L_{\varepsilon, \rho}^+} f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz + \int_{L_{\varepsilon, \rho}^-} f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz, \\ \int_{L_{\varepsilon, \rho}^+} f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz &= \int_{L_{\varepsilon, \rho}^+} f(z) (\operatorname{ctg} \pi z + i) dz - i \int_{L_{\varepsilon, \rho}^+} f(z) dz, \\ \int_{L_{\varepsilon, \rho}^-} f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz &= \int_{L_{\varepsilon, \rho}^-} f(z) (\operatorname{ctg} \pi z - i) dz + i \int_{L_{\varepsilon, \rho}^-} f(z) dz. \end{aligned}$$

3. Так как по условию (а) функция  $f(z)$  регулярна в односвязной области  $D$ , то в силу основной интегральной теоремы Коши находим

$$\int_{L_{\varepsilon, \rho}^+} f(z) dz = - \int_{m+\varepsilon+\rho}^{n-\varepsilon-\rho} f(\tau) d\tau, \quad \int_{L_{\varepsilon, \rho}^-} f(z) dz = \int_{m+\varepsilon+\rho}^{n-\varepsilon-\rho} f(\tau) d\tau \quad (z = \tau + i\eta).$$

4. Далее записываем интегралы  $\int_{L_{\varepsilon, \rho}^+} f(z) (\operatorname{ctg} \pi z + i) dz$  и  $\int_{L_{\varepsilon, \rho}^-} f(z) (\operatorname{ctg} \pi z - i) dz$

по участкам контуров  $L_{\varepsilon, \rho}^+$  и  $L_{\varepsilon, \rho}^-$ , проходимым против часовой стрелки.

5. Так как по условию (а) функция  $f(z)$  непрерывна в замкнутой односвязной области  $\bar{D}$ , то в полученном после вышеуказанных операций равенстве можно провести предельный переход при  $\rho \rightarrow +0$ . После предельного перехода и замены переменных в интегралах приходим к формуле (1.14), откуда при  $\varepsilon \rightarrow +0$  – к утверждению теоремы 4.

Доказательство теоремы 4 с условиями (б) и (в) проводится точно так же, как доказательство теорем 2 и 3.

**Замечание 1.** Если в теоремах 4 и 5 положить  $m = 0$ , то будем иметь



$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = \frac{f(0)}{2} + \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau + i \int_0^{\infty} \frac{f(i\eta) - f(-i\eta)}{e^{2\eta\pi} - 1} d\eta. \quad (1.21)$$

**Теорема 5.** В условиях теоремы 4 заменим только условие (в) на следующее:

2: Пусть функция  $f(z)$  регулярна при  $Re z > 0$  и непрерывна в полуплоскости  $Re(z) \geq 0$ , за исключением точки  $z = 0$ , где она имеет устранимую особенность, причем  $f(0)$  определяется как  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ .

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = -\frac{f(0)}{2} + \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau + i \int_0^{\infty} \frac{f(i\eta) - f(-i\eta)}{e^{2\eta\pi} - 1} d\eta. \quad (1.22)$$

Доказательство. Определим функцию  $f_*(z)$  так:

$$f_*(z) = \begin{cases} f(z) & \text{при } Re z > 0, \\ f(0) & \text{при } z = 0 \quad (z = \tau + i\eta). \end{cases}$$

По условию данной теоремы функция  $f_*(z)$  будет регулярной при  $Re z > 0$  и непрерывной в полуплоскости  $Re z \geq 0$ . Следовательно, в силу теоремы 4 (см. (1.21)) имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_*(k) = \frac{f_*(0)}{2} + \int_0^{\infty} f_*(\tau) d\tau + i \int_0^{\infty} \frac{f_*(i\eta) - f_*(-i\eta)}{e^{2\eta\pi} - 1} d\eta,$$

откуда, замечая, что

$$f_*(0) = f(0), \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_*(k) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f(k), \quad \int_0^{\infty} f_*(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau, \\ \int_0^{\infty} \frac{f_*(i\eta) - f_*(-i\eta)}{e^{2\pi\eta} - 1} d\eta = \int_0^{\infty} \frac{f(i\eta) - f(-i\eta)}{e^{2\pi\eta} - 1} d\eta,$$

приходим к утверждению данной теоремы.

**Замечание 2.** Формула суммирования конечного числа слагаемых (1.16) при помощи контурного интегрирования довольно сложным способом была получена Кронекером [6]. В статье Кронекера [6] имеется опечатка в формуле (см. стр. 347):

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{\varepsilon} \frac{f(x + \varepsilon y_1 i) dx}{e^{2(y_1 - \varepsilon x i)\pi} - 1} + \frac{1}{2} \lim_{y_0 \rightarrow +0} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{\varepsilon} f(x + \varepsilon y_0 i) dx - \frac{1}{2} i \int_{y_0}^{y_1} \sum_{\alpha, \varepsilon} (-1)^{\alpha} \varepsilon f(x_0 + \varepsilon y i) dy. \\ (\alpha = 0, 1; \varepsilon = +1, -1)$$

В последнем интеграле вместо  $x_0$  должно быть  $x_{\alpha}$ .

Вопрос суммирования бесконечных рядов Кронекером в [6] не рассмотрен.

**Замечание 3.** Формулу суммирования (1.22) называют формулой суммирования Плана [4]. В этих работах предполагается если: 1) функция  $f(z)$  регулярна при  $Re z \geq 0$ ,

2) равенство  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} e^{-2\pi|\eta|} f(\tau + i\eta) = 0$  выполняется равномерно при  $0 \leq \tau < \infty$ ,

3)

$$\lim_{-\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|\eta|} |f(\tau + i\eta)| d\eta = 0, \quad (1.23)$$

то формула (1.22) справедлива.

Докажем, что в рамках этих трех условий получить равенство (1.22) из равенства (1.16) предельным переходом  $n \rightarrow \infty$  не всегда возможно.

Рассмотрим один пример. Пусть  $f(z) = 1/(z+1)$ . Функция  $f(z) = 1/(z+1)$  удовлетворяет вышеприведенным условиям, предложенным в [4]. Действительно: 1) она регулярна при  $\operatorname{Re} z \geq 0$ ,

2) равенство  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} e^{-2\pi|\eta|} \frac{1}{(1+\tau)^2 + \eta^2} [(1+\tau) - i\eta] = 0$  выполняется равномерно при  $0 \leq \tau < \infty$ :

3)

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|\eta|} |f(\tau + i\eta)| d\eta &= 2 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi\eta}}{\sqrt{(1+\tau)^2 + \eta^2}} d\eta \leq \\ &\leq 2 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\tau} \int_0^{\infty} e^{-2\pi\eta} d\eta = \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\tau} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi\eta}}{\sqrt{(1+\tau)^2 + \eta^2}} d\eta = 0. \quad (1.24)$$

Для функции  $f(z) = 1/(z+1)$  из (1.16) при  $m = 0$  имеем

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right) + \ln(n+1) + 2 \int_0^{\infty} \frac{\eta d\eta}{(1+\eta^2)(e^{2\eta\pi} - 1)} - 2 \int_0^{\infty} \frac{\eta d\eta}{[(1+n)^2 + \eta^2](e^{2\eta\pi} - 1)},$$

откуда в силу (1.6.42<sup>5</sup>) в [7] находим

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k} = \gamma + \frac{1}{2(n+1)} + \ln(n+1) - 2 \int_0^{\infty} \frac{\eta d\eta}{[(1+n)^2 + \eta^2](e^{2\eta\pi} - 1)}, \quad (1.25)$$

где  $\gamma$  – постоянная Эйлера ( $\gamma = 0,57721566190\dots$ ).

Имеет место следующее неравенство:

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\eta d\eta}{[(\tau+1)^2 + \eta^2](e^{2\eta\pi} - 1)} \leq 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi\eta}}{\sqrt{(1+\tau)^2 + \eta^2}} d\eta \quad (\tau \geq 0).$$

Отсюда в силу (1.24) находим

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\eta d\eta}{[(\tau+1)^2 + \eta^2](e^{2\eta\pi} - 1)} = 0. \quad (1.26)$$

Можно легко показать, что

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\eta d\eta}{[(\tau+1)^2 + \eta^2](e^{2\eta\pi} - 1)} \leq \frac{2}{(\tau+1)^2} \int_0^{\infty} \frac{\eta d\eta}{e^{2\eta\pi} - 1} = \frac{1}{12(\tau+1)^2} < \frac{1}{\pi(\tau+1)}, \quad (\tau \geq 0)$$

откуда при  $\tau=0$  получаем  $2 \int_0^{\infty} \frac{\eta d\eta}{(1+\eta^2)(e^{2\eta\pi} - 1)} = \gamma - \frac{1}{2} < \frac{1}{12}$ .

Из (1.25) видно, что предельный переход при  $n \rightarrow \infty$  не законен (несмотря на то, что последнее слагаемое стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  (см. (1.25)).

Следовательно, в рамках трех условий, предложенных в [4], формула (1.22) не всегда имеет место.

Из (1.25) в силу (1.26) приходим к известному утверждению:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left[ \sum_{m=1}^q \frac{1}{m} - \ln(q) \right] = \gamma \quad (q = n + 1) .$$

Этим заканчивается рассмотрение замечания 3.

**Замечание 4.** Формула суммирования рядов Абеля – Плана имеется в [1] (см. стр. 262–264). Формула суммирования Плана (1.21) другим способом получена в [8] (см. § 4.9, стр. 265–276) при тех же условиях теоремы 3, если в теореме положить  $m = 0$ .

**2. Новая теорема ( $K_\alpha$ -формула) для суммирования функциональных рядов**

Формула суммирования Плана (1.20) не всегда применима для сходящихся рядов, что показывает нижеприведенный пример.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \tag{2.1}$$

Исследуем поведение модуля функции  $e^{-z^2}$  в окрестности бесконечно удаленной точки. Полагая  $z = re^{i\varphi}$ , имеем  $|e^{-z^2}| = e^{-r^2 \cos 2\varphi}$ .

Очевидно,  $\cos 2\phi > 0$  при  $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$  и при  $\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4}$ ,  $\cos 2\phi < 0$  при  $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$  и при  $-\frac{3\pi}{4} < \varphi < -\frac{\pi}{4}$ . Поэтому окрестность бесконечно удаленной точки распадается на четыре равных сектора. В двух секторах  $-|z| > R$ ,  $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}$  и  $|z| > R$ ,  $\frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}$  – модуль функции  $e^{-z^2}$  мал, а в двух других  $-|z| > R$ ,  $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$  и  $|z| > R$ ,  $-\frac{3\pi}{4} < \arg z < -\frac{\pi}{4}$  – велик.

По этой причине формула суммирования Плана (1.20), полученная с помощью теоремы о вычетах и теоремы Коши, для нахождения суммы сходящегося ряда (2.1) не применима. Поэтому возникает вопрос: когда же можно применять теорему о вычетах (в частности теорему Коши) к интегралу по замкнутому контуру  $C$ , если этот контур проходит через особую точку подынтегральной функции?

Общий ответ состоит в следующем [1]. Любая достаточно малая окрестность особой точки функции  $f(z)$  распадается на некоторое четное число связных частей. В половине частей модуль функции  $f(z)$  мал, а в другой половине велик. Если оба конца контура попадают в одну связную часть, где  $|f(z)|$  мал, то к интегралу от  $f(z)$  по  $C$  можно применять теорему о вычетах, если в разные части – нельзя.

Таким образом, если точка  $z = a$  находится на контуре интегрирования  $C$  и является особой точкой подынтегральной функции  $f(z)$  контурного интеграла, то в первую очередь следует выяснить поведение модуля  $f(z)$  в окрестности этой особой точки и найти те части окрестности, где он мал. Если оба конца контура попадают в одну связную часть окрестности, то возможность применения теоремы о вычетах легко доказывается с помощью одного из известных признаков, изложенных в [1] (см. стр. 236-238).

Из вышесказанного следует: если функция  $f(z)$  регулярна в правой полуплоскости  $Re z \geq m$ ,  $|Imz| < \infty$   $z$ -плоскости и такова, что ее модуль при  $|z| = R$ ,  $-\pi/2 \leq \arg z \leq \pi/2$  при достаточно больших  $R$  может быть как мал, так и велик, то для суммирования рядов такого типа метод (формула суммирования) Плана не применим. Поэтому возникает необходимость в разработке метода (формулы) суммирования рядов, учитывающего и это обстоятельство.

**Обозначение.** Под  $S_\alpha$  будем понимать сектор, образованный двумя лучами в  $z$ -плоскости, исходящими из точки  $(m, 0)$  симметрично относительно действительной оси под углом  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq \pi/2$ ) (см. рис. 3).

Рассмотрим ряд  $\sum_{k=m}^{\infty} f(m)$ .

**Теорема 6.** Пусть:

1°. Функция  $f(z)$  регулярна внутри и на границе сектора  $S_\alpha$ .

2°. Функция  $f(z)$  в точках  $z = k$ , где  $k = m, m+1, m+2, \dots$ , не имеет нулей.

3°. Угол  $\alpha$  такой, что предельное равенство

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \{e^{-2\pi R \sin \phi} R |f(m \pm Re^{i\phi})|\} = 0 \quad (2.2)$$

выполняется равномерно по  $\varphi \in ]0, \alpha]$ .

4°. Несобственный интеграл

$$\int_m^\infty f(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

сходится и  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) = 0$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_m^\infty f(k) &= \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) f(m) + \int_m^\infty f(\tau) d\tau + \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta(\rho, \alpha)} \{ [f(m + \rho e^{i\alpha}) e^{i(\alpha + 2\pi\rho \cos \alpha)} + \\ &+ f(m + \rho e^{-i\alpha}) e^{-i(\alpha + 2\pi\rho \cos \alpha)}] - [f(m + \rho e^{i\alpha}) e^{i\alpha} + f(m + \rho e^{-i\alpha}) e^{-i\alpha}] e^{-2\pi\rho \sin \alpha} \} d\rho \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\Delta(\rho, \alpha) = \sin^2(\rho\pi \cos \alpha) + sh^2(\rho\pi \sin \alpha)$ .

Доказательство. Рассмотрим интеграл  $\int_C f(z) ctg \pi z dz$ .

Контур интегрирования  $C$  показан на рис. 3: ( $z = \tau + i\eta$ ).

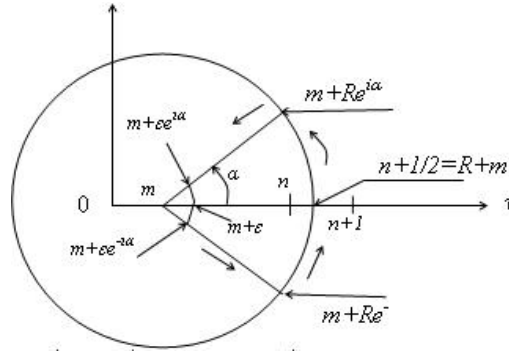


Рис. 3

Согласно теореме Коши о вычетах в силу 2° имеем

$$\int_C f(z) ctg \pi z dz = 2i \sum_{k=m+1}^n f(k). \quad (2.5)$$

Обозначим через  $C^+$  верхнюю половину  $C$ , а через  $C^-$  – нижнюю половину  $C$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{C^+} f(z) ctg \pi z dz &= \int_{m+R}^{m+R \cdot e^{i\alpha}} f(\tau) (ctg \pi z + i) d\tau + \int_{m+R \cdot e^{i\alpha}}^{m+\epsilon \cdot e^{i\alpha}} f(\tau) (ctg \pi z + i) d\tau + \\ &+ \int_{m+\epsilon \cdot e^{i\alpha}}^{m+\epsilon} f(\tau) (ctg \pi z + i) d\tau - i \int_{C^+} f(z) dz, \\ \int_{C^-} f(z) ctg \pi z dz &= \int_{m+\epsilon}^{m+\epsilon \cdot e^{-i\alpha}} f(\tau) (ctg \pi z - i) d\tau + \int_{m+\epsilon \cdot e^{-i\alpha}}^{m+R \cdot e^{-i\alpha}} f(\tau) (ctg \pi z - i) d\tau + \\ &+ \int_{m+R \cdot e^{-i\alpha}}^{m+R} f(\tau) (ctg \pi z - i) d\tau + i \int_{C^-} f(z) dz, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $R = n - m + \frac{1}{2}$ .

В силу 1° находим

$$\int_{C^+} f(z) dz = - \int_{m+\varepsilon}^{m+R} f(\tau) d\tau, \quad \int_{C^-} f(z) dz = - \int_{m+\varepsilon}^{m+R} f(\tau) d\tau. \quad (2.7)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \int_{m+R}^{m+R \cdot e^{i\alpha}} f(z)(ctg\pi z + i) dz &= iR \int_0^\alpha f(m + R \cdot e^{i\varphi}) [ctg(\pi R \cdot e^{i\varphi}) + i] e^{i\varphi} d\varphi, \\ \int_{m+\varepsilon}^{m+\varepsilon e^{i\alpha}} f(z)(ctg\pi z + i) dz &= - \int_\varepsilon^R f(m + \rho e^{i\varphi}) [ctg(\pi \rho e^{i\alpha}) + i] e^{i\alpha} d\rho, \\ \int_{m+\varepsilon}^{m+R \cdot e^{i\alpha}} f(z)(ctg\pi z + i) dz &= -i\varepsilon \int_0^\alpha f(m + \varepsilon e^{i\varphi}) [ctg(\pi \varepsilon e^{i\varphi}) + i] e^{i\varphi} d\varphi, \\ \int_{m+\varepsilon}^{m+\varepsilon e^{-i\alpha}} f(z)(ctg\pi z - i) dz &= -i\varepsilon \int_0^\alpha f(m + \varepsilon e^{-i\varphi}) [ctg(\pi \varepsilon e^{-i\varphi}) - i] e^{-i\varphi} d\varphi, \\ \int_{m+\varepsilon}^{m+R \cdot e^{-i\alpha}} f(z)(ctg\pi z - i) dz &= \int_\varepsilon^R f(m + \rho e^{-i\alpha}) [ctg(\pi \rho e^{-i\alpha}) - i] e^{-i\alpha} d\rho, \\ \int_{m+R \cdot e^{-i\alpha}}^{m+R} f(z)(ctg\pi z - i) dz &= iR \int_0^\alpha f(m + R \cdot e^{-i\varphi}) [ctg(\pi R \cdot e^{-i\varphi}) - i] e^{-i\varphi} d\varphi, \end{aligned}$$

$$\int_C f(z) ctg\pi z dz = \int_{C^+} f(z) ctg\pi z dz + \int_{C^-} f(z) ctg\pi z dz,$$

в силу (2.5)–(2.7) находим

$$\begin{aligned} 2i \sum_{k=m+1}^n f(k) &= -i\varepsilon \int_0^\alpha \{ f(m + \varepsilon e^{i\varphi}) [ctg(\pi \varepsilon e^{i\varphi}) + i] e^{i\varphi} + \\ &\quad + f(m + \varepsilon e^{-i\varphi}) [ctg(\pi \varepsilon e^{-i\varphi}) - i] e^{-i\varphi} \} d\varphi + \\ + 2i \int_{m+\varepsilon}^{m+R} f(\tau) d\tau &+ \int_\varepsilon^R \{ f(m + \rho e^{-i\alpha}) [ctg(\pi \rho e^{-i\alpha}) - i] e^{-i\alpha} - \\ &\quad - f(m + \rho e^{i\alpha}) [ctg(\pi \rho e^{i\alpha}) + i] e^{i\alpha} \} d\rho + \\ &+ iR \int_0^\alpha \{ f(m + R \cdot e^{i\varphi}) [ctg(\pi R \cdot e^{i\varphi}) + i] e^{i\varphi} + \\ &\quad + f(m + R \cdot e^{-i\varphi}) [ctg(\pi R \cdot e^{-i\varphi}) - i] e^{-i\varphi} \} d\varphi, \end{aligned}$$

откуда при  $\varepsilon \rightarrow +0$  получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n f(k) &= (1 - \frac{\alpha}{\pi}) f(m) + \int_m^{m+R} f(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2i} \int_0^\alpha \{ f(m + \rho e^{-i\alpha}) [ctg(\pi \rho e^{-i\alpha}) - i] e^{-i\alpha} - \\ &\quad - f(m + \rho e^{i\alpha}) [ctg(\pi \rho e^{i\alpha}) + i] e^{i\alpha} \} d\rho + \\ &+ \frac{R}{2} \int_0^\alpha \{ f(m + R \cdot e^{i\varphi}) [ctg(\pi R \cdot e^{i\varphi}) + i] e^{i\varphi} + \\ &\quad + f(m + R \cdot e^{-i\varphi}) [ctg(\pi R \cdot e^{-i\varphi}) - i] e^{-i\varphi} \} d\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^n f(k) &= \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) f(m) + \int_m^{m+R} f(\tau) d\tau + \frac{1}{4} \int_0^R \frac{1}{\Delta(\rho, \alpha)} \{ [f(m + \rho e^{i\alpha}) e^{i(\alpha + 2\pi\rho \cos \alpha)} + \\
&+ f(m + \rho e^{-i\alpha}) e^{-i(\alpha + 2\pi\rho \cos \alpha)}] - [f(m + \rho e^{i\alpha}) e^{i\alpha} + f(m + \rho e^{-i\alpha}) e^{-i\alpha}] e^{-2\pi\rho \sin \alpha} \} d\rho + \\
&+ \frac{iR}{4} \int_0^\alpha \frac{1}{\delta(R, \phi)} \{ [f(m + R e^{-i\phi}) e^{-i(\phi + 2\pi R \cos \phi)} - f(m + R e^{i\phi}) e^{i(\phi + 2\pi R \cos \phi)}] - \\
&- [f(m + R e^{-i\phi}) e^{-i\phi} - f(m + R e^{i\phi}) e^{i\phi}] \cdot e^{2\pi R \sin \phi} \} d\phi
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где  $\delta(R, \varphi) = \sin^2(\pi R \cos \varphi) + sh^2(\pi R \sin \varphi)$ .

Из (2.8), замечая, что число  $m$  равно либо нулю, либо любому фиксированному натуральному числу и  $R = n - m + \frac{1}{2}$  ( $n > m$ ), при  $n \rightarrow \infty$  в силу условий (2.2) и (2.3) приходим к утверждению данной теоремы.

**Замечание 5.** Если функция  $f(z)$  в области  $S_{\pi/2}$  ( $\alpha = \pi/2$ ) удовлетворяет всем требованиям теоремы 6, то из (2.4) приходим к формуле Плана (1.20) суммирования рядов.

Отсюда следует, что полученная нами формула суммирования рядов (2.4) более общая, чем формула суммирования рядов Плана (1.20).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Евграфов, М. А.* Аналитические функции / М. А. Евграфов. – М. : Наука, 1968.
- [2] *Трантер, К. Дж.* Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. – М. : ГИТТЛ, 1956.
- [3] *Уиттекер, Э. Т.* Курс современного анализа. Т. 1 / Э. Т. Уиттекер, Н. Дж. Ватсон. – М. : ФИЗМАТГИЗ, 1963.
- [4] *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : ФИЗМАТГИЗ, 1973.
- [5] *Dahlquist, G.* On summation formulas due to Plana, Lindelof and Abel, and Related Gauss-Christoffel Rules, I, Bit numerical mathematics / G. Dahlquist. Springer. – 1999. – P. 256–295.
- [6] *Kronecker, L.* Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale / L. Kronecker // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1889. – P. 345–354.
- [7] *Кулиев, В. Д.* Сингулярные краевые задачи / В. Д. Кулиев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- [8] *Henrici, P.* Applied and Computational Complex Analysis / P. Henrici. – Wiley : New York, 1974. – Vol. 1.

Кулиев Валех Джафарович,

доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

e-mail: pmdekanat@rambler.ru

V. D. Kuliev

NEW FORMULA OF SUMMATION OF FUNCTIONAL RANKS AND SOME IT  
APPENDICES (P.1)*Moscow State Machine-Building University (MAMI)*

**Abstract.** There are many ways of summation of ranks of the private look (for example, [1] and links in [2], p. 170–183).

The major role at summation of functional ranks is played by a formula Plan summation. According to work [3] this formula is received in article The plan, published about two centuries ago, in 1820 (G. A. A. Plana, Mam. Acad. Torino, 25, 403–408). The author of the present article didn't manage to examine with the text of work of the Plan.

The subsequent use of a formula of summation of the Plan in literature sins serious shortcomings. So, in work [4] conditions formulated on page 38 Plan theorems as sets an example, carried out by us below, appear insufficient to receive a formula of summation of the Plan (11) in [4]. There are also works (for example, [5]), in which without the proof theorems of the Plan are used other conditions.

Therefore there was a need accurately to formulate and prove the theorem Plan.

The formula of summation of the Plan, as shown below, isn't always applicable for meeting ranks. The author of this work offers a new formula summation ( $K_\alpha$ -a summation formula) which is applicable for rather wide class of meeting ranks. From  $K_\alpha$ -a formula summation as the special case, turns out a formula of summation of the Plan.

$K_\alpha$ -the formula of summation will find a variety of appendices in many areas of mathematics, mechanics and physics. Below as an example  $K_\alpha$  application - summation formulas to the theory of dzeta-functions of Riman and to the theory of heat conductivity of cores is shown.

**Keywords:** ranks, formula of summation of the Plan, functional ranks.

## REFERENCES

- [1] *Evgrafov, M. A.* Analytic functions / M. A. Evgrafov. – M. : Nauka, 1968.
- [2] *Tranter, J.* Integral transforms in mathematical physics / J. Tranter. – M. : GITTL, 1956.
- [3] *Whittaker, E. T.* Course of modern analysis. Vol. 1 / ET Whittaker, N. J. Watson. – M. : Fizmatgiz, 1963.
- [4] *Bateman, G.* Higher transcendental functions. Vol. 1 / H. Bateman and A. Erdelyi. – M. : Fizmatgiz, 1973.
- [5] *Dahlquist, G.* On summation formulas due to Plana, Lindelof and Abel, and Related Gauss-Christoffel Rules, I, Bit numerical mathematics / G. Dahlquist. Springer. – 1999. – P. 256–295.
- [6] *Kronecker, L.* Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale / L. Kronecker // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1889. – P. 345–354.
- [7] *Kuliev, V. D.* Singular boundary value problems / V. D. Kuliev. – M. : FIZMATLIT, 2005.
- [8] *Henrici, P.* Applied and Computational Complex Analysis / P. Henrici. – Wiley : New York, 1974. – Vol. 1.

*Kuliev, Valekh Dzhafarovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow*

## АНАЛИЗ АСПЕКТОВ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ ИЗДЕЛИЙ БЕЗ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** В работе представлен анализ аспектов моделирования обработки материалов на примере цилиндрических заготовок, без осевой симметрии, а также взаимосвязанные особенности изменения характеристик материала в пространстве и времени.

**Ключевые слова:** обработка материалов, повышение характеристик материала, цилиндрические оболочки, оболочки без осевой симметрии, структурные изменения.

УДК: 539.374

Значительный интерес в части конструкционных материалов представляет сочетание традиционных изотропных материалов и включений микронеоднородных сред. Одним из важных аспектов широкого их применения является возможность взаимнооднозначного предсказания свойств материала в пространстве и времени по известным характеристикам.

Нелинейность распределения свойств материала при формоизменении усиливается за счет прохождения импульса внешнего воздействия, что необходимо учитывать при моделировании. Ряд предшествующих работ по данной тематике содержит предположения относительно действительной геометрии деформируемого образца, что обусловлено термическим, электромагнитным воздействием и сложностью самого процесса формоизменения.

Построение схемы дискретизации изначально изотропной металлической основы является реализуемой задачей при использовании соотношений профессора А. А. Трещева [2], [3], что в свою очередь позволяет более детально и целостно описать характеристики заготовки на макроуровне.

В разработанной модели (реализующая программа Tetra Compound v.1.1, свидетельство № 2013610558) расчет напряженно-деформированного состояния производится посредством последовательного приближения в ходе двухшаговой процедуры и последующего поиска уточненного решения на  $j$ -м шаге нагружения для внутреннего цикла в пределах единичного элемента и уточнения на внешнем вычислительном цикле в пределах заготовки в целом (рис. 1, 2).

Результирующее формоизменение каждого из элементов предопределено всей предшествующей траекторией нагружения образца и откликом близлежащих элементов на импульс внешнего воздействия. Как видно из рисунков 2-4, наибольшая интенсивность деформаций отмечается не вблизи края бокового отверстия (в ходе операции отбортовки), а при некотором смещении от края (для первых 15 мкс деформирования при магнитно-импульсной обработке). Это, в свою очередь, обусловлено поворотом относительно исходного состояния материальных волокон, их деформацией и воздействием со стороны окружающих слоев.



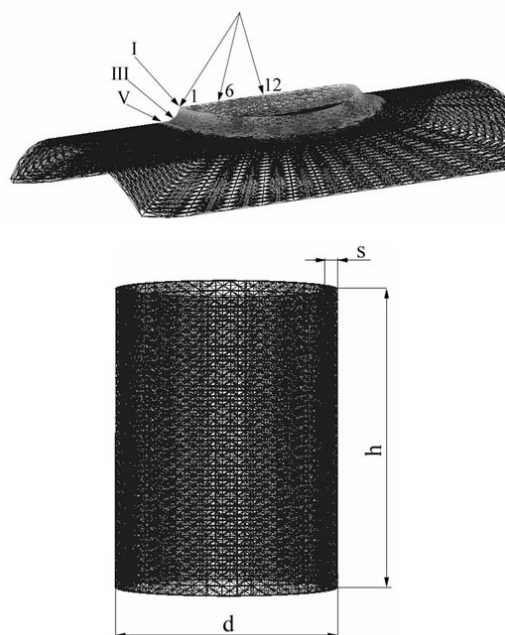


Рис. 1. Рассматриваемые опорные сегменты в зонах наибольшей интенсивности формоизменения материала и исходная оболочка (расчетная схема)

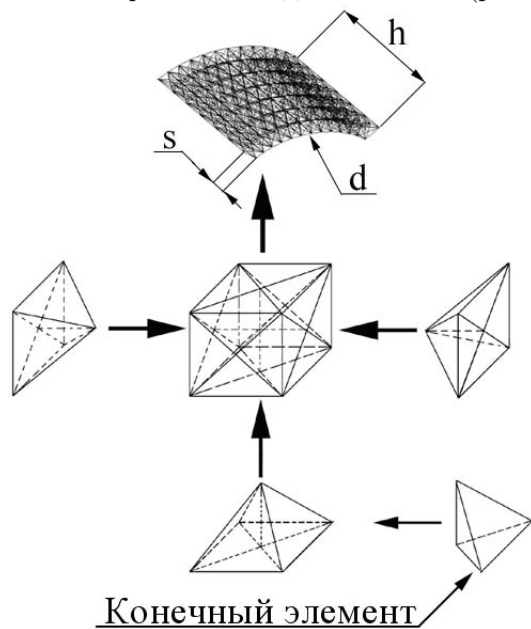


Рис. 2. Расчетная конечно-элементная схема заготовки

Различие в геометрии осевого и поперечного сечений непосредственно влияет на характер распределения деформаций и напряжений в объеме материала и изменение их во времени. На распределение характеристик НДС также оказывает влияние частота разряда и соотношение диаметров отверстия и заготовки, что требует дополнительного исследования.

Различными исследователями было доказано, что существует оптимальное значение частоты разряда, когда при постоянной величине условного давления ИМП наблюдается максимум

деформации. При высокой частоте разрядного тока падение кинематических характеристик объясняется снижением импульса силы, а для низкой частоты – ослаблением давления за счет ослабления давления при удалении заготовки уже на начальной стадии процесса. При этом не редко оптимальная частота разряда определяется как собственная частота заготовки:

$$f_{>?B} = \frac{\lambda}{4 \cdot \pi},$$

где  $\lambda$  – круговая частота колебаний цилиндрической тонкостенной заготовки. Таким образом, вопрос оптимизации процессов обработки полем остается во многом открытым.

Если рассматривать единичный элемент в осевом сечении заготовки (рис. 1, 5), то можно отметить цикличность в распространении упругих деформаций, а при более детальном изучении групп элементов можно отметить некоторое взаимное пространственно-временное смещение экстремальных точек соответствующих характеристик напряженно-деформированного состояния для различных элементов (рис. 2–4).

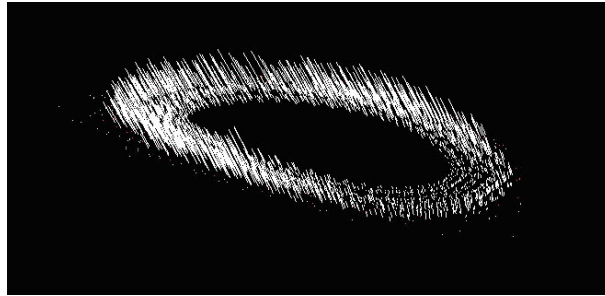


Рис. 3. Схема распределения узловых перемещений вокруг отверстия

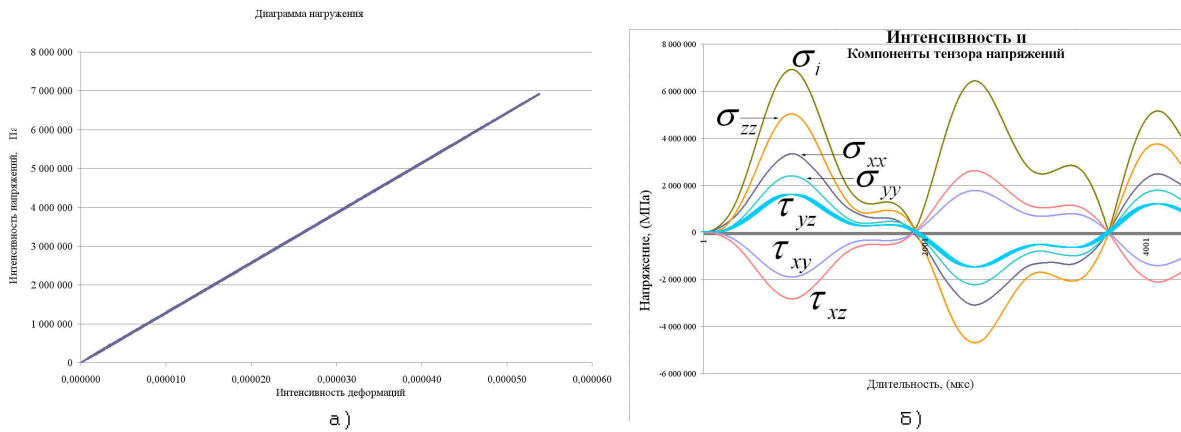


Рис. 4. Схема распределения интенсивности напряжений в деформируемых элементах вокруг отверстия заготовки

Взаимосвязь между компонентами тензоров напряжений и деформаций описывается на основе формул Кастильяно зависимостью (1):

$$e_{ij} = \frac{\partial W_k}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1)$$

Потенциал  $W$  в этом случае представляется в виде суммы (2)

$$W = \hat{W} + \tilde{W}, \quad (2)$$

где  $\hat{W}$  содержит слагаемые, приводящие к линейным соотношениям;  $\tilde{W}$  – составляющая потенциала, приводящая к нелинейным соотношениям между напряжениями и деформациями.

В рассматриваемом случае импульсу внешнего воздействия будет соответствовать пространственная траектория деформирования. При изготовлении трубчатых образцов их внешняя и внутренняя поверхности неизбежно подвергаются наклепу, т. е. еще до испытаний они представляют собой ортоотропное тело.

Цикличность пространственно-временного изменения характеристик в данном случае будет являться не менее значимым фактором, как и интенсивность внешнего воздействия при исчерпании ресурса пластичности. Стоит отметить определенную взаимосвязь данного изменения и относительного радиуса отверстия заготовки, а также толщины материала. Одновременно с этим основные характеристики НДС для различных элементов на крае отверстия могут находиться в противофазе, что непосредственно оказывает влияние на процесс итерационного приближения. Поворот единичных элементов (в точках I, III, V, рис. 1) относительно исходного положения является значительным, что учитывается применением формул Коши – Грина. Полученные соотношения взаимосвязи компонент тензора напряжений и деформаций имеют вид функционала, устанавливающего взаимосвязь констант материала и величин напряжений на предшествующем шаге последовательного нагружения (для изделия любой геометрии с учетом осевой компоненты):

$$\sigma_{ijk} = \Phi(\sigma_{ijk-1}; Y_e; Y_p). \quad (3)$$

Особую сложность представляет исследование микротрещин и связанных с этим структурных изменений в материале [1]. Возможное решение заключается в формулировке пространственно-временного составного интегрального критерия, оценивающего исчерпание ресурса пластичности. В числе составляющих критерия необходимо указать следующие: пространственно-временные характеристики распределения в объеме материала знакопеременных циклов нагружения, соотнесенных с общей длительностью процесса обработки и температурным режимом, приведение характеристик к эквивалентной величине в рассматриваемом сегменте; работа по деформированию единичного объема материала, нормированная по отношению к общей работе, необходимой для достижения предельного состояния (энергетический критерий); взаимноотносительный расчет зон структурных концентраторов для выявления очагов исчерпания ресурса пластичности; выявление зон первоочередного исчерпания ресурса пластичности с установлением и формализацией граничных условий.

Программная реализация (Tetra Compound v.1.1) позволяет установить взаимосвязь ранее упомянутых характеристик НДС в объеме материала и соотношения геометрических параметров заготовки при воздействии внешнего электромагнитного импульса с учетом нелинейного характера проникновения электромагнитного поля вглубь заготовки, что в контексте перечисленных критериев дает возможность сделать шаг от констатирующего характера проводимых исследований к предикативному.

**ЛИТЕРАТУРА**

[1] *Голенков, В. А.* Структурно-аналитическая мезомеханика и ее приложения / В. А. Голенков, В. Г. Малинин. – М. : Машиностроение, 2009. – 635 с.

[2] *Трещев, А. А.* Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А. А. Трещев. – Тула : РААСН, 2008. – 264 с.

[3] *Трещев, А. А.* Исследование устойчивости тонких цилиндрических оболочек, выполненных из дилатирующих материалов / А. А. Трещев // Изв. вузов. Строительство. – 1999. – № 1. – С. 14–19.

*Леонов Василий Михайлович,*

*кандидат технических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: BasilLeonov@Gmail.com*

V. M. Leonov

## ASPECT ANALYSIS OF SPECIMEN SHAPING WITHOUT AXIS SYMMETRY

*Tula State University*

**Abstract.** This paper presents analysis of modeling aspects of materials treatment based on example of round specimens without axis symmetry. There are also described related particularities of material characteristics variations in space and time.

**Keywords:** materials treatment, strengthen material characteristics, round specimens, round specimens without axis symmetry, structural changes.

### REFERENCES

- [1] *Golenkov, V. A.* Structural-analytical mesomechanics and its applications / V. A. Golenkov. – M. : Mashinostroenie, – 2009. – 635 p.
- [2] *Treschev, A. A.* The theory of deformation and strength of materials sensitive to the stress state. Defining relationships / A. A. Treschev. – Tula: RAACS, 2008. – 264 p.
- [3] *Treschev, A. A.* Investigation of the stability of a thin cylindrical shells made of delated materials / A. A. Treschev. – , 1990. – № 1. – P. 14–19.

*Leonov, Vasilii Mihailovich*

*Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Tula State University, Tula*

## ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ, ЗАДАННЫХ НА ГРАНИЦЕ ТЕЛА В ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ

*Воронежский государственный университет инженерных технологий*

**Аннотация.** Линеаризованы граничные условия в напряжениях для случая, когда внешнее воздействие задано на границе тела в деформированном состоянии. Линеаризация проведена до второго порядка малости независимых параметров. Рассмотрен частный случай, соответствующий однородному напряженно-деформированному состоянию.

**Ключевые слова:** напряжение, деформация, граничные условия, линеаризация, подвижная граница, независимые малые параметры.

УДК: 539.3

При изучении напряженно-деформированного состояния в механике деформируемого твердого тела часто встречаются случаи, когда на границе известны нормальные и касательные усилия. Тогда в постановке задачи используются граничные условия в напряжениях. Ограничимся случаем плоской деформации. Рассмотрим условия, поставленные на деформированной границе тела, описываемой функцией  $y = g(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ :

$$\begin{aligned}\sigma_\nu &= P_\sigma, \\ \tau_\nu &= P_\tau,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\nu$  – нормаль к функции  $g$ ,  $\varepsilon_1$  характеризует отклонение от некоторого идеализированного контура недеформированной границы, на которой задается внешнее воздействие  $P$ , а  $\varepsilon_2$  описывает, например, отклонение границы тела от идеальной формы на другом участке или неоднородность физических свойств материала тела и т. п.

В подобных случаях при проведении исследований часто используется метод возмущений. При этом возникает проблема линеаризации (1) по малым параметрам, поскольку (1) поставлены на границе в деформированном состоянии.

Воспользуемся известными формулами теории упругости [1], [2], тогда граничные условия (1) примут вид:

$$\begin{aligned}\sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau \cos \alpha \sin \alpha &= P_\sigma, \\ (\sigma_x - \sigma_y) \cos \alpha \sin \alpha + \tau (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) &= P_\tau,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $\alpha$  – угол наклона нормали  $\nu$  к функции  $g$ .

Компоненты тензора напряжений методом малых параметров ищем в виде следующих рядов:

$$\sigma_x = \sum_{m,n=0} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n \sigma_x^{(mn)}; \quad \sigma_y = \sum_{m,n=0} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n \sigma_y^{(mn)}; \quad \tau = \sum_{m,n=0} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n \tau^{(mn)}.\tag{3}$$

Представим функцию  $y = g(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  аналогично [2]:

$$y = g(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = g^{(0)} + \varepsilon_1 \bar{g} + \varepsilon_2 \bar{\bar{g}},\tag{4}$$

$$\bar{g} = g^{(10)} + \varepsilon_1 g^{(20)} + \frac{1}{2} \varepsilon_2 g^{(11)} + \varepsilon_1^2 g^{(30)} + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 g^{(12)} + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 g^{(21)} + \dots,$$

$$\bar{\bar{g}} = g^{(01)} + \varepsilon_1 g^{(02)} + \frac{1}{2} \varepsilon_2 g^{(11)} + \varepsilon_1^2 g^{(03)} + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 g^{(21)} + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 g^{(12)} + \dots,$$

где  $g^{(0)}$  описывает деформированную идеальную границу.

Учитывая (4), разложим компоненты тензоров напряжений и внешнее воздействие из (2):

$$\sigma_x|_{y=g} = \sum_{k,l,m,n=0} \varepsilon_1^{k+m} \varepsilon_2^{l+n} \left. \frac{\partial^{k+l} \sigma_x^{(mn)}}{\partial y^{k+l}} \right|_{y=g^{(0)}} \frac{(\bar{g})^k (\bar{\bar{g}})^l}{k!l!}, \quad (5)$$

$$P_\sigma|_{y=g} = \sum_{k,l,m,n=0} \varepsilon_1^{k+m} \varepsilon_2^{l+n} \left. \frac{\partial^{k+l} P_\sigma}{\partial y^{k+l}} \right|_{y=g^{(0)}} \frac{(\bar{g})^k (\bar{\bar{g}})^l}{k!l!}. \quad (6)$$

Вид  $\sigma_y$ ,  $\tau$ , и  $P_\tau$  аналогичен (5) и (6) соответственно.

Используя формулы для  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  из [1, 2], представим их рядами по малым параметрам:

$$\sin \alpha = \sum_{m,n=0} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n r^{(mn)}(x); \quad \cos \alpha = \sum_{m,n=0} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n s^{(mn)}(x), \quad (7)$$

$$\xi^{(0)} = 1 + \left( \frac{dg^{(0)}}{dx} \right)^2; \quad r^{(00)} = \left( \xi^{(0)} \right)^{-\frac{1}{2}}; \quad r^{(10)} = \left( \xi^{(0)} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{dg^{(0)}}{dx} \frac{dg^{(10)}}{dx},$$

$$\begin{aligned} r^{(11)} = & -\frac{1}{2} \left( \xi^{(0)} \right)^{-\frac{3}{2}} \left( 2 \frac{dg^{(10)}}{dx} \frac{dg^{(01)}}{dx} + \frac{dg^{(0)}}{dx} + \frac{dg^{(11)}}{dx} \right) + \\ & + 3 \left( \xi^{(0)} \right)^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{dg^{(0)}}{dx} \right)^2 \frac{dg^{(10)}}{dx} \frac{dg^{(01)}}{dx}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$r^{(20)} = -\frac{1}{2} \left( \xi^{(0)} \right)^{-\frac{3}{2}} \left( 2 \frac{dg^{(0)}}{dx} \frac{dg^{(20)}}{dx} + \left( \frac{dg^{(10)}}{dx} \right)^2 \right) + \frac{3}{2} \left( \xi^{(0)} \right)^{-\frac{5}{2}} \left( \frac{dg^{(0)}}{dx} \frac{dg^{(10)}}{dx} \right)^2,$$

$$s^{(00)} = -\frac{dg^{(0)}}{dx} r^{(00)}; \quad s^{(10)} = -\frac{dg^{(0)}}{dx} r^{(10)} - \frac{dg^{(10)}}{dx} r^{(00)};$$

$$s^{(11)} = -\frac{dg^{(0)}}{dx} r^{(11)} - \frac{dg^{(10)}}{dx} r^{(01)} - \frac{dg^{(01)}}{dx} r^{(10)} - \frac{dg^{(11)}}{dx} r^{(00)};$$

$$s^{(20)} = -\frac{dg^{(0)}}{dx} r^{(20)} - \frac{dg^{(20)}}{dx} r^{(00)} - \frac{dg^{(10)}}{dx} r^{(10)}.$$

Вид  $r^{(01)}$ ,  $r^{(02)}$ ,  $s^{(01)}$ ,  $s^{(02)}$  аналогичен, если в правой части поменять местами цифры в соответствующих верхних индексах.

Подставляя (3) и (7), (8) в граничные условия (2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малых параметров, получаем линеаризованные граничные условия (при  $y = g^{(0)}(x)$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(00)} (s^{(00)})^2 + \sigma_y^{(00)} (r^{(00)})^2 + \tau^{(00)} s^{(00)} r^{(00)} &= P_\sigma, \\ \left( \sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)} \right) s^{(00)} r^{(00)} + \tau^{(00)} \left( (r^{(00)})^2 - (s^{(00)})^2 \right) &= P_\tau, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
& 2\sigma_x^{(00)}s^{(00)}s^{(10)} + \left( \frac{\partial\sigma_x^{(00)}}{\partial y}g^{(10)} + \sigma_x^{(10)} \right) (s^{(00)})^2 + 2\sigma_y^{(00)}r^{(00)}r^{(10)} + \\
& + \left( \frac{\partial\sigma_y^{(00)}}{\partial y}g^{(10)} + \sigma_y^{(10)} \right) (r^{(00)})^2 + 2\tau^{(00)}(s^{(00)}r^{(10)} + s^{(10)}r^{(00)}) + \\
& + 2\left( \frac{\partial\tau^{(00)}}{\partial y}g^{(10)} + \tau^{(10)} \right) s^{(00)}r^{(00)} = \frac{\partial P_\sigma}{\partial y}g^{(10)}; \\
& \left( \sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)} \right) (s^{(10)}r^{(00)} + s^{(00)}r^{(10)}) + 2\tau^{(00)}(r^{(00)}r^{(10)} + s^{(10)}s^{(00)}) + \\
& + \left( \frac{\partial(\sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)})}{\partial y}g^{(10)} + \sigma_x^{(10)} - \sigma_y^{(10)} \right) s^{(00)}r^{(00)} + \\
& + \left( \frac{\partial\tau^{(00)}}{\partial y}g^{(10)} + \tau^{(10)} \right) ((r^{(00)})^2 - (s^{(00)})^2) = \frac{\partial P_\tau}{\partial y}g^{(10)};
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
& 2\sigma_x^{(00)}(s^{(00)}s^{(11)} + s^{(10)}s^{(01)}) + 2\left( \frac{\partial\sigma_x^{(00)}}{\partial y}g^{(10)} + \sigma_x^{(10)} \right) s^{(00)}s^{(01)} + \\
& + 2\left( \frac{\partial\sigma_x^{(00)}}{\partial y}g^{(01)} + \sigma_x^{(01)} \right) s^{(00)}s^{(10)} + 2\left( \frac{\partial\sigma_y^{(00)}}{\partial y}g^{(01)} + \sigma_y^{(01)} \right) r^{(00)}r^{(10)} + \\
& + \left( \frac{\partial\sigma_x^{(00)}}{\partial y}g^{(11)} + \frac{\partial^2\sigma_x^{(00)}}{\partial y^2}g^{(10)}g^{(01)} + \frac{\partial\sigma_x^{(01)}}{\partial y}g^{(10)} + \frac{\partial\sigma_x^{(10)}}{\partial y}g^{(01)} + \sigma_x^{(11)} \right) (s^{(00)})^2 + \\
& + \left( \frac{\partial\sigma_y^{(00)}}{\partial y}g^{(11)} + \frac{\partial^2\sigma_y^{(00)}}{\partial y^2}g^{(10)}g^{(01)} + \frac{\partial\sigma_y^{(01)}}{\partial y}g^{(10)} + \frac{\partial\sigma_y^{(10)}}{\partial y}g^{(01)} + \sigma_y^{(11)} \right) (r^{(00)})^2 + \\
& + 2\tau^{(00)}(s^{(00)}r^{(11)} + r^{(10)}s^{(01)} + s^{(10)}r^{(01)} + r^{(00)}s^{(11)}) + \\
& + 2\left( \frac{\partial\tau^{(00)}}{\partial y}g^{(10)} + \tau^{(10)} \right) (s^{(00)}r^{(01)} + r^{(00)}s^{(01)}) + 2\left( \frac{\partial\tau^{(00)}}{\partial y}g^{(01)} + \tau^{(01)} \right) \times \\
& \times (s^{(00)}r^{(10)} + r^{(00)}s^{(10)}) + 2\left( \frac{\partial\tau^{(00)}}{\partial y}g^{(11)} + \frac{\partial^2\tau^{(00)}}{\partial y^2}g^{(10)}g^{(01)} + \frac{\partial\tau^{(01)}}{\partial y}g^{(10)} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial\tau^{(10)}}{\partial y}g^{(01)} + \tau^{(11)} \right) s^{(00)}r^{(00)} = \frac{\partial P_\sigma}{\partial y}g^{(11)} + \frac{\partial^2 P_\sigma}{\partial y^2}g^{(10)}g^{(01)};
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)} \right) (s^{(11)}r^{(00)} + r^{(10)}s^{(01)} + s^{(10)}r^{(01)} + r^{(11)}s^{(00)}) + \\
& + \left( \frac{\partial\sigma_x^{(00)}}{\partial y}g^{(10)} + \sigma_x^{(10)} \right) (s^{(01)}r^{(00)} + r^{(01)}s^{(00)}) + \left( \frac{\partial\sigma_x^{(00)}}{\partial y}g^{(01)} + \sigma_x^{(01)} \right) \times \\
& \times (s^{(10)}r^{(00)} + r^{(10)}s^{(00)}) \left( \frac{\partial(\sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)})}{\partial y}g^{(11)} + \frac{\partial^2(\sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)})}{\partial y^2}g^{(10)}g^{(01)} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial(\sigma_x^{(01)} - \sigma_y^{(01)})}{\partial y}g^{(10)} + \frac{\partial(\sigma_x^{(10)} - \sigma_y^{(10)})}{\partial y}g^{(01)} + \sigma_x^{(11)} - \sigma_y^{(11)} \right) r^{(00)}s^{(00)} - \\
& - \left( \frac{\partial\sigma_y^{(00)}}{\partial y}g^{(10)} + \sigma_y^{(10)} \right) (s^{(01)}r^{(00)} + r^{(01)}s^{(00)}) - \left( \frac{\partial\sigma_y^{(00)}}{\partial y}g^{(01)} + \sigma_y^{(01)} \right) \times \\
& \times (s^{(10)}r^{(00)} + r^{(10)}s^{(00)}) + 2\tau^{(00)}(r^{(00)}r^{(11)} + r^{(10)}r^{(01)} - s^{(00)}s^{(11)} - s^{(10)}s^{(01)}) + \\
& + 2\left( \frac{\partial\tau^{(00)}}{\partial y}g^{(10)} + \tau^{(10)} \right) (r^{(00)}r^{(01)} - s^{(00)}s^{(01)}) + 2\left( \frac{\partial\tau^{(00)}}{\partial y}g^{(01)} + \tau^{(01)} \right) \times
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \times (r^{(00)}r^{(10)} - s^{(00)}s^{(10)}) = \frac{\partial P_\tau}{\partial y} g^{(11)} + \frac{\partial^2 P_\tau}{\partial y^2} g^{(10)} g^{(01)}; \\
& \sigma_x^{(00)} (2s^{(00)}s^{(20)} + (s^{(10)})^2) + 2 \left( \frac{\partial \sigma_x^{(00)}}{\partial y} g^{(10)} + \sigma_x^{(10)} \right) s^{(00)} s^{(10)} + \\
& + \left( \frac{\partial \sigma_x^{(00)}}{\partial y} g^{(20)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_x^{(00)}}{\partial y^2} (g^{(10)})^2 + \frac{\partial \sigma_x^{(10)}}{\partial y} g^{(10)} + \sigma_x^{(20)} \right) (s^{(00)})^2 + \\
& + \sigma_y^{(00)} (2r^{(00)}r^{(20)} + (r^{(10)})^2) + 2 \left( \frac{\partial \sigma_y^{(00)}}{\partial y} g^{(10)} + \sigma_y^{(10)} \right) r^{(00)} r^{(10)} + \\
& + \left( \frac{\partial \sigma_y^{(00)}}{\partial y} g^{(20)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_y^{(00)}}{\partial y^2} (g^{(10)})^2 + \frac{\partial \sigma_y^{(10)}}{\partial y} g^{(10)} + \sigma_y^{(20)} \right) (r^{(00)})^2 + \\
& + 2\tau^{(00)} (s^{(00)}r^{(20)} + r^{(10)}s^{(10)} + s^{(20)}r^{(00)}) + 2 \left( \frac{\partial \tau^{(00)}}{\partial y} g^{(10)} + \tau^{(10)} \right) \times \\
& \times (s^{(00)}r^{(10)} + r^{(00)}s^{(10)}) + 2 \left( \frac{\partial \tau^{(00)}}{\partial y} g^{(20)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau^{(00)}}{\partial y^2} (g^{(10)})^2 + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \tau^{(10)}}{\partial y} g^{(10)} + \tau^{(20)} \right) s^{(00)} r^{(00)} = \frac{\partial P_\sigma}{\partial y} g^{(20)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_\sigma}{\partial y^2} (g^{(10)})^2; \tag{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)}) (r^{(00)}s^{(20)} + r^{(10)}s^{(10)} + r^{(20)}s^{(00)}) + \left( \frac{\partial \sigma_x^{(00)}}{\partial y} g^{(10)} + \sigma_x^{(10)} \right) \times \\
& \times (s^{(10)}r^{(00)} + s^{(00)}r^{(10)}) + \left( \frac{\partial (\sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)})}{\partial y} g^{(20)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)})}{\partial y^2} \times \right. \\
& \times (g^{(10)})^2 + \left. \frac{\partial (\sigma_x^{(10)} - \sigma_y^{(10)})}{\partial y} g^{(10)} + \sigma_x^{(20)} - \sigma_y^{(20)} \right) s^{(00)} r^{(00)} - \\
& - \left( \frac{\partial \sigma_y^{(00)}}{\partial y} g^{(10)} + \sigma_y^{(10)} \right) (s^{(10)}r^{(00)} + s^{(00)}r^{(10)}) + \tau^{(00)} (2r^{(00)}r^{(20)} - \\
& - 2s^{(20)}s^{(00)} + (r^{(10)})^2 - (s^{(10)})^2) + 2 \left( \frac{\partial \tau^{(00)}}{\partial y} g^{(10)} + \tau^{(10)} \right) (r^{(00)}r^{(10)} - \\
& - s^{(00)}s^{(10)}) + \left( \frac{\partial \tau^{(00)}}{\partial y} g^{(20)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau^{(00)}}{\partial y^2} (g^{(10)})^2 + \frac{\partial \tau^{(10)}}{\partial y} g^{(10)} + \tau^{(20)} \right) ((r^{(00)})^2 - \\
& - (s^{(00)})^2) = \frac{\partial P_\tau}{\partial y} g^{(20)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_\tau}{\partial y^2} (g^{(10)})^2;
\end{aligned}$$

К соотношениям (9)–(12) следует добавить еще четыре условия, вид которых аналогичен (10) и (12), если поменять местами цифры в соответствующих верхних индексах коэффициентов (условия, полученные в результате приравнивания при  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_2^2$ ).

Рассмотрим частный случай, когда исследуемое состояние близко к однородному напряженно-деформированному:

$$f^{(0)}(x) = h, \quad u^{(0)}(x, y) = \varepsilon_x^0 x, \quad v^{(0)}(x, y) = \varepsilon_y^0 y,$$

$$\tau^{(00)} = \frac{\partial \sigma_y^{(00)}}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_x^{(00)}}{\partial y} = 0 \tag{13}$$

$$(\varepsilon_x^0 = \text{const}, \quad \varepsilon_y^0 = \text{const}).$$

Тогда  $g^{(i,j)}(x)$  ( $i, j = 0, 1, 2$ ) имеют вид, представленный в [3]. Компоненты (8) из (7) в этом случае следующие:

$$\begin{aligned} r^{(00)} &= 1; \quad s^{(00)} = r^{(10)} = r^{(01)} = 0; \quad s^{(10)} = -\frac{dg^{(10)}}{dx}; \quad s^{(01)} = -\frac{dg^{(01)}}{dx}; \\ r^{(20)} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{dg^{(10)}}{dx} \right)^2; \quad r^{(02)} = -\frac{1}{2} \left( \frac{dg^{(01)}}{dx} \right)^2; \quad s^{(20)} = -\frac{dg^{(20)}}{dx}; \quad s^{(02)} = -\frac{dg^{(02)}}{dx}; \\ r^{(11)} &= -\frac{dg^{(10)}}{dx} \frac{dg^{(01)}}{dx}; \quad s^{(11)} = -\frac{dg^{(11)}}{dx}. \end{aligned}$$

В результате линеаризованные граничные условия (9)-(12) принимают вид (при  $y = g^{(0)}(x) = (1 + \varepsilon_y^0)h$ ):

$$\sigma_y^{(00)} = P_\sigma; \quad \tau^{(00)} = P_\tau; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(10)} &= \frac{\partial P_\sigma}{\partial y} g^{(10)}; \\ \tau^{(10)} - \left( \sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)} \right) \frac{dg^{(10)}}{dx} &= \frac{\partial P_\tau^{(00)}}{\partial y} g^{(10)}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(11)} + 2 \left( \sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)} \right) \frac{dg^{(10)}}{dx} \frac{dg^{(01)}}{dx} + \frac{\partial \sigma_y^{(01)}}{\partial y} g^{(10)} - 2\tau^{(10)} \frac{dg^{(01)}}{dx} - \\ - 2\tau^{(01)} \frac{dg^{(10)}}{dx} &= \frac{\partial P_\sigma}{\partial y} g^{(11)} + \frac{\partial^2 P_\sigma}{\partial y^2} g^{(10)} g^{(01)}; \\ \tau^{(11)} - \left( \sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)} \right) \frac{dg^{(11)}}{dx} - \left( \frac{\partial \left( \sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)} \right)}{\partial y} g^{(10)} + \sigma_x^{(10)} - \sigma_y^{(10)} \right) \frac{dg^{(01)}}{dx} - \\ - \left( \frac{\partial \left( \sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)} \right)}{\partial y} g^{(01)} + \sigma_x^{(01)} - \sigma_y^{(01)} \right) \frac{dg^{(10)}}{dx} + \frac{\partial \tau^{(10)}}{\partial y} g^{(01)} + \frac{\partial \tau^{(01)}}{\partial y} g^{(10)} &= \\ = \frac{\partial P_\tau}{\partial y} g^{(11)} + \frac{\partial^2 P_\tau}{\partial y^2} g^{(10)} g^{(01)}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(20)} + \left( \sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)} \right) \left( \frac{dg^{(10)}}{dx} \right)^2 + 2\tau^{(10)} \frac{dg^{(10)}}{dx} &= \frac{\partial P_\sigma}{\partial y} g^{(20)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_\sigma}{\partial y^2} (g^{(10)})^2; \\ \tau^{(20)} - \left( \sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)} \right) \frac{dg^{(20)}}{dx} - \left( \frac{\partial \left( \sigma_x^{(00)} - \sigma_y^{(00)} \right)}{\partial y} g^{(10)} + \sigma_x^{(10)} - \sigma_y^{(10)} \right) \frac{dg^{(10)}}{dx} + \\ + \frac{\partial \tau^{(10)}}{\partial y} g^{(10)} &= \frac{\partial P_\tau}{\partial y} g^{(20)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_\tau}{\partial y^2} (g^{(10)})^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Ограничиваясь случаем малых деформаций ( $\varepsilon_x^0 \ll 1$ ,  $\varepsilon_y^0 \ll 1$ ) в (14)-(17) и полагая  $P_\sigma = P_\tau = 0$ , получаем (15) в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(10)} &= 0; \\ \tau^{(10)} - \sigma_x^{(00)} \frac{d(f^{(1)}(x) + v^{(10)}(x, h))}{dx} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Если пренебречь начальными несовершенствами, т. е.  $f^{(1)}(x) = 0$ , то (18) совпадает с [4], а если граничные условия ставятся на недеформированной границе ( $v^{(10)}(x, h) = v^{(01)}(x, h) = 0$ ), то (18) с точностью до обозначений совпадают с соотношениями из [2], [5].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Филоненко-Бородич, М. М.* Теория упругости / М. М. Филоненко-Бородич. – М. : Физматгиз, 1959. – 364 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластических деформаций / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [3] *Минаева, Н. В.* Метод возмущений в механике деформируемых тел / Н. В. Минаева. – М. : Научная книга, 2002. – 156 с.
- [4] *Ишлинский, А. Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости / А. Ю. Ишлинский // Укр. матем. журнал. – 1954. – Т. 6. – № 2. – С. 140–146.
- [5] *Гузъ, А. Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред / А. Н. Гузъ, Ю. Н. Немиш. – Киев : Выща школа, 1989. – 352 с.

*Минаева Надежда Витальевна,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж*

*e-mail: minaeva@yandex.ru*

*Хвостов Михаил Геннадьевич,*

*аспирант, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж*

N. V. Minaeva, M. G. Hvostov

**LINEARIZATION OF THE BOUNDARY CONDITIONS WHICH HAVE BEEN  
SET ON BORDER OF A BODY IN THE DEFORMED CONDITION**

*Voronezh State University of Engineering Technologies*

**Abstract.** Boundary conditions in tension for a case when external influence is set on body border in the deformed condition are linearized. Linearization is carried out to the second order of a malost of independent parameters. The special case corresponding to a uniform intense deformed condition is considered.

**Keywords:** tension, deformation, boundary conditions, linearization, mobile border, independent small parameters.

**REFERENCES**

- [1] *Filonenko-Borodich, M. M.* Elasticity theory / М. М. Филоненко-Бородич. – М. : Fizmatgiz, 1959. – 364 p.
- [2] *Ivlev, D. D.* Method of indignations in the theory of uprugoplastichesky deformations / D. D. Ivlev, L. V. Yershov. – М. : Nauka, 1978. – 208 p.
- [3] *Minaeva, N. V.* Method of indignations in mechanics of deformable bodies / N. V. Minaeva. – М. : Scientific book, 2002. – 156 p.
- [4] *Ishlinsky A. Yu.* Consideration of questions of stability balance of elastic bodies from the point of view of the mathematical theory elasticity / A. Yu. Ishlinsky // Ukr. maty. magazine. – 1954. – Vol. 6. – No 2. – P. 140–146.
- [5] *Guz, A. N.* Method of indignation of a form of border in mechanics continuous environments / A. N. Guz, Yu. N. Nemish. – Kiev : Higher school, 1989. – 352 p.

*Minaeva, Nadezhda Vitalyevna*

*Dr. of Phys. & Math. Sci., Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh*

*Hvostov, Mikhail Gennadevich*

*Postgraduate Student, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh*

В. М. Мирсалимов, М. В. Ахмедова

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ РАЗРУШЕНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОТВЕРСТИЙ

*Азербайджанский технический университет*

**Аннотация.** Рассматривается задача механики упругопластического разрушения тонкой пластины, ослабленной периодической системой криволинейных отверстий. Считается, что из контуров отверстий исходят симметричные прямолинейные трещины вдоль оси абсцисс. Исследуется начальное развитие пластических деформаций на продолжении трещин. Анализ предельного равновесия трещины с концевой зоной пластических деформаций осуществляется на основе деформационного критерия разрушения.

**Ключевые слова:** периодическая система криволинейных отверстий, прямолинейные трещины с концевыми зонами, упругопластическое разрушение, функция конформного отображения.

УДК: 539.375

**Введение.** Исследование поля напряжений в пластине, ослабленной бесконечной и в определенном смысле правильной системой отверстий, является одной из важных проблем плоской теории упругости и давно привлекает к себе внимание многих ученых (см. обзор в [2]). Однако бесконечная связность области, порождающая значительные трудности, долгое время не позволяла построить приемлемое для нужд практики решение. Трудность периодической задачи теории упругости для внешности отверстий некруговой формы заключается в том, что не удастся сравнительно просто построить функцию, конформно отображающую заданную периодическую систему некруговых отверстий физической плоскости на периодическую систему круговых отверстий в параметрической вспомогательной плоскости. В рассматриваемой статье с помощью предлагаемого эффективного способа преодолевается отмеченная трудность.

**Постановка задачи.** Пусть имеется упругая изотропная пластина, ослабленная периодической системой одинаковых криволинейных отверстий (рис. 1). Контуры отверстий предполагаются гладкими и имеющими форму, отличную от окружности. Обозначим эту область через  $D_z$ . Начало координат поместим в центре тяжести одного из отверстий, которое назовем основным. Границу этого отверстия обозначим через  $L_0$ . Центры криволинейных отверстий с границей  $L_m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) лежат на одной прямой и находятся в точках

$$P_m = m\omega \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \omega = 2.$$

$\omega = 2$  не имеет особого значения, так как всегда можно простым преобразованием получить соответствующие функции для любого  $\omega$ . Здесь вместо  $z = x + iy$  используются безразмерные переменные  $2z/\omega_0$ , которые обозначаются той же буквой  $z$ ;  $\omega_0$  – размерная длина, равная расстоянию между центрами соседних отверстий.

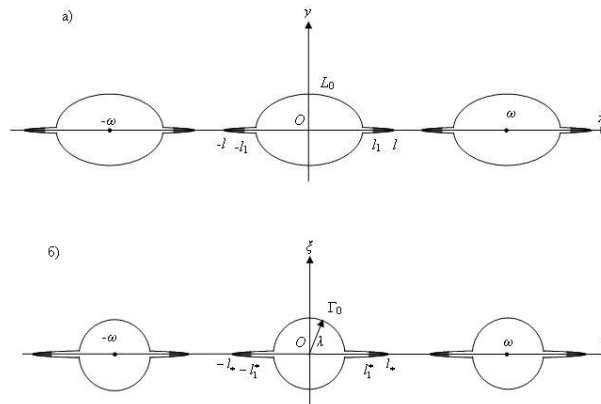


Рис. 1. Периодическая система отверстий с поверхностными трещинами в а) физической и б) параметрической плоскостях

Для упрощения задачи будем предполагать, что контуры  $L_m$  имеют две оси симметрии, одна из которых совпадает с осью абсцисс. Такие отверстия имеют наибольшее применение в инженерной практике. К ним, в частности, относятся отверстия, имеющие форму эллипсов, овалов, прямоугольников, ромбов, и т. п. Тем более что распространение метода Н. И. Мусхелишвили на общий случай вполне очевидно и легко осуществимо при некоторой модификации приводимых ниже уравнений.

Пусть из контуров отверстий исходят симметричные прямолинейные трещины вдоль оси абсцисс (рис. 1). Контуры криволинейных отверстий и берега трещин свободны от внешних нагрузок. Пусть в пластине имеют место средние напряжения  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = \sigma_y^\infty$ ,  $\tau_{xy} = 0$  (растяжение на бесконечности). Материал пластины будем считать упруго-идеальнопластическим, подчиняющимся условию пластичности Треска–Сен-Венана.

Высокая концентрация напряжений вблизи вершин трещин в некоторых случаях вызывает разупрочнение материала, окружающего трещину. Это может проявляться в образовании зон пластического течения. Анализ опытных данных, а также условий равновесия и развития трещин с учетом взаимодействия берегов трещины и зон разупрочнения приводит к модели трещины с концевой зоной (зоной предразрушения), в которой имеет место пластическое течение при постоянном напряжении. В ряде работ рассматриваются модели трещин, в которых принимается, что в концевых зонах, размер которых соизмерим с длиной трещины, имеет место пластическое течение при постоянном напряжении (см. обзор [1]).

Рассмотрим задачу о начальном развитии пластических деформаций, возникающих в окрестности концов трещин, при одноосном растяжении пластины усилиями  $\sigma_y^\infty$ , действующими перпендикулярно линии трещин. Пластические деформации сосредоточены вдоль некоторых линий скольжения, исходящих из концов трещин. Из опыта хорошо известна общая тенденция к формированию пластических областей на первых стадиях их развития в виде узких зон скольжения, занимающих незначительный объем тела по сравнению с его упругой частью [3], [4], [5], [10]. Первые зоны пластических деформаций согласно модели Леонова–Панасюка–Дагдейла будут развиваться по линиям на продолжении трещин.

Выделим участки трещины  $l_0 = l - l_1$  (концевые зоны), примыкающие к ее вершинам, в которых для материала пластины имеет место пластическое течение при постоянном напряжении (рис. 1). Взаимодействие берегов в концевых зонах трещины моделируется путем

введения между ее берегами линий пластического скольжения (вырожденных полос пластических деформаций). Размеры концевых зон зависят от вида материала пластины. Так как концевые зоны и толщина зоны пластического течения малы по сравнению с остальной (упругой) частью пластины, их можно мысленно представить в виде разрезов, поверхности которых взаимодействуют по некоторому закону и препятствуют раскрытию трещины.

Под действием внешней нагрузки  $\sigma_y^\infty$  в концевых зонах, соединяющих берега трещины, возникают нормальные  $\sigma_y = \sigma_S$  и касательные  $\tau_{xy} = 0$  усилия. Размеры концевых зон заранее неизвестны и подлежат определению.

На контуре отверстия  $L_m$  ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) граничные условия имеют вид

$$\sigma_n = 0, \quad \tau_{nt} = 0,$$

а на берегах трещин с концевыми зонами пластических деформаций

$$\sigma_y = a, \quad \tau_{xy} = 0,$$

где  $a = 0$  на берегах трещин и  $a = \sigma_S$  на линиях скольжения;  $\sigma_S$  – предел текучести материала пластины на растяжение.

В силу симметрии граничных условий и геометрии области  $D_z$ , занятой материалом среды, напряжения являются периодическими функциями с периодом  $\omega$ .

На основании формул Колосова-Мусхелишвили [8] и граничных условий на контурах отверстий и берегах трещин с концевыми зонами задача сводится к определению двух аналитических в области  $D_z$  функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  из краевых условий:

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] e^{2i\alpha} = 0, \quad (1)$$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\Phi'(t) + \Psi(t) = a, \quad (2)$$

где  $z \in L_m$ ;  $\alpha$  – угол, составляемый нормалью к контуру отверстия с осью  $x$ ;  $t$  – аффикс точек берегов трещин с концевыми зонами.

**Решение краевой задачи.** Для решения граничной задачи (1)-(2) перейдем на параметрическую плоскость  $\zeta$  с помощью конформного преобразования  $z = \omega(\zeta)$ . Аналитическая функция  $z = \omega(\zeta)$  осуществляет конформное отображение физической плоскости  $D_z$  на область  $D_\zeta$  в плоскости переменной  $\zeta$ , являющейся внешностью окружностей  $\Gamma_m$  радиуса  $\lambda$  с центрами в точках  $P_m = m\omega$  с взаимно однозначным соответствием бесконечно удаленных точек, а также соответствующих участков действительных и мнимых осей.

В случае периодической системы некруговых отверстий, границы которых являются кусочно-гладкими кривыми, имеющими две оси симметрии, общее представление аналитической функции  $z = \omega(\zeta)$ , осуществляющее конформное отображение области  $D_z$  на область  $D_\zeta$  в плоскости переменной области  $\zeta = \xi + i\eta$ , которая являет внешность окружностей  $\Gamma_m$  ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) радиуса  $\lambda$  с центрами в точках  $P_m = m\omega$  имеет [7] следующий вид:

$$\omega(\zeta) = \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k-1)}(\zeta)}{(2k+1)!}, \quad (3)$$

где  $\rho(\zeta) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \sin^{-2} \left(\frac{\pi\zeta}{\omega}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$ .

На основе равенства [8]

$$e^{2i\alpha} = \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\lambda^2 \overline{\omega'(\zeta)}},$$

принятых обозначений  $\Phi_*(\zeta) = \Phi[\omega(\zeta)]$  и  $\Psi_*(\zeta) = \Psi[\omega(\zeta)]$  граничные условия (1)-(2) примут вид:

$$\left[ \Phi_*(\zeta) + \overline{\Phi_*(\zeta)} \right] \overline{\omega'(\zeta)} - \frac{\zeta^2}{\lambda^2} \left[ \overline{\omega(\zeta)} \Phi'_*(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi_*(\zeta) \right] = 0, \quad (4)$$

$$\Phi_*(\xi) + \overline{\Phi_*(\xi)} + \frac{\overline{\omega(\xi)}}{\omega'(\xi)} \Phi'_*(\xi) + \Psi_*(\xi) = a, \quad (5)$$

где  $\zeta = \lambda e^{i\theta} + m\omega$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Решение задачи на параметрической плоскости (для области  $D_\zeta$ ) ищем [5] в виде

$$\Phi_*(\zeta) = \Phi_0(\zeta) + \Phi_1(\zeta), \quad \Psi_*(\zeta) = \Psi_0(\zeta) + \Psi_1(\zeta), \quad (6)$$

$$\Phi_0(\zeta) = \frac{1}{4} \sigma_y^\infty + \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(\zeta)}{(2k+1)!}, \quad (7)$$

$$\Psi_0(\zeta) = \frac{1}{2} \sigma_y^\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(\zeta)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k+1)}(\zeta)}{(2k+1)!},$$

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_L g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t - \zeta) dt, \quad (8)$$

$$\Psi_1(\zeta) = -\frac{\pi \zeta}{2\omega^2} \int_L g(t) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t - \zeta) dt,$$

$$\text{где } S(\zeta) = \sum'_m \left[ \frac{P_m}{(\zeta - P_m)^2} - \frac{2\zeta}{P_m^2} - \frac{1}{P_m} \right].$$

Штрих у суммы означает, что при суммировании исключается индекс  $m = 0$ , интегралы в (8) берутся по линии  $L = [-l_*, -\lambda] \cup [\lambda, l_*]$ ,  $g(t)$  – искомая функция.

$$g(t) = \frac{2\mu}{1 + \kappa} \frac{\partial}{\partial t} [v^+(t, 0) - v^-(t, 0)], \quad (9)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига;  $\kappa = (3 - \nu)/(1 - \nu)$  – постоянная Мусхелишвили;  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала. Параметр  $l_*$  определяется из уравнения

$$l = \omega(l_*). \quad (10)$$

Комплексные потенциалы в (6)-(8) определяют класс задач с периодическим распределением напряжений. Из условия равенства нулю главного вектора всех сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области  $D_\zeta$ , находим

$$\alpha_0 = \frac{\pi^2}{24} \lambda^2 \beta_2.$$

В силу выполненных условий периодичности система граничных условий (4) на  $\Gamma_m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) заменяется одним функциональным уравнением, например на контуре окружности  $\Gamma_0$ , а система краевых условий (5) – граничным условием на линии  $L$ .

Неизвестная функция  $g(\xi)$  и постоянные  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$  должны быть определены из краевых условий на берегах трещин и контуров отверстий. Для составления уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$  функций  $\Phi_0(\zeta)$  и  $\Psi_0(\zeta)$  представим граничное условие (4) в виде

$$\left[ \Phi_0(\zeta) + \overline{\Phi_0(\zeta)} \right] \overline{\omega'(\zeta)} - \frac{\zeta^2}{\lambda^2} \left[ \overline{\omega(\zeta)} \Phi'_0(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi_0(\zeta) \right] = f_1(\zeta) + i f_2(\zeta), \quad (11)$$

$$f_1(\zeta) + i f_2(\zeta) = - \left[ \Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi_1(\zeta)} \right] \overline{\omega'(\zeta)} + \frac{\zeta^2}{\lambda^2} \left[ \overline{\omega(\zeta)} \Phi'_1(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi_1(\zeta) \right]. \quad (12)$$



Относительно функции  $f_1(\zeta) + if_2(\zeta)$  будем считать, что она разлагается на  $|\zeta| = \lambda$  в ряд Фурье. В силу симметрии этот ряд имеет вид

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}^* e^{2ik\theta}, \quad \text{Im} A_{2k}^* = 0, \quad (13)$$

$$A_{2k}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1 + if_2) e^{-2ik\theta} d\theta. \quad (14)$$

Подставив в (14) выражение (12) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью теории вычетов найдем коэффициенты  $A_{2k}^*$ :

$$A_{2k}^* = -\frac{1}{2\omega} \int_L g(t) f_{2k}(t) dt, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{где } f_0(t) &= 2\gamma(t), \quad f_2(t) = -\frac{\lambda^2}{2}\gamma^{(2)}(t), \quad \gamma(t) = ctg\frac{\pi}{\omega}t, \\ f_{2k}(t) &= -\frac{\lambda^{2k}(2k-1)}{(2k)!}\gamma^{(2k)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-3)!}\gamma^{(2k-2)}(t) \quad (k = 2, 3, \dots), \\ f_{-2k}(t) &= -\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\gamma^{(2k)}(t) \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Для составления уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$  функций  $\Phi_0(\zeta)$  и  $\Psi_0(\zeta)$  разложим эти функции и функцию  $\omega(\zeta)$  в ряды Лорана в окрестности нулевой точки  $\zeta = 0$ :

$$\Phi_0(\zeta) = \frac{1}{4}\sigma_y^\infty + \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} r_{j,k} \zeta^{2j}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0(\zeta) &= \frac{1}{2}\sigma_y^\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} r_{j,k} \zeta^{2j} - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} (2j+2k+2) r_{j,k} \zeta^{2j}, \end{aligned}$$

$$\omega(\zeta) = \zeta - \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)\zeta^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k} \zeta^{2j+1}}{2j+1},$$

$$r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)! g_{j+k+1}}{(2j)!(2k+1)! 2^{2j+2k+1}}, \quad g_{j+k+1} = 2 \sum_m \frac{1}{m^{2j+2k+2}}.$$

Подставив в левую часть граничного условия (11) на контуре  $\Gamma_0$  ( $\xi = \lambda e^{i\theta}$ ) вместо  $\Phi_0(\zeta)$ ,  $\overline{\Phi_0(\zeta)}$ ,  $\Phi_0'(\zeta)$ ,  $\Psi_0(\zeta)$ ,  $\omega'(\zeta)$  и  $\omega(\zeta)$  их разложения в ряды Лорана, а в правую часть вместо  $f_1 + if_2$  ряд Фурье (13) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\exp(i\theta)$ , получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ . Ниже приводятся уравнения второго приближения:

$$\begin{aligned} a_1 F + \frac{A_2}{2} F_1 + \frac{A_4}{2} F_2 + \frac{b_1 \lambda^2}{2} F_1 + \frac{b_2 \lambda^4}{2} F_2 - m - f &= A_0^*, \\ b_1 \lambda^2 F + \frac{a_1 + b_2 \lambda^4}{2} F_1 + A_2 F_2 - m_1 - f_1 &= A_2^*, \\ b_2 \lambda^4 F + \frac{b_1 \lambda^2}{2} F_1 + \frac{a_1}{2} F_2 - m_2 - f_2 &= A_4^*, \\ A_2 F + \frac{a_4 + A_4}{2} F_1 + \frac{b_1 \lambda^2}{2} F_4 - m_3 - f_3 &= A_{-2}^*, \end{aligned} \quad (17)$$

$$A_4 F + \frac{A_2}{2} F_1 + \frac{a_1}{2} F_2 - m_4 - f_4 = A_{-4}^*,$$

где

$$a_1 = 1 + A_2 \lambda^2 r_{0,0} + A_4 \lambda^4 r_{0,1};$$

$$b_1 = A_2 \lambda^2 r_{1,0} + A_4 \lambda^4 r_{1,1}; \quad b_2 = A_2 \lambda^2 r_{2,0} + A_4 \lambda^4 r_{2,1};$$

$$F = 2 \left[ \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{4} + a_0 + a_2 \lambda^2 r_{0,0} + a_4 \lambda^4 r_{0,1}; \right]$$

$$F_1 = 2(a_2 + a_2 \lambda^2 r_{1,0} + a_4 \lambda^6 r_{1,1}); \quad F_2 = 2(a_4 + a_4 \lambda^8 r_{2,1} + a_2 \lambda^6 r_{2,0});$$

$$m = 2a_2 A_2 + \frac{3}{4} a_4 A_4 + \frac{2}{3} b_1 \lambda^2 (a_2 \lambda^4 r_{1,0} + a_4 \lambda^6 r_{1,1}) + \frac{4}{5} b_2 \lambda^4 (a_2 \lambda^6 r_{2,0} + a_4 \lambda^8 r_{2,1});$$

$$m_1 = -2a_2 a_1 + 4a_4 A_2 + \frac{2}{5} b_2 \lambda^4 (a_2 \lambda^4 r_{1,0} + a_4 \lambda^6 r_{1,1});$$

$$m_2 = -4a_2 a_1 - \frac{2}{3} a_2 b_2 \lambda^2;$$

$$m_3 = \frac{2}{3} a_2 A_4 + 2a_1 (a_2 \lambda^4 r_{1,0} + a_4 \lambda^6 r_{1,1}) + \frac{4}{5} b_1 \lambda^4 (a_2 \lambda^6 r_{2,0} + a_4 \lambda^8 r_{2,1});$$

$$m_4 = -2A_2 (a_2 \lambda^4 r_{1,0} + a_4 \lambda^6 r_{1,1}) + 4a_1 (a_2 \lambda^6 r_{2,0} + a_4 \lambda^8 r_{2,1});$$

$$f = a_1 \beta_2 + A_2 \gamma_0 + A_4 \gamma_1 + \beta_4 b_1 \lambda^2 + \beta_6 b_2 \lambda^4$$

$$f_1 = a_1 \beta_4 + A_4 \gamma_0 + A_2 \beta_2 + \beta_6 b_1 \lambda^6; \quad f_2 = a_1 \beta_6 + A_2 \beta_4 + A_4 \beta_2;$$

$$f_3 = a_1 \gamma_0 + A_2 \gamma_1 + \beta_2 b_1 \lambda^2 + \beta_4 b_2 \lambda^4; \quad f_4 = a_1 \gamma_0 + \gamma_0 b_1 \lambda^2 + \beta_2 b_2 \lambda^4;$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) + \beta_2 \lambda^2 r_{0,0} + \beta_4 \lambda^4 r_{0,1} + \beta_6 \lambda^6 r_{0,2} - 4a_2 \lambda^2 r_{0,0} - 16a_4 \lambda^4 r_{0,1};$$

$$\gamma_1 = \beta_2 \lambda^2 r_{1,0} + \beta_4 \lambda^6 r_{1,1} + \beta_6 \lambda^8 r_{1,2} - 8a_2 \lambda^4 r_{1,0} - 24a_4 \lambda^6 r_{1,1}.$$

Вывод уравнений последующих приближений осуществляется единообразным способом, здесь новых трудностей не возникает, кроме громоздкости записи. В третьем приближении количество этих уравнений составляет семь. Быстрая сходимость найденных систем уравнений в диапазоне  $0 < \lambda \leq 0,8$  объясняется тем, что коэффициенты систем (17) содержат высокие степени параметра  $\lambda$ .

Система уравнений не является замкнутой. Для замкнутости этой системы уравнений необходимо использовать граничное условие (5) на берегах трещин с концевыми зонами (на  $L$ ).

Требую, чтобы функции (6)-(8) удовлетворяли краевому условию на берегах линии  $L$ , после некоторых преобразований получаем сингулярное интегральное уравнение относительно  $g(\xi)$

$$\frac{1}{\omega} \int_L g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t - \xi) dt + H(\xi) = a. \quad (18)$$

Здесь  $H(\xi) = \Phi_0(\xi) + \overline{\Phi_0(\xi)} + \frac{\omega(\xi)}{\omega'(\xi)} \Phi_0'(\xi) + \Psi_0(\xi)$ .

Алгебраическая система (17) совместно с сингулярным интегральным уравнением (18) являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить функцию  $g(\xi)$  и коэффициенты  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ . Решая их с учетом ограниченности напряжений в вершинах трещин, найдем искомую функцию  $g(\xi)$ , коэффициенты  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$  и определим размер зоны пластических деформаций на продолжении трещин.

**Методика численного решения и анализ.** Используя разложение

$$\frac{\pi}{\omega} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} t = \frac{1}{t} - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{t^{2j+1}}{\omega^{2j+2}},$$

уравнение (18) можно привести к обычной форме:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{g(t) dt}{t - \xi} + \frac{1}{\pi} \int_L g(t) K(t - \xi) dt + H(\xi) = a, \quad (19)$$

где  $K(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{t^{2j+1}}{\omega^{2j+2}}$ .

Преобразуем интегральное уравнение (19) к виду, более удобному для нахождения приближенного решения,

$$\frac{2}{\pi} \int_{\lambda_1}^1 \frac{\xi_* g(\xi_*) d\xi_*}{\xi_*^2 - \xi_0^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^1 g(\xi_*) K_0(\xi_*, \xi_0) d\xi_* + H(\xi_0) = a, \quad (20)$$

где  $K_0(\xi_*, \xi_0) = K(\xi_* - \xi_0) + K_0(\xi_* + \xi_0)$ ,  $\xi_* = \frac{t}{l}$ ,  $\xi_0 = \frac{\xi}{l_*}$ ,  $\lambda_1 = \frac{\lambda}{l_*}$ .

Сделаем замену переменных:

$$\xi_*^2 = u = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\tau + 1) + \lambda_1^2, \quad \xi_0^2 = u_0 = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\eta + 1) + \lambda_1^2. \quad (21)$$

При этом интервал интегрирования  $[\lambda_1, 1]$  переходит в отрезок  $[-1, 1]$ , а преобразованное уравнение (20) принимает стандартный вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_*(\tau) d\tau}{\tau - \eta_*} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_*(\tau) B(\eta_*, \tau) d\tau + H_*(\eta_*) = a, \quad (22)$$

где  $g_*(\tau) = g(\xi_*)$ ,  $H_*(\eta_*) = H(\xi_0)$ .

$$B(\eta_*, \tau) = - \frac{1 - \lambda_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \left( \frac{l_*}{2} \right)^{2j+2} u_0^j B_j,$$

$$B_j = 2j + 1 + \frac{(2j + 1)2j(2j - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{u}{u_0} + \dots + \left( \frac{u}{u_0} \right)^j.$$

Для построения решения сингулярного интегрального уравнения использовался метод прямого решения сингулярных интегральных уравнений [5], [11]. Сингулярное интегральное уравнение (22), кроме особенности в ядре Коши, имеет в неподвижную особенность в точке выхода трещины на поверхность отверстия. В этом случае функция  $g_*(\tau)$  в точках  $\xi = \pm \lambda$  имеет особенность, отличную от корневой. Характер этой особенности может быть определен из анализа интегрального уравнения (22) [8]. В отличие от случая внутренней трещины с концевыми зонами интеграл  $\int_{\lambda}^{l_*} g(t) dt = C \neq 0$ . Постоянная  $C$  выражается через раскрытие трещины на поверхности отверстия и должна быть определена после решения сингулярного интегрального уравнения.

В поставленной задаче следовало бы использовать метод решения интегрального уравнения, построенного на базе квадратурной формулы Гаусса-Якоби. Из-за громоздкости выражений для функций  $B(\eta_*, \tau)$  и  $H_*(\eta_*)$  определение особенности функции  $g_*(\tau)$  в точках  $x = \pm \lambda$  затруднительно. Кроме того, следует отметить, что некоторый выигрыш в сходимости по уточненному методу теряется из-за громоздкости формул для коэффициентов матрицы системы. В связи с этим использовали другой, упрощенный способ численного решения интегральных уравнений типа (22), эффективность которого проверена на многочисленных задачах [6], [9], [11]. Так как в упругопластической пластине напряжения ограничены, решение сингулярного интегрального уравнения (22) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Представим решение в виде

$$g_*(\eta_*) = g_0(\eta_*)\sqrt{1 - \eta_*^2}, \quad (23)$$

где  $g_0(\eta_*)$  – новая неизвестная ограниченная функция.

Используя квадратурные формулы, сингулярное интегральное уравнение (22) можно свести к конечной алгебраической системе  $M+1$  уравнений:

$$\sum_{m=1}^M \frac{g_0(\tau_m)}{M+1} \sin^2 \frac{\pi m}{M+1} \left( \frac{1}{\tau_m - \eta_r} + B(\tau_m, \eta_r) \right) = \pi [a(\eta_r) - H_*(\eta_r)] \quad (r = 1, 2, \dots, M+1), \quad (24)$$

где  $\tau_m = \cos \frac{\pi m}{M+1}$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ );  $\eta_r = \cos \frac{2r-1}{2(M+1)}\pi$  ( $r = 1, 2, \dots, M+1$ ).

Полученная алгебраическая система  $M+1$  уравнений (24) для определения неизвестных значений  $g_0(\tau_1), g_0(\tau_2), \dots, g_0(\tau_m)$  и  $l_0$  удовлетворяет дополнительному условию, при котором существует решение в классе всюду ограниченных функций [8].

Из-за неизвестного размера концевой зоны пластических деформаций объединенная алгебраическая система, состоящая из разрешающей системы задачи (17), (10), (24), является нелинейной. Во избежание решения нелинейной системы уравнений применяем обратный способ. Считаем заданным размер концевой зоны трещины, а в процессе решения определяем параметр нагружения  $\sigma_y^\infty$ . При таком способе решения алгебраическая система (10), (17), (24) оказывается линейной. Для численных расчетов полагалось  $M = 30$ , что отвечает разбиению на 30 чебышевских узлов соответственно. Расчеты были выполнены методом Гаусса с выбором главного элемента.

Для определения предельно-равновесного состояния тонкой пластины, при котором происходит рост трещины, используем критерий критического раскрытия берегов трещины у основания пластической зоны

$$v^+ - v^- = \delta_c,$$

где  $v^+$  и  $v^-$  – граничные значения перемещений на верхнем и нижнем берегах трещины соответственно;  $\delta_c$  – характеристика трещиностойкости материала пластины. Это дополнительное условие позволяет определить параметры растягиваемой пластины, при которых происходит развитие трещины.

На основании полученного решения вычислим раскрытие  $v(\eta, 0)$  на берегах концевой зоны пластических деформаций

$$v(\eta, 0) = \frac{1 + \kappa}{2\mu} \int_{-l_*}^{\eta} g(\eta) d\eta.$$

Раскрытие берегов зоны пластических деформаций при  $\eta = -l_1^*$  ( $x = -l_1$ ) (у основания зоны пластических деформаций) будет

$$v(-l_1^*, 0) = -\frac{1 + \kappa}{2\mu} \int_{-l_*}^{-l_1^*} g(\eta) d\eta.$$

Таким образом, условие, определяющее предельную растягивающую нагрузку  $\sigma_0^*$ , при которой происходит рост трещины в точке  $x = \pm l_1$ , можно представить как

$$-\frac{1 + \kappa}{2\mu} \int_{-l_*}^{-l_1^*} g(\eta) d\eta = \delta_c.$$

Используя замену переменных, заменяя интеграл суммой, получим

$$-\frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{\pi(l_* - \lambda)}{M} \sum_{m=1}^{M_1} g_0(\tau_m) = \delta_c, \quad (25)$$

где  $M_1$  – число узловых точек в интервале  $(-l_*, -l_1^*)$ .

Совместное решение объединенной алгебраической системы (17), (24) (25) дает возможность определить критическую величину растягивающей нагрузки и размер концевой зоны пластических деформаций для состояния предельного равновесия, при котором происходит рост трещины в пластине.

**Анализ решения конкретных задач.** В качестве отверстий выбраны эллипсы с различными соотношениями полуосей и квадраты с радиусами закругления углов. Такой выбор объясняется наибольшей вероятностью их применения в инженерной практике. Эллипсы брались с соотношением полуосей  $a/b$ , принимающим значения  $3/2, 2, 5/2, 3$ , причем для каждого из этих случаев рассматривались различные значения полуоси  $a$ . Значение периода  $\omega$  бралось равным двум. Большие оси эллипсов лежат на оси абсцисс. Отношения радиуса  $\rho$  закругления угла квадрата к длине его стороны принимались равными  $0,05$  и  $0,025$ . Длины сторон при этом варьировались от  $0,4$  до  $0,8$ . Стороны квадратов параллельны осям координат.

Пусть нам известна аналитическая функция  $\omega_0(\zeta)$ , конформно отображающая внешность круга  $\Gamma_0$  радиуса  $\lambda$  ( $\lambda < 1$ ) плоскости  $\zeta$  на внешность некругового контура  $L_0$  плоскости  $z = x + iy$  с соответствием бесконечно удаленных точек  $\omega_0(\infty) = \infty$ . В настоящее время имеется большой каталог таких отображающих функций [12].

Задача состоит в том, чтобы найти такие значения коэффициентов  $A_{2k}$ , которые будут наилучшим образом обеспечивать величинам  $\omega(\theta_j)$  отображающей функции (3) значения  $\omega_0(\theta_j)$ . Таким образом, требуется найти наиболее вероятные значения неизвестных коэффициентов.

Согласно принципу наименьших квадратов наименее вероятными значениями параметров будут такие, при которых сумма квадратов отклонений

$$\varepsilon_i = \omega(\theta_j) - \omega_0(\theta_j) \quad (j = \overline{1, n})$$

будет наименьшей, т. е.

$$U = \sum_{j=1}^n [\omega(\theta_j) - \omega_0(\theta_j)]^2 \rightarrow \min.$$

Используя необходимое условие экстремума функции нескольких переменных, получаем конечную линейную алгебраическую систему уравнений для определения коэффициентов  $A_{2k}$

$$\frac{\partial U}{\partial A_{2k}} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Все вычисления проводились с двойной точностью. При этом сначала применялась программа для нахождения приближенного конформного отображения  $\omega(\zeta)$  при заданных геометрических характеристиках отверстий. Полученные результаты подставлялись в другую программу для решения алгебраических систем (10), (17), (24) и (25) методом Гаусса с выбором главного элемента.

В результате вычислений были найдены критические напряжения  $\sigma_y^\infty$  при одноосном растяжении пластины с периодической системой эллиптических и квадратных отверстий, а также размеры зон пластических деформаций.

**Заключение.** Модель трещины с концевыми зонами пластического течения при постоянном напряжении позволяет провести анализ предельного равновесия трещин в тонкой пластине, ослабленной периодической системой криволинейных отверстий с помощью деформационного критерия. Анализ предельного равновесия трещин тонкой перфорированной пластины, при котором происходит рост трещин, сводится к параметрическому исследованию разрешающей алгебраической системы (10), (17), (24) и критерия развития трещины (25) при различных механических характеристиках материала, а также геометрических параметрах пластины.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Григолюк, Э. И. Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. – М. : Наука, 1970. – 556 с.
- [2] Витвицкий, П. М. Пластические деформации в окрестности трещины и критерии разрушения. Обзор / П. М. Витвицкий, В. В. Панасюк, С. Я. Ярема // Проблемы прочности. – 1973. – № 2. – С. 3-19.
- [3] Ивлев, Д. Д. Предельное состояние деформируемых тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин, Ю. Н. Радаев, С. И. Сенашов, Е. И. Шемякин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 556 с.
- [4] Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / Д. Д. Ивлев, А. Ю. Ишлинский. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
- [5] Мирсалимов, В. М. Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [6] Мирсалимов, В. М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. – Баку : Элм, 1984. – 124 с.
- [7] Мирсалимов, В. М. Периодическая задача о развитии полостей в вязких средах / В. М. Мирсалимов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2011. – № 2. – С. 104-111.
- [8] Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [9] Панасюк, В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев : Наукова думка, 1991. – 416 с.
- [10] Rusinko, A. Plasticity and Creep of Metals / A. Rusinko, K. Rusinko. – Springer : Verlag Berlin Heidelberg, 2011. – 436 p.
- [11] Саврук, М. П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. – Киев : Наукова думка, 1989. – 248 с.
- [12] Савин, Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1951. – 496 с.

*Мирсалимов Вагиф Мирахмедович,*

*доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой технической механики, Азербайджанский технический университет, г. Баку*

*e-mail: mir-vagif@mail.ru*

*Ахмедова Майя Вели гызы,*

*аспирант кафедры технической механики, Азербайджанский технический университет, г. Баку*

*e-mail: sopromat\_V@mail.ru*

V. M. Mirsalimov, M. V. Akhmedova

**ELASTOPLASTIC FRACTURE OF A THIN PLATE, WEAKENED  
BY THE PERIODIC SYSTEM OF THE CURVILINEAR HOLES**

*Azerbaijan Technical University*

**Abstract.** The problem of elasto-plastic fracture mechanics for thin plate weakened by a periodic system of curvilinear holes is considered. It is assumed that along the  $x$ -axis symmetrical rectilinear cracks are emanated from the contours of holes. The initial development of the plastic deformation on the extension of cracks is study. Analysis of the equilibrium limit state of crack with plastic deformations end zone is carried out on the basis of the deformation fracture criterion.

**Keywords:** periodic system of curvilinear holes, rectilinear cracks with end zones, elastoplastic fracture, conformal mapping function.

**REFERENCES**

- [1] *Grigolyuk, E. I.* Perforated plates and shells / E. I. Grigolyuk, L. A. Filshinskii. – M. : Nauka, 1970. – 556 p.
- [2] *Vitvitskii, P. M.* Plastic deformation in the vicinity of a crack and the criteria of fracture a review / P. M. Vitvitskii, V. V. Panasyuk, S. Ya. Yarema // Strength of Materials. – 1973. – Vol. 5. – Issue 2. – P. 135–151.
- [3] *Ivlev, D. D.* Limiting condition of deformable bodies and rocks / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, R. I. Nepershin, Y. N. Radaev, S. I. Senashov, E. I. Shemyakin. – M. : Fizmatlit, 2008. – 556 p.
- [4] *Ishlinskii, A. Yu.* The mathematical theory of plasticity / A. Yu. Ishlinskii, D. D. Ivlev. – Fizmatlit, Moscow, 2001. – 704 p.
- [5] *Mirsalimov, V. M.* Not-one dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987. – 256 p.
- [6] *Mirsalimov, V. M.* Fracture of elastic and elastic-plastic bodies with cracks / V. M. Mirsalimov. – Baku : Elm, 1984. – 124 p.
- [7] *Mirsalimov, V. M.* Periodic problem of cavity development in viscous media / VM Mirsalimov // Fluid Dynamics. – 2011. – Vol. 46. – Issue 2. – P. 262–269.
- [8] *Muskhelishvili, N. I.* Some Basic Problem of Mathematical Theory of Elasticity / N. I. Muskhelishvili. – Amsterdam, Kluwer, 1977. – 707 p.
- [9] *Panasyuk, V. V.* Mechanics of Quasibrittle Fracture of Materials, Naukova Dumka, Kiev, 1991. – 416 p.
- [10] *Rusinko, A.* Plasticity and Creep of Metals / A. Rusinko, K. Rusinko. – Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 2011. – 436 p.
- [11] *Savruk, M. P.* Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks / M. P. Savruk. – Kiev : Naukova Dumka, 1981. – 248 p.
- [12] *Savin, G. N.* Concentration of stresses about holes / G. N. Savin. – M. ; L. : Qostekhizdat, 1951. – 496 p.

*Mirsalimov, Vagif Mirakhmedovich*

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, head department of Mechanical Engineering, Azerbaijan Technical University, Baku*

*Akhmedova, Maya Veli qizi*

*Post-Graduate Student, Department of Mechanical Engineering, Azerbaijan Technical University, Baku*



В. М. Мирсалимов, Р. А. Искендеров

## ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИН ПРИ ОДНОРОДНОМ ИЗГИБЕ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ

*Азербайджанский технический университет,*

*Азербайджанский архитектурно-строительный университет*

**Аннотация.** Дается математическое описание модели зарождения трещин при однородном изгибе в тонкой пластине, ослабленной периодической системой круглых отверстий. Строятся общие представления решений, описывающие класс задач с периодическим распределением напряжений вне круговых отверстий. Решение задачи о зарождении трещин сводится к двум бесконечным алгебраическим системам и двум сингулярным интегральным уравнениям первого рода.

**Ключевые слова:** тонкая пластина, однородный изгиб, зоны предразрушения, периодическая система круговых отверстий.

УДК: 539.375

Во многих отраслях современной техники широко используются технические средства, в которых содержатся конструкционные элементы в виде пластин, ослабленных большим количеством отверстий, т. е. перфорированных пластин.

Пусть изотропная упругая пластина, ослабленная периодической системой круговых отверстий, подвергается изгибу средними моментами (изгиб на бесконечности)

$$M_x = M_x^\infty, \quad M_y = M_y^\infty, \quad H_{xy} = 0.$$

Считается, что круговые отверстия имеют радиус  $\lambda$  ( $\lambda < 1$ ) и центры в точках

$$P_m = m\omega \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \omega = 2.$$

Процессы разрушения реальных материалов имеют сложный характер и протекают для различных материалов по-разному. Это зависит от особенностей структуры материала, его химического состава, вида напряжения и других. В настоящее время известны различные механизмы зарождения трещин [1]. Задача о зарождении трещины является [2], [3], [4] важной проблемой теории прочности.

По мере нагружения пластины изгибающими моментами будут возникать зоны предразрушения, которые моделируем как области ослабленных межчастичных связей материала. Будем зоны предразрушения (прослойки перенапряженного материала) моделировать в виде узких слоев со связями между берегами. Взаимодействие берегов зоны предразрушения моделируется путем введения между берегами зоны связей, имеющих заданную диаграмму деформирования. Физическая природа таких связей и размеры областей, в которых осуществляется взаимодействие берегов зоны предразрушения, зависят от вида материалов. Так как

указанные зоны (прослойки перенапряженного материала) малы по сравнению с остальной упругой частью пластины, то их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. Из опыта хорошо известна общая тенденция к формированию областей предразрушения на ранних стадиях развития в виде узких слоев, занимающих незначительный объем тела по сравнению с его упругой зоной [1], [5], [6], [7].

Зоны предразрушения ориентированы в направлении максимальных растягивающих напряжений (рис. 1). Для математического описания взаимодействия берегов зоны предразрушения полагаем, что в этих зонах между берегами имеются связи, которые сдерживают раскрытие берегов зоны предразрушения. Считается, что в зоне предразрушения имеет место пластическое течение при постоянном напряжении.

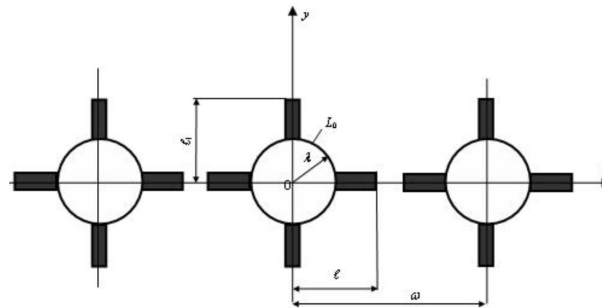


Рис. 1. Изгибаемая пластина, ослабленная периодической системой круговых отверстий и зонами предразрушения

Под действием внешних нагрузок (изгибающих моментов) в связях, соединяющих берега зоны предразрушения, возникают усилия, имеющие из-за симметрии задачи только нормальную составляющую  $\sigma_y = \sigma_s$ . Следовательно, к берегам зоны предразрушения будут приложены только нормальные изгибающие усилия  $M_s$ . Размер зоны предразрушения заранее неизвестен и подлежит определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения пластины, ослабленной периодической системой круговых отверстий, при однородном изгибе.

Задача заключается в определении напряженно-деформированного состояния пластины, а также в нахождении предельной нагрузки, по достижении которой произойдет появление трещины. В исследуемом случае возникновение трещины представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала.

Дифференциальное уравнение для искомой функции прогиба  $w$ , определяющей напряженное и деформированное состояние пластины, ослабленной периодической системой круговых отверстий имеет вид

$$\Delta \Delta w = 0,$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа.

По мере увеличения интенсивности изгибающей нагрузки в такой пластине вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых носит периодический характер. Эти зоны способствуют зарождению трещин возле отверстий, что в свою очередь может привести к полному разрушению пластины.

Пластина на основании сказанного выше ослаблена двумя периодическими системами прямолинейных зон предразрушения коллинеарных осей абсцисс и ординат неравной длины (рис. 1).

Принято, что контуры периодической системы круговых отверстий свободны от внешних нагрузок. В силу симметрии граничных условий и геометрии области, занятой материалом пластины, напряжения являются периодическими функциями с периодом  $\omega$ .

Для однородной задачи теории изгиба удельные моменты, удельные поперечные силы представим через две аналитические функции  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  (вывод этих соотношений можно найти в [8]):

$$M_x + M_y = -4D(1 + \nu) \operatorname{Re}\Phi(z),$$

$$M_y - M_x = 2iH_{xy} = 2D(1 - \nu) [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)],$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)},$$

где  $M_x$ ,  $M_y$  и  $H_{xy}$  – соответственно удельные изгибающие и крутящие моменты;  $E$  и  $\nu$  – модуль упругости Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины;  $h$  – толщина пластины.

На основании соотношений классической теории [8] Кирхгофа и Колосова-Мусхелишвили [9], а также краевых условий на контурах круговых отверстий и берегах зон предразрушения задача сводится к отысканию двух аналитических функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  из граничных условий

$$\varepsilon \overline{\Phi(\tau)} + \Phi(\tau) - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} = 0 \text{ на берегах круговых отверстий,} \quad (1)$$

$$\varepsilon \Phi(t) + \bar{\Phi}(t) + t\bar{\Phi}'(t) + \bar{\Psi}(t) = M_s + iC \quad \text{на } L'_1, \quad (2)$$

$$\varepsilon \Phi(t_1) + \bar{\Phi}(t_1) + t_1\bar{\Phi}'(t_1) + \bar{\Psi}(t_1) = M_s + iC_1 \quad \text{на } L'_2, \quad (3)$$

где  $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );  $t$  и  $t_1$  – аффиксы точек берегов зон предразрушения, направленных по осям абсцисс и ординат соответственно;  $C$ ,  $C_1$  – действительные постоянные, определяемые в ходе решения задачи из условия равенства нулю скачка прогиба  $[w]$  в вершинах зон предразрушения,  $\varepsilon = -(3 + \nu)/(1 - \nu)$ ;  $L'_1$  – совокупность берегов зон предразрушения, коллинеарных оси абсцисс;  $L'_2$  – тоже для берегов зон предразрушения, коллинеарных оси ординат.

Для определения значений внешней нагрузки (изгибающих моментов), при котором происходит зарождение трещины, нужно постановку задачи дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимаем [3], [4] критерий критического раскрытия берегов зоны предразрушения.

В рассматриваемой задаче эти условия запишутся в виде

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = \delta_{cr} \text{ для } L'_1, \quad (4)$$

$$u^+(x, 0) - u^-(x, 0) = \delta_{cr} \text{ для } L'_2,$$

для  $\delta_{cr}$  – характеристика сопротивления материала пластины трещинообразованию.

Эти дополнительные условия позволяют определить параметры изгибаемой пластины, при которых появляется трещина в пластине.

**Решение краевой задачи.** Решение краевой задачи (1)–(3) ищем в виде:

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z), \quad (5)$$

$$\Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z),$$

$$\Phi_1(z) = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4(1+v)D} + \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (6)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2D(1-v)} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{i\omega(1+\kappa_0)} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-z) dt, \quad (7)$$

$$\Psi_2(z) = -\frac{1}{i\omega^2(1+\kappa_0)} \int_{L_1} g(t) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t-z) dt,$$

$$\Phi_3(z) = \frac{1}{\omega(1+\kappa_0)} \int_{L_2} g_1(t_1) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) dt_1, \quad (8)$$

$$\Psi_3(z) = -\frac{1}{\omega(1+\kappa_0)} \int_{L_2} \left[ 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) + \frac{\pi}{\omega} (2t_1 + iz) \sin^2 \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) \right] g_1(t_1) dt_1.$$

Интегралы в (7) и (8) берутся по линиям

$$L_1 = [-\ell, -\lambda] \cup [\lambda, \ell] \text{ и } L_2 = [-\ell_1, -\lambda] \cup [\lambda, \ell_1];$$

$\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{\omega}z\right)} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$ ,  $S(z)$  – специальная мероморфная функция [6];  $g(x)$ ,  $g_1(y)$  – искомые функции, характеризующие раскрытие берегов зон предразрушения;  $\kappa_0 = (3-v)/(1+v)$ .

Из условия равенства нулю главного вектора сил и главного момента этих же сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в  $D_z$ , следует, что

$$\alpha_0 = -\frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \frac{1-v}{1+v} \beta_2 \lambda^2. \quad (9)$$

Из условий симметрии относительно координатных осей находим, что

$$\operatorname{Im} \alpha_{2k} = 0; \quad \operatorname{Im} \beta_{2k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Можно убедиться, что представления (5)–(9) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений. Неизвестные функции  $g(x)$ ,  $g_1(y)$  и коэффициенты  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$  должны быть определены из граничных условий (1)–(3).

Так как выполняются условия периодичности, то система граничных условий (1) вырождается в одно функциональное уравнение, например, на контуре  $L_0$  ( $\tau = \lambda \exp(i\theta)$ ), а система краевых условий (2)–(3) вырождается в граничные условия на  $L_1$  и  $L_2$ .

Удовлетворяя граничным условиям, решение задачи сводится к двум бесконечным алгебраическим системам и двум сингулярным интегральным уравнениям первого рода.

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j. \quad (10)$$

Здесь

$$A_{j,k} = (2j+1) \gamma_{j,k} \lambda^{2j+2k+2}; \quad \gamma_{0,0} = \frac{3}{8} g_2 \lambda^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1) g_{i+1}^2 \lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}};$$

$$\gamma_{j,k} = -\frac{(2j+2k+2)! g_{j+k+1}}{(2j+1)! (2k+1)! 2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)! g_{j+k+2} \lambda^2}{(2j+2)! (2k+2)! 2^{2j+2k+4}} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!(2k+2i+1)!g_{j+i+1} \cdot g_{k+i+1} \cdot \lambda^{4i+2}}{(2j+1)!(2k+1)!(2i+1)!(2i)!2^{2j+2k+4i+4}} + b_{j,k}; \\
 & b_{0,k} = 0; \quad b_{j,0} = 0; \quad b_{j,k} = \frac{g_{j+1}g_{k+1} \cdot \lambda^2}{2^{2j+2k+4}} \left\{ 1 + \frac{2K_2\lambda^2}{K_1} \right\}; \\
 & (j = 1, 2, \dots); (k = 1, 2, \dots);
 \end{aligned}$$

$$K_0 = 1 - K_2\lambda^2; \quad K_2 = -\frac{\pi^2}{24} \cdot \frac{1-v}{1+v}.$$

Постоянные  $\beta_{2k}$  определяются из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
 \beta_2 &= \frac{1}{K_0} \left[ -C_0 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1} \cdot \lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} \alpha_{2k+2} \right]; \quad (11) \\
 \beta_{2j+4}^- & (2j+3) \alpha_{2j+2}^+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!g_{j+k+2}\lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)!2^{2j+2k+4}} \alpha_{2k+2}^- C_{-2j-2}.
 \end{aligned}$$

Относительно искомой функции  $g(x)$  имеем:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{i\omega(1+\kappa_0)} \int_L g(t) ctg \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt + N(x) = M_s + iC; \quad (12) \\
 N(x) &= -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4(1+v)D} + \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2D(1-v)} + \Phi_*(x) + \overline{\Phi_*(x)} + x\Phi'_*(x) + \Psi_*(x); \\
 \Phi_*(x) &= \Phi_1^*(x) + \Phi_3^*(x); \quad \Psi_*(x) = \Psi_1^*(x) + \Psi_3^*(x).
 \end{aligned}$$

Относительно искомой функции  $g_1(y)$  имеем:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{i\omega^2(1+\kappa_0)} \int_{L_1} g_1(t) \left[ (t-y) sh^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t-y) \right] dt + N_1(y) = M_s + iC_1; \quad (13) \\
 N_1(y) &= \Phi_4(iy) + \overline{\Phi_4(iy)} + (iy)\Phi'_4(iy) + \overline{\Psi_4(iy)} - \frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{2(1+v)D} + \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2D(1-v)}; \\
 \Phi_4(x) &= \Phi_1^*(x) + \Phi_2^*(x); \quad \Psi_4(x) = \Psi_1^*(x) + \Psi_2^*(x).
 \end{aligned}$$

Затем каждое сингулярное интегральное уравнение задачи с помощью интерполяционного полинома Лагранжа, построенного по чебышевским узлам, сводится к конечной системе линейных алгебраических уравнений без промежуточного этапа приведения его к уравнению Фредгольма. Полученные алгебраические системы решались методами урезания и Гаусса с выбором главного элемента для разных значений порядка  $M$  ( $M$  – число чебышевских узлов) в зависимости от радиуса круговых отверстий.

Для определения постоянной  $C$  имеем следующие соотношения [10]:

$$Re \int_{-\ell}^{-\lambda} \bar{t}g(t)dt = 0; \quad Re \int_{\lambda}^{\ell} \bar{t}g(t)dt = 0, \quad (14)$$

обеспечивающих равенство нулю скачка прогиба в вершине  $L_1$  при  $x = \pm\ell$ .

Аналогично для определения постоянной  $C_1$  имеем следующие соотношения:

$$Re \int_{-\ell_1}^{-\lambda} \bar{t}_1g_1(t_1)dt_1 = 0; \quad Re \int_{\lambda}^{\ell_1} \bar{t}_1g_1(t_1)dt_1 = 0, \quad (15)$$

обеспечивающие равенство нулю скачка прогиба в вершинах  $L_2$  при  $y = \pm\ell_1$ .

Из-за неизвестных размеров зон предразрушения (параметров  $\ell$  и  $\ell_1$ ) объединенная алгебраическая система уравнений оказалась нелинейной. Так как напряжения в тонкой пластине, ослабленной периодической системой круговых отверстий, ограничены, то решение краевой задачи ищется в классе всюду ограниченных функций. Для получения такого решения необходимо добавить к основным разрешающим уравнениям условия разрешимости краевой задачи в классе всюду ограниченных функций. Эти условия (условия ограниченности напряжений в окрестности вершин  $x = \pm\ell$  и  $y = \pm\ell_1$  зон предразрушения) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^M (-1)^k g_k^0(\tau_m) \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} = 0, \quad \theta_k = \frac{2k-1}{2M} \pi, \quad (16)$$

$$\sum_{k=1}^M (-1)^k g_{1k}^0(\tau_m) \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} = 0.$$

Эти уравнения служат для определения размеров зон предразрушения (параметров  $\ell$  и  $\ell_1$ ).

Добавляя эти два уравнения (15) к основным разрешающим уравнениям (10), (11), (12), (13), получаем замкнутую систему уравнений. Упомянутые системы полностью определяют решение задачи теории изгиба пластины с зонами предразрушения. Удовлетворяя условиям (13) и (14), находим, что постоянные  $C$  и  $C_1$  равны нулю.

Согласно критерию (4) появление трещины произойдет, как только раскрытие берегов зоны предразрушения достигнет предельного (для данного материала при заданных условиях) значения  $\delta_{cr}$ . Используя решение задачи, эти условия можно представить в виде

$$\int_x^\ell g(t) dt = -i\delta_{cr}, \quad \int_y^{\ell_1} g_1(y) dy = -i\delta_{cr}. \quad (17)$$

Очевидно, что разрыв межчастичных связей материала будет происходить при  $x = \pm\ell$  или  $y = \pm\ell_1$ .

Полученные уравнения дают возможность при заданных характеристиках материала определить предельную внешнюю нагрузку, при которой происходит появление трещины в пластине, ослабленной периодической системой круговых отверстий.

Для численной реализации изложенного способа были выполнены расчеты. Исследовался односторонний изгиб пластины постоянными моментами  $M_y^\infty$  ( $M_x^\infty = 0$ ) и всесторонний изгиб – моментами  $M_x^\infty = M_y^\infty = M_0$ .

Объединенная нелинейная алгебраическая система решалась методом последовательных приближений. При изменении радиуса кругового отверстия в диапазоне  $0,1 < \lambda \leq 0,6$  значения коэффициентов  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ , а также значений искомых функций  $g(x)$  и  $g_1(y)$  в узловых точках по существу не меняются (совпадают с точностью до шестого знака), начиная с  $M = 20$ . В диапазоне изменения  $0,6 \leq \lambda \leq 0,8$  оказалось достаточным взять  $M = 40$ , а бесконечные системы урезать до 12 уравнений (решения совпадают с точностью до четвертого знака).

Для радиуса кругового отверстия  $\lambda > 0,8$ , начиная с  $M = 60$ , решение совпадает с точностью до третьего знака, при этом бесконечные системы урезались до 30 уравнений. Заметим, что значения параметра  $\lambda > 0,8$  выпадают из рабочего диапазона изменения радиуса кругового отверстия пластины.

Анализ модели зарождения трещины в тонкой пластине, ослабленной периодической системой круговых отверстий, при однородном изгибе сводится к параметрическому исследованию алгебраических систем (10)–(13), (15) и критерия появления трещины при различных характеристиках материала и геометрических параметрах пластины.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Панасюк, В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев : Наукова думка, 1991.
- [2] *Болотин, В. В.* Механика зарождения и начального развития усталостных трещин / В. В. Болотин // ФХММ. – 1986. – Т. 22. – № 1. – С. 18–23.
- [3] *Мирсалимов, В. М.* Зарождение дефекта типа трещины во втулке контактной пары / В. М. Мирсалимов // Математическое моделирование. 2005. – Т. 17. – № 2. – С. 35–45.
- [4] *Мирсалимов, В. М.* К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары / В. М. Мирсалимов // ПММ. – 2007. – Т. 71. – Вып. 1 – С. 132–151.
- [5] *Ивлев, Д. Д.* Предельное состояние деформируемых тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин, Ю. Н. Радаев, С. И. Сенашов, Е. И. Шемякин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008.
- [6] *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987.
- [7] *Rusinko, A.* Plasticity and Creep of Metals / A. Rusinko, K. Rusinko. – Springer : Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [8] *Савин, Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1951.
- [9] *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966.
- [10] *Саврук, М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев : Наукова думка, 1981.

*Мирсалимов Вагиф Мирахмедович,*

*доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой технической механики, Азербайджанский технический университет, г. Баку*

*e-mail: mir-vagif@mail.ru*

*Искендеров Рамиль Аламхан оглы,*

*аспирант кафедры механики, Азербайджанский архитектурно-строительный университет, г. Баку*

*e-mail: irakon63@hotmail.com*

V. M. Mirsalimov, R. A. Iskenderov

## CRACK NUCLEATION AT PURE BENDING OF ISOTROPIC PLATE WEAKENED BY PERIODIC SYSTEM OF CIRCULAR HOLES

*Azerbaijan Technical University,*

*Azerbaijan Architectural-Building University*

**Abstract.** The mathematical description of model of crack nucleation is given at a pure bending in the thin plate weakened by periodic system of round holes. The general representations of solutions describing a class of problems with periodic distribution of stresses outside of circular holes are under construction. The solution of a problem on crack nucleation is reduced to two infinite algebraic systems and two singular to the integrated equations of the first sort.

**Keywords:** a thin plate, a pure bending, zones of pre-fracture, periodic system of circular holes.

### REFERENCES

- [1] *Panasyk, V. V.* Mechanics of Quasibrittle Fracture of Materials / V. V. Panasyk. – Kiev : Naukova Dumka, 1991.
- [2] *Bolotin, V. V.* The fatigue crack nucleation and initial propagation / V. V. Bolotin // Materials Science. – 1986. – Vol. 22. – № 1. – P. 18–23.
- [3] *Mirsalimov, V. M.* Nucleation crack in the hub of contact pair / V. M. Mirsalimov // Mathematical modelirovanie. – 2005. – Vol. 17. – № 2. – P. 35–45.
- [4] *Mirsalimov, V. M.* The solution of a problem in contact fracture mechanics of the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a frictional pair / V. M. Mirsalimov // J. of Applied Math. and Mechanics. – 2007. – Vol. 71. – Issue 1. – P. 132–151.
- [5] *Ivlev, D. D.* Limiting condition of deformable bodies and rocks / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, R. I. Nepershin, Y. N. Radaev, S. I. Senashov, E. I. Shemyakin. – M. : Fizmatlit, 2008.
- [6] *Mirsalimov, V. M.* Not-one dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987.
- [7] *Rusinko, A.* Plasticity and Creep of Metals / A. Rusinko, K. Rusinko. – Springer : Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [8] *Savin, G. N.* Concentration of stresses about apertures / G. N. Savin. – M. ; L. : Qostekhizdat, 1951.
- [9] *Muskhelishvili, N. I.* Some Basic Problem of Mathematical Theory of Elasticity / N. I. Muskhelishvili. – Amsterdam, Kluwer, 1977.
- [10] *Savruk, M. P.* Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks / M. P. Savruk. – Kiev : Naukova Dumka, 1981.

*Mirsalimov, Vagif Mirakhmedovich*

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, head department of Mechanical Engineering, Azerbaijan Technical University, Baku*

*Iskenderov, Ramil Alahhan oglu*

*Post-Graduate Student, Department of Mechanics, Azerbaijan Architectural-Building University, Baku*



Т. В. Митрофанова, Т. Н. Павлова

## О СООТНОШЕНИЯХ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

**Аннотация.** Рассматриваются соотношения теории трансляционной анизотропии при кручении. Исследованы напряженное и деформированное состояния тела. Исходные уравнения проинтегрированы. Получено поле характеристик. Показано, что характеристики являются прямыми линиями, вдоль которых касательные напряжения сохраняют постоянное значение. Определены компоненты перемещения.

**Ключевые слова:** напряжение, деформация, идеальная пластичность, кручение, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

**Введение.** В работах [1], [2] рассмотрено кручение изотропных цилиндрических и призматических стержней в случае, когда боковая поверхность стержней свободна от касательных нагрузок, а также в случае, когда боковая поверхность стержня находится под действием внешнего переменного давления. В работах [1], [3] исследовано кручение анизотропных цилиндрических и призматических стержней. В работе [4] рассмотрено предельное состояние сектора анизотропного кругового кольца при кручении.

В настоящей работе рассматривается предельное состояние трансляционно анизотропных тел в случае антиплоской деформации.

**Постановка задачи.** Исследуется предельное состояние тела в случае трансляционной идеальнопластической анизотропии. Предполагается, что предельное условие для напряжения в случае трансляционной анизотропии имеет вид

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = k^2, \quad (1)$$

где  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  – касательные напряжения;  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k$  – const.

Компоненты напряжения удовлетворяют условию

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

**Построение решения.** Перейдем к безразмерным величинам и отнесем все величины, имеющие размерность напряжений к величине  $k$ . Сохраним обозначения для  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ . Условие (1) примет вид

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = 1. \quad (4)$$

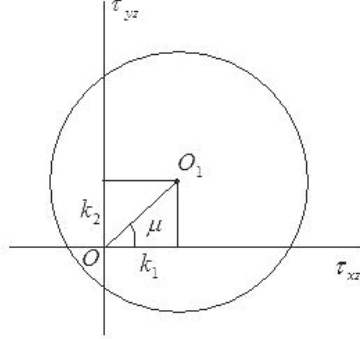


Рис. 1

На рис. 1 показана предельная кривая, соответствующая условию (4). Центр окружности (4) смещен в точку  $O_1(k_1, k_2)$  (рис. 1).

Соотношение (4) перепишем в виде

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - 2(k_1\tau_{xz} + k_2\tau_{yz}) - T^2 = 0, \quad (5)$$

где

$$T^2 = 1 - k_1^2 - k_2^2; \quad k_1^2 + k_2^2 < 1, \quad T - \text{const}. \quad (6)$$

Положим

$$\tau_{xz} = k(\theta) \cos \theta, \quad \tau_{yz} = k(\theta) \sin \theta, \quad \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \text{tg} \theta. \quad (7)$$

Из (5), (7) найдем

$$k^2(\theta) - 2k(\theta)(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta) - T^2 = 0. \quad (8)$$

В дальнейшем положим, что

$$\rho = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \frac{k_1}{\rho} = \cos \mu, \quad \frac{k_2}{\rho} = \sin \mu, \quad \text{tg} \mu = \frac{k_2}{k_1}. \quad (9)$$

Согласно (9) соотношение (8) примет вид

$$k^2(\theta) - 2k(\theta)\rho \cos(\theta - \mu) - T^2 = 0, \quad T^2 = 1 - \rho^2. \quad (10)$$

Из (10) найдем

$$k(\theta)_{1,2} = \rho \cos(\theta - \mu) \pm \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(\theta - \mu)}. \quad (11)$$

В (11) следует ограничиться верхним знаком. Таким образом, величина  $k(\theta)$ , характеризующая анизотропию материала, принимает вид

$$k(\theta) = \rho \cos(\theta - \mu) + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(\theta - \mu)}. \quad (12)$$

Из уравнения равновесия (3) и выражений (7) получим

$$(k' \cos \theta - k(\theta) \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} + (k' \sin \theta + k(\theta) \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad k' = \frac{dk}{d\theta}, \quad (13)$$

где согласно (12)

$$k'(\theta) = \frac{dk}{d\theta} = -\rho \sin(\theta - \mu) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\rho^2 \sin 2(\theta - \mu)}{\sqrt{2 - \rho^2(1 - \cos 2(\theta - \mu))}}. \quad (14)$$

Уравнение (13) имеет решение [1]:

$$y = \frac{k' \sin \theta + k(\theta) \cos \theta}{k' \cos \theta - k(\theta) \sin \theta} x + C, \quad (15)$$

где  $\theta, C - \text{const.}$

Обозначим

$$\frac{k'}{\sqrt{k'^2 + k^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{k}{\sqrt{k'^2 + k^2}} = \sin \alpha. \quad (16)$$

Тогда из (15) и (16) следует

$$y = \text{tg}(\theta + \alpha)x + C, \quad (17)$$

где  $\alpha$  – угол между характеристикой и вектором касательного напряжения.

Рассмотрим контур  $L$  цилиндрического стержня в плоскости поперечного сечения  $xy$  (рис. 2).

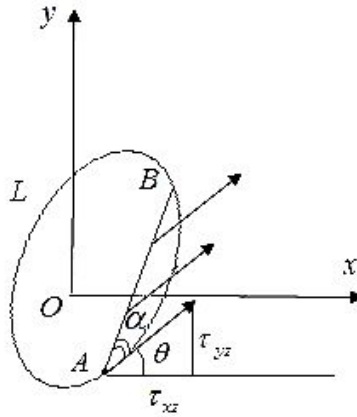


Рис. 2

Если боковая поверхность стержня свободна от усилий, то результирующее касательное напряжение  $\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$  должно быть направлено по касательной к контуру  $L$ . В точке  $A$  контура  $L$  (рис. 2) известны координаты  $x_A, y_A$  для характеристики (14), проходящей через точку  $A$  и угол  $\theta_A$ , следовательно, из (15) может быть определена константа  $C = C_A$ . Таким образом, характеристика  $AB$  (15), показанная на рис. 2, – прямая, проходящая через точку  $A$ , определена. Вдоль характеристики согласно (7), (12) касательное напряжение  $\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = k(\theta)$  постоянно и полностью определено по величине и направлению. Далее

по процедуре решения, если в этом есть необходимость, строятся линии разрыва напряжений, причем линия разрыва напряжений проходит по биссектрисе между пересекающимися характеристиками.

Определим деформированное состояние тела. Из соотношений ассоциированного закона пластического течения получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0, \\ 2\varepsilon_{xz} = \lambda \left( 2\tau_{xz} - 2kk' \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{xz}} \right), \\ 2\varepsilon_{yz} = \lambda \left( 2\tau_{yz} - 2kk' \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{yz}} \right), \quad k' = \frac{dk}{d\theta}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформации.

Согласно (4) из двух последних соотношений (18) следует

$$\varepsilon_{xz} \left( \tau_{yz} - \frac{k'}{k} \tau_{xz} \right) = \varepsilon_{yx} \left( \tau_{xz} + \frac{k'}{k} \tau_{yz} \right). \quad (19)$$

В случае малых деформаций в соотношениях (19) возможен переход от компонент скоростей деформаций  $\varepsilon_{ij}$  к компонентам деформации  $e_{ij}$ :

$$\begin{aligned} e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0, \\ e_{xz} \left( \tau_{yz} - \frac{k'}{k} \tau_{xz} \right) = e_{yz} \left( \tau_{xz} - \frac{k'}{k} \tau_{yz} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Из (20) следует

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \left( \tau_{yz} - \frac{k'}{k} \tau_{xz} \right) = \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \left( \tau_{xz} + \frac{k'}{k} \tau_{yz} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $u, v, w$  – компоненты перемещения вдоль осей  $x, y, z$  соответственно.

Удовлетворим уравнениям (21), полагая

$$u = \chi yz, \quad v = -\chi xz, \quad w = w(x, y), \quad (22)$$

где  $\chi$  – крутка.

Выражения (22) означают, что каждое сечение тела поворачивается как жесткое целое на угол  $w$  и деформируется вдоль оси  $z$ .

Для определения функции  $w$ , определяющей деформацию сечения, воспользуемся уравнениями (21), (22) и (4). Получим

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} + \chi y \right) (k \sin \theta - k' \cos \theta) = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \chi x \right) (k \cos \theta + k' \sin \theta). \quad (23)$$

Из (23) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} (-k \sin \theta + k' \cos \theta) + \frac{\partial w}{\partial y} (k \cos \theta + k' \sin \theta) = \\ = \chi [y (k \sin \theta - k' \cos \theta) + x (k \cos \theta + k' \sin \theta)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Соответствующие уравнения для определения характеристик имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{-k \sin \theta + k' \cos \theta} = \frac{dy}{k \cos \theta + k' \sin \theta} = \\ = \frac{dw}{\chi [y (k \sin \theta - k' \cos \theta) + x (k \cos \theta + k' \sin \theta)]}. \end{aligned} \quad (25)$$

Из уравнения (25) видно, что характеристики уравнения (24) совпадают с характеристиками поля напряжений (15).

Найдем условие на характеристиках. Обозначим через  $ds$  элемент характеристики. Тогда вдоль характеристики имеем

$$\frac{dw}{ds} = \chi [y(k \sin \theta - k' \cos \theta) + x(k \cos \theta + k' \sin \theta)]. \quad (26)$$

С учетом выражения (25) получим

$$\frac{dw}{ds} = \chi c(\theta) (k \sin \theta - k' \cos \theta). \quad (27)$$

Отсюда следует

$$dw = \chi c(\theta) (k \sin \theta - k' \cos \theta) s + c_1, \quad (28)$$

где  $c_1$  – постоянная, своя вдоль каждой характеристики.

Постоянная  $c_1$  определяется из граничных условий для перемещения  $w$ . Рассматривая линию разрыва напряжений как предельное положение жесткого слоя, положим деформацию сдвига на этих линиях равной нулю. Тогда получим

$$2e_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \chi y = 0, \quad 2e_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \chi x = 0. \quad (29)$$

Согласно (29) вдоль линии разрыва имеет место соотношение

$$dw = \chi (-ydx + xdy). \quad (30)$$

Так как  $w$  определяется с точностью до жесткого перемещения, то, принимая в какой-нибудь точке линии разрыва  $w = 0$  и интегрируя (30) вдоль линии разрыва, положение которой известно, находим значение  $w$  во всех точках линии разрыва, следовательно, константа  $c_1$  для каждой характеристики будет известна.

**Заключение.** Из работы следует, что характеристики соотношений, описывающих как напряженное, так и деформированное состояния тела совпадают. При этом характеристики являются прямыми линиями, вдоль которых касательное напряжение сохраняет постоянное значение.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.
- [2] *Миронов, Б. Г.* О кручении призматических стержней, находящихся под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей / Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 1 (48). – С. 98–101.
- [3] *Козлова, Л. С.* Предельное состояние призматических стержней при кручении / Л. С. Козлова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – Чебоксары, 2010. – 7 с. – Библиогр. : 3 назв. – Рус. – Деп. в ВИНТИ 29.04.10 № 232-В2010.
- [4] *Миронов, Б. Г.* Кручение сектора анизотропного кругового кольца при действии переменного давления / Б. Г. Миронов, Л. С. Козлова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2010. – № 4 (68). – С. 132–136.

Митрофанова Татьяна Валерьевна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: mitrofanova\_tv@mail.ru

*Павлова Татьяна Николаевна,*

*кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: tn\_pavlova@mail.ru*

T. V. Mitrofanova, T. N. Pavlova

## ABOUT TRANSMITTING IDEALLY PLASTIC ANISOTROPY AT TORSION

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** We consider the relation between theory translational anisotropy in torsion. The stress and strain state of the body. The original equations integrated. Received field characteristics. It is shown that the characteristics are straight lines along which the shear stresses remain constant. The components of the displacement.

**Keywords:** stress, strain, perfect plasticity, torsion, translational anisotropy.

### REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* The theory of perfect plasticity / D. D. Ivlev. – Moscow : Nauka, 1966. - 231 p.
- [2] *Mironov, B. G.* Torsion of prismatic bars under the influence of pressure, linearly varying along a generator / B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. –2006. – № 1 (48). - P. 98-101.
- [3] *Kozlova, L. S.* Limit state of prismatic bars in torsion / L. S. Kozlova // Detection sensitivity I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – Cheboksary, 2010. – 7 p. – Bibliography: 3 titles. – Rus. – Dep. in VINITI 29.04.10 № 232-V2010.
- [4] *Mironov, B. G.* Torsion of anisotropic sector of a circular ring under the action of alternating pressure / B. G. Mironov, L. S. Kozlova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2010. –№ 4 (68). – P. 132-136.

*Mitrofanova, Tatyana Valeryevna*

*Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor of Department Computer Science and Computer Engineering, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Pavlova, Tatyana Nikolaevna*

*Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor of Department Computer Science and Computer Engineering, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

А. Б. Мустафаев

## РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ

*Институт математики и механики НАН Азербайджана*

**Аннотация.** Дается решение задачи теории упругости для растягиваемой пластины, ослабленной криволинейной трещиной, при действии термоупругого поля напряжений, наведенного тепловым источником, когда на некотором участке берега трещины входят в контакт. Определение неизвестных контактных напряжений в каждом приближении сводится к решению сингулярного интегрального уравнения.

**Ключевые слова:** искривленная трещина, тепловой источник, термоупругое поле напряжений, контактная зона, контактные напряжения.

УДК: 539.375

Как известно [1], [2], одним из эффективных способов торможения роста трещин могут быть температурные и термоупругие поля. В связи с этим представляет теоретический и практический интерес решение задачи теории упругости для растягиваемой пластины, ослабленной криволинейной трещиной, при воздействии термоупругого поля напряжений, наведенного тепловым источником, когда на некоторых участках берега трещины взаимодействуют между собой. Это взаимодействие берегов трещины приводит к появлению контактных напряжений на данном участке берегов трещины.

Как видно из результата [3], воздействие теплового источника уменьшает деформацию растягиваемой пластины в направлении, перпендикулярном трещине, и в связи с этим снижается коэффициент интенсивности напряжений в окрестности конца трещины. При некотором соотношении физических и геометрических параметров пластины и теплового источника будут появляться зоны сжимающих напряжений, в которых берега трещины на некотором участке войдут в контакт, что приведет к появлению контактных напряжений на данном участке берегов трещины.

Рассмотрим упругую изотропную пластину с одной трещиной длиной  $2\ell$  в начале координат. В реальных материалах из-за структурных и технологических факторов поверхности трещины имеют неровности и искривления. Рассмотрим задачу теории упругости о трещине в растягиваемой плоскости, полагая, что контур трещины имеет искривления (малые отклонения от прямолинейной формы). Уравнения линии трещины принимаются в виде  $y = f(x)$ ,  $-\ell \leq x \leq \ell$ . Берега трещины свободны от внешних нагрузок. На бесконечности пластина подвергается однородному растяжению вдоль оси  $oy$   $\sigma_y^\infty = \sigma_0$ .

Пусть в начальный момент  $t = 0$  с помощью нагрева тепловым источником области  $S$  ( $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ ) до температуры  $T_0$  создается зона термоупругих полей. Остальная часть пластины в начальный момент имеет температуру  $T = 0$ .

Примем следующие допущения:

---

Поступила 20.02.2013



- а) все термоупругие характеристики материала пластины не зависят от температуры;  
 б) материал пластины представляет собой однородное и изотропное тело.

Под действием внешней растягивающей нагрузки  $\sigma_0$  и теплового поля напряжений в области сжимающих напряжений берега трещины на некоторых участках  $\lambda_1 \leq x \leq \lambda_2$ , где  $-\ell \leq \lambda_1$  и  $\lambda_2 \leq \ell$ , войдут в контакт, что будет способствовать появлению контактных напряжений на данном участке. Вне этого участка берега трещины будут свободны от контактных напряжений (вообще будут свободны от нагрузок).

Параметры  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , характеризующие границу области контакта между берегами трещины, должны быть определены в ходе решения задачи. Для рассматриваемой задачи можно заранее ответить, что зона контакта между берегами трещины будет всегда начинаться с концевой точки трещины, находящейся в области сжимающих напряжений. Следовательно, один из параметров  $\lambda_1$  или  $\lambda_2$  будет заранее известен, причем  $\lambda_2 = \ell$ .

Рассматриваемая задача состоит в определении контактных напряжений на участке  $\lambda \leq x \leq \ell$  напряженно-деформированного состояния вне трещины. Краевые условия на берегах трещины для поставленной задачи имеют следующий вид:

- на участке контакта, т. е. при  $y = f(x)$ ,  $\lambda \leq x \leq \ell$ , –

$$\sigma_n^+(x, 0) = \sigma_n^-(x, 0), \quad v^+(x, 0) = v^-(x, 0) = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_n^+(x, 0) = \sigma_n(x, \pm 0)$ ,  $v^+(x, 0) = v(x, \pm 0)$ ;

- на неконтактирующих участках берегов трещины –

$$\sigma_n^+(x, 0) = \sigma_n^-(x, 0) = 0.$$

Кроме того, считается, что касательные напряжения на берегах трещины подчиняются закону Кулона:

$$\tau_{nt}^+(x, 0) = \rho \sigma_n^+(x, 0) \quad \text{при} \quad y = f(x), \quad |x| \leq \ell, \quad (2)$$

где  $\rho$  – коэффициент трения.

Температурное поле для плоскости определяется из решения краевой задачи теории теплопроводности [4]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T, \quad (3)$$

$$T = \begin{cases} T_0 & (x, y \in S) \\ 0 & (x, y \notin S) \end{cases} \quad \text{при} \quad t = 0,$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности материала плоскости.

Пусть нагретая тепловым источником область  $S$  представляет собой совокупность прямоугольников со сторонами  $2x_k$  и  $2y_k$ , а центр  $O_k$  прямоугольника  $S_k$  имеет координаты  $(L_k, b_k)$ .

Распределение температуры будет иметь следующий вид:

$$T(x, y, t) = \sum_{k=1}^n T_k(x, y, t), \quad (4)$$

$$T_k(x, y, t) = \frac{T_0}{4} \left[ \operatorname{Erf} \left( \frac{x - L_k + x_k}{2\sqrt{at}} \right) + \operatorname{Erf} \left( \frac{x_k - L_k - x}{2\sqrt{at}} \right) \right] \times \\ \times \left[ \operatorname{Erf} \left( \frac{y - b_k + y_k}{2\sqrt{at}} \right) + \operatorname{Erf} \left( \frac{y_k + b_k - y}{2\sqrt{at}} \right) \right], \quad (5)$$

$$\operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-u^2) du.$$

При определении температурного поля для упрощения задачи не учитывается возмущенное температурное поле из-за наличия трещины. В частности, при симметричном расположении областей  $S_k$  относительно оси абсцисс возмущенное температурное поле будет отсутствовать.

Решение плоской задачи термоупругости получим методом суперпозиции:

$$\sigma_x = \sigma_{x_1} + \sigma_{x_0}, \quad \sigma_y = \sigma_{y_1} + \sigma_{y_0}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy_1} + \tau_{xy_0},$$

где  $\sigma_{x_0}, \sigma_{y_0}, \tau_{xy_0}$  – решения задачи термоупругости для плоскости без трещины.

Рассмотрим некоторую произвольную реализацию искривленной (с малыми отклонениями от прямолинейной формы) поверхности берегов трещины.

Так как известные функции  $f(x)$  и  $f'(x)$  являются малыми величинами, функцию  $f(x)$  можно представить в виде

$$f(x) = \varepsilon H(x) \quad -\ell \leq x \leq \ell,$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр, равный отношению амплитуды отклонения кривой  $f(x)$  от прямолинейной формы к полудлине трещины  $\ell$ .

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \tau_{xy_1}$  и составляющие вектора перемещений разложим в ряд по малому параметру:

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x^{(0)} + \varepsilon \sigma_x^{(1)} + \dots, \quad \sigma_{y_1} = \sigma_y^{(0)} + \varepsilon \sigma_y^{(1)} + \dots, \quad \tau_{xy_1} = \tau_{xy}^{(0)} + \varepsilon \tau_{xy}^{(1)} + \dots,$$

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \quad v = v_0 + \varepsilon v_1 + \dots$$

Значения напряжений при  $y = f(x)$  найдем, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности  $y = 0$ .

Используя метод возмущений с учетом предыдущих соотношений, находим граничные условия при  $y = 0$ ,  $-\ell \leq x \leq \ell$

а) в нулевом приближении:

– на неконтактирующем участке берегов трещины –

$$\sigma_y^{(0)} = -\sigma_{y_0}(x, 0), \quad \tau_{xy}^{(0)} = -\tau_{xy_0}(x, 0) \quad \text{при} \quad -\ell \leq x \leq \lambda^0; \quad (6)$$

– на участке контакта берегов трещины –

$$\sigma_y^{(0)} = p^{(0)}(x, 0) - \sigma_{y_0}(x, 0), \quad \tau_{xy}^{(0)} = fp^{(0)}(x, 0) - \tau_{xy_0}(x, 0) \quad \text{при} \quad \lambda^0 \leq x \leq \ell, \quad (7)$$

$$v_0^+(x, 0) - v_0^-(x, 0) = 0;$$

б) в первом приближении:

$$\sigma_y^{(1)} = N, \quad \tau_{xy}^{(1)} = T \quad \text{при} \quad -\ell \leq x \leq \lambda^1, \quad (8)$$

$$\sigma_y^{(1)} = N + p^{(1)}(x, 0), \quad \tau_{xy}^{(1)} = T + p^{(1)}(x, 0) \quad \text{при} \quad \lambda^1 \leq x \leq \ell,$$

$$v_1^+(x, 0) - v_1^-(x, 0) = 0.$$

Здесь

$$N = 2\tau_{xy}^{(0)} \frac{dH}{dx} - H \frac{\partial \sigma_y^{(0)}}{\partial y}, \quad T = \left( \sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)} \right) \frac{dH}{dx} - H \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial y}. \quad (9)$$

Напряженно-деформированное состояние в бесконечной плоскости в условиях плоской задачи с разрезом вдоль оси  $Ox$  в каждом приближении описывается двумя аналитическими функциями  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  [5].

Для определения функций  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  в нулевом приближении имеем задачу линейного сопряжения [5]:

$$[\Phi_0(x) + \Omega_0(x)]^+ + [\Phi_0(x) + \Omega_0(x)]^- = 2f_0(x), \quad (10)$$

$$[\Phi_0(x) - \Omega_0(x)]^+ - [\Phi_0(x) - \Omega_0(x)]^- = 0,$$

где  $-\ell \leq x \leq \ell$ ;  $x$  – аффикс точек контура трещины

$$f_0(x) = \begin{cases} (1 - i\rho)p^{(0)}(x, 0) - (\sigma_{y0} - i\tau_{xy0}) & \text{на участке контура } \lambda_0 \leq x \leq \ell, \\ -(\sigma_{y0} - i\tau_{xy0}) & \text{на неконтактирующих участках берегов трещины.} \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_{y0} &= \sum_{k=1}^n \sigma_{y0k}; \quad \tau_{xy0} = \sum_{k=1}^n \tau_{xy0k}; \\ \sigma_{y0k} &= -\frac{\mu(1+\nu)\alpha T_0}{4\sqrt{\pi}} \left\{ 4\sqrt{\pi}A(x, y) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{y - b_k + y_k}{x - L_k + x_k} \right) + \right. \right. \\ &+ \operatorname{arctg} \left( \frac{y_k + b_k - y}{x_k + L_k - x} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{y_k + b_k - y}{x - L_k + x_k} \right) + \operatorname{arctg} \left. \left. \left( \frac{y - b_k + y_k}{x_k + L_k - x} \right) - \right. \right. \\ &- \int_0^t \frac{1}{\tau\sqrt{a\tau}} \left[ (x - L_k + x_k) \exp \left( -\frac{(x - L_k + x_k)^2}{4a\tau} \right) + (x_k + L_k - x) \exp \left( -\frac{(x_k + L_k - x)^2}{4a\tau} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left[ \operatorname{Erf} \left( \frac{y - b_k + y_k}{2\sqrt{a\tau}} \right) + \operatorname{Erf} \left( \frac{y_k + b_k - y}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] d\tau \Big\}; \\ \tau_{xy0k} &= -\frac{\mu(1+\nu)\alpha T_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{(x - x_k - L_k)^2 + (y - b_k + y_k)^2}{(x - x_k - L_k)^2 + (y - y_k - b_k)^2} + \right. \\ &+ \ln \frac{(x - L_k + x_k)^2 + (y - y_k - b_k)^2}{(x - L_k + x_k)^2 + (y - b_k + y_k)^2} - \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[ \exp \left( -\frac{(x - L_k + x_k)^2}{4a\tau} \right) - \right. \\ &\left. \left. - \exp \left( -\frac{(x_k + L_k - x)^2}{4a\tau} \right) \right] \left[ \exp \left( -\frac{(y - b_k + y_k)^2}{4a\tau} \right) - \exp \left( -\frac{(y_k + b_k - y)^2}{4a\tau} \right) \right] d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $A(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y \in S_k) \\ 0 & (x, y \notin S_k) \end{cases}$ ;  $\mu$  – модуль сдвига материала пластины;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения.

Общие решения краевых задач (10) будут [5]

$$\Phi_0(z) - \Omega_0(z) = -\frac{1}{2}\sigma_0, \quad (12)$$

$$\Phi_0(z) + \Omega_0(z) = \frac{1}{\pi i \sqrt{z^2 - \ell^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{t^2 - \ell^2} f_0(t) dt}{t - z} + \frac{2F_0(z)}{\sqrt{z^2 - \ell^2}},$$

где  $F_0(z) = C_0z + C_1$ , а под функцией  $(z^2 - \ell^2)^{-\frac{1}{2}}$  подразумевается ветвь, имеющая при больших  $|z|$  вид

$$(z^2 - \ell^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{z} + \frac{\ell^2}{2z^3} + \dots$$

Окончательно для комплексных потенциалов  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  имеем

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z^2 - \ell^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{t^2 - \ell^2} f_0(t) dt}{t - z} + \frac{F(z)}{\sqrt{z^2 - \ell^2}} - \frac{\sigma_0}{4}, \quad (13)$$

$$\Omega_0(z) = \Phi_0(z) + \frac{1}{2} \sigma_0.$$

Для определения коэффициента  $C_0$  необходимо функцию (13) разложить в ряд по степеням  $z$  в окрестности точки  $|z| \rightarrow \infty$  и сопоставить это разложение с выражением

$$\Phi_1(z) = \frac{\sigma_0}{4} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

В результате получим  $C_0 = \frac{1}{2} \sigma_0$ .

Постоянную  $C_1$  определяем из условия однозначности смещений [5]:

$$\int_{-\ell}^{\ell} [\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x)] dx = 0. \quad (14)$$

Для окончательного определения потенциалов  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  необходимо еще найти контактные напряжения  $p^{(0)}(x)$  на участке контакта между кромками трещины, т. е. при  $\lambda \leq x \leq \ell$ .

Для определения функции  $p^{(0)}(x)$  рассмотрим формулу

$$2\mu \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + i \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) = k_0 \Phi_0(z) - \Omega_0(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_0'(z)} \quad (15)$$

и сопряженную ей формулу. На основании этих двух формул и осуществляя предельный переход на контур трещины при  $y \rightarrow \pm 0$ , получим следующее краевое соотношение:

$$4\mu i \left( \frac{\partial v_0^+}{\partial x} - \frac{\partial v_0^-}{\partial x} \right) = k_0 [\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) + \bar{\Phi}_0^+(x) - \bar{\Phi}_0^-(x)] + \quad (16)$$

$$+ [\Omega_0^+(x) - \Omega_0^-(x) + \bar{\Omega}_0^+(x) - \bar{\Omega}_0^-(x)],$$

где  $-\ell \leq x \leq \ell$ ;  $k_0 = 3 - 4\nu$  для плоской деформации;  $k_0 = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  для плоского напряженного состояния.

Функции  $\Omega_0^+(x)$  и  $\Omega_0^-(x)$  по соотношениям (12) выражают через  $\Phi_0^+(x)$  и  $\Phi_0^-(x)$ . Для установления связи между функциями  $\bar{\Phi}_0^+(x)$ ,  $\bar{\Phi}_0^-(x)$ ,  $\bar{\Omega}_0^+(x)$ ,  $\bar{\Omega}_0^-(x)$  и  $\Phi_0^+(x)$ ,  $\Phi_0^-(x)$  с помощью формул Колосова-Мусхелишвили и граничных условий (1) при  $z \rightarrow x \pm 0$  составим следующие краевые задачи:

$$[(1 + i\rho) \Phi_0(x) + (1 - i\rho) \bar{\Phi}_0(x) - (1 + i\rho) \Omega_0(x) - (1 - i\rho) \bar{\Omega}_0(x)]^+ = \quad (17)$$

$$= [(1 + i\rho) \Phi_0(x) + (1 - i\rho) \bar{\Phi}_0(x) - (1 + i\rho) \Omega_0(x) - (1 - i\rho) \bar{\Omega}_0(x)]^-;$$

$$[(1 + i\rho) \Phi_0(x) - (1 - i\rho) \bar{\Phi}_0(x) + (1 + i\rho) \Omega_0(x) - (1 - i\rho) \bar{\Omega}_0(x)]^+ = \quad (18)$$

$$= - [(1 + i\rho) \Phi_0(x) - (1 - i\rho) \bar{\Phi}_0(x) + (1 + i\rho) \Omega_0(x) - (1 - i\rho) \bar{\Omega}_0(x)]^-.$$

Решая эти краевые задачи [5], найдем

$$(1 + i\rho) \Phi_0(z) + (1 - i\rho) \bar{\Phi}_0(z) - (1 + i\rho) \Omega_0(z) - (1 - i\rho) \bar{\Omega}_0(z) = -\sigma_0, \quad (19)$$

$$(1 + i\rho)\Phi_0(z) - (1 - i\rho)\bar{\Phi}_0(z) + (1 + i\rho)\Omega_0(z) - (1 - i\rho)\bar{\Omega}_0(z) = \frac{A_0z + A_1}{\sqrt{z^2 - \ell^2}}.$$

Для определения коэффициентов  $A_0$  и  $A_1$  необходимо функции  $\Phi_0(z)$ ,  $\bar{\Phi}_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$ ,  $\bar{\Omega}_0(z)$  разложить в ряд по степеням в окрестности точки  $|z| \rightarrow \infty$  и сопоставить это разложение с выражением  $A_0 + \frac{A_1}{z}$ .

В результате получим

$$A_0 = 4i\rho C_0; \quad A_1 = 4i\rho C_1.$$

Складывая и вычитая полученные соотношения (19), окончательно для функций  $\bar{\Phi}_0(z)$  и  $\bar{\Omega}_0(z)$  находим:

$$\bar{\Phi}_0(z) = \frac{1 + i\rho}{1 - i\rho}\Omega_0(z) - \frac{1}{2(1 - i\rho)} \left[ \sigma_0 + \frac{A_0z + A_1}{\sqrt{z^2 - \ell^2}} \right], \quad (20)$$

$$\bar{\Omega}_0(z) = \frac{1 + i\rho}{1 - i\rho}\Phi_0(z) + \frac{1}{2(1 - i\rho)} \left[ \sigma_0 - \frac{A_0z + A_1}{\sqrt{z^2 - \ell^2}} \right].$$

По формулам (20) можно определить граничные значения функций  $\bar{\Phi}_0(z)$  и  $\bar{\Omega}_0(z)$  на контуре трещины.

Теперь, если граничные значения  $\bar{\Phi}_0(z)$  и  $\bar{\Omega}_0(z)$  подставить в краевое условие (16) и учесть, что

$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = \Omega_0^+(x) - \Omega_0^-(x),$$

то в результате некоторых преобразований получим

$$2\mu i \left( \frac{\partial v_0^+}{\partial x} - \frac{\partial v_0^-}{\partial x} \right) = \frac{(k_0 + 1)}{1 - i\rho} \left[ \Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) - \frac{A_0x + A_1}{2\sqrt{x^2 - \ell^2}} \right], \quad (21)$$

где  $x$  — аффикс точек контура трещины;

Используя формулы Сохоцкого-Племеля [5], [6] и учитывая соотношения (16), найдем

$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = \frac{-i}{\pi\sqrt{\ell^2 - x^2}} \left[ \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2} f_0(t)}{t - x} dt + 2(C_0x + C_1) \right]. \quad (22)$$

Полученное выражение (22) подставим в уравнение (21) и учитывая, что на участке контакта между берегами трещины  $\frac{\partial v_0^+}{\partial x} = \frac{\partial v_0^-}{\partial x} = 0$ , получим для определения неизвестных контактных напряжений  $p_0(x) = (1 - i\rho)p^{(0)}(x, 0)$  следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\lambda^0}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2} p_0(t) dt}{t - x} + 2(C_0x + C_1) - \frac{1}{2}(A_0x + A_1) + \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2} q(t) dt}{t - x} = 0, \quad (23)$$

где  $q(t) = \sigma_{y0} - i\tau_{xy0}$ .

Если учесть, как это было принято, что касательные напряжения на берегах трещины на участке контакта подчиняются закону Кулона, а также учесть значения величины  $A_0$  и  $A_1$ , то интегральное уравнение можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\lambda^0}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t - x} p^{(0)}(t) dt + 2(C_0x + C_1) + \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2} q(t) dt}{t - x} = 0. \quad (24)$$

Интегральное уравнение (24) может быть представлено в каноническом виде. При этом, поскольку нас интересует решение, ограниченное на концах, оно существует при дополнительном условии [5], [6]. Преобразуем интегральное уравнение к виду, более удобному для нахождения его приближенного решения. Для этого сделаем замену переменных:

$$t = \frac{\lambda^0 + \ell}{2} + \frac{\ell - \lambda^0}{2} \tau; \quad x = \frac{\lambda^0 + \ell}{2} + \frac{\ell - \lambda^0}{2} \eta. \quad (25)$$

С помощью квадратурных формул типа Гаусса и некоторых преобразований заменим интегральное уравнение системой  $M + 1$  алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомой функции  $g_m^0$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) в узловых точках

$$\sum_{m=1}^M A_{rm} g_m^0 = f_r^0 \quad r = 1, 2, \dots, M + 1, \quad (26)$$

где  $g_m^0 = g_0(\tau_m)/\sigma_0$ ;  $A_{rm} = \frac{1}{M+1} \sin^2 \frac{\pi m}{M+1} \left[ \frac{1}{\tau_m - \eta_r} \right]$ ;  $f_r^0 = -2(C_0 \ell \eta_r + C_1) - \sum_{m=1}^M \frac{\ell q_0(\ell \tau_m)}{M+1} \sin^2 \frac{\pi m}{M+1} \left[ \frac{1}{\tau_m - \eta_r} \right]$ ;  
 $\eta_r = \cos \frac{2r-1}{2(M+1)} \pi$ ; ( $r = 1, 2, \dots, M+1$ );  $\tau_m = \cos \frac{\pi m}{M+1}$ ; ( $m = 1, 2, \dots, M$ ).

Из-за неизвестного параметра  $\lambda_*^0 = \lambda^0/L$  система (26) является нелинейной. Для ее численного решения использовали метод последовательных приближений [7].

Линейная система, получаемая в каждом приближении, решалась численно методом Гаусса с выбором главного элемента. Определялись значения контактных напряжений в узловых точках и параметра  $\lambda_*^0$ , характеризующие зону контакта берегов трещины в нулевом приближении в зависимости от геометрических и физических параметров плоскости и наведенного термоупругого поля напряжений.

После нахождения напряженного состояния в нулевом приближении находим функции  $N$  и  $T$  согласно формулам (9).

Решение краевой задачи (8) запишется в следующем виде:

$$\Phi_1(z) = \Omega_1(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z^2 - \ell^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{t^2 - \ell^2} f_1(t) dt}{t - z} + \frac{C_1^1}{\sqrt{z^2 - \ell^2}}, \quad (27)$$

где  $f_1(t) = \begin{cases} (1 - i\rho) p^{(1)}(x, 0) + N - iT & \text{на участке контура } \lambda_1 \leq x \leq \ell, \\ N - iT & \text{на неконтактирующих участках берегов трещины.} \end{cases}$

Постоянная  $C_1^1$  определяется из условия однозначности смещений [5]:

$$\int_{-\ell}^{\ell} [\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x)] dx = 0. \quad (28)$$

Поступая аналогично нулевому приближению, для определения контактного напряжения  $p^{(1)}(x)$  и размера концевой зоны в первом приближении получим сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t - x} p^{(1)}(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2} (N - iT) dt}{t - x} + 2C_1^1 = 0. \quad (29)$$

Для существования решения интегрального уравнения (29) в классе всюду ограниченных функций должно выполняться дополнительное условие [5], [6].

Как и в нулевом приближении, с помощью процедуры алгебраизации сингулярного интегрального уравнения вместо (29) получим систему  $M + 1$  алгебраических уравнений относительно приближенных значений функции контактного давления  $p_k^1$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ ) в узловых точках и параметра  $\lambda_1$ .

Из-за неизвестного параметра  $\lambda_*^1 = \lambda_1/L$  алгебраическая система, заменяющая интегральное уравнение (29), оказалась нелинейной. Для ее численного решения, как и в нулевом приближении, использовали метод последовательных приближений.

Ниже приводятся значения параметра  $\lambda_* = \lambda/L$  в зависимости от длины трещины  $\ell_* = \ell/L$  при следующих значениях свободных параметров  $t_* = 4at/L = 20$ ;  $x_0/L = 0,75$ ;  $y_0/L = 0,2$ ;  $b = 0$ ;  $v = 0,3$ .

В расчетах было принято, что поверхность трещины имеет синусоидальную форму.

$\ell_*$	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,5
$\lambda_*$	0,1667	0,2499	0,3291	0,3625	0,4709	0,5128	0,6706	0,9216

В заключении отметим, что аналогично можно рассмотреть и случай произвольной односвязной нагретой области  $S$ . Учет возмущенного температурного поля будет усиливать тормозящий эффект наведенного температурного поля напряжений.

Полученные соотношения позволяют решать обратную задачу, т. е. определить характеристики теплового источника и напряженное состояние пластины, при которых достигается заданная область контакта берегов трещины.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Финкель, В. М.* Физические основы торможения разрушения / В. М. Финкель. – М. : Металлургия, 1977. – 360 с.
- [2] *Партон, В. З.* Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М. : Наука, 1985. – 504 с.
- [3] *Кадиев, Р. И.* Влияние теплового источника на динамику роста трещины / Р. И. Кадиев, В. М. Мирсалимов // Вестник ДГУ. – 2001. – № 4. – С. 69–73.
- [4] *Карслоу, Г.* Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 487 с.
- [5] *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [6] *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Наука, 1977. – 640 с.
- [7] *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.

*Мустафаев Азер Байрам оглы,*

*кандидат физико-математических наук, докторант, Институт математики и механики НАН  
Азербайджана, г. Баку*

*e-mail: irakon63@hotmail.com*

A. B. Mustafayev

**THE SOLUTION OF A CONTACT PROBLEM OF THE THEORY  
OF ELASTICITY FOR BODY WITH CURVILINEAR OF CRACK AT  
INFLUENCE HEAT FIELD**

*Institute of mathematics and mechanics of NAN of Azerbaijan*

**Abstract.** The solution of a problem of the theory of elasticity for a stretched plate weakened curvilinear of crack is given, at influence thermoelastic of a field of stress induced by a thermal source, when on some site of surface of a crack contact. The definition of unknown contact stress in each approximation is reduced to the solution singular of the integrated equation.

**Keywords:** curved crack, thermal source, thermoelastic field of stresses, contact stress, contact zone.

**REFERENCES**

- [1] *Finkel, V. M.* Physical Foundations of Fracture Retardation / V. M. Finkel. – M. : Metallurgiya, 1977. – 360 p.
- [2] *Parton, V. Z.* Elastoplastic Fracture Mechanics / V. Z. Parton, E. M. Morozov. – M. : Nauka, 1985. – 504 p.
- [3] *Kadiev, R. I.* Effect of heat source on the dynamics of crack growth / R. I. Kadiev, V. M. Mirsalimov // Vest. Gos. Dag. Univ. – 2001. – No 4. – P. 69–73.
- [4] *Carslaw, H. S.* Conduction of heat in solids / H. S. Carslaw, J. C. Jaeger. – M. : Nauka, 1964. – 487 p.
- [5] *Muskhelishvili, N. I.* Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity / N. I. Muskhelishvili. – M. : Nauka, 1966. – 707 p.
- [6] *Gakhov, F. D.* Boundary-Value Problems / F. D. Gakhov. – M. : Nauka, 1977. – 640 p.
- [7] *Mirsalimov, V. M.* Non-one-dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987. – 256 p.

*Mustafayev, Azer Bairam oglu*

*Candidate of Phys. Math., Doctorant, Institute of Mathematics and Mechanics of NAN of Azerbaijan, Baku*



Ю. В. Немировский

## ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ГИБРИДНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН*

**Аннотация.** Для гибридных слоисто-волоконистых оболочек при использовании модели идеального жесткопластического материала для всех составляющих материалов, в предположении одномерного деформирования волокон, закона Мизеса деформирования пластических матричных материалов и справедливости классических кинематических гипотез Кирхгофа-Лява построены общие уравнения предельного равновесия. Рассмотрены частные случаи цилиндрических оболочек и безизгибных оболочек вращения.

**Ключевые слова:** гибридные слоисто-волоконистые оболочки, идеальные жесткопластические материалы, условие пластичности Мизеса, предельное равновесие, цилиндрические оболочки, безизгибные оболочки вращения.

УДК: 539.374

**Введение.** основополагающие исследования по теории предельного равновесия однородных оболочек при использовании условия пластичности Мизеса были выполнены в работах [1], [2] и при использовании условия пластичности Треска – в работе [3]. Дальнейшее развитие исследований применительно к слоистым и армированным оболочкам при использовании условия пластичности Треска было осуществлено в работах [4], [5]. Существующие на сегодняшний день практические технологические приемы позволяют создавать гибридные слоисто-волоконистые конструкции из практически любых наборов матричных и армированных материалов. Необходимо дальнейшее развитие теории предельного равновесия, позволяющие разрабатывать единые численные и аналитические методы решения задач предельного равновесия для любых предполагаемых типов гибридных оболочек. Ясно, что создание такого единого подхода к анализу практически неограниченного многообразия гибридных оболочек вращения возможно лишь при условии единых модельных требований ко всем материалам, составляющим конструкцию. Поэтому будем считать, что все материалы, составляющие гибридную конструкцию, будут изотропными, идеальными жесткопластическими, подчиняющимися условию пластичности Мизеса (с разными пределами текучести) и связанному с ним закону пластического деформирования. Все слои деформируются без отрывов и проскальзываний, при деформировании гибридного пакета слоев остаются справедливые классические в теории оболочек кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява. Если в составе гибридной конструкции будут содержаться армированные волокнами слои, то условие пластичности и закон пластического течения в них определяются при использовании модели, описанной в [6]. С учетом этого далее выпишем основные зависимости теории предельного равновесия гибридных оболочек вращения в условиях осесимметричного нагружения и деформирования.

---

Поступила 17.02.2013

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №11-01-00121а

### Уравнения равновесия и совместности деформаций

В рассматриваемом случае безразмерные уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} (N_1 r) - N_2 R_1 \cos \varphi + Q r + Y_1 r R_1 &= 0, \\ \frac{d}{d\varphi} (Q r) - N_1 r - N_2 R_1 \sin \varphi + Y_2 r R_1 &= 0, \\ \frac{d}{d\varphi} (M_1 r) - M_2 R_1 \cos \varphi - \beta Q r R_1 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$N_\nu = \frac{\bar{N}_\nu}{\bar{\sigma}_0 \bar{H}_0}, \quad M_\nu = \frac{\bar{M}_\nu}{\bar{\sigma}_0 \bar{H}_0^2}, \quad Q = \frac{\bar{Q}}{\bar{\sigma}_0 \bar{H}_0}, \quad R_\nu = \frac{\bar{R}_\nu}{\bar{R}_0}, \quad r = R_2 \sin \varphi, \quad (\nu = 1, 2),$$

где  $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{M}_1, \bar{M}_2$  – меридиальные и окружные усилия и моменты;  $\bar{Q}$  – перерезывающая сила;  $R_1, R_2$  – радиус кривизны меридианы и параллели, отсчет новой поверхности оболочки,  $\bar{\sigma}_0, \bar{H}_0, \bar{R}_0$  – безразмерные параметры,  $Y_\nu$  – безразмерные компоненты нагрузки,  $\varphi$  – угол между нормалью к поверхности оболочки и осью вращения.

В соответствии с гипотезой Кирхгофа-Лява для меридиональной и окружной компонент деформации будет иметь место (2)

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{01} + z\kappa_1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{02} + z\kappa_2, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{01} &= \frac{1}{R_0} \left( \frac{du_0}{d\varphi} + w \right), \quad \varepsilon_{02} = \frac{1}{R_2} (u_0 \operatorname{ctg} \varphi + w), \quad \kappa_1 = \frac{1}{R_0} \frac{1}{R_1^2} \frac{d}{d\varphi} \left( u_0 - \frac{dw}{d\varphi} \right), \\ \kappa_2 &= \frac{1}{R_0 R_1 R_2} \left( u_0 - \frac{dw}{d\varphi} \right) \operatorname{ctg} \varphi, \quad u_0 = \frac{\bar{u}_0}{\bar{R}_0}, \quad w = \frac{\bar{w}}{\bar{R}_0}. \end{aligned}$$

$u_0, w$  – безразмерные компоненты перемещений отсчетной поверхности. Исключая из (2) перемещения  $u_0$  и  $w$ , получим условия совместности деформаций

$$\frac{d}{d\varphi} (\kappa_2 R_1 R_2 \operatorname{tg} \varphi) = \kappa_1 R_1^2, \quad \kappa_2 R_2 \operatorname{tg} \varphi = (\varepsilon_{01} - \varepsilon_{02}) \operatorname{ctg} \varphi - \frac{R_2}{R_1} \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi} \quad (3)$$

### Закон пластического деформирования для армированного, неармированного слоя и гибридной оболочки

Рассматривая многослойные гибридные оболочки, будем считать их состоящими из  $n$ -армированных и неармированных слоев. Свяжем отсчетную поверхность с одной из лицевых поверхностей оболочки и обозначим  $z = h_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) – границы раздела слоев в нормальном направлении к поверхности оболочки. Тогда для безразмерных усилий и моментов гибридной оболочки будем иметь выражения

$$N_\nu = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\nu k}(z) dz, \quad M_\nu = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\nu k}(z) z dz. \quad (4)$$

Если  $k$ -й армированный слой содержит  $m_k$  семейств армирующих волокон, то в соответствии с соотношением модели армированного слоя [6] для напряжений в нем получим выражения:

$$\sigma_{1k} = \frac{\sigma_{0k}}{\sqrt{3}} (1 - \Omega_k) \frac{(F_{11} + zF_{12})}{\Psi_1(z)} + D_{1k}, \quad \sigma_{2k} = \frac{\sigma_{0k}}{\sqrt{3}} (1 - \Omega_k) \frac{(F_{21} + zF_{22})}{\Psi_1(z)} + D_{2k}, \quad (5)$$

$$F_{11} = 2e_1 + 1, \quad F_{12} = 2e_2 + e_3, \quad F_{21} = e_1 + 2, \quad F_{22} = 2e_3 + e_2,$$

$$e_1 = \frac{\varepsilon_{01}}{\varepsilon_{02}}, \quad e_2 = \frac{\bar{H}_0 \bar{\kappa}_1}{\varepsilon_{02}}, \quad e_3 = \frac{H_0 \kappa_2}{\varepsilon_{02}},$$

$$z = \frac{\bar{z}}{\bar{H}_0}, \quad \Psi_1(z) = (Z_1 + zZ_2 + z^2Z_3)^{1/2},$$

$$Z_1 = e_1^2 + e_1 + 1, \quad Z_2 = 2e_1e_2 + e_1e_3 + e_2 + 2e_3, \quad Z_3 = e_2^2 + e_2e_3 + e_3^2, \quad \Omega_k = \sum_{m=1}^{m_k} \omega_m,$$

$$D_{1k} = 2 \sum_{m=1}^{m_k} \sigma_{0m} \omega_m l_m^2 \text{sign} \varepsilon_m, \quad D_{2k} = 2 \sum_{m=1}^{m_k} \sigma_{0m} \omega_m (1 - l_m^2) \text{sign} \varepsilon_m,$$

$$\varepsilon_m = 1 + (e_1 - 1) l_m^2 + z [e_3 + (e_2 - e_3) l_m^2], \quad l_m = \cos \alpha_m.$$

Здесь  $\sigma_{0k}$ ,  $\sigma_{0m}$  – безразмерные пределы текучести материалов матрицы и армирующих материалов,  $\omega_m$ ,  $\alpha_m$  – интенсивность и угол армирования волокнами  $m$ -го семейства в  $k$ -м слое. При отсутствии  $m$ -го семейства волокон следует принять  $\omega_m = 0$ . Если  $k$ -й слой оболочки не содержит арматуры, то следует принять в нем  $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_{m_k} = 0$ .

Подставляя выражения (5) в (4), для усилий и моментов в гибридных композитных оболочках получим выражения:

$$N_1 = N_{11}F_{11} + N_{12}F_{12} + N_{13}, \quad N_2 = N_{21}F_{21} + N_{22}F_{22} + N_{23},$$

$$M_1 = M_{11}F_{11} + M_{12}F_{12} + M_{13}, \quad M_2 = M_{21}F_{21} + M_{22}F_{22} + M_{23},$$

где

$$N_{11} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \sum_{k=1}^n \sigma_{0k} (1 - \Omega_k) (\Phi_{11}(h_k) - \Phi_{11}(h_{k-1})) \right];$$

$$N_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \sum_{k=1}^n \sigma_{0k} (1 - \Omega_k) (\Phi_{12}(h_k) - \Phi_{12}(h_{k-1})) \right], \quad N_{13} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} D_{1k} dz,$$

$$N_{21} = N_{22}, \quad N_{11} = N_{22}, \quad N_{23} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} D_{2k} dz,$$

$$M_{11} = M_{21} = N_{12}, \quad M_{\nu 3} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} D_{\nu k} z dz \quad (\nu = 1, 2),$$

$$M_{12} = M_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \sum_{k=1}^n \sigma_{0k} (1 - \Omega_k) (\Phi_{13}(h_k) - \Phi_{13}(h_{k-1})) \right],$$

$$\Phi_{11}(z) = \int \frac{dz}{\Psi_1(z)}, \quad \Phi_{12} = \frac{1}{Z_3} \left[ \Psi_1(z) - \frac{Z_2}{2} \Phi_{11}(z) \right],$$

$$\Phi_{13}(z) = \frac{1}{4Z_3^2} \left[ (2zZ_3 - 3Z_2) \Psi_1(z) + \frac{1}{2} (3Z_2^2 - 4Z_1Z_3) \Phi_{11}(z) \right],$$

$$\Phi_{11}(z) = \frac{1}{\sqrt{Z_3}} \ln |2zZ_3 + Z_2| + 2\sqrt{Z_3} \Psi_1(z).$$

Полученные выражения в совокупности с уравнениями равновесия (1) и условиями совместности деформаций (3) образуют систему разрешающих обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений для искомых функций  $Q$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ . Необходимые краевые условия

для ее интегрирования в конкретных ситуациях могут быть получены на основе формулировки классических краевых условий Кирхгофской теории оболочек и здесь не обсуждаются. Также не обсуждаются вопросы асимптотического интегрирования (для тонких оболочек, например) и интеграционные процедуры линеаризации.

#### **Цилиндрические и безизгибные оболочки**

Для цилиндрических оболочек имеем

$$\kappa_2 = \kappa_3 = 0, \quad F_{11} = 2e_1 + 1, \quad F_{12} = 2e_2, \quad F_{21} = e_1 + 2, \quad F_{22} = e_2,$$

$$Z_1 = e_1^2 + e_1 + 1, \quad Z_2 = (2e_1 + 1)e_2, \quad Z_3 = e_2^2.$$

Для цилиндрических оболочек продольное усилие  $N_1 = N_1^* = const$ . Это уравнение позволяет выразить параметр  $e_1$  через  $e_2$  и в конечном итоге свести задачу к одному дифференциальному уравнению относительно неизвестной функции  $e_2$ .

Для эффективного использования материалов в гибридных композитах целесообразно требовать их равномерного деформирования в нормальных сечениях гибридной композитной оболочки. Это требование соответствует обеспечению условий безизгибного деформирования:  $e_2 = e_3 = 0$ . В этом случае будем иметь

$$\Psi_1(z) = Z_1^{1/2}, \quad Z_1 = e_1^2 + e_2 + 1, \quad Z_2 = Z_3 = 0.$$

Если с учетом этих выражений вычислить усилия  $N_1, N_2$ , моменты  $M_1, M_2$  и подставить их в уравнения равновесия (1), то после исключения  $Q$  и  $e_1$  из них можно установить условия согласования между формой оболочки, законом распределения внешних нагрузок и внутренней структурой гибридной оболочки, при которых возможно существование такого состояния.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Гостехиздат, 1948.
- [2] *Шапиро, Г. С.* О поверхностях текучести для идеально-пластических оболочек / Г. С. Шапиро // Проблемы механики сплошной среды. – М. : АН СССР, 1961.
- [3] *Hodge, P. G.* Yield conditions for rotationally symmetric shells under axisymmetric loading / P. G. Hodge // Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, ser. E. – 1960. – No 27. – P. 323–331.
- [4] *Ивлев, Д. Д.* К теории предельного состояния слоистых пластин и оболочек вращения / Д. Д. Ивлев, Ю. В. Листрова, Ю. В. Немировский // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – № 4. – С. 77–86.
- [5] *Немировский, Ю. В.* Предельное равновесие многослойных армированных осесимметричных оболочек / Ю. В. Немировский // Изв. АН СССР. МТТ. – 1961. – № 6. – С. 80–89.
- [6] *Немировский, Ю. В.* Об условии пластичности для армированного слоя / Ю. В. Немировский // Журнал прикладной механики и технической физики (ПМТФ). – 1969. – № 5.

*Немировский Юрий Владимирович,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск*

**e-mail:** nemirov@itam.nsc.ru

Yu. V. Nemirovskiy

## LIMIT EQUILIBRIUM HYBRID COMPOSITE SHELLS OF REVOLUTION

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics*

**Abstract.** For hybrid layered-fiber membranes by using the model of ideal rigid-plastic material for all the constituent materials, the assumption of a one-dimensional deformation of the fibers, the law of the Mises plastic deformation of the matrix material and the classic cinematic justice of the Kirchhoff-Lyave built general equations of limiting equilibrium. Particular cases of cylindrical shells and shells of revolution none bending.

**Keywords:** hybrid layered-fiber shell, ideal rigid-plastic material, the condition of Mises plasticity, limit equilibrium, cylindrical shell, the shell none bending rotation.

### REFERENCES

- [1] *Ilyushin, A. A.* Ductility / A. A. Ilyushin. – M. : Gostexizdat, 1948.
- [2] *Shapiro, G. S.* Surfaces of strength for ideal-plastic shells / G. S. Shapiro // Problems of Continuum Mechanics. – M. : ANSSSR, 1961.
- [3] *Hodge, P. G.* Yield conditions for rotationally symmetric shells under ax symmetric loading / P. G. Hodge // Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, ser. E. – 1960. – No 27. – P. 323–331.
- [4] *Ivlev, D. D.* The theory of the ultimate state of laminated plates and shells of revolution / D. D. Ivlev, Y. V. Listrova, Y. V. Nemirovsky // Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR, Mechanics and Mechanical Engineering. – 1964. – No 4. – P. 77–86.
- [5] *Nemirovsky, Y. V.* Limit equilibrium multilayer reinforced ax symmetrical shells. / Y. V. Nemirovsky // Math. Academy of Sciences of the USSR. MTT. – 1961. – No 6. – P. 80–89.
- [6] *Nemirovsky, Y. V.* On condition of plasticity reinforced layer / Y. V. Nemirovsky // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics (Zh). – 1969. – No 5.

*Nemirovskiy, Yuriy Vladimirovich*

*Dr. Sci. of Phys. & Math., Professor, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk*

В. Н. Орлов, А. З. Пчелова

## ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ НА ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева*

**Аннотация.** Рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с полиномиальной правой частью пятой степени, решение которого обладает подвижными особыми точками, в общем случае не разрешимое в квадратурах. Приводится доказательство теоремы существования и единственности решения этого уравнения в окрестности подвижной особой точки. Построено приближенное решение уравнения в окрестности подвижной особой точки и проведено исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение. Результаты получены в комплексной области и сопровождаются расчетами.

**Ключевые слова:** нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, задача Коши, подвижная особая точка, возмущение, приближенное решение, оценка погрешности.

УДК: 517.927.4

**Актуальность исследуемой проблемы.** В настоящей работе для нелинейного дифференциального уравнения доказывается наличие подвижной особой точки. Это факт не позволяет применять к нему известные аналитические и численные приближенные методы решения, так как они не адаптированы к этой категории особых точек. В связи с этим задача нахождения приближенного решения заданного уравнения является актуальной.

**Материал и методика исследований.** Предлагается приближенный метод решения указанного выше уравнения, идея которого представлена в работах [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]. Он состоит в разделении области поиска решения на область голоморфности и окрестность подвижной особой точки, а затем в построении приближенных решений в этих областях. Исследование приближенного решения рассматриваемого уравнения в области голоморфности приведено в [10]. В данной работе представлено исследование приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения как в окрестности точного, так и приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области.

**Результаты исследований и их обсуждение.** Рассмотрим задачу Коши для уравнения в нормальной форме

$$w'(z) = w^5(z) + r(z), \quad (1)$$

с начальным условием

$$w(z_0) = w_0, \quad (2)$$

к которому приводится с помощью некоторой замены переменных нелинейное дифференциальное уравнение

$$w'(z) = \sum_{i=0}^5 f_i(z) w^i(z),$$

в общем случае неразрешимое в квадратурах [10].

Нелинейность дифференциального уравнения предполагает гипотезу о существовании подвижных особых точек решения этого уравнения. В соответствии с классификацией характера подвижных особых точек [11] она предполагает следующую аналитическую структуру решения в окрестности подвижной особой точки  $z^*$ :

$$w(z) = (z^* - z)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{n/4}, \quad C_0 \neq 0. \quad (3)$$

**Теорема 1.** Пусть функция  $r(z)$  задачи (1)–(2) удовлетворяет следующим условиям:

1)  $r(z) \in C^1$  в области  $|z^* - z| < \rho_1$ , где  $\rho_1 = \text{const} > 0$  и  $z^*$  – подвижная особая точка решения  $w(z)$  рассматриваемой задачи;

2)  $\exists M_1 : \frac{|r^{(n)}(z^*)|}{n!} \leq M_1$ , где  $M_1 = \text{const}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Тогда существует единственное решение задачи Коши (1)–(2) в виде (3), где  $\rho = -1/4$ , правильная часть которого сходится в области

$$|z^* - z| < \rho_3, \quad (4)$$

где  $\rho_3 = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ ,  $\rho_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{2^8(M_2+1)^4}}$ ,  $M_2 = \sup_n \frac{|r^{(n)}(z^*)|}{n!}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

**Доказательство.** Построим формальное решение уравнения (1) в области  $|z^* - z| < \rho_1$  в виде (3). В силу того, что  $z^*$  является регулярной точкой для функции  $r(z)$  и выполняются условия настоящей теоремы, функция  $r(z)$  в окрестности подвижной особой точки  $z^*$  может быть представлена в следующем виде:

$$r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z^* - z)^n. \quad (5)$$

Подставим (3) и (5) в (1):

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{4} + \rho\right) C_n (z^* - z)^{n/4 + \rho - 1} = \left( (z^* - z)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{n/4} \right)^5 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z^* - z)^n,$$

или, что то же,

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{4} + \rho\right) C_n (z^* - z)^{n/4 + \rho - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (z^* - z)^{n/4 + 5\rho}, \quad (6)$$

где

$$B_n = \begin{cases} \hat{D}_n, & n = 1, n = 4k, n = 4k + 2, n = 4k + 3, k = 0, 1, 2, \dots; \\ \hat{D}_n + A_{(n-5)/4}, & n = 4k + 1, k = 1, 2, \dots; \end{cases} \quad (7)$$

$$\hat{D}_n = \sum_{i=0}^n C_{n-i} D_i^*, \quad D_n^* = \sum_{i=0}^n D_{n-i} D_i, \quad D_n = \sum_{i=0}^n C_{n-i} C_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Равенство (6) обратится в тождество при выполнении условий

$$\frac{n}{4} + \rho - 1 = \frac{n}{4} + 5\rho, \quad (9)$$

$$-\left(\frac{n}{4} + \rho\right) C_n = B_n. \quad (10)$$

Из (9) получаем  $\rho = -\frac{1}{4}$ . Тогда соотношение (10) позволяет однозначно определить все коэффициенты  $C_n$ . Таким образом, найдено единственное формальное решение задачи Коши (1)–(2) в некоторой окрестности подвижной особой точки  $z^*$  в виде ряда (3).

Методом математической индукции убеждаемся в справедливости оценки для  $C_n$ :

$$|C_n| \leq \frac{2^{2[n/5]-2}}{n+4} (M_2+1)^{[n/5]} = \vartheta_n. \quad (11)$$

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n (z^* - z)^{(n-1)/4}$ , который в силу (11) является мажорирующим для правильной части ряда в (3). По признаку Даламбера этот ряд сходится в области  $|z^* - z| < \rho_2$ , где  $\rho_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{2^8(M_2+1)^4}}$ .

Полагая  $\rho_3 = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ , получаем сходимость правильной части ряда в (3) в области (4). Таким образом, доказательство теоремы завершено.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия 1 и 2 теоремы 1, тогда для приближенного решения

$$w_N(z) = \sum_{n=0}^N C_n (z^* - z)^{(n-1)/4}, \quad (C_0 \neq 0) \quad (12)$$

задачи Коши (1)–(2) в области (4) справедлива оценка погрешности

$$\Delta w_N(z) = |w(z) - w_N(z)| \leq \Delta_1,$$

где

$$\Delta_1 = \frac{2^{-2} |z^* - z|^{N/4}}{1 - 4(M_2+1) |z^* - z|^{5/4}} \sum_{i=0}^4 \frac{(4(M_2+1))^{[(N+1+i)/5]}}{N+5+i} |z^* - z|^{i/4},$$

$M_2$  – из теоремы 1.

Доказательство теоремы основано на оценке  $\Delta w_N(z)$  с учетом (11).

**Пример 1.** Найдем приближенное решение задачи Коши (1)–(2), где

$$r(z) = 0 \quad \text{и} \quad w(i) = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} \left( \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right),$$

в окрестности подвижной особой точки.

**Решение.** Задача имеет точное решение  $w(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{i-4z}}$ ;  $z^* = 0,25i$  – точное значение подвижной особой точки. В нашем случае  $M_2 = 0$ , тогда  $\rho_2 = 0,329876978$ . Выберем значение  $z = 0,1 + 0,27i$  в области  $|z^* - z| < \rho_3$ . Рассмотрим случай  $C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . В табл. 1 приведены расчеты для одного листа четырехлистовой римановой поверхности.

**Таблица 1**

**Оценка приближенного решения уравнения в окрестности точного значения подвижной особой точки в комплексной области**

$z$	$w$	$w_3$	$\Delta$	$\Delta'_1$	$\Delta''_1$
$0,1 + 0,27i$	$0,927359881 + 0,840068385i$	$0,927359881 + 0,840068385i$	$1,11022 \cdot 10^{-16}$	$0,035384651$	$1,2 \cdot 10^{-16}$

Здесь  $w$  – значение точного решения,  $w_3$  – значение приближенного решения,  $\Delta$  – абсолютная погрешность,  $\Delta'_1$  – априорная погрешность, полученная по теореме 2,  $\Delta''_1$  – апостериорная погрешность.



С помощью теоремы 2 можно решить и обратную задачу теории погрешности – определить значение  $N$  по заданной точности приближенного решения  $\varepsilon$ . Так, для  $\varepsilon = 1,2 \cdot 10^{-16}$  получаем  $N = 109$ . Апостериорная оценка погрешности уточняет величину априорной оценки погрешности приближенного решения и, учитывая, что все производные функции  $r(z)$  равны нулю, в нашем случае получаем совпадение структуры приближенного решения с точным решением.

В связи с тем, что методы нахождения подвижных особых точек позволяют получать последние приближенно с заданной точностью, возникает задача исследования влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение. Поэтому в окрестности приближенного значения подвижной особой точки  $\tilde{z}^*$  вместо (12) будем иметь

$$\tilde{w}_N(z) = \sum_{n=0}^N \tilde{C}_n (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/4}, \quad \tilde{C}_0 \neq 0, \quad (13)$$

где  $\tilde{C}_n$ ,  $\tilde{z}^*$  – приближенные значения.

**Теорема 3.** Пусть выполняются следующие условия:

- 1)  $r(z) \in C^1$  в области  $|\tilde{z}^* - z| < \rho_3$ , где  $\rho_3 = \text{const} > 0$ ;
- 2)  $\exists M_3 : \frac{|r^{(n)}(\tilde{z}^*)|}{n!} \leq M_3$ , где  $M_3 = \text{const}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;
- 3)  $|\tilde{z}^*| \leq |z^*|$ ;
- 4) известна оценка погрешности значения  $\tilde{z}^*$ :  $|\tilde{z}^* - z^*| \leq \Delta \tilde{z}^*$ ;
- 5)  $\Delta \tilde{z}^* < \frac{1}{\sqrt[5]{2^{28}(M_4+1)^4}}$ .

Тогда для приближенного решения (13) задачи Коши (1)–(2) для любого  $z$  из областей

$$\{z : |\tilde{z}^* - z| \geq \Delta \tilde{z}^*\} \cap \{z : |\tilde{z}^* - z| < \rho_4\} \cap \{z : |z| < |\tilde{z}^*|\}, \quad (14)$$

$$\{z : |\tilde{z}^* - z| < \Delta \tilde{z}^*\} \cap \{z : |\tilde{z}^* - z| < \rho_4\} \cap \{z : |z| < |\tilde{z}^*|\} \quad (15)$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta \tilde{w}_N(z) \leq \sum_{i=2}^5 \Delta_i,$$

где

$$\Delta_2 \leq \frac{\Delta \tilde{z}^*}{4\sqrt{2}|\tilde{z}^* - z|^{5/4}},$$

$$\Delta_3 \leq 2^{-2} \Delta \tilde{z}^* (M_4 + 1) \frac{1 + \sum_{i=0}^3 2^{3i+1} (M_4 + 1)^i \alpha^{i+1}}{1 - 2^{13} (M_4 + 1)^4 \alpha^5} +$$

$$+ 2^\beta \Delta \tilde{z}^* (M_4 + 1) \alpha^{1/4} \frac{1 + 16(3 + 4M_4)\alpha + 2^{24}(M_4 + 1)^3 \alpha^{9/2} + (1 + 4\alpha^{1/2}) \sum_{i=0}^3 2^{6i+2} (M_4 + 1)^i \alpha^{i+1/2}}{1 - 2^{28} (M_4 + 1)^4 \alpha^5} +$$

$$+ 2^\gamma \Delta \tilde{z}^* (M_4 + 1) \alpha^{1/2} \frac{1 + 2^4 (M_4 + 1) \alpha (1 + 2^4 (M_4 + 1) \alpha) (1 + 2^6 (M_4 + 1) \alpha^2)}{1 - 2^{18} (M_4 + 1)^4 \alpha^5}, \quad (16)$$



$$+ \sum_{n=5}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n |(\tilde{z}^* - z) + \Delta \tilde{z}^*|^{(n-1)/4} + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\tilde{C}_n| \cdot |\tilde{z}^* - z|^{(n-1)/4} = \sum_{i=2}^5 \Delta_i.$$

Далее

$$\Delta_2 = |\tilde{C}_0| \cdot |((\tilde{z}^* - z) + \Delta \tilde{z}^*)^{-1/4} - (\tilde{z}^* - z)^{-1/4}| \leq \frac{\Delta \tilde{z}^*}{4\sqrt{2} |\tilde{z}^* - z|^{5/4}}.$$

При оценке выражения  $\Delta_3$  суммирование проводим отдельно по целым и дробным степеням:

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \sum_{n=5}^{\infty} |\tilde{C}_n| \cdot |((\tilde{z}^* - z) + \Delta \tilde{z}^*)^{(n-1)/4} - (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/4}| = \\ &= \sum_{i=0}^3 \sum_{n=2}^{\infty} |\tilde{C}_{4n-i}| \cdot |((\tilde{z}^* - z) + \Delta \tilde{z}^*)^{n-(i+1)/4} - (\tilde{z}^* - z)^{n-(i+1)/4}| = \sum_{j=1}^4 \Delta_3^{(j)}. \end{aligned}$$

С учетом (11) для  $\Delta_3^{(3)}$ , в случае  $\Delta \tilde{z}^* \leq |\tilde{z}^* - z|$  получаем

$$\begin{aligned} \Delta_3^{(3)} &= \sum_{n=2}^{\infty} |\tilde{C}_{4n-2}| \cdot |((\tilde{z}^* - z) + \Delta \tilde{z}^*)^{n-3/4} - (\tilde{z}^* - z)^{n-3/4}| = \\ &= \sum_{i=0}^4 \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{C}_{20n-14+4i}| \cdot |((\tilde{z}^* - z) + \Delta \tilde{z}^*)^{(20n-15+4i)/4} - (\tilde{z}^* - z)^{(20n-15+4i)/4}| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{8n-8+2i} (M_4 + 1)^{4n-3+i}}{20n-10+4i} \cdot \frac{(20n-15+4i) \Delta \tilde{z}^* |(\tilde{z}^* - z) + \Delta \tilde{z}^*|^{20n-16+4i}}{4 |\tilde{z}^* - z|^{(60n-45+12i)/4}} + \\ &+ \sum_{i=0}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{8n-6+2i} (M_4 + 1)^{4n-2+i}}{20n-2+4i} \cdot \frac{(20n-7+4i) \Delta \tilde{z}^* |(\tilde{z}^* - z) + \Delta \tilde{z}^*|^{20n-8+4i}}{4 |\tilde{z}^* - z|^{(60n-21+12i)/4}} \leq \\ &\leq \frac{2^2 (M_4 + 1) \Delta \tilde{z}^* |\tilde{z}^* - z|^{1/4}}{1 - 2^{28} (M_4 + 1)^4 |\tilde{z}^* - z|^5} \times \left( 1 + 2^6 (M_4 + 1) |\tilde{z}^* - z| + \sum_{i=0}^2 2^{10+6i} (M_4 + 1)^{i+1} |\tilde{z}^* - z|^{i+2} \right) \end{aligned}$$

при условии  $|\tilde{z}^* - z| < \frac{1}{\sqrt[5]{2^{28} (M_4 + 1)^4}}$ . В случае  $|\tilde{z}^* - z| < \Delta \tilde{z}^*$  для  $\Delta_3^{(3)}$  имеем

$$\Delta_3^{(3)} \leq \frac{2^4 (M_4 + 1) (\Delta \tilde{z}^*)^{5/4}}{1 - 2^{28} (M_4 + 1)^4 (\Delta \tilde{z}^*)^5} \times \left( 1 + 2^6 (M_4 + 1) \Delta \tilde{z}^* + \sum_{i=0}^2 2^{10+6i} (M_4 + 1)^{i+1} (\Delta \tilde{z}^*)^{i+2} \right),$$

при этом  $\Delta \tilde{z}^* < \frac{1}{\sqrt[5]{2^{28} (M_4 + 1)^4}}$ .

Аналогично получаем оценки для  $\Delta_3^{(1)}$ ,  $\Delta_3^{(2)}$  и  $\Delta_3^{(4)}$ . Введя обозначения (21) и (22), окончательно для  $\Delta_3$  получаем (16).

Переходим к оценке  $\Delta_4$ . С учетом (19), (20) и принимая во внимание оценку для  $\Delta \tilde{C}_n$ ,

$$\Delta \tilde{C}_n \leq \frac{2^{2[n/5]-2}}{n+4} \Delta M (M_4 + \Delta M + 1)^{[n/5]-1}, \quad (23)$$

полученную методом математической индукции, разделяя в  $\Delta_4$  целые и дробные степени разложения, имеем

$$\begin{aligned}\Delta_4 &= \sum_{n=5}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n |(\tilde{z}^* - z) + \Delta \tilde{z}^*|^{(n-1)/4} = \\ &= \sum_{i=0}^3 \sum_{n=2}^{\infty} \Delta \tilde{C}_{4n-i} |(\tilde{z}^* - z) + \Delta \tilde{z}^*|^{n-(i+1)/4} = \sum_{j=1}^4 \Delta_4^{(j)}.\end{aligned}$$

Рассмотрим  $\Delta_4^{(3)}$ , с учетом (23) имеем

$$\begin{aligned}\Delta_4^{(3)} &= \sum_{n=2}^{\infty} \Delta \tilde{C}_{4n-2} |(\tilde{z}^* - z) + \Delta \tilde{z}^*|^{n-3/4} = \\ &= \sum_{i=0}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \tilde{C}_{20n+4i-14} |(\tilde{z}^* - z) + \Delta \tilde{z}^*|^{(20n+4i-15)/4} = \sum_{j=1}^5 \Delta_4^{(3j)}.\end{aligned}$$

Далее, повторяя выкладки для оценки  $\Delta_3^{(3)}$ , будем иметь

$$\begin{aligned}\Delta_4^{(3i)} &\leq \frac{2^{3i-3} \sqrt[4]{2}}{2i+3} \cdot \frac{\Delta M (M_4 + \Delta M + 1)^{i-1} |\tilde{z}^* - z|^{i+1/4}}{1 - 2^{13}(M_4 + \Delta M + 1)^4 |\tilde{z}^* - z|^5}, \quad i = 1, 2, \\ \Delta_4^{(3j)} &\leq \frac{2^{3j-5} \sqrt[4]{2}}{2j+3} \cdot \frac{\Delta M (M_4 + \Delta M + 1)^{j-2} |\tilde{z}^* - z|^{j+1/4}}{1 - 2^{13}(M_4 + \Delta M + 1)^4 |\tilde{z}^* - z|^5}, \quad j = 3, 4, 5.\end{aligned}$$

Тогда для  $\Delta_4^{(3)}$  получаем оценку

$$\begin{aligned}\Delta_4^{(3)} &\leq \frac{\sqrt[4]{2} \Delta M |\tilde{z}^* - z|^{5/4}}{1 - 2^{13}(M_4 + \Delta M + 1)^4 |\tilde{z}^* - z|^5} \left( \frac{1}{5} + \frac{8}{7} (M_4 + \Delta M + 1) |\tilde{z}^* - z| + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^2 \frac{2^{4+3i}}{9+2i} (M_4 + \Delta M + 1)^{i+1} |\tilde{z}^* - z|^{i+2} \right),\end{aligned}$$

справедливую в области (14). Для области (15) в выражении оценки для  $\Delta_4^{(3)}$  выражение  $|\tilde{z}^* - z|$  заменяется на  $\Delta \tilde{z}^*$ .

Подобным образом находим оценки для  $\Delta_4^{(1)}$ ,  $\Delta_4^{(2)}$  и  $\Delta_4^{(4)}$ . С учетом (21) окончательно для  $\Delta_4$  получаем оценку (17).

Переходим к оценке выражения  $\Delta_5 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |\tilde{C}_n| \cdot |\tilde{z}^* - z|^{(n-1)/4}$ . На основании теоремы 2 для него имеем оценку (18), справедливую в области  $|\tilde{z}^* - z| < \frac{1}{\sqrt[5]{2^8(M_4+1)^4}}$ .

Таким образом, теорема доказана.

**Замечание.** Теорема 3 справедлива в областях

$$\{z : |\tilde{z}^* - z| < \Delta \tilde{z}^*\} \cap \{z : |\tilde{z}^* - z| < \rho_4\} \cap \{z : |z| > |\tilde{z}^*|\}, \quad (24)$$

$$\{z : |\tilde{z}^* - z| \geq \Delta \tilde{z}^*\} \cap \{z : |\tilde{z}^* - z| < \rho_4\} \cap \{z : |z| > |\tilde{z}^*|\}, \quad (25)$$

если в этой теореме вместо условия 3 выполняется условие

$$|\tilde{z}^*| > |z^*|.$$

В этом случае

$$\alpha = \begin{cases} \Delta \tilde{z}^* & \text{для } z \text{ из (24),} \\ |\tilde{z}^* - z| & \text{для } z \text{ из (25),} \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} 4 & \text{для } z \text{ из (24),} \\ 2 & \text{для } z \text{ из (25),} \end{cases} \quad \gamma = \begin{cases} 1 & \text{для } z \text{ из (24),} \\ 0 & \text{для } z \text{ из (25).} \end{cases}$$

**Пример 2.** Найдем приближенное решение задачи Коши, рассмотренной в примере 1, в окрестности приближенного значения подвижной особой точки  $\tilde{z}^*$ .

**Решение.** Для расчетов взяты следующие значения:  $\tilde{z}^* = -0,0001 + 0,2499i$ ,  $\Delta\tilde{z}^* = 0,0001$ . Находим  $\rho_4 = 0,020617311$ . Выберем  $z = -0,0142 + 0,2411i$  из области (14). Рассмотрим случай  $C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . В табл. 2 представлены результаты для соответствующего листа римановой поверхности.

Таблица 2

**Оценка приближенного решения уравнения в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области**

$z$	$w$	$\tilde{w}_3$	$\Delta$	$\Delta'$	$\Delta''$
$-0,0142 + 0,2411i$	$1,94607 - 0,27418i$	$1,95022 - 0,27381i$	0,0042	0,0102	0,0059

Здесь  $w$  – значение точного решения,  $\tilde{w}_3$  – значение приближенного решения,  $\Delta$  – абсолютная погрешность,  $\Delta'$  – априорная погрешность, полученная по теореме 3,  $\Delta''$  – апостериорная погрешность.

С помощью теоремы 3 можно решить и обратную задачу теории погрешности – определить значение  $N$  по заданной точности приближенного решения  $\varepsilon$ . Так, для  $\varepsilon = 0,0059$  получаем  $N = 15$ . Поскольку все производные функции  $r(z)$  равны нулю, следовательно, мы можем ограничиться значением  $N = 3$  в (13). При этом получаем апостериорную погрешность для приближенного решения  $\tilde{w}_3$ , равную значению  $\varepsilon = 0,0059$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Орлов, В. Н. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов, Н. А. Лукашевич // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 10. – С. 1829–1832.
- [2] Орлов, В. Н. Об одном конструктивном методе построения первой и второй мероморфных трансцендентных Пенлеве / В. Н. Орлов, В. П. Фильчакова // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці. ІМ НАН України. – 1998. – Т. 19. – С. 155–165.
- [3] Орлов, В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов // Вестник Казанского гос. тех. ун-та им. А. Н. Туполева. – 2008. – № 2. – С. 42–46.
- [4] Орлов, В. Н. Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати / В. Н. Орлов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского гос. политех. ун-та. – 2008. – № 63. – С. 102–108.
- [5] Орлов, В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // Вестник Московского авиац. ин-та. – 2008. – Т. 15. – № 5. – С. 128–135.
- [6] Орлов, В. Н. Точные границы области применения приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки / В. Н. Орлов // Вестник Воронежского гос. тех. ун-та. – 2009. – Т. 5. – № 10. – С. 192–195.
- [7] Орлов, В. Н. Математическое моделирование решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов, С. А. Редкозубов // Известия института инженерной физики. – 2010. – № 4 (18). – С. 2–6.
- [8] Орлов, В. Н. Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области / В. Н. Орлов // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 399–405.
- [9] Орлов, В. Н. Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати. Монография / В. Н. Орлов. – Чебоксары : Перфектум, 2012. – 112 с.

[10] Орлов, В. Н. Приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в области голоморфности / В. Н. Орлов, А. З. Пчелова // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Естественные и технические науки. – 2012. – № 4 (76). – С. 133–139.

[11] Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1950. – 436 с.

*Орлов Виктор Николаевич,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: orlowvn@rambler.ru*

*Пчелова Алевтина Зиновьевна,*

*старший преподаватель кафедры алгебры, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: archelova@mail.ru*

V. N. Orlov, A. Z. Pchelova

**INFLUENCE OF PERTURBATION OF MOVING SINGULARITY  
ON THE APPROXIMATE SOLUTION FOR A NONLINEAR  
DIFFERENTIAL EQUATION IN THE COMPLEX DOMAIN**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** The article considers a first-order nonlinear ordinary differential equation with moving singularity which cannot be solved in quadratures in general case. The proof of the existence and uniqueness theorem for the solution of this equation in some neighborhood of moving singularity is provided. The approximate solution of the equation in neighborhood of moving singularity is constructed and research of influence of perturbation of moving singularity on the approximate solution is carried out. The results obtained in the complex domain are accompanied by calculations.

**Keywords:** ordinary differential equation, Cauchy problem, moving singularity, perturbation, approximate solution, error estimation.

**REFERENCES**

- [1] Orlov, V. N. Studies of the approximate solution of the second Painleve equation / V. N. Orlov, N. A. Lukashevich // Differential equations. – 1989. – Vol. 25. – No. 10. – P. 1829–1832.
- [2] Orlov, V. N. About one constructive method of first and second Painleve transcendental meromorphic / V. N. Orlov, V. P. Filchakova // Symmetry and Analytic Method in matetychnly physics. IM NAN Ukraine. – 1998. – Vol. 19. – P. 155–165.
- [3] Orlov, V. N. About the approximate solution of the first Painleve equation / V. N. Orlov // Vestnik of A. Tupolev Kazan State Technical University. – 2008. – No. 2. – P. 42–46.
- [4] Orlov, V. N. The method for the approximate solution of Riccati differential equation / V. N. Orlov // Scientific and technical vedomosti of the St. Petersburg State Polytechnical University – 2008. – No. 63. – P. 102–108.
- [5] Orlov, V. N. About one method for the approximate solution of matrix Riccati differential equations / V. N. Orlov // Vestnik of the Moscow Aviation Institute. – 2008. – Vol. 15. – No. 5. – P. 128–135.
- [6] Orlov, V. N. Precise boundaries of the area of approximate solutions of Abel differential equation in the neighborhood of approximate value of movable special point / V. N. Orlov // Vestnik of the Voronezh State Technical University. – 2009. – Vol. 5. – No. 10. – P. 192–195.
- [7] Orlov, V. N. Mathematical modeling of the Abel differential equation in the neighborhood of movable special point / V. N. Orlov, S. A. Redkozubov // Izvastia of the Institute of Engineering Physics. – 2010. – No. 4 (18). – P. 2–6.
- [8] Orlov, V. N. Precise boundaries for the approximate solution of Abel differential equation in the neighborhood of approximate value of movable special point in the complex domain / V. N. Orlov // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Mechanics of definable state. – 2010. – No. 2 (8). – P. 399–405.
- [9] Orlov, V. N. Method of approximate solutions of scalar and matrix Riccati differential equation. Monograph / V. N. Orlov. – Cheboksary : Perfektum, 2012. – 112 p.
- [10] Orlov, V. N. Approximate solution for a nonlinear differential equation in the region of holomorphy / V. N. Orlov, A. Z. Pchelova // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Natural and Technical Sciences. – 2012. – No. 4 (76). – P. 133–139.

[11] *Golubev, V. V.* Lectures on the analytic theory of differential equations / V. V. Golubev. – Moscow-Leningrad : Gostechizdat Publ., 1950. – 436 p.

*Orlov, Victor Nikolayevich*

*Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Pchelova, Alevtina Zinonovna*

*Senior Lecturer, Department of Algebra, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*



В. П. Радченко, Н. Н. Попов

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

*Самарский государственный технический университет*

**Аннотация.** Дана постановка стохастической краевой задачи механики деформируемого твердого тела. Метод малого параметра, хорошо разработанный для решения линейных структурно-неоднородных упругих тел, предложено использовать для решения стохастически нелинейных задач теории ползучести. Построено аналитическое решение стохастической нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Задача рассматривается в цилиндрических координатах для случая плоского деформированного состояния. Стохастические свойства трубы описываются случайной функцией одной переменной (радиуса  $r$ ). Путем разложения радиального напряжения в ряд по степеням малого параметра получена система статистически линейных дифференциальных уравнений, из которой можно найти составляющие радиального напряжения с любой степенью точности.

Приведено обобщение задачи для толстостенной трубы, когда свойства материала описываются случайной функцией двух аргументов. Приведено исследование краевых эффектов путем решения стохастической краевой задачи в виде суммы двух рядов на основе первого приближения метода малого параметра.

**Ключевые слова:** установившаяся ползучесть, метод малого параметра, толстостенная труба.

УДК: 539.376

Метод малого параметра (метод возмущений) широко применяется в различных областях математики, механики и физики для решения разнообразных прикладных задач. Систематическое изложение метода возмущений применительно к механике деформируемого твердого тела (в детерминированной постановке) представлено в монографии Ивлева Д. Д., Ершова Л. В. [1]. Метод малого параметра при решении стохастических краевых задач механики деформируемого твердого тела используется для статистической линеаризации определяющего соотношения. Поэтому этот метод хорошо разработан для линейно упругих тел, благодаря работам Ломакина В. А. [2], [3]. Что касается стохастических нелинейных задач теории ползучести, то здесь применение метода малого параметра сдерживается проблемами физической и статистической нелинейностей.

Рассмотрена постановка стохастической краевой задачи механики деформируемого твердого тела в декартовых ортогональных координатах. Локальный закон деформирования материала задается согласно [2] в самом общем виде в форме

$$\sigma_{ij}(x_s, t) = F_{ij}[A_m(x_s, t'), \varepsilon_{kl}(x_s, t')]_{t_0}^t, \quad (1)$$

где  $F_{ij}$  являются случайными функционалами (по времени) тензора деформаций и случайными функциями координат  $x_s$ ;  $A_m(x_s, t')$  — в общем случае случайные функции координат и времени, описывающие структурные микронеоднородности материала, причем случайность функционалов  $F_{ij}$  обусловлена лишь случайностью функций  $A_m$ .

Кроме соотношений (1) имеем также уравнения равновесия для напряжений:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

условия совместности деформаций

$$\Lambda_{ijk}\Lambda_{lmn}\varepsilon_{km,jn} = 0 \quad (3)$$

и граничные условия, например, в виде

$$\sigma_{ij}n_j = q_i. \quad (4)$$

В уравнениях (2)–(4)  $f_i$  — объемные силы,  $\Lambda_{ijk}$  — единичный антисимметричный псевдотензор,  $q_i$  — поверхностные силы,  $n_j$  — внешняя единичная нормаль к поверхности тела. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3.

Структура случайных функций согласно [2] принимается в виде

$$A_i = \langle A_i \rangle (1 + \alpha U_i), \quad \langle U_i \rangle = 0, \quad (5)$$

где  $\alpha$  — малый детерминированный параметр. Угловыми скобками обозначается математическое ожидание случайной функции. Если стохастическое определяющее соотношение (1) является физически линейным, то, подставляя (5) в (1), стохастическую краевую задачу (1)–(4) можно представить, например, относительно тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  в виде разложения по степеням параметра  $\alpha$ . Однако при решении конкретных задач в силу трудностей вычислительного характера обычно ограничиваются первым приближением метода малого параметра, которое справедливо для слабо неоднородных сред.

В работе [4] построено аналитическое решение стохастической нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Задача рассматривается в цилиндрических координатах для случая плоского деформированного состояния в предположении, что стохастические свойства материала трубы описываются при помощи случайной функции одной переменной (радиуса  $r$ ).

Определяющие соотношения ползучести принимаются в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения в стохастической форме

$$\dot{\varepsilon}_\varphi = -\dot{\varepsilon}_r = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}^{n-1}}{2} \right) (\sigma_\varphi - \sigma_r)^n A(\rho), \quad (6)$$

где случайная функция  $A(\rho)$  взята в виде (5):

$$A(\rho) = c(1 + \alpha U(\rho)). \quad (7)$$

В формулах (6), (7)  $\rho = \frac{r}{a}$  — безразмерная координата ( $a$  — внутренний радиус трубы),  $\sigma_\varphi$  и  $\sigma_r$  — компоненты тензора напряжений,  $\varepsilon_\varphi$  и  $\varepsilon_r$  — компоненты тензора деформаций,  $U(\rho)$  — случайная однородная функция, описывающая флуктуации реологических свойств материала, характеристики которой известны:  $\langle U \rangle = 0$ ,  $\langle U^2 \rangle = 1$ , а число  $\alpha$  (малый параметр) играет роль коэффициента вариации этих свойств,  $c$  и  $n$  — постоянные материала. Если решение задачи искать при помощи разложения радиального напряжения  $\sigma_r$  по малому параметру  $\alpha$ , т.е.

$$\sigma_r = \sigma_{r0} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \sigma_{rk}, \quad \langle \sigma_r \rangle = \sigma_{r0}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

то для функций  $\sigma_{rk}$  получим бесконечную систему стохастических линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \rho\sigma''_{r0} + \frac{n+2}{n}\sigma'_{r0} &= 0, \\ \rho\sigma''_{r1} + \frac{n+2}{n}\sigma'_{r1} &= -\frac{\rho}{n}U'\sigma'_{r0}, \\ \rho\sigma''_{rk} + \frac{n+2}{n}\sigma'_{rk} &= -\frac{\rho}{n}U'[\sigma'_{rk-1} - U\sigma'_{rk-2} + U^2\sigma'_{rk-3} - \dots \\ &+ (-1)^{k-1}U^{k-1}\sigma'_{r0}], \quad k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

с граничными условиями

$$\sigma_{r0}(1) = -q, \quad \sigma_{r0}(\beta) = 0, \quad (10)$$

$$\sigma_{rk}(1) = 0, \quad \sigma_{r0}(\beta) = 0, \quad (11)$$

где  $\beta = b/a$ ,  $b$  — внешний радиус трубы.

Решая последовательно уравнения системы (9) с граничными условиями (10), (11), можно найти составляющие радиального напряжения  $\sigma_r$  с любой степенью точности:

$$\begin{aligned} \sigma_{r0} &= A \left[ 1 - \left( \frac{\beta}{\rho} \right)^{2/n} \right], \quad A = \frac{q}{\beta^{2/n} - 1}, \quad (12) \\ \sigma_{rk} &= \frac{2A\beta^{2/n}}{n^2} \left[ \frac{(-1)^k(n+1)(2n+1) \cdots ((k-1)n+1)}{k!n^{k-1}} \left( I_k(\rho) - (1 - \rho^{-2/n}) H_k \right) \right] + \\ &+ \frac{2}{n^2} \left( H_1\sigma_{rk-1} - \frac{n+1}{2n} H_2\sigma_{rk-2} + \dots \right. \\ &\left. + \frac{(-1)^k(n+1)(2n+1) \cdots ((k-2)n+1)}{(k-1)!n^{k-2}} H_{k-1}\sigma_{r1} \right), \end{aligned}$$

где  $I_k(\rho)$  — интеграл от случайной функции, имеющий вид:

$$I_k(\rho) = \int_1^\rho U^k(x)x^{-1-2/n}dx, \quad H_k = BI_k(\beta), \quad B = \frac{1}{1 - \beta^{-2/n}}.$$

Для определения приближений для тангенциального напряжения используется выражение

$$\sigma_\varphi = \sigma_r + \rho\sigma'_r,$$

полученное из уравнения равновесия в цилиндрической системе координат.

Для компонент тензора скоростей деформаций  $\dot{\epsilon}_r$  и  $\dot{\epsilon}_\varphi$  с учетом равенства

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \rho\sigma'_r = \rho\sigma'_{r0} \left( 1 + \frac{1}{\sigma'_{r0}} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \sigma'_{rk} \right)$$

имеем согласно (6)

$$\dot{\epsilon}_\varphi = -\dot{\epsilon}_r = T \frac{\beta^2}{\rho} \left( 1 + \frac{1}{\sigma'_{r0}} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \sigma'_{rk} \right) (1 + \alpha U), \quad (13)$$

где

$$T = (\sqrt{3})^{n-1} cA^n/n^n.$$

Разлагая степенную функцию, входящую в (13), в ряд Тейлора по  $\alpha$  и учитывая только члены до четвертого порядка малости (в силу сложности вычислительного характера), после преобразований получим приближенные значения скоростей деформаций.

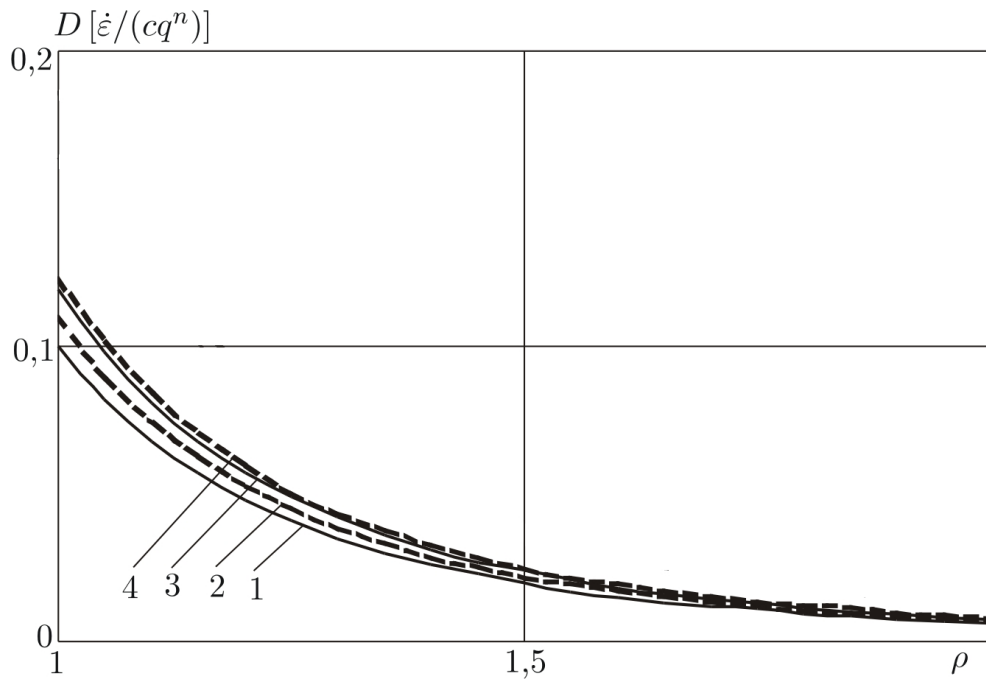


Рис. 1. График дисперсий приведенных скоростей деформаций  $D[\dot{\epsilon}_\varphi/(cq^n)]$  в зависимости от радиуса  $\rho$

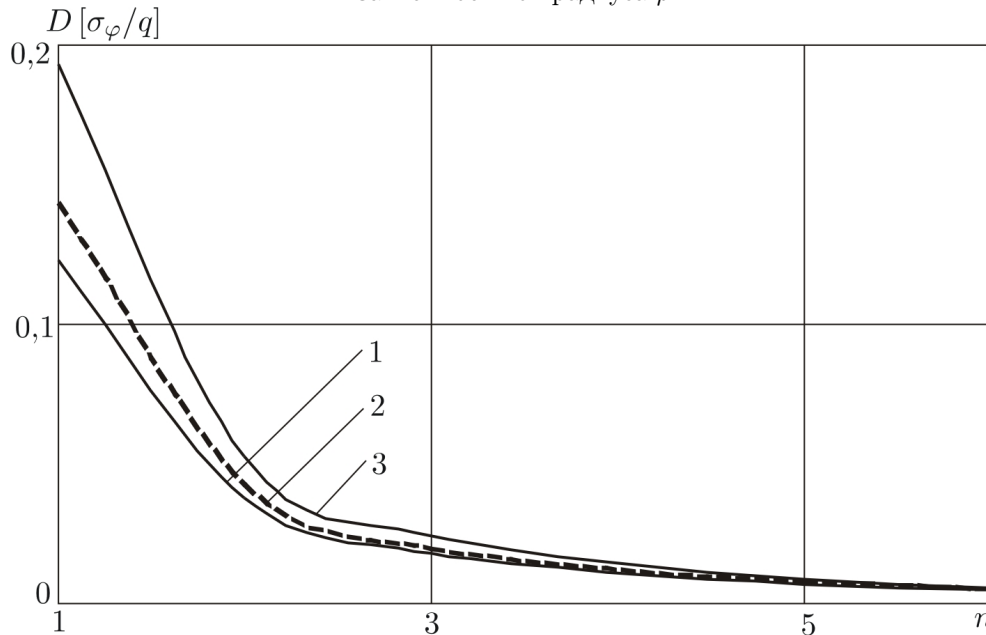


Рис. 2. График дисперсий приведенных тангенциальных напряжений в зависимости от параметра  $n$

Чтобы найти основные статистические характеристики случайных полей напряжений и скоростей деформаций, необходимо иметь моменты второго и более высоких порядков случайных функций. Если предположить, что случайная функция  $U(\rho)$ , задающая поле возмущений реологических свойств материала, распределена по нормальному закону, то в этом случае центральные моменты нечетных порядков равны нулю, а центральные моменты четных

порядков выражаются через моменты второго порядка. В силу того, что моменты в данной задаче определяются через кратные интегралы, причем при увеличении порядка момента увеличивается и кратность интеграла, дисперсии напряжений были вычислены в первом, втором и третьем приближениях. Дисперсии скоростей деформаций были вычислены до четвертого приближения включительно.

Проведено исследование случайного поля напряжений и скоростей деформаций в зависимости от степени неоднородности и показателя нелинейности материала. При этом предполагалось, что корреляционная функция случайной функции  $U(\rho)$  является знакопеременной затухающей функцией вида

$$K(\rho) = \exp(-\gamma|\rho|) \left( \cos \lambda\rho + \frac{\gamma}{\lambda} \sin \lambda|\rho| \right), \quad \rho = x_2 - x_1, \quad \gamma > 0,$$

где  $\gamma, \lambda$  — постоянные величины, определяемые по опытным данным из условий наилучшей аппроксимации. На рис. 1 дан типичный график дисперсий приведенных скоростей деформаций  $D[\dot{\varepsilon}_\varphi/(c\dot{q}^n)]$  в зависимости от радиуса  $\rho$  при  $n = 5, \gamma = 5, \lambda = 15$  и  $\alpha = 0,3$ . На рис. 2 приведен график дисперсий приведенных тангенциальных напряжений в зависимости от параметра  $n$  при  $\gamma = 10, \lambda = 30$  и  $\rho = 1,5$ . Цифры на рис. 2 — номера приближений.

Аналитически оценить сходимость ряда (8) со случайными членами достаточно сложно. В теории вероятностей сходимость рядов в основном рассматривается только для рядов из независимых случайных величин. Поэтому анализ сходимости метода малого параметра выполнен косвенно путем сопоставления приближенного аналитического решения по методу малого параметра с решением по методу статистических испытаний (метод Монте-Карло). Получено, что для слабонеоднородных материалов при значениях  $\alpha$  от 0,1 до 0,3 значения дисперсий скоростей деформаций, полученные по обоим методам, отличаются незначительно (меньше, чем на 5%).

Осесимметричную стохастическую нелинейную задачу ползучести для случая плоского напряженного состояния уже нельзя решить аналитически. Типичной задачей является задача о всестороннем растяжении бесконечной пластины из стохастически неоднородного материала, ослабленной круговым отверстием радиуса  $a$ . Определяющие соотношения ползучести, взятые в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения, в стохастической форме имеют вид [5]

$$\dot{\varepsilon}_r = 0,5cs^{n-1}(2\sigma_r - \sigma_\varphi)(1 + \alpha U(\rho)), \quad \dot{\varepsilon}_\varphi = 0,5cs^{n-1}(2\sigma_\varphi - \sigma_r)(1 + \alpha U(\rho)),$$

где  $s^2 = \sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r\sigma_\varphi$  — интенсивность напряжений.

На основе метода малого параметра путем введения новых переменных  $s$  и  $\theta$  по формулам  $\sigma_r = 2\rho \cos \theta / \sqrt{3}, \sigma_\varphi = 2\rho \cos(\theta - \pi/3) / \sqrt{3}$  стохастическая нелинейная краевая задача ползучести сведена к системе четырех линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Эта система решалась численно методом Рунге—Кутты.

Показано, что дисперсия тангенциального напряжения  $\sigma_\varphi$  принимает наибольшее значение на контуре отверстия, а дисперсия радиального напряжения  $\sigma_r$  на этом контуре равна нулю. Удаляясь от контура отверстия, дисперсии напряжений достаточно быстро приближаются к постоянным значениям, совпадающим с их значениями для бесконечной пластины без отверстия.

В работе [6] рассмотрен вариант задачи для толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, когда стохастические свойства материала описываются случайной функцией двух аргументов: радиуса  $r$  и угла  $\theta$ . Определяющие соотношения ползучести, взятые в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения, для данной задачи имеют вид

$$\dot{\varepsilon}_\varphi = \dot{\varepsilon}_r = 0,5cs^{n-1}(\sigma_\varphi - \sigma_r)(1 + \alpha U(\rho, \theta)), \quad \dot{\varepsilon}_{r\varphi} = 0,5cs^{n-1}\sigma_{r\varphi}(1 + \alpha U(\rho, \theta)),$$

где  $s^2 = \frac{3}{4}((\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + 4\sigma_{r\varphi}^2)$  — интенсивность напряжений.

Решение строилось на основе первого приближения метода малого параметра с использованием функции напряжений, относительно которой получено дифференциальное уравнение

в частных производных четвертого порядка. Случайная однородная функция  $U(\rho, \theta)$  принималась в виде:

$$U(\rho, \theta) = \lambda_0 J_0(\rho) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta) J_k(\rho),$$

где  $J_k(\rho)$  — функция Бесселя I рода целого порядка,  $\lambda_k, \beta_k$  — независимые случайные величины, причем  $\langle \lambda_k \rangle = \langle \beta_k \rangle = 0$ ,  $\langle \lambda_k^2 \rangle = \langle \beta_k^2 \rangle = 1$ .

В таблице приведены значения коэффициента вариации (в процентах) напряжения  $\sigma_\varphi$  на внутренней поверхности трубы в зависимости от  $n$  и  $\alpha$ , причем  $d_1$  — значения, полученные по одномерной модели,  $d_2$  — по соответствующей двумерной модели. Как видно из таблицы, значения коэффициентов вариации отличаются незначительно.

Таблица 1

**Значения коэффициента вариации напряжения  $\sigma_\theta$  на внутренней поверхности трубы (в процентах)**

$n$	1		2		4		6		8	
$\alpha$	$d_1$	$d_2$	$d_1$	$d_2$	$d_1$	$d_2$	$d_1$	$d_2$	$d_1$	$d_2$
0,1	7,98	5,44	5,03	4,19	3,09	2,83	2,25	2,13	1,78	1,71
0,2	15,96	10,88	10,05	8,38	6,18	5,65	4,50	4,26	3,57	3,41
0,3	23,93	16,32	15,08	12,57	9,28	8,48	6,74	6,38	5,35	5,12
0,4	31,91	21,76	20,11	16,76	12,37	11,30	8,99	8,51	7,13	6,82
0,5	39,89	27,21	25,13	20,95	15,46	14,12	11,24	10,64	8,91	8,53

Структурная неоднородность материала обуславливает появление ряда механических эффектов, которые не могут быть изучены в рамках классических феноменологических теорий. Одним из таких эффектов является эффект пограничного слоя. Суть его состоит в том, что вблизи границы тела со структурной неоднородностью имеется пограничный слой, в котором напряженно-деформированное состояние отлично от напряженно-деформированного состояния внутренних областей. На границе тела возникает концентрация напряжений, которая может достигать заметной величины. Исследование краевого эффекта в условиях ползучести возможно на основе построения аналитического решения стохастической краевой задачи. Решение краевой задачи на основе первого приближения метода малого параметра может быть представлено в виде суммы двух рядов. Первый ряд задает решение вдали от границы тела без учета краевых эффектов, второй представляет собой решение в пограничной зоне, его члены быстро затухают по мере удаления от границы тела. По данной схеме решен ряд краевых задач ползучести: двухосное растяжение полуплоскости [7], [8] и полупространства [9], растяжение полосы [10]. Получено, что в условиях ползучести концентрация напряжения на границе тела в два и более раз больше, чем на бесконечности в зависимости от параметра нагружения и степени неоднородности материала. Показано, что разброс напряжений в поверхностном слое, ширина которого зависит от степени неоднородности материала, может быть намного больше, чем для глубинных слоев.

В качестве примера рассмотрим ползучесть стохастически неоднородной полуплоскости  $x_2 \geq 0$ , находящейся в условиях плоского напряженного состояния. Пусть к границе полуплоскости  $x_2 = 0$  приложены нагрузки

$$\sigma_{22}|_{x_2=0} = \sigma_{22} = \text{const}, \quad \sigma_{12}|_{x_2=0} = 0,$$

а напряжение  $\sigma_{11}$  удовлетворяет условию макроскопической однородности:  $\langle \sigma_{11} \rangle = \sigma_{11}^0 = \text{const}$ , которое соответствует приложению при  $x_1 = \pm H$ , где  $H$  достаточно велико, постоянных по  $x_2$  напряжений  $\sigma_{11}^0$ . Из второго граничного условия следует, что  $\sigma_{12} = 0$  во всей полуплоскости.

Определяющие соотношения ползучести принимаются в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения в стохастической форме

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = cs^{n-1} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{mm} \right) (1 + \alpha U(x_1, x_2)),$$

где  $s$  — интенсивность напряжений:  $s^2 = 0,5 (3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj})$ ,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Предполагается, что однородная функция  $U(x_1, x_2)$ , с помощью которой задается случайное поле возмущений реологических свойств материала, является почти периодической быстроосциллирующей функцией координат:

$$U(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega c_k x_1 + \omega d_k x_2 + \varphi_k),$$

где  $\omega$  — большой параметр, имеющий размерность, обратную длине;  $c_k, d_k$  — безразмерные величины порядка единицы;  $A_k, \varphi_k$  — некоррелированные случайные величины, причем  $\varphi_k$  имеет равномерное распределение на интервале  $(0, 2\pi)$ .

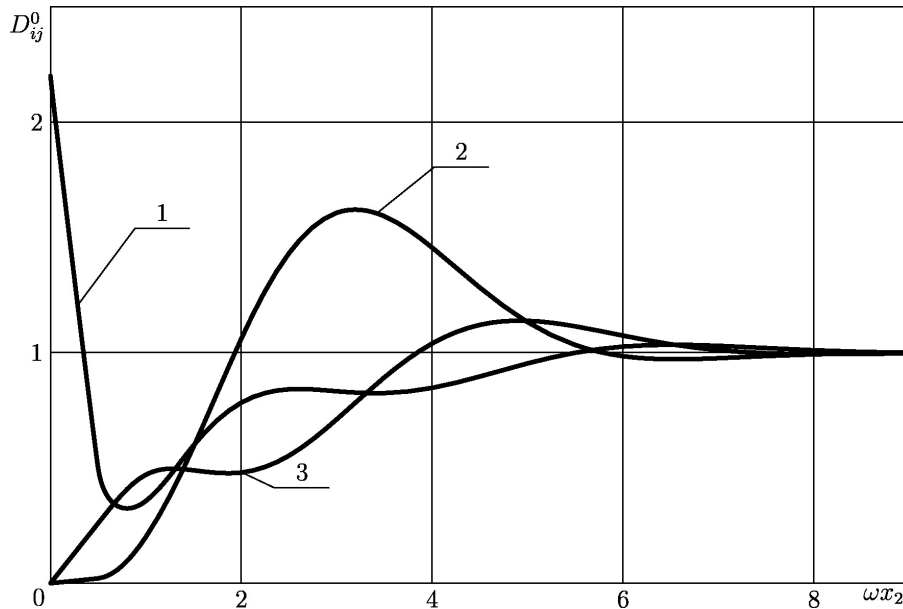


Рис. 3. Нормированные дисперсии  $D_{ij}^0$  при  $n = 3, h = 0.5$ : 1 —  $D_{11}^0$ , 2 —  $D_{00}^0$ , 3 —  $D_{12}^0$

Найдены аналитические выражения для компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и скоростей деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  и их дисперсий. Проведен численный анализ случайных полей напряжений и деформаций в зависимости от показателя нелинейности и параметра нагружения  $h = \sigma_{22}^0 / \sigma_{11}^0$ . На рис. 3 приведены типичные графики нормированных дисперсий напряжений в зависимости от безразмерной координаты  $\omega x_2$  (все величины  $c_k$  и  $d_k$  приняты равными единице).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. — М. : Наука, 1978. — 298 с.
- [2] Ломакин, В. А. Проблемы механики структурно-неоднородных тел / В. А. Ломакин // Изв. АН СССР. ПММ. — 1978. — № 6. — С. 45–52.
- [3] Ломакин, В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В. А. Ломакин. — М. : Наука, 1970. — 139 с.

- [4] *Попов, Н. Н.* Аналитическое решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы / Н. Н. Попов, В. П. Радченко // ПММ. – 2012. – Т. 76. – № 6. – С. 1023–1031.
- [5] *Попов, Н. Н.* Ползучесть стохастически неоднородной пластины с круговым отверстием / Н. Н. Попов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. : Физ.-мат. науки. – 2008. – № 2(17). – С. 126–132.
- [6] *Попов, Н. Н.* Построение аналитического решения двумерной стохастической задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы / Н. Н. Попов, В. Н. Исуткина // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. : Физ.-мат. науки. – 2007. – № 2(15). – С. 90–94.
- [7] *Попов, Н. Н.* Исследование полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести / Н. Н. Попов, Ю. П. Самарин // ПМТФ. – 1988. – № 1. – С. 159–164.
- [8] *Коваленко, Л. В.* Решение плоской стохастической задачи ползучести / Л. В. Коваленко, Н. Н. Попов, В. П. Радченко // ПММ. – 2009. – Т. 73. – № 6. – С. 1009–1016.
- [9] *Попов, Н. Н.* Нелинейная стохастическая задача о растяжении полупространства в условиях ползучести / Н. Н. Попов, Л. В. Коваленко // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. : Физ.-мат. науки. – 2007. – № 1(14). – С. 56–62.
- [10] *Коваленко, Л. В.* Моделирование краевого эффекта в задаче о растяжении стохастически неоднородной полосы при ползучести / Л. В. Коваленко, Н. Н. Попов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. : Физ.-мат. науки. – 2009. – № 1(18). – С. 85–94.

*Радченко Владимир Павлович,*

*доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, Самарский государственный технический университет, г. Самара*

*e-mail: radch@samgtu.ru*

*Попов Николай Николаевич,*

*кандидат физико-математических наук, доцент, Самарский государственный технический университет, г. Самара*

*e-mail: ponick25@gmail.com*



V. P. Radchenko, N. N. Popov

## USING PERTURBATION METHOD FOR SOLVING STOCHASTIC NONLINEAR PROBLEMS OF STEADY-STATE CREEP

*Samara State Technical University*

**Abstract.** The formulation of the boundary value problem of stochastic mechanics deformable solids is given. The perturbation method is well designed to solve linear inhomogeneous elastic solids. Here it is proposed to use to solve stochastic nonlinear creep problems. The analytical solution stochastic nonlinear boundary value problem is formulated for thick-walled pipe under the action of internal pressure under steady-state creepage. The problem is considered in cylindrical coordinates for case of plane strain. Stochastic properties of the pipe described by a random function of one variable (radius  $r$ ). By expanding the radial stress in a series of the small parameter was build a system of linear statistical differential equations, from which we can find the components of radial stress with any degree of accuracy.

We give a generalization of the problem for a thick-walled tube, where the properties of material are described by a random function of two arguments. There was made a research of boundary effects by solving stochastic boundary problem as a sum of two series based on a first approximation of the small parameter.

**Keywords:** steady-state creep, perturbation method, heavy-walled tube

### REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* Perturbation Method in the Theory of Elastoplastic Body / D. D. Ivlev, L. V. Ershov. – Moscow : Nauka, 1978. – 298 p.
- [2] *Lomakin, V. A.* Problems of the mechanics of structurally nonuniform solid bodies / V. A. Lomakin // *Isv. AN USSR. PMM.* – 1978. – No 6. – P. 45–52.
- [3] *Lomakin, V. A.* Statistical Problems of the Mechanics of Deformable Solids / V. A. Lomakin. – Moscow : Nauka, 1970. – 139 p.
- [4] *Popov, N. N.* Analytical solution of the stochastic steady-state creep boundary value problem for a thick-walled tube / N. N. Popov, V. P. Radchenko // *J. Appl. Math. Mech.* – 2012. – Vol. 76. – No. 6. – P. 738–744.
- [5] *Popov, N. N.* Creep of a stochastic heterogeneous plate with a small circular hole / N. N. Popov // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki.* – 2008. – No. 2(17). – P. 126–132.
- [6] *Popov, N. N.* Construction of an Analytical Solution of a Two-Dimensional Stochastic Problem of the Steady Creep for a Thick-Walled Pipe / N. N. Popov, V. N. Isutkina // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki.* – 2007. – No. 2(15). – P. 90–94.
- [7] *Popov, N. N.* Stress fields close to the boundary of a stochastically inhomogeneous half-plane during creep / N. N. Popov, Yu. P. Samarin // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* – 1988. Vol. 29. – No 1. – P. 149–154.
- [8] *Kovalenko, L. V.* Solution of the plane stochastic creep boundary value problem / L. V. Kovalenko, N. N. Popov, V. P. Radchenko // *J. Appl. Math. Mech.* – 2009. – Vol. 73. – No. 6. – P. 727–733.
- [9] *Popov, N. N.* Nonlinear stochastic problem of half-space tension under creep condition / N. N. Popov, L. V. Kovalenko // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki.* – 2007. – No 1(14). – P. 56–62.
- [10] *Kovalenko, L. V.* Modeling of boundary effect in stochastic nonlinear heterogeneous stripe tension problem / L. V. Kovalenko, N. N. Popov // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki.* – 2009. – No 1(18). – P. 85–94.

*Radchenko, Vladimir Pavlovich*

*Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Samara State Technical University, Samara*

**e-mail:** radch@samgtu.ru

*Popov, Nikolai Nikolaevich*

*Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Samara State Technical University, Samara*

**e-mail:** ponick25@gmail.com

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ДИРЕКТОРЫ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ И ВЕКТОРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИКИ КОНТИНУУМА

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН*

**Аннотация.** В представляемой работе с помощью новых прямых тензорных представлений напряженного состояния в асимптотических осях симметричного тензора напряжений получены общие векторные формы трехмерных дифференциальных уравнений равновесия механики континуума. Изложение в значительной степени опирается на терминологию и обозначения, характерные для математической теории пластичности, но все основные результаты, полученные в работе, остаются справедливыми для напряжений в произвольных континуумах. Найдены максимально простые и наиболее аналитически эффективные прямые тензорные представления напряжений для „полностью пластических“, „полупластических“ и „непластических“ трехмерных состояний в смешанных диадах асимптотических директоров. При переходе к указанным представлениям решающую роль играют „промежуточное“ главное нормальное напряжение и параметр Лоде. Асимптотические оси напряжений при этом выступают как наиболее естественный репер, обеспечивающий новые прямые тензорные представления симметричного тензора напряжений, отличные от спектральных. В „полностью пластических“, „полупластических“ и „непластических“ состояниях найдены отвечающие им формы векторных дифференциальных уравнений равновесия и обсуждаются условия их интегрируемости.

**Ключевые слова:** тензор напряжений, главное напряжение, главное направление, асимптотическое направление, асимптотические директоры, параметр Лоде.

УДК: 539.374

Вводные замечания. Механика континуума в настоящее время является главной теоретической основой исследования механического поведения не только металлов и сплавов, но и высокоэластичных материалов, горных пород, грунтов, пористых и сыпучих сред. Перечисленные среды почти всегда обладают аномальным механическим поведением.<sup>1</sup> Математические теории таких континуумов нуждаются в новых подходах и специальных формах уравнений, составляющих математическое оформление моделей сплошных сред. Механика континуума всегда в явной или неявной форме учитывает функциональные или дифференциальные связи, ограничивающие тензорные поля, применяющиеся, как правило, для представления деформации и передающиеся через двумерные плоские элементы силовых воздействий (внутренних напряжений). Весьма показательным в этом смысле является идеально пластическое тело: в

---

Поступила 23.02.2013

<sup>1</sup>Например, резина обладает аномальным термоупругим поведением. Так, каучуковый образец в форме ленточки, если поддерживать его при постоянном растягивающем напряжении, будет сокращаться при нагревании и растягиваться при охлаждении.

состоянии пластического течения главные напряжения связаны некоторым „конечным“ уравнением (так называемым условием пластичности), а главные приращения деформаций образуют нулевую сумму (условие несжимаемости течения). То же самое относится к моделям неплотно связанных сред, в частности, песку или сухому грунту, которые служат обобщением представлений об идеально пластическом теле и составляют теорию идеально сыпучих сред. Например, в теории Мора (O. Mohr) в случае скольжения идеально сыпучего материала постоянным принимается отношение наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений. Через такого рода теории Прандтль (L. Prandtl) в 1921 г. пришел к понятию обобщенного идеально пластического тела; деформация такого тела начинается и продолжается неопределенно долго, если максимальное касательное напряжение достигает предельного значения, зависящего от средней величины (полусуммы) наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений.

Целью настоящей работы является вывод с помощью новых прямых тензорных представлений напряженного состояния в асимптотических осях симметричного тензора напряжений ряда общих векторных форм трехмерных уравнений равновесия механики континуума, не зависящих от определяющего закона, точно предписывающего характер собственно механического поведения континуума. Развиваемый в работе подход в значительной степени соприкасается с методами математической теории пластичности, поэтому присущие теории пластичности понятия и методы служат той естественной основой, на которой могут быть сформулированы новые фундаментальные уравнения теории и механики сплошных сред.

1. Каноническое спектральное разложение симметричного тензора напряжений. В трехмерных формулировках математической теории пластичности всегда используются специальные представления тензора напряжений и соответствующие формы дивергентного уравнения равновесия [1], [2].

Обозначим через  $\sigma$  трехмерный тензор напряжений Коши. Симметрия тензора напряжений влечет возможность его канонического спектрального представления. Если  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  — главные напряжения (собственные значения тензора напряжений), то его каноническое разложение будет иметь следующую хорошо известную форму:

$$\sigma = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (1.1)$$

Это представление достаточно широко используется в современной механике деформируемого твердого тела в различных вопросах, связанных с анализом напряженного состояния тела в данной точке [3], [4], [5].

Для тех пространственных состояний, для которых а priori имеется некоторое конечное соотношение между главными напряжениями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , как мы увидим далее, вместо канонического спектрального разложения (1.1) могут быть получены новые более компактные и удобные, по сравнению с (1.1), представления в асимптотических осях. Такое положение дел характерно прежде всего для теории идеально пластического тела. Поэтому такие напряженные состояния, когда а priori нельзя указать никаких конечных соотношений между главными напряжениями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , будем называть „непластическими“. Однако приведение тензора напряжений к асимптотическим осям в равной мере оказывается возможным и для „непластических“ трехмерных состояний.

2. Тензор напряжений для „вполне пластических“ состояний. Одним из ключевых положений математической теории пластичности выступает условие пластичности. Для изотропных тел оно имеет форму конечного соотношения, связывающего главные напряжения, или, точнее, *разности* главных напряжений

$$f(\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 - \sigma_3) = 0. \quad (2.1)$$

Сен-Венаном (B. de Saint-Venant), на основании опытных данных Треска (H. Tresca, 1864 г.), было предложено условие пластичности, состоящее в том, что текучесть тела наступает как только максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  достигает некоторого критического значения  $k$ :

$$\tau_{\max} = k. \quad (2.2)$$

Здесь постоянная  $k$  представляет собой предел текучести при чистом сдвиге. В научной литературе разных стран иногда это условие текучести связывают (с различной степенью обоснованности) с именами Кулона (C.A. Coulomb, 1773 г.), Геста (J. Guest, 1900 г.) и Мора (O. Mohr, 1900 г.).

Если считать все главные напряжения различными и перенумеровать главные оси тензора напряжений  $\sigma$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3,$$

то можно получить формулу

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (2.3)$$

устанавливающую, что „промежуточное“ главное нормальное напряжение  $\sigma_2$  никак не влияет на величину максимального касательного напряжения  $\tau_{\max}$ . При этом максимальное по всем ориентациям в данной точке касательное напряжение достигается на *двух* площадках, делящих пополам углы между направлениями максимального и минимального главных напряжений и содержащих главную ось напряжений, соответствующую „промежуточному“ главному напряжению  $\sigma_2$ .

Некоторые напряженные состояния, помимо выполнения условия пластичности Треска—Сен-Венана (2.2), характеризуются еще также и тем, что два из трех главных напряжений оказываются равными друг другу. В пространстве главных напряжений такие состояния попадают на ребра шестигранной призмы Кулона—Треска, которые определяются уравнениями

$$\sigma_1 \pm 2k = \sigma_2 = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \pm 2k = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Следуя терминологии Хаара (A. Naag) и Кармана (Th. Karman) [6], такие состояния будем называть „вполне пластическими“ (или „полностью пластическими“).

Принимая соглашение о том, что  $\sigma_3$  есть либо наименьшее, либо наибольшее главное напряжение, „вполне пластические“ состояния можно определить уравнениями

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k. \quad (2.4)$$

Вслед за Хааром и Карманом теория пластичности с двумя соотношениями, связывающими главные напряжения, была предложена А. Ю. Ишлинским [7]. Нетрудно заметить, что два уравнения теории пластичности А.Ю. Ишлинского

$$f_1(\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 - \sigma_3) = 0, \quad f_2(\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 - \sigma_3) = 0$$

при выполнении условия  $\sigma_1 = \sigma_2$  приводят к соотношениям „полной пластичности“ Хаара—Кармана (2.4). В своей работе А. Ю. Ишлинский пишет: „Согласно предлагаемой теории идеальной пластичности два главных напряжения должны быть непременно равны друг другу, а третье отличаться от них на удвоенное критическое значение  $2k$ . Таким образом, для пространственной задачи пластичности имеют место два соотношения между главными напряжениями, подобно гипотезе полной пластичности Хаара и Кармана. Этим предлагаемая теория отличается от теорий Леви и Мизеса, в которых принимается единственное соотношение“.

Поскольку  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  — ортонормированный базис, то справедливо следующее тензорное разложение единицы:

$$\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{I}, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор.

Учитывая (1.1), (2.5) и уравнение ребра призмы Кулона–Треска  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$ , получим

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_3 \pm 2k)\mathbf{I} \mp 2k\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (2.6)$$

Таким образом, для „вполне пластических“ состояний тензор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  определяется одним скалярным полем  $\sigma_3$  и одним единичным векторным полем  $\mathbf{n}$ . Направление, указываемое директором  $\mathbf{n}$ , будем называть асимптотическим.<sup>2</sup>

Для состояний „полной пластичности“ тензор напряжений будет иметь только одну асимптотическую ось. Диадное представление тензора напряжений за вычетом шарового тензора  $(\sigma_3 \pm 2k)\mathbf{I}$  реализуемо с помощью только одной диады  $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ .

Уравнение равновесия

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

после подстановки в него разложения (2.6) можно представить в виде следующего векторного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{grad} \sigma_3 \mp 2k \operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \quad (2.8)$$

Следовательно, задача о равновесии тела, напряженное состояние которого соответствует ребру призмы Кулона–Треска, формально статически определима (поскольку имеется ровно три уравнения для определения трех неизвестных: собственного значения  $\sigma_3$  и, например, двух углов, задающих ориентацию в пространстве единичного вектора  $\mathbf{n}$ ), если граничные условия заданы в напряжениях.

Обозначим через  $\Sigma$  безразмерное отношение  $\sigma_3$  к  $\mp 2k$  и приведем уравнение (2.8) к виду

$$\operatorname{grad} \Sigma + \operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \quad (2.9)$$

Отметим также еще одну форму векторного дифференциального уравнения (2.9)

$$\nabla \Sigma + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

Для единичного векторного поля справедлива формула<sup>3</sup>

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}, \quad (2.11)$$

с помощью которой векторное уравнение (2.10) может быть также представлено в виде

$$\nabla \Sigma - \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n} + \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

Поскольку для любого единичного векторного поля имеем

$$|\mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}|^2 = |\operatorname{div} \mathbf{n}|^2 + |\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}|^2,$$

и в силу тождества Эйлера–Лагранжа<sup>4</sup>

$$|\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}|^2 = |\operatorname{rot} \mathbf{n}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n})^2,$$

<sup>2</sup>Термин *директор* систематически используется в данной статье для указания на единичный вектор, определяющий то или иное характерное направление в трехмерном пространстве, связанное с тензором напряжений или тензором приращения деформации.

<sup>3</sup>Приводимая ниже формула является прямым следствием тождества

$$\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}$$

и условия нормировки  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ . Указанное тождество, в свою очередь, вытекает из следующего правила символического набла-исчисления:

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{u},$$

где  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — произвольные пространственные векторные поля.

<sup>4</sup>Речь идет о тождестве

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2,$$

справедливым для любых двух векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ .

то оказывается справедливым соотношение

$$|\mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}|^2 = |\operatorname{div} \mathbf{n}|^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{n}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n})^2, \quad (2.13)$$

из которого с помощью уравнения (2.12) находим

$$|\nabla \Sigma|^2 = |\operatorname{div} \mathbf{n}|^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{n}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n})^2, \quad (2.14)$$

откуда сразу же следует неравенство

$$|\nabla \Sigma|^2 \leq |\operatorname{div} \mathbf{n}|^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{n}|^2. \quad (2.15)$$

Равенство в (2.15) достигается только для *расслоенного* векторного поля  $\mathbf{n}$ . Критерием расслоенности является выполнение равенства

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} = 0. \quad (2.16)$$

В этом случае из векторных линий вихря поля  $\mathbf{n}$  могут быть построены поверхности, ортогональные полю  $\mathbf{n}$ . Такие поверхности будем называть „слоями“ векторного поля  $\mathbf{n}$ . При этом для пространственного градиента третьего главного напряжения выполняется своеобразная „теорема Пифагора“:

$$|\nabla \Sigma|^2 = |\operatorname{div} \mathbf{n}|^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{n}|^2. \quad (2.17)$$

Исследуем характеристики векторного дифференциального уравнения (2.12). Для этого будем трактовать характеристические поверхности уравнения (2.12) как поверхности слабого разрыва  $\Sigma$  и  $\mathbf{n}$  и воспользуемся геометрическими условиями совместности Адамара—Томаса [8]:

$$[\nabla \Sigma] = B\mathbf{N}, \quad [\nabla \otimes \mathbf{n}] = \mathbf{N} \otimes \mathbf{b}, \quad (2.18)$$

где квадратные скобки [ ] обозначают скачок при переходе через поверхность слабого разрыва;  $\mathbf{N}$  — единичный вектор нормали к поверхности слабого разрыва;  $B, \mathbf{b}$  — некоторые поля, определенные на этой поверхности, причем равенства  $B = 0$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  не могут выполняться одновременно ни в какой точке поверхности, если рассматриваемая поверхность есть действительно поверхность слабого разрыва.

На основании дифференциального уравнения (2.12) имеем:

$$[\nabla \Sigma] - \mathbf{n} \times [\operatorname{rot} \mathbf{n}] + \mathbf{n} [\operatorname{div} \mathbf{n}] = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

и, применяя условия совместности (2.18), получим

$$B\mathbf{N} - \mathbf{n} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{b})\mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (2.20)$$

Кроме того, так как  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ , то  $\mathbf{n} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{n})^T = \mathbf{0}$  и, следовательно,  $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})\mathbf{N} = \mathbf{0}$ , что приводит к следующему соотношению на поверхности слабого разрыва:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.21)$$

Замечая далее, что

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})\mathbf{N} - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b},$$

и учитывая (2.21), уравнение (2.20) приводим к виду

$$B\mathbf{N} + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b} + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{b})\mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (2.22)$$

Умножим обе части этого уравнения скалярно на вектор  $\mathbf{N}$ :

$$B + 2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{N} \cdot \mathbf{b}) = 0. \quad (2.23)$$

Умножая обе части уравнения (2.22) скалярно на вектор  $\mathbf{n}$ , получим также

$$B(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (2.24)$$

Подставляя в это уравнение выражение для  $B$ , полученное с помощью предыдущего уравнения, находим, что

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{b})(1 - 2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})^2) = 0. \quad (2.25)$$

Это уравнение распадается на два. Если  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{b} \neq 0$ , то необходимо

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.26)$$

Если  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = 0$ , то на основании (2.23)  $B = 0$ , и тогда уравнение (2.22) дает

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b} = \mathbf{0},$$

откуда в силу того, что равенства  $B = 0$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  не могут выполняться одновременно,

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.27)$$

Итак, дифференциальное уравнение (2.12) принадлежит к гиперболическому типу. Его характеристическое уравнение имеет три различных вещественных корня. Нормали к характеристическим поверхностям в силу (2.26) образуют круговой конус с углом полураствора  $\pi/4$  и осью, ориентированной вдоль вектора  $\mathbf{n}$ . Ясно, что характеристические поверхности являются также и поверхностями максимального касательного напряжения. Характеристическими являются не только поверхности скольжения, но и, согласно (2.27), интегральные поверхности поля  $\mathbf{n}$  (т. е. поверхности, составленные из интегральных кривых векторного поля  $\mathbf{n}$ ).

Своеобразная структура векторного дифференциального уравнения (2.12) позволяет сразу же получить отдельное уравнение для поля директоров  $\mathbf{n}$ . Действительно, уравнение (2.12) устанавливает, что векторное поле  $\operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$  потенциально. Если поле  $\mathbf{n}$  исследуется в трехмерной поверхностно односвязной области,<sup>5</sup> то необходимое и достаточное условие потенциальности поля  $\operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$  заключается в исчезновении вихря:

$$\operatorname{rot} \operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \quad (2.28)$$

Это уравнение одновременно выступает как условие интегрируемости векторного дифференциального уравнения (2.12).

Поскольку

$$\operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n},$$

уравнение (2.28) преобразуется к

$$2(\operatorname{div} \mathbf{n}) \operatorname{rot} \mathbf{n} + (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \operatorname{rot} \mathbf{n} - (\operatorname{rot} \mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (2.29)$$

Существование потенциала поля  $\operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$  возможно только тогда, когда его циркуляция вдоль любого замкнутого контура  $C$  равна нулю, т. е.

$$\oint_C (\mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

3. Тензор напряжений для „полупластических“ и „непластических“ состояний. В случае „полупластических“ состояний все главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  различны; два „крайние“ из них связаны уравнением Треска—Сен-Венана

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k.$$

„Непластические“ напряженные состояния характеризуются отсутствием какой бы то ни было априорной связи между главными напряжениями и, следовательно, представляют собой наиболее общий из мыслимых в механике деформируемого твердого тела случаев.

Для каждого из указанных состояний можно установить новые важные формы тензора напряжений, которые отличаются от канонической (1.1), но обладают, так же как и (2.6), чрезвычайно простой аналитической структурой. Для выполнения этой задачи требуется введение двух новых направлений в плоскости, ортогональной собственному вектору  $\mathbf{m}$ . Напомним, что этот вектор соответствует „промежуточному“ главному напряжению  $\sigma_2$ . Упомянутые оси, к

<sup>5</sup>Область называется поверхностно односвязной в том случае, когда для любого замкнутого контура, расположенного внутри области, можно построить поверхность, также располагающуюся внутри области, для которой указанный контур будет краем.



построению которых мы собственно и переходим, назовем, учитывая гиперболическую природу уравнений математической теории идеальной пластичности и, в целом, гиперболическую парадигму механики, а также ряд других аргументов, асимптотическими осями тензора напряжений. Выбор термина „асимптотическое направление“ продиктован аналогией с двумя каноническими формами гиперболы. Действительно, каноническое уравнение гиперболы в теории конических сечений обычно принимается в форме

$$x^2 - y^2 = 1. \quad (3.1)$$

Преобразование координат

$$\begin{aligned} \backslash x &= x - y \\ \backslash y &= x + y \end{aligned} \quad (3.2)$$

позволяет представить каноническую форму (3.1) в асимптотических осях гиперболы аналитически максимально простой формулой

$$\backslash x \backslash y = 1. \quad (3.3)$$

С помощью тензорного разбиения единицы (2.5) исключаем диаду, образованную собственным вектором  $\mathbf{m}$ :

$$\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} = \mathbf{I} - \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (3.4)$$

следовательно,

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + 2\tau_{\max} \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right). \quad (3.5)$$

Обозначая

$$g_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad g_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3},$$

последнюю формулу перепишем в следующем виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + 2\tau_{\max} (g_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - g_2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}). \quad (3.6)$$

В плоскости, ортогональной собственному вектору  $\mathbf{m}$ , по аналогии с (3.2) выполним преобразование векторов  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{n}$  согласно

$$\begin{cases} \mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos \backslash \iota)}} (\backslash \mathbf{l} + \backslash \mathbf{n}) \\ \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos \backslash \iota)}} (-\backslash \mathbf{l} + \backslash \mathbf{n}) \end{cases} \quad (3.7)$$

где  $\backslash \iota$  — угол между единичными векторами  $\backslash \mathbf{l}$ ,  $\backslash \mathbf{n}$ .

Оказывается, что угол  $\backslash \iota$  можно подобрать так, чтобы тензор напряжений содержал только смешанные диады, образованные новыми векторами  $\backslash \mathbf{l}$ ,  $\backslash \mathbf{n}$ . Тогда директоры  $\backslash \mathbf{l}$ ,  $\backslash \mathbf{n}$  будут указывать асимптотические направления симметричного тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ . Действительно, поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} &= \frac{1}{2(1+\cos \backslash \iota)} (\backslash \mathbf{l} \otimes \backslash \mathbf{l} + \backslash \mathbf{n} \otimes \backslash \mathbf{n} + \backslash \mathbf{l} \otimes \backslash \mathbf{n} + \backslash \mathbf{n} \otimes \backslash \mathbf{l}), \\ \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} &= \frac{1}{2(1-\cos \backslash \iota)} (\backslash \mathbf{l} \otimes \backslash \mathbf{l} + \backslash \mathbf{n} \otimes \backslash \mathbf{n} - \backslash \mathbf{l} \otimes \backslash \mathbf{n} - \backslash \mathbf{n} \otimes \backslash \mathbf{l}), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} 2g_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - 2g_2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} &= \left( \frac{g_1}{1+\cos \backslash \iota} - \frac{g_2}{1-\cos \backslash \iota} \right) (\backslash \mathbf{l} \otimes \backslash \mathbf{l} + \backslash \mathbf{n} \otimes \backslash \mathbf{n}) + \\ &+ \left( \frac{g_1}{1+\cos \backslash \iota} + \frac{g_2}{1-\cos \backslash \iota} \right) (\backslash \mathbf{l} \otimes \backslash \mathbf{n} + \backslash \mathbf{n} \otimes \backslash \mathbf{l}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Требуя, чтобы диады  $\backslash \mathbf{l} \otimes \backslash \mathbf{l}$ ,  $\backslash \mathbf{n} \otimes \backslash \mathbf{n}$  исчезали, имеем условие

$$\frac{g_1}{1+\cos \backslash \iota} = \frac{g_2}{1-\cos \backslash \iota},$$

откуда находим уравнение для угла  $\iota$

$$\cos \iota = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3}.$$

Поэтому в формулах преобразования (3.7) достаточно положить

$$\cos \iota = -\mu, \quad (3.9)$$

где  $\mu$  есть параметр Лодэ (W. Lode) [9],

$$\mu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}. \quad (3.10)$$

В силу выполнения ограничения

$$-1 \leq \mu \leq 1$$

уравнение (3.9) всегда разрешимо относительно угла  $\iota$ .

В отличие от пары  $\mathbf{l}, \mathbf{n}$ , директоры  $\mathbf{l}, \mathbf{n}$ , вообще говоря, не ортогональны друг другу. Собственный вектор  $\mathbf{l}$  всегда делит пополам угол между директорами  $\mathbf{l}, \mathbf{n}$ .

Определим далее коэффициент при смешанных диадах в (3.8). Несложные вычисления, выполненные с привлечением (3.9), позволяют последовательно получить

$$\frac{g_1}{1 + \cos \iota} + \frac{g_2}{1 - \cos \iota} = 4 \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)}{(1 - \mu^2)(\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

и

$$\frac{g_1}{1 + \cos \iota} + \frac{g_2}{1 - \cos \iota} = 4 \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{(1 + \mu)^2(\sigma_1 - \sigma_3)^2} = 1.$$

В итоге приходим к весьма компактной и изящной общей формуле для тензора напряжений в „непластических“ состояниях в смешанных диадах асимптотических директоров

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + \tau_{\max} (\mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l}), \quad (3.11)$$

или

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + 2\tau_{\max} \text{sym} (\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}), \quad (3.12)$$

пригодной, вообще говоря, для всех трехмерных состояний.

Проведенные рассуждения показывают, что симметричный тензор напряжений *всегда* гиперболичен,<sup>6</sup> в том смысле, что за вычетом определенного шарового тензора его всегда можно представить исключительно через смешанные диады всего двух единичных векторов, которые указывают асимптотические направления в плоскости, ортогональной направлению собственного вектора  $\mathbf{m}$ .

Появление в представлении (3.12) значения максимального касательного напряжения  $\tau_{\max}$  означает, что  $\tau_{\max}$  обладает фундаментальным механическим смыслом и в „непластических“ состояниях. Так, в случае плоской деформации оптически чувствительного упругого тела в белом поляризованном свете линии  $\tau_{\max} = \text{const}$  наблюдаются в виде изохром (см., например, [10, с. 242, 243]).

Заметим, что „промежуточное“ главное напряжение вычисляется как

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \cos \iota \tau_{\max} \quad (3.13)$$

или

$$\sigma_2 = s - \cos \iota \tau_{\max}, \quad (3.14)$$

где

$$s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (3.15)$$

есть медианное напряжение.

<sup>6</sup>И двумерен.

„Крайние“ главные напряжения  $\sigma_{1,3}$  могут быть вычислены по следующей формуле:

$$\sigma_{1,3} = \sigma_2 \pm \tau_{\max}(1 \mp \mu).$$

Поэтому отношение „крайних“ главных напряжений может быть вычислено как

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\sigma_2 + \tau_{\max}(1 - \mu)}{\sigma_2 - \tau_{\max}(1 + \mu)}. \quad (3.16)$$

Заметим, что с учетом принятых обозначений для параметра Лоде можно получить выражение

$$\mu = \frac{\sigma_2 - s}{\tau_{\max}}, \quad (3.17)$$

которое позволяет констатировать, что параметр Лоде  $\mu$  есть относительное (по отношению к максимальному касательному напряжению  $\tau_{\max}$ ) отклонение „промежуточного“ главного напряжения  $\sigma_2$  от медианного напряжения  $s$ . Ясно, что параметр Лоде становится равным нулю, т.е.

$$\iota = \frac{\pi}{2},$$

если „промежуточное“ главное напряжение является в точности медианным напряжением

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}.$$

Подобное условие выполняется, например, в случае плоского деформированного состояния идеально пластического тела, подчиняющегося условию пластичности Треска.

В случае „полупластических“ состояний  $\tau_{\max} = k$  и формула (3.11), очевидно, упрощается и сводится к выражению

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + k(\mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l}). \quad (3.18)$$

Тензорным представлениям напряжений (3.11), (3.18) соответствуют и новые формы уравнения равновесия. Их вывод начнем с одного вспомогательного равенства. Так как  $\cos \iota = \mathbf{l} \cdot \mathbf{n}$ , то

$$\nabla \cos \iota = (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{l} + \mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{n}) + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{l}). \quad (3.19)$$

Далее можно показать, что

$$\nabla \cdot (\mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l}) = \mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{l} \quad (3.20)$$

и, учитывая (3.19), последняя формула приобретает следующий вид:

$$\nabla \cdot (\mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l}) = \nabla \cos \iota + \mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{l}) - \mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{n}) - \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{l}). \quad (3.21)$$

Используя (3.21), уравнение равновесия для „непластических“ состояний можно сформулировать в форме

$$\nabla \sigma_2 + \mathbf{l}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \tau_{\max} + \mathbf{n}(\mathbf{l} \cdot \nabla) \tau_{\max} - \tau_{\max} \sin \iota \nabla \iota + \quad (3.22)$$

$$+ \tau_{\max}(\mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{l}) - \mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{n}) - \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{l})) = \mathbf{0}.$$

Заменяя в полученном уравнении „промежуточное“ главное напряжение согласно (3.14), приходим к следующему уравнению:

$$\nabla s - \cos \iota \nabla \tau_{\max} + \mathbf{l}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \tau_{\max} + \mathbf{n}(\mathbf{l} \cdot \nabla) \tau_{\max} + \quad (3.23)$$

$$+ \tau_{\max}(\mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{l}) - \mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{n}) - \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{l})) = \mathbf{0}.$$

Это уравнение в случае „полупластических“ состояний упрощается и сводится к

$$\nabla \varsigma + \mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{l}) - \mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{n}) - \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{l}) = \mathbf{0}, \quad (3.24)$$

где принято обозначение

$$\varsigma = \frac{s}{k}.$$

Векторное дифференциальное уравнение (3.24) эквивалентно равенству циркуляций

$$\oint_C (\mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{l})) \cdot d\mathbf{x} = \oint_C (\mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{n}) + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{l})) \cdot d\mathbf{x}$$

вдоль любого замкнутого контура  $C$  в той пространственной области, в которой рассматривается указанное дифференциальное уравнение.

Если векторные поля директоров  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{n}$  исследуются в трехмерной поверхностно односвязной области, то необходимое и достаточное условие интегрируемости векторного дифференциального уравнения (3.24) заключается в исчезновении вихря:

$$\text{rot}(\mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{l}) - \mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{n}) - \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{l})) = \mathbf{0}. \quad (3.25)$$

Таким образом, для определения асимптотических директоров тензора напряжений получаются отдельные уравнения: векторное дифференциальное уравнение (2.29) в случае „вполне пластических“ состояний и уравнение (3.25) в случае „полупластических“ состояний.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.
- [2] *Радаев, Ю. Н.* Пространственная задача математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев. – 2-е изд., перераб. и доп. – Самара : Изд-во Самарского гос. университета, 2006. – 340 с.
- [3] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.
- [4] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.
- [5] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Часть первая. Уруго-пластические деформации / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1948. – 376 с.
- [6] *Хаар, А.* К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах / А. Хаар, Т. Карман ; под ред. Ю. Н. Работнова // Теория пластичности : сб. статей. – М. : Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. – С. 41–56. (Оригинальная работа: Haar A., Karman Th. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien // Nachr., kgl. Ges. Wiss. Gött. Math.-phys. Kl., 1909. – Н. 2. – Р. 204–218.)
- [7] *Ишлинский, А. Ю.* Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости / А. Ю. Ишлинский // Уч. зап. МГУ. Механика. – 1946. – Вып. 117. – С. 90–108. (Статья воспроизводится также в книге : Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Т. I. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости. – М. : Наука, 1986. – С. 62–83.)
- [8] *Томас, Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М. : Мир, 1964. – 308 с.
- [9] *Лоде, В.* Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов / В. Лоде ; под ред. Ю. Н. Работнова // Теория пластичности : сб. статей. – М. : Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. – С. 168–205.
- [10] *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2 / А. Надаи. – М. : Мир, 1969. – 864 с.

*Радаев Юрий Николаевич,*

*доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва*

*e-mail: radayev@ipmnet.ru*

*e-mail: y.radayev@gmail.com*

Y. N. Radayev

**ASYMPTOTIC DIRECTORS OF STRESS TENSOR AND VECTOR  
DIFFERENTIAL EQUILIBRIUM EQUATIONS OF CONTINUUM MECHANICS***Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Sciences*

**Abstract.** New general vector forms of three-dimensional equilibrium equations of continuum mechanics are obtained by representations of the symmetric stress tensor as symmetrized mixed diades of asymptotic directors. The present study employs notations and terminology known from the mathematical theory of plasticity. However all results remains valid for stress fields in an arbitrary continuum. The simplest and analytically most efficient stress tensor representations for full plastic (Haar—Karman hypothesis), semiplastic and nonplastic three-dimensional states given by mixed diades of asymptotic directors are discussed. Stress tensor transformation to the asymptotic directors involves the intermediate principal stress and the Lode parameter. The asymptotic directors provides a natural tensor basis for the symmetric stress tensor different from the spectral forms. The general vector forms of three-dimensional equilibrium equations are separately derived for the full plastic, semiplastic and nonplastic states. These forms are then analyzed from the viewpoint of their integrability.

**Keywords:** stress tensor, principal stress, principal direction, asymptotic direction, asymptotic director, Lode parameter.

**REFERENCES**

- [1] *Ivlev, D. D.* Theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 232 p.
- [2] *Radayev, Yu. N.* Spatial problem of the mathematical plasticity theories 2nd prod. reslave. and additional / Yu. N. Radayev. – Samara : Publishing house the Samara state university, 2006. – 340 p.
- [3] *Kachanov, L. M.* Bases of the theory of plasticity / L. M. Kachanov. – M. : Nauka, 1969. – 420 p.
- [4] *Sokolovsky, V. V.* Plasticity theory / V. V. Sokolovsky. – M. : Higher school, 1969. – 608 p.
- [5] *Ilyushin, A. A.* Plasticity. Part one. Elasto-plastic deformations / A. A. Ilyushin. – M. ; L. : Gostekhteorizdat, 1948. – 376 p.
- [6] *Haar, A.* To the theory of intense conditions in plastic and loose environments / A. Haar, T. Karman ; under edition Yu. N. Rabotnov // Plasticity theory: coll. articles. – M. : State publishing house of foreign literature, 1948. – P. 41–56. (Original work: Haar A., Karman Th. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien// Nachr., kgl. Ges. Wiss. Gött. Math.-phys. Kl., 1909. – H. 2. – P. 204–218.)
- [7] *Ishlinsky, A. Yu.* About the equations of deformation of bodies for elasticity limit / A. Yu. Ishlinsky // Educational records Moscow State University. Mechanics. – 1946. – Issue 117. – P. 90–108. (Article is reproduced also in the book : Ishlinsky A. Yu. Applied problems of mechanics. Vol. I. About the equations of deformation of bodies beyond an elasticity limit. – M. : Nauka, 1986. – P. 62–83.)
- [8] *Tomas, T.* Plastic current and destruction in the firm bodies / T. Tomas. – M. : Mir, 1964. – 308 p.
- [9] *Lode, V.* Influence of average main tension on fluidity of metals / V. Lode ; under edition Yu. N. Rabotnov // Plasticity theory: coll. articles. – M. : State publishing house of foreign literature, 1948. – P. 168–205.
- [10] *Nadai, A.* Plasticity and destruction of firm bodies. Vol. 2 / A. Nadai. – M. : Mir, 1969. – 864 p.

*Radayev Yuri Nickolaevich*

*Dr. Sc. (Phys.&Math.), Prof. of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНЫ ИЗ  
НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПРИ НАЛОЖЕННЫХ  
КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ**

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия им.  
профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина"*

**Аннотация.** Рассматриваются вопросы устойчивости нелинейно-вязкоупругих тел по отношению к конечным возмущениям. Условием устойчивости является положительность функции Ляпунова для возмущенной системы. Находится размерность странного аттрактора динамической системы, позволяющая ограничить число слагаемых в ряде Бубнова-Галеркина.

**Ключевые слова:** устойчивость, нелинейная вязкоупругость, функция Ляпунова, странный аттрактор.

УДК: 539.3

Рассмотрим пластину из нелинейно-вязкоупругого изотропного материала [1]. В исходном недеформированном состоянии пластина имеет толщину  $h_0$  и отнесена к декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$ , так что она ограничена плоскостями  $x_3 = \pm \frac{h_0}{2}$ . Пусть пластина из недеформированного состояния переводится однородной конечной деформацией в состояние  $\overset{\circ}{V}$ , которое характеризуется координатами  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$ , равными

$$x_1^0 = \lambda_1 x_1; \quad x_2^0 = \lambda_2 x_2; \quad x_3^0 = \lambda_3 x_3,$$

где  $\lambda_i = const$ ; толщина предварительно деформированной пластины равна

$$h = \lambda_3 h_0.$$

Пусть первоначальные размеры пластины будут

$$0 \leq x_1 \leq L; \quad 0 \leq x_2 \leq L_1; \quad -\frac{h_0}{2} \leq x_3 \leq +\frac{h_0}{2}.$$

Предположим, что пластина загружена вдоль оси  $ox_1$ . Тогда

$$S_{22}^0 = S_{33}^0 = 0.$$

Перемещения в недеформированном состоянии будут выражаться через координаты по формулам [2]:

$$u_n^0 = \delta_{in}(\lambda_i - 1)x_i.$$

Деформации и алгебраические инварианты выразятся через удлинения по формулам [2].

Для изометрического случая  $\dot{\theta} = const$  уравнение энергии выполняется тождественно. Тогда для потенциала Мурнагана, описывающего поведение нелинейно-вязкоупругого тела в предельных случаях, получим безразмерные величины компонент тензора напряжений [3]

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{S}_{11}^{\infty} &= \nu(\theta)A_1^0 + a_1(\theta)A_1^{02} + b_1(\theta)A_2^0 + (\lambda_1^2 - 1)(0.5 - \nu(\theta) + b_1(\theta)A_1^0) + \\
&\quad + 3(\lambda_1^2 - 1) \left( a_1(\theta) + \frac{c_1(\theta)}{3} \right); \\
\overset{\circ}{S}_{22}^{\infty} &= \nu(\theta)A_1^0 + a_1(\theta)A_1^{02} + b_1(\theta)A_2^0 + (\lambda_2^2 - 1)(0.5 - \nu(\theta) + b_1(\theta)A_1^0) + \\
&\quad + 3(\lambda_2^2 - 1) \left( a_1(\theta) + \frac{c_1(\theta)}{3} \right) = 0; \\
\overset{\circ}{S}_{33}^{\infty} &= \nu(\theta)A_1^0 + a_1(\theta)A_1^{02} + b_1(\theta)A_2^0 + (\lambda_3^2 - 1)(0.5 - \nu(\theta) + b_1(\theta)A_1^0) + \\
&\quad + 3(\lambda_3^2 - 1) \left( a_1(\theta) + \frac{c_1(\theta)}{3} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Наложим на основной процесс деформирования конечные возмущения. Возмущения напряжений для потенциала Мурнагана запишутся в форме

$$S_{ij} = S_{ij}^{\infty}(1) + S_{ij}^{\infty}(2) + S_{ij}^{\infty}(3) + S_{ij}^{\infty}(4) + S_{ijn}, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
S_{ij}^{\infty}(1) &= \left[ \delta_{ij}(\nu + 2aA_1^0) + 2 \overset{\circ}{E}_{ij} \right] E_{ss}(1) + \delta_{ij}b_1 \left( E_{k1}(1) \overset{\circ}{E}_{k1} + E_{1k}(1) \overset{\circ}{E}_{1k} \right) + \\
&\quad + 2(0.5 - \nu + b_1A_1^0)E_{ij}(1) + c_1E_{jk}(1) \overset{\circ}{E}_{ik} + c_1E_{ik}(1) \overset{\circ}{E}_{jk}; \\
S_{ij}^{\infty}(2) &= \left[ \delta_{ij}(\nu + 2aA_1^0) + 2 \overset{\circ}{E}_{ij} b_1 \right] E_{ss}(2) + \\
&\quad + \delta_{ij}b_1 \left[ E_{k1}(2) \overset{\circ}{E}_{k1} + E_{1k}(2) \overset{\circ}{E}_{1k} + E_{k1}(1)E_{1k}(1) \right] + \\
&\quad + 2(0.5 - \nu + b_1A_1^0)E_{ij}(2) + c_1E_{jk}(2) \overset{\circ}{E}_{ik} + c_1E_{ik}(2) \overset{\circ}{E}_{jk} + \\
&\quad + c_1E_{ik}(1)E_{kj}(1) + 2b_1E_{ij}(1)E_{ss}(1);
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
S_{ij}^{\infty}(3) &= 2\delta_{ij}a_1E_{ss}(1)E_{kk}(2) + \delta_{ij}b_1 [E_{k1}(1)E_{k1}(2) + E_{k1}(2)E_{k1}(1)] + \\
&\quad + c_1 [E_{ik}(1)E_{kj}(2) + E_{ik}(2)E_{kj}(1)] + 2b_1E_{ij}(1)E_{ss}(2) + 2b_1E_{ij}(2)E_{ss}(1);
\end{aligned}$$

$$S_{ij}^{\infty}(4) = 2\delta_{ij}a_1E_{ss}^2(1) + \delta_{ij}b_1E_{kk}(2) + c_1E_{ij}(2)E_{ss}(2) + 2b_1E_{ij}(2)E_{ss}(2);$$

$$S_H = \int_{-\infty}^t G^{(1)} \left( 0, \xi - \xi', \overset{\circ}{E}, \overset{\circ}{\theta} \right) \frac{\partial E(\tau')}{\partial \tau'} d\tau.$$

Определяющую систему уравнений в возмущениях будем брать в виде [5].

Решение нелинейной краевой задачи для возмущений перемещений будем искать в виде ряда Бубнова-Галеркина  $u_i = f_{mn}(t) \cdot \varphi_{imn}(x_k)$ , где функции  $\varphi_{imn}(x_k)$  удовлетворяют геометрическим граничным условиям и выбираются как известные решения линеаризованных задач нелинейной вязкоупругости. Для случая шарнирного опирания краев пластины граничные условия будут следующие:

$$\begin{aligned}
u_1 &= 0; \quad Mx_1 = 0; \quad u_3 = 0 \quad \text{при} \quad X_1 = 0; \quad X_1 = L_1; \\
u_1 &= 0; \quad Mx_2 = 0; \quad u_2 = 0 \quad \text{при} \quad X_2 = 0; \quad X_2 = L_2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Функции  $\varphi_{imn}(x_k)$  выбираются в форме [3]

$$\varphi_{1nm}(x_1) = C_1 \sin \frac{m\pi x_1}{L} \sin \frac{m\pi x_2}{L_1};$$



$$\begin{aligned} \varphi_{2mn}(x_1) &= C_2 \cos \frac{m\pi x_1}{L} \sin \frac{m\pi x_2}{L_1}; \\ \varphi_{3mn}(x_1) &= C_3 \sin \frac{m\pi x_1}{L} \cos \frac{m\pi x_2}{L_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для потенциала Мурнагана система уравнений примет вид [4], где коэффициенты системы будут взяты в виде [5]. Условием устойчивости будет положительность функции Ляпунова в области возмущений, найденных из условия равенству нулю производной от функции Ляпунова по времени в силу системы [5].

Для вязкоупругого материала во всех представленных формулах следует заменить действительные параметры комплексными параметрами. В результате все найденные значения возмущений будут комплексными. Действительная часть будет совпадать с соответствующим решением задач нелинейной упругости, а мнимая даст коэффициент затухания.

Для полученной динамической системы, используя подход, принятый в [5], [6], находится размерность странного аттрактора  $-\gamma_m$ , позволяющая ограничить число слагаемых в ряде Бубнова-Галеркина, в которые раскладываются возмущения перемещений.

На рисунках 1, 2 приведены графические зависимости, связывающие модуль возмущения с параметром нагрузки. На рисунках 3, 4 приведены графические зависимости, связывающие размерность странного аттрактора полученной динамической системы с величиной параметра нагрузки.

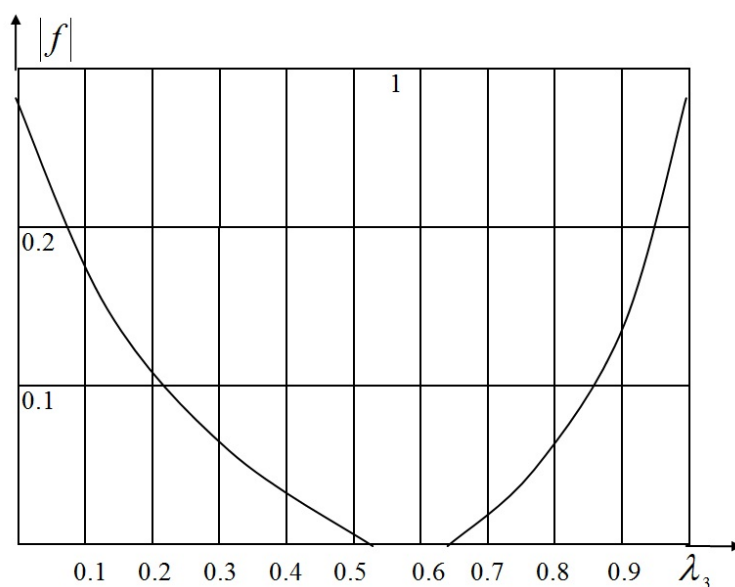
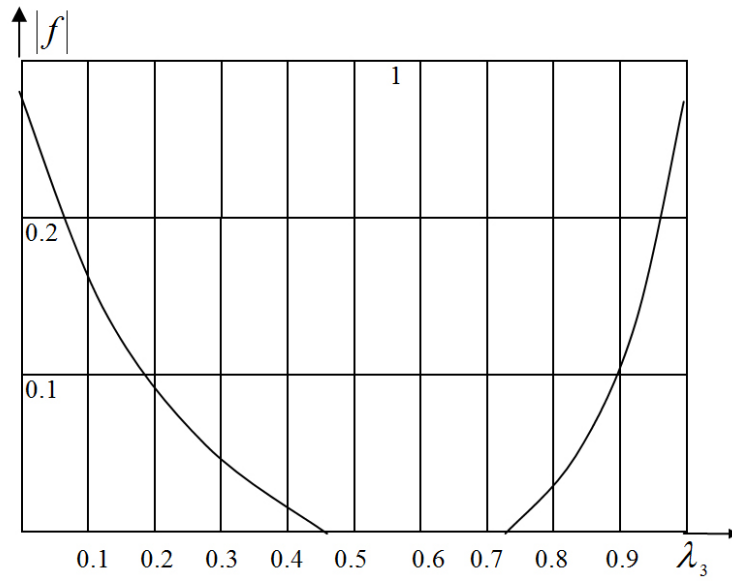
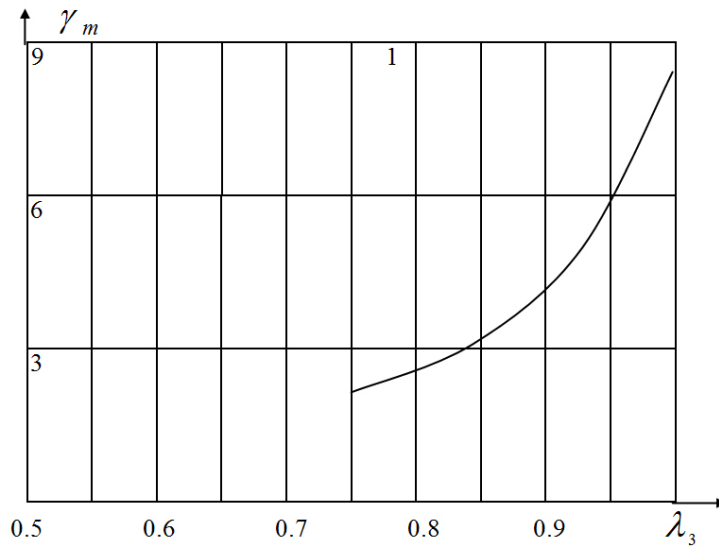


Рис. 1.  $\frac{h}{L} = 10^{-3}$ ;  $\pi \frac{L_1}{L} = 1$

Рис. 2.  $\frac{h}{L} = 10^{-3}$ ;  $\pi \frac{L_1}{L} = 0.5$ Рис. 3.  $\frac{h}{L} = 10^{-3}$ ;  $\pi \frac{L_1}{L} = 1$

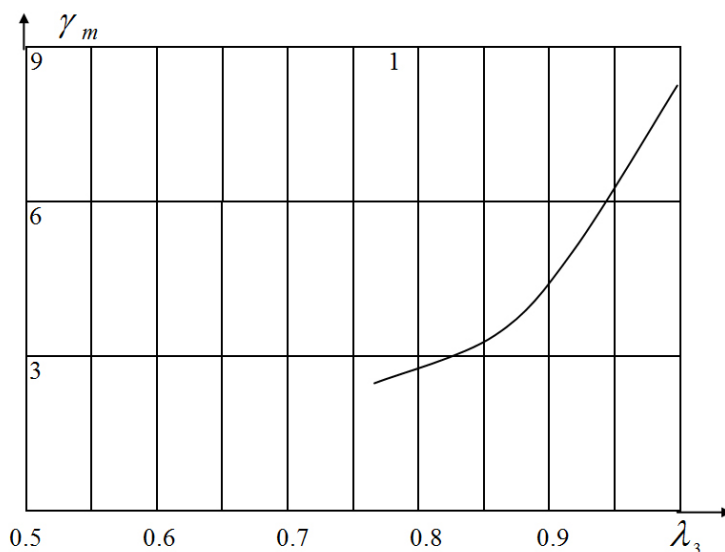


Рис. 4.  $\frac{h}{L} = 10^{-3}$ ;  $\pi \frac{L_1}{L} = 0.5$

Из анализа рисунков следует отметить следующее:

- уменьшение соотношений размеров конструкций уменьшает и область устойчивости как относительно начальных возмущений, так и относительно удлинений;
- для всех рассмотренных случаев наблюдается уменьшение размерности странного аттрактора с увеличением величины параметра нагрузки.

Также подчеркнем, что размерность странного аттрактора, найденная для потенциала Мурнагана, позволяет рекомендовать количество слагаемых в ряде Бубнова-Галеркина при работе конструкции в различных диапазонах изменения начальных напряжений и деформаций.

Использование критерия устойчивости относительно конечных возмущений позволяет для конкретного значения параметра нагрузки получить ограниченную последовательность допустимых значений начальных возмущений в которой основной процесс деформирования будет устойчив и при этом наблюдается иерархия устойчивых равновесных состояний.

Задание максимально допустимого значения начальных возмущений приводит к нахождению области изменения параметра нагрузки, в которой основной процесс деформирования будет устойчив.

Отметим, что в рамках трехмерной линеаризированной теории устойчивости аналогичные задачи рассматривались в [2].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ильюшин, А. А.* Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 288 с.
- [2] *Гузь, А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях / А. Н. Гузь. – Киев : Наук. думка, 1973. – 274 с.
- [3] *Карнаухов, В. Г.* Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел / В. Г. Карнаухов, Б. П. Гуменюк. – Киев : Наук. думка, 1990. – 304 с.
- [4] *Спорыхин, А. Н.* О новых явлениях в теории устойчивости нелинейных сред при конечных возмущениях / А. Н. Спорыхин, А.И. Сумин // ДАН УССР, сер. А. – 1982. – №8. – С. 46–49.

[5] *Спорыхин, А. Н.* Иерархия устойчивых состояний в механике нелинейных сред / А. Н. Спорыхин, А. И. Сумин. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 1999. – 210 с.

[6] *Takens, F.* Detecting strange attractor in turbulence / F. Takens // Dynamical Systems and Turbulence. Springer-Verlag. – 1981. – P. 366–381.

*Сумин Александр Иванович,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина", г. Воронеж*

**e-mail:** `sumin_ai@mail.ru`

A. I. Sumin

**ABOUT STABILITY OF NONLINEAR VISCOELASTIC PLATE WITH FINITE DEFORMATION OF THE MATERIAL**

*Military educational scientific center of Military and air forces "Military and air academy of a name of Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin" (Voronezh)*

**Abstract.** The questions of finite disturbance stability of nonlinear viscoelastic solids are considered. The stability condition is a positivity of the Lyapunov function for the disturbed system. It is obtained the dimension of the strange attractor of the dynamic system that allows limiting the number of summands in Bubnov-Galerkin series.

**Keywords:** stability, nonlinear viscoelasticity, Lyapunov function, strange attractor.

**REFERENCES**

- [1] *Ilyushin, A. A.* continuum Mechanics / A. A. Ilyushin. – M. VAC: Izd., Moscow. University, 1978. – 288 С.
- [2] *GUZ, A. N.* Stability of elastic bodies under finite deformations of a / A. N. GUZ. – Kiev VAC: Sciences. Dumka, 1973. – 274 S.
- [3] *Karnaukhov, C. D.* pre-thermo mechanics deformed viscoelastic bodies / C. D. Karnaukhov, bpts Gumenyuk. – Kiev VAC: Sciences. Dumka, 1990. – 304 С.
- [4] *Sporykhin, A. N.* About new phenomena in the theory of stability of nonlinear media at finite perturbations / A. N. Спорыхин, A. I. Sumin // DAN USSR, ser. A. – 1982. – №8. – С. 46–49.
- [5] *Sporykhin, A. N.* Hierarchy of stable States in mechanics of nonlinear media / A. N. Sporykhin, A. I. Sumin. – Voronezh VAC: Voronezh state University, 1999. – 210 С.
- [6] *Takens, F.* Detecting strange attractor in turbulence / F. Takens // Dynamical Systems and Turbulence. Springer-Verlag. – 1981. – P.–366 381.

*Sumin, Alexander Ivanovich*

*Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, head of Chair of mathematics, Military educational scientific center of Military and air forces "Military and air academy of a name of Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin", Voronezh*

## ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СВЯЗНОГО СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ МИКРОСТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия им.  
профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина",  
Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Рассматривается осесимметричное напряженное состояние весомого сыпучего материала, характеризуемого замкнутым условием пластичности. Характерный размер представительного элемента учитывается в уравнениях равновесия. Проводится анализ напряженного состояния в нулевом и первом приближении вблизи оси симметрии.

**Ключевые слова:** грунты, сыпучие материалы, осесимметричное течение, материал с микроструктурой.

УДК: 539.215+624.131

### 1. Тензор скорости деформации связной сыпучей среды с учетом микроструктуры

В прямоугольной декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$ , в некоторый момент времени  $t$ , рассмотрим линейный представительный элемент  $\overline{AB}$  среды в точке  $M(x_1, x_2, x_3)$  области течения.

Длину и направление элемента  $\overline{AB}$  определим следующим образом [1]:

$$|\overline{AB}| = \Delta S = 2h, \quad \overline{AB} = 2h\bar{n},$$

где  $h$  – параметр микроструктуры;  $\bar{n}$  – единичный вектор, задающий направление элементу  $\overline{AB}$ . Вводя направляющие косинусы  $n_1, n_2, n_3$  вектора  $\bar{n}$ , найдем координаты точек  $A(a_1, a_2, a_3)$  и  $B(b_1, b_2, b_3)$ :

$$a_i = x_i - hn_i, \quad b_i = x_i + hn_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Введем в точке  $M$  в момент времени  $t$  меру деформации представительного элемента, имеющего длину  $2h$  и направление  $\bar{n}$ . Оценим относительное изменение  $\mu$  длины элемента  $\overline{AB}$ . Разлагая в ряд по  $h$  и ограничиваясь слагаемыми второго порядка малости, получим:

$$\mu = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_i n_j + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} n_i n_j n_k n_l + O(h^4). \quad (1)$$

Выражение (1) примет вид:

$$\mu = e_{ij}^c n_i n_j + \frac{h^2}{6} e_{ijkl}^* n_i n_j n_k n_l + O(h^4).$$

Так как в рассматриваемой системе координат  $x_1, x_2, x_3$  ковариантные и контрвариантные компоненты у векторов или тензоров соответствуют, то выражение можно переписать в виде

$$\mu = e_{ij}^c n^i n^j + \frac{h^2}{6} e_{ijkl}^* n^i n^j n^k n^l + O(h^4), \quad (2)$$

где свертки  $e_{ij}^c n^i n^j$  и  $e_{ijkl}^* n^i n^j n^k n^l$  ковариантных компонент тензоров  $e^c$  и  $e^*$  с контрвариантными компонентами вектора  $\bar{n}$  являются скалярными инвариантами относительно преобразования координат. Таким образом, выражение (2) справедливо в любой системе координат. Компоненты соответствующих тензоров имеют вид:

$$e_{ij}^c = \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j), \quad (3)$$

$$e_{ijkl}^* = \frac{1}{4} (\nabla_j \nabla_k \nabla_l u_i + \nabla_i \nabla_k \nabla_l u_j + \nabla_i \nabla_j \nabla_l u_k + \nabla_i \nabla_j \nabla_k u_l), \quad (4)$$

где  $\nabla_j u_i$  и  $\nabla_j \nabla_k \nabla_l u_i$  – первая и третья ковариантные производные от координатной компоненты перемещения.

Согласно (2) относительное изменение длины представительного элемента  $\mu$  в нулевом приближении по  $h$  определяется тензором  $e^c$ , что соответствует классическому подходу в механике сплошных сред.

Удерживая в (2) слагаемые второго порядка малости по  $h$ , учтем влияние микроструктуры на величину  $\mu$  посредством четырехвалентного тензора  $e^*$ , компоненты которого выразим в виде

$$e_{ijkl}^* = \frac{1}{2} [\nabla_k \nabla_l e_{ij}^c + \nabla_i \nabla_j e_{kl}^c].$$

В связи со сложностью включения тензора  $e^*$  четвертого ранга в систему уравнений, описывающих движение материала, введем обобщенный тензор  $\tilde{e}$  деформации, компоненты которого учитывают параметр  $h$  в виде

$$\tilde{e}_{ij} = e_{ij}^c + \frac{h^2}{6} e_{ij}^{**}, \quad (4)$$

где  $e_{ij}^{**}$  – компоненты двухвалентного тензора, отвечающего за микроструктуру материала.

Образуя из них компоненты симметричного тензора  $e^{**}$ , получим

$$e_{ij}^{**} = \frac{1}{2} [\nabla_j \nabla_j \nabla_j u_i + \nabla_i \nabla_i \nabla_i u_j]. \quad (5)$$

Таким образом, с учетом (3), (5) выражения (4) для обобщенных деформаций перемещений примут вид:

$$\tilde{e}_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j) + \frac{h^2}{12} (\nabla_j \nabla_j \nabla_j u_i + \nabla_i \nabla_i \nabla_i u_j)$$

или

$$\tilde{e}_{ij} = e_{ij}^c + \frac{h^2}{6} \Delta e_{ij}^c.$$

Отметим, что величины  $e_{ij}^{**}$ , определяемые из (5), не являются в буквальном смысле компонентами тензора второго ранга, так как не преобразуются при замене координат соответствующим образом, однако величины  $\tilde{e}_{ij}$  с точностью до слагаемых второго порядка малости по  $h$  будем рассматривать как компоненты симметричного тензора  $\tilde{e}$  деформаций, учитывающего микроструктуру среды.

По аналогии с построениями, рассмотренными выше, найдем выражение для скорости относительного удлинения материального отрезка длиной  $2h$  полем скоростей  $U_i$ . Принимая во внимание предыдущие построения, получим выражение для скоростей деформации с учетом характерного размера  $h$  представительного элемента

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^c + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_{ij}^c, \quad (6)$$

где

$$\varepsilon_{ij}^c = \frac{1}{2}(\nabla_j U_i + \nabla_i U_j).$$

## 2. Тензор скорости деформации связной сыпучей среды в случае осесимметричной деформации

Рассмотрим сыпучую среду в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$ . Пусть заданные нагрузки и смещения обладают осевой симметрией, тогда поле деформации и поле напряжения будут осесимметричными, т.е. компоненты напряжения и смещения не зависят от полярного угла  $\theta$ .

Компоненты тензора скорости деформации (6) имеют вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{h^2}{6} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial z^2 \partial r} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{U_r}{r} + \frac{h^2}{6} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{h^2}{6} \left( \frac{\partial^3 U_z}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_z}{\partial r \partial z} \right), \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^3 U_r}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial r \partial z^2} \right).\end{aligned}$$

Внешнее разложение для тензора скорости деформации при  $h \rightarrow 0$  в нулевом приближении дает выражение для скорости деформации  $\varepsilon_{ij}^{(0)} = \varepsilon_{ij}^{(c)}$ .

Для учета влияния микроструктуры на малых характерных размерах рассмотрим разложение путем растяжения координат  $r$ , так что новая координата  $\rho$  будет определяться  $\rho = \frac{r}{h^2}$ , т.е. малым значениям  $r$  будут соответствовать большие значения  $\rho$ .

Для первого приближения тензор скорости деформации при  $h \rightarrow 0$  имеет вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(2)} &= \frac{1}{6} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial \rho^3} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} &= \frac{1}{6} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial U_r}{\partial \rho} \right), \quad \varepsilon_{zz}^{(2)} = 0, \\ \varepsilon_{rz}^{(2)} &= \frac{1}{12} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial \rho^3} \right).\end{aligned}$$

## 3. Напряженное состояние вблизи оси симметрии

Осесимметричное состояние характеризуется следующими компонентами тензора напряжения [2]:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_{rr}(r, z), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r, z), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}(r, z), \\ \sigma_{rz} &= \sigma_{rz}(r, z), \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = 0.\end{aligned}$$

Компоненты напряжений удовлетворяют условию пластичности и двум уравнениям равновесия:

$$\Phi = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\sigma_{rz}^2 - \frac{1}{3}I_{1\sigma}^2 - (Y + \alpha I_{1\sigma})^2 + f^2 I_{1\sigma}^2 = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{1\sigma})_{,z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{1\sigma})_{,r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} - \frac{1}{r\sqrt{2}}I_{1\sigma} &= -\gamma,\end{aligned} \quad (8)$$

где  $Y$  – сцепление,  $\alpha$  – коэффициент внутреннего трения,  $f$  – коэффициент трения качения,  $\gamma$  – сила тяжести.



Система уравнений в напряжениях является незамкнутой. Для замыкания системы уравнений (7), (8) воспользуемся ассоциированным законом пластического течения, который связывает скорость деформирования с напряженным состоянием с использованием неопределенного множителя Лагранжа  $\lambda$  [3]:

$$\varepsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (9)$$

### Нулевое приближение задачи

Уравнения (9) с учетом (7) в нулевом приближении после исключения неопределенного множителя Лагранжа примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r^{(0)}}{\partial r} &= \frac{U_r^{(0)}}{r} \cdot \frac{\sigma_{rr}^{(0)} - \beta I_{1\sigma}^{(0)} - \alpha Y}{\sigma_{\theta\theta}^{(0)} - \beta I_{1\sigma}^{(0)} - \alpha Y}, \\ \frac{\partial U_z^{(0)}}{\partial z} &= \frac{U_r^{(0)}}{r} \cdot \frac{\sigma_{zz}^{(0)} - \beta I_{1\sigma}^{(0)} - \alpha Y}{\sigma_{\theta\theta}^{(0)} - \beta I_{1\sigma}^{(0)} - \alpha Y}, \\ \frac{\partial U_r^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial U_z^{(0)}}{\partial r} &= \frac{U_r^{(0)}}{r} \cdot \frac{4\sigma_{rz}^{(0)}}{\sigma_{\theta\theta}^{(0)} - \beta I_{1\sigma}^{(0)} - \alpha Y}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\beta = \frac{1}{3} + \alpha^2 - f^2$ .

Система уравнений (10) является переопределенной для компонент скоростей перемещений  $U_r^{(0)}$ ,  $U_z^{(0)}$ . Исследуя систему (10) вдоль характеристик получим, что третье уравнение представляет собой уравнение в частных производных первого порядка и после интегрирования системы может быть использовано как замыкающее уравнение для поля напряжений. Анализ уравнения вблизи оси симметрии показал, что

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}^{(0)} - \beta I_{1\sigma}^{(0)} - \alpha Y}{\sigma_{rr}^{(0)} - \beta I_{1\sigma}^{(0)} - \alpha Y} = 1,$$

что возможно только при  $\sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ .

Таким образом, недостающим уравнением для замыкания системы уравнений в напряжениях вблизи оси симметрии будет равенство

$$\sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)}. \quad (11)$$

Решая систему уравнений (7), (8) с учетом (11), получим в безразмерном виде:

$$\overline{\sigma_{rr}^{(0)}} = \overline{\sigma_{\theta\theta}^{(0)}} = \frac{1}{2}\bar{z}, \quad \sigma_{zz}^{(0)} = \overline{\sigma_{z0}} - \bar{z}, \quad (12)$$

$$\overline{\sigma_{rz}^{(0)}} = \frac{\alpha f}{\sqrt{2}b} \left( 1 \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{-\frac{3}{2}b\bar{z}^2 + 2b\overline{\sigma_{z0}}\bar{z} + 2f^2 - b\overline{\sigma_{z0}} - \frac{1}{3}} \right),$$

где

$$\overline{\sigma_{z0}} = \frac{\sigma_{z0}}{Y}, \quad \bar{z} = \frac{\gamma z}{Y}, \quad b = 2f^2 - \alpha^2 - \frac{1}{3},$$

$\sigma_{z0}$  – начальное давление.

Нулевое приближение для напряжений  $\sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)}$  соответствует гипотезе гидравлического распределения напряжений в материале.

### Первое приближение задачи

Ассоциированный закон течения пластического материала, определяемый уравнением (9), в первом приближении примет вид:

$$12\lambda \left( \sigma_{rr}^{(2)} - \beta I_{1\sigma}^{(2)} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial \rho^3},$$

$$\begin{aligned}
12\lambda \left( \sigma_{\theta\theta}^{(2)} - \beta I_{1\sigma}^{(2)} \right) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial U_r}{\partial \rho} \\
\lambda \left( \sigma_{zz}^{(2)} - \beta I_{1\sigma}^{(2)} \right) &= 0 \\
48\lambda \sigma_{rz}^{(2)} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial \rho^3}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Третье уравнение (13) позволяет замкнуть систему уравнений (7), (8) в первом приближении:

$$\sigma_{zz}^{(2)} = \frac{\beta}{1-\beta} \left( \sigma_{rr}^{(2)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2)} \right). \tag{14}$$

Ограничиваемся слагаемыми второго порядка малости для напряжений, при  $h \rightarrow 0$ , проинтегрировав уравнения равновесия (8), с учетом (7), (10), (11) получим выражения для компонент напряжений в первом приближении [4]:

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma_{rr}^{(2)}} &= (1-\beta)\overline{P}(z) \cdot \overline{\gamma} \left( \frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{3\bar{\rho}} - \frac{2}{3}\bar{\rho}^2 \right), \\
\overline{\sigma_{\theta\theta}^{(2)}} &= (1-\beta)\overline{P}(z) \cdot \overline{\gamma} \left( \frac{4}{3}\bar{\rho} - \frac{2}{\bar{\rho}} + \frac{2}{3}\bar{\rho}^2 \right), \\
\overline{\sigma_{zz}^{(2)}} &= \beta\overline{P}(z) \cdot \overline{\gamma} \left( \bar{\rho} - \frac{1}{\bar{\rho}} \right), \\
\overline{\sigma_{rz}^{(2)}} &= \left( \frac{f}{\sqrt{2}}\overline{P}(z) - \frac{1}{2} \right) \cdot \overline{\gamma} \left( \bar{\rho} - \frac{1}{\bar{\rho}} \right),
\end{aligned}$$

где

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \overline{\gamma} = \frac{\gamma\rho_0}{Y}, \quad \overline{P}(z) = \frac{\overline{\sigma_{rz}^{(0)}}}{f\sqrt{2}\overline{\sigma_{rz}^{(0)}} + (1-3\beta)\overline{\sigma_{rr}^{(0)}} - \alpha}.$$

Полные компоненты тензора напряжений в осесимметричной задаче с учетом нулевого и первого приближений вблизи оси симметрии имеют вид:

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma_{rr}} &= \frac{1}{2}\bar{z} + (1-\beta)\overline{P}(z)\overline{\gamma} \left( \frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{\bar{\rho}}{3} + \frac{2\bar{\rho}^2}{3} \right), \\
\overline{\sigma_{\theta\theta}} &= \frac{1}{2}\bar{z} + (1-\beta)\overline{P}(z)\overline{\gamma} \left( \frac{4\bar{\rho}}{3} - \frac{2}{\bar{\rho}} + \frac{2\bar{\rho}^2}{3} \right), \\
\overline{\sigma_{zz}} &= \overline{\sigma_{z0}} - \bar{z} + \beta\overline{P}(z)\overline{\gamma} \left( \bar{\rho} - \frac{1}{\bar{\rho}} \right), \\
\overline{\sigma_{rz}} &= \frac{\alpha f}{\sqrt{2}b} \left( 1 \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{-\frac{3}{2}bz^2 + 2b\overline{\sigma_{z0}}\bar{z} + 2f^2 - b\overline{\sigma_{z0}} - \frac{1}{3}} + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{f}{\sqrt{2}}\overline{P}(z) - \frac{1}{2} \right) \overline{\gamma} \left( \bar{\rho} - \frac{1}{\bar{\rho}} \right) \right).
\end{aligned}$$

На рисунках представлены графики компонент тензоров напряжений без учета микроструктуры (в нулевом приближении) и с учетом микроструктуры.

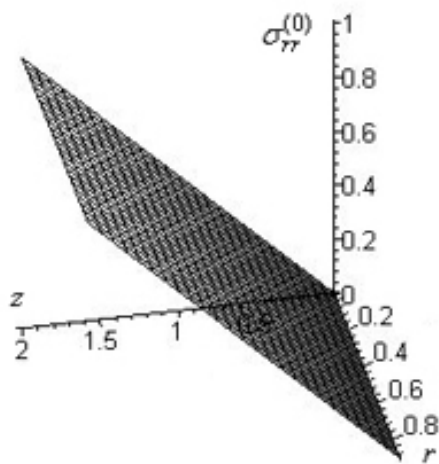


Рис. 1

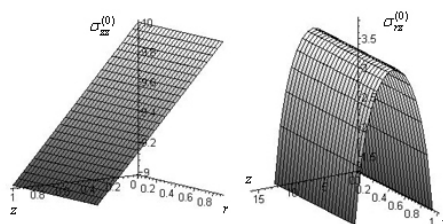


Рис. 2

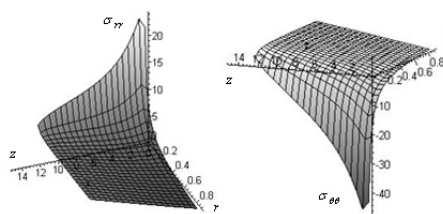


Рис. 3

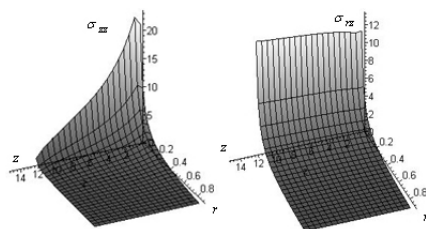


Рис. 4

Анализ поведения напряжений вблизи оси симметрии при заданном начальном давлении показал:

1. В нулевом приближении  $\overline{\sigma_{rr}^{(0)}} = \overline{\sigma_{\theta\theta}^{(0)}}$  возрастают, а  $\overline{\sigma_{zz}^{(0)}}$  убывает в направлении оси  $z$ ;  $\overline{\sigma_{rz}^{(0)}}$  в области пластического течения вначале возрастает, а затем убывает вдоль оси  $z$ ; по направлению оси  $r$  напряжения не изменяются.

2. Учет характерного размера  $h$  представительного элемента приводит: к уменьшению растягивающих напряжений  $\bar{\sigma}_{rr}$  по направлению радиуса  $r$ ; к увеличению растягивающих окружных напряжений  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ ;  $\bar{\sigma}_{zz}$  слабо меняется за счет  $h$ ; к уменьшению касательного напряжения  $\bar{\sigma}_{rz}$  как по направлению  $r$ , так и по  $z$ , причем по  $z$  это влияние  $h$  ослабевает.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Быкова, М. И.* Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры / М. И. Быкова, Н. Д. Вервейко, П. П. Сумец, С. А. Шашкина. – Воронеж : ВГУ, 2010. – 192 с.
- [2] *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
- [3] *Фролов, А. Л.* Осесимметричное деформирование микрополярных связных сыпучих материалов / А. Л. Фролов // Материалы школы-семинара, посвященного 70-летию профессора Д. Д. Ивлева. – Воронеж, 2000. – Ч. 2. – С. 474–480.
- [4] *Вервейко, Н. Д.* Влияние характерного размера представительного элемента сыпучей среды на осесимметричное напряженное состояние / Н. Д. Вервейко, О. А. Фролова // Сборник трудов Международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики". – Воронеж, 2011. – С. 106–109.

*Фролов Александр Леонидович,*

*кандидат физико-математических наук, доцент, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", г. Воронеж*

*e-mail: al-frol@yandex.ru*

*Фролова Оксана Александровна,*

*соискатель кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

*e-mail: OksanaFrolA@yandex.ru*

A. L. Frolov, O. A. Frolova

**THE AXISYMMETRIC STRESS STATE OF THE COHESIVE LOOSE MATERIAL WITH A GLANCE OF THE MICROSTRUCTURE OF MATERIAL**

*Military educational scientific center of Military and air forces "Military and air academy of a name of Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin" (Voronezh)*

*Voronezh State University*

**Abstract.** The axisymmetric stress state of the ponderous loose material characterized by closed plasticity condition is considered. The characteristic size of a representative element is taken into account in the equilibrium equations. The stress state is analyzed in the zero and first order approximations near the symmetry axis.

**Keywords:** soils, loose materials, axial-symmetric flow, microstructure of material.

**REFERENCES**

- [1] *Bykova, M. I.* Within and deformation of materials homogeneous microstructure / M. I. Bykova, N. D. Verveyko, P. P. Sumets, S. A. Shashkina. – Voronezh VAC : VSU, 2010. – 192 p.
- [2] *Bykovcev, G. I.* Theory of plasticity / G. I. Быковцев, D. D. Ivlev. - Vladivostok VAC : Dalnayka, 1998. – 528 p.
- [3] *Frolov, A. H.* Axisymmetric deformation микрополярных cohesive granular materials / A. L. Frolov // Materials school seminar dedicated to the 70-th anniversary of Professor D. D. Ivlev. – Voronezh. – 2000. – Part 2.– P. 474–480.
- [4] *Verveyko, N. D.* the Impact of the characteristic size the representative element of the granular medium on axisymmetric stress state of a / N. D. Verveyko, O. A. Frolova // Proceedings of the International conference "Actual problems of applied mathematics, Informatics and mechanics". – Voronezh. – 2011. – P. 106–109.

*Frolov, Alexander Leonidovich*

*Candidate of Phis. & Math., Assoc. Professor, Department of Mathematics, Military educational scientific center of Military and air forces "Military and air academy of a name of Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin", Voronezh*

*Frolova, Oksana Alexandrovna*

*Postgraduate student, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh*

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

**Варданян Седрак Ваникович (vardanyan\_s@yahoo.com)** – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (cotedurhone\_mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский лесотехнический институт, г. Королев Московской области.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

**Ивлев Дюис Данилович (ivlev21@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

**Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

**Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

**Кулиев Валех Джафарович** ([pmdekanat@rambler.ru](mailto:pmdekanat@rambler.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва.

**Ломакин Евгений Викторович** ([lomakin@mech.math.msu.su](mailto:lomakin@mech.math.msu.su)) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Максимова Людмила Анатольевна** ([maximova\\_ng@mail.ru](mailto:maximova_ng@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Манжиров Александр Владимирович** ([manzh@ipmnet.ru](mailto:manzh@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

**Маркин Алексей Александрович** ([markin@tsu.tula.ru](mailto:markin@tsu.tula.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Матченко Николай Михайлович** ([ekc\\_05@mail.ru](mailto:ekc_05@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Миронов Борис Гурьевич** ([rektorat@chdpu.edu.ru](mailto:rektorat@chdpu.edu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович** ([irakon63@hotmail.com](mailto:irakon63@hotmail.com)) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

**Михайлов Глеб Константинович** ([gkmikh@mail.ru](mailto:gkmikh@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

**Немировский Юрий Владимирович** ([nemirov@itam.nsc.ru](mailto:nemirov@itam.nsc.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

**Непершин Ростислав Иванович** ([nepershin\\_ri@rambler.ru](mailto:nepershin_ri@rambler.ru)) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва.

**Победря Борис Ефимович** ([rob@mail.ru](mailto:rob@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Радаев Юрий Николаевич** ([radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Учреждение Российской академии наук "Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН", г. Москва.

**Ревуженко Александр Филиппович** ([revuzhenko@yandex.ru](mailto:revuzhenko@yandex.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.

**Редкозубов Сергей Алексеевич (marycbka434@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

**Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

**Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv)** – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

**Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru)). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

**и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля predel.sty. Стиль predel.sty и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате wmf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Аль Имам Адель А., Вerveйко Н. Д.</i> Особенности продольного течения вязкопластического материала с учетом его микроструктуры в кольцевом зазоре...	3
<i>Амензаде Р. Ю.</i> Волны в упругой трубке с протекающей жидкостью в случае учета жесткости окружающей среды.....	12
<i>Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Устинова А. С.</i> К вискозиметрическим испытаниям материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами .....	20
<i>Балашникова А. В., Михайлова М. В.</i> К вопросу о сжатии шероховатыми плитами идеальнопластического слоя при трансляционной анизотропии в случае плоской деформации .....	33
<i>Балашникова А. В., Миронов Б. Г., Михайлова М. В.</i> Предельное состояние анизотропного плоского слоя, сжатого шероховатыми плитами при условии зависимости предела текучести от среднего давления .....	40
<i>Васильева Ю. О.</i> К задаче усиления межфазной трещины жесткой накладкой вдоль одного из берегов .....	44
<i>Вerveйко Н. Д., Ноаман С. А.</i> Стационарное сдвиговое течение вязкопластического материала с учетом его микроструктуры в плоском зазоре между двумя цилиндрами .....	51
<i>Зубчанинов В. Г., Гултыяев В. И., Алексеев А. А., Ведерников В. Н.</i> Об экспериментальном исследовании эффекта Баушингера и поверхности текучести стали У8.....	56
<i>Ковалев А. В.</i> Об учете ассоциированной сжимаемости упругопластических тел в случае плоской деформации .....	64
<i>Ковтанюк Л. В., Матвеев В. П., Буренин А. А.</i> Течение упруговязкопластической среды по трубе в условиях изменяющегося перепада давления ....	69
<i>Коваленко М. Д., Меньшова И. В.</i> Разложения Лагранжа по функциям Фадля-Папковича в обратно-симметричной задаче теории упругости для прямоугольной полуполосы.....	81
<i>Кузнецов Е. Е., Матченко И. Н., Матченко Н. М.</i> Шесть вариантов представления вектора интенсивности тензора напряжений в пространстве главных напряжений .....	90
<i>Кузнецов Е. Е., Матченко Н. М.</i> О параметре Лоде .....	98
<i>Кузнецов Е. Е., Матченко Н. М.</i> О геометрической интерпретации фазового инварианта тензора напряжений .....	102

<i>Кулиев В. Д.</i> Новая формула суммирования функциональных рядов и некоторые ее приложения (ч. 1) .....	107
<i>Леонов В. М.</i> Анализ аспектов формоизменения изделий без осевой симметрии	120
<i>Минаева Н. В., Хвостов М. Г.</i> Линеаризация граничных условий, заданных на границе тела в деформированном состоянии .....	126
<i>Мирсалимов В. М., Ахмедова М. В.</i> Упругопластическое разрушение тонкой пластины, ослабленной периодической системой криволинейных отверстий .	133
<i>Мирсалимов В. М., Искендеров Р. А.</i> Зарождение трещин при однородном изгибе изотропной пластины, ослабленной периодической системой круговых отверстий .....	145
<i>Митрофанова Т. В., Павлова Т. Н.</i> О соотношениях трансляционной идеальной-нопластической анизотропии при кручении .....	153
<i>Мустафаев А. Б.</i> Решение контактной задачи теории упругости для тела с криволинейной трещиной при воздействии теплового поля .....	160
<i>Немировский Ю. В.</i> Предельное равновесие гибридных композитных оболочек вращения .....	169
<i>Орлов В. Н., Пчелова А. З.</i> Влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в комплексной области .....	174
<i>Радченко В. П., Попов Н. Н.</i> Использование метода малого параметра для решения стохастических нелинейных задач теории установившейся ползучести .	185
<i>Радаев Ю. Н.</i> Асимптотические директоры тензора напряжений и векторные дифференциальные уравнения равновесия механики континуума .....	195
<i>Сумин А. И.</i> К вопросу об устойчивости пластины из нелинейно-вязкоупругого материала при наложенных конечных деформациях .....	207
<i>Фролов А. Л., Фролова О. А.</i> Осесимметричное напряженное состояние связанного сыпучего материала с учетом микроструктуры материала .....	214
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА .....	222
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	225
СОДЕРЖАНИЕ .....	227
CONTENTS .....	229

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2013. № 1(15)**

**Отв. за выпуск:** А. В. Балашникова

**Технические редакторы:** Л. Н. Улюкова, Н. А. Осипова, Л. А. Судленкова

**Компьютерная верстка:** А. В. Балашникова

**Макет:** А. В. Балашникова

---

Подписано в печать 29.03.2013 г. Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e.  
Усл. печ. л. 28,75. Тираж 400 экз. Заказ №

---

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный  
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38