

ББК 95.4; 22.251
Ч-823

Подписной индекс в каталоге ПРЕССА РОССИИ: 13109
ISSN: 2073-5499

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2013. № 2(16)

Учредитель: ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Учредители серии: Г. Н. Григорьев, Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров, Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Т. Н. Петрова, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин, А. А. Шуканов

ПОСВЯЩАЕТСЯ ПАМЯТИ ПРОФЕССОРА Д. Д. ИВЛЕВА

Главный редактор выпуска: Д. М. Климов

Редакционная коллегия: Радаев Ю. Н. – ответственный редактор, Матченко Н. М. – зам. ответственного редактора, Тихонов С. В. – ответственный секретарь, Баженов В. Г., Буренин А. А., Георгиевский Д. В., Глаголев В. В., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Каюмов Р. А., Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Кулиев В. Д., Ломакин Е. В., Максимова Л. А., Маркин А. А., Манжиров А. В., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р. И., Победря Б. Е., Радченко В. П., Ревуженко А. Ф., Редкозубов С. А., Сенашов С. И., Спорыхин А. Н., Трещев А. А., Чернышов А. Д., Хромов А. И., Шашкин А. И.

Международный совет: Амензаде Р. Ю. (Азербайджан), Варданян С. В. (Армения), Мирсалимов В. М. (Азербайджан), Тамуж В. П. (Латвия), Чигарев А. В. (Белоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19.

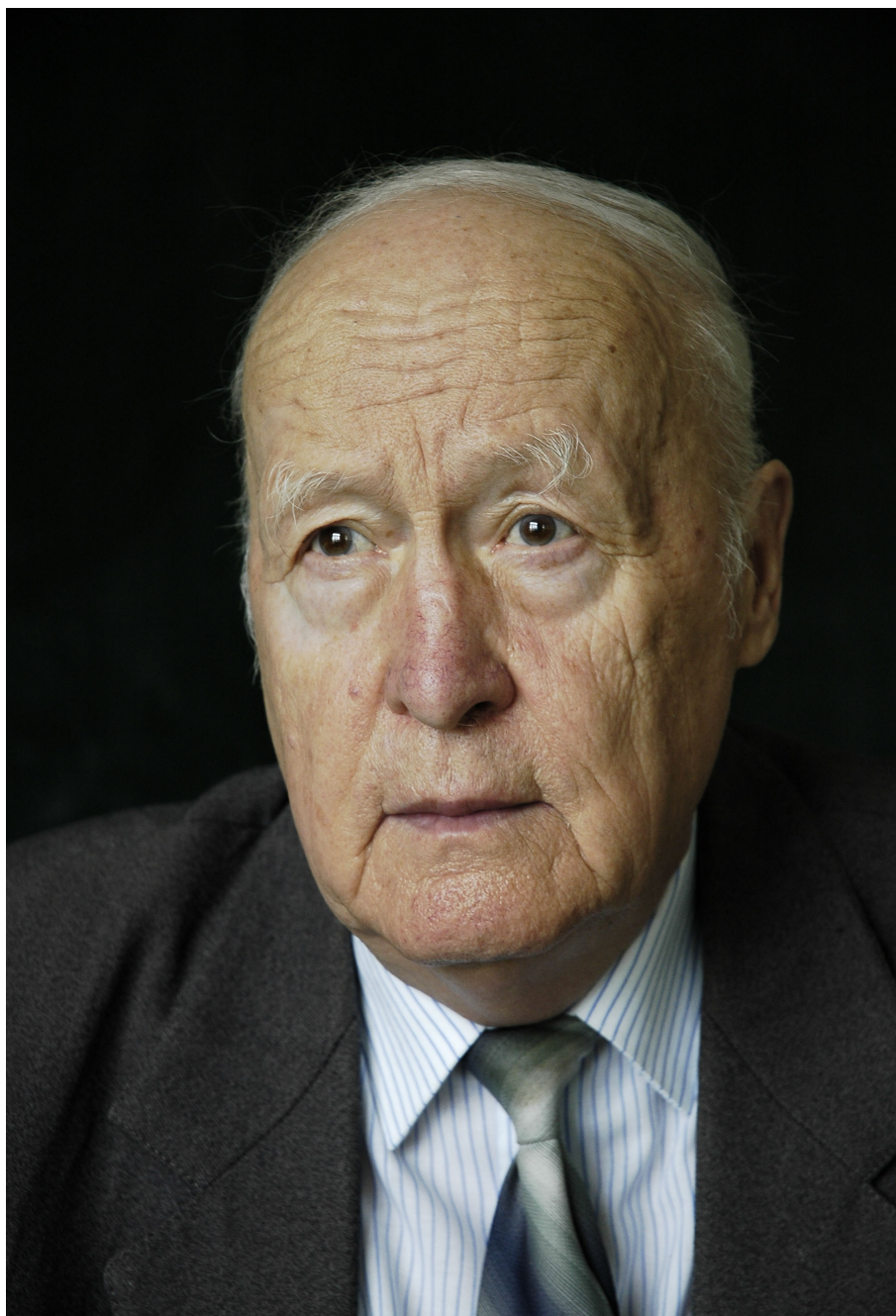
Email: predel21@mail.ru.

WWW: <http://predel.chgpu.edu.ru>.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-36234 от 15.05.2009 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2013



06.09.1930–03.03.2013

А. И. Шашкин, Т. Д. Семькина, О. Д. Горбенко, С. А. Вульман

Д. Д. ИВЛЕВ В ВОРОНЕЖЕ (1959–1965)

Воронежский государственный университет

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Статья посвящена деятельности проф. Д. Д. Ивлева в период его пребывания в Воронеже, становлению его как педагога и организатора научной школы.

Ключевые слова: научная, педагогическая деятельность.

УДК: 539.375

В биографии Дюиса Даниловича Ивлева особое место занимает воронежский период. Именно в этот период в полную меру раскрылся его талант ученого, педагога и организатора.

В Воронеж он приехал в 1959 году уже сложившимся, известным широкой мировой научной общественности 29-летним ученым. Известность и авторитет Д. Д. Ивлеву принесли результаты, полученные в области математической теории пластичности. Наряду с А. Ю. Ишлинским, В. Прагером, Ф. Ходжем и другими учеными Д. Д. Ивлев принадлежит к числу основоположников нового направления в построении теории пластичности — теории течения.

Воронеж принял Д. Д. Ивлева приветливо. В университет он был принят по приглашению ректора Б. И. Михантьева, ему была предоставлена хорошая квартира в университетском доме в центре города, куда вскоре переехала его семья – жена Юлия Дмитриевна и двое маленьких детей, сын Саша и дочь Аня. Тогда же ему была предоставлена возможность создать на математико-механическом факультете и возглавить новую кафедру – кафедру теории упругости и пластичности. Новые условия позволили Д. Д. Ивлеву в полной мере развернуть научную и образовательную деятельность, проявить небывалый потенциал творчества. На новой кафедре Д. Д. Ивлев занялся постановкой новых учебных курсов, содержание которых отвечало современным направлениям механики деформируемого твердого тела. Причем каждый из курсов он разрабатывал и читал студентам сначала сам, таким образом, в течение первых двух-трех лет он прочитал все курсы учебного плана кафедры, что позволило ему выработать методические рекомендации по каждому курсу и, поручая кому-либо из сотрудников новый курс, со знанием дела давать методические советы по организации этого курса. Все аспиранты и молодые преподаватели посещали лекции профессора Д. Д. Ивлева и брали их за основу курсов, которые впоследствии читали сами. Дюис

Данилович был требователен и к себе, и к своим ученикам: каждый курс обязательно должен был регулярно обновляться, пополняясь самыми последними научными результатами.

Следует заметить, что практически все базовые курсы современной кафедры теоретической и прикладной механики – наследницы кафедры теории упругости и пластичности – были поставлены и отточены проф. Д. Д. Ивлевым.

Талантливый ученый, прекрасный организатор и превосходный педагог Дюис Данилович сумел в короткий срок осуществить перестройку работы механиков Воронежского университета, активизировать их научную и методическую работу. Лекции и научные семинары проф. Д. Д. Ивлева оставляли незабываемые впечатления, восхищали ясностью мышления и способностью глубоко проникать в суть обсуждаемых вопросов. Под влиянием Д. Д. Ивлева наступили годы расцвета механики как в Воронежском университете, так и в других вузах г. Воронежа. Созданная проф. Д. Д. Ивлевым воронежская научная школа механики деформируемого твердого тела быстро получила союзное, а затем и мировое признание.

Одновременно он начал руководство над научной работой студентов и аспирантов. Семинары, организованные Д. Д. Ивлевым, проходили 1-2 раза в неделю. Появление публикации с новыми результатами или новой книги с близкой тематикой сразу же выносилось на семинар для изучения и обсуждения. Таким образом, Д. Д. Ивлев держал своих учеников на острие современной науки. Дюис Данилович всегда умел вселить уверенность в своих учеников, вдохновить их на научный поиск, поддержать в трудную минуту. Участие в научно-исследовательской работе стало каждодневной потребностью сотрудников и аспирантов.

В исследованиях, проводимых проф. Д. Д. Ивлевым и его учениками, большое внимание было уделено развитию нового логического, или, как говорил Д. Д. Ивлев, модельного, построения теории пластичности. В работах Д. Д. Ивлева получили развитие вопросы двойственного, эквивалентного построения теории пластичности, исходя из формулировки условия пластичности и ассоциированного закона пластического течения и из определения диссипативной функции и ассоциированного закона нагружения. Значительные результаты получены в области построения моделей для сред, обладающих сложными реологическими свойствами. Именно в воронежский период деятельности Д. Д. Ивлева им была написана и издана монография “Теория идеальной пластичности”, ставшая настольной книгой многих ученых, аспирантов и студентов.

“Несомненно, что в теории пластичности имя Ивлева должно быть в одном ряду с именами Прандтля, Ильюшина, Хилла, Соколовского, Ходжа, Быковцева, а теория пластичности наряду с газовой динамикой и механикой разрушения была в основе прогресса механики в прошлом, в двадцатом веке. Подобно Гуку и Эйлеру, Ивлев – честный труженик науки, мало заботящийся о продаже своей продукции. Подобно Эйлеру, роль и научные результаты Ивлева недооцениваются или вовсе умалчиваются в западной печати.

Подобно La Fayette, профессор Ивлев всегда руководствовался принципом справедливости в научной борьбе, от которой он не уклонялся, как многие, а решительно вмешивался, чтобы помочь правой стороне” [1].

В те годы на факультете работали известные математики, среди них М. А. Красносельский, деятельность и личность которого, по словам Д. Д. Ивлева, произвели на

него большое впечатление. Сотрудничество с математиками было весьма плодотворным, в то время Д. Д. Ивлев общался также с С. Г. Крейном, Ю. Г. Борисовичем и другими.

Возглавляемая Д. Д. Ивлевым кафедра стала центром организации научной работы ученых-механиков Воронежа. В работе кафедрального семинара участвовали преподаватели вузов города, научные работники институтов, работники промышленных предприятий города. Кафедральный семинар стал общегородским. Под руководством профессора Д. Д. Ивлева ежегодно проводились научные конференции и школы, в работе которых принимали участие учёные из Москвы, Ленинграда, Киева, Новосибирска, Ростова-на-Дону, Казани, Перми, Харькова, Краснодара, Куйбышева, Риги и др. городов. На семинары и конференции “к Д. Д. Ивлеву” приезжали такие известные ученые, как академики Ю. Н. Работнов, Л. А. Галин, профессора Л. М. Качанов, В. Д. Ключников, Г. П. Черепанов, Л. В. Ершов, Ю. Р. Лепшик, Ю. В. Немировский, М. И. Ерхов, Н. А. Талицких (участник создания и редактор всех журналов АН СССР по механике), Зенон Мруз (Польша) и др. Работы Д. Д. Ивлева и его учеников вызывали повышенный интерес у ученых нашей страны и зарубежья, их существенное влияние на формирование математической теории пластичности было и остается общепризнанным.



Д. Д. Ивлев с коллегами и учениками на первомайской демонстрации. 1960 год

На факультете начал работать диссертационный совет, и ученики Д. Д. Ивлева становились “остепененными” исследователями и преподавателями. Авторитет Д. Д. Ивлева как талантливого исследователя и организатора науки, умелого руководителя коллектива, прекрасного педагога продолжал расти. Начали поступать заманчивые предложения из Москвы, но Дюис Данилович не торопился принять решение – он понимал, что в Москве у него не будет таких возможностей и свободы действий, которыми он обладал в Воронеже.

Следует отметить пристальное внимание, которое Д. Д. Ивлев уделял проявившим исследовательский талант ученикам. Среди них Д. Д. Ивлев выделял Г. И. Быковцева: “Среди моих аспирантов был Геннадий Иванович Быковцев, он обладал всеми теми качествами, которыми характеризуется слово “талант”. Геннадий Иванович стал крупным ученым.” (“Опыт автобиографии”, 2000 г.). Дюис Данилович заметил талантливого юношу, с первых дней общения с ним сумел оценить его потенциал и всячески способствовал развитию его творческой активности. Совместно с Г. И. Быковцевым, ставшим в скором времени профессором, Д. Д. Ивлев проводил фундаментальные исследования общих соотношений теории упрочняющегося пластического материала. В 1971 году в издательстве “Наука” вышла его совместная с Г. И. Быковцевым монография “Теория упрочняющегося пластического тела”, также получившая самую высокую оценку научной общественности.

Следует отметить, что Д. Д. Ивлев оказывал всяческую поддержку всем молодым талантливым ученым, поручая им ответственные дела: Г. И. Быковцев был избран заведующим кафедрой гидроаэромеханики и теоретической механики, В. В. Дудукаленко – заведующим кафедрой теории упругости и пластичности. Многие из первых учеников Д. Д. Ивлева достигли замечательных результатов в научных исследованиях, стали известными учеными, руководителями коллективов: И. Д. Легеня возглавлял математико-механический факультет университета, Г. И. Быковцев был организатором и руководителем нового факультета в университете – прикладной математики и механики, он же организовал и возглавил новую кафедру – технической кибернетики и теории автоматического управления, В. А. Жалнин был заместителем декана, деканом факультета прикладной математики и механики, А. Н. Спорыхин стал заслуженным деятелем науки РФ, заведующим кафедрой теоретической и прикладной механики, Ю. П. Листрова возглавляла кафедру теории упругости и пластичности, В. М. Зеленев возглавлял в Воронежском педагогическом университете кафедру физики, В. Д. Коробкин возглавлял долгое время кафедру теоретической механики в Воронежском архитектурно-строительном университете, И. А. Бережной был генеральным конструктором одного из закрытых авиационных КБ, А. В. Чигарев возглавлял кафедру в Белорусском национальном техническом университете, Т. Д. Семькина, Ю. М. Мяснянкин, В. А. Баскаков, Г. Ф. Филатов и многие другие ученики Д. Д. Ивлева первого поколения стали докторами наук, профессорами.

Наряду с заведованием кафедрой теории упругости и пластичности в университете Д. Д. Ивлев некоторое время заведовал кафедрой сопротивления материалов в Воронежском политехническом институте, поставив курс сопротивления материалов на современный для того времени уровень. Как и в университете, лекции, которые он читал для студентов, посещали все преподаватели кафедры. В Воронежском педагогическом институте Д. Д. Ивлев преподавал по приглашению ректора института В. С. Постникова курс математики. Кроме того, в политехническом и педагогическом

институтах он руководил аспирантурой, из которой впоследствии также выходили талантливые педагоги и учёные.

В своей научной деятельности профессор Д. Д. Ивлев не ограничивался чистой теорией. Он установил и развил связи с механиками-практиками. Именно в годы его работы в Воронежском университете на факультете заключались первые хозяйственные договоры с производственными предприятиями Воронежа – КБХА, Эникмаш. Ряд исследований профессора Д. Д. Ивлева посвящен определению точных решений, имеющих прикладное значение.

В эти же годы Д. Д. Ивлев был избран председателем профсоюзного комитета преподавателей Воронежского университета. Можно только догадываться, как много времени Д. Д. Ивлев уделял работе в университете. Может быть, поэтому он часто любил работать по выходным и праздничным дням, приглашая домой своих аспирантов и дипломников.

Следует отметить весьма важную роль как в воронежском, так и в других периодах жизни Д. Д. Ивлева его супруги Юлии Дмитриевны: на ее плечи легли все домашние заботы, к которым добавились и приемы гостей. Несмотря на признанный и непрекаемый среди учеников авторитет Д. Д. Ивлева, в коллективе сложились очень дружеские отношения. Замечательный рассказчик, наделенный обаянием, тактом и остроумием, Дюис Данилович всегда являлся центром притяжения коллектива. Дом Дюиса Даниловича становился рабочим кабинетом, куда постоянно приходили аспиранты, коллеги, приезжие гости. Юлия Дмитриевна всегда была готова накормить и напоить всех, кто бывал в доме Ивлевых, а гостей каждый день было предостаточно. Бывало и так, что приехавшие на семинар “к Д. Д. Ивлеву” размещались в квартире Дюиса Даниловича, и их тоже брала под свою опеку Юлия Дмитриевна.

Надо вспомнить еще об одной черте Д. Д. Ивлева. Случилось так, что и сам Дюис Данилович, и многие из его учеников оказались не только заядлыми футбольными болельщиками, но и любителями сразиться на футбольном поле. Тренировки и матчи проводились по всем правилам спортивного этикета. Регулярные футбольные баталии, которые Д. Д. Ивлев организовывал вместе со своими аспирантами и коллегами в городском парке, стали не просто развлечением, разрядкой после напряженной умственной работы. Каждая такая встреча заканчивалась бурным обсуждением тактики и стратегии игроков, анализом ситуаций, возникавших на футбольном поле, и зачастую это горячее обсуждение продолжалось уже в стенах кафедры перед семинаром... и тут же назначались “принципиалки”. Так назывались дополнительно назначаемые матчи в тех случаях, когда участники дискуссии не могли прийти к единому мнению в оценке действий игроков. Несмотря на небольшую разницу в возрасте Дюиса Даниловича и его первых учеников, масштаб его личности был таков, что ученики относились к нему с безоговорочным почтением.

Так, в короткий по времени воронежский период своей деятельности Д. Д. Ивлев сумел собрать вокруг себя команду единомышленников, которые и составили ядро структуры, получившей в научной среде название воронежской научной школы математической теории пластичности профессора Д. Д. Ивлева.



Д. Д. Ивлев в Воронеже в кругу своих учеников. 2007 год

В своем “Опыте автобиографии” Дюис Данилович писал: “Мне нравятся слова, принадлежащие Уильяму Фолкнеру: “Каждого человека может спасти не масса человеческая, не система, не общество, а только он сам, наделенный способностью и желанием отличать добро от зла. Только он сам, не допустивший, чтобы его страхом, обманом или подачками заставили отказаться от права и долга отличать справедливость от несправедливости, мужество от трусости, жертвенность от алчности, сострадание от эгоизма.

Если вы не будете бояться замечать эти различия и делать свой выбор, тогда вы измените мир””.

В 1965 году Д. Д. Ивлев вернулся в Москву, но связь с Воронежем, с воронежскими механиками не прервалась. Он продолжал руководить аспирантами, ежегодно приезжал в Воронеж с лекциями по современным проблемам механики пластичности, продолжал оказывать влияние на развитие механики в Воронежском университете. При деятельном участии профессора Д. Д. Ивлева в Воронежском университете были открыты новые диссертационные советы. Его ученики теперь возглавляют ученые советы по защите кандидатских и докторских диссертаций, работают доцентами и профессорами во многих учебных заведениях Воронежа, Самары, Минска и Владивостока. Добрый след, оставленный Дюисом Даниловичем в Воронеже, ощущается постоянно, у его учеников появились свои ученики, которые перенимают от учителей дух творчества и чистоты в науке, заложенный профессором Д. Д. Ивлевым.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Черепанов, Г. П. Равнопрочная башня / Г. П. Черепанов / <http://mss.samsu.ru/network/bashnya.pdf>

Шашкин Александр Иванович,

доктор физико-математических наук, зав. кафедрой математического и прикладного анализа, декан факультета прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Семькина Татьяна Дмитриевна,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Горбенко Олег Данилович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического обеспечения ЭВМ, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Вульман Светлана Александровна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж

A. Shashkin, T. Semykina, O. Gorbenko, S. Vulman

D. IVLEV IN VORONEZH (1959–1965)

Voronezh State University

Voronezh State Technical University

Abstract. The article is devoted to the work of Prof. D. D. Ivlev during his stay in Voronezh, its formation as a teacher and organizer of the Research School.

Keywords: scientific, educational activities.

REFERENCES

[1] *Cherepanov, G. P.* Full-strength tower / G. P. Cherepanov / <http://mss.samsu.ru/network/bashnya.pdf>

Shashkin, Alexander Ivanovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Head Department of Mathematics and Applied Analysis, Dean of the Faculty of Applied Mathematics and Mechanics, Voronezh State University, Voronezh

Semykina, Tatiana Dmitriyevna

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh

Gorbenko, Oleg Danilovich

Candidate of Phys. & Math., Associate Professor of computer software, Voronezh State University, Voronezh

Vulman, Svetlana Aleksandrovna

Candidate of Phys. & Math., Associate Professor, Department of Strength of Materials, Voronezh State Technical University, Voronezh

Р. И. Непершин

ДЮИС ДАНИЛОВИЧ ИВЛЕВ (ВОСПОМИНАНИЯ)

Московский государственный технологический университет "Станкин"

Моя первая встреча с Дюисом Даниловичем состоялась в 1968 г. в МВТУ им. Н. Э. Баумана, где в то время он был заведующим кафедрой высшей математики. Я закончил кандидатскую диссертацию, в которой была решена технологическая задача осесимметричного пластического течения с численными расчетами линий скольжения, напряжений и скоростей перемещений. Эта задача вызвала интерес Дюиса Даниловича и послужила началом нашего многолетнего научного сотрудничества. В том же году была опубликована наша совместная работа о двумерном пластическом течении в сферических координатах при вдавливании штампа с плоским клиновидным основанием. Второй совместной работой было полное решение задачи А. Ю. Ишлинского о вдавливании гладкого сферического индентора в жесткопластическое полупространство с построением линий скольжения и полей скоростей перемещений при условии полной пластичности (МТТ, 1973).

В период московской деятельности Дюиса Даниловича я посещал его интересные лекции по теории трещин на семинарах в МВТУ. Развитие численных методов решения технологических задач теории пластичности составило содержание моей докторской диссертации, защищенной в ИМАШе в 1975 г. Оппонентами по этой диссертации были академик Ю. Н. Работнов и проф., д-р физ.-мат. наук Д. Д. Ивлев. Я и проф. М. И. Ерхов обсуждали с Дюисом Даниловичем у него дома, в неформальной обстановке, проблемы теории пластичности и приложений для технологических задач и предельного состояния элементов строительных конструкций.

Периоды московской и воронежской научной деятельности Дюиса Даниловича характеризуются высокими результатами в развитии теории идеальной пластичности с чрезвычайно ясной математической и механической трактовкой, сближающей его научный почерк с В. Прагером, но в области более сложной теории пространственного пластического течения.

Второй период моего научного сотрудничества с Дюисом Даниловичем (2000–2003 гг.) связан с разработкой численных методов решения обобщенной задачи плоской деформации, в которой учитываются касательные напряжения сдвига по нормали к плоскости течения (совместно с проф., д-ром физ.-мат. наук Л. А. Максимовой), и алгоритмов решения трехмерных пространственных задач пластического течения совместно с академиком А. Ю. Ишлинским. Важным результатом этих работ было снижение предельной нагрузки давления на плоский штамп за счет продольного сдвига и первые решения задач о вдавливании многогранной пирамиды в идеально пластическое полупространство, о сдавливании идеально пластической пирамиды плоским

штампом, о давлении штампа с плоским эллиптическим основанием на идеально пластическую и сыпучую среду. По оценкам международных научных рейтингов эти результаты определили ведущее мировое положение теории пластического предельного состояния Д. Д. Ивлева.

В последние годы Дюис Данилович плодотворно занимался проблемой пластической анизотропии и ее влияния на предельное состояние деформируемого твердого тела. В 2010 г. была опубликована наша совместная работа о давлении штампа Прандтля на ортотропное пластическое полупространство. В этой работе показано существенное влияние отношения главных осей эллипса пластической анизотропии на предельное давление на штамп, тогда как кинематика пластического течения остается аналогичной с задачей Прандтля.

Нашей последней работой с Дюисом Даниловичем в 2012 г. было моделирование формоизменения правильной многогранной призмы в круговой цилиндр пластическим сдавливанием ребер призмы на основе автомоделного решения задачи о пластическом сжатии клина плоским штампом. Важным практическим результатом этой работы является прогнозирование неоднородного распределения пластической деформации по толщине поверхностного слоя цилиндра, которое влияет на микроструктуру и прочность детали.

С именем Дюиса Даниловича Ивлева неразрывно связано развитие математической теории пластичности как фундаментального направления механики деформируемого твердого тела на основе физического механизма сдвиговой природы пластической деформации, приводящей к статически определенным дифференциальным уравнениям гиперболического типа и модели жесткопластического тела с локализацией пластической деформации, принципиально отличающей эту теорию от классической теории упругости. Важными практическими применениями теории пластичности, развитой проф. Д. Д. Ивлевым, являются расчеты предельного состояния деформируемого тела, предельной нагрузки деталей машин и элементов конструкций и моделирование технологических процессов пластического деформирования металлов.

Дюис Данилович обладал важной для развития науки и подготовки научных кадров способностью объединять ведущих ученых разных направлений механики деформируемого твердого тела, прикладной математики и технических наук. Результатом этой работы были выпуск большого числа докторов и кандидатов наук и издание фундаментальных научных трудов по теории пластичности (2001 г.), механике пластических сред (2001 г.), предельному состоянию деформируемых тел и горных пород (2008 г.) и сборников научных трудов ведущих ученых, посвященных академиком А. Ю. Ишлинскому (Проблемы механики, 2003 г.) и Е. И. Шемякину (Проблемы механики деформируемых тел и горных пород, 2006 г.).

Предметом научных исследований в естественных и технических науках является поиск истины при изучении сложных проблем механики и физики, возникающих в различных областях науки и техники. Наукой занимаются большие группы исследователей с различными творческими способностями, ограниченными природой человека. Поиск истины ведется методом “проб и ошибок” с возможными искривлениями направлений исследований. В этой связи важное познавательное значение имеют воспоминания Дюиса Даниловича о дискуссиях по научным проблемам механики, в которых он был участником.

Непершин Ростислав Иванович,

доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва

e-mail: nepershin_ri@rambler.ru

R. I. Nepershin

IVLEV DUIS DANILOVICH

Moscow State University of Technology "Stankin"

Nepershin Rostislav Ivanovich

Dr. Tech. Sci., Professor, Moscow State University of Technology "Stankin", Moscow

А. А. Бажин, А. О. Лемза, Е. В. Мурашкин

СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОПОЛЗУЧЕПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

*Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН
Дальневосточный федеральный университет*

Аннотация. В представленной статье предложена модель больших упругоползучепластических деформаций. В качестве примера использования предлагаемой модели решена задача сжатия полого шара под действием внешнего давления. По результатам численных экспериментов указаны распределения полей остаточных деформаций и напряжений после полной разгрузки среды.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, пластичность, остаточные напряжения, релаксация напряжений.

УДК: 539.375

Введение. Теория пластического течения подразумевает разделение полных деформаций на обратимую и необратимую составляющие. Из-за невозможности опытного измерения таких составляющих, в отличие от полных деформаций, данное разделение оказывается произволом конструктора математической модели. Именно такой произвол является главной причиной существующего разнообразия в построении моделей больших упругопластических деформаций [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Впервые геометрически корректная математическая модель больших упругопластических деформаций была построена в 1969 году [6], в которой разделение деформаций на обратимые и необратимые было связано с предположением о соответствии каждому деформированному состоянию единственного состояния разгрузки, когда обратимые деформации отсутствуют во всем продеформированном теле. В то же время такой подход остается доминирующим при построении моделей больших упругопластических деформаций [1], [4], [5]. Другой геометрически и термодинамически непротиворечивый подход к построению модели предложил В. П. Мясников [3], в нем в соответствии с формализмом неравновесной термодинамики определение обратимых и необратимых деформаций следовало из формулировки для них дифференциальных уравнений переноса. Вариант конкретизации источников и потоковых слагаемых в уравнении изменения (переноса) обратимых и необратимых деформаций был предложен в [2]. Здесь проведем обобщение модели [2], [9] на случай учета нелинейной вязкости деформируемой среды как в случае ее пластического течения, так и при разгрузке и деформировании, предваряющем течение.

Моделирование больших деформаций. Полагаем, что наряду с температурой (энтропией) параметрами состояния деформируемого тела являются обратимые и необратимые деформации. Компоненты последних в прямоугольной системе пространственных координат Эйлера обозначим через e_{ij} и p_{ij} соответственно. Постулируем уравнения изменения (переноса) для данных составляющих полных деформаций в форме

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - 0.5((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + \\ &\quad + e_{ik}(\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj})), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} \frac{Dn_{ij}}{Dt} &= \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \varepsilon_{ij} = 0.5(v_{i,j} + v_{j,i}), \\ r_{ij} &= w_{ij} + z_{ij}(e_{ij}, \varepsilon_{ij}), w_{ij} = 0.5(v_{i,j} - v_{j,i}), \\ z_{ij} &= A^{-1}\{(\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj})B^2 + B(\varepsilon_{ik}e_{km}e_{mj} - e_{ik}e_{km}\varepsilon_{mj}) + \\ &\quad + e_{ik}\varepsilon_{km}e_{mn}e_{nj} - e_{ik}e_{km}\varepsilon_{mn}e_{nj}\}, z_{ij} = -z_{ij}, \\ A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3, B = 2 - E_1, \\ E_1 &= e_{jj}, E_2 = e_{jm}e_{mj}, E_3 = e_{jm}e_{mn}e_{nj}. \end{aligned} \quad (2)$$

В записи уравнений переноса для тензоров e_{ij} и p_{ij} наряду с естественными требованиями их симметрии принято условие обращения тензора p_{ij} в ноль при отсутствии источника ($\gamma_{ij} = 0$) в изменении данного тензора; согласно второму равенству из (1) компоненты p_{ij} тензора необратимых деформаций изменяются в таком случае так же, как если бы тело (или система координат) поворачивалось как жесткое целое ($Dp_{ij}/Dt = 0$). Из уравнений переноса (1) и (3) разделение полных деформаций Альманси d_{ij} получается естественным образом в форме

$$\begin{aligned} d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - 0.5e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}, \\ d_{ij} &= 0.5(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{i,k}u_{k,j}). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь u_i – компоненты вектора перемещений точек деформированной среды. Согласно (5) в качестве тензора обратимых деформаций следовало бы выбрать тензор $s_{ij} = e_{ij} - 0.5e_{ik}e_{kj}$, так как при $p_{ij} = 0$ имеем $d_{ij} = s_{ij}$. Введение в рассмотрение тензора e_{ij} вызвано не только относительной простотой в записи для него уравнения переноса (1), но и простотой записи с таким тензором аналога формулы Мурнагана. Аналог формулы Мурнагана можно получить как следствие гипотезы о независимости свободной энергии от необратимых деформаций. В условиях принятия данной гипотезы, как и в [9], получаем:

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}), \quad (4)$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij} \gamma_{ji}. \quad (5)$$

Таким образом, обратимые деформации задают консервативный механизм деформирования: по известным таким деформациям определяются, как и в классической среде Прандтля-Рейса, напряжения, если только упругий потенциал $W = W(e_{ij})$ определен (ρ_0 – плотность среды в свободном ее состоянии). Диссипативный механизм деформирования задается источником в правой части уравнения баланса энтропии (7), который определяется скоростями γ_{ij} накопления необратимых деформаций. Заметим, что (6) непосредственно переходит в известную в нелинейной теории упругости формулу Мурнагана при отсутствии необратимых деформаций ($p_{ij} \equiv 0$):

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial d_{ik}} (\delta_{kj} - 2d_{kj}).$$

Далее будет использоваться аналог формулы Мурнагана (6), переписанный для случая несжимаемой среды:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}), \quad \text{где } p_{ij} \neq 0. \quad (6)$$

В качестве упругого потенциала изотропной и несжимаемой среды будем использовать разложение

$$\begin{aligned} W &= W(J_1, J_2) = (\alpha - \mu)J_1 + \alpha J_2 + \beta J_1^2 - \xi J_1 J_2 - \chi J_1^3, \\ J_1 &= s_{jj}, J_2 = s_{ij}s_{ji}, s_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj}. \end{aligned} \quad (7)$$

В (10) параметр среды μ отождествляется с модулем сдвига, α, β, ξ, χ – упругие модули более высокого порядка. Считаем, что вязкие свойства среды проявляются с самого начала процесса деформирования. Соответствующий диссипативный механизм деформирования зададим, введя потенциал $V = V(\sigma_{ij})$, в форме

$$\begin{aligned} V(\sigma_{ij}) &= B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \\ \Sigma &= \sqrt{\frac{3}{2}\{(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2\}}, \\ \sigma &= \frac{1}{3}\sigma_{jj} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные значения тензора напряжений, B, n – постоянные материала. Инвариант Σ тензора напряжений с точностью до постоянного множителя совпадает с октаэдрическим напряжением (интенсивностью напряжений). Для источника γ_{ij} в уравнении (1) изменения (переноса) необратимых деформаций, считая последние деформациями ползучести, полагаем

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (9)$$

Таким образом, γ_{ij} отождествляется с тензором скоростей деформаций ползучести ε_{ij}^v , а диссипативный потенциал выбран в форме степенного закона ползучести [7]. Очевидно, что выбор закона ползучести в форме (11) и (12) является только одной из возможностей. Записанные выше соотношения составляют замкнутую математическую модель изотермического деформирования.

Когда напряженное состояние в некоторых точках деформируемой среды достигает поверхности нагружения, диссипативный механизм деформирования в окрестностях таких точек меняется – начинается пластическое течение. С целью конкретизации последующего принимаем, что поверхностью нагружения в пространстве главных напряжений является цилиндрическая поверхность Мизеса с уравнением

$$f(\sigma_{ij}) = \tau_{ij}\tau_{ji} - \frac{8}{3}k^2 = 0, \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma, \quad (10)$$

где k – постоянная материала (предел текучести). Согласно (13) вязкими свойствами материала в условиях его пластического течения пренебрегаем. Принимая условия принципа максимума Мизеса [7], формулируем ассоциированный закон пластического течения:

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda > 0. \quad (11)$$

В областях пластического течения γ_{ij} отождествляется со скоростями пластических деформаций. Отмечаем, что (10) и (11) задают простейшую конкретную модель течения, которая может при необходимости уточняться.

Заклучение. В [9] на примере одиночного дефекта сплошности (микropора, микротрещина) в среде с упругими и пластическими свойствами и допускающей большие деформации было показано, что учет реологических свойств среды приводит к эффекту "приспосабливаемости" среды к нагрузкам по типу "нагрузка – разгрузка". В таком случае размеры дефекта после каждой разгрузки оказываются одинаковыми, неизменными остаются уровень и распределение остаточных напряжений в окрестности дефекта. Если учитывать вязкость среды только при ее пластическом течении [9], то с ростом циклов размеры дефекта будут возрастать, что задает степень роста поврежденности и снижение усталостной прочности. Известен

противоположный эффект, когда за счет предварительной квазистатической обработки материала значительным гидростатическим давлением его усталостная прочность возрастает, что объясняется [10] явлением "залечивания" микродефектов в условиях ползучести материала. Таким образом, учет реологических свойств материала выводит из парадоксальной ситуации приспособляемости к циклическим нагрузкам по типу "нагрузка – разгрузка". В [11] предпринималась попытка объяснения упрочнения материала при таких нагрузках, когда до стадии пластического течения и при разгрузке свойства материала моделировались тензорно-линейным уравнением вязкоупругости. Оказалось, что действительно на каждом шаге цикла нагружения и разгрузки размеры дефекта уменьшаются, как и уровень остаточных напряжений. Однако количественная оценка данного эффекта оказалась незначительной. Построенная здесь математическая модель больших деформаций, в отличие от используемой в [11], базируется на нелинейном законе ползучести (11) и (12) и потому предоставляет возможность оценить эффект залечивания микродефектов сплошности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Левитас, В. И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении / В. И. Левитас. – Киев : Наукова думка, 1987. – 232 с.
- [2] *Быковцев, Г. И.* Конечные деформации упругопластических сред / Г. И. Быковцев, А. В. Шитиков // Доклады АН СССР. – 1990. – Т. 311. – № 1. – С 59–62.
- [3] *Мясников, В. П.* Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях / В. П. Мясников // Вестник ДВО РАН. – 1996. – № 4. – С. 8–13.
- [4] *Чернышов, А. Д.* Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях / А. Д. Чернышов // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 1. – С. 120–128.
- [5] *Роговой, А. А.* Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций / А. А. Роговой // Прикл. мех. и техн. физика. – 2005. – Т. 46. – № 5. – С. 138–149.
- [6] *Lee, E. H.* Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans. ASME : J. Appl. Mech. – 1969. – Vol. 36. – P. 1–6.
- [7] *Локощенко, А. М.* Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов / А. М. Локощенко. – М. : МГИУ, 2007. – 264 с.
- [8] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.
- [9] *Буренин, А. А.* Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, М. В. Полоник // Прикладная математика и механика. – 2003. – Т. 67. – Вып. 2. – С. 316–325.
- [10] *Горелов, В. И.* Исследование влияний высоких давлений на механические характеристики алюминиевых сплавов / В. И. Горелов // Прикл. мех. и техн. физика. – 1984. – № 5. – С. 157–158.
- [11] *Буренин, А. А.* Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругопластического материала / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Е. В. Мурашкин // Прикл. мех. и техн. физика. – 2006. – Т. 47. – Вып. 2. – С. 110–119.

Бажин Александр Александрович,

инженер-математик лаборатории механики необратимого деформирования отдела механики деформируемого твердого тела, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток

e-mail: lbmailbox@inbox.ru

Лемза Александр Олегович,

студент, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

e-mail: al-fencer@mail.ru

Мурашкин Евгений Валерьевич,

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории механики необратимого деформирования отдела механики деформируемого твердого тела, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток

e-mail: murashkin@dvo.ru

A. A. Bazhin, A. O. Lemza, E. V. Murashkin

ABOUT LIMITING A CONDITION OF A SPATIAL LAYER FROM AN IDEALNOPLASTICHESKY MATERIAL AT THE TRANSMITTING ANISOTROPY, COMPRESSED BY PARALLEL ROUGH PLATES

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. In work the limiting condition of a layer from an idealnoplastichesky material is considered at the transmitting anisotropy, compressed by parallel rough plates at not collinear directions of tangents of efforts. Statically definable conditions of the limiting condition, a generalizing condition of full plasticity are used.

Keywords: compression, layer, ideal plasticity, transmitting anisotropy.

REFERENCES

- [1] *Levitas, V. I.* Big uprugoplastichesky deformations materials at high pressure / V. I. Levitasc. – Kiev : Naukova thought, 1987. – 232 p.
- [2] *Bykovtsev, G. I.* Final deformations of the elastic plastic media / G. I. Bykovtsev, A. B. Shitikov // Reports of Academy of Sciences of the USSR. – 1990. – Vol. 311. – № 1. – P. 59–62.
- [3] *Myasnikov, V. P.* The equations of motion of elastic-plastic materials at high strain / V. P. Myasnikov // Vestnik DVO RAS. – 1996. – № 4. – P. 8–13.
- [4] *Chernyshov, A. D.* Determining equations for the elastic body at final deformations / A. D. Chernyshov // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a firm body. – 2000. – № 1. – P. 120–128.
- [5] *Rogovoi, A. A.* Defining ratios for the final elastic and inelastic deformations / A. A. Rogovoi // Applied mechanics and technical physics. – 2005. – Vol. 46. – № 5. – P. 138–149.
- [6] *Lee, E. H.* Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans. ASME : J. Appl. Mech. – 1969. – Vol. 36. – P. 1–6.
- [7] *Lokoshchenko, A. M.* Modeling of process of creep and long durability of metals / A. M. Lokoshchenko. – M. : MGIU, 2007. – 264 p.
- [8] *Ivlev, D. D.* Theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 232 p.
- [9] *Burenin, A. A.* Formation of an one-dimensional field of residual tension in a vicinity cylindrical defect of a sploshnost of the uprugoplastichesky environment / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, M. V. Polonik // Applied mathematics and mechanics. – 2003. – Vol. 67. – Issue 2. – P. 316–325.
- [10] *Gorelov, V. I.* Research of influences of high pressures on mechanical characteristics of aluminum alloys / V. I. Gorelov // Applied mechanics and technical physics. – 1984. – № 5. – P. 157–158.
- [11] *Burenin, A. A.* About residual tension in a vicinity cylindrical defect of a sploshnost it is viscously elastic the plastic material / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, E. V. Murashkin // Applied mechanics and technical physics. – 2006. – Vol. 47. – Issue 2. – P. 110–119.

Bazhin, Aleksandr Aleksandrovich

Researcher, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes, Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok

Lemza, Aleksandr Olegovich

Student, Far Eastern Federal University, Vladivostok

Murashkin, Evgenii Valeryevich

Candidate of Phys. & Math., Researcher, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok

А. А. Буренин, Е. П. Дац, С. Н. Мокрин, Е. В. Мурашкин

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ И РАЗГРУЗКА ПОЛОГО ЦИЛИНДРА В ПРОЦЕССЕ "НАГРЕВА-ОХЛАЖДЕНИЯ"

Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН

Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН

Дальневосточный федеральный университет

Аннотация. Рассматривается процесс формирования необратимых деформаций металлических изделий вследствие влияния на них высоких градиентов температур. Получено решение задачи о термоупругопластическом деформировании полого цилиндра при его неравномерном нагреве и последующем охлаждении. Указаны критерии возникновения и развития зон необратимого деформирования, разгрузки и повторного пластического течения. Вычислены поля остаточных напряжений и перемещений.

Ключевые слова: температурные напряжения, остаточные деформации, теплопроводность, термоупругопластичность.

УДК: 539.375

Введение. Различные технологические процессы термомеханической обработки металлоизделий (сварки, изготовления композиционных материалов и др.) связаны с локальным нагревом материала до высокой температуры. Температурные напряжения, возникающие вследствие перепада температур, в значительной степени определяют поведение многих современных конструкций. Потребность в материалах, которые могли бы успешно функционировать при таких высоких уровнях температуры, является одной из наиболее актуальных и трудных задач, определяющих лицо современной техники. Трудность усугубляется тем, что помимо высоких уровней температуры в рабочих условиях напряженное состояние может выйти на предел текучести. Следствием этого является процесс зарождающегося пластического течения в окрестности нагрева. Изучению вопросов моделирования необратимого деформирования материалов в условиях неизотермических процессов посвящены, например, работы [1], [2], [3], [4]. Проблема определения поля перемещений в теории идеального упругопластического тела впервые была рассмотрена Д. Д. Ивлевым [5]. Была показана возможность вычисления перемещений в статически определимых задачах теории идеальной пластичности и указаны условия, когда данная возможность осуществляется. Указанный способ вычисления перемещений используется и для решения поставленной задачи.

Модель термоупругопластической среды. Материал цилиндра считаем упругопластическим, подчиняющимся математической модели типа Прандтля-Рейса [1], [2], в которой деформации e_{ij} полагаются малыми и принимается их аддитивное разложение на упругую e_{ij}^e и пластическую e_{ij}^p составляющие:

Поступила 28.05.2013

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (МК-776.2012.1) и гранта РФФИ (мол_а_вед 12-01-33064).

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1)$$

Уровень и распределение упругих деформаций и температуры в шаре задают напряжения в нем, определяемые согласно закону Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - m\theta)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \quad \theta = T(x_i, t) - T_0. \quad (2)$$

Здесь λ , μ – параметры Ламе, $m = 3\alpha K$, K – модуль всестороннего сжатия материала, α – коэффициент линейного температурного расширения материала, $T(x_i, t)$ – текущая температура.

Начало процесса пластического течения в материале свяжем с выполнением условия пластичности в форме Треска–Сен-Венана [2]:

$$f(\sigma_{ij}, \theta) = \max |\sigma_i - \sigma_j| - 2k(\theta) = 0, \quad (3)$$

где σ_i – главные напряжения, $k(\theta)$ – предел текучести материала при заданной температуре. Далее в расчетах для $k(\theta)$ принимается простейшая линейная зависимость $k(\theta) = k_0 - \beta\theta$, в которой k_0 – предел текучести материала при комнатной температуре, β – теплофизическая постоянная материала, задающая степень падения предела текучести с повышением температуры и определяемая на основе экспериментальных данных. В условиях принимаемого принципа максимума Мизеса [2] поверхность (5) становится пластическим потенциалом, следствием которого является ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \xi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \xi = \sqrt{\varepsilon_{kl}^p \varepsilon_{lk}^p} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{nm}} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Если к соотношениям (1)–(6) добавить локальные следствия законов сохранения (уравнение движения и уравнение баланса внутренней энергии) и постулировать закон теплопроводности, например, в форме Фурье, то получим замкнутую математическую модель деформирования.

Температурные напряжения полого цилиндра. Рассмотрим бесконечно длинный полый цилиндр, свободный от внешних нагрузок при начальной температуре T_0 . Внешняя поверхность поддерживается при постоянной начальной температуре. На внутренней поверхности температура повышается до некоторого максимального значения T_m , причем процесс роста температуры считается достаточно медленным для того, чтобы пренебречь скоростью распространения тепла в материале цилиндра. Такой процесс деформирования связан с крайними условиями

$$\theta(a) = \theta_k, \quad \theta(b) = 0, \quad \sigma_{rr}(a) = 0, \quad \sigma_{rr}(b) = 0. \quad (5)$$

В условиях цилиндрической симметрии решением стационарного уравнения теплопроводности при граничных условиях (7) будет функция

$$\theta(r) = \theta_k \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)}. \quad (6)$$

Интегрирование уравнения равновесия в случае термоупругого деформирования материала цилиндра приводит к следующим зависимостям для напряжений и перемещений:

$$u(r) = mw^{-1}F(a, r) + (r^2 - a^2)r^{-1}c_1 + c_2r^{-1},$$

$$\sigma_{rr}(r) = -2\mu r^{-1}u(r) + wc_1, \quad (7)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = 2\mu r^{-1}u(r) + \lambda c_1 - 2\mu mw^{-1}\theta(r),$$

$$F(x, y) = 0.25\theta_k (x^2 - y^2 - 2x^2 \ln(x/b) + 2y^2 \ln(y/b)) / \ln(a/b).$$

Неизвестные интегрирования можно определить из краевых условий (7).

При определенном уровне ($\theta_k = \theta_1$) на внутренней поверхности цилиндра выполняется условие пластичности

$$|\sigma_{rr}(a) - \sigma_{\theta\theta}(a)| = 2k(\theta(a)), \quad (8)$$

что свидетельствует о начале пластического течения в окрестности внутренней поверхности. В процессе увеличения температуры область пластического течения растет, что означает необходимость интегрировать уравнение равновесия как в области термоупругого деформирования, где перемещения и напряжения вычисляются по формулам (10), так и в области течения.

Для определения полей перемещений и напряжений в зоне необратимого деформирования воспользуемся методом, предложенным Д. Д. Ивлевым в [5]. Интегрированием уравнения равновесия можно определить напряжения в зоне пластического течения. С другой стороны, обратив закон Дюгамеля-Неймана (3), можно получить выражения для упругих деформаций. Воспользовавшись условием пластической несжимаемости как следствием ассоциированного закона пластического течения (6) и условия пластичности Треска-Сен Венана (5) и подставив полученные упругие деформации, получим уравнение для определения перемещений в зоне необратимого деформирования:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right) - \frac{m}{g} \frac{d\theta}{dr} + \frac{2k}{gr} + \frac{1}{g} \frac{dk}{dr} = 0,$$

решением которого определим перемещения и, следом, напряжения:

$$u(r) = m(gr)^{-1} F(a, r) - rg^{-1} G(a, r) + c_3 r^{-1},$$

$$\sigma_{rr}(r) = -2G(a, r),$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = -2G(a, r) - 2k(r), \quad (9)$$

$$G(x, y) = k_0 \ln(y/x) (1 + \theta_k \beta \ln(\sqrt{xy}/b)) / \ln(a/b).$$

Постоянные интегрирования теперь следует определять не только по краевым условиям (7), но и учитывая условия непрерывности параметров напряженно-деформированного состояния на упругопластической границе, которую можно определить, найдя корень уравнения

$$\frac{m\mu F(a_1, b) + (\mu a_1^2 + b^2 g) G(a, a_1)}{\mu g (b^2 - a_1^2)} - \frac{m}{2w} \theta(a_1) + \frac{k(a_1)}{2\mu} = 0. \quad (10)$$

При дальнейшем увеличении температуры до значения ($\theta_k = \theta_2$) возможна ситуация, когда условие текучести (11) может выполняться на внешней поверхности, но с противоположным знаком. При ($\theta_k > \theta_2$) границы обоих пластических течений движутся навстречу друг другу по мере увеличения параметра θ_k . Теперь уравнения равновесия следует интегрировать в трех областях, откуда получим выражения для напряжений и перемещений в области внешнего пластического течения ($b_1 \leq r \leq b$)

$$\sigma_{rr}(r) = 2G(b_1, r) + c_4,$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = 2G(b_1, r) + 2k(r) + c_4, \quad (11)$$

$$u(r) = m(gr)^{-1} F(b_1, r) + rg^{-1} G(b_1, r) + c_4(r^2 - b_1^2)(2gr)^{-1} + c_5 r^{-1}$$

в области термоупругого деформирования ($a_1 \leq r \leq b_1$) согласно соотношениям (10) и в области внутреннего пластического течения ($a \leq r \leq a_1$) – по формулам (12). Неизвестные интегрирования, как и прежде, найдем по крайевым условиям (7) и условиям равенства напряжений и перемещений на упругопластических границах a_1, b_1 . Границы областей необратимого деформирования a_1 и b_1 определяются решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2c_2 w \mu - m \mu \theta(a_1) a_1^2 + k(a_1) w a_1^2 = 0, \\ 2c_2 w \mu + (4\mu^2 m F(a_1, b_1) - m \mu \theta(b_1) - k(b_1) w) b_1^2 = 0. \end{cases}$$

При достижении заданного уровня температуры ($\theta_k = \theta_3$) начнем уменьшать температуру на внутренней поверхности, тем самым начав процесс разгрузки тела. В области обратимого деформирования ($a_1 \leq r \leq b_1$) перемещения и напряжения вычисляются зависимостями (10). В областях с накопленными необратимыми деформациями ($a \leq r \leq a_1$) и ($b_1 \leq r \leq b$) зависимости для перемещений и напряжений весьма громоздки, и поэтому не будем приводить их в этом сообщении, отметим лишь, что процесс получения необходимых формул вполне аналогичен описанному ранее для областей пластического течения. Упругие деформации можно вычислить через известные накопленные необратимые и полные, зависящие от перемещений. Подставляя полученные выражения для упругих деформаций в закон Дюгамеля–Неймана и затем в уравнение равновесия, приходим к уравнению для определения перемещений. Оказывается, что если уровень накопленных необратимых деформаций достаточно высок, на граничной поверхности может произойти выход на условие пластичности, что будет означать начало повторного пластического течения. А значит, уравнение равновесия придется интегрировать независимо в четырех областях, учитывая при этом непрерывность параметров напряженно-деформированного состояния на границах раздела этих областей.

Закключение. Построенное решение позволяет прогнозировать уровень остаточных напряжений полого цилиндра при тепловом воздействии на него. По результатам численного счета можно получить распределения перемещений и напряжений по толщине деформируемого материала. Указаны возможности определения критической температуры нагрева, при которой начнется пластическое течение. Найдена максимальная температура нагрева, при которой уровни накопленных необратимых деформаций не хватит для возникновения повторного пластического течения в окрестности внутренней граничной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Боли, Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М. : Мир, 1964. – 520 с.
- [2] Мелан, Э. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями / Э. Мелан, Г. Паркус. – М. : Физматгиз, 1958. – 168 с.
- [3] Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
- [4] Качанов, Л. М. Упругопластическое равновесие неравномерно нагретых толстостенных цилиндров, находящихся под действием внутреннего давления / Л. М. Качанов // Журнал технической физики. – 1940. – № 10(14). – С. 1167–1172.
- [5] Ивлев, Д. Д. К определению перемещений в задаче Л. А. Галина / Д. Д. Ивлев // Прикладная математика и механика. – 1957. – Т. 21. – Вып. 5. – С. 716–718.
- [6] Ульяновцев, В. П. Упругопластическое деформирование цилиндра при неравномерном нагреве / В. П. Ульяновцев, А. Ф. Макаров // Пластичность машиностроительных материалов. – Тула : Приокское кн. изд-во, 1987. – С. 102–113.
- [7] Ульяновцев, В. П. Влияние неравномерного температурного поля на деформирование цилиндров / В. П. Ульяновцев, А. Ф. Макаров // Проблемы технологии машиностроения. – Тула : Изд-во ТулПИ, 1991. – С. 35–41.

[8] *Шорр, Б. Ф.* К расчету неравномерно нагретых цилиндров в упругопластической области / Б. Ф. Шорр // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. – 1960. – № 6. – С. 57–62.

Буренин Анатолий Александрович,

член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

e-mail: burenin@dvo.ru

Дац Евгений Павлович,

инженер-математик лаборатории механики необратимого деформирования отдела механики деформируемого твердого тела, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток

e-mail: dats@dvo.ru

Мокрин Сергей Николаевич,

студент, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

e-mail: primat@mail.ru

Мурашкин Евгений Валерьевич,

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории механики необратимого деформирования отдела механики деформируемого твердого тела, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток

e-mail: murashkin@dvo.ru

A. A. Burenin, E. P. Dats, C. N. Mokrin, E. V. Murashkin

ABOUT LIMITING A CONDITION OF A SPATIAL LAYER FROM AN IDEALNOPLASTICHESKY MATERIAL AT THE TRANSMITTING ANISOTROPY, COMPRESSED BY PARALLEL ROUGH PLATES

Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS

Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS

Far eastern federal university

Abstract. In work the limiting condition of a layer from an idealnoplastichesky material is considered at the transmitting anisotropy, compressed by parallel rough plates at not collinear directions of tangents of efforts. Statically definable conditions of the limiting condition, a generalizing condition of full plasticity are used.

Keywords: compression, layer, ideal plasticity, transmitting anisotropy.

REFERENCES

- [1] *Boli, B.* Theory of temperature tension / B. Boli, G. Ueyner. – M. : Mir, 1964. – 520 p.
- [2] *Milan, E.* The temperature tension caused stationary temperature fields / E. Milan, G. Parkus. – M. : Fizmatgiz, 1958. – 168 p.
- [3] *Bykovtsev, G. I.* Plasticity theory / G. I. Bykovtsev, D. D. Ivlev. – Vladivostok : Dalnauka, 1998. – 528 p.
- [4] *Kachanov, L. M.* Plastic balance is elastic unevenly heated thick-walled cylinders being under action of internal pressure / L. M. Kachanov // Magazine technical physics. – 1940. – № 10(14). – P. 1167–1172.
- [5] *Ivlev, D. D.* To definition of movements in a task L. A. Galina / D. D. Ivlev // Applied mathematics and mechanics. – 1957. – Vol. 21. – Issue 5. – P. 716–718.
- [6] *Ulyantsev, V. P.* Plastic deformation is elastic the cylinder at uneven heating / V. P. Ulyantsev, A. F. Makarov // Plasticity of machine-building materials. – Tula : Prioksky book publishing house, 1987. – P. 102–113.
- [7] *Ulyantsev, V. P.* Influence of the uneven temperature fields on deformation of cylinders / V. P. Ulyantsev, A. F. Makarov // Problems of technology of mechanical engineering. – Tula : Publishing house of TULPI, 1991. – P. 35–41.
- [8] *Shorr, B. F.* To calculation of unevenly heated cylinders in uprugoplastichesky area / B. F. Shorr // News of Academy of Sciences of the USSR. Mechanics and mechanical engineering. – 1960. – № 6. – P. 57–62.

Burenin, Anatoliy Aleksandrovich

Corresponding member of RAS, Director, Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk on Amur

Dats, Evgeniy Pavlovich

Researcher, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok

Mokrin Sergey Nikolaevich

Student, Far eastern federal university, Vladivostok

Murashkin, Evgenii Valeryevich

Candidate of Phys. & Math., Researcher, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok

А. Г. Багдоев, С. В. Варданян

**КИНЕМАТИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПОДХОДЫ
ОПИСАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ
В ПОЛУПРОВОДНИКАХ, ДВИЖЕНИИ ТРАНСПОРТА, ДВИЖЕНИИ
МИКРОПОР В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ, МИКРО-,
МАКРОЭКОНОМИКЕ**

Институт механики НАН Армении

Аннотация. Универсальным феноменологическим подходом кинематических нелинейных волновых моделей с использованием аналогичных эмпирических зависимостей основных функций между собой исследованы стохастические пространственные процессы фазовых переходов для неустойчивости Ганна в полупроводниках, движении транспорта с переходом к затору и на перекрестках, роста и движения микропор с переходом к макроразломам, микро-, макроэкономике.

Ключевые слова: нелинейная волновая динамика, стохастические пространственные процессы, фазовые переходы, полупроводники, транспортные потоки, микро-, мезо-, макропроцессы разрушения.

УДК: 539.374

Введение.

В настоящей работе предлагается ряд феноменологических моделей, использующих применение методов нелинейной волновой динамики к изучению аналогичных по характеру фазовых переходов, стохастических пространственных процессов для полупроводников, движения транспорта, роста и движения микропор на микро-, мезоуровнях и их перехода к макроразрушению.

1. Для известной Гарсон–Твергард–Нидельмана модели, описывающей динамику микропор, в уравнении для скорости изменения пористости вместо гауссового распределения для плотности вероятности вводится его нелинейное обобщение [5], которое нетрудно рассчитать для разных значений коэффициента нелинейности и провести сравнение с экспериментами. Аналогичные подходы применены к транспортным задачам конфликта на перекрестке.

2. На основе многих современных исследований по процессам, где показывается универсальность характеров этих процессов в отношении различных материалов и нагрузок [6], проводится аналогия между процессом неустойчивости Ганна в полупроводниках [1], [3], описанная одним нелинейным диффузионным уравнением для электрического поля с учетом релаксационных членов, дополненных дельта-флуктуациями, при наличии еще экспериментальной зависимости скорости электронов от напряженности электрического поля, решенная Хакеном и Накамурой методом разложения на плоские волны и определения эффективных формул для финального стационарного устойчивого состояния после фазового перехода; процессом движения транспорта на насыщенных линиях, изученным Лайтхиллом и Уиземом простым методом нелинейных кинематических волн, где газодинамическое уравнение

Поступила 09.06.2013

сохранения плотности машин [4] дополняется нами качественно тем же, как и в задаче полупроводников, графиком связи потока и плотности машин, аналогично тому, что делается в работах известных физиков по изучению задачи движения транспорта, вплоть до фазового перехода и образования заторов. К этому нелинейному волновому уравнению добавляется диффузия, релаксация и флуктуация в полном соответствии с уравнением для полупроводников. Все указанные решения [1], [3] и [2] дополнены изучением исходных нестационарных пространственных уравнений, где стационарное решение есть уже функция координаты.

3. Все эти рассмотрения переносятся на феноменологическое описание задачи о движении микропор с резким фазовым переходом к макроразрушениям с аналогичным (рис. 1) графиком зависимости скорости пор от корня квадратного из их длины [6, 113], причем в качестве пористости $f(x, t)$ можно с точностью до известной постоянной брать указанную величину, при этом в силу характера кривой можно использовать результаты §2, §3, описываемые той же моделью с определением вместо E', ρ' возмущенного значения f' пористости в стационарном состоянии и соответствующей вероятности.

1. Исследование различных вариантов разрушения среды

Вопросы проникания твердых инденторов в различные деформируемые среды представляют большой теоретический и практический интерес. С ними связаны проблемы защиты элементов летательных аппаратов и наземных конструкций от соударения с высокоскоростными ударниками с выяснением вероятности их пробития, разрушения и нарушения нормального функционирования [10]; многие практические задачи защиты брони [11], в том числе и для ракет с твердым наполнителем и самолетов; важные задачи биологии и медицины.

Можно исследовать проникание тонких заостренных тел в первоначально упругое полупространство с учетом наличия фронта разрушения среды около тела [11]. В настоящем параграфе приводится учет разрушения среды при наличии пористости, а именно твердого нелинейно пластического каркаса и большого количества микропор с жидкостью в них.

В [2] мы рассмотрели задачу разрушения на основе двухкомпонентной нелинейной среды Био. Здесь, следуя методу плоских сечений [11], [13] вблизи тела, мы и для пористой среды оставляем в уравнениях только производные по радиальной координате r , отбрасывая малые производные по осевой координате x и времени t . Тогда, как и в [15], [14], [12], можно ввести средние плотности для каркаса $\rho_1(1-f)$ и жидкости в порах $\rho_2 f$, где f есть пористость, записать для них отдельные уравнения неразрывности и получить из них уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} r \{ (1-f) v_r + f \dot{v} \} = 0, \quad (1.1)$$

где v_r , \dot{v} есть радиальные компоненты частицы для каркаса и жидкости:

$$v_r = \frac{du_r}{dt} = \frac{\partial u_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \dot{v} \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (1.2)$$

Решение (1.1), удовлетворяющее граничному условию на теле $r = r_k(x, t)$, $V = \frac{\partial r_k}{\partial t}$, $V = (1-f)v_r + f\dot{v}$ будет такое же, как и для однокомпонентной пластической среды [11]:

$$V = \frac{r_k}{r} \frac{\partial r_k}{\partial t}. \quad (1.3)$$

Полагая $V = \frac{dU_r}{dt}$, где V и U_r есть средняя скорость и перемещения частицы среды, из (1.3), как и в [11], можно для перемещения U_r получить $U_r(r, x, t) = r - F(r^2 - r_k^2)$, где F — произвольная функция, и, в частности, [11] можно записать

$$U_r(r, x, t) = r - \sqrt{r^2 - r_k^2}. \quad (1.4)$$

Можно, как и в [18], записать уравнение Нидельмана для кинетики процесса зарождения и роста пор [17]

$$\frac{df}{dt} = \frac{df_{gr}}{dt} + \frac{df_{nucl}}{dt}, \quad (1.5)$$

где f_{gr} характеризует дальнейшей рост пористости:

$$\frac{df_{gr}}{dt} = (1 - f) \dot{\epsilon}_{kk}. \quad (1.6)$$

Из (1.1) для важного частного случая отсутствия жидкости в порах $\dot{v} = 0$ получится

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = \frac{v_r}{1 - f} \frac{\partial f}{\partial r}. \quad (1.7)$$

Поскольку для рассмотренной асимптотики вблизи тела в квазиодномерной задаче по r , $\dot{\epsilon}_x = 0$, $\dot{\epsilon}_{kk} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r}$, для интенсивности скоростей деформаций $\dot{\epsilon}$ получится:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \left(\dot{\epsilon}_r - \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{kk} \right)^2 + \left(\dot{\epsilon}_\theta - \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{kk} \right)^2 + \left(\dot{\epsilon}_x - \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{kk} \right)^2 \right\}}, \\ \dot{\epsilon} &= \frac{2}{3} \frac{v_r}{r} \sqrt{2 + \left(\frac{r}{1-f} \frac{\partial f}{\partial r} - 1 \right)^2 - \frac{r}{1-f} \frac{\partial f}{\partial r}}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где учтено (1.7).

Для простоты можно рассмотреть экстремальный случай вблизи макроскопического разрушения, т. е. малых $1 - f$ и больших изменений по r от f , $\frac{r}{1-f} \frac{\partial f}{\partial r} \gg 1$, тогда

$$\dot{\epsilon} = \frac{2}{r} v_r \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_{kk} = v_r \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_{kk} = \frac{3}{2} \dot{\epsilon}. \quad (1.9)$$

Тогда можно в уравнении нуклеации пор [18] записать

$$\frac{df_{nucl}}{dt} = p \dot{\epsilon}, \quad p(\bar{\epsilon}) = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\epsilon} - \epsilon_N}{s_N} \right)^2}, \quad (1.10)$$

где $\dot{\epsilon}$ можно выразить через f , v_r по (1.8), которое в области больших изменений f по r дает (1.9).

В (1.10) $\bar{\epsilon}$ есть интенсивность пластических деформаций для рассматриваемой задачи, где ϵ_N есть ее среднее значение, s_N есть дисперсия, $p(\bar{\epsilon})$ в (1.10) есть нормальное гауссово распределение для плотности вероятности $P(\bar{\epsilon}) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\epsilon} p(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon}$.

При этом (1.5), (1.6), (1.10) можно записать с учетом (1.9) в виде

$$\frac{df}{dt} = \frac{3}{2} (1 - f) \dot{\epsilon} + p(\bar{\epsilon}) \dot{\epsilon}, \quad \frac{df}{d\bar{\epsilon}} = \frac{3}{2} (1 - f) + p(\bar{\epsilon}), \quad (1.11)$$

интегрирование которого дает

$$f = 1 + (f_0 - 1) e^{-\frac{3}{2} \bar{\epsilon}} + e^{-\frac{3}{2} \bar{\epsilon}} \int_0^{\bar{\epsilon}} \bar{\epsilon} p(\bar{\epsilon}) e^{-\frac{3}{2} \bar{\epsilon}} d\bar{\epsilon}, \quad (1.12)$$

где $f_0 = const$ есть начальное значение f , когда $\bar{\epsilon} = 0$.

Второе слагаемое в правой части (1.11) $p(\bar{\epsilon})$, соответствующее процессу создания пор [17], $p(\bar{\epsilon}) = \frac{dP}{d\bar{\epsilon}}$, показывает, что f есть аналог вероятности процесса создания пор P . Тогда, следуя методу нелинейной волновой динамики [19], [5], можно в экстремальном процессе нуклеации [20], как было сделано для информационных сетей в [5], просто заменить гауссово распределение $p(\bar{\epsilon})$, представляющее линейный процесс блуждания [5], описываемый линейным уравнением (3) [5] Фоккера–Планка для плотности вероятности $p(\bar{\epsilon}, t)$, где $x = \bar{\epsilon}$ [5] есть значение интенсивности деформации в случайном процессе вблизи средней кривой процесса [5] $x = A(t)$, $A(t) = \epsilon_N$, с дисперсией вокруг нее $B(t) = s_N^2$, на соответствующее,

более общее, нелинейное распределение [5]. Следуя [5], мы используем более общее нелинейное уравнение (3) [5] Фоккера–Планка для $p(x, t)$, $x = \bar{\varepsilon}$, и его решение задачи блуждания с начальным условием $p(x, 0) = \delta(x)$, которое обобщает линейное гауссово распределение для $p(x, t) = v(t, x)$, даваемое формулой (1) из [5], берем в окончательном виде (4), (5) из [5]

$$p(\bar{\varepsilon}) = \frac{f_N e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\varepsilon}-\varepsilon_N}{s_N}\right)^2}}{s_N \sqrt{2\pi} + \int_{-\infty}^0 \left(e^{\frac{1}{c_1}} - 1\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\varepsilon}-\varepsilon_N-Y}{s_N}\right)^2} dY}. \quad (1.13)$$

Необходимость пересмотра гауссовского распределения плотности вероятности отмечалась также во многих современных работах по статистике, для задачи нуклеации эта необходимость уточнения гауссовского распределения была указана в [20].

Эти подходы §1, так же как синергетические исследования в §2-4, можно применить и для изучения аналогичных процессов формирования и роста перколяционных кластеров [19].

Указанное в формуле (1.13) исправление нормального гауссова распределения для плотности вероятности процесса нуклеации пор можно применять [5] также к задачам движения транспорта [21], в одномерном подходе движения машин на двух дорогах при изучении возможной конфликтной ситуации на их перекрестке для двух независимых потоков на пересекающихся линиях. Тогда, согласно методу, подробно описанному в [22], распределение вероятности отсутствия конфликта может быть взято нормальным распределением

$$P(z, s) = \frac{1}{2} \{1 + \phi(\xi)\}, \quad \xi = \frac{z - m(s)}{\sqrt{B(s)}}, \quad \phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\xi e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda, \quad (1.14)$$

поскольку конфликтная ситуация происходит в экстремальных условиях процесса движения, согласно методу нелинейной волновой динамики, указанному в §1, а также используя замену линейной формулы теории (1) для $P(x, t)$ из [22] на формулу нелинейной теории [19] для $P(x, t)$ из [5] можно при определении вероятности конфликта $1 - P(z, s)$ вместо формулы линейной теории (1.14), которая в обозначениях формулы (1) из [5] будет

$$P(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{B(t)}}}^{\infty} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx', \quad (1.15)$$

использовать нелинейную теорию, даваемую формулой (4) из [5]:

$$P(t, x) = \frac{\int_{-\infty}^0 \exp\left\{-\frac{(X-Y)^2}{2B(t)}\right\} dY}{\sqrt{2\pi B(t)} + \int_{-\infty}^0 \left(e^{\frac{Y}{c_1}} - 1\right) \exp\left\{-\frac{(X-Y)^2}{2B(t)}\right\} dY}, \quad (1.16)$$

где

$$X = x - A(t), \quad A(t) = \int_0^t a(t) dt, \quad B(t) = \int_0^t b(t) dt, \quad (1.17)$$

а для общности математическое ожидание $a(t) = m(s)$ и дисперсия $B(t) = B(s)$ взяты переменными в (1.17), вместе с тем $\frac{1}{c_1} = \frac{\gamma(t)}{b(t)}$ постоянно, что, в частности, будет при постоянных γ, b , где γ есть нелинейный коэффициент, который следует при расчетах задавать.

Теперь взамен (1.14), соответствующей (1.15), следует брать нелинейную формулу (1.16), в которой нужны указанные замены, тогда

$$P(z, s) = \frac{\int_{-\xi}^{\infty} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx'}{\sqrt{2\pi} + \int_{-\xi}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{B(s)}}{c_1}(-\xi-x')} - 1 \right) e^{-\frac{x'^2}{2}} dx'}, \quad (1.18)$$

$$p(z, s) = \frac{e^{-\frac{(z-m)^2}{2B(s)}}}{\sqrt{2\pi B(s)} + \sqrt{B(s)} \int_{-\xi}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{c_1}} - 1 \right) e^{-\frac{x'^2}{2}} dx'}$$

где $\frac{1}{c_1} = \frac{\gamma(s)}{b(s)}$, $P(z, s)$ дает вероятность отсутствия конфликта, $p(z, s)$ дает плотность вероятности. Формула (1.18) для $P(z, s)$ получится из формулы (1.16) подстановкой $\frac{X-Y}{\sqrt{B(s)}} = x'$.

Следует отметить, что в теории волн [5] X есть расстояние от волны $x = A(t)$ по-другому эйконал, причем используется и определение эйконала $t - A^{-1}(x)$, это ближе к обозначениям [16], что не мешает проводить указанную аналогию решений (1.16) из [5] и (1.18) из [22] в линейном случае $\gamma = 0$, $c_1 = 0$, при этом в (1.15), (1.16) надо заменять $\frac{X}{\sqrt{B(s)}}$ через $-\xi$, $\xi = \frac{z-m(s)}{\sqrt{B(s)}}$.

В [2], [5] нами дается подробное изучение процессов о движении транспорта на одной линии и на пересекающихся линиях. Там дается обобщение метода кинематических нелинейных волн Лайтхилла и Уизема [4] в задаче движения транспорта на насыщенных линиях с учетом релаксации, диффузии и флуктуаций – применением методов синергетики [1], [3], при этом явление образования затора описывается фазовым переходом первого рода. В [2], [5] аналогичными методами изучена пространственная стохастическая задача о встрече потоков на перекрестке. Указанные синергетические подходы [1], [3], [2], где также используется универсальная экспериментальная кривая связи скорости частиц от напряженности поля для полупроводников, и аналогичная ей кривая связи потока частиц от их плотности [4] позволяет решение [1], [3], которое нами дополнено с учетом средних членов в разложении по гармоникам, и нелинейности в уравнении Фоккера-Планка, распространить на большое число аналогичных кинематических подходов в разных задачах движения частиц в том числе в задаче о распространении вирусов для большой совокупности компьютеров, информатике.

2. Синергетические исследования неустойчивости в полупроводниках

Впервые неустойчивость Ганна исследовалась как фазовый переход в неравновесной системе. Ученые вычислили частотную и амплитудную функцию отклика и нашли, что неустойчивость была вызвана мягко-релаксационной плазменной модой и критическими флуктуациями электрического поля, примерно так же, как фазовые переходы в равновесной системе. В [3] приводится эта ссылка, и далее во всей статье дается более связанный с положениями современной физики синергетический [3], [1] подход к исследованию неустойчивости Ганна, где фазовый переход к устойчивому состоянию получается за счет учета нелинейности и дельта-флуктуаций. В нашей статье мы следуем тому же синергетическому подходу, единому при изучении указанных фазовых переходов от неустойчивости к самоорганизации [1]: в физике сверхпроводников, примененному Гинзбургом–Ландау [1]; в лазерах [1]; в задаче Бенара [1], [2] и, наконец, в полупроводниках [1], [3], [2]. В согласии с положениями системного анализа данные фазовые переходы выявлены в полупроводниках; при переходе от жидкой фазы движения транспорта на насыщенных линиях к твердой фазе, описывающей образование затора [4]; в переходе от хаотичного движения микропор к почти детерминированному распространению макроразлома; их можно описать феноменологически, не вдаваясь в детальный анализ изучения отдельной микротрещины, и даже в динамические факторы и соответствующие уравнения среды можно изучить только на основании обобщения кинематической теории нелинейных волн [4], даваемой с учетом релаксации и флуктуации, как это было сделано

для полупроводников в [1], [3]. При этом во всех указанных задачах используется экспериментальная зависимость скорости, а возможно, потока, частиц от основного параметра: для полупроводников электрического поля, для транспорта – это плотность частиц на линии, для движения микропор – это пористость, причем характер кривых, описывающих эти зависимости [1], [3], [2], [6], а именно в начале подъема и далее снижения, аналогичен для всех указанных переходов. В [1], [3] выведено уравнение для электрического поля в полупроводниках, представляющее типичное диффузионное нелинейное волновое уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -e'n_0v(E) - v(E) \frac{\partial E}{\partial x} + D \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{4\pi}{\varepsilon_0} I, \quad e' = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} e, \quad (2.1)$$

где $I = I(t)$ – внешняя плотность тока, которая определяется после решения задачи [1], [3].

Зависимость скорости электронов $v(E)$ от поля E для эффекта Ганна в полупроводниках [1], [3], [2] считается известной экспериментально. Пусть E_0 постоянное электрического поля, $E'(x, t) = E(x, t) - E_0$ возмущенное поле в рассматриваемом процессе. Решение (2.1), записанного для возмущений E' , полученное в [1], [3], [2], ищется в виде разложения E' на плоские волны.

3. Исследование фазового перехода при движении транспорта методом плоских волн

В работе [2] проводится аналогия математической постановки задач между неустойчивостью Ганна в полупроводниках [1], [3] и кинематической нелинейной волновой теорией в движении транспорта [4] на насыщенных линиях. В [4] записывается уравнение сохранения плотности машин на линии $\rho(x, t)$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$, где $q = \rho v$ есть плотность потока, v – скорость. Считается известной единая кривая $q = q(\rho)$, определяемая экспериментом.

Она приведена в [4] и здесь дана на рис. 1.

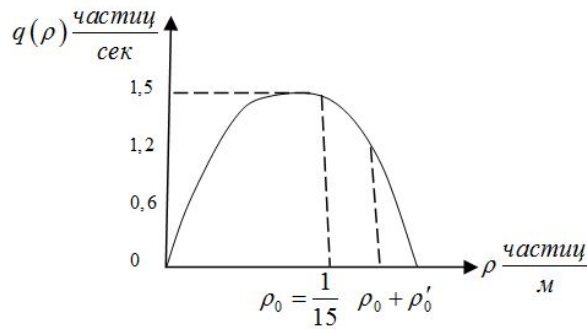


Рис. 1

В [1], [3], [2] рассмотрены движение электронов в полупроводнике, скорость которых $v = v(E)$, экспериментально определяемая функция напряженности поля E . Соответствующая потеря устойчивости процесса изменения $E(x, t)$ дается нисходящей частью кривой рис. 1, где следует заменять функции ρ на E , q на v . Выведенное в [1], [3] уравнение для E , кроме указанных в уравнении [4] газодинамических нелинейных членов, содержит также вторую производную от искомой функции, дающую диффузию, и, что особенно важно при получении фазовых переходов, члены с релаксацией, т. е. алгебраические слагаемые до третьего порядка по E' , $E' = E - E_0$, E_0 начальная напряженность поля. В соответствии с принципами системного анализа, в котором главное значение имеет сам процесс перехода, а уравнения для совершенно различных параметров для разных систем будут одинаковыми, и учитывая идентичность кривых процессов нами обобщено вышенаписанное уравнение для ρ

добавлением аналогичных тех же членов с диффузией и релаксацией относительно возмущенной плотности ρ' , причем $\rho(x, t) = \rho_0 + \rho'(x, t)$, $\rho_0 = const$, начальная точка на кривой рис. 1. Тогда получится уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\lambda q(\rho) - q'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + J(t), \quad (3.1)$$

где λ – некоторая постоянная.

При допущении о постоянстве $J(t) = -\lambda q(\rho_0)$ уравнение для возмущений ρ' имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\lambda q'(\rho_0) \rho' - \lambda \frac{q''(\rho_0)}{2} \rho'^2 - \lambda \frac{q'''(\rho_0)}{6} \rho'^3 - \left\{ q'(\rho_0) + q''(\rho_0) \rho' + \frac{1}{2} q'''(\rho_0) \rho'^2 \right\} \cdot \\ \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}, \quad q'(\rho_0) = v(\rho_0) + \rho_0 v'(\rho_0), \end{aligned} \quad (3.1)'$$

где λ – некоторая постоянная.

Тогда все решение [1], [3], [2] для полупроводников, полученное разложением $E'(x, t)$, по плоским волнам переносится и на уравнение (3.1)', только вместо множителей $v'(E_0)$, $v''(E_0)$, $v'''(E_0)$ в [1], [3], [2] следует в (3.1)' брать в алгебраических слагаемых множители $q'(\rho_0)$, $q''(\rho_0)$, $q'''(\rho_0)$, и при производной $\frac{\partial \rho'}{\partial x}$ вместо $v(\rho_0)$, $v'(\rho_0)$, $v''(\rho_0)$ брать вышеуказанные множители в фигурной скобке при $\frac{\partial \rho'}{\partial x}$.

Записывая ряд по плоским гармоникам [1]

$$\rho'(x, t) = \sum_{m \neq 0} c_m(t) e^{im(kx - kv_0 t)}, \quad v_0 = q'(\rho_0), \quad (3.2)$$

подставив в (3.1)' и приравняв слагаемые при гармониках, можно получить систему обыкновенных уравнений для амплитуд $c(t)$, при этом, как и в теории эволюционных нелинейных уравнений [14], ведущим параметром в случае $q'(\rho_0) < 0$ оказывается $c_1(t)$, $c_2(t) \ll c_1(t)$ и получится уравнение

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial c_1}, \quad \phi = \frac{V_1}{8} c_1^4 - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{V^2}{8V_1} \right) c_1^2 - \frac{\frac{\beta^2 V^2}{8V_1^2}}{\beta + V_1 c_1^2}, \quad (3.3)$$

$$\alpha = -\lambda q'(\rho_0) - Dk^2, \quad \beta = \lambda q'(\rho_0) + 4Dk^2, \quad V \approx -\lambda q''(\rho_0) V_1 \approx \lambda q'''(\rho_0), \quad (3.4)$$

причем, как показано в [1], [3], [2], нелинейные члены с $\frac{\partial \rho'}{\partial x}$ в (3.1)' дают вклад малости более высокого порядка в (3.4). Значение $I = I_1$, $I = c_1^2$, причем I_1 есть корень кубического уравнения $\frac{\partial \phi}{\partial I} = 0$, получаемого из (3.3), приближенно получится из решения квадратного уравнения [2] в виде

$$I_1 = \left\{ \frac{V^2}{\beta V_1} - 1 + \sqrt{\left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right)^2 + \frac{12\alpha V^2}{\beta^2 V_1}} \right\} \frac{\beta^2}{3V^2}, \quad I_1 = c_1^2, \quad (3.5)$$

дающее с учетом (3.4) значение I в конечной стационарной точке I_1 , т. е. C (рис. 2).

Фазовый переход первого рода дается на рис. 2 и рис. 3 из [3].

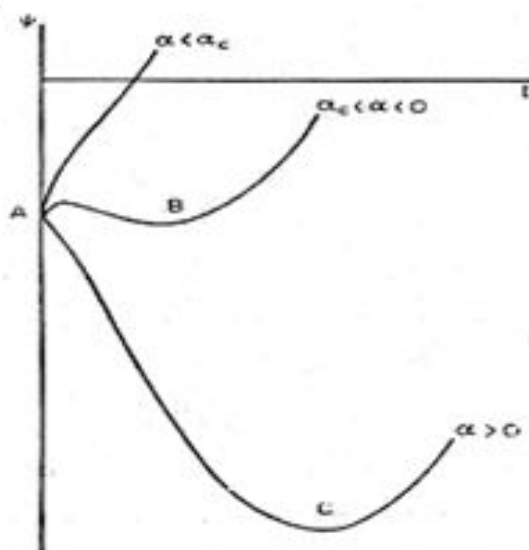


Рис. 2. Поведение потенциала φ (такое же, как и функции интенсивности поля I)

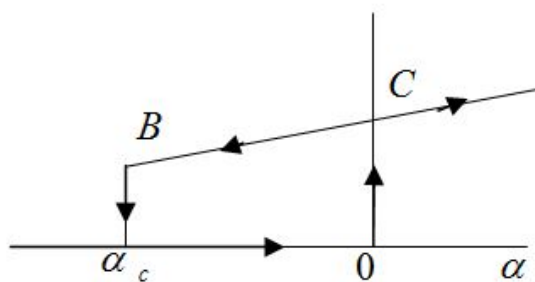


Рис. 3. Гистерезисное поведение наиболее вероятных величин I_0 от α

Кроме того, следует, учитывая стохастический характер процесса перехода, записать (3.3) в форме [1], [3], [2]

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial c_1} + F(x, t), \quad \langle F(x, t) F(x', t') \rangle = b \delta(x - x') \delta(t - t'), \quad (3.6)$$

получить уравнение Фоккера–Планка для вероятности $f(c, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial c_1} \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial c_1} \right) + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial c_1^2} \quad (3.7)$$

и его решение в указанной, наиболее важной, стационарной точке $I = I_1$ из

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad f = f(0) e^{-\frac{2}{b}\varphi_1(c_1)}, \quad \varphi_1(c_1) = \varphi(c_1) - \varphi(0), \quad I_1 = c_1^2, \quad (3.8)$$

где I_1 дается по (3.5). Следуя методу нелинейной волновой динамики [4], [2], нужно в коэффициент при $-\frac{\partial \phi}{\partial c_1}$, в (3.7), добавить член $\frac{\gamma_1}{2} \frac{f(c_1)}{f(0)}$, где $\gamma_1 = const$ – заданный нелинейный коэффициент. Тогда вместо (3.8) получится значение $f(c_1)$ в стационарной точке

$$\frac{f(c_1)}{f(0)} = e^{-\frac{2}{b}\varphi(c_1) + \alpha \frac{\gamma_1}{b} \int_0^{c_1} \frac{f(c_1)}{f(0)} c_1 dc_1}. \quad (3.9)$$

Таблица $f(c_1)$, полученная расчетами по (3.9), дана в [2]. Следует отметить, что в теории нелинейных квазимонохроматических волн [14] в решении (3.8) удерживается и свободный член $m=0$, $c_0(t) = \bar{\rho}'(t)$, тогда вместо (3.2), удерживая члены до второй гармоники, получим

$$\rho' = \bar{\rho}'(t) + c_1 e^{ik(x-v_0t)} + c_2 e^{2ik(x-v_0t)} + c_1^* e^{ik(x-v_0t)} + c_2^* e^{-2ik(x-v_0t)}. \quad (3.9)a$$

Подставив в (3.1)' и приравняв свободные члены, первые и вторые гармоники можно получить приближенно с учетом порядков $c_2 \sim c_1^2$, $\bar{\rho}' \sim c_1^2$, $\left| \frac{d\bar{\rho}'}{dt} \right| \ll |\bar{\rho}'|$, $\left| \frac{dc_2}{dt} \right| \ll |c_2|$,

$$\bar{\rho}'(t) \approx -\frac{q''(0)}{q'(0)} c_1^2, \quad c_2 \approx \frac{-\frac{1}{2}q''(0) c_1^2}{\frac{\beta}{\lambda} + c_1^2 \left\{ q'''(0) - \frac{q''(0)}{q'(0)} \right\}}, \quad q'(0) = q'(\rho_0), \quad (3.10)$$

$$q''(0) = q''(\rho_0), \quad q'''(0) = q'''(\rho_0), \quad V \approx -\lambda q''(0), \quad V_1 \approx \lambda q'''(0), \quad \beta \approx 3Dk^2,$$

а уравнение для первой гармоники с учетом $\bar{\rho}'$ исправленного за счет второго члена в фигурной скобке будет даваться (3.3) с добавлением члена $\frac{V^2 c_1^3}{\beta - 4Dk^2}$, а к V_1 в знаменателях добавится $\frac{3V^2}{\beta}$. Следует отметить, что в отличие от (3.1) исходное уравнение [1], [3] для E содержит переменную внешнюю нагрузку $\frac{4\pi}{\varepsilon_0} I(t)$, где $I(t)$ имеет смысл плотности тока. В [1], [3] ставится

условие постоянства потенциала $U = \int_0^L dx E(x, t)$, L – длина образца. При записи решения

в [1], [3] по гармоникам без учета свободного члена, аналогичного $\bar{\rho}'$ для ρ' , должно быть выполнено соотношение: $\frac{4\pi}{\varepsilon_0} I(t) \approx e'n_0 v(E_0) + e'n_0 v''(E_0) c_1^2$, после чего решение [1], [3] проходит при наличии этой нагрузки в конце образца. Подобно этому для движения транспорта в качестве исходного уравнения можно брать уравнение (3.1), где приближенно положено $J(t) \approx \lambda q'(\rho_0) + \lambda q''(\rho_0) c_1^2$ и при таком внешнем воздействии решение прежнее (3.1)–(3.9), что осуществляется при регулировании скорости изменения плотности машин при $x = L$.

Следует отметить, что решение (3.9)a, записанное для E' вместо ρ' , влияет на условие постоянства U только через свободные члены и имеет вид

$$U = \int_0^L E(x, t) dx = E_0 L + \int_0^L \bar{E}'(t) dx = E_0 L + \bar{E}'(t) L = E_0 L - \frac{v''(E_0)}{v'(E_0)} c_1^2(t) L,$$

и подобным образом

$$U = \int_0^L \rho(x, t) dx = \rho_0 L + \int_0^L \bar{\rho}'(t) dx = \rho_0 L + \bar{\rho}'(t) L = \rho_0 L - \frac{q''(\rho_0)}{q'(\rho_0)} c_1^2(t) L,$$

где использовано (3.10). Как видно из полученных соотношений, и потенциал U поля E , и полное число машин U на длине L мало отличаются от постоянного, однако учет среднего члена в решении в уравнении для $c_1(t)$ в общем случае необходим.

Используя кривую $q(\rho)$ (рис. 1), можно численно исследовать по (3.5), (3.9) образование пробки и дальнейшее ее рассасывание в пространственном подходе [2].

При этом основную роль играют постоянные $q'(\rho_0)$, $q''(\rho_0)$, $q'''(\rho_0)$,
 $q'(\rho_0) = v_0$, $\alpha = -\lambda q'(\rho_0) - Dk^2$, $\beta = \lambda q'(\rho_0) + 4Dk^2$, $V \approx -\lambda q''(\rho_0)$, $V_1 \approx \lambda q'''(\rho_0)$, фигурирующие в решении (3.4), (3.5) в конечной устойчивой стационарной точке $I_1 = c_1^2$.

Как было указано выше, значение параметра α в точке бифуркации следует считать $\alpha = 0$ и начальную точку ρ_0 потери устойчивости при $\alpha > 0$ выбрать на нисходящей части кривой $q(\rho)$, правее точки максимума $q(\rho) = q_{\max}(\rho)$, $\rho = \rho_m$. Согласно рис. 1 $\rho_m = 100 \frac{\text{частиц}}{\text{миль}} = \frac{1}{17} \frac{\text{частиц}}{\text{м}}$, $q_{\max} = 2000 \frac{\text{частиц}}{\text{час}} = \frac{5}{9} \frac{\text{частиц}}{\text{сек}}$. $\rho'_0 > 0$ выбирается в стационарной точке процесса, даваемой (3.5), куда скачком происходит фазовый переход из неустойчивой точки $\rho = \rho_0$ в устойчивую $\rho_0 + \rho'_0$ из (3.5). В точке $\rho_0 = \frac{1}{15} \frac{\text{частиц}}{\text{м}}$, можно приближенно считать $q'(\rho_0) = -6 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$, $q''(\rho_0) = -10^3$, $q'''(\rho_0) = 3 \cdot 10^4$, $\frac{V^2}{\beta V_1} = \frac{q''(\rho_0)}{-3q'(\rho_0)q'''(\rho_0)}$, $\frac{V^2}{\beta V_1} = \frac{100}{54}$, $\beta = -3\lambda q'(\rho_0)$ вблизи $\alpha \approx 0$ и (3.5) дает значение $\rho'_0 2 = I_1 \rho'_0 \approx \frac{12}{1000} \frac{\text{частиц}}{\text{м}}$, уравнение для потока

$$q(\rho) = \left(\frac{1}{2} - 6\rho' - 500\rho'^2 + 5000\rho'^3 \right) \frac{\text{частиц}}{\text{сек}}. \quad (3.11)$$

Это соотношение приближенно получено на основании рис. 1 около стационарной точки. В самой стационарной точке $\rho'_0 = 0.012$, $q(\rho) \approx \frac{1}{3}$. При более точных расчетах и при различных выборах $\rho = \rho_0$ возможны более резкие уменьшения $q(\rho)$ и увеличения $\rho = \rho_0 + \rho'_0$ с образованием пробки. При этом можно прямо использовать (3.5) для произвольных немалых значений $\alpha > 0$, тогда $\rho' > \rho'_0$, $q(\rho) < \frac{1}{3}$ и будут указанное более сильное уплотнение и замедление потока в пробке фазового перехода.

При уменьшении ρ' и росте $q(\rho)$ происходит рассасывание этой пробки, условно взятой при $x = 0$, для $x > 0$ можно приближенно описать это формулой (3.11), а также с помощью стационарного пространственного решения $\rho' = \rho'(x)$ уравнения (3.1)', полученного в статье [2].

Следует отметить, что важную роль в решении (3.1)–(3.9) играет дискриминантная кривая $\alpha = \alpha_c$, где два из трех корней кубического уравнения $\frac{\partial \varphi}{\partial c_1} = 0$ совпадают [3], [2]. При этом параметр α_c , характеризующий начало фазового перехода, можно найти в [3] в конечном виде, причем он найдется приближенно из (3.5) в точке ветвления корня $I = I_1$, в виде

$$\frac{\alpha_c}{\beta} = -\frac{\beta V_1}{12V^2} \left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right)^2 \quad (3.12)$$

и для рассмотренного случая движения транспорта $\frac{\alpha_c}{\beta} = -\frac{1}{24}$. В то же время данные опыта по полупроводникам, приведенные в [3], дают $\frac{\alpha_c}{\beta} = -50$, такие большие $|\alpha_c|$, от которых происходит скачком фазовый переход в $\alpha = 0$, не вяжутся с развиваемой в [1], [2], [3] в методе разложения на плоские волны теорией малых возмущений, с предположением о малости $\frac{|\alpha|}{\beta}$, $|c_2| \ll c_1$.

В задаче §3 на восходящей части кривой рис. 1 $q'(\rho) > 0$, далее при $\alpha = \alpha_c$, $\alpha_c < 0$ по (3.12), согласно рис. 3 имеет место нарушение однофазности [3], при $\alpha > \alpha_c$, $\alpha < 0$, $I = 0$, $\rho' = 0$, а при $\alpha = 0$ имеет место фазовый переход первого рода скачком к $I = I_1$ по (3.5) из приведенных расчетов при указанном выборе начальной точки $\rho = \rho_0$, $\frac{V^2}{\beta V_1} \approx 2$, (3.12) дает $\frac{\alpha_c}{\beta} \approx -\frac{1}{24}$, т. е. узкий интервал по α до $\alpha = 0$.

Кубическое уравнение $\frac{\partial \varphi}{\partial c_1} = 0$ для I имеет один действительный корень $I < 0$, левее дискриминантной линии $\alpha < \alpha_c$, который отбрасывается, а правее нее при $\alpha > \alpha_c$ имеются, кроме упомянутого, еще два действительных корня $I_{1,2}$, решения приближенного квадратного уравнения имеют вид

$$I_{1,2} = \left\{ \frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \pm \sqrt{\left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right)^2 + \frac{12\alpha V^2}{\beta^2 V_1}} \right\} \frac{\beta^2}{3V^2}, \quad (3.13)$$

как и для кубического уравнения, совпадающие при $\alpha = \alpha_c$. В (3.13) для $I_{1,2} > 0$ имеет два значения при подходе к $\alpha = 0$ со стороны $\alpha < 0$. При движении к точке бифуркации $\alpha = 0$ со стороны $\alpha > 0$ $I_2 < 0$ и отбрасывается, $I_1(\alpha)$ совпадает с (3.5) и условно описывается прямой (рис. 3), которая проходит через точки C и крайнюю точку B , которая при подходе со стороны $\alpha > 0$ соответствует $\alpha = \alpha_c$, $I_1 = \left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right) \frac{\beta^2}{3V^2 D^2}$.

В пределе при $\alpha = \alpha_c$ $I_2 = I_1$. Конечно, в силу (3.13) можно было для $\alpha > \alpha_c$, $\alpha < 0$ брать только корень $I_2 > 0$, начинающийся в крайней точке $\alpha = \alpha_c$, $I_2 = I_1$ и заканчивающийся при $\alpha = 0$, $I = 0$, однако корень I_2 из (3.13), изображенный на рис. 2, соответствует неустойчивости нелинейного процесса.

Это, как и выше, заставляет выбрать на рис. 3 для всех $\alpha < 0$, $\alpha > \alpha_c$ снова значение корня $I = 0$, которое при $\alpha = 0$ скачком переходит в $I > 0$, даваемое линией $I_1(\alpha)$ из (3.5), которую можно продолжать до указанной точки $\alpha = \alpha_c$, т. е. $I_2 = I_1$ и (3.5), (3.13) также описывают указанный фазовый переход в устойчивое состояние с разрывом при $\alpha = 0$.

4. Решение методом плоских волн с учетом свободного члена разложения

В случае более реальных, заданных заранее, $J(t)$ следует в (3.3) учесть слагаемое в виде свободного члена $m = 0$, $c_0(t) = \bar{\rho}'(t)$. Тогда

$$\rho'(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m(t) e^{im(kx - kv_0 t)} v_0 = q'(\rho_0), \quad (4.1)$$

и, оставляя слагаемые вплоть до второй гармоники, можно записать

$$\rho'(x, t) = c_1 e^{ik(x - v_0 t)} + c_2 e^{2ik(x - v_0 t)} + c_1^* e^{-ik(x - v_0 t)} + c_2^* e^{-2ik(x - v_0 t)} + \bar{\rho}'(t). \quad (4.2)$$

При подстановке (4.2) в (3.2), как показывают решения, полученные в параграфе 3 и в [1], [2], [5], слагаемые в (3.2), соответствующие первой производной по x и дающие мнимые добавки в V , V_1 , в (3.4) малы, поэтому при получении добавок при решении уравнения (3.2) с учетом свободных членов, следует удерживать члены с ρ'^2 , ρ'^3 только в первых релаксационных недифференцируемых членах правой части (3.2).

Подставив (4.2) в (3.2), где $J(t) = \lambda q(\rho_0)$, удерживая члены с первой, второй гармоникой и свободный член, получим в основных порядках

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1}{\partial t} &= -\frac{V_1}{2} (c_1^3 + 2c_1 c_2^2 + \bar{\rho}' c_1^2) + \frac{V}{2} (2c_2 c_1 + 2c_1 \bar{\rho}') + \alpha c_1, \\ \frac{\partial c_2}{\partial t} &= -V_1 \left(c_1^2 c_2 + \frac{c_1^2}{2} \bar{\rho}' \right) + \frac{V}{2} (c_1^2 + 2\bar{\rho}' c_2) - \beta c_2, \\ \frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial t} &= -\frac{\lambda}{2} q''(\rho_0) (2c_1^2 + 2c_2 c_2^2 + \bar{\rho}'^2) - \lambda q'(\rho_0) \bar{\rho}', \quad \bar{\rho}' \approx -\frac{q''(\rho_0)}{q'(\rho_0)} c_1^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При этом $c_1(t)$ есть ведущий, основной по порядку член [1], [2], [3], α , β , V , V_1 дается (3.4), c_2 , $\bar{\rho}' \sim c_1^2$, поэтому $\frac{\partial c_2}{\partial t} \approx 0$, как и в [1], [3], и $\frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial t} \approx 0$.

При $\bar{\rho}' = 0$ уравнения для c_1 и c_2 в (4.3) переходят в уравнения из [1], [2], [3], [5].

С учетом указанных порядков можно получить уточненную за счет учета $\bar{\rho}'$ систему

$$c_2 = \frac{\frac{V}{2} c_1^2}{\beta + \bar{V}_1 c_1^2}, \quad \bar{V}_1 = V_1 + \frac{3V^2}{\beta}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = \alpha c_1 - \frac{V_1}{2} c_1^3 + \frac{V^2}{2} \frac{c_1^3}{\beta + \bar{V}_1 c_1^2} - \frac{V_1}{4} c_1^5 \frac{V^2}{(\beta + \bar{V}_1 c_1^2)^2} - \frac{3V^2}{\beta} c_1^3, \quad (4.5)$$

причем, как кратко сказано в [8], полученные уравнения (4.4) и (4.5) уточняют результаты [1], [2], [3], [5], где было в (4.2) положено $\bar{\rho}' = 0$, наличием последнего слагаемого правой

части (4.5) и отделим \bar{V}_1 в знаменателях от значения V_1 . Тогда все исследования в §3 вблизи точки бифуркации $\alpha = 0$ можно повторить, решая для стационарного устойчивого состояния, где $\frac{\partial c_1}{\partial t} = 0$ – кубическое уравнение для $I = c_1^2$, получаемое из (4.5), и в силу малости c_1 аналогично §3 заменяем его на квадратное уравнение для I , дающее основные характеристики фазового перехода, как показано в §3 в случае решения с $\bar{\rho}' = 0$ фазового перехода первого рода с разрывом.

Решение этого уравнения, упрощенное аналогично §3 с учетом малости α , будет

$$I = c_1^2, \quad I = \frac{\frac{5}{2} \frac{V^2}{\beta V_1} + \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{5}{2} \frac{V^2}{\beta V_1} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\bar{V}_1}{V_1} + \frac{11}{2} \frac{\bar{V}_1 V^2}{V_1^2 \beta} + \frac{1}{4} \frac{V^2}{\beta V_1}\right)}}{-2 \left(\frac{\bar{V}_1}{V_1} + \frac{11}{2} \frac{\bar{V}_1 V^2}{V_1^2 \beta} + \frac{1}{4} \frac{V^2}{\beta V_1}\right)} \cdot \frac{\beta}{V_1}, \quad (4.6)$$

где перед корнем квадратным знак $+$ опущен, поскольку $I \geq 0$.

Интересно отметить, что в отличие от (3.5), где также учитывалась малость α и кроме того малость $\frac{V^2}{\beta V_1} - 1$, в (4.6) при $\alpha = 0$, $I = 0$, в отличие от (3.5), где I_1 не равно нулю при $\alpha = 0$ и имеет место фазовый переход первого рода с разрывом I , здесь имеет место непрерывный фазовый переход второго рода от неустойчивого значения $I = 0$ в устойчивое стационарное значение I_1 , даваемое (4.6).

Разумеется решения §3 и §4 применимы ко всем трем указанным в §1 задачам, имеющим аналогичные рис. 1 из [4] графики для связи параметров в задачах полупроводников [1], [2], [3] и механики разрушения [6].

5. Синергетические исследования фазовых переходов к разрушению

Как было сказано в начале статьи, можно, учитывая универсальность процессов перехода от процесса роста и движения микро-, мезопор к макропорам, которые не зависят ни от материалов, ни от нагрузок [6], [7], использовать ту же модель кинематических волн (3.1) с учетом нелинейной релаксации, диффузии и флуктуаций, взяв в качестве модельного уравнения (3.1), фактически записанного для средней плотности ρ , поскольку в пористой среде для каркаса $\rho = \rho_1 (1 - f)$, где истинная плотность ρ_1 может быть принята постоянной, тогда в уравнении (3.1) вместо ρ может быть взята $f(x, t)$, т.е. пористость. Причем, для использования аналога кривой рис. 1, на основании зависимости скорости роста микропор $\frac{dl}{dt} = v$ от $\sqrt{\pi} \sqrt{l} \sigma$, $\sigma = const$ есть напряжение [22], можно видеть, что ее нисходящая часть, так же как и соответствующая кривая v от l качественно отражают кинематику, даваемую рис. 1. Причем, обозначая общее число пор в образце длины L_0 через N , можно записать $f = \frac{lN}{L_0}$, и для фиксированного N указанная кривая рис. 4 может давать связь $v(f)$, аналогично рис. 1.

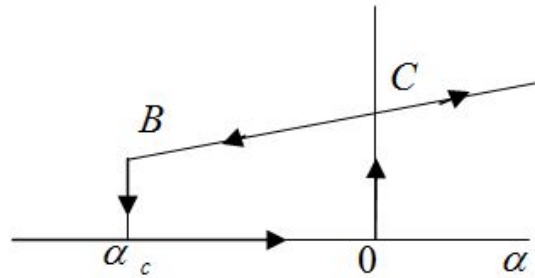


Рис. 4. Кривая зависимости скорости роста микропор от их размеров

Тогда, обозначая $f = f_0 + f'$, дающее число пор на единицу длины, можно прямо использовать в обобщенной кинематической модели движения пор уравнение (3.1), заменяя в релаксационных слагаемых $q(\rho)$ на $v(f)$, ρ' на f' .

И все выводы §3 не меняются, включая еще решение (3.5), где $I = c_1^2$, $f' = c_1 e^{i(kx - kv_0 t)} + k.c.$ – стационарная устойчивая точка, вблизи которой происходит переход к макроскопическому разлому, имеет характер плоской волны с постоянной амплитудой, как было сказано в §3, зависящей по существу от одинаковых для всех процессов кинематических постоянных, и по (3.5), (4.6) можно определить процесс фазового перехода, приравняв f к критической величине.

Разумеется, при данном кинематическом подходе проще в качестве исходной переменной §3 ρ брать просто абсциссу рис.4 $\eta = \sigma\sqrt{\pi}\sqrt{l}$, $\eta = \sigma\sqrt{\frac{\pi N}{L_0}}\sqrt{f}$, $\sigma\sqrt{\frac{\pi N}{L_0}} = const$, и в (3.1) уже сделать замену ρ на η , ρ' на η' , $\eta = \eta_0 + \eta'$, $q(\rho)$ на $v(\eta)$ в релаксационных слагаемых, и в (3.1) заменять $q'(\rho_0)$, $q''(\rho_0)$, $q'''(\rho_0)$ на $v'(\eta_0)$, $v''(\eta_0)$, $v'''(\eta_0)$, а далее на нисходящей части кривой рис. 4 выбрать начальную точку η_0 и повторять рассуждения из §3 вплоть до получения критического значения f макроскопического разрушения.

Ранее [2] нами был предложен другой подход изучения указанного фазового перехода к макроразрушению использованием модели двухкомпонентной нелинейной среды Био [2], где твердый каркас содержит микропоры с жидкостью, причем в качестве аналога уравнения (3.1) для пористости взято выведенное эволюционное нелинейное уравнение для скорости частиц каркаса, через которую выражается возмущение f пористости.

Метод §3 может быть использован при исследовании имеющих прикладное значение для создания микроскопических размеров магнитных устройств хранения информации, фазовых переходов в сплаве $Fe_{1-f}Co_f$ из работы [23], где имеются на рис. 1 и рис. 5 кривые зависимости энергии β магнитной и одноионной анизотропии от концентрации f кобальта, аналогичные рис. 1 и рис. 4 настоящей статьи. Кстати, имеется и аналитическая зависимость $\beta(f)$ в виде полинома третьей степени, аналогичная релаксационным слагаемым в (3.1)'. Тогда, рассматривая пространственные временные процессы в указанных переходах, можно повторить уравнение (3.1), заменяя в нем в указанных релаксационных слагаемых $q(\rho)$ на $\beta(f)$ и в (3.1)' в соответствующих коэффициентах оставить в $\frac{\partial q}{\partial x}$ запись, как для §4, $q(\rho) = q(f)$, $q(f) = fv(f)$, v - характерная скорость. И решение (3.5), (3.9) позволит найти критическое значение f .

Те же подходы можно применить и к биохимической задаче об устойчивости процесса очищения аминокислот путем использования рис. 2 [24], т. е. кривой активности $\beta(f)$ $\frac{\text{МКМОЛЬ}}{\text{МИН}}$ фермента рН от концентрации $pH = f$ и замены в (3.1) $q(\rho)$ на $\beta(f)$.

Рассмотренная в настоящей работе основанная на кинематических волновых построениях, включая экспериментальные графики зависимостей основных параметров движения, типичные для изучения синергетических стохастических процессов при наличии также фазовых переходов универсальная модель может, в качестве одной из альтернатив, быть заменена на еще более простое исследование генерации и распространения микро-, мезо- и макроразломов в виде ударных волн при наличии двух фазовых состояний начального и конечного, подробное рассмотрение при этом соответствующей кривой Гюгонио с учетом возможных фазовых превращений дается на с. 185–193 из [8], а для проблемы фазового превращения нейтронной звезды в кварковую на указанных ударных волнах и соответствующих кривых связи плотности и давления с определением выделяемой энергии в [9]. Проведенные в статье исследования однотипных фазовых переходов первого рода в полупроводниках, движении транспорта с образованием затора и на встречах транспортных линий, а также при феноменологическом подходе переходов от микро- к макроразломам, при наличии соответствующих экспериментальных кривых вида (кривой рис. 1 из [4] и рис. 4 из [6]), на основании общей модели [1], [3], для аналогичной задачи движения транспорта, описанной упрощенной теорией нелинейных

кинематических волн [4], и соответственно для движения микропор можно применять к построению модели и к расчетам в задачах биологии, экономики [16], движения элементарных частиц в реакторах, кривых водоснабжения с изучением экстремальных областей.

6 . Приложение к экономике в динамике опционов

Уравнение для опционов, обобщающее на учет нелинейности известное линейное уравнение [26], приведено и решено в [5], [16], [27].

Это уравнение для опционов $u(x, t)$, т. е. денежных вариаций на рынке ценных бумаг [16],

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -ru - r \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.1)$$

имеет волновой характер с диффузией, где в [16] нами был добавлен нелинейный член $-yu$ в линейную скорость риска r и показано, что при аналитическом и численном решениях (5.1) с

конечными условиями $u(x, 0) = \begin{cases} x - c, & x > c \\ 0 & x < c \end{cases}$ при определенном выборе коэффициента γ

полученные таблицы опционов [5] упрощают линейное решение, значительно приближая его к опытным данным на рынке [28]. С другой стороны, можно изучать экономические экстремальные ситуации, рассматривая в рамках модели данной работы универсальным подходом §3, §4, исследуя экстремальные фазовые переходы от микро- к макросостояниям [29] и рассматривая в рамках кинематического подхода (3.1) уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda r(u) - r(u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + I(t) \quad (6.2)$$

с заменой декартовой координаты x на денежные выражения исходных данных, рассматривая в мировом масштабе основные явления, подобно рис. 4, с помощью построенного эмпирически рисунка, представляющего аномальное поведение $r(u)$ на нисходящей ветви, где и должны происходить микро- и макроэкономические переходы, и рассматривая основную для синергетики нелинейную приближенную формулу после точки бифуркации $u = u_0$,

$$r(u) = r(u_0) + r'(u_0)u' + \frac{1}{2}r''(u_0)u'^2 + \frac{1}{6}r'''(u_0)u'^3 \quad (6.3)$$

где $r(u_0)$ есть значение $r(u)$ вблизи точки бифуркации $u = u_0$, как и в §3, причем решение можно получить методом §3 плоских волн, как без учета свободного члена в виде (3.5), что соответствует фазовому переходу первого рода в устойчивое стационарное состояние, так и с учетом свободного члена в виде (3.14), что соответствует непрерывному фазовому переходу второго рода.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Хакен, Г.* Синергетика / Г. Хакен. – М. : Мир, 1980. – 405 с.
- [2] *Bagdov, A. G.* The application of nonlinear wave dynamics methods to examination of stochastic processes of Benar in horizontal layers of fluid, of semiconductors, of traffic flow and micro–macro transition in fracture mechanics. In collection. Problems of Mechanics of deformable body. Devoted to 90 anniversary of academician of NAS Armenia S. A. Ambartsumyan / A. G. Bagdov, Yu. S. Safaryan. – Yerevan, 2012. – P. 101–120.
- [3] *Nakamura, Ki-ichi.* Statistical Dynamics of the Gunn Instability near Threshold / Ki-ichi Nakamura // Journal of the Physical Society of Japan. – 1975. – Vol. 38. – N 1. – P. 46–50.
- [4] *Lighthill, M. J.* On kinematic waves on long crowded roads / M. J. Lighthill, G. B. Whitham // Proceed. Roy. Soc. A. – 1955. – Vol. 229. – N 1178. – P. 150–280.
- [5] *Bagdov, A. G.* Study of point and spatial processes by methods of wave dynamics (Investigation of linear and nonlinear processes) LAP (Lambert Academic Publishing) / A. G. Bagdov, G. Manukyan, Yu. S. Safaryan. – 2012. – 97 p.

- [6] *Ботвина, Л. Р.* Кинетика разрушения конструкционных материалов / Л. Р. Ботвина. – М. : Наука, 1989. – 230 с.
- [7] *Bratov, V. A.* Numerical simulations of dynamic phase transformations: brittle fracture / V. A. Bratov, N. F. Morozov, Y. N. Petrov // II Int. Conf. “Topical problems of continuum mechanics” Dilijan, Armenia, 2010. – P. 256–260.
- [8] *Ионов, В. Н.* Динамика разрушения деформируемого тела / В. Н. Ионов, В. В. Селиванов. – М. : Машиностроение, 1987. – 270 с.
- [9] *Григорян, С. С.* О природе наблюдаемых во Вселенной “Черных дыр” и динамике Вселенной / С. С. Григорян // Изв. Национальной академии наук Армении. Механика. – 2007. – Т. 60. – № 4. – С. 3–19.
- [10] *Герасимов, А. В.* Удар высокоскоростных элементов по оболочке с наполнителем / А. В. Герасимов, А. А. Коняев, С. В. Пашков // Материалы XVII международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. ВМСППС. – 2001. – С. 740–741.
- [11] *Ванцян, А. А.* Влияние электромагнитных полей и анизотропных свойств сред на динамические процессы в сплошных средах / А. А. Ванцян. – Ереван : Изд. НАН Армении, 2007. – 224 с.
- [12] *Багдоев, А. Г.* Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах / А. Г. Багдоев, В. И. Ерофеев, А. В. Шекоян. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 320 с.
- [13] *Багдоев, А. Г.* Решение некоторых нестационарных задач взаимодействия тел с упругими преградами / А. Г. Багдоев, А. Н. Мартirosян, Г. А. Саркисян // Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 3. – С. 75–84.
- [14] *Рахматулин, Х. А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сплошных сред / Х. А. Рахматулин // ПММ. – 1956. – Т. XX. – № 2. – С. 184–195.
- [15] *Нигматулин, Р. И.* Проблемы механики гетерогенных сред / Р. И. Нигматулин. – М. : Наука, 1978. – 336 с.
- [16] *Багдоев, А. Г.* Аналитические и численные исследования динамических процессов в экономике методами нелинейной волновой динамики / А. Г. Багдоев, С. В. Варданын, А. В. Варданын, Д. Р. Карапетян, Г. А. Мартirosян // Прикладная эконометрия. – 2009. – Т. 13. – № 1. – С. 50–69.
- [17] *Chu, C.* Needleman A. Void nucleation effects in biaxial stretched sheets / C. Chu, A. Needleman // J. Eng. Mater. Techn. – 1980. – Vol. 102. – P. 249–256.
- [18] *Кужуджанов, В. Н.* Численное моделирование деформирования повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. – М. : Московский физико-технический институт (государственный университет), 2008. – 214 с.
- [19] *Богомолов, А. А.* О модели поведения перколяционных кластеров в задачах распространения массовых эпидемий и пандемий / А. А. Богомолов, Ю. А. Шебеко // XVI между. конф. по вычис. механике ВМСППС IV. – Алушта. – 2009. – С. 138–139.
- [20] *Острик, А. В.* Численный анализ моделей нуклеации при фазовых переходах первого рода / А. В. Острик // XVI Между. конф. по вычислительной механике. ВМСППС. – Алушта. – 2009. – С. 559–560.
- [21] *Семенов, В. В.* Математическое моделирование динамики транспортных потоков в мегаполисе. Обзор. 2003. 45с.
- [22] *Браиловский, Н. О.* Моделирование транспортных систем / Н. О. Браиловский, В. И. Грановский. – М., 1978. – 124 с.
- [23] *Фридман, Ю. А.* Каскад фазовых переходов в монослое / Ю. А. Фридман, Ф. Н. Клевев, А. П. Войтенко // ФТТ. – 2011. – Т. 53. – № 4. – С. 696–704.
- [24] *Gevorgyan, G. K.* Purification and properties of D-Amino- Acid Oxidase from *Candida quilliermondii* НП-φ / G. K. Gevorgyan, M. A. Davtyan, A. A. Hambardzumyan // Докл. НАН РА. – 2012. – Т. 12. – № 2. – С. 200–206.

[25] Багдоев, А. Г. Кинематические нелинейные волновые подходы описания стохастических пространственных процессов в полупроводниках, движении транспорта и движении микропор в механике разрушения / А. Г. Багдоев // Сб. научных трудов международной конф. "Актуальные проблемы механики сплошной среды", посвященной 100-летию академика Н. Х. Арутюняна. – 2012. – № 1. – С. 109–112.

[26] *Black Fisher*. The pricing of options and corporative liabilities / Fisher Black, Myron Sholes // The journal of political Economy, 1973. – Vol. 81. – № 3.

[27] Багдоев, А. Г. Слабонелинейные волны в механике для сплошной среды и в модельных задачах / А. Г. Багдоев, С. В. Варданын, А. В. Варданын, Ю. С. Сафарян // Вестник Чувашского Педагогического Университета. Серия : Механика предельного состояния. – 2007. – № 3. – С. 32–52.

[28] *Ioffe, Mark* About Black-Sholes formula, volatility, implied volatility and mathematical statistics / Mark Ioffe // 866 United Nations Plaza, Suite 566. – New York. Режим доступа www.egartech.com.

[29] *Бурда, М.* Макроэкономика. Европейский текст / М. Бурда, Ч. Вишлош. – СПб., 1998. – 539 с.

Багдоев Александр Георгиевич,

член-корреспондент НАН Армении, главный научный сотрудник, доктор физико-математических наук, профессор, Институт механики НАН Армении, г. Ереван

Варданын Седрак Ваникович,

кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван

A. G. Bagdoyev, S. V. Vardanyan

KINEMATIC NONLINEAR WAVE TREATMENTS FOR DESCRIPTION OF STOCHASTIC SPACE PROCESSES IN SEMICONDUCTORS, TRAFFIC MOTION, MOTION OF MICRO PORES IN FRACTURE MECHANICS, MICRO-MACRO ECONOMICS

Institute of Mechanics of NAN Armenia

Abstract. Using universal kinematic nonlinear wave treatment, supplemented by similar experimental curves among two parameters, there are investigated phase transitions for Gunn instability in semiconductors, for traffic flow near bottleneck and in micro-meso pores motion to macroscopic fracture formation.

Keywords: compression, layer, ideal plasticity, transmitting anisotropy.

REFERENCES

- [1] *Haken, G.* Synergetics / G. Haken. – M. : Mir, 1980. – 405 p.
- [2] *Bagdoyev, A. G.* The application of nonlinear wave dynamics methods to examination of stochastic processes of Benar in horizontal layers of fluid, of semiconductors, of traffic flow and micro-macro transition in fracture mechanics. In collection. Problems of Mechanics of deformable body. Devoted to 90 anniversary of academician of NAS Armenia S. A. Ambartsumyan / A. G. Bagdoyev, Yu. S. Safaryan. – Yerevan, 2012. – P. 101–120.
- [3] *Nakamura, Ki-ichi.* Statistical Dynamics of the Gunn Instability near Threshold / Ki-ichi Nakamura // Journal of the Physical Society of Japan. – 1975. – Vol. 38. – N 1. – P. 46–50.
- [4] *Lighthill, M. J.* On kinematic waves on long crowded roads / M. J. Lighthill, G. B. Whitham // Proceed. Roy. Soc. A. – 1955. – Vol. 229. – N 1178. – P. 150–280.
- [5] *Bagdoyev, A. G.* Study of point and spatial processes by methods of wave dynamics (Investigation of linear and nonlinear processes) LAP (Lambert Academic Publishing) / A. G. Bagdoyev, G. Manukyan, Yu. S. Safaryan. – 2012. – 97 p.
- [6] *Botvina, L. R.* Kinetics of destruction of the constructional materials / L. R. Botvina. – M. : Nauka, 1989. – 230 p.
- [7] *Bratov, V. A.* Numerical simulations of dynamic phase transformations: brittle fracture / V. A. Bratov, N. F. Morozov, Y. N. Petrov // II Int. Conf. “Topical problems of continuum mechanics” Dilijan, Armenia, 2010. – P. 256–260.
- [8] *Ionov, V. N.* Dynamics of destruction of a deformable body / V. N. Ionov, V. V. Selivanov. – M. : Mechanical engineering, 1987. – 270 p.
- [9] *Grigoryan, S. S.* About the nature observed in the Universe “Black holes” and dynamics of the Universe / S. S. Grigoryan // Изв. Национальной академии наук Армении. Механика. – 2007. – Vol. 60. – № 4. – P. 3–19.
- [10] *Gerasimov, A. V.* Blow the vysokorostnykh of elements on to cover with filler / A. V. Gerasimov, A. A. Konyaev, S. V. Pashkov // Materials XVII of the international conference on the computing to mechanics and modern applied program systems. VMSPPS. – 2001. – P. 740–741.
- [11] *Wangqiang, A. A.* Influence of electromagnetic fields and anisotropic properties of environments on dynamic processes in continuous environments / A. A. Wangqiang. – Yerevan : Prod. NAN of Armenia, 2007. – 224 p.
- [12] *Bagdoyev, A. G.* Linear and nonlinear waves in dispersing continuous environments / A. G. Bagdoyev, V. I. Erofeev, A. V. Shekoyan. – M. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 320 p.

- [13] *Bagdоеv, A. G.* Solution of some non-stationary tasks interactions of bodies with elastic barriers / A. G. Bagdоеv, A. N. Martirosyan, G. A. Sargsyan // News of Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of a solid body. – 1978. – № 3. – P. 75–84.
- [14] *Rakhmatulin, Ch. A.* Fundamentals of gas dynamics interpenetrating movements of squeezed continuous environments / Ch. A. Rakhmatulin // Applied Mathematics and Mechanics. – 1956. – Vol. XX. – № 2. – P. 184–195.
- [15] *Nigmatulin, R. I.* Problems of mechanics of heterogeneous environments / R. I. Nigmatulin. – M. : Nauka, 1978. – 336 p.
- [16] *Bagdоеv, A. G.* Analytical and numerical researches dynamic processes in economy methods nonlinear the wave loudspeakers / A. G. Bagdоеv, S. V. Vardanyan, A. V. Vardanyan, D. R. Karapetyan, G. A. Martirosyan // Applied econometrics. – 2009. – Vol. 13. – № 1. – P. 50–69.
- [17] *Chu, C.* Needleman A. Void nucleation effects in biaxial stretched sheets / C. Chu, A. Needleman // J. Eng. Mater. Techn. – 1980. – Vol. 102. – P. 249–256.
- [18] *Kukudzhанov, V. N.* Numerical modeling deformations of damageability and destruction of inelastic materials and designs. - M.: Moscow physics - technical institute (state university), 2008. - 214 p.
- [19] *Mantises, A. A.* About behavior model the perkolyatsionnykh clusters in problems of distribution of mass epidemics and pandemics / A. A. Bogomolov, Yu. A. Shebeko // XVI international conference on computing mechanics of VMSPPS IV. – Alushta. – 2009. – P. 138–139.
- [20] *Ostrik, A. V.* the Numerical analysis of models of a nukleation at phase transitions of the first sort / A. V. Ostrik // XVI Mezhd. konf. on to computing mechanics. VMSPPS. – Alushta. – 2009. – P. 559–560.
- [21] *Semenov, V. V.* Mathematical modeling of dynamics transport streams in the megalopolis. Review. – 2003. – 45 p.
- [22] *Brailovsky, N. O.* Modelling of transport systems / N. O. Brailovsky, V. I. Granovsky. – M., 1978. – 124 p.
- [23] *Friedman, Yu. A.* The cascade of phase transitions in a monolayer / Yu. A. Friedman, T. N. Klevets, A. P. Voitenko // FTT. – 2011. – Vol. 53. – No. 4. – P. 696–704.
- [24] *Gevorgyan, G. K.* Purification and properties of D-Amino- Acid Oxidase from *Candida quilliermondii* III- φ / G. K. Gevorgyan, M. A. Davtyan, A. A. Hambardzumyan // Reports of NAN of Armenia. – 2012. – Vol. 12. – № 2. – P. 200–206.
- [25] *Bagdоеv, A. G.* The kinematic nonlinear wave approaches of the description of stochastic spatial processes in semiconductors, traffic and movement of micropores in mechanics destructions / A. G. Bagdоеv // Collection of scientific works international konf. "Actual problems of mechanics of the continuous environment", devoted To the 100 anniversary of the academician of N. X. Arutyunyan. – 2012. – № 1. – P. 109–112.
- [26] *Black Fisher.* The pricing of options and corporative liabilities / Fisher Black, Myron Sholes // The journal of political Economy, 1973. – Vol. 81. – № 3.
- [27] *Bagdоеv, A. G.* Poorly nonlinear waves in mechanics for the continuous environment and in model tasks / A. G. Bagdоеv, S. V. Варданян, A. V. Vardanyan, Yu. S. Safaryan // Messenger Chuvash Pedagogical University. Series: Mechanics limit states. – 2007. – № 3. – P. 32–52.
- [28] *Ioffe, Mark* About Black-Sholes formula, volatility, implied volatility and mathematical statistics / Mark Ioffe // 866 United Nations Plaza, Suite 566. – New York. Access mode www.egartech.com.
- [29] *Burda, M.* Macroeconomic. European text / M. Burda, Ch. Viplosh. – St. Petersburg, 1998. – 539 p.

Bagdov, Alexander Gueorgievich

*Corresponding member of NAN of Armenia, chief researcher, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor,
Institute of Mechanics of NAN Armenia, Yerevan*

Vardanyan, Sedrak Vanikovich

Candidate of Phys. & Math., Institute of Mechanics of NAN Armenia, Yerevan

А. В. Балашникова, Б. Г. Миронов, М. В. Михайлова

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО СЛОЯ, СЖАТОГО ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ ПРИ УСЛОВИИ ЗАВИСИМОСТИ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ ОТ СРЕДНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе рассматривается предельное состояние идеальнопластического анизотропного пространственного слоя, сжатого параллельными жесткими шероховатыми плитами. Предположим, что пространственный слой толщины $2h$ параллелен оси Ox и сдавливается параллельными шероховатыми плитами вдоль оси Oz .

Ключевые слова: сжатие, слой, идеальная пластичность, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Пусть условие пластичности зависит от среднего давления и имеет вид

$$A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + B(\sigma_y - \sigma_z)^2 + C(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(D\tau_{xy}^2 + E\tau_{yz}^2 + F\tau_{xz}^2) = 6(\kappa_0 + a\sigma)^2, \quad (1)$$

где $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} – компоненты напряжения, A , B , C , D , E , F – const.

Из условия экстремума функционала

$$\bar{A}_6 = \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + 2(\varepsilon_{xy} \tau_{xy} + \varepsilon_{yz} \tau_{yz} + \varepsilon_{xz} \tau_{xz}) - \lambda \left(A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + B(\sigma_y - \sigma_z)^2 + C(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(D\tau_{xy}^2 + E\tau_{yz}^2 + F\tau_{xz}^2) - 6(\kappa_0 + a\sigma)^2 \right)$$

определим соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 2\lambda(A(\sigma_x - \sigma_y) - C(\sigma_z - \sigma_x) - 2a(\kappa_0 + a\sigma)), \\ \varepsilon_y &= 2\lambda(B(\sigma_y - \sigma_z) - A(\sigma_x - \sigma_y) - 2a(\kappa_0 + a\sigma)), \\ \varepsilon_z &= 2\lambda(C(\sigma_z - \sigma_x) - B(\sigma_y - \sigma_z) - 2a(\kappa_0 + a\sigma)), \\ 2\varepsilon_{xy} &= 6\lambda D\tau_{xy}, \\ 2\varepsilon_{yz} &= 6\lambda E\tau_{yz}, \\ 2\varepsilon_{xz} &= 6\lambda F\tau_{xz}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ε_x , ε_y , ε_z , ε_{xy} , ε_{yz} , ε_{xz} – компоненты скорости деформации.

Из соотношений (1) найдем

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_y) &= \frac{B\varepsilon_x - C\varepsilon_y}{2\lambda\Delta} + 2a(\kappa_0 + a\sigma) \frac{B-C}{\Delta}, \\ (\sigma_y - \sigma_z) &= \frac{C\varepsilon_y - A\varepsilon_z}{2\lambda\Delta} + 2a(\kappa_0 + a\sigma) \frac{C-A}{\Delta}, \\ (\sigma_z - \sigma_x) &= \frac{B\varepsilon_x - A\varepsilon_z}{2\lambda\Delta} + 2a(\kappa_0 + a\sigma) \frac{B-A}{\Delta}, \\ \varepsilon &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = -4\lambda a(\kappa_0 + a\sigma), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Delta = AB + BC + CA$.

Поступила 04.03.2013

Подставив в (1) соотношения (2), (3), получим

$$\begin{aligned} & A \left(\frac{B\varepsilon_x - C\varepsilon_y}{\Delta} - \frac{\varepsilon(B-C)}{4\Delta} \right)^2 + B \left(\frac{C\varepsilon_y - A\varepsilon_z}{\Delta} - \frac{\varepsilon(C-A)}{4\Delta} \right)^2 + \\ & + C \left(\frac{A\varepsilon_z - B\varepsilon_x}{\Delta} - \frac{\varepsilon(A-B)}{4\Delta} \right)^2 + 6 \left(\frac{\varepsilon_{xy}^2}{9D} + \frac{\varepsilon_{yz}^2}{9E} + \frac{\varepsilon_{xz}^2}{9F} \right) = \frac{3}{32a^2} \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим $\xi = \kappa_0 + a\sigma$ или $\sigma = \frac{\xi - \kappa_0}{a}$.

Следуя идеям Гартмана, положим

$$\begin{aligned} \xi &= \kappa e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\ \sigma_x &= \bar{\sigma}_x e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)} + \mu, \\ \sigma_y &= \bar{\sigma}_y e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)} + \mu, \\ \sigma_z &= \bar{\sigma}_z e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)} + \mu, \\ \tau_{xy} &= \bar{\tau}_{xy} e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\ \tau_{yz} &= \bar{\tau}_{yz} e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\ \tau_{xz} &= \bar{\tau}_{xz} e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z = \frac{\kappa}{a}$, $\mu = -\frac{\kappa_0}{a}$, $\lambda_1, \lambda_2 - const$, $\lambda_3(z)$ – некоторая функция от z .

Используя предположение (5), условие пластичности (1) запишем в виде

$$A(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y)^2 + B(\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_z)^2 + C(\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_x)^2 + 6(D\bar{\tau}_{xy}^2 + E\bar{\tau}_{yz}^2 + F\bar{\tau}_{xz}^2) = 6\kappa^2. \quad (6)$$

Уравнения равновесия согласно (5) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial z} + \lambda_1 \bar{\sigma}_x + \lambda_2 \bar{\tau}_{xy} + \lambda'_3 \bar{\tau}_{xz} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial z} + \lambda_1 \bar{\tau}_{xy} + \lambda_2 \bar{\sigma}_y + \lambda'_3 \bar{\tau}_{yz} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} + \lambda_1 \bar{\tau}_{xy} + \lambda_2 \bar{\sigma}_y + \lambda'_3 \bar{\sigma}_z &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\lambda'_3 = \frac{d\lambda_3}{dz}$.

Положим

$$\begin{aligned} u &= U e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\ v &= V e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\ w &= W e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $U, V, W - const$.

Согласно формуле Коши из (8) следует

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lambda_1 U e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\ \varepsilon_y &= \lambda_2 V e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\ \varepsilon_z &= \lambda'_3 W e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\ 2\varepsilon_{xy} &= (\lambda_2 U + \lambda_1 V) e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\ 2\varepsilon_{yz} &= (\lambda'_3 V + \lambda_2 W) e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\ 2\varepsilon_{xy} &= (\lambda'_3 U + \lambda_1 W) e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}(z). \quad (10)$$

Тогда согласно (10) уравнения равновесия (7) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\tau}_{xz}}{dz} + \lambda_1 \bar{\sigma}_x + \lambda_2 \bar{\tau}_{xy} + \frac{d\lambda_3}{dz} \bar{\tau}_{xz} &= 0, \\ \frac{d\bar{\tau}_{yz}}{dz} + \lambda_1 \bar{\tau}_{xy} + \lambda_2 \bar{\sigma}_y + \frac{d\lambda_3}{dz} \bar{\tau}_{yz} &= 0, \\ \frac{d\bar{\sigma}_z}{dz} + \lambda_1 \bar{\tau}_{xz} + \lambda_2 \bar{\tau}_{yz} + \frac{d\lambda_3}{dz} \bar{\sigma}_z &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Из соотношений (1), (3) получим

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{(2A+C)(\sigma_x - \sigma_y) + (C-B)(\sigma_y - \sigma_z)} &= \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{(2B+C)(\sigma_y - \sigma_z) + (C-A)(\sigma_x - \sigma_y)} = \\ &= \frac{\varepsilon_z - \varepsilon_x}{-(A+2C)(\sigma_x - \sigma_y) - (2C+B)(\sigma_y - \sigma_z)} = \frac{\varepsilon_{xy}}{3D\tau_{xy}} = \frac{\varepsilon_{yz}}{3E\tau_{yz}} = \frac{\varepsilon_{xz}}{3F\tau_{xz}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно (5), (8) соотношения (11) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1 U - \lambda_2 V}{(2A+C)(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y) + (C-B)(\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_z)} &= \frac{\lambda_2 V - \lambda_3' W}{(2B+C)(\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_z) + (C-A)(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y)} = \\ &= \frac{\lambda_3' W - \lambda_1 U}{-(A+2C)(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y) - (2C+B)(\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_z)} = \frac{\lambda_2 U + \lambda_1 V}{6D\bar{\tau}_{xy}} = \frac{\lambda_3' V + \lambda_2 W}{6E\bar{\tau}_{yz}} = \frac{\lambda_3' U + \lambda_1 W}{6F\bar{\tau}_{xz}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из условия (4), (9) получим

$$\begin{aligned} &A \left(\frac{\lambda_1 UB - \lambda_2 VC}{\Delta} - \frac{B-C}{4\Delta} (\lambda_1 U + \lambda_2 V + \lambda_3' W) \right)^2 + \\ &B \left(\frac{\lambda_2 VC - \lambda_3' WA}{\Delta} - \frac{C-A}{4\Delta} (\lambda_1 U + \lambda_2 V + \lambda_3' W) \right)^2 + \\ &+ C \left(\frac{\lambda_3' WA - \lambda_1 UB}{\Delta} - \frac{A-B}{4\Delta} (\lambda_1 U + \lambda_2 V + \lambda_3' W) \right)^2 + \\ &+ \frac{(\lambda_2 U + \lambda_1 V)^2}{3D} + \frac{(\lambda_3' V + \lambda_2 W)^2}{3E} + \frac{(\lambda_3' U + \lambda_1 W)^2}{3F} = \frac{3}{32a^2} (\lambda_1 U + \lambda_2 V + \lambda_3' W)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Согласно (14) определим

$$\lambda_3' = \tilde{A}, \quad \lambda_3 = \tilde{A} \cdot z + \tilde{C}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{t_2 \pm \sqrt{t_2^2 + t_1 t_3}}{2t_1}, \quad t_1 = AW^2 \frac{(B-C)^2}{16\Delta^2} + W^2 A^2 \frac{B}{\Delta^2} + W^2 B \frac{(C-A)^2}{16\Delta^2} + W^2 + \\ &+ W^2 \frac{C}{\Delta^2} + W^2 \frac{C(A-B)}{16\Delta^2} + \frac{1}{3E} V^2 + \frac{1}{3F} U^2 - \frac{3}{32a^2} W^2, \\ t_2 &= \frac{AW(C-B)}{2\Delta} + \frac{AW(\lambda_1 U + \lambda_2 V)(B-C)^2}{8\Delta^2} - \frac{2\lambda_2 ACBW}{\Delta^2} - \\ &- \frac{BW(C-A)}{2\Delta} + 2W(\lambda_1 U + \lambda_2 V) + \frac{2\lambda_2 VW}{3E} + \frac{2\lambda_1 UW}{3F} - \frac{3W(\lambda_1 U + \lambda_2 V)}{16a^2}, \\ t_3 &= A \left(\frac{\lambda_1 UB - \lambda_2 VC}{\Delta} \right)^2 - \frac{A(B-C)}{2\Delta} (\lambda_1 U + \lambda_2 V) + A \frac{(B-C)^2}{16\Delta^2} (\lambda_1 U + \lambda_2 V)^2 + \\ &+ \frac{B}{\Delta^2} \lambda_2^2 V^2 C^2 - \frac{B(C-A)}{2\Delta} (\lambda_1 U + \lambda_2 V) + B \frac{(C-A)^2}{16\Delta^2} (\lambda_1 U + \lambda_2 V)^2 + \frac{C}{\Delta^2} \lambda_1^2 U^2 B^2 - \\ &- \frac{C(A-B)}{2\Delta} (\lambda_1 U + \lambda_2 V) + \frac{C(A-B)^2}{16\Delta^2} (\lambda_1 U + \lambda_2 V) + \frac{\lambda_2^2 W^2}{3E} + \frac{\lambda_1^2 U^2}{3F} - \\ &- \frac{3}{32a^2} (\lambda_1 U + \lambda_2 V)^2. \end{aligned}$$

Из соотношений (13) следует

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \bar{\sigma}_z + \frac{6F(R_1-1)(\lambda_1 U - \tilde{A}W)}{(R_1(A+2C) - (2C+B))(\tilde{A}U + \lambda_1 W)} \cdot \bar{\tau}_{xz}, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{\lambda_2 U + \lambda_1 V}{\tilde{A}U + \lambda_1 W} \cdot \frac{F}{D} \cdot \bar{\tau}_{xz} = \frac{\lambda_2 U + \lambda_1 V}{\tilde{A}V + \lambda_2 W} \cdot \frac{E}{D} \cdot \bar{\tau}_{yz}, \\ \bar{\sigma}_y &= \bar{\sigma}_z + \frac{6E \cdot (\tilde{A}W - \lambda_2 U)}{(R_1(A+2C) - (2C+B))(\tilde{A}V + \lambda_2 W)} \cdot \bar{\tau}_{yz}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$R_1 = \frac{(\lambda_1 U - \lambda_2 V)(2B+C) - (\lambda_2 V - \tilde{A}W)(C-B)}{(\lambda_1 U - \lambda_2 V)(C-A) - (\lambda_2 V - \tilde{A}W)(2A+C)}.$$

Из уравнения равновесия (13) и соотношений (16) найдем

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\tau}_{xz}}{dz} + \frac{6F(R_1-1)(\lambda_1 U - \tilde{A}W)}{(R_1(A+2C) - (2C+B))(\tilde{A}U + \lambda_1 W)} \cdot \bar{\tau}_{xz} + \lambda_1 \cdot \bar{\sigma}_z &= 0, \\ \frac{d\bar{\tau}_{yz}}{dz} + \frac{(\lambda_1 \lambda_2 UE + \lambda_1^2 VE + (\lambda_3')^2 VD + \lambda_2 \lambda_3' WD) \cdot (A+2B) + 6DE \cdot (\lambda_2^2 V + \lambda_2 \lambda_3' W)}{AV + \lambda_2 W} \cdot \bar{\tau}_{yz} + \\ &+ \lambda_2 \cdot \frac{2B+2C-A}{A+2B} \cdot \bar{\sigma}_z - 3\sigma \cdot \lambda_2 \cdot \frac{C-A}{A+2B} = 0, \\ \frac{d\bar{\sigma}_z}{dz} + \lambda_1 \bar{\tau}_{xz} + \lambda_2 \bar{\tau}_{yz} + \lambda_3' \bar{\sigma}_z &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Преобразовав систему (17), получим

$$\lambda_2 \cdot \frac{d\bar{\tau}_{xz}}{dz} - \lambda_1 \cdot \frac{d\bar{\tau}_{yz}}{dz} + \lambda_2 \cdot R_2 \cdot \bar{\tau}_{xz} - \lambda_1 \cdot R_1 \cdot \bar{\tau}_{yz} = 0, \quad (18)$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \frac{\lambda_3' V + \lambda_2 W}{\lambda_3' U + \lambda_1 W} \cdot \frac{F}{E} \cdot \bar{\tau}_{xz},$$

где

$$R_2 = \frac{6F(R_1-1)(\lambda_1^2 U - \lambda_1 \bar{A}W)}{(R_1(A+2C)-(2C+B))(\bar{A}U + \lambda_1 W)} + \frac{\lambda_2^2 U + \lambda_1 \lambda_2 V}{\bar{A}U + \lambda_1 W} \cdot \frac{F}{D} + \bar{A},$$

$$R_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 U + \lambda_1^2 V}{\bar{A}V + \lambda_2 W} \cdot \frac{E}{D} + \frac{6E(\bar{A}W - \lambda_1 U)}{(R_1(A+2C)-(2C+B))(\bar{A}V + \lambda_2 W)} + \bar{A}.$$

Из (18) найдем

$$\left(\lambda_2 U \bar{A}E - \lambda_1 V \bar{A}F \right) \frac{d\bar{\tau}_{xz}}{dz} = \left(\lambda_1 R_3 \cdot \frac{F}{E} \cdot \frac{\bar{A}V + \lambda_2 W}{\bar{A}U + \lambda_1 W} - \lambda_2 R_2 \right) \bar{\tau}_{xz}. \quad (19)$$

Согласно (19) получим

$$\frac{d\bar{\tau}_{xz}}{dz} = a_{13} \bar{\tau}_{xz},$$

где

$$a_{13} = \frac{\left(\lambda_1 R_3 \cdot \frac{F}{E} \cdot \frac{\bar{A}V + \lambda_2 W}{\bar{A}U + \lambda_1 W} - \lambda_2 R_2 \right)}{\left(\lambda_2 U \bar{A}E - \lambda_1 V \bar{A}F \right)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xz} &= b_{13} e^{a_{13}z}, \\ \bar{\tau}_{yz} &= b_{13} \cdot \frac{F}{E} \cdot \left(\frac{\bar{A}V + \lambda_2 W}{\bar{A}U + \lambda_1 W} \right) e^{a_{13}z}, \\ \frac{d\bar{\sigma}_z}{dz} + \bar{A}\bar{\sigma}_z &= -b_{13} \left(\lambda_1 - \lambda_2 \frac{F}{E} \frac{\bar{A}V + \lambda_2 W}{\bar{A}U + \lambda_1 W} \right) e^{a_{13}z}, \\ \bar{\sigma}_z &= -\frac{b_{13} \left(\lambda_1 - \lambda_2 \frac{F}{E} \frac{\bar{A}V + \lambda_2 W}{\bar{A}U + \lambda_1 W} \right)}{a_{13} + \bar{A}} e^{a_{13}z}, \\ \bar{\tau}_{xy} &= b_{13} \cdot \frac{F}{D} \cdot \frac{\lambda_2 U + \lambda_1 V}{\bar{A}U + \lambda_1 W} e^{a_{13}z}, \\ \bar{\sigma}_y &= -\frac{b_{13} e^{a_{13}z}}{(\bar{A}U + \lambda_1 W)} \left(\frac{E\lambda_1(\bar{A}U + \lambda_1 W) - \lambda_2 F(\bar{A}V + \lambda_2 W)}{E(a_{13} + \bar{A})} - \frac{6F \cdot (\bar{A}W - \lambda_2 U)}{(R_1(A+2C) - (2C+B))} \right), \\ \bar{\sigma}_x &= -\frac{b_{13} e^{a_{13}z}}{(\bar{A}U + \lambda_1 W)} \left(\frac{E\lambda_1(\bar{A}U + \lambda_1 W) - \lambda_2 F(\bar{A}V + \lambda_2 W)}{E(a_{13} + \bar{A})} + \frac{6F(R_1-1)(\lambda_1 U - \bar{A}W)}{(R_1(A+2C) - (2C+B))} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние слоя определено в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= - \left(\frac{E\lambda_1(\bar{A}U + \lambda_1 W) - \lambda_2 F(\bar{A}V + \lambda_2 W)}{E(a_{13} + \bar{A})} + \frac{6F(R_1-1)(\lambda_1 U - \bar{A}W)}{(R_1(A+2C) - (2C+B))} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{b_{13} e^{a_{13}z + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \bar{A} \cdot z + \bar{C}}}{(\bar{A}U + \lambda_1 W)} + \mu, \\ \sigma_y &= - \left(\frac{E\lambda_1(\bar{A}U + \lambda_1 W) - \lambda_2 F(\bar{A}V + \lambda_2 W)}{E(a_{13} + \bar{A})} - \frac{6F \cdot (\bar{A}W - \lambda_2 U)}{(R_1(A+2C) - (2C+B))} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{b_{13} e^{a_{13}z + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \bar{A} \cdot z + \bar{C}}}{(\bar{A}U + \lambda_1 W)} + \mu, \\ \sigma_z &= - \left(\lambda_1 - \lambda_2 \frac{F}{E} \frac{\bar{A}V + \lambda_2 W}{\bar{A}U + \lambda_1 W} \right) \frac{b_{13} e^{a_{13}z + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \bar{A} \cdot z + \bar{C}}}{a_{13} + \bar{A}} + \mu, \\ \tau_{xy} &= \frac{\lambda_2 U + \lambda_1 V}{\bar{A}U + \lambda_1 W} \cdot \frac{F b_{13} e^{a_{13}z + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \bar{A} \cdot z + \bar{C}}}{D}, \\ \tau_{yz} &= \left(\frac{\bar{A}V + \lambda_2 W}{\bar{A}U + \lambda_1 W} \right) \cdot \frac{F b_{13} e^{a_{13}z + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \bar{A} \cdot z + \bar{C}}}{E}, \quad \tau_{xz} = b_{13} e^{a_{13}z + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \bar{A} \cdot z + \bar{C}}, \\ u &= U e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \bar{A} \cdot z + \bar{C}}, \quad v = V e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \bar{A} \cdot z + \bar{C}}, \quad w = W e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \bar{A} \cdot z + \bar{C}}, \end{aligned}$$

где \bar{A} – определяется согласно (15).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Балашникова, А. В.* О сжатии идеальнопластического слоя жесткими шероховатыми плитами в случае трансляционной анизотропии / А. В. Балашникова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2011. – № 2 (10). – С. 115–118.

[2] *Максимова, Л. А.* О предельном состоянии слоя, сжатого шероховатыми плитами / Л. А. Максимова // ПММ. – 2000. – Т. 64. Вып. 6. – С. 1099–1104.

[3] *Максимова, Л. А.* О сжатии плиты из идеальнопластического анизотропного материала / Л. А. Максимова // Проблемы механики : сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М. : Физматлит, 2003. – С. 520–523.

Балашникова Анжелика Вениаминовна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: info3006@yandex.ru

Мионов Борис Гурьевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

Михайлова Марина Васильевна,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

A. V. Balashnikova, B. G. Mironov, M. V. Mihailova

ABOUT LIMITING A CONDITION OF A SPATIAL LAYER FROM AN IDEALNOPLASTICHESKY MATERIAL AT THE TRANSMITTING ANISOTROPY, COMPRESSED BY PARALLEL ROUGH PLATES

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. In work the limiting condition of a layer from an idealnoplastichesky material is considered at the transmitting anisotropy, compressed by parallel rough plates at not collinear directions of tangents of efforts. Statically definable conditions of the limiting condition, a generalizing condition of full plasticity are used.

Keywords: compression, layer, ideal plasticity, transmitting anisotropy.

REFERENCES

- [1] *Balashnikova, A. V.* About compression of an idealnoplastichesky layer by rigid rough plates in case of transmitting anisotropy / A. V. Balashnikova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit condition. – 2011. – No 2 (10). – P. 115–118.
- [2] *Maksimova, L. A.* About compression of layer by rough plates / L. A. Maksimova // PMM. – 2000. – Vol. 64. – No. 6. – P. 1099–1104.
- [3] *Maksimova, L. A.* About compression of plate from ideal-plastic anisotropy layer / L. A. Maksimova // Problems of mechanics : sb. st. on the 90th anniversary of Ishlinskiy A. – M. : Phizmatlit, 2003. – P. 520–523.

Balashnikova, Anshelika Veniaminovna

Postgraduate student, Departament of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Mihailova, Marina Vasilevna

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Е. А. Деревянных, Б. Г. Мионов

О ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ КЛИНА ПРИ ДЕЙСТВИИ РАВНОМЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ АНИЗОТРОПИИ ХИЛЛА

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В настоящей работе исследовано предельное состояние клина при действии равномерного давления в случае анизотропии Хилла. Задача нахождения предельной нагрузки клина при действии равномерного давления в случае трансляционной анизотропии рассмотрена в [1].

Ключевые слова: анизотропия, предельное состояние, предельная нагрузка, равномерное давление.

УДК: 539.374

Рассмотрим задачу нахождения предельной нагрузки клина при действии равномерного давления p , приложенного к правой грани. Остановимся на случае тупого клина с углом раствора $2\gamma > \frac{\pi}{2}$ (рис. 1). Материал клина предполагается анизотропным, однородным, жестко-пластическим.

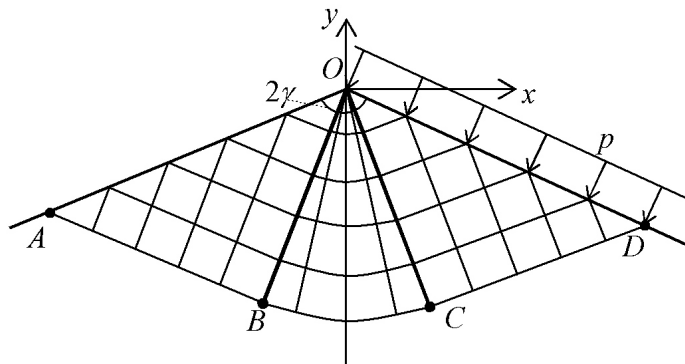


Рис. 1

Предельное условие при анизотропии Хилла для случая плоской деформации имеет вид

$$A \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + B \tau_{xz}^2 = k_0^2, \quad (1)$$

где σ_x , σ_y , τ_{xy} – компоненты напряжения в декартовой системе координат,

Поступила 08.06.2013

$$k_0 = \text{const.}$$

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам и отнесем все величины, имеющие размерность напряжений, к величине k_0 .

Тогда условие (1) запишется в виде

$$A \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + B \tau_{xz}^2 = 1. \quad (2)$$

Воспользуемся заменой:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p + k(\theta) \cos 2\theta, \\ \sigma_y &= p - k(\theta) \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = k(\theta) \sin 2\theta.$$

Согласно (5) условие пластичности (3) примет вид

$$k^2(\theta) (A \cos^2 2\theta + B \sin^2 2\theta) = 1$$

или

$$k^2(\theta) \left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right) = 1. \quad (4)$$

Обозначим

$$a = \frac{A+B}{2}, \quad b = \frac{A-B}{2}. \quad (5)$$

Используя (7), уравнение (6) запишется в виде

$$k^2(\theta) (a + b \cos 4\theta) = 1. \quad (6)$$

Так как $k(\theta) > 0$, то ограничимся решением уравнения (8)

$$k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{a + b \cos 4\theta}}. \quad (7)$$

Из (10) найдем

$$k'(\theta) = \frac{dk}{d\theta} = \frac{2 \sin 4\theta}{(a + b \cos 4\theta) \sqrt{a + b \cos 4\theta}}. \quad (8)$$

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно [2] из (5), (10), (11) характеристики системы уравнений (12) примут вид

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{1,2} = \frac{-k' \cos 2\theta - 2k \sin 2\theta \pm \sqrt{k'^2 + 4k^2}}{k' \sin 2\theta + 2k \cos 2\theta}, \quad (10)$$

где $k' = \frac{dk}{d\theta}$.

Характеристики (13) взаимно ортогональны. Соотношения вдоль характеристик, обобщающие интегралы Генки, имеют вид

$$\sigma \pm F(\theta) = \text{const}, \quad F(\theta) = \int \sqrt{k'^2 + 4k^2} d\theta. \quad (11)$$

В соотношениях (10), (11) следует использовать выражения $k(\theta)$, $k'(\theta)$, определяемые согласно (10), (11).

Используя (10), (11), функция $F(\theta)$ примет вид

$$F(\theta) = 2 \cdot \int \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 4\theta}}{(a + b \cos 4\theta) \sqrt{a + b \cos 4\theta}} d\theta. \quad (12)$$

Пределное давление определяется из соотношения

$$p^* = k \left(\gamma - \frac{3\pi}{4} \right) + k \left(-\gamma - \frac{\pi}{4} \right) + \int_{-\gamma - \frac{\pi}{4}}^{\gamma - \frac{3\pi}{4}} \sqrt{k'^2 + 4k^2} d\theta. \quad (13)$$

Согласно (12) из (18) найдем

$$p^* = k \left(\gamma - \frac{3\pi}{4} \right) + k \left(-\gamma - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cdot \int_{-\gamma - \frac{\pi}{4}}^{\gamma - \frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 4\theta}}{(a + b \cos 4\theta) \sqrt{a + b \cos 4\theta}} d\theta. \quad (14)$$

Используя (10), рассчитаем

$$k \left(\gamma - \frac{3\pi}{4} \right) = k \left(-\gamma - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{a - b \cos 4\theta}}. \quad (15)$$

Упростим функцию $F(\theta)$, из (12) следует

$$F(\theta) = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a}} \cdot \int \left(1 + \frac{2ab}{a^2 + b^2} \cos 4\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{b}{a} \cos 4\theta \right)^{-\frac{3}{2}} d\theta. \quad (16)$$

Учитывая обозначения (7), имеем

$$a > b, \quad \frac{b}{a} < 1, \quad a^2 + b^2 > 2ab, \quad \frac{2ab}{a^2 + b^2} < 1. \quad (17)$$

Используя разложение степенной функции в ряд Тейлора

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \quad (18)$$

согласно (22), (23) получим функцию $F(\theta)$ вида

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{2}{a} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a}} \cdot \int \left(1 + \frac{ab}{a^2 + b^2} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} \cos^2 4\theta + \frac{1}{2} \frac{a^3 b^3}{(a^2 + b^2)^3} \cos^3 4\theta + \dots \right) \cdot \\ &\quad \left(1 - \frac{3}{2} \frac{b}{a} \cos 4\theta + \frac{15}{8} \frac{b^2}{a^2} \cos^2 4\theta - \frac{35}{16} \frac{b^3}{a^3} \cos^3 4\theta + \dots \right) d\theta = \\ &= \frac{2}{a} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a}} \cdot \int \left(1 - \frac{1}{2} \frac{b(a^2 + 3b^2)}{a(a^2 + b^2)} \cos 4\theta + \frac{1}{8} \frac{b^2(15b^4 - a^2 + 18a^2 b^2)}{a^2(a^2 + b^2)^2} \cos^2 4\theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16} \frac{b^3(13a^6 - 33a^4 b^2 - 105a^2 b^4 - 35b^6)}{a^3(a^2 + b^2)^3} \cos^3 4\theta + \dots \right) d\theta. \quad (19) \end{aligned}$$

В выражении (25) ограничимся степенью $\cos^3 4\theta$ и рассчитаем

$$\begin{aligned}
F(\theta) &\approx \frac{2}{a} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}} \cdot \int_{-\gamma-\frac{\pi}{4}}^{\gamma-\frac{3}{4}\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{b(a^2+3b^2)}{a(a^2+b^2)} \cos 4\theta + \frac{1}{8} \frac{b^2(15b^4-a^2+18a^2b^2)}{a^2(a^2+b^2)^2} \cos^2 4\theta + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{16} \frac{b^3(13a^6-33a^4b^2-105a^2b^4-35b^6)}{a^3(a^2+b^2)^3} \cos^3 4\theta \right) d\theta = \\
&= \frac{2}{a} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}} \cdot \left(\theta - \frac{1}{8} \frac{b(a^2+3b^2)}{a(a^2+b^2)} \sin 4\theta + \frac{1}{16} \frac{b^2(15b^4-a^2+18a^2b^2)}{a^2(a^2+b^2)^2} \left(\theta + \frac{1}{8} \sin 8\theta \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \frac{b^3(13a^6-33a^4b^2-105a^2b^4-35b^6)}{a^3(a^2+b^2)^3} \left(\sin 4\theta - \frac{1}{3} \sin^3 4\theta \right) \right) \Big|_{-\gamma-\frac{\pi}{4}}^{\gamma-\frac{3}{4}\pi} = \\
&= \frac{2}{a} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}} \left(\frac{16a^6+31a^4b^2+34a^2b^4+15b^6}{16a^2(a^2+b^2)^2} \left(2\gamma - \frac{\pi}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{b(a^8+31a^6b^2-59a^4b^4-207a^2b^6-70b^8)}{4a^3(a^2+b^2)^3} \sin 4\gamma + \frac{b^2(15b^4-a^2+18a^2b^2)}{64a^2(a^2+b^2)^2} \sin 8\gamma + \right. \\
&\quad \left. - \frac{b^3(13a^6-33a^4b^2-105a^2b^4-35b^6)}{6a^3(a^2+b^2)^3} \sin^3 4\gamma. \right. \tag{20}
\end{aligned}$$

Используя (19), (21), из (27) получим предельное давление вида

$$\begin{aligned}
p^* &= \frac{2}{\sqrt{a-b \cos 4\theta}} + \frac{2}{a} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}} \left(\frac{16a^6+31a^4b^2+34a^2b^4+15b^6}{16a^2(a^2+b^2)^2} \left(2\gamma - \frac{\pi}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{b(a^8+31a^6b^2-59a^4b^4-207a^2b^6-70b^8)}{4a^3(a^2+b^2)^3} \sin 4\gamma + \frac{b^2(15b^4-a^2+18a^2b^2)}{64a^2(a^2+b^2)^2} \sin 8\gamma + \right. \\
&\quad \left. - \frac{b^3(13a^6-33a^4b^2-105a^2b^4-35b^6)}{6a^3(a^2+b^2)^3} \sin^3 4\gamma. \right. \tag{21}
\end{aligned}$$

В изотропном случае при $a = 1$, $b = 0$ предельное давление определяется соотношением

$$p^* = 2 \left(1 + 2\gamma - \frac{\pi}{2} \right), \tag{22}$$

совпадающим с известным классическим решением [3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Деревянных, Е. А.* О предельной нагрузке клина при действии равномерного давления в случае трансляционной анизотропии / Е. А. Деревянных // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. - № 2 (16). – С. 66-70.

[2] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.

[3] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов – М. : Наука, 1969. – 420 с.

Деревянных Евгения Анатольевна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru

Миронов Борис Гурьевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

E. A. Derevyannih, B. G. Mironov

**LIMIT CONDITION OF ANISOTROPIC PRISMATIC PIECEWISE
AND NON-UNIFORM CORES AT TORSION**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. In work the limit condition of piecewise and non-uniform prismatic cores is considered. It is supposed that components of a core are idealnoplastichesky, possessing independent limit conditions, with transmitting anisotropy.

Keywords: torsion, tension, fluidity limit, limiting condition, prismatic cores.

REFERENCES

[1] *Derevyannih, E. A.* About a maximum load of a wedge at action of uniform pressure in case of transmitting anisotropy / E. A. Derevyannih // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. - № 2 (12). – P. 66-70.

[2] *Ivlev, D. D.* The theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 231 p.

[3] *Kachanov, L. M.* Fundamentals of the theory of plasticity / L. M. Kachanov. – M. : Nauka, 1969. – 420 p.

Derevyannih, Evgeniya Anatolevna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

О. В. Дудко, А. А. Лаптева, А. В. Чигарев

К ПОСТРОЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ИЗОТРОПНО-УПРУГОЙ СРЕДЫ

Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН

Белорусский национальный технический университет

Аннотация. Обсуждается подход к моделированию разномодульных изотропно-упругих сред, основанный на использовании особого вида функции упругого потенциала в определяющих соотношениях. Предложены варианты моделей упругих сред с различным сопротивлением растяжению-сжатию или сдвигу в различных направлениях. В рамках описанных моделей указаны особенности постановки и решения краевых задач динамического деформирования разномодульной упругой среды с плоскими и сферическими поверхностями разрывов, не отмечаемые классической линейной теорией упругости.

Ключевые слова: динамическое деформирование, упругость, разномодульная среда, плоские волны, сферические волны.

УДК: 539.375

Введение. Линейная теория упругости описывает сплошную среду с идеализированными свойствами, в числе которых нормальная изотропия и линейная зависимость напряжений и деформаций. Такие предположения существенно упрощают процедуру решения краевых задач динамики деформирования. В то же время хорошо известно, что многие природные и конструкционные материалы обладают различным откликом на противоположные по знаку нагрузки. Такая особенность механических свойств, особенно присущая средам с микронеоднородностями и микронарушениями сплошности, приводит к возникновению не отмечаемых классической линейной теорией специфических эффектов (сильных и слабых разрывов деформаций, слоев постоянной плотности и т. д.). В механике деформируемого твердого тела существует целый ряд способов построения нелинейных математических моделей, которые позволяют учитывать сингулярность деформационного отклика среды путем постулирования особого вида зависимости между напряжениями и деформациями, оставаясь при этом в рамках формализма теории упругости [1], [2], [3], [4], [5]. В представленном исследовании для моделирования разномодульных свойств деформируемого материала использованы подходы, предложенные в [4], [5], что позволило получить ряд новых решений краевых задач динамического деформирования упругих сред с различным сопротивлением растяжению-сжатию или разнонаправленному сдвигу вдоль выбранной оси.

Определяющие соотношения модели динамического деформирования упругой среды запишем в адиабатическом приближении и предположении об отсутствии массовых сил. В случае эйлерова подхода к описанию движения точек среды система модельных соотношений в прямоугольной декартовой системе координат будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_j v_{i,j}), & v_i &= \dot{u}_i + v_j u_{i,j}, \\
\sigma_{ij} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), & 2\alpha_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}, \\
\frac{\rho}{\rho_0} &= \left(1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - \frac{4}{3}I_1^3 + 4I_1 I_2 - \frac{8}{3}I_3\right)^{1/2}, \\
I_1 &= \alpha_{kk}, & I_2 &= \alpha_{ik} \alpha_{kj}, & I_3 &= \alpha_{ik} \alpha_{ks} \alpha_{si},
\end{aligned} \tag{1}$$

где $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ – компоненты вектора перемещений и вектора скорости перемещений точек среды; σ_{ij} , α_{ij} – компоненты тензора напряжений Коши и тензора деформаций Альманси; ρ , ρ_0 – плотность среды в текущем и начальном состоянии; δ_{ij} – символ Кронекера; точкой обозначена частная производная по времени, индексом после запятой – частная производная по независимой пространственной переменной x_i . Если среда не допускает изменения объема ($\rho/\rho_0 = 1$), то зависимость компонент тензора напряжений от деформаций (формулу Мурнагана) в системе (1) следует записать в виде

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \tag{2}$$

где P – добавочное давление. Упругий потенциал W , замыкающий систему модельных соотношений (1), является эмпирической функцией состояния и задает механические свойства среды. В принятом адиабатическом приближении упругий потенциал W определяется только деформациями α_{ij} , а в случае изотропии среды – только первыми инвариантами тензора деформаций I_1, I_2, I_3 .

Варианты модели разномодульной изотропно-упругой среды. Возможность постулирования разномодульных свойств материала кусочно-линейными потенциалами напряжений и деформаций показана в работах [1], [2], [3]. В [4] для описания разномодульного поведения дилатирующих сред введено разложение упругого потенциала в ряд по сферическим функциям:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{\lambda}{2} J_1^2 + \mu J_2 - \nu J_1 J_2, \\
J_1 &= e_{kk}, & J_2 &= e_{ik} e_{ki}, & 2e_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i},
\end{aligned} \tag{3}$$

где λ , μ – параметры Ламэ, $\nu > 0$ – упругий модуль, отвечающий за эффект разномодульности.

В [7], [8] показано, что модель (5), обеспечивающая наличие сингулярности в точке свободного состояния пространства “напряжения – деформации”, приводит к качественному изменению способа распространения возмущений уже в простейшем случае одноосного деформирования с плоскими поверхностями разрывов. Вследствие приложения последовательных растягивающих и сжимающих усилий на границе полупространства даже в случае малых деформаций наряду с простыми разрывами в материале могут возникать ударные волны, покоящиеся и движущиеся слои недеформированной среды.

При исследовании сферических волн упругий потенциал (5) существенно усложняет определяющие соотношения модели вследствие нелинейной взаимосвязи объемных и сдвиговых деформаций. Это обстоятельство, не влияющее на решение плоских одномерных задач, проявляется при переходе к криволинейным координатам, поскольку не позволяет воспользоваться известными решениями одномерного уравнения движения, записанного для случая сферической симметрии. Устранить данное неудобство можно путем исключения эффекта дилатации из модельных соотношений. Воспользуемся способом, предложенным в [4], но вместо разложения по сферическим функциям дополним двухконстантный упругий потенциал классической линейной среды третьим слагаемым с модулем первого инварианта J_1 тензора малых деформаций:

$$W = \frac{\lambda}{2} J_1^2 + \mu J_2 - \nu J_1 |J_1|. \tag{4}$$

В прямоугольной декартовой системе координат при одноосных движениях точек среды ($u_1 = u(x, t)$, $u_2 = u_3 = 0$) упругий потенциал (6), так же, как и (5), позволяет записать уравнение движения в простой форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$c^2 = \rho^{-1} (\lambda + 2\mu - 2\nu \text{Sign}(\frac{\partial u}{\partial x})), \quad \text{Sign}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \partial u / \partial x > 0, \\ -1 & \text{при } \partial u / \partial x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

с фазовой скоростью $c = \sqrt{\rho^{-1} (\lambda + 2\mu + 2\nu)}$ в областях сжатия среды, $c = \sqrt{\rho^{-1} (\lambda + 2\mu - 2\nu)}$ при растяжении (значение $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ является особой точкой зависимости напряжений от деформаций). Свойства обобщенного решения уравнения движения, подобного (7), рассматривались в [6], где помимо разномодульной упругой среды изучались одномерные продольные движения частиц упругосыщучей среды, имеющей конечный модуль упругости при сжатии и не оказывающей сопротивления растягивающим усилиям.

При переходе к сферической симметрии ($u_r = u(r, t)$, $u_\varphi = u_\theta = 0$) функция (6) позволяет записать уравнение движения в удобном виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$c^2 = \rho^{-1} (\lambda + 2\mu - 2\nu \text{Sign}(J_1)), \quad \text{Sign}(J_1) = \begin{cases} 1 & \text{при } J_1 > 0, \\ -1 & \text{при } J_1 < 0, \end{cases} \quad (6)$$

сохранившем сферический потенциал в левой части равенства, что не может быть достигнуто в рамках модели, описанной в [4]. Так же, как и в уравнении (7), фазовая скорость c уравнения движения (8) может принимать различные значения в зависимости от характера протекающего процесса деформирования, но, в отличие от модели (5), здесь знак перед коэффициентом ν определяется не просто градиентом перемещений, а знаком первого инварианта $J_1 = \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r}$ в целом. Отсюда следует, что переход от состояния $J_1 > 0$ к состоянию $J_1 < 0$ (или наоборот) и возникновение сопровождающих такой переход специфических эффектов, присущих разномодульной среде, может достигаться при всевозможных соотношениях между значениями градиента $\frac{\partial u}{\partial r}$, перемещения u и радиуса r . Данное обстоятельство вносит в обобщенное решение краевых задач деформирования разномодульных сред со сферическими поверхностями разрывов дополнительные особенности. В [9] показано, что при нестационарном нагружении разномодульной упругой сферы в режиме “нагрузка – разгрузка” выход первого инварианта деформаций на нулевое значение происходит с запаздыванием относительно момента смены знака нагрузки на внешней границе. Вследствие такого воздействия помимо сходящейся волны сжатия (переднего фронта распространения граничных возмущений) в сфере образуется движущийся сферический слой материала с постоянной плотностью, в котором при $J_1 = 0$ могут присутствовать ненулевые деформации.

Если объектом исследования являются материалы с различным сопротивлением сдвигу в противоположных направлениях (например, волокнистые композиты, металлопрокат, материалы с памятью формы и т. п.), то при их моделировании целесообразно перенести акцент на изучение только деформаций изменения формы, полагая среду несжимаемой. Разномодульные механические свойства изотропной несжимаемой упругой среды определим упругим потенциалом W , в котором сингулярность деформационных свойств обеспечивается изменением значений констант материала в зависимости от знака деформаций. При этом примем, что лишь один упругий модуль, характеризующий реакцию среды на изменение формы, принимает различные значения при смене направления сдвига (аналог потенциала Муни [5]):

$$W = \alpha \epsilon + \beta^\pm \epsilon^2. \quad (7)$$

Знаки перед слагаемыми функции (10) выбраны так, чтобы упругие модули α , β были положительными. Первый упругий модуль α остается постоянным, второй упругий модуль

β^\pm меняет скачком свое значение при изменении направления сдвиговой нагрузки вдоль выбранной оси. Инварианты e , ε определяются главными значениями тензора деформаций e_i и имеют одинаковую степень малости по деформациям:

$$e = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3), \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{3}{2}\{(e_1 - e)^2 + (e_2 - e)^2 + (e_3 - e)^2\}}.$$

В случае одномерного сдвигового движения точек среды ($u_1 = u_3 = 0$, $u_2 = u_2(x_1, t)$) определяющие соотношения (1)-(3) с потенциалом (10) приводят к уравнению движения

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

со скоростью распространения сдвиговых возмущений $c = \sqrt{\rho^{-1}(\alpha/3 + 3\beta_2/2)}$ при $u_{2,1} < 0$, $c = \sqrt{\rho^{-1}(\alpha/3 + 3\beta_1/2)}$ при $u_{2,1} > 0$, особой точкой является равенство нулю компоненты $u_{2,1}$. Для определенности можно положить, что $\beta^\pm = \beta_1$ при сдвиге точек среды в отрицательном направлении оси x_2 , $\beta^\pm = \beta_2$ при сдвиге в положительном направлении выбранной оси и $\beta_2 > \beta_1$. В [10] показано, что моделирование различного отклика материала на сдвиги в противоположных направлениях за счет переменного модуля упругости в функции (10) приводит к результатам, подобным в [7], [8], [9], где разномодульность по объему определялась специальными функциями главных инвариантов деформаций при неизменных механических константах материала.

Заключение. Представленные здесь модели (6), (10) позволяют описывать разномодульное поведение материалов, не выходя за рамки малых деформаций. В этом случае напряжения оказываются кусочно-линейными функциями деформаций, что приводит к качественным отличиям обобщенных решений краевых задач динамики деформирования, получаемых не только в рамках линейной теории упругости, но и в нелинейных моделях упругих сред с нормальной изотропией.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* К построению теории упругости / Д. Д. Ивлев // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 138. – № 6. – С. 1321–1324.
- [2] *Буренин, А. А.* К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию / А. А. Буренин, В. М. Ярушина // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. статей к 75-летию Е. И. Шемякина / под ред. Д. Д. Ивлева и Н. Ф. Морозова. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – С. 100–106.
- [3] *Быковцев, Г. И.* Общие свойства уравнений нелинейной теории упругости при кусочно-линейных потенциалах / Г. И. Быковцев // Прикладная математика и механика. – 1996. – Т. 6. – Вып. 3. – С. 505–515.
- [4] *Мясников, В. П.* Уравнения теории упругости и условие текучести для сыпучих линейно дилатирующих сред / В. П. Мясников, А. И. Олейников // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 1984. – № 6. – С. 14–19.
- [5] *Лурье, А. И.* Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
- [6] *Маслов, В. П.* Общая теория решений уравнения движения разномодульной упругой среды / В. П. Маслов, П. П. Мосолов // ПММ. – 1985. – Т. 49. – Вып. 3. – С. 419–437.
- [7] *Дудко, О. В.* О распространении плоских ударных волн / О. В. Дудко, А. А. Лаптева, К. Т. Семенов // Дальневосточный математический журнал. – 2005. – Т. 6. – № 1–2. – С. 94–105.
- [8] *Дудко, О. В.* Особенности решения одномерных краевых задач динамического деформирования разномодульной упругой среды / О. В. Дудко // Математические модели и методы

механики сплошных сред : сб. научных трудов (к 60-летию А. А. Буренина). – Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, 2007. – С. 80–87.

[9] *Дудко, О. В.* О возникновении плоских и сферических волн в упругой среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию / О. В. Дудко, А. А. Лаптева, В. Е. Рагозина // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 4(14). – С. 147–155.

[10] *Дудко, О. В.* К распространению возмущений по несжимаемой упругой среде с разномодульным сопротивлением сдвигу / О. В. Дудко, А. А. Лаптева // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. – Т. XVI. – № 1(53). – С. 21–28.

Дудко Ольга Владимировна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики деформирования отдела механики деформируемого твердого тела, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток

e-mail: dudko@iacp.dvo.ru

Лаптева Анастасия Александровна,

младший научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики деформирования отдела механики деформируемого твердого тела, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток

e-mail: lanastal@mail.ru

Чигарев Анатолий Власович,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики, Белорусский национальный технический университет, г. Минск

e-mail: theormech@rambler.ru

O. V. Dudko, A. A. Lapteva, A. V. Chigarev

ABOUT LIMITING A CONDITION OF A SPATIAL LAYER FROM AN IDEALNOPLASTICHESKY MATERIAL AT THE TRANSMITTING ANISOTROPY, COMPRESSED BY PARALLEL ROUGH PLATES

Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS

Belarusian National Technical University

Abstract. In work the limiting condition of a layer from an idealnoplastichesky material is considered at the transmitting anisotropy, compressed by parallel rough plates at not collinear directions of tangents of efforts. Statically definable conditions of the limiting condition, a generalizing condition of full plasticity are used.

Keywords: compression, layer, ideal plasticity, transmitting anisotropy.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* To creation of the theory of elasticity / D. D. Ivlev // Reports of Academy of Sciences of the USSR. – 1961. – Vol. 138. – № 6. – P. 1321–1324.
- [2] *Burenin, A. A.* To modeling of deformation of materials, differently resisting to stretching and compression / A. A. Burenin, V. M. Yarushina // Mechanics problems deformable solid bodies and rocks: the collection of articles to the 75 anniversary E. I. Shemyakina / under the editorship of D. D. Ivleva and N. F. Morozova. – M. : Fizmatlit, 2006. – P. 100–106.
- [3] *Bykovtsev, G. I.* The general properties of the equations of the nonlinear theory of elasticity at the piecewise and linear potentials / G. I. Bykovtsev // Applied mathematics and mechanics. – 1996. – Vol. 6. – Issue 3. – P. 505–515.
- [4] *Myasnikov, V. P.* The equations of the theory of elasticity and a condition of fluidity for loose linearly dilatiruyushchikh of environments / V. P. Myasnikov, A. I. Oleynikov // The physics and technology problems of development of minerals. – 1984. – № 6. – P. 14–19.
- [5] *Lurye, A. I.* Nonlinear theory of elasticity / A. I. Lurye. – M. : Nauka, 1980. – 512 p.
- [6] *Maslov, V. P.* General theory of solutions of the equation of movement of raznomodulny elastic medium / V. P. Maslov, P. P. Mosolov // PMM. – 1985. – Vol. 49. – Issue 3. – P. 419–437.
- [7] *Dudko, O. V.* About distribution of flat shock waves / O. V. Dudko, A. A. Lapteva, K. T. Semenov // Far East mathematical magazine. – 2005. – Vol. 6. – № 1–2. – P. 94–105.
- [8] *Dudko, O. V.* Features of the solution of one-dimensional regional problems of the dynamic deformations of raznomodulny elastic medium / O. V. Dudko // The mathematical models and methods of mechanics of continuous environments: collection of scientific works (to the 60 anniversary A. A. Burenina). – Vladivostok : Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, 2007. – P. 80–87.
- [9] *Dudko, O. V.* About emergence of flat and spherical waves in elastic medium, differently resisting to stretching and compression / O. V. Dudko, A. A. Lapteva, V. E. Ragozina // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 4(14). – C. 147–155.
- [10] *Dudko, O. V.* To distribution of indignations on incompressible elastic medium with raznomodulny resistance to shift / O. V. Dudko, A. A. Lapteva // Siberian magazine of industrial mathematics. – 2013. – Vol. XVI. – № 1(53). – P. 21–28.

Dudko, Olga Vladimirovna

Senior Researcher, Ph.D., Laboratory of Nonlinear dynamics of deformation, Department of Mechanics of Deformable Solid, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok

Lapteva, Anastasia Alexandrovna

Junior Researcher, Laboratory of Nonlinear dynamics of deformation, Department of Mechanics of Deformable Solid, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok

Chigarev, Anatoliy Vlasovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of Theoretical Mechanics, Belarusian National Technical University, Minsk

**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ДВУХСЛОЙНОЙ
 ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
 ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ, В СЛУЧАЕ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ
 АНИЗОТРОПИИ**

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Рассматривается деформированное состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Материал предполагается упруго-идеальнопластическим, каждый слой обладает своими свойствами трансляционной анизотропии. Определены перемещения в упругой и пластической областях.

Ключевые слова: перемещение, упругость, пластичность, трансляционная анизотропия, труба, слой.

УДК: 539.375

Рассмотрим деформированное состояние двухслойной толстостенной трубы, соответствующей условиям предельного состояния

$$\left(\frac{\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}}{2}\right)^2 + \tau_{\rho\theta n}^2 - 2R_n \left(\frac{\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}}{2}\right) \cos(2\theta + \mu_n) - 2\tau_{\rho\theta n} R_n \sin(2\theta + \mu_n) + R_n^2 - K_n^2 = 0, \quad (1)$$

где

$$R_n = \sqrt{\left(\frac{k_{1n} - k_{2n}}{2}\right)^2 + k_{3n}^2}, \quad \frac{k_{1n} - k_{2n}}{2R_n} = \cos \mu_n, \quad \frac{k_{3n}}{R_n} = \sin \mu_n.$$

Будем считать материал несжимаемым, коэффициент Пуассона $\mu = \frac{1}{2}$.

Согласно [1] определим компоненты перемещения в нулевом приближении в упругой области

$$u_2^{(0)e} = \frac{1}{2(\beta^2 - 1)E} \left[\left(q - 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 2K_2 \ln \frac{\rho}{\alpha_2} \right) \rho + 3 \left(q - 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 2K_2 \ln \frac{\rho}{\alpha_2} \right) \frac{\alpha_3^2}{\rho} \right]. \quad (2)$$

Согласно [1] перемещения в упругой области определяются в виде

$$u_2^{(I)e} = \frac{\beta}{E} \left[-2(1 + \mu) \bar{C}_1 \frac{\rho}{\beta} + 2(1 + \mu) \bar{C}_2 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-3} - 4\mu \bar{C}_3 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^3 + 4\bar{C}_4 \frac{\beta}{\rho} \right] \times \\ \times (a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta) + \\ + \frac{\beta}{E} \left[-2(1 + \mu) \bar{C}_1 \frac{\rho}{\beta} + 2(1 + \mu) \bar{C}_2 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-3} - 4\mu \bar{C}_3 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^3 + 4\bar{C}_4 \frac{\beta}{\rho} \right] \times \\ \times (-a_2''' \sin 2\theta + b_2''' \cos 2\theta), \quad (3)$$

$$v_2^{(I)e} = \frac{\beta}{E} \left[2(1+\mu) \tilde{C}_1 \frac{\rho}{\beta} + 2(1+\mu) \tilde{C}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + (6+2\mu) \tilde{C}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + (-2+2\mu) \tilde{C}_4 \frac{\beta}{\rho} \right] \times \\ \times (a_2'' \sin 2\theta - b_2'' \cos 2\theta) + \\ + \frac{\beta}{E} \left[2(1+\mu) \bar{C}_1 \frac{\rho}{\beta} + 2(1+\mu) \bar{C}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + (6+2\mu) \bar{C}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + \right. \\ \left. + (-2+2\mu) \bar{C}_4 \frac{\beta}{\rho} \right] (a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta),$$

где

$$\beta = \alpha_3, \quad \tilde{C}_1 = \frac{-1+2\beta^2-\beta^{-4}}{6N}, \quad \tilde{C}_2 = \frac{-3+2\beta^2+\beta^4}{2N} \beta^{-4}, \quad \bar{C}_1 = \frac{4-4\beta^2}{4N}, \quad \bar{C}_2 = \frac{4\beta^2-4\beta^4}{12N} \beta^{-4}, \\ \tilde{C}_3 = \frac{-3+2\beta^{-2}+\beta^{-4}}{6N} \beta^2, \quad \tilde{C}_4 = \frac{-1+2\beta^{-2}-\beta^4}{2N} \beta^{-2}, \quad \bar{C}_3 = \frac{3-4\beta^{-2}+\beta^{-4}}{12N} \beta^2, \quad \bar{C}_4 = \frac{-1+\beta^4}{2N} \beta^{-2}.$$

В пластической области из (1) и ассоциированного закона течения найдем

$$\varepsilon_{\rho n}^p = \lambda_n \left[\frac{\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}}{2} - R_n' \cos(2\theta + \mu_n) \right], \\ \varepsilon_{\theta n}^p = -\varepsilon_{\rho n}^p, \\ \varepsilon_{\rho \theta n}^p = \lambda_n [\tau_{\rho \theta n} - R_n' \sin(2\theta + \mu_n)]. \quad (4)$$

Исключая величину λ_n из (6), получим

$$\frac{\varepsilon_{\rho \theta n}}{\varepsilon_{\rho n} - \varepsilon_{\theta n}} = \frac{\tau_{\rho \theta n} - R_n' \sin(2\theta + \mu_n)}{\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n} - 2R_n' \cos(2\theta + \mu_n)}. \quad (5)$$

В нулевом приближении уравнение несжимаемости имеет вид

$$\varepsilon_{\rho n}^{(0)} + \varepsilon_{\theta n}^{(0)} = 0. \quad (6)$$

Из (8) следует

$$\frac{du_n^{(0)}}{d\rho} + \frac{u_n^{(0)}}{\rho} = 0, \quad (7)$$

где $u^{(0)}$ – компонента перемещения вдоль радиуса ρ , компонента перемещения v^0 вдоль θ равна нулю: $v^0 = 0$.

Решение уравнения (10) имеет вид

$$u_n^{(0)} = \frac{C_n}{\rho}, \quad C_n - const. \quad (8)$$

Из условий сопряжения на границе слоев трубы

$$u_n^{(0)} = u_{n+1}^{(0)} \quad \text{при} \quad \rho = \alpha_n \quad (9)$$

и (11) найдем

$$C_n = C_{n+1}. \quad (10)$$

Согласно (13) перепишем выражение (11) в виде

$$u^{(0)} = \frac{C}{\rho}, \quad C - const, \quad (11)$$

справедливо для всех слоев трубы.

Из (15) получим

$$\varepsilon_{\rho}^{(0)} = \frac{du^{(0)}}{d\rho} = -\frac{C}{\rho^2}, \quad \varepsilon_{\theta}^0 = \frac{u^{(0)}}{\rho} = \frac{C}{\rho^2}. \quad (12)$$

Положим, что $\tau_{\rho\theta n}^{(0)} = \varepsilon_{\rho\theta n}^{(0)} = 0$.

Из (3), (15) получим компоненты перемещения во второй пластической области

$$u_2^{(0)p} = \frac{C}{\rho}, \quad v_2^{(0)p} = 0, \quad (13)$$

где

$$C = \frac{1}{2(\beta^2 - 1)E} \left[\left(q - 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 2K_2 \ln \frac{1}{\alpha_2} \right) + 3 \left(q - 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 2K_2 \ln \frac{1}{\alpha_2} \right) \alpha_3^2 \right].$$

Согласно (15) в первой пластической области компоненты перемещений имеют вид

$$u_1^{(0)p} = \frac{C}{\rho}, \quad v_1^{(0)p} = 0. \quad (14)$$

Для определения компонент перемещений в первом приближении используем уравнение несжимаемости

$$\varepsilon_{\rho n}^{(I)} + \varepsilon_{\theta n}^{(I)} = 0, \quad \varepsilon_{\rho n}^{(I)} = \frac{\partial u_n^{(I)}}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta n}^{(I)} = \frac{u_n^{(I)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_n^{(I)}}{\partial \theta}, \quad (15)$$

откуда

$$\frac{\partial u_n^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{u_n^{(I)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_n^{(I)}}{\partial \theta} = 0, \quad (16)$$

где $u_n^{(I)}$, $v_n^{(I)}$ – компоненты перемещения в первом приближении в n -м слое.

Из (7) получим линеаризованное соотношение

$$\left(\sigma_{\rho n}^{(0)} - \sigma_{\theta n}^{(0)} \right) \varepsilon_{\rho\theta n}^{(I)} = \left(\varepsilon_{\rho}^{(0)} - \varepsilon_{\theta}^{(0)} \right) \left[\tau_{\rho\theta n}^{(I)} - R'_n \sin(2\theta + \mu_n) \right]. \quad (17)$$

Имеет место

$$\varepsilon_{\rho\theta n}^{(I)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_n^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{v_n^{(I)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_n^{(I)}}{\partial \theta} \right). \quad (18)$$

Согласно (16), (23) уравнение (24) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_n^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{v_n^{(I)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_n^{(I)}}{\partial \theta} = \\ & = \frac{2C}{K_n \rho^2} R'_n \left\{ \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - 2 \right\} \sin(2\theta + \mu_n). \end{aligned} \quad (19)$$

Удовлетворим уравнение несжимаемости (22), полагая

$$u_n^{(I)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi'_n}{\partial \theta}, \quad v_n^{(I)} = \frac{\partial \psi'_n}{\partial \rho}. \quad (20)$$

Из (25), (27) получим

$$\begin{aligned} & \rho^2 \frac{\partial^2 \psi_n^{(1)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \psi_n^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \psi'_n}{\partial \theta^2} = \\ & = \frac{2C}{K_n} R'_n \left\{ \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - 2 \right\} \sin(2\theta + \mu_n). \end{aligned} \quad (21)$$

Решение уравнения (28) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения (28) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi'_n \text{ частн} &= \left(\frac{1}{\rho} [S_n \sin \omega + T_n \cos \omega] + Q_n \right) \sin(2\theta + \mu_n), \\ \omega &= \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (25), (29) найдем

$$D_{1n} = \frac{2C}{K_n} R'_n, \quad S_n = -\frac{\sqrt{3}\alpha_1 D_{1n}}{8}, \quad T_n = -\frac{\alpha_1 D_{1n}}{8}, \quad Q_n = \frac{-D_{1n}}{2}. \quad (23)$$

Из (27), (28) получим

$$\begin{aligned} u_n^{(I)} \text{ частн} &= -\frac{2}{\rho^2} \left(\left[S_n \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + T_n \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right] + Q_n \rho \right) \cos (2\theta + \mu_n), \\ v_n^{(I)} \text{ частн} &= -\frac{1}{\rho^2} \left[(S_n + T_n \sqrt{3}) \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (T_n - S_n \sqrt{3}) \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right] \sin (2\theta + \mu_n). \end{aligned} \quad (24)$$

Согласно (27) компоненты перемещений в пластической области, соответствующие решению однородного уравнения (28), имеют вид

$$\begin{aligned} u_{\text{н одн}}^{(I)p} &= -2 \left\{ \left[C_{11}^{(n)} \cos (\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12}^{(n)} \sin (\sqrt{3} \ln \rho) \right] \sin 2\theta - \right. \\ &\quad \left. - \left[C_{21}^{(n)} \cos (\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22}^{(n)} \sin (\sqrt{3} \ln \rho) \right] \cos 2\theta \right\}, \\ v_{\text{н одн}}^{(I)p} &= \left[C_{11}^{(n)} (\cos (\sqrt{3} \ln \rho) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln \rho)) + \right. \\ &\quad \left. + C_{12}^{(n)} (\sin (\sqrt{3} \ln \rho)) + \sqrt{3} \cos (\sqrt{3} \ln \rho) \right] \sin 2\theta + \\ &\quad \left[C_{21}^{(n)} (\cos (\sqrt{3} \ln \rho) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln \rho)) + \right. \\ &\quad \left. + C_{22}^{(n)} (\sin (\sqrt{3} \ln \rho)) + \sqrt{3} \cos (\sqrt{3} \ln \rho) \right] \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (25)$$

На упругопластической границе имеют место условия сопряжения

$$u_2^{(I)p} = u_2^{(I)e}, \quad v_2^{(I)p} = v_2^{(I)e} \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (26)$$

Из (5), (32)–(34) получим

$$\begin{aligned} C_{11}^{(2)} &= -\frac{B_1}{2} + \sin \mu_2 (S_2 \sin \omega_1 + T_2 \cos \omega_1 + Q_2), \\ C_{12}^{(2)} &= \frac{\sqrt{3}}{6} (B_1 - 2 \sin \mu_2 (S_2 \sin \omega_1 + T_2 \cos \omega_1 + Q_2) + \\ &\quad + 2 \cos \mu_2 (S_2 \sin \omega_1 + T_2 \cos \omega_1 - S_2 \sqrt{3} \cos \omega_1 + T_2 \sqrt{3} \sin \omega_1) + 2B_2), \\ C_{21}^{(2)} &= \frac{A_1}{2} + \cos \mu_2 (S_2 \sin \omega_1 + T_2 \cos \omega_1 + Q_2), \\ C_{12}^{(2)} &= -\frac{\sqrt{3}}{6} (A_1 + 2 \cos \mu_2 (S_2 \sin \omega_1 + T_2 \cos \omega_1 + Q_2) - \\ &\quad - 2 \sin \mu_2 (S_2 \sin \omega_1 + T_2 \cos \omega_1 - S_2 \sqrt{3} \cos \omega_1 - T_2 \sqrt{3} \sin \omega_1) - 2A_2), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{3} \ln \frac{1}{\alpha_1}, \\ A_1 &= \frac{\beta a_2''}{E} \left[-2(1+\mu) \tilde{C}_1 \beta^{-1} + 2(1+\mu) \tilde{C}_2 \beta^3 - 4\mu \tilde{C}_3 \beta^{-3} + 4\tilde{C}_4 \beta \right] + \\ &\quad + \frac{\beta b_2'''}{E} \left[-2(1+\mu) \bar{C}_1 \beta^{-1} + 2(1+\mu) \bar{C}_2 \beta^3 - 4\mu \bar{C}_3 \beta^{-3} + 4\bar{C}_4 \beta \right], \\ B_1 &= \frac{\beta b_2''}{E} \left[-2(1+\mu) \tilde{C}_1 \beta^{-1} + 2(1+\mu) \tilde{C}_2 \beta^3 - 4\mu \tilde{C}_3 \beta^{-3} + 4\tilde{C}_4 \beta \right] - \\ &\quad - \frac{\beta a_2'''}{E} \left[-2(1+\mu) \bar{C}_1 \beta^{-1} + 2(1+\mu) \bar{C}_2 \beta^3 - 4\mu \bar{C}_3 \beta^{-3} + 4\bar{C}_4 \beta \right], \\ A_2 &= -\frac{\beta b_2''}{E} \left[2(1+\mu) \tilde{C}_1 \beta^{-1} + 2(1+\mu) \tilde{C}_2 \beta^3 + (6+2\mu) \tilde{C}_3 \beta^{-3} + (-2+2\mu) \tilde{C}_4 \beta \right] + \\ &\quad + \frac{\beta a_2'''}{E} \left[2(1+\mu) \bar{C}_1 \beta^{-1} + 2(1+\mu) \bar{C}_2 \beta^3 + (6+2\mu) \bar{C}_3 \beta^{-3} + (-2+2\mu) \bar{C}_4 \beta \right], \\ B_2 &= \frac{\beta a_2''}{E} \left[2(1+\mu) \tilde{C}_1 \beta^{-1} + 2(1+\mu) \tilde{C}_2 \beta^3 + (6+2\mu) \tilde{C}_3 \beta^{-3} + (-2+2\mu) \tilde{C}_4 \beta \right] + \\ &\quad + \frac{\beta b_2'''}{E} \left[2(1+\mu) \bar{C}_1 \beta^{-1} + 2(1+\mu) \bar{C}_2 \beta^3 + (6+2\mu) \bar{C}_3 \beta^{-3} + (-2+2\mu) \bar{C}_4 \frac{\beta}{\rho} \right]. \end{aligned}$$

Согласно (5), (32)–(34) компоненты перемещений в первом приближении во втором слое определены.

Условия сопряжения компонент перемещений на границе слоев трубы имеют вид

$$u_2^{(I)p} = u_1^{(I)p}, \quad v_2^{(I)p} = v_1^{(I)p} \quad \text{при} \quad \rho = \alpha_2. \quad (28)$$

Из (32)–(28) определим коэффициенты $C_{11}^{(1)}$, $C_{12}^{(1)}$, $C_{21}^{(1)}$, $C_{22}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} C_{11}^{(1)} &= \frac{\sqrt{3}}{6} (\sin \omega_2 (H_1 - N_1 + 2H_2 - 2N_2) + \sqrt{3} \cos \omega_2 (H_1 - N_1)), \\ C_{12}^{(1)} &= -\frac{\sqrt{3}}{6} (\sqrt{3} \sin \omega_2 (-H_1 + N_1) + \sqrt{3} \cos \omega_2 (H_1 - N_1 + 2H_2 - 2N_2)), \\ C_{21}^{(1)} &= -\frac{\sqrt{3}}{6} (\sin \omega_2 (L_1 - M_1 + 2M_2 - 2L_2) + \sqrt{3} \cos \omega_2 (L_1 - M_1)), \\ C_{22}^{(1)} &= \frac{\sqrt{3}}{6} (\sqrt{3} \sin \omega_2 (-L_1 + M_1) + \sqrt{3} \cos \omega_2 (L_1 - M_1 + 2M_2 - 2L_2)), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= 2C_{21}^{(2)} \cos \omega_2 + 2C_{22}^{(2)} \sin \omega_2 - 2 \cos \mu_2 \frac{S_2 \sin \omega_3 + T_2 \cos \omega_3 + Q_2 \alpha_2}{\alpha_2^2}, \\ N_1 &= -2C_{11}^{(2)} \cos \omega_2 - 2C_{12}^{(2)} \sin \omega_2 + 2 \sin \mu_2 \frac{S_2 \sin \omega_3 + T_2 \cos \omega_3 + Q_2 \alpha_2}{\alpha_2^2}, \\ M_2 &= C_{21}^{(2)} \cos \omega_2 - \sqrt{3} \sin \omega_2 + C_{22}^{(2)} \sin \omega_2 + \sqrt{3} \cos \omega_2 - \\ &\quad - \sin \mu_2 \frac{S_2 \sin \omega_3 + T_2 \cos \omega_3 - S_2 \sqrt{3} \cos \omega_3 + T_2 \sqrt{3} \sin \omega_3}{\alpha_2^2}, \\ N_2 &= C_{11}^{(2)} \cos \omega_2 - \sqrt{3} \sin \omega_2 + C_{12}^{(2)} \sin \omega_2 + \sqrt{3} \cos \omega_2 - \\ &\quad - \cos \mu_2 \frac{S_2 \sin \omega_3 + T_2 \cos \omega_3 - S_2 \sqrt{3} \cos \omega_3 + T_2 \sqrt{3} \sin \omega_3}{\alpha_2^2}, \\ L_1 &= -2 \cos \mu_1 \frac{S_1 \sin \omega_3 + T_1 \cos \omega_3 + Q_1 \alpha_2}{\alpha_2^2}, \quad H_1 = 2 \sin \mu_1 \frac{S_1 \sin \omega_3 + T_1 \cos \omega_3 + Q_1 \alpha_2}{\alpha_2^2}, \\ L_2 &= -\sin \mu_1 \frac{S_1 \sin \omega_3 + T_1 \cos \omega_3 - S_1 \sqrt{3} \cos \omega_3 + T_1 \sqrt{3} \sin \omega_3}{\alpha_2^2}, \\ H_2 &= -\cos \mu_1 \frac{S_1 \sin \omega_3 + T_1 \cos \omega_3 - S_1 \sqrt{3} \cos \omega_3 + T_1 \sqrt{3} \sin \omega_3}{\alpha_2^2}, \\ \omega_2 &= \sqrt{3} \ln \alpha_2, \quad \omega_3 = \sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Согласно (32), (33), (28), (29) компоненты перемещений в первом слое в первом приближении определены.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

[2] *Ивлев, Д. А.* О предельном состоянии слоистых круговых цилиндров из анизотропного материала под действием внутреннего давления / Д. А. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2010. – № 2 (66). – С. 57–63.

[3] *Фоминых, С. О.* Упругопластическое состояние толстостенной трубы при взаимодействии различных видов пластической анизотропии / С. О. Фоминых // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 201–216.

Кержаев Александр Петрович,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: alex_kerg@mail.ru

A. P. Kerzhaev

ABOUT DEFINITION OF MOVINGS IN THE TWO-LAYER THICK-WALLED PIPE BEING UNDER THE INFLUENCE OF INTERNAL PRESSURE IN CASE OF TRANSMITTING ANISOTROPY

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The deformed state of the two-layer thick-walled pipe being under the influence of internal pressure is considered. The material is supposed elastoplastic, each layer possesses the properties of transmitting anisotropy. Movings in elastic and plastic areas are defined.

Keywords: moving, elasticity, plasticity, transmitting anisotropy, pipe, layer.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* Perturbation method in the theory of elastic-plastic body / D.D.Ivlev, L.V.Ershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p.
- [2] *Ivlev, D. A.* The limit state of layered circular cylinders of anisotropic material under internal pressure / D. A. Ivlev // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Line : Mechanics of definable state. – 2010. – No. 2 (66). – P. 57–63.
- [3] *Fominykh, S. O.* Elastoplastic state of thick-walled pipe between the different types of plastic anisotropy / S. O. Fominykh // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Line : Mechanics of definable state. – 2011. – No. 1 (9). – P. 201–216.

Kerzhaev, Alexandr Petrovich

Postgraduate student, Departament of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

А. П. Кержаев

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХСЛОЙНОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ, В СЛУЧАЕ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Рассматривается упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Предполагается, что каждый слой обладает своими свойствами трансляционной анизотропии. Определено напряженное состояние трубы, найдена граница между упругой и пластической областями.

Ключевые слова: напряжение, упругость, пластичность, трансляционная анизотропия, труба, слой.

УДК: 539.375

Рассмотрим двухслойную толстостенную трубу, находящуюся под действием внутреннего давления p (рис. 1).

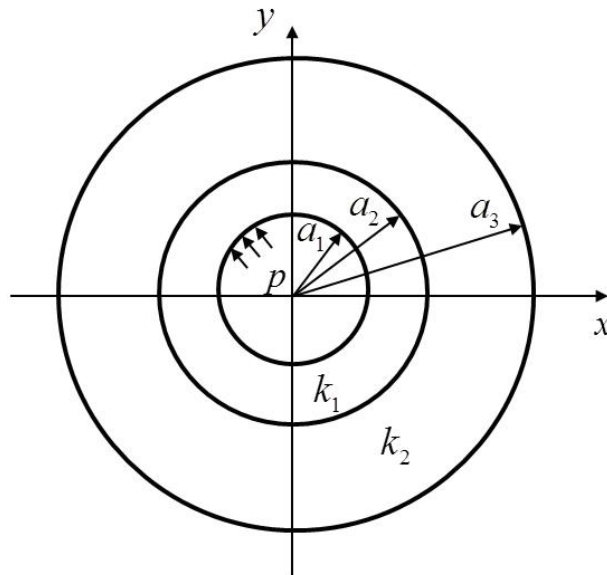


Рис. 1. Двухслойная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления

Обозначим через a_1 , a_2 внутренний и внешний радиусы 1-го слоя, через a_2 , a_3 – внутренний и внешний радиусы 2-го слоя.

Условие пластичности для n -го слоя примем в виде

$$\left(\frac{\sigma_{xn} - \sigma_{yn}}{2} - \frac{k_{1n} - k_{2n}}{2} \right)^2 + (\tau_{xyn} - k_{3n}) = k_n^2, \quad (1)$$

$$k_{1n}, k_{2n}, k_{3n}, K_n - const, n = 1, 2,$$

где $\sigma_{xn}, \sigma_{yn}, \tau_{xyn}$ – компоненты напряжения в n -ом слое в декартовой системе координат x, y ; k_{1n}, k_{2n}, k_{3n} – константы анизотропии.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам: все компоненты напряжения отнесем к величине предела текучести k и обозначим

$$\frac{k_n}{k} = K_n, \quad \frac{p}{k} = q, \quad (2)$$

все величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу упругопластической зоны в нулевом приближении $\rho_s^{(0)}$ и обозначим:

$$\frac{a_n}{\rho_s^{(0)}} = \alpha_n, \quad \frac{r}{\rho_s^{(0)}} = \rho. \quad (3)$$

Используя связь между компонентами напряжения в декартовой системе координат x, y и компонентами напряжения в полярной системе координат ρ, θ в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (4)$$

согласно (3), (5) запишем соотношения (1) в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}}{2} \right)^2 + \tau_{\rho\theta n}^2 - 2R_n \left(\frac{\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}}{2} \right) \cos(2\theta + \mu_n) - \\ - 2\tau_{\rho\theta n} R_n \sin(2\theta + \mu_n) + R_n^2 - K_n^2 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$R_n = \sqrt{\left(\frac{k_{1n} - k_{2n}}{2} \right)^2 + k_{3n}^2}, \quad \frac{k_{1n} - k_{2n}}{2R_n} = \cos \mu_n, \quad \frac{k_{3n}}{R_n} = \sin \mu_n.$$

Решение будем искать в виде разложения по малому безразмерному параметру δ :

$$\sigma_{ijn} = \sigma_{ijn}^{(0)} + \delta \sigma_{ijn}^{(I)}. \quad (6)$$

Предположим

$$k_{1n} = \delta k'_{1n}, \quad k_{2n} = \delta k'_{2n}, \quad k_{3n} = \delta k'_{3n}. \quad (7)$$

В нулевом исходном осесимметричном состоянии положим

$$\tau_{\rho\theta n}^{(0)} = 0. \quad (8)$$

Согласно (7), (11) имеем

$$\sigma_{\rho n}^{(0)} - \sigma_{\theta n}^{(0)} = \pm 2K_n. \quad (9)$$

При действии внутреннего давления $\sigma_{\theta n} > \sigma_{\rho n}$, поэтому в (12) имеет место нижний знак, соотношение (12) перепишем в виде

$$\sigma_{\theta n}^{(0)} = \sigma_{\rho n}^{(0)} + 2K_n. \quad (10)$$

Из уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_{\rho n}^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho n}^{(0)} - \sigma_{\theta n}^{(0)}}{\rho} = 0 \quad (11)$$

с учетом (13) имеем

$$\sigma_{\rho n}^{(0)} = 2K_n \ln \rho + C_n. \quad (12)$$

Из граничного условия на внутреннем контуре

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)} = -q \text{ при } \rho = \alpha_1, \quad (13)$$

а также из (10), (11), (12) найдем напряжения во внутренней пластической области I:

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = -q + 2K_1 \ln \frac{\rho}{\alpha_1}, \quad \sigma_{\theta 1}^{(0)p} = -q + 2K_1 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_1}\right), \quad \tau_{\rho\theta 1}^{(0)p} = 0. \quad (14)$$

Из условий сопряжения решений

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = \sigma_{\rho 2}^{(0)p} \text{ при } \rho = \alpha_2, \quad (15)$$

а также из (12), (19), (21) получим напряжения во внешней пластической области II:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 2}^{(0)p} &= -q + 2K_2 \ln \frac{\rho}{\alpha_2} + 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \\ \sigma_{\theta 2}^{(0)p} &= -q + 2K_2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \end{aligned} \quad (16)$$

В упругой зоне решение будем искать в виде

$$\sigma_{\rho 2}^{(0)e} = A - \frac{B}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta 2}^{(0)p} = A + \frac{B}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta 2}^{(0)e} = 0. \quad (17)$$

На упругопластической границе имеют место условия сопряжения

$$\sigma_{\rho 2}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha_2} = \sigma_{\rho 2}^{(0)e} \Big|_{\rho=\alpha_2}, \quad \sigma_{\theta 2}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha_2} = \sigma_{\theta 2}^{(0)e} \Big|_{\rho=\alpha_2}. \quad (18)$$

Удовлетворяя граничному условию $\sigma_{\rho 2}^{(0)e} = 0$ при $\rho = \alpha_3$, получим

$$0 = A - \frac{B}{\alpha_3^2}. \quad (19)$$

Согласно (22)–(25) имеем

$$A = -q + K_2 (1 - 2 \ln \alpha_2) + 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad B = K_2. \quad (20)$$

Напряжения во внешней области II имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 2}^{(0)e} &= -q + K_2 (1 - 2 \ln \alpha_2) + 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{K_2}{\rho^2}, \\ \sigma_{\theta 2}^{(0)e} &= -q + K_2 (1 - 2 \ln \alpha_2) + 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta 2}^{(0)e} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Линеаризируя соотношение (7), учитывая (10), (11), (12), получим

$$\sigma_{\rho n}^{(I)} - \sigma_{\theta n}^{(I)} = 2R_n^{(I)} \cos(2\theta + \mu_n). \quad (22)$$

Согласно [1] из (29) найдем

$$\frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \theta^2} = -2R_n^{(I)} \cos(2\theta + \mu_n). \quad (23)$$

Решение уравнения (31) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$\Phi_n^{(I)} = \Phi_n^{(I)}_{\text{одн}} + \Phi_n^{(I)}_{\text{частн}}. \quad (24)$$

Из (31) однородное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (25)$$

Согласно [1] получим

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(I)}_{\text{одн}} = & \rho \left[C_{11}^{(n)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12}^{(n)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right] \cos 2\theta + \\ & + \rho \left[C_{21}^{(n)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22}^{(n)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (26)$$

Частное решение неоднородного уравнения (32) имеет вид

$$\Phi_n^{(I)}_{\text{частн}} = -\frac{1}{2} \rho^2 R'_n \cos(2\theta + \mu_n). \quad (27)$$

Из (32), (34), (35) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho n}^{(I)p} = & \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{11}^{(n)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12}^{(n)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{12}^{(n)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{11}^{(n)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \cos 2\theta + \\ & + \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{21}^{(n)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22}^{(n)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{22}^{(n)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21}^{(n)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \sin 2\theta + R'_n \cos(2\theta + \mu_n), \\ \sigma_{\theta n}^{(I)p} = & \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{11}^{(n)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12}^{(n)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{12}^{(n)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{11}^{(n)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \cos 2\theta + \\ & + \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{21}^{(n)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22}^{(n)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{22}^{(n)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21}^{(n)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \sin 2\theta - R'_n \cos(2\theta + \mu_n), \\ \tau_{\rho\theta n}^{(I)p} = & 2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{12}^{(n)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{11}^{(n)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \sin 2\theta - \\ & - 2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{22}^{(n)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21}^{(n)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \cos 2\theta - R'_n \sin(2\theta + \mu_n). \end{aligned} \quad (28)$$

Граничные условия на внутреннем контуре трубы имеют вид

$$\sigma_{\rho 1}^{(I)p} = 0, \quad \tau_{\rho\theta 1}^{(I)p} = 0 \text{ при } \rho = \alpha_1. \quad (29)$$

Из (28), (29) следует

$$\begin{aligned} C_{11}^{(1)} = & \frac{R'_1 \alpha_1}{6} \cos \mu_1 \left(3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_1) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_1) \right), \\ C_{12}^{(1)} = & \frac{R'_1 \alpha_1}{6} \cos \mu_1 \left(\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_1) + 3 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_1) \right), \\ C_{21}^{(1)} = & -\frac{R'_1 \alpha_1}{6} \sin \mu_1 \left(3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_1) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_1) \right), \\ C_{22}^{(1)} = & -\frac{R'_1 \alpha_1}{6} \sin \mu_1 \left(\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_1) + 3 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_1) \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Результирующие напряжения во внутренней области I будут определяться из (28), (30):

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 1}^{(I)p} = & -R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - 1 \right\} \cos(2\theta + \mu_1), \\ \sigma_{\theta 1}^{(I)p} = & -R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) + 1 \right\} \cos(2\theta + \mu_1), \\ \tau_{\rho\theta 1}^{(I)p} = & R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - 1 \right\} \sin(2\theta + \mu_1). \end{aligned} \quad (31)$$

Условия сопряжения компонент напряжений на границе слоев трубы имеют вид

$$\sigma_{\rho 2}^{(I)P} = \sigma_{\rho 1}^{(I)P}, \quad \tau_{\rho \theta 2}^{(I)P} = \tau_{\rho \theta 1}^{(I)P} \quad \text{при} \quad \rho = \alpha_2. \quad (32)$$

Из (28), (31), (32) определим коэффициенты $C_{11}^{(2)}$, $C_{12}^{(2)}$, $C_{21}^{(2)}$, $C_{22}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} C_{11}^{(3)} &= -\frac{\sqrt{3}\alpha_2}{18} (2\sqrt{3}T_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - \sqrt{3}T_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + 3T_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2)), \\ C_{12}^{(3)} &= -\frac{\sqrt{3}\alpha_2}{18} (2\sqrt{3}T_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - 3T_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - \sqrt{3}T_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2)), \\ C_{21}^{(3)} &= -\frac{\sqrt{3}\alpha_2}{18} (2\sqrt{3}T_{12} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \sqrt{3}T_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - 3T_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2)), \\ C_{22}^{(3)} &= -\frac{\sqrt{3}\alpha_2}{18} (2\sqrt{3}T_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + 3T_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \sqrt{3}T_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2)), \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} T_{11} &= -R'_2 \cos \mu_2 - R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right) - 1 \right\} \cos \mu_1, \\ T_{12} &= R'_2 \sin \mu_2 + R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right) - 1 \right\} \sin \mu_1, \\ T_{21} &= R'_2 \cos \mu_2 + R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right) - 1 \right\} \cos \mu_1, \\ T_{22} &= R'_2 \sin \mu_2 + R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right) - 1 \right\} \sin \mu_1. \end{aligned}$$

Результирующие напряжения в пластической области во второй зоне имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 2}^{(I)P} &= \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{11}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{12}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{11}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \cos 2\theta + \\ &\quad + \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{21}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{22}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \sin 2\theta + R'_2 \cos(2\theta + \mu_2), \\ \sigma_{\theta 2}^{(I)P} &= \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{11}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{12}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{11}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \cos 2\theta + \\ &\quad + \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{21}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{22}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \sin 2\theta - R'_2 \cos(2\theta + \mu_2), \\ \tau_{\rho \theta 2}^{(I)P} &= 2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{12}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{11}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \sin 2\theta - \\ &\quad - 2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{22}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \cos 2\theta - R'_2 \sin(2\theta + \mu_2). \end{aligned} \quad (34)$$

На границе упругопластической зоны при $\rho = 1$ из (34) следует

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 2}^{(I)P} &= \left[\alpha_2 T_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \frac{2}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + R'_2 \cos \mu_2 \right] \cos 2\theta + \\ &\quad + \left[-\frac{2}{3} \sqrt{3} \alpha_2 T_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2 T_{12} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - R'_2 \sin \mu_2 \right] \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho \theta 2}^{(I)P} &= \left[\alpha_2 T_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \frac{2}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - R'_2 \sin \mu_2 \right] \cos 2\theta + \\ &\quad + \left[-\frac{2}{3} \sqrt{3} \alpha_2 T_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2 T_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - R'_2 \cos \mu_2 \right] \sin 2\theta. \end{aligned}$$

В дальнейшем запишем соотношения (35) в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho 2}^{(I)p} &= a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta, \\ \tau_{\rho \theta 2}^{(I)p} &= a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta,\end{aligned}\quad (36)$$

где

$$\begin{aligned}a_2'' &= \alpha_2 T_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \frac{2}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - \\ &\quad - \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + R_2' \cos \mu_2, \\ b_2'' &= -\frac{2}{3} \sqrt{3} \alpha_2 T_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \\ &\quad + \alpha_2 T_{12} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - R_2' \sin \mu_2, \\ a_2''' &= \alpha_2 T_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \frac{2}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \\ &\quad + \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - R_2' \sin \mu_2, \\ b_2''' &= -\frac{2}{3} \sqrt{3} \alpha_2 T_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \\ &\quad + \alpha_2 T_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - R_2' \cos \mu_2.\end{aligned}$$

Внешняя часть трубы свободна от усилий

$$\sigma_{\rho 2}^{(I)e} = 0, \quad \tau_{\rho \theta 2}^{(I)e} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha_3. \quad (37)$$

На упругопластической границе имеет место

$$\sigma_{\rho 2}^{(I)p} = \sigma_{\rho 2}^{(I)e}, \quad \tau_{\rho \theta 2}^{(I)p} = \tau_{\rho \theta 2}^{(I)e} \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (38)$$

Согласно [1], (36) определим компоненты напряжения в упругой области

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho 2}^{(I)e} &= \frac{1}{2N} [2(1 - 2\beta^2 + \beta^{-4}) + 2(3 - 2\beta^2 - \beta^4)\rho^{-4} + 4(1 - 2\beta^{-2} + \beta^4)\rho^{-2}] \times \\ &\quad \times (a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta) + \frac{1}{2N} [(-4 + 4\beta^2) + (4\beta^4 - 4\beta^2)\rho^{-4} + (4 - 4\beta^4)\rho^{-2}] \times \\ &\quad \times (-a_2''' \sin 2\theta + b_2''' \cos 2\theta), \\ \sigma_{\theta 2}^{(I)e} &= \frac{1}{2N} [2(-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}) + 2(-3 + 2\beta^2 + \beta^4)\rho^{-4} + 4(-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4})\rho^2] \times \\ &\quad \times (a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta) + \frac{1}{2N} [(4 - 4\beta^2) + (4\beta^2 - 4\beta^4)\rho^{-4} + (12 - 16\beta^{-2} + 4\beta^{-4})\rho^2] \times \\ &\quad \times (-a_2''' \sin 2\theta + b_2''' \cos 2\theta), \\ \tau_{\rho \theta 2}^{(I)e} &= \frac{1}{2N} [2(-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}) + 2(3 - 2\beta^2 - \beta^4)\rho^{-4} + \\ &\quad + 2(-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4})\rho^2 + 2(1 - 2\beta^{-2} + \beta^4)\rho^{-4}] \times (a_2'' \sin 2\theta - b_2'' \cos 2\theta) + \\ &\quad + \frac{1}{2N} [(4 - 4\beta^2) + (-4\beta^2 + 4\beta^4)\rho^{-4} + (6 - 8\beta^{-2} + 2\beta^{-4})\rho^2 + (2 - 2\beta^4)\rho^{-2}] \times \\ &\quad \times (a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta),\end{aligned}\quad (39)$$

Из (22), (28) найдем

$$\left. \frac{d\sigma_{\theta 2}^{(0)p}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = 2K_2, \quad \left. \frac{d\sigma_{\theta 2}^{(0)e}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = -2K_2,$$

тогда для определения упругопластической границы в первом приближении имеем

$$\rho_s^{(I)} = \left. \frac{\sigma_{\theta 2}^{(I)p} - \sigma_{\theta 2}^{(I)e}}{\frac{d\sigma_{\theta 2}^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_{\theta 2}^{(0)p}}{d\rho}} \right|_{\rho=1} = \frac{1}{4K_2} \left(\sigma_{\theta 2}^{(I)e} \Big|_{\rho=1} - \sigma_{\theta 2}^{(I)p} \Big|_{\rho=1} \right), \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta 2}^{(I) e} \Big|_{\rho=1} &= \frac{1}{2N} [2(-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}) + 2(-3 + 2\beta^2 + \beta^4) + 4(-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4})] \times \\ &\times (a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta) + \frac{1}{2N} [(4 - 4\beta^2) + (4\beta^2 - 4\beta^4) + (12 - 16\beta^{-2} + 4\beta^{-4})] \times \\ &\times (-a_2''' \sin 2\theta + b_2''' \cos 2\theta), \\ \sigma_{\theta 2}^{(I) p} \Big|_{\rho=1} &= [\alpha_2 T_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \frac{2}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - \\ &- \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + R_2' \cos \mu_2] \cos 2\theta + \\ &+ [-\frac{2}{3} \sqrt{3} \alpha_2 T_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \\ &+ \alpha_2 T_{12} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - R_2' \sin \mu_2] \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Компоненты напряжений в пластической области определены формулами (31), (34), в упругой области – формулами (39), упругопластическая граница определяется из соотношения (40).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [2] *Ивлев, Д. А.* О предельном состоянии слоистых круговых цилиндров из анизотропного материала под действием внутреннего давления / Д. А. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (66). – С. 57–63.
- [3] *Фоминых, С. О.* Упругопластическое состояние толстостенной трубы при взаимодействии различных видов пластической анизотропии / С. О. Фоминых // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 201–216.

Кержаев Александр Петрович,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: alex_kerg@mail.ru

A. P. Kerzhaev

**ELASTOPLASTIC STATE OF THE TWO-LAYER THICK-WALLED PIPE
BEING UNDER THE INFLUENCE OF INTERNAL PRESSURE IN CASE
TRANSMITTING ANISOTROPY**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The elastoplastic state of the two-layer thick-walled pipe being under the influence of internal pressure is considered. It is supposed that each layer possesses the properties of transmitting anisotropy. The pipe tension is defined, the border between elastic and plastic areas is found.

Keywords: tension, elasticity, plasticity, transmitting anisotropy, pipe, layer.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* Perturbation method in the theory of elastic-plastic body / D.D.Ivlev, L.V.Ershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p.
- [2] *Ivlev, D. A.* The limit state of layered circular cylinders of anisotropic material under internal pressure / D. A. Ivlev // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Line : Mechanics of definable state. – 2010. – No. 2 (66). – P. 57–63.
- [3] *Fominykh, S. O.* Elastoplastic state of thick-walled pipe between the different types of plastic anisotropy / S. O. Fominykh // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Line : Mechanics of definable state. – 2011. – No. 1 (9). – P. 201–216.

Kerzhaev, Alexandr Petrovich

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Р. Ф. Крупский, Е. В. Мурашкин, М. В. Полоник, Е. Е. Рогачев, О. В. Дудко

МЕХАНИЗМЫ СНИЖЕНИЯ УРОВНЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ БАЛКАХ ПРИ ИХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ

*Филиал Открытого акционерного общества
"Компания "Сухой" "Комсомольский-на-Амуре авиационный завод им. Ю. А. Гагарина"*

*Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН
Дальневосточный федеральный университет*

Аннотация. Рассматривается процесс формообразования заготовок различных сплавов в условиях ползучести при повышенной температуре. Представлены результаты численных экспериментов различных способов снижения уровня остаточных напряжений в металлических заготовках заданной конфигурации при их термомеханической обработке. Расчеты выполнены в системе MSC.Marc.

Ключевые слова: упругопластичность, вязкость, ползучесть, термомеханическое деформирование, формование заготовки.

УДК: 539.375

Введение. Современные технологии производства сложных механизмов и транспортных средств предъявляют повышенные требования к точности изготовления сложных по конфигурации деталей. Одним из технологических приемов является формование заготовки будущей детали путем медленного деформирования при температуре старения на оснастке заданной геометрии. На протекание процесса влияет множество факторов, таких как скорость деформирования, уровень нагрева, время выдержки при повышенной температуре и время остывания. Все эти показатели могут быть учтены путем внесения в модель свойства вязкости (ползучести) упругопластического материала экспериментально. Влияние вязкости (ползучести) на процессы накопления и релаксации остаточных напряжений обнаружены достаточно давно [1], [2], [3], [4], [5], [6]. В данной работе представлены результаты численных экспериментов различных путей снижения уровня остаточных напряжений в металлических заготовках заданной конфигурации при их термомеханической обработке. Расчеты выполнены в системе MSC.Marc.

Объект моделирования. Рассматривается металлическая балка, подвергаемая медленному термомеханическому деформированию под действием прессы с криволинейными пуансонами. Для численного моделирования процесса формообразования детали в условиях ползучести при повышенной температуре средствами пакета MSC.Marc построены конечно-элементные развертки заготовки, содержащие восьмиузловой изопараметрический шестигранный элемент.

Цель – получить на выходе деталь с заданными геометрическими и механическими параметрами. Технические требования к итоговой конфигурации изделия: заготовка не должна

сильно “отыграть” за счет проявления упругих свойств, не должны сильно поменяться механические параметры материала (упругие модули, предел текучести, усталостная прочность и т. д.), уровень остаточных напряжений должен попадать в допустимые пределы.

Моделирование процесса термомеханического деформирования заготовки выполнено в системе MSC.Marc с использованием его встроенных модулей: упругости, вязкости, ползучести.

Весь процесс поделен на расчетные временные этапы. Для каждого из них выбирается оптимальный модуль, позволяющий учитывать только те свойства материала, которые оказывают наибольшее влияние на данном этапе деформирования.

Рассматривались варианты процессов деформирования заготовки в прессе:

а) *механическое деформирование*, которое осуществляется только механическим способом без температурного воздействия;

б) *термомеханическое деформирование*, проходящее в двух режимах: “холодное” и “горячее”, которые различаются последовательностью нагревания и механического воздействия на заготовку.

Численные эксперименты проведены при следующих параметрах материала (табл. 1):

Таблица 1

Механические параметры материала

Температура ($^{\circ}\text{C}$)	20	165
Плотность ($\text{кг}/\text{м}^3$)	2850	2850
Модуль Юнга (10^8Па)	7200	6700
Коэффициент Пуассона	0,3	0,3
Предел текучести (10^8Па)	55	36,8786
Параметры ползучести		
A (Па) ⁿ	$4.10398 \cdot 10^{-9}$	$7.13171 \cdot 10^{-9}$
n	5,35821	9,21725
m	0,584924	0,606269

Процесс механического деформирования. Процесс механического деформирования осуществляется при комнатной температуре (20°) в следующей последовательности: механическая гибка заготовки в оснастке заданной геометрии; выдерживание заневоленной заготовки с целью релаксации накопленных напряжений и старение материала; снятие оснастки; выдерживание полученной детали при отсутствии механических воздействий для оценки величины упругого отклика.

Образец деформируется в условиях ползучести 6 ед. времени при комнатной температуре. Для численного моделирования данного этапа выбирается модель, учитывающая упругие и ползучие свойства материала (стандартные модули Marc). Заготовка приспособляется к нагружению только за счет проявления свойств ползучести. Численный эксперимент показал, что при таком режиме формирования в заготовке остается недопустимо высокий уровень остаточных напряжений в окрестности контакта заготовки и пуансона, где появляются зоны пластического течения.

После окончательного прилегания пуансонов пресса заготовка выдерживается при постоянной (комнатной) температуре 2 ед. времени для перераспределения напряжений. В результате уже в процессе выдержки остаточные напряжения снижаются с 75.19 (10^8Па) до 68.15 (10^8Па), достигая при этом максимальных значений.

Расчет третьего этапа механического деформирования – снятие оснастки – проводится в течение 0.2 ед. времени в рамках выбранной на предыдущих этапах модели (упругость, пластичность, ползучесть) с применением того же самого модуля.

Последний этап – выдерживание полученной детали при отсутствии механических воздействий – может привести к эволюции упругого отклика. С целью оценки его величины этот этап длится 1.8 ед. времени (рис. 1). В результате упругий отклик составил 30 мм.

Термомеханическое деформирование. Для выбора оптимального режима формообразования заготовок путем термомеханического деформирования проведены расчеты двух различных последовательностей – нагрузки/разгрузки и нагрева/охлаждения.

Режим 1 – процесс "холодного" деформирования – осуществляется по схеме: гибка заготовки при комнатной температуре (20°C); прогрев заневоленной заготовки до 165°C ; выдерживание заневоленной заготовки при 165°C с целью релаксации накопленных напряжений; охлаждение заневоленной заготовки до комнатной температуры; снятие оснастки; выдерживание полученной детали при отсутствии механических воздействий для оценки величины упругого отклика.

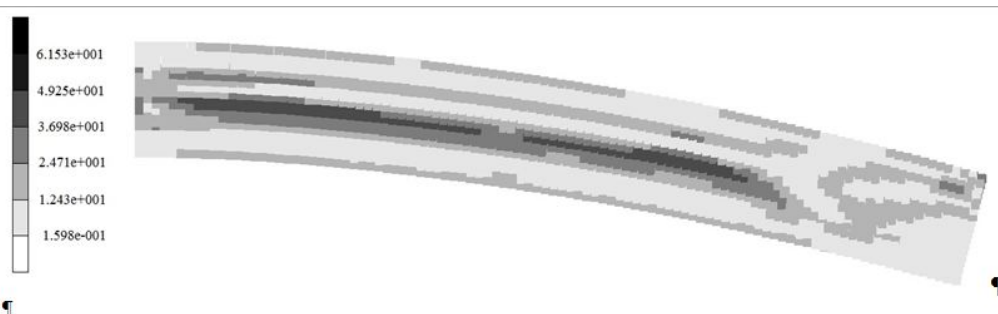


Рис. 1. Механическое деформирование по циклу: этап 1 – гибка заготовки в прессе при $T=20$ (время=6 ед.; модуль Юнга=7200; предел текучести=55), этап 2 – выдерживание заневоленной заготовки при $T=20$ (время=2 ед.; модуль Юнга=7200; предел текучести=55), этап 3 – медленное снятие оснастки при $T=20$ (время=0.2 ед.; модуль Юнга=7200; предел текучести=55), этап 4 – выдерживание полученной детали при отсутствии механических воздействий при $T=20$ (время=1.8 ед.; модуль Юнга=7200; предел текучести=55)

На первом этапе образец деформируется в условиях ползучести 6 ед. времени при комнатной температуре (20°C). Ввиду проявления свойств ползучести материал приспособляется к нагружению, выхода в пластическую область деформирования при этом не происходит, за исключением малой области в окрестности контакта заготовки и пуансона. Распределение остаточных напряжений после данного этапа аналогично первому этапу механического деформирования.

После окончательного прилегания пуансонов к заготовке начинается достаточно быстрый разогрев конструкции до $T=165^{\circ}\text{C}$ в течение 0.01 ед. времени (этап 2), вследствие чего происходит перераспределение деформаций и частичное снятие остаточных напряжений. Здесь учтено, что при изменении температуры меняются характеристики материала: *модуль Юнга, предел текучести* ($T=165^{\circ}\text{C}$, модуль Юнга=6700; предел текучести=36,8786).

Последующее выдерживание конструкции при постоянной температуре в течение 2 ед. времени (этап 3) за счет процесса старения приводит к еще большей релаксации напряжений.

По завершении процесса старения и релаксации напряжений заневоленная заготовка охлаждается до $T=20^{\circ}\text{C}$ (время=0.2 ед.; модуль Юнга=7200; предел текучести=55), после чего снимаются пуансоны (рис. 2). По результатам численных расчетов при таком пути деформирования упругий отклик составил 5 мм.

Режим 2 – процесс "горячего" деформирования – проводится по схеме: прогрев свободной заготовки до $T=165^{\circ}\text{C}$; гибка прогретой заготовки в условиях ползучести; выдерживание заневоленной заготовки при $T=165^{\circ}\text{C}$ с целью перераспределения накопленных



Рис. 2. Термомеханическое деформирование, режим 1: этап 1 – гибка заготовки в прессе при $T=20$ (время=6 ед.; модуль Юнга=7200; предел текучести=55), этап 2 – нагрев заневоленной заготовки до $T=165$ (время=0.01 ед.; модуль Юнга=6700; предел текучести=36,8786), этап 3 – выдерживание заневоленной заготовки при $T=165$ (время=2 ед.; модуль Юнга=6700; предел текучести=36,8786), этап 4 – охлаждение до $T=20$ (время=0.2 ед.; модуль Юнга=7200; предел текучести=55), этап 5 – медленное снятие пуансонов при $T=20$ (время=1.8 ед.; модуль Юнга=7200; предел текучести=55)

напряжений; охлаждение заневоленной заготовки до комнатной температуры ($T=20^{\circ}\text{C}$); снятие оснастки; выдерживание детали при отсутствии механических воздействий для оценки величины упругого отклика.

Заготовка предварительно прогревается до температуры старения $T=165^{\circ}\text{C}$ (этап 1), затем деформируется в условиях ползучести 6 ед. времени при этой же температуре (этап 2). Отмечается, что максимальное эквивалентное напряжение существенно меньше предела текучести материала.

После окончательного прилегания пуансонов заготовка выдерживается заневоленной при постоянной температуре $T = 165^{\circ}\text{C}$ в течение 2 ед. времени. При этом происходит еще большая релаксация напряжений.

По завершении процесса старения и релаксации напряжений снимаются пуансоны, после чего деталь охлаждается до $T=20^{\circ}\text{C}$ (рис. 3) путем выдержки в свободном состоянии в течение 1 ед. времени. По результатам численных расчетов при таком пути деформирования упругий отклик составил 2 мм.

Следует отметить, что использование такого процесса затруднено в реализации самой технологией процесса – необходимо поддерживать высокую температуру в процессе гибки. Также могут возникать нежелательные эффекты со стороны прогретого до высокой температуры пуансона. В представленных расчетах влияние прогретого пуансона до температуры материала не учитывалось.

Заключение. Проанализировав результаты численного счета, можно сделать следующие выводы о предпочтительном процессе деформирования образцов с целью выявления наименьшего итогового уровня остаточных напряжений и деформаций. Для этого необходимо: 1) прогреть заготовку в печи до температуры 165°C в свободном состоянии на оснастке; 2) медленно продеформировать его в условиях ползучести при повышенной температуре 165°C в режиме старения 6 ч с целью перераспределения и релаксации напряжений; 3) выдержать в заневоленном состоянии с целью релаксации напряжений в заготовке в течение 2 ч; 4) охладить оснастку с заготовкой до комнатной температуры; 5) снять заготовку и проверить на контрольной оснастке.

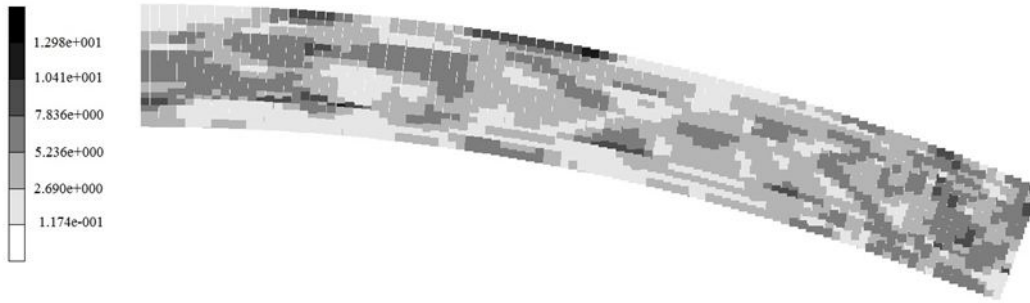


Рис. 3. Термомеханическое деформирование, режим 2: этап 1 – разогрев недеформированной заготовки от $T=20$ до $T=165$ (время=0.01 ед.; модуль Юнга=6700; предел текучести=36,8786), этап 2 – гибка прогретой до $T=165$ заготовки в условиях ползучести (время=6 ед.; модуль Юнга=6700; предел текучести=36,8786), этап 3 – выдерживание заневоленной заготовки в условиях ползучести при $T=165$; время=2 ед.; (модуль Юнга=6700; предел текучести=36,8786), этап 4 – снятие оснастки при $T=165$ (модуль Юнга=6700; предел текучести=36,8786), этапы 5, 6 – охлаждение освобожденной детали от $T=165$ до $T=20$ и одновременная выдержка в течение 1 ед. времени (модуль Юнга=7200; предел текучести=55)

Предложенный подход численного моделирования применим в процессах деформирования металлоизделий, когда уровень накопленных необратимых деформаций незначителен. При этом видим, что в продеформированных образцах возникают зоны пластического течения и концентраторы напряжений, а значит, не всегда есть возможность принять гипотезу о малости деформаций. Таким образом, возникает предложение рассматривать подобные процессы термомеханической обработки металлов в модели больших упругоползучеplastических деформаций. Общеизвестный подход здесь принципиально невозможен, и поэтому гипотетический выбор критерия разделения деформаций на составляющие порождает существующее многообразие в моделях упругопластических деформаций. Вторая, опять же по существу, кинематическая, проблема в построении модели больших упругопластических деформаций связана с определением тензора скоростей изменения необратимых деформаций. Данный тензор входит в определяющие соотношения математической модели; с его помощью формулируется ассоциированный закон пластического течения. Алгебраически разделяя посредством выбранного критерия деформации на обратимую и необратимую составляющие, сталкиваемся с задачей выбора объективной производной для определения скоростей пластических деформаций. Развиваемый на Дальнем Востоке вариант теории больших упругопластических деформаций [7], [8] основан на классическом формализме неравновесной термодинамики, когда обратимая и необратимая составляющие полных деформаций определяются дифференциальными уравнениями их изменения (переноса). Считаем, что применение такой математической модели процесса приобретения материалом формуемого изделия больших необратимых деформаций и микрповреждений, включая процесс разгрузки при снятии технологической оснастки с возможностью моделирования упругого отклика и формирующегося поля остаточных напряжений, позволит повысить точность численного описания исследуемого технологического процесса.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Малинин, Н. Н.* Технологические задачи теории ползучести / Н. Н. Малинин // Тез. докл. на III съезде по теор. и прикл. механике. – М., 1968. – 203 с.
 [2] *Копыский, Б. Д.* Применение явления ползучести при обработке давлением / Б. Д. Копыский // Вестник машиностроения. – 1997. – № 9. – С. 75–78.

[3] *Горев, Б. В.* К вопросу об использовании ползучести в технологии формования изделий / Б. В. Горев, Г. А. Раевская, О. В. Соснин // Динамика сплошной среды. – 1977. – Т. 38. – Вып. 30. – С. 141–145.

[4] *Поздеев, А. А.* Применение теории ползучести при обработке металлов давлением / А. А. Поздеев, В. И. Тарновский, В. И. Еремеев, В. С. Баакишвили. – М. : Металлургия, 1973. – 192 с.

[5] *Локощенко, А. М.* Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов / А. М. Локощенко. – М. : МГИУ, 2007. – 264 с.

[6] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.

[7] *Буренин, А. А.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Доклады академии наук. – 1996. – Т. 347. – № 2. – С. 199–201.

[8] *Бажин, А. А.* О ползучести и релаксации напряжений в окрестности микропоры в условиях гидростатического нагружения и разгрузки / А. А. Бажин, Е. В. Мурашкин // Доклады академии наук. – 2012. – Т. 445. – № 6. – С. 640–642.

Крупский Роман Фадеевич,

кандидат технических наук, филиал Открытого акционерного общества "Компания "Сухой" "Комсомольский-на-Амуре авиационный завод им. Ю. А. Гагарина", г. Комсомольск-на-Амуре

Мурашкин Евгений Валерьевич,

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории механики необратимого деформирования отдела механики деформируемого твердого тела, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток

e-mail: murashkin@dvo.ru

Полоник Марина Васильевна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики необратимого деформирования отдела механики деформируемого твердого тела, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток

e-mail: polonik@iacp.dvo.ru

Рогачев Егор Егорович,

магистр, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

e-mail: egor1805@mail.ru

Дудко Ольга Владимировна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики деформирования отдела механики деформируемого твердого тела, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток

e-mail: dudko@iacp.dvo.ru

R. F. Krupskiy, E. V. Murashkin, M. V. Polonik, E. E. Rogachev, O. V. Dudko

ABOUT LIMITING A CONDITION OF A SPATIAL LAYER FROM AN IDEALNOPLASTICHESKY MATERIAL AT THE TRANSMITTING ANISOTROPY, COMPRESSED BY PARALLEL ROUGH PLATES

"Sukhoi" Company (JSC) Branch - "Komsomolsk-on-Amur Aircraft Plant named after Y. A. Gagarin"

Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS

Far Eastern Federal University

Abstract. Shaping process is considered preparations of various alloys in the conditions of creep at the raised to temperature. Results of numerical experiments of various ways are presented decrease in level of residual tension in metal preparations of the set configurations at their thermomechanical processing. Calculations are executed in system MSC.Marc.

Keywords: elastic plasticity, viscosity, creep, thermomechanical deformation, preparation formation.

REFERENCES

- [1] *Malinin, N. N.* Technological tasks of the theory of creep / N. N. Malinin // Tezisa of reports at the III congress on theoretical and applied mechanics. – M., 1968. – 203 p.
- [2] *Kopysky, B. D.* Application of the phenomenon of creep when processing by pressure / B. D. Kopysky // Vestnik of mechanical engineering. – 1997. – № 9. – P. 75–78.
- [3] *Gorev, B. V.* To a question of creep use in technology of formation of products / B. V. Gorev, G. A. Rayevskaya, O. V. Sosnin // Dynamics of the continuous environment. – 1977. – Vol. 38. – Issue 30. – P. 141–145.
- [4] *Pozdeev, A. A.* Application of the theory of creep when processing metals by pressure / A. A. Pozdeev, V. I. Tarnovsky, V. I. Eremeev, V. S. Baakishvili. – M. : Metallurgy, 1973. – 192 p.
- [5] *Lokoshchenko, A. M.* Modeling of process of creep and long durability of metals / A. M. Lokoshchenko. – M. : MSIU, 2007. – 264 p.
- [6] *Kachanov, L. M.* Fundamentals of the theory of plasticity / L. M. Kachanov. – M. : Nauka, 1969. – 420 p.
- [7] *Burenin, A. A.* About one simple model for it is elastic the plastic environment at final deformations / A. A. Burenin, G. I. Bykovtsev, L. V. Kovtanyuk // Reports of academy of Sciences. – 1996. – Vol. 347. – № 2. – P. 199–201.
- [8] *Bazhin, A. A.* About creep and a relaxation of tension in a micropore vicinity in the conditions of hydrostatic loading and unloading / A. A. Bazhin, E. V. Murashkin // Reports of academy of Sciences. – 2012. – Vol. 445. – № 6. – P. 640–642.

Krupskiy, Roman Fadeevich

Ph.D., "Sukhoi" Company (JSC) Branch - "Komsomolsk-on-Amur Aircraft Plant named after Y. A. Gagarin", Komsomolsk-on-Amur

Murashkin, Evgenii Valeryevich

Researcher, Ph.D., Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok

Polonik, Marina Vasilyevna

Senior Researcher, Ph.D., Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok

Rogachev, Egor Egorovich

Postgraduate student, Far Eastern Federal University, Vladivostok

Dudko, Olga Vladimirovna

Senior Researcher, Ph.D., Laboratory of Nonlinear dynamics of deformation, Department of Mechanics of Deformable Solid, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok

Е. А. Гридасова, О. Н. Любимова, Н. Е. Путырин

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СТЕКЛОМЕТАЛЛОКОМПОЗИТНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ИСПЫТАНИИ НА ОСЕВОЕ СЖАТИЕ

Дальневосточный федеральный университет

Аннотация. Приводятся результаты исследования нового композиционного материала – стеклометаллокомпозитного стержня – при испытаниях на осевое сжатие. После анализа экспериментальных результатов испытаний образцов, изготовленных по разным технологическим режимам определен оптимальный режим. Получены сравнительные характеристики с подобными материалами, которые подтвердили предположение о более высокой прочности нового композита.

Ключевые слова: стеклометаллокомпозитный стержень, статическое сжатие, прочность.

УДК: 539.375

Достижение высокой прочности конструкций при умеренной массе является одним из важнейших условий при проектировании различных объектов техники. Одним из перспективных направлений является использование стеклометаллокомпозитов [3], [4]. Ряд решений в этом направлении предложил В. В. Пикуль, среди них – двух- или трехслойные оболочки, в которых основным материалом является стекло, обладающее высокой удельной прочностью, наружный или(и) внутренний слой которого выполнен из металла [5]. Такое конструктивное решение резко снижает опасность хрупких разрушений, особенно при ударных нагрузках. Но широкое использование стеклометаллокомпозитов затрудняется неотработанностью технологических процессов их изготовления и отсутствием прочностных характеристик образцов. До некоторого времени исследования по созданию нового композиционного материала носили преимущественно теоретический характер. При подробном анализе литературных источников экспериментальных исследований по предложенным способам упрочнения стекла в открытой печати, кроме работ [2], [6], не обнаружено. Поэтому экспериментальные и теоретические исследования нового перспективного материала представляются актуальными.

Прочность стекла на сжатие является наибольшей величиной по сравнению с изгибом и растяжением [6]. При сжатии силы, деформирующие образец, направлены вдоль его оси навстречу друг другу. Внутренние силы упругости при сжатии распределяются по сечению равномерно, так как материал во всех точках поперечного сечения испытывает одинаковую деформацию. Поэтому результаты испытаний на сжатие являлись одними из основополагающих факторов выбора технологического режима диффузионной сварки стекла с металлом. Испытания на сжатие проводились на серии образцов с геометрическими характеристиками, приведенными на рис. 1, из стекла (С49-1) и стали (СтЗсп), изготовленных по пяти режимам с варьированием времени диффузионной сварки: режим № 1 – $t = 40$ мин; режим № 2 – $t = 60$ мин; режим № 3 – $t = 80$ мин; режим № 4 – $t = 100$ мин; режим № 5 – $t = 120$ мин, температура и давление для всех режимов задавались одинаковыми: $T = 800^\circ \text{C}$, $P = 0,25 \text{ МПа}$.

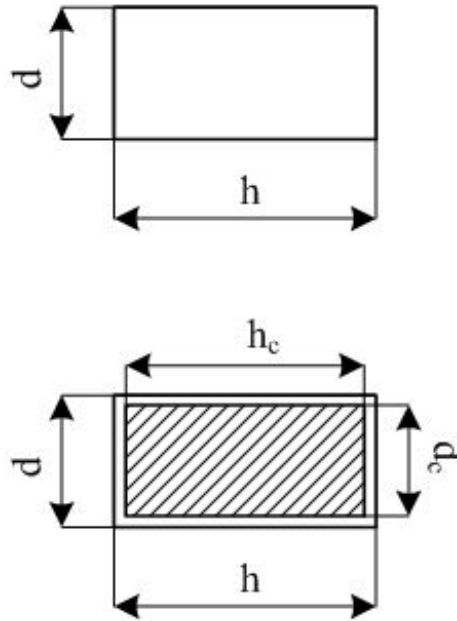


Рис. 1. Геометрические характеристики образцов на сжатие,
 $d = 10,0$ мм, $h = 30,0$ мм, $h_c = 27,0$ мм, $d_c = 7,5$ мм

Испытания проводились на универсальной испытательной машине УН-1000 кН (ШИМАДЗУ, Япония). Диаграммы сжатия экспериментальных образцов из стеклометаллокомпозита, изготовленных в режимах № 4, приведены на рис. 2, здесь 0 – F_{max} , 0 – F_B . В результате проводимых испытаний был выявлен "изломанный" характер кривой на интервале, нижняя граница которого – точка F_{max} , а верхняя граница – F_B , после которого происходило полное разрушение стекла. Наличие интервала $[F_{max}, F_B]$ можно объяснить постепенным разрушением стекла внутри образца. Статистическая обработка проводилась для значений F_{max} и F_B для вычисления доверительного интервала по каждому из режимов. Результаты статистической обработки приведены в табл. 1 и 2, здесь $F^{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n F^i}{n}$, $n = 10$ – число испытаний, $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (F^i - F^{cp})^2}{n-1}$ – несмещенная оценка дисперсии, $S = \sqrt{S}$, $\bar{S} = \frac{S}{\sqrt{n}}$. Доверительный интервал для среднего значения: $[F_{max}^{cp} - u_p \cdot \bar{S}, F_{max}^{cp} + u_p \cdot \bar{S}]$, $[F_B^{cp} - u_p \cdot \bar{S}, F_B^{cp} + u_p \cdot \bar{S}]$ [1].

Таблица 1

Результаты статистической обработки

Режим		S^2	S		μ_p	Интервал
1	37,3	0,65	0,8	0,25	$\mu_{0,90} = 1,833$	[36,8 37,7]
					$\mu_{0,95} = 2,262$	[36,7 37,8]
					$\mu_{0,99} = 3,250$	[36,4 38,1]
2	41,8	1,49	1,22	0,39	$\mu_{0,90} = 1,833$	[41,1 42,5]
					$\mu_{0,95} = 2,262$	[40,9 42,7]
					$\mu_{0,99} = 3,250$	[40,5 43,1]
3	46,6	0,6	0,77	0,24	$\mu_{0,90} = 1,833$	[46,2 47,0]
					$\mu_{0,95} = 2,262$	[46,1 47,1]
					$\mu_{0,99} = 3,250$	[45,8 47,4]
4	50,65	0,72	0,85	0,27	$\mu_{0,90} = 1,833$	[50,2 51,1]
					$\mu_{0,95} = 2,262$	[50,0 51,3]
					$\mu_{0,99} = 3,250$	[49,8 51,5]
5	44,4	0,48	0,69	0,22	$\mu_{0,90} = 1,833$	[44,0 44,8]
					$\mu_{0,95} = 2,262$	[43,9 44,9]
					$\mu_{0,99} = 3,250$	[43,7 45,1]

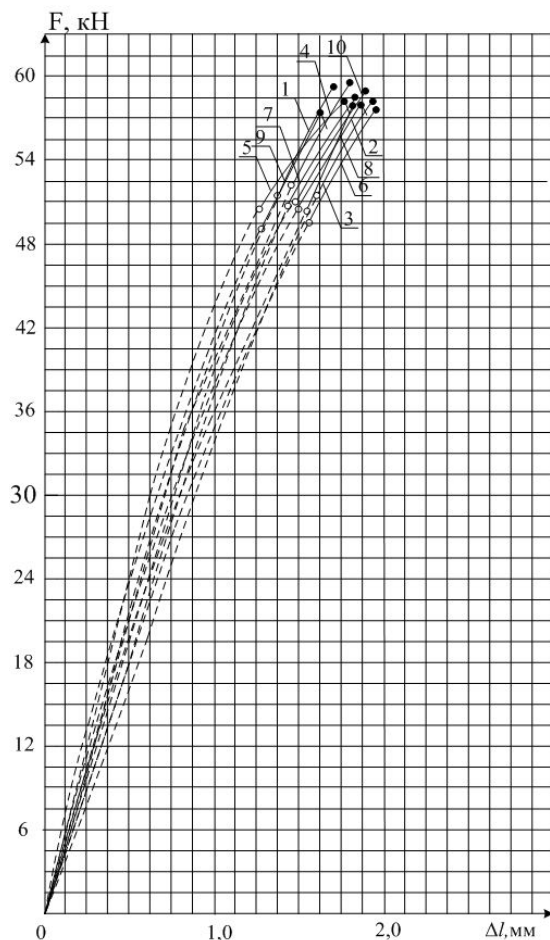


Рис. 2. Диаграммы сжатия экспериментальных образцов, режим № 4

Проведя анализ полученных результатов, можно сказать, что наиболее благоприятным является режим со следующими характеристиками: $T=800^{\circ}\text{C}$, $P = 0,25\text{ МПа}$, $t = 100\text{ мин}$, так как у него самые высокие показатели F_{max} и F_B . Выбранный режим будет лежать в основе изготовления экспериментальных образцов для проведения статических испытаний на растяжение и кручение.

Для сравнительного анализа были проведены также испытания на сжатие различных образцов (результаты представлены на рис. 3):

а) стеклометаллокомпозита без одного запаянного торца; б) стеклометаллокомпозита с открытыми торцами; в) цельного стеклянного образца (С49-1); г) цельного стального образца (СтЗсп); д) стального стакана (СтЗсп), наполненного печеным песком (С49-1), с двумя запаянными торцами; е) стального стакана (СтЗсп), наполненного стеклянной крошкой (С49-1), с двумя запаянными торцами.

Таблица 2

Результаты статистической обработки

Режим		S^2	S		u_p	Интервал
1	41,9	0,46	0,67	0,21	$u_{0,90} = 1,833$	[41,5 42,3]
					$u_{0,95} = 2,262$	[41,4 42,4]
					$u_{0,99} = 3,250$	[41,2 42,6]
2	52,85	0,54	0,74	0,23	$u_{0,90} = 1,833$	[52,4 53,3]
					$u_{0,95} = 2,262$	[52,3 53,4]
					$u_{0,99} = 3,250$	[52,1 53,6]
3	56,35	0,69	0,83	0,26	$u_{0,90} = 1,833$	[55,9 56,8]
					$u_{0,95} = 2,262$	[55,7 57,0]
					$u_{0,99} = 3,250$	[55,5 57,2]
4	58,6	0,72	0,85	0,27	$u_{0,90} = 1,833$	[58,1 59,1]
					$u_{0,95} = 2,262$	[58,0 59,2]
					$u_{0,99} = 3,250$	[57,7 59,5]
5	50,8	0,91	0,95	0,3	$u_{0,90} = 1,833$	[50,3 51,4]
					$u_{0,95} = 2,262$	[50,1 51,5]
					$u_{0,99} = 3,250$	[49,8 51,8]

В результате проведенных испытаний было замечено, что испытываемые образцы подразделяются на хрупкие и пластичные. К пластичным относятся образцы г, д, е, к хрупким – а, б, в.

Диаграммы сжатия и получаемые механические характеристики этих образцов также различны. Как видно из проведенных испытаний, максимальные напряжения, испытываемые стеклометаллокомпозитным образцом на сжатие, в два раза больше, чем у стального образца, и лежат в интервале закаленных стекол, а также на порядок выше, чем у стеклянного образца. Максимальные напряжения экспериментальных образцов, наполненных сыпучим и печеным стеклом, в 4–6 раз ниже, чем у стеклометаллокомпозитных образцов. Замечено, что на прочность образца в случае стеклометаллокомпозита влияет торцевой эффект, а именно то, запаяны образцы или нет, при наличии которого максимальные напряжения снижаются в 3 раза.

В результате проведенных испытаний стеклометаллокомпозита выяснилось, что после прохождения точки разрушения F_B и снятия нагрузки с экспериментального образца его первоначальные геометрические характеристики практически не изменяются и не нарушается целостность образца (рис. 4), что должно положительно влиять на его использование в конструкциях.

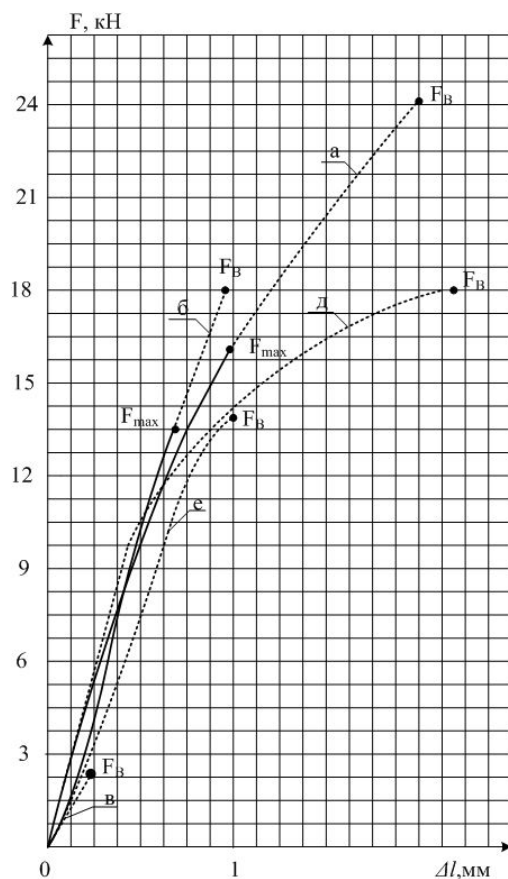


Рис. 3. Экспериментальные кривые сжатия образцов, выполненных различными способами

Проведенные испытания позволяют сделать следующие выводы:

- эксперименты показали крайне незначительный разброс значений опасных нагрузок, что является косвенным свидетельством высокого качества изготовления образцов и правильности предложенного технологического процесса;
- установлено, что максимальные напряжения, испытываемые стеклометаллокомпозитным образцом на сжатие, в два раза больше, чем у стального образца, и лежат в интервале закаленных стекол, а также замечено влияние торцевого эффекта, изменяющего максимальные напряжения в 3 раза;
- наиболее высокими прочностными характеристиками обладают образцы, изготовленные по режиму № 4, поэтому предлагается положить его в основу технологии изготовления экспериментальных образцов для проведения дальнейших статических испытаний на растяжение и кручение;
- отсутствие значительных деформаций после прохождения точки F_B позволяет надеяться на возможность эффективного использования нового материала.



Рис. 4. Фотография стеклометаллокомпозитных образцов после проведения испытаний на сжатие

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Антонов, Э. И. Обработка наблюдений над случайными величинами : методические указания к выполнению задания по математической статистике / Э. И. Антонов. – Владивосток : ДВПИ им. В. В. Куйбышева, 1982. – 16 с.
- [2] Любимова, О. Н. К вопросу упрочнения стекла методом диффузионной сварки с металлом / О. Н. Любимова, Е. А. Гридасова, К. Н. Пестов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 1. – № 2 (8). – С. 318–325.
- [3] Патент 2304117 РФ, МПК С03С27/00. Способ изготовления стеклокомпозита / В. В. Пикуль. – № 2006100219/03 ; заяв. 10.01.2006 ; опубл. 10.01.2006.
- [4] Патент 2428388 РФ, МПК С03С27/02. Способ изготовления стеклометаллокомпозита / Гридасова Е. А., Любимова О. Н., Пестов К. Н., Каяк Г. Л. – № 2009149790/03 ; заяв. 31.12.2009 ; опубл. 10.09.2011, Бюл. № 25. – 6 с.
- [5] Пикуль, В. В. Эффективность стеклометаллокомпозита / В. В. Пикуль // Перспективные материалы. – 2000. – № 6. – С. 63–65.
- [6] Солнцев, С. С. Разрушение стекла / С. С. Солнцев, Е. М. Морозов. – М. : ЛКИ, 2008. – 152 с.

Гридасова Екатерина Александровна,
инженер кафедры сварочного производства, Дальневосточный федеральный университет,
г. Владивосток

Любимова Ольга Николаевна,
доцент кафедры механики и математического моделирования, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

Путырин Никита Евгеньевич,

аспирант кафедры механики и математического моделирования, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

E. A. Gridasova, O. N. Lyubimova, N. E. Putirin

ABOUT LIMITING A CONDITION OF A SPATIAL LAYER FROM AN IDEALNOPLASTICHESKY MATERIAL AT THE TRANSMITTING ANISOTROPY, COMPRESSED BY PARALLEL ROUGH PLATES

Far Eastern Federal University

Abstract. In work the limiting condition of a layer from an idealnoplastichesky material is considered at the transmitting anisotropy, compressed by parallel rough plates at not collinear directions of tangents of efforts. Statically definable conditions of the limiting condition, a generalizing condition of full plasticity are used.

Keywords: compression, layer, ideal plasticity, transmitting anisotropy.

REFERENCES

- [1] *Antonov, E. I.* Processing of supervision over the casual sizes: methodical instructions to task performance on to mathematical statistics / E. I. Antonov. – Vladivostok : V. Kuybysheva DVPI, 1982. – 16 p.
- [2] *Lyubimova, O. N.* To a question of hardening I flew down a method diffusive welding with metal / O. N. Lyubimova, E. A. Gridasova, K. N. Pestov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – № 1. – № 2 (8). – P. 318–325.
- [3] *Patent 2304117 RF, MPK C03C27/00.* Way of production composite glass / V. V. Pikul. – № 2006100219/03 ; statement 10.01.2006 ; publish 10.01.2006.
- [4] *Patent 2428389 RF, MPK C03C27/02.* Way of production glass of metal of a composite / E. A. Gridasova, O. N. Lyubimova, K. N. Pestov, G. L. Kayak. – № 2009149794 ; statement 31.12.2009 ; publish 10.09.2011, Бюл. № 25. – 6 p.
- [5] *Pikul, V. V.* Efficiency glass of metal of a composite / V. V. Pikul // The perspective materials. – 2000. – № 6. – P. 63–65.
- [6] *Solntsev, S. S.* Glass destruction / S. S. Solntsev, E. M. Morozov. – M. : LKI, 2008. – 152 p.

Gridasova, Ekaterina Alekzandrovna

Engineer, Department of Welding Engineering, Far Eastern Federal University, Vladivostok

Lyubimova, Olga Nikolaevna

Assoc. Professor, Department of Mechanics and Mathematical Modeling, Far Eastern Federal University, Vladivostok

Putirin, Nikita Evgenyevich

Postgraduate student, Department of Mechanics and Mathematical modeling, Far Eastern Federal University, Vladivostok

О. Н. Любимова, А. В. Морковин, К. Н. Пестов

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПРОЦЕССЕ СВАРКИ РАЗНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Дальневосточный федеральный университет

Аннотация. Предложен метод определения технологических напряжений в процессе формирования нового слоистого композита на базе стекла и металла, соединяемых посредством диффузионной сварки через легкоплавкий металл. Моделирование осложнено возможным изменением агрегатного состояния в среднем слое. Предлагается решать подобные задачи с использованием подходов механики растущих тел в скоростях тензоров напряжений, перемещений и деформаций, а кристаллизующийся материал рассматривать как растущий из жидкой фазы.

Ключевые слова: стеклометаллокомпозит, фазовый переход, кристаллизация расплава.

УДК: 539.375

При разработке технологии изготовления каждого нового композиционного материала приходится сталкиваться с проблемой построения или выбора математической модели, позволяющей наиболее адекватно отражать процессы, происходящие при его формировании. Например, при изготовлении нового стеклометаллокомпозитного стержня исследуется процесс сварки стекла и металла в следующем технологическом процессе изготовления слоистого композиционного материала цилиндрической формы. Формируется сборка, содержащая детали из стекла и металла, приведенная на рис. 1. В качестве упрочняемого материала используется стеклянный стержень 1, который в твердом состоянии помещают в плотно обжимающий его металлический стакан, выполненный из разных металлов – легкоплавкого 2 и жаропрочного 3. Технологический режим разбивается на шесть этапов: нагрев до температуры сварки, при этом происходит расплавление внутреннего металлического слоя, выдержка при температуре сварки, охлаждение до температуры отжига и, наконец, отжиг.

В настоящей работе рассматривается задача об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) на этапе охлаждения до температуры отжига, в процессе которого кристаллизуется внутренний металлический слой. Математическая модель для данной задачи записывается с использованием подходов механики растущих тел [1]. Моделирование проводится при следующих допущениях:

- диссипативный вклад напряжений незначителен и не влияет на теплообмен и протекание процессов фазовых превращений;
- реологические процессы отсутствуют, что означает сохранение упругости твердой и жидкой фаз;
- квазистатическое равновесие жидкой фазы, можно разделить задачу на две самостоятельные:
 - а) задачу определения температурных полей и движения границы фазового перехода первого рода, для которой предложен новый подход, реализованный в работе [2];

Поступила 28.05.2013

б) краевую задачу определения НДС для слоистого материала с температурными и структурными неоднородностями.

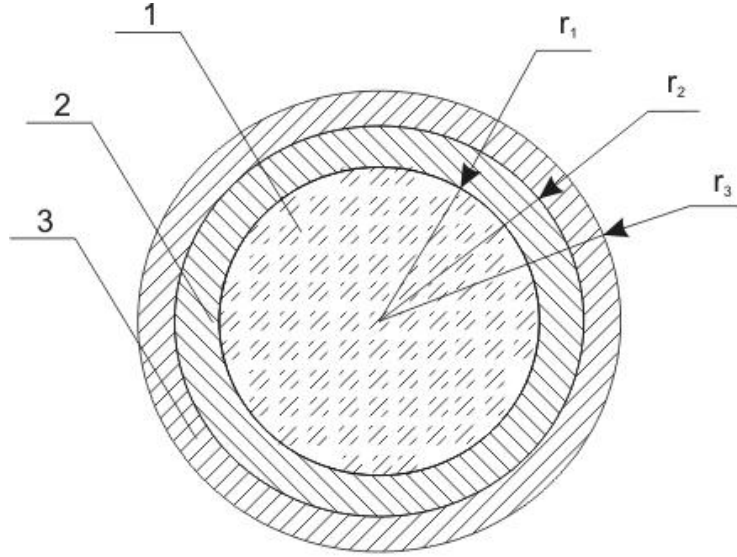


Рис. 1. Геометрия стеклометаллокомпозитного стержня:
1 – стекло; 2 – алюминий; 3 – сталь

Краевая задача определения НДС будет представлять систему уравнений относительно неизвестных $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, \dot{u}_i$, содержащую для каждого слоя уравнения равновесия, уравнения состояния (по типу соотношений Дюамеля-Неймана), соотношения Коши, начальные условия, граничные условия на внешней поверхности, условия сопряжения слоев и условие на границе раздела фаз. По существу модель будет отличаться от классической модели механики растущих тел [1] только последним уравнением, поэтому подробно распишем именно условие на границе фронта фазового перехода. На границе растущего тела (в качестве растущего тела выступает твердая фаза) и жидкой фазы зададим условия полного механического контакта, которые после дифференцирования по времени примут вид:

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial t} \right]_{\Gamma_{kl}^*} = -v_k \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right]_{\Gamma_{kl}^*}, \quad \left(\frac{\partial [\sigma_{ij}]}{\partial t} n_j + \frac{\partial n_j}{\partial t} [\sigma_{ij}] + v_k \frac{\partial [\sigma_{ij}]}{\partial x_k} n_j + v_k \frac{\partial n_j}{\partial x_k} [\sigma_{ij}] \right) \Big|_{\Gamma_{kl}^*} = 0,$$

здесь $v_k = \dot{x}_k$ – компоненты вектора скорости границы фронта фазового перехода; $\vec{\nu}, n_j$ – направляющие косинусы внешней нормали к l -й поверхности Γ_{kl}^* раздела фаз в k -м слое. Из решения температурной задачи известна функция поверхности границы фазового перехода ($\Phi(M, t) = 0$) для каждого момента времени. Компоненты вектора нормали и скорости нормали связаны с уравнением поверхности следующими соотношениями:

$$n_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial n_j}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x_j} \right) \cdot \frac{1}{|\vec{\nabla} \Phi|} + \frac{|\dot{\nu}|}{|\vec{\nabla} \Phi|} n_j.$$

Для слоистых материалов в случае кристаллизации внутренних слоев приходится учитывать давление, возникающее со стороны жидкой фазы: $p|_{\Gamma_{kl}^*+0} = \int_0^{t^*} 3K (\dot{\epsilon} - \alpha \dot{T}) dt$, где $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{ii}$, $t^*(M)$ – время присоединения к растущему твердому телу, одновременно время зарождения

элемента точки M ; K и α – объемный модуль упругости и температурный коэффициент линейного расширения соответственно.

Деформации зародившегося элемента определяются в виде $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij}(t^* - 0) + \varepsilon_{ij}^s + \varepsilon_{ij}^e$, здесь ε_{ij}^s – структурные деформации; ε_{ij}^e – упругие деформации; $\varepsilon_{ij}(t^* - 0)$ – начальные для твердой фазы деформации, для которых верно

$$\varepsilon_{ij}(t^* - 0) = \int_0^{t^*} \dot{\varepsilon}_{ij} dt \quad \text{и} \quad \varepsilon_{ij}^s = \frac{\delta_{ij}}{3} \left(\frac{\rho^+}{\rho^-} - 1 \right),$$

где ρ^+ , ρ^- – плотности жидкой и твердой фаз соответственно. Напряжения в присоединенном элементе будут равны сумме напряжений, накопленных в составе жидкой фазы, и некоторых мгновенных за счет деформирования уже в составе растущего тела:

$$\sigma_{ij}^* = \int_0^{t^*} \dot{\sigma}_{ij} dt + \Delta\sigma_{ij}.$$

Будем считать, что величины добавочных напряжений $\Delta\sigma_{ij}$ и деформаций ε_{ij}^e связаны законом Гука. В предположении о плоской деформации в условиях осевой симметрии в цилиндрической системе координат математическая модель, описывающая эволюцию напряженно-деформированного состояния в процессе остывания от температуры сварки до температуры отжига для композита, запишется в виде

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{rr}}{\partial r} + \frac{\dot{\sigma}_{rr} - \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad (1)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \begin{cases} 2G^- \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \left(\frac{3K^-}{2G^-} - 1 \right) \varepsilon^e \delta_{ij} \right), & T < T^*, \\ 3K^+ \dot{\varepsilon}_{ij}^e \delta_{ij}, & T > T^*, \end{cases} \quad (2)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^T, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^T = \alpha \dot{T} \delta_{ij}, \quad (3)$$

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{\dot{u}_r}{r} \quad (4)$$

со следующими начальными и краевыми условиями:

$$\begin{aligned} u_r|_{t=0} &= 0, \quad \sigma_{rr}|_{t=0} = \sigma_{\varphi\varphi}|_{t=0} = 0, \\ \dot{u}_r|_{r=0} &= 0, \quad \dot{u}_r|_{r=r_1-0} = \dot{u}_r|_{r=r_1+0}, \quad \dot{u}_r|_{r=r_2-0} = \dot{u}_r|_{r=r_2+0}, \\ \dot{u}_r|_{r=r^*-0} &= \dot{u}_r|_{r=r^*+0}, \\ \dot{\sigma}_{rr}|_{r=r_3} &= 0, \quad \dot{\sigma}_{rr}|_{r=r_1-0} = \dot{\sigma}_{rr}|_{r=r_1+0}, \quad \dot{\sigma}_{rr}|_{r=r_2-0} = \dot{\sigma}_{rr}|_{r=r_2+0}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dot{\sigma}_{rr}|_{r=r^*-0} = \dot{\sigma}_{rr}|_{r=r^*+0}, \quad (6)$$

здесь T^* – температура кристаллизации среднего слоя; r^* – граница фазового перехода, полученная в результате решения температурной задачи и в одномерном случае вырождающаяся в точку; δ_{ij} – символ Кронекера; G – модуль сдвига, подразумевается, что ни модуль сдвига, ни модуль объемной упругости не зависят от температуры.

Подставляя геометрические соотношения (4) в уравнение (3) и (2), которые затем подставляем в уравнения равновесия (1), получим уравнения в скоростях перемещений соответственно для жидкой и твердой фаз (уравнения Ламэ в скоростях):

$$\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} - \frac{\dot{u}}{r^2} = 2\alpha^+ \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial r}, \quad T(r, t) > T^*,$$

$$\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} - \frac{\dot{u}}{r} = \alpha - \frac{6K - +2G - \partial^2 T}{3K - +4G - \partial t \partial r}, \quad T(r, t) < T^*.$$

Условие на границе раздела фаз (5) и граничные условия (5) в скоростях перемещений примут вид:

$$K^+ \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \Big|_{r=r^*+0} = \left(\left(K^- + \frac{4}{3} G^- \right) \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \left(K^- - \frac{2G^-}{3} \right) \frac{\dot{u}}{r} - K^- \left(1 - \frac{\rho^-}{\rho^+} \right) \vartheta_n \right) \Big|_{r=r^*-0},$$

$$\left[\left(K + \frac{4}{3} G \right) \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \left(K - \frac{2G}{3} \right) \frac{\dot{u}}{r} - \alpha \left(2K - \frac{\partial T}{\partial t} \right) \frac{\partial T}{\partial t} \right] \Big|_{r=r_1, r_2} = 0,$$

$$\left(\left(K + \frac{4}{3} G \right) \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \left(K - \frac{2G}{3} \right) \frac{\dot{u}}{r} - \alpha \left(2K - \frac{\partial T}{\partial t} \right) \frac{\partial T}{\partial t} \right) \Big|_{r=r_3} = 0.$$

Индексами " + " и " - " обозначены механические характеристики жидкой и твердой фаз. Механические характеристики у всех слоев разные, и считается, что они не зависят от температуры. Полученная в скоростях перемещений система решалась методом сеток с использованием метода прогонки при решении сеточных уравнений. При этом численным интегрированием находились искомые значения величин перемещений, деформаций. Результаты были получены для известных механических и теплофизических значений материалов. График на рис. 2 передает динамику границы раздела фаз, количество фаз, начало и завершение процесса фазового перехода во внутреннем слое. Выше кривой материал находится в закристаллизованном состоянии, ниже – в жидком, вертикальные линии показывают границу раздела материалов. Излом характеризует время встречи фронтов в процессе изменения температуры во всем объеме. Отсюда же можно получить информацию о положении и времени существования двух фронтов одновременно.

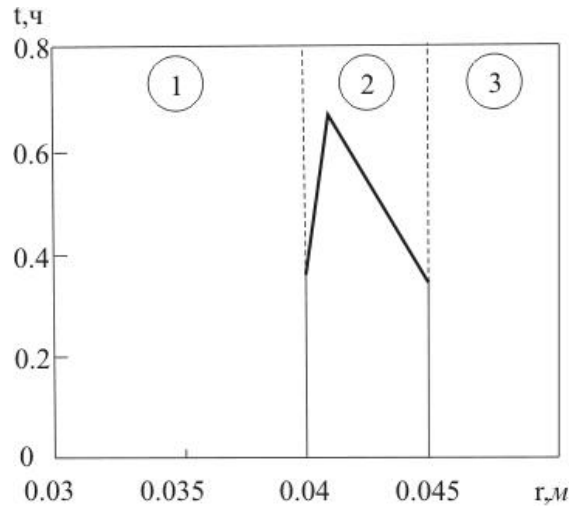


Рис. 2. Движение фронтов кристаллизации в среднем слое

На рис. 3 приведены графики зависимости напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ и σ_{rr} от радиальной координаты в конечный момент времени. На рис. 4 приведены графики зависимости интенсивности напряжений от времени в среднем слое на границах контактов, из которых видно, что значение интенсивности напряжений на внутренней границе среднего слоя в 3–4 раза больше, чем на внешней. Полученные результаты качественно не противоречат механическим представлениям о процессе деформирования с учетом кристаллизации, как видно из рис. 4, на

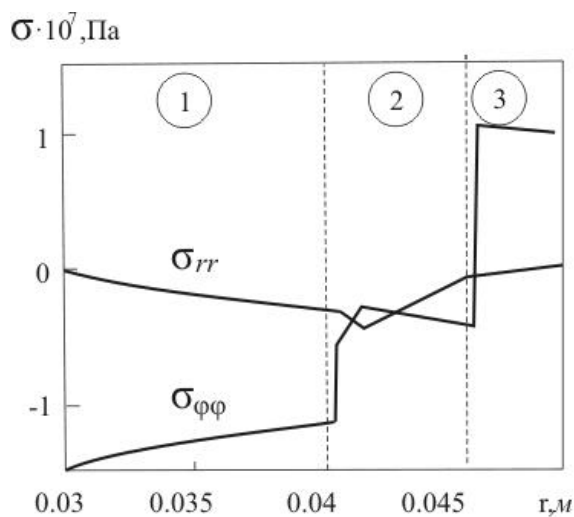


Рис. 3. Напряжения в момент достижения материалом температуры отжига

участке времени, когда слой кристаллизуется, интенсивность напряжений растет быстрее, что объясняется наличием структурной деформации при кристаллизации.

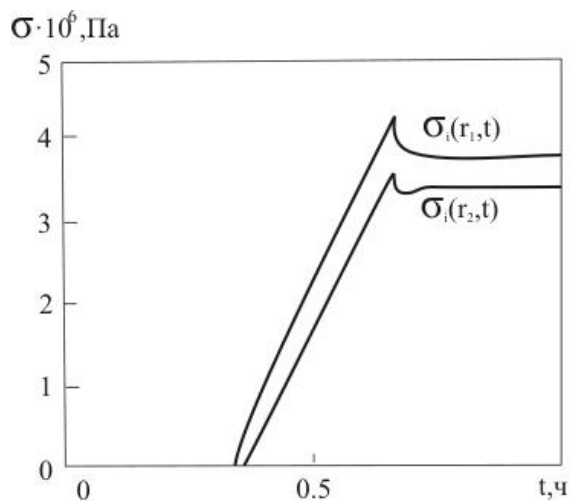


Рис. 4. Зависимости интенсивности напряжений в среднем слое на границах контактов (1 – r_1 , 2 – r_2)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Арутюнян, Н. Х. Контактные задачи механики растущих тел / Н. Х. Арутюнян, А. В. Манжиров, В. Э. Наумов. – М. : Наука, 1991. – 176 с.
- [2] Любимова, О. Н. Математическое моделирование теплового процесса диффузионной сварки стекла с металлом / О. Н. Любимова, К. Н. Пестов, Е. А. Гридасова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2010. – Т. 13. – № 4 (44). – С. 52–63.

[3] Патент 2428389 РФ, МПК C03C27/02. Способ изготовления стеклометаллокомпозита / Гридасова Е. А., Любимова О. Н., Пестов К. Н., Каяк Г. Л. – № 2009149794 ; заяв. 31.12.2009 ; опубл. 10.09.2011, Бюл. № 25. – 6 с.

Любимова Ольга Николаевна,

доцент кафедры механики и математического моделирования, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

e-mail: berms@mail.ru

Морковин Андрей Витальевич,

аспирант кафедры механики и математического моделирования, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

e-mail: roger..25@yandex.ru

Пестов Константин Николаевич,

доцент кафедры механики и математического моделирования, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

e-mail: kopestov@yandex.ru

O. N. Lyubimova, A. V. Morkovin, K. N. Pestov

ABOUT LIMITING A CONDITION OF A SPATIAL LAYER FROM AN IDEALNOPLASTICHESKY MATERIAL AT THE TRANSMITTING ANISOTROPY, COMPRESSED BY PARALLEL ROUGH PLATES

Far Eastern Federal University

Abstract. In work the limiting condition of a layer from an idealnoplastichesky material is considered at the transmitting anisotropy, compressed by parallel rough plates at not collinear directions of tangents of efforts. Statically definable conditions of the limiting condition, a generalizing condition of full plasticity are used.

Keywords: compression, layer, ideal plasticity, transmitting anisotropy.

REFERENCES

- [1] *Arutyunyan, N. H.* Contact problems of mechanics of growing bodies / N. H. Arutyunyan, A. V. Manzhirov, V. E. Naumov. – M. : Nauka, 1991. – 176 p.
- [2] *Lyubimova, O. N.* Mathematical modeling of the thermal process of diffusive welding of glass with metal / O. N. Lyubimova, K. N. Pestov, E. A. Gridasova // Siberian magazine of the industrial mathematics. – 2010. – Vol. 13. – № 4 (44). – P. 52–63.
- [3] *Patent 2428389 RF, MPK C03C27/02.* Way of production glass of metal of a composite / E. A. Gridasova, O. N. Lyubimova, K. N. Pestov, G. L. Kayak. – № 2009149794 ; statement 31.12.2009 ; publish 10.09.2011, Бюл. № 25. – 6 p.

Lyubimova, Olga Nikolaevna

Assoc. Professor, Department of Mechanics and Mathematical Modeling, Far Eastern Federal University, Vladivostok

e-mail: berms@mail.ru

Morkovin, Andrey Vitalievich

Postgraduate student, Department of Mechanics and Mathematical Modeling, Far Eastern Federal University, Vladivostok

e-mail: roger..25@yandex.ru

Pestov, Konstantin Nikolaevich

Assoc. Professor, Department of Mechanics and Mathematical Modeling, Far Eastern Federal University, Vladivostok

e-mail: kopestov@yandex.ru

В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК МЕТОД ИЗУЧЕНИЯ ДИНАМИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГИХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН

Аннотация. Рассмотрена одномерная задача о движении плоской продольной ударной волны в рамках модели нелинейно упругой среды с неоднородными свойствами, представленными непрерывным изменением упругих модулей и плотности. Изменение свойств среды предполагается в направлении движения волнового фронта. На основе метода срачиваемых асимптотических разложений определены эволюционные уравнения, отражающие совместно и нелинейность волнового процесса, и неоднородность среды.

Ключевые слова: нелинейная упругая среда, неоднородность, ударные волны, объемное и сдвиговое деформирование, эволюционное уравнение.

УДК: 539.375

Введение. Свойствам ударных волн в нелинейно упругих средах посвящено большое число исследований [1], [2], [3]. Из них хорошо известно, что в общем случае механизм образования и последующего движения поверхностей сильных разрывов зависит от свойств упругой среды, от наличия в ней предварительных деформаций, от интенсивности разрыва, а также от последующего воздействия на границе [1], [2], [3]. Скорости ударных волн и геометрия этих поверхностей, за исключением простейших краевых задач, тоже входят в число неизвестных величин, поэтому ряд краевых условий ставится на поверхностях с заранее неизвестным положением. Наконец, по своему типу ударные волны в твердом теле перестают быть чисто продольными или поперечными и приобретают смешанный характер [2], [3].

Одним из наиболее эффективных вариантов решения динамических задач назовем метод срачиваемых асимптотических разложений. Анализ основного внешнего [4] разложения решения позволяет указать те пространственно-временные области, где нелинейность является доминирующим фактором. Одновременно для этих областей оказывается возможным определить нелинейное эволюционное уравнение, более простое, чем исходные уравнения задачи, но сохраняющее основные свойства нелинейного волнового процесса. К примеру, для плоских продольных ударных волн этим уравнением будет уравнение Коула-Хопфа [5]. В [6] показано, что для чисто поперечных плоских волн в несжимаемой упругой среде уравнение Коула-Хопфа определяет изменение квадрата интенсивности волнового процесса. Учет дополнительного свойства среды – вязкости – приводит к уравнению Бюргерса [7] для продольных волн деформации и к его модификации [8] для поперечных волн.

Поступила 28.05.2013

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00360-а).

Перечисленные эволюционные уравнения возникают при изучении плоских одномерных волновых процессов в нелинейно упругих средах на достаточно больших расстояниях от нагружаемой границы. Для массивов большой протяженности дополнительным фактором, влияющим на волновой деформационный процесс, может стать неоднородность свойств среды в направлении движения ударной волны. Среда, неоднородные по свойствам, рассматривались в [9]. Неоднородность может проявляться очень разнообразно. В настоящей статье авторы рассматривают всего один вариант – слабую неоднородность степенного типа. Уже в этом случае показано, что учет факторов нелинейности связи напряжений-деформаций и неоднородности упругих свойств может приводить к различным вариантам эволюционного уравнения. Возникают интересные ситуации, когда переход к эволюционному уравнению возможен только при совместном изменении обеих независимых переменных. Далее на примере ряда наиболее простых модельных задач авторы показывают многообразие возникающих решений.

Основные уравнения модели и краевые условия на поверхностях разрыва деформаций. Дальнейшее изложение проводим для декартовой пространственной системы координат x_1, x_2, x_3 , принимая предложенный Эйлером метод описания движения сплошной среды. Модельные соотношения нелинейно упругой изотропной сжимаемой среды имеют вид [10]

$$\begin{aligned} v_i &= \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \quad \rho = \rho_0 \det(\delta_{ij} - u_{i,j}), \quad \alpha_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}), \\ \sigma_{ij} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \\ \sigma_{i,j,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \quad W(I_1, I_2, I_3) = \frac{\lambda}{2}I_1^2 + \mu I_2 + lI_1 I_2 + mI_1^3 + nI_3 + \dots, \\ I_1 &= \alpha_{ii}, \quad I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \quad I_3 = \alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki}, \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ_0 и ρ – плотность среды в свободном и текущем состояниях; u_i и v_i – компоненты векторов перемещения и скорости среды; α_{ij} – компоненты тензора деформаций Альманси; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши; W – функция упругого потенциала; λ, μ, l, m, n – упругие модули среды, причем первые два – параметры Ламе. В уравнениях (1) и далее принято суммирование по повторяющимся индексам.

Если краевые условия динамической задачи приводят к образованию одной или нескольких ударных волн, то на каждой из этих поверхностей должны выполняться геометрические, кинематические и динамические условия совместности разрывов [11].

Относительно констант упругой среды сделаем дополнительное предположение, считая, что они имеют слабую зависимость от координаты x_1 , то есть

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon^k \tilde{\lambda}_1 s^j, \quad \mu = \mu_0 + \varepsilon^k \tilde{\mu}_1 s^j, \quad \rho_0 = \tilde{\rho}_0 + \varepsilon^k \tilde{\rho}_1 s^j, \quad l = l_0 + \varepsilon^k \tilde{l}_1 s^j, \\ m &= m_0 + \varepsilon^k \tilde{m}_1 s^j, \quad n = n_0 + \varepsilon^k \tilde{n}_1 s^j, \quad s = x_1 C_1^{-1} T^{-1}, \quad C_1 = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0) \tilde{\rho}_0^{-1}}, \\ &k > 0, \quad j > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\lambda_0, \tilde{\lambda}_1, \mu_0, \tilde{\mu}_1, \tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1, l_0, \tilde{l}_1, m_0, \tilde{m}_1, n_0, \tilde{n}_1$ – константы; C_1 – скорость продольных упругих волн в линейном приближении с исключенной неоднородностью среды; T и $C_1 T$ – характерное время и характерное расстояние; $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр задачи, конкретный вид которого будет определен позднее. Формулы (3) соответствуют слабой степенной неоднородности в направлении оси x_1 .

Плоская продольная ударная волна в неоднородной среде. Рассмотрим нелинейно упругое предварительно недеформированное полупространство $x_1 \geq 0$. Начиная с момента $t = 0$, на его границе под действием приложенной нагрузки известны перемещения

$$u_1|_{x_1=f_0(t), t \geq 0} = f_0(t), \quad u_2|_{x_1=f_0(t), t \geq 0} = u_3|_{x_1=f_0(t), t \geq 0} = 0, \quad f_0'(0) > 0. \quad (3)$$

Такие перемещения границы приводят к мгновенному образованию ударной волны. Перемещения точек среды сводятся к $u_1 = u_1(x_1, t), u_2 = u_3 = 0$. При этом ударная волна становится чисто продольной [2], для ее скорости из условий совместности следует формула

$$G_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho_0} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda+2\mu} \right) \tau_1 + \dots \right\}, \quad \tau_1 = [u_{1,1}] = -u_{1,1}^-, \quad (4)$$

$$\alpha = -\frac{7}{2}(\lambda+2\mu) + 3(l+m+n),$$

в которой многоточием обозначены невыписанные слагаемые с более высокой малостью по степеням интенсивности τ_1 . На переднем фронте ударной волны должны быть выполнены краевые условия

$$u_1|_{x_1=\int_0^t G_1(\xi)d\xi} = 0, \quad \tau_1 = u_{1,1}^-|_{x_1=\int_0^t G_1(\xi)d\xi}. \quad (5)$$

Следствием общей системы уравнений (1), (3) будет следующее уравнение движения:

$$\begin{aligned} & (\lambda+2\mu+2\alpha u_{1,1})u_{1,11} + ((\lambda+2\mu)_{,1} + \alpha_{,1}u_{1,1})u_{1,1} + \dots = \\ & = \rho_0(1-u_{1,1})^{-2} \{ \ddot{u}_1(1-2u_{1,1}) + 2\dot{u}_{1,1}\dot{u}_1 \} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Для решения краевой задачи (5)-(8) во внешней области определим безразмерные переменные формулами

$$s = x_1 C_1^{-1} T^{-1}, \quad m = t T^{-1}, \quad w(s, m) = u_1(x_1, t) \varepsilon^{-1} C_1^{-1} T^{-1}, \quad (7)$$

которые означают относительную малость перемещений задачи, задаваемую параметром ε . То есть вид этого параметра следует из конкретного краевого условия (5). Данный масштаб малости в задаче считаем основным, а малую неоднородность задаем сравнительно малым воздействием на границе, что позволяет решать задачу без обращения к рядам с двумя малыми параметрами.

Как вариант рассмотрим решение задачи при $k=2, j=1$ в формулах (3). В этом случае уравнение (8) в переменных (10) имеет вид

$$\begin{aligned} & w_{,ss} (1 + \alpha_0 \varepsilon w_{,s} + \alpha_1 \varepsilon^2 s + 2\alpha_2 \varepsilon^3 s w_{,s}) + \varepsilon^2 w_{,s} (\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha + 1) \varepsilon w_{,s}) + \dots = \\ & = (1 + \varepsilon^2 \rho_1 s) (w_{,mm} (1 - 2\varepsilon w_{,s}) + 2\varepsilon w_{,m} w_{,ms}) + \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\alpha_0 = -9 + 6 \frac{l_0 + m_0 + n_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \quad \alpha_1 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \quad \rho_1 = \frac{\bar{\rho}_1}{\rho_0}, \quad 2\alpha_2 = -9 \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_0 + 2\mu_0} + 6 \frac{\bar{l}_1 + \bar{m}_1 + \bar{n}_1}{\lambda_0 + 2\mu_0},$$

а краевое условие (5) представим как

$$w(s, m)|_{s=\varepsilon f(m)} = f(m). \quad (9)$$

Неизвестную функцию $w(s, m)$ зададим асимптотическим рядом по степеням малого параметра:

$$w(s, m) = w_0(s, m) + \varepsilon w_1(s, m) + \varepsilon^2 w_2(s, m) + \dots$$

Подставляя его в уравнение (11) и в краевое условие (12), получим внешнее [4] решение с необходимой точностью:

$$w(s, m) = f(\xi) + \varepsilon \left\{ -0, 25\alpha_0 (f'(\xi))^2 s + f'(\xi) f_1(\xi) \right\} + \dots, \quad \xi = m - s \geq 0, \quad (10)$$

в котором приведены только те слагаемые, которые позволяют определить область внутреннего решения. В рассматриваемом случае отметим, что неоднородные свойства сказываются на внешнем решении, начиная с $w_2(s, m)$. Решение (13) не может быть использовано для выполнения краевых условий (6). За их выполнение отвечает новое внутреннее решение. Так как ряд (13) при $\xi \sim 1$ теряет равномерность при $s \sim \varepsilon^{-1}$, то переменными внутреннего решения выберем

$$n = \varepsilon s, \quad p = s - m, \quad w = w(p, n). \quad (11)$$

Предполагая представление $w(p, n)$ рядом по степеням ε и записывая уравнение (11) в переменных (15), на нулевом шаге метода получим нелинейное уравнение

$$v_{0,n} + (0,5\alpha_0 v_0 + \gamma n) v_{0,p} = 0, \quad v_0 = w_{0,p}, \quad \gamma = 0,5(\alpha_1 - \rho_1), \quad (12)$$

которое назовем эволюционным уравнением для рассматриваемого баланса нелинейности и неоднородности. Оно переходит в уравнение Коула-Хопфа [5] при $\alpha_1 = \rho_1 = 0$. Переход к этому уравнению оказался возможен только за счет изменения масштаба координаты s . Отметим, что последнее слагаемое уравнения (16) связано с разложением в ряд Тейлора величины

$$\tilde{C}_1 = C_1 \sqrt{(1 + \alpha_1 \varepsilon s)(1 + \rho_1 \varepsilon s)^{-1}} = C_1 (1 + \gamma \varepsilon s + \dots) = C_1 (1 + \gamma n + \dots).$$

В уравнении (16) видно, что тангенс угла наклона его характеристик определяется аддитивно нелинейными слагаемыми и слагаемыми, обусловленными неоднородностью. Вдоль характеристик здесь еще не происходит искажение исходного импульса, и общее решение задается как

$$v_0 = F_0(p - 0,5\alpha_0 v_0 n - 0,5\gamma n^2), \quad (13)$$

то есть как характеристики уравнения (16) в плоскости p, n – семейство парабол. Для определения положения переднего фронта продольной ударной волны из уравнения эйконала $t = \int_{x_1}^f 0 - 1$ в переменных p, n получим такое обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$dp_0 = (0,25\alpha_0 v_0(p_0(n), n) + \gamma n) dn, \quad p_0(0) = 0, \quad (14)$$

где $p(n) = p_0(n) + \varepsilon p_1(n) + \dots$ – асимптотический ряд, связывающий координаты p, n на ударной волне. Из уравнения (19) следует, что в данном случае отклонение ударной волны от характеристики определяется только нелинейным фактором. В качестве достаточно простого конкретного примера рассмотрим граничные перемещения, для которых $f_0(t) = vt + 0,5at^2$. Для них условие (12) переходит в условие

$$w(s, m)|_{s=\varepsilon(m+0,5Am^2)} = m + 0,5Am^2, \quad \varepsilon = vC_1^{-1}, \quad A = aTv^{-1}. \quad (15)$$

Внешнее решение нетрудно получить на основе ряда (13). В качестве внутреннего решения из общего соотношения (18) выберем следующий частный вариант:

$$v_0(p, n) = (B_1 + B_2 p - 0,5B_2 \gamma n^2) (1 + 0,5B_2 \alpha_0 n)^{-1}, \quad (16)$$

где B_1, B_2 – неизвестные константы. Подставляя выбранную функцию $v_0(p, n)$ в уравнение (19) и в краевое условие $w_0(p, n)|_{p=p_0(n)} = 0$, нетрудно пролучить

$$w_0(p, n) = \{0,5B_2(p^2 - p_0^2(n)) + (B_1 - 0,5B_2 \gamma n^2)(p - p_0(n))\} (1 + 0,5B_2 \alpha_0 n)^{-1}. \quad (17)$$

Сопоставление внешнего и внутреннего решений определяет неизвестные константы: $B_1 = -1, B_2 = A$.

Эволюционное уравнение продольной ударной волны для среды с одинаковым порядком малости неоднородности и граничного импульса. Для краевой задачи, рассмотренной выше, предположим в формулах (3), что $k = j = 1$. Тогда в основных переменных (10) получим такое внешнее решение:

$$w(s, m) = f(\xi) + \varepsilon \left\{ f(\xi) f'(\xi) + \frac{\gamma}{2} f''(\xi) (\xi + s) s - \left[\frac{\gamma}{2} (f'(\xi) \xi - f(\xi)) + \frac{\alpha_0}{2} f(\xi) + \frac{\alpha_0}{4} (f'(\xi))^2 \right] s + \dots \right\}$$

Очевидно, что для него неравномерность возникает впервые при $\xi \sim 1, s \sim \varepsilon^{-1/2}$ и связана только со свойством неоднородности. Новое внутреннее решение определим в переменных $\sigma = \varepsilon^{1/2} s, p = s - m, w(p, \sigma)$, для которых уравнение движения задачи переходит в соотношение

$$\begin{aligned}
& (w_{,pp} + 2\varepsilon^{1/2}w_{,\sigma p} + \varepsilon w_{,\sigma\sigma}) \{1 + \alpha_0\varepsilon(w_{,p} + \varepsilon^{1/2}w_{,\sigma}) + \alpha_1\varepsilon^{1/2}\sigma + \\
& + 2\alpha_2\varepsilon^{3/2}\sigma(w_{,p} + \varepsilon^{1/2}w_{,\sigma})\} + \varepsilon(w_{,p} + \varepsilon^{1/2}w_{,\sigma}) \{\alpha_1 + \varepsilon(w_{,p} + \varepsilon^{1/2}w_{,\sigma})(\alpha_2 - \alpha_1)\} + \dots = \quad (18) \\
& = (1 + \varepsilon^{1/2}\sigma\rho_1) \{w_{,pp}(1 - 2\varepsilon(w_{,p} + \varepsilon^{1/2}w_{,\sigma})) + 2\varepsilon w_{,p}(w_{,pp} + \varepsilon^{1/2}w_{,\sigma p})\} + \dots
\end{aligned}$$

Его решение представим рядом вида $w(\sigma, p) = w_0(\sigma, p) + \varepsilon^{1/2}w_1(\sigma, p) + \varepsilon w_2(\sigma, p) + \dots$.

Из уравнения (24) на каждом шаге внутреннего решения получим такое волновое уравнение:

$$v_{i,\sigma} + \gamma\sigma v_{i,p} = H_i(\sigma, p), \quad H_0 = 0, \quad v_i = w_{i,p}, \quad (19)$$

в котором $H_i(\sigma, p)$ – функция, определяемая предыдущими шагами метода. Общее решение (25) представим в характеристическом виде:

$$\begin{aligned}
w_0(\sigma, p) &= \int_z^f 0, \\
(\xi)d\xi, \quad z &= p - \frac{\gamma\sigma^2}{2}.
\end{aligned}$$

Уравнение (25) показывает необходимость уточнения на расстояниях $s \sim \varepsilon^{-1/2}$ искривления полухарактеристик за счет неоднородности. Сравнение $w_1(\sigma, p)$ и $w_0(\sigma, p)$ диктует следующее сжатие масштаба и изменение полухарактеристики:

$$\begin{aligned}
z = p - 0,5\gamma\sigma^2, \quad y = \varepsilon^{1/6}\sigma, \quad w = w(z, y), \quad w(z, y) = w_0(z, y) + \varepsilon^{1/3}w_1(z, y) + \\
+ \varepsilon^{2/3}w_2(z, y) + \dots, \quad (20)
\end{aligned}$$

причем заметим, что $y = \varepsilon^{1/6}\sigma = \varepsilon^{2/3}s$. Уравнение движения для переменных (27) здесь не приводим ввиду его громоздкости. Укажем, что на нулевом шаге из него получаем уравнение

$$v_{0,y} - 0,25(3\alpha_1 + \rho_1)\gamma y^2 v_{0,z} = 0, \quad v_0 = w_{0,z},$$

решением которого будет функция

$$v_0 = F_0(\zeta) = F_0\left(z + \frac{(3\alpha_1 + \rho_1)}{12}\gamma y^3\right).$$

Два рассмотренных выше сжатия координаты s ($\sigma = \varepsilon^{1/3}s$, $y = \varepsilon^{2/3}s$) приводят к гиперболическим уравнениям для $w_0(p, \sigma)$ или $w_0(p, y)$, причем эти уравнения указывают на необходимость учета в полухарактеристике p новых слагаемых, обусловленных неоднородностью среды (координаты z и ζ соответственно). Очевидно, что, рассматривая последовательно внутренние задачи со сжатием координаты s в $\frac{k}{k+1}$ раз, в пределе при $k \rightarrow \infty$ придем к внутренней задаче с переменными f :

$$\begin{aligned}
r = s - m - \sum_{\infty}^{\infty} k = 1, \\
\varepsilon^k s^{k+1}, \quad n = \varepsilon s, \quad w = w(r, n), \quad (21)
\end{aligned}$$

где константы A_k можем считать известными и вычисленными последовательно на k -м шаге сжатия координаты s . Предположим, что для ряда, входящего в формулы (28), выполняется следующая связь с функцией $\Psi(n)$:

$$\begin{aligned}
\Psi(n) = 1 - \sum_{\infty}^{\infty} k = 1, \\
(k+1)n^k, \quad \Psi'(n) = -\sum_{\infty}^{\infty} k = 1, \\
k(k+1)n^{k-1}. \quad (22)
\end{aligned}$$

Тогда уравнение движения с учетом формул (28), (29) переходит в соотношение

$$\begin{aligned}
 & (\varepsilon^2 w_{,nn} + 2\varepsilon w_{,rn} \Psi(n) + w_{,rr} \Psi^2(n) + \varepsilon w_{,r} \Psi'(n)) \{1 + \alpha_1 n + \alpha_0 \varepsilon W + 2\alpha_2 n \varepsilon W\} + \\
 & + \varepsilon W \{ \alpha_1 + \varepsilon(\alpha_2 - \alpha_1) W \} + \dots = (1 + \rho_1 n) \{ w_{,rr} (1 - 2\varepsilon W) + 2\varepsilon w_{,r} W_{,r} \} + \dots, \\
 & W(r, n) = w_{,r} \Psi(n) + \varepsilon w_{,n}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Представляя неизвестную функцию $w(r, n)$ асимптотическим рядом по целым степеням малого параметра, из формулы (31) для наименьшей степени ε получим уравнение

$$w_{0,rr} \{ \Psi^2(n)(1 + \alpha_1 n) - (1 + \rho_1 n) \} = 0,$$

из которого следует, что $\Psi(n) = \pm \sqrt{(1 + \rho_1 n)(1 + \alpha_1 n)^{-1}}$, причем для нашей задачи здесь необходимо оставить “+”. Рассматривая эту функцию при $n = \varepsilon s$, $s \sim 1$ и раскладывая ее в ряд Тейлора, получим

$$\Psi(\varepsilon s) = 1 - \gamma \varepsilon s + 0, 25\gamma(\rho_1 + 3\alpha_1) \varepsilon^2 s^2 + \dots,$$

то есть найденный вид $\Psi(n)$ согласуется с проведенными раньше сжатиями масштаба s . Формулы (28) содержат интеграл от $\Psi(n)$, для которого имеет место представление

$$\begin{aligned}
 \Phi(n) &= \int \sqrt{\frac{1 + \rho_1 n}{1 + \alpha_1 n}} dn = \frac{1}{\alpha_1} \sqrt{(1 + \rho_1 n)(1 + \alpha_1 n)} + \frac{\gamma}{\alpha_1} H(n) + K, \\
 H(n) &= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-\alpha_1 \rho_1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-\rho_1 (1 + \alpha_1 n)}{\alpha_1 (1 + \rho_1 n)}}, & \alpha_1 \rho_1 < 0, \\ \frac{2}{\sqrt{\alpha_1 \rho_1}} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{\rho_1 (1 + \alpha_1 n)}{\alpha_1 (1 + \rho_1 n)}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_1 \rho_1}} \ln \left(\sqrt{\alpha_1 (1 + \rho_1 n)} + \sqrt{\rho_1 (1 + \alpha_1 n)} \right), & \alpha_1 \rho_1 > 0, \end{cases}
 \end{aligned}$$

в которых K определяется условием $\Phi(0) = 0$. Подставляя найденную функцию $\Psi(n)$ в соотношение (31), на нулевом шаге метода для перемещений получим эволюционное уравнение

$$v_{0,n} + v_{0,r} v_0 \frac{\Psi^2(n)(\alpha_0 + 2\alpha_2 n)}{2(1 + \alpha_1 n)} + v_0 \left(\frac{\alpha_1}{2(1 + \alpha_1 n)} + \frac{\Psi'(n)}{2\Psi(n)} \right) = 0, \quad v_0 = w_{0,r}. \tag{24}$$

В нем отражены все факторы, влияющие на прифронтовое поле перемещений, в том числе присутствует и искажение исходного импульса за счет неоднородной среды. Его общее решение строится вдоль характеристик

$$V_0(r, n) = F \left(r - \frac{V_0(r, n)}{2} \int_n^f 0 \right), \tag{25}$$

причем конкретный вид функции F своего аргумента устанавливается сравнением с внешним решением. Одновременно для функции $r(n) = r_0(n) + \varepsilon r_1(n) + \dots$, связывающей координаты r и n на ударной волне, на нулевом шаге метода выполняется уравнение

$$dr_0 = (0, 25\alpha_0 + 0, 5\alpha_2 n) \Psi^2(n) (1 + \alpha_1 n) v_0(r_0(n), n) dn, \tag{26}$$

показывающее, что ударная волна и характеристики уравнения (32) имеют тангенсы угла наклона, отношение которых равно $1/2$. Для краевой задачи с граничным условием (21) из соотношений (33), (34) получим такое частное решение:

$$w_0(r, n) = \frac{-r + Ar^2/2 + r_0(n) - Ar_0^2(n)/2}{\sqrt{\Psi(n)(1 + \alpha_1 n) (1 + \frac{A}{2} P(n))}}, \quad r_0(n) = \frac{1}{A} - \sqrt{\frac{1}{A} + P(n)}, \quad P(n) = \int_n^f 0. \tag{27}$$

Отметим, что $P(n)$ не сводится к элементарным функциям, координата r имеет сложную зависимость от исходных переменных, поэтому простота решения (35) носит чисто внешний характер. Проведенный анализ может быть применен и к случаю, когда в формулах (3) $k = j = 2$ (с изменением вида $\Psi(n)$), и во многих других ситуациях. Вместе с тем он не носит универсального характера, так как, например, возможны ситуации, в которых нелинейность задачи проявляется на расстояниях, где ввиду неоднородности уже произошло сильное затухание исходного импульса и поэтому эволюционное уравнение может потерять свое значение как базовое. Подчеркнем еще раз, что многообразие вида неоднородных свойств среды требует отдельного исследования в каждом случае.

Заключение. Учет неоднородных свойств сплошной среды даже в наиболее простых формах вносит новые интересные особенности как в структуру эволюционных уравнений и их решений, так и в методы их получения. Большая часть примеров, рассмотренных в статье, связана с необходимостью совместного изменения обеих независимых переменных внутренней области, причем итоговые уравнения для полухарактеристик имеют нетривиальный характер. В приведенных задачах итоговое представление внутренних координат диктуется как предельный случай, цепочкой последовательных сжатий масштаба пространственной координаты. Авторы надеются, что эта методика может оказаться полезной и в других динамических нелинейных задачах, в частности для случаев движения нескольких упругих волн в сплошной среде с большим расстоянием между их фронтами. Эволюционные уравнения при условии перехода на подвижную поверхность разрывов приводят к основным соотношениям лучевого метода, поэтому они могут быть успешно использованы в качестве дополнительной информации при определении коэффициентов лучевых рядов. Прикладной аспект рассмотренных решений авторы видят в их применении при моделировании новых схем численного счета динамических нестационарных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бленд, Д. Нелинейная динамическая теория упругости / Д. Бленд. – М. : Мир, 1972. – 183 с.
2. Куликовский, А. Г. Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. – М. : Московский лицей, 1998. – 412 с.
3. Буренин, А. А. Ударные волны в изотропном упругом пространстве / А. А. Буренин, А. Д. Чернышов // Прикладная математика и механика. – 1978. – № 42 (4). – С. 711–717.
4. Ван-Дайк, М. Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – М. : Мир, 1967. – 239 с.
5. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М. : Мир, 1977. – 622 с.
6. Рагозина, В. Е. Об эволюционных уравнениях задач ударного деформирования с плоскими поверхностями разрывов / В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2. – № 3. – С. 82–95.
7. Буренин, А. А. О влиянии вязкости на характер распространения плоской продольной волны / А. А. Буренин, Ю. А. Россихин // Прикладная механика и техническая физика. – 1990. – № 6. – С. 13–17.
8. Иванова, Ю. Е. О структуре ударной волны деформаций изменения формы / Ю. Е. Иванова // Материалы Всероссийской конференции “Фундаментальные и прикладные вопросы механики”, посвященной 70-летию со дня рождения академика В. П. Мясникова. – 2006. – С. 52–54.
9. Пелиновский, Ю. Н. Нелинейные эволюционные уравнения / Ю. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман, Ю. К. Энгельбрехт. – Таллин : Валгус, 1984. – 164 с.
10. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.

11. *Томас, Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М. : Мир, 1964. – 308 с.

Рагозина Виктория Евгеньевна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики деформирования отдела механики деформируемого твердого тела, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток

e-mail: ragozina@vlc.ru

Иванова Юлия Евгеньевна,

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики деформирования отдела механики деформируемого твердого тела, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток

e-mail: ivanova@iacp.dvo.ru

V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova

ABOUT LIMITING A CONDITION OF A SPATIAL LAYER FROM AN IDEALNOPLASTICHESKY MATERIAL AT THE TRANSMITTING ANISOTROPY, COMPRESSED BY PARALLEL ROUGH PLATES

Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS

Abstract. In work the limiting condition of a layer from an idealnoplastichesky material is considered at the transmitting anisotropy, compressed by parallel rough plates at not collinear directions of tangents of efforts. Statically definable conditions of the limiting condition, a generalizing condition of full plasticity are used.

Keywords: compression, layer, ideal plasticity, transmitting anisotropy.

REFERENCES

1. *Blend, D.* Nonlinear dynamic theory of elasticity / D. Blend. – M. : Mir, 1972. – 183 p.
2. *Kulikovskiy, A. G.* Nonlinear waves in elastic media / A. G. Kulikovskiy, E. I. Sveshnikova. – M. : Moscow lyceum, 1998. – 412 p.
3. *Burenin, A. A.* Shock waves in isotropic elastic space / A. A. Burenin, A. D. Chernyshov // Applied mathematics and mechanics. – 1978. – № 42 (4). – P. 711–717.
4. *Wang-Dayk, M.* Methods of indignations in mechanics of liquid / M. Wang-Dayk. – M. : Mir, 1967. – 239 p.
5. *Uizem, J.* Linear and nonlinear waves / J. Uizem. – M. : Mir, 1977. – 622 p.
6. *Ragozina, V. E.* About the evolutionary equations of problems of shock deformation with the flat surfaces of gaps / V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova // The computing mechanics of continuous environments. – 2009. – Vol. 2. – № 3. – P. 82–95.
7. *Burenin, A. A.* About influence of viscosity on nature of distribution of a flat longitudinal wave / A. A. Burenin, Yu. A. Rossikhin // Applied mechanics and technical physics. – 1990. – № 6. – P. 13–17.
8. *Ivanova, Yu. E.* About structure of a shock wave of deformations of change of a form / Yu. E. Ivanova // Materials of the All-Russian conference "Fundamental and applied questions mechanics", devoted to the 70 anniversary since the birth of the academician V. P. Myasnikov. – 2006. – P. 52–54.
9. *Pelinovskiy, Yu. N.* Nonlinear evolutionary equations / Yu. N. Pelinovskiy, V. E. Friedman, Yu. K. Engelbrecht. – Tallin : Valgus, 1984. – 164 p.
10. *Lurye, A. I.* Nonlinear theory of elasticity / A. I. Lurye. – M. : Nauka, 1980. – 512 p.
11. *Thomas, T.* Plastic current and destruction in solid bodies / T. Thomas. – M. : Mir, 1964. – 308 p.

Ragozina, Victoria Evgenevna

Ph.D., Senior researcher, Laboratory of Nonlinear dynamics of deformation, Department of Mechanics of Deformable Solid, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok

Ivanova, Yulia Evgenevna

Ph.D., Researcher, Laboratory of Nonlinear dynamics of deformation, Department of Mechanics of Deformable Solid, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok

А. Ф. Ревуженко

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ НАГРУЖЕНИЯ, ИМЕЮЩИЕ НЕОГРАНИЧЕННОЕ ЧИСЛО ИЗЛОМОВ

Институт горного дела Сибирского отделения РАН

Аннотация. Показано, что для решения вариационных задач, включая задачи пластического деформирования, можно использовать обобщенные кривые. Получены необходимые условия экстремума. Указаны классы задач, для которых решение может быть получено в замкнутом виде.

Ключевые слова: пластичность, вариационные принципы, обобщенные кривые.

УДК: 539.374

Основные труды профессора Д. Д. Ивлева и его научной школы посвящены проблемам теории пластичности. [1], [2], [3], [4]. Большое место в них занимают исследования типов уравнений и возможных разрывных пластических решений. Вообще вопрос о разрывах занимает в теории пластичности особое место. Сама природа пластической деформации связана с наличием разрывов смещений на различных масштабных уровнях. Последнее означает, что вопрос о степени гладкости функций, описывающих пластичность, является далеко нетривиальным и должен ставиться достаточно широко. Интересно было бы оценить степень значимости гипотезы о гладкости всех функций среди всех гипотез, которые фигурируют в замкнутой теории.

Речь идет о следующем. Решение любой задачи состоит из ряда шагов. Например, на первом шаге предполагается, что решение дается именно гладкой функцией, на втором шаге формулируется уравнение относительно искомой функции, на третьем – задается краевое условие. В результате получается решение. Какова относительная длина каждого из этих шагов?

Трудность получения оценки “длины” каждого шага связана с тем, что исходная степень неопределенности решения равна бесконечности. Причем каждый шаг уменьшает эту бесконечность на бесконечную же величину. Например, возможно бесконечно много степеней гладкости функции, бесконечно много возможных уравнений, которым может удовлетворять функция, бесконечно много краевых условий. И каждый выбор исключает бесконечное число альтернативных вариантов. Классическая теория, основанная на теоретико-множественном подходе, для получения оценок не срабатывает. Она имеет чрезвычайно широкий охват и как следствие – очень низкую разрешающую способность. Данная теория не различает даже “числа” точек на конечном отрезке, прямой и плоскости. Во всех случаях “число” точек равно континууму.

Поэтому в рассматриваемой ситуации необходим другой подход к бесконечности, который давал бы более тонкие оценки. Такие оценки были получены в [5] и показали, что условия гладкости решений несут в себе чрезвычайно много информации, которая вполне сравнима с информацией, доставляемой уравнениями. Это означает только одно: требования на

гладкость функций должны подвергаться такому же тщательному анализу как и уравнения, которым должны удовлетворять искомые решения. Ясно, что любое ослабление условий гладкости будет расширять возможности соответствующей теории.

Здесь, правда, возникает проблема построения адекватного математического аппарата. Классический аппарат дифференциального исчисления предназначен для работы с дифференцируемыми функциями. Ослабление требования дифференцируемости приводит к необходимости внесения новых элементов в математический аппарат. В этом направлении выполнено значительное число исследований. Их перечисление и тем более обзор выходят за рамки статьи. Здесь мы ограничимся только одним классом задач, которые связаны с так называемыми обобщенными кривыми [6]. Обобщенную кривую можно представить себе как некоторый геометрический объект, который имеет два масштабных уровня. На первом уровне мы видим обычную гладкую кривую. Но если мы посмотрим на нее через микроскоп, то увидим, что кривая представляет собой ломаную линию с бесконечно малыми звеньями. Если кривая – это траектория движения точки (возможно, в фазовом пространстве), то можно сказать так: траектория состоит из бесконечно малых зигзагов, галсов, которые выстилают собой обычную гладкую кривую.

Необходимость введения подобных объектов (и – главное – соответствующего аппарата для их описания) возникает в целом ряде прикладных областей. В [6] отмечается, что они впервые были введены автором [6] и затем “дважды открыты заново: сначала специалистами по теории игр в форме смешанных стратегий, а позднее – специалистами по динамическому программированию в форме так называемого скользящего режима”. Можно добавить, что в связи с проблемами пластичности независимо подобные объекты вводились в [7]. Ранее они рассматривались также в связи с задачами оптимального управления летательными аппаратами в [8]. Основным здесь является вопрос о выборе адекватного и достаточно удобного аппарата для работы с подобными объектами. Представляется, что подходящим для этой цели является аппарат неархимедова математического анализа [9]. Ниже остановимся именно на этой возможности.

1. Пусть ϵ – положительная актуальная бесконечно малая величина. Она меньше любого числа вида $1/n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Неархимедову прямую можно представить как линейно упорядоченную совокупность чисел вида

$$X = x + x_1\epsilon + x_2\epsilon^2 + x_3\epsilon^3 + \dots, \quad (1)$$

где переменные x, x_1, x_2, x_3, \dots обладают всеми свойствами вещественных чисел, включая аксиому Архимеда. Следовательно, если относительно x и x' известно, что $|x - x'| < 1/n$ для любого натурального n , то $x = x'$. Вместе с тем между числами вида x можно разместить сколько угодно чисел вида (1). Таким образом, неархимедова прямая (1) обладает иерархией масштабных уровней. Это обстоятельство позволяет описывать любые многомасштабные объекты, в том числе и объекты типа обобщенных кривых.

Разместим “направляющую” гладкую кривую на масштабе $X = x$, а отдельные звенья (галсы) – на первом микроуровне неархимедовой прямой $X = x_1\epsilon = \xi$. Пусть данной траектории отвечает функция

$$F(X) = f(x, \xi). \quad (2)$$

Исходную задачу поставим как вариационную: найти траекторию (2), которая доставит стационарные значения заданному функционалу. Условия стационарности приводят к замкнутой системе уравнений относительно функции (2). Уравнения являются дифференциальными по аргументу ξ и разностными по аргументам x и ξ (со сдвигами, равными актуальным бесконечно малым числам) [9]. С целью получения обозримых результатов ниже сделаем ряд

упрощений, которые учитывают специфику рассматриваемой задачи. Во-первых, нет большого смысла учитывать возможную криволинейность отдельных звеньев траектории. Поэтому по микропеременной ξ функцию (2) можно принять кусочно-линейной (рис. 1):

$$f(x, \xi) = y(x) + a(x)\xi + b(x) \quad |\xi| \leq l, \quad (3)$$

где $-p \leq \xi \leq q$. Параметры p, q заданы.

Для упрощения примем, что p, q не зависят от x . Пусть $l = const$ – это шаг по координате x и $l \rightarrow p + q$. Тогда условие непрерывности траектории принимает следующий вид:

$$y(x+l) - y(x) = a(x+l)p + a(x)q - b(x+l)p + b(x)q.$$

Примем, что $l \rightarrow 0$. Это значительно упрощает техническую сторону всех выкладок. В этом случае условие непрерывности траектории также упрощается:

$$y'(x) = a(x) + (1 - 2\mu)b(x), \quad (4)$$

где $\mu = p/l$; $1 - \mu = q/l$; $p + q = l$.

Рассмотрим теперь конструкцию функционала. Классическая задача вариационного исчисления состоит в том, чтобы найти экстремум функционала

$$J_k = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Здесь $y(x)$ – дифференцируемая функция. Перейдем теперь от гладкой траектории к траектории, представляющей собой обобщенную кривую (см. рис. 1). Для удобства последнюю также будем называть траекторией с галсами. По механическому смыслу многих задач для траекторий с галсами роль производной y' в функционале будет теперь играть производная $f_\xi(x, \xi)$. Таким образом, на участке $(x - p, x + q)$ имеем два галса

$$f_\xi(x, \xi) = a(x) - b(x) = z_1(x) = y'(x) - 2(1 - \mu)b(x), \text{ где } -p < \xi \leq 0, \\ f_\xi(x, \xi) = a(x) + b(x) = z_2(x) = y'(x) + 2\mu b(x), \text{ где } 0 < \xi < q.$$

Отсюда

$$y'(x) = \mu z_1(x) + (1 - \mu)z_2(x), \\ b(x) = \frac{z_2(x) - z_1(x)}{2}. \quad (5)$$

Здесь использовано условие непрерывности (4). Относительные доли длин самих участков по оси ОХ равны μ и $(1 - \mu)$. Принятое выше условие $l \rightarrow 0$ позволяет свести интегралы по неархимедовой прямой к обычным интегралам Римана [9]. Таким образом для траектории с галсами мы приходим к следующей задаче: найти экстремум функционала

$$J = \int_0^{x_e} [\mu F(x, y, z_1) + (1 - \mu)F(x, y, z_2)] dx$$

при $y(0) = 0$, $y(x_e) = y_e$ и условии (4).

Варьируя функции $y(x)$, $b(x)$, получим уравнения:

$$\mu F_y(x, y, z_1) + (1 - \mu)F_y(x, y, z_2) = \frac{\partial}{\partial x} \{ \mu F_z(x, y, z_1) + (1 - \mu)F_z(x, y, z_2) \}, \\ F_z(x, y, z_1) = F_z(x, y, z_2). \quad (6)$$

Здесь и ниже индексами y и z обозначены производные функции F по второму и третьему аргументам.

Займемся теперь исследованием полученной системы. Второе уравнение всегда имеет решение вида $z_1(x) \equiv z_2(x)$. Ему отвечает гладкая траектория без галсов. Ясно, что если это решение единственно, то траекторий с галсами вообще не существует. Если же возможны

решения вида $z_1(x) \neq z_2(x)$, то наряду с гладкими траекториями будут иметь место также оптимальные траектории с галсами. Будут ли они эффективнее гладких траекторий и насколько – зависит от конкретного вида функционала.

Для некоторых типов функционалов общие результаты можно получить аналитически. Идея построения состоит в следующем. Обратимся ко второму уравнению системы (3). Относительно переменных z_1 и z_2 данное уравнение является конечным (в общем случае – трансцендентным). Рассмотрим случаи, когда первое уравнение допускает интеграл и также сводится к конечному уравнению относительно z_1 и z_2 . Тогда из системы (3) можно будет определить функции $z_i = z_i(x, y)$, $i = 1, 2$. Затем определяем степень изломов траекторий из второго равенства (1). В заключение интегрируем первое уравнение (1) и определяем гладкую направляющую кривую $y(x)$.

2. Перейдем к реализации данной программы. Первое уравнение (3) допускает интеграл в двух основных случаях.

1°. Пусть функция F не зависит от аргумента y , то есть $F = F(x, y')$. Из (3) сразу следует, что

$$F(x, z_1) = C, F(x, z_2) = C; C = const.$$

Перейдем к обратным функциям

$$\begin{aligned} z_1 &= y'(x) - 2(1 - \mu)b(x) = \xi(x, C), \\ z_2 &= y'(x) + 2\mu b(x) = \eta(x, C). \end{aligned} \quad (7)$$

Обратная функция будет, вообще говоря, многозначной. Выбор однозначных ветвей может быть сделан из дополнительных соображений. Уравнения (7) легко интегрируются:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x [\mu\xi(x, C) + (1 - \mu)\eta(x, C)] dx + D, D = const, \\ a(x) &= \frac{\eta(x, C) + \xi(x, C)}{2}, b(x) = \frac{\eta(x, C) - \xi(x, C)}{2}. \end{aligned}$$

Свобода в выборе постоянных C и D позволяет удовлетворить краевым условиям. Все становится предельно ясным, если принять, что $\mu = 0.5$; $x_e = 1$ и, кроме того, функция F не зависит от аргумента x . Тогда стационарное значение функционала будет

$$J = \frac{F(\xi(C)) + F(\eta(C))}{2}.$$

Данное значение достигается на траекториях

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\xi(C) + \eta(C)}{2}x, \\ a(x) &= \frac{\eta(C) + \xi(C)}{2}, \quad b(x) = \frac{\eta(C) - \xi(C)}{2}. \end{aligned}$$

Постоянная C определяется условием

$$\frac{\xi(C) + \eta(C)}{2} = y_e.$$

Если $\xi(C) = \eta(C)$, то имеем

$$J = F(\xi(C)); y(x) = \xi(C)x, b = 0.$$

Постоянная C определяется условием $\xi(C) = y_e$. Отсюда значение функционала равно $J = J_k = F(y_e)$. Индекс “ k ” в обозначении J_k подчеркивает, что из решения получилась классическая траектория без галсов (т. к. $b \equiv 0$). Таким образом, для построения решения обращаемся к графикам функций $F(z)$ и $F_z(z)$ (пример для $F(z) = 0,25(z^2 - 1)^2$ показан на рис. 2). Проводим прямую, параллельную оси Oz , на расстоянии C от оси. Отмечаем точки пересечения данной прямой с графиком $F_z(z)$. Если пересечение происходит только в одной

точке, то возможны только классические траектории. Пусть пересечение происходит в трех точках M, N, K , как показано на рис. 2. Тогда абсцисса одной из точек объявляется значением $\xi(C)$, а абсцисса либо той же самой точки, либо одной из остальных точек объявляется значением $\eta(C)$. Для каждого из девяти вариантов подсчитывается значение функционала и значение y_e . Затем выбирается наиболее приемлемый вариант.

Возьмем теперь две траектории с одинаковой направляющей. Для них

$$\frac{J}{J_{\kappa}} = \frac{F(\xi(C)) + F(\eta(C))}{2} \bigg/ F\left(\frac{\xi(C) + \eta(C)}{2}\right). \quad (8)$$

Следовательно, степень эффективности перехода от классической траектории к траектории с галсами определяется степенью выпуклости функции $F(z)$.

2°. Есть еще один довольно широкий класс функционалов, когда система уравнений (3) становится конечной относительно аргументов z_1, z_2 . Это функционалы, в которых функция F не зависит от аргумента x , то есть $F = F(y, y')$. В этом случае уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \{F_{y'}\} = 0$$

имеет первый интеграл [10]

$$F(y, y') - y' \bullet F_{y'}(y, y') = C = const.$$

Отсюда и (3) сразу следует система

$$\begin{aligned} &\mu \cdot F(y, z_1) + (1 - \mu) \cdot F(y, z_2) - \\ & - (\mu z_1 + (1 - \mu)z_2) \cdot [\mu \cdot F_z(y, z_1) + (1 - \mu) \cdot F_z(y, z_2)] = C, \end{aligned}$$

$$F_z(y, z_1) = F_z(y, z_2).$$

В системе (9) обе функции F, F_z от своих аргументов известны, и задача состоит в том, чтобы разрешить данную систему относительно z_1 и z_2 .

Система относительно z_1 и z_2 является конечной (в общем случае – трансцендентной). Построение ее решений принципиальных трудностей не вызывает. Обозначим решение системы как

$$z_1 = \xi(y, C), \quad z_2 = \eta(y, C). \quad (9)$$

Основная проблема на этом этапе состоит в выделении однозначных ветвей обратных функций и формулировке условий, при которых $z_1 = z$ или, напротив, $z_1 \neq z_2$.

Перейдем теперь к дифференциальной составляющей системы (9). Из (7), (10) имеем:

$$\begin{aligned} y' - 2(1-\mu)b &= \xi(y, C), \\ y' + 2\mu b &= \eta(y, C). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$y' = \mu\xi(y, C) + (1 - \mu)\eta(y, C), \quad \int_{y_1}^y \frac{dy}{\mu\xi(y, C) + (1 - \mu)\eta(y, C)} = x + D,$$

где y_1 выбирается из удобства, $D = const$, $y = y(x, C, D)$. Последние два аргумента будем опускать.

Отсюда

$$a(x) = \frac{\eta(y(x), C) + \xi(y(x), C)}{2}, \quad b(x) = \frac{\eta(y(x), C) - \xi(y(x), C)}{2}.$$

Таким образом, построенное решение зависит от двух постоянных. Для их определения имеются два крайних условия.

Полученные результаты можно использовать для решения некоторых задач теории пластичности.

В [11] рассматривалась задача поиска оптимального режима пластической обработки металлов. Показано, что при определенных условиях траектория нагружения должна представлять собой ломаную линию с бесконечно мелкими звеньями. Рассмотрим аналогичную задачу в рамках сделанных выше построений.

Пусть с какой-то степенью приближения можно принять, что $\sigma = \sigma(\varepsilon, \varepsilon')$, где σ и ε – это напряжения и деформации, штрих – производная по времени t . Зависимость от последнего аргумента может описывать нелинейные вязкие свойства среды. Зависимость от первого аргумента означает, что соответствующая теория относится к деформационному типу. Пусть за время от 0 до t_e создается деформация, равная ε_e . При этом удельная работа равна

$$J = \int_0^{t_e} \varepsilon' \cdot \sigma(\varepsilon, \varepsilon') dt.$$

Можно поставить задачу поиска оптимальных траекторий нагружения, обеспечивающих минимальную работу при заданных величинах деформации ε_e и времени ее достижения t_e . Если переобозначить $t, \varepsilon(t), \varepsilon'(t)$ и $\varepsilon' \sigma(\varepsilon, \varepsilon')$ через $x, y(x), y'(x)$ и $F(y, y')$, то можно убедиться в том, что задача об оптимальной траектории нагружения относится к классу задач, рассмотренных выше.

Приведем примеры, имея в виду общий случай уравнений (3).

1°. Пусть

$$J = \frac{1}{4} \int_0^1 [(y')^2 - 1]^2 dx.$$

Алгоритм решения следующий:

1. Выбираем параметр μ , например, $\mu=0,5$.
2. Определяем функции

$$F(x, y, z) = \frac{1}{4}(z^2 - 1)^2; \quad F_z = z \cdot (z^2 - 1).$$

3. Строим графики обеих функций и рассматриваем пересечение графиков с горизонтальными прямыми $C=const$. Для функций $\xi(C)$ и $\eta(C)$ выберем ветви MD_1 и D_2K . (см. рис. 2).

4. Из оценки (5) видно, что наибольший эффект при переходе от гладкой траектории к траектории с галсами будет при $C = 0$. Положим $C = 0$. Тогда $\xi(0) = -1, \eta(0) = +1$ и

$$a = 0; \quad b = 1; \quad y(x) = 0; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Таким образом, для гладкой траектории, соответствующей точке $\xi=0, \eta=0$, имеем $y(x) \equiv 0$ и $J_k = 1$. Для траектории с галсами $f(x, \xi) = |\xi|$ и значение функционала гораздо меньше – $J = 0$.

Нетрудно указать конкретные траектории также для других граничных значений $y(1) = y_e$.

2°. Обратимся к уравнениям (9). Положим

$$F(y, z) = (k + z^3)/\phi(y),$$

где $k=const, \phi(y) \neq 0$. Из второго уравнения (9) следует, что $z_1 = \pm z_2$. Верхнему знаку соответствует обычная гладкая экстремаль без галсов. Этот вариант рассматривать не будем. Нижнему знаку соответствуют экстремали с галсами, причем

$$a(x) = \frac{z_1 + z_2}{2} \equiv 0; \quad b(x) = \frac{z_2 - z_1}{2} = -z_1,$$

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{k - C \cdot \varphi(y)}{2(2\mu - 1)}}.$$

Отсюда

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt[3]{k - C \cdot \varphi(y)}} = \frac{(2\mu - 1)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} x.$$

Здесь принято, что $y(0) = 0$. Если положить, что $\phi(y) = y$, то в качестве направляющей получим график степенной функции. Нетрудно построить направляющую и в более сложных случаях.

Если посмотреть на построение в целом, то можно поставить вопрос: насколько необходимыми в них являются методы неархимедова анализа? Нельзя ли обойтись чисто классическими методами? Обратимся к равенству (3). Ясно, что вместо записи (3) можно использовать запись типа

$$\{y(x), a(x), b(x)\}. \quad (10)$$

Далее можно принять, что значение “функции” (11) характеризуется значениями $y(x)$, а производные (11) – функциями $a(x)$ и $b(x)$. Именно такой подход был использован в [8], [7]. В теории пластичности данному подходу соответствуют модели с внутренними переменными. В приближении, когда параметр $l \rightarrow 0$, задача фактически сводится к классической. Однако в более сложных случаях представления (11) будет недостаточно. Например, если не ставится условие $l \rightarrow 0$ или когда требуется определение дальнейших операций с объектами типа (11). В рамках неархимедова анализа данные вопросы решаются естественным образом. Например, квадрат функции (3) равен (при $b \equiv 0$):

$$f^2(x, \xi) = y^2 + 2ay \bullet \xi + a^2 \xi^2.$$

Видно, что здесь необходимо использовать уже три масштабных уровня неархимедовой прямой. Для более сложных функций число уравнений возрастает неограниченно. Ясно, что в рамках модели с внутренними переменными данные построения становятся невозможными и единственно приемлемый путь связан с применением методов неархимедова анализа.

Выводы.

1. При решении вариационных задач, включая задачи пластического деформирования, в качестве экстремалей есть смысл рассматривать обобщенные кривые. Последние представляют собой ломаные линии с бесконечно малыми звеньями.

2. На данных экстремальных можно достичь более глубокого минимума по сравнению с обычными гладкими экстремальными.

3. Для описания обобщенных кривых могут быть использованы методы неархимедова математического анализа.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – М. : Наука, 1971. – 231 с.
- [3] *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
- [4] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред : в 2 т. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды / Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 448 с.

- [5] *Ревуженко, А. Ф.* Механика упругопластических сред и нестандартный анализ / А. Ф. Ревуженко. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 428 с.
- [6] *Янг, Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления / Л. Янг. – М. : Мир, 1974. – 488 с.
- [7] *Ревуженко, А. Ф.* К вопросу о плоском деформировании упрочняющихся и разупрочняющихся пластических материалов / А. Ф. Ревуженко, Е. И. Шемякин // Прикл. мех. и техн. Физики. – 1977. – № 3. – С. 157–173.
- [8] *Кротов, В. Ф.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета / В. Ф. Кротов, В. З. Букреев, В. И. Гурман. – М. : Машиностроение, 1969. – 288 с.
- [9] *Ревуженко, А. Ф.* Математический анализ функций неархимедовой переменной / А. Ф. Ревуженко. – Новосибирск : Наука, 2012. – 327 с.
- [10] *Эльсгольц, Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – Изд. 2-е. – М. : Наука, Физматгиз, 1969. – 424 с.
- [11] *Кротов, В. Ф.* Экстремальные процессы пластической деформации металлов / В. Ф. Кротов, М. Я. Бровман // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1962. – № 3. – С. 148–153.

Ревуженко Александр Филиппович,

доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск

e-mail: revuzhenko@yandex.ru

A. F. Revugenko

**THE OPTIMUM TRAJECTORIES OF LOADING HAVING UNLIMITED
NUMBER OF BREAKS**

Institute of mining of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science

Abstract. It is shown that for the solution of variation tasks, including problems of plastic deformation, it is possible to use the generalized curves. Necessary conditions of an extremum are received. Classes of tasks, for which are specified the decision can be received in the closed look.

Keywords: plasticity, the variation principles generalized curves.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* The theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 231 p.
- [2] *Ivlev, D. D.* The theory of a being strengthened plastic body / D. D. Ivlev, G. I. Bykovtsev. – M. : Nauka, 1971. – 208 p.
- [3] *Bykovtsev, G. I.* Plasticity theory / G. I. Bykovtsev, D. D. Ivlev. – Vladivostok : Dalnauka, 1998. – 528 p.
- [4] *Ivlev, D. D.* Mechanics of plastic environments : в 2 т. Т. 2. General questions. Zhestkoplasticheskoye and uprugoplasticheskoye condition of ph. Hardening. Deformation theories. Difficult environments / D. D. Ivlev. – M. : Fizmatlit, 2002. – 448 p.
- [5] *Revuzhenko, A. F.* Mechanics of elastic plastic environments and non-standard analysis / A. F. Revuzhenko. – Novosibirsk : Publishing house Novosib. University, 2000. – 428 p.
- [6] *Young, L.* Lectures on calculus of variations and theory of optimum control / L. Young. – M. : Mir, 1974. – 488 p.
- [7] *Revuzhenko, A. F.* To a question of flat deformation being strengthened and time of being strengthened plastic materials / A. F. Revuzhenko, E. I. Shemyakin // Magazine of applied mechanics and technical physics. – 1977. – № 3. – P. 157–173.
- [8] *Krotov, V. F.* New methods of calculus of variations in dynamics of flight / V. F. Krotov, V. Z. Bukreev, V. I. Gurman. – M. : Mechanical engineering, 1969. – 288 p.
- [9] *Revuzhenko, A. F.* Mathematical analysis of functions of not Archimedean variable / A. F. Revuzhenko. – Novosibirsk : Nauka, 2012. – 327 p.
- [10] *Elsgolts, L. E.* Differential equations and calculus of variations / L. E. Elsgolts. – Edition 2. – M. : Nauka, Fizmatgiz, 1969. – 424 p.
- [11] *Krotov, V. F.* Extreme processes of plastic deformation of metals / V. F. Krotov, M. Ya. Brovman // News of Academy of Sciences of the USSR. Mechanics and mechanical engineering. – 1962. – № 3. – P. 148–153.

Revugenko, Alexandr Filippovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of mining of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ СРЕДЫ МИЗЕСА

*Сибирский государственный аэрокосмический университет
им. академика М. Ф. Решетнева*

Universidad de Guadalajara (Mexico)

Аннотация. В предлагаемой статье впервые приводятся законы сохранения для уравнений пластичности среды Мизеса в трехмерном случае, а также для уравнений плоского напряженного состояния с условием пластичности Мизеса. Для последних уравнений приведены линейные уравнения, позволяющие строить характеристики. Для системы плоского деформированного состояния с помощью законов сохранения решена задача о свободной границе для произвольного выпуклого контура, подвергнутого постоянному нормальному и нулевому касательному напряжениям.

Ключевые слова: пластичность идеальная, законы сохранения, симметрии, краевые задачи.

УДК: 539.374

Введение

Законы сохранения становятся одним из важнейших инструментов изучения и решения дифференциальных уравнений. Такое значение они приобрели после выхода статьи Э. Нетер [5]. В этой работе было показано, что между так называемыми нетеровыми симметриями и законами сохранения существует тесная связь, а именно каждой симметрии соответствует некоторый закон сохранения. Позднее было показано, что такая связь существует только для уравнений, выведенных из вариационного принципа, а для остальных уравнений следует строить оператор универсальной линейаризации и искать ядро оператора, сопряженного к нему [1]. Это позволило начать последовательно строить законы сохранения для уравнений пластичности и, главное, использовать их для решения основных краевых задач плоской теории идеальной пластичности [4], [5], [6], [7], [8], [9].

Приведем необходимые сведения из теории законов сохранения. Пусть дана система дифференциальных уравнений: $F_\alpha(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_j^\alpha) = 0$, где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — независимые переменные, $\bar{u} = (u_1, \dots, u_m)$ — зависимые переменные, \bar{u}_j^α — всевозможные производные, входящие в систему.

Сохраняющимся током называется вектор $\bar{A} = (A_1, \dots, A_n)$ с компонентами, зависящими от $\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_j^\alpha$, который удовлетворяет соотношению, называемому *законом сохранения*:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \Delta_\alpha F_\alpha(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_j^\alpha) = 0, \quad (1)$$

где Δ_α — некоторые линейные дифференциальные операторы.

Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Имеет место (см. [4] и цитируемую там литературу)

Теорема 1. Пусть система уравнений выводится из вариационного принципа и допускает следующую точечную нетерову симметрию ($i = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, m$)

$$X = \xi^j \frac{\partial}{\partial x_j} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \quad (2)$$

Тогда i -я компонента сохраняющегося тока имеет вид:

$$A_i = \eta^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} + \xi^i L - \xi^j u_j^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha},$$

где L — функция Лагранжа системы.

Законы сохранения трехмерных уравнений пластичности

Рассмотрим систему уравнений идеальной пластичности в стационарном трехмерном случае, состоящей из уравнений равновесия

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j}, \quad (3)$$

условия текучести Мизеса

$$s_{ij}s_{ij} = 2k^2, \quad (4)$$

условия несжимаемости

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

и связи

$$s_{ij} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \lambda e_{ij}, \quad (6)$$

где s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений, e_{ij} — компоненты тензора скоростей деформации, p — гидростатическое давление, u_i — компоненты вектора скоростей, k — постоянная пластичности, $\lambda = \lambda(x_1, x_2, x_3)$ — положительная функция, определяемая условием текучести. Исключая из уравнений (3)–(6) величины s_{ij} , λ получим четыре нелинейных уравнения, связывающие только функции p, u_1, u_2, u_3 :

$$F_i : \frac{\partial p}{\partial x_i} - k \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}{\sqrt{2e_{ij}e_{ij}}} \right) = 0, \quad F_4 : \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (7)$$

Система (7) допускает алгебру Ли L_{15} точечных преобразований, порождаемую следующими операторами [7] ($i = 1, 2, 3$):

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad S = \frac{\partial}{\partial p}, \quad N = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad M = u_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad (8)$$

$$Z_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_3} - u_3 \frac{\partial}{\partial u_2}, \quad T_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial u_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial u_2}. \quad (9)$$

Операторы Z_2, T_2, Z_3, T_3 получаются из Z_1, T_1 круговой перестановкой индексов. Группа точечных преобразований порождается следующими однопараметрическими подгруппами:

$$x'_i = x_i + a_i, \quad u'_i = u_i + b_i, \quad p' = p + c, \quad (10)$$

$$x'_i = x_i \exp(a_{i+3}), \quad u'_i = u_i \exp(b_{i+3}), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} x'_2 &= x_2 \cos \varphi_1 + x_3 \sin \varphi_1, & x'_3 &= -x_2 \sin \varphi_1 + x_3 \cos \varphi_1, \\ u'_2 &= u_2 \cos \varphi_1 + u_3 \sin \varphi_1, & u'_3 &= -u_2 \sin \varphi_1 + u_3 \cos \varphi_1, \end{aligned} \quad (12)$$

$$u'_2 = u_2 + d_1 x_3, \quad u'_3 = u_3 - d_1 x_2, \quad (13)$$

где $a_i, b_i, \varphi_i, d_i, c$ — групповые параметры.

Преобразования (10) — трансляции по переменным x_i, u_i, p ; (11) — растяжения по переменным x_i, u_i ; (12) — три вращения в плоскостях $x_1 O x_2, x_2 O x_3, x_3 O x_1$ и три жестких перемещения (13).

Уравнения (7) выводятся из вариационного принципа

$$\iiint L \left(x_i, u_i, p, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) dx_1 dx_2 dx_3,$$

где

$$L = u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + k \sqrt{2e_{ij}e_{ij}}. \quad (14)$$

Нетрудно проверить, что уравнения (7) есть уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$F_i : \frac{\partial L}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right) = 0, \quad F_4 : \frac{\partial L}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right) = 0. \quad (15)$$

Для системы (7) с помощью нетеровских симметрий можно построить законы сохранения. Известно, что нетеровские симметрии есть подалгебра симметрий, допускаемых системой уравнений (7). Для их отыскания достаточно из симметрий (8), (9) найти те, которые не изменяют функцию Лагранжа (14). Для проверки того, является ли данная симметрия X нетеровской, используем известное условие инвариантности функции Лагранжа [6]

$$X_1(L) + LD_i(\xi^i) = 0, \quad (16)$$

где X_1 — первое продолжение оператора X вида (2), D_i — оператор полной производной по переменной x_i .

Нетрудно видеть, что нетеровские симметрии порождаются операторами X_i , S и Z_i . Используя теорему 1, получаем, что оператору X_1 соответствует закон сохранения ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(L - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_1}} - \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial p}{\partial x_1}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_2}} - \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial p}{\partial x_2}} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_3}} - \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial p}{\partial x_3}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогично можно построить и остальные 6 законов сохранения, соответствующих операторам X_2 , X_3 , Z_1 , Z_2 , Z_3 , S . Четыре закона сохранения есть линейная комбинация уравнений равновесия, еще три есть законы сохранения моментов импульса. Для уравнений Навье–Стокса найдена полная система законов сохранения. Для них получены аналогичные законы [2]. Так как уравнения пластического течения во многом аналогичны уравнениям Навье–Стокса, то для них трудно ожидать появления законов сохранения, отличных от приведенных здесь.

Законы сохранения системы плоского напряженного состояния

Уравнения плоского напряженного состояния имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\varphi \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \cos 2\varphi + \operatorname{ctg} \omega \right) \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \cos 2\varphi - \operatorname{ctg} \omega \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\varphi \frac{\partial \omega}{\partial y}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для поиска законов сохранения следует для системы уравнений построить оператор универсальной линеаризации l_F и формально сопряженный к нему оператор l_F^* , а затем решить уравнение

$$l_F^* \Psi = 0, \quad (19)$$

суженное на решения системы уравнений (18), здесь $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$. Методика построения этих операторов и ссылки на литературу можно найти в [1].

После несложных преобразований $l_F^* \Psi = 0$ запишется в виде:

$$D_x \Psi_1 - \left(\sqrt{3} \cos 2\varphi \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\varphi \right) \Psi_1 + D_y \Psi_2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\varphi \frac{\partial \omega}{\partial x} - \sqrt{3} \cos 2\varphi \right) \Psi_2 = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin 2\varphi D_x \Psi_1 - \left(\sqrt{3} \cos 2\varphi + \operatorname{ctg} \omega \right) D_y \Psi_1 + \left(2\sqrt{3} \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sqrt{3} \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin^2 \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \Psi_1 - \left(\sqrt{3} \cos 2\varphi - \operatorname{ctg} \omega \right) D_x \Psi_2 - \sqrt{3} \sin 2\varphi D_y \Psi_2 + \\ \left. + \left(\sqrt{3} \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\sqrt{3} \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Psi_2 = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где D_x, D_y — операторы полного дифференцирования, ограниченные на многообразии, определяемом системой (18). Ясно, что уравнения (20), (21) имеют бесконечно много решений. Одну из таких бесконечных серий решений ищем в виде $\Psi_1 = A(\varphi, \omega)$, $\Psi_2 = B(\varphi, \omega)$.

Замечание. Можно найти и другие решения уравнения (19), но поскольку для компонентов сохраняющегося тока, зависящих от производных, пока неизвестно применение для решения каких-либо задач, то в этой работе мы ограничились только таким видом сохраняющегося тока.

Поскольку уравнения (20) должны выполняться на всех решениях системы, то коэффициенты при производных $\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}$ тождественно равны нулю. Отсюда имеем линейные уравнения для определения компонентов сохраняющегося тока:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(\varphi, \omega)}{\partial \omega} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial A(\varphi, \omega)}{\partial \varphi} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \frac{\partial B(\varphi, \omega)}{\partial \varphi} \left(\sqrt{3} \cos 2\varphi - \operatorname{ctg} \omega \right) = 0, \\ \frac{\partial B(\varphi, \omega)}{\partial \omega} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial B(\varphi, \omega)}{\partial \varphi} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \frac{\partial A(\varphi, \omega)}{\partial \varphi} \left(\sqrt{3} \cos 2\varphi + \operatorname{ctg} \omega \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует

Теорема 2. Уравнения плоского напряженного состояния допускают бесконечную серию законов сохранения.

Система (18) имеет две характеристики в гиперболической области

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi - \psi), \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi + \psi) \quad (22)$$

и соотношения на характеристиках:

$$\Omega - \varphi = \operatorname{const}, \quad \Omega + \varphi = \operatorname{const},$$

где

$$\Omega = -\frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\omega} \frac{\sqrt{3 - 4 \cos^2 \omega}}{\sin \omega} d\omega, \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\operatorname{ctg} \omega}{\sqrt{3}}.$$

Введем новые переменные по формулам: $\Omega - \varphi = \xi$, $\Omega + \varphi = \eta$.

Тогда система (18) запишется в виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \operatorname{tg}(\varphi - \psi) \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} + \operatorname{tg}(\varphi + \psi) \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \quad (23)$$

В этом случае на компоненты сохраняющегося тока получаем следующие линейные уравнения:

$$\frac{\partial B}{\partial \xi} - \operatorname{tg}(\varphi - \psi) \frac{\partial A}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial \eta} - \operatorname{tg}(\varphi + \psi) \frac{\partial A}{\partial \eta} = 0. \quad (24)$$

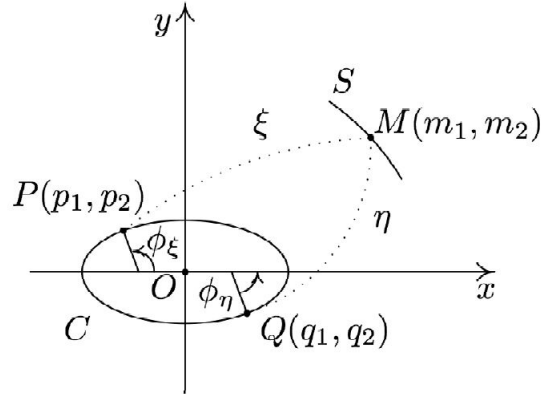


Рис. 1

Пусть вдоль линии $P(p_1, p_2) Q(q_1, q_2)$ заданы функции ξ, η (см. рис. 1). Отметим, что линия PQ не является характеристикой и пересекает характеристики только один раз. Проведем из точки P характеристику $\xi = const.$, а из точки Q характеристику $\eta = const.$ до их пересечения в точке $M(m_1, m_2)$. Найдем координаты этой точки. Имеем

$$\oint_{PQM} A dy - B dx = \int_{\xi=const.} A dy - B dx + \int_{\eta=const.} A dy - B dx + \int_{PQ} A dy - B dx = 0. \quad (25)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\xi=const.} A dy - B dx &= \int_{\xi=const.} (A \operatorname{tg}(\varphi - \psi) - B) dx = \\ &= x(A \operatorname{tg}(\varphi - \psi) - B)|_Q^P - \int_{\xi=const.} x d(A \operatorname{tg}(\varphi - \psi) - B). \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть

$$A \operatorname{tg}(\varphi - \psi) - B = C_1 = const., \quad \text{при } \xi = const., \quad (27)$$

тогда имеем

$$(p_1 - m_1)C_1 = \int_{\xi=const.} A dy - B dx.$$

Аналогично получаем

$$(m_1 - q_1)C_2 = \int_{\eta=const.} A dy - B dx,$$

где

$$A \operatorname{tg}(\varphi + \psi) - B = C_2 = const., \quad \text{при } \eta = const. \quad (28)$$

Окончательно из (26) получаем

$$m_1(C_2 - C_1) = q_1 C_2 - p_1 C_1 + \int_{PQ} A dy - B dx,$$

где A, B определяются из решения системы (24) с граничными условиями (27), (28).

Аналогично получаем соотношения для второй координаты

$$\begin{aligned} \int_{\xi=const.} A dy - B dx &= \int_{\xi=const.} (A - B \operatorname{ctg}(\varphi - \psi)) dy = \\ &= y(A - B \operatorname{ctg}(\varphi - \psi))|_Q^P - \int_{\xi=const.} y d(A - B \operatorname{ctg}(\varphi - \psi)). \end{aligned} \quad (29)$$

Положим

$$A - B \operatorname{ctg}(\varphi - \psi) = C_3, \quad \text{при } \xi = const, \quad (30)$$

тогда имеем

$$(p_2 - m_2)C_3 = \int_{\xi=const.} A dy - B dx.$$

Аналогично получаем

$$(m_2 - q_2)C_4 = \int_{\eta=const.} A dy - B dx,$$

где

$$A - B \operatorname{ctg}(\varphi + \psi) = C_4, \quad \text{при } \eta = const. \quad (31)$$

Окончательно из (29) получаем соотношения для определения второй координаты точки M

$$m_2(C_4 - C_3) = q_2 C_4 - p_2 C_3 + \int_{PQ} A dy - B dx,$$

где A, B определяются из решения системы (24) с граничными условиями (30), (31).

Решение поставленных задач позволяет построить для уравнений плоского напряженного состояния сетку линий характеристик. Эти линии, в отличие от случая уравнений плоского деформированного состояния, которые будут рассмотрены ниже, не совпадают с линиями скольжения. Но главные направления тензора напряжений делят пополам углы между характеристиками, поэтому знание характеристик позволяет восстанавливать линии скольжения.

Законы сохранения системы плоского деформированного состояния

Рассмотрим классическую систему плоской идеальной пластичности, состоящую из двух уравнений равновесия и условия пластичности Треска–Сен-Венана–Мизеса [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta \right) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta \right) &= 0, \end{aligned} \quad (32)$$

в которой σ – гидростатическое давление, $\theta + \frac{\pi}{4}$ – угол между первым главным направлением тензора напряжений и осью ox , k – постоянная пластичности. Система (3) описывает напряженное состояние пластически деформируемого материала.

Квазилинейная система (3) является гиперболической, характеристики задаются уравнениями:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \theta. \quad (33)$$

Вдоль соответствующих характеристик выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\sigma}{2k} - \theta = C_1, \quad \frac{\sigma}{2k} + \theta = C_2.$$

Законы сохранения системы (3) подробно описаны в [9] и подобны (24) при $\varphi = \theta + \pi/4$, $\psi = \pi/4$.

Рассмотрим задачу о поиске свободной границы. Пусть на контуре C некоторого выпуклого отверстия (см. рис. 1) заданы постоянная нормальная и нулевая касательная, составляющие напряжения

$$\sigma_n^C = -p, \quad \tau_n^C = 0. \quad (34)$$

Найдем свободную границу S , на которой

$$\sigma_n^S = \tau_n^S = 0. \quad (35)$$

Следуя [3], выпишем условия для функций σ и θ

$$\sigma_n = \sigma - k \sin 2(\theta - \phi), \quad \tau_n = k \cos 2(\theta - \phi), \quad (36)$$

где ϕ — угол между нормалью к контуру и осью Ox .

Подставив в (36) выражение (34), получим ($m \in \mathbb{Z}$):

$$\theta^C = \phi^C \pm \pi/4 + m\pi, \quad \sigma^C = -p \pm k.$$

Проведем характеристики

$$\xi = \sigma^C/2k - \theta_\xi^C, \quad \eta = \sigma^C/2k + \theta_\eta^C,$$

где $\theta_\xi^C, \theta_\eta^C$ — значения θ^C в точках $P, Q \in C$ соответственно (см. рис. 1).

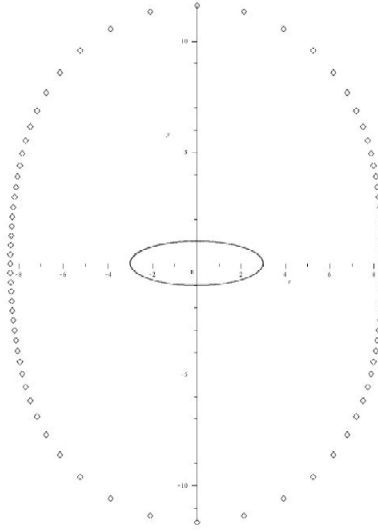


Рис. 2. Свободная граница для контура $x^2/9 + y^2 = 1$

Применяя вышеизложенный метод, определим координаты точки M , где будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma^M &= k(\eta + \xi) = \sigma^C + k(\phi_\eta^C - \phi_\xi^C), \\ \theta^M &= (\eta - \xi)/2 = (\phi_\eta^C + \phi_\xi^C)/2 \pm \pi/4 + m\pi. \end{aligned} \quad (37)$$

С другой стороны, ввиду (35)

$$\sigma^M = \pm k, \quad \theta^M = \phi^M \pm \pi/4 + m\pi. \quad (38)$$

Приравнивая правые части равенств (37), (38), получим

$$p = k(\phi_\eta^C - \phi_\xi^C), \quad \phi^M = (\phi_\eta^C + \phi_\xi^C)/2. \quad (39)$$

В качестве конкретного примера рассмотрим контур C в виде эллипса (рис. 1). Равенство (39) выполнено, если $\phi_\eta^C - \phi_\xi^C = m\pi$. Изменяя координаты точек P, Q , найдем линию S ,

которая будет являться границей, свободной от напряжения. На рис. 2 приведены точки свободной границы для контура C в виде эллипса $x^2/9 + y^2 = 1$ при $p = k\pi$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Бочаров, А. В.* Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А. В. Бочаров, А. М. Вербовецкий, А. М. Виноградов и др. ; под ред. А. М. Виноградова и И. С. Красильщика. — М. : Факториал, 1997. — 464 с.
- [2] *Gusyatnikova, V. N.* Symmetries and conservation laws of Navier-Stokes equations. Symmetries of partial differential equations, Part I. / V. N. Gusyatnikova, V. A. Yumaguzhin // Acta Appl. Math. — 1989. — No. 1-2 (15). — P. 65–81.
- [3] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. — М. : Наука, 1969. — 420 с.
- [4] *Киряков, П. П.* Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. — Новосибирск : Издательство СО РАН, 2001. — 192 с.
- [5] *Noether, E.* Invariante Variationsprobleme. Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen / E. Noether // Math-phys. Klasse. — 1918. — P. 235–257 [arXiv:physics/0503066v1].
- [6] *Овсянников, Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с.
- [7] *Сенашов, С. И.* Инвариантные пространственные решения уравнений идеальной пластичности / С. И. Сенашов // ПМТФ. — 1980. — № 3. — С. 159–163.
- [8] *Senashov, S. I.* Cauchy problem solution for hyperbolic system of the homogeneous 2-dimensional quasilinear equations / S. I. Senashov, A. N. Yakhno // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М. Ф. Решетнева. — 2009. — № 4 (25). — С. 26–28.
- [9] *Senashov, S. I.* Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity / S. I. Senashov, A. Yakhno // SIGMA. — 2012. — № 8 (071) [arXiv:1210.3673v1].

Сенашов Сергей Иванович,

доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск

e-mail: sen@sibsau.ru

Яхно Александр Николаевич,

кандидат физико-математических наук, профессор Университета Гвадалахары, Мексика

e-mail: alexander.yakhno@cucei.udg.mx

S. I. Senashov, A. N. Yakhno

CONSERVATION LAWS OF TREE-DIMENSIONAL MISES PLASTICITY EQUATIONS

Siberian State Aerospace University named after M.F. Reshetnev

Universidad de Guadalajara, Guadalajara, Mexico

Abstract. For the first time, the conservation laws for the von Mises plasticity equations in three dimensions are given, as well as for plane stress equations. In the plane case, conservation laws are used to construct characteristics for Cauchy problem. For the system of the plane strain, the conservation laws are used to solve the free boundary problem for any convex smooth contour.

Keywords: plasticity, ideal, conservation laws, symmetries, boundary problems.

REFERENCES

- [1] *Bocharov, A. V.* Symmetries and conservation laws, equations of mathematical physics / A. V. Bocharov, A. M. Verbovetsky, A. M. Vinogradov and others ; under edition A. M. Vinogradova и I. S. Krasilshika. — М. : Factorial, 1997. — 464 p.
- [2] *Gusyatnikova, V. N.* Symmetries and conservation laws of Navier-Stokes equations. Symmetries of partial differential equations, Part I. / V. N. Gusyatnikova, V. A. Yumaguzhin // *Acta Appl. Math.* — 1989. — No. 1-2 (15). — P. 65–81.
- [3] *Kachanov, L. M.* Fundamentals of the theory of plasticity / L. M. Kachanov. — М. : Nauka, 1969. — 420 p.
- [4] *Kiryakov, P. P.* The appendix of simmetriya and conservation laws to the solution of the differential equations / P. P. Kiryakov, S. I. Senashov, A. N. Yakhno. — Novosibirsk : Publishing house of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, 2001. — 192 p.
- [5] *Noether, E.* Invariante Variationsprobleme. *Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen / E. Noether // Math-phys. Klasse.* — 1918. — P. 235–257 [arXiv:physics/0503066v1].
- [6] *Ovsyannikov, L. V.* Group analysis of the differential equations / L. V. Ovsyannikov. — М. : Nauka, 1978. — 400 p.
- [7] *Senashov, S. I.* Invariant spatial solutions of the equations of ideal plasticity / S. I. Senashov // *ПМТФ.* — 1980. — № 3. — P. 159–163.
- [8] *Senashov, S. I.* Cauchy problem solution for hyperbolic system of the homogeneous 2-dimensional quasilinear equations / S. I. Senashov, A. N. Yakhno // *Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М. Ф. Решетнева.* — 2009. — № 4 (25). — P. 26–28.
- [9] *Senashov, S. I.* Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity / S. I. Senashov, A. Yakhno // *SIGMA.* — 2012. — № 8 (071) [arXiv:1210.3673v1].

Senashov, Sergey Ivanovich

Dr. of Science, professor of Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, Russia

Yakhno, Alexander Nikolaevich

PhD., professor of Universidad de Guadalajara, Guadalajara, Mexico

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ЛИСТА С ОТВЕРСТИЕМ, БЛИЗКИМ
К КРУГОВОМУ**

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе используется метод возмущений для определения напряженно-деформированного состояния листа в предположении, что форма отверстия может быть представлена в виде ряда Фурье.

Ключевые слова: трансверсальная анизотропия, пластическое течение, малый параметр

УДК: 539.374

Растяжение тонкой пластины из упругопластического изотропного материала рассмотрено в работе [1]. Исследование напряженного состояния анизотропного листа с отверстием, близким к круговому проводилось в работе [2], [3].

Рассмотрим трансверсально-изотропную тонкую пластину с отверстием, представленным формулой

$$\rho = a + \delta \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta, \quad (1)$$

здесь $\delta < 1$.

При наличии пластической зоны, охватывающей все отверстие, условие пластичности принимается в виде [2]:

$$\sigma_1 - \alpha\sigma_2 = 2k, \quad (2)$$

где $\alpha = 1 - \sqrt{\frac{2}{r+1}}$, r – параметр анизотропии, описывающий отношение деформации поперек листа к деформации вдоль листа.

Ввиду малого изменения границы будем предполагать, что все решение так же изменится мало и можно будет его искать в виде разложения по степеням параметра δ :

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^0 + \delta u_i', \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^0 + \delta \varepsilon_{ij}', \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^0 + \delta \sigma_{ij}'. \end{aligned} \quad (3)$$

В качестве нулевого приближения примем решение для растяжения пластины с круговым отверстием. В этом случае при возникновении пластического течения вблизи отверстия ($a \leq \rho \leq \rho_0$). В предположении, что условие текучести имеет вид

$$\sigma_\theta^0 - \alpha\sigma_\rho^0 = 2k. \quad (4)$$

За нулевое приближение примем напряженно-деформированное состояние листа с круговым отверстием, при равномерном растяжении на бесконечности [3], далее величины, имеющие размерность напряжения, отнесем к $2k$, а величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу границы пластической зоны r_{s0} :

$$\sigma_{\rho}^{0p} = \frac{1}{1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\alpha-1} \right], \quad \sigma_{\theta}^{0p} = \frac{1}{1-\alpha} \left[1 - \alpha \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\alpha-1} \right],$$

$$u_{\rho}^{0p} = \frac{2k(1-\nu')}{E'(1-\alpha)} \rho + \frac{2k(\nu'-1-\alpha^2)}{E'2\alpha(1-\alpha)} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\alpha} + \frac{k(1+\alpha)}{E'\alpha} a^{1-2\alpha} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{-\alpha} \quad \text{при } a \leq \rho \leq 1, \quad (5)$$

$$\sigma_{\rho}^{0e} = \rho - \frac{C}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{0e} = \rho + \frac{C}{\rho^2},$$

$$u_{\rho}^{0e} = \frac{1-\nu'}{E'} p \rho + \frac{1+\nu'}{E'} k a^{1-\alpha} \frac{1}{\rho} \quad \text{при } \rho \geq 1, \quad (6)$$

где $C = \frac{2k-p(1-\alpha)}{1+\alpha} \cdot \left(\frac{r_{s0}}{r_0} \right)^{\alpha-1} = \frac{2k-p(1-\alpha)}{k(1+\alpha)}$.

С учетом (1) и (3) граничное условие на возмущенной границе запишется в виде:

$$\sigma'_{\rho} + \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta = 0, \quad \sigma'_{\rho\theta} + \frac{n}{a} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta = 0, \quad \text{при } \rho = a. \quad (7)$$

Учитывая условия на границе (7), $\Phi(\rho, \theta)$ будем искать в виде:

$$\Phi(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\rho) \cos n\theta. \quad (8)$$

Из линеаризации условия пластичности (3) для первого приближения запишем [2]

$$\sigma'_{\theta} - \alpha \sigma'_{\rho} = 0. \quad (9)$$

Решение для первого приближения будем искать в виде:

$$\sigma'_{\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} R_{1n}(\rho) \cos n\theta; \quad \sigma'_{\theta} = \alpha \sigma'_{\rho}; \quad \sigma'_{\rho\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} R_{2n}(\rho) \sin n\theta. \quad (10)$$

Подставив (10) в уравнения равновесия, получим:

$$R_{1n}(\rho) = C_{1n} \rho^{k_1-1} + C_{2n} \rho^{k_2-1},$$

$$R_{2n}(\rho) = \frac{\alpha - k_1}{n} C_{1n} \rho^{k_1-1} + \frac{\alpha - k_2}{n} C_{2n} \rho^{k_2-1}, \quad (11)$$

где $k_{1,2} = \frac{\alpha-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha-1}{2} \right)^2 - \alpha(n^2-1)}$.

Для определения первого приближения напряжений в упругой области выпишем условия сопряжения напряжений на упругопластической границе ($\rho = 1$) [1]:

$$\sigma'_{\rho}{}^p = \sigma'_{\rho}{}^e = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\nu}^n \cos n\theta, \quad \sigma'_{\rho\theta}{}^p = \sigma'_{\rho\theta}{}^e = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\tau}^n \sin n\theta, \quad (13)$$

здесь

$$P_{\nu}^1 = -\frac{a_1}{a^{\alpha-1}} \cos \theta; \quad P_{\nu}^n = a^{\frac{\alpha-1}{2}} \left(-\frac{p-\alpha-1}{2s_n} \sin(s_n \ln a) - \cos(s_n \ln a) \right), \quad \text{при } n \geq 2,$$

$$P_{\tau}^1 = -\frac{a_1}{a^{\alpha-1}}; \quad P_{\tau}^n = a^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(\cos(s_n \ln a) + \frac{\alpha n + p - \alpha}{s_n} \sin(s_n \ln a) \right), \quad \text{при } n \geq 2. \quad (14)$$

На бесконечности:

$$\sigma'_{\rho}{}^e = \sigma'_{\rho\theta}{}^e = 0. \quad (15)$$

С учетом (13) и (15) напряжения в упругой области примут вид:

$$\begin{aligned}\sigma'_{\rho} &= -\frac{a_1}{a^{\alpha-1}} \frac{1}{\rho^3} \cos \theta + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\rho^{-n-2} (-nP_{\nu}^n - (n+1)P_{\tau}^n) + \frac{n+2}{\rho^n} (P_{\nu}^n - P_{\tau}^n) \right) \cos n\theta, \\ \sigma'_{\theta} &= -\frac{a_1}{a^{\alpha-1}} \frac{1}{\rho^3} \cos \theta + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\rho^{-n-2} (nP_{\nu}^n - (n+2)P_{\tau}^n) + \frac{n-2}{\rho^n} (-P_{\nu}^n + P_{\tau}^n) \right) \cos n\theta, \\ \sigma'_{\rho\theta} &= -\frac{a_1}{a^{\alpha-1}} \frac{1}{\rho^3} \sin \theta + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\rho^{-n-2} (-nP_{\nu}^n + (n+2)P_{\tau}^n) + \rho^{-n} n(P_{\nu}^n - P_{\tau}^n) \right) \sin n\theta.\end{aligned}\quad (16)$$

Границу пластической зоны представим в виде

$$\rho_s = 1 + \delta\rho_{s1}.\quad (17)$$

ρ_{s1} определяется из условия сопряжения σ'_{θ} на упругопластической границе:

$$\left[\sigma'_{\theta} + \frac{d\sigma_{\theta}^0}{d\rho} \rho_{s1} \right] = 0 \quad \text{при } \rho = 1.\quad (18)$$

Отсюда следует:

$$\rho_{s1} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} a_1 \cos \theta + \frac{a^{\alpha-1}}{\alpha+1} \sum_{n=2}^{\infty} ((1-\alpha)P_{\nu}^n - 2P_{\tau}^n) \cos n\theta.\quad (19)$$

Перемещения в пластине определяем, используя в упругой области закон Гука, а в пластической – ассоциированный закон пластического течения:

$$\varepsilon'_{\theta}{}^p + \alpha\varepsilon'_{\rho}{}^p = 0, \quad \varepsilon'_{\rho\theta}{}^p = 0.\quad (20)$$

Отсюда, используя (8), закон Гука для упругой части деформаций и соотношения Коши, получим систему для определения перемещений в пластической области при $a \leq \rho \leq 1$:

$$\begin{aligned}\alpha \frac{\partial u'^p}{\partial \rho} + \frac{u'^p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v'^p}{\partial \theta} &= \frac{2\alpha - \nu'(1+\alpha^2)}{E'} \sigma'_{\rho}{}^p, \\ \frac{\partial v'^p}{\partial \rho} - \frac{v'^p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u'^p}{\partial \theta} &= \frac{1+\nu}{E'} \sigma'_{\rho\theta}{}^p.\end{aligned}\quad (21)$$

Учитывая (16) решение системы (21) ищем в виде

$$u'^p = \sum_{n=1}^{\infty} R_{1n}(\rho) \cos n\theta, \quad v'^p = \sum_{n=1}^{\infty} R_{2n}(\rho) \sin n\theta.\quad (22)$$

Для R_{1n} и R_{2n} получается система:

$$\begin{aligned}\frac{R_{2n}}{\rho} + \alpha \frac{dR_{1n}}{d\rho} + \frac{n}{\rho} R_{2n} &= \frac{2\alpha - \nu'(1+\alpha)}{E'} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\frac{\alpha-3}{2}} \frac{a_n}{a} \left(\frac{p-\alpha+n}{2s_n} \sin \left(s_n \ln \frac{\rho}{a} \right) - \cos \left(s_n \ln \frac{\rho}{a} \right) \right) \\ -\frac{n}{\rho} R_{1n} - \frac{R_{2n}}{\rho} + \frac{dR_{2n}}{d\rho} &= \frac{1+\nu'}{E'} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\frac{\alpha-3}{2}} \frac{a_n}{a} \left(\cos \left(s_n \ln \frac{\rho}{a} \right) - \frac{\alpha n - (\alpha-p)}{s_n} \sin \left(s_n \ln \frac{\rho}{a} \right) \right).\end{aligned}\quad (23)$$

Решение системы (23) ищем в виде суммы общего и частного решений. Общее решение имеет вид:

$$\begin{aligned}R_{1n}^{\text{общ}} &= \frac{1}{n} \rho^{-\frac{\alpha+1}{2\alpha}} \left(-C_{1n} \frac{\alpha+1}{2\alpha} + C_{2n} s_{1n} \right) \cos(s_{1n} \ln \rho) + \left(-C_{2n} \frac{\alpha+1}{2\alpha} + C_{1n} s_{1n} \right) \sin(s_{1n} \ln \rho), \\ R_{2n}^{\text{общ}} &= \frac{1}{n} \rho^{-\frac{\alpha+1}{2\alpha}} (C_{1n} \cos(s_{1n} \ln \rho) + C_{2n} \sin(s_{1n} \ln \rho)),\end{aligned}\quad (24)$$

где $s_{1n}^2 = \frac{4(n^2 - 1)}{\alpha} - \left(\frac{\alpha + 1}{2\alpha}\right)^2$;
частное решение:

$$\begin{aligned} R_{1n}^{\text{част}} &= \frac{a_n}{a} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\alpha-3}{2}} \left(A_{1n} \cos\left(s_{1n} \ln \frac{\rho}{a}\right) + B_{1n} \sin\left(s_{1n} \ln \frac{\rho}{a}\right)\right), \\ R_{2n}^{\text{част}} &= \frac{a_n}{a} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\alpha-3}{2}} \left(A_{2n} \cos\left(s_{1n} \ln \frac{\rho}{a}\right) - B_{2n} \sin\left(s_{1n} \ln \frac{\rho}{a}\right)\right), \end{aligned} \quad (25)$$

здесь $A_{1n} = \frac{a_{1n}\varphi + b_{1n}\psi}{e_n}$; $A_{2n} = \frac{a_{2n}\varphi + b_{2n}\psi}{e_n}$;

$$B_{1n} = -\frac{b_{1n}\varphi + a_{1n}\psi}{e_n}; \quad B_{2n} = -\frac{b_{2n}\varphi + a_{2n}\psi}{e_n};$$

$$a_{1n} = c(p-1) - d_n(\alpha-p) + (c+d_n)(\alpha-p+n);$$

$$a_{2n} = -d_n((\alpha-p)(1+\alpha p) + \alpha s_{1n}^2) - nc + 2bp(\alpha-p+n);$$

$$b_{1n} = -(c+d_n) - (c(p-1) + d_n(\alpha-p))(\alpha-p+n);$$

$$b_{2n} = -2cp - (c(\alpha-p)(1+\alpha p) + \alpha s_{1n}^2 + na_n)(\alpha-p+n);$$

$$c = \frac{2\alpha - \nu'(1+\alpha^2)}{E'}; \quad d_n = \frac{1+\nu'}{nE'}; \quad \varphi = 4p^2 - 2p(n^2-1); \quad \psi = 4p^2.$$

Окончательно, перемещения в пластической области:

$$u'^p = \left(-C_1 - \frac{1}{\alpha} C_2 \rho^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right) \cos n\theta + \frac{c(\alpha^2 - \alpha + 1) + d_1}{E'(\alpha-1)^3} a_1 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\alpha-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (R_{1n}^{\text{общ}} + R_{1n}^{\text{част}}) \cos n\theta;$$

$$v'^p = \left(C_1 + C_2 \rho^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right) \sin n\theta + \frac{d_1(\alpha^2 - \alpha + 1) + c_1}{E'(\alpha-1)^3} a_1 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\alpha-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (R_{2n}^{\text{общ}} + R_{2n}^{\text{част}}) \sin n\theta; \quad (26)$$

Согласно [4] первое приближение перемещений в области:

$$\begin{aligned} u'^e &= -\frac{1+\nu'}{E'} \frac{a_1}{a^\alpha} \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a}{E'} \left[\frac{1+\nu'}{2(1+n)} \frac{1}{\rho^{n+1}} (nP_\nu^n - (n+2)P_\tau^n) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n+2+(n-2)\nu'}{2(n-1)} \frac{1}{\rho^{n-1}} (-P_\nu^n + P_\tau^n) \right] \cos n\theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'^e &= -\frac{1+\nu'}{E'} \frac{a_1}{a^\alpha} \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 \sin n\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a}{E'} \left[\frac{1+\nu'}{2(1+n)} \frac{1}{\rho^{n+1}} (nP_\nu^n - (n+2)P_\tau^n) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n-4+n\nu'}{2(n-1)} \frac{1}{\rho^{n-1}} (-P_\nu^n + P_\tau^n) \right] \sin n\theta \quad \text{при } \rho \geq 1. \end{aligned} \quad (27)$$

Окончательно перемещения в пластической зоне определим с использованием условий сопряжения на упругопластической границе:

$$\left[u' + \frac{du^0}{d\rho} \rho_{s1} \right] = 0, \quad \left[v' + \frac{dv^0}{d\rho} \rho_{s1} \right] = 0 \quad \text{при } \rho = 1. \quad (28)$$

С учетом нулевого приближения $\left(\left[\frac{du^0}{d\rho} \right] = 0 \text{ при } \rho = 1, v^0 = 0 \right)$ получим

$$[u'] = [v'] = 0 \quad \text{при } \rho = 1. \quad (29)$$

Подставляя (27) в (29) определим константы:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{1-\alpha} \frac{a_1}{a^{\alpha-1}} \left(-(1+\alpha)(1+\nu')a - \frac{c(\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha + 1) + d_1(\alpha^2 + 1)}{(\alpha-1)^3} \right); \\
 C_2 &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{a_1}{a^{\alpha-1}} \left(-2a(\nu' + 1) - \frac{(c+d_1)(\alpha^2 - \alpha + 2)}{(\alpha-1)^2} \right); \\
 C_{1n} &= \frac{a}{n^2-1} (P_\nu^n(-2(n+1) + \nu'(n+1)) + P_\tau^n(2n+1 + \nu')) - \frac{a_n}{a^{\frac{1+\alpha}{2}}} A_{1n}; \\
 C_{2n} &= \frac{an}{n^2-1} (P_\nu^n(n+2 - \nu') + P_\tau^n(2n+1 + \nu')) - \frac{a_n n}{a^{\frac{\alpha-1}{2}}} A_{2n}. \tag{30}
 \end{aligned}$$

Полученное решение позволяет найти напряжения и деформации в листе с отверстием произвольной формы и для конкретных характеристик материала определить вероятность возникновения концентрации напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред : в 2 т. / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – Т. 2. – 448 с.

[2] *Вульман, С. А.* Уругопластическое напряженно-деформированное состояние плоскости с круговым отверстием из листового материала / С. А. Вульман, Т. Д. Семькина // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 78–82.

[3] *Семькина, Т. Д.* Растяжение трансверсально-изотропной плоскости с произвольной формой отверстия / Т. Д. Семькина, Л. П. Цуканова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. тр. Междунар. конф., Воронеж, 26–28 ноября 2012 г. – Воронеж, 2012. – С. 334–351.

[4] *Бицено, К. Б.* Техническая механика / К. Б. Бицено, И. Р. Граммель. – Л. ; М. : Гос. из-во тех.-теор. лит., 1950. – Т. 1. – 900 с.

Вульман Светлана Александровна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: svulmab4@mail.ru

Семькина Татьяна Дмитриевна,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: mech@amm.vsu.ru

e-mail: tdsem@mail.ru

S. A. Vulman, T. D. Semykina

**STRESS-STRAIN STATE OF TRANSVERSELY ISOTROPIC SHEET WITH
A HOLE OF ANY SHAPE, CLOSE TO CIRCULAR**

Voronezh State University

Abstract. The paper uses the method of perturbations for determining the stress-strain state of a sheet of transversally-isotropic material with the assumption that the shape of the holes can be represented as a Fourier series.

Keywords: Transversal anisotropy, for plastic, small parameter.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* Механика пластических сред : в 2 т. / D. D. Ivlev. – М. : Физматлит, 2001. – Vol. 2. – 448 p.
- [2] *Vulman, S. A.* The plastic intense deformed condition of the plane with a circular opening from a sheet material is elastic / S. A. Vulman, T. D. Semykina // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2011. – № 1 (9). – P. 78–82.
- [3] *Semykina, T. D.* Stretching of the transversal and isotropic plane with any form of an opening / T. D. Semykina, L. P. Tsukanova // Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics : collection of works of the International conference, Voronezh, on November 26–28, 2012. – Voronezh, 2012. – P. 334–351.
- [4] *Bitseno, K. B.* Technical mechanics / K. B. Bitseno, I. R. Grammel. – L. ; M. : The state publishing house of those.-a teor. litas., 1950. – Vol. 1. – 900 p.

Vulman Svetlana A.

Candidate of Phys. & Math. , Assoc, Professor, Department of theoretical and applied mechanics, Voronezh State University, Voronez

Semykina Tai'yana D.

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor ,Department of theoretical and applied mechanics, Voronezh State University, Voronezh

К ВОПРОСУ О ВОЛОЧЕНИИ ПОЛОСЫ ЧЕРЕЗ ПРЯМОЛИНЕЙНУЮ МАТРИЦУ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

Воронежский государственный университет

Аннотация. В исследовании дана задача о волочении полосы через прямолинейную матрицу с учетом трения. Рассмотрены аналитические уравнения, полученные по линии скольжения, скорости вдоль характеристик напряжений в пластической зоне и максимальная притягивающая сила. Мы показываем то, что аналитические формулы удовлетворяют числовым вычислениям.

Ключевые слова: идеальная пластичность, плоская деформация, предел текучести, волочение полосы, линии скольжения, сила волочения, трение.

УДК: 539.374

Рассматривается классическая задача о волочении полосы, исследуемая в работах [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], при плоской деформации для идеальной жесткопластической модели среды (рис. 1). Полоса толщиной $2H$ из материала, предел текучести которого есть k , протаскивается со скоростью U сквозь жесткую прямоугольную гладкую матрицу с углом раствора 2γ . До сужения материала скорость его V , после сужения — U , и части полос движутся как твердое тело. Используя свойство несжимаемости материала имеем $V = \frac{H}{h}U$, где h — толщина полосы после сужения материала. Пусть вдоль всей контактной прямой AB действует постоянная сила трения $\tau_n = k \sin 2\delta$, $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{4}$. С учетом симметрии задачи для верхней половины предполагаемое поле линий скольжения представлено на рис. 2.

Здесь в треугольнике ABC однородное напряженное состояние, линии скольжения взаимно ортогональны и подходят к границе AB под углом $\frac{\pi}{4}$. Можно заметить, что при наличии трения AC и BC не равны. Так называемые центрированные поля [3] ACD и BCE содержат неизвестные углы φ и ψ соответственно. В криволинейном четырехугольнике $ODCE$ необходимо решить задачу Гурса по данным на линиях скольжения CD и CE .

При введении криволинейных координат α и β

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_0}{2k} - \left(\frac{\sigma}{2k} - \varphi \right) \right], \\ \beta = \frac{1}{2} \left[-\frac{\sigma_0}{2k} + \left(\frac{\sigma}{2k} + \varphi \right) \right]. \end{cases}$$

Решение задачи Гурса определяется формулой Римана [4]:

$$f(a, b) = f(0, 0)J_0(2\sqrt{ab}) + \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta. \quad (1)$$

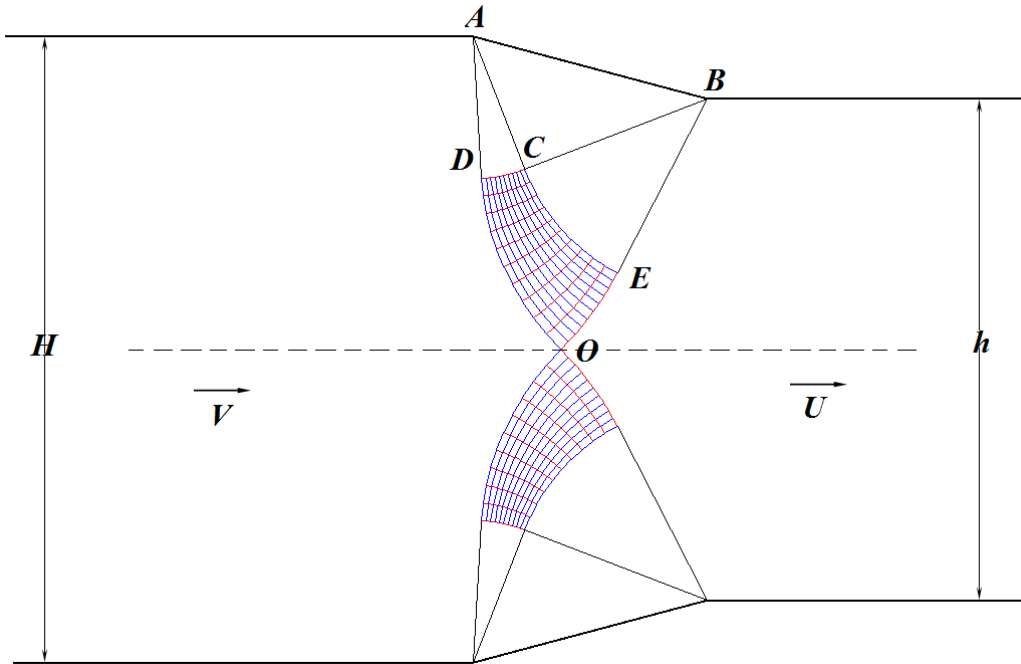


Рис. 1. Сетка линий скольжения при наличии трения

Как было показано в [7], были расположены окружности в точках с координатами $(0, R)$ α -линия и $(-R, 0)$ β -линия (рис. 3), при этом параметрическое уравнение окружностей имеют следующий вид:

$$\alpha - \text{линия} \begin{cases} x = R \sin \alpha \\ y = R - R \cos \alpha \end{cases} \quad \text{и} \quad \beta - \text{линия} \begin{cases} x = -R + R \cos \beta \\ y = R \sin \beta \end{cases}.$$

При наличии трения радиусы данных окружностей различны и их отношение представляется в виде

$$\frac{R}{r} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right),$$

где $R = BC$, $r = AC$.

Поэтому краевые условия начальной характеристической задачи примут следующий вид: для α -линии

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \theta = \beta, \end{cases} \quad \begin{cases} X = r - r \cos \beta \\ Y = r \sin \beta, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \beta} = r \sin \beta \\ \frac{\partial Y}{\partial \beta} = r \cos \beta \end{cases},$$

для β -линии

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \theta = \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} X = R \sin \alpha \\ Y = R \cos \alpha - R, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \alpha} = R \cos \alpha \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = -R \sin \alpha. \end{cases}.$$

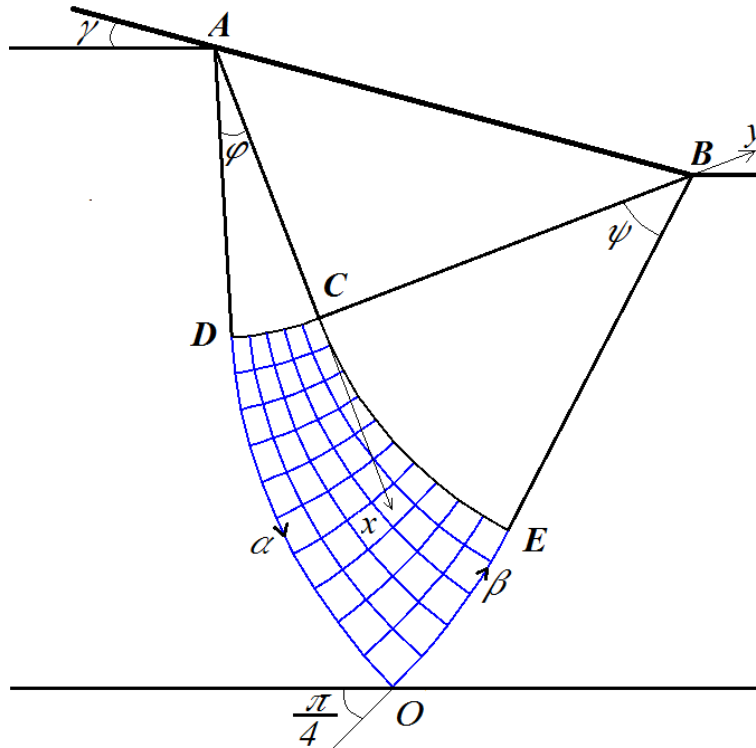


Рис. 2. Волочение полосы с учетом трения

Как известно, переменные Михлина X и Y удовлетворяют телеграфному уравнению (1), решение которого задается формулой Римана [4]. Для переменной X будем иметь

$$X(a, b) = \int_0^a J_0 \left(2\sqrt{(a-\alpha)b} \right) R \cos \alpha d\alpha + \int_0^b J_0 \left(2\sqrt{a(b-\beta)} \right) r \sin \beta d\beta.$$

Для переменной Y будем иметь

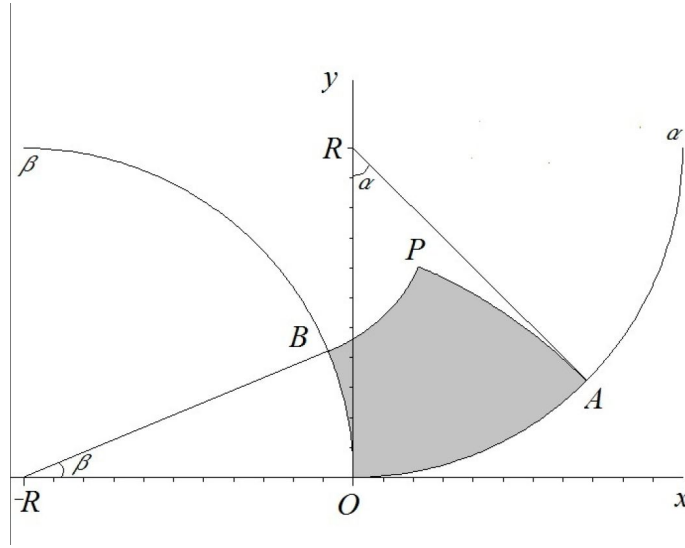
$$Y(a, b) = \int_0^a J_0 \left(2\sqrt{(a-\alpha)b} \right) (-R \sin \alpha) d\alpha + \int_0^b J_0 \left(2\sqrt{a(b-\beta)} \right) r \cos \beta d\beta.$$

Обратная подстановка к физическим координатам x, y дает квадратурные формулы линий скольжения:

$$\begin{cases} x(a, b) = X(a, b) \cos(a+b) - Y(a, b) \sin(a+b), \\ y(a, b) = X(a, b) \sin(a+b) + Y(a, b) \cos(a+b). \end{cases}$$

При этом легко заметить, что

$$\begin{cases} X(a, b) = r \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right) \operatorname{Int}_1 + \operatorname{Int}_2 \right), \\ Y(a, b) = r \left(-\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right) \operatorname{Int}_3 + \operatorname{Int}_4 \right). \end{cases}$$

Рис. 3. Радиусы кривизны α и β линий

В результате получаем:

$$\begin{cases} x(a, b) = r \cos(a + b) \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right) U_1 \left(2a, 2\sqrt{ba} \right) + U_2 \left(2b, 2\sqrt{ba} \right) \right] - \\ \quad - r \sin(a + b) \left[U_1 \left(2b, 2\sqrt{ba} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right) U_2 \left(2a, 2\sqrt{ba} \right) \right] \\ y(a, b) = r \sin(a + b) \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right) U_1 \left(2a, 2\sqrt{ba} \right) + U_2 \left(2b, 2\sqrt{ba} \right) \right] + \\ \quad + r \cos(a + b) \left[U_1 \left(2b, 2\sqrt{ba} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right) U_2 \left(2a, 2\sqrt{ba} \right) \right]. \end{cases} \quad (2)$$

Ось симметрии, проходящая через точку O , уравнения прямой $y = kx + b$, где угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \left(\gamma + \frac{\pi}{4} + \delta \right)$, а величина $b = -CL$.

Из (рис. 4) легко заметить, что $\sin \gamma = \frac{H - h}{2AB}$, а $BC = AB \sin \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right)$. Таким образом, получается, что $BC = \frac{(H - h) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right)}{2 \sin \gamma}$.

Из рис. 4 видно, что $CK + BC \sin \left(\frac{\pi}{4} - \gamma - \delta \right) = \frac{h}{2}$, следовательно, $CK = \frac{h}{2} - \frac{H - h}{2 \sin \gamma} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \gamma - \delta \right)$. Из прямоугольного треугольника CLK можно выписать соотношение $\cos \left(\frac{\pi}{4} + \gamma + \delta \right) = \frac{CK}{CL}$, следовательно, $CL = \frac{h \sin \gamma - (H - h) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \gamma - \delta \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right)}{2 \sin \gamma \cos \left(\frac{\pi}{4} + \gamma + \delta \right)}$.

Таким образом, уравнение оси симметрии в системе координат x_2Cy_2 имеет вид

$$y = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \gamma + \delta \right) x + \frac{(H - h) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \gamma - \delta \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right) - h \sin \gamma}{2 \sin \gamma \cos \left(\frac{\pi}{4} + \gamma + \delta \right)}. \quad (3)$$

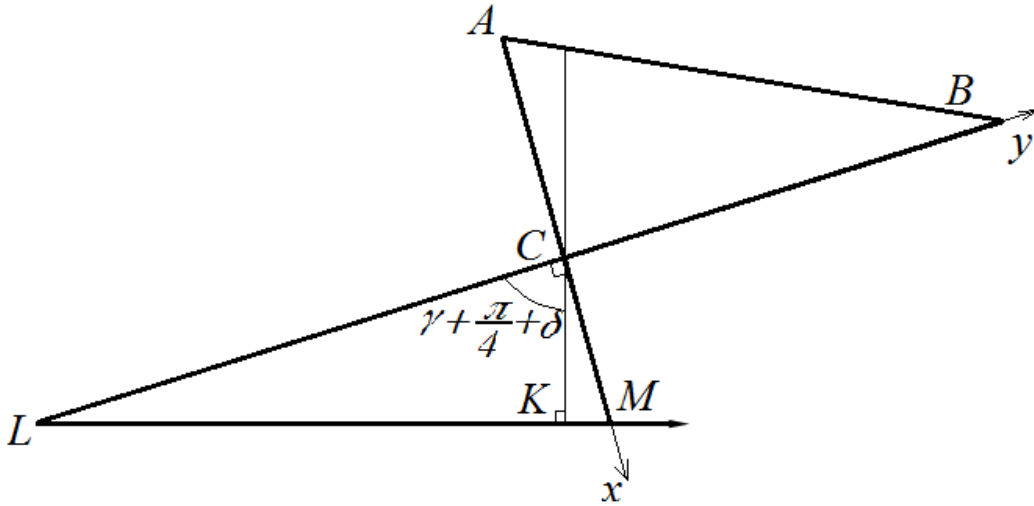


Рис. 4. Нахождение коэффициентов k и b

Запишем теперь условие для определения угла φ — угла раскрытия веера CAD : α -линия DO пересекается с осью симметрии, значит, подставляя $x(\varphi + \gamma + \delta, -\varphi)$ и $y(\varphi + \gamma + \delta, -\varphi)$ из системы (8) в уравнение (22), получим следующее уравнение для определения φ :

$$y(\varphi + \gamma + \delta, -\varphi) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \gamma + \delta \right) x(\varphi + \gamma + \delta, -\varphi) + \frac{(H-h) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \gamma - \delta \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right) - h \sin \gamma}{2 \sin \gamma \cos \left(\frac{\pi}{4} + \gamma + \delta \right)}. \quad (4)$$

Подставляя (8) в (10), получим уравнение для определения угла раскрытия веера φ при фиксированных переменных H, h, γ .

Легко заметить, что при $\delta = 0$ получаем формулы, аналогичные представленным в статье [7].

Чтобы найти напряжения в точке O повернем оси xOy на угол $\frac{\pi}{4} + \gamma + \delta$, полученные оси обозначим x_2Oy_2 (рис. 5) Спроектируем все напряжения вдоль α -линии на ось x_2C .

Так как вдоль α -линии выполняются соотношения Генки, то, взяв на α -линии произвольную точку M , получаем

$$\frac{\sigma_O}{2k} - \theta_O = \frac{\sigma_M}{2k} - \theta_M.$$

Известно, что $\theta_O = -\frac{\pi}{4}$. Подставляя это значение получаем

$$\sigma_M = \sigma_O + 2k \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right).$$

В силу произвольности точки M можно записать $\sigma_M = \sigma$ и, следовательно:

$$\sigma = \sigma_O + 2k \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right). \quad (5)$$

Аналогично получаем

$$\sigma_D = \sigma_O - 2k (\varphi + \gamma + \delta).$$

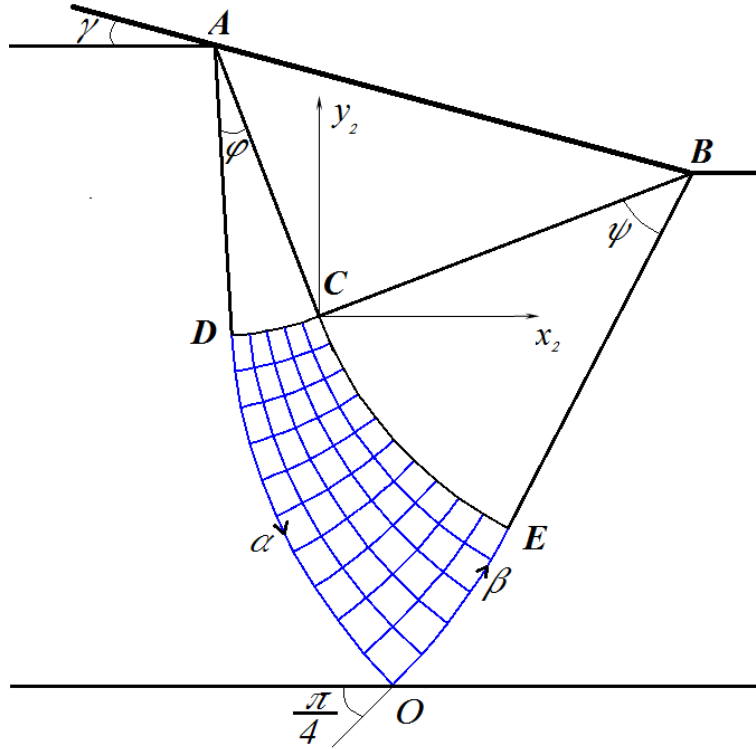


Рис. 5. Оси координат для нахождения напряжения

Проекция напряжений вдоль кривой OD на ось x_2C будет находиться по формуле

$$P_x^{AD} = (\sigma_D \sin \theta_D - \tau \cos \theta_D)AD,$$

$$P_x^{DO} = \int_S (\sigma \sin \theta - \tau \cos \theta) dS = \int_S \left(\left[\sigma_O + 2k \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right] \sin \theta - \tau \cos \theta \right) dS.$$

Для перехода от криволинейного интеграла к определенному нам необходимо знать радиус кривизны вдоль α -линии.

Формула для кривизны вдоль α -линии:

$$R(a, b) = BC \left(J_0(2\sqrt{ab}) - \frac{\sqrt{ab}}{a} J_1(2\sqrt{ab}) \right).$$

Как было показано выше, $BC = \frac{(H-h) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right)}{2 \sin(\gamma)}$. При замене $dS = R(a, -\varphi) da$ в криволинейном интеграле пределы интегрирования будут $0 \leq a \leq \varphi + \gamma + \delta$, при этом вдоль линии скольжения $\tau = k$. Получим:

$$P_x^{DO} = BC \int_0^{\varphi + \gamma + \delta} [\sigma_O + 2k(a - \varphi - \gamma - \delta)] \sin \left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma - \delta \right) \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da -$$

$$-k \cos \left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma - \delta \right) \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da.$$

Проекция напряжений вдоль AD будет:

$$P_x^{AD} = (\sigma \sin \theta - \tau \cos \theta) AD = -(\sigma_O - 2k(\varphi + \gamma + \delta)) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma + \delta \right) - k \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma + \delta \right) AD,$$

где $AD = \frac{(H-h) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right)}{2 \sin(\gamma)}$. Так как противонапряжение отсутствует, то $P_x^{DO} + P_x^{AD} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} & \sigma_O \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right) \int_0^{\varphi+\gamma+\delta} \sin \left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma - \delta \right) \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da - \right. \\ & \quad \left. - \cos \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma + \delta \right) \right) = \\ & = k \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right) \int_0^{\varphi+\gamma+\delta} \cos \left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma - \delta \right) \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da + \right. \\ & \quad \left. + \cos \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma + \delta \right) \right) - \\ & - 2k \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right) \int_0^{\varphi+\gamma+\delta} (a - \varphi - \gamma - \delta) \sin \left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma - \delta \right) \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da + \right. \\ & \quad \left. + \cos \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right) (\varphi + \gamma + \delta) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma + \delta \right) \right). \end{aligned}$$

Проводя аналогичные преобразования [7], получаем:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\varphi+\gamma+\delta} \sin \left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma - \delta \right) \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da = \\ & = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma + \delta \right) (I1 - I2) - \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma + \delta \right) (I3 - I4), \\ & \int_0^{\varphi+\gamma+\delta} \cos \left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma - \delta \right) \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da = \\ & = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma + \delta \right) (I3 - I4) + \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma + \delta \right) (I1 - I2), \\ & \int_0^{\varphi+\gamma+\delta} (a - \varphi - \gamma - \delta) \sin \left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma - \delta \right) \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da = \\ & = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma + \delta \right) (I5 - I6) - \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma + \delta \right) (I7 - I8) - \end{aligned}$$

$$-(\varphi + \gamma + \delta) \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma + \delta \right) (I1 - I2) - \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma + \delta \right) (I3 - I4) \right),$$

где

$$I1 = \int_0^{\varphi+\gamma} \sin(a) J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da = U_1 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) \sin(\psi) - U_2 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) \cos(\psi),$$

$$I2 = \int_0^{\varphi+\gamma} \sin(a) \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da = -J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) \sin(\psi) + U_1 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) \cos(\psi) + \\ + U_2 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) \sin(\psi),$$

$$I3 = \int_0^{\varphi+\gamma} \cos(a) J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da = U_1 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) \cos(\psi) + U_2 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) \sin(\psi),$$

$$I4 = \int_0^{\varphi+\gamma} \cos(a) \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da = -J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) \cos(\psi) + 1 - U_1 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) \sin(\psi) + \\ + U_2 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) \cos(\psi),$$

$$I5 = \int_0^{\varphi+\gamma} a \sin(a) J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da = U_2 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) (\sin(\psi) + \varphi \cos(\psi)) + \\ + U_1 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) \cos(\psi) + \varphi U_3 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) \sin(\psi) - \psi \cos(\psi) J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}),$$

$$I6 = \int_0^{\varphi+\gamma} a \sin(a) \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da = -\varphi \left(U_2 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) \sin(\psi) - U_3 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) \cos(\psi) \right),$$

$$I7 = \int_0^{\varphi+\gamma} a \cos(a) J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da = \psi \sin(\psi) J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) - U_1 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) \sin(\psi) + \\ + \varphi U_3 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) \cos(\psi) + U_2 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) (\cos(\psi) - \varphi \sin(\psi)),$$

$$I8 = \int_0^{\varphi+\gamma} a \cos(a) \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da = -\varphi \left(U_2 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) \cos(\psi) + U_3 \left(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) \sin(\psi) \right).$$

Подставляя $I1 - I8$, получим:

$$\sigma_O = \frac{\left(\frac{k}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) - 2k [U_1(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) - \varphi\sqrt{2}U_3(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi})] \right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right)}{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) - \sqrt{2}U_1(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) \right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \psi\right) \sqrt{2} \sin \delta} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \psi\right) \sqrt{2} \sin \delta + 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \psi\right) \psi \sin \delta}{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) - \sqrt{2}U_1(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) \right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \psi\right) \sqrt{2} \sin \delta} \quad (6)$$

Нахождение силы волочения

Перейдем к нахождению среднего напряжения волочения. Для этого спроектируем все напряжения вдоль кривой OEB на ось x . Сумма всех проекций будет равна $\frac{P}{2}$.

Так как вдоль β -линии выполняются соотношения Генки, то взяв на β -линии произвольную точку M , получаем $\eta = \frac{\sigma_M}{2k} + \theta_M$, а в точке O это уравнение примет вид $\eta = \frac{\sigma_O}{2k} + \theta_O$. Приравняв последние два уравнения получим

$$\eta = \frac{\sigma_O}{2k} + \theta_O = \frac{\sigma_M}{2k} + \theta_M.$$

Известно, что $\theta_O = -\frac{\pi}{4}$. Подставляя это значение получаем

$$\sigma_M = \sigma_O + 2k \left(-\theta - \frac{\pi}{4} \right).$$

В силу произвольности точки M , можно записать $\sigma_M = \sigma$ и, следовательно:

$$\sigma = \sigma_O + 2k \left(-\theta - \frac{\pi}{4} \right).$$

Аналогично получаем

$$\sigma_E = \sigma_O - 2k\varphi.$$

Проекция напряжений вдоль кривой OB на ось x_3O будет находиться по формуле $P_x^{EB} = (\sigma_E \cos \theta_E - \tau \sin \theta_E)BE$,

$$P_x^{OE} = AC \int_{-\varphi}^0 \left([\sigma_O + 2k(-b - \varphi)] \cos\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left(J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) \right).$$

Интеграл полностью аналогичен интегралу представленному в [7], т. е.

$$P_x^{EB} = \left((\sigma_O - 2k\varphi) \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - k \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right) \frac{H - h}{2 \sin \gamma} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right).$$

Так как $P_x^{OE} + P_x^{EB} = \frac{P}{2}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{P}{2kh} = \frac{H - h}{2kh \sin \gamma} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) & \left[\sigma_O \left(\frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) - \sqrt{2}U_1(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) \right) + \right. \\ & \left. + 2kU_1(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) \left(\sqrt{2}\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 2\sqrt{2}\psi U_3(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) + \frac{k}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) \right] + \\ & + (\sigma_O - 2k\varphi) \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \frac{(H - h) \sin \delta}{2kh \sin \gamma} - k \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \frac{(H - h) \sin \delta}{2kh \sin \gamma}. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 136 с.
- [2] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
- [3] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.
- [4] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Наука, 1956. – 408 с.
- [5] *Быковцев, Г. И.* К теории волочения жесткопластической полосы через криволинейные матрицы / Г. И. Быковцев, Ю. М. Мяснянкин // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1964. – № 3. – С. 113–116.
- [6] *Зиновьев, И. Н.* Решение задачи Гурса для уравнений плоской деформации при волочении полосы сквозь прямолинейную матрицу / И. Н. Зиновьев, А. С. Чеботарев // Вестник ВГУ. Серия : Физика. Математика. – 2012. – № 2.
- [7] *Зиновьев, И. Н.* К вопросу о волочении полосы через прямолинейную матрицу / И. Н. Зиновьев, А. С. Чеботарев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – №1 (11). – С. 13–35.

Зиновьев Илья Николаевич,

студент магистратуры 2-го курса кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: bekiz@email.ru

Чеботарев Андрей Сергеевич,

кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: xeба@amm.vsu.ru

I. N. Zinovjev, A. S. Chebotarev

TO THE QUESTION OF DRAWING A STRAIGHT THROUGH BAND MATRIX WITH FRICTION

Voronezh State University

Abstract. Intense-deformed condition the stress state under linear matrix when drawing the strip with friction. The analytical equations obtained for the slip lines, velocities along the characteristics, stresses in the plastic zone and the maximum drawing force. We show that the analytical formulas agree with the numerical calculations.

Keywords: ideal plasticity, plane strain, the limit flow, drawing the strip, slip lines, the power of drawing, friction.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* The theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 136 p.
- [2] *Sokolovsky, V. V.* Theory of plasticity / V. V. Sokolovsky. – M. : Higher school, 1969. – 608 p.
- [3] *Kachanov, L. M.* Fundamentals of the theory of plasticity / L. M. Kachanov. – M. : Nauka, 1969. – 420 p.
- [4] *Hill, R.* The mathematical theory of plasticity / R. Hill. – M. : Nauka, 1956. – 408 p.
- [5] *Bykovtsev, G. I.* To the theory of drawing of rigidly plastic strip through curvilinear matrixes / G. I. Bykovtsev, Yu. M. Myasnyankin // News of Academy of Sciences of the USSR. OTN. Mechanics and mechanical engineering. – 1964. – № 3. – P. 113–116.
- [6] *Zinovyev, I. N.* The solution of a task of Goursat for the equations of flat deformation when drawing strip through a rectilinear matrix / I. N. Zinovyev, A. S. Chebotaryov // VGU vestnik. Series: Physics. Mathematics. – 2012. – № 2.
- [7] *Zinovyev, I. N.* To a question of strip drawing through a rectilinear matrix / I. N. Zinovyev, A. S. Chebotaryov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – №1 (11). – P. 13–35.

Zinovjev, Ilya Nikolaevich

Graduate student 2nd course, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh

Chebotarev, Andrey Sergeevich

Candidate of Phys. And Math., Assoc. Professor, Voronezh State University, Voronezh

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ
В ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЕ ПРИ УСЛОВИИ
ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ**

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Рассмотрено упругоидеальнопластическое состояние анизотропной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Показано, что в первом приближении вклады условия пластической анизотропии по Хиллу и трансляционной анизотропии независимы. В случае трансляционной анизотропии компоненты напряжения пропорциональны $\cos 2\theta$, $\sin \theta$.

Ключевые слова: труба, напряжение, изотропия идеальная, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Условие предельного состояния включает в себя как частный случай анизотропию по Хиллу и трансляционную анизотропию

$$A \cdot \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + B \cdot (\tau_{xy} - k_3) = 1, \quad A, B - const. \quad (1)$$

Согласно [3] в первом приближении имеет место

$$\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p} = d_1 \cos 4\theta + 2d_2 \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \cos 2\theta - k'_3 \sin 2\theta \right). \quad (2)$$

Т. к. $R = \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + k_3^2}$, $\frac{k_1 - k_2}{2R} = \cos \mu$, $\frac{k_3}{R} = \sin \mu$,
тогда

$$\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p} = d_1 \cos 4\theta + 2d_2 R \cos(2\theta + \mu), \quad (3)$$

где $R = d_2 \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + k_3^2}$.

Рассмотрим вклад трансляционной анизотропии

$$\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p} = d_2 \cos(2\theta + \mu). \quad (4)$$

Компоненты напряжения в пластической области в первом приближении в случае (4) определены согласно [2].

На границе пластической зоны при $\rho = 1$ из [2] имеет место

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)p} &= \left\{ -3C_{11} + \sqrt{3}C_{12} \right\} \cos 2\theta + \left\{ -3C_{21} + \sqrt{3}C_{22} \right\} \sin 2\theta - R \cos(2\theta + \mu), \quad \rho = 1 \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= 2\sqrt{3}C_{12} \sin 2\theta - 2\sqrt{3}C_{22} \cos 2\theta + R \sin(2\theta + \mu), \quad \rho = 1, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$C_{11} = \frac{R \cos \mu \cdot \alpha}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 3 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$C_{12} = \frac{R \cos \mu \cdot \alpha}{\Delta} \begin{vmatrix} (-3) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) & 1 \\ -\sin(\sqrt{3} \ln \alpha) & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$C_{21} = -\frac{R \sin \mu \cdot \alpha}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 3 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$C_{22} = -\frac{R \sin \mu \cdot \alpha}{\Delta} \begin{vmatrix} (-3) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) & 1 \\ -\sin(\sqrt{3} \ln \alpha) & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (-3) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) & \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 3 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \\ -\sin(\sqrt{3} \ln \alpha) & \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \end{vmatrix} \quad (10)$$

В дальнейшем запишем соотношения (5) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} &= a_4'' \cos 2\theta + b_4'' \sin 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= a_4''' \cos 2\theta + b_4''' \sin 2\theta, \quad \rho = 1, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} a_4'' &= C_{11}(-3) + \sqrt{3}C_{12} - R' \cos \mu, \\ b_4'' &= C_{21}(-3) + \sqrt{3}C_{22} + R' \sin \mu, \\ a_4''' &= -2\sqrt{3}C_{22} + R' \sin \mu, \\ b_4''' &= 2\sqrt{3}C_{12} + R' \cos \mu. \end{aligned} \quad (12)$$

Внешняя часть трубы свободна от усилий

$$\sigma_{\rho}^{(I)e} = \tau_{\rho}^{(I)e} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \beta. \quad (13)$$

На границе пластической зоны компоненты напряжения $\sigma_{\rho}^{(I)}$, $\tau_{\rho}^{(I)}$ равны между собой

$$\sigma_{\rho}^{(I)p} = \sigma_{\rho}^{(I)e}, \quad \tau_{\rho}^{(I)p} = \tau_{\rho}^{(I)e} \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (14)$$

Из условий (11), (12), согласно (5) определяются компоненты напряжения в упругой области.

В рассматриваемом случае имеют место формулы раздела (VI) и (VIII) приведенные в [1]. Получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)e} &= \sqrt{3} \left[\frac{3}{\beta^4} - \frac{2}{\beta^2} \right] (C_{12} \cos 2\theta + C_{22} \sin 2\theta) + 3 \left[\frac{1}{\beta^4} - \frac{2}{\beta^2} \right] (C_{11} \cos 2\theta + C_{21} \sin 2\theta) + \\ &\quad + \left[\frac{3}{\beta^4} - \frac{4}{\beta^2} \right] R' \cos(2\theta + \mu), \\ \sigma_{\theta}^{(I)e} &= -\frac{3}{\beta^4} \{ (C_{11} \cos 2\theta + C_{21} \sin 2\theta) + \sqrt{3} (C_{12} \cos 2\theta + C_{22} \sin 2\theta) + R' \cos(2\theta + \mu) \}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= 3 \left[\frac{1}{\beta^4} - \frac{1}{\beta^2} \right] (C_{11} \sin 2\theta - C_{21} \cos 2\theta) + \sqrt{3} \left[\frac{3}{\beta^4} - \frac{1}{\beta^2} \right] (C_{12} \sin 2\theta - C_{22} \cos 2\theta) + \\ &\quad + \left[\frac{3}{\beta^4} - \frac{2}{\beta^2} \right] R' \sin(2\theta + \mu). \end{aligned} \quad (15)$$

Из [3] получим

$$\left. \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)p}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = 2, \quad \left. \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = -2, \quad (16)$$

тогда для определения границы раздела упругопластической области в первом приближении будем иметь

$$\rho_s^{(I)} \Big|_{\rho=1} = \frac{\sigma_{\theta}^{(I)p} - \sigma_{\theta}^{(I)e}}{\frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)p}}{d\rho}} \Big|_{\rho=1} = \frac{1}{4} \left(\sigma_{\theta}^{(I)e} - \sigma_{\theta}^{(I)p} \right) \Big|_{\rho=1}, \quad (17)$$

откуда

$$\rho_s^{(I)} = \frac{1}{4} \left(\sigma_{\theta}^{(I)e} - \sigma_{\theta}^{(I)p} \right) = -\frac{1}{2} d_2 R' \left\{ \alpha \left(\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) + 1 \right\} \cos(2\theta + \mu). \quad (18)$$

Таким образом, напряженное состояние в пластической [2] и упругой (15) областях полностью определено. Изменение границы раздела упругой и пластической областей определяется из соотношения (18).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
- [2] *Фоминых, С. О.* Двуосное растяжение упругопластической пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии / С. О. Фоминых // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2(7). – Ч. 3. – С. 610–622.
- [3] *Фоминых, С. О.* Упругоидеальнопластическое состояние анизотропной трубы / С. О. Фоминых // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2(7). – Ч. 3. – С. 623–627.

Фоминых Светлана Олеговна,

кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры общей и теоретической физики, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ermakovaso@rambler.ru

S. O. Fominikh

**DETERMINATION OF ELASTIC-PLASTIC STATE IN A THICK-WALLED
TUBE, PROVIDED IDEALNOPLASTICHESKOY TRANSLATIONAL
ANISOTROPY**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Considered elastoidealplastic condition of the anisotropic thick-walled pipe influenced by internal pressure is considered. It is shown that in a first approximation, the contributions of the conditions of plastic anisotropy Hill and translational anisotropy independent. In the case of the translational component of the voltage is proportional to the anisotropy $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$.

Keywords: a pipe, pressure, isotropy, ideal, transmitting anisotropy.

REFERENCES

- 1] *Ivlev, D. D.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / D. D. Ivlev, L. V. Ershov. – М. : Nauka, 1978. – 208 p.
- 2] *Fominikh, S. O.* Biaxial stretching is elastic a plastic plate with a circular opening in case of transmitting anisotropy / S. O. Fominikh // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – № 2(7). – Part 3. – P. 610–622.
- 3] *Fominikh, S. O.* Ideally plastic condition of an anisotropic pipe is elastic / S. O. Fominikh // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – № 2(7). – Part 3. – P. 623–627.

Fominikh, Svetlana Olegovna

Candidate of Phys. & Math., Senior Lecturer, Department of General and Theoretical Physics, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

С. В. Клишин, О. А. Микенина

ОБ ОДНОМ ПАРАДОКСАЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала Сибирского отделения РАН

Аннотация. Рассмотрена пространственная задача о деформировании сыпучего материала между гибкой цилиндрической оболочкой эллиптического поперечного сечения и внутренним жестким ядром. Деформирование осуществляется путем вращения осей эллипса относительно гибкой оболочки и ядра. Показано, что при определенных условиях ядро может вращаться в направлении, противоположном направлению вращения осей эллипса.

Ключевые слова: гранулированный материал, ядро, жесткое включение, численный анализ, метод дискретных элементов, приливные силы, внутреннее ядро Земли.

УДК: 51.72, 539.3

Введение. Основные труды профессора Д. Д. Ивлева относятся к исследованиям в области механики деформирования упруго-пластических сред [1], [2], [3], [4]. Установлено, что при простых путях нагружения деформационные теории и теории типа течения дают близкие результаты. Основные проблемы начинаются при описании сложного нагружения. Исследования различных характерных типов нагружений представляет интерес как для развития общей теории, так и для анализа конкретных задач.

В настоящей работе рассмотрен один довольно замечательный тип сложного нагружения с непрерывным поворотом осей тензоров напряжений и деформаций. Данная задача возникла в связи с одним парадоксальным на первый взгляд эффектом, который наблюдался в экспериментах по моделированию деформирований Земли под действием приливных сил [5]. Известно, что Земля растягивается приливными силами в направлении к возмущающей массе и сжимается в ортогональных направлениях. Вращение приводит к тому, что данные направления относительно самого тела непрерывно поворачиваются. В экспериментах исследуемое тело представляло собой прямой эллиптический цилиндр, ограниченный гибкой внешней оболочкой. Оболочка помещалась в жесткий ротор – цилиндр с полостью, в который точно вставлялась гибкая оболочка, после чего она закреплялась гибкими тягами. Нагружение осуществлялось путем вращения ротора относительно гибкого цилиндра (рис. 1), заимствован из [6]. Последнее приводило к непрерывному повороту направлений сжатия и растяжения (то есть направлений большой и малой осей эллипса) относительно деформируемого тела (кинематическая модель движения приливной волны).

Внутренне ядро Земли моделировалось вертикальным жестким цилиндрическим стержнем, который свободно подвешивался на нити и располагался в центре эллиптического цилиндра. Если гибкий цилиндр заполнить вязкой жидкостью, то ядро вращается в ту же сторону,

Поступила 03.06.2013

Авторы выражают благодарность проф. А. Ф. Ревуженко за постановку задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-05-00432.

что и ротор, то есть ядро вращается в направлении вращения осей эллипса. Это соответствует западному дрейфу ядра Земли. Однако если область заполнить сыпучим материалом, то наблюдается парадоксальный на первый взгляд эффект – ядро начинает вращаться навстречу вращения ротора, то есть в направлении, противоположном вращению осей эллипса [5]. Последнее соответствует восточному дрейфу внутреннего ядра Земли [7], [8].

Здесь уместно отметить, что течение в эллиптической области реализуется также в случае, когда завихренность и все компоненты тензора скорости деформации постоянны. Ему соответствуют аффинные преобразования области в себя. Подобные течения могут быть использованы для определения связей между континуальными и дискретными моделями различных сред [9]. Более сложные течения в эллиптической области можно рассматривать как различные приближения аффинного течения. В настоящей работе рассмотрим численное решение задачи о деформировании эллиптической области с ядром и вращении ядра.

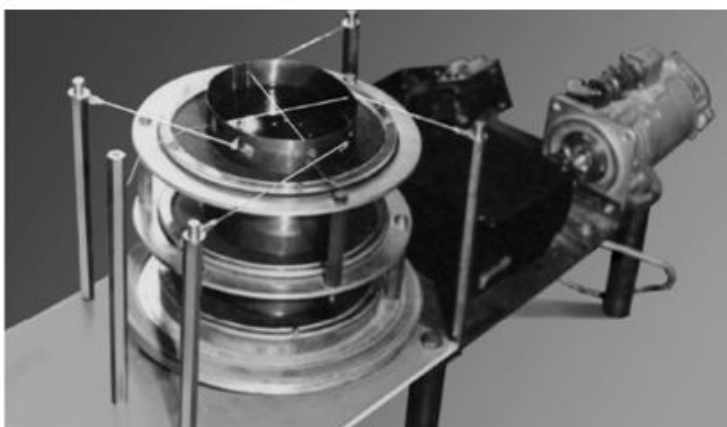


Рис. 1. Общий вид устройства нагружения

Методика численного эксперимента. В основе метода дискретных элементов (МДЭ) лежит представление гранулированного материала как конечной области двух или трехмерного пространства, заполненной отдельными сферическими частицами – дискретными элементами. Данная система частиц состоит из конечного числа N элементов с заданным распределением радиусов r_i ($i = 1, \dots, N$) и набором физических свойств (плотность ρ_i , упругие и вязкие модули, трение, сцепление и т. д.). Напряженно-деформированное состояние такой системы в каждый момент времени зависит от положения каждой частицы, от сил, возникающих на контактах между частицами, а также от приложенных к системе внешних сил.

В реальной ситуации взаимодействие между упругими частицами приводит к их деформации и искажению формы. В модели дискретных элементов форма частиц на протяжении всего времени контакта остается неизменной, а степень их деформации представляется величиной перекрытия между контактирующими элементами. При этом предполагается, что размер такого перекрытия намного меньше размеров самих частиц.

Важным вопросом в МДЭ является выбор функции, описывающей силовое взаимодействие на контакте между частицами. Структура такой силы является намного проще, чем у определяющих уравнений сплошной среды и представляет собой скалярную функцию расстояния.

Таким образом, имея начальную конфигурацию (упаковку) и задавая закон контактного взаимодействия частиц друг с другом и с внешними границами, решается система уравнений, описывающая движение ансамбля частиц с учетом сил инерции.

Силовое взаимодействие в точке контакта между сферическими частицами с номерами i и j можно представить в векторной форме следующим образом:

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{n,ij} \cdot \mathbf{n}_{ij} + \mathbf{F}_{t,ij} \cdot \mathbf{t}_{ij}, \quad (1)$$

где $F_{n,ij}$ и $F_{t,ij}$ – вязкоупругие нормальная и касательная компоненты контактной силы соответственно, \mathbf{n}_{ij} – единичный вектор, определяющий плоскость контакта между двумя сферами (вектор нормали к плоскости пересечения сфер, направленный вдоль линии, соединяющей их центры); \mathbf{t}_{ij} – единичный вектор, принадлежащий плоскости контакта. Выражение (1) может быть записано в виде

$$\mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{k}_{n,ij} \cdot \delta_{n,ij} - \gamma_{n,ij} \cdot \mathbf{v}_{n,ij}) \cdot \mathbf{n}_{ij} + (\mathbf{k}_{t,ij} \cdot \delta_{t,ij} - \gamma_{t,ij} \cdot \mathbf{v}_{t,ij}) \cdot \mathbf{t}_{ij}. \quad (2)$$

Здесь $v_{n,ij}$ и $v_{t,ij}$ – проекции относительной скорости точки соударения на оси \mathbf{n}_{ij} и \mathbf{t}_{ij} ; $\delta_{n,ij}$ и $\delta_{t,ij}$ – перекрытия в нормальном и касательном направлениях. Перекрытие по нормали $\delta_{n,ij}$ определяется по формуле

$$\delta_{n,ij} = (r_i + r_j) - l_{ij} > 0, \quad (3)$$

где l_{ij} – расстояние между центрами частиц.

Касательная составляющая $\delta_{t,ij}$, в отличие от нормальной, определяется в терминах приращений следующим образом. Когда контакт впервые сформирован, $\delta_{t,ij}$ устанавливается равным нулю. Каждое последующее приращение сдвига в плоскости контакта вычисляется как $\Delta\delta_{t,ij} = (\Delta\mathbf{u}_i - \Delta\mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{t}_{ij}$, где вектор \mathbf{t}_{ij} направлен вдоль вектора относительного смещения частиц в плоскости контакта; $\Delta\mathbf{u}_i$ и $\Delta\mathbf{u}_j$ – приращения смещений частиц. Таким образом, полное значение касательного перекрытия в момент времени t вычисляется в виде

$$\delta_{t,ij} = \int_{t_0}^t v_{t,ij}(\tau) d\tau,$$

где t_0 – время установления контакта.

Для определения величин, представленных в (2), выберем вязкоупругое взаимодействие частиц на основе закона Герца [10]. Тогда компоненты контактной силы будут определяться следующим образом:

$$k_{n,ij} = \frac{4}{3} E_{ij} \sqrt{r_{ij} \cdot \delta_{n,ij}}, \quad \gamma_{n,ij} = -2 \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \beta \cdot \sqrt{S_{n,ij} m_{ij}}, \quad (4)$$

$$k_{t,ij} = 8 G_{ij} \sqrt{r_{ij} \cdot \delta_{n,ij}}, \quad \gamma_{t,ij} = -2 \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \beta \cdot \sqrt{S_{t,ij} m_{ij}}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{ij}} &= \frac{(1 - \nu_i^2)}{E_i} + \frac{(1 - \nu_j^2)}{E_j}, \quad r_{ij} = \frac{r_i \cdot r_j}{r_i + r_j}, \quad m_{ij} = \frac{m_i \cdot m_j}{m_i + m_j}, \\ \frac{1}{G_{ij}} &= \frac{2(2 + \nu_i) \cdot (1 - \nu_i)}{E_i} + \frac{2(2 + \nu_j) \cdot (1 - \nu_j)}{E_j}, \\ S_{n,ij} &= 2 E_{ij} \sqrt{E_{ij} \delta_{n,ij}}, \quad S_{t,ij} = 8 G_{ij} \sqrt{E_{ij} \delta_{n,ij}}, \\ \beta_{ij} &= \frac{\ln e_{ij}}{\sqrt{\ln^2 e_{ij} + \pi^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь m_i , m_j – массы, E_i и E_j – модули упругости, ν_i и ν_j – коэффициенты Пуассона; e_{ij} – коэффициент восстановления скорости после соударения i -й и j -й частиц соответственно ($0 \leq e_{ij} \leq 1$).

Касательная составляющая контактной силы вычисляется следующим образом. На определенном шаге интегрирования определяются значения $F_{n,ij}$ и проверяется выполнение неравенства $|F_{t,ij}| > \operatorname{tg}\phi_{ij} \cdot |F_{n,ij}|$, где ϕ_{ij} – заранее заданный угол внешнего трения скольжения между частицами. Если это неравенство не выполняется, то значение силы $F_{t,ij}$ остается определенной в соответствии с (2) и (3). Если неравенство выполнено, то частицы начинают проскальзывать друг по другу и на текущем шаге нагружения касательная составляющая силы отталкивания вычисляется по закону:

$$F_{t,ij} = \operatorname{tg}\phi_{ij} \cdot F_{n,ij}. \quad (7)$$

После определения значений нормальной и касательной компоненты силы, действующих на каждом контакте, происходит переход к следующему шагу нагружения и данная схема повторяется для существующих и вновь образовавшихся контактов. Если в какой-то момент нагружения для нормальной составляющей перекрытия выполняется условие $\delta_{n,ij} \leq 0$, то такой контакт считается исчерпанным и в дальнейшем не рассматривается.

Для исследования прикладных задач на основе сформулированных принципов разработаны математическая модель, алгоритмы и программное обеспечение GTS3D (**G**ranular **T**ransfer **S**imulation – **3** **D**imensional case) для численного исследования трехмерных задач деформирования и движения сыпучих сред при различных режимах нагружения.

Численный эксперимент. Пусть в пространстве $Oxyz$ задана область – цилиндр, ось которого ориентирована вдоль оси Oz , и сечением которого в горизонтальной плоскости Oxy является эллипс с заданным соотношением полуосей (рис. 2а). Цилиндр (исследуемый образец) заполнен сферическими частицами с заданными постоянными плотностью $\rho_i = \rho$, модулем упругости $E_i = E$, коэффициентом Пуассона $\nu_i = \nu$ и углом контактного трения скольжения $\phi_i = \phi$, образующими определенную упаковку. В настоящей работе выбраны близкие по размеру частицы, а именно, радиусы сфер выбираются случайным образом на основе равномерного распределения и отличаются друг от друга в $1 \div 1.5$ раза. Это позволяет применить алгоритм упаковки, при котором на первом этапе задается начальное распределение частиц по координатам и размерам, а на втором имитируется рост их диаметров с учетом контактного взаимодействия (алгоритм последовательного роста частиц). Таким образом, начальная упаковка “разбухает”, заполняя собой исследуемую область, причем конечная плотность упаковки (суммарная доля объемов частиц по отношению к объему всей области) составляет порядка $0.65 \div 0.80$ [11], [12].

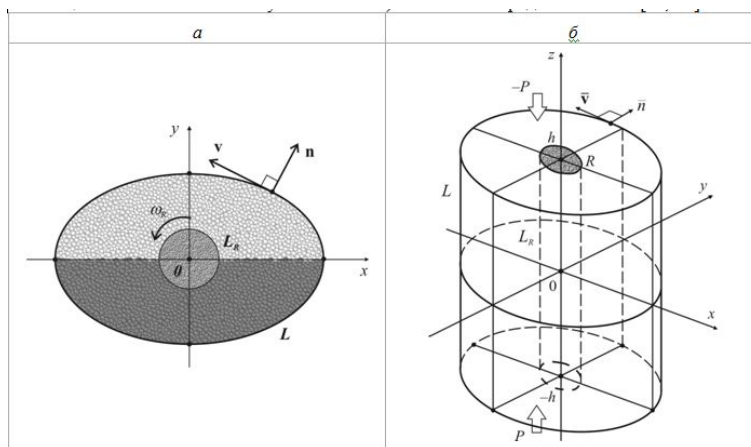


Рис. 2. Схема численного эксперимента: сечение плоскостью Oxy (а); трехмерная постановка (б)

Жесткое ядро в численном эксперименте представляет собой область цилиндрической формы с заданным радиусом R , ось которой совпадает с осью Oz . Поступательное движение ядра отсутствует, возможно только его вращение относительно центральной оси Oz .

Рассмотрим постановку граничных условий. Пусть на боковой поверхности (контуре) L задано распределение скоростей

$$\begin{aligned} v \cdot n &= 0, \\ |v \cdot n| &= v^0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (8)$$

На верхнем и нижнем торцах $z = \pm h$ образца задана постоянная пригрузка P , действующая вдоль оси Oz (рис. 2б), трение между торцами и частицами материала отсутствует. Введение такого вертикального поджатия играет роль веса и необходимо для того, чтобы смещения боковой части границы, вовлекали материал в процесс деформирования. Через короткое время после начала численного эксперимента за счет пригрузки материал переупаковывался, деформация становилась плоской и величина вертикального поджатия начинала играть роль параметра. Этот факт иллюстрируется графиком, представленным на рис. 3б. Здесь показано изменение отношения текущей высоты образца H к начальной высоте $h_0 = 2h$ в процессе деформирования. Видно, что при совершении менее четверти оборота границы дилатансия себя практически исчерпывает и упаковка переходит в стационарное состояние. Такой подход позволяет исследовать дилатансию, которая оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние сыпучей среды.

Значения упругих модулей, а также угла контактного трения ядра, внешней оболочки и частиц совпадают друг с другом.

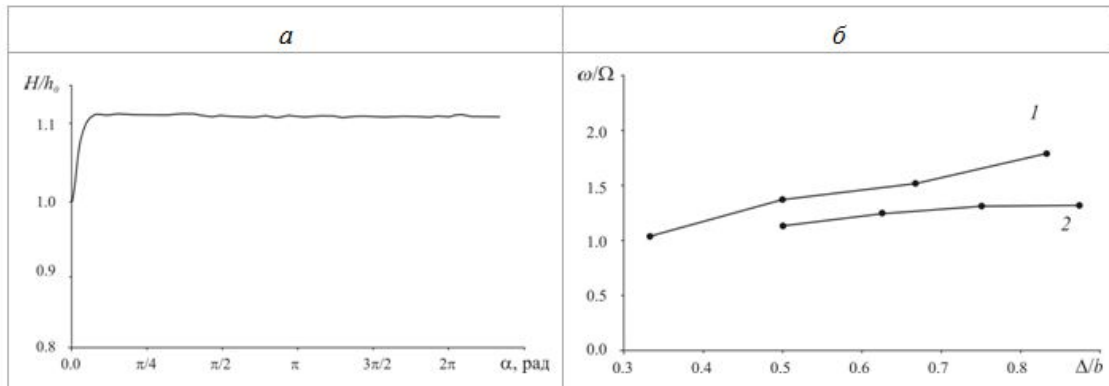


Рис. 3. Относительная скорость вращения внутреннего цилиндра:

$k = 0.6$ (1) и $k = 0.8$ (2) (а);

изменение высоты образца в процессе нагружения H относительно начальной h_0

Скорость вращения ядра определялась следующим образом. В начальный момент времени предполагаем, что ядро неподвижно. В процессе нагружения задаем вращение ядра с постоянно нарастающей угловой скоростью ω_R относительно вертикальной оси (рис. 2а). На каждом шаге интегрирования вычисляется общий момент сил \mathbf{M}_R , действующий на контур L_R со стороны контактирующих с ним частиц. При определенном значении скорости ω_R вертикальная компонента вектора \mathbf{M}_R становится равной нулю. Найденная скорость принималась за скорость свободного вращения ядра под воздействием окружающего сыпучего материала.

Введем следующие обозначения. Пусть a и b – большая и малая полуоси эллипса соответственно; соотношение полуосей $k = b/a$; зазор $\Delta = b - R$, где R – радиус цилиндра. Следует учесть, что в реальных экспериментах нагружение осуществлялось вращением внешних шаблонов с угловой скоростью Ω . В численном исследовании примем, что Ω – угловая скорость вращения контура L , если он имеет форму круга.

В соответствии с этими обозначениями численно исследовались зависимость угловой скорости вращения цилиндра от его диаметра. На рис. 3а приведены графики относительной скорости вращения внутренних цилиндров в зависимости от величины соотношения Δ/b при двух значениях параметра $k = 0.6$ и $k = 0.8$.

В качестве иллюстрации на рис. 4 приведено последовательность состояний сыпучего материала при значениях $k = 0.6$ и $\Delta/b = 2/3$. Здесь следует отметить тот факт, что при уменьшении отношения полуосей (в данном случае $b/a = 0.3$) движение материала приобретает особенность. А именно, область деформирования разбивается на две зоны течения – внешнюю и внутреннюю. Область, лежащая в полосе около внешней границы в целом повторяет ее конфигурацию и движется вдоль нее, а по обеим сторонам ядра образуются локализованные течения, которые движутся как жесткие целые (рис. 4е). При увеличении соотношения полуосей эллипса размер локализации резко уменьшается.

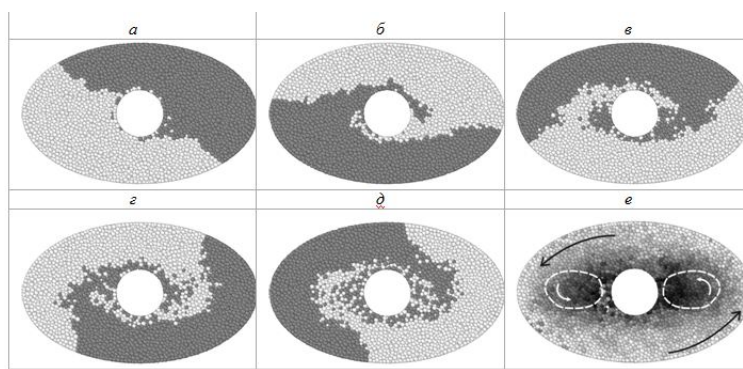


Рис. 4. Кинематика деформирования сыпучего материала

Выводы. Таким образом, расчеты показывают, что в лабораторной системе координат, показанных на рис. 1, внутреннее ядро вращается в направлении, противоположном направлению вращения внешних шаблонов, что подтверждается прямыми лабораторными экспериментами на сыпучих средах. Данное направление соответствует восточному дрейфу ядра Земли.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – М. : Наука, 1971. – 231 с.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред : в 2 т. Т. 1. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 448 с.
- [4] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред : в 2 т. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2002. – 448 с.
- [5] *Ревуженко, А. Ф.* О локализованном пластическом течении геосреды вокруг жесткого включения / А. Ф. Ревуженко, В. П. Косых, А. П. Бобряков // ФТПРПИ. – 1998. – № 6. – С. 27–34.
- [6] *Ревуженко, А. Ф.* Приливные волны и направленный перенос масс Земли / А. Ф. Ревуженко. – Новосибирск : Наука, 2013. – 204 с.
- [7] *Овчинников, В. М.* О скорости относительного вращения ядра Земли / В. М. Овчинников, В. В. Адушкин, В. А. Ан // Докл. РАН. – 1998. – Т. 36. – № 5. – С. 683–686.

[8] *Hrvoje, Tkalciж* The shuffling rotation of the Earth's inner core revealed by earthquake doublets / Hrvoje Tkalciж, Mallory Young, Thomas Bodin, Silvie Ngo & Malcolm Sambridge // Nature Geoscience. – 2013. – Vol. 6. – P. 497–502.

[9] *Ревуженко, А. Ф.* Численный метод построения континуальной модели деформирования твердого тела, эквивалентной заданной модели дискретных элементов / А. Ф. Ревуженко, С. В. Клишин // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т. 15. – № 6. – С. 35–44.

[10] *Ландау, Л. Д.* Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 2003. – 264 с.

[11] *Kolonko, M.* A hierarchical approach to simulate the packing density of particle mixtures on a computer / M. Kolonko, S. Raschdorf, D. Wäsch // Granular Matter. – 2010. – Vol. 12. – Issue 6. – P. 629–643.

[12] *Labra, C.* High-density sphere packing for discrete element method simulations / C. Labra, E. Oñate // Communications in Numerical Methods in Engineering. – 2009. – Vol. 25. – Issue 7. – P. 837–849.

Клишин Сергей Владимирович,

кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики деформируемого твердого тела и сыпучих сред, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск

e-mail: sv.klishin@gmail.com

Микенина Ольга Александровна,

кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории механики деформируемого твердого тела и сыпучих сред, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск

e-mail: olgarev @yandex.ru

S. V. Klishin, O. A. Mikenina

ABOUT A PARADOXICAL MOTION OF GRANULAR MATERIAL INSIDE AN ELLIPTICAL DOMAIN

N. A. Chinakal's Mining Institute SB RAS

Abstract. The spatial problem on the deformation of the granular material between flexible cylindrical shell having elliptical cross-section and rigid core is examined. Deformation is performed by rotating the axes of the ellipse relative to the flexible membrane and the core. It is shown that under certain conditions the core can rotate in a direction opposite to the direction of the axes of rotation.

Keywords: granular material, core, rigid inclusion, numerical analysis, tidal forces, Earth's inner core, Discrete Element Method.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* The theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 231 p.
- [2] *Ivlev, D. D.* The theory of a being strengthened plastic body / D. D. Ivlev, G. I. Bykovtsev. – M. : Nauka, 1971. – 208 p.
- [3] *Ivlev, D. D.* Mechanics of plastic environments : in 2 vol. Vol. 1. Theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Fizmatlit, 2001. – 448 p.
- [4] *Ivlev, D. D.* Mechanics of plastic environments : в 2 т. Т. 2. General questions. Zhestkoplasticheskoye and uprugoplasticheskoye condition of ph. Hardening. Deformation theories. Difficult environments / D. D. Ivlev. – M. : Fizmatlit, 2002. – 448 p.
- [5] *Revuzhenko, A. F.* About the localized plastic current reo Wednesdays round rigid inclusion / A. F. Revuzhenko, V. P. Kosih, A. P. Bobryakov // FTPRPI. – 1998. – № 6. – P. 27–34.
- [6] *Revuzhenko, A. F.* Tidal waves and the directed transfer of mass of Earth / A. F. Revuzhenko. – Novosibirsk : Nauka, 2013. – 204 p.
- [7] *Ovchinnikov, V. M.* About the speed of relative rotation of a kernel of Earth / V. M. Ovchinnikov, V. V. Adushkin, V. A. An // Reports of the Russian Academy of Sciences. – 1998. – Vol. 36. – № 5. – P. 683–686.
- [8] *Hrvoje, Tkaluic* The shuffling rotation of the Earth's inner core revealed by earthquake doublets / Hrvoje Tkaluic, Mallory Young, Thomas Bodin, Silvie Ngo & Malcolm Sambridge // Nature Geoscience. – 2013. – Vol. 6. – P. 497–502.
- [9] *Revuzhenko, A. F.* Numerical method of creation of continual model of deformation firm the bodies, the equivalent set model of discrete elements / A. F. Revuzhenko, S. V. Klishin // The physical mesomechanics. – 2012. – Vol. 15. – № 6. – P. 35–44.
- [10] *Landau, L. D.* Theoretical physics. Vol. VII. Elasticity theory / L. D. Landau, E. M. Lifshits. – M. : Fizmatlit, 2003. – 264 p.
- [11] *Kolonko, M.* A hierarchical approach to simulate the packing density of particle mixtures on a computer / M. Kolonko, S. Raschdorf, D. Wäsch // Granular Matter. – 2010. – Vol. 12. – Issue 6. – P. 629–643.
- [12] *Labra, C.* High-density sphere packing for discrete element method simulations / C. Labra, E. Oñate // Communications in Numerical Methods in Engineering. – 2009. – Vol. 25. – Issue 7. – P. 837–849.

Klishin, Sergey Vladimirovich

Cand. Sc. (Engineering), Senior Researcher, Department of Mechanics of Deformable Solid Body and Granular Media, N.A. Chinakal's Mining Institute SB RAS, Novosibirsk

Mikenina, Olga Aleksandrovna

Cand. Sc. (Phys.-Math.), Research Associate, Department of Mechanics of Deformable Solid Body and Granular Media, N.A. Chinakal's Mining Institute SB RAS, Novosibirsk

К ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА (Ч. 2)

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)

Аннотация. Предложены новые формулы дзета-функции Римана. Получены рекуррентные формулы для чисел Римана. Предложен новый способ определения чисел Бернулли и многочленов Бернулли.

Ключевые слова: дзета-функции Римана, числа Бернулли, многочлены Бернулли.

УДК: 539.1

§3. Новое интегральное представление дзета-функции Римана

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda k^2} \quad (\lambda > 0). \quad (3.1)$$

Для нахождения суммы $S = 1 + 2S_1$, где

$$S_1(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k^2}, \quad (3.2)$$

формула суммирования Плана (1.20) не применима. Из формулы (2.4) в ч. 1 следует, что $f(z) = e^{-\lambda z^2}$, $m = 1$. Функция $f(z)$ в области $S_{\pi/4}$ ($\alpha = \pi/4$) удовлетворяет всем требованиям теоремы 6. Поэтому с помощью формулы суммирования рядов (2.4) находим

$$S_1(\lambda) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} - \int_0^1 e^{-\lambda \tau^2} d\tau + A(\lambda), \quad (3.3)$$

где

$$A(\lambda) = \frac{3}{4e^\lambda} + \frac{1}{2e^\lambda} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda \rho \sqrt{2}}}{\sin^2(\rho \frac{\sqrt{2}}{2}) + \operatorname{sh}^2(\rho \frac{\sqrt{2}}{2})} \times \\ \times \left[\cos(\lambda \rho^2 + \lambda \rho \sqrt{2} - \pi \rho \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}) - \cos(\lambda \rho^2 + \lambda \rho \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}) e^{-\pi \rho \sqrt{2}} \right] d\rho. \quad (3.4)$$

Анализ функции $A(\lambda)$ показывает:

- 1°. Функция $A(\lambda)$ является монотонно убывающей функцией по λ ($\lambda \geq 0$);
- 2°. $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = 0$;
- 3°. Если $\lambda = 0$, то

$$\begin{aligned}
 A(0) &= \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sin^2\left(\rho\pi\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{sh}^2\left(\rho\pi\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \times \\
 &\times [\cos(\rho\pi\sqrt{2}) - \sin(\rho\pi\sqrt{2}) - e^{-\rho\pi\sqrt{2}}] d\rho = \\
 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi u) - \cos(\pi u)} \times [\cos(\pi u) - \sin(\pi u) - e^{-\pi u}] du.
 \end{aligned}$$

Поскольку¹

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi u) - \cos(\pi u)} \times [\cos(\pi u) - \sin(\pi u) - e^{-\pi u}] du = -\frac{1}{2}, \quad (3.4)^1$$

то $A(0) = \frac{1}{2}$.

Из 1° – 3° следует, что $0 < A(\lambda) \leq \frac{1}{2}$ для любого $\lambda \geq 0$. График функции $A(\lambda)$ показан на рис. 4.

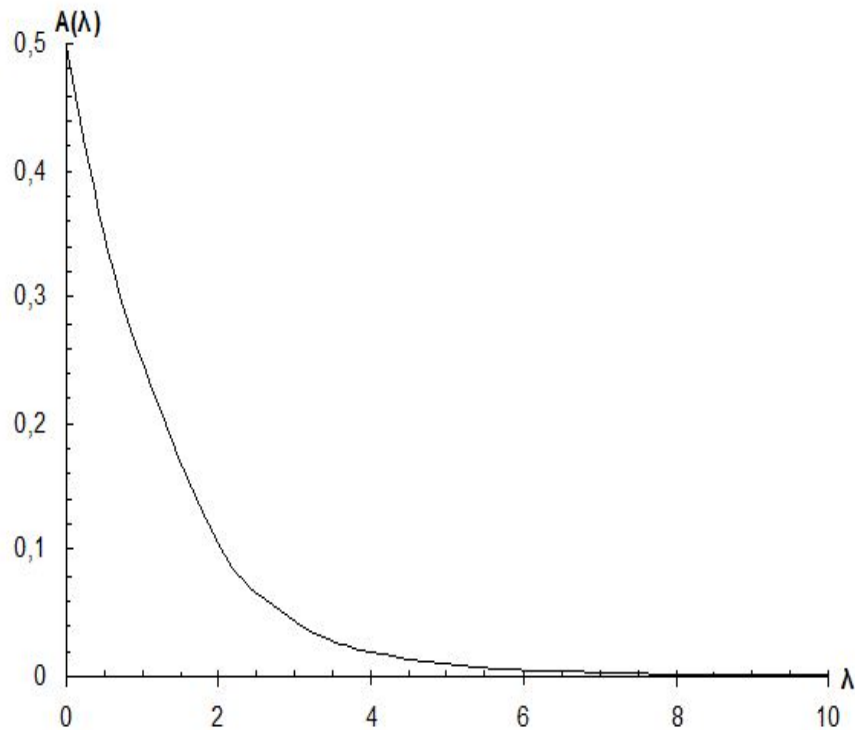


Рис. 4

Если в частности $\lambda=1$, то выражение, находящееся в правой части равенства (3.3), приблизительно равно

$$S_1(1) \approx 0.386319.$$

¹Интеграл в (3.4¹) вычислен автором данной работы.

Функция $A(\lambda)$ оценена для любого $\lambda > 0$ в монографии Харди [9] (см. стр. 257). В этой работе функция $S_1(\lambda)$ представлена в виде

$$\begin{aligned} S_1(\lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k^2} = \int_1^{\infty} e^{-\lambda \tau^2} d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_k^{k+1} (e^{-\lambda k^2} - e^{-\lambda \tau^2}) d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} - \int_0^1 e^{-\lambda \tau^2} d\tau + A(\lambda), \end{aligned}$$

где

$$A(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_k^{k+1} (e^{-\lambda k^2} - e^{-\lambda \tau^2}) d\tau \right].$$

Далее, замечая, что

$$e^{-\lambda k^2} - e^{-\lambda \tau^2} = 2\lambda \int_k^{\tau} \xi e^{-\lambda \xi^2} d\xi < 4\lambda(\tau - 1)e^{-\lambda(\tau-1)^2}$$

для $2 \leq k < \tau < k+1$, что всегда меньше 1, Харди получает:

$$A(\lambda) < 1 + 4\lambda \int_1^{\infty} (\tau - 1)e^{-\lambda(\tau-1)^2} d\tau = 3 \quad (\lambda > 0).$$

Таким образом, по Харди получается, что $0 < A(\lambda) < 3$. Эту оценку нельзя считать удовлетворительной.

Пусть $\lambda = \pi x$ ($x > 0$). Тогда из (3.1) и (3.2) приходим к тэта-ряду²⁾:

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi x n^2}, \tag{3.5}$$

$$\theta(x) = 1 + 2\omega(x), \quad \omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x n^2}. \tag{3.6}$$

Тэта-функция $\theta(x)$ играет особую роль в теории функции.

Из (3.3) и (3.4) приходим к интегральному представлению функции $\omega(x)$.

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x n^2} = \frac{3}{4} e^{-\pi x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \int_0^1 e^{-\pi x \tau^2} d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\pi x(1+u)}}{ch(\pi u) - \cos(\pi u)} \left\{ \cos \left[\pi x \left(u + \frac{u^2}{2} \right) \right] [\cos(\pi u) - \sin(\pi u) - e^{-\pi u}] + \right. \\ &\quad \left. + \sin \left[\pi x \left(u + \frac{u^2}{2} \right) \right] [\sin(\pi u) + \cos(\pi u) - e^{-\pi u}] \right\} du \quad (x > 0). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left[(x)^{\frac{1}{2}} \omega(x) \right] = \frac{1}{2}, \tag{3.8}$$

так как

²⁾ $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x n^2} = \frac{1}{2} [\theta_3(0, ix) - 1]$. Здесь θ_3 является эллиптической тэта-функцией (см., например, [1], стр. 300).

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(u) + e^{-u} - \cos(u)}{ch(u) - \cos(u)} du = \frac{\pi}{2}. \quad (3.9)$$

Кроме того, видно, что интегралы, находящиеся в правой части равенства (3.7), являются равномерно сходящимися интегралами по x ($x > 0$). Очевидно, и ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi x n^2}$ является равномерно и абсолютно сходящимся рядом по x ($x > 0$).

Гамма-функция Эйлера $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ определяется по формуле

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-x} dx \quad (Res > 0).$$

Поэтому для натурального n имеем

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^{\infty} e^{-\pi x n^2} x^{\frac{s}{2}-1} dx \quad (Res > 0),$$

откуда $Res > 1$ находим

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \xi(s) = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x n^2} \right) dx \stackrel{def}{=} \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx. \quad (3.10)$$

Перемена порядка суммирования и интегрирования возможна в силу абсолютной сходимости ряда в (3.7).

Подставляя выражение $\omega(x)$, определяемое по формуле (3.7), в (3.10), а затем заменяя порядок интегрирования, что в данном случае допустимо, с учетом

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\alpha x} \left\{ \begin{array}{l} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{array} \right\} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{s}{4}}} \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{s}{2} \arctg \frac{\beta}{\alpha}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{2} \arctg \frac{\beta}{\alpha}\right) \end{array} \right\} \\ \left(Res > -2\delta, Re\alpha > |Im\beta|, \delta = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right\} \right)$$

приходим к новому интегральному представлению для дзета-функции Римана $\mathfrak{Z}(s)$:

$$\mathfrak{Z}(s) = \frac{3}{4} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{(a^2 + b^2)^{\frac{s}{4}} \Delta(u)} \left\{ \cos\left(\frac{s}{2} \arctg \frac{b}{a}\right) A(u) + \right. \\ \left. + \sin\left(\frac{s}{2} \arctg \frac{b}{a}\right) B(u) \right\} du. \quad (3.11)$$

Здесь

$$a = 1 + u, \quad b = u \left(1 + \frac{u}{2}\right),$$

$$A(u) = \cos \pi u - \sin \pi u - e^{-\pi u},$$

$$B(u) = \sin \pi u + \cos \pi u - e^{-\pi u},$$

$$\Delta(u) = ch \pi u - \cos \pi u.$$

Из (3.11) следует, что функция $\mathfrak{Z}(s)$ регулярна в комплексной s -плоскости, за исключением точки $s=1$, где она имеет простой полюс с вычетом, равным 1.

Полученное нами новое интегральное представление дзета-функции Римана (3.11) играет важную роль в теории дзета-функции Римана, в чем убедимся в дальнейшем.

§4. Новая формула для определения многочленов Бернулли

В дальнейшем нам понадобятся формулы

$$\sin(\operatorname{marctgt}) = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{m}{2}}} \sum_{k=1}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sin \frac{k\pi}{2} t^k, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} \cos(\operatorname{marctgt}) = & \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{m}{2}}} \left[\sum_{k=1}^m \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} \sin \frac{k\pi}{2} t^{k-1} - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^m \frac{(m-1)!(m-k)}{k!(m-k)!} \sin \frac{k\pi}{2} t^{k+1} \right]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots).$$

Эти формулы получены нами.

Обобщенная дзета-функция определяется при $Res > 1$ равенством

$$\mathfrak{Z}(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}, \quad a \neq 0, -1, -2, \dots \tag{4.3}$$

Она удовлетворяет функциональному уравнению

$$X(s, a) = X(s, m+a) + \sum_{n=0}^{m-1} (n+a)^{-s}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{4.4}$$

Применяя K_α -формулу суммирования при $\alpha = \pi/2$ к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}$, после элементарных выкладок получаем представление Эрмита для обобщенной дзета-функции $\mathfrak{Z}(s, a)$:

$$\mathfrak{Z}(s, a) = \frac{1}{2a^s} + \frac{a^{1-s}}{s-1} + 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(\operatorname{sarctg} \frac{\eta}{a})}{(\eta^2 + a^2)^{s/2} (e^{2\eta\pi} - 1)} d\eta. \tag{4.5}$$

Можно показать, что интеграл, содержащийся в формуле Эрмита, определяет регулярную функцию от s в s -плоскости. Следовательно, функция $\xi(s, a)$ является регулярной функцией в s -плоскости, кроме $s = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом, равным 1.

Можно показать, что

$$\mathfrak{Z}(\nu) = \frac{\mu^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-1}}{e^{\mu x} - 1} dx \quad (Re\mu > 0, Re\nu > 1). \tag{4.6}$$

Из (4.5) с учетом (4.6) находим:

$$\mathfrak{Z}(0, a) = \frac{1}{2} - a, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}(-m, a) = & \frac{a^m}{2} - \frac{a^{m+1}}{m+1} - 2a^{m+1} \sum_{k=1}^m \left[\frac{m! \mathfrak{Z}(k+1)}{(2a\pi)^{k+1} (m-k)!} \sin \frac{k\pi}{2} \right]. \\ & a > 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Здесь $\mathfrak{Z}(k+1)$ – числа Римана, причем $k+1 = 2n$ ($n = 1, 2, \dots$), так как, если k – четное число, то $\sin \frac{k\pi}{2} = 0$. Формула (4.8) получена нами.

Нетрудно получить известную формулу (см., напр., [4], стр. 42)

$$\mathfrak{Z}(-m, a) = -\frac{\beta_{m+1}(a)}{m+1}, \quad (4.9)$$

где $\beta_{m+1}(a)$ – многочлен Бернулли.

Из (4.7)–(4.9) приходим к замечательной формуле, позволяющей определить многочлены Бернулли:

$$\beta_1(a) = a - \frac{1}{2}, \quad (4.10)$$

$$\beta_{m+1}(a) = -(m+1) \left\{ \frac{a^m}{2} - \frac{a^{m+1}}{m+1} - 2a^{m+1} \sum_{k=1}^m \left[\frac{m! \mathfrak{Z}(k+1)}{(2a\pi)^{k+1} (m-k)!} \sin \frac{k\pi}{2} \right] \right\} \quad (4.11)$$

$(m = 1, 2, 3, \dots)$.

Равенства (4.10) и (4.11) получены автором данной работы. Ниже нами будет показано, что числа Римана $\mathfrak{Z}(2n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) определяются рекуррентными формулами (7.3) и (9.6). Поэтому, определив $\mathfrak{Z}(2n)$ одной из этих рекуррентных формул, в силу (4.10) и (4.11) находим многочлены Бернулли и тем самым числа Бернулли.

Из (4.3) и (4.5) следует:

$$\mathfrak{Z}(s, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \stackrel{def}{=} \mathfrak{Z}(s), \quad (4.12)$$

$$\mathfrak{Z}(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(\operatorname{sarctg} \eta)}{(\eta^2 + 1)^{s/2} (e^{2\eta\pi} - 1)} d\eta. \quad (4.13)$$

§5. Функциональное уравнение дзета-функции Римана

В теории дзета-функции Римана известно соотношение между $\mathfrak{Z}(t)$ и $\mathfrak{Z}(1-t)$:

$$\mathfrak{Z}(1-t) = \frac{2\Gamma(t)}{(2\pi)^t} \cos \frac{\pi t}{2} \mathfrak{Z}(t). \quad (5.1)$$

Эта замечательная формула принадлежит Риману, и называют ее функциональным уравнением дзета-функции Римана.

Анализ функционального уравнения (5.1) показывает:

1. Если $t = 2n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), то

$$\mathfrak{Z}(-2n) = 0, \quad \mathfrak{Z}'(-2n) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2(2\pi)^{2n}} \mathfrak{Z}(2n+1). \quad (5.2)$$

2. Если $t = 2n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), то

$$\mathfrak{Z}(1-2n) = \frac{2(-1)^n (2n-1)!}{(2\pi)^{2n}} \mathfrak{Z}(2n). \quad (5.3)$$

Из (4.9), (5.2) и (5.3) приходим к следующим следствиям:

Следствие 1**. Числа Бернулли $\beta_{2n+1} = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), что следует из (4.9) при $a=1$ и (5.2).

Следствие 2**. Дзета-функция Римана $\mathfrak{Z}(t)$ в точках $t = -2n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) имеет нули первого порядка.

Следствие 3**. Числа Бернулли β_{2n} ($n = 1, 2, 3, \dots$) связаны с числами Римана $\mathfrak{Z}(2n)$ формулой

$$\beta_{2n} = \frac{2(-1)^{n+1} (2n)!}{(2\pi)^{2n}} \mathfrak{Z}(2n), \quad (5.4)$$

что следует из (4.9) при $a=1$, $m = 2n - 1$ и (5.3).

С помощью формул

$$\Gamma(t) = \frac{2^{t-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{t}{2}\right) \Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right)$$

(формула Лежандра для удвоения аргумента гамма-функции Эйлера),

$$\cos \frac{\pi t}{2} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-t}{2}\right)}$$

функциональное уравнение (5.1) можно записать так:

$$\pi^{-\frac{t}{2}} \Gamma\left(\frac{t}{2}\right) \mathfrak{Z}(t) = \pi^{-\frac{1-t}{2}} \Gamma\left(\frac{1-t}{2}\right) \mathfrak{Z}(1-t). \quad (5.5)$$

Функциональное уравнение Римана для $\mathfrak{Z}(t)$ (5.5) можно получить другим способом ³. Покажем это.

Для любого $x \in]0, \infty]$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} \int_0^1 e^{-\pi x \tau^2} d\tau - \frac{\sqrt{x} e^{-\pi x}}{2} \left\{ \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xu}}{\operatorname{ch}(u) - \cos(u)} \times \right. \\ & \times \left[\cos\left(\frac{xu^2}{2\pi} + xu - u - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{xu^2}{2\pi} + xu - \frac{\pi}{4}\right) e^{-u} \right] du \Big\} = \\ & = \int_0^1 e^{-\frac{\pi}{x} \tau^2} d\tau - \frac{e^{-\frac{\pi}{x}}}{2} \left\{ \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{\operatorname{ch}(u) - \cos(u)} \times \right. \\ & \times \left[\cos\left(\frac{u^2}{2x\pi} + \frac{u}{x} - u - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{u^2}{2x\pi} + \frac{u}{x} - \frac{\pi}{4}\right) e^{-u} \right] du \Big\}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

График функций $A(x)$ и $B(x)$, где $A(x)$ и $B(x)$ – левая и правая части равенства (5.6), показан на рис. 5.

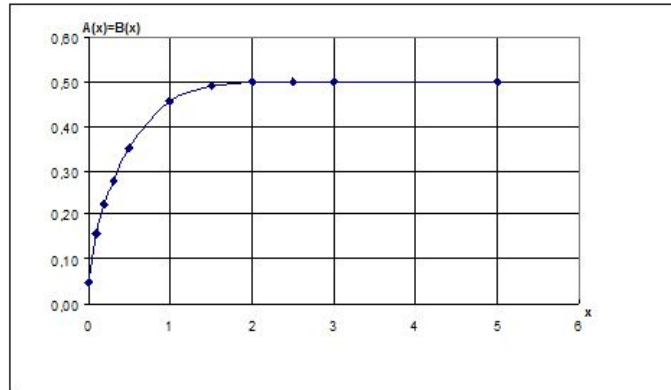


Рис. 5

Из (3.5)–(3.7) с учетом (5.6) приходим к замечательным результатам:

1.

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x} \theta(x) \quad (x > 0). \quad (5.7)$$

2.

$$\omega\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x}\omega(x) \quad (x > 0). \quad (5.8)$$

³Этот способ аналогичен способу Римана. Существуют и другие способы [4].

Формулы (5.7) и (5.8) в [3] (см. стр. 37–38) получены другим способом. Формулу (3.10) в силу (5.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \xi(s) &= \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx = \\ &= \int_1^{\infty} \left[x^{-(\frac{s}{2}+1)} \omega\left(\frac{1}{x}\right) + x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) \right] dx = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}} \right) \omega(x) dx \end{aligned} \quad (5.9)$$

$(s > 1).$

Из (3.7) следует, что $\omega(x) = O(e^{-\pi x})$ при $x \rightarrow \infty$. Поэтому правая часть (5.9) регулярна в комплексной s -плоскости, за исключением точек $s = 0$ и $s = 1$, где она имеет простые полюсы с вычетами -1 и $+1$ соответственно. Кроме того, она не меняется от замены s на $1-s$. Следовательно,

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \mathfrak{Z}(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \mathfrak{Z}(1-s),$$

что и требовалось получить.

Замечание 1. В работе [4] (см. стр. 174) сумма ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi t}$ функция $\theta(t)$, где $t > 0$, определена так:

$$\theta(t) = \int_{-\infty-i}^{\infty-i} \frac{e^{-z^2 \pi t}}{e^{2\pi t z} - 1} dz - \int_{-\infty+i}^{\infty+i} \frac{e^{-z^2 \pi t}}{e^{2\pi t z} - 1} dz. \quad (5.10)$$

Разложением подынтегральных функций соответственно по степеням $e^{-2\pi iz}$, $e^{2\pi iz}$ и почленным интегрированием, пользуясь формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda \alpha x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\lambda \alpha^2} \quad (\lambda > 0),$$

можно показать, что

$$\theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t} \theta(t) \quad (t > 0).$$

Это функциональное уравнение называют функциональным уравнением Пуассона.

Формулу (5.10), замечая, что $\theta(t) = 1 + 2\omega(t)$, где $\omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi t}$ ($t > 0$), можно записать так:

$$\omega(t) = -\frac{1}{2} + e^{\pi t} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2 \pi t}}{ch(2\pi) - \cos(2\pi x)} [sh(2\pi) \cos(2\pi x t) + \sin(2\pi x t) \sin(2\pi x)] dx. \quad (5.11)$$

Анализ функции $\omega(t)$ по формуле (5.11) сопряжен с большими трудностями, тогда как анализ той же функции $\omega(t)$ по формуле (1.15³) (в формуле (3.11) вместо x следует записать t) достаточно прост.

Замечание 2. Риманом введена функция

$$R(s) = \frac{s(s-1)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \mathfrak{Z}(s). \quad (1)$$

Из функционального уравнения Римана следует:

$$R(s) = R(1-s).$$

Отсюда, полагая, что $E(z) = R\left(\frac{1}{2} + iz\right)$, получаем

$$E(z) = E(-z).$$

Функциональное уравнение, таким образом, эквивалентно утверждению, что $E(z)$ – четная функция.

Известно [5], что функции $R(s)$ и $E(z)$ являются целыми функциями первого порядка. Но $E(z)$ – четная функция, следовательно, $E(\sqrt{z})$ – целая функция порядка $\frac{1}{2}$. Поэтому $E(\sqrt{z})$ имеет бесконечное множество нулей с показателем сходимости, равным 1.

Можно показать, что $\zeta(s)$ не имеет нулей при $Res > 1$. Из функционального уравнения Римана следует, что $\zeta(s)$ не имеет нулей при $Res < 0$, за исключением точек $s = -2n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), где она имеет нули первого порядка.

Нули $\zeta(s)$ в точках $s = -2n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) называются “тривиальными нулями”. Они не являются нулями функции $R(s)$, так как из (5.12) следует, что эти нули $\zeta(s)$ погашаются простыми полюсами $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$. Из (5.11) следует также, что $R(s)$ не имеет нулей при $Res > 1$.

Поэтому функция $R(s)$ имеет комплексные нули в полосе $0 \leq Res \leq 1$. Они являются также нулями $\zeta(s)$, так как $s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ не имеет нулей в этой полосе, кроме значения $s = 1$, которому отвечает простой полюс $\zeta(s)$. Заметим, что $R(0) = R(1) = \frac{1}{2}$. Вообще, можно доказать, что если $Im s = 0$, то $R(s) \neq 0$.

§6. Нули дзета-функции Римана $\zeta(s)$ на прямой $Res = \frac{1}{2}$

Умножая обе части равенства (5.9) на $s(s-1)$ и полагая $s = \frac{1}{2} + it$, находим

$$E(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^{\infty} \omega(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t \ln x\right) dx, \quad (6.1)$$

где функция $\omega(x)$ определяется по формуле (3.7).

Так как интеграл

$$\int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{4}} \omega(x) \left[\frac{1}{2} \ln x\right]^n \cos\left(\frac{1}{2}t \ln x + \frac{1}{2}n\pi\right) dx$$

удовлетворяет требованиям признака Валле-Пуссена, то интеграл

$$\int_1^{\infty} \omega(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t \ln x\right) dx$$

можно дифференцировать по t под знаком интеграла любое число раз. Полагая затем $t = 0$, по теореме Тейлора, имеем для всех значений t разложение

$$E(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{2^{2n}} t^{2n}. \quad (6.2)$$

Здесь

$$(2n)! a_n = \int_1^{\infty} \frac{\omega(x) [\ln x]^{2n}}{x^{\frac{3}{4}}} dx. \quad (6.3)$$

Из функционального уравнения (5.8) следует, что

$$4\omega'(1) + \omega(1) = -\frac{1}{2}. \quad (6.4)$$

Из (6.1) с учетом (6.4) получаем

$$E(t) = 4 \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left\{ x^{\frac{3}{2}} \omega'(x) \right\} x^{-\frac{1}{4}} \cos \left(\frac{1}{2} t \ln x \right) dx. \quad (6.5)$$

Формулы (6.1), (6.2) и (6.5) получены Риманом (см., напр., [5]).

Существуют различные методы (метод Харди [5], метод Поля [5], метод Ландау [5] и др.), позволяющие доказать, что функция $E(t)$, где $0 \leq t < \infty$, имеет бесконечное число нулей, и, следовательно, у $\mathfrak{Z}(s)$ есть бесконечно много нулей на прямой $Res = \frac{1}{2}$. Возникает вопрос: все ли комплексные нули функции $\mathfrak{Z}(s)$ в критической полосе $0 \leq Res \leq 1$ лежат на прямой $Res = \frac{1}{2}$? Утвердительный ответ на этот вопрос составляет содержание гипотезы Римана. Поэтому упомянутые выше методы не доказывают гипотезу Римана.

Методы Харди [6] и Поля [7] опираются на следующие общие равенства:

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta + i) = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{d^m}{d\delta^m} \omega(\delta + i) = 0 \quad (6.6)$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots).$$

Харди [6], и вслед ему Поля [7], чтобы доказать равенства в (6.6), пользуются следующими равенствами:

$$\omega(\delta + i) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi(\delta+i)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi \delta} = 2\omega(4\delta) - \omega(\delta), \quad (6.7)$$

$$\omega(\delta + i) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \omega\left(\frac{1}{4\delta}\right) - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \omega\left(\frac{1}{\delta}\right) - \frac{1}{2}. \quad (6.8)$$

Равенство (6.8) получается из (6.7) с учетом (5.8). Далее Харди [6] пишет: “С помощью этих равенств легко убедиться, что функция $\frac{1}{2} + \omega(x)$ и все её производные стремятся к нулю при $x \rightarrow i$ вдоль любого пути, заключенного в угле $|\arg(x - i)| < \frac{\pi}{2}$ ”. Отсюда следует, что доказательство равенств (6.6) в указанной Харди отсутствует.

Опираясь на формулы (3.7) и (3.11), докажем, что утверждение Харди является справедливым.

Из (3.7) следует:

$$\begin{aligned} \omega(4\delta) &= \frac{3}{4} e^{-4\delta\pi} + \frac{1}{4\sqrt{\delta}} - \int_0^1 e^{-4\pi\delta\tau^2} d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-4\delta\pi(1+u)}}{\operatorname{ch}(\pi u) - \cos(\pi u)} \times \\ &\times \left\{ \cos \left[4\pi\delta \left(u + \frac{u^2}{2} \right) \right] [\cos(\pi u) - \sin(\pi u) - e^{-\pi u}] + \right. \\ &\left. + \sin \left[4\pi\delta \left(u + \frac{u^2}{2} \right) \right] [\sin(\pi u) + \cos(\pi u) - e^{-\pi u}] \right\} du, \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \omega(\delta) &= \frac{3}{4} e^{-\delta\pi} + \frac{1}{2\sqrt{\delta}} - \int_0^1 e^{-\pi\delta\tau^2} d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\delta\pi(1+u)}}{\operatorname{ch}(\pi u) - \cos(\pi u)} \times \\ &\times \left\{ \cos \left[\pi\delta \left(u + \frac{u^2}{2} \right) \right] [\cos(\pi u) - \sin(\pi u) - e^{-\pi u}] + \right. \\ &\left. + \sin \left[\pi\delta \left(u + \frac{u^2}{2} \right) \right] [\sin(\pi u) + \cos(\pi u) - e^{-\pi u}] \right\} du. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Автором данной работы вычислен следующий интеграл:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \frac{a^m}{\Delta(u)} \left\{ A(u) \left[\sum_{k=1}^m \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} \sin \frac{k\pi}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^{k-1} - \right. \right. \\ &- \left. \sum_{k=1}^m \frac{(m-1)!(m-k)}{k!(m-k)!} \sin \frac{k\pi}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^{k+1} \right] - \\ &\left. - B(u) \left[\sum_{k=1}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sin \frac{k\pi}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^k \right] \right\} du = \frac{1-6m}{2(2m+1)} \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots).$$

Здесь

$$a = 1 + u, \quad b = u \left(1 + \frac{u}{2}\right),$$

$$A(u) = \cos \pi u - \sin \pi u - e^{-\pi u}, \quad B(u) = \sin \pi u + \cos \pi u - e^{-\pi u}, \quad \Delta(u) = \operatorname{ch} \pi u - \cos \pi u.$$

Справедливость первой формулы в (6.6) следует из (6.7), (6.9), (6.10) и (3.9). Докажем, что имеет место вторая формула в (6.6).

Из (6.7), (6.9) и (6.10) после некоторых преобразований имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{d^m}{d\delta^m} \omega(\delta + i) &= 2(-4\pi)^m \left\{ \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2m+1} + \right. \right. \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{a^m}{\Delta(u)} \left\{ A(u) \left[\sum_{k=1}^m \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} \sin \frac{k\pi}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^{k-1} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \sum_{k=1}^m \frac{(m-1)!(m-k)}{k!(m-k)!} \sin \frac{k\pi}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} \right] - B(u) \left[\sum_{k=1}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sin \frac{k\pi}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^k \right] \right\} du \left. \right\} - \\ &- (-\pi)^m \left\{ \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{a^m}{\Delta(u)} \left\{ A(u) \left[\sum_{k=1}^m \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} \sin \frac{k\pi}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^{k-1} - \right. \right. \right. \right. \\ &- \left. \left. \sum_{k=1}^m \frac{(m-1)!(m-k)}{k!(m-k)!} \sin \frac{k\pi}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} \right] - B(u) \left[\sum_{k=1}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sin \frac{k\pi}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^k \right] \right\} du \left. \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (6.11) приходим ко второй формуле в (6.6).

Замечание 3. Полагая в формуле (3.7) $x = k\delta$, где $0 < k < \infty$, $\delta > 0$, с учетом (3.11) аналогичным образом нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow +0} \left[\omega(k\delta) - \frac{1}{2\sqrt{k\delta}} \right] &= \mathfrak{S}(0) = -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{(-k\pi)^m} \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{d^m}{d\delta^m} \left[\omega(k\delta) - \frac{1}{2\sqrt{k\delta}} \right] &= \mathfrak{S}(-2m) = 0 \\ &(m = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Замечание 3 закончено.

Методы Харди, Полия, Ландау и др. подробно изложены в [5]. Эти методы позволяют доказать, что функции $E(t)$ и $\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2} + it\right)$ в одних и тех же значениях t ($0 \leq t < \infty$) имеют нули, причем их бесконечно.

С помощью формулы (3.11), а также формулы (4.13) можно показать, что значение $\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет неравенствам

$$-\frac{3}{2} < \mathfrak{S}\left(\frac{1}{2}\right) < -\frac{1}{2} \left[2 + \frac{1}{2} \ln(2\pi) \right]. \quad (6.12)$$

Полученная нами эта оценка вполне приемлемая, ибо число

$$-\frac{1}{2} \left[2 + \frac{1}{2} \ln(2\pi) \right]$$

приближенно равно -1.46.

Из (6.12) следует, что функции $E(t)$ и $\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2} + it\right)$ могут иметь нули, если $t > 0$.

Пусть $T > 0$ и функция $N(T)$ дает число нулей функции $E(t)$, и, тем самым, функции $\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2} + it\right)$ при $0 < t \leq T$.

Возникает вопрос: функция $E(t)$ и, тем самым, функция $\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2} + it\right)$ имеют ли хотя бы один нуль для любого T ?

Ответ на этот вопрос позволяет дать численный анализ функции $E(t)$ и $\Im\left(\frac{1}{2} + it\right)$.
 Численный анализ функции $E(t)$, определяемой по формуле (6.1), показывает:
 1°. Она монотонно уменьшается, если $0 < t \leq 14$ (рис. 6).

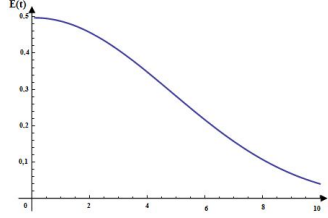


Рис. 6

2°. Она имеет нули, если $t > 14$ (рис. 6а, рис. 6б)

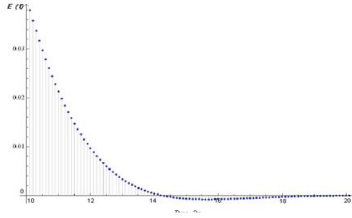


Рис. 6 а

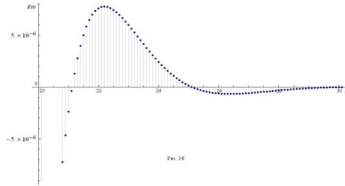


Рис. 6 б

Численный анализ функции $\Im\left(\frac{1}{2} + it\right)$ проведен по формуле (3.11). Ее можно представить в виде

$$\Im\left(\frac{1}{2} + it\right) = R^*(t) + iI^*(t). \quad (6.13)$$

Здесь

$$R^*(t) = \frac{3}{4} - \frac{2}{1+4t^2} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{8}} \Delta(u)} (a_1 a_2 - b_1 b_2^+ a_1 a_3 + b_1 b_3) du;$$

$$I^*(t) = -\frac{4t}{1+4t^2} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{8}} \Delta(u)} (a_1 b_3 - b_1 a_3 - a_1 b_2 - b_1 a_2) du; \quad (6.14)$$

$$a_1 = \cos \left[\frac{t}{4} \ln(a^2 + b^2) \right],$$

$$b_1 = \sin \left[\frac{t}{4} \ln(a^2 + b^2) \right],$$

$$a_2 = A(u) \cdot \cos \left(\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{t}{2} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right),$$

$$b_2 = A(u) \cdot \sin \left(\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right) \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{t}{2} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right),$$

$$a_3 = B(u) \cdot \sin \left(\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{t}{2} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right),$$

$$b_3 = B(u) \cdot \cos\left(\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{t}{2} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\right),$$

$$a = 1 + u,$$

$$b = u + \frac{u^2}{2},$$

$$A(u) = \cos \pi u - \sin \pi u - e^{-\pi u},$$

$$B(u) = \sin \pi u + \cos \pi u - e^{-\pi u},$$

$$\Delta(u) = \operatorname{ch} \pi u - \cos \pi u.$$

Из (6.14) следует, что $R^*(-t) = R^*(t)$, $I^*(-t) = -I^*(t)$.

Очевидно, если $t = t_0$ есть нуль функции $\mathfrak{Z}\left(\frac{1}{2} + it_0\right)$, то $R^*(t_0) = 0$ и $I^*(t_0) = 0$, и наоборот.

Из рис. 6 и 7 следует, что нули функции $E(t)$ и $\mathfrak{Z}\left(\frac{1}{2} + it\right)$ совпадают.

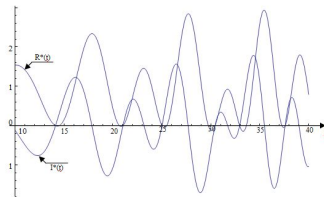


Рис. 7

§7. Рекуррентная формула для дзета-функции Римана $\mathfrak{Z}(s)$ при $s = 2k$

Из теории дзета-функции Римана $\mathfrak{Z}(s)$ известно, что числа Римана $\mathfrak{Z}(2n)$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, определяются из равенства

$$\mathfrak{Z}(2n) = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2 \cdot (2n)!} \beta_{2n}.$$

Здесь β_{2n} – числа Бернулли, которые вычисляются по известным рекуррентным формулам.

Возникает вопрос: можно ли получить рекуррентные формулы для чисел Римана $\mathfrak{Z}(2n)$?

Ответ будет утвердительным.

Покажем это. С помощью K_α -формулы суммирования ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) нетрудно показать, что

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \quad (0 < x < 2\pi). \tag{7.1}$$

Отсюда

$$x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi). \tag{7.2}$$

Умножая обе части равенства (7.2) на $\frac{x^{2k}}{\pi}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) и интегрируя по x от 0 до 2π , приходим к рекуррентной формуле для чисел Римана $\mathfrak{Z}(2k)$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^3}{(k+1)(2k+1)} &= \frac{\pi}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{m=0}^{2k-2} \frac{(2k-1)! \cos\left(\frac{1+m}{2} \pi\right)}{(2\pi n)^m (2k-1-m)!} \\ \left(\mathfrak{Z}(2k) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, k = 1, 2, 3, \dots \right). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Отсюда при $k = 1$ имеем

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (7.4)$$

Рекуррентную формулу (7.3) для $\zeta(2k)$ с учетом (7.4) можно записать так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{m=1}^{2k-3} \frac{(2k-1)! \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)}{(2\pi n)^m (2k-1-m)!} = \frac{\pi^3 (k-1)(2k-1)}{6k(k+1)(2k+1)} \quad (7.5)$$

$$(k = 2, 3, 4, \dots).$$

Из (7.5) последовательно находим

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \quad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}, \quad \dots \quad (7.6)$$

Анализ показывает:

1. Числа Римана $\zeta(2k)$ представимы в виде

$$\zeta(2k) = \pi^{2k} A(k), \quad (7.7)$$

где $A(k)$ – рациональное число. Следовательно, $\zeta(2k)$ – трансцендентное число.

2. Для любого $k = 1, 2, 3, \dots$

$$1 < \zeta(2k) \leq \frac{\pi^2}{6}. \quad (7.8)$$

3. Если $k > m$, где m – натуральное число, то

$$1 < \zeta(2k) < \zeta(2m) \leq \frac{\pi^2}{6}. \quad (7.9)$$

4. При $k \rightarrow +\infty$

$$\zeta(2k) \rightarrow 1 + 0. \quad (7.10)$$

С помощью (7.3) из (4.10) и (4.11) находим многочлены Бернулли:

$$\beta_1(a) = a - \frac{1}{2}, \quad \beta_2(a) = a^2 - a + \frac{1}{6}, \quad \beta_3(a) = a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}a,$$

$$\beta_4(a) = a^4 - 2a^3 + a^2 - \frac{1}{30}, \quad \beta_5(a) = a^5 - \frac{5}{2}a^4 + \frac{5}{3}a^3 - \frac{1}{6}a, \dots \quad (7.11)$$

§8. Рекуррентная формула для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ при $s = 2k + 1$

С помощью K_α -формулы суммирования ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) можно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) \quad (0 < x < 2\pi).$$

Умножая обе части этого равенства на x^{2k-1} ($k = 1, 2, 3, \dots$) и интегрируя по x от 0 до π , приходим к рекуррентной формуле для чисел Римана $\zeta(2k + 1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n^{2k+1}} (2k-1)! \left\{ (-1)^n \sum_{m=0}^{2k-1} \left[\frac{(\pi n)^m}{m!} \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) \right] - 1 \right\} =$$

$$= \int_0^\pi x^{2k-1} \ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) dx \quad (8.1)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots).$$

В формуле (8.1) следует учесть следующее известное равенство (см., напр., [8], стр. 47):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{2k+1}} = \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right) \mathfrak{Z}(2k+1) \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (8.2)$$

Равенство (8.2) получается из определения числа $\mathfrak{Z}(2k+1)$:

$$\mathfrak{Z}(2k+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (8.3)$$

Интеграл

$$\int_0^{\pi} x^{2k-1} \ln \left(2 \sin \frac{x}{2}\right) dx = B(k) \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (8.4)$$

не может быть вычислен точно. Поэтому приведем формулу, позволяющую вычислять этот интеграл с любой точностью.

С помощью интегрирования по частям имеем

$$B(k) = \frac{\pi^{2k}}{2k} \left[\ln 2 - 2^{2k} \int_0^{1/2} t^{2k-1} (\pi t \operatorname{ctg} \pi t) dt \right]. \quad (8.5)$$

Нетрудно показать, что

$$\pi t \operatorname{ctg} \pi t = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n} \mathfrak{Z}(2n) \quad (|t| < 1). \quad (8.6)$$

Учитывая (8.6) в (8.5), получим

$$B(k) = \frac{\pi^{2k}}{2k} \left[\ln 2 - \frac{1}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{Z}(2n)}{2^{2n(n+k)}} \right] \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (8.7)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n(n+k)}} &= A(k), \\ A(1) &= 4(\ln 4 - \ln 3) - 1, \\ A(k) &= 2^{2k}(\ln 4 - \ln 3) - 2^{2k} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{2^{2^m m}} - \frac{1}{k} \\ &\quad (k = 2, 3, 4, \dots), \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{Z}(2n) - 1}{2^{2n(2n+1)}} = \frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2} - \ln 3,$$

функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{Z}(2n)}{2^{2n(n+k)}}$$

можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)}{2^{2n}(n+k)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)-1}{2^{2n}(n+k)} + A(k) = A(k) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)-1}{2^{2n}(2n+2k)} = \\
&= A(k) + 2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)-1}{2^{2n}(2n+1)} - (2k-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)-1}{2^{2n}(2n+2k)(2n+1)} \right\} = \\
&= A(k) + 3 - \ln 2 - 2 \ln 3 - (2k-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)-1}{2^{2n}(n+k)(2n+1)} \\
&\quad (k = 1, 2, 3\dots).
\end{aligned} \tag{8.8}$$

С помощью (8.7) и (8.8) имеем

$$\begin{aligned}
B(k) &= \frac{\pi^{2k}(2k-1)}{2k} \left\{ \frac{3-2 \ln 3 + A(k)}{2k-1} - \frac{1}{2k(2k-1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)-1}{2^{2n}(n+k)(2n+1)} \right\} \\
&\quad (k = 1, 2, 3\dots).
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)-1}{2^{2n}(n+k)(2n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)-1}{2^{2n}(n+k)(n+k+1)(2n+1)} + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)-1}{2^{2n}(n+k+1)(2n+1)} \\
&\quad (k = 1, 2, 3\dots).
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
D(k) &= \frac{3-2 \ln 3 + A(k)}{2k-1} - \frac{1}{2k(2k-1)}, \\
C(k) &= \frac{2k}{\pi^{2k}(2k-1)}.
\end{aligned}$$

Из (8.9) получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)-1}{2^{2n}(n+k)(2n+1)} &= D(k) - C(k)B(k), \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)-1}{2^{2n}(n+k+1)(2n+1)} &= D(k+1) - C(k+1)B(k+1) \\
&\quad (k = 1, 2, 3\dots).
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Отсюда с учетом (8.10) находим

$$\begin{aligned}
B(k+1) &= \frac{\pi^{2k}(2k+1)}{(k+1)(2k-1)} B(k) + \\
&+ \frac{\pi^{2(k+1)}(2k+1)}{2(k+1)} \left\{ D(k+1) - D(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)-1}{2^{2n}(n+k)(n+k+1)(2n+1)} \right\} \\
&\quad (k = 1, 2, 3\dots).
\end{aligned} \tag{8.12}$$

Здесь интеграл $B(1)$ определяется формулой

$$\begin{aligned}
B(1) &= \frac{\pi^2}{2} \left\{ \frac{3}{2} + 8 \ln 2 - 6 \ln 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)-1}{2^{2n}(n+1)(2n+1)} \right\} = \\
&= \frac{\pi^2}{2} \left\{ \frac{9}{2} + 10 \ln 2 - 9 \ln 3 - \ln \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)-1}{2^{2n}n(n+1)(2n+1)} \right\},
\end{aligned} \tag{8.13}$$

так как

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)-1}{2^{2n}n} &= \ln \pi - 3 \ln 2 + \ln 3, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im(2n)-1}{2^{2n}(2n+1)} &= \frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2} - \ln 3,
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{Z}(2n) - 1}{2^{2n}(n+1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{Z}(2n) - 1}{2^{2n}n} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{Z}(2n) - 1}{2^{2n}(2n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{Z}(2n) - 1}{2^{2n}n(n+1)(2n+1)}.$$

Очевидно, ряды, находящиеся в правой части формул (8.12) и (8.13), являются сильно сходящимися рядами.

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\mathfrak{Z}(2n) - 1}{2^{2n}n(n+1)(2n+1)}$$

и обозначим его через $I * (N)$. Этот ряд представим в виде

$$I * (N) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{Z}(2m + 2N + 2) - 1}{2^{2m+2N+2}(m+N+1)(m+N+2)(2m+N+3)}. \tag{8.14}$$

Поскольку

- 1°. $1 < \mathfrak{Z}(2k) \leq \frac{\pi^2}{6}$;
- 2°. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{Z}(2k) = 1$;
- 3°. $\mathfrak{Z}(2k) < \mathfrak{Z}(2m)$, если $k > m$,

то

$$0 < \frac{\mathfrak{Z}(2N+2)-1}{4 \cdot 2^{2N}(N+1)(N+2)(2N+3)} < I * (N) < \frac{\mathfrak{Z}(2N+2)-1}{3 \cdot 2^{2N}(N+1)(N+2)(2N+3)} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} = \frac{4}{3} \right). \tag{8.15}$$

Отсюда следует, что всегда можно найти такое натуральное число N^* , для которого $N > N^*$ сумма ряда (8.14) $I * (N)$ выражается сколь угодно малым числом.

Так как

$$0 < G * (N, K) < I * (N),$$

$$\left[G * (N, k) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\mathfrak{Z}(2n) - 1}{2^{2n}(n+k)(n+k+1)(2n+1)} \right],$$

то при $N > N^*$ число $G * (N, K)$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, будет сколь угодно малым числом.

Пусть $N^{**} > N^*$. Тогда с помощью (8.13) и (8.12) имеем:

$$\begin{aligned} B(1) &= \frac{\pi^2}{2} \left\{ \frac{9}{2} + 10 \ln 2 - 9 \ln 3 - \ln \pi + \sum_{n=1}^{N^{**}} \frac{\mathfrak{Z}(2n) - 1}{2^{2n}n(n+1)(2n+1)} + I * (N^{**}) \right\}, \\ B(k+1) &= \frac{\pi^2 k(2k+1)}{(k+1)(2k-1)} B(k) + \frac{\pi^{2(k+1)}(2k+1)}{2(k+1)} \{ D(k+1) - D(k) + \\ &+ \sum_{n=1}^{N^{**}} \frac{\mathfrak{Z}(2n)-1}{2^{2n}(n+k)(n+k+1)(2n+1)} + G * (N^{**}, k) \} \end{aligned} \tag{8.16}$$

$(k = 1, 2, 3, \dots)$.

Рекуррентные формулы (8.16) позволяют вычислить интегралы $B(k)$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, с любой точностью. Таким образом, получена рекуррентная формула (8.1) и (8.16) для вычисления чисел Римана $\mathfrak{Z}(2k+1)$ с любой точностью. Чтобы выяснить арифметическую природу значений дзета-функций Римана $\mathfrak{Z}(s)$ в нечетных точках $s > 1$, необходимо провести дополнительные исследования (см., например, В.В. Зудилин, УМН, 2001 г., том 56, вып. 2).

§9. Суммы Бернулли. Новые рекуррентные формулы для чисел Римана $\mathfrak{Z}(2k)$ и для чисел Бернулли $\beta(2n)$

Суммами Бернулли называют суммы

$$S_n(m) = \sum_{k=0}^m k^n \quad (m = 1, 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots). \quad (9.1)$$

Если $n = 1$, то с помощью формулы суммирования (1.16) получаем

$$S_1(m) = \frac{m(m+1)}{2}. \quad (9.2)$$

Теперь определим суммы Бернулли при $n = 2, 3, 4, \dots$ Из (9.1) с помощью (1.16) после элементарных выкладок имеем

$$\sum_{k=0}^m k^n = \frac{m^n}{2} + \frac{1^{n+1}}{n+1} + 2 \sum_{q=1}^{n-1} \left[\frac{n! 1^{n-q}}{q!(n-q)!} \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) \cdot \int_0^{\infty} \frac{\eta^q}{e^{2\eta\pi} - 1} d\eta \right] \quad (n = 2, 3, 4, \dots). \quad (9.3)$$

В силу (4.6) получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{\eta^q}{e^{2\eta\pi} - 1} d\eta = \frac{q!}{(2\pi)^{q+1}} \mathfrak{Z}(q+1), \quad (9.4)$$

где $\mathfrak{Z}(q+1)$ – числа Римана.

Учитывая (9.4) в (9.3), приходим к замечательной формуле:

$$\sum_{k=0}^m k^n = \frac{m^n}{2} + \frac{1^{n+1}}{n+1} + 2 \sum_{q=1}^{n-1} \left[\frac{n! 1^{n-q}}{(2\pi)^{q+1}(n-q)!} \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) \cdot \mathfrak{Z}(q+1) \right] \quad (n = 2, 3, 4, \dots). \quad (9.5)$$

Для числа Римана $\mathfrak{Z}(2k)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) нами получена рекуррентная формула (7.3). Определив из (7.3) $\mathfrak{Z}(2k)$ и подставив их значения в (9.5), находим суммы Бернулли. Полагая в (9.5) $m = 1$, получаем еще одну рекуррентную формулу для $\mathfrak{Z}(2k)$:

$$2 \sum_{q=1}^{n-1} \left[\frac{(n+1)!}{(2\pi)^{q+1}(n-q)!} \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) \cdot \mathfrak{Z}(q+1) \right] = \frac{n-1}{2} \quad (n = 2, 4, 6, \dots). \quad (9.6)^1$$

Формулу (9.6¹) можно записать в достаточно удобной форме:

$$2 \sum_{q=1}^{2n-1} \left[\frac{(2n+1)!}{(2\pi)^{q+1}(2n-q)!} \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) \cdot \mathfrak{Z}(q+1) \right] = \frac{2n-1}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (9.6)$$

Из функционального уравнения Римана (5.1) с учетом (4.9) (в (4.9) следует положить $a = 1$) имеем

$$\sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) \mathfrak{Z}(q+1) = \frac{(2\pi)^{q+1}}{(q+1)! \cdot 2} \cdot \beta_{q+1}, \quad (9.7)$$

где β_{q+1} – числа Бернулли.

Учитывая (9.7) в (9.5), получаем

$$\sum_{k=0}^m k^n = \frac{m^n}{2} + \frac{m^{n+1}}{n+1} + \sum_{q=1}^{n-1} \left[\frac{n! m^{n-q}}{(q+1)!(n-q)!} \beta_{q+1} \right] \quad (9.8)$$

$(n = 2, 3, 4, \dots)$.

Традиционно числа Бернулли β_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) определяются рекуррентной формулой:

$$\sum_{q=0}^{n-1} \frac{n!}{q!(n-q)!} \beta_q = 0$$

$(\beta_0 = 1, \quad 0! = 1)$.

Функция $\frac{t}{e^t-1}$ является производящей функцией чисел Бернулли β_k . Полагая в (9.8) $m = 1$ получаем новую рекуррентную формулу для чисел Бернулли β_k :

$$\sum_{q=1}^{n-1} \frac{(n+1)!}{(q+1)!(n-q)!} \beta_{q+1} = \frac{n-1}{2} \quad (9.9)$$

$(n = 2, 3, 4, \dots)$.

Поскольку $\beta_{2m+1} = 0$, что следует из (9.7) и (9.9), то формулу (9.9) можно записать так:

$$\sum_{q=1}^{2n-1} \frac{(2n+1)!}{(q+1)!(2n-q)!} \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) (-1)^{\frac{q-1}{2}} \beta_{q+1} = \frac{2n-1}{2} \quad (9.10)$$

$(n = 1, 2, 3, \dots)$.

Возникает вопрос: можно ли получить известную формулу

$$\frac{2}{(2\pi)^{2k}} \mathfrak{S}(2k) = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} \beta_{2k} \quad (9.11)$$

$(k = 1, 2, 3, \dots)$

из формул (9.6) и (9.10)? Ответ утвердительный. Действительно, из (9.6) и (9.10) получаем

$$\sum_{q=1}^{2n-1} \frac{(2n+1)!}{(2n-q)!} \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) \left[\frac{2}{(2\pi)^{q+1}} \mathfrak{S}(q+1) - \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{(q+1)!} \cdot \beta_{q+1} \right] = 0 \quad (9.12)$$

$(n = 1, 2, 3, \dots)$.

Отсюда следует (9.12).

Из (7.7), (7.8), (7.10) и (9.11) следует:

- 1°. Числа Бернулли β_{2k} – рациональные числа;
- 2°. Если k – четное число, то $\beta_{2k} < 0$;
- 3°. Если k – нечетное число, то $\beta_{2k} > 0$;
- 4°. Порядок роста чисел Бернулли β_{2k} одинаков с ростом функции

$$\frac{(2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}},$$

т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\beta_{2k}|}{\frac{(2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}}} = 1.$$

Продолжим исследования.

Формулу (4.11) с учетом (9.7) можно записать так:

$$\begin{aligned} \beta_{n+1}(a) &= \beta_{n+1} + a^{n+1} - (n+1) \frac{a^n}{2} + \\ &+ 2 \sum_{q=1}^{n-1} \left[\frac{(n+1)! a^{n-q}}{(2\pi)^{q+1} (n-q)!} \mathfrak{S}(q+1) \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (9.13)$$

$(n = 2, 3, 4, \dots)$.

Отсюда имеем

$$\frac{\beta_{n+1}(a) - \beta_{n+1}}{n+1} + a^n = \frac{a^n}{2} + \frac{a^{n+1}}{n+1} + 2 \sum_{q=1}^{n-1} \left[\frac{n! a^{n-q}}{(2\pi)^{q+1} (n-q)!} \mathfrak{S}(q+1) \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) \right]. \quad (9.14)$$

Пусть $a = m$. Тогда

$$\frac{\beta_{n+1}(m) - \beta_{n+1}}{n+1} + m^n = \frac{m^n}{2} + \frac{m^{n+1}}{n+1} + 2 \sum_{q=1}^{n-1} \left[\frac{n! m^{n-q}}{(2\pi)^{q+1} (n-q)!} \mathfrak{S}(q+1) \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) \right], \quad (9.15)$$

откуда с учетом (9.8) приходим к замечательной формуле:

$$\sum_{k=0}^m k^n = \frac{\beta_{n+1}(m) - \beta_{n+1}}{n+1} + m^n \quad (n = 2, 3, 4, \dots). \quad (9.16)$$

При $n = 1$ нами уже получена формула (см. (9.1) и (9.2)):

$$\sum_{k=0}^m k = \frac{m(m+1)}{2}. \quad (9.17)$$

Наш способ получения формулы (9.16) и (9.17) сильно отличается от традиционного способа (см., напр., [9], стр. 260–270). Традиционный способ получения формулы (9.16) и (9.17) опирается на свойства многочленов Бернулли⁴⁾ $\beta_n(x)$, а именно:

1.

$$\beta_n(x) = \frac{1}{n+1} \beta'_{n+1}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (9.18)$$

$$\beta_0(x) = 1, \quad \beta_1(x) = x - \frac{1}{2}. \quad (9.19)$$

Отсюда следует, что многочлены Бернулли $\beta_n(x)$ принадлежат к классу многочленов Аппеля.

2.

$$\beta_0(x+1) - \beta_0(x) = 0, \quad \beta_1(x+1) - \beta_1(x) = 1, \quad (9.20)$$

$$\beta_{n+1}(x+1) - \beta_{n+1}(x) = (n+1)x^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (9.21)$$

из чего следует, что многочлены Бернулли $\beta_n(x)$ удовлетворяют разностному уравнению.

Пусть $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда в силу (9.18) и (9.21) имеем:

$$\int_k^{k+1} \beta_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \int_k^{k+1} \beta'_{n+1}(x) dx = \frac{1}{n+1} [\beta_{n+1}(x+1) - \beta_{n+1}(x)] = k^n. \quad (9.22)$$

Отсюда получаем

$$\sum_{k=0}^m k^n = \sum_{k=0}^m \int_k^{k+1} \beta_n(x) dx = \int_0^{m+1} \beta_n(x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (9.23)$$

Из (9.23) при $n = 1$, замечая, что

$$\beta_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

⁴⁾ Функция $\frac{te^{tz}}{e^t - 1}$ является производящей функцией многочленов Бернулли.

приходим к формуле (9.17).

Если $n = 2, 3, 4, \dots$, то из (9.23) в силу (9.18) и (9.21) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m k^n &= \int_0^{m+1} \beta_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{m+1} \beta'_{n+1}(x) dx = \frac{1}{n+1} [\beta_{n+1}(m+1) - \beta_{n+1}(0)] = \\ &= \frac{1}{n+1} [\beta_{n+1}(m) + (n+1)m^n - \beta_{n+1}] = \frac{\beta_{n+1}(m+1) - \beta_{n+1}}{n+1} + m^n. \end{aligned}$$

Эта формула совпадает с формулой (9.16).

Замечание. Если в формуле (3.11) положить $s = -2n$, то с учетом (4.1) и (4.2) получаем

$$\mathfrak{S}(-2n) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2}D(n). \quad (9.24)$$

Здесь $D(n)$ равен интегралу, находящемуся в левой части равенства (9.11), если в равенство (9.11) вместо m написать n .

Поэтому из (9.24) в силу (9.11) получаем

$$\mathfrak{S}(-2n) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1-6n}{4(2n+1)} = 0. \quad (9.25)$$

Если же в формуле (3.11) положить $s = -2n$, то с учетом (4.1) и (4.6) получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(-2n) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1} - 2 \sum_{k=1}^{2n} \left[\frac{(2n)!}{(2\pi)^{k+1}(2n-k)!} \mathfrak{S}(k+1) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2n-1}{2} - 2 \sum_{k=1}^{2n-1} \left[\frac{(2n+1)!}{(2\pi)^{k+1}(2n-k)!} \mathfrak{S}(k+1) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right] \right\} \\ &\quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

откуда в силу (9.6) имеем:

$$\mathfrak{S}(-2n) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Харди, Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди. – М. : Наука, 1951. – 504 с.
- [2] Уиттекер, Е. Т. Курс современного анализа. Ч. 2 / Е. Т. Уиттекер, Н. Дж. Ватсон. – Л. ; М. : ГТТИ, 1934. – 229 с.
- [3] Чандрасекхаран, К. Арифметические функции / К. Чандрасекхаран. – М. : Наука, 1975. – 307 с.
- [4] Уиттекер, Е. Т. Курс современного анализа. Ч. 1 / Е. Т. Уиттекер, Н. Дж. Ватсон. – М. : ФИЗМАТГИЗ, 1963. – 406 с.
- [5] Титчмарис, Е. К. Теория дзета-функции Римана / Е. К. Титчмарис. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1953. – 409 с.
- [6] Hardy, G. H. Sur les la fonction $J(s)$ de Riemann, C.R. Akad. Sci, 158 (1914). – P. 1012–1014.
- [7] Polya, G. Uher die algebraisch – function theoretischen Untersuchungen von J. L.W.V. Jensen, Kgl. Danske Vindenskabernas Selakash., 7(1927). – № 17.
- [8] Бейтмен, Г. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен. – М. : ФИЗМАТГИЗ, 1973. – 297 с.
- [9] Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. – М. : ФИЗМАТГИЗ, 1959. – 400 с.
- [10] Гельфонд, А. О. Трансцендентные и алгебраические числа / А. О. Гельфонд. – М. : КомКнига, 2006. – 224 с.

Кулиев Валех Джафарович,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики,
Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

e-mail: pmdekanat@rambler.ru

V. D. Kuliev

TO THE THEORY OF DZETA-FUNCTION OF RIMAN (P. 2)

Moscow State Machine-Building University (MAMI)

Abstract. The three-dimensional vector space of the main stress. Position of a vector of intensity on deviator planes is set phase deviator. It is shown, that in monographers of educational character of V. G. Zubchaninov's, L. M. Kachanov's, A. A. Markin's with co-authors by V. V. Sokolovsky's, L. A. Tolokonnikov's at geometrical representation phase invariant on deviator planes are make mistakes.

Keywords: tensor stress, the main stress, vector space of the main stress, deviator a plane, a vector of intensity deviator stress, phase invariant.

REFERENCES

- [1] *Hardy, G.* Dispersing ranks / G. Hardy. – M. : Nauka, 1951. – 504 p.
- [2] *Whittaker, E. T.* Course of the modern analysis. P. 2 / E. T. Whittaker, N. G. Watson. – L. ; M. : GTTI, 1934.
- [3] *Chandrasekharan, K.* Arithmetic functions / K. Chandrasekharan. – M. : Nauka, 1975.
- [4] *Whittaker, E. T.* Course of the modern analysis. P. 1 / E. T. Whittaker, N. G. Watson. – M. : FIZMATGIZ, 1963.
- [5] *Titchmaris, E. K.* Theory of dzeta-function of Rimann / E. K. Titchmaris. – M. : Publishing house of the foreign literatures, 1953.
- [6] *Hardy, G. H.* Sur les la fonction $J(s)$ de Riemann, C.R. Akad. Sci, 158 (1914). – P. 1012–1014.
- [7] *Polya, G.* Uher die algebraisch – function theoretischen Untersuchungen von J. L.W.V. Jensen, Kgl. Danske Vindenskabernas Selakash., 7(1927). – № 17.
- [8] *Beytmen, G.* The highest transcendental functions / G. Beytmen, A. Erdaii. – M. : FIZMATGIZ, 1973.
- [9] *Gelfond, A. O.* Calculation of final differences / A. O. Gelfond. – M. : FIZMATGIZ, 1959.
- [10] *Gelfond, A. O.* Transcendental and algebraic numbers / A. O. Gelfond. – M. : KomKniga, 2006.

Kuliev, Valekh Dzhafarovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of the Higher Mathematics, Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow

РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕСТКОИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКИХ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского
отделения РАН*

Аннотация. Проблемам оптимального и рационального проектирования неупругих тонкостенных конструкций при динамическом нагружении посвящены лишь единичные работы. Практически все изученные на сегодня подходы при решении подобных задач изложены в [1]. Законченные решения получены для оптимальных конструкций кусочно-постоянной толщины, для которых задача динамического деформирования решается приближенным методом модальных движений. Что касается использования методов оптимального управления, то, например, для круглой пластины имеется лишь общая постановка задачи, конкретные же решения отсутствуют [1, 99]. По существу, до сих пор мало изученной остается также проблема учета сдвиговых деформаций при динамическом нагружении пластических круглых пластин [2], [3], а задачи рационального проектирования с учетом этого фактора в литературе вообще отсутствуют.

В данной работе предлагается критерий рациональности проектирования жесткоидеальнопластических круглых и кольцевых пластин при динамическом изгибе с учетом сдвиговых деформаций. Для форм распределенной внешней нагрузки, допускающих существование рационального проекта по данному критерию, показано значительное уменьшение остаточного прогиба по сравнению с прогибами конструкций постоянной толщины.

Ключевые слова: гибридные слоисто-волоконистые оболочки, идеальные жесткопластические материалы, условие пластичности Мизеса, предельное равновесие, цилиндрические оболочки, безизгибные оболочки вращения.

УДК: 539.374

Рассмотрим свободно опертую однородную или трехслойную круглую пластину, изготовленную из жесткоидеальнопластического материала и подверженную воздействию поперечной динамической нагрузки, симметрично определенной относительно ее центра.

Введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned}x &= \frac{\bar{r}}{R}, z = \frac{\bar{z}}{H_0}, m = \frac{\bar{m}}{\bar{m}_0}, M_1 = \frac{\bar{M}_r}{M_0}, M_2 = \frac{\bar{M}_\varphi}{M_0}, Q = \frac{\bar{Q} \cdot R}{M_0}, \\Q_0 &= \frac{\bar{Q}_0 \cdot R}{M_0}, Q_p = \frac{\bar{Q}_p \cdot R}{M_0}, M_p = \frac{\bar{M}_p}{M_0}, A_0 = \frac{\bar{m}_0 \cdot R^2}{T^2 \cdot M_0}, U = \frac{A_0 R}{H_0} \bar{U}_r, w = A_0 \bar{w}, \\ \Psi &= A_0 R \bar{\Psi}, f = \frac{\bar{f} \cdot R^2}{M_0}, \dot{\kappa}_1 = A_0 R^2 \dot{\bar{\kappa}}_r, \dot{\kappa}_2 = A_0 R^2 \dot{\bar{\kappa}}_\varphi, \dot{\varepsilon}_1 = \frac{A_0 R^2}{H_0} \dot{\bar{\varepsilon}}_r,\end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{A_0 R^2}{\bar{H}_0} \dot{\varepsilon}_\varphi, \quad \dot{\gamma} = A_0 R \dot{\gamma}, \quad \dot{D} = \frac{T A_0 R^2}{\bar{M}_0} \dot{D}, \quad t = \frac{\bar{t}}{T}.$$

Здесь R – радиус пластины, $2\bar{H}_0$ – толщина эталонной пластины; $\bar{r}, \bar{z}, \bar{\varphi}$ – цилиндрические координаты; $\bar{U}_r, \bar{U}_z, \bar{U}_\varphi$ – перемещения; $\bar{\varepsilon}_r, \bar{\varepsilon}_\varphi, \bar{\gamma}$ – деформации; $\bar{\kappa}_r, \bar{\kappa}_\varphi$ – кривизны; \bar{t} – время, T – характерное время (например, продолжительность импульса); S, m_0, \bar{m}_0 – плотность материала и масса на единицу площади для рациональной и эталонной пластин соответственно; \bar{f} – интенсивность поперечной нагрузки; $\bar{Q}, \bar{M}_r, \bar{M}_\varphi$ – перерезывающая сила, радиальный и тангенциальный изгибающие моменты; $\bar{Q}_p, \bar{M}_p, \bar{Q}_0, \bar{M}_0$ – их предельные значения для радиальной и эталонной пластин соответственно; \bar{D} – диссипация механической энергии. В этих величинах уравнения движения пластины и граничные условия имеют вид:

$$(x \cdot Q)' + x(f - m \cdot \ddot{w}) = 0; \quad (2)$$

$$(x \cdot Q)' + x(f - m \cdot \ddot{w}) = 0; \quad (3)$$

$$M_1(1, t) = Q(0, t) = 0, \quad M_1(0, t) = M_2(0, t); \quad (4)$$

$$\dot{w}(1, t) = 0, \quad \text{либо} \quad Q(1, t) = -Q_0. \quad (5)$$

Первое условие в (7) соответствует случаю реализации на опорном контуре изгибного состояния, второе – сдвигового пластического состояния.

Относительно внешней нагрузки “взрывного типа” предполагаем:

$$f(x, t) = f_1(x) \cdot f_2(t); \quad (6)$$

$$\int_0^t f_2(t) dt \geq f_2(t) \cdot t. \quad (7)$$

Считаем, что выполнены кинематические гипотезы типа Тимошенко. При этом перемещения определяются в виде

$$U_1 = z\psi(x, t), \quad U_2 = 0, \quad U_3 = w(x, t). \quad (8)$$

Скорости деформации и диссипация механической энергии на единицу площади пластин для перемещений (11) имеют вид:

$$\dot{\varepsilon}_1 = z \cdot \dot{\psi}'(x, t) \equiv z \cdot \dot{\kappa}_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = z \cdot \frac{\dot{\psi}(x, t)}{x} \equiv z \cdot \dot{\kappa}_2, \quad \dot{\gamma} = \dot{\psi}'(x, t) + \dot{\psi}(x, t); \quad (9)$$

$$\dot{D} = M_1 \dot{\kappa}_1 + M_2 \dot{\kappa}_2 + Q \dot{\gamma}. \quad (10)$$

Предполагаем, что для всех сравниваемых проектов выполнено условие постоянства массы, которое в безразмерной форме запишется в виде

$$\int_0^1 m(x) x dx = \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Относительно поведения материала предполагаем, что оно описывается условием пластичности Кулона-Треска, которому в пространстве обобщенных напряжений (M_1, M_2, Q) соответствует поверхность текучести в форме шестиугольной призмы.

Критерий рациональности заключается в том, что все сечения пластины (в трехслойной пластине – все сечения несущего слоя) находятся в определенном пластическом состоянии

вплоть до полной ее остановки. Учитывая характер распределения M_1, M_2 и Q в свободно опертой пластине при статическом нагружении, считаем, что в рациональной пластине реализуется следующее пластическое состояние:

$$\begin{aligned} M_1 = M_2 = M_p(x), |Q| < Q_p(x); \dot{x}_1 \geq 0, \dot{x}_2 \geq 0, \dot{\gamma} = 0 \text{ на } 0 \leq x \leq \alpha \\ |M_1| < M_p(x), M_2 = M_p(x), Q = -Q_p(x); \dot{\kappa}_1 = 0, \dot{\kappa}_2 \geq 0, \dot{\gamma} \leq 0 \text{ на } \alpha \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Требуется найти такое распределение толщины пластины, которое соответствует состоянию (16). В том случае, когда пластическое поведение конструкции задается, необходимо проверять согласованность знаков скоростей обобщенных деформаций и обобщенных напряжений. Величины $\dot{\kappa}_1$ и $\dot{\kappa}_2$ определяются через $\dot{w}(x, t)$; для определения $\dot{\gamma}$ воспользуемся дополнительным соотношением на границе $x = \alpha$, разделяющей различные пластические состояния. Предполагая, что $[U_1] = 0$ на $x = \alpha$, для (16) получим:

$$\dot{\gamma} = \dot{w}'(x, t) - \dot{w}'(\alpha - 0, t), \quad \alpha \leq x \leq 1. \quad (13)$$

В случае однородной пластины обозначим через $2\bar{h}(\bar{x})$, $2\bar{h}_0$ толщины в рациональной и эталонной пластинах соответственно; ρ_0 – плотность материала; σ_0, τ_0 – предельное значение нормального и касательного напряжений. В случае трехслойной пластины через $2\bar{H}, \bar{h}(x)$, \bar{h}_0 обозначим толщину слоя заполнителя, толщину каждого несущего слоя соответственно; $\rho_H, \rho_3, \sigma_0^H, \sigma_0^3, \tau_0^H, \tau_0^3$ – плотность материалов несущего слоя (н) и заполнителя (з), предельные значения нормального и касательного напряжений в несущем слое и заполнителе. Будем рассматривать “идеальную” трехслойную пластину, для которой $\sigma_0^3 \ll \sigma_0^H$, $\bar{h}_0 \ll \bar{H}$. В общем случае, обозначив $h(x) = \frac{\bar{h}}{\bar{h}_0}$, получим в безразмерном виде для однородной и трехслойной пластин:

$$\begin{aligned} M_p = h^\mu(x), Q_p = s \cdot h^{\mu-1}(x), \quad s = \mu \frac{\tau_0^3 R}{\sigma_0^H \bar{h}_0}, \\ m(x) = \frac{h(x) + (2-\mu)r_0}{1 + (2-\mu)r_0}, \quad r_0 = \frac{\bar{H}\rho_3}{\bar{h}_0\rho_H}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\mu = 1$ для “идеальной” трехслойной пластины и $\mu = 2$ для однородной пластины, при $\mu = 2$ имеем: $\tau_0^3 = \tau_c$ и $\sigma_0^H = \sigma_0$.

В силу того, что Q_p и M_p являются функционалами от $h(x)$, имеем два уравнения – (3) и (5) – для определения трех неизвестных величин: h, Q, w на $0 \leq x \leq \infty$ и h, M_1, w на $\alpha \leq x \leq 1$. В случае рациональной пластины удается получить дополнительное соотношение, позволяющее решить задачу. Из (3), (16) и независимости граничных условий (6) и (7) на Q и M_1 от t следует, что Q и M_1 всюду на $0 \leq x \leq 1$ зависят только от x . Тогда, в силу (8), $\ddot{w}(x, t)$ из (5) можно представить в виде

$$\ddot{w}(x, t) = C_1(x)t + C_2(x)f_2(t), \quad (15)$$

$$C_1(x) = \frac{(xQ)'}{xm(x)}, \quad C_2(x) = \frac{xf_1(x)}{xm(x)}. \quad (16)$$

При нулевых значениях данных отсюда получим:

$$\dot{w}(x, t) = C_1(x)t + C_2(x)J(t), \quad J(t) = \int_0^t f_2(t) dt. \quad (17)$$

Так как пластина находится в пластическом состоянии вплоть до полной остановки, то момент остановки $-t = t_f$ найдем из условия $\dot{w}(x, t_f) = 0$. В силу независимости от x получим из (23) при $t = t_f$:

$$\frac{C_1(x)}{C_2(x)} = -\frac{J(t_f)}{t_f} \equiv \gamma_0, \quad \gamma_0 = \text{const.} \quad (18)$$

Отметим, что в силу $f_2(t) \geq 0$ имеем: $\gamma_0 \leq 0$. Из (22) и (24) получим искомое дополнительное соотношение:

$$(xQ)' = \gamma_0 x f_1(x), \quad (19)$$

откуда получим при $Q(0, t) = 0$

$$Q(x) = \gamma_0 \frac{P_1(x)}{x}, \quad P_1(x) = \int_0^x f_1(x) x dx. \quad (20)$$

При этом из (3) получим для $M_2 = M_p(x)$

$$(x, M_1)' - M_p(x) - \gamma_0 P_1(x) = 0. \quad (21)$$

В силу (25) можно записать (21) и (23) в виде

$$\ddot{w}(x, t) = C_2(x) [\gamma_0 + f_2(t)], \quad \dot{w}(x, t) = C_2(x) [\gamma_0 t + J(t)]. \quad (22)$$

Интегрируя последнее соотношение по t и полагая $t = t_f$, получим распределение остаточных прогибов в пластине:

$$w(x, t_f) = C_2(x) \left[\gamma_0 \frac{t_f^2}{2} + \int_0^{t_f} J(t) dt \right]. \quad (23)$$

Предельное значение амплитуды $f_{0p} = f_2(0)$, соответствующей заданной форме $f_1(x)$, при которой начинается деформирование пластины, определяем из условия $\dot{w}(x, 0) = 0$, где $\dot{w}(x, t)$ определяется в (29):

$$f_{0p} = -\gamma_0. \quad (24)$$

Требование рациональности проекта накладывает определенные ограничения на постановку задачи, а именно сужает класс допустимых распределений нагрузки $f_1(x)$, при которых рациональный проект существует. В том случае, если по опорному контуру пластины сдвиг отсутствует, должно выполняться граничное условие $\dot{w}(1, t) = 0$. Тогда из (22) и (29) следует, что при этом $C_2(1) = \frac{f_1(1)}{m(1)} = 0$. В случае, когда $m(1)$ – ограниченная величина, из последнего соотношения следует, что рассматриваемый рациональный проект в случае чистого изгиба может реализоваться только при условии

$$f_1(1) = 0. \quad (25)$$

В зависимости от конкретного вида $f_1(x)$ может возникнуть дополнительное ограничение на $f_1(x)$ (например, $f_1'(1) = 0$). В случае же, когда на опорном контуре пластины реализуется сдвиговое пластическое состояние, ограничений на $f_1(x)$, связанных с опиранием, не возникает.

Другие возможные ограничения на форму $f_1(x)$ вытекают из необходимости соответствия знаков обобщенных напряжений и скоростей деформаций. Это соответствие задано в (16). Учитывая соотношения (12) и (29), получим, что требованиям $\dot{\kappa}_1 \geq 0$, $\dot{\kappa}_2 \geq 0$ на $0 \leq x \leq \alpha$ и $\dot{\kappa}_2 \geq 0$, $\dot{\gamma} \leq 0$ на $\alpha \leq x \leq 1$ соответствуют ограничения

$$\begin{aligned} C_2''(x) \leq 0, C_2'(x) \leq 0 \quad \text{на } 0 \leq x \leq \alpha \\ C_2'(\alpha - 0) \leq 0, C_2'(x) - C_2'(\alpha - 0) \quad \text{на } \alpha \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad (26)$$

где $C_2(x)$ определено в (22).

Так как $C_2(x)$ есть, в конечном счете, функционал от $f_1(x)$, то (34) представляет собой ограничение на вид $f_1(x)$.

Определим теперь параметры поперечного сечения пластины.

В случае чистого изгиба в (16) $\alpha = 1$. Из (28) получим $xM_p'(x) = \gamma_0 P_1(x)$, откуда

$$M_p(x) = -\gamma_0 \int_x^1 P_1(x) \frac{dx}{x}. \quad (27)$$

С другой стороны, из (19) имеем

$$h(x) = M_p(x)^{1/\mu}. \quad (28)$$

Подставляя $h(x)$ из (28) в (19), находим γ_0 :

$$\gamma_0 = - \left\{ 2 \int_0^1 x \left[\int_x^1 P_1(x) \frac{dx}{x} \right]^{1/\mu} dx \right\}^{-\mu}. \quad (29)$$

Анализ $C_2(1) = \frac{f_1(1)}{m(1)}$ (с использованием правила Лопиталя) в данном случае показывает, что при $\mu = 1$ и $r_0 = 0$ помимо ограничения (33) из условия $\dot{w}(1, t) = 0$ следует, что

$$f_1'(1) = 0. \quad (30)$$

В случае изгиба с учетом сдвига анализ определяющих соотношений для $h(x)$ показывает, что рациональный проект при рассмотрении изгиба и чисто сдвигового пластического состояния не допускается для "идеальной" трехслойной пластины ($\mu = 1$). Для однородной пластины из соотношений (16), (27), (28) получим, что толщина пластины определяется следующими выражениями:

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{-\frac{\gamma_0^2}{\alpha s^2} \int_2^1 \frac{P_1^2(x)}{x^2} dx - \frac{\gamma_0}{\alpha} \int_\alpha^1 P_1(x) dx - \gamma_0 \int_x^\alpha \frac{P_1(x)}{x} dx}, \quad 0 \leq x \leq \alpha; \\ h(x) &= -\frac{\gamma_0}{s} \frac{P_1(x)}{x}, \quad \alpha \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Для определения постоянных α и γ_0 имеем два соотношения, первым из которых является (19), а второе следует из необходимости выполнения ограничений $|Q| < Q_p(x)$ на $0 \leq x \leq \alpha$ и $|M_1| < M_p(x)$ на $\alpha \leq x \leq 1$:

$$\frac{\gamma_0^2}{s^2} \int_\alpha^1 \frac{P_1^2(x)}{x^2} dx + \gamma_0 \int_\alpha^1 P_1(x) dx + \frac{\gamma_0^2}{\alpha s^2} P_1^2(\alpha) = 0. \quad (32)$$

Определяя постоянные α и γ_0 , находим распределение $h(x)$ и остаточный прогиб, тем самым полностью решаем задачу.

Ниже всюду рассматриваем нагружение пластины ступенчатой по времени нагрузкой, т. е. $f_2(t) = f_0$ при $0 \leq t \leq \tau$ и $f_2 = 0$ при $t > \tau$.

Анализ деформирования эталонной пластины постоянной толщины аналогичен тому, который проделан в работах [2], [3], только в отличие от последних, где сдвиговое деформирование реализуется в виде сдвиговой окружности на опоре, для поверхностных распределений $f_1(x)$, близких к параболическим, необходимо ввести сдвиговое пластическое кольцо $\xi_1(t) \leq x \leq \xi_2(t)$, где $Q = -Q_0$. Возможные режимы деформирования пластины представляют собой комбинацию из "жестких" участков, где $|Q| < Q_0$ и $|M_1| < 1$, сдвигового пластического кольца и изгибного пластического круга $0 \leq x \leq \eta(t)$, где $M_1 = 1$.

Для больших значений амплитуды f_0 и достаточно малых толщин пластины отношение остаточных прогибов в центре рациональной и эталонной пластин определяется выражением

$$\delta \equiv \frac{w_{\text{рац}}(0, t, f_1)}{w_{\text{этал}}(0, t, f_2)} = \frac{(f_0 + \gamma_0)}{2(-\gamma_0) m(0) \left\{ f_0 \left[P_2(1) - f_1(0) \frac{1}{24} \right] - \frac{1}{2} \right\}}, \quad (33)$$

где $P_2(1) = \int_0^1 dx \int_0^x x f_1(x) dx$.

Для данных условий закрепления и предположения (16) о пластическом поведении рациональной пластины рациональный проект не существует для равномернораспределенной нагрузки $f_1(x) = 1$ в силу ограничений на $f_1(x)$, указанных выше. Поэтому в качестве примера были рассмотрены параболическое – $f_1(x) = 1 - x^2$ – и косинусоидальное – $f_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ – распределения – $f_1(x)$.

В случае чистого изгиба рациональные проекты существуют для обоих этих распределений $f_1(x)$. Анализ отношений остаточных прогибов рациональной и эталонной пластин показал, что “эффект рациональности” (ЭР) – уменьшение максимального (в центре пластины) остаточного прогиба рациональной пластины по сравнению с максимальным остаточным прогибом эталонной пластины – снижается вместе с ростом значения f_0 и достигает минимума при $f_0 \rightarrow \infty$. Так, наименьшее значение ЭР для параболической формы $f_1(x)$ в случае трехслойной пластины составило 44 % (в формуле (34) $\delta = 0,56$), в случае однородной пластины – 70 % ($\delta = 0,30$). Отметим, что для круглых пластин кусочно-постоянной толщины в случае равномернораспределенной нагрузки было получено ЭР = 57 % для низких уровней нагружения и ЭР = 66 % для импульсного нагружения [1, 73].

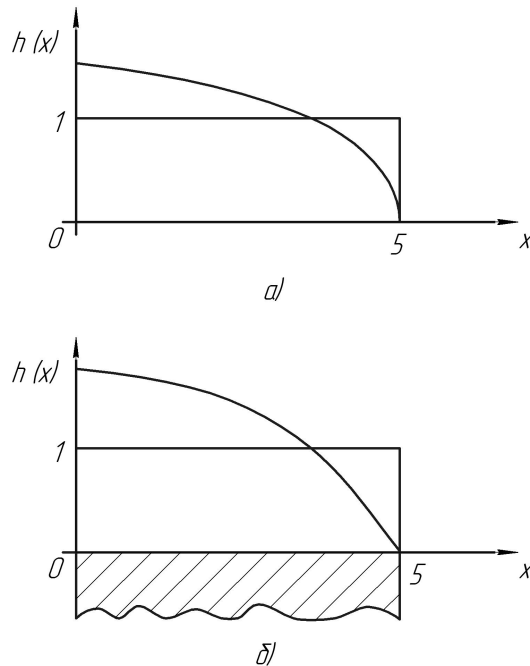


Рис. 1

В случае трехслойной пластины ЭР зависит еще и от параметра r_0 , входящего в $m(x)$ (см. (19)), а именно снижается вместе с ростом r_0 . Так, для $f_0 \rightarrow \infty$ ЭР = 66 % при $r_0 = 0$ и ЭР = 44 % при $r_0 \rightarrow \infty$. На рис. 1 приведено распределение толщины по радиусу пластины ($h = 1$ – толщина эталонной пластины) в случае однородной (1a) и трехслойной конструкций

(16, штрихованная область соответствует слою заполнителя) для $f_1(x) = 1 - x^2$ и отношения диаметра эталонной пластины к ее толщине, равного 5 ($Q_0 = 5$).

В случае изгиба со сдвигом, как уже указывалось ранее, допускается существование рационального проекта только для однородной пластины. Ограничения на $f_1(x)$, связанные с критерием рациональности, оказываются весьма существенными. Так, оказалось, что для двух указанных выше форм $f_1(x)$ рациональный проект существует только для $f_1(x) = \cos(\frac{\pi x}{2})$ при $s \in [2, 50; 2, 55]$, где s определяется в (19) и есть, фактически, отношение радиуса эталонной пластины к ее толщине – показатель тонкостенности. Уменьшение остаточного прогиба за счет рационализации и здесь оказывается значительным. Так, при $f_0 = 50$, т. е. при f_0 , в 11 раз превышающей предельную амплитуду для эталонной пластины, и $s = 2,5$ имеем ЭР = 43 %. На рис. 2 приведено распределение толщины рациональной пластины для $f_1(x)$ указанного вида при $s = 2,5$: “1” – в случае чистого изгиба, “2” – изгиба со сдвигом, $h = 1$ – толщина эталонной пластины.

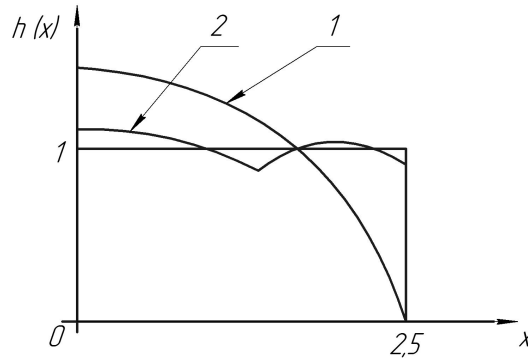


Рис. 2

В качестве примера была также рассмотрена задача динамического чистого изгиба жесткоидеальнопластических однородных эталонного и рационального колец, свободно опертых на внутреннем контуре $x = 1$. Уравнения движения здесь имеют тот же вид (3)–(5), что и ранее. Граничные условия имеют вид

$$\dot{w}(x_0, t) = M_1(x_0, t) = Q(1, t) = M_1(1, t) = 0. \quad (34)$$

Предположения относительно поведения материала и критерий рациональности берутся теми же, что и для пластины (с соответствующими упрочнениями в случае чистого изгиба). Здесь в качестве пластических состояний, соответствующих рациональным проектам, могут реализоваться только угловые режимы поверхности текучести. Были рассмотрены такие уровни нагружения ступенчатой по времени нагрузкой, для которых пластическое состояние эталонного кольца постоянной толщины описывается одной стороной поверхности текучести: $F \equiv M_1 - M_2 - 1 = 0$, $0 \leq M_1 \leq 1$, $-1 \leq M_2 \leq 0$. Распределение толщины в рациональном кольце для граничных условий (35) будет определяться выражением

$$h(x) = \sqrt{-\gamma_0 \int_x^1 f_1(x) x dx}, \quad \gamma_0 = \frac{-(1-x_0^2)^2}{\left\{ 4 \left[\int_{x_0}^1 x \sqrt{\int_x^1 f_1(x) x dx} dx \right]^2 \right\}}. \quad (35)$$

В качестве конкретного вида $f_1(x)$ было взято распределение $f_1(x) = 4(1-x)(x-x_0)/(1-x_0)^2$. Было получено, что для $x_0 = 0,5$ предельные значения амплитуды в эталонном и рациональном кольцах соответственно есть $f_0^{\text{этал}} = 6,65$ и

$f_0^{\text{рац}} = 10,71$, а отношение δ максимального остаточного прогиба при $x = 1$ в рациональном кольце к максимальному остаточному прогибу в эталонном кольце составило: $\delta = 0,77$ при $f_0 = 50$ и $\delta = 0,81$ при $f_0 = 80$.

Как показывает анализ, использование предложенного критерия рациональности, позволяет для определенного класса распределений внешних нагрузок получить проекты со значительно меньшими величинами остаточных прогибов, чем для конструкций с постоянной толщиной при этом же нагружении.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Лепик, Ю. Р.* Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения / Ю. Р. Лепик. – Таллин : Валгус, 1952.

[2] *Немировский, Ю. В.* Динамический изгиб жесткопластических защемленных круглых пластин при учете эффектов сдвига и инерции вращения / Ю. В. Немировский, А. Р. Скворода // ПМТФ. – 1978. – № 2. – С. 124–133.

[3] *Jones, N.* Dynamic plastic response of circular plates with transverse shear and rotatory inertia / N. Jones, J. G. Oliveira // Trans ASME. J.Appl.Mech. – 1980. – Vol. 47. – № 1. – P. 27–34.

Немировский Юрий Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Yu. V. Nemirovskiy

LIMIT EQUILIBRIUM HYBRID COMPOSITE SHELLS OF REVOLUTION*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics*

Abstract. For hybrid layered-fiber membranes by using the model of ideal rigid-plastic material for all the constituent materials, the assumption of a one-dimensional deformation of the fibers, the law of the Mises plastic deformation of the matrix material and the classic cinematic justice of the Kirchhoff-Lyave built general equations of limiting equilibrium. Particular cases of cylindrical shells and shells of revolution none bending.

Keywords: hybrid layered-fiber shell, ideal rigid-plastic material, the condition of Mises plasticity, limit equilibrium, cylindrical shell, the shell none bending rotation.

REFERENCES

- [1] *Lepik, Yu. R.* Optimum design of inelastic designs in case of dynamic loading / Yu. R. Lepik. – Tallin : Valgus, 1952.
- [2] *Nemirovskiy, Yu. V.* Dynamic bend of rigidly plastic jammed round plates at the accounting of effects of shift and inertia of rotation / Yu. V. Nemirovskiy, A. R. Skovoroda // PMTF. – 1978. – № 2. – P. 124–133.
- [3] *Jones, N.* Dynamic plastic response of circular plates with transverse shear and rotatory inertia / N. Jones, J. G. Oliveira // Trans ASME. J.Appl.Mech. – 1980. – Vol. 47. – № 1. – P. 27–34.

Nemirovskiy, Yuriy Vladimirovich

Dr. Sci. of Phys. & Math., Professor, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk

**О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ
ИЗ ИДЕАЛЬНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ**

Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова

Аннотация. Рассмотрена потеря устойчивости толстостенной трубы из идеального упруго-пластического материала под действием внутреннего давления. Показано, что потеря устойчивости происходит до исчерпания трубой несущей способности.

Ключевые слова: напряжение, упругопластический материал, идеальная пластичность, линеаризация, устойчивость.

УДК: 539.375

В постановке Лейбензона-Ишлинского [1], [2], [3] рассмотрена потеря устойчивости упруго-пластической толстостенной трубы под действием внутреннего давления.

Осесимметричное состояние трубы радиусов a, b ($a < b$), находящейся под действием внутреннего давления p , определяется согласно [4]:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{0p} &= -p - 2 \ln \alpha / \rho, \sigma_{\theta}^{0p} = -p - 2 (\ln \alpha / \rho - 1), \tau_{\rho\theta}^{0p} \equiv 0; \\ \sigma_{\rho}^{0в} &= \beta_0^2 (1 - 1/\rho^2), \sigma_{\theta}^{0в} = \beta_0^2 (1 + 1/\rho^2), \tau_{\rho\theta}^{0в} \equiv 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем величины, имеющие размерность напряжения, отнесем к пределу текучести k , величины, имеющие размерность длины, – к внешнему радиусу трубы b :

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho} &= \sigma_{\rho}/k, \quad \tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho\theta}/k, \quad \sigma_{\theta} = \sigma_{\theta}/k, \quad p = p/k, \quad G = G/k, \\ \rho &= \rho/b, \quad \alpha = a/b, \quad \beta = r_s/b, \quad u = u_p/b, \quad v = u_{\theta}/b,\end{aligned}\quad (2)$$

где r_s – радиус пластической зоны.

При потере устойчивости уравнения внешней и внутренней границ трубы примут вид

$$\rho = 1 + \delta u', \quad \rho = \alpha + \delta u', \quad (3)$$

где решение $\delta \ll 1$; решение задачи имеется в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}' + \delta \sigma_{ij}', \quad u = u^0 + \delta u', \quad v = v^0 + \delta v'. \quad (4)$$

Линеаризованные граничные условия согласно [4] имеют вид:

$$\sigma_{\rho}'^e + \frac{\partial \sigma_{\rho}^{0e}}{\partial \rho} u'^e = 0, \quad \tau_{\rho\theta}'^e - (\sigma_{\theta}^{0e} - \sigma_{\rho}^{0e}) \frac{\partial u'^e}{\partial \theta} = 0, \quad \rho = 1; \quad (5)$$

$$\sigma_{\rho}'^p + \frac{\partial \sigma_{\rho}^{0p}}{\partial \rho} u'^p = 0, \quad \tau_{\rho\theta}'^p - \frac{1}{\alpha} (\sigma_{\theta}^{0p} - \sigma_{\rho}^{0p}) \frac{\partial u'^p}{\partial \theta} = 0, \quad \rho = \alpha. \quad (6)$$

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Условие несжимаемости примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{\rho} = 0, \quad (8)$$

закон Гука запишем в виде

$$\sigma_\rho = \sigma + G(\varepsilon_\rho - \varepsilon_0), \quad \sigma_\theta = \sigma - G(\varepsilon_\rho - \varepsilon_0), \quad \tau_{\rho\theta} = 2G\varepsilon_{\rho\theta}, \quad (9)$$

где $\sigma = (\sigma_\rho + \sigma_\theta)/2$, а условие пластичности

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{\rho\theta}^2 = 4. \quad (10)$$

Удовлетворим линеаризированному уравнению несжимаемости (8), положив

$$u' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v' = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad (11)$$

тогда, применяя формулы Коши, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon'_\rho &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial \theta}, \quad \varepsilon'_\theta = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial \theta}, \\ \varepsilon_{\rho\theta} &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Определим напряженно-деформированное состояние в упругой зоне. Поставляя (12) в (10), находим:

$$\begin{aligned} \sigma'_\rho &= \sigma'^e + 2G \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial \theta} \right), \\ \sigma'_\theta &= \sigma'^e - 2G \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial \theta} \right), \\ \tau'_{\rho\theta} &= G \left(-\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим (13) в линеаризированные соотношения (7). Тогда, исключив σ'^e , получим уравнение для определения функции $\Psi(\rho, \theta)$

$$\rho^4 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \rho^4} + 2\rho^3 \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \rho^3} + \rho^2 \left(2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \rho^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} \right) + \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - 2 \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \rho \partial \theta^2} \right) + \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial \theta^4} + 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (14)$$

В силу эксцентricности трубы решение уравнения (15) будем искать в виде

$$\Psi(\rho, \theta) = R(\rho) \cos \theta, \quad (15)$$

тогда уравнение (15) примет вид

$$\rho^4 R^{IV} + 2\rho^3 R''' - 3\rho^2 R'' + 3\rho R' - 3R = 0,$$

решение которого имеет вид

$$R(\rho) = \frac{C_1}{\rho} + C_2 \rho + C_3 \rho \ln \rho + C_4 \rho^3. \quad (16)$$

Таким образом, из соотношений (16), (16), (11), (13) и (7) находим:

$$\begin{aligned}
u'^e &= \left(\frac{C_1}{\rho^2} + C_2 + C_3 \ln \rho + C_4 \rho^2 \right) \sin \theta, \\
v'^e &= \left(-\frac{C_1}{\rho^2} + C_2 + C_3 + C_3 \ln \rho + C_4 \rho^2 \right) \cos \theta, \\
\sigma'_\rho &= 4G \left(-\frac{C_1}{\rho^3} + \frac{C_3}{\rho} - C_4 \rho \right) \sin \theta, \\
\sigma'_\theta &= 4G \left(\frac{C_1}{\rho^3} - 3C_4 \rho \right) \sin \theta, \\
\tau'_{\rho\theta} &= 4G \left(\frac{C_1}{\rho^3} + C_4 \rho \right) \cos \theta.
\end{aligned} \tag{17}$$

Теперь определим напряженно-деформированное состояние трубы в пластической зоне. Линеаризируя условие пластичности (13), получаем

$$\sigma'_\rho = \sigma'_\theta = \sigma'^p, \tag{18}$$

тогда линеаризованные уравнения равновесия, в силу (8), представляют систему двух уравнений относительно двух неизвестных σ'^p и $\tau'_{\rho\theta}$. Удовлетворим первому из этих уравнений, полагая

$$\sigma'^p = -\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad \tau'_{\rho\theta} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \tag{19}$$

тогда второе имеет вид

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + 3\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0, \tag{20}$$

решение которого запишем в виде

$$\Phi(\rho, \theta) = R(\rho) \cos \theta, \tag{21}$$

в результате (21) примет вид

$$\rho^2 R'' + 3\rho R' + R = 0,$$

решением которого является функция

$$R(\rho) = \frac{D_1 \ln \rho + D_2}{\rho}. \tag{22}$$

Таким образом, из (22), (22) и (19) находим:

$$\begin{aligned}
\sigma'_\rho &= \left(\frac{D_1 \ln \rho + D_2}{\rho} \right) \sin \theta, \\
\tau'_{\rho\theta} &= \left(\frac{D_1 - D_2 - D_1 \ln \rho}{\rho} \right) \cos \theta.
\end{aligned} \tag{23}$$

Применяя ассоциированный закон пластического течения к (11) и линеаризируя полученные соотношения, получаем

$$\varepsilon'_{\rho\theta} = \frac{\varepsilon_\rho^{0p} - \varepsilon_\theta^{0p}}{\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}} \tau'_{\rho\theta}$$

или

$$\varepsilon'_{\rho\theta} = \frac{\beta_0^2}{2G\rho^2} \tau'_{\rho\theta}. \tag{24}$$

Тогда из соотношений (24) и (12) получаем неоднородное уравнение для определения функции $\Psi(\rho, \theta)$

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = \frac{\beta_0^2}{G} \tau'_{\rho\theta}. \tag{25}$$

Учитывая соотношения (23) и полагая

$$\Psi(\rho, \theta) = R(\rho) \cos \theta, \quad (26)$$

получаем уравнение

$$\rho^2 R'' - \rho R' + R = \frac{\beta_0^2}{2G} \frac{D_1 - D_2 - D_1 \ln \rho}{\rho},$$

решение которого имеет вид

$$R(\rho) = \rho(D_3 \ln \rho + D_4) - \frac{\beta_0^2}{4G\rho}(D_1 \ln \rho + D_2). \quad (27)$$

Тогда из (28), (27) и (11) находим:

$$\begin{aligned} u'^p &= \left(D_3 \ln \rho + D_4 - \frac{\beta_0^2}{4G\rho}(D_1 \ln \rho + D_2) \right) \sin \theta, \\ v'^p &= \left(D_3 \ln \rho + D_3 + D_4 + \frac{\beta_0^2}{4G\rho}(D_1 \ln \rho + D_2 - D_1) \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (28)$$

Удовлетворим полученные соотношения (28), (23), (18) граничным условиям (5) и (6). Из соотношений (18) очевидно, что $C_2 = 0$, так как ему не соответствуют напряжения, поэтому граничные условия и условия сопряжения $[u'] = [v'] = [\sigma'_\rho] = [\tau'_{\rho\theta}] = 0$ примут вид:

$$\begin{aligned} 4G \left(-\frac{C_1}{\beta_0^3} + \frac{C_3}{\beta_0} - C_4\beta_0 \right) - \frac{1}{\beta_0}(D_1 \ln \beta_0 + D_2) &= 0; \\ 4G \left(\frac{C_1}{\beta_0^3} + C_4\beta_0 \right) - \frac{1}{\beta_0}(D_1 - D_1 \ln \beta_0 - D_2) &= 0; \\ \left(\frac{C_1}{\beta_0^2} + C_3 \ln \beta_0 + C_4\beta_0^2 - D_3 \ln \beta_0 - D_4 + \frac{1}{4G}(D_1 \ln \beta_0 + D_2) \right) &= 0; \\ -\frac{C_1}{\beta_0^2} + C_3 + C_3 \ln \beta_0 + 3C_4\beta_0^2 - D_3 \ln \beta_0 - D_4 - D_3 - \frac{1}{4G}(D_1 \ln \beta_0 + D_2 - D_1) &= 0; \\ \frac{1}{\alpha}(D_1 \ln \alpha + D_2) + \frac{2}{\alpha} \left(D_3 \ln \alpha + D_4 - \frac{\beta_0^2}{4G\alpha^2}(D_1 \ln \alpha + D_2) \right) &= 0; \\ \frac{1}{\alpha}(D_1 - D_1 \ln \alpha - D_2) - \frac{2}{\alpha} \left(D_3 \ln \alpha + D_4 - \frac{\beta_0^2}{4G\alpha^2}(D_1 \ln \alpha + D_2) \right) &= 0; \\ 4G(-C_1 + C_3 + C_4) + 2\beta_0^2(C_1 + C_4) &= 0; \\ 4G(C_1 + C_4) - 2\beta_0^2(C_1 + C_4) &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Из соотношений (29) получаем, что $C_3 = D_1 = 0$. Так как контурные нагрузки должны находиться в равновесии, должно выполняться условие $4GC_3 = D_1\alpha$, что при $C_3 = D_1 = 0$ справедливо. В результате получаем пять уравнений:

$$\begin{aligned} 4G \left(\frac{C_1}{\beta_0^2} + C_4\beta_0^2 \right) + D_2 &= 0, \\ D_2 + 2 \left(D_3 \ln \alpha + D_4 - \frac{\beta_0^2}{4G\alpha^2} D_2 \right) &= 0, \\ C_1 + C_4 &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$4G_4\beta_0^2 - D_3(2 \ln \beta_0 + 1) - 2D_4 = 0;$$

$$\frac{2C_1}{\beta_0^2} - 2C_4\beta_0^2 + D_3 + \frac{1}{2G}D_2 = 0.$$

Условие существования нетривиального решения системы (31) приводит к уравнению

$$(\beta_0^4 - 1)(2G - \beta_0^2/\alpha^2) - 4\beta_0^4 \ln \alpha/\beta_0 = 0, \quad (31)$$

которое позволяет определить критическое значение для β_0 при заданных G и α . Подставляя полученное значение в (2), определяем критическое давление

$$p_{кр} = 1 - \beta_0^2 - 2 \ln \alpha / \beta_0.$$

Уравнение (33) позволяет определить величину критического давления, при котором происходит потеря устойчивости.

Положим

$$\alpha = 1 - \alpha_1, \quad \beta_0 = 1 - \beta_1. \quad (32)$$

Подставляя соотношения (32) в (32), полагая величины α_1 , β_1 достаточно малыми, линеаризируя (32), получим

$$\beta_1 \approx \frac{\alpha_1}{2G} \quad (33)$$

или

$$r_S^0 = b - \frac{k(b-a)}{2G}. \quad (34)$$

Согласно (34) имеет место $r_S^0 < b$, следовательно, потеря устойчивости происходит до исчерпания несущей способности ($r_S^0 = b$).

Величина критического давления согласно (33), (34) может быть определена по формуле

$$p_{кр} = p_{нес} + \frac{k(1-\alpha)}{G}, \quad p_{нес} = -2k \ln \alpha, \quad |p_{кр}| < |p_{нес}|. \quad (35)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Лейбензон, Л. С.* Собрание трудов. Т. 1 : Теория упругости / Л. С. Лейбензон. – М. : Изд-во АН СССР, 1951. – С. 81–85.
- [2] *Ишлинский, А. Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости / А. Ю. Ишлинский // Укр. мат. журнал. – 1954. – Т. 6. – № 2. – С. 140–146.
- [3] *Михайлова, М. В.* Устойчивость упругопластической трубы под действием внутреннего давления / М. В. Михайлова, Н. И. Петров // Известия ИТА ЧР. – 1996–1997. – № 3(4)–2(7). – С. 80–85.
- [4] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

Петров Николай Ильич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары

e-mail: anfiska@mail.ru

N. I. Petrov

**ABOUT LOSS OF STABILITY OF THE THICK-WALLED PIPE FROM THE
IDEAL ELASTO-PLASTIC MATERIAL UNDER THE INFLUENCE OF
INTERNAL PRESSURE**

Chuvash State University named after I. N. Ulyanov

Abstract. Loss of stability of a thick-walled pipe from an ideal elasto-plastic material under the influence of internal pressure is considered. It is shown that loss of stability happens before exhaustion by a bearing capacity pipe.

Keywords: tension, elasto-plastic material, ideal plasticity, linearization, stability.

REFERENCES

[1] *Leybenzon, L. S.* Meeting of works / L. S. Leybenzon. – Vol. 1 : Theory elasticity. – M. : Publishing house of Academy of Sciences of the USSR, 1951. – P. 81–85.

[2] *Ishlinsky, A. Yu.* Consideration of questions of stability of balance of elastic bodies from the point of view of the mathematical theory of elasticity / A. Yu. Ishlinsky // Ukr. mathematical magazine. – 1954. – Vol. 6. – № 2. – P. 140–146.

[3] *Mikhaylova, M. V.* Stability of an uprugoplastichesky pipe under action of internal pressure / M. V. Mikhaylova, N. I. Petrov // ITA ChR news. – 1996–1997. – № 3(4)–2(7). – P. 80–85.

[4] *Ivlev, D. D.* Method of indignations in the theory of an uprugoplastichesky body / D. D. Ivlev, L. V. Yershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p.

Petrov, Nikolay Iuich

Candidate Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of general physics, Chuvash State University, Cheboksary

УСТОЙЧИВОСТЬ НАХОДЯЩИХСЯ В ГРУНТЕ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ПЕРЕКРЕСТНОЙ НАМОТКОЙ

Московский государственный горный университет

Аннотация. При проектировании оболочек, находящихся в грунте, возникает задача устойчивости таких оболочек при продольном нагружении и при боковом давлении. В частности, при определении оптимального угла намотки оболочек, взаимодействующих с грунтом, необходимо определение критических параметров нагрузки. Этому посвящена настоящая работа.

Ключевые слова: тензор напряжений, главное напряжение, главное направление, асимптотическое направление, асимптотические директоры, параметр Лоде.

1. Если рассмотреть монослой намоточного изделия, то он представляет собой ортотропный материал. Для главных направлений анизотропии упругие характеристики равны [1], [2]:

$$B_{21}^0 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad B_{22}^0 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad B_{66}^0 = G_{12}, \quad B_{12}^0 = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}. \quad (1.1)$$

При намотке под углом φ упругие характеристики в направлениях образующей и окружном направлении определяются формулами поворота [3], [4]:

$$\begin{aligned} B_{11} &= B_{11}^0 c^4 + B_{22}^0 s^4 + 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0) s^2 c^2, \\ B_{12} &= (B_{11}^0 + B_{22}^0 - 4B_{66}^0) s^2 c^2 + (s^4 + c^4) B_{12}^0, \\ B_{16} &= [B_{11}^0 c^2 - B_{22}^0 s^2 + (B_{12}^0 + 2B_{66}^0)(s^2 - c^2)] sc, \\ B_{22} &= B_{11}^0 s^4 + B_{22}^0 c^4 + 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0) s^2 c^2, \\ B_{26} &= [B_{11}^0 s^2 - B_{22}^0 c^2 - (B_{12}^0 + 2B_{66}^0)(s^2 - c^2)] sc, \\ B_{66} &= (B_{11}^0 - 2B_{12}^0 + B_{22}^0) s^2 c^2 + B_{66}^0 (s^2 - c^2), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$s = \sin \varphi, \quad c = \cos \varphi. \quad (1.3)$$

Используя тригонометрические тождества, формулы (1.2) можно переписать так:

$$\begin{aligned} B_{11} &= V_1 + V_2 \cos 2\varphi + V_3 \cos 4\varphi, \\ B_{12} &= V_1 - 2V_4 - V_3 \cos 4\varphi, \\ B_{16} &= \frac{1}{2} V_2 \sin 2\varphi + V_3 \sin 4\varphi, \\ B_{22} &= V_1 - V_2 \cos 2\varphi + V_3 \cos 4\varphi, \\ B_{26} &= \frac{1}{2} V_2 \sin 2\varphi - V_3 \sin 4\varphi, \\ B_{66} &= V_4 - V_3 \cos 4\varphi. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{8} (3B_{11}^0 + 2B_{12}^0 + 3B_{22}^0 + 4B_{66}^0), \\
V_2 &= \frac{1}{2} (B_{11}^0 - B_{22}^0), \\
V_3 &= \frac{1}{8} (B_{11}^0 - 2B_{12}^0 + B_{22}^0 - 4B_{66}^0), \\
V_4 &= \frac{1}{8} (B_{11}^0 - 2B_{12}^0 + B_{22}^0 + 4B_{66}^0).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

То обстоятельство, что упругие постоянные (1.4) выражены через четыре величины (1.5), отражает тот факт, что независимых упругих характеристик при плоском напряженном состоянии четыре, например $(E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12})$. В соотношениях (1.4) можно выделить два инварианта [3].

$$\begin{aligned}
L_1 &= B_{11} + B_{22} + 2B_{12} = 4(V_1 - V_4) = B_{11}^0 + B_{22}^0 + 2B_{12}^0, \\
L_2 &= B_{66} - B_{12} = 3V_4 - V_1 = B_{66}^0 - B_{12}^0.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Кроме того, видно, что инвариантами являются также V_1 и V_4 :

$$\begin{aligned}
V_1 &= (3L_1 - 4L_2) \frac{1}{8}, \\
V_4 &= (L_1 + 4L_2) \frac{1}{8}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Для упругих постоянных a_{jk} ($j, k = 4, 5$) также справедливы формулы поворота [3], [4]:

$$\begin{aligned}
a_{44} &= a_{44}^0 c^2 + a_{55}^0 s^2, \\
a_{55} &= a_{44}^0 s^2 + a_{55}^0 c^2, \\
a_{45} &= (a_{44}^0 - a_{55}^0) sc,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$a_{44}^0 = G_{23}^{-1}, a_{55}^0 = G_{13}^{-1}. \tag{1.9}$$

В случае, когда оболочка собрана из монослоев с углами намотки $\pm\varphi$ и число слоев с разными углами одинаково, пакет оболочки в целом будет ортотропным. Оценки [1], [4] показывают, что

$$B_{16} = B_{26} = a_{45} \approx 0. \tag{1.10}$$

Это обстоятельство будет существенно использоваться ниже.

2. Принимая стандартные гипотезы уточненной теории [1], считаем, что напряжения поперечного сдвига равны:

$$\begin{aligned}
\tau_{13} &= f(\gamma) \phi(\alpha, \beta), \\
\tau_{23} &= f(\gamma) \psi(\alpha, \beta),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$f(\gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2 \right). \tag{2.2}$$

Используя (1.10), для поперечных сдвигов получаем выражения:

$$\begin{aligned}
e_{13} &= a_{55} f(\gamma) \phi, \\
e_{23} &= a_{44} f(\gamma) \psi.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Интегрируя эти выражения по γ , получим выражения для перемещений:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u - \gamma \frac{\partial W}{\partial \alpha} + a_{55} I_0(\gamma) \phi, \\
u_2 &= v - \gamma \frac{\partial W}{\partial \beta} + a_{44} I_0(\gamma) \psi,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$I_0 = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3} \right) = \frac{h^3}{4} \left(\frac{\gamma}{h} - \frac{4}{3} \frac{\gamma^3}{h^3} \right). \tag{2.5}$$

Для деформаций с использованием (2.4) имеем:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + a_{55} J_0 \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}, \\ e_{22} &= \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + a_{44} J_0 \frac{\partial \psi}{\partial \beta}, \\ e_{12} &= \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} - 2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + J_0 \left(a_{55} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Теперь вычислим напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= B_{11} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + B_{12} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{R} B_{12} w - \gamma \left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) + \\ &\quad + J_0 \left(a_{55} B_{11} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + a_{44} B_{12} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right), \\ \sigma_{22} &= B_{12} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + B_{22} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{R} B_{22} w - \gamma \left(B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) + \\ &\quad + J_0 \left(a_{55} B_{12} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + a_{44} B_{22} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right), \\ \sigma_{12} &= B_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) - 2\gamma B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \\ &\quad + J_0 B_{66} \left(a_{55} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подсчитаем усилия и моменты

$$T_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} d\gamma, \quad M_{ij} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \gamma d\gamma. \quad (2.8)$$

Итак, усилия равны:

$$\begin{aligned} T_{11} &= C_{11} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + C_{12} \frac{\partial v}{\partial \beta} + C_{12} \frac{w}{R}, \\ T_{22} &= C_{12} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + C_{22} \frac{\partial v}{\partial \beta} + C_{22} \frac{w}{R}, \\ T_{12} &= C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right), \\ T_{13} &= Q_1 = \frac{h^3}{12} \phi, \\ T_{23} &= Q_2 = \frac{h^3}{12} \psi. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Моменты равны:

$$\begin{aligned} M_{11} &= -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{h^5}{120} \left(a_{55} B_{11} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + a_{44} B_{12} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right), \\ M_{22} &= -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{h^5}{120} \left(a_{55} B_{12} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + a_{44} B_{22} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right), \\ M_{12} &= -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{h^5}{120} B_{66} \left(a_{55} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$C_{ij} = hB_{ij}, \quad D_{ij} = \frac{h^3}{12} B_{ij}. \quad (2.11)$$

3. Составим уравнения равновесия, а затем и уравнения устойчивости цилиндрической композитной оболочки в грунте, полученной перекрестной намоткой. Взаимодействие с грунтом описываем на основе гипотезы Винклера. Упрощенные уравнения равновесия в усилиях записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{12}}{\partial \beta} &= 0, \quad \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \beta} = Q_1, \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{22}}{\partial \beta} &= 0, \quad \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{22}}{\partial \beta} = Q_2, \\ - \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_2}{\partial \beta} \right) + \frac{T_{22}}{R} &= z - cw. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь дополнительно обозначено: z – нормальная составляющая поверхностных сил, c – коэффициент жесткости упругого основания.

Первые два уравнения (3.1) будут удовлетворены тождественно при введении функции усилий:

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \beta^2}, T_{22} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2}, T_{12} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha \partial \beta}. \quad (3.2)$$

Недостающее уравнение получим из уравнения совместности, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0, \quad (3.3)$$

где деформации должны быть выражены через усилия:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= A_{11}T_{11} + A_{12}T_{12} + A_{16}T_{12}, \\ \varepsilon_{22} &= A_{12}T_{11} + A_{22}T_{22} + A_{26}T_{12}, \\ \varepsilon_{12} &= A_{16}T_{11} + A_{26}T_{22} + A_{66}T_{12}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.3) с учетом (3.2), придем к уравнению

$$L_1 \Psi - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0, \quad (3.5)$$

где

$$L_1 = A_{11} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + (2A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + A_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4}. \quad (3.6)$$

Исключая усилия и моменты из остальных уравнений (3.1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{h^3}{12} \phi &= -D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \\ &+ \frac{h^5}{120} \left[a_{55} \left(B_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \beta^2} \right) + a_{44} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta} \right], \\ \frac{h^3}{12} \psi &= -D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3} - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \\ &+ \frac{h^5}{120} \left[a_{55} (B_{11} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha \partial \beta} + a_{44} \left(B_{66} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + B_{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} \right) \right], \\ &- \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2} = z - cw. \end{aligned} \quad (3.7)$$

4. Рассмотрим устойчивость оболочки из композиционного материала, полученной перекрестной намоткой при нагружении продольной силой (например вес крышки бака и вышележащего грунта). Для получения уравнений устойчивости необходимо рассмотреть возмущения невозмущенного безмоментного состояния. Для получения уравнений в возмущениях необходимо в уравнения ввести параметрические члены с характеристиками невозмущенного состояния. При продольном нагружении параметрический член можно взять в виде [5]

$$z = N^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}. \quad (4.1)$$

Рассмотрим опертую по торцам оболочку. Краевые условия будут удовлетворены, если решение уравнений (3.7) и (3.5) искать в виде:

$$\begin{aligned} w &= W \sin \bar{m} \alpha \cos \bar{n} \beta, \\ \psi &= \bar{\Psi} \sin \bar{m} \alpha \cos \bar{n} \beta, \\ \phi &= \bar{\Phi} \cos \bar{m} \alpha \cos \bar{n} \beta, \\ \psi &= \bar{\Psi} \sin \bar{m} \alpha \sin \bar{n} \beta, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\bar{m} = \frac{m\pi}{l}, \bar{n} = \frac{n}{R}. \quad (4.3)$$

После подстановки (4.2) в (3.5), (3.7) при учете (4.1) получим:

$$\begin{aligned}
& [A_{11}\bar{n}^4 + (2A_{12} + A_{66})\bar{n}^2\bar{m}^2 + A_{22}\bar{n}^4] \bar{\Psi} - \frac{\bar{m}^2}{R}W = 0, \\
& \frac{h^3}{12}\bar{\Phi} = [D_{11}\bar{m}^3 + (D_{12} + 2D_{66})\bar{m}\bar{n}^2]W + \\
& + \frac{h^2}{10} \left[-a_{55}(D_{11}\bar{m}^2 + D_{66}\bar{n}^2)\bar{\Phi} + a_{44}(D_{12} + D_{66})\bar{m}\bar{n}\bar{\Psi} \right], \\
& \frac{h^3}{12}\bar{\Psi} = -[D_{22}\bar{n}^3 + (D_{12} + 2D_{66})\bar{n}\bar{m}^2]W + \\
& + \frac{h^2}{10} \left[a_{55}(D_{12} + D_{66})\bar{m}\bar{n}\bar{\Phi} - a_{44}(D_{12}\bar{m}^2 + D_{22}\bar{n}^2)\bar{\Psi} \right], \\
& \frac{h^3}{12}(\bar{m}\bar{\Phi} - \bar{n}\bar{\Psi}) + \frac{\bar{m}^2}{R}\bar{\Psi} + cW = N^0\bar{m}^2W.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Для краткости введем обозначения:

$$\begin{aligned}
A_{mn} &= A_{11}\bar{n}^4 + (2A_{12} + A_{66})\bar{n}^2\bar{m}^2 + A_{22}\bar{n}^4, \\
\bar{D}_{mn}^{(1)} &= \bar{m} [\bar{D}_{11}\bar{m}^2 + (\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66})\bar{n}^2], \\
\bar{D}_{mn}^{(2)} &= \bar{n} [\bar{D}_{22}\bar{n}^2 + (\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66})\bar{m}^2], \\
D_{jk} &= \frac{12}{h^3}D_{jn}, \\
\beta_{11} &= a_{55}(\bar{D}_{11}\bar{m}^2 + \bar{D}_{66}\bar{n}^2)\frac{h^2}{10}, \\
\beta_{22} &= a_{44}(\bar{D}_{66}\bar{m}^2 + \bar{D}_{22}\bar{n}^2)\frac{h^2}{10}, \\
\beta_{12} &= a_{44}(\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66})\bar{m}\bar{n}\frac{h^2}{10}, \\
\beta_{21} &= a_{55}(\bar{D}_{12}\bar{m}^2 + \bar{D}_{66}\bar{n}^2)\bar{m}\bar{n}\frac{h^2}{10}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Тогда (4.4) переписется так:

$$\begin{aligned}
& A_{mn}\bar{\Psi} - \frac{\bar{m}^2}{R}W = 0, \\
& (1 + \beta_{11})\bar{\Phi} - \beta_{12}\bar{\Psi} - \bar{D}_{mn}^{(1)}W = 0, \\
& -\beta_{21}\bar{\Phi} + (1 + \beta_{22})\bar{\Psi} + \bar{D}_{mn}^{(2)}W = 0, \\
& \frac{h^3}{12}(\bar{m}\bar{\Phi} - \bar{n}\bar{\Psi}) + \frac{\bar{m}^2}{R}\bar{\Psi} + (c - N^0\bar{m}^2)W = 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Бифуркационные значения нагрузки определяются из (4.6) как условия существования ненулевого решения этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 + \beta_{11} & -\beta_{12} & 0 & -\bar{D}_{mn}^{(1)} \\ -\beta_{21} & 1 + \beta_{22} & 0 & \bar{D}_{mn}^{(2)} \\ \frac{h^3}{12}\bar{m} & -\frac{h^3}{12}\bar{n} & \frac{\bar{m}^2}{R} & c - N^0\bar{m}^2 \\ 0 & 0 & A_{mn} & -\frac{\bar{m}^2}{R} \end{vmatrix} = 0. \tag{4.7}$$

Откуда

$$N_{mn}^0 = \frac{\frac{\bar{m}^4}{R^2} \begin{vmatrix} 1 + \beta_{11} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & 1 + \beta_{22} \end{vmatrix} + A_{mn} \begin{vmatrix} 1 + \beta_{11} & -\beta_{12} & -\bar{D}_{mn}^{(1)} \\ -\beta_{21} & 1 + \beta_{22} & \bar{D}_{mn}^{(2)} \\ \frac{h^3}{12}\bar{m} & -\frac{h^3}{12}\bar{n} & c \end{vmatrix}}{\bar{m}^2 A_{mn} \begin{vmatrix} 1 + \beta_{11} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & 1 + \beta_{22} \end{vmatrix}}. \tag{4.8}$$

Для получения критической нагрузки необходимо проминимизировать найденную бифуркационную нагрузку по \bar{m} и \bar{n} . Рассмотрим некоторые частные случаи. Во-первых, применение классической теории.

Введем обозначение

$$D^{(0)} = D_{11}\bar{m}^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\bar{m}^2\bar{n}^2 + D_{22}\bar{n}^4. \tag{4.9}$$

Тогда для бифуркационной нагрузки находим

$$N_{mn}^0 = \frac{D^{(0)} + c}{\bar{m}^2} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{A_{22}\bar{m}^2 + (2A_{12} + A_{66})\bar{n}^2 + A_{11}\frac{\bar{n}^4}{\bar{m}^2}}. \quad (4.10)$$

В качестве примера рассмотрим оболочку с параметрами $\frac{h}{12} = 0,01$, $\frac{l}{12} = 2$, $\eta = \frac{E_2}{E_1} = 2,55$, $g = \frac{G_{12}}{E_1} = 0,1$, $\nu_2 = 0,2$ в грунтах с коэффициентом отпора $c = 2 \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}$ ($\bar{c} = 0,387$).

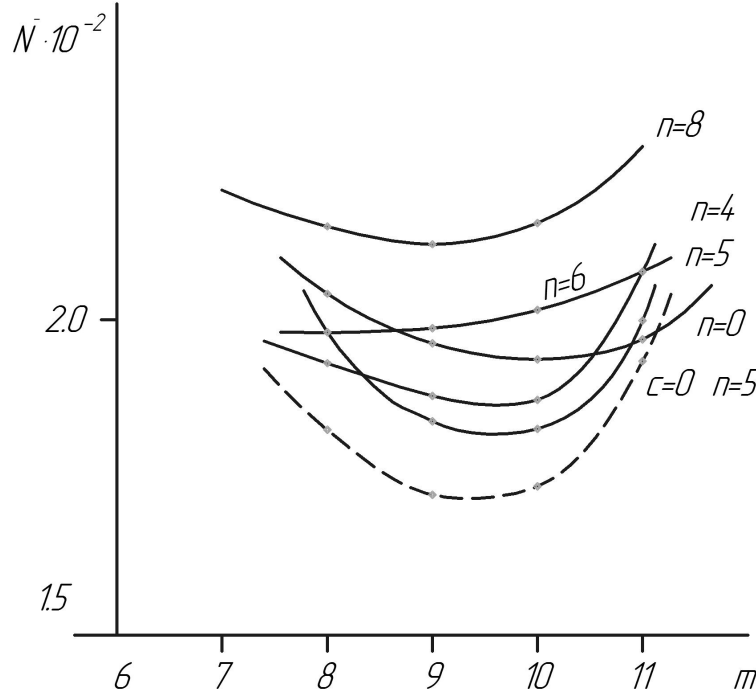


Рис. 1

На рис. 1 показаны результаты вычислений: зависимость бифуркационных усилий от параметров m и n (сплошные кривые). Видно, что минимум достигается при $n = 5$, $m = 9$, т. е. число волн у форм выпучивания, когда нагрузка равна критической, велико как в продольном, так и в окружном направлении. Для сравнения пунктирной линией показана бифуркационная кривая для $n = 5$ для случая отсутствия основания. Минимум оказался также при $m = 9$, а значение критической нагрузки оказалось меньше на 11,6 %.

Рассмотрим еще один частный случай: осесимметричная потеря устойчивости. Для этого следует положить $n = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} A_{mn} &= A_{22}\bar{m}^4, \bar{D}^{(1)} = \bar{D}_{11}\bar{m}^3, \bar{D}^{(2)} = 0, \\ \beta_{11} &= a_{55}\bar{D}_{11}\bar{m}^4\frac{h^2}{10}, \beta_{22} = a_{44}\bar{D}_{66}\bar{m}\frac{h^2}{10}, \\ \beta_{12} &= \beta_{21} = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из (4.8) имеем

$$N_{mn}^0 = \frac{D_{11}\bar{m}^2}{1 + \beta\bar{m}^2} + A\frac{1}{\bar{m}^2}, \quad (4.12)$$

где

$$A = \frac{1}{RA_{22}} + c, \beta = a_{55}D_{11} \frac{1,2}{h}. \quad (4.13)$$

Беря производную от (4.12) по \bar{m}^2 и приравнявая ее нулю, получим, что критические значения достигаются при

$$\bar{m}^2 = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{D_{11}} - \beta\sqrt{A}}, \quad (4.14)$$

а если критические значения нагрузки равны, то

$$N_{кр}^0 = 2\sqrt{D_{11}A} - \beta A = 2\sqrt{D_{11} \left(\frac{1}{RA_{22}} + c \right)} - a_{55}D_{11} \frac{1,2}{h} \left(\frac{1}{RA_{22}} + c \right). \quad (4.15)$$

5. Рассмотрим теперь потерю устойчивости при внешнем давлении. Параметрические члены при этом будут

$$Z = -p \frac{R}{h} \frac{\partial^2 W}{\partial p^2}. \quad (5.1)$$

Тогда после подстановки (4.2) (предполагается, что решение имеет тот же вид, что и при продольном сжатии) в (3.5), (3.7) с учетом (5.1) получим:

$$\begin{aligned} A_{mn} \bar{\Psi} - \frac{\bar{m}^2}{R} W &= 0, \\ (1 + \beta_{11}) \bar{\Phi} - \beta_{12} \bar{\Psi} - \bar{D}_{mn}^{(1)} W &= 0, \\ -\beta_{21} \bar{\Phi} + (1 + \beta_{22}) \bar{\Psi} + \bar{D}_{mn}^{(2)} W &= 0, \\ \frac{h^3}{12} \bar{m} \bar{\Phi} - \frac{h^3}{12} \bar{n} \bar{\Psi} + \frac{\bar{m}^2}{R} \bar{\Psi} + (c - p \frac{R}{h} \bar{n}^2) W &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Отсюда бифуркационные значения нагрузки определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 + \beta_{11} & -\beta_{21} & 0 & -\bar{D}_{mn}^{(1)} \\ -\beta_{21} & 1 + \beta_{22} & 0 & \bar{D}_{mn}^{(2)} \\ \frac{h^3}{12} \bar{m} & -\frac{h^3}{12} \bar{n} & \frac{\bar{m}^2}{R} & c - p \frac{R}{h} \bar{n}^2 \\ 0 & 0 & A_{mn} & -\frac{\bar{m}^2}{R} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.3)$$

Из (5.3) имеем

$$\begin{aligned} p_{mn} &= \begin{vmatrix} 1 + \beta_{11} & -\beta_{21} & 0 & -\bar{D}_{mn}^{(1)} \\ -\beta_{21} & 1 + \beta_{22} & 0 & \bar{D}_{mn}^{(2)} \\ \frac{h^3}{12} \bar{m} & -\frac{h^3}{12} \bar{n} & \frac{\bar{m}^2}{R} & c - p \frac{R}{h} \bar{n}^2 \\ 0 & 0 & A_{mn} & -\frac{\bar{m}^2}{R} \end{vmatrix} : \bar{n}^2 \frac{R}{h} A_{mn} \begin{vmatrix} 1 + \beta_{11} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & 1 + \beta_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\bar{m}^4}{\bar{n}^2} \frac{h}{R^3} \frac{1}{A_{mn}} + \frac{1}{\bar{n}^2} \frac{h}{R} \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} -\bar{D}_{mn}^{(1)} & \bar{D}_{mn}^{(2)} \\ \frac{h^3}{12} \bar{m} & -\frac{h^3}{12} \bar{n} & c \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Как и в случае продольного сжатия, необходимо для определения критической нагрузки найти минимум по \bar{m} и \bar{n} . Так же, как и в случае $c = 0$ при $c \neq 0$, минимум достигается при $m = 1$ и больших \bar{n} .

Пусть $\bar{m} = 1$, тогда

$$\begin{aligned} A_{1n} &= A_{11} \bar{n}^4 + (2A_{12} + A_{66}) \bar{n}^2 + A_{22}, \\ \bar{D}_{1n}^{(1)} &= \bar{D}_{11} + (\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66}) \bar{n}^2, \\ \bar{D}_{1n}^{(2)} &= \bar{n} [\bar{D}_{22} \bar{n}^2 + (\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66})]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}
\beta_{11}^{(1)} &= a_{55} (\bar{D}_{11} + \bar{D}_{66} \bar{n}^2) \frac{h^2}{10}, \\
\beta_{22}^{(1)} &= a_{44} (\bar{D}_{66} + \bar{D}_{22} \bar{n}^2) \frac{h^2}{10}, \\
\beta_{12}^{(1)} &= a_{44} (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66}) \bar{n} \frac{h^2}{10}, \\
\beta_{21}^{(1)} &= a_{55} (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66}) \bar{n} \frac{h^2}{10}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Критическая нагрузка равна

$$p_{1n} = \frac{h}{\bar{n}^2 R^3 A_{1n}} + \frac{h}{\bar{n}^2 R \Delta} \begin{vmatrix} -\bar{D}_{11} - (\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66}) \bar{n}^2 & \\ \bar{D}_{22} \bar{n}^3 + (\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66}) \bar{n} & \\ \frac{h^3}{12} & -\frac{h^3}{12} \bar{n} & c \end{vmatrix}, \tag{5.7}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \bar{\beta}_{110} + \bar{\beta}_{112} \bar{n}^2 & \bar{\beta}_{120} + \bar{\beta}_{121} \bar{n} \\ \bar{\beta}_{210} + \bar{\beta}_{211} \bar{n} & 1 + \bar{\beta}_{220} + \bar{\beta}_{222} \bar{n}^2 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь случай применения классической теории. Для этого надо наложить $\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{12} = \beta_{21} = 0$ и $\Delta = E$. Тогда

$$\begin{aligned}
p_{mn} &= \frac{\bar{m}^4 h}{\bar{n}^2 R^3 A_{mn}} + \frac{h}{\bar{n}^2 R} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\bar{D}_{mn}^{(1)} \\ 0 & 1 & \bar{D}_{mn}^{(2)} \\ \frac{h^3}{12} \bar{m} & -\frac{h^3}{12} \bar{n} & c \end{vmatrix} = \\
&= \frac{\bar{m}^4 h}{\bar{n}^2 R^3 A_{mn}} + \frac{h}{\bar{n}^2 R} (c + D^{(0)}).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Для $\bar{m} = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
p_m &= \frac{h}{\bar{n}^2 R^3 [A_{11} \bar{n}^4 + (2A_{12} + A_{66}) \bar{n}^2 + A_{22}]} + \\
&+ \frac{h}{\bar{n}^2 R} [c + D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \bar{n}^2 + D_{22} \bar{n}^4].
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Видно, что у p_{1n} по \bar{n} следует один минимум при положительном \bar{n}^2 , который и определил критическое значение нагрузки.

Рассмотрим еще один предельный случай: случай удлиненной оболочки (плоская задача). Чтобы получить этот случай, надо устремить $\bar{m} \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
A_{1n} &= A_{11} \bar{n}^4, D^{(1)} = 0, \\
D^{(2)} &= D_{22} \bar{n}^3, D^{(0)} = D_{22} \bar{n}^4, \\
\beta_{11} &= a_{55} \bar{D}_{66} \frac{h^2}{10} \bar{n}^2, \\
\beta_{22} &= a_{44} \bar{D}_{12} \frac{h^2}{10} \bar{n}^2, \\
\beta_{12} &= \beta_{21} = 0.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Для бифуркационных значений нагрузки получим

$$\begin{aligned}
p_n \frac{R}{h} &= \frac{1}{\bar{n}^2 (1 + \beta_{11}) (1 + \beta_{22})} \begin{vmatrix} 1 + \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \beta_{22} & \bar{D}_{22} \bar{n}^3 \\ 0 & -\bar{n} & c \end{vmatrix} = \\
&= \frac{\bar{D}_{22} \bar{n}^2}{1 + \beta_{22}} + \frac{c}{\bar{n}^2},
\end{aligned} \tag{5.11}$$

где

$$\beta = a_{44} \bar{D}_{22} \frac{h^2}{10}. \tag{5.12}$$

После того как нашли минимум (5.11) по \bar{n} , получим критическое значение для бокового давления

$$p_{кр} \frac{R}{h} = 2\sqrt{\bar{D}_{22} c} - a_{44} \bar{D}_{22} \frac{h^2}{10} c. \tag{5.13}$$

Анализируя полученные результаты, отметим:

1. Наличие упругого основания несколько увеличивает критическую нагрузку, давая тот же эффект, что и увеличение кривизны оболочки (см., например, (4.10), (4.15), (5.9).
2. Применение уточненной теории дает поправку к критической нагрузке в сторону ее уменьшения. Эта поправка увеличивается с увеличением жесткости основания.
3. Как и при отсутствии основания, форма потери устойчивости при продольном сжатии характеризуется достаточно большим числом волн как в продольном, так и в окружном направлении (в примере $m = 9, n = 5$). При боковом давлении форма потери устойчивости, как и при отсутствии основания, имеет одну полуволну в продольном направлении.
4. Размеры вмятин при наличии основания несколько уменьшаются. С увеличением жесткости основания вмятина удлиняется вдоль дуги и выпучивание приближается к осесимметричному. Таково же влияние анизотропии.
5. Влияние внешнего основания имеет те же особенности, как и влияние внутреннего заполнения оболочки [6].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Амбарцумян, С. А.* Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М. : Наука, 1974. – 448 с.
- [2] *Лехницкий, С. Г.* Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М. : Наука, 1977. – 415 с.
- [3] *Алфутов, Н. А.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. – М. : Машиностроение, 1984. – 264 с.
- [4] *Королев, В. И.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки из армированных пластмасс / В. И. Королев. – М. : Машиностроение, 1965. – 272 с.
- [5] *Вольмир, А. С.* Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 984 с.
- [6] *Ильгамов, М. А.* Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем / М. А. Ильгамов, В. А. Иванов, Б. В. Гулин. – М. : Наука, 1977. – 331 с.

Кахкцян Вараздат Мнацаканович,

доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва

V. M. Kakhktsyan

**STABILITY OF THE COVERS WHICH WERE IN SOIL FROM THE
COMPOSITE MATERIALS RECEIVED BY CROSS WINDING**

Moscow State Mining University

Abstract. At design of the covers which are in soil, there is a problem of stability of such covers at longitudinal loading and with a lateral pressure. In particular, when determining an optimum angle of winding of the covers interacting with soil, determination of critical parameters of loading is necessary. The real work is devoted to it.

Keywords: stress tensor, principal stress, principal direction, asymptotic direction, asymptotic director, Lode parameter.

REFERENCES

- [1] *Ambartsumyan, S. A.* General theory of anisotropic shells / S. A. Ambartsumyan. – M. : Nauka, 1974. – 448 p.
- [2] *Lekhnitsky, S. G.* Theory of elasticity of an anisotropic body / S. G. Lekhnitsky. – M. : Nauka, 1977. – 415 p.
- [3] *Alfutov, N. A.* Calculation of laminated plates and shells of composite materials / N. A. Alfutov, P. A. Zinoviev, B. G. Popov. – M. : Engineering, 1984. – 264 p.
- [4] *Korolev, V. I.* Layered anisotropic plates and shells from reinforced plastics / V. I. Korolev. – M. : Engineering, 1965. – 272 p.
- [5] *Volmir, A. C.* Stability of deformable systems / A. S. Volmir. – M. : Nauka, 1967. – 984 p.
- [6] *Ilgamov, M. A.* Strength, stability and dynamics of shells with an elastic core / M. A. Ilgamov, V. A. Ivanov, B. V. Gulin. – M. : Nauka, 1977. – 331 p.

Kakhktsyan, Varazdat Mnatsakanovich

Dr. Sc. (Phys.&Math.), Professor, Moscow State Mining University, Moscow

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

Варданян Седрак Ваникович (vardanyan_s@yahoo.com) – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (cotedurhone_mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский лесотехнический институт, г. Королев Московской области.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный открытый университет, г. Москва.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Матченко Николай Михайлович (екс_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (irakon63@hotmail.com) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва.

Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Учреждение Российской академии наук "Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН", г. Москва.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marucbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Шашкин А. И., Семькина Т. Д., Горбенко О. Д., Вульман С. А. Д. Д.</i> Ивлев в Воронеже (1959–1965)	5
<i>Непершин Р. И.</i> Дюис Данилович Ивлев (Воспоминания)	13
<i>Бажин А. А., Лемза А. О., Мурашкин Е. В.</i> Сферически симметричное деформирование упругоползучепластических материалов	16
<i>Буренин А. А., Дац Е. П., Мокрин С. Н., Мурашкин Е. В.</i> Пластическое течение и разгрузка полого цилиндра в процессе "нагрева-охлаждения"	23
<i>Багдоев А. Г., Варданян С. В.</i> Кинематические нелинейные волновые подходы описания стохастических пространственных процессов в полупроводниках, движении транспорта, движении микропор в механике разрушения, микро-, макроэкономике	30
<i>Балашникова А. В., Миронов Б. Г., Михайлова М. В.</i> Предельное состояние анизотропного пространственного слоя, сжатого шероховатыми плитами при условии зависимости предела текучести от среднего давления	49
<i>Деревянных Е. А., Миронов Б. Г.</i> О предельной нагрузке клина при действии равномерного давления в случае анизотропии Хилла	55
<i>Дудко О. В., Лаптева А. А., Чигарев А. В.</i> К построению математической модели разномодульной изотропно-упругой среды	61
<i>Кержаев А. П.</i> Об определении перемещений в двухслойной толстостенной трубе, находящейся под действием внутреннего давления, в случае трансляционной анизотропии	68
<i>Кержаев А. П.</i> Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, в случае трансляционной анизотропии	74
<i>Крупский Р. Ф., Мурашкин Е. В., Полоник М. В., Рогачев Е. Е., Дудко О. В.</i> Механизмы снижения уровня остаточных напряжений в металлических балках при их термомеханической обработке	82
<i>Гридасова Е. А., Любимова О. Н., Путырин Н. Е.</i> Исследование поведения стеклометаллокомпозитного стержня при испытании на осевое сжатие	90
<i>Любимова О. Н., Морковин А. В., Пестов К. Н.</i> Метод определения термических напряжений в процессе сварки разнородных материалов	99
<i>Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е.</i> Эволюционные уравнения как метод изучения динамики деформирования упругих неоднородных сред	106

<i>Ревуженко А. Ф.</i> Оптимальные траектории нагружения, имеющие неограниченное число изломов	115
<i>Сенашов С. И., Яхно А. Н.</i> Законы сохранения пространственных уравнений пластичности среды Мизеса	124
<i>Вульман С. А., Семькина Т. Д.</i> Напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропного листа с отверстием, близким к круговому	133
<i>Зиновьев И. Н., Чеботарев А. С.</i> К вопросу о волочении полосы через прямоугольную матрицу с учетом трения	139
<i>Фоминых С. О.</i> Определение упругопластического состояния в толстостенной трубе при условии идеальнопластической трансляционной анизотропии	150
<i>Клишин С. В., Микенина О. А.</i> Об одном парадоксальном течении сыпучей среды в эллиптической области	154
<i>Кулиев В. Д.</i> К теории дзета-функции Римана (ч. 2)	163
<i>Немировский Ю. В.</i> Рациональное проектирование жесткоидеальнопластических круглых и кольцевых пластин при динамическом нагружении	186
<i>Петров Н. И.</i> О потере устойчивости толстостенной трубы из идеального упругопластического материала под действием внутреннего давления	195
<i>Кахкцян В. М.</i> Устойчивость находящихся в грунте оболочек из композитных материалов, полученных перекрестной намоткой	201
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	211
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	214
СОДЕРЖАНИЕ	216

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2013. № 2(16)**

Отв. за выпуск: А. В. Балашникова

Технические редакторы: Л. Н. Улюкова, Н. А. Осипова, Л. А. Судленкова

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова

Макет: А. В. Балашникова

Подписано в печать 28.06.2013 г. Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e.
Усл. печ. л. 27,5. Тираж 400 экз. Заказ №

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38