

ББК 95.4; 22.251  
Ч-823

Подписной индекс в каталоге ПРЕССА РОССИИ: 13109  
ISSN: 2073-5499

ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА  
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2013. № 3(17)

**Учредитель:** ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Учредители серии:** Г. Н. Григорьев, Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров, Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Т. Н. Петрова, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин, А. А. Шуканов

**Редакционная коллегия:** Радаев Ю. Н. – ответственный редактор, Матченко Н. М. – зам. ответственного редактора, Тихонов С. В. – ответственный секретарь, Баженов В. Г., Буренин А. А., Георгиевский Д. В., Глаголев В. В., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Каюмов Р. А., Климов Д. М., Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Кулиев В. Д., Ломакин Е. В., Максимова Л. А., Маркин А. А., Манжиров А. В., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р. И., Победря Б. Е., Радченко В. П., Ревуженко А. Ф., Редкозубов С. А., Сенашов С. И., Спорыхин А. Н., Трещев А. А., Чернышов А. Д., Хромов А. И., Шашкин А. И.

**Международный совет:** Амензаде Р. Ю. (Азербайджан), Варданян С. В. (Армения), Мирсалимов В. М. (Азербайджан), Тамуж В. П. (Латвия), Чигарев А. В. (Белоруссия)

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

**Тел.:** (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19.

**Email:** predel21@mail.ru.

**WWW:** <http://predel.chgpu.edu.ru>.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-36234 от 15.05.2009 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2013



В. Д. Кулиев

## СВЕТЛОЙ ПАМЯТИ ДЮИСА ДАНИЛОВИЧА ИВЛЕВА

*Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)*

Ушел от нас большой Учитель, Ученый и Мыслитель. Мы не писатели и не поэты, чьи перья остры и чувствительны. Но уход необыкновенного Человека делает нашу душу созвучной вечности.

Дюис Данилович посвятил свою жизнь большой Науке, любил ее и преклонялся перед ней. Многие замечательные результаты вписал Он на ее страницы. Неповторимыми своими фресками украсил Он своды Храма Науки Российской. С нежностью сеял Он вокруг себя семена, “которые продолжают давать все новые свежие всходы в делах его учеников и последователей”. В учениках своих старался Он развить высшую способность человека: научную интуицию, “искусство догадываться”, столь ценное наряду с “искусством доказывать” Великими Творцами Математики, начиная с Посвященного Мудреца Пифагора.

Был Он Мудрым Человеком. Никому Бог не даровал мудрость, не взяв с него обязательства, не скрывать ее ни от кого, как о том свидетельствуют Пророки. Обязательства свои перед Всевышним выполнил он целиком: как Мудрый и прозорливый Учитель воспитал Он множество подобных себе, достойных и нравственно богатых Учеников в разных уголках России. И это звание – Ученик Дюиса Даниловича – звучит гордо.

Он был проповедником добра и неутомимым тружеником. Он любил повторять, слегка изменяя пушкинскую строку: “Не пропадет наш скорбный труд” и вспоминать золотые стихи Гомера.

Говорил Он: “Всем надо трудиться с любовью”.

И пояснял, что значит “трудиться с любовью”, вдохновенными словами пророка со страниц арабского писателя Х. Джебрана:

Это значит – ткать одежды из нитей своего сердца так, словно те одежды наденет твой возлюбленный.

Это – строить дом с усердием так, словно в том доме поселится твой возлюбленный.

Это – сеять семена с нежностью и собирать урожай с радостью так, словно плоды будет есть твой возлюбленный.

Это – наполнять все, что ты делаешь, дыханием своего духа.

Личности, подобные Дюису Даниловичу, рождаются редко. “Величие их стоит выше искусства, выше закона и власти, выше сана и богатства”, – писал Аль-Манфалутти.

У них большой ум. Большой ум, как и большая гора, первым ловит и отражает утреннее Солнце. Смерть Великих подобна закату Солнца.

Свидетельствуют Пророки послание Всевышнего, Господа миров: “Кто хочет блаженства обоих миров – пусть ищет его в учении и знании”.

Наш Дюис Данилович удостоился от Всевышнего блаженства обоих миров.

*Профессор Валех Джафарович Кулиев*

*Сотрудники кафедры высшей и прикладной математики Московского государственного открытого университета имени В. С. Черномырдина, ранее работавшие под руководством Дюиса Даниловича: доц. Аверкиева Л. А., доц. Грачева В. А., проф. Дергачев В. М., доц. Дубровская Е. В., проф. Клименков Е. Я., проф. Макаров Е. В., проф. Матвеева О. А., проф. Монахов И. А., проф. Тихонов В. А., проф. Ткаленко Р. А. – присоединяются к высокому Слову В. Д. Кулиева.*

В. Г. Зубчанинов

## ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ, ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ И Д. Д. ИВЛЕВ

*Тверской государственный технический университет*

**Аннотация.** Приведены некоторые научные результаты и воспоминания о творческой деятельности Д. Д. Ивлева.

**Ключевые слова:** пластичность, упругость, течение, сплошная среда, предельное состояние, сложное нагружение, идеальнопластическая среда, полная пластичность, процессы, образ процесса, постулат изотропии.

УДК: 539.374

1. Профессор Ивлев Д. Д., Дюис Данилович Ивлев — выдающийся ученый-механик, сочетавший в себе глубокие фундаментальные знания в области механики деформируемого тела и математической теории пластичности. Блестящий математик и механик, выпускник механико-математического факультета Московского государственного университета и кафедры теории упругости, которой руководил великий ученый-механик А. А. Ильюшин. Дюис Данилович обогатил нашу науку блестящими научными результатами, достижениями и открытиями, подготовил и воспитал множество молодых и талантливых ученых, кандидатов и докторов наук, основал известные в стране региональные научные школы всероссийского уровня в Чебоксарах, Воронеже и других городах России. Не каждый даже талантливый человек в 29 лет защищает докторскую диссертацию, а в 30 лет становится профессором. Дюис Данилович обладал незаурядными организаторскими способностями в образовании и науке, заведовал кафедрами теории упругости и пластичности, высшей математики, математического анализа и др. в различных вузах страны. Он многие годы был членом национального комитета РАН по теоретической и прикладной механике, членом редколлегией научных журналов РАН — МТТ и ПММ, членом экспертного совета по математике и механике ВАК РФ, председателем докторского диссертационного совета. Он являлся заслуженным деятелем науки и техники РФ, профессором высшей школы, академиком национальной академии наук Чувашии на своей малой Родине. Нас связывали с ним дружеские отношения. Со студенческой скамьи научная деятельность Дюиса Даниловича была связана с А. Ю. Ишлинским, который уделял много внимания теории пластичности. Докторская диссертация Дюиса Даниловича Ивлева была посвящена пространственной задаче теории идеальной пластичности. Он развил результаты докторской диссертации А. Ю. Ишлинского. Обычно каждый из нас получает свои главные результаты в молодости. Не избежал этого и Дюис Данилович Ивлев.

2. Главное научное достижение. В свое время Сен-Венан представил соотношения своей теории идеальной пластичности для плоской деформации изотропной несжимаемой среды в виде дифференциальных уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad (2.1)$$

и условия пластичности

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = (2k)^2, \quad (2.2)$$

где  $k$  — предел текучести при чистом плоском сдвиге [1], [2], [3], [4].

Соотношения (2.1), (2.2) образуют замкнутую статически определимую систему трех уравнений с тремя неизвестными напряжениями  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ . Уравнения (2.1), (2.2) принадлежат к гиперболическому типу, а траектории действия максимальных касательных напряжений совпадают с ортогональными характеристиками линий скольжения. В предельном состоянии при достижении предельного касательного напряжения  $T_{\max} = k$  среда перестает сдерживать скольжение вдоль характеристических линий и наступает разрушение. А. Ю. Ишлинский предложил новый критерий пластичности формоизменения [5], [6]. Главные нормальные напряжения девиатора выражаются через главные нормальные напряжения  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) тензора по формулам:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2}{3} \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right], \\ S_2 &= \frac{2}{3} \left[ \sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \right], \\ S_3 &= \frac{2}{3} \left[ \sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Область отсутствия текучести в пространстве главных напряжений  $\sigma_k$  Хейга изображается внутренностью правильной шестигранной призмы, грани которой описываются плоскостями

$$S_1 = \pm \frac{2}{3}\sigma_T, \quad S_2 = \pm \frac{2}{3}\sigma_T, \quad S_3 = \pm \frac{2}{3}\sigma_T, \quad (2.4)$$

где  $\sigma_T$  — предел текучести при растяжении материала. В эту призму вписывается круглый цилиндр радиуса  $R = \sqrt{2/3}\sigma_T$ , в который вписан правильный шестиугольник Кулона. Общие точки соприкосновения обоих многоугольников с окружностью Мизеса являются особыми точками, в которых реализуется состояние полной пластичности по Хаару и Карману [7].

В пространственной задаче теории идеальной пластичности шесть напряжений  $\sigma_{ij}$  удовлетворяют трем дифференциальным уравнениям равновесия Коши [4]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.5)$$

В предельном состоянии пространственная задача становится статически определимой. Поэтому необходимы дополнительно еще три соотношения. А. Ю. Ишлинский в своей докторской диссертации (1943 г.), посвященной общей пространственной задаче теории идеальной пластичности, использовал условие полной пластичности Хаара и Кармана [7] для одной из граней призмы Кулона [4], [5], [7]

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad T_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k. \quad (2.6)$$

В этом случае  $\sigma_3 = \sigma_1 - 2k$ , среднее напряжение

$$\sigma_0 = \sigma_1 - \frac{2k}{3}.$$

Главные касательные напряжения и главные нормальные напряжения девиатора примут вид:

$$\begin{aligned} T_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 0, \quad T_{\max} = T_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = k, \quad T_{\max} = T_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k, \\ S_1 = \sigma_1 - \sigma_0 = \frac{2k}{3}, \quad S_2 = \sigma_2 - \sigma_0 = -\frac{2k}{3}, \quad S_3 = \sigma_3 - \sigma_0 = -\frac{4k}{3}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

откуда  $|S_3|_{\max} = 4k/3$ .

Таким образом, решение А. Ю. Ишлинского пространственной задачи теории идеальной пластичности было приведено к решению трех уравнений равновесия (2.5), двум условиям текучести (2.6), т. е. к пяти уравнениям с шестью неизвестными  $\sigma_{ij}$ . В качестве шестого

дополнительного соотношения было использовано условие соосности главных осей тензоров напряжений и скоростей деформации [4], [5]

$$\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ji} = \dot{\epsilon}_{ij}\sigma_{ji}. \quad (2.8)$$

Д. Д. Ивлев развил решение пространственной задачи идеальной теории пластичности А. Ю. Ишлинского [1], [2]. Он построил теорию предельных состояний идеальнопластических сред для пространственного напряженно-деформированного состояния (НДС) в своей докторской диссертации «Пространственная задача теории идеальной пластичности» и успешно защитил ее в возрасте 29 лет [1], [2], [4]. Вместо условий, использованных А. Ю. Ишлинским (2.6), Д. Д. Ивлев в качестве критериев пластического течения принял три условия Хаара и Кармана:

$$T_{\max} = T_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k, \quad T_{\max} = T_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = k, \quad T_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 0,$$

или

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = 2k, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 0. \quad (2.9)$$

На основании (2.9) Д. Д. Ивлев преобразовал и получил условия пластичности в виде [4]:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 &= \left[\sigma_{33} - \sigma_0 - \frac{4k}{3}\right]^2, \\ (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{23}^2 &= \left[\sigma_{11} - \sigma_0 - \frac{4k}{3}\right]^2, \\ (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 4\sigma_{31}^2 &= \left[\sigma_{22} - \sigma_0 - \frac{4k}{3}\right]^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Это блестящее решение пространственной задачи предельного состояния идеальнопластической среды и составляет, с моей точки зрения, главное фундаментальное научное достижение Д. Д. Ивлева в теории пластичности.

Замкнутая система шести соотношений (2.5), (2.10) полностью решает проблемы по определению напряжений  $\sigma_{ij}$  в предельном состоянии, делая ее статически определяемой при соответствующих граничных статических условиях. В предельном состоянии при пространственном НДС возникают характеристические поверхности, которые совпадают с поверхностями скольжения главных касательных напряжений, недопускающих роста внешней предельной нагрузки. Основные уравнения соответствуют уравнениям гиперболического типа, которыми так восхищался Д. Д. Ивлев. Безусловно, научное достижение Д. Д. Ивлева в его молодые годы было *прорывом* в теории предельных состояний идеальнопластических сплошных сред и вошло в историю механики как один из фундаментальных научных результатов. Идея Д. Д. Ивлева о том, что предельные состояния не могут быть достигнуты в *статически неопределимых системах*, не всеми была воспринята. В воспоминаниях Д. Д. Ивлева в Вестнике Чувашского государственного педагогического университета мы находим описание, как отнесся к его докторской диссертации академик С. А. Христианович, будучи «черным» оппонентом. Он отметил, что пластичностью нужно заниматься так: «взять дробь, насыпать в воронку и посмотреть, как она себя будет вести» при истечении из нее. Но это была другая блестящая идея механики сплошной среды в процессах сложного нагружения пластических сред. С. А. Христианович дал положительный отзыв на диссертацию Д. Д. Ивлева. С понятием полной пластичности был частично несогласен А. А. Ильюшин. Он использовал это понятие в статье [8], где применил условие  $\sigma_1 \approx \sigma_2$  на ребре призмы Кулона. Но, с другой стороны, А. А. Ильюшин отрицательно относился к понятию *неполной пластичности* Хаара и Кармана. Так, в своей знаменитой монографии [9] он пишет, что С. П. Тимошенко, Блейх, Геккелер и др. предложили при исследовании задач устойчивости сжатых в одном направлении пластин и цилиндрических оболочек за пределом упругости считать, что они в одном направлении сжаты так, что материал деформируется пластически, а в другом, перпендикулярном, остаются упругими. Произвол таких рассуждений А. А. Ильюшин посчитал очевидным. Частица не может находиться в пластическом состоянии в одном направлении и

упругом состоянии в другом. Возможно, по этой причине А. А. Ильюшин и не поддержал на защите докторскую диссертацию Д. Д. Ивлева, хотя в целом он относился к Д. Д. Ивлеву хорошо.

3. О дискуссиях. Дискуссии среди ученых на фронте волны научных идей вполне естественны и, как правило, приносят пользу, но иногда переходят черту дозволенного. Правильно полученный результат не требует никакого признания. Он требует лишь терпения и понимания сути проблемы. Все могут ошибаться, но не все в этом признаются. Но истина требует признания. Д. Д. Ивлев был неперменным и активным участником происходящих в нашей стране научных конгрессов, съездов, конференций, симпозиумов, семинаров. Он излагал свои мысли доходчиво. Убежденность и принципиальность выступлений Д. Д. Ивлева хорошо известны среди ученых. Об этом можно судить по его воспоминаниям, опубликованным в серии журналов «Вестник Чувашского государственного педагогического университета. Серия: Механика предельного состояния». Эта серия была создана по инициативе Д. Д. Ивлева и получила широкое признание. Журнал среди ученых-пластичников стал популярным. В этом большая заслуга лично Д. Д. Ивлева и поддержавшего его ректората вуза. Журнал стал рецензируемым ВАК РФ. Ивлев Д. Д. смело вступал в дискуссию по различным вопросам с крупными механиками и авторитетами в науке по механике твердого тела. Так, в книге академика РАН Л. И. Седова по механике сплошной среды он обратил внимание автора на то, что разложение полных деформаций на упругие и пластические части чревато тем, что поведение последних не удовлетворяет условиям совместности деформаций. Как вспоминает Д. Д. Ивлев, в журнале «Вестник Чувашского государственного педагогического университета», это вызвало бурю эмоций у автора книги. Он был обвинен в неграмотности и назван «ильюшинцем», потому что А. А. Ильюшин в деформационной теории пластичности предпочитал использовать понятие полных деформаций. В теории течения гипотеза о разложении полных деформаций на упругие и пластические части является основной. По поводу моего утверждения, что при сложном нагружении разложение полных деформаций недопустимо, кроме случаев простого нагружения–разгружения, Д. Д. Ивлев ответил: «На мой взгляд, это разложение можно допускать, а можно и не допускать. Все зависит от принятых допущений в рамках используемых моделей.» В. Г. Зубчанинов не допустил и полностью объяснил явление «нырка» напряжений при сложном нагружении–разгружении на диаграммах деформирования при реализации пассивного процесса разгружения [10]. Теория течения эти нырки не учитывает и обходится законом линейной упругой разгрузки.

Д. Д. Ивлев описал ряд дискуссий в статье [11]. Я остановлюсь на одной из них, близкой к моим научным интересам и весьма важной для развития общей математической теории пластичности при сложном нагружении, которую разработал А. А. Ильюшин [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34]. В дискуссии противостояли сторонники теории течения и нового направления в теории пластичности, которое коротко назовем *теорией процессов*. Эта теория является более общей, чем теория течения. Дискуссия (1960–1961 гг.) мало освещена в научной литературе, но востребована для понимания путей правильного развития теории пластичности. Поводом к дискуссии послужили две статьи Д. Д. Ивлева [16], [17] в 1960 г. В первой из них было обращено внимание на то, что в предложенной формулировке постулата не учитывается влияние третьего инварианта девиатора деформаций (напряжений): «связь между тензорами-девиаторами напряжений и деформаций изотропна в (линейном) пространстве тензоров-девиаторов напряжений и деформаций». Замечание было формально правильным, хотя А. А. Ильюшин сам на это прямо указал и не скрывал. Другое замечание было несущественным: «Единственным условием пластичности, изотропным в пространстве тензора-девиатора напряжений, является условие пластичности Мизеса. Всякое другое условие пластичности, например, условие Треска, неизотропно в пространстве тензора-девиатора напряжений. Следовательно, постулат изотропии исключает все условия пластичности, кроме условия пластичности Мизеса». По поводу условия Треска это так, все остальное не так. Чтобы убедиться в этом, достаточно



прочитать статью А. А. Ильюшина [18], где подробно описано, что это не так. Замечание Д. Д. Ивлева «Нет никаких оснований считать постулат изотропии общим законом пластичности» было продиктовано больше его эмоциями, чем существом вопроса. Его докторская диссертация на этот момент была еще не утверждена ВАК.

Во второй статье [17] Д. Д. Ивлев отмечает, что «постулат изотропии есть некоторое предположение о форме связи напряжений и деформаций, накладывающее достаточно жесткие ограничения на свойства материала», и утверждается, «что для многих идеальнопластических сред, для статики сыпучей среды постулат пластичности не имеет места». Здесь высказывается, по существу, более здравая мысль о том, что не все классы материалов могут удовлетворять частному постулату изотропии. И только опыт способен ответить на вопрос о достоверности постулата изотропии в первоначальной формулировке А. А. Ильюшина. Далее Д. Д. Ивлев отмечает, что «в формулах и опытных данных работы В. С. Ленского [15] фигурируют только полные деформации. Автор по существу игнорирует принципиальное различие между упругими и пластическими деформациями». Мы уже затрагивали выше этот вопрос о разделении полных деформаций на упругие и пластические части в теории течения. Д. Д. Ивлев далее отмечает в [17], что «игнорирование этого факта разделения в теории пластичности нельзя считать правильным». Гипотеза о разделении деформации в теории течения является фундаментальной. Поэтому это возражение вполне понятно. Однако отметим, что данная гипотеза теории течения вступает в противоречие с критерием полной и неполной пластичности Хаара и Кармана и поэтому является лишь приближением к действительности для определенных классов нагружений. Если частица тела находится в состоянии неполной пластичности, то она в одних направлениях удовлетворяет законам пластичности, а в других — закону упругости Гука. В этом случае разделить деформацию на упругую и пластическую части невозможно. Это не означает, что математическая модель теории течения неверна, она просто является приближенной и степень ее приближения следует оговаривать. Например, в задачах пластической устойчивости элементов конструкций она недостоверна.

Две работы Д. Д. Ивлева [16], [17] послужили основанием для ожесточенной дискуссии по поводу постулата изотропии, выдвинутого А. А. Ильюшиным [13], [18]. В связи с этим я позволил себе дать краткое, по возможности, пояснение, что представляет собой постулат изотропии и новое прорывное направление в теории пластичности, названное теорией процессов.

4. Постулат изотропии. Как известно, материалы обладают скалярными и векторными свойствами, которые описывают тензоры напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Для идеальнопластических сред в теории предельных состояний это разделение и история нагружения несущественна. Иначе обстоит дело с упрочняющимися материалами. А. А. Ильюшин представил их в виде [12]

$$(\sigma_{ij}) = \sigma_0(\delta_{ij}) + \sigma(S_{ij}^*), \quad (\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_0(\delta_{ij}) + \Theta(\Theta_{ij}^*) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4.1)$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензоров напряжений и деформаций;  $S_{ij}$ ,  $\Theta_{ij}$  — компоненты их девиаторов;  $S_{ij}^* = S_{ij}/\sigma$ ,  $\Theta_{ij}^* = \Theta_{ij}/\Theta$  — компоненты направляющих тензоров;  $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$ ,  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}/3$  — модули шаровых тензоров;  $\sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}$ ,  $\Theta = \sqrt{\Theta_{ij}\Theta_{ij}}$  — модули девиаторов напряжений и деформаций соответственно. В (4.1) модули  $\sigma_0$ ,  $\sigma$  и  $\varepsilon_0$ ,  $\Theta$  описывают скалярные, а направляющие тензоры  $(S_{ij}^*)$ ,  $(\Theta_{ij}^*)$  — векторные свойства.

Ильюшин А. А. ввел понятие простого (пропорционального) и сложного нагружений. При простом нагружении  $(S_{ij}^*) = (\Theta_{ij}^*)$  проявляются только скалярные свойства материалов. При сложном нагружении  $(S_{ij}^*) \neq (\Theta_{ij}^*)$  и проявляются как скалярные, так и векторные свойства. Представить наглядно (геометрически) векторные свойства при тензорном изложении невозможно. Идея представления тензоров напряжений и деформаций в виде векторов в девятимерном линейном пространстве  $\Pi_9$  принадлежит В. Прагеру. Развитие этой идеи для шестимерного  $E_6$  и пятимерного девиаторного  $E_5$  линейных евклидовых пространств принадлежит А. А. Ильюшину [13].

В основе механики сплошной среды (МСС) лежит общий постулат макроскопической определенности, согласно которому состояние среды в каждой частице тела в любой момент времени  $t$  при любом сложном напряженно-деформируемом состоянии (НДС) однозначно определяется *процессом* [7], [13]. Для начально изотропных сред при любом НДС среднее напряжение  $\sigma_0$  и компоненты девиатора  $S_{ij}$  можно представить на основе общего постулата МСС в виде функциональной зависимости

$$\sigma_0 = F_0\{\varepsilon_0, \Theta_{ij}, T, \beta\}, \quad S_{ij} = \mathcal{F}_{ij}\{\varepsilon_0, \Theta_{ij}, T, \beta\}, \quad (4.2)$$

где  $T$  — температура,  $\beta$  — совокупность нетермофизических параметров. А. А. Ильюшин в [12], [13] конкретизировал зависимости (4.2) в виде

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad S_{ij} = A_k \frac{d^k \Theta_{ij}}{dS^k} \quad (i, j = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, 5), \quad (4.3)$$

где  $K$  — объемный модуль упругости, коэффициенты  $A_k$  зависят от параметра прослеживания процесса и всех трех инвариантов тензора деформаций.

В (4.3) тензорное соотношение было названо А. А. Ильюшиным *постулатом изотропии*. Он поставил в соответствие симметричным тензорам  $(\sigma_{ij})$  и  $(\varepsilon_{ij})$  векторы напряжений и деформаций

$$\bar{S} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\varepsilon} = \Theta_k \hat{i}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 5) \quad (4.4)$$

в шестимерном  $E_6$  пространстве с общим ортонормированным базисом  $\{\hat{i}_k\}$  и векторы

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\Theta} = \Theta_k \hat{i}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5) \quad (4.5)$$

напряжений и деформаций в пятимерном  $E_5$  девиаторном подпространстве формоизменения соответственно. Проекции векторов равны:

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, & S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, & S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{22} - S_{33}), \\ & S_3 = \sqrt{2}S_{12}, & S_4 = \sqrt{2}S_{23}, & S_5 = \sqrt{2}S_{13}, \\ \Theta_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, & \Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\Theta_{11}, & \Theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_{22} - \Theta_{33}), \\ & \Theta_3 = \sqrt{2}\Theta_{12}, & \Theta_4 = \sqrt{2}\Theta_{23}, & \Theta_5 = \sqrt{2}\Theta_{12}. \end{cases} \quad (4.6)$$

При этом модули векторов равны

$$\sigma = \sqrt{S_k S_k} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_k \Theta_k} = \sqrt{\Theta_{ij} \Theta_{ij}} \quad (k = 1, 2, \dots, 5). \quad (4.7)$$

Используя (4.6), соотношения постулата изотропии (4.3) можно представить в виде

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad S_k = A_k \frac{d^n \Theta_k}{dS^n} \quad (k, n = 1, 2, \dots, 5), \quad (4.8)$$

где все три инварианта тензоров сохраняются. Концы векторов  $\dot{\sigma}, \dot{\Theta}$  в  $E_5$  описывают траектории нагружения и деформирования. В каждой точке траектории деформаций строится естественный репер Френе–Ильюшина  $\{\hat{p}_k\}$ , положение которого определяется длиной дуги траектории  $s(t)$ . Совокупность траектории  $\dot{\Theta}(s)$  с построенным в каждой ее точке вектором напряжений  $\dot{\sigma}$  и приписанными к этой точке скалярными параметрами  $\varepsilon_0$ , температурой  $T$  и совокупностью нетермофизических параметров  $\beta$  была названа *Θ-образом процесса деформирования*. Построенный в каждой точке естественный ортонормированный репер  $\{\hat{p}_k\}$  характеризуется векторами

$$\hat{p}_1 = \frac{d\dot{\Theta}}{ds}, \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{\kappa_1} \frac{d^2 \dot{\Theta}}{ds^2}, \quad \hat{p}_3 = \frac{1}{\kappa_2} \left[ \kappa_1 \frac{d\dot{\Theta}}{ds} + \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\kappa_1} \frac{d^2 \dot{\Theta}}{ds^2} \right) \right], \dots, \quad (4.9)$$

которые выражаются через пять производных от вектора  $\dot{\Theta}$  по  $s$  и четыре параметра  $\kappa_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) кривизны и кручения. Для криволинейных траекторий  $s > \Theta, \kappa_m \neq 0$ .

Векторные свойства материалов характеризуются ориентацией вектора  $\hat{\sigma}$  в естественном репере Френе–Ильюшина угловыми координатами  $\beta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 5$ ) либо четырьмя сферическими углами  $\vartheta_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ),

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \cos \beta_k \hat{p}_k = \cos \vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin \vartheta_1 (\cos \vartheta_2 \hat{p}_2 + \sin \vartheta_2 \hat{p}), \\ \hat{p} = \cos \vartheta_3 \hat{p}_3 + \sin \vartheta_3 (\cos \vartheta_4 \hat{p}_4 + \sin \vartheta_4 \hat{p}_5). \end{cases}$$

Направляющим тензорам  $(S_{ij}^*), (\mathcal{E}_{ij}^*)$  соответствуют в  $E_5$  единичные векторы  $\hat{\sigma}, \hat{\mathcal{E}}$ , а направляющим тензорам их скоростей  $(\dot{S}_{ij}^*), (\dot{\mathcal{E}}_{ij}^*)$  — единичные векторы  $\hat{q}_1 = d\hat{\sigma}/d\Sigma, \hat{p}_1 = d\hat{\mathcal{E}}/ds$ . Умножая (4.8) на  $\hat{i}_k$  и складывая, получим соотношение *постулата изотропии в векторном виде*

$$\dot{S}_0 = 3K\dot{\mathcal{E}}_0, \quad \dot{\sigma} = A_k \frac{d^k \dot{\mathcal{E}}}{ds^k} \quad (k = 1, 2, \dots, 5). \quad (4.10)$$

Используя (4.8), находим основную векторную форму постулата изотропии

$$\dot{S}_0 = 3k\dot{\mathcal{E}}_0, \quad \dot{\sigma} = P_k \hat{p}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5), \quad (4.11)$$

где функционалы  $P_k$ , как и  $A_k$ , зависят в общем случае от всех трех инвариантов  $\varepsilon_0, \mathcal{E}, I_3^\varepsilon$  и параметров  $\kappa_m, T, \beta$  как функций длины дуги траектории  $s(t)$ . Совершенно очевидно, что при переходе от компонент девиаторов  $S_{ij}, \mathcal{E}_{ij}$ , согласно взаимнооднозначным преобразованиям (4.6), все три инварианта  $\sigma_0, \sigma, I_3^\sigma = |S_{ij}|$  и  $\varepsilon_0, \mathcal{E}, \mathcal{E}_3^\varepsilon = I_3^\varepsilon = |\mathcal{E}_{ij}|$  сохраняются в  $E_5$ . Каждая из траекторий отвечает своему физическому процессу. При преобразованиях координатных осей  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) в частице тела все инварианты сохраняются по определению самих тензоров. Эти преобразования в  $E_5$  принадлежат к группе преобразования вращений репера  $\{\hat{i}_k\}$  и векторов траекторий. Поэтому при соответствии вращений траекторий в  $E_5$  и координатных осей в физическом пространстве все три инварианта тензора сохраняются. В противном случае инварианты  $\sigma_0, I_3^\sigma$  и  $\varepsilon_0, I_3^\varepsilon$  изменяются, и сохраняются только вторые инварианты  $\sigma$  и  $\mathcal{E}$ . Это означает, что при вращении траекторий в  $E_5$ , которые не соответствуют вращениям координатных осей в физическом пространстве, каждое новое положение траектории будет отвечать различным физическим процессам. Важное значение имеет ориентация вектора  $\hat{\sigma}$  в репере  $\{\hat{p}_k\}$ , определяемая углами  $\vartheta_m$ . Принцип запаздывания векторных свойств материалов определяет след запаздывания на траектории после ее излома или изменения кривизны. Длина  $\lambda$  этого следа составляет несколько упругих деформаций  $\varepsilon_T$  порядка  $10^{-3}$ . Для всех случаев простого нагружения  $\hat{\sigma} = \hat{\mathcal{E}}$ , откуда следует общий закон пластичности для малых упругопластических деформаций

$$\dot{\sigma} = \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \dot{\mathcal{E}}, \quad \vartheta_m = 0, \quad \sigma = \Phi(\mathcal{E}), \quad (4.12)$$

где  $\Phi(\mathcal{E})$  — универсальная единая функция Роша и Эйхингера для начально изотропных тел. Если след  $\lambda$  меньше радиуса кривизны  $R$  ( $\kappa_1 < \lambda^{-1}$ ), то траектория названа траекторией малой кривизны. В этом случае опыт показывает, что  $\hat{\sigma} = \hat{p}_1$ , откуда

$$\dot{\sigma} = \sigma \frac{d\dot{\mathcal{E}}}{ds}, \quad \vartheta_m = 0, \quad \sigma = \Phi(s), \quad (4.13)$$

где  $\Phi(s)$  — та же универсальная функция простого нагружения, но от длины дуги траектории  $s > \mathcal{E}$ .

Зависимости (4.12), (4.13) представляют общую теорию пластичности А. А. Ильюшина для класса траекторий, близких к простому нагружению. В этом случае  $0 < \kappa_1 < \kappa_1^*$ , где  $\kappa_1^*$  — некоторое допустимое для малой кривизны значение.

Если след  $\lambda$  одного порядка с  $R$  ( $\kappa_1 \sim \lambda^{-1}$ ), то траекторию называют траекторией средней кривизны. Здесь также должно быть ограничение на величину кривизны  $\kappa_1 < \kappa_1^{**}$ . Для таких траекторий  $\vartheta_1 > 0$  и имеет место гипотеза компланарности ( $\vartheta_2 = 0$ ):

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\sigma}}{ds} = N\hat{p}_1 + \left(\frac{d\sigma}{ds} - N\cos\vartheta_1\right)\hat{\sigma}, \\ \hat{\sigma} = \cos\vartheta_1\hat{p}_1 + \sin\vartheta_1\hat{p}_2, \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = -\frac{N}{\sigma}\sin\vartheta_1. \end{cases} \quad (4.14)$$

В частном случае теории течения Прандтля–Рейсса  $N = 2G$ , где  $G$  — модуль сдвига. Для закона упрочнения принимается закон Одквиста–Ильюшина  $\sigma = \Phi(s)$ , малоотличающийся от диаграммы простого нагружения  $\sigma = \Phi(\Theta)$ . Поэтому вопрос об учете  $\vartheta_1$  не ставится и принимается  $\vartheta_1 \approx 0$ . В этом случае, согласно принципу градиентальности,  $d\dot{\Theta}^p = d\lambda\dot{\sigma}$ . Для параметра  $d\lambda$  принимается

$$\sigma d\lambda = \frac{d\sigma}{ds} - 2G = \frac{d\Phi}{ds} - 2G. \quad (4.15)$$

Теория течения в этом случае не противоречит соотношениям постулата изотропии. Обобщая отмеченное выше, А. А. Ильюшин пришел к такой первоначальной формулировке закона связи напряжений и деформаций с учетом  $\vartheta_m(s, \kappa_m) \neq 0$ . *Выраженный в виде (4.10), (4.11), постулат макроскопической определенности назван постулатом изотропии, если коэффициенты  $A_k, P_k$  не зависят от третьего инварианта девиатора  $I_3^s$  и образ процесса в  $E_5$  инвариантен относительно преобразований вращения и отражения и зависит только от параметров  $(\varepsilon_0, T, \beta)$*  [12], [13], [18]. В этом случае  $\Theta$ -образ процесса зависит только от внутренней геометрии траектории  $\Theta(s)$ .

Как видно, Д. Д. Ивлев в [16], [17] по существу и не вступал в дискуссию с А. А. Ильюшиным. Он отметил лишь то, что уже предполагалось в постулате самим автором. А. А. Ильюшин сформулировал исходное положение теории, подсказанное реальностью для опытного обоснования ее доказательства. Следует отметить, что для плоского напряженного состояния и плоской деформации третьи инварианты выражаются через первые два. Поэтому для этого большого класса задач влияние третьих инвариантов является слабым и выражения постулата (4.10), (4.11) вовсе не требуют их независимости от  $I_3^s$ .

5. Дискуссия 1960–1961 гг. о постулате изотропии. «В свое время я заметил [16], [17], что в предложенной форме постулата изотропии не учитывается влияние третьего инварианта девиатора напряжений, хотя для изотропного тела третий инвариант девиатора имеет место» [10]. Это было отмечено Д. Д. Ивлевым уже в зрелые годы (в 2007 г.). Он задал себе вопрос: «Стоило ли мне публиковать свое замечание?» Наверное, стоило, оно представляло определенный интерес. Мое замечание послужило поводом для ожесточенной дискуссии [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25]. Но мое замечание носило частный характер, относилось к частной формулировке постулата изотропии и никак не могло сказаться на фундаментальных идеях, сформулированных в постулате изотропии. Обобщить представления постулата изотропии с учетом третьего инварианта девиатора напряжений (деформаций) не представляет принципиальных трудностей, что и было сделано самим А. А. Ильюшиным позднее [25], [26], [27], [28]. Оценивая сейчас эту «дискуссию», скажу следующее. Мне кажется, что она внесла больше негатива, чем позитива, и ничего положительного для нашей науки не дала» [10]. Нелегко было достичь такого просветления, но Д. Д. Ивлев этого достиг. За такую объективность и принципиальность можно только уважать.

На работы Д. Д. Ивлева [16], [17] обратили внимание Л. И. Седов, Ю. Н. Работнов, В. В. Новожилов. Разгорелась дискуссия о постулате изотропии и в целом по новому направлению в теории пластичности. Появление нового направления в теории пластичности, названного позднее коротко теорией процессов, было встречено сторонниками теории течения весьма агрессивно. Оно было более общим, чем лидирующая в то время теория течения. Статьи участников дискуссии изложены в работах [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34]. Приведу некоторые цитаты лиц, участвующих в дискуссии.

В. В. Новожилов, взявший на себя «непосильный труд объективно разобраться в советских работах по основам общей математической теории пластичности и американских работах по теории ассоциированного закона текучести» [23], отметил: «Нет оснований считать постулат изотропии универсальным законом для пластических тел». «Тензор деформации в физическом пространстве имеет три независимых инварианта; будучи же трактован как вектор в пятимерном пространстве, он имеет всего лишь один инвариант — длину вектора. То же относится и к тензору напряжений». «Начально изотропная пластическая среда, подчиняющаяся критерию Сен-Венана, уже не подходит для описания вышеупомянутым (векторным) математическим аппаратом, поскольку в этот критерий входит третий инвариант тензора напряжений, не являющийся таковым в пространстве  $E_5$ ». Постулат изотропии — «образ процесса деформации инвариантен относительно преобразований вращения и отражения (в  $E_5$ ). Значит коэффициенты в формуле  $\dot{\sigma} = P_k \hat{p}_k$ , где  $\hat{p}_k$  и  $ds$  — элемент дуги траектории нагружения, есть инварианты преобразований, т. е. зависят только от длины дуги  $s$ , кривизны  $\kappa_m$  траектории и от скорости  $\dot{s}$ ». «При этом критерий Мизеса возводится в ранг закона, справедливого для всех изотропных сред». «Основные варианты теории течения подчиняются постулату изотропии, содержат в себе принцип запаздывания и поддаются векторной интерпретации в  $E_5$ . Поэтому резкие нападки на теорию течения со стороны представителей нового направления долгое время оставались без разделения в своей теории полной деформации на упругую и пластическую части. . . , тем самым провозглашая право игнорировать коренное различие между процессами упругой и пластической деформаций» [19]. Однако такого права нет и у сторонников теории течения. Это лишь гипотеза и только. В теории течения это право отменили Хаар и Карман еще в 1909 г. [7]. «Однако теория течения для сторонников нового направления в теории пластичности неприемлема. Своей же собственной теорией у них не было. Нельзя же всерьез рассматривать как теорию предложение разлагать вектор напряжений по пяти направлениям репера траектории деформирования и искать коэффициенты этого разложения то ли в форме функций, то ли в форме функционалов от длины пятимерной траектории деформирования и всех ее пяти кривизн?!» [19]. Это замечание было уже на грани фола. А. А. Ильющин никогда не отвергал теорию течения. Он критиковал ее недостатки, но ставил задачу объединения нового направления с теорией течения [20]. Ничего нового, по сравнению с замечаниями [16], [17] Д. Д. Ивлева, в работах В. В. Новожилова высказано не было, за исключением этого «однако», прозвучавшего весьма некорректно.

А. А. Ильющин достойно ответил на критику В. В. Новожилова в исследовании [23]: «Компоненты  $S_{ij}$  и  $\sigma_k$ ,  $\mathcal{E}_{ij}$  и  $\mathcal{E}_k$  и т. д. соответственно связаны взаимнооднозначными линейными соотношениями и, значит, обе группы параметров эквивалентны, очевидно, что при переходе от  $\mathcal{E}_{ij}$  к  $\mathcal{E}_k$  все инварианты сохраняются». «В заметке Новожилова имеется недопустимое смешение понятий изотропии физического тела и изотропии многомерных вспомогательных пространств». «Обсуждение и оценку постулата изотропии В. В. Новожилов производит на основе неполной его формулировки». «Начальная поверхность текучести согласно постулату изотропии может быть не только сферой для материалов, условие пластичности которых не зависит от (давления)  $p$ , но и сложной поверхностью». «Наша одночленная формула  $S_{ij} = A \mathcal{E}_{ij}$  для простого нагружения не вызвала особых реплик Новожилова. Но пятичленная формула  $S_{ij} = A_k (d^k \mathcal{E}_{ij} / ds^k)$  для совершенно произвольного сложного нагружения получила оценку, в которой не сдерживаемые ни ее автором, ни редакцией Известий ОТН выражения чувств неприязни Новожилова к рассматриваемым им работам, вызванные, очевидно, *из непониманием*, вовсе не сопровождаются какими либо научными соображениями: “Нельзя же всерьез рассматривать как теорию предложение разлагать вектор напряжений. . . ?!”. Проявляющееся в этом высказывании непонимание постулата изотропии, имеющего к тому же обстоятельное экспериментальное подтверждение, вполне согласуется с заблуждением в геометрии пятимерных кривых» [23]. «Многочисленные опыты наших и зарубежных ученых с изотропными в исходном состоянии материалами при нормальных и высоких температурах,

малых и больших временах деформирования показывают, что *влияние третьего инварианта девиатора деформирования (напряжений) на механические свойства при малых деформациях является слабым*, и это согласуется с теорией малых упругопластических деформаций. Поэтому в распространенных формулировках постулата изотропии мы принимаем, что от третьих инвариантов тензоров коэффициенты  $A_k$  в (4.3), а значит, и  $A_k$  в (4.10), не зависят. Это означает, что пятимерные пространства напряжений, деформаций и т. д. изотропны, т. е. законы связи напряжений с деформациями инвариантны не только относительно преобразований поворота осей координат в теле, но и относительно преобразований вращения и отражения в пятимерных пространствах, и, значит, только длина дуги и четыре параметра кривизны являются единственными внутренними характеристиками процессов сложного нагружения». «Как видно, все это имеет очень отдаленное сходство с предложением разлагать вектор по осям координат и доказывать, что *необъективность оценки Новожилова имеет характер сознательного искажения существа постулата*». «Новожилов бездоказательно, априорно и догматически ставит под сомнение безусловно правильное высказывание Ленского: «Исследование зависимостей между напряжениями и полными деформациями теоретически правомерно и практически целесообразно»» [23]. Так ответил А. А. Ильюшин.

Общие определяющие соотношения в теории течения были получены в 1938 г. Меланом и независимо в 1949 г. В. Прагером, который ввел понятие функции нагружения  $f$ . Наиболее удовлетворительной основой этих соотношений явился выдвинутый в 1951 г. постулат Драккера [7]. Определяющие соотношения В. Прагера ассоциированы с функцией нагружения  $f$ , и поэтому их называют ассоциированным законом пластичности [20], [37]:

$$\begin{cases} d\dot{\Sigma} = \frac{d\dot{\sigma}}{2G} + D\text{grad}f(\dot{\sigma}, \dot{\Sigma}^p) df, \\ df = \text{grad}f(\dot{\sigma}, \dot{\Sigma}^p) \cdot d\dot{\sigma} \geq 0. \end{cases}$$

Гипотеза о трансляционном характере упрочнения материалов Прагера послужила основой для решения частных задач. В частности, в 1958 г. В. В. Новожилов совместно с Ю. И. Кадашевичем опубликовали «свою» теорию течения с трансляционно-изотропным упрочнением, которая учитывала эффект Баушингера [35]. В этой теории поверхность текучести принималась в виде расширяющейся сферы, за что В. В. Новожилов критиковал новое направление в теории пластичности А. А. Ильюшина.

Нетрудно понять, что в теории пластичности произошел *крупный прорыв*. Теория течения почти 100 лет лидировала в развитии теории пластичности. Положение в теории пластичности в связи с возникновением в ней нового прогрессивного направления было обсуждено на съезде по теоретической и прикладной механике в январе–феврале 1960 г. в Москве и более подробно на Ломоносовских чтениях в МГУ (март 1960 г.) [8].

В июне 1960 г. в МГУ состоялось широкое обсуждение нового направления в теории пластичности и его постулата пластичности [20]. На совещание были приглашены выступить с докладами Л. И. Седов, Ю. Н. Работнов, В. В. Новожилов. Но они отказались принять участие в совещании. Они проиграли дискуссию. Совещание в МГУ полностью одобрило новое перспективное направление в теории пластичности. Я присутствовал на этом совещании, прослушал доклады А. А. Ильюшина, А. М. Жукова, В. С. Ленского [20], [21], [22]. Я прекрасно понял идеи, заложенные в новую теорию пластичности, названную впоследствии просто теорией процессов, и использовал ее в своей дальнейшей научной деятельности. Статьи А. А. Ильюшина и В. В. Новожилова [23], [24], завершающие итоги дискуссии, были опубликованы в 1962 г. в одном номере журнала «Известия РАН. ОТН». В. В. Новожилов остался при своем мнении: «Постулат изотропии есть не что иное, как подмена понятия изотропии в физическом трехмерном пространстве понятием изотропии во вспомогательном пятимерном пространстве» [24]. Он защищал свою математическую модель и теорию течения в целом. Теория течения, безусловно, – менее общая модель, чем теория процессов. Но она была и остается одним из общих направлений теории пластичности. Развитие теории пластичности в конечном счете пойдет по пути их объединения, т. к. у них общие задачи.

В 1997 г. в Тульском государственном техническом университете было создано совещание по развитию теории пластичности, в котором приняли участие А. А. Ильюшин, В. С. Ленский, Л. А. Толоконников, А. М. Жуков с одной стороны, Л. И. Седов, Ю. Н. Работнов — с другой, а также Д. Д. Ивлев. Отсутствовал В. В. Новожилов. Споров не было и каждый изложил свою позицию. Я думаю, что дискуссия все же принесла некоторую пользу, хотя сторонники теории течения явно проиграли. Великий математик А. Пуанкаре как-то сказал: «Нельзя получить представление о слоне, изучая его под микроскопом». Нельзя понять постулат изотропии, сосредоточив свое внимание только на теории течения с ее недостатками. А. А. Ильюшин понял, что для тех, кто считал постулат изотропии как «предложение разлагать вектор напряжений по осям естественного репера Френе в  $E_5$ », его следует сформулировать в более общем и полном виде. И он блестяще это сделал в своих учебниках-монографиях «Механика сплошной среды» [26], [27], [28]. В этой сокровищнице мировой науки мы читаем следующее [28], [29]: «Выраженный в виде формул (4.10), (4.11), где коэффициенты  $A_k, P_k$  зависят от параметров  $(s, \kappa_m, \varepsilon_0, \Theta, I_3, T, \beta)$  как функций  $t$ , основной постулат МСС для изотропных тел был назван *общим постулатом изотропии*, и он действительно полностью отражает свойства изотропной среды в физическом пространстве, т. к. ковариантен относительно преобразований системы координат и тензоров в теле. При ортогональных преобразованиях репера  $\{\hat{i}_k\}$  в  $E_5$  все параметры-аргументы  $(s, \kappa_m, \varepsilon_0, \Theta, I_3, T, \beta)$ , кроме  $I_3$ , являются инвариантами». «Преобразования поворота системы координат  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) в теле есть частный случай преобразования вращения в  $E_5$ . Ясно, что  $\Theta$ -образ инвариантен относительно этих преобразований, т. е. их внутренняя траектория в  $E_5$  сохраняется. Для других преобразований вращения и отражения образа процесса в  $E_5$  параметры  $\varepsilon_0, I_3$  изменяются и, следовательно, образ процесса неинвариантен и соответствует различным физическим процессам. Яснее ясного!

*Свойства некоторых сред определяются частным постулатом изотропии* (или просто постулатом изотропии), если коэффициенты  $A_k, P_k$  в (4.10), (4.11) не зависят от третьих инвариантов  $I_3$ , т. е. они ковариантны относительно преобразований репера  $\{\hat{i}_k\}$  в  $E_5$ . В этом случае не только физическое пространство, но и пространство  $E_5$  с достаточной степенью точности *изотропно*.  $\Theta$ -образ физического процесса сохраняется при всех вращениях и отражениях в  $E_5$ , если в соответствующих точках траекторий сохраняются значения параметров  $(\varepsilon_0, T, \beta)$  как функций  $t$ . *Опыты показывают*, что свойства очень многих сплошных изотропных сред в области сравнительно малых деформаций и многих — при больших деформациях определяются *постулатом изотропии*. Эта особенность настолько сильно упрощает экспериментальные исследования физических функционалов сред и законов, что становится возможным *прямой метод решения краевых задач МСС*» [27], [28]. Так мог написать не только прекрасный теоретик, но и изумительный практик-инженер.

А. А. Ильюшин создал в России свою знаменитую научную школу в Московском государственном университете, на кафедре теории упругости механико-математического факультета, которую он возглавлял в течении 56 лет до конца жизни. Но школа — это и сотрудники АН СССР и РФ, российской академии ракетных и артиллерийских наук, это коллективы научных школ в Твери, Туле, Нижнем Новгороде, Перми, Киеве, Ташкенте и др. городах России и СНГ. Есть список, составленный А. А. Ильюшиным, кого он сам включил в свою школу. С уходом А. А. Ильюшина из жизни многое изменилось в МГУ и РАН. Исчез научный совет РАН по проблемам прочности и пластичности, существенно изменился состав кафедры теории упругости, существенно ослабло ее влияние на развитие теории пластичности, и она, к сожалению, потеряла в этом направлении свою ведущую роль. Мы не обнаруживаем за последнее время значимых работ в области теории процессов А. А. Ильюшина при сложном нагружении; некоторые сотрудники поддерживают весьма сомнительное направление, якобы обобщающее теорию течения Кадашевича–Новожилова на сложное нагружение. Это направление явно противоречит идеям основателя нового научного направления в теории пластичности А. А. Ильюшина. Теория процессов получила значительное развитие в ряде научных

центров страны, в т. ч. в Тверском государственном техническом университете, Тульском государственном университете и др. Так, в Тверском техническом университете автором статьи, начиная с 90-х годов XX века, была разработана не только новая концепция устойчивости упругопластических систем, но и построена общая теория устойчивости оболочек и пластин за пределом упругости при сложном нагружении на основе теории процессов; разработана общая теория определяющих соотношений в развитие постулата изотропии, выдвинут постулат физической определенности для постулата изотропии, открыт закон сложной разгрузки в теории пластичности, построен ряд частных теорий пластических процессов. В Твери был разработан и действует автоматизированный испытательный комплекс СЧ-ЭВМ на сложное нагружение и открыт ряд новых закономерностей пластического деформирования материалов и др.

После совещания в Туле (1972 г.) по вопросам развития теории пластичности Д. Д. Ивлев, видимо, долго раздумывал о путях развития теории пластичности и изменил свое отношение к новому направлению в теории пластичности, хотя и никогда его не отрицал. Он отметил: «Попытки сформулировать общие соотношения связи между напряженным и деформированным состояниями предпринимались неоднократно, например Прагером, но эти результаты не получили достаточного развития. А. А. Ильюшиным сформулированы оригинальные подходы, открывающие реальные перспективы построения моделей сплошных сред. На этом пути выдающиеся результаты принадлежат также В. Г. Зубчанинову [7]. Ему удалось в развитие постулата изотропии построить математическую модель общих соотношений связи напряжений и деформаций, снизить на основе выдвинутого им постулата физической неопределенности их локальную размерность и получить “сверху” как частные случаи все формы известных теорий течения и процессов со своими конкретизированными функционалами процессов и течения» [10]. «Единственным продолжателем идей А. А. Ильюшина в этой области, теоретиком и экспериментатором является мой друг В. Г. Зубчанинов, который в Твери проводит важные эксперименты по сложному нагружению металлов». «Великий ученый-механик А. А. Ильюшин сформулировал постулат изотропии и тем самым определил новое направление развития механики сплошной среды. Ученик Алексея Антоновича, выдающийся ученый В. Г. Зубчанинов, продолжил дело учителя и в настоящее время является крупнейшим представителем механики теории процессов пластического деформирования сплошных сред и материалов».

Я глубоко благодарен Д. Д. Ивлеву за такую высокую оценку моей научной деятельности, за объективную оценку нового прорывного направления в теории пластичности, совершенного великим ученым-механиком, гигантом научных идей А. А. Ильюшиным. Принципиальность, объективность, логика мышления, краткое изложение своих мыслей меня всегда восхищало в Дюисе Даниловиче. Д. Д. Ивлев был выдающимся продолжателем идей своего учителя А. Ю. Ишлинского и других гигантов мысли в области идеальной пластичности. Д. Д. Ивлев внес неоценимый вклад в развитие и в решение фундаментальных проблем теории идеальной пластичности и теории предельных состояний, в решение множества важных прикладных задач.

Дюис Данилович Ивлев достойно прожил свою жизнь. Он был не только выдающимся и широко известным российским ученым, но и доброжелательным, умным, порядочным и принципиальным большим Человеком и другом.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. — М. : Физматлит, 2001. — 448 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред. Т. II. Общие вопросы / Д. Д. Ивлев. — М. : Физматлит, 2002. — 448 с.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. — М. : Наука, 1966. — 232 с.



- [4] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. — М. : Физматлит, 2001. — 704 с.
- [5] *Ивлев, Д. Д.* Идеи и результаты А. Ю. Ишлинского в теории пластичности / Д. Д. Ивлев // Проблемы механики : сб. статей / под ред. Д. М. Климова. — М. : Физматлит, 2003. — С. 30–38.
- [6] *Ишлинский, А. Ю.* Прикладные задачи механики. Кн. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел / А. Ю. Ишлинский. — М. : Наука, 1986. — 360 с.
- [7] *Зубчанинов, В. Г.* Механика процессов пластических сред / В. Г. Зубчанинов. — М. : Физматлит, 2010. — 532 с.
- [8] *Ильюшин, А. А.* Труды. Т. 2. Пластичность / А. А. Ильюшин. — М. : Физматлит, 2004. — 480 с.
- [9] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Часть 1. Уруго-пластические деформации / А. А. Ильюшин. — М. : Логос, 2004. — 376 с. (Репринтное воспроизведение издания 1948 г.).
- [10] *Ивлев, Д. Д.* Постулат изотропии А. А. Ильюшина и В. Г. Зубчанинова / Д. Д. Ивлев // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости. — Тверь : ТвГТУ, 2007. — С. 47–50.
- [11] *Ивлев, Д. Д.* Три дискуссии / Д. Д. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. — 2007. — № 1. — С. 157–163.
- [12] *Ильюшин, А. А.* Теория пластичности при простом нагружении тел, материал которых обладает упрочнением / А. А. Ильюшин // ПММ. — 1947. — № 2. — С. 293–296.
- [13] *Ильюшин, А. А.* О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред / А. А. Ильюшин // ПММ. — 1954. — Т. 18. — Вып. 6. — С. 641–666.
- [14] *Ленский, В. С.* Экспериментальная проверка законов изотропии и запаздывания при сложном нагружении / В. С. Ленский // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1958. — С. 15–24.
- [15] *Ленский, В. С.* Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении / В. С. Ленский // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1960. — № 5. — С. 93–100.
- [16] *Ивлев, Д. Д.* О постулате изотропии в теории пластичности / Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1960. — № 2. — С. 125–127.
- [17] *Ивлев, Д. Д.* О работе В. С. Ленского «Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении» / Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1960. — № 6. — С. 179–181.
- [18] *Ильюшин, А. А.* Вопросы общей теории пластичности / А. А. Ильюшин // ПММ. — 1960. — Т. 28. — С. 399–411.
- [19] *Новожилов, В. В.* Об одном направлении в теории пластичности / В. В. Новожилов // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1962. — № 1. — С. 205–208.
- [20] *Ильюшин, А. А.* Об основах общей математической теории пластичности / А. А. Ильюшин // Вопросы теории пластичности. — М. : Изд-во АН СССР, 1961. — С. 3–29.
- [21] *Жуков, А. М.* Некоторые особенности поведения металлов при уругопластическом деформировании / А. М. Жуков // Там же. — С. 30–57.
- [22] *Ленский, В. С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории уругопластических деформаций / В. С. Ленский // Там же. — С. 58–82.
- [23] *Ильюшин, А. А.* Еще о постулате изотропии / А. А. Ильюшин // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1962. — № 1. — С. 201–204.
- [24] *Новожилов, В. В.* И еще о постулате изотропии / В. В. Новожилов // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1962. — № 1. — С. 205–208.
- [25] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. — М. : Изд-во АН СССР, 1963. — 272 с.

- [26] *Ильюшин, А. А.* Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1971. — 248 с.
- [27] *Ильюшин, А. А.* Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. — Изд. 2-ое, перераб. и доп. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 287 с.
- [28] *Ильюшин, А. А.* Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. — Изд. 3-е, перераб. и доп. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 310 с.
- [29] *Зубчанинов, В. Г.* Математическая теория пластичности / В. Г. Зубчанинов. — Тверь : ТвГТУ, 2002. — 300 с.
- [30] *Ивлев, Д. Д.* Из воспоминаний. 2. До и после / Д. Д. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. — 2010. — № 1(7). — С. 139–145.
- [31] *Зубчанинов, В. Г.* Теория процессов, полная и неполная пластичность сплошных сред и постулат пластичности А. А. Ильюшина / В. Г. Зубчанинов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. — 2011. — № 1(9). — С. 38–60.
- [32] *Зубчанинов, В. Г.* Теория процессов, полная и неполная пластичность сплошных сред и постулат пластичности А. А. Ильюшина / В. Г. Зубчанинов // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформ. твердого тела. — Тверь : ТвГТУ, 2011. — С. 30–49.
- [33] *Зубчанинов, В. Г.* Постулат изотропии и закон сложной разгрузки сплошных сред / В. Г. Зубчанинов // Изв. РАН. МГТ. — 2011. — № 1. — С. 27–37.
- [34] *Зубчанинов, В. Г.* Теория процессов и постулат изотропии А. А. Ильюшина / В. Г. Зубчанинов // Упругость и неупругость. — М. : МГУ, 2011 — С. 73–79.
- [35] *Кадашевич, Ю. И.* Теория пластичности, учитывающая остаточные напряжения / Ю. И. Кадашевич, В. В. Новожилов // ПММ. — 1958. — Т. 22. — Вып. 1. — С. 78–89.
- [36] *Ишлинский, А. Ю.* Общая теория пластичности с линейным упрочнением / А. Ю. Ишлинский // Прикладные задачи механики. — М. : Наука, 1986. — С. 84–104.
- [37] *Прагер, В.* Теория идеальнопластических тел / В. Прагер, Ф. Г. Ходж. — М. : ИИЛ, 1956. — 398 с.

*Зубчанинов Владимир Георгиевич,*

*доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственной технической университет, г. Тверь*

*e-mail: kafsm@yandex.ru*

V. G. Zubchaninov

**THEORY OF IDEAL PLASTICITY, LIMIT CONDITIONS AND D. D. IVLEV**

*Tver State Technical University*

**Abstract.** Some scientific results and memories of creative activity of D. D. Ivlev are given.

**Keywords:** plasticity, elasticity, flowing, continuous solid, limit condition, complex loading, ideally plastic solid, full plasticity, processes, image of process, isotropy postulate.

**REFERENCES**

- [1] *Ivlev, D. D.* Mechanics of plastic environments. Vol. I. Theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. — M. : Fizmatlit, 2001. — 448 p.
- [2] *Ivlev, D. D.* Механика пластических сред. Vol. II. Общие вопросы / D. D. Ivlev. — M. : Fizmatlit, 2002. — 448 p.
- [3] *Ivlev, D. D.* Theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. — M. : Nauka, 1966. — 232 p.
- [4] *Ishlinsky, A. Yu.* Mathematical theory of plasticity / A. Yu. Ishlinsky, D. D. Ivlev. — M. : Fizmatlit, 2001. — 704 p.
- [5] *Ivlev, D. D.* Ideas and results A. Yu. Ishlinsky in plasticity theories / D. D. Ivlev // Mechanics problems : collection of articles under edition D. M. Klimova. — M. : Fizmatlit, 2003. — P. 30–38.
- [6] *Ishlinsky, A. Yu.* Applied problems of mechanics. Book 1. Mechanics viscously plastic and not quite elastic bodies / A. Yu. Ishlinsky. — M. : Nauka, 1986. — 360 p.
- [7] *Zubchaninov, V. G.* Mechanics of processes of plastic environments / V. G. Zubchaninov. — M. : Fizmatlit, 2010. — 532 p.
- [8] *Ilyushin, A. A.* Труды. Vol. 2. Plasticity / A. A. Ilyushin. — M. : Fizmatlit, 2004. — 480 p.
- [9] *Ilyushin, A. A.* Plasticity. Part 1. The elasto-plastic deformations / A. A. Ilyushin. — M. : Lagos, 2004. — 376 p. (Reprint reproduction of the edition 1948).
- [10] *Ivlev, D. D.* Isotropy postulate A. A. Ilyushina and V. G. Zubchaninova / D. D. Ivlev // Modern problems of durability, plasticity and stability. — Tver : TvSTU, 2007. — P. 47–50.
- [11] *Ivlev, D. D.* Three discussions / D. D. Ivlev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. — 2007. — № 1. — P. 157–163.
- [12] *Ilyushin, A. A.* The plasticity theory at the simple loading of the bodies which material possesses hardening / A. A. Ilyushin // Applied mathematics and mechanics. — 1947. — № 2. — P. 293–296.
- [13] *Ilyushin, A. A.* About communication between tension and small deformations in mechanics of continuous environments / A. A. Ilyushin // Applied mathematics and mechanics. — 1954. — Vol. 18. — Issue 6. — P. 641–666.
- [14] *Lensky, V. S.* Experimental verification of laws isotropy and delay at difficult loading / V. S. Lensky // AN news USSR. OTN. Mechanics and mechanical engineering. — 1958. — P. 15–24.
- [15] *Lensky, V. S.* Some new data on plasticity metals at difficult loading / V. S. Lensky // AN news USSR. OTN. Mechanics and mechanical engineering. — 1960. — № 5. — P. 93–100.
- [16] *Ivlev, D. D.* About an isotropy postulate in the theory plasticity / D. D. Ivlev // AN news USSR. OTN. Mechanics and mechanical engineering. — 1960. — № 2. — P. 125–127.
- [17] *Ivlev, D. D.* About V. S. Lensky Some work the new data on plasticity of metals at difficult loading / D. D. Ivlev // IAN news USSR. OTN. Mechanics and mechanical engineering. — 1960. — № 6. — P. 179–181.
- [18] *Ilyushin, A. A.* Questions of the general theory of plasticity / A. A. Ilyushin // Applied mathematics and mechanics. — 1960. — Vol. 28. — P. 399–411.

- [19] *Novozhilov, V. V.* About one direction in the theory plasticity / V. V. Novozhilov // AN news USSR. OTN. Mechanics and mechanical engineering. — 1962. — № 1. — P. 205–208.
- [20] *Ilyushin, A. A.* About bases of the general mathematical theory plasticity / A. A. Ilyushin // Theory questions plasticity. — M. : Publishing house of Academy of Sciences of the USSR, 1961. — P. 3–29.
- [21] *Zhukov, A. M.* Some features of behavior of metals at uprugoplastichesky deformation / A. M. Zhukov // In the same place. — P. 30–57.
- [22] *Lensky, V. S.* Experimental check of the main postulates of the general theory it is elastic plastic deformations / V. S. Lensky // In the same place. — P. 58–82.
- [23] *Ilyushin, A. A.* About an isotropy postulate / A. A. Ilyushin // AN news USSR. OTN. Mechanics and mechanical engineering. — 1962. — № 1. — P. 201–204.
- [24] *Novozhilov, V. V.* And about an isotropy postulate / V. V. Novozhilov // AN news USSR. OTN. Mechanics and mechanical engineering. — 1962. — № 1. — P. 205–208.
- [25] *Ilyushin, A. A.* Plasticity. Bases of the general mathematical theory / A. A. Ilyushin. — M. : Publishing house of Academy of Sciences of the USSR, 1963. — 272 p.
- [26] *Ilyushin, A. A.* Mechanics of the continuous environment / A. A. Ilyushin. — M. : Publishing house of the Moscow university, 1971. — 248 p.
- [27] *Ilyushin, A. A.* Mechanics of the continuous environment / A. A. Ilyushin. — The edition 2nd processed and added. — M. : Publishing house of the Moscow university, 1978. — 287 p.
- [28] *Ilyushin, A. A.* Mechanics of the continuous environment / A. A. Ilyushin. — The edition 3rd processed and added. — M. : Publishing house of the Moscow university, 1990. — 310 p.
- [29] *Zubchaninov, V. G.* Mathematical theory plasticity / V. G. Zubchaninov. — Tver : TvSTU, 2002. — 300 p.
- [30] *Ivlev, D. D.* From memoirs. 2 . Before and after / D. D. Ivlev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. — 2010. — № 1(7). — P. 139–145.
- [31] *Zubchaninov, V. G.* Theory of processes full and incomplete plasticity of continuous environments and postulate of plasticity A. A. Ilyushina / V. G. Zubchaninov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. — 2011. — № 1(9). — P. 38–60.
- [32] *Zubchaninov, V. G.* Theory of processes full and incomplete plasticity of continuous environments and plasticity postulate A. A. Ilyushina / V. G. Zubchaninov // Durability problems, plasticity and stability in mechanics деформ. Solid body. — Tver : TvSTU, 2011. — P. 30–49.
- [33] *Zubchaninov, V. G.* Postulate of an isotropy and law of the difficult unloadings of continuous environments / V. G. Zubchaninov // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. — 2011. — № 1. — P. 27–37.
- [34] *Zubchaninov, V. G.* Theory of processes and postulate isotropy A. A. Ilyushina / V. G. Zubchaninov // Elasticity and unelasticity. — M. : MSU, 2011 — P. 73–79.
- [35] *Kadashevich, Yu. I.* The theory of plasticity considering residual tension / Yu. I. Kadashevich, V. V. Novozhilov // Applied mathematics and mechanics. — 1958. — Vol. 22. — Issue 1. — P. 78–89.
- [36] *Ishlinsky, A. Yu.* The general theory of plasticity with the linear hardening / A. Yu. Ishlinsky // Applied tasks mechanics. — M. : Nauka, 1986. — P. 84–104.
- [37] *Prager, V.* Theory of ideally plastic bodies / V. Prager, F. G. Hodge. — M. : IIL, 1956. — 398 p.

*Zubchaninov, Vladimir Georgievich*

*Dr. of Eng. Sci., Professor of the department of materials resistance, theory of elasticity and plasticity, Tver State Technical University, Tver*

## К ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)

**Аннотация.** Предложенная в первой части формула суммирования применяется при решении краевых задач о распределении тепла в стержне конечной длины.

**Ключевые слова:** теплопроводность, стержень, ряды Фурье.

УДК: 539.1

**Введение.** Предложенный автором данной работы  $K_\alpha$ -формула суммирования рядов, где  $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , может служить весьма полезным инструментом исследования решений краевых задач. Чтобы показать аналитические преимущества  $K_\alpha$ -метода суммирования рядов, обратимся к известной задаче теплопроводности одномерного конечного стержня с заданным начальным распределением температур и граничными условиями на концах. Решение этой задачи записывается в виде ряда Фурье по собственным функциям соответствующей задачи Штурма-Лиувилля. Присутствие ряда затрудняет анализ и использование решения вне зависимости от формы записи, от того, включен ли ряд в функцию Грина или представлен в решении явным образом.

$K_\alpha$ -формула суммирования дает возможность определить функцию мгновенного точечного источника в явном виде для конечного одномерного стержня с теплоизолированной поверхностью с заданным начальным распределением температур и граничными условиями на концах, и тем самым ясно показать их влияние на процесс изменения температур. С его помощью становится возможным также без серьезных препятствий произвести переход к бесконечной длине стержня непосредственно в решении, полученном для конечного стержня, что позволяет отчетливо проследить переход от первой краевой задачи к задаче Коши.

### §10. Краевые задачи

**10.1.** Рассмотрим следующую задачу. Пусть длина стержня равна  $2l$ . Направим ось  $x$  вдоль стержня, а начало координат поместим в его середине, тогда абсциссы его торцевых сечений будут равны  $x=-l$  и  $x=l$ . Предположим, что боковая поверхность стержня теплоизолирована. В этом случае уравнение теплопроводности Фурье становится однородным:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}. \quad (10.1)$$

Задача состоит в решении уравнения теплопроводности (10.1) при граничных условиях

$$T(-l, t) = \gamma_1(t), \quad T(l, t) = \gamma_2(t) \quad (t \geq 0) \quad (10.2)$$

и начальном условии

$$T(x, 0) = f(x), \quad (10.3)$$

где  $\gamma_1(t)$ ,  $\gamma_2(t)$  – заданные функции, времени  $t$ .

Предполагается, что функция  $f(x)$  определена в промежутке  $[-l, +l]$  и удовлетворяет следующим условиям:

1°. Функция  $f(x)$  кусочно-непрерывна и имеет ограниченное изменение в любой части  $[a, b]$  промежутка  $[-l, +l]$ .

2°. Функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема в промежутке  $[-l, +l]$ .

Примем, что в каждой точке разрыва первого рода  $x = x_j \in ]-l, l[$  [функции  $f(x)$  правая часть формулы (10.3) заменяется полусуммой  $\frac{1}{2} [f(x_j + 0) + f(x_j - 0)]$ , т. е. значение функции  $f(x)$  в  $x_j$  равно среднему арифметическому правого и левого её пределов  $f(x)$  в  $x_j$ .

Решение ищем в виде ряда

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) \sin \left[ \frac{n\pi}{2l} (l+x) \right] \quad (|x| < l), \quad (10.4)$$

где

$$P_n(t) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l T(x, t) \sin \left[ \frac{n\pi}{2l} (l+x) \right] dx. \quad (10.5)$$

Интегрируя (10.5) по частям дважды, получим

$$P_n(t) = \frac{2}{n\pi} [T(-l, t) - (-1)^n T(l, t)] - \frac{4l}{n^2\pi^2} \int_{-l}^l \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sin \left[ \frac{n\pi}{2l} (l+x) \right] dx. \quad (10.6)$$

Так как  $T(x, t)$  удовлетворяет уравнению (10.1) и граничным условиям (10.2), то

$$P_n(t) = \frac{2}{n\pi} [\gamma_1(t) - (-1)^n \gamma_2(t)] - \frac{4l}{n^2\pi^2} \frac{1}{a} \int_{-l}^l \frac{\partial T}{\partial t} \sin \left[ \frac{n\pi}{2l} (l+x) \right] dx. \quad (10.7)$$

Дифференцируя теперь выражение (10.5) по  $t$ , получим

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \frac{\partial T}{\partial t} \sin \left[ \frac{n\pi}{2l} (l+x) \right] dx. \quad (10.8)$$

Исключая интеграл из равенств (10.7) и (10.8), приходим к линейному дифференциальному уравнению для определения коэффициентов  $P_n(t)$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} + \frac{n^2\pi^2 a}{4l^2} P_n(t) = \frac{n\pi a}{2l^2} [\gamma_1(t) - (-1)^n \gamma_2(t)].$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$P_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2} at} \left\{ C_n + \frac{n\pi a}{2l^2} \int_0^t e^{\frac{n^2\pi^2}{4l^2} a\tau} [\gamma_1(\tau) - (-1)^n \gamma_2(\tau)] d\tau \right\}, \quad (10.9)$$

откуда, очевидно,

$$C_n = P_n(0).$$

Чтобы удовлетворить начальному условию (10.3), потребуем выполнения равенства

$$T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(0) \sin \left[ \frac{n\pi}{2l} (l+x) \right] = f(x).$$

Подсчет коэффициентов Фурье для разложения  $f(x)$  по системе функций  $\left\{ \sin \frac{n\pi}{2l}(l+x) \right\}$  дает:

$$P_n(0) = C_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sin \left[ \frac{n\pi}{2l}(l+\xi) \right] d\xi. \quad (10.10)$$

С учетом формул (10.4), (10.9) и (10.10) решение задачи (10.1)–(10.3) представляется рядом

$$\begin{aligned} T(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}at} \int_{-l}^l f(\xi) \sin \left[ \frac{n\pi}{2l}(l+\xi) \right] d\xi + \right. \\ & \left. + \frac{n\pi a}{2l^2} e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}at} \int_0^t e^{\frac{n^2\pi^2}{4l^2}a\tau} [\gamma_1(\tau) - (-1)^n \gamma_2(\tau)] d\tau \right\} \times \sin \left[ \frac{n\pi}{2l}(l+x) \right]. \end{aligned} \quad (10.11)$$

( $|x| < l$ )

Рассмотрим частный случай, когда концы стержня поддерживаются при постоянных температурах, т. е.

$$\gamma_1(t) = u_1 \equiv const, \quad \gamma_2(t) = u_2 \equiv const. \quad (10.12)$$

Подставляя (10.12) в (10.11), получаем

$$\begin{aligned} T(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}at} \sin \left[ \frac{n\pi}{2l}(l+x) \right] \int_{-l}^l f(\xi) \sin \left[ \frac{n\pi}{2l}(l+\xi) \right] d\xi \right\} + \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[u_1 - (-1)^n u_2]}{n} \sin \left[ \frac{n\pi}{2l}(l+x) \right] + \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n u_2 - u_1]}{n} \sin \left[ \frac{n\pi}{2l}(l+x) \right] e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}at}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Теперь докажем, что функция  $T(x, t)$ , определяемая по формуле (10.13), является решением данной задачи.

С этой целью рассмотрим суммы

$$B_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left[ \frac{n\pi}{2l}(l+x) \right]}{n}, \quad B_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \left[ \frac{n\pi}{2l}(l+x) \right]}{n}$$

$(-l < x \leq l) \qquad \qquad \qquad (-l \leq x < l).$

Определим  $\phi(n)$  так:

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{\sin \left[ \frac{n\pi}{2l}(l+x) \right]}{n}, & \text{если } n = 1, 2, 3, \dots, \\ \frac{\pi}{2l}(l+x), & \text{если } n = 0. \end{cases}$$

Тогда функции  $B_1(x)$  и  $B_2(x)$  можно записать так:

$$\begin{aligned} B_1(x) &= -\frac{\pi}{2l}(l+x) + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n), \\ B_2(x) &= -\frac{\pi}{2l}(l+x) + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)(-1)^n. \end{aligned}$$

Применяя  $K_\alpha$ -метод суммирования, где  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , к рядам  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_1(n)$ , где  $\phi_1(n) = (-1)^n \phi(n) = \cos n\pi \phi(n)$ , получаем:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) &= \frac{\pi}{4l}(l+x) + \int_0^{\infty} \frac{\sin\left[\tau \frac{\pi}{2l}(l+x)\right]}{\tau} d\tau = \frac{\pi}{4l}(l+x) + \frac{\pi}{2}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_1(n) &= \frac{\pi}{4l}(l+x) + \int_0^{\infty} \frac{\cos \tau \pi \sin\left[\tau \frac{\pi}{2l}(l+x)\right]}{\tau} d\tau = \frac{\pi}{4l}(l+x) \\ &(|x| < l),\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$B_1(x) = \frac{\pi}{4l}(l-x), \quad B_2(x) = -\frac{\pi}{4l}(l+x) \quad (|x| < l). \quad (10.14)$$

Учитывая (10.14) в (10.13), имеем

$$\begin{aligned}T(x, t) &= \frac{u_1+u_2}{2} + \frac{u_2-u_1}{2l}x + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n u_2 - u_1]}{n} \sin\left[\frac{n\pi}{2l}(l+x)\right] e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}at} + \\ &+ \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}at} \sin\left[\frac{n\pi}{2l}(l+x)\right] \int_{-l}^l f(\xi) \sin\left[\frac{n\pi}{2l}(l+\xi)\right] d\xi.\end{aligned} \quad (10.15)$$

Из (10.15) следует:

если  $|x| < l$ ,  $t > 0$ , то функция  $T(x, t)$  удовлетворяет уравнению (10.1);  
если  $t > 0$ , то

$$T(x, t)|_{x=-l} = u_1, \quad T(x, t)|_{x=l} = u_2.$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Если  $|x| < l$ , то из (10.15) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} T(x, t) = \begin{cases} f(x), & \text{если функция } f(x) \text{ в точке } x \in ]-l, l[ \text{ непрерывна;} \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{если функция } f(x) \text{ имеет в точке} \\ x \in ]-l, l[ \text{ разрыв первого рода.} \end{cases} \quad (10.16)$$

Доказательство. Данное утверждение можно доказать двумя способами.

Первый способ (назовем этот способ традиционным).

Из (10.15), имеем

$$\begin{aligned}T(x, t)|_{t=0} &= \frac{u_1+u_2}{2} + \frac{u_2-u_1}{2l}x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n u_2 - u_1]}{n} \sin\left[\frac{n\pi}{2l}(l+x)\right] + \\ &+ \frac{1}{l} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}at} \sin\left[\frac{n\pi}{2l}(l+x)\right] \int_{-l}^l f(\xi) \sin\left[\frac{n\pi}{2l}(l+\xi)\right] d\xi \right\} \Bigg|_{t=0} \\ &(-l < x < l).\end{aligned} \quad (10.17)$$

Согласно формулам (10.14) и (10.17) находим

$$\begin{aligned}T(x, t)|_{t=0} &= \frac{1}{l} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}at} \sin\left[\frac{n\pi}{2l}(l+x)\right] \int_{-l}^l f(\xi) \sin\left[\frac{n\pi}{2l}(l+\xi)\right] d\xi \right\} \Bigg|_{t=0} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sum_{n=1}^m \sin\left[\frac{n\pi}{2l}(l+x)\right] \cdot \sin\left[\frac{n\pi}{2l}(l+\xi)\right] d\xi.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^m \sin\left[\frac{n\pi}{2l}(l+x)\right] \sin\left[\frac{n\pi}{2l}(l+\xi)\right] &= \frac{\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{4l}(\xi-x)\right)}{4 \sin\left(\frac{\pi}{4l}(\xi-x)\right)} - \\ &- \frac{\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{4l}(2l+\xi+x)\right)}{4 \sin\left(\frac{\pi}{4l}(2l+\xi+x)\right)},\end{aligned}$$

получаем



$$\begin{aligned}
 T(x, t) |_{t=0} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4l}(l+x)}^{\frac{\pi}{4l}(l-x)} f\left(x + \frac{4l}{\pi}\tau\right) \frac{\sin(2m+1)\tau}{\sin \tau} d\tau - \\
 &- \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4l}(l+x)}^{\frac{\pi}{4l}(3l+x)} f\left(\frac{4l}{\pi}\tau - x - 2l\right) \frac{\sin(2m+1)\tau}{\sin \tau} d\tau \\
 & \quad (-l < x < l).
 \end{aligned} \tag{10.18}$$

В силу первой основной леммы Римана-Лебега  $\forall x \in ]-l, l[$  находим

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4l}(l+x)}^{\frac{\pi}{4l}(3l+x)} f\left(\frac{4l}{\pi}\tau - x - 2l\right) \frac{\sin(2m+1)\tau}{\sin \tau} d\tau = 0.$$

Рассмотрим интеграл

$$M(x, m) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4l}(l+x)}^{\frac{\pi}{4l}(l-x)} f\left(x + \frac{4l}{\pi}\tau\right) \frac{\sin(2m+1)\tau}{\sin \tau} d\tau \quad (-l < x < l).$$

Пусть  $x = x_0$ , причем для определенности предположим, что  $0 \leq x_0 < l$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 M(x_0, m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4l}(l-x_0)} \left[ f\left(x_0 + \frac{4l}{\pi}\tau\right) + f\left(x_0 - \frac{4l}{\pi}\tau\right) \right] \frac{\sin(2m+1)\tau}{\sin \tau} d\tau + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4l}(l-x_0)}^{\frac{\pi}{4l}(l+x_0)} f\left(x_0 - \frac{4l}{\pi}\tau\right) \frac{\sin(2m+1)\tau}{\sin \tau} d\tau = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4l}(l-x_0)} g(x_0, \tau) p(\tau) \sin[(2m+1)\tau] d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4l}(l-x_0)} g(x_0, \tau) \frac{\sin(2m+1)\tau}{\tau} d\tau + \\
 & \quad + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4l}(l-x_0)}^{\frac{\pi}{4l}(l+x_0)} f\left(x_0 - \frac{4l}{\pi}\tau\right) \frac{\sin(2m+1)\tau}{\sin \tau} d\tau.
 \end{aligned} \tag{10.19}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 p(\tau) &= \frac{1}{\sin \tau} - \frac{1}{\tau}, \\
 g(x_0, \tau) &= f\left(x_0 + \frac{4l}{\pi}\tau\right) + f\left(x_0 - \frac{4l}{\pi}\tau\right).
 \end{aligned}$$

Функция  $p(\tau)$  в окрестности  $\tau = 0$  разлагается в степенной ряд по нечетным степеням. Следовательно, она регулярна и интегрируема в промежутке  $[0, \frac{\pi}{4l}(l-x_0)]$  в собственном смысле. Стало быть, функция  $g(x_0, \tau)p(\tau)$  в промежутке  $[0, \frac{\pi}{4l}(l-x_0)]$  имеет ограниченное изменение. Поскольку функция  $g(x_0, \tau)$  абсолютно интегрируема в промежутке  $[0, \frac{\pi}{4l}(l-x)]$ , а функция  $p(\tau)$  ограничена, то и произведение их  $g(x_0, \tau) \cdot p(\tau)$  будет функцией абсолютно интегрируемой в промежутке  $[0, \frac{\pi}{4l}(l-x_0)]$ .

Функция  $\sin \tau$  в промежутке  $[\frac{\pi}{4l}(l-x_0), \frac{\pi}{4l}(l+x_0)]$  регулярна и, сверх того,  $0 < \sin \tau < 1$ . Следовательно, функция  $f(x_0 - \frac{4l}{\pi}\tau)/(\sin \tau)$  в промежутке  $[\frac{\pi}{4l}(l-x_0), \frac{\pi}{4l}(l+x_0)]$  имеет ограниченное изменение и абсолютно интегрируема.

Стало быть, первый и последний интеграл в (10.19) в силу первой основной леммы Римана-Лебега стремятся к нулю при  $m \rightarrow \infty$ .

Функция  $g(x_0, \tau)$  в промежутке  $[0, \frac{\pi}{4l}(l-x_0)]$  имеет ограниченное изменение. Следовательно, она в этом промежутке представима в виде разности двух монотонно возрастающих и ограниченных функций, к каждой из которых в отдельности применима лемма Дирихле.

Таким образом, из (10.19) при  $K(x, \xi, \delta)$  по леммам Дирихле и Римана-Лебега находим

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(x_0, m) = \begin{cases} f(x_0), & \text{если функция } f(x) \text{ в точке } x_0 \in [0, l] \text{ непрерывна;} \\ \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}, & \text{если функция } f(x) \text{ имеет в точке} \\ x_0 \in [0, l] \text{ разрыв первого рода.} \end{cases}$$

Если точка  $x = -x_0$  ( $-l < -x_0 \leq 0$ ), то легко показать, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(-x_0, m) = \begin{cases} f(-x_0), & \text{если функция } f(x) \text{ в точке } x = -x_0 \in ]-l, 0] \text{ непрерывна;} \\ \frac{f(-x_0+0)+f(-x_0-0)}{2}, & \text{если функция } f(x) \text{ имеет в точке} \\ x = -x_0 \in ]-l, 0] \text{ разрыв первого рода.} \end{cases}$$

Стало быть,

$$T(x, t) |_{t=0} = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \text{ в точке } x \in ]-l, l] \text{ непрерывна;} \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{если } f(x) \text{ имеет в точке } x \in ]-l, l] \\ & \text{разрыв первого рода.} \end{cases}$$

Утверждение 1 первым способом доказано.

Второй способ доказательства утверждения 1.

Этот способ предложен В. Д. Кулиевым и опирается на разработанный им  $K_\alpha$ -метод суммирования рядов, где  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Изложение способа Кулиева начнем с вычисления двух интегралов, величины которых потребуются в дальнейшем:

$$\int_0^\infty e^{-A\tau^2} \cos(B_0\tau) d\tau \quad \int_0^\infty e^{-A\tau^2} \frac{\sin(B_0\tau)}{\tau} d\tau. \quad (10.20)$$

$(A > 0, B_0 > 0)$ .

Введем обозначения:

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-A\tau^2} \cos(B_0\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{A}} I_1,$$

где

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-\tau^2} \cos(B\tau) d\tau \quad \left( B = \frac{B_0}{\sqrt{A}} \right).$$

Продифференцируем интеграл  $I_1$  по параметру  $B$

$$\frac{dI_1}{dB} = - \int_0^\infty e^{-\tau^2} \tau \sin(B\tau) d\tau.$$

Дифференцирование законно, так как последний интеграл по признаку Вейерштрасса сходится равномерно.

Интегрируя по частям, получим затем:

$$\frac{dI_1}{dB} = - \frac{B}{2} \int_0^\infty e^{-\tau^2} \cos(B\tau) d\tau = - \frac{BI_1}{2}.$$

Таким образом, для определения  $I_1$  получилось простое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим

$$I_1 = C e^{-B^2/4}.$$

Значение постоянной  $C$  определяется сразу, поскольку при  $B = 0$  интеграл  $I_1$  переходит в интеграл Пуассона:

$$C = I_1|_{B=0} = \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Окончательно получаем, что интеграл  $I_0$  равен

$$\int_0^{\infty} e^{-A\tau^2} \cos(B_0\tau) d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{4A}} e^{-\frac{B_0^2}{4A}}. \quad (10.21)^1$$

Теперь вычислим второй интеграл (10.20):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-A\tau^2} \frac{\sin(B_0\tau)}{\tau} d\tau &= \int_0^{\infty} e^{-A\tau^2} \int_0^{B_0} \cos(\xi\tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_0^{B_0} \left( \int_0^{\infty} e^{-A\tau^2} \cdot \cos \xi\tau d\tau \right) d\xi = \int_0^{B_0} \sqrt{\frac{\pi}{4A}} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{4A}} d\xi = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{4A}} 2\sqrt{A} \int_0^{\frac{B_0}{2\sqrt{A}}} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\frac{B_0}{2\sqrt{A}}} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\pi}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{B_0}{2\sqrt{A}} \right). \end{aligned} \quad (10.21)^2$$

Изменение порядка интегрирования в проведенных преобразованиях является законным в силу теоремы Фубини.

Формулу (10.15) можно записать в виде

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{u_1+u_2}{2} + \frac{u_2-u_1}{2l}x - \frac{2}{\pi} \left\{ u_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[\frac{n\pi}{2l}(l+x)]}{n} e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}at} + \right. \\ &+ \left. u_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[\frac{n\pi}{2l}(l-x)]}{n} e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}at} \right\} + \int_{-l}^l f(\xi)G(x, \xi, t, l)d\xi \\ &(|x| \leq l), \end{aligned} \quad (10.22)$$

где  $G(x, \xi, t, l)$  – функция мгновенного точечного источника:

$$\begin{aligned} G(x, \xi, t, l) &= \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left[ \frac{n\pi}{2l}(l+x) \right] \sin \left[ \frac{n\pi}{2l}(l+\xi) \right] e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}at} = \\ &= \frac{1}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \cos \left[ \frac{n\pi}{2l}(\xi-x) \right] - \cos \left[ \frac{n\pi}{2l}(\xi+x+2l) \right] \right\} e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}at}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Из (10.23) следует, что

$$G(x, \xi, t, l)|_{x=\pm l} \equiv 0. \quad (10.24)$$

К суммированию ряда в (10.23) при  $|x| < l$  и  $t > 0$  применим  $K_\alpha$ -метод суммирования ( $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ).

Введем обозначения

$$\begin{aligned} v_1 = \xi - x, \quad v_2 = \xi + x + 2l, \quad \eta = \frac{\pi^2}{4l^2}at \\ (|x| < l, t > 0). \end{aligned} \quad (10.25)$$

Из (10.25) следуют оценки

$$\begin{aligned} |v_1| = |\xi - x| \leq |\xi| + |x| < 2l, \\ |v_2| = |\xi + x + 2l| \leq |\xi| + |x| + 2l < 4l, \quad \eta > 0. \end{aligned} \quad (10.26)$$

И стало быть,

$$\frac{1}{2l}|v_1| < 1, \quad \frac{1}{4l}|v_2| < 1. \quad (10.27)$$

С помощью  $K_\alpha$ -метода суммирования рядов ( $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ) с учетом (10.21<sup>1</sup>) из (10.23) находим

$$G(x, \xi, t, l) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} - e^{-\frac{(\xi+x+2l)^2}{4at}} \right] + G_0(x, \xi, t, l) \quad (10.28)$$

( $|x| < l, t > 0$ ).

Здесь

$$\begin{aligned} G_0(x, \xi, t, l) &= \frac{1}{2l} \int_0^\infty \frac{1}{ch(\rho\pi\sqrt{2}) - \cos(\rho\pi\sqrt{2})} \times \\ &\times \left\{ \left[ \cos\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{4l}\pi v_1\right) ch\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{4l}\pi v_1\right) - \cos\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{4l}\pi v_2\right) ch\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{4l}\pi v_2\right) \right] \times \right. \\ &\times \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\rho\sqrt{2} - \rho^2\eta\right) - e^{-\pi\rho\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \rho^2\eta\right) \right] + \\ &+ \left[ \sin\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{4l}\pi v_1\right) sh\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{4l}\pi v_1\right) - \sin\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{4l}\pi v_2\right) sh\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{4l}\pi v_2\right) \right] \times \\ &\times \left. \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\rho\sqrt{2} - \rho^2\eta\right) - e^{-\pi\rho\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \rho^2\eta\right) \right] \right\} d\rho \quad (10.29) \end{aligned}$$

( $|x| < l, t > 0$ ).

Исследуем функцию  $G_0(x, \xi, t, l)$ . Из (10.29), воспользовавшись подстановкой

$$\rho = \frac{y}{\sqrt{\eta}} = \frac{2ly}{\pi\sqrt{at}},$$

получаем

$$\begin{aligned} G_0(x, \xi, t, l) &= \frac{1}{\pi\sqrt{at}} \int_0^\infty \frac{1}{ch\left(\frac{2l\sqrt{2}}{\sqrt{at}}\right) - \cos\left(y\frac{2l\sqrt{2}}{\sqrt{at}}\right)} \times \\ &\times \left\{ \left[ \cos\left(y\frac{v_1}{\sqrt{2at}}\right) ch\left(y\frac{v_1}{\sqrt{2at}}\right) - \cos\left(y\frac{v_2}{\sqrt{2at}}\right) ch\left(y\frac{v_2}{\sqrt{2at}}\right) \right] \times \right. \\ &\times \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2l\sqrt{2}}{\sqrt{at}}y - y^2\right) - e^{-\frac{2l\sqrt{2}}{\sqrt{at}}y} \cos\left(\frac{\pi}{4} - y^2\right) \right] + \\ &+ \left[ \sin\left(y\frac{v_1}{\sqrt{2at}}\right) sh\left(y\frac{v_1}{\sqrt{2at}}\right) - \sin\left(y\frac{v_2}{\sqrt{2at}}\right) sh\left(y\frac{v_2}{\sqrt{2at}}\right) \right] \times \\ &\times \left. \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2l\sqrt{2}}{\sqrt{at}}y - y^2\right) - e^{-\frac{2l\sqrt{2}}{\sqrt{at}}y} \sin\left(\frac{\pi}{4} - y^2\right) \right] \right\} dy \quad (10.30) \end{aligned}$$

( $|x| < l, t > 0$ ).

Отсюда, с учетом (10.27), находим

$$\lim_{t \rightarrow +0} G_0(x, \xi, t, l) = 0 \quad (|x| < l). \quad (10.31)$$

Теперь определим суммы рядов:

$$\begin{aligned} D_0(x, l, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{n\pi}{2l}(l+x)\right]}{n} e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}at}, \\ D_1(x, l, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{n\pi}{2l}(l-x)\right]}{n} e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}at}. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Прежде всего заметим, что

$$D_0(x, l, t)|_{x=\pm l} = 0, \quad D_1(x, l, t)|_{x=\pm l} = 0, \quad (10.33)$$

$$D_1(x, l, t) = D_0(-x, l, t). \quad (10.34)$$

Теперь рассмотрим вспомогательный ряд

$$D_*^\pm(x, l, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[nv^\pm]}{n} e^{-n^2\eta} \quad (10.35)$$

( $|x| < l$ ).

Здесь

$$v^{\pm} = \frac{\pi}{2l}(l \pm x), \quad \eta = \frac{\pi^2}{2l^2}at$$

$$(|v^{\pm}| < \pi). \quad (10.36)$$

Очевидно,

$$D_0(x, l, t) = D_*^+(x, l, t), \quad D_1(x, l, t) = D_*^-(x, l, t). \quad (10.37)$$

Применив  $K_\alpha$ -метод суммирования рядов ( $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ) с учетом (10.21<sup>2</sup>) из (10.35) имеем:

$$D_*^{\pm}(x, l, t) = \frac{3}{4} \sin(v^{\pm}) e^{-\eta} + \frac{\pi}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{v^{\pm}}{2\sqrt{\eta}}\right) - \int_0^1 \frac{\sin(\tau v^{\pm})}{\tau} e^{-\tau^2 \eta} d\tau +$$

$$+ e^{-\eta} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\rho\sqrt{2}\eta}}{(1+\rho\sqrt{2}+\rho^2)[\operatorname{ch}(\rho\pi\sqrt{2})-\cos(\rho\pi\sqrt{2})]} \times$$

$$\times \left\{ M(\rho, v^{\pm}) \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\rho\sqrt{2} - \rho\sqrt{2}\eta - \rho^2\eta\right) - \right. \right. \quad (10.38)$$

$$\left. \left. - e^{-\pi\rho\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \rho\sqrt{2}\eta - \rho^2\eta\right) \right] + \right.$$

$$\left. + N(\rho, v^{\pm}) \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\rho\sqrt{2} - \rho\sqrt{2}\eta - \rho^2\eta\right) - e^{-\pi\rho\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \rho\sqrt{2}\eta - \rho^2\eta\right) \right] \right\} d\rho$$

$$(|v^{\pm}| < \pi).$$

Здесь

$$M(\rho, v^{\pm}) = \left(1 + \rho\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin\left[\left(1 + \rho\frac{\sqrt{2}}{2}\right)v^{\pm}\right] \operatorname{ch}\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{2}v^{\pm}\right) +$$

$$+ \rho\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left[\left(1 + \rho\frac{\sqrt{2}}{2}\right)v^{\pm}\right] \operatorname{sh}\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{2}v^{\pm}\right), \quad (10.39)$$

$$N(\rho, v^{\pm}) = \rho\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left[\left(1 + \rho\frac{\sqrt{2}}{2}\right)v^{\pm}\right] \operatorname{ch}\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{2}v^{\pm}\right) -$$

$$- \left(1 + \rho\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos\left[\left(1 + \rho\frac{\sqrt{2}}{2}\right)v^{\pm}\right] \operatorname{sh}\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{2}v^{\pm}\right).$$

Замечая, что

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+\rho\sqrt{2}+\rho^2)[\operatorname{ch}(\rho\pi\sqrt{2})-\cos(\rho\pi\sqrt{2})]} \times$$

$$\times \left\{ M(\rho, v^{\pm}) \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\rho\sqrt{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi\rho\sqrt{2}} \right] + \right.$$

$$\left. + N(\rho, v^{\pm}) \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\rho\sqrt{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi\rho\sqrt{2}} \right] \right\} d\rho =$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin(\tau v^{\pm})}{\tau} d\tau - \frac{3}{4} \sin(v^{\pm}) - \frac{1}{2}v^{\pm}$$

$$(|v^{\pm}| < \pi), \quad (10.40)$$

из (10.38) при  $t = 0$  находим

$$D_*^{\pm}(x, l, 0) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}v^{\pm}$$

$$(|x| < l). \quad (10.41)$$

С помощью формул (10.41), (10.37) и (10.32) получаем:

$$D_0(x, l, 0) = \frac{\pi}{4l}(l - x),$$

$$D_1(x, l, 0) = \frac{\pi}{4l}(l + x) \quad (|x| < l). \quad (10.42)$$

Таким образом, приходим к следующим выводам:

1°. Если  $|x| < l$  и  $t \rightarrow +0$ , то

$$\lim_{t \rightarrow +0} T(x, t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} d\xi, \quad (10.43)$$

что следует из формул (10.22), (10.28), (10.31), (10.32) и (10.42).

2°. Если  $x = -l$ , то

$$T(-l, t) = u_1,$$

если же  $x = l$ , то

$$T(l, t) = u_2.$$

Эти равенства следуют из формул (10.22), (10.24) и (10.33).

3°. Если  $|x| < l$  и  $t > 0$ , то функция  $T(x, t)$  определяется формулой

$$\begin{aligned} T(x, t) = & \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2l} x - \frac{2}{\pi} \{u_1 D_*^+(x, l, t) + u_2 D_*^-(x, l, t)\} + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-l}^l f(\xi) \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} - e^{-\frac{(\xi+x+2l)^2}{4at}} \right] d\xi + \int_{-l}^l f(\xi) G_0(x, \xi, t, l) d\xi. \end{aligned} \quad (10.44)$$

Здесь функция  $D_*^\pm(x, l, t)$  определяется формулой (10.38), а функция  $G_0(x, \xi, t, l)$  – формулой (10.29).

Остается доказать, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} T(x, t) = & \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} d\xi = \\ = & \begin{cases} f(x), & \text{если функция } f(x) \text{ в точке } x_0 \in [0, l[ \text{ непрерывна;} \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & \text{если функция } f(x) \text{ имеет в точке} \\ x_0 \in [0, l[ \text{ разрыв первого рода.} \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая:

- 1) функция  $f(x)$  – достаточно гладкая функция в промежутке  $[-l, l]$ ;
- 2) функция  $f(x)$  кусочно-непрерывна на  $[-l, l]$  и имеет ограниченное изменение на любом отрезке  $[a, b] \subset [-l, l]$ .

Во всех случаях считается, что  $f(x)$  абсолютно интегрируема в промежутке  $[-l, l]$ .

Рассмотрим первый случай.

Для доказательства равенства

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} d\xi = f(x)$$

используем метод Лапласа асимптотических оценок интеграла вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(\xi) e^{\lambda S(\xi)} d\xi, \quad (10.45)$$

называемых интегралами Лапласа. Здесь  $S(\xi)$  – вещественнозначная функция,  $\lambda$  – большой положительный параметр.

Функция  $f(\xi)$  может принимать комплексные значения. Будем считать для простоты, что  $I = [a, b]$  – конечный отрезок и что  $f(\xi)$  и  $S(\xi)$  – достаточно гладкие функции при  $\xi \in I$ . Тривиальный случай  $S(\xi) \equiv const$ ,  $f(\xi) \equiv 0$  в дальнейшем не рассматривается.

Пусть  $\max_{\xi \in I} S(\xi) = S(\xi_0)$  и достигается только в точке  $\xi_0$ . Тогда функция  $\exp[\lambda S(\xi)]$  имеет максимум в точке  $\xi_0$ , который тем резче, чем больше  $\lambda$ . Поэтому интеграл  $F(\lambda)$  можно приближенно заменить интегралом по малой окрестности точки максимума  $\xi_0$  и, очевидно, это приближение будет тем точнее, чем больше  $\lambda$ . Далее, в этой окрестности функции  $f(\xi)$ ,  $S(\xi)$  можно приближенно заменить по формуле Тейлора. В итоге получим интеграл, асимптотика которого легко вычисляется. Этот метод был предложен Лапласом.

Пусть  $a < \xi_0 < b$ . Тогда  $S'(\xi_0) = 0$ . Для простоты предположим, что  $S''(\xi_0) \neq 0$ . Тогда

$$F(\lambda) \approx \int_{\xi_0 - \varepsilon}^{\xi_0 + \varepsilon} f(\xi) e^{\lambda S(\xi)} d\xi,$$

где  $\varepsilon > 0$  – малое фиксированное число, и

$$f(\xi) \approx f(\xi_0), \quad S(\xi) \approx S(\xi_0) + \frac{(\xi - \xi_0)^2}{2} S''(\xi_0).$$

Следовательно,

$$F(\lambda) \approx f(\xi_0) e^{\lambda S(\xi_0)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{\lambda S''(\xi_0)}{2} t^2} dt.$$

Замечая, что  $S''(\xi_0) < 0$ , находим

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{\lambda S''(\xi_0)}{2} t^2} dt = \sqrt{\frac{-2\pi}{\lambda S''(\xi_0)}} \operatorname{erf} \left[ \sqrt{-\frac{\lambda}{2} S''(\xi_0)} \varepsilon \right] \approx \sqrt{\frac{-2\pi}{\lambda S''(\xi_0)}},$$

так как

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \operatorname{erf} \left[ \sqrt{\frac{-\lambda S''(\xi_0)}{2}} \varepsilon \right] = 1.$$

В итоге получаем асимптотическую формулу

$$F(\lambda) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda S''(\xi_0)}} f(\xi_0) e^{\lambda S(\xi_0)} \quad (\lambda \rightarrow +\infty). \quad (10.46)$$

Пусть теперь  $a = -l$ ,  $b = l$ ,  $\xi_0 = x \in ]-l, l[$ ,  $\lambda = \frac{1}{4at}$ ,  $S(\xi) = -(\xi - x)^2$ . Тогда  $S(x) = 0$ ,  $S'(x) = 0$ ;  $S''(x) = -2$ . При  $t \rightarrow +0$ , очевидно,  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Следовательно, из (10.43) в силу (10.45) и (10.46) находим

$$\lim_{t \rightarrow +0} T(x, t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi \cdot 4at}{2}} f(x) = f(x) \quad (-l < x < l).$$

Доказательство первого случая завершено.

Случай второй. Поскольку второй случай имеет большое значение, сформулируем его как утверждение.

Утверждение 2. Если  $f(x)$  кусочно-непрерывна, имеет ограниченное изменение в любой части  $[a, b]$  промежутка  $[-l, l]$  и абсолютно интегрируема в том же промежутке, то

$$\begin{aligned} & \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-\nu^2(\xi-x)^2} d\xi = \\ & = \begin{cases} f(x), & \text{если функция } f(x) \text{ непрерывна в точке } x \in ]-l, l[; \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{если функция } f(x) \text{ имеет в точке } x \in ]-l, l[ \\ & \text{разрыв первого рода.} \end{cases} \quad (10.47) \\ & \left( v = \frac{1}{2\sqrt{at}} \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть  $-l < x < l$ . Тогда

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-\nu^2(\xi-x)^2} d\xi = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \int_{-l}^{x-\varepsilon} f(\xi) e^{-\nu^2(\xi-x)^2} d\xi + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\xi) e^{-\nu^2(\xi-x)^2} d\xi + \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \int_{x+\varepsilon}^l f(\xi) e^{-\nu^2(\xi-x)^2} d\xi \right\}, \quad (10.48)$$

где  $\varepsilon > 0$  – малое фиксированное число.

Для любого  $\nu > 0$  и для всякого фиксированного положительного  $\varepsilon$  имеют место неравенства:

$$\left| \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \int_{-l}^{x-\varepsilon} f(\xi) e^{-\nu^2(\xi-x)^2} d\xi \right| \leq \frac{\nu \cdot e^{-\nu^2 \varepsilon^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-l}^{x-\varepsilon} |f(\xi)| d\xi, \\ \left| \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \int_{x+\varepsilon}^l f(\xi) e^{-\nu^2(\xi-x)^2} d\xi \right| \leq \frac{\nu \cdot e^{-\nu^2 \varepsilon^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{x+\varepsilon}^l |f(\xi)| d\xi, \quad (10.49)$$

так как  $|\xi - x| \geq \varepsilon > 0$ .

Поскольку функция  $f(x)$  в промежутке  $[-l, l]$  может иметь лишь конечное число точек разрыва первого рода и интегралы в правых частях (10.49) по условию существуют, то

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \int_{-l}^{x-\varepsilon} f(\xi) e^{-\nu^2(\xi-x)^2} d\xi = 0, \\ \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \int_{x+\varepsilon}^l f(\xi) e^{-\nu^2(\xi-x)^2} d\xi = 0. \quad (10.50)$$

Так как  $\varepsilon > 0$  – малое фиксированное число, то имеет место равенство

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\xi) e^{-\nu^2(\xi-x)^2} d\xi = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\xi) \frac{\sin \nu(\xi-x)}{\xi-x} d\xi = \\ = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon [f(x+\tau) + f(x-\tau)] \frac{\sin \nu\tau}{\tau} d\tau. \quad (10.51)$$

Функция  $g(\tau) = f(x+\tau) + f(x-\tau)$  по условию имеет ограниченное изменение в промежутке  $[0, \varepsilon]$  и, следовательно, она в этом промежутке представима в виде разности двух монотонно возрастающих и ограниченных функций, к каждой из которых в отдельности лемма Дирихле применима.

Таким образом, согласно формулам (10.48), (10.50) и (10.51), в силу леммы Дирихле, приходим к (10.47).

Замечание. Формулу (2.19.51) можно представить в виде

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\xi) e^{-\nu^2(\xi-x)^2} d\xi = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon\nu} [f(x + \frac{t}{\nu}) + f(x - \frac{t}{\nu})] e^{-t^2} dt = \\ = \begin{cases} f(x), & \text{если функция } f(x) \text{ непрерывна в точке } x \in ]-l, l[; \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{если функция } f(x) \text{ имеет в точке } x \in ]-l, l[ \\ & \text{разрыв первого рода.} \end{cases} \quad (10.52)$$

Отсюда следует, что переход от одного ядра к другому в (10.51) всегда имеет место.

Утверждение 2 доказано. Тем самым доказано и утверждение 1 способом Кулиева.

Рассмотрим два частных случая (10.44).

Случай 1. Пусть:

1°. В формуле (??)  $u_1 = 0$  и  $u_2 = 0$ .

2°. Функция  $f(x)$  – кусочно-непрерывна и имеет ограниченное изменение в любой конечной части  $[a, b]$  бесконечного промежутка  $]-\infty, +\infty[$ .



3°. Функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема в промежутке  $]-\infty, +\infty]$ , т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi \leq Const. \quad (10.53)$$

Тогда из (10.44) при  $l \rightarrow +\infty$  следует, что в любой точке  $x \in ]-\infty, +\infty[$  и в любой момент времени  $t > 0$  температура  $T(x, t)$  определяется формулой Пуассона

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} d\xi. \quad (10.54)$$

Действительно, формулу (10.44) с учетом (10.28) можно записать так:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-l}^l f(\xi) \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} - e^{-\frac{(\xi+x+2l)^2}{4at}} \right] d\xi + \\ &+ l \int_{-1}^1 f(\xi l) G_0(x, \xi, t, l) d\xi \\ &(t > 0, |x| < l). \end{aligned} \quad (10.55)$$

Здесь

$$\begin{aligned} lG_0(x, \xi, t, l) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{ch(\rho\pi\sqrt{2}) - \cos(\rho\pi\sqrt{2})} \left\{ \left[ \cos\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{4}\pi v_1^*\right) ch\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{4}\pi v_1^*\right) - \right. \right. \\ &- \cos\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{4}\pi v_2^*\right) ch\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{4}\pi v_2^*\right) \left. \right] \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\rho\sqrt{2} - \rho^2\eta\right) - e^{-\pi\rho\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \rho^2\eta\right) \right] + \\ &+ \left[ \sin\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{4}\pi v_1^*\right) sh\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{4}\pi v_1^*\right) - \sin\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{4}\pi v_2^*\right) sh\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{4}\pi v_2^*\right) \right] \times \\ &\times \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\rho\sqrt{2} - \rho^2\eta\right) - e^{-\pi\rho\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \rho^2\eta\right) \right] \left. \right\} d\rho \\ &\left( v_1^* = \xi - \frac{x}{l}, v_2^* = \xi + \frac{x}{l} + 2, \eta = \frac{\pi^2}{4l^2} at \right). \end{aligned}$$

Из (10.53) следует, что при  $|\xi| \rightarrow \infty$   $f(\xi) \rightarrow 0$ . Поэтому из (10.55) при  $l \rightarrow +\infty$  приходим к формуле Пуассона (10.54).

Случай 2. Пусть  $f(x) = T_0 \equiv const$ . Тогда из (10.44) получаем

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{u_1+u_2}{2} + \frac{u_2-u_1}{2l} x - \frac{2}{\pi} [u_1 D_*^+(x, l, t) + u_2 D_*^-(x, l, t)] + \\ &+ \frac{2T_0}{\pi} [D_*^+(x, l, t) + D_*^-(x, l, t)] \\ &(|x| < l). \end{aligned} \quad (10.56)$$

Отсюда следует: если  $u_1 = u_2 = T_0$ , то

$$T(x, t) = u_1 \quad (|x| \leq l),$$

что и следовало ожидать, так как поверхность стержня считается теплоизолированной.

**Замечание.** Пусть функция  $f(x)$  в формуле (10.54) равна нулю, если  $x \geq l + \varepsilon$  и  $x \leq -l - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – сколь угодно малая величина. Тогда из (10.54) получаем

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} d\xi. \quad (10.54)^1$$

В этом случае можно показать, что оставшийся единственный компонент вектора смещения  $u(x, t)$  определяется формулой

$$u(x, t) = -\alpha a \int_t^{\infty} \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} d\tau, \quad (10.54)^2$$

а деформация – формулой

$$\varepsilon_x(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \alpha T(x, t). \quad (10.54)^3$$

Отсюда следует, что напряжения  $\sigma_x(x, t) \equiv 0$ .

Из (10.54<sup>2</sup>) и (10.54<sup>3</sup>) при  $t \rightarrow +0$ , находим

$$u(x, 0) = -\frac{\alpha}{2} \int_{-l}^l \frac{\xi-x}{|\xi-x|} f(\xi) d\xi = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi, & \text{если } x > l, \\ -\frac{\alpha}{2} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi, & \text{если } x < -l, \\ \frac{\alpha}{2} \left[ \int_{-l}^{x-0} f(\xi) d\xi - \int_{x+0}^l f(\xi) d\xi \right], & \text{если } |x| < l, \end{cases} \quad (10.54)^4$$

$$\varepsilon_x(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha}{2\pi at} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} d\xi = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \text{ непрерывна в точке } x \in ]-l, l[; \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{если } f(x) \text{ имеет в точке } x \in ]-l, l[ \\ & \text{разрыв первого рода.} \end{cases} \quad (10.54)^5$$

Эта же формула получается и из (10.54<sup>4</sup>), так как  $\varepsilon_x(x, 0) = \partial u(x, 0)/\partial x$ .

Пусть  $f(x) = T_0 \equiv \text{const}$ . Тогда

$$T(x, t) = \frac{T_0}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{l+x}{2\sqrt{at}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{l-x}{2\sqrt{at}} \right) \right],$$

$$u(x, 0) = -\frac{\alpha T_0}{2} \int_{-l}^l \frac{\xi-x}{|\xi-x|} d\xi = \begin{cases} \alpha T_0 x, & \text{если } |x| < l, \\ \alpha T_0 l, & \text{если } x > l, \\ -\alpha T_0 l, & \text{если } x < -l; \end{cases} \quad (10.54)^6$$

$$\varepsilon_x(x, 0) = \alpha T_0 F(x),$$

$$F(x) = H(l+x) + H(l-x) - 1.$$

Функцию  $F(x)$  можно регуляризовать по известной формуле:

$$F_h(x) = C_h \int_{|\xi-x|<h} e^{-\frac{h^2}{h^2-(\xi-x)^2}} F(\xi) d\xi,$$

$$C_h = \frac{1}{2h} \left[ \int_0^1 e^{-\frac{1}{1-u^2}} du \right]^{-1}. \quad (10.54)^7$$

Функция  $F_h(x)$  непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка в  $E_1$  ( $E_1: -\infty < x < \infty$ ). Проводя регуляризацию начального распределения температуры получаем

$$\varepsilon_x(x, 0) = \alpha T_0 F_h(x),$$

$$F_h(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } |x| < l, \\ 0 & \text{для } |x| \geq l. \end{cases}$$

Отсюда и из (10.54<sup>5</sup>) следует, что если начальное распределение температуры  $f(x)$  в стержне непрерывна на отрезке  $[-l, l]$  и обращается в нуль при  $|x| \geq l$ , то деформация  $\varepsilon_x(x, 0)$  не имеет точек разрыва, т. е.

$$\varepsilon_x(x, 0) = \begin{cases} \alpha f(x), & \text{если } [-l, l], \\ 0, & \text{если } |x| \geq l. \end{cases}$$

Рассмотрим два интересных примера.

Первый пример. Пусть

$$T(x, 0) = f(x) = \begin{cases} T_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right), & \text{если } 0 \leq x \leq l, \\ T_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right), & \text{если } -l \leq x \leq 0, \\ 0, & \text{если } |x| \geq l \end{cases} \quad (10.54)^8$$

(см. рис. 8).

Тогда формула (10.54<sup>1</sup>) дает

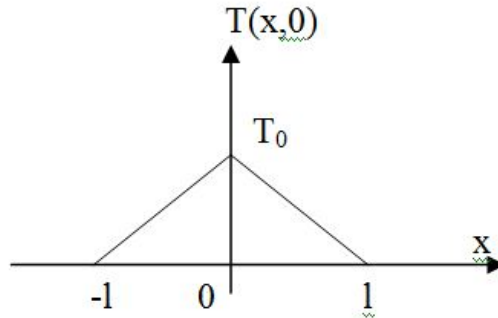


Рис. 1

$$T(x, t) = \frac{T_0}{2\sqrt{\pi at}} \left\{ \int_{-l}^0 \left(1 + \frac{\xi}{l}\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} d\xi + \int_0^l \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} d\xi \right\},$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} T(x, t) = & \frac{T_0}{2} \left\{ \left(1 + \frac{x}{l}\right) \operatorname{erf} \left( \frac{l+x}{2\sqrt{at}} \right) - \right. \\ & \left. - 2\frac{x}{l} \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) + \left(1 - \frac{x}{l}\right) \operatorname{erf} \left( \frac{l-x}{2\sqrt{at}} \right) \right\} + \\ & + T_0 \frac{\sqrt{2}}{l} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left\{ e^{-\frac{(l+x)^2}{4at}} - 2e^{-\frac{x^2}{4at}} + e^{-\frac{(l-x)^2}{4at}} \right\}. \end{aligned} \quad (10.54)^9$$

Функция  $T(x, t)$  обладает свойствами:

1°. Функция  $T(x, t)$  является четной функцией от  $x$ .

2°. Функция  $T(x, t)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  в любой точке  $x \in E_1$ .

3°. Функция  $T(x, t)$  стремится к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Любопытно выяснить, как понижается температура в точке  $x = 0$  с течением времени  $t$ .

Имеем:

$$T(0, t) = T_0 \left\{ \operatorname{erf} \left( \frac{l}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{2\sqrt{at}}{l\sqrt{\pi}} \left( 1 - e^{-\frac{l^2}{4at}} \right) \right\} = D(\xi),$$

$$D(\xi) = T_0 \left\{ \operatorname{erf}(\xi) - \frac{1 - e^{-\xi^2}}{\xi\sqrt{\pi}} \right\} \\ \left( \xi = \frac{l}{2\sqrt{at}} \right).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} D(\xi) = 0. \\ \frac{dD(\xi)}{d\xi} = T_0 \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} - \frac{2\xi^2 e^{-\xi^2} - 1 + e^{-\xi^2}}{\xi^2 \sqrt{\pi}} \right\} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \frac{1 - e^{-\xi^2}}{\xi^2}.$$

Следовательно,

$$D(\xi) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \frac{1 - e^{-\eta^2}}{\eta^2} d\eta.$$

Стало быть,

$$T(0, t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{2\sqrt{at}}} \frac{1 - e^{-\eta^2}}{\eta^2} d\eta,$$

откуда замечая, что

$$\frac{1 - e^{-\eta^2}}{\eta^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\eta^{2k-2}}{k!},$$

для больших значениях  $t$  получаем

$$T(0, t) \approx \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{2\sqrt{at}}} d\eta = \frac{T_0 l}{2\sqrt{\pi at}}.$$

Для данной задачи Коши (10.54<sup>8</sup>) смещение  $u(x, t)$  и деформация  $\varepsilon_x(x, t)$  определяются формулами (10.54<sup>2</sup>) и (10.54<sup>3</sup>), а температура  $T(x, t)$  – формулой (10.54<sup>9</sup>).

Из (10.54<sup>4</sup>) с учетом (10.54<sup>8</sup>) имеем:

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{\alpha T_0}{2} l, & \text{если } x \geq l, \\ \alpha T_0 \left( x - \frac{x^2}{2l} \right), & \text{если } 0 \leq x \leq l, \\ -\frac{\alpha T_0}{2} l, & \text{если } x \leq -l, \\ \alpha T_0 \left( x + \frac{x^2}{2l} \right), & \text{если } -l \leq x \leq 0; \end{cases} \\ \varepsilon_x(x, 0) = \begin{cases} \alpha T_0 \left( 1 - \frac{x}{l} \right), & \text{если } 0 \leq x \leq l, \\ 0, & \text{если } x \geq l, \\ \alpha T_0 \left( 1 + \frac{x}{l} \right), & \text{если } -l \leq x \leq 0, \\ 0, & \text{если } x \leq -l. \end{cases}$$

Отсюда следует, что смещение  $u(x, 0)$  и деформация  $\varepsilon_x(x, 0)$  в точках  $x = l$  и  $x = -l$  не имеют разрывы.

Второй пример.

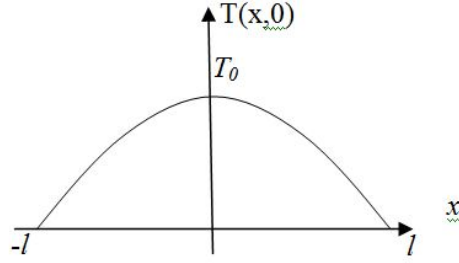


Рис. 2

Пусть

$$T(x, 0) = f(x) = \begin{cases} T_0 \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right), & \text{если } |x| \leq l, \\ 0, & \text{если } |x| \geq l \end{cases} \quad (10.54)^{10}$$

(см. рис. 9).

Тогда по формуле (10.54<sup>1</sup>) находим

$$T(x, t) = \frac{T_0}{2} \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{l+x}{2\sqrt{at}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{l-x}{2\sqrt{at}} \right) \right] + \frac{2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi}l^2} \left[ (l+x)e^{-\frac{(l-x)^2}{4at}} + (l-x)e^{-\frac{(l+x)^2}{4at}} \right] - \frac{2at}{l^2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{l+x}{2\sqrt{at}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{l-x}{2\sqrt{at}} \right) \right] \right\}. \quad (10.54)^{11}$$

Функция  $T(x, t)$  обладает свойствами:

- 1°. Функция  $T(x, t)$  является четной функцией от  $x$ .
- 2°. Функция  $T(x, t)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  в любой точке  $x \in E_1$ .
- 3°. Функция  $T(x, t)$  стремится к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Теперь выясним, как понижается температура в точке  $x = 0$  с течением времени  $t$ . Имеем:

$$T(0, t) = T_0 \left\{ \operatorname{erf} \left( \frac{l}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{2\sqrt{at}}{l\sqrt{\pi}} e^{-\frac{l^2}{4at}} - \frac{2at}{l^2} \operatorname{erf} \left( \frac{l}{2\sqrt{at}} \right) \right\} = D(\xi),$$

$$D(\xi) = T_0 \left\{ \operatorname{erf}(\xi) + \frac{e^{-\xi^2}}{\xi\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2\xi^2} \operatorname{erf}(\xi) \right\}$$

$$\left( \xi = \frac{l}{2\sqrt{at}} \right).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} D(\xi) = 0,$$

$$\frac{dD(\xi)}{d\xi} = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\xi) - \xi e^{-\xi^2}}{\xi^3} \right].$$

Следовательно,

$$D(\xi) = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\eta) - \eta e^{-\eta^2}}{\eta^3} d\eta.$$

Стало быть,

$$T(0, t) = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{2\sqrt{at}}} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\eta) - \eta e^{-\eta^2}}{\eta^3} d\eta,$$

откуда, замечая, что

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\eta) - \eta e^{-\eta^2} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} m \eta^{2m+1}}{m!(2m+1)},$$

для больших значений  $t$  получаем

$$T(0, t) \approx \frac{4T_0}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{2\sqrt{at}}} d\eta = \frac{2T_0 l}{3\sqrt{\pi at}}.$$

Для данной задачи Коши (10.54<sup>10</sup>) смещение  $u(x, t)$  и деформация  $\varepsilon_x(x, t)$  определяются формулами (10.54<sup>2</sup>) и (10.54<sup>3</sup>), а температура  $T(x, t)$  – формулой (10.54<sup>11</sup>).

Из (10.54<sup>4</sup>) с учетом (10.54<sup>10</sup>) имеем:

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2\alpha l}{3}, & \text{если } x \geq l, \\ \alpha \left( x - \frac{x^3}{3l^2} \right), & \text{если } |x| \leq l, \\ -\frac{2\alpha l}{3}, & \text{если } x \leq -l, \end{cases}$$

следовательно,

$$\varepsilon_x(x, 0) = \begin{cases} \alpha \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right), & \text{если } |x| \leq l, \\ 0, & \text{если } |x| \geq l. \end{cases}$$

Эти результаты еще раз показывают то, что если начальное распределение температуры  $f(x)$  в стержне непрерывна на отрезке  $[-l, l]$  и обращается в нуль при  $|x| \geq l$ , то смещение  $u(x, t)$ , деформация  $\varepsilon_x(x, 0)$  для любого  $t \geq 0$  не имеют точек разрыва и определяются формулами:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} d\xi, \\ u(x, t) &= -\alpha a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} d\tau, \\ \varepsilon_x(x, t) &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \alpha T(x, t), \\ u(x, 0) &= \begin{cases} \frac{\alpha}{2} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi, & \text{если } x \geq l, \\ -\frac{\alpha}{2} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi, & \text{если } x \leq -l, \\ \frac{\alpha}{2} \left[ \int_{-l}^x f(\xi) d\xi - \int_x^l f(\xi) d\xi \right], & \text{если } |x| \leq l, \end{cases} \\ \varepsilon_x(x, 0) &= \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} \begin{cases} \alpha f(x), & \text{если } |x| \leq l, \\ 0, & \text{если } |x| \geq l. \end{cases} \end{aligned}$$

Замечание закончено.

Теперь вернемся к исходной задаче (10.1)–(10.3). Решение этой задачи определяется формулой (10.11). Применяя  $K_\alpha$ -метод суммирования рядов ( $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ) к выражению (10.11), получаем

$$\begin{aligned}
 T(x, t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{v^+}{2\sqrt{at}}}^{\infty} \gamma_1 \left[ t - \frac{(v^+)^2}{4au^2} \right] e^{-u^2} du + \\
 &+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{v^-}{2\sqrt{at}}}^{\infty} \gamma_2 \left[ t - \frac{(v^-)^2}{4au^2} \right] e^{-u^2} du + \int_0^t \gamma_1(\tau) G^+(x, \tau) d\tau + \\
 &+ \int_0^t \gamma_2(\tau) G^-(x, \tau) d\tau + \int_{-l}^l G(x, \xi, t, l) d\xi \\
 &(|x| < l, t > 0, t - \tau > 0).
 \end{aligned} \tag{10.57}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 G^{\pm}(x, \tau) &= \frac{a\sqrt{2}}{8\pi l^2} \int_0^{\infty} \frac{\xi}{ch\xi - \cos\xi} \left\{ \left[ \sin\left(\frac{\xi}{2} b_{\pm}\right) ch\left(\frac{\xi}{2} b_{\pm}\right) - \right. \right. \\
 &- \left. \cos\left(\frac{\xi}{2} b_{\pm}\right) ch\left(\frac{\xi}{2} b_{\pm}\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \xi - \frac{\xi^2}{8} \eta_0\right) - e^{-\xi} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi^2}{8} \eta_0\right) \right] - \\
 &- \left[ \sin\left(\frac{\xi}{2} b_{\pm}\right) ch\left(\frac{\xi}{2} b_{\pm}\right) + \cos\left(\frac{\xi}{2} b_{\pm}\right) sh\left(\frac{\xi}{2} b_{\pm}\right) \right] \times \\
 &\times \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \xi - \frac{\xi^2}{8} \eta_0\right) - e^{-\xi} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi^2}{8} \eta_0\right) \right] \Big\} d\xi, \\
 v_{\pm} &= l \pm x, b_{\pm} = \frac{v_{\pm}}{2l}, \eta_0 = \frac{a}{l^2}(t - \tau).
 \end{aligned} \tag{10.58}$$

Функция  $G(x, \xi, t, l)$  в выражении (10.57) определяется формулой (10.28), если  $|x| < l$  и  $t > 0$ ; если же  $x = \pm l$ , то она тождественно равна нулю  $\forall t \geq 0$ . Интеграл в (10.58) существует при  $|x| \leq l$ . Кроме того, очевидно, что

$$\begin{aligned}
 G^+(-l, \tau) &= 0, \quad G^-(l, \tau) = 0, \\
 G^+(l, \tau) &= G^-(-l, \tau) = \frac{a\sqrt{2}}{8\pi l^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{ch\xi - \cos\xi} \left\{ \left[ \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) ch\left(\frac{\xi}{2}\right) - \right. \right. \\
 &- \left. \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) sh\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \xi - \frac{\xi^2}{8} \eta_0\right) - e^{-\xi} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi^2}{8} \eta_0\right) \right] - \\
 &- \left[ \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) ch\left(\frac{\xi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) sh\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \times \\
 &\times \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \xi - \frac{\xi^2}{8} \eta_0\right) - e^{-\xi} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi^2}{8} \eta_0\right) \right] \Big\} d\xi.
 \end{aligned} \tag{10.59}$$

Вычисляя интеграл в (10.59), находим

$$\begin{aligned}
 G^+(l, \tau) &= G^-(-l, \tau) = -\frac{l}{\sqrt{\pi a}} \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{l^2}{a(t-\tau)}} \\
 &(t > 0).
 \end{aligned} \tag{10.60}$$

Из (10.57) с учетом (10.24), (10.59), (10.60), (10.28), (10.31) и (10.47) имеем:

1°. Если  $x = -l$  и  $t > 0$ ,  $T(-l, t) = \gamma_1(t)$ .

2°. Если  $x = l$  и  $t > 0$ ,  $T(l, t) = \gamma_2(t)$ .

3°. Если  $|x| < l$  и  $t \rightarrow +0$ , то

$$\begin{aligned}
 T(x, t) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} d\xi = \\
 &= \begin{cases} f(x), & \text{если функция } f(x) \text{ в точке } x \in ]-l, l[ \text{ непрерывна;} \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{если функция } f(x) \text{ имеет в точке } x \in ]-l, l[ \\ & \text{разрыв первого рода.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

**10.2.** Рассмотрим следующую задачу. Пусть длина стержня равна  $l$ . Направим ось  $x$  вдоль стержня так, чтобы его торцевые сечения заняли положения  $x = 0$  и  $x = l$ . Боковую поверхность стержня будем считать теплоизолированной. Требуется найти решение уравнение теплопроводности (10.1) при граничных условиях

$$T(0, t) = \Psi_1(t), \quad T(l, t) = \Psi_2(t) \quad (t \geq 0) \quad (10.61)$$

и начальном условии

$$T(x, 0) = f(x), \quad (10.62)$$

где  $\Psi_1(t)$ ,  $\Psi_2(t)$  – некоторые заданные функции. Предполагается, что функция  $f(x)$  определена в промежутке  $[0, l]$  и удовлетворяет на нем тем же условиям, которые были сформулированы в пункте 10.1 для стержня в промежутке  $[-l, l]$ .

Решение данной задачи известно и имеет вид (см., например, [1]):

$$T(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \int_0^l f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right) d\xi \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a t}{l^2}} \right\} + \frac{2\pi a}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^t e^{-\frac{n^2\pi^2 a}{l^2}(t-\tau)} [\Psi_1(\tau) - (-1)^n \Psi_2(\tau)] d\tau \right\}. \quad (10.63)$$

Формулу (10.63) можно записать так:

$$T(x, t) = \int_0^l f(\xi) G_1(x, \xi, t, l) d\xi + \int_0^t \Psi_1(\tau) G_2(x, \tau, t, l) d\tau + \int_0^t \Psi_2(\tau) G_3(x, \tau, t, l) d\tau. \quad (10.64)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_1(x, \xi, t, l) &= \frac{1}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \cos\left[\frac{n\pi}{l}(\xi - x)\right] - \cos\left[\frac{n\pi}{l}(\xi + x)\right] \right\} e^{-\frac{n^2\pi^2 a t}{l^2}}, \\ G_2(x, \tau, t, l) &= \frac{2\pi a}{l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a}{l^2}(t-\tau)} \right], \\ G_3(x, \tau, t, l) &= \frac{2\pi a}{l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ n \sin\left(\frac{n\pi}{l}(l - x)\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a}{l^2}(t-\tau)} \right]. \end{aligned} \quad (10.65)$$

Применяя  $K_\alpha$ -метод суммирования рядов ( $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ) к рядам в формуле (10.65), получаем:

$$G_1(0, \xi, t, l) = 0, \quad G_1(l, \xi, t, l) = 0, \quad (10.66a)$$

$$G_1(x, \xi, t, l) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a t}} \right] + G_{01}(x, \xi, t, l),$$

$$\begin{aligned} G_{01}(x, \xi, t, l) &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi l} \int_0^\infty \frac{1}{ch \mathfrak{S} - \cos \mathfrak{S}} \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\mathfrak{S}}{2l} v_1^*\right) ch\left(\frac{\mathfrak{S}}{2l} v_1^*\right) - \right. \right. \\ &- \left. \cos\left(\frac{\mathfrak{S}}{2l} v_2^*\right) ch\left(\frac{\mathfrak{S}}{2l} v_2^*\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \mathfrak{S} - \frac{\mathfrak{S}^2}{2l^2} at\right) - e^{-\mathfrak{S}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\mathfrak{S}^2}{2l^2} at\right) \right] + \\ &+ \left[ \sin\left(\frac{\mathfrak{S}}{2l} v_1^*\right) sh\left(\frac{\mathfrak{S}}{2l} v_1^*\right) - \sin\left(\frac{\mathfrak{S}}{2l} v_2^*\right) sh\left(\frac{\mathfrak{S}}{2l} v_2^*\right) \right] \times \\ &\times \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \mathfrak{S} - \frac{\mathfrak{S}^2}{2l^2} at\right) - e^{-\mathfrak{S}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\mathfrak{S}^2}{2l^2} at\right) \right] \right\} d\mathfrak{S}, \end{aligned}$$

$$G_2(x, \tau, t, l) = \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}} + G_{02}(x, \tau, t, l), \quad (10.66)$$



$$G_{02}(x, \tau, t, l) = \frac{a\sqrt{2}}{2\pi l^2} \int_0^\infty \frac{\xi}{ch\xi - \cos\xi} \left\{ \left[ \sin\left(\frac{\xi x}{2l}\right) ch\left(\frac{\xi x}{2l}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos\left(\frac{\xi x}{2l}\right) sh\left(\frac{\xi x}{2l}\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \xi - \frac{\xi^2}{2}\eta_0\right) - e^{-\xi} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi^2}{2}\eta_0\right) \right] - \right. \\ \left. - \left[ \sin\left(\frac{\xi x}{2l}\right) ch\left(\frac{\xi x}{2l}\right) + \cos\left(\frac{\xi x}{2l}\right) sh\left(\frac{\xi x}{2l}\right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \xi - \frac{\xi^2}{2}\eta_0\right) - e^{-\xi} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi^2}{2}\eta_0\right) \right] \right\} d\xi, \\ G_3(x, \tau, t, l) = \frac{l-x}{2\sqrt{\pi a}} \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(l-x)^2}{4a(t-\tau)}} + G_{03}(x, \tau, t, l),$$

$$G_{03}(x, \tau, t, l) = \frac{a\sqrt{2}}{2\pi l^2} \int_0^\infty \frac{\xi}{ch\xi - \cos\xi} \left\{ \left[ \sin\left(\frac{\xi b_0}{2l}\right) ch\left(\frac{\xi b_0}{2l}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos\left(\frac{\xi b_0}{2l}\right) sh\left(\frac{\xi b_0}{2l}\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \xi - \frac{\xi^2}{2}\eta_0\right) - e^{-\xi} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi^2}{2}\eta_0\right) \right] - \right. \\ \left. - \left[ \sin\left(\frac{\xi b_0}{2l}\right) ch\left(\frac{\xi b_0}{2l}\right) + \cos\left(\frac{\xi b_0}{2l}\right) sh\left(\frac{\xi b_0}{2l}\right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \xi - \frac{\xi^2}{2}\eta_0\right) - e^{-\xi} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi^2}{2}\eta_0\right) \right] \right\} d\xi, \\ (0 < x < l, \quad \eta_0 = \frac{a}{l^2}(t-\tau), \quad b_0 = l-x, \quad t > 0, \quad t-\tau > 0, \\ v_1^* = \xi - x, \quad v_1^* = \xi + x).$$

Формула (10.63) в силу равенств (10.64) и (10.66) принимает вид:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^l f(\xi) \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4at}} \right] d\xi + \\ + \int_0^l f(\xi) G_{01}(x, \xi, t, l) d\xi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^\infty \Psi_1\left(t - \frac{x^2}{4av^2}\right) e^{-v^2} dv + \\ + \int_0^t \Psi_1(\tau) G_{02}(x, \tau, t, l) d\tau + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{l-x}{2\sqrt{at}}}^\infty \Psi_2\left(t - \frac{(l-x)^2}{4av^2}\right) e^{-v^2} dv + \\ + \int_0^t \Psi_2(\tau) G_{03}(x, \tau, t, l) d\tau \\ (0 < x < l, t > 0). \tag{10.67}$$

Из (10.66) следует, что функции  $G_{02}(x, \tau, t, l)$  и  $G_{03}(x, \tau, t, l)$  определены в промежутке  $0 \leq x \leq l$ , причем

$$G_{02}(0, \tau, t, l) = 0, \quad G_{03}(l, \tau, t, l) = 0, \tag{10.68}$$

$$G_{02}(l, \tau, t, l) = G_{03}(0, \tau, t, l) = \frac{a\sqrt{2}}{2\pi l^2} \int_0^\infty \frac{\xi}{ch\xi - \cos\xi} \left\{ \left[ \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) ch\left(\frac{\xi}{2}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) sh\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \xi - \frac{\xi^2}{2}\eta_0\right) - e^{-\xi} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi^2}{2}\eta_0\right) \right] - \right. \\ \left. - \left[ \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) ch\left(\frac{\xi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) sh\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \xi - \frac{\xi^2}{2}\eta_0\right) - e^{-\xi} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi^2}{2}\eta_0\right) \right] \right\} d\xi. \tag{10.69}$$

Вычисляя интеграл в (10.69), находим

$$G_{02}(l, \tau, t, l) = G_{03}(0, \tau, t, l) = -\frac{l}{2\sqrt{\pi a}} \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{l^2}{4a(t-\tau)}}. \tag{10.70}$$

Из (10.67) в силу (10.68), (10.70) и (10.66а) имеем:

- 1°. Если  $x = 0$  и  $t > 0$ ,  $T(0, t) = \Psi_1(t)$ .
- 2°. Если  $x = l$  и  $t > 0$ ,  $T(l, t) = \Psi_2(t)$ .
- 3°. Если  $0 < x < l$  и  $t \rightarrow +0$ , то

$$T(x, 0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^l f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} d\xi =$$

$$= \begin{cases} f(x), & \text{если функция } f(x) \text{ в точке } x \in ]0, l] \text{ непрерывна;} \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{если функция } f(x) \text{ имеет в точке } x \in ]0, l] \\ & \text{разрыв первого рода,} \end{cases}$$

так как  $G_{01}(x, \xi, t, l)|_{t=0} = 0$ .

4<sup>о</sup>. Если  $\Psi_2(t) \equiv 0$ ,  $t > 0$  и  $l \rightarrow +\infty$ , то

$$T(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{\infty} \Psi_1 \left( t - \frac{x^2}{4av^2} \right) e^{-v^2} dv +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^{\infty} f(\xi) \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4at}} \right] d\xi \quad (10.71)$$

$$(0 < x < \infty, t > 0).$$

Функция  $T(x, t)$ , определяемая по формуле (10.71), является решением однородного уравнения

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (0 < x < \infty, t > 0) \quad (10.72)$$

и удовлетворяет условиям

$$T(0, t) = \psi_1(t) \quad (t \geq 0), \quad T(x, 0) = f(x), \quad (10.73)$$

т. е. функция  $T(x, t)$  является решением задачи о распространении тепла в полуограниченном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью ( $0 \leq x < \infty$ ) при условиях (10.73).

Решение данной задачи известно [1]. Однако, предлагаемые методы его построения представляются достаточно громоздкими. Применение  $K_\alpha$ -метода суммирования ( $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ) к рядам (10.65) позволяет получать решение такой задачи несколько проще.

**10.3.** Наконец, рассмотрим задачу без начальных условий.

Если процесс теплопроводности рассматривается в момент, достаточно далеко отстоящий от начального, то влияние начальных условий практически не сказывается на распределении температуры в момент наблюдения. В этом случае ставится задача об отыскании решения однородного уравнения теплопроводности, удовлетворяющего граничным условиям одного из трех основных типов, задаваемых для всех  $t > -\infty$ .

Рассмотрим первую краевую задачу для полубесконечного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью.

Требуется найти ограниченное решение однородного уравнения теплопроводности при  $0 < x < \infty$ ,  $t > -\infty$ , удовлетворяющее условию  $T(0, t) = \psi_1(t)$  ( $t \geq 0$ ), где  $\psi_1(t)$  – заданная функция. Предполагается, что функции  $T(x, t)$  и  $\psi_1(t)$  ограничены всюду, т. е.  $|T(x, t)| < M$ ,  $|\psi_1(t)| < N$  ( $M, N$  – константы).

Формулу (10.71) можно записать так:

$$T(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^t \frac{\psi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^{\infty} f(\xi) \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4at}} \right] d\xi. \quad (10.74)$$

Тогда ограниченное решение однородного уравнения теплопроводности при  $0 < x < \infty$ ,  $t > t_0$ , удовлетворяющее условиям  $T|_{x=0} = \psi_1(t)$  при  $t \geq t_0$ ,  $T|_{t=t_0} = f(x)$  при  $0 < x < \infty$ , представляет собой следующую сумму двух слагаемых

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \int_{t_0}^t \frac{\psi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}} d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^\infty \frac{f(\xi)}{\sqrt{t-t_0}} \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a(t-t_0)}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a(t-t_0)}} \right] d\xi = B_1 + B_2. \end{aligned} \quad (10.75)$$

Покажем, что второе слагаемое  $B_2$  в пределе при  $t_0 \rightarrow -\infty$  дает нуль

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} B_2 = 0. \quad (10.76)$$

В самом деле, так как по условию  $|f(\xi)| < M^*$ , мы имеем следующую оценку

$$|B_2| < \frac{M^*}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\frac{x}{2\sqrt{a(t-t_0)}}}^\infty e^{-\eta^2} d\eta_1 - \int_{\frac{x}{2\sqrt{a(t-t_0)}}}^\infty e^{-\eta^2} d\eta_2 \right\} = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a(t-t_0)}}} e^{-\eta^2} d\eta,$$

откуда при  $t_0 \rightarrow -\infty$  и фиксированных  $x$  и  $t$  следует утверждение (10.76). Теперь предельный переход при  $t \rightarrow -\infty$  в выражении (10.75) дает нам искомое решение задачи:

$$T(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^t \frac{\psi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}} d\tau. \quad (10.77)$$

Полезное представление полученного решения получим, если ввести в (10.77) новую переменную интегрирования  $\xi = t - \tau$ :

$$T(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^\infty \frac{\psi_1(t-\xi)}{\xi^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a\xi}} d\xi. \quad (10.78)$$

Рассмотрим с его помощью один из наиболее часто встречающихся случаев граничного условия – периодическое условие вида

$$T(0, t) = \psi_1(t) = T_0 \cos \omega t. \quad (10.79)$$

Эта задача изучалась еще Фурье и впервые была применена при определении температурных колебаний почвы [1].

Учитывая (10.79) в (10.76), получаем

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{x T_0}{2\sqrt{\pi a}} \left\{ \cos \omega t \int_0^\infty \frac{\cos \omega \xi}{\xi^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a\xi}} d\xi + \sin \omega t \int_0^\infty \frac{\sin \omega \xi}{\xi^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a\xi}} d\xi \right\} = \\ &= \frac{x T_0}{2\sqrt{\pi a}} \left\{ \left( \frac{x^2}{4a\omega} \right)^{-1/4} \cos \omega t \left[ e^{\frac{\pi i}{8}} K_{-1/2} \left( 2e^{\pi i/4} \sqrt{\frac{x^2 \omega}{4a}} \right) + \right. \right. \\ &+ e^{-\frac{\pi i}{8}} K_{-1/2} \left( 2e^{-\pi i/4} \sqrt{\frac{x^2 \omega}{4a}} \right) \left. \right] + i \left( \frac{x^2}{4a\omega} \right)^{-1/4} \sin \omega t \left[ e^{\frac{\pi i}{8}} K_{-1/2} \left( 2e^{\pi i/4} \sqrt{\frac{x^2 \omega}{4a}} \right) - \right. \\ &\left. \left. - e^{-\frac{\pi i}{8}} K_{-1/2} \left( 2e^{-\pi i/4} \sqrt{\frac{x^2 \omega}{4a}} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где  $K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$  – функция Макдональда.

Отсюда, учитывая, что

$$K_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-z},$$

окончательно находим

$$T(x, t) = T_0 e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right). \quad (10.80)$$

Это решение другим способом получено в [1].

Поскольку одномерное уравнение теплопроводности формально совпадает с уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (10.81)$$

определяющим движение вязкой жидкости над колеблющейся плоскостью [2], то решению уравнения (10.81), удовлетворяющему условию  $v|_{x=0} = u_0 \cos \omega t$ , можно сразу написать по аналогии с формулой (10.80) в виде

$$v = u_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \\ \left(\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}\right).$$

Здесь  $\nu$  – кинематическая вязкость.

Таким образом, в вязкой жидкости могут существовать поперечные волны: скорость  $v_y = v$  перпендикулярна направлению распространения волны. Они, однако, быстро затухают по мере удаления от создающей их колеблющейся твердой поверхности. Затухание амплитуды происходит по экспоненциальному закону с глубиной проникновения  $\delta$ . Эта глубина падает с увеличением частоты волны и растет с увеличением вязкости жидкости.

**Замечание.**  $K_\alpha$ -метод суммирования может быть успешно применен к решению задачи о свободных малых колебаниях струны с закрепленными концами и заданными начальными положениями и начальными скоростями её точек. Здесь на этом не будем останавливаться.

В части третьей рассматриваемые задачи выполнены совместно с учениками Е. А. Юрковой, Т. А. Беловой, М. М. Ветчинкиным, О. Н. Бутовой, Е. С. Остапенко, Т. С. Гусевой.

Автор выражает искреннюю благодарность профессорам Е. Я. Клименкову, В. М. Саф-раю, В. В. Терновскому за ценные замечания, улучшившие изложение материала (ч. 1, ч. 2, ч. 3). Особенно, выражаю благодарность Е. А. Юрковой, оказавшей огромную помощь при оформлении работы.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Тихонов, А. Н.* Уравнение математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1999.  
 [2] *Ландау, Л. Д.* Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1986.

*Кулиев Валех Джафарович,*

*доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва*

**e-mail:** pmdekanat@rambler.ru

V. D. Kuliev

**ABOUT GEOMETRICAL INTERPRETATION PHASE INVARIANT TRSOR  
STRESS***Moscow State Machine-Building University (MAMI)*

**Abstract.** Proposed in the first part of summation formula used for the solution of boundary value problems of the distribution of heat in rod finite length.

**Keywords:** thermal conductivity, rod, Fourier series.

**REFERENCES**

- [1] *Tikhonov, A. N.* Equation of mathematical physics / A. N. Tikhonov, A. A. Samarskiya. – M. : Nauka, 1999.
- [2] *Landau, L. D.* Theoretical physics. Volume 6. Hydrodynamics / Л. Д. Landau, Е. М. Lifshits. – M. : Nauka, 1986.

*Kuliev, Valekh Dzhafarovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of the Higher Mathematics, Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow*

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НАГРУЖЕНИИ

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Рассмотрена задача устойчивости кусочно-неоднородной сферической оболочки при равномерном нагружении.

**Ключевые слова:** напряжения, деформация, пластичность, упругость, вязкость, устойчивость.

УДК: 539.374

Исследованию устойчивости неоднородных сферических оболочек при нагружении посвящены работы [1], [2], [3], [4]. При этом в [1], [2], [3] исследована устойчивость сферических упругих оболочек, когда заполнитель описывался соотношениями теории упруговязкопластического тела [5], а в [4] – соотношениями модели Кельвина–Фойхта, точно так же как в работах [2], [3], в предположении, что физико-механические параметры изменяются по экспоненциальному закону.

1. Ниже в рамках трехмерной линеаризированной теории устойчивости исследуется устойчивость составной сферической оболочки, верхний слой которой является вязкоупругим, а внутренний – упруго-вязкопластическим.

По контуру оболочки равномерно распределена нагрузка интенсивности  $p$ , а к внутреннему слою приложена равномерно распределенная нагрузка  $q$ .

Таким образом, рассматривается двусвязная область при всестороннем равномерном сжатии: вязкоупругая оболочка с упруго-вязкопластическим включением.

Обозначим через  $b$  – внешний радиус оболочки,  $\gamma$  – внешний радиус включения,  $a$  – радиус полости.

Основное (докритическое) состояние будем определять в рамках геометрически линейной теории. Полагаем, что оболочка и включение несжимаемы, тогда

$$g_{\beta}^{\alpha} \varepsilon_{\alpha}^{\beta} = 0, \quad (1.1)$$

где  $g_{\beta}^{\alpha}$  – компоненты метрического тензора,  $\varepsilon_{\alpha}^{\beta}$  – компоненты тензора деформаций.

Вязкоупругая область представима моделью Фойхта

$$s_j^i = 2\mu_1 \varepsilon_j^i + 2\eta_1 \dot{\varepsilon}_j^i \quad \left( \dot{\varepsilon}_j^i = \frac{d\varepsilon_j^i}{dt} \right), \quad (1.2)$$

где  $\eta_1$  – параметр, характеризующий вязкость,  $\dot{\varepsilon}_j^i$  – компоненты тензора скоростей деформации.

Область включения подчиняется соотношениям теории упруго-вязкопластического тела [5] с функцией нагружения

$$\left(s_j^i - c\varepsilon_j^{pi} - \eta\dot{\varepsilon}_j^{pi}\right) \left(s_j^i - c\varepsilon_j^{pi} - \eta\dot{\varepsilon}_j^{pi}\right) - k^2 = 0 \quad (1.3)$$

и ассоциированным законом течения в форме

$$\dot{\varepsilon}_j^{pi} = \lambda_0 \left(s_j^i - c\varepsilon_j^{pi} - \eta\dot{\varepsilon}_j^{pi}\right) \quad (1.4)$$

Здесь  $c$  и  $\eta$  – коэффициенты упрочнения и вязкости соответственно,  $k$  – предел текучести,  $s_j^i = \sigma_j^i - \frac{1}{3}\sigma_k^k g_j^i$  – компоненты девиатора тензора напряжений,  $\varepsilon_j^{pi}$  – компоненты тензора пластических деформаций.  $\lambda_0$  – неопределенный множитель.

Принимаем, что

$$\varepsilon_j^i = \varepsilon_j^{ei} + \varepsilon_j^{pi}. \quad (1.5)$$

Индексы "e" и "p" обозначают упругие и, соответственно, пластические деформации.

Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука

$$s_j^i = 2\mu\varepsilon_j^{ei}. \quad (1.6)$$

Деформации связаны с перемещениями формулами Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i w_j + \nabla_j w_i). \quad (1.7)$$

Уравнения равновесия для оболочки и, соответственно, включения, таковы

$$\nabla_i \sigma_j^i = 0. \quad (1.8)$$

Трением между оболочкой и включением пренебрегаем, полагая, что на границе контакта оболочка и наполнитель деформируются совместно, без проскальзывания и отставания. В этом случае на границе контакта оболочки и наполнителя выполняются условия совместности перемещений и напряжений. Условия на внешней границе оболочки, внутренней границе включения, а также начальные условия, что в оболочке и включении в начальные моменты времени деформации равны нулю, совместно с уравнениями (1.1)–(1.8) соответственно для оболочки и включения, представляют собой связную краевую задачу.

Исходя из уравнений равновесия, привлекая при этом соотношения (1.1)–(1.7), находим докритическое напряженно-деформированное состояние, которое в осесимметричном случае ( $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi$ ) в сферической системе координат  $(\rho, \theta, \phi)$  таково для оболочки

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4(\mu_1 C_1 + \eta_1 \dot{C}_1)}{r^3} + C_2, \\ \sigma_\theta &= \frac{2(\mu_1 C_1 + \eta_1 \dot{C}_1)}{r^3} + C_2 \\ \varepsilon_r &= -\frac{2C_1}{r^3} \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi &= \frac{C_1}{r^3} \\ u_r &= \frac{C_1}{r^2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

для включения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2\mu_2 \left[ 3kE \ln r - 2B_2 (1 - 2\mu_2 E) \frac{1}{r^3} \right] + B_1, \\ \sigma_\theta &= 3\mu_2 kE (1 + 2 \ln r) + 2\mu_2 B_2 (1 - 2\mu_2 E) \frac{1}{r^3} + B_1, \\ \varepsilon_r^p &= -2\varepsilon_\theta^p = \left( k - \frac{4\mu_2 B_2}{r^3} \right) E, \\ \varepsilon_\theta^p &= \varepsilon_\phi^p, \\ u_r &= \frac{B_2}{r^2}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$E = \frac{1}{2\mu_2 + c} \left( 1 - e^{-\frac{2\mu_2 + c}{n_2} t} \right) \quad (1.11)$$

Для определения неизвестных интегрирования  $C_1, \dot{C}_1, C_2, B_1, B_2$  привлекаем граничные условия на поверхности оболочки и включения

$$\sigma_r^{\text{об}} = -p \quad \text{при} \quad r = b \quad (1.12a)$$

$$\sigma_r^{\text{вкл}} = -q \quad \text{при} \quad r = a \quad (1.12b)$$

условия на поверхности контакта 7 оболочка - включение

$$\sigma_r^{\text{об}} = \sigma_r^{\text{вкл}}, \quad u_r^{\text{об}} = u_r^{\text{вкл}} \quad \text{при} \quad r = \gamma \quad (1.13)$$

а также начальное условие

$$\varepsilon_r^{\text{об}} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0$$

С учетом (1.8), (1.9) получаем из (1.11), (1.12a), (1.12b)

$$\begin{aligned} C_1 = B_2 &= \frac{p+q+6\mu_2 k E (\ln \gamma - \ln a)}{d_2} \left( 1 - e^{-\frac{d_2}{d_1} t} \right), \\ \dot{C}_1 = B_2 &= \frac{p+q+6\mu_2 k E (\ln \gamma - \ln a)}{d_1} e^{-\frac{d_2}{d_1} t}, \\ C_2 &= -p + \frac{4(\mu_1 C_1 + \eta_1 \dot{C}_1)}{b^3}, \\ B_1 &= 4\mu_2 a^{-3} (1 - 2\mu_2 E) C_1 - (6\mu_2 k E \ln a + q), \\ d_1 &= 4\eta_1 (b^{-3} - \gamma^{-3}), \\ d_2 &= [4\mu_1 (b^{-3} - \gamma^{-3}) + 4\mu_2 (\gamma^{-3} - a^{-3}) (1 - 2\mu_2 E)]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Исследование устойчивости докритического состояния составной оболочки сводится [5] к решению уравнений равновесия в вариациях для оболочки и включения при соответствующих граничных условиях.

2. Для осесимметричной формы потери устойчивости уравнения равновесия для оболочки и включения в сферической системе координат имеют вид [6]

$$\frac{d\sigma_r^+}{dr} + 2\frac{\sigma_r^+ - \sigma_\theta^+}{r} + \sigma_r^0 \frac{d^2 u_r^+}{dr^2} + \sigma_\theta^0 \frac{1}{r} \left( \frac{d u_r^+}{dr} - \frac{u_r^+}{r} \right) + \rho_0 w^2 u_r^+ = 0. \quad (2.1)$$

Здесь и далее символ "+" сверху относится к амплитудным значениям соответствующих величин, а символ "0" - к величинам докритического состояния, которые определяются соотношениями (1.9) - для оболочки и (1.10) - для включения. При этом согласно (1.1)-(1.7), имеем

для оболочки

$$\sigma_r = p_1 + 2(\mu_1 + i\omega\eta_1) \frac{du}{dr}, \quad \sigma_\theta = p_1 + 2(\mu_1 + i\omega\eta_1) \frac{u}{r} \quad (2.2)$$

для включения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= p_2 + 2(\mu_2 - \tilde{a}) \frac{du}{dr} + 2\tilde{a} \frac{u}{r}, \\ \sigma_\theta &= p_2 + 2\tilde{a} \frac{du}{dr} + (2\mu_2 - \tilde{a}) \frac{u}{r}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\tilde{a} = \frac{4}{3} \frac{\mu_2^2}{(2\mu_2 + c + i\omega\eta_2)}$$

где  $p_i$  - гидростатическое давление ( $i = 1, 2$ ).

Условие несжимаемости (1.1) в рассматриваемом случае принимает вид



$$\frac{du^+}{dr} + 2\frac{u^+}{r} = 0 \quad (2.4)$$

Далее символ "+" опустим.

Согласно [5], задача определения критической нагрузки сводится к задаче на собственные значения относительно  $w$ . Докритическое состояние будет устойчивым, если

$$Im\omega_n \geq 0, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

Эти условия определяют область устойчивости в пространстве параметров нагружения при заданных физико-механических и геометрических характеристиках оболочки и включения. Граница области устойчивости находится из условия

$$\min(Im\omega_n) = 0, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

Из условий несжимаемости (2.4) находим для оболочки и, соответственно, включения

$$u_{об} = \frac{A_1}{r_2}, \quad u_{вкл} = \frac{A_2}{r_2}, \quad (2.7)$$

Из соотношений (2.1)–(2.4) находим решения:  
для оболочки

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \left[ -\frac{5}{2}a_1\frac{1}{r^6} - (4(\mu_1 + \eta_1 S) - C_2)\frac{1}{r^3} - \rho_1 S^2\frac{1}{r} \right] A_1 + K_1 \\ \sigma_\theta &= \left[ -\frac{5}{2}a_1\frac{1}{r^6} + (2(\mu_1 + \eta_1 S) - C_2)\frac{1}{r^3} - \rho_1 S^2\frac{1}{r} \right] A_1 + K_1 \\ a_1 &= 2(\mu_1 C_1 + \eta_1 \dot{C}_1) \quad S = i\omega. \end{aligned} \quad (2.8)$$

для включения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \left[ -\frac{13}{6}\mu_2 a_2 \frac{1}{r^6} - \frac{a_3}{3} \frac{1}{r^3} + 11\mu_2 k E \left( \frac{1}{3} + \ln r \right) - \rho_2 S^2 \frac{1}{r} \right] A_2 + K_2, \\ \sigma_\theta &= - \left[ \frac{13}{6}\mu_2 a_2 \frac{1}{r^6} + \left[ -\frac{a_3}{3} + 6(\mu_2 - 2\tilde{a}) \right] \frac{1}{r^3} + 11\mu_2 k E \frac{1}{r^3} \left( \frac{1}{3} + \ln r \right) - p_2 S^2 \frac{1}{r} \right] A_2 + K_2, \\ a_2 &= 2B_2(1 - 2\mu_2 E), \\ a_3 &= 12(\mu_2 - 2\tilde{a}) - 6B_1 + 3\mu_2 k E. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для определения постоянных интегрирования  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  привлекаем граничные условия, которые согласно [3], таковы

$$\sigma_{об}^r + \sigma_{об}^0 \frac{du_{об}}{dr} = p_r \quad \text{при} \quad r = b \quad (2.10a)$$

$$\sigma_{вкл}^r + \sigma_{вкл}^0 \frac{du_{вкл}}{dr} = q_r \quad \text{при} \quad r = a \quad (2.10b)$$

а также условия на границе контакта оболочка – включение

$$\sigma_{об}^r = \sigma_{вкл}^r, \quad u_{об} = u_{вкл} \quad \text{при} \quad r = \gamma \quad (2.11)$$

Ограничимся случаем "мертвой" нагрузки, тогда в (2.10a) и (2.10b)  $p_r, q_r = 0$ . Из условия (2.7) следует, что  $A_1 = A_2$ . Для определения оставшихся трех постоянных интегрирования  $A_1 = A_2, K_1, K_2$ , согласно граничным условиям (2.10a), (2.10b), (2.11), имеем систему трех однородных линейных алгебраических уравнений, откуда приходим к характеристическому уравнению

$$F = a_{31} - a_{11} - a_{21} = 0. \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{5a_1}{2b^6} - \frac{2a_1}{b^5} - \frac{(4(\mu_1 + \eta_1 S) - C_2)}{b^3} + \frac{C_2}{b^2} - \frac{\rho_1 S^2}{b}, \\
a_{21} &= -\frac{13\mu_2 a_2}{6a^6} - \frac{2\mu_2 a_2}{a^5} + \frac{11\mu_2 k E}{a^3} \left( \frac{1}{3} + \ln a \right) - \frac{a_3}{3a^2} + \frac{6\mu_2 k E \ln a}{a^2} - \frac{\rho_2 S^2}{a}, \\
a_{31} &= \left( \frac{13}{3}\mu_2 a_2 - 5a_1 \right) \frac{1}{\gamma^6} + \left( \frac{a_3}{3} - 4(\mu_1 + \eta_1 S) + C_2 \right) \frac{1}{\gamma^3} - 11\mu_2 k E (1 + \ln \gamma) \frac{1}{\gamma^3} + \frac{(\rho_2 - \rho_1) S^2}{\gamma}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Таким образом, вопрос определения критической комбинации нагрузок на конечном интервале времени сводится к разрешимости уравнения

$$F(p, q, a, b, \gamma, \mu_1, \eta_1, \mu_2, \eta_2, c, k, \rho_1, \rho_2, S, t) = 0. \tag{2.14}$$

Анализ такого уравнения затруднен ввиду того, что  $S = iw$  – в общем случае произвольное комплексное число. Поэтому, для упрощения вычислений при численном анализе будем считать, что  $S$  – действительное число. В этом случае, критерием устойчивости будет условие  $S < 0$ . Бесспорно, это сужает область возможных возмущений, однако это позволяет получить достоверные результаты относительно такого класса возмущений. Очевидно (2.14), оценка влияния каждого отдельного физико-механического, геометрического и других параметров оболочки и включения, изменяющихся в допустимых пределах, на критическую комбинацию нагрузок определяются, соотносясь с практической необходимостью.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Андреева, И. Ю. Устойчивость слоистой сферической оболочки с упруговязкопластичским заполнителем при нагружении / И. Ю. Андреева, Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин // Сборник современные проблемы механики и прикладной математики. – Воронеж, 2004. – Ч. 1. – Т. 1. – С. 12–18.
- [2] Зенин, А. Н. К устойчивости упругой сферической оболочки с неоднородным упруговязкопластичским заполнителем при нагружении / А. Н. Зенин, А. Н. Спорыхин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2008. – № 1 (4). – С. 88–95.
- [3] Спорыхин, А. Н. Численно-аналитическое исследование устойчивости упругой сферической оболочки с неоднородным упруговязкопластичским заполнителем при нагружении / А. Н. Спорыхин, Е. Д. Чуфринова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 193–200.
- [4] Спорыхин, А. Н. Исследование устойчивости упругой сферической оболочки с неоднородным вязкоупругим заполнителем при нагружении на конечном интервале времени / А. Н. Спорыхин, Ю. Д. Щеглова // Сб. трудов. Международная конференция. Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. – Воронеж, 2011.
- [5] Спорыхин, А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин. – Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та. – 1997. – 359 с.
- [6] Спорыхин, А. Н. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин. – М. : ФИЗМАТЛИТ. – 2004.

Спорыхин Анатолий Николаевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: shashkin@amm.vsu.ru

A. N. Sporixin

**RESEARCH OF STABILITY OF PIECEWISE-INHOMOGENEOUS SPHERICAL SHELL FOR UNIFORM LOADING***Voronezh State University*

**Abstract.** The possibility of piecewise-inhomogeneous spherical shell for uniform loading had been considered.

**Keywords:** voltages, strain, ductility, elasticity, viscosity, stability.

**REFERENCES**

- [1] *Andreeva, I. Yur.* Stability of layered spherical shell with visco elastic plastic filler under loading / I. Yur. Andreeva, D. V. Gotsev, A. N. Sporixin // Modern problems of mechanics and applied mathematics. – Voronezh, 2004. – Issue. 1. – Vol. 1. – P. 12–18.
- [2] *Zenin, A. N.* On the stability of elastic spherical shell with non-uniform visco elastic plastic filler under loading / A. N. Zenin, A. N. Sporixin // Herald of Chuvash State Pedagogical University named I. Ya. Yakovlev. Series : Mechanics of the limit State. – 2008. – № 1 (4). – P. 88–95.
- [3] *Sporixin, A. N.* Numerical and analytical study of the stability of elastic viscous plastic filler under loading / A. N. Sporixin, E. D. Chufrinova // Herald of Chuvash State Pedagogical University named I. Ya. Yakovlev. Series : Mechanics of the limit state. – 2011. – № 1 (9). – P. 193–200.
- [4] *Sporixin, A. N.* Investigation of the stability of elastic spherical shell with an inhomogeneous visco elastic filler loading at a finite time interval / A. N. Sporixin, Yur. D. Sheglova // International Conference Actual problems of applied mathematics, computer science and mechanics. – Voronezh, 2011.
- [5] *Sporixin, A. N.* The perturbation method in problems of continuum media / A. N. Sporixin. – Voronezh : VSU, 1997. – 359 p.
- [6] *Sporixin, A. N.* Stability of spatial equilibrium of bodies and rock mechanics problems / A. N. Sporixin, A. I. Shashkin. – M. : Fizmatlit. – 2004.

*Sporixin, Anatoliy Nikolaevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh*

А. А. Золочевский, С. Н. Склепус, А. З. Галишин

**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ИЗГИБА ЦИЛИНДРА С ОПИСАНИЕМ  
ЗАВИСИМОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЗУЧЕСТИ И  
ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ОТ ВИДА НАГРУЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ  
ДИССИПАТИВНОЙ ФУНКЦИИ**

*Национальный технический университет “Харьковский политехнический институт”*

*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного  
Национальной академии наук Украины*

*Институт механики им. С. П. Тимошенко Национальной академии наук Украины*

**Аннотация.** Рассмотрена задача ползучести и повреждаемости вследствие ползучести цилиндра из материала с характеристиками, зависящими от вида нагружения, в пространственной постановке. Следуя Д. Д. Ивлеву [1], [4], [5], введена диссипативная функция и построены определяющие соотношения ползучести и повреждаемости вследствие ползучести рассматриваемых изотропных сред. Предложена численно-аналитическая методика решения поставленных начально-краевых задач ползучести с учетом повреждаемости. Результаты для цилиндра, полученные на основе пространственной постановки, сопоставлены с результатами, полученными на базе классической теории оболочек Кирхгофа–Лява.

**Ключевые слова:** ползучесть, повреждаемость, цилиндр, вид нагружения, диссипативная функция.

УДК: 539.3

**Введение.** Существует широкий класс первоначально изотропных материалов, характеристики которых при ползучести зависят от вида нагружения [2], [8]. Это, прежде всего, легкие сплавы, суперсплавы, порошковые материалы, пластмассы, полимеры, керамика и др. Как правило, процесс ползучести данных материалов сопровождается накоплением повреждений в виде микротрещин и микропор. В некоторых случаях зависимость характеристик ползучести и повреждаемости от вида нагружения может быть идентифицирована по данным базовых экспериментов на одноосное растяжение, одноосное сжатие и чистое кручение (рис. 1). Математически это проявляется в том, что кривые ползучести первоначально изотропного материала при одноосном растяжении, одноосном сжатии и чистом кручении описываются независимыми законами. Анализ современной литературы показывает, что количество публикаций, посвященных пространственной ползучести и повреждаемости тел из материалов с характеристиками, зависящими от вида нагружения, весьма ограничено [2].

**1. Определяющие соотношения ползучести.** В случае малых деформаций ползучести определяющие соотношения, которые учитывают влияние вида нагружения, имеют следующую структуру [2]:

---

Поступила 19.01.2013

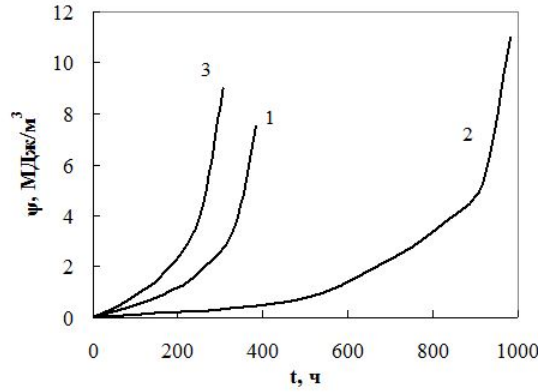


Рис. 1. Изменение удельной энергии диссипации  $\psi = \sigma_{ij}p_{ij}$ , рассеиваемой при ползучести, с течением времени при растяжении (1), сжатии (2) и кручении (3) при температуре  $T = 473 \text{ K}$  и интенсивности напряжений  $\sigma_i = 170 \text{ МПа}$  для алюминиевого сплава АК4-1Т [7]

$$\dot{p}_{kl} = \sigma_e^m \left( \frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q \left( \frac{AI_1 \delta_{kl} + B\sigma_{kl}}{\sigma_2} + \alpha C \delta_{kl} \right), \quad (k, l = \overline{1, 3}). \quad (1)$$

Следуя Д. Д. Ивлеву [1], [4], [5], в качестве параметра  $\psi$  взята диссипация

$$\psi = \int_0^t \sigma_{kl} \dot{p}_{kl} dt. \quad (2)$$

Здесь  $\dot{p}_{kl}$  – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; точка над символом означает производную по времени  $t$ ;  $\sigma_{kl}$  – компоненты тензора напряжений; скалярный параметр  $\psi$  используется для описания повреждаемости материала,  $\psi \in [0, \psi_*]$ ;  $\psi_*$  – критическое значение параметра повреждаемости, которое соответствует времени окончания скрытого разрушения  $t_*$  и может быть найдено из базовых экспериментов;  $A, B, C, m, q$  – параметры материала;  $\delta_{kl}$  – символ Кронекера. Эквивалентное напряжение  $\sigma_e$  записывается следующим образом [2]:

$$\sigma_e = \sigma_2 + \alpha \sigma_1,$$

где  $\sigma_1 = CI_1$ ,  $\sigma_2 = \sqrt{AI_1^2 + BI_2}$ ,  $I_1 = \sigma_{kl} \delta_{kl}$ ,  $I_2 = \sigma_{kl} \sigma_{kl}$ ,  $\alpha$  – числовой коэффициент, отражающий влияние первого инварианта тензора напряжений. В соответствии с рекомендациями Д. Д. Ивлева [3] зависимости (1) описывают неупругую сжимаемость.

Подставив (1) в (2), получим следующее кинетическое уравнение повреждаемости:

$$\dot{\psi} = \sigma_e^{m+1} \left( \frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q. \quad (3)$$

Для нахождения параметров материала необходимо иметь данные базовых экспериментов, включающих одноосное растяжение, одноосное сжатие и чистое кручение образцов материала. Пусть в результате экспериментов на ползучесть в условиях одноосного растяжения, сжатия и чистого кручения установлены, соответственно, зависимости:

$$\dot{p}_{11} = K_+ \sigma_{11}^m \left( \frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q, \quad \psi = \sigma_{11} p_{11},$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_{11} &= -K_- |\sigma_{11}|^m \left( \frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q, \quad \psi = \sigma_{11} p_{11}, \\ 2\dot{p}_{12} &= K_0 \sigma_{12}^m \left( \frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q, \quad \psi = 2\sigma_{12} p_{12},\end{aligned}$$

где  $K_+$ ,  $K_-$ ,  $K_0$ ,  $m$ ,  $q$  – постоянные материала. Тогда несложно показать, что формулы для нахождения параметров материала  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha C$ , входящих в соотношения (1), будут иметь следующий вид:

$$B = 0.5 K_0^{\frac{2}{m+1}}, \quad A = 0.25 \left( K_+^{\frac{1}{m+1}} + K_-^{\frac{1}{m+1}} \right)^2 - B, \quad \alpha C = 0.5 \left( K_+^{\frac{1}{m+1}} - K_-^{\frac{1}{m+1}} \right). \quad (4)$$

Из уравнений (1), (3) можно получить как частный случай классические определяющие соотношения, которые базируются только на экспериментальных данных, полученных из опытов на растяжение:

$$\dot{\varepsilon} = J \left( \sqrt{\frac{2}{3}} C \sigma_i \right) \omega^{-\beta} \left( \frac{\omega_*}{\omega_* - \omega} \right)^q \sqrt{\frac{3}{2}} C \frac{\dot{\varepsilon}}{\sigma_i} \quad (k, l = \overline{1, 3}), \quad \dot{\psi} = \sigma_e^{m+1} \left( \frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q, \quad (5)$$

где  $\sigma_e = \sqrt{\frac{2}{3}} C \sigma_i$ ,  $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{kl} s_{kl} = \sqrt{\frac{3}{2}} I_2 - \frac{1}{2} I_1^2$ ,  $s_{kl} = \sigma_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} I_1$ ,  $C = \frac{3}{2} K_+^{\frac{2}{m+1}}$ . Уравнения (5) описывают ползучесть и повреждаемость вследствие ползучести традиционных изотропных материалов, нечувствительных к виду нагружения.

**2. Постановка и методика решения начально-краевой задачи ползучести.** Рассмотрим тело вращения конечных размеров, отнесенное к цилиндрической системе координат  $0rz\varphi$ . Ось  $z$  направлена по оси вращения (рис. 2). Меридиональное сечение тела плоскостью  $r0z$  имеет форму области  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$ . Тело нагружено поверхностными силами на части границы  $S_p$  таким образом, что искомое решение не зависит от угловой координаты  $\varphi$ . Объемные силы отсутствуют. На оставшейся части границы  $S_u$  заданы кинематические граничные условия для скоростей перемещений  $\dot{u}_r$ ,  $\dot{u}_z$  вдоль осей  $0r$  и  $0z$ . Предполагаем, что скорости полных деформаций складываются из скоростей упругих деформаций и скоростей деформаций ползучести:  $\dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^e + \dot{p}_{kl}$ . Упругие деформации определяются обобщенным законом Гука.

Можно показать, что линеаризованная задача ползучести для осесимметрично нагруженного тела вращения, в фиксированный момент времени  $t > 0$ , может быть сведена к вариационной задаче для функционала в форме Лагранжа [2]:

$$\begin{aligned}\Lambda(\dot{u}_r, \dot{u}_z) &= 0,5 \iint_{\Omega} \left[ \lambda_1 \left( \dot{u}_{r,r}^2 + \dot{u}_{z,z}^2 + \frac{\dot{u}_z^2}{r^2} \right) + G (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r})^2 + 2\lambda \left( \dot{u}_{r,r} \dot{u}_{z,z} + \frac{\dot{u}_r (\dot{u}_{r,r} + \dot{u}_{z,z})}{r} \right) \right] r dr dz - \\ &- \iint_{\Omega} \left[ \dot{u}_{r,r} \dot{N}_r^f + \dot{u}_{z,z} \dot{N}_z^f + \dot{u}_r \dot{N}_\varphi^f r^{-1} + \dot{N}_{rz}^f (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}) \right] r dr dz - \int_{\partial\Omega_p} \left( \dot{P}_n^0 \dot{u}_n + \dot{P}_\tau^0 \dot{u}_\tau \right) d\partial\Omega.\end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $(\dots)_{,r} = \frac{\partial(\dots)}{\partial r}$ ,  $(\dots)_{,z} = \frac{\partial(\dots)}{\partial z}$ ;  $\dot{u}_n = \dot{u}_r n_r + \dot{u}_z n_z$ ,  $\dot{u}_\tau = \dot{u}_z n_r - \dot{u}_r n_z$ ;  $n_r = \cos(n, r)$ ,  $n_z = \cos(n, z)$ ;  $n$  – вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ ;  $\lambda_1 = \lambda + 2G$ ,  $\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ ,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ;  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала;  $P_n^0$  и  $P_\tau^0$  – нормальная и касательная компоненты поверхностных нагрузок.

Скорости “фиктивных” нагрузок, обусловленных влиянием ползучести, вычисляются по следующим формулам:

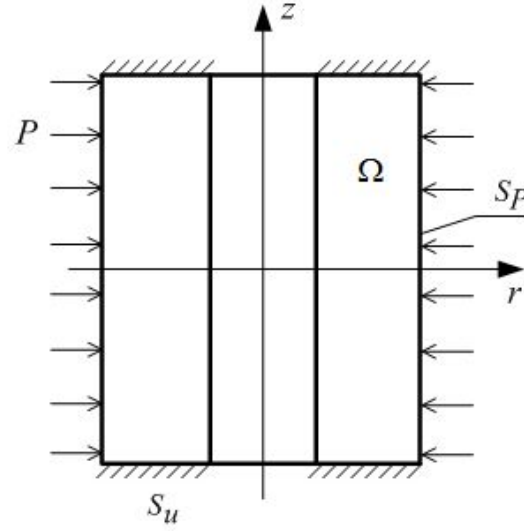


Рис. 2. Меридиональное сечение тела вращения

$$\begin{aligned}\dot{N}_r^f &= [\lambda_1 \dot{p}_r + \lambda (\dot{p}_z + \dot{p}_\varphi)], \\ \dot{N}_z^f &= [\lambda_1 \dot{p}_z + \lambda (\dot{p}_r + \dot{p}_\varphi)], \\ \dot{N}_\varphi^f &= [\lambda_1 \dot{p}_\varphi + \lambda (\dot{p}_r + \dot{p}_z)], \\ \dot{N}_{rz}^f &= 2G \dot{p}_{rz}.\end{aligned}$$

В функционале (6) скорости деформаций ползучести  $\dot{p}_r, \dot{p}_z, \dot{p}_\varphi, \dot{p}_{rz}$  полагаются заданными согласно (1) и не варьируются.

Основные неизвестные рассматриваемой начально-краевой задачи ползучести могут быть найдены из решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{du_r}{dt} &= \dot{u}_r, & \frac{du_z}{dt} &= \dot{u}_z, \\ \frac{d\varepsilon_r}{dt} &= \dot{u}_{r,r}, & \frac{d\varepsilon_z}{dt} &= \dot{u}_{z,z}, & \frac{d\varepsilon_\varphi}{dt} &= \dot{u}_r r^{-1}, & \frac{d\gamma_{rz}}{dt} &= \dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}, \\ \frac{d\sigma_r}{dt} &= \lambda (\dot{\varepsilon}_z + \dot{\varepsilon}_\varphi - \dot{p}_z - \dot{p}_\varphi) + \lambda_1 (\dot{p}_r - \dot{p}_r), & \frac{d\sigma_z}{dt} &= \lambda (\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi - \dot{p}_r - \dot{p}_\varphi) + \lambda_1 (\dot{p}_z - \dot{p}_z), \\ \frac{d\sigma_\varphi}{dt} &= \lambda (\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_z - \dot{p}_r - \dot{p}_z) + \lambda_1 (\dot{\varepsilon}_\varphi - \dot{p}_\varphi), & \frac{d\sigma_{rz}}{dt} &= G (\dot{\gamma}_{rz} - 2\dot{p}_{rz}), \\ \frac{dp_r}{dt} &= \dot{p}_r, & \frac{dp_z}{dt} &= \dot{p}_z, & \frac{dp_\varphi}{dt} &= \dot{p}_\varphi, & \frac{dp_{rz}}{dt} &= \dot{p}_{rz}, & \frac{d\psi}{dt} &= \dot{\psi}.\end{aligned}\quad (7)$$

В начальный момент времени  $t = 0$  деформации ползучести и параметр повреждаемости равны нулю:  $p_r = p_z = p_\varphi = p_{rz} = \psi = 0$ . Начальные условия для остальных неизвестных находятся из задачи упругого деформирования. Для постановки упругой задачи можно использовать функционал в форме (6), если заменить производные функций по времени самими функциями, а при вычислении “фиктивных” нагрузок положить  $N_r^f = N_z^f = N_\varphi^f = N_{rz}^f = 0$ .

Решение начальной задачи для (7) будем производить методом Кутта-Мерсона с автоматическим выбором шага. Вариационные задачи для функционала (6) в моменты времени, соответствующие схеме метода Кутта-Мерсона, решаются методом Рунге. Координатные функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям, могут быть построены с помощью метода R-функций [6]. Метод R-функций был предложен академиком В. Л. Рвачевым в 60-е годы XX века и позволил решить проблему построения координатных последовательностей вариационных методов. Данный метод позволяет точно учитывать геометрическую форму области, в которой отыскивается приближенное решение краевой задачи, и граничные условия самого общего вида. При этом решение линеаризованной краевой задачи в каждый фиксированный момент времени представляется в виде формулы – структуры решения, которая точно удовлетворяет всем (общая структура решения) или части (частичная структура решения) граничных условий. Структура решения является инвариантной по отношению к форме области.

**3. Ползучесть цилиндра из алюминиевого сплава АК4-1Т.** Рассмотрим круговой цилиндр конечной длины толщиной  $h = 0.02$  м, длиной  $L = 0.2$  м и радиусом срединной поверхности  $R_0 = 0.1$  м. Материал цилиндра – алюминиевый сплав АК4-1Т при температуре  $473$  К [7]. Упругие константы:  $E = 60$  ГПа,  $\nu = 0.35$ . Константы материала при ползучести:  $K_+ = 55.0$  ГПа $^{-m}$ ч $^{-1}$ ,  $K_- = 22.5$  ГПа $^{-m}$ ч $^{-1}$ ,  $K_0 = 1.14 \cdot 10^4$  ГПа $^{-m}$ ч $^{-1}$ ,  $m = 8$ ,  $q = 3$ . Параметры материала, вычисленные по формулам (4), имеют следующие значения:  $\alpha C = 0.0738$  ГПа $^{-\frac{m}{m+1}}$  ч $^{-\frac{1}{m+1}}$ ,  $B = 3.99$  ГПа $^{-\frac{2m}{m+1}}$  ч $^{-\frac{2}{m+1}}$ ,  $A = -1.77$  ГПа $^{-\frac{2m}{m+1}}$  ч $^{-\frac{2}{m+1}}$ . Критическое значение параметра повреждаемости зависит от вида напряженного состояния и вычисляется по формуле:  $\psi_* = \frac{1}{2} (3I_2 - I_1^2)$  ( $a - bI_1$ ), где  $a = 0.4$  ГПа $^{-1}$ ,  $b = 0.4$  ГПа $^{-2}$ .

Внутренняя поверхность цилиндра  $r = r_{inn} = R_0 - h/2$  свободна от нагрузки, а на внешней поверхности цилиндра  $r = r_{out} = R_0 + h/2$  приложено нормальное давление  $P = 25.4545$  МПа. Торцы цилиндра свободны от нагрузки и закреплены таким образом, что радиальные перемещения равны нулю. Принимая во внимание симметрию задачи, будем рассматривать половину цилиндра. Тогда граничные условия запишутся в виде:

$$\dot{u}_z = 0, \quad \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial z} = 0 \text{ для } z = 0,$$

$$\dot{u}_r = 0, \quad \dot{\sigma}_z = 0 \text{ для } z = L/2,$$

$$\dot{\sigma}_r = \dot{\sigma}_{rz} = 0 \text{ для } r = r_{inn},$$

$$\dot{\sigma}_r = -\dot{P} = 0, \quad \dot{\sigma}_{rz} = 0 \text{ для } r = r_{out}.$$

Можно показать, что частичная структура решения, удовлетворяющая только главным граничным условиям для скоростей перемещений, имеет вид:

$$\dot{u}_r = \omega_1 \Phi_1 - \omega_0 D_1^{(\omega_0)} (\omega_1 \Phi_1),$$

$$\dot{u}_z = \omega_2 \Phi_2,$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  – неопределенные компоненты структуры решения;  $\omega_0 = \frac{2}{L} z (\frac{L}{2} - z) \geq 0$  – горизонтальная полоса  $\Omega_0$ , заключенная между линиями  $z = 0$  и  $z = \frac{L}{2}$  ( $\omega_0 = 0$ ,  $\omega_{0,n} = -1$  на границе  $\partial\Omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$  внутри полосы);  $\omega_1 = \frac{L}{2} - z \geq 0$  – полуплоскость  $\Omega_1$ , лежащая ниже прямой  $z = \frac{L}{2}$  ( $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_{1,n} = -1$  на границе  $\partial\Omega_1$  и  $\omega_1 > 0$  внутри  $\partial\Omega_1$ );  $\omega_2 = z \geq 0$  – полуплоскость  $\Omega_2$ , лежащая выше прямой  $z = 0$  ( $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_{2,n} = -1$  на границе  $\partial\Omega_2$  и  $\omega_2 > 0$  внутри  $\partial\Omega_2$ );  $D_1^{(\omega_0)} = \frac{\partial \omega_0}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}$  – дифференциальный оператор, служащий для продолжения граничных значений внутрь области [2], [6]. При численной реализации неопределенные компоненты структуры решения  $\Phi_1, \Phi_2$  представляются в виде конечных рядов вида



$$\Phi_1(r, z) = \sum_{n=1}^{N_1} C_n^{(1)} f_n^{(1)}(r, z), \quad \Phi_2(r, z) = \sum_{n=1}^{N_2} C_n^{(2)} f_n^{(2)}(r, z),$$

где  $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}$  – неопределенные коэффициенты, являющиеся функциями времени;  $\{f_n^{(1)}, f_n^{(2)}\}$  – система линейно независимых базисных функций. В данной работе в качестве  $\{f_n^{(1)}, f_n^{(2)}\}$  использовались бикубические сплайны Шенберга. Системы сплайнов строились на регулярной сетке  $N_r \times N_z$ , где  $N_r, N_z$  – количество отрезков дискретизации вдоль осей  $0r$  и  $0z$  соответственно. Неопределенные коэффициенты структуры решения в каждый фиксированный момент времени находились методом Рунге.

Приближенное решение задачи ползучести и повреждаемости вследствие ползучести цилиндра из алюминиевого сплава АК4-1Т было получено при следующих параметрах пространственной и временной дискретизации:  $N_r = 10, N_z = 40$ , начальный шаг по времени –  $\Delta t_0 = 10^{-3}$  ч, заданная погрешность вычислений в методе Кутты–Мерсона  $-\delta = 10^{-4}$ . Критерием останова процесса решения было выполнение условия достижения параметром повреждаемости своего критического значения в какой-либо точке пространственной дискретизации –  $\psi = \psi_*$ . На рис. 3 представлены графики распределения радиальных перемещений и параметра повреждаемости вдоль оси  $z$ , в различные моменты времени, на внутренней поверхности цилиндра. Численным расчетом установлено, что время скрытого разрушения цилиндра составило  $t_{*1} = 3736$  ч. Разрушение начинается вблизи внутренней поверхности цилиндра в точке с координатами  $r_* = 9.04615 \cdot 10^{-2}$  м,  $z_* = 0.0576913 \cdot 10^{-2}$  м. Кроме того, было найдено время окончания скрытого разрушения с использованием классических определяющих соотношений ползучести (5), которое составило  $t_{*1}^{cl} = 1803$  ч. Итак, влияние вида нагружения приводит к двукратному увеличению срока службы данной конструкции.

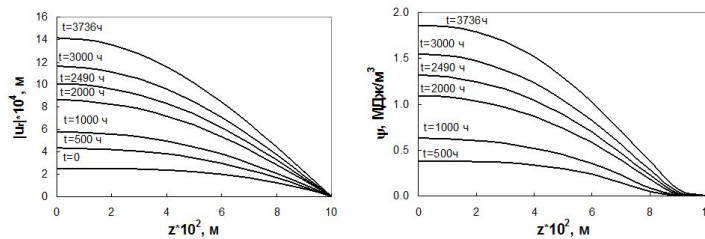


Рис. 3. Радиальные перемещения: а) повреждаемость; б) на внутренней поверхности цилиндра

Также для сравнения, решение данной задачи ползучести с учетом зависимости алюминиевого сплава АК4-1Т от вида нагружения было получено в рамках классической теории тонких оболочек [2], основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, с помощью метода Кутты–Мерсона при интегрировании по времени и метода дискретной ортогонализации Годунова для решения линеаризованных краевых задач. Было найдено время скрытого разрушения  $t_{*2} = 2490$  ч. При этом разрушение начинается в центральной части оболочки на внутренней ее поверхности ( $r_* = 9.0 \cdot 10^{-2}$  м,  $z_* = 0$ ).

**Таблица 1. Сравнение решения на основе пространственной постановки с решением, полученным на базе классической теории оболочек, на внутренней поверхности цилиндра в центральной его части**

$t$ , ч	$\sigma_\theta$ , МПа	$\psi$ , МДж/м <sup>3</sup>	$p_\theta \cdot 10^2$
0.0	<u>-165.7</u>	<u>0.0</u>	<u>0.0</u>
	-172.0	0.0	0.0
500.0	<u>-129.7</u>	<u>0.380</u>	<u>-0.257</u>
	-131.1	0.599	-0.388
1000.0	<u>-113.9</u>	<u>0.632</u>	<u>-0.440</u>
	-114.0	1.075	-0.711
2000.0	<u>-93.6</u>	<u>1.090</u>	<u>-0.780</u>
	-92.0	2.105	-1.437
$\frac{t_{*1}}{t_{*2}}$	<u>-</u>	<u>1.856</u>	<u>-1.350</u>
	-61.0	2.739	-1.931

В табл. 1–3 приведено сравнение результатов, полученных в рамках пространственной постановки (над чертой) и на базе классической теории тонких оболочек (под чертой), в различные моменты времени с учетом зависимости алюминиевого сплава АК4-1Т от вида нагружения. Из таблиц 1–3 видно, что в начальный момент времени и на ранней стадии ползучести получено удовлетворительное согласование результатов. На третьей же стадии ползучести наблюдаются значительные расхождения (>100 %), особенно для параметра повреждаемости и перемещений.

**Таблица 2. Сравнение решения на основе пространственной постановки с решением, полученным на базе классической теории оболочек, на внешней поверхности цилиндра в центральной его части**

$t$ , ч	$\sigma_\theta$ , МПа	$\psi$ , МДж/м <sup>3</sup>	$p_\theta \cdot 10^2$
0.0	<u>-143.6</u>	<u>0.0</u>	<u>0.0</u>
	-142.0	0.0	0.0
500.0	<u>-162.9</u>	<u>0.135</u>	<u>-0.102</u>
	-163.1	0.359	-0.245
1000.0	<u>-172.4</u>	<u>0.265</u>	<u>-0.204</u>
	-175.0	0.704	-0.482
2000.0	<u>-187.5</u>	<u>0.515</u>	<u>-0.405</u>
	-190.9	1.518	-1.035
$\frac{t_{*1}}{t_{*2}}$	<u>-209.2</u>	<u>1.012</u>	<u>-0.811</u>
	-201.0	2.041	-1.378

**Таблица 3. Сравнение радиальных перемещений срединной поверхности цилиндра в центральной его части, полученных на основе пространственной постановки и классической теории тонких оболочек**

$t$ , ч	0.0	500.0	1000.0	2000.0	$\frac{t_{*1}}{t_{*2}}$
$u_r \cdot 10^4$ , м	<u>-2.51</u>	<u>-3.05</u>	<u>-5.41</u>	<u>-8.05</u>	<u>-13.29</u>
	-2.60	-5.60	-8.29	-14.50	-18.39

### 3. Выводы

Определяющие соотношения ползучести и повреждаемости вследствие ползучести для первоначально изотропных материалов с характеристиками, зависящими от вида напряженного состояния, используются для исследования трехмерной ползучести и повреждаемости цилиндрического тела вращения. Сформулирована начально-краевая задача ползучести и повреждаемости в пространственной постановке. Предложен метод решения. Рассмотрены тонкая цилиндрическая оболочка и оболочка средней толщины. Проведено сравнение результатов, полученных на базе пространственной постановки и на базе гипотез Кирхгоффа–Лява. Исследовано влияние вида напряженного состояния на время до разрушения тонкой оболочки и оболочки средней толщины.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Бережной, И. А.* О диссипативных функциях в теории вязкопластических сред / И. А. Бережной, Д. Д. Ивлев, Е. В. Макаров // Проблемы механики сплошной среды, к 60-летию акад. В. В. Новожилова. – Л. : Судостроение, 1970. – С. 67–70.
- [2] *Золочевский, А. А.* Нелинейная механика деформируемого твердого тела / А. А. Золочевский, А. Н. Склепус, С. Н. Склепус. – Харьков : Бизнес Инвестор Групп, 2011. – 720 с.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* Об учете сжимаемости в теории идеально пластических сред / Д. Д. Ивлев, Т. Н. Мартынова // Прикл. матем. и механика. – 1961. – Т. 25. – Вып. 6. – С. 1126–1128.
- [4] *Ивлев, Д. Д.* О диссипативной функции в теории упрочняющихся пластических сред / Д. Д. Ивлев // Прикл. матем. и механика. – 1967. – Т. 31. – Вып. 2. – С. 346–348.
- [5] *Ивлев, Д. Д.* О диссипативной функции в теории пластических сред / Д. Д. Ивлев // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176. – № 5. – С. 1037–1039.
- [6] *Рвачев, В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – Киев : Наук. думка, 1982. – 552 с.
- [7] *Рубанов, В. В.* Экспериментальное обоснование определяющих уравнений ползучести металлических материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии. – Новосибирск: дис. . . канд. физ.-мат. наук. / В. В. Рубанов. – 1986. – 147 с.
- [8] *Цвелодуб, И. Ю.* Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов / И. Ю. Цвелодуб. – Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1991. – 202 с.

*Золочевский Александр Алексеевич,*

*доктор технических наук, старший научный сотрудник кафедры теории машин и механизмов, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков*

*e-mail: azol@rambler.ru*

*Склепус Сергей Николаевич,*

*кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела прикладной математики и вычислительных методов, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного Национальной Академии наук Украины, г. Харьков*

*e-mail: ssklepus@rambler.ru*

*Галишин Александр Закирьянович,*

*доктор технических наук, ведущий научный сотрудник отдела термопластичности, Институт механики им. С. П. Тимошенко Национальной академии наук Украины, г. Киев*

*e-mail: galishin55@mail.ru*

A. A. Zolochovsky, S. N. Sklepus, A. Z. Galishin

**THREE-DIMENSIONAL PROBLEM FOR A CYLINDER UNDER BENDING  
WITH DESCRIPTION OF THE DEPENDENCE OF THE CREEP AND  
DAMAGE CHARACTERISTICS ON THE KIND OF LOADING USING  
DISSIPATION FUNCTION**

*National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute»*

*A. N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems of the National Academy of  
Sciences of Ukraine*

*S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine*

**Abstract.** The three-dimensional problem under creep-damage conditions for a cylinder from the material with characteristics dependent on the kind of loading has been formulated. Following D. D. Ivlev [1], [4], [5], the dissipative function has been introduced, and constitutive equations to describe the creep and creep damage for the isotropic materials under consideration have been used. The numerical/analytical approach to find a solution of the initial/ boundary value problems under creep-damage conditions has been considered. A comparison between the three-dimensional and the classical Kirchhoff-Love solutions for a cylinder is given.

**Keywords:** creep, damage, cylinder, kind of loading, the dissipative function.

**REFERENCES**

- [1] *Berezhnaya, I. A.* About dissipative functions in the theory viscously plastic environments / I. A. Berezhnaya, D. D. Ivlev, E. V. Makarov // Problems of mechanics of the continuous environment, to the 60 anniversary of the academician V. V. Novozhilova. – L. : Sudostroenie, 1970. – P. 67–70.
- [2] *Zolochovsky, A. A.* Нелинейная механика деформируемого твердого тела / A. A. Zolochovsky, A. N. Sklepus, S. N. Sklepus. – Харьков: “Бизнес Инвестор Групп”, 2011. – 720 p.
- [3] *Ivlev, D. D.* About the accounting of compressibility in the theory it is ideal plastic environments / D. D. Ivlev, T. N. Martynova // Applied mathematics and mechanics. – 1961. – Vol. 25. – Issue 6. – P. 1126–1128.
- [4] *Ivlev, D. D.* About dissipative function in the theory being strengthened plastic environments / D. D. Ivlev // Applied mathematics and mechanics. – 1967. – Vol. 31. – Issue 2. – P. 346–348.
- [5] *Ivlev, D. D.* About dissipative function in the theory plastic environments / D. D. Ivlev // Reports of Academy of Sciences of the USSR. – 1967. – Vol. 176. – № 5. – P. 1037–1039.
- [6] *Rvachev, V. L.* Theory of R-functions and some it appendices / V. L. Rvachev. – Kiev : Sciences thought, 1982. – 552 p.
- [7] *Rubanov, V. V.* Experimental justification the defining equations of creep of metal materials with various properties at stretching and compression. – Novosibirsk : diss...candidate of phys.&math. / V. V. Rubanov. – 1986. – 147 p.
- [8] *Tsvlodub, I. Yu.* Postulate of stability and it appendices in the theory of creep of metal materials / I. Yu. Tsvlodub. – Novosibirsk : Hydrodynamics institute, 1991. – 202 p.

*Zolochovsky, Alexander Alekseevich*

*Dr. Sci., Senior Researcher, Department of Theory of Mechanisms and Machines, National Technical University “Kharkov Polytechnic Institute”, Kharkov*

*Sklepus, Sergiy Nikolaevich*

*Ph. D., Senior Researcher, Department of Applied Mathematics and Computational Methods, A. N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkov*

*Galishin, Alexander Zakiryanych*

*Dr. Sci., Leading Researcher, Department of Thermoplasticity, S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev*

А. А. Трещев, В. Г. Теличко, А. Н. Царев, П. Ю. Ходорович

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ ГРАФИТА 3D КОНЕЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** Рассматривается модификация объемного конечного элемента в форме тетраэдра для расчета пространственных конструкций из разнородных материалов. Выведена матрица жесткости для конечного элемента в форме тетраэдра с тремя степенями свободы в узле. Решена задача о расчете толстой сферической оболочки.

**Ключевые слова:** сферическая оболочка, анизотропия, ортотропия, разнородность, трехмерный конечный элемент.

УДК: 539.3; 624.04

Расчет плит и оболочек ведется, как известно, на базе прикладных технических теорий, позволяющих перейти от трехмерной задачи к двумерной, что существенно упрощает как математическую, так и чисто вычислительную процедуру. Очевидно, что реализация подобного подхода, в основе которого лежит исследование поведения срединной поверхности плиты или оболочки, в МКЭ обуславливает появление специфических конечных элементов. В большинстве случаев для построения матриц, характеризующих такие элементы, используются соответствующие соотношения теории плит и оболочек, основанные на априорных гипотезах об изменении напряженно-деформированного состояния по толщине. Имеется целый ряд таких теорий, отличающихся характером и степенью обоснованности вводимых допущений. Наиболее распространенными из них являются теория тонких пластин и оболочек Кирхгофа–Лява, средней толщины С. П. Тимошенко, Э. Рейсснера и т. д. Однако не все плиты и оболочки, применяемые в строительстве, можно отнести к классу тонких или средней толщины, во-первых, из-за их геометрических размеров, во-вторых, из-за существенной неоднородности материала и его нелинейного поведения, наличия арматуры, трещин и т. д. Более того, с точки зрения МКЭ каждый конечный элемент, являясь частью системы, должен рассматриваться как отдельная конструкция в ее составе, соотношение его геометрических размеров должно отвечать требованиям, при которых допустимо использование кинематических и статических гипотез.

Перечисленные особенности деформирования пространственных конструкций могут быть учтены только с привлечением аппарата общей трехмерной теории с использованием всей совокупности компонентов напряжений и деформаций. Поэтому необходим комплексный подход, сочетающий, с одной стороны, часть гипотез технической теории изгиба, с другой – соотношения общей механики. Основой такого подхода могут служить специальные конечные элементы, построенные на базе стандартных объемных элементов.

Рассмотрим объемный конечный элемент в виде тетраэдра (рис. 1) с 4-мя узлами в вершинах [1].

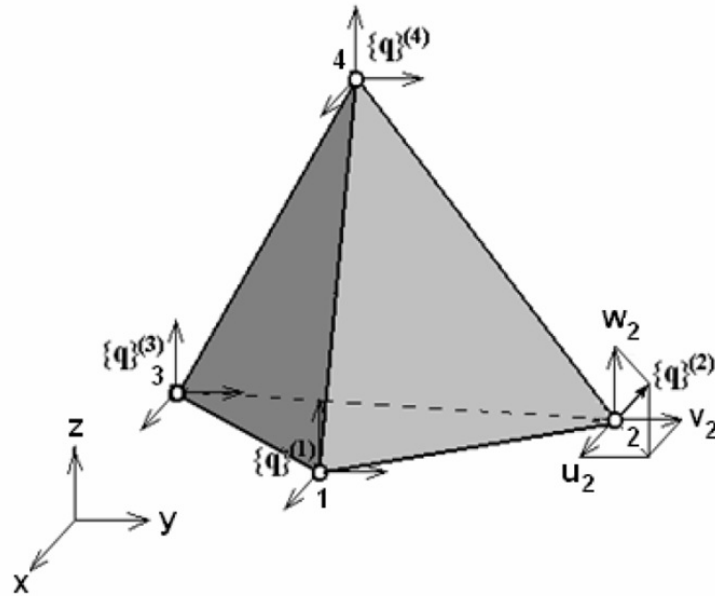


Рис. 1. Конечный элемент в виде тетраэдра

Вектор-столбец узловых перемещений  $i$ -го элемента имеет вид

$$\{q\}_i = \left\{ \{q\}_i^{(1)} \{q\}_i^{(2)} \{q\}_i^{(3)} \{q\}_i^{(4)} \right\}, \quad (1)$$

где каждый из векторов представляется тремя проекциями  $\{q\}_i^{(k)} = \{q_1^{(k)} q_2^{(k)} q_3^{(k)}\} = \{u_k v_k w_k\}$ .

Аналогичную структуру имеет вектор узловых сил:

$$\{R\}_i = \left\{ \{R\}_i^{(1)} \{R\}_i^{(2)} \{R\}_i^{(3)} \{R\}_i^{(4)} \right\}, \quad (2)$$

где  $\{R\}_i^{(k)} = \{R_1^{(k)} R_2^{(k)} R_3^{(k)}\}$ .

Связь между векторами (1) и (2)  $\{R\}_i = [K]_i \{q\}_i$  осуществляется с помощью матрицы жесткости  $[K]_i$ , которая имеет блочную структуру

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & [K]_{i1}^{(2)} & [K]_{i1}^{(3)} & [K]_{i1}^{(4)} \\ [K]_{i2}^{(1)} & [K]_{i2}^{(2)} & [K]_{i2}^{(3)} & [K]_{i2}^{(4)} \\ [K]_{i3}^{(1)} & [K]_{i3}^{(2)} & [K]_{i3}^{(3)} & [K]_{i3}^{(4)} \\ [K]_{i4}^{(1)} & [K]_{i4}^{(2)} & [K]_{i4}^{(3)} & [K]_{i4}^{(4)} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

а типовой блок определяется по формуле

$$[K]_{ij}^{(k)} = \iiint_{V_i} ([B]^{(j)})^T [D] [B]^{(k)} dV. \quad (4)$$

Для того чтобы построить матрицы для элемента, необходимо выразить перемещения точек внутри элемента через перемещения его узлов, т. е. установить зависимость  $\{u\} = [C] \{q\}_i = \left[ [C]^{(1)} [C]^{(2)} \dots [C]^{(k)} \dots [C]^{(n)} \right] \{q\}_i$ . Матрица интерполяционных функций для тетраэдра будет иметь четыре блока по числу узлов

$$[C] = \left[ [C]^{(1)} [C]^{(2)} [C]^{(3)} [C]^{(4)} \right], \quad (5)$$

каждый из которых равен  $[C]^{(k)} = E_3 C_k(x, y, z)$ , где  $E_3$  – единичная матрица третьего порядка.

Закон изменения перемещений  $u$ ,  $v$  и  $w$  по области элемента примем в виде линейных функций координат, т. е.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_4 x + \alpha_7 y + \alpha_{10} z; \\ v(x, y, z) &= \alpha_2 + \alpha_5 x + \alpha_8 y + \alpha_{11} z; \\ w(x, y, z) &= \alpha_3 + \alpha_6 x + \alpha_9 y + \alpha_{12} z. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что функции (6) обеспечивают неразрывность перемещений на границе между элементами. Для определения 12 неизвестных коэффициентов имеются 12 условий по общему числу компонентов узловых перемещений (4 узла по 3 перемещения в каждом). Например,  $u(x_1, y_1, z_1) = u_1 = \alpha_1 + \alpha_4 x_1 + \alpha_7 y_1 + \alpha_{10} z_1$  и т. д. Учитывая очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} C_1(x, y, z) + C_2(x, y, z) + C_3(x, y, z) + C_4(x, y, z) &= 1; \\ C_1(x, y, z)x_1 + C_2(x, y, z)x_2 + C_3(x, y, z)x_3 + C_4(x, y, z)x_4 &= x; \\ C_1(x, y, z)y_1 + C_2(x, y, z)y_2 + C_3(x, y, z)y_3 + C_4(x, y, z)y_4 &= y; \\ C_1(x, y, z)z_1 + C_2(x, y, z)z_2 + C_3(x, y, z)z_3 + C_4(x, y, z)z_4 &= z, \end{aligned} \quad (7)$$

после преобразований получим

$$\begin{Bmatrix} C_1(x, y, z) \\ C_2(x, y, z) \\ C_3(x, y, z) \\ C_4(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Откуда найдем:

$$\begin{aligned} C_1(x, y, z) &= \frac{1}{6V_i}(a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z); & C_2(x, y, z) &= \frac{1}{6V_i}(a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z); \\ C_3(x, y, z) &= \frac{1}{6V_i}(a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z); & C_4(x, y, z) &= \frac{1}{6V_i}(a_4 + b_4 x + c_4 y + d_4 z), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \det \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; & b_1 &= -\det \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; \\ c_1 &= -\det \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}; & d_1 &= -\det \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$a \ 6V_i = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \text{ – шесть объемов тетраэдра. Физический смысл выражений (9)}$$

заключается в том, что каждая из зависимостей представляет собой отношение объема соответствующего заштрихованного тетраэдра с вершиной в данной точке к объему всего конечного элемента (рис. 1), т. е.

$$C_1(x, y, z) = \frac{V_{m234}}{V_i}, C_2(x, y, z) = \frac{V_{m134}}{V_i}, C_3(x, y, z) = \frac{V_{m124}}{V_i}, C_4(x, y, z) = \frac{V_{m123}}{V_i}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} V_{m234} &= \frac{(a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z)}{6}, & V_{m134} &= \frac{(a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z)}{6}, \\ V_{m124} &= \frac{(a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z)}{6}, & V_{m123} &= \frac{(a_4 + b_4 x + c_4 y + d_4 z)}{6}. \end{aligned}$$



Функции, определенные соотношением (10), называют объемными  $L$ -координатами и являются нормализованными координатами для тетраэдра. Таким образом,

$$\begin{aligned} L_1 &= C_1(x, y, z); & L_2 &= C_2(x, y, z); \\ L_3 &= C_3(x, y, z); & L_4 &= C_4(x, y, z). \end{aligned} \quad (11)$$

Значения  $L$ -координат находятся в интервале 0–1, они удовлетворяют требованиям:

$$L_j(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad (12)$$

При этом из четырех  $L$ -координат только три являются независимыми, поскольку они связаны между собой выражением

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1. \quad (13)$$

Далее  $L$ -координаты будут использоваться для интерполяции узловых перемещений в область тех конечных элементов, которые отображаются на тетраэдр.

Каждый из четырех блоков матрицы деформаций запишем так:

$$[B]^{(k)} = [\Phi] C_k(x, y, z) = \frac{1}{6V_i} \begin{bmatrix} b_k & 0 & 0 \\ 0 & c_k & 0 \\ 0 & 0 & d_k \\ c_k & b_k & 0 \\ 0 & d_k & c_k \\ d_k & 0 & b_k \end{bmatrix}, \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (14)$$

Матрицу, осуществляющую связь между напряжениями и деформациями при объемном напряженном состоянии запишем в общем виде для анизотропного материала  $[D] = [D_{ij}]$  (причем  $D_{ij} = D_{ji}$ ), где  $i, j=1, \dots, 6$ . При этом будем исходить из предположения, что эта матрица постоянна в пределах элемента.

Подставив (14) и матрицу  $[D]$  в выражение (4) и осуществив интегрирование, получим типовой блок матрицы жесткости элемента в виде тетраэдра. Т. к. все компоненты матрицы  $[B]^{(k)}$  (14) являются независимыми от координат постоянными величинами, то интеграл в (4) заменяется выражением

$$[K]_{il}^{(k)} = \frac{1}{36V_i^2} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11} &= D_{11}b_k b_j + D_{44}c_k c_j + D_{66}d_k d_j + D_{14}(c_k b_j + b_k c_j) + \\ &\quad + D_{16}(d_k b_j + b_k d_j) + D_{46}(d_k c_j + c_k d_j); \\ K_{12} &= D_{12}c_k b_j + D_{14}b_k b_j + D_{15}d_k b_j + D_{24}c_k c_j + D_{44}b_k c_j + \\ &\quad + D_{45}d_k c_j + D_{26}c_k d_j + D_{46}b_k d_j + D_{56}d_k d_j; \\ K_{13} &= D_{13}d_k b_j + D_{15}c_k b_j + D_{16}b_k b_j + D_{43}d_k c_j + D_{45}c_k c_j + \\ &\quad + D_{46}b_k c_j + D_{36}d_k d_j + D_{56}c_k d_j + D_{66}b_k d_j; \\ K_{21} &= D_{12}b_k c_j + D_{24}c_k c_j + D_{26}d_k c_j + D_{14}b_k b_j + D_{44}c_k b_j + D_{46}d_k b_j + \\ &\quad + D_{15}b_k d_j + D_{45}c_k d_j + D_{56}d_k d_j; \\ K_{22} &= D_{22}c_k c_j + D_{44}b_k b_j + D_{55}d_k d_j + D_{24}(b_k c_j + c_k b_j) + \\ &\quad + D_{25}(d_k c_j + c_k d_j) + D_{45}(d_k b_j + b_k d_j); \\ K_{23} &= D_{23}d_k c_j + D_{25}c_k c_j + D_{26}b_k c_j + D_{34}d_k b_j + D_{45}c_k b_j + \\ &\quad + D_{46}b_k b_j + D_{35}d_k d_j + D_{55}c_k d_j + D_{56}b_k d_j; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{31} &= D_{13}b_k d_j + D_{34}c_k d_j + D_{36}d_k d_j + D_{15}b_k c_j + D_{45}c_k c_j + \\
&\quad + D_{56}d_k c_j + D_{16}b_k b_j + D_{46}c_k b_j + D_{66}d_k b_j; \\
K_{32} &= D_{23}c_k d_j + D_{34}b_k d_j + D_{35}d_k d_j + D_{25}c_k c_j + \\
&\quad + D_{45}b_k c_j + D_{55}d_k c_j + D_{26}c_k b_j + D_{46}b_k b_j + D_{56}d_k b_j; \\
K_{33} &= D_{33}d_k d_j + D_{55}c_k c_j + D_{66}b_k b_j + D_{35}(c_k d_j + d_k c_j) + \\
&\quad + D_{36}(b_k d_j + d_k b_j) + D_{56}(b_k c_j + c_k b_j), \\
&\quad j, k = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Распределенные объемные силы, вектор-столбец которых  $\{G_V\} = \{X_V Y_V Z_V\}$ , приводятся к эквивалентным узловым силам, вектор которых имеет блочную структуру  $\{P_V\}_i = \left\{ \{P_V\}_i^{(1)} \{P_V\}_i^{(2)} \{P_V\}_i^{(3)} \{P_V\}_i^{(4)} \right\}$ , причем каждый блок содержит компоненты вдоль осей  $x, y, z$  и равен  $\{P_V\}_i^{(k)} = \left\{ P_{1V}^{(k)} P_{2V}^{(k)} P_{3V}^{(k)} \right\}$ . Очевидно, имеем

$$\{P_V\}_i^{(k)} = \iiint_{V_i} C_k(x, y, z) \{G_V\} dx dy dz. \quad (16)$$

В том случае, когда объемные силы в пределах элемента постоянны,

$$\{P_V\}_i^{(k)} = \frac{V_i}{4} \{G_V\}. \quad (17)$$

Отметим, что если  $i$ -й элемент подвергается начальной деформации  $\{\varepsilon_t\}$ , постоянной в пределах элемента, то вектор-столбец узловых сил, эквивалентный этому воздействию, имеет типовой блок

$$\{P_t\}_i^{(k)} = V_i ([B]^{(k)})^T [D] \{\varepsilon_t\}. \quad (18)$$

Для конкретизации структурной анизотропии материала исследуемой оболочки в форме полусферы примем ортотропное тело. Тогда общие уравнения упругости для ортотропного разносопротивляющегося материала и соответственно матрицы  $[A] = [D^{-1}]$  примем в соответствии с гипотезами [2]:

$$\{\varepsilon_k\} = [A_{km}] \{\sigma_{ij}\}, \quad (k, m = 1, 2, \dots, 6, i, j = 1, 2, 3), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned}
[A_{km}] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \\
\{\varepsilon_k\} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}, \quad \{\sigma_{ij}\} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{pmatrix}; \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11})\sigma_{11} + [A_{1122} + B_{1122}(a_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{22} + \\
 &\quad + [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \\
 e_{22} &= [A_{1122} + B_{1122}(a_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11} + (A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22})\sigma_{22} + \\
 &\quad + [A_{2233} + B_{1133}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \\
 e_{33} &= [A_{1133} + B_{1133}(a_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{11} + (A_{2222} + B_{2222}(\alpha_{22} + \alpha_{33}))\sigma_{22} + \\
 &\quad + [A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33}]\sigma_{33}; \\
 e_{12} &= (A_{1212} + B_{1212}\sqrt{2}\alpha_{12})\tau_{12}; \quad e_{13} = (A_{1313} + B_{1313}\sqrt{2}\alpha_{13})\tau_{13}; \\
 e_{23} &= (A_{2323} + B_{2323}\sqrt{2}\alpha_{23})\tau_{23}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

При этом константы для ортотропного тела вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A_{kkkk} &= (1/E_k^+ + 1/E_k^-)/2; \quad B_{kkkk} = (1/E_k^+ - 1/E_k^-)/2; \\
 A_{ijij} &= -(\nu_{ij}^+/E_j^+ + \nu_{ij}^-/E_j^-)/2; \quad B_{ijij} = -(\nu_{ij}^+/E_j^+ - \nu_{ij}^-/E_j^-)/2; \\
 A_{ijij} &= (1/E_{ij}^+ + 1/E_{ij}^-) - 0,25 \left[ \begin{aligned} &(1/E_i^+ + 1/E_j^+ + 1/E_i^- + 1/E_j^-) - \\ &-2(\nu_{ji}^+/E_i^+ + \nu_{ji}^-/E_i^-) \end{aligned} \right]; \\
 B_{ijij} &= \sqrt{2}(1/E_{ij}^+ - 1/E_{ij}^-) - 0,125\sqrt{2} \left[ \begin{aligned} &(1/E_i^+ + 1/E_j^+ - 1/E_i^- - 1/E_j^-) - \\ &-4(\nu_{ji}^+/E_i^+ - \nu_{ji}^-/E_i^-) \end{aligned} \right],
 \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\nu_{ij}^+/E_j^+ = \nu_{ji}^+/E_i^+; \quad \nu_{ij}^-/E_j^- = \nu_{ji}^-/E_i^-.$$

Рассмотрим пример расчета толстой оболочки в форме полусферы (рис. 2, 3), жестко опертой по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой в нормальном направлении к поверхности.

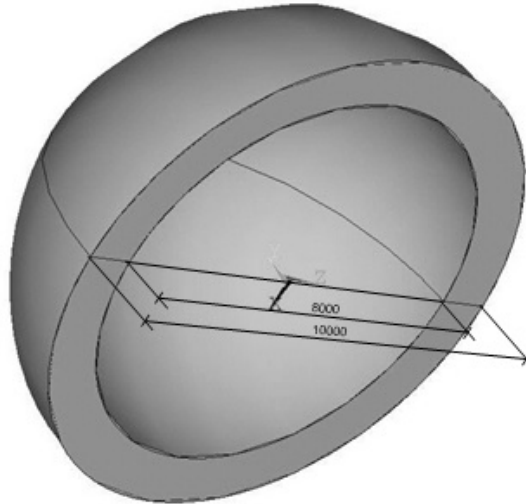


Рис. 2. Сферическая оболочка: размеры

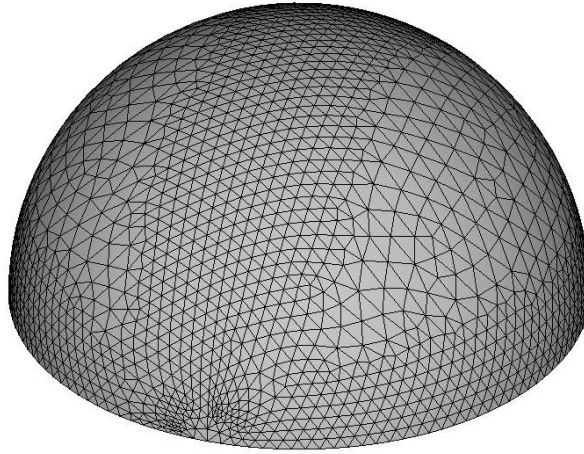


Рис. 3. Сферическая оболочка: разбиение на конечные элементы

Исходные данные для расчета принимались следующие: полусфера с внешним радиусом 10000 мм, внутренним 8000 мм. Материал оболочки – графит АТJ-S. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки  $q$  варьировалась от 0 до 0,7 МПа. Расчет велся с помощью метода конечных элементов в сочетании с методом "переменных параметров" упругости.

Некоторые результаты расчета представлены на рис. 4, 5.

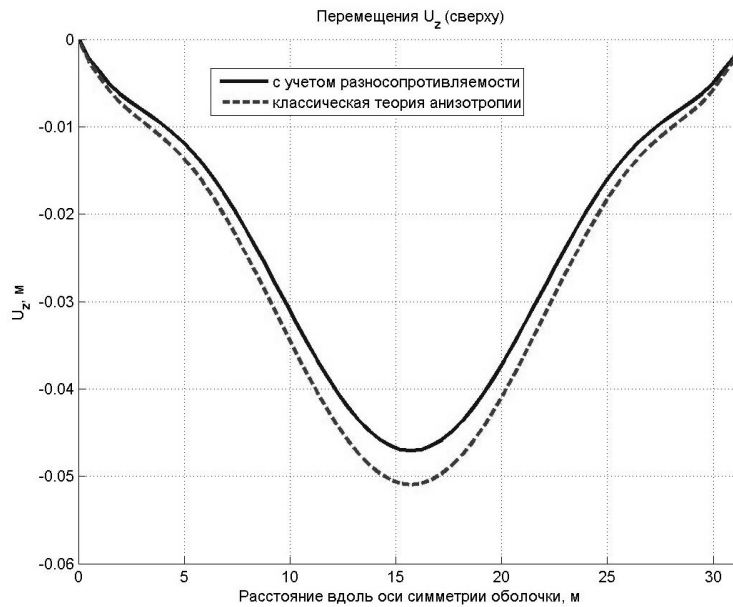


Рис. 4. Вертикальные перемещения  $U_z$ , м на верхней поверхности оболочки при нагрузке  $q=0,7$  МПа вдоль оси симметрии

Проведенные авторами исследования напряженно-деформированного состояния толстой сферической оболочки из разнотривляющего анизотропного материала показали, что

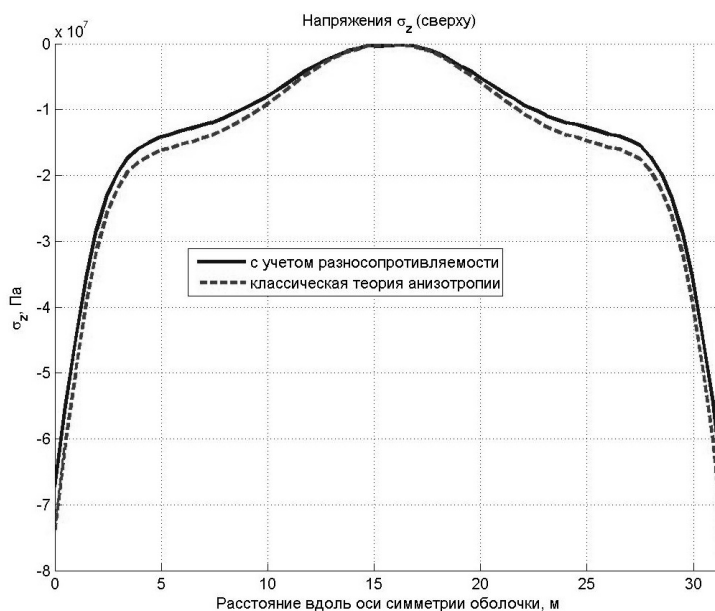


Рис. 5. Напряжения  $\sigma_z$ , Па на верхней поверхности оболочки при нагрузке  $q=0,7$  МПа вдоль оси симметрии

пренебрегать учетом явления разнотолщинности при расчете толстых оболочечных элементов конструкций нельзя, так как это может привести к значительным погрешностям в определении параметров напряженно-деформированного состояния до 30 % и более для перемещений и напряжений.

Разработанная авторами вычислительная модель приобретает особую актуальность в связи с широким распространением анизотропных разнотолщинных материалов в строительных конструкциях, авиастроении и технологическом оборудовании, а также в связи с отсутствием надежной теории для расчета конструкций из таких материалов.

Материалы статьи могут быть полезны для специалистов в области прогнозирования поведения конструкций, а также для выполнения проекторочных и проверочных расчетов.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Клованич, С. Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики / С. Ф. Клованич // Запорожье : Издательство журнала "Світ геотехніки 2009. – 400 с.
- [2] Трещев, А. А. Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А. А. Трещев. – М. ; Тула : РААСН ; ТулГУ, 2008. – 264 с.

Трещев Александр Анатольевич,

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: taa58@yandex.ru

*Теличко Виктор Григорьевич,*

*кандидат технических наук, доцент кафедры "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: katranv@yandex.ru*

*Царев Александр Николаевич,*

*аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: tula1146@mail.ru*

*Ходорович Павел Юрьевич,*

*аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: antaresn80@mail.ru*

A. A. Treshchev, V. G. Telichko, A. N. Tsarev

**MODELING OF SPHERICAL SHELL MADE OF DIFFERENT RESISTANT GRAPHITE WITH 3D FINITE ELEMENT**

*Tula State University*

**Abstract.** A modification of the 3D finite element in the form of a tetrahedron to calculate the spatial structures of different resistant materials. We derive the stiffness matrix for a finite element in the form of a tetrahedron with three degrees of freedom in the node. Solved the problem of calculating the thick hemisphere shell.

**Keywords:** sphere shell, anisotropy, orthotropy, different resistance, 3D finite element.

**REFERENCES**

- [1] *Klovanich, S. F.* Method of final elements in nonlinear problems of engineering mechanics / S. F. Klovanich // Zaporozhye : Світ геотехніки magazine publishing house, 2009. – 400 p.  
[2] *Treshchev, A. A.* Theory of deformation and durability of the materials sensitive to type of a tension. Defining ratios / A. A. Treshchev. – M. ; Tula : RAASN ; TulSU, 2008. – 264 p.

*Treshchev, Alexander Anatolievich*

*holder of chair construction, construction materials and designs, Doctor of Engineering, professor, Tula State University, Tula*

**e-mail:** taa58@yandex.ru

*Telichko, Victor Grigorievich*

*associate professor construction, construction materials and designs, Candidate of Engineering, Tula State University, Tula*

**e-mail:** katranv@yandex.ru

*Tsarev, Alexander Nikolayevich*

*post-graduate student, Tula State University, Tula*

**e-mail:** tula1146@mail.ru

*Hodorovich, Pavel Yurevich*

*post-graduate student, Tula State University, Tula*

**e-mail:** antaresn80@mail.ru

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ, ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ К ВИДУ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Тульский государственный университет

**Аннотация.** Получены определяющие соотношения для существенно нелинейных изотропных разнсопротивляющихся материалов. Рассмотрена методика построения конечного элемента для решения связанных задач термоупругости материалов, свойства которых зависят от вида напряженного состояния.

**Ключевые слова:** разнсопротивляемость, нелинейность, метод конечных элементов, связанность, термоупругость.

УДК: 539.384.6

Большое количество современных конструкционных материалов не соответствуют классическим гипотезам механики деформируемого твердого тела. У этих материалов проявляется зависимость механических и температурных свойств от вида реализуемого в точке напряженного состояния [1, 2, 3]. В работах [4, 5] был оценено влияние разнсопротивляемости и связанности полей напряжений и температур на НДС различных конструкций. Однако принятые в расчетах квазилинейные зависимости между напряжениями и деформациями могут приводить к значительным погрешностям, если кривые деформирования имеют явно нелинейный характер. Для борьбы с этими погрешностями предлагается построить новые определяющие соотношения на основе термодинамического потенциала Гиббса в форме [6]:

$$\begin{aligned} \Gamma = & (A_e + B_e \cdot \xi) \cdot \sigma_0^2 + (C_e + D_e \cdot \xi + E_e \cdot \eta \cdot \cos(3\phi)) \cdot \tau_0^2 + \\ & + [(A_e + B_e \cdot \xi) \cdot \sigma_0^2 + (C_e + D_e \cdot \xi + E_e \cdot \eta \cdot \cos(3\phi)) \cdot \tau_0^2]^n + \\ & + C_\sigma \cdot \frac{\theta^2}{T_0} + ((b_{t1} \cdot \xi + b_{t2}) \cdot \sigma_0 + b_{t1} \cdot \eta \cdot \tau_0) \cdot \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $A_e, B_e, C_e, D_e, E_e$  – константы линейной части потенциала,  $A_p, B_p, C_p, D_p, E_p$  – константы нелинейной части потенциала,  $b_{t1}, b_{t2}$  – константы части потенциала, связывающей поля напряжений и температур,  $C_\sigma$  – теплоемкость материала при постоянном давлении,  $\xi = \cos \psi = \sigma/S_0$ ,  $\eta = \sin \psi = \tau/S_0$  – гармонические функции, которые трактуются как нормированные нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке;  $\cos 3\phi$  – фазовый инвариант,  $\sigma_0 = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$  – средние нормальные напряжения;  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $S_0 = \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_0^2}$ ;  $\tau_0 = \sqrt{S_{ij} S_{ij} / 3}$  – октаэдрические касательные напряжения;  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0$  – компоненты девиатора напряжений,  $\theta = T - T_0$  – изменение температуры от начального ненапряженного состояния;  $T$  – конечная температура в точке тела;  $T_0$  – начальная температура в точке тела в ненапряженном состоянии.



На основе предложенного потенциала (1) строятся определяющие соотношения для изотропных разносопротивляющихся материалов, находящихся в поле действия температур. Для решения широкого круга задач механики деформируемого твердого тела предлагается построить новый конечный элемент в виде тетраэдра с четырьмя узлами. Система разрешающих уравнений МКЭ для связанной термоупругости при статических нагрузках записывается в виде:

$$\begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [C^{tu}] & [C^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{\dot{T}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [K^{ut}] \\ [0] & [K^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

где  $\{u\}$  – вектор перемещений;  $\{T\}$  – вектор температур;  $\{\dot{u}\}$  – вектор скоростей изменения перемещений;  $\{\dot{T}\}$  – вектор скоростей изменения температур (в расчетах для аппроксимации производных по времени будем применять неявную разностную схему);  $\{F\}$  – вектор узловых механических нагрузок;  $\{Q\}$  – вектор узловых температурных нагрузок;  $[K] = \iiint_{vol} [B]^T [D] [B] dx \cdot dy \cdot dz$  – матрица жесткости КЭ в виде тетраэдра при механическом нагружении;  $[B]$  – матрица деформаций,  $[D]$  – матрица упругости;  $[K^{ut}]$  – термоупругая составляющая матрицы жесткости;  $[K^{ut}] = -\iiint_{vol} [B]^T \{\beta\} ([C]^T) dx \cdot dy \cdot dz$ ;  $\{\beta\} = [D] \{\alpha\}$ ,  $\{\alpha\} = \{ \alpha_{11} \ \alpha_{22} \ \alpha_{33} \ 0 \ 0 \ 0 \}^T$ ,  $\alpha_{ij} = \frac{b_{i1} \xi \sigma_{ij}}{3\sigma} + \frac{1}{3} b_{t2} \delta_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3$  – коэффициенты линейного теплового расширения материала по направлениям координатных осей, зависящие от вида напряженного состояния,  $[C]$  – матрица интерполяционных функций;  $[K^t] = \iiint_{vol} [B_T]^T [D_T] [B_T] dx \cdot dy \cdot dz$  – элемент матрицы теплопроводности;  $[B]_T = \{L\} \{C\} \{C\}^T \{T\}$ ;  $\{L\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial y} \ \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T$  – вектор оператор;  $[D_T] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix}$ ,  $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}$  – коэффициенты теплопроводности материала по направлениям координатных осей;  $[C^{tu}] = -T_0 [K^{ut}]^T$  – элемент матрицы термоупругого затухания;  $[C^t] = \rho \iiint_{vol} C_\sigma \{C\} \{C\}^T dx \cdot dy \cdot dz$  – элемент матрицы температурного затухания.

Матрица жесткости  $[K]_i$  объемного КЭ в виде тетраэдра при механическом нагружении имеет блочную структуру:

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & [K]_{i1}^{(2)} & [K]_{i1}^{(3)} & [K]_{i1}^{(4)} \\ [K]_{i2}^{(1)} & [K]_{i2}^{(2)} & [K]_{i2}^{(3)} & [K]_{i2}^{(4)} \\ [K]_{i3}^{(1)} & [K]_{i3}^{(2)} & [K]_{i3}^{(3)} & [K]_{i3}^{(4)} \\ [K]_{i4}^{(1)} & [K]_{i4}^{(2)} & [K]_{i4}^{(3)} & [K]_{i4}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

а типовой блок определяется по формуле [7]:

$$[K]_{ij}^{(k)} = \iiint_{V_i} ([B]^{(j)})^T [D] [B]^{(k)} dV. \quad (4)$$

Матрица деформаций  $[B]$  также блочная:  $[B] = [B]^{(1)} [B]^{(2)} \dots [B]^{(k)} \dots [B]^{(n)}$ , где  $[B]^{(k)} = [\Phi] [C]^{(k)}$  – матрица дифференциальных операторов

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы построить матрицы для элемента, необходимо выразить перемещения точек внутри элемента через перемещения его узлов, т.е. установить зависимость  $\{u\} = [C] \{q\}_i = [[C]^{(1)}[C]^{(2)} \dots [C]^{(k)} \dots [C]^{(n)}] \{q\}_i$ , где  $\{u\} = \{u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)\}$  – вектор перемещений. Матрица интерполяционных функций для тетраэдра будет иметь четыре блока по числу узлов

$$[C] = [[C]^{(1)}[C]^{(2)}[C]^{(3)}[C]^{(4)}], \quad (5)$$

каждый из которых равен  $[C]^{(k)} = E_3 C_k(x, y, z)$ , где  $E_3$  – единичная матрица третьего порядка.

Закон изменения перемещений  $u$ ,  $v$  и  $w$  по области элемента примем в виде линейных функций координат, т.е.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_4 x + \alpha_7 y + \alpha_{10} z; \\ v(x, y, z) &= \alpha_2 + \alpha_5 x + \alpha_8 y + \alpha_{11} z; \\ w(x, y, z) &= \alpha_3 + \alpha_6 x + \alpha_9 y + \alpha_{12} z. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что функции (6) обеспечивают неразрывность перемещений на границе между элементами. Для определения 12 неизвестных коэффициентов имеются 12 условий по общему числу компонентов узловых перемещений (4 узла по 3 перемещения в каждом). Например,  $u(x_1, y_1, z_1) = u_1 = \alpha_1 + \alpha_4 x_1 + \alpha_7 y_1 + \alpha_{10} z_1$  и т.д. Учитывая очевидные соотношения

$$\begin{aligned} C_1(x, y, z) + C_2(x, y, z) + C_3(x, y, z) + C_4(x, y, z) &= 1; \\ C_1(x, y, z)x_1 + C_2(x, y, z)x_2 + C_3(x, y, z)x_3 + C_4(x, y, z)x_4 &= x; \\ C_1(x, y, z)y_1 + C_2(x, y, z)y_2 + C_3(x, y, z)y_3 + C_4(x, y, z)y_4 &= y; \\ C_1(x, y, z)z_1 + C_2(x, y, z)z_2 + C_3(x, y, z)z_3 + C_4(x, y, z)z_4 &= z, \end{aligned} \quad (7)$$

после преобразований получим

$$\begin{Bmatrix} C_1(x, y, z) \\ C_2(x, y, z) \\ C_3(x, y, z) \\ C_4(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Откуда найдем

$$\begin{aligned} C_1(x, y, z) &= \frac{1}{6V_i} (a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z); & C_2(x, y, z) &= \frac{1}{6V_i} (a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z); \\ C_3(x, y, z) &= \frac{1}{6V_i} (a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z); & C_4(x, y, z) &= \frac{1}{6V_i} (a_4 + b_4 x + c_4 y + d_4 z), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{где } a_1 &= \det \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; & b_1 &= -\det \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; & c_1 &= -\det \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}; \\ d_1 &= -\det \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}, & \text{а } 6V_i &= \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & - \text{шесть объемов тетраэдра.} \end{aligned}$$

Физический смысл выражений (9) заключается в том, что каждая из зависимостей представляет собой отношение объема соответствующего заштрихованного тетраэдра с вершиной в данной точке к объему всего конечного элемента, т.е.

$$\begin{aligned} C_1(x, y, z) &= \frac{V_{m234}}{V_i}, & C_2(x, y, z) &= \frac{V_{m134}}{V_i}, \\ C_3(x, y, z) &= \frac{V_{m124}}{V_i}, & C_4(x, y, z) &= \frac{V_{m123}}{V_i}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{где } V_{m234} &= \frac{(a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z)}{6}, & V_{m134} &= \frac{(a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z)}{6}, & V_{m124} &= \frac{(a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z)}{6}, \\ V_{m123} &= \frac{(a_4 + b_4 x + c_4 y + d_4 z)}{6} \end{aligned}$$

Функции, определенные соотношением (10), называют объемными L-координатами и являются нормализованными координатами для тетраэдра. Таким образом,

$$L_1 = C_1(x, y, z); \quad L_2 = C_2(x, y, z); \quad L_3 = C_3(x, y, z); \quad L_4 = C_4(x, y, z). \quad (11)$$

Значения L-координат находятся в интервале 0-1, они удовлетворяют требованиям

$$L_j(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad (12)$$

При этом из четырех L-координат только три являются независимыми, поскольку они связаны между собой выражением

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1. \quad (13)$$

Далее L-координаты будут использоваться для интерполяции узловых перемещений в область тех конечных элементов, которые отображаются на тетраэдр.

Каждый из четырех блоков матрицы деформаций запишем так:

$$[B]^{(k)} = [\Phi] C_k(x, y, z) = \frac{1}{6V_i} \begin{bmatrix} b_k & 0 & 0 \\ 0 & c_k & 0 \\ 0 & 0 & d_k \\ c_k & b_k & 0 \\ 0 & d_k & c_k \\ d_k & 0 & b_k \end{bmatrix}, \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (14)$$

Матрицу, осуществляющую связь между напряжениями и деформациями при объемном напряженном состоянии  $\sigma_{ij} = [D] e_{ij}$ , запишем в общем виде  $[D] = [D_{ij}]$  (причем  $D_{ij} = D_{ji}$ ), где  $i, j=1, \dots, 6$ . При этом будем исходить из предположения, что эта матрица постоянна в пределах элемента.

Для определения матрицы  $[D]$  получим зависимости между деформациями и напряжениями с помощью дифференцирования потенциала Гиббса без температурной составляющей:

$$e_{ij} = A_{ijkm} \sigma_{km}; \quad (i, j, k, m = 1, 2, 3), \quad (15)$$

$$[A_{ijkm}] = [D]^{-1} = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1112} & A_{1113} & A_{1112} & A_{1123} & A_{1113} \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & A_{2212} & A_{2223} & A_{2213} \\ A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & A_{3312} & A_{3323} & A_{3313} \\ A_{1211} & A_{1222} & A_{1233} & A_{1212} & A_{1223} & A_{1213} \\ A_{2311} & A_{2322} & A_{2333} & A_{2312} & A_{2323} & A_{2313} \\ A_{1311} & A_{1322} & A_{1333} & A_{1312} & A_{1323} & A_{1313} \end{bmatrix};$$

$$A_{1111} = \frac{1}{3} \left[ \begin{array}{l} -B_e \cdot \xi^3 + \frac{4}{3} C_e + \frac{1}{3} D_e \cdot (1 + 3 \cdot \xi^2) \cdot \xi - \\ -\frac{2\sqrt{6}}{3} E_e \cdot (\alpha_{33} + \alpha_{22}) - E_e \cdot \cos(3\phi) \cdot \eta^3 + \\ + \frac{1}{\sigma_{11}} \cdot (2 \cdot A_e \cdot \sigma_0 + 3 \cdot B_e \cdot \sigma_0 \cdot \xi + D_e \cdot \tau_0 \cdot \eta + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot E_e \cdot S_0) \end{array} \right] +$$

$$+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left[ \begin{array}{l} -B_p \cdot \xi^3 + \frac{4}{3} C_p + \frac{1}{3} D_p \cdot (1 + 3 \cdot \xi^2) \cdot \xi - \\ -\frac{2\sqrt{6}}{3} E_p \cdot (\alpha_{33} + \alpha_{22}) - E_p \cdot \cos(3\phi) \cdot \eta^3 + \\ + \frac{1}{\sigma_{11}} \cdot (2 \cdot A_p \cdot \sigma_0 + 3 \cdot B_p \cdot \sigma_0 \cdot \xi + D_p \cdot \tau_0 \cdot \eta + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot E_p \cdot S_0) \end{array} \right];$$

$$A_{1122} = A_{2211} = \frac{1}{3} \left[ -\frac{2}{3} D_e \cdot \xi - \sqrt{6} \cdot E_e \cdot \alpha_{22} + \frac{2\sqrt{6}}{3} E_e \cdot \alpha_{33} - \frac{2}{3} C_e \right] +$$

$$+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left( -\frac{2}{3} D_p \cdot \xi - \sqrt{6} \cdot E_p \cdot \alpha_{22} + \frac{2\sqrt{6}}{3} E_p \cdot \alpha_{33} - \frac{2}{3} C_p \right);$$

$$A_{1133} = A_{3311} = \frac{1}{3} \left[ -\frac{2}{3} D_e \cdot \xi + \frac{2\sqrt{6}}{3} E_e \cdot \alpha_{22} - \sqrt{6} \cdot E_e \cdot \alpha_{33} - \frac{2}{3} C_e \right] +$$

$$+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left( -\frac{2}{3} D_p \cdot \xi + \frac{2\sqrt{6}}{3} E_p \cdot \alpha_{22} - \sqrt{6} \cdot E_p \cdot \alpha_{33} - \frac{2}{3} C_p \right);$$

$$A_{1112} = A_{1211} = -\frac{\sqrt{6}}{9} \cdot E_e \cdot \alpha_{12} - Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{12};$$

$$A_{1123} = A_{2311} = -\frac{10\sqrt{6}}{9} \cdot E_e \cdot \alpha_{23} - Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{10\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{23};$$

$$\begin{aligned}
A_{1113} &= A_{1311} = -\frac{\sqrt{6}}{9} E_e \cdot \alpha_{13} - Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{13}; \\
A_{2222} &= \frac{1}{3} \left[ \begin{aligned} &\frac{4}{3} C_e + \left(\frac{1}{3} + \xi^2\right) D_e \cdot \xi - B_e \cdot \xi^3 + \\ &+ E_e \left( \sqrt{6} \cdot \alpha_{11} + \sqrt{6} \cdot \alpha_{22} - \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \alpha_{33} + \cos(3\phi) \cdot \eta^3 \right) + \\ &+ \frac{1}{\sigma_{22}} \left( 2 \cdot A_e \cdot \sigma_0 + 3 \cdot B_e \cdot \sigma_0 \cdot \xi + D_e \cdot \tau_0 \cdot \eta - S_0 \cdot E_e \cdot \sqrt{2} \right) \end{aligned} \right] + \\
&+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left[ \begin{aligned} &\frac{4}{3} C_p + \left(\frac{1}{3} + \xi^2\right) D_p \cdot \xi - B_p \cdot \xi^3 + \\ &+ E_p \cdot \left( \sqrt{6} \cdot \alpha_{11} + \sqrt{6} \cdot \alpha_{22} - \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \alpha_{33} + \cos(3\phi) \cdot \eta^3 \right) + \\ &+ \frac{1}{\sigma_{22}} \left( 2 \cdot A_p \cdot \sigma_0 + 3 \cdot B_p \cdot \sigma_0 \cdot \xi + D_p \cdot \tau_0 \cdot \eta - E_p \cdot S_0 \cdot \sqrt{2} \right) \end{aligned} \right]; \\
A_{2233} &= A_{3322} = \frac{1}{3} \left( -\frac{2}{3} D_e \cdot \xi + \frac{2\sqrt{6}}{3} E_e \cdot \alpha_{11} - \frac{2}{3} C_e \right) + \\
&+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left[ -\frac{2}{3} D_p \cdot \xi + \frac{2\sqrt{6}}{3} E_p \cdot \alpha_{11} - \frac{2}{3} C_p \right]; \\
A_{2212} &= A_{1222} = \frac{5\sqrt{6}}{9} E_e \cdot \alpha_{12} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{5\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{12}; \\
A_{2223} &= A_{2322} = \frac{5\sqrt{6}}{9} E_e \cdot \alpha_{23} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{5\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{23}; \\
A_{2213} &= A_{1322} = -\frac{4\sqrt{6}}{9} E_e \cdot \alpha_{13} - Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{4\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{13}; \\
A_{3333} &= \frac{1}{3} \left[ \begin{aligned} &\frac{4}{3} C_e + \left(\frac{1}{3} + \xi^2\right) D_e \cdot \xi - B_e \cdot \xi^3 + \\ &+ E_e \cdot \left( \frac{\sqrt{6}}{3} \alpha_{11} - \frac{2\sqrt{6}}{3} \alpha_{22} + \sqrt{6} \cdot \alpha_{33} - \eta^3 \cdot \cos(3\phi) \right) + \\ &+ \frac{1}{\sigma_{33}} \left( 2 \cdot A_e \cdot \sigma_0 + 3 \cdot B_e \cdot \sigma_0 \cdot \xi + D_e \cdot \eta \cdot \tau_0 - E_e \cdot S_0 \cdot \sqrt{2} \right) \end{aligned} \right] + \\
&+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left[ \begin{aligned} &\frac{4}{3} C_p + \left(\frac{1}{3} + \xi^2\right) \cdot D_p \cdot \xi - B_p \cdot \xi^3 + \\ &+ E_p \cdot \left( \frac{\sqrt{6}}{3} \alpha_{11} - \frac{2\sqrt{6}}{3} \alpha_{22} + \sqrt{6} \cdot \alpha_{33} - \eta^3 \cdot \cos(3\phi) \right) + \\ &+ \frac{1}{\sigma_{33}} \left( 2 \cdot A_p \cdot \sigma_0 + 3 \cdot B_p \cdot \sigma_0 \cdot \xi + D_p \cdot \eta \cdot \tau_0 - E_p \cdot S_0 \cdot \sqrt{2} \right) \end{aligned} \right]; \\
A_{3312} &= A_{1233} = -\frac{4\sqrt{6}}{9} E_e \cdot \alpha_{12} - Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{4\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{12}; \\
A_{3323} &= A_{2333} = \frac{5\sqrt{6}}{9} E_e \cdot \alpha_{23} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{5\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{23}; \\
A_{3313} &= A_{1333} = \frac{5\sqrt{6}}{9} E_e \cdot \alpha_{13} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{5\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{13}; \\
A_{1212} &= \frac{1}{3} \left[ \begin{aligned} &2 \cdot D_e \cdot (1 + \xi^2) \cdot \xi - 2 \cdot B_e \cdot \xi^3 + 4 \cdot C_e + \\ &+ \frac{\sqrt{6}}{3} E_e \cdot (7\alpha_{11} + \alpha_{22} - 8\alpha_{33} - \sqrt{6} \cos(3\phi) \cdot \eta^3) \end{aligned} \right] + \\
&+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left[ \begin{aligned} &2 \cdot (1 + \xi^2) \cdot D_p \cdot \xi - 2 \cdot \xi^3 \cdot B_p + 4 \cdot C_p + \\ &+ \frac{\sqrt{6}}{3} E_p \cdot (7\alpha_{11} + \alpha_{22} - 8\alpha_{33} - \sqrt{6} \cdot \cos(3\phi) \cdot \eta^3) \end{aligned} \right]; \\
A_{1223} &= A_{2312} = E_e \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{13} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot E_p \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{13}; \\
A_{1213} &= A_{1312} = E_e \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{23} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot E_p \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{23}; \\
A_{2323} &= \frac{1}{3} \left[ \begin{aligned} &-2 \cdot B_e \cdot \xi^3 + 4 \cdot C_e + \frac{2}{3} D_e (1 + \xi^2) \cdot \xi + \\ &+ \frac{\sqrt{6}}{3} E_e \cdot (-2 \cdot \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} - \sqrt{6} \cdot \cos(3\phi) \cdot \eta^3) \end{aligned} \right] + \\
&+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left( -2 \cdot B_p \cdot \xi^3 + 4 \cdot C_p + \frac{2}{3} D_p (1 + \xi^2) \cdot \xi + \right. \\
&\left. + \frac{\sqrt{6}}{3} E_p \cdot (-2 \cdot \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} - \sqrt{6} \cdot \cos(3\phi) \cdot \eta^3) \right); \\
A_{2313} &= A_{1323} = E_e \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{12} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot E_p \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{12}; \\
A_{1313} &= \frac{1}{3} \left[ \begin{aligned} &2 \cdot (\xi^2 + 1) D_e \cdot \xi - 2 \cdot B_e \cdot \xi^3 + 4 \cdot C_e + \\ &+ \frac{\sqrt{6}}{3} E_e \cdot (7 \cdot \alpha_{11} - 8 \cdot \alpha_{22} + \alpha_{33} - \sqrt{6} \cdot \eta^3 \cdot \cos(3\phi)) \end{aligned} \right] + \\
&+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left[ \begin{aligned} &2 \cdot (\xi^2 + 1) D_p \cdot \xi - 2 \cdot B_p \cdot \xi^3 + 4 \cdot C_p + \\ &+ \frac{\sqrt{6}}{3} E_p \cdot (7 \cdot \alpha_{11} - 8 \cdot \alpha_{22} + \alpha_{33} - \sqrt{6} \cdot \eta^3 \cdot \cos(3\phi)) \end{aligned} \right]; \\
Y_u &= \sigma_0^2 \cdot A_p + \sigma_0^2 \cdot \xi \cdot B_p + \tau_0^3 \cdot C_p + D_p \cdot \sigma_0 \cdot \tau_0 \cdot \eta + \tau_0^2 \cdot \eta \cdot E_p \cdot \cos(3\phi); \\
\alpha_{ij} &= \sqrt{3} \cdot \sigma_{ij} / S_0.
\end{aligned}$$

Подставив (14) и матрицу  $[D]$  в выражение (4) и осуществив интегрирование, получим типовой блок матрицы жесткости элемента в виде тетраэдра:

$$[K]_{il}^{(k)} = \frac{1}{36V_i^2} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Распределенные объемные силы, вектор-столбец которых  $\{G_V\} = \{X_V Y_V Z_V\}$ , приводятся к эквивалентным узловым силам, вектор которых имеет блочную структуру  $\{P_V\}_i = \left\{ \{P_V\}_i^{(1)} \{P_V\}_i^{(2)} \{P_V\}_i^{(3)} \{P_V\}_i^{(4)} \right\}$ , причем каждый блок содержит компоненты вдоль осей  $x, y, z$  и равен  $\{P_V\}_i^{(k)} = \left\{ P_{1V}^{(k)} P_{2V}^{(k)} P_{3V}^{(k)} \right\}$ . Очевидно, имеем  $\{P_V\}_i^{(k)} = \iiint_{V_i} C_k(x, y, z) \{G_V\} dx dy dz$ .

С помощью полученного конечного элемента можно исследовать НДС конструкций сложной формы, в том числе с криволинейным контуром и отверстиями. Математическая модель программно реализуется в среде Visual C++. Для апробации математической модели предполагается сравнить полученные решения с результатами работ [4, 5], в которых исследовались конструкции из квазилинейных изотропных разнородных материалов с помощью метода конечных разностей. На следующем этапе исследований будут проведены расчеты железобетонных конструкций. Нелинейная форма потенциала (1) оптимально подходит для описания деформирования бетона, а с помощью изменения свойств материала для отдельных слоев КЭ будет смоделировано армирование. Предполагается, что в железобетоне наиболее сильно проявится эффект связанности полей напряжений и температур. В дальнейшем полученный программный продукт будет использоваться в проектной деятельности для расчетов строительных конструкций.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hart, P. E. The affect of pre-stressing on the thermal expansion and Young's modulus of graphite // Carbon. – 1972. – Vol. 10. – P. 233–236.
- [2] Матченко, Н. М. Теория деформирования разнородных материалов. Прикладные задачи теории упругости / Н. М. Матченко, А. А. Трещев. – М. ; Тула: РААСН ; ТулГУ, 2004. – 211 с.
- [3] Трещев, А. А. Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А. А. Трещев. – М. : Тула : РААСН ; ТулГУ, 2008. – 264 с.
- [4] Трещев, А. А. Решение связанной задачи термоупругости для сферической оболочки из разнородного материала с учетом геометрической нелинейности / А. А. Трещев, М. Ю. Делягин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – № 3. – С. 18–26.
- [5] Чигинский, Д. С. Связанная задача термомеханического изгиба тонких прямоугольных пластин из изотропных разнородных материалов / Д. С. Чигинский, А. А. Трещев, В. Г. Теличко // Известия ТулГУ. Технические науки. 2011. – Вып. 2. – С. 494–502.
- [6] Трещев, А. А. Термоупругий потенциал деформации для нелинейных материалов, находящихся в условиях термомеханического нагружения / А. А. Трещев, В. Г. Теличко, Д. С. Чигинский, Д. С. Астахов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – № 4. – С. 66–73.
- [7] Клованич, С. Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики / С. Ф. Клованич. – Запорожье : Світ геотехніки, 2009. – 400 с.

Трещев Александр Анатольевич,

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: taa58@yandex.ru

*Делягин Михаил Юрьевич,*

*аспирант кафедры "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула*

**e-mail:** m.delyagin@yandex.ru

*Астахов Денис Сергеевич,*

*аспирант кафедры "Строительство, строительные материалы и конструкции", Тульский государственный университет, г. Тула*

**e-mail:** dence71@narod.ru

A. A. Treschev, M. YU. Delyagin, D. S. Astakhov

**MATHEMATICAL MODEL OF COUPLED THERMOELASTICITY OF  
ESSENTIALLY NONLINEAR MATERIALS SENSITIVE TO THE STRESS  
STATE**

*Tula State University*

**Abstract.** The constitutive relations of essentially nonlinear isotropic differently resistant materials has been received. The method of building of the finite element for solution of coupled tasks of thermoelasticity of materials which properties depend of kind of strain state has been estimated.

**Keywords:** different resistant, nonlinearity, finite element method, connectedness, thermoelasticity

**REFERENCES**

[1] *Hart, P. E.* The affect of pre-stressing on the thermal expansion and Young's modulus of graphite // *Carbon*. – 1972. – Vol. 10. – P. 233–236.

[2] *Matchenko, N. M.* The deformation theory of differently resisting materials. Applied tasks of the theory of elasticity / N. M. Matchenko, A. A. Treschev. – M. ; Tula: RAASN ; TulSU, 2004. – 211 p.

[3] *Treschev, A. A.* Theory of deformation and durability of the materials sensitive to type of a tension. Defining ratios / A. A. Treschev. – M. ; Tula : RAASN ; TulSU, 2008. – 264 p.

[4] *Treschev, A. A.* The solution of the connected problem of thermoelasticity for a spherical cover from differently resisting material taking into account geometrical nonlinearity / A. A. Treschev, M. Yu. Delyagin // *Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state*. – 2012. – № 3. – P. 18–26.

[5] *Chiginsky, D. S.* The connected problem of a thermomechanical bend of thin rectangular plates from isotropic differently resisting materials / D. S. Chiginsky, A. A. Treschev, V. G. Telichko // *News of TulSU. Technical science*. 2011. – Issue 2. – P. 494–502.

[6] *Treschev, A. A.* Thermoelastic potential of deformation for the nonlinear materials which are in conditions of thermomechanical loading / A. A. Treschev, V. G. Telichko, D. S. Chiginsky, D. S. Astakhov // *Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state*. – 2012. – № 4. – P. 66–73.

[7] *Klovanich, S. F.* Method of final elements in nonlinear problems of engineering mechanics / S. F. Klovanich // *Zaporozhye : Світ геотехніки magazine publishing house*, 2009. – 400 p.

*Treschev, Alexander Anatolievich*

*Doctor of Engineering, professor, the head of department «Construction, construction materials and designs», Tula State University, Tula*

*Delyagin, Mikhail Yurievich*

*Postgraduate student of department «Construction, construction materials and designs», Tula State University, Tula*

*Astakhov, Denis Sergeivich*

*Postgraduate student of department «Construction, construction materials and designs», Tula State University, Tula*

В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев, А. А. Маркин

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА СТРУКТУРЫ В ОДНОМ МОДЕЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ТРЕЩИНЫ

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** Предлагается вариационная постановка задачи о распределении напряженно-деформированного состояния в теле конечных размеров трещиной. Трещина моделируется в виде физического разреза с характерным размером и материальным слоем на его продолжении, где напряженное состояние описывается средними по слою и граничными напряжениями. Из решения задачи по известным механическим характеристикам определяется введенный линейный размер.

**Ключевые слова:** трещина, характерный размер, конечный элемент, физический разрез.

УДК: 539.375

Исследования Дюиса Даниловича были посвящены не только проблемам идеальной пластичности. Вопросы предельного состояния тел с трещинами даны в статьях [1], [2]. Отметим работу [2], где рассматривается эволюция полости конечных размеров. Основные вопросы данного представления относятся к форме окончания соответствующей полости и ее характерного размера. В статье [3] для снятия вопроса о концевой форме трещиноподобного дефекта предлагается модель трещины в виде физического разреза и материальной области на его продолжении. В соответствующей области напряженное состояние предлагается рассматривать на основе средних по слою и граничных напряжений, связанных условиями равновесия. Оценки введенного линейного размера приведены в статьях [4], [5]. В данной работе предлагается возможность нахождения толщины слоя исходя из решения задачи по нагружению симметричной сосредоточенной силой образца с центральной трещиной.

**Постановка задачи.** Рассмотрим нагружение тела конечных размеров с физическим разрезом длиной  $a$  и толщиной  $\delta_0$  согласно схеме рис. 1. Ось абсцисс декартовой прямоугольной координатной системы свяжем с направлением разреза, а начало отсчета с его серединой. Следуя модельному представлению [3], в рассмотрение вводим материальный слой, лежащий на продолжении физического разреза. На рис. 1 соответствующие области помечены номерами 3 и 4. Считаем, что на берега трещины действует сосредоточенная симметричная внешняя нагрузка  $P$ .

Воспользуемся следующими обозначениями для напряжений на границах слоя:  $\sigma_{21}^+(x_1) = \sigma_{21}(x_1, \delta_0/2)$ ,  $\sigma_{21}^-(x_1) = \sigma_{21}(x_1, -\delta_0/2)$ ,  $\sigma_{22}^+(x_1) = \sigma_{22}(x_1, \delta_0/2)$ ,  $\sigma_{22}^-(x_1) = \sigma_{22}(x_1, -\delta_0/2)$ . Принимаем, что векторы напряжений на сопряженных границах слоя равны и противоположны векторам напряжений сопряженных границ тела, следовательно:

---

Поступила 10.06.2013

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-08-00134).



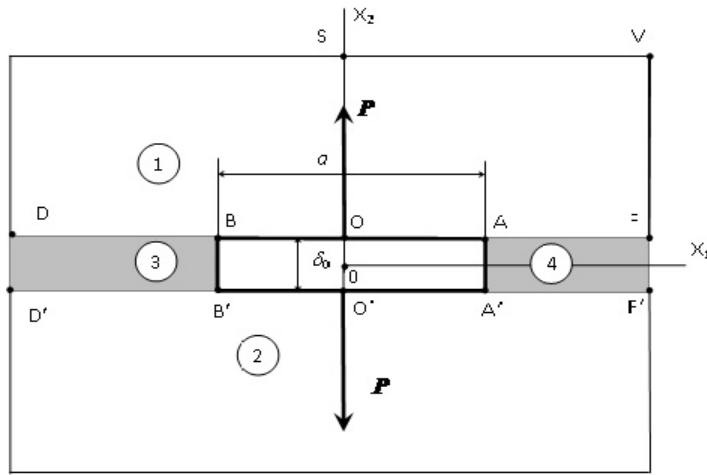


Рис. 1. Схема нагружения

$$\sigma_{21}^{(b)\pm} = \sigma_{21}^{\pm}, \sigma_{22}^{(b)\pm} = \sigma_{22}^{\pm}. \quad (1)$$

Имеют место жесткое сцепление между границами

$$\mathbf{u}^{(b)\pm} = \mathbf{u}^{\pm} \quad (2)$$

и непрерывность функции перемещения по границе слоя. Индекс «b» отнесен к областям тела, смежным со слоем.

Средние напряжения, деформации и перемещения в слое определяем через их граничные значения следующим образом [3]:

$$\bar{\sigma}_{21}(x_1) = \frac{\sigma_{21}^+ + \sigma_{21}^-}{2}, \quad (3)$$

$$\bar{\sigma}_{22}(x_1) = \frac{\sigma_{22}^+ + \sigma_{22}^-}{2}, \quad (4)$$

$$\bar{\sigma}_{11}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2, \quad (5)$$

$$\bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \left( \frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0} \right), \quad (6)$$

$$\bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = 0.5 \left( \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2(x_1)}{\partial x_1} = 0.5 \left( \frac{\partial u_2^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-}{\partial x_1} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1(x)}{\partial x_2} = \frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0}, \quad (9)$$

$$\bar{u}_1(x_1) = 0.5 (u_1^+(x_1) + u_1^-(x_1)), \quad (10)$$

$$\bar{u}_2(x_1) = 0.5(u_2^+(x_1) + u_2^-(x_1)). \quad (11)$$

Из выражений (8) и (9) приходим к представлению средней сдвиговой деформации вдоль слоя:

$$\bar{\varepsilon}_{21}(x_1) = 0.5 \left( \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right) = 0.5 \left( \frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0.5 \left( \frac{\partial u_2^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-}{\partial x_1} \right) \right). \quad (12)$$

Рассмотрим условие равновесия тела, используя принцип возможных перемещений

$$\delta' A^{(e)} + \delta' A_1^{(i)} + \delta' A_2^{(i)} + \delta' A_3^{(i)} + \delta' A_4^{(i)} = 0, \quad (13)$$

где  $\delta' A^{(e)}$  – работа внешних поверхностных нагрузок;  $\delta' A_1^{(i)}$ ,  $\delta' A_2^{(i)}$ ,  $\delta' A_3^{(i)}$ ,  $\delta' A_4^{(i)}$  – работа внутренних напряжений в соответствующих областях тела.

В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть половинку тела 1. В этом случае имеют место следующие условия для границ слоя:

$$u_1^+ = u_1^-, \quad (14)$$

$$u_2^+ = -u_2^-, \quad (15)$$

при следующих граничных условиях:

$$u_2 = 0; \sigma_{12} = 0 \text{ на SO (условия симметрии);} \quad (16)$$

$$\sigma_{22} = 0; \sigma_{12} = 0 \text{ на VS (условия свободной поверхности);} \quad (17)$$

$$\sigma_{11} = 0; \sigma_{12} = 0 \text{ на FV (условия свободной поверхности);} \quad (18)$$

а уравнение (13) предстанет в виде

$$\delta' A^{(e)} + \delta' A_1^{(i)} = 0, \quad (19)$$

где к внешней нагрузке, наряду с силой  $\mathbf{P}$ , относим и нагрузку со стороны слоя 4 на тело 1  $\mathbf{P}^l$ . В силу (1) имеем

$$\mathbf{P}^l = -\sigma_{21}^+ \mathbf{e}_1 - \sigma_{22}^+ \mathbf{e}_2. \quad (20)$$

Таким образом, с учетом (20) запишем работу внешних сил по контуру OAFVS:

$$\delta' A^{(e)} = h(P\delta u_2^+(O) - \int_{AF} \sigma_{22}^+ \delta u_2^+ dx_1 - \int_{AF} \sigma_{21}^+ \delta u_1^+ dx_1). \quad (21)$$

Рассмотрим условия равновесия слоя 4 в дифференциальной форме в проекции на ось  $x_1$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \quad (22)$$

и ось  $x_2$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0. \quad (23)$$

Проинтегрируем уравнения (22) и (23) по толщине слоя, в результате получим:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{11}(x_1)}{\partial x_1} = \sigma_{12}^-(x_1) - \sigma_{12}^+(x_1), \quad (24)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{21}(x_1)}{\partial x_1} = \sigma_{22}^-(x) - \sigma_{22}^+(x), \quad (25)$$

С учетом (22), (23) из соотношений (24), (25) и симметрии тензора Коши выразим граничные со слоем напряжения для тела 1:

$$\sigma_{21}^+(x_1) = \bar{\sigma}_{21}(x_1) - \frac{\delta_0 \partial \bar{\sigma}_{11}(x_1)}{2 \partial x_1}, \quad (26)$$

$$\sigma_{22}^+(x_1) = \bar{\sigma}_{22}(x_1) - \frac{\delta_0 \partial \bar{\sigma}_{21}(x_1)}{2 \partial x_1}. \quad (27)$$

Запишем выражение (21) с учетом (26), (27)

$$\begin{aligned} \delta' A^{(e)} = & h(P \delta u_2^+(O) - \int_{AF} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \frac{\delta_0}{2} \int_{AF} \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}(x_1)}{\partial x_1} \delta u_2^+ dx_1 - \int_{AF} \bar{\sigma}_{21} \delta u_1^+ dx_1 + \\ & + \frac{\delta_0}{2} \int_{AF} \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}(x_1)}{\partial x_1} \delta u_1^+ dx_1). \end{aligned} \quad (28)$$

Преобразуем слагаемые, содержащие производную от среднего напряжения:

$$\int_{AF} \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}(x_1)}{\partial x_1} \delta u_2^+ dx_1 = \bar{\sigma}_{21} \delta u_2^+ \Big|_{x_1=A}^{x_1=F} - \int_{AF} \bar{\sigma}_{21} \frac{\partial (\delta u_2^+)}{\partial x_1} dx_1, \quad (29)$$

$$\int_{AF} \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}(x_1)}{\partial x_1} \delta u_1^+ dx_1 = \bar{\sigma}_{11} \delta u_1^+ \Big|_{x_1=A}^{x_1=F} - \int_{AF} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial (\delta u_1^+)}{\partial x_1} dx_1. \quad (30)$$

С учетом отсутствия нагрузок по торцам слоя AA' и FF' из (29) и (30) получаем

$$\begin{aligned} \delta' A^{(e)} = & h(P \delta u_2^+(O) - \int_{AF} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 - \frac{\delta_0}{2} \int_{AF} \bar{\sigma}_{21} \frac{\partial (\delta u_2^+)}{\partial x_1} dx_1 - \int_{AF} \bar{\sigma}_{21} \delta u_1^+ dx_1 - \\ & - \frac{\delta_0}{2} \int_{AF} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial (\delta u_1^+)}{\partial x_1} dx_1). \end{aligned} \quad (31)$$

Для материала слоя представим связь между средними напряжениями и деформациями в виде закона Гука для случая плоского деформирования:

$$\bar{\sigma}_{11} = A \bar{\varepsilon}_{11} - B \bar{\varepsilon}_{22}, \quad (32)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = A \bar{\varepsilon}_{22} - B \bar{\varepsilon}_{11}, \quad (33)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = C \bar{\varepsilon}_{12}, \quad (34)$$

где  $A = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $B = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $C = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

В силу симметрии задачи имеют место следующие условия для границ слоя:

$$u_1^+ = u_1^-, \quad (35)$$

$$u_2^+ = -u_2^-. \quad (36)$$

С учетом (35) и (36) запишем выражения для средних деформаций:

$$\bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \frac{2u_2^+(x_1)}{\delta_0}, \quad (37)$$

$$\bar{\varepsilon}_{11}(x) = \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1}, \quad (38)$$

$$\bar{\varepsilon}_{21}(x_1) = 0. \quad (39)$$

Используя представления (32)–(34), (37)–(39) выражение для работы внешней нагрузки (31), запишем

$$\begin{aligned} \delta' A^{(e)} &= h(P\delta u_2^+(O) - \int_{AF} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 - \frac{\delta_0}{2} \int_{AF} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial(\delta u_1^+)}{\partial x_1} dx_1) = \\ &= h(P\delta u_2^+(O) - \frac{2A}{\delta_0} \int_{AF} u_2^+ \delta u_2^+ dx_1 + B \int_{AF} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \delta u_2^+ dx_1 + \\ &+ B \int_{AF} u_2^+ \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\delta_0 A}{2} \int_{AF} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1). \end{aligned} \quad (40)$$

Подставляя (40) в (19), приходим к следующему вариационному уравнению:

$$\begin{aligned} \int_{SFVSO} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds + \frac{2A}{\delta_0} \int_{AF} u_2^+ \delta u_2^+ dx_1 - B \int_{AF} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \delta u_2^+ dx_1 - B \int_{AF} u_2^+ \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \\ + \frac{\delta_0 A}{2} \int_{AF} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = P\delta u_2^+(O), \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \delta \varepsilon &= (A \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - B \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) \delta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (A \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - B \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) \delta \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \\ &+ 0.5 C (\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) \delta (\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}). \end{aligned}$$

Решение уравнения (41) при заданном параметре  $\delta_0$  позволяет определить напряженно-деформированное состояние (НДС) в области FVSO, а используя определяющие соотношения (32)–(34), найти НДС слоя. Предлагается использовать метод конечного элемента для нахождения решения (41).

Основной проблемой данного модельного представления нахождение параметра  $\delta_0$  для конкретного материала. Рассмотрим другой подход к оценке толщины слоя посредством решения вариационного соотношения (41), зная вязкость разрушения  $K_{IC}$  и критическое напряжение  $\sigma_{22} = \sigma_{cr}$ .

Известно, что коэффициент интенсивности напряжений для схемы рис. 2 определяется формулой [7]:

$$K_I = \frac{P \cos(\pi a / (2\ell_{DF}))}{\sqrt{0.5\ell_{DF} \sin(\pi a / \ell_{DF})}}, \quad (42)$$

где  $\ell_{DF}$  – длина образца.

Таким образом, критическое усилие может быть найдено по формуле

$$P_{cr} = \frac{K_{IC} \sqrt{0.5\ell_{DF} \sin(\pi a / \ell_{DF})}}{\cos(\pi a / (2\ell_{DF}))}. \quad (43)$$

На рис. 2 для найденного критического усилия по (43) и решения уравнения (41), полученного методом конечного элемента, построена зависимость напряжения отрыва в вершине разреза от параметра  $\delta_0$  для силикатного стекла с характеристиками  $E = 6.7 \cdot 10^{10}$  Па,  $K_{IC} = 1.7 \cdot 10^7$  Па $\sqrt{м}$  [4]. Образец (см. рис. 1) берем со следующими размерами:  $\ell_{DF} = 0.2$  м,  $\ell_{FV} = 0.1$  м,  $a = 0.02$  м. Зная предел прочности бездефектного стекла  $\sigma_{cr} = 90 \cdot 10^7$  Па [5], найдем значение введенного характерного размера  $\delta_0 = 2 \cdot 10^{-4}$  м.

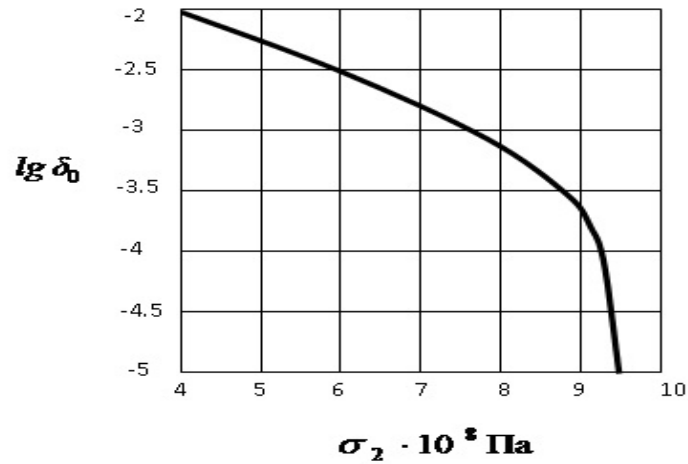


Рис. 2. Зависимость толщины слоя от критического напряжения

Отметим, что найденная величина соответствует линейному размеру частицы Нейбера, оцененному в работе [6] около половины миллиметра. В статье [7] для хрупких материалов была получена связь  $\delta_0 = 2 \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_{cr}} \right)^2$ , которая дает несколько завышенный результат:  $\delta_0 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ .

Зная толщину слоя конкретного материала с использованием вариационного соотношения (41), можно определять распределение НДС поврежденных тел без сингулярного распределения напряжений в концевой области трещины. На рис. 3 приведено распределение поля вертикального перемещения по границе со слоем, где  $u_2^1$  – вертикальное перемещение первого узла слоя.

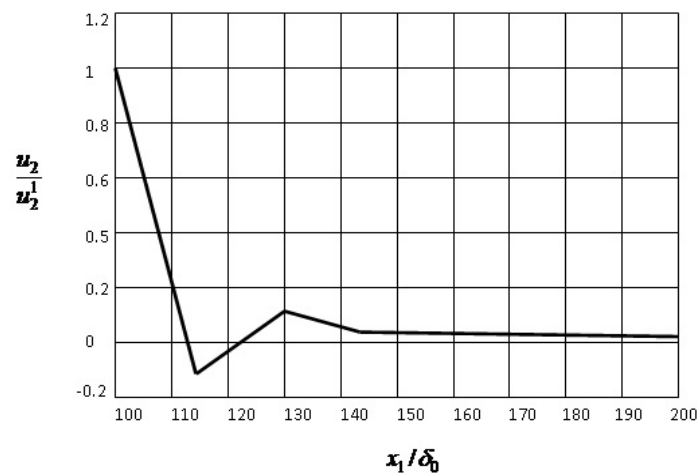


Рис. 3. Распределение поля вертикального перемещения по границе со слоем

На рис. 4 приведено распределение поля горизонтального перемещения по границе со слоем, где  $u_2^1$  – вертикальное перемещение первого узла слоя.

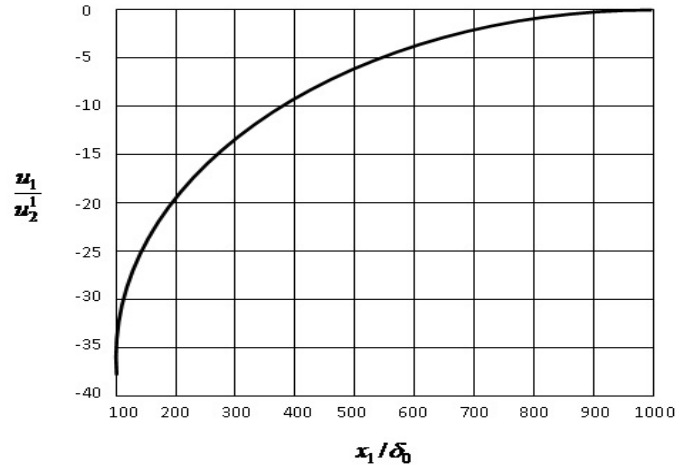


Рис. 4. Распределение поля горизонтального перемещения по границе со слоем

На рис. 5 приведено распределение поля средних напряжений в слое на первых 30 элементах, где  $\bar{\sigma}_{22}^1$  – напряжение на первом элементе слоя.

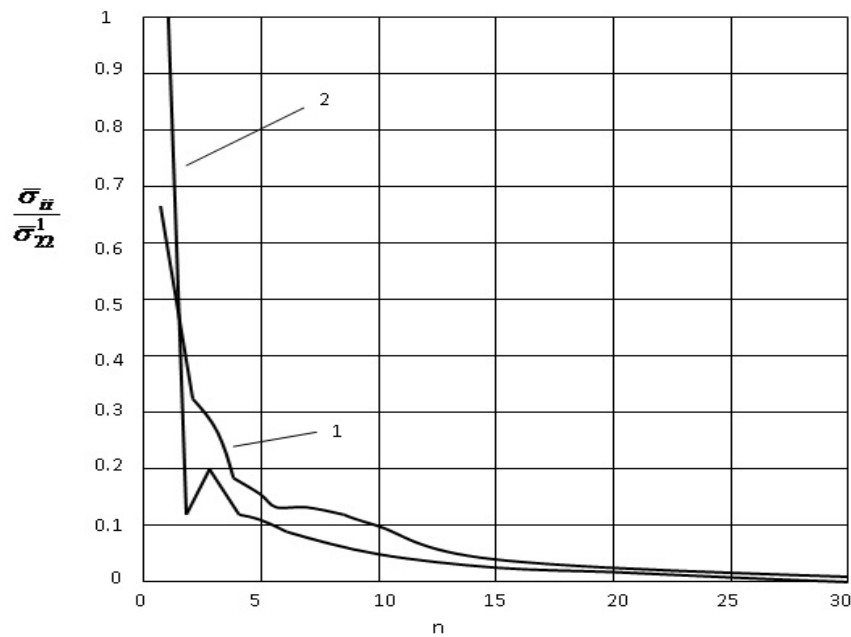


Рис. 5. Распределение напряжений в слое

В отличие от классического представления трещины в виде математического разреза рассмотренный подход позволяет избежать сингулярностей напряжений и деформаций в окончании трещины.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* О теории трещин квазихрупкого разрушения / Д. Д. Ивлев // Прикладная механика и техническая физика. – 1967. – № 6. – С. 88–128.
- [2] *Ершов, Л. В.* Об условиях квазихрупкого разрушения / Л. В. Ершов, Д. Д. Ивлев // ПММ. – 1967. – Т. 31. – № 3. – С. 537–542.
- [3] *Глаголев, В. В.* Нахождение предела упругого деформирования в концевой области физического разреза при произвольном нагружении его берегов / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Прикладная механика и техническая физика. – 2012. – Т. 53. – № 5. – С. 174–183.
- [4] *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
- [5] *Филлипс, К. Дж.* Разрушение стекла / К. Дж. Филлипс // Разрушение. Т. 7. Часть 1. – М. : Мир, 1976. – С. 20–56.
- [6] *Нейбер, Г.* Концентрация напряжений / Г. Нейбер // ОГИЗ, 1947. – 204 с.
- [7] *Глаголев, В. В.* Оценка толщины слоя взаимодействия как универсального параметра материала / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2006. – № 5. – С. 177–186.

*Глаголев Вадим Вадимович,*

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: vadim@tsu.tula.ru*

*Глаголев Леонид Вадимович,*

*магистрант кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: len4ic92@rambler.ru*

*Маркин Алексей Александрович,*

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: markin@tsu.tula.ru*

V. V. Glagolev, L. V. Glagolev, A. A. Markin

**DETERMINE THE PARAMETERS OF STRUCTURES IN THE SINGLE  
MODEL REPRESENTATION OF CRACKS**

*Tula State University*

**Abstract.** It is proposed variational formulation of the problem of the distribution of the stress-strain state in the body of finite size of the crack. The crack is modeled as a physical cut with a characteristic size and the material layer on its sequel, where the state of stress is described by the average over the layer and boundary stresses. The solution of the known mechanical properties determined by the size of the inserted line.

**Keywords:** crack, characteristic size, finite element, the physical cut.

**REFERENCES**

- [1] *Ivlev, D. D.* On the theory of cracks quasibrittle destruction / D. D. Ivlev // Applied Mechanics and Technical Physics. – 1967. – № 6. – P. 88–128.
- [2] *Ershov, L. V.* On the conditions quasibrittle destruction / L. V. Ershov, D. D. Ivlev // J. Appl. – 1967. – Vol. 31. – № 3. – P. 537–542.
- [3] *Glagolev, V. V.* Finding the elastic strain limit at the tip region of a physical cut with arbitrarily loaded faces / V. V. Glagolev, A. A. Markin // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2012. – 53(5). – P. 784–792.
- [4] *Cherepanov, G. P.* Mechanics of brittle fracture. / G. P. Cherepanov. – Moscow : Nauka, 1974. – 640 p.
- [5] *Phillips, C. J.* Glass destruction / C. J. Phillips // Destruction. V. 7. Part 1. – Moscow : Mir, 1976. – P. 20–56.
- [6] *Neuber, H.* Kerbspannungslehre: grundlagen fur genaue spannungsrechnung / H. Neuber // J. Springer, 1947. – 204 p.
- [7] *Glagolev, V. V.* Estimate of the thickness of the interaction layer as a universal parameter of a material / V. V. Glagolev, A. A. Markin // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids. – 2006. – № 5. – P. 177–186.

*Glagolev, Vadim Vadimovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula*

*Glagolev, Leonid Vadimovich*

*Student, Tula State University, Tula*

*Markin, Alexey Alexandrovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula*



Ю. В. Немировский, Т. П. Романова

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ С ВНУТРЕННЕЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОПОРОЙ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского  
отделения РАН*

**Аннотация.** Получено общее решение задачи о предельном поведении и динамическом изгибе идеальной жесткопластической пластины произвольной формы, шарнирно опертой по криволинейному гладкому замкнутому контуру, расположенному внутри контура пластины. На пластину действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Показано, что существует несколько механизмов предельного и динамического деформирования пластин в зависимости от форм внешнего контура и контура опирания. Определено оптимальное расположение опоры, при котором предельная нагрузка пластины максимальна. Приведены численные примеры.

**Ключевые слова:** жесткопластическая пластина, криволинейный контур, внутренняя криволинейная опора, взрывная нагрузка, предельная нагрузка, остаточный прогиб.

УДК: 539.4+539.37

**1. Введение.** Исследование повреждаемости пластин разнообразных по форме и способам закрепления, являющихся элементами многих технических конструкций, при воздействии нагрузок взрывного типа необходимо для анализа рисков и прогнозирования чрезвычайных ситуаций. До последнего времени изучение динамического деформирования ограничивалось простыми геометрическими формами типа кольцевых и правильных полигональных пластин. Подходы к построению схемы расчетов динамического деформирования односвязных и двухсвязных пластин с произвольными контурами рассмотрены в работах [1], [2], [3]. В настоящей работе построены схемы динамического деформирования односвязных пластин, у которых криволинейный замкнутый опорный контур расположен внутри области пластины. Решения динамических задач такого типа в литературе не известно. В качестве примера рассмотрены задачи для пластин в форме эллипса и квадрата с внутренним круглым опорным контуром.

**2. Формулировка задачи и вывод определяющих уравнений.** Рассмотрим пластину из идеального жесткопластического материала, шарнирно опертую по криволинейному гладкому выпуклому контуру  $L_1$ , расположенному внутри пластины. Внешний произвольный контур пластины  $L_2$  является свободным (рис. 1). На пластину действует равномерно распределенная по поверхности динамическая нагрузка взрывного типа высокой интенсивности  $P(t)$ , которая характеризуется мгновенным достижением максимального значения  $P_{\max} = P(0)$  в начальный момент времени  $t = 0$  и последующим быстрым ее уменьшением ( $t$  – текущее время).

---

Поступила 28.08.2013

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00121-а)

Пусть уравнение контура  $L_1$  задано в параметрической форме  $x = x_1(\phi)$ ,  $y = y_1(\phi)$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Радиус кривизны контура  $L_1$  равен  $R_1(\phi) = L^3(\phi)/(x_1'y_1'' - x_1''y_1')$ . Здесь  $L(\phi) = \sqrt{x_1'^2(\phi) + y_1'^2(\phi)}$ ;  $(\bullet)' = \partial(\bullet)/\partial\phi$ . Введем криволинейную ортогональную систему координат  $(\nu_1, \nu_2)$ , связанную с декартовой системой координат  $(x, y)$  соотношениями

$$x = x_1(\nu_2) + \nu_1 y_1'(\nu_2)/L(\nu_2), \quad y = y_1(\nu_2) - \nu_1 x_1'(\nu_2)/L(\nu_2).$$

Кривые  $\nu_1 = \text{const} \geq 0$  находятся на расстоянии  $\nu_1$  от контура  $L_1$  в сторону внешнего контура  $L_2$  и имеют радиус кривизны  $\rho_1 = R_1(\nu_2) + \nu_1$ . Прямые линии  $\nu_2 = \text{const}$  перпендикулярны контуру  $L_1$  (радиус кривизны  $\rho_2 = \infty$ ). В выбранной системе координат уравнение контура пластины  $L_1$  имеет вид  $\nu_1 = 0$ ,  $0 \leq \nu_2 \leq 2\pi$ . Уравнение контура пластины  $L_2$  задано и имеет вид  $\nu_1 = D_2(\nu_2)$ ,  $0 \leq \nu_2 \leq 2\pi$ . Элемент площади в системе координат  $(\nu_1, \nu_2)$  равен  $ds = L(\nu_2)(1 + \nu_1/R_1)d\nu_1 d\nu_2$ .

Для определенности считаем, что пластина симметрична относительно оси  $OY$ , а ее геометрические размеры по оси  $OX$  больше, чем по оси  $OY$ .

В динамике рассматриваемой пластины из жесткопластического материала возможны несколько схем деформирования в зависимости от величины  $P_{\max}$  и от соотношений размеров контуров  $L_1$  и  $L_2$ . Обозначим область внутри контура  $L_1$  через  $S_1$ , а остальную часть пластины – через  $S_2$ . Рассмотрим поведение пластины при нагрузках, незначительно превышающих предельные (“средних” нагрузках). В этом случае возможны несколько схем деформирования, для которых скорости прогибов пластины в сечении  $y = 0$  представлены на рис. 2 – 5. При схеме 1 (рис. 1, 2) во внутренней области пластины образуется пластическая шарнирная линия  $l_h$  с изгибающим моментом, равным предельному значению  $M_0$ , а вся пластина деформируется в линейчатую поверхность, вращающуюся вокруг опорного контура  $L_1$ , при этом область  $S_1$  движется вниз в направлении действия нагрузки, а область  $S_2$  движется вверх. В схеме 2 на рис. 3 наоборот, область  $S_1$  движется вверх, а часть пластины область  $S_2$  движется вниз. В схемах 3 и 4 (рис. 4–6) возможно образование дополнительных шарнирных линий  $l_1$  и  $l_2$ , расположенных на расстоянии  $d_1$  и  $d_2$  от опорного контура  $L_1$ , при этом величины  $d_1$  и  $d_2$  не зависят от параметра  $\nu_2$ . Тогда уравнения линий  $l_i$  имеет вид  $\nu_1 = (-1)^i d_i$  ( $i = 1, 2$ ). Обозначим область внутри контура  $l_1$  через  $S_{11}$ , а область снаружи контура  $l_2$  – через  $S_{22}$  (рис. 6). Обе области  $S_{11}$  и  $S_{22}$  деформируются в линейчатую поверхность, движущуюся вниз. При этом области  $S_{11}$  и  $S_{22}$  движутся независимо друг от друга и возможны варианты, когда одна из этих областей деформируется, а вторая остается жесткой. Шарнирная линия  $l_h$  движется вниз в направлении действия нагрузки при схемах 1, 3 и вверх при схеме 2.

В силу симметрии линия  $l_h$  находится на оси  $OX$ . Пусть уравнение прямой  $l_h$  имеет вид  $x = x_h(\nu_2)$ ,  $y = 0$ . Расстояние  $D_h$  по нормали к контуру  $L_1$  от линии  $L_1$  до линии  $l_h$  равно (см. рис. 1):

$$D_h(\nu_2) = \sqrt{[x_1(\nu_2) - x_h(\nu_2)]^2 + y_1(\nu_2)^2}.$$

Из уравнения нормали, опущенной из точки  $(x_h(\nu_2), 0)$  к контуру  $L_1$ , следует:

$$-x_1'(\nu_2) [x_h(\nu_2) - x_1(\nu_2)] + y_1'(\nu_2) y_1(\nu_2) = 0.$$

Из двух последних равенств получаем

$$D_h(\nu_2) = \left| \frac{y_1(\nu_2)}{x_1'(\nu_2)} \right| L(\nu_2). \quad (1)$$

Рассмотрим подробно схемы 1 и 2. Считаем, как и в случае криволинейных пластин [1], [2], [3], что угол поворота плоскости пластины в направлении действия нагрузки не зависит от параметра  $\nu_2$ . Обозначим его через  $\alpha$  (рис. 2, 3). Уравнение движения пластины выведем из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [4]:

$$K = A - N, \quad (2)$$

$$K = \iint_S \rho \ddot{u} \dot{u}^* ds, \quad A = \iint_S P(t) \dot{u}^* ds, \quad (3)$$

$$N = \sum_m \int_{l_m} M_m [\dot{\theta}^*]_m dl_m + M_0 \iint_S (|\kappa_1^*| + |\kappa_2^*|) ds. \quad (4)$$

Здесь  $K$ ,  $A$ ,  $N$  – мощности инерционных, внешних и внутренних сил соответственно;  $S$  – площадь пластины;  $\rho$  – поверхностная плотность материала пластины;  $u$  – прогиб;  $ds$  – элемент площади;  $l_m$  – линии разрыва угловых скоростей;  $M_m$  – изгибающий момент на  $l_m$ ;  $[\dot{\theta}^*]_m$  – разрыв угловой скорости на  $l_m$ ;  $dl_m$  – элемент линии  $l_m$ ;  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  – главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины. В выражении для  $N$  суммирование проводится по всем линиям разрыва угловой скорости. Величины с верхним индексом “\*” – допустимые скорости;  $(\dot{\bullet}) = \partial(\bullet)/\partial t$ .

Скорости прогибов пластины для схем 1, 2 будут представлены в виде

$$\dot{u}(\nu_1, \nu_2, t) = (-1)^i \dot{\alpha}(t) \nu_1 (i = 1, 2) \quad (5)$$

где  $i = 1$  для схемы 1 и  $i = 2$  для схемы 2. Главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины равны

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \nu_1^2} = 0, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \nu_1} = (-1)^{i+1} \frac{\dot{\alpha}(t)}{R_1 + \nu_1}. \quad (6)$$

Выражения (3) будут равны:

$$K = \rho \ddot{\alpha} \dot{\alpha}^* \iint_S \nu_1^2 ds = \rho \ddot{\alpha} \dot{\alpha}^* \int_0^{2\pi} \int_{-D_h}^{D_2} \nu_1^2 L(\nu_2) \left[ 1 + \frac{\nu_1}{R_1(\nu_2)} \right] d\nu_1 d\nu_2 = \rho \ddot{\alpha} \dot{\alpha}^* \frac{\Sigma_1}{12}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} A &= P(t) \dot{\alpha}^*(t) (-1)^i \iint_S \nu_1 ds = P(t) \dot{\alpha}^*(t) (-1)^i \int_0^{2\pi} \int_{-D_h}^{D_2} \nu_1 L(\nu_2) \left[ 1 + \frac{\nu_1}{R_1(\nu_2)} \right] d\nu_1 d\nu_2 = \\ &= P(t) \dot{\alpha}^*(t) (-1)^{i+1} \frac{\Sigma_2}{6}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Sigma_1 = \int_0^{2\pi} L \frac{(D_2 + D_h)}{R_1} [4R_1(D_2^2 - D_2 D_h + D_h^2) + 3(D_2 - D_h)(D_2^2 + D_h^2)] d\nu_2,$$

$$\Sigma_2 = \int_0^{2\pi} L \frac{(D_2 + D_h)}{R_1} [3R_1(D_h - D_2) - 2D_2^2 + 2D_2 D_h - 2D_h^2] d\nu_2.$$

где  $D_h(\nu_2)$  определено в (1).

Учитывая, что на свободном контуре  $L_2$  и на шарнирной опоре  $L_1$  нормальный изгибающий момент  $M_{nn}$  равен нулю, на линии  $l_h$  он равен  $M_0$  и разрыв угловой скорости на  $L_1$  равен  $[\dot{\theta}]_{L_1} = \dot{\alpha}$ , действуя как в [1], [3], для мощности внутренних сил (3) получаем выражение

$$N = \dot{\alpha}^* M_0 \int_0^{2\pi} L(\nu_2) \left[ 1 + \frac{D_2(\nu_2)}{R_1(\nu_2)} \right] d\nu_2. \quad (9)$$

Подставляя значения (6)–(8) в (2), получаем уравнение движения для схем деформирования 1 и 2:

$$\rho \ddot{\alpha}(t) \Sigma_1 = 2(-1)^{i+1} P(t) \Sigma_2 - 12M_0 \int_0^{2\pi} L \left(1 + \frac{D_2}{R_1}\right) d\nu_2. \quad (10)$$

Начальные условия имеют вид

$$\dot{\alpha}(0) = \alpha(0) = 0. \quad (11)$$

**3. Определение схемы предельного деформирования и предельной нагрузки.** Предельную нагрузку определим из (8) при учете  $\ddot{\alpha} = 0$ . Тогда имеем

$$P_{0i} = 6(-1)^{i+1} \frac{M_0}{\Sigma_2} \int_0^{2\pi} L \left(1 + \frac{D_2}{R_1}\right) d\nu_2 (i = 1, 2). \quad (12)$$

Поскольку  $P_{0i} > 0$ , то из (12) следует, что при схеме 1 выполняется  $\Sigma_2 > 0$ , а при схеме 2 справедливо  $\Sigma_2 < 0$ .

В случае схем 3, 4 области  $S_{11}$  и  $S_{22}$  деформируются независимо. Динамическое поведение области  $S_{11}$  рассмотрено подробно в [1], а области  $S_{22}$  – в работе [3]. Предельные нагрузки  $P_{03}$ ,  $P_{04}$  для областей  $S_{11}$  и  $S_{22}$  равны:

$$\begin{aligned} P_{03} &= \min_{0 \leq d_1 < \max D_h} \frac{12M_0 \int_0^{2\pi} L \left(1 - \frac{d_1}{R_1}\right) d\nu_2}{\int_0^{2\pi} \frac{L}{R_1} (D_h - d_1) [3 R_1 (D_h + d_1) - 2(D_h^2 + D_h d_1 + d_1^2)] d\nu_2} = \\ &= \frac{12M_0 \int_0^{2\pi} L \left(1 - \frac{d_1}{R_1}\right) d\nu_2}{\int_0^{2\pi} \frac{L}{R_1} (D_h - d_1) [3 R_1 (D_h + d_1) - 2(D_h^2 + D_h d_1 + d_1^2)] d\nu_2} \Bigg|_{d_1=0} = \\ &= 12M_0 \frac{\int_0^{2\pi} L d\nu_2}{\int_0^{2\pi} \frac{L}{R_1} D_h^2 (3R_1 - 2D_h) d\nu_2}. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} P_{04} &= \min_{0 \leq d_2 < \min D_2} \frac{6M_0 \int_0^{2\pi} L \left(1 + \frac{D_2}{R_1}\right) d\nu_2}{\int_0^{2\pi} \frac{L}{R_1} (D_2 - d_2) [3 R_1 (D_2 + d_2) + 2(D_2^2 + D_2 d_2 + d_2^2)] d\nu_2} = \\ &= \frac{6M_0 \int_0^{2\pi} L \left(1 + \frac{D_2}{R_1}\right) d\nu_2}{\int_0^{2\pi} \frac{L}{R_1} (D_2 - d_2) [3 R_1 (D_2 + d_2) + 2(D_2^2 + D_2 d_2 + d_2^2)] d\nu_2} \Bigg|_{d_2=0} = \\ &= 6M_0 \frac{\int_0^{2\pi} L \left(1 + \frac{D_2}{R_1}\right) d\nu_2}{\int_0^{2\pi} \frac{L}{R_1} D_2^2 (3R_1 + 2D_2) d\nu_2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, если в пластине образуется шарнирная линия  $l_1$  или  $l_2$ , то она расположена на опорной линии  $L_1$ . Из формул (12) при  $i = 2$  и (12) видно, что выполняется строгое неравенство  $P_{04} < P_{02}$ . Следовательно, пластина не будет деформироваться по схеме 2. Пластина будет деформироваться по схеме, при которой предельная нагрузка минимальна. Предельная нагрузка для пластины равна  $P_0 = \min(P_{01}, P_{03}, P_{04})$ .

**4. Динамическое поведение.** Для “средних” нагрузок, если параметры пластины соответствуют деформированию по схеме 1, движение пластины определяется уравнением (10), которое запишем в виде

$$\ddot{\alpha}(t) = G [P(t) - P_0], \quad (15)$$

где  $G = 2\Sigma_2/(\rho\Sigma_1)$ . Начальные условия имеют вид (10). В момент времени  $t = T$  нагрузка снимается, и пластина движется далее по инерции.

При  $0 \leq t \leq T$ , интегрируя уравнение (13), получаем

$$\dot{\alpha}(t) = G \left[ \int_0^t P(\tau) d\tau - P_0 t \right], \quad \alpha(t) = G \left[ \int_0^t \int_0^m P(\tau) d\tau dm - P_0 \frac{t^2}{2} \right].$$

При  $T < t \leq t_f$  движение пластины происходит по инерции до остановки в момент  $t_f$  и описывается уравнением

$$\ddot{\alpha}(t) = -GP_0$$

с начальными условиями  $\dot{\alpha}(T)$ ,  $\alpha(T)$ . Момент  $t_f$  определяется из условия

$$\dot{\alpha}(t_f) = 0. \quad (16)$$

Интегрируя уравнение движения, получаем

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}(T) - GP_0(t - T); \quad (17)$$

$$\alpha(t) = \alpha(T) + \dot{\alpha}(T)(t - T) - GP_0(t - T)^2/2.$$

Из уравнений (14), (15) следует

$$t_f = \left( \int_0^T P(t) dt \right) / P_0.$$

Прогибы определяются из равенств (5). Для схемы 1 максимальный остаточный прогиб достигается в той точке пластины, в которой реализуется максимальное значение функции  $D_h(\nu_2)$ . Максимальный прогиб равен

$$w_{\max} = G \left[ \left( \int_0^T P(t) dt \right)^2 / (2P_0) - \int_0^T tP(t) dt \right] \max_{\nu_2} D_h(\nu_2).$$

Деформирование по схемам 3, 4 рассмотрено в [1], [3].

**5. Численные примеры.** В качестве примера рассмотрим эллиптическую пластину с круглой внутренней опорой радиуса  $R_1$  (рис. 7). Для такой пластины уравнения контуров  $L_1$  и  $L_2$  в декартовой системе координат имеют вид ( $R_1 \leq b \leq a$ )

$$L_1: \quad x_1 = R_1 \cos \phi, \quad y_1 = R_1 \sin \phi; \quad L_2: \quad x_2 = a \cos \phi, \quad y_2 = b \sin \phi (0 \leq \phi \leq 2\pi).$$

Тогда

$$L = D_h = R_1, \quad D_2 = \sqrt{(a - R_1)^2 \cos^2 \phi + (b - R_1)^2 \sin^2 \phi}, \quad \nu_1 = \sqrt{x^2 + y^2} - R_1, \quad \nu_2 = \phi,$$

$$\Sigma_2 = \int_0^{2\pi} (R_1 + D_2)^2 (R_1 - 2D_2) d\phi, \quad (\Sigma_2 > 0) \quad (18)$$

$$P_{01} = 6M_0(2\pi R_1 + \int_0^{2\pi} D_2 d\phi) / \left[ \int_0^{2\pi} (R_1 + D_2)^2 (R_1 - 2D_2) d\phi \right], \quad (19)$$

$$P_{03} = \frac{12M_0}{R_1^2}, \quad P_{04} = 6M_0 \frac{2\pi R_1 + \int_0^{2\pi} D_2 d\phi}{\int_0^{2\pi} D_2^2 (3R_1 + 2D_2) d\phi}. \quad (20)$$

На рис. 8 приведены безразмерные значения предельных нагрузок  $P_{0j}$  ( $j = 1, 3, 4$ ) в зависимости от отношения  $R_1/b$  (то есть, в зависимости от расположения опорного контура) при разных параметрах  $a, b$ . Предельная нагрузка  $P_0$  определяется как нижняя огибающая кривых  $P_{0j}$ . Для круглой пластины ( $a = b$ ) кривая 1 изображает  $P_{01}$ , кривая 2 –  $P_{03}$ , кривая 3 –  $P_{04}$ . При  $0 \leq R_1/b \leq 0,7$  реализуется схема предельного деформирования 4, при  $0,7 \leq R_1/b \leq 0,78$  – схема 3, при  $0,78 \leq R_1/b \leq 1$  – схема 1. Для случая  $a = 1,5b$  кривая 4 изображает  $P_{01}$ , кривая 2 –  $P_{03}$ , кривая 5 –  $P_{04}$ . Из рисунка видно, что при  $0 \leq R_1/b \leq 0,96$  будет выполняться схема 4, при  $0,96 \leq R_1/b \leq 1$  – схема 3, а схема 1 реализована не будет. Для случая  $a = 2b$  кривая 6 изображает  $P_{04}$ , кривая 2 –  $P_{03}$ , при этом в пластине реализуется только схема 4 при любом расположении опоры.

Рассматриваемая эллиптическая пластина имеет максимальную предельную нагрузку и, следовательно, наименьшую повреждаемость при следующем расположении опоры: для случая  $a = b$  – радиус опоры равен  $R_1 = 0,7b$ ;  $R_1 = 0,96b$  для  $a = 1,5b$ ;  $R_1 = b$  для  $a = 2b$ .

В качестве другого примера рассмотрим квадратную пластину со стороной  $2b$  с круглой внутренней опорой радиуса  $R_1$ . В силу симметрии рассматриваем четверть пластины. Уравнения контуров  $L_1$  и  $L_2$  в декартовой системе координат имеют вид:

$$L_1: \quad x_1 = R_1 \cos \phi, \quad y_1 = R_1 \sin \phi; \quad L_2: \quad x_2 = b, \quad y_2 = b \tan \phi (0 \leq \phi \leq \pi/4).$$

Тогда

$$L = D_h = R_1, \quad D_2(\phi) = b/\cos \phi - R_1, \quad \nu_1 = \sqrt{x^2 + y^2} - R_1, \quad \nu_2 = \phi$$

и выполняются соотношения (16)–(17). На рис. 9 приведены безразмерные значения предельных нагрузок  $P_{0j}$  ( $j = 1, 3, 4$ ) в зависимости от отношения  $R_1/b$  для квадратной пластины с круглой опорой. Кривая 1 изображает  $P_{01}$ , кривая 2 –  $P_{03}$ , кривая 3 –  $P_{04}$ . Предельная нагрузка  $P_0$  определяется как нижняя огибающая кривых  $P_{0j}$ . При  $0 \leq R_1/b \leq 0,81$  реализуется схема предельного деформирования 4, при  $0,81 \leq R_1/b \leq 0,88$  – схема 3, при  $0,88 \leq R_1/b \leq 1$  – схема 1. Квадратная пластина с круглой опорой имеет наименьшую повреждаемость при радиусе опорного контура  $R_1 = 0,81b$ .

**6. Заключение.** В работе получено общее решение задачи о предельном поведении и динамическом деформировании идеальной жесткопластической пластины произвольной формы, шарнирно опертой по криволинейному гладкому замкнутому контуру, расположенному внутри контура пластины. На пластину действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Показано, что существует несколько механизмов предельного и динамического деформирования пластин в зависимости от форм внешнего контура и контура опирания. Установлено, что из рассмотренных возможных четырех схем предельного деформирования пластина может деформироваться только по трем схемам. Для каждой из схем выведены условия их реализации, получены определяющие уравнения движения. В аналитическом виде получены выражения для предельной нагрузки и максимального остаточного прогиба пластины при движении под

действием “средних” нагрузок. В качестве примера рассмотрены задачи для пластин в форме эллипса и квадрата с внутренним круглым опорным контуром. Определено оптимальное расположение опоры, при котором предельная нагрузка пластины максимальна.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Romanova, T. P.* Dynamic rigid-plastic deformation of arbitrarily shaped plates / T. P. Romanova, Yu. V. Nemirovsky // J. Mechanics of Materials and Structures, 2008. – V. 3. – No. 2. – P. 313–334.

[2] *Немировский, Ю. В.* Моделирование динамического деформирования жесткопластических двусвязных пластин с произвольными закрепленными криволинейными контурами на вязкоупругом основании / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Прикладная механика и техническая физика. – 2011. – Т. 52. – № 2. – С. 156–172.

[3] *Немировский, Ю. В.* Моделирование динамического поведения двусвязной жесткопластической криволинейной пластины, закрепленной по внутреннему контуру / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Математическое моделирование и краевые задачи: труды пятой Всероссийской конференции с международным участием. Часть 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. (г. Самара, 29–30 мая 2008 г.). – Самара : СамГТУ, 2008. – С. 197–207.

[4] *Ерхов, М. И.* Теория идеальнопластических тел и конструкций / М. И. Ерхов. – М. : Наука, 1978. – 352 с.

*Немировский Юрий Владимирович,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск*

*e-mail: nemirov@itam.nsc.ru*

*Романова Татьяна Павловна,*

*кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики Сибирского отделения РАН им. С. А. Христиановича, г. Новосибирск*

*e-mail: nemirov@itam.nsc.ru*

Yu. V. Nemirovskiy, T. P. Romanova

**MODELLING OF LIMIT AND DYNAMIC BEHAVIOUR  
OF THE RIGID-PLASTIC PLATE OF ANY FORM  
WITH THE INTERNAL CURVILINEAR SUPPORT**

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics*

**Abstract.** The common decision is received for a task about limit behavior and a dynamic bending of an ideal rigid-plastic plate of any form, hinge-supported by the curvilinear smooth closed contour located inside the contour of the plate. The plate is affected by short-term dynamic loading of high intensity of explosive type and uniformly distributed over a surface of plate. It is shown that there are some mechanisms of limit and dynamic deformation of plates in dependence on forms of an external contour and a supported contour. The optimum arrangement of a support is defined at which the limit load of a plate has the minimum value. Numerical examples are given.

**Keywords:** rigid-plastic plate, curvilinear contour, internal curvilinear support, explosive loading, limit load, final deflection.

**REFERENCES**

- [1] *Romanova, T. P.* Dynamic rigid-plastic deformation of arbitrarily shaped plates / T. P. Romanova, Yu. V. Nemirovsky // *J. Mechanics of Materials and Structures*, 2008. – Vol. 3. – No. 2. – P. 313–334.
- [2] *Nemirovsky, Yu. V.* Modeling of dynamic deformation of rigid-plastic doubly connected plates with arbitrary fixed curvilinear contours on a viscoelastic foundation / Yu. V. Nemirovsky, T. P. Romanova // *Appl. Mech. Tech. Phys*, 2011. – Vol. 52. – № 2. – P. 288–302.
- [3] *Nemirovsky, Yu. V.* Modeling of dynamic behaviour of doubly connected rigid-plastic curved plates supported on the internal contour / Yu. V. Nemirovsky, T. P. Romanova // *Mathematical modeling and boundary problems: Proceedings of 5th Russian conference with international participation. Part 1: Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structural elements. (Samara, 29-30 may, 2008)*. – Samara: SamGTU, 2008. – P. 197–207.
- [4] *Erkhov, M. I.* *Theory of Ideally plastic Bodies and Structures* / M. I. Erkhov – Moscow : Nauka, 1978. – 352 p.

*Nemirovskiy, Yuriy Vladimirovich*

*Dr. Sci. of Phys. & Math., Professor, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk*

*Romanova, Tatyana Pavlovna*

*Cand. Sci. Phys.&Math., Senior Researcher, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk*



А. А. Буханько, А. Ю. Лошманов, А. И. Хромов

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

*Самарский государственный аэрокосмический университет имени  
академика С. П. Королева (национальный исследовательский университет)*

*Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет*

**Аннотация.** Рассматривается подход к описанию предельных состояний пластических тел, связанный с поверхностью деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жесткопластического тела. В качестве критериальной величины, описывающей предельное состояние, принимается удельная диссипация работы внутренних сил на пластических деформациях, связанных с упрочнением материала. Поверхность нагружения связывается с линиями уровня поверхности деформационных состояний. Считается, что предельные состояния соответствуют предельному упрочнению, т.е. предельному положению поверхности нагружения.

**Ключевые слова:** упрочняющееся несжимаемое жесткопластическое тело, предельное состояние, диссипация энергии, поверхность деформационных состояний, поверхность нагружения.

УДК: 539.374

**Введение.** Предельные состояния твердых тел связываются, как правило, начиная с работ Дж. Р. Ирвина [1] и Е. О. Орована [2], с пластическими свойствами материала. С этой точки зрения наиболее фундаментальные экспериментальные данные по определению предельного состояния относятся к двум видам деформирования: монотонному (при получении классической диаграммы нагружения) и циклическому деформированию с контролем деформации образца (малоцикловая усталость). Второй процесс является наиболее общим, максимально «зигзагообразным» процессом деформирования. В работах С. В. Серенсена [3] указывается, что процесс разрушения может быть связан с исчерпанием пластичности материала, т.е. с его предельным упрочнением. С другой стороны, в работах Г. С. Писаренко [4], В. Т. Троценко [5] отмечено, что соотношения малоцикловой усталости мало зависят от упругих свойств материала и в основном определяются его пластическими свойствами.

Указанные замечания приводят к возможности описания предельного состояния в рамках модели упрочняющегося несжимаемого жесткопластического тела. При этом процесс распространения трещины (в условиях предельного упрочнения), понимаемый как процесс образования новых элементов берегов трещины, может описываться в рамках модели идеального жесткопластического тела.

Работа посвящена описанию процесса достижения материалом предельного состояния в рамках модели упрочняющегося несжимаемого пластического тела как обобщение соотношений малоцикловой усталости на общие процессы деформирования.

---

Поступила 20.06.2013

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-08-00580-а).

**Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности деформационных состояний.** Рассматривается несжимаемое упрочняющееся жесткопластическое тело, все деформационные состояния которого лежат на гиперболической поверхности третьего порядка в пространстве главных деформаций, рис. 1,а [6], [7]. Всем деформационным процессам можно поставить в соответствие линии  $L$  на поверхности  $\Sigma$  и их проекции  $l$  в девиаторной плоскости. Точки, соответствующие предельному состоянию материала, должны образовывать некоторую линию, непроходящую через точку  $O$ , характеризующую недеформированное состояние. Наиболее естественной линией является сечение поверхности  $\Sigma$  плоскостями, параллельными девиаторной плоскости. Эти линии, называемые далее «линиями уровня» (рис. 1,б), имеют вид криволинейного треугольника с тремя осями симметрии [1], [8], [9].

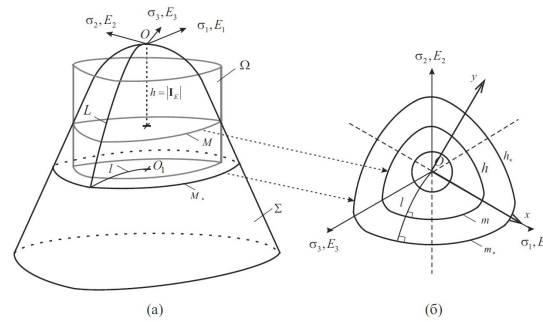


Рис. 1. Поверхности деформационных состояний  $\Sigma$  и нагружения  $\Omega$  (а) и линии уровня (б)

Связь между поверхностью нагружения  $\Omega$  и предельным состоянием материала определяется гипотезой [3]: предельным состоянием материала считается состояние исчерпания его пластических свойств, т. е. состояние предельного упрочнения. Предполагается, что при определенном уровне деформирования условие пластичности определяется формой линии уровня, размер которой соответствует диаграмме нагружения для конкретного материала. Для того, чтобы связать поверхность деформационных состояний  $\Sigma$  и поверхность нагружения  $\Omega$ , необходимо перестроить диаграмму нагружения: предполагается использование гипотезы единой кривой, но построенной не в традиционных координатах интенсивностей касательных напряжений и деформаций сдвига, а в виде зависимости текущего значения предела текучести  $\sigma_S(I_E)$ , определяемого значением параметра упрочнения, который совпадает с модулем первого инварианта  $I_E$  тензора конечных деформаций Альманси [10]. Указанное соответствие может быть определено соотношениями

$$\sigma_i = h_C \cdot C_i \quad \text{или} \quad \sigma_i = h_E \cdot E_i, \quad (1)$$

где  $\sigma_i$  – главные значения тензора напряжения,  $C_i$  и  $E_i$  – главные значения тензоров конечных деформаций Коши и Альманси,  $h_C$  и  $h_E$  – соответствующие коэффициенты пропорциональности. Из (1) следует пропорциональность компонент девиаторов напряжения и деформации:

$$D_\sigma = h_C \cdot D_C \quad \text{или} \quad D_\sigma = h_E \cdot D_E, \quad (2)$$

где  $D_\sigma$  – девиатор напряжения,  $D_C$  и  $D_E$  – девиаторы деформации (для тензоров Коши и Альманси, соответственно). Учитывая связь тензоров Коши и Альманси

$$C_i = 1 - 2E_i, \quad i = \overline{1, 3},$$

далее будем рассматривать соотношения, связанные с тензором Альманси. Величина  $h_E$  может быть определена из эксперимента на одноосное растяжение цилиндрического образца [11]

согласно (2):

$$h_E = \frac{2\sigma_S}{\frac{\delta(2+\delta)}{(1+\delta)^2} + \delta}, \quad (3)$$

где  $\delta$  – относительное удлинение образца. При этом

$$I_E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \delta - \frac{1}{(1+\delta)^2} \right]. \quad (4)$$

Из соотношений (3) и (4) определяется связь величин

$$h_E = h_E(I_E). \quad (5)$$

**Форма записи условия пластичности.** Согласно [6], [7] уравнение линий уровня может быть представлено в инвариантах девиаторов для тензора конечных деформаций Коши

$$3III_{D_C} - I_C \cdot II_{D_C} = \frac{1}{9} [27 - I_C^3], \quad (6)$$

или для тензора конечных деформаций Альманси:

$$6III_{D_E} + (3 - 2I_E) \cdot II_{D_E} = \frac{1}{36} [(3 - 2I_E)^3 - 27]. \quad (7)$$

Здесь  $I_C$  и  $I_E$  – первые инварианты тензоров Коши и Альманси, определяющие уровень деформаций. Согласно (2), (6) и (7) уравнение поверхности нагружения в проекциях на девиаторную плоскость может быть записано в инвариантах девиатора напряжения

$$3III_{D_\sigma} - h_C \cdot I_C \cdot II_{D_\sigma} = \frac{h_C^3}{9} [27 - I_C^3] \quad (8)$$

или

$$6III_{D_\sigma} + h_E \cdot (3 - 2I_E) \cdot II_{D_\sigma} = \frac{h_E^3}{36} [(3 - 2I_E)^3 - 27]. \quad (9)$$

Учитывая зависимость (5), единственным параметром упрочнения в (9) является  $I_E$  (или  $I_C$  в (8)).

Если за предельное состояние цилиндрического образца при монотонном растяжении принять его состояние, соответствующее пределу прочности (определяемому величинами  $\sigma_B$  и  $\delta_B$ , рис. 2,а) и значению  $I_E^B$ , то предельные состояния будут определяться из (3), (4) и (9) соотношениями

$$h_E^B = \frac{2\sigma_B}{\frac{\delta_B(2+\delta_B)}{(1+\delta_B)^2} + \delta_B}, \quad I_E^B = \frac{1}{2} \left[ 1 - \delta_B - \frac{1}{(1+\delta_B)^2} \right],$$

$$6III_{D_\sigma} + h_E^B(I_E^B) \cdot (3 - 2I_E^B) \cdot II_{D_\sigma} = \frac{(h_E^B(I_E^B))^3}{36} [(3 - 2I_E^B)^3 - 27].$$

На рис. 2,б представлены кривые пересечения поверхности нагружения с девиаторной плоскостью для сплава ЭК79 в пространстве главных напряжений.

Условие пластичности в главных значениях тензора напряжений можно записать в виде

$$\begin{aligned} & (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) + \\ & + \frac{3}{4} h_E \cdot (3 - 2I_E) \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \\ & = \frac{h_E^3}{8} [(3 - 2I_E)^3 - 27] \end{aligned} \quad (10)$$

(относительно параметра упрочнения  $I_E$ ).

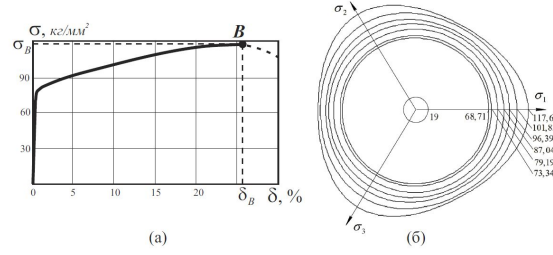


Рис. 2. Диаграмма нагружения (а) и проекции поверхности нагружения на девиаторную плоскость (б) для сплава ЭК79 ( $\sigma_B = 117,6$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\delta_B = 25,74\%$ )

Отметим, что в условиях плоской деформации условие (10) совпадает с условием пластичности Мизеса, отличие заключается в определении третьего главного значения тензора напряжений [10]. В условиях осесимметричной деформации условие (10) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & [(2\sigma_r - \sigma_z - \sigma_\varphi)(2\sigma_z - \sigma_\varphi - \sigma_r) - 9\tau_{rz}^2] (2\sigma_\varphi - \sigma_r - \sigma_z) + \\ & + \frac{3}{4}h_E \cdot (3 - 2I_E) \cdot [(\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2] = \\ & = \frac{h_E^3}{8} [(3 - 2I_E)^3 - 27]. \end{aligned}$$

Согласно ассоциированному закону пластического течения  $d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  энергетическое условие развития пластического течения  $\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p = dA_p$  определяется выражением

$$\begin{aligned} & [(2\sigma_r - \sigma_z - \sigma_\varphi)(2\sigma_z - \sigma_\varphi - \sigma_r) - 9\tau_{rz}^2] (2\sigma_\varphi - \sigma_r - \sigma_z) + \\ & + \frac{1}{2}h_E \cdot (3 - 2I_E) \cdot [(\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2] = \frac{1}{3} \frac{dA_p}{d\lambda}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $dA_p$  – приращение работы пластической деформации. При этом в условиях плоской деформации условие (11) совпадает с точностью до множителя с условием пластичности.

Отметим, что в общем случае при выбранном условии пластичности (10) выполняется условие несжимаемости, но не выполняется условие пропорциональности компонент тензора скорости деформации и девиатора напряжений.

**Связь диссипации энергии с тензором Альманси.** В работах [12], [13] отмечено, что для описания процесса разрушения в рамках жесткопластического тела достаточно ввести единую критериальную величину. В качестве такой величины выбирается удельная работа внутренних сил (диссипация энергии) на пластических деформациях, связанных с упрочнением материала, что подтверждается экспериментальными данными в условиях малоциклового усталости.

Рассмотрим соотношения, определяющие связь между тензором Альманси  $E_{ij}$  и тензором скорости деформации  $\varepsilon_{ij}$ :

$$\frac{DE_{ij}}{Dt} \equiv \frac{dE_{ij}}{dt} + E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij} \quad (i, j = \overline{1, 3}). \quad (12)$$

Запишем (12) в главных значениях тензора Альманси:

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{dt} + 2E_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} &= \varepsilon_1, \\ \frac{dE_2}{dt} + 2E_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_2} &= \varepsilon_2, \\ \frac{dE_3}{dt} + 2E_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_3} &= \varepsilon_3,\end{aligned}\tag{13}$$

которые при известном поле скоростей перемещений  $V_i = V_i(\mathbf{x})$  могут быть легко проинтегрированы. Рассмотрим сумму уравнений (13). Согласно условию несжимаемости  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$  получим

$$\frac{dI_E}{dt} + 2E_i \varepsilon_i = 0 \quad (i = \overline{1,3}).$$

Учитывая (1), получим связь производной по времени от первого инварианта тензора Альманси  $I_E$  с диссипацией энергии:

$$\frac{dI_E}{dt} + 2 \frac{\sigma_i}{h_E(I_E)} \varepsilon_i = 0 \quad \text{или} \quad -h_E(I_E) \frac{dI_E}{dt} = 2D,$$

где  $D = \sigma_i \varepsilon_i > 0$  – диссипативная функция. Отметим, что  $I_E < 0$ ,  $\frac{dI_E}{dt} < 0$ ,  $h_E > 0$ . Таким образом, диссипация работы внутренних сил прямо связана со скоростью изменения первого инварианта  $I_E$  тензора Альманси, и если этот инвариант не изменяется, то диссипация равна нулю. То есть нагружение вдоль линии уровня не должно приводить к пластическим деформациям.

Заметим, что при монотонном нагружении критические состояния материала, определяемые линиями  $h_*$  (рис. 1,а), не изменяются. При немонотонном нагружении ситуация изменяется и линия, определяемая  $h_*$ , будет изменять свое положение, приближаясь к недеформированному состоянию.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Irwin, G. R.* Fracturing and fracture dynamics / G. R. Irwin, J. A. Kies // *Welding J. Res. Suppl.* – 1952.
- [2] *Orowan, E.* Fundamentals of brittle behavior of metals / E. Orowan // *Fatigue and fracture of metals.* – N.Y. : Wiley, 1952. – P. 139–167.
- [3] *Серенсен, С. В.* Термопрочность материалов и конструкционных элементов / С. В. Серенсен. – Киев : Наукова думка, 1967.
- [4] *Писаренко, Г. С.* О форме предельной поверхности механического критерия прочности / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев // *Прикладная механика.* – 1968. – Т. 4. – № 3. – С. 45–50.
- [5] *Трощенко, В. Т.* Механическое поведение материалов при различных видах нагружения / В. Т. Трощенко, А. А. Лебедев, В. А. Стрижало и др. – Киев : Логос, 2000. – 571 с.
- [6] *Хромов, А. И.* Деформационные состояния и условия разрушения жесткопластических тел / А. И. Хромов, Е. П. Кочеров, А. Л. Григорьева // *Доклады Академии наук.* – 2007. – Т. 413. – № 4. – С. 481–485.
- [7] *Буханько, А. А.* Деформационно-энергетический критерий разрушения жесткопластических тел / А. А. Буханько, А. Л. Григорьева, Е. П. Кочеров, А. И. Хромов // *Известия РАН. МТТ.* – 2009. – № 6. – С. 178–186.
- [8] *Гольденблат, И. И.* Общая теория критериев прочности изотропных и анизотропных материалов / И. И. Гольденблат, В. А. Копнов // *Проблемы прочности.* – 1971. – № 2. – С. 65–69.
- [9] *Гениев, Г. А.* Теория пластичности бетона и железобетона / Г. А. Гениев, В. Н. Кисюк, Г. А. Тюпин. – М. : Стройиздат, 1974. – 316 с.

[10] *Буханько, А. А.* Условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний, и особенности его приложения в теории идеальной пластичности / А. А. Буханько // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2013. – № 1(30). – С. 199–206.

[11] *Хромов, А. И.* Разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения. / А. И. Хромов, О. В. Козлова. – Владивосток : Дальнаука, 2005. – 159 с.

[12] *Хромов, А. И.* Разрушение жесткопластических тел, константы разрушения / А. И. Хромов // Известия РАН. МГТ. – 2005. – № 3. – С. 137–152.

[13] *Хромов, А. И.* Пластические константы разрушения / А. И. Хромов, А. А. Буханько, О. В. Козлова, С. Л. Степанов // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – № 2. – С. 147–155.

*Буханько Анастасия Андреевна,*

*кандидат физико-математических наук, доцент, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет), г. Самара*

**e-mail:** abukhanko@mail.ru

*Лошманов Антон Юрьевич,*

*кандидат физико-математических наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре*

**e-mail:** loshmanov@kmscom.ru

*Хромов Александр Игоревич,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре*

**e-mail:** khromovai@list.ru

A. A. Bukhanko, A. Yu. Loshmanov, A. I. Khromov

## LIMITING STATES OF PLASTIC BODIES

*Samara State Aerospace University*

*Komsomolsk-on-Amur State Technical University*

**Abstract.** The approach to the description of limiting states of plastic bodies is considered. This approach is related to the surface of strain states of work-hardening incompressible rigid-plastic body. The specific dissipation of the work of internal forces of plastic deformations, which are connected with material hardening, is taken as criterial quantity that describes the limiting state. The loading surface is related to level lines of the surface of strain states. It is considered that limiting states correspond to limiting hardening, that is to limiting position of the loading surface  
**Keywords:** work-hardening incompressible rigid-plastic body, limiting state, energy dissipation, surface of strain states, loading surface.

## REFERENCES

- [1] *Irwin, G. R.* Fracturing and fracture dynamics / G. R. Irwin, J. A. Kies // *Welding J. Res. Suppl.* – 1952.
- [2] *Orowan, E.* Fundamentals of brittle behavior of metals / E. Orowan // *Fatigue and fracture of metals.* – N.Y. : Wiley, 1952. – P. 139–167.
- [3] *Serensen, S. V.* Thermal resistance of materials and constructional elements / S. V. Serensen. – Kiev : Naukova dumka, 1967.
- [4] *Pisarenko, G. S.* Shape of the limiting surface of a mechanical strength criterion / G. S. Pisarenko, A. A. Lebedev // *Sov. Appl. Mech.* – 1968. – Vol. 4. – No. 3. – P. 27–30.
- [5] *Troschenko, V. T.* Mechanical behavior of materials under different loading modes / V. T. Troschenko, A. A. Lebedev, V. A. Strizhalo et al – Kiev : Logos, 2000. – 571 p.
- [6] *Khromov, A. I.* Strain states and fracture conditions for rigid-plastic bodies / A. I. Khromov, E. P. Kocherov, A. L. Grigor'eva // *Dokl. Phys.* – 2007. – Vol. 52. – No. 4. – P. 228–232.
- [7] *Bukhan'ko, A. A.* Strain-energy failure criterion for rigid-plastic bodies / A. A. Bukhan'ko, A. L. Grigor'eva, E. P. Kocherov, A. I. Khromov // *Mech. Solids.* – 2010. – Vol. 44. – No. 6. – P. 959–966.
- [8] *Gol'denblat, I. I.* General theory of criteria of strength for isotropic and anisotropic materials / I. I. Gol'denblat, V. A. Kopnov // *Strength of Materials.* – 1971. – Vol. 3. – No. 2. – P. 184–188.
- [9] *Geniev, G. A.* The Theory of Plasticity of Concrete and Reinforced Concrete / G. A. Geniev, V. N. Kissyuk, G. A. Tyupin. – Moscow : Stroiizdat, 1974. – 316 p.
- [10] *Bukhan'ko, A. A.* Plasticity condition related with level lines of strain states surface, and features of its application in the ideal plasticity theory / A. A. Bukhanko // *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya "Fiziko-Matematicheskie Nauki.* – 2013. – No. 1(30). – P. 199–206.
- [11] *Khromov, A. I.* Fracture of rigid-plastic bodies. Constants of fracture. / A. I. Khromov, O. V. Kozlova. – Vladivostok : Dal'nauka, 2005. – 159 p.
- [12] *Khromov, A. I.* Fracture of rigid-plastic bodies and fracture constants / A. I. Khromov // *Mech. Solids.* – 2005. – Vol. 40. – No. 3. – P. 109–122.
- [13] *Khromov, A. I.* Plastic constants of fracture / A. I. Khromov, A. A. Bukhan'ko, O. V. Kozlova, S. L. Stepanov // *Appl. Mech. Tech. Phys.* – 2006. – Vol. 47. – No. 2. – P. 274–281.

*Bukhanko, Anastasia Andreevna*

*Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Samara State Aerospace University, Samara*

*Loshmanov, Anton Yurevich*

*Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Komsomolsk-on-Amur State Technical University, Komsomolsk-on-Amur*

*Khromov, Aleksander Igorevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Komsomolsk-on-Amur State Technical University, Komsomolsk-on-Amur*



## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЕ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ ПРИ ДВУОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

**Аннотация.** В работе рассматривается напряженно-деформированное состояние тонкой пластины с круговым отверстием из анизотропного упруго-идеальнопластического материала при двuosном растяжении. Решение задачи находится методом малого параметра [2], в первом приближении определены компоненты напряжения и перемещения в упругой и пластической областях, определена граница пластической зоны.

**Ключевые слова:** напряжение, деформация, упругость, пластичность, анизотропия, растяжение, отверстие.

УДК: 539.374

Рассмотрим тонкую пластину из упруго-идеальнопластического анизотропного материала, ослабленную эллиптическим отверстием с полуосями  $a(1 - c)$ ,  $a(1 + c)$ . В плоскости  $xy$  пластина растягивается на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями  $p_1$  и  $p_2$ , контур свободен от усилий.

Положим

$$c = \delta d_1, \quad \frac{p_1 - p_2}{2k} = \delta d_2, \quad \text{где } k, p_1, p_2 - const.$$

где  $\delta$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  – безразмерные постоянные, принимающие значение в пределах:  $0 \leq \delta \leq 1, 0 \leq d_i \leq 1$ .

Очевидно, что при  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = 1$  имеет место двuosное растяжение пластины с круговым отверстием.

Уравнение контура эллиптического отверстия запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2(1+c)^2} + \frac{y^2}{a^2(1-c)^2} = 1, \quad (1)$$

при  $c = 0$ , согласно (1), имеет место круговое отверстие радиуса  $a$ .

Условие пластичности для анизотропного материала примем виде [3, 113]

$$\left(\frac{\sigma_x^p}{k_1} - 1\right)\left(\frac{\sigma_y^p}{k_2} - 1\right) - F\tau_{xy}^{(p)2} = 0. \quad (2)$$

Условие пластичности (2) определяет свойства анизотропного идеальнопластического материала. Коэффициенты  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $F$  характеризуют анизотропию материала. Отметим, что величины  $k_1, k_2, F$  безразмерные. При  $k_1 = k_2 = F = 1$ , согласно (2), имеет место изотропный материал.

Связь между напряжениями в декартовой систем координат  $x, y$  и напряжениями в полярной системе координат  $\rho, \theta$  имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta.\end{aligned}\quad (3)$$

Условие пластичности в полярных координатах записывается в виде

$$\begin{aligned}& \frac{1}{k_1 k_2} \left[ \frac{(\sigma_\rho^p + \sigma_\theta^p)^2}{4} - \frac{(\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p)^2}{4} \cos^2(2\theta) - \tau_{\rho\theta}^{(p)2} \sin^2(2\theta) \right] - \\ & - \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \frac{(\sigma_\rho^p + \sigma_\theta^p)}{2} + \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \left[ \frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \cos(2\theta) + \tau_{\rho\theta}^p \sin(2\theta) \right] - \\ & - \frac{(\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) \tau_{\rho\theta}^p \cos(2\theta) \sin(2\theta)}{k_1 k_2} - F \left[ \frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \sin(2\theta) - \tau_{\rho\theta}^p \cos(2\theta) \right]^2 = 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Согласно [2] в нулевом приближении при условии  $\sigma_\theta^{(0)p} = 1$  и граничном условии  $\sigma_\rho^{(0)p} = 0$  при  $\rho = \alpha$  получим

$$\sigma_\rho^{(0)p} = \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right), \quad \sigma_\theta^{(0)p} = 1, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0. \quad (5)$$

В первом приближении граничные условия запишутся:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{(1)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha.\end{aligned}\quad (6)$$

Согласно [3, 116] и (6) компоненты напряженного состояния в первом приближения имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{(1)p} &= \frac{1}{\rho} \left( -\alpha (k'_1 + k'_2) \left( \ln \rho + \frac{3\alpha}{4\rho} \right) + \frac{\alpha^2}{2\rho} F' + \right. \\ & \quad \left. + \alpha (k'_1 + k'_2) \left( \ln \alpha + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha}{2} F' \right) + \\ & + \frac{1}{\rho} \left( \alpha (k'_2 - k'_1) \left( (3 \ln \rho - 4) - \frac{\alpha}{\rho} (1 - 4 \ln \rho) \right) - \right. \\ & \quad \left. - 3 \left( \frac{\alpha}{3} (3 (k'_1 - k'_2) (\ln \alpha + 1)) \right) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{4}{\rho} \left( \alpha^2 (- (k'_1 - k'_2) (2 - \ln \alpha)) \right) \right) \cos(2\theta) + \\ & \quad + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\alpha^2}{2\rho} \left( F' + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) (16 \ln \rho - 1) - \right. \\ & \quad \left. - 15 \left( \frac{\alpha}{15} \left( F' + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) (16 \ln \alpha - \frac{17}{2}) \right) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{16}{\rho} \left( \frac{\alpha^2}{2} \left( F' + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) (1 - \ln \alpha) \right) \right) \cos(4\theta), \\ \sigma_\theta^{(1)p} &= -\frac{\alpha}{4\rho^2} [(k'_1 + k'_2) (2\rho - \frac{\alpha}{2}) + \frac{F'}{2} + \\ & + 2\rho (k'_1 - k'_2) \cos(2\theta) + (\alpha (k'_1 + k'_2) - F') \frac{\cos(4\theta)}{2}].\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}\tau_{\rho\theta}^{(1)p} &= -2 \left[ (k'_2 - k'_1) \left( \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha^2}{\rho^2} (1 - \ln \rho) \right) - \frac{\alpha^2}{\rho^2} (k'_1 - k'_2) (2 - \ln \alpha) \right] \sin(2\theta) - \\ & - \left( \frac{2\alpha^2}{\rho^2} \left( F' + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) (1 - \ln \rho) - \frac{2\alpha^2}{\rho^2} \left( F' + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) (1 - \ln \alpha) \right) \sin(4\theta).\end{aligned}$$

Компоненты напряжения в упругой области в первом приближении согласно [3, 117] с учетом (6) имеют вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_\rho^{(I)e} &= \frac{\tilde{K}}{\rho^2} + \left( \left( \frac{2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4} \right) \tilde{N} - \left( 1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) \right) \times \\
 &\quad \times \cos(2\theta) + \left( -\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4} \right) \tilde{M} \cos(4\theta), \\
 \sigma_\theta^{(I)e} &= -\frac{\tilde{K}}{\rho^2} - \alpha + \left( \frac{1}{\rho^4} \tilde{N} + 1 + \frac{3}{\rho^4} \right) \cos(2\theta) + \\
 &\quad + \left( \frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \tilde{M} \cos(4\theta), \\
 \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left( \left( \frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) \bar{N}^* - \left( -1 - \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) \right) \sin(2\theta) + \\
 &\quad + \left( \frac{3}{\rho^6} - \frac{2}{\rho^4} \right) \bar{M}^* \sin(4\theta),
 \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{K} &= (\alpha - 1) \frac{\alpha}{2} F' + \alpha (k'_1 + k'_2) \left( \ln \alpha + \frac{3}{4} - \frac{3\alpha}{4} \right), \\
 \tilde{N} &= (k'_2 - k'_1) (9\alpha^2 - \alpha + \alpha \ln \alpha (3 + 4\alpha)), \\
 \tilde{M} &= \left( F' + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) \left( 8\alpha \ln \alpha (-2 + \alpha) + \frac{17}{2} \alpha (1 - \alpha) \right), \\
 \bar{N}^* &= -2 (k'_2 - k'_1) (\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^2 \ln \alpha), \\
 \bar{M}^* &= 2\alpha^2 \ln \alpha \left( F' + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Для определения радиуса упругопластической области в первом приближении получим

$$\rho_s^{(I)} = \frac{\sigma_\theta^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)e}}{\frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho}}. \tag{9}$$

Радиус упругопластической области в первом приближении, согласно (9), (7) и (8), имеет вид

$$\begin{aligned}
 \rho'_s &= -\frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \left( \frac{1}{4} + \alpha (\ln \alpha - 1) + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \frac{F'}{8} (5 - \alpha) + \\
 &\quad + (2(k'_1 + k'_2) (-\alpha(1 + \alpha) + \frac{3}{4} \alpha \ln \alpha - 1) + 4) \cos(2\theta) + \\
 &\quad + \frac{(\alpha(k'_1 + k'_2) - F')}{2} (4\alpha \ln \alpha - 1) \cos(4\theta), \quad \text{при } \rho = 1.
 \end{aligned}$$

Согласно [5, 64] перемещения в упругой области записываются в виде:

$$\begin{aligned}
 u_\rho^{(I)e} &= \frac{1}{E} \left[ (1 + \mu) \left( -\frac{\tilde{K}}{\rho} \right) + \left( \frac{(1+\mu)}{3\rho^3} (\tilde{N} - 2\bar{N}^*) - \frac{2}{\rho} (\tilde{N} - \bar{N}^*) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (1 + \mu) \left( \rho - \frac{1}{\rho^3} \right) - \frac{4}{\rho^3} \right) \cos(2\theta) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{5\rho^5} (1 + \mu) (2\tilde{M} - 3\bar{M}^*) - \left( 1 + \frac{\mu}{3} \right) \frac{1}{\rho^3} (\tilde{M} - \bar{M}^*) \right) \cos(4\theta) \right], \\
 u_\theta^{(I)e} &= \frac{1}{E} \left[ \left( \frac{(1+\mu)}{3\rho^3} (\tilde{N} - 2\bar{N}^*) - \frac{\mu-1}{\rho} (\tilde{N} - \bar{N}^*) + (1 + \mu) \left( \rho + \frac{1}{\rho^3} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2(1 - \mu) \frac{1}{\rho} \right) \sin(2\theta) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{5\rho^5} (1 + \mu) (2\tilde{M} - 3\bar{M}^*) - \frac{2\mu}{3\rho^3} (\tilde{M} - \bar{M}^*) \right) \sin(4\theta) \right].
 \end{aligned} \tag{10}$$

Перемещения в пластической области имеют вид (согласно [5, 68]):

$$u_\rho^{(I)p} = A^{**} + [B^{**} + C_{21}^*] \cos(2\theta) + [D^{**} + C_{41}^*] \cos(4\theta), \tag{11}$$

$$u_{\theta}^{(I)p} = \frac{C_{00}^*}{\rho} + [B^{***} - 2C_{21}^* + C_{22}^*\rho] \sin(2\theta) + \\ + [D^{***} - 4C_{41}^* + C_{42}^*\rho] \sin(4\theta),$$

где

$$A^{**} = \alpha(k'_1 + k'_2) \left( -\ln^2 \rho + \ln \rho (\ln \alpha + \frac{5}{4} - \frac{3}{\rho}) + \frac{3\alpha}{8\rho} \right) + \\ + \frac{F'}{2} \left( \ln \rho (-\alpha + \frac{\alpha^2}{\rho} + \rho) - \frac{\alpha^2}{2} - \rho \right), \\ B^{**} = (k'_2 - k'_1) \left( \ln^2 \rho - \frac{7\alpha}{\rho} \ln \rho + \frac{\alpha}{\rho} (\alpha - 4 + 4\alpha \ln \alpha) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha \ln \rho}{\rho} (4 + \alpha) + \rho (-3\alpha (\ln \alpha + 1) + \frac{1}{2}) \right), \\ D^{**} = \left( F' + \frac{k'_1 + k'_2}{2} \right) \left( -\frac{17\alpha^2}{2\rho} (\ln \rho + 1) - \alpha \ln \rho (16 \ln \alpha - \frac{17}{2}) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2}{\rho} \left( \frac{33}{4} - 8 \ln \alpha \right) - \frac{1}{2\rho} (\ln \rho - 1) \right), \\ B^{***} = \frac{1}{E} \left[ (k'_2 - k'_1) \left( -8\alpha \ln \rho (\alpha + \frac{1}{\rho}) + \ln^2 \rho - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\alpha}{\rho} (12 - 8\alpha^2 (3 - \ln \alpha) - \alpha (1 + 4 \ln \alpha)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\alpha \ln \rho}{\rho} (11 + \alpha) + \rho (-3\alpha (\ln \alpha + 1) + \frac{1}{2}) \right) \right] - \\ - \frac{2}{G} \left[ (k'_2 - k'_1) \left( \ln^2 \rho - \frac{\alpha}{\rho} \ln \rho (11 + \alpha) + \frac{\alpha}{\rho} (\alpha - 4 + 4\alpha \ln \alpha) + \right. \right. \\ \left. \left. + \rho \left( -3\alpha (\ln \alpha + 1) + \frac{1}{2} \right) \right) \right], \\ D^{***} = \frac{1}{E} \left( F' + \frac{k'_1 + k'_2}{2} \right) \left( \alpha^2 \ln \rho \left( \frac{-8\alpha}{\rho} + 1 \right) - \frac{32\alpha^2}{15\rho} (16 \ln \alpha - \frac{17}{2}) \right) - \\ - \frac{2}{G} \left( F' + \frac{k'_1 + k'_2}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} \ln^2 \rho - \alpha^2 \ln \rho (1 + 2 \ln \alpha) \right).$$

С учетом условия сопряжения и (10) и (11) найдем коэффициенты  $C_{00}^*$ ,  $C_{21}^*$ ,  $C_{22}^*$ ,  $C_{41}^*$ ,  $C_{42}^*$ :

$$C_{00}^* = 0, \quad (12)$$

$$C_{21}^* = N^* - \tilde{B}^*,$$

$$C_{22}^* = \bar{N}^* - \tilde{B}^{**} + 2(N^* - \tilde{B}^*),$$

$$C_{41}^* = M^* - \tilde{D}^*,$$

где

$$N^* - 2(\tilde{N} - N^*) - 4, \\ M^* = \frac{1}{E} \left( \frac{1}{5}(1 + \mu)(2\tilde{M} - 3M^*) - (1 + \frac{\mu}{3})(\tilde{M} - M^*) \right), \\ N^{**} = \frac{1}{E} \left( \frac{(1+\mu)}{3}(\tilde{N} - 2N^*) - (\mu - 1)(\tilde{N} - N^*) + 4 \right), \\ M^{**} = \frac{1}{E} \left( \frac{1}{5}(1 + \mu)(2\tilde{M} - 3M^*) - \frac{2\mu}{3}(\tilde{M} - M^*) \right), \\ \tilde{A}^* = \frac{3\alpha^2}{8}(k'_1 + k'_2) - \frac{F'}{2} \left( \frac{\alpha^2}{2} + 1 \right), \\ \tilde{B}^* = (k'_2 - k'_1) \left( \alpha (\alpha - 7) + \alpha \ln \alpha (4\alpha - 3) + \frac{1}{2} \right), \\ \tilde{D}^* = \left( F' + \frac{k'_1 + k'_2}{2} \right) \left( \alpha^2 \left( \frac{1}{4} - 8 \ln \alpha \right) + \frac{1}{2} \right), \\ \tilde{B}^{**} = \frac{1}{E} \left[ (k'_2 - k'_1) \left( \alpha (-6 \ln \alpha + 24\alpha^2 - \alpha - 15) + \frac{1}{2} \right) \right] - \\ - \frac{2}{G} \left[ (k'_2 - k'_1) \left( \alpha (\alpha - 7 + \ln \alpha (4\alpha - 3)) + \frac{1}{2} \right) \right], \\ \tilde{D}^{**} = -\frac{32\alpha^2}{15E} \left( F' + \frac{k'_1 + k'_2}{2} \right) \left( 16 \ln \alpha - \frac{17}{2} \right),$$

где  $\tilde{K}$ ,  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{N}$ ,  $\bar{M}^*$ ,  $\bar{N}^*$  определены согласно (8).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бицено, К. Б. Техническая динамика / К. Б. Бицено, Р. Граммель. – Л. : Госехиздат, 1950. – 900 с.
- [2] Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [3] Павлова, Т. Н. Упругопластическое состояние тонкой пластины из анизотропного материала, ослабленной отверстием под действием растягивающих усилий / Т. Н. Павлова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2010. – № 2 (66). – С. 11–121.
- [4] Павлова, Т. Н. Напряжено-деформированное упругопластическое состояние тонкой анизотропной пластины, ослабленное отверстием при двусосном растяжении / Т. Н. Павлова. – Чебоксары, 2010. – 11 с. – Библиогр. : 2 назв. - Деп. в ВИНТИ 23.04.10, № 224-В2010.
- [5] Павлова, Т. Н. Об определении перемещений в задаче напряженно-деформированного состояния тонкой пластины с эллиптическим отверстием / Т. Н. Павлова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2010. – № 1 (65). – С. 64–69.

Митрофанова Татьяна Валерьевна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: mitrofanova\_tv@mail.ru

Павлова Татьяна Николаевна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: tn\_pavlova@mail.ru

*T. V. Mitrofanova, T. N. Pavlova*

**THE STRESS-DEFORMATION OF ELASTIC-PLASTIC STATE THIN  
ANISOTROPIC PLATES WEAKENED BY A CIRCULAR APERTURE WITH  
BIAXIAL STRETCHING**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** Stressedly-deformed state of a thin slab from anisotropic elastoplastic material with a circular aperture in biaxial tension is considered in the work. The task solution is made with the help of perturbation theory [2], the tension and shift components in elastic and plastic stability are found at first approximation, the limit of plastic area is determined.

**Keywords:** tension, deformation, elasticity, plasticity, anisotropy, an aperture.

**REFERENCES**

- [1] *Ivlev, D. D.* The theory of perfect plasticity / D. D. Ivlev. – Moscow : Nauka, 1966. - 231 p.
- [2] *Mironov, B. G.* Torsion of prismatic bars under the influence of pressure, linearly varying along a generator / B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2006. – № 1 (48). – P. 98-101.
- [3] *Kozlova, L. S.* Limit state of prismatic bars in torsion / L. S. Kozlova // Detection sensitivity I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – Cheboksary, 2010. – 7 p. – Bibliography: 3 titles. – Rus. – Dep. in VINITI 29.04.10 № 232-V2010.
- [4] *Mironov, B. G.* Torsion of anisotropic sector of a circular ring under the action of alternating pressure / B. G. Mironov, L. S. Kozlova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2010. – № 4 (68). – P. 132-136.

*Mitrofanova, Tatyana Valeryevna*

*Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor of Department Computer Science and Computer Engineering, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Pavlova, Tatyana Nikolaevna*

*Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor of Department Computer Science and Computer Engineering, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

В. Н. Орлов, Т. Ю. Леонтьева

**ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ  
НА ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ  
АНАЛИТИЧНОСТИ**

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева*

**Аннотация.** В работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с подвижными особыми точками. Построено приближенное решение в случае возмущенных значений начальных условий. Полученные результаты сопровождаются расчетами.

**Ключевые слова:** нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, задача Коши, подвижная особая точка, возмущение, приближенное решение, оценка погрешности.

УДК: 517.927.4

**Введение.** В работе [1] рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с подвижными особыми точками. Дано доказательство теоремы существования и единственности решения этого уравнения в области аналитичности и построено приближенное решение в случае точного значения начальных условий. В данной статье при исследовании влияния возмущения начальных условий на приближенное решение использована идея предложенная в работах [2], [3].

В статье [1] для задачи Коши (1)–(2)

$$y''(x) = y^5(x) + r(x), \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \quad (2)$$

в случае точного значения начальных условий было получено приближенное решение

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^N C_n (x - x_0)^n. \quad (3)$$

При получении приближенного решения дифференциального уравнения часто приходится осуществлять аналитическое продолжение, что приводит к задаче исследования влияния возмущения начальных условий задачи Коши на аналитическое приближенное решение (3)

Возмущение начального условия

$$\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0, \quad \tilde{y}'(x_0) = \tilde{y}_1 \quad (4)$$

оказывает влияние на структуру аналитического приближенного решения (3), которое принимает следующий вид:

$$\tilde{y}_N(x) = \sum_{n=0}^N \tilde{C}_n (x - x_0)^n, \quad (5)$$

где  $\tilde{C}_n$  возмущенные значения коэффициентов.

**Теорема 3** Пусть выполняются следующие условия:

$$r(x) \in C^\infty \text{ в области}$$

$$|x - x_0| < \rho_0 \quad (6)$$

где  $\rho_0 = \text{const}$ ;

$$\exists M_0 : \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \leq M_0, \text{ где } M_0 = \text{const}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

известны оценки погрешности  $|y_0 - \tilde{y}_0| = \Delta \tilde{y}_0$ ,  $|y_1 - \tilde{y}_1| = \Delta \tilde{y}_1$

Тогда для аналитического приближенного решения (5) задачи (1)–(4) в области

$$|x - x_0| < \rho_2 \quad (7)$$

справедлива оценка погрешности

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{y}_N(x) \leq & \frac{2^{2N+2} \cdot M (M+1)^{4N+4} |x - x_0|^{N+1}}{N(N+1)} \cdot \frac{1}{1 - 2^2 \cdot (M+1)^4 \cdot |x - x_0|} + \\ & + \Delta M \left( 1 + |x - x_0| + \frac{2^4 (M + \Delta M + 1)^8 |x - x_0|}{1 - 2^2 (M + \Delta M + 1)^4 |x - x_0|} \right), \end{aligned}$$

где  $\Delta M = \Delta \tilde{y}_0$ ,  $\Delta M_1 = \Delta \tilde{y}_1$ ,  $\rho_2 = \min\{\rho_0, \rho_1\}$ ,  $\rho_1 = \frac{1}{2^2(M+\Delta M+1)^4}$ ,

$M = \max \left\{ |\tilde{y}_0|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Доказательство.** Используя классический подход, получаем

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{y}_N(x) &= |y(x) - \tilde{y}_N(x)| \leq |y(x) - \tilde{y}(x)| + |\tilde{y}(x) - \tilde{y}_N(x)| = \\ &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (x - x_0)^n \right| + \left| \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (x - x_0)^n - \sum_{n=0}^N \tilde{C}_n (x - x_0)^n \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} (C_n - \tilde{C}_n) (x - x_0)^n \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \tilde{C}_n (x - x_0)^n \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |\tilde{C}_n (x - x_0)^n| + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n |x - x_0|^n = \Delta_1 + \Delta_2, \end{aligned}$$

где  $|\tilde{C}_n - C_n| = \Delta \tilde{C}_n$ .

Для выражения  $\Delta_1$  из теоремы 2 статьи [1] имеем оценку

$$\Delta_1 \leq \frac{2^{2N+2} \cdot M (M+1)^{4N+4} |x - x_0|^{N+1}}{N(N+1)} \cdot \frac{1}{1 - 2^2 \cdot (M+1)^4 \cdot |x - x_0|},$$

где

$$M = \max \left\{ |\tilde{y}_0|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



В работе [1] для определения коэффициентов  $C_n$  было использовано тождество

$$n(n-1)C_n = D_{n-2}^{**} + B_{n-2} \quad n = 2, 3, \dots, \quad (8)$$

где

$$D_n^{**} = \sum_{i=0}^n D_{n-i}^* C_i \quad D_n^* = \sum_{i=0}^n D_{n-i} D_i, \quad D_n = \sum_{i=0}^n C_{n-i} C_i \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и получена оценка

$$|C_n| \leq \frac{1}{n(n-1)} 2^{2n} M (M+1)^{4n} \quad n = 2, 3, \dots \quad (9)$$

Из (8), с учетом оценки (9), предполагаем, что для выражения  $\Delta \tilde{C}_n$  справедлива оценка

$$\Delta \tilde{C}_n \leq \frac{1}{n(n-1)} 2^{2n} \Delta M (M + \Delta M + 1)^{4n} \quad n = 2, 3, \dots \quad (10)$$

где  $\Delta M = \Delta \tilde{y}_0$ . С помощью метода математической индукции докажем эту оценку в случае  $n+1 = 2k+1$ ,

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{C}_{2n+1} &= \left| \tilde{C}_{2n+1} - C_{2n+1} \right| = \frac{1}{2n(2n+1)} \left| \tilde{D}_{2n-1}^{**} + \tilde{B}_{2n-1} - D_{2n-1}^{**} - B_{2n-1} \right| = \\ &= \frac{1}{2n(2n+1)} \left| \sum_{i=0}^{2n-1} \tilde{D}_{2n-1-i}^* \tilde{C}_i + B_{2n-1} + \Delta \tilde{B}_{2n-1} - \sum_{i=0}^{2n-1} D_{2n-1-i}^* C_i - B_{2n-1} \right| = \\ &= \frac{1}{2n(2n+1)} \left| \sum_{i=0}^{2n-1} \left( \sum_{j=0}^{2n-1-i} \tilde{D}_{2n-1-i-j} \tilde{D}_j \right) \tilde{C}_i + \Delta \tilde{B}_{2n-1} - \sum_{i=0}^{2n-1} \left( \sum_{j=0}^{2n-1-i} D_{2n-1-i-j} D_j \right) C_i \right| = \\ &= \frac{1}{2n(2n+1)} \left| \sum_{i=0}^{2n-1} \left( \sum_{j=0}^{2n-1-i} \left( \sum_{m=0}^{2n-1-i-j} \tilde{C}_{2n-1-i-j-m} \tilde{C}_m \right) \left( \sum_{l=0}^j \tilde{C}_{j-l} \tilde{C}_l \right) \right) \tilde{C}_i - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{2n-1} \left( \sum_{j=0}^{2n-1-i} \left( \sum_{m=0}^{2n-1-i-j} C_{2n-1-i-j-m} C_m \right) \left( \sum_{l=0}^j C_{j-l} C_l \right) \right) C_i + \Delta \tilde{B}_{2n-1} \right| \end{aligned}$$

Далее с учетом оценок (9) и (10) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{C}_{2n+1} &\leq \frac{1}{2n(2n+1)} \cdot \\ &\cdot \left( \sum_{i=0}^{2n-1} \left( \sum_{j=0}^{2n-1-i} \left( \sum_{m=0}^{2n-1-i-j} \frac{2^{2(2n-1-i-j)} M^2 (M + \Delta M + 1)^{4(2n-1-i-j)}}{m^* (m^* - 1) (2n - i - j - m - 1)^* ((2n - i - j - m - 1)^* - 1)} \right) \right) \times \right. \\ &\times \left. \left( \sum_{l=0}^j \frac{2^{2j} M^2 (M + \Delta M + 1)^{4j}}{l^* (l^* - 1) (j - l)^* ((j - l)^* - 1)} \right) \right) \times \left( \frac{2^{2i} M (M + 1)^{4i}}{i^* (i^* - 1)} + \frac{2^{2i} \Delta M (M + \Delta M + 1)^{4i}}{i^* (i^* - 1)} \right) + \\ &+ \sum_{i=0}^{2n-1} \left( \sum_{j=0}^{2n-1-i} \left( \sum_{m=0}^{2n-1-i-j} \frac{2^{2(2n-1-i-j)} M^2 (M + 1)^{4(2n-1-i-j)}}{m^* (m^* - 1) (2n - i - j - m - 1)^* ((2n - i - j - m - 1)^* - 1)} \right) \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( \sum_{l=0}^j \frac{2^{2j} M^2 (M+1)^{4j}}{l^* (l^* - 1) (j-l)^* ((j-l)^* - 1)} \right) \left( \frac{2^{2i} \Delta M (M + \Delta M + 1)^{4i}}{i^* (i^* - 1)} + \Delta M \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{2n(2n+1)} \left( 2^4 \cdot 2^{2(2n-1)} M^5 (M + \Delta M + 1)^{4(2n-1)} + \Delta M \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{2n(2n+1)} 2^{2(2n+1)} \Delta M (M + \Delta M + 1)^{4(2n+1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{где } (2n-1-i-j-m)^* &= \begin{cases} 1, (2n-1-i-j-m) = 0, 1 \\ (2n-1-i-j-m), (2n-1-i-j-m) = 2, 3, \dots \end{cases}, \quad m^* = \\ \begin{cases} 1, m = 0, 1 \\ m, m = 2, 3, \dots \end{cases}, \quad (2n-1-i-j)^* &= \begin{cases} 1, (2n-1-i-j) = 0, 1 \\ (2n-1-i-j), (2n-1-i-j) = 2, 3, \dots \end{cases}, \quad l^* = \\ \begin{cases} 1, l = 0, 1 \\ l, l = 2, 3, \dots \end{cases}, \quad j^* = \begin{cases} 1, j = 0, 1 \\ j, j = 2, 3, \dots \end{cases}, \quad (2n-1-i)^* &= \begin{cases} 1, (2n-1-i) = 0, 1 \\ (2n-1-i), (2n-1-i) = 2, 3, \dots \end{cases}, \\ (j-l)^* &= \begin{cases} 1, (j-l) = 0, 1 \\ (j-l), (j-l) = 2, 3, \dots \end{cases}, \quad i^* = \begin{cases} 1, i = 0, 1 \\ i, i = 2, 3, \dots \end{cases}. \end{aligned}$$

Аналогичное соотношение имеем и в случае  $n+1 = 2k$ . Таким образом доказана справедливость оценки для  $\Delta \tilde{C}_n$ .

Тогда выражение  $\Delta_2$  будет иметь оценку:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n |x - x_0|^n = \Delta \tilde{C}_0 + \Delta \tilde{C}_1 |x - x_0| + \sum_{n=2}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n |x - x_0|^n \leq \\ &\leq \Delta M \left( 1 + |x - x_0| + \frac{2^4 (M + \Delta M + 1)^8 |x - x_0|}{1 - 2^2 (M + \Delta M + 1)^4 |x - x_0|} \right). \end{aligned}$$

Т. к. оценка для  $\Delta_2$  справедлива в области

$$|x - x_0| < \rho_1,$$

где  $\rho_1 = \frac{1}{2^2(M+\Delta M+1)^4}$ , то оценка для выражения  $\Delta \tilde{y}_N(x)$  будет справедлива в области (7).

**Пример.** Найдем приближенное решение задачи (1)–(4) в случае  $r(x) = 0$  при начальных данных  $\tilde{y}(0, 5) = 0,9999$  и  $\tilde{y}_1(0, 5) = 0,5774$ .

Величина возмущения не превышает  $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$ . У данной задачи есть точное решение  $y = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}-2x}}$ . Найдем радиус аналитичности  $\rho_2 = 0,015628$ . Выберем приближенное значение  $x = 0,505$ . Применяя (5),  $N = 3$ , вычислим приближенное значение функции. Произведенные расчеты приведены в таблице 1:

Таблица 1

$x$	$\tilde{y}_3$	$y$	$\Delta \tilde{y}_3$	$\Delta y$	$\Delta_1 y$
0,55	1,0028993118	1,0027994938	0,0043960075	0,000099818	0,001

где  $\tilde{y}_3$  – приближенное решение (5);

$y$  – значение точного решения;

$\Delta \tilde{y}_3$  – оценка погрешности приближенного решения, полученная по теореме 3;

$\Delta y$  – истинная величина погрешности приближенного решения  $\tilde{y}_3$ ;

$\Delta_1 y$  – апостериорная оценка погрешности, которая определяется путем решения обратной задачи теории погрешности для  $\xi = 0,001$ . В этом случае для  $N = 5$  априорная оценка будет удовлетворять требуемой точности  $\xi = 0,001$ . Добавки в структуре приближенного решения для  $N = 4$  и  $N = 5$  в общей сумме не превышают требуемой точности. Поэтому в структуре

приближенного решения можем ограничиться значением  $N = 3$ , при котором приближенное решение будет иметь погрешность  $\xi = 0,001$ .

**Выводы.** В статье сформулирована и доказана теорема, отражающая влияние возмущения начальных условий на приближенное решение в области аналитичности.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Орлов, В. Н. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов, Н. А. Лукашевич // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 10. – С. 1829–1832.
- [2] Орлов, В. Н. Об одном конструктивном методе построения первой и второй мероморфных трансцендентных Пенлеве / В. Н. Орлов, В. П. Фильчакова // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці. ІМ НАН України. – 1998. – Т. 19. – С. 155–165.
- [3] Орлов, В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов // Вестник Казанского гос. тех. ун-та им. А. Н. Туполева. – 2008. – № 2. – С. 42–46.
- [4] Орлов, В. Н. Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати / В. Н. Орлов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского гос. политех. ун-та. – 2008. – № 63. – С. 102–108.
- [5] Орлов, В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // Вестник Московского авиац. ин-та. – 2008. – Т. 15. – № 5. – С. 128–135.
- [6] Орлов, В. Н. Точные границы области применения приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки / В. Н. Орлов // Вестник Воронежского гос. тех. ун-та. – 2009. – Т. 5. – № 10. – С. 192–195.
- [7] Орлов, В. Н. Математическое моделирование решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов, С. А. Редкозубов // Известия института инженерной физики. – 2010. – № 4 (18). – С. 2–6.
- [8] Орлов, В. Н. Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области / В. Н. Орлов // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 399–405.
- [9] Орлов, В. Н. Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати. Монография / В. Н. Орлов. – Чебоксары : Перфектум, 2012. – 112 с.
- [10] Орлов, В. Н. Приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в области голоморфности / В. Н. Орлов, А. З. Пчелова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Естественные и технические науки. – 2012. – № 4 (76). – С. 133–139.
- [11] Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1950. – 436 с.

Орлов Виктор Николаевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: orlowvn@rambler.ru

Леонтьева Татьяна Юрьевна,

аспирант кафедры алгебры, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: archelova@mail.ru

V. N. Orlov, T. Y. Leonteva

**INFLUENCE OF PERTURBATION OF MOVING SINGULARITY  
ON THE APPROXIMATE SOLUTION FOR A NONLINEAR  
DIFFERENTIAL EQUATION IN THE COMPLEX DOMAIN**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** The article considers a first-order nonlinear ordinary differential equation with moving singularity which cannot be solved in quadratures in general case. The proof of the existence and uniqueness theorem for the solution of this equation in some neighborhood of moving singularity is provided. The approximate solution of the equation in neighborhood of moving singularity is constructed and research of influence of perturbation of moving singularity on the approximate solution is carried out. The results obtained in the complex domain are accompanied by calculations.

**Keywords:** ordinary differential equation, Cauchy problem, moving singularity, perturbation, approximate solution, error estimation.

**REFERENCES**

- [1] Orlov, V. N. Studies of the approximate solution of the second Painleve equation / V. N. Orlov, N. A. Lukashevich // Differential equations. – 1989. – Vol. 25. – No. 10. – P. 1829–1832.
- [2] Orlov, V. N. About one constructive method of first and second Painleve transcendental meromorphic / V. N. Orlov, V. P. Filchakova // Symmetry and Analytic Method in matetychnly physics. IM NAN Ukraine. – 1998. – Vol. 19. – P. 155–165.
- [3] Orlov, V. N. About the approximate solution of the first Painleve equation / V. N. Orlov // Vestnik of A. Tupolev Kazan State Technical University. – 2008. – No. 2. – P. 42–46.
- [4] Orlov, V. N. The method for the approximate solution of Riccati differential equation / V. N. Orlov // Scientific and technical vedomosti of the St. Petersburg State Polytechnical University – 2008. – No. 63. – P. 102–108.
- [5] Orlov, V. N. About one method for the approximate solution of matrix Riccati differential equations / V. N. Orlov // Vestnik of the Moscow Aviation Institute. – 2008. – Vol. 15. – No. 5. – P. 128–135.
- [6] Orlov, V. N. Precise boundaries of the area of approximate solutions of Abel differential equation in the neighborhood of approximate value of movable special point / V. N. Orlov // Vestnik of the Voronezh State Technical University. – 2009. – Vol. 5. – No. 10. – P. 192–195.
- [7] Orlov, V. N. Mathematical modeling of the Abel differential equation in the neighborhood of movable special point / V. N. Orlov, S. A. Redkozubov // Izvastia of the Institute of Engineering Physics. – 2010. – No. 4 (18). – P. 2–6.
- [8] Orlov, V. N. Precise boundaries for the approximate solution of Abel differential equation in the neighborhood of approximate value of movable special point in the complex domain / V. N. Orlov // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Mechanics of definable state. – 2010. – No. 2 (8). – P. 399–405.
- [9] Orlov, V. N. Method of approximate solutions of scalar and matrix Riccati differential equation. Monograph / V. N. Orlov. – Cheboksary : Perfektum, 2012. – 112 p.
- [10] Orlov, V. N. Approximate solution for a nonlinear differential equation in the region of holomorphy / V. N. Orlov, A. Z. Pchelova // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Natural and Technical Sciences. – 2012. – No. 4 (76). – P. 133–139.

[11] *Golubev, V. V.* Lectures on the analytic theory of differential equations / V. V. Golubev. – Moscow-Leningrad : Gostechizdat Publ., 1950. – 436 p.

*Orlov, Victor Nikolayevich*

*Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Leonteva, Tatyana Yorevna*

*Post-graduate Student, Department of Algebra, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

В. Н. Орлов, М. П. Гузь

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ НА ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева*

**Аннотация.** В работе рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение с подвижными особыми точками, в общем случае неразрешимое в квадратурах. Приводится доказательство теоремы существования и единственности решения этого уравнения в окрестности подвижной особой точки. Получено приближенное решение дифференциального уравнения в комплексной области. Проведено исследование влияния возмущения подвижной особой точки на его решение. Полученные результаты сопровождаются расчетами.

**Ключевые слова:** нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, задача Коши, подвижная особая точка, возмущение, приближенное решение, оценка погрешности.

УДК: 517.927.4

### 1. Актуальность исследуемой проблемы

В данной работе апробирован метод приближенного решения некоторого нелинейного дифференциального уравнения с подвижными особыми точками. Уравнения данного типа имеют решения в виде интегралов, содержащих подвижные особые точки, поэтому к рассматриваемому нелинейному дифференциальному уравнению не применимы известные аналитические и численные приближенные методы решения, поскольку последние не адаптированы к такому виду особых точек. Метод решения, предлагаемый в работах [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], состоит, прежде всего, в построении приближенного решения, основанного на последовательности аналитических продолжений, которые охватывают области аналитичности и окрестности подвижных особых точек. Затем решается задача исследования влияния возмущений начальных данных и подвижных особых точек на построенное приближенное решение в комплексной области.

### 2. Теорема существования и единственности решения нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки в комплексной области

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного дифференциального уравнения в нормальной форме

$$Y'(z) = Y^4(z) + \Phi(z) \quad (1)$$

$$Y(z_0) = Y_0, \quad (2)$$

к которому приводится с помощью некоторой определенной замены переменной следующее уравнение [1]:

$$Y'(z) = f_0(z) + f_1(z) \cdot Y(z) + f_2(z) \cdot Y^2(z) + f_3(z) \cdot Y^3(z) + f_4(z) \cdot Y^4(z),$$

где  $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$  - функции комплексной переменной  $z$ .

Для рассматриваемого уравнения применяем идею, предложенную в работах [2], [3], [4], [5].

**Теорема 1.** Пусть функция  $\Phi(z)$  задачи (1)–(2) удовлетворяет следующим условиям:  $\Phi(z) \in C^1$  в области  $|z - z^*| < \rho_1$ , где  $\rho_1 = \text{const} > 0$  и  $z^*$  - подвижная особая точка решения  $Y(z)$  задачи (1) – (2);

$$\exists M_1 : \left| \frac{\Phi^{(n)}(z^*)}{n!} \right| \leq M_1, \text{ где } M_1 = \text{const}, n=0,1,2,\dots$$

Тогда существует единственное решение задачи Коши (1)–(2), которое является голоморфной функцией, в виде

$$Y(z) = (z - z^*)^\rho \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z^*)^{n/3}, \quad (3)$$

$C_0 \neq 0$ , правильная часть которого сходится в области

$$|z - z^*| < \rho_3, \quad (4)$$

где  $\rho = -1/3$ ,  $\rho_3 = \min \{\rho_1, \rho_2\}$ ,

$$\rho_2 = 1/\sqrt[4]{3^6(M_2 + 1)^3}, \quad M_2 = \sup_{n,G} \frac{|\Phi^{(n)}(z^*)|}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad G = \{z : |z - z^*| < \rho_1\}.$$

**Доказательство.**

В силу того, что  $z^*$  - является регулярной точкой для функции  $\Phi(z)$ , принимая во внимание первое и второе условие теоремы 1, представляем функцию  $\Phi(z)$  регулярным рядом

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z^*)^n. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (1), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n ((n/3) + \rho) (z - z^*)^{(n/3) + \rho - 1} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z^*)^{n/3 + \rho} \right)^4 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z^*)^n.$$

Выполнив операции в последнем, будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n ((n/3) + \rho) (z - z^*)^{(n/3) + \rho - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^* (z - z^*)^{(n/3) + 4\rho}, \quad (6)$$

где  $D_n^* = \sum_{i=0}^n D_i \cdot D_{n-i}$ ,  $D_n = \sum_{i=0}^n C_i \cdot C_{n-i}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Равенство (6) обращается в тождество при выполнении условий:

1)

$$n/3 + \rho - 1 = n/3 + 4\rho, \quad (7)$$

2)

$$C_n (n/3 + \rho) = D_n^{**}. \quad (8)$$

где



$$D_n^{**} = \begin{cases} D_n^*, n = 1, n = 3k, n = 3k + 2, k = 0, 1, 2, \dots, \\ D_n^* + A_{(n-4)/3}, n = 3k + 1, k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (9)$$

Из первого условия получаем  $\rho = -1/3$ . Второе условие позволяет однозначно определить все коэффициенты  $C_n$ . Для коэффициентов ряда (5) справедлива оценка

$$|A_n| \leq M_2, \text{ для } n=0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Из (8) с учетом предыдущего, получаем, что

$$|C_0| \leq 1/\sqrt[3]{3} = \vartheta_0, |C_1| = 0 = \vartheta_1, |C_2| = 0 = \vartheta_2, |C_3| = 0 = \vartheta_3, |C_4| \leq \frac{3}{7}M_2 = \vartheta_4,$$

$$|C_5| = 0 = \vartheta_5, |C_6| = 0 = \vartheta_6,$$

$$|C_7| \leq \frac{3}{10}M_2 = \vartheta_7, |C_8| \leq \frac{3}{11}(M_2 + 1)^2 = \vartheta_8, |C_9| = 0 = \vartheta_9, |C_{10}| \leq \frac{3}{13}(M_2 + 1)^2, \dots$$

Учитывая закономерность образования коэффициентов  $C_n$ , методом математической индукции подтверждаем гипотезу о структуре оценок этих коэффициентов.

Предполагая для коэффициентов  $C_n$  выполнение оценок

$$|C_n| \leq \frac{3^{2[n/4]-3}}{n+3}(M_2 + 1)^{[n/4]} = \vartheta_n, \quad (10)$$

убедимся в справедливости оценки коэффициентов  $|C_{n+1}|$ .

Из рекуррентного соотношения (8), с учетом оценки (10) получаем:

$$|C_{n+1} \cdot ((n+1)/3 + \rho)| \leq |D_{n+1}^*| \leq \sum_{i=0}^{n+1} D_i \cdot D_{(n+1)-i} \leq \left| \sum_{i=0}^{n+1} \left( \sum_{j=0}^i C_j \cdot C_{i-j} \cdot \sum_{j=0}^{n+1-i} C_j \cdot C_{n+1-i-j} \right) \right| \leq$$

$$\begin{aligned} |C_{n+1}| \leq \frac{3}{n+4} & \left| \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=0}^i \frac{3^{2[j/4]-3}}{j+3} (M_2 + 1)^{[j/4]} \cdot \frac{3^{2[(i-j)/4]-3}}{i-j+3} (M_2 + 1)^{[(i-j)/4]} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \sum_{j=0}^{n+1-i} \frac{3^{2[j/4]-3}}{j+3} (M_2 + 1)^{[j/4]} \cdot \frac{3^{2[(n+1-i-j)/4]-3}}{n+1-i-j+3} (M_2 + 1)^{[(n+1-i-j)/4]} \right) \right|. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} |C_{n+1}| & \leq \frac{3^{2[n/4]-3}}{n+4} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=0}^i \frac{1}{(j+3)(i-j+3)} \cdot \sum_{j=0}^{n+1-i} \frac{(M_2 + 1)^{[n/4]}}{(j+3)(n+4-i-j)} \right) \right) \leq \\ & \leq \frac{3^{2[n/4]-3}}{n+4} (M_2 + 1)^{[n/4]} \leq \frac{3^{2[n+1/4]-3}}{n+4} (M_2 + 1)^{[(n+1)/4]}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|C_{n+1}| \leq \frac{3^{2[n+1/4]-3}}{n+4} (M_2 + 1)^{[(n+1)/4]}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n |z - z^*|^{(n-1)/3}, \quad (11)$$

который в силу (8) является мажорирующим для правильной части ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n |z - z^*|^{(n-1)/3}.$$

Используя закономерность образования коэффициентов  $C_n$  представим ряд (9) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n |z - z^*|^{(n-1)/3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_{4n} |z - z^*|^{(4n-4)/3} + \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_{4n+1} |z - z^*|^{(4n-3)/3} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_{4n+2} |z - z^*|^{(4n-2)/3} + \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_{4n+3} |z - z^*|^{(4n-1)/3}. \end{aligned}$$

На основании признака Даламбера получаем область сходимости ряда (9)

$$\rho_2 = 1/\sqrt[4]{3^6(M_2 + 1)^3}, \quad (12)$$

тогда, с учетом  $\rho_3 = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ , получим сходимость правой части ряда (3) в области (4).

### 3. Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки в комплексной области

**Теорема 2.** Пусть выполняются пункты 1 и 2 теоремы 1, тогда для приближенного решения

$$Y_N(x) = (z - z^*)^{-1/3} \cdot \sum_{n=0}^N C_n (z - z^*)^{n/3}, \quad (13)$$

$C_0 \neq 0$ , задачи Коши(1) и (2) в области (4) справедлива оценка погрешности

$$\Delta Y_N(z) = |Y(z) - Y_N(z)| \leq \Delta_1,$$

в области  $|z - z^*| < \rho_3$ ,

$$\text{где } \Delta_1 \leq \frac{3^{2n-3} \cdot (M_2 + 1)^n \cdot |z - z^*|^{(4n-1)/3}}{1 - 9(M_2 + 1)|z - z^*|^{4/3}} \left( \frac{1}{4n+4} + \frac{|z - z^*|^{1/3}}{4n+5} + \frac{|z - z^*|^{2/3}}{4n+6} + \frac{|z - z^*|}{4n+7} \right),$$

в случае  $N+1=4n$ . Для вариантов  $N+1=4n+1$ ,  $N+1=4n+2$ ,  $N+1=4n+3$  соответственно:

$$\Delta_1 \leq \frac{3^{2n-3} \cdot (M_2 + 1)^n \cdot |z - z^*|^{4n/3}}{1 - 9(M_2 + 1)|z - z^*|^{4/3}} \left( \frac{1}{4n+4} + \frac{|z - z^*|^{1/3}}{4n+5} + \frac{|z - z^*|^{2/3}}{4n+6} + \frac{9(M_2 + 1) \cdot |z - z^*|}{4n+7} \right),$$

$$\Delta_1 \leq \frac{3^{2n-3} \cdot (M_2 + 1)^n \cdot |z - z^*|^{(4n+1)/3}}{1 - 9(M_2 + 1)|z - z^*|^{4/3}} \cdot$$

$$\left( \frac{1}{4n+5} + \frac{9(M_2 + 1)|z - z^*|^{1/3}}{4n+6} + \frac{9(M_2 + 1)|z - z^*|^{2/3}}{4n+7} + \frac{|z - z^*|}{4n+8} \right),$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 \leq \frac{3^{2n-3} \cdot (M_2 + 1)^n \cdot |z - z^*|^{(4n+2)/3}}{1 - 9(M_2 + 1)|z - z^*|^{4/3}} &\left( \frac{1}{4n+6} + \frac{9(M_2 + 1)|z - z^*|^{1/3}}{4n+7} + \frac{9(M_2 + 1)|z - z^*|^{2/3}}{4n+8} + \right. \\ &\left. + \frac{9(M_2 + 1)^2|z - z^*|}{4n+9} \right), \end{aligned}$$

$$\rho_3 = \min \left\{ \rho_1, 1/\sqrt[4]{3^6(M_2 + 1)^3} \right\}, M_2 = \sup_n \frac{|\Phi^{(n)}(\tilde{z}^*)|}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Доказательство.**

С учетом оценок для коэффициентов  $C_n$ , полученных в теореме 1, имеем

$$\Delta Y_N(x) = |Y(x) - Y_N(x)| \leq \left| \sum_{N=0}^{\infty} C_n(z - z^*)^{\frac{n-1}{3}} \right| - \left| \sum_{N=0}^N C_n(z - z^*)^{\frac{n-1}{3}} \right| \leq \sum_{N+1}^{\infty} |C_n| |z - z^*|^{\frac{n-1}{3}}.$$

В силу закономерности образования коэффициентов  $C_n$  следует

$$\begin{aligned} \sum_{N+1}^{\infty} |C_n| |z - z^*|^{(n-1)/3} &= \sum_{N+1}^{\infty} |C_{4n}| |z - z^*|^{(4n-1)/3} + \sum_{N+1}^{\infty} |C_{4n+1}| |z - z^*|^{4n/3} + \\ &\sum_{N+1}^{\infty} |C_{4n+2}| |z - z^*|^{(4n+1)/3} + \sum_{N+1}^{\infty} |C_{4n+3}| |z - z^*|^{(4n+2)/3}, \end{aligned}$$

в случае  $N+1=4n$ , имеем

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \sum_{N+1}^{\infty} |C_{4n}| |z - z^*|^{(n-1)/3} \leq \frac{3^{2n-3} \cdot (M_2 + 1)^n \cdot |z - z^*|^{(4n-1)/3}}{1 - 9(M_2 + 1) |z - z^*|^{4/3}} \times \\ &\left( \frac{1}{4n + 3} + \frac{|z - z^*|^{1/3}}{4n + 4} + \frac{|z - z^*|^{2/3}}{4n + 5} + \frac{|z - z^*|}{4n + 6} \right). \end{aligned}$$

Аналогично получаем оценки для случая для случаев  $N+1=4n+1$ ,  $N+1=4n+2$  и  $N+1=4n+3$ .

**Пример 1.** Рассмотрим задачу Коши для уравнения  $Y'(z) = Y^4(z) + \Phi(z)$ , где  $Y(0, 5+0, 5 \cdot i) = -(0, 5+0, 5 \cdot i)$ ,  $\Phi(z) = 0$ . Задача Коши имеет точное решение  $Y = 1/\sqrt[3]{(3, 5 \cdot (1+i) - 3z)}$ . Радиус голоморфности с учетом начального условия задачи Коши  $\rho_3 = 0,1924500897$ . Выберем значение  $z = 0,9866666667(1+i)$  из области  $\rho_3$ . При этом  $M_2=0$ . Точное значение подвижной особой точки  $z^* = 1,1(6)(1+i)$ . Расчеты представлены в таблице 1.

Таблица 1

$z$	$Y(z)$	$Y_7(z)$	$\Delta$	$\Delta'_1$	$\Delta''_1$
$0,9866666667(1+i)$	$0,2760419028 + 0,0739652049i$	$0,2760414172 + 0,0739652049i$	$0,0000004856$	$0,00017215$	$0,000001$

Здесь  $Y$  – точное значение решения уравнения;  $Y_3$  – приближенное решение;  $\Delta$  – абсолютная погрешность;  $\Delta'_1$  – априорная погрешность, полученная по теореме 2;  $\Delta''_1$  – апостериорная погрешность.

Теорема 2 позволяет решить обратную задачу теории погрешности, определить значение  $N$  по заданной точности приближенного решения  $\varepsilon$ . Для случая  $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-7}$  получаем значение  $N=10$ . Фактически для  $N=4-10$  получаем уточнения приближенного решения, которое в общей сумме не превышает требуемой точности  $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-7}$ .

Таким образом, мы можем ограничиться в структуре приближенного решения значением  $N=3$ , тем самым получаем величину апостериорной оценки для приближенного решения  $Y_3$ , равную значению с точностью  $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-7}$ .

#### 4. Исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение в комплексной области

Рассмотрим возмущенное значение  $\tilde{z}^*$  в окрестности подвижной особой точки  $z^*$ , которое оказывает влияние на структуру аналитического приближенного решения и принимает следующий вид:

$$\tilde{Y}_N(z) = \sum_{n=0}^N \tilde{C}_n(z - \tilde{z}^*)^{(n-1)/3}, \tag{14}$$

где  $\tilde{C}_n$ , – возмущенные значения коэффициентов,  $\tilde{C}_0 \neq 0$ .

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия:

$$\rho_4 = \text{const} > 0; 1) \Phi(z) \in C^1 \text{ в области } K = \{z : |z - \tilde{z}^*| < \rho_4\},$$

где

$$2) \exists M_3 : \left| \frac{\Phi^{(n)}(\tilde{z}^*)}{n!} \right| \leq M_3, \quad \text{где } M_3 = \text{const}, n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$3) \tilde{z}^* \leq z^*;$$

$$4) \text{ известна оценка погрешности значения } \tilde{z}^*: |z^* - \tilde{z}^*| \leq \Delta \tilde{z}^*;$$

$$5) \Delta \tilde{z}^* < 1/\sqrt[4]{3^6(M_2 + 1)^3}.$$

Тогда для аналитического приближенного решения (12) задачи Коши (1-2), для любого  $z$  из областей

$$\tilde{z}^* - \rho_4 < z \leq \tilde{z}^* - \Delta \tilde{z}^*, \quad (15)$$

$$\tilde{z}^* - \Delta \tilde{z}^* < z \leq \tilde{z}^*, \quad (16)$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta \tilde{Y}_N(z) \leq \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4, \quad (17)$$

где

$$\Delta_0 = \Delta \tilde{z}^* / \sqrt[3]{3} |z - \tilde{z}^*|^{4/3}, \quad (18)$$

$$\Delta_1 - \text{из теоремы 2},$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & \frac{3\Delta \tilde{z}^*(M+1)\alpha^{5/3}}{1-3^6(M+1)^3\alpha^4} \cdot \left( \frac{1}{9} + \sum_{i=0}^2 3^{i+3}(M+1)^i \alpha^{i+1} \right) + \frac{3^7 \Delta \tilde{x}^*(M+1)\alpha^{1/3}}{1-3^{10}(M+1)^3\alpha^4} (1+3^4(M+1)\alpha+ \\ & + 3^8(M+1)\alpha^2 + 3^{12}(M+1)\alpha^3) + \frac{3^{\delta} \Delta \tilde{x}^*(M+1)\alpha^{2/3}}{1-3^{12}(M+1)^3\alpha^4} (1+3^2(M+1)\alpha(1+3^2(M+1)\alpha^2)) \quad (19) \end{aligned}$$

$$\Delta_3 \leq \frac{3^{-2} \Delta M \beta^{3/4} \alpha}{1-3^6 \beta^3 \alpha^4} \times \left( \frac{1}{7} + \beta^{1/4} \alpha^{1/3} \times \left( \frac{3^4}{8} + \frac{9}{12} \beta \alpha^{4/3} + \frac{9}{14} \beta^{6/4} \alpha^{6/3} \right) + \right. \quad (20)$$

$$\left. + \beta^{3/4} \alpha \times \left( \frac{1}{10} + \frac{3^2}{11} \beta^{1/4} + \frac{1}{13} \beta^{3/4} \alpha + \frac{3^4}{16} \beta^{6/4} \alpha \right) + 3^4 \beta^{8/4} \alpha^{8/3} \cdot \left( \frac{1}{15} + \frac{1}{17} \beta^{2/4} \alpha^{2/3} \right) \right).$$

при условии  $|z - \tilde{z}^*| < 1/\sqrt[4]{3^{12}(M + \Delta M + 1)^3}$ ,

$$\Delta M = \Delta \tilde{Y}_0 = \sup_{n, G} \left\{ \frac{\Phi^{(n+1)}(z)}{n!} \cdot \Delta \tilde{z}^*, M = \sup_n \left\{ \frac{|\Phi^{(n)}(z^*)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \right.$$

$$\left. G = \{z : |z - \tilde{z}^*| \leq \Delta \tilde{z}^*\}, \rho_4 = \min \left\{ \rho_3, 1/\sqrt[4]{3^{12}(\Delta M + M + 1)^3} \right\}, \quad \rho_3 \text{ из теоремы 1},$$

$$\alpha = \begin{cases} |z - \tilde{z}^*|, & \text{для } x \text{ из области (13)}, \\ \Delta \tilde{z}^* & \text{для } x \text{ из области (14)}, \end{cases} \quad \beta = \Delta M + M + 1,$$

$$\gamma = \begin{cases} 2, & \text{для } x \text{ из области (13)}, \\ 4, & \text{для } x \text{ из области (14)}, \end{cases} \quad \delta = \begin{cases} 1, & \text{для } x \text{ из области (13)}, \\ 0, & \text{для } x \text{ из области (14)}. \end{cases}$$

**Доказательство.** Для доказательства рассмотрим выражение

$$\Delta \tilde{Y}_N(z) = \left| Y(z) - \tilde{Y}_N(z) \right| \leq \left| Y(z) - \tilde{Y}(z) \right| + \left| \tilde{Y}(z) - \tilde{Y}_N(z) \right|.$$

Оценим  $\left| Y(z) - \tilde{Y}(z) \right|$ :

$$\begin{aligned} \left| Y(z) - \tilde{Y}(z) \right| &\leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z^*)^{(n-1)/3} - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (z - \tilde{z}^*)^{(n-1)/3} \right| \leq \\ &\left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z^*)^{(n-1)/3} - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (z - z^*)^{(n-1)/3} + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (z - z^*)^{(n-1)/3} - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (z - \tilde{z}^*)^{(n-1)/3} \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n (z - z^*)^{(n-1)/3} \right| + \left| \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n \left( (z - z^*)^{\frac{n-1}{3}} - (z - \tilde{z}^*)^{(n-1)/3} \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n \left| (z - z^*)^{(n-1)/3} - (z - \tilde{z}^*)^{(n-1)/3} \right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \tilde{C}_n \right| \cdot \left| (z - z^*)^{(n-1)/3} - (z - \tilde{z}^*)^{(n-1)/3} \right|. \end{aligned}$$

Рассмотрим  $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \tilde{C}_n \right| \cdot \left| (z - z^*)^{(n-1)/3} - (z - \tilde{z}^*)^{(n-1)/3} \right|$ .

Учитывая, что  $|z| < |\Delta \tilde{z}| \leq |z^*|$  и  $|C_0| = \left| \tilde{C}_0 \right| = 1/\sqrt[3]{3}$ , для  $n=0$

$$\left| \tilde{C}_0 \right| \cdot \left| (z - z^*)^{-1/3} - (z - \tilde{z}^*)^{-1/3} \right| \leq \Delta \tilde{x}^* / \sqrt[3]{3} |z - \tilde{z}^*|^{4/3}.$$

Кроме того  $|C_1| = \left| \tilde{C}_1 \right| = 0, |C_2| = \left| \tilde{C}_2 \right| = 0, |C_3| = \left| \tilde{C}_3 \right| = 0$ .

Получаем

$$\begin{aligned} \left| Y(z) - \tilde{Y}(z) \right| &\leq \frac{\Delta \tilde{z}^*}{\sqrt[3]{3} |z - \tilde{z}^*|^{4/3}} + \sum_n \left| \tilde{C}_n \right| \cdot \left| (z - \tilde{z}^*)^{(n-1)/3} - (z - z^*)^{(n-1)/3} \right| + \\ &+ \sum_n \Delta \tilde{C}_n \cdot \left| (z - \tilde{z}^*)^{(n-1)/3} + \Delta \tilde{z}^* \right|, \text{ при } n=2,3,4,\dots \\ &\left| (z - z^*)^{(n-1)/3} - (z - \tilde{z}^*)^{(n-1)/3} \right| \leq \left| (z - \tilde{z}^*)^{(n-1)/3} + \Delta \tilde{z}^* \right| \leq \\ &\leq \left| \Delta \tilde{z} (z - \tilde{z}^*) + \Delta \tilde{z}^* \right|^{(n-2)/3}. \end{aligned}$$

С учетом последнего для оценки приближенного решения (13), имеем

$$\begin{aligned} \left| \tilde{Y}(z) - \tilde{Y}_N(z) \right| &= \frac{\Delta \tilde{x}^*}{\sqrt[3]{3} (z - \tilde{z}^*)^{4/3}} + \sum_{N+1}^{\infty} \left| \tilde{C}_n \right| \cdot |z - \tilde{z}^*|^{(n-1)/3} + \sum_{n=4}^{\infty} \left| \tilde{C}_n \right| \cdot |z - z^*|^{(n-1)/3} - \\ &- (z - z^*)^{(n-1)/3} + \sum_{n=4}^{\infty} \left| \tilde{C}_n \right| \cdot |z - z^*|^{(n-1)/3} - (z - \tilde{z}^*)^{(n-1)/3} + \\ &+ \sum_{n=4}^{\infty} \left| \Delta \tilde{C}_n \right| \cdot \left| (z - \tilde{z}^*) + \Delta \tilde{z}^* \right|^{(n-1)/3} = \sum_{n=1}^{\infty} = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta_0 = \Delta \tilde{z}^* / \sqrt[3]{3} |z - \tilde{z}^*|^{4/3}$$

Перейдем к оценке  $\Delta_2$ .

Проведем суммирование отдельно по целым и дробным степеням, учитывая, что  $\Delta \tilde{z}^* \leq |z - \tilde{z}^*|$ :

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \sum_{n=4}^{\infty} \left| \tilde{C}_n \right| \cdot \left| ((z - \tilde{z}^*) + \Delta \tilde{z}^*)^{(n-1)/3} - (z - \tilde{z}^*)^{(n-1)/3} \right| = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \left| \tilde{C}_{3n} \right| \cdot \left| ((z - \tilde{z}^*) + \Delta \tilde{z}^*)^{(3n-1)/3} - (z - \tilde{z}^*)^{(3n-1)/3} \right| + \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \left| \tilde{C}_{3n-1} \right| \cdot \left| ((z - \tilde{z}^*) + \Delta \tilde{z}^*)^{(3n-2)/3} - (z - \tilde{z}^*)^{(3n-2)/3} \right| + \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \left| \tilde{C}_{3n-2} \right| \cdot \left| ((z - \tilde{z}^*) + \Delta \tilde{z}^*)^{n-1} - (z - \tilde{z}^*)^{3n-1} \right|.
\end{aligned}$$

С учетом (8), получим оценку  $\Delta_2^{(1)}$ .

$$\begin{aligned}
\Delta_2^{(1)} &= \sum_{n=2}^{\infty} \left| \tilde{C}_{3n} \right| \cdot \left| (|z - \tilde{z}^*| + \Delta \tilde{z}^*)^{(3n-1)/3} - |z - \tilde{z}^*|^{(3n-1)/3} \right| = \\
&= \sum_{i=0}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \tilde{C}_{12n-6+3i} \right| \cdot \left| (|z - \tilde{z}^*| + \Delta \tilde{z}^*)^{(12n-7+3i)/3} - |z - \tilde{z}^*|^{(12n-7+3i)/3} \right| = \\
&= \sum_{i=0}^3 |C_{12n-6}| \cdot \left| (|z - \tilde{z}^*| + \Delta \tilde{z}^*)^{(12n-7)/3} - |z - \tilde{z}^*|^{(12n-7)/3} \right| + \\
&+ \sum_{i=1}^3 |C_{12n-3}| \cdot \left| (|z - \tilde{z}^*| + \Delta \tilde{z}^*)^{(12n-4)/3} - |z - \tilde{z}^*|^{(12n-4)/3} \right| + \\
&+ \sum_{i=1}^3 |C_{12n-3}| \cdot \left| (|z - \tilde{z}^*| + \Delta \tilde{z}^*)^{(12n-4)/3} - |z - \tilde{z}^*|^{(12n-4)/3} \right| + \\
&+ \sum_{i=1}^3 |C_{12n}| \cdot \left| (|z - \tilde{z}^*| + \Delta \tilde{z}^*)^{(12n-1)/3} - |z - \tilde{z}^*|^{(12n-1)/3} \right| \leq \\
&\leq \frac{3\Delta \tilde{z}^* (M+1) |z - \tilde{z}^*|^{5/3}}{1 - 3^6 (M+1)^3 |z - \tilde{z}^*|^4} \cdot \left( \frac{1}{9} + \sum_{i=0}^2 3^{i+3} (M+1)^i |z - \tilde{z}^*|^{i+1} \right),
\end{aligned}$$

при условии  $|z - \tilde{z}^*| < 1/\sqrt[4]{3^6(M+1)^3}$ .

В случае  $|z - \tilde{z}^*| < \Delta \tilde{z}^*$  для  $\Delta_2$  имеем:

$$\Delta_2^{(1)} \leq \frac{3^{-2} (M+1) \Delta \tilde{z}^{*8/3}}{1 - 3^6 (M+1)^3 \Delta \tilde{z}^{*4}} \cdot \left( \frac{1}{9} + \sum_{i=0}^2 3^{i+3} (M+1)^i \Delta \tilde{z}^{*i+1} \right).$$

Аналогичным образом получаем оценки для  $\Delta_2^{(2)}$ ,  $\Delta_2^{(3)}$ .

Далее находим оценку  $\Delta_3$ .

Для выражения  $\Delta \tilde{C}_n$ , учитываем закономерность образования коэффициентов  $C_n$ , предполагаем оценки:

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{C}_{4n} &\leq \frac{2^{2n-3}}{4n+3} \Delta M (M + \Delta M + 1)^n, & \Delta \tilde{C}_{4n+1} &\leq \frac{2^{2n-3}}{4n+3} \Delta M (M + \Delta M + 1)^n, \\
\Delta \tilde{C}_{4n+2} &\leq \frac{2^{2n-3}}{4n+5} \Delta M (M + \Delta M + 1)^n, & \Delta \tilde{C}_{4n+3} &\leq \frac{2^{2n-3}}{4n+6} \Delta M (M + \Delta M + 1)^n.
\end{aligned}$$

где  $M = \sup_n \frac{|\Phi^{(n)}(\tilde{z}^*)|}{n!}$ ,  $\Delta M = \sup_{n,G} \frac{|\Phi^{(n+1)}(\tilde{z}^*)|}{n!} \Delta \tilde{z}^*$ ,  $G = \{x : |z - \tilde{z}^*| \leq \Delta \tilde{z}^*\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Методом математической индукции подтверждаем гипотезу для оценок

$$\Delta \tilde{C}_{n+1} \leq \frac{3^{([n+1]/4)-1}}{n+4} \Delta M (M_2 + \Delta M + 1)^{([n+1]/4)}.$$

Разделяя целые и дробные степени в выражении  $\Delta_4$ , имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \sum_0^\infty \Delta \tilde{C}_n ||z - \tilde{z}^*| + \Delta \tilde{z}^*|^{(n-1)/3} = \sum_{n=0}^\infty \Delta \tilde{C}_{3n} ||z - \tilde{z}^*| + \Delta \tilde{z}^*|^{(3n-1)/3} + \\ &+ \sum_{n=0}^\infty \Delta \tilde{C}_{3n-1} ||z - \tilde{z}^*| + \Delta \tilde{z}^*|^{(3n-2)/3} + \sum_{n=0}^\infty \Delta \tilde{C}_{3n-2} ||z - \tilde{z}^*| + \Delta \tilde{z}^*|^{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^8 \sum_1^\infty \Delta \tilde{C}_{12n-8+i} \left| (|z - \tilde{z}^*| + \Delta \tilde{z}^*)^{(12n-9+i)/3} - |z - \tilde{z}^*|^{(12n-9+i)/3} \right| + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \sum_1^\infty \Delta \tilde{C}_{12n+1+i} \left| (|z - \tilde{z}^*| + \Delta \tilde{z}^*)^{(12n+i)/3} - |z - \tilde{z}^*|^{(12n+i)/3} \right|. \end{aligned}$$

Проведем суммирование отдельно по целым и дробным степеням, получим (18).

Оценка выражения  $\Delta \tilde{Y}_N(z)$  будет справедлива в области  $|z - z^*| < \rho_5$ , где  $\rho_5 = \min \{\rho_2, \rho_4\}$ .

**Замечание 1:** Теорема 3 справедлива для случая, когда в пункте 3, выполняется условие  $z^* \leq \tilde{z}^*$ .

**Пример 2.** Найдем приближенное решение задачи Коши, рассмотренной в примере 1, в окрестности точки  $\tilde{z}^*$ . В случае для  $\tilde{z}^*=0,9866716667(1+i)$ ,  $\Delta \tilde{z}^*=0,00005$ . Расчетное значение  $\rho_5 = 0,0370368981$ . Величина возмущения не превышает значения  $\varepsilon = 0,00005$ . Расчеты представлены в таблице 2.

Таблица 2

$\tilde{z}^*$	$z$	$Y$	$\tilde{Y}_3$	$\Delta$	$\Delta'_1$	$\Delta''_1$
0,9866716667 (1+i)	9,865(1+i)	0,2755314232 +0,0738284223	0,2755028616+ +0,0738285123	0,0000285616	0,0018520	0,00007

Здесь  $Y$  – точное значение решения уравнения;  $\tilde{Y}_3$  – приближенное решение;  $\Delta$  – абсолютная погрешность;  $\Delta'_1$  – априорная погрешность, полученная по теореме 3,  $\Delta''_1$  – апостериорная погрешность.

**Резюме.** Таким образом, были сформулированы и доказаны необходимое и достаточное условия существования и единственности решения одного нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки в комплексной области. Затем осуществлено построение этого решения. На третьем этапе проведено исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение в комплексной области.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Орлов, В. Н. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов, Н. А. Лукашевич // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 10. – С. 1829–1832.
- [2] Орлов, В. Н. Об одном конструктивном методе построения первой и второй мероморфных трансцендентных Пенлеве / В. Н. Орлов, В. П. Фильчакова // Симетријни та аналітичні методи в математичній фізиці. ІМ НАН України. – 1998. – Т. 19. – С. 155–165.
- [3] Орлов, В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов // Вестник Казанского гос. тех. ун-та им. А. Н. Туполева. – 2008. – № 2. – С. 42–46.
- [4] Орлов, В. Н. Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати / В. Н. Орлов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского гос. политех. ун-та. – 2008. – № 63. – С. 102–108.
- [5] Орлов, В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // Вестник Московского авиац. ин-та. – 2008. – Т. 15. – № 5. – С. 128–135.

- [6] Орлов, В. Н. Точные границы области применения приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки / В. Н. Орлов // Вестник Воронежского гос. тех. ун-та. – 2009. – Т. 5. – № 10. – С. 192–195.
- [7] Орлов, В. Н. Математическое моделирование решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов, С. А. Редкозубов // Известия института инженерной физики. – 2010. – № 4 (18). – С. 2–6.
- [8] Орлов, В. Н. Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области / В. Н. Орлов // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 399–405.
- [9] Орлов, В. Н. Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати. Монография / В. Н. Орлов. – Чебоксары : Перфектум, 2012. – 112 с.
- [10] Орлов, В. Н. Приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в области голоморфности / В. Н. Орлов, А. З. Пчелова // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Естественные и технические науки. – 2012. – № 4 (76). – С. 133–139.
- [11] Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1950. – 436 с.

*Орлов Виктор Николаевич,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: orlowvn@rambler.ru*

*Гузь Марина Павловна,*

*аспирант кафедры алгебры, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: archelova@mail.ru*



V. N. Orlov, M. P. Guz

INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF DISTURBANCES MOVING  
SINGULAR POINT ON THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE CAUCHY  
PROBLEM OF THE NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE  
COMPLEX DOMAIN

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** The article considers a first-order nonlinear ordinary differential equation with moving singularity which cannot be solved in quadratures in general case. The proof of the existence and uniqueness theorem for the solution of this equation in some neighborhood of moving singularity is provided. The approximate solution of the equation in neighborhood of moving singularity is constructed and research of influence of perturbation of moving singularity on the approximate solution is carried out. The results obtained in the complex domain are accompanied by calculations.

**Keywords:** ordinary differential equation, Cauchy problem, moving singularity, perturbation, approximate solution, error estimation.

REFERENCES

- [1] Orlov, V. N. Studies of the approximate solution of the second Painleve equation / V. N. Orlov, N. A. Lukashevich // Differential equations. – 1989. – Vol. 25. – No. 10. – P. 1829–1832.
- [2] Orlov, V. N. About one constructive method of first and second Painleve transcendental meromorphic / V. N. Orlov, V. P. Filchakova // Symmetry and Analytic Method in matetychnly physics. IM NAN Ukraine. – 1998. – Vol. 19. – P. 155–165.
- [3] Orlov, V. N. About the approximate solution of the first Painleve equation / V. N. Orlov // Vestnik of A. Tupolev Kazan State Technical University. – 2008. – No. 2. – P. 42–46.
- [4] Orlov, V. N. The method for the approximate solution of Riccati differential equation / V. N. Orlov // Scientific and technical vedomosti of the St. Petersburg State Polytechnical University – 2008. – No. 63. – P. 102–108.
- [5] Orlov, V. N. About one method for the approximate solution of matrix Riccati differential equations / V. N. Orlov // Vestnik of the Moscow Aviation Institute. – 2008. – Vol. 15. – No. 5. – P. 128–135.
- [6] Orlov, V. N. Precise boundaries of the area of approximate solutions of Abel differential equation in the neighborhood of approximate value of movable special point / V. N. Orlov // Vestnik of the Voronezh State Technical University. – 2009. – Vol. 5. – No. 10. – P. 192–195.
- [7] Orlov, V. N. Mathematical modeling of the Abel differential equation in the neighborhood of movable special point / V. N. Orlov, S. A. Redkozubov // Izvastia of the Institute of Engineering Physics. – 2010. – No. 4 (18). – P. 2–6.
- [8] Orlov, V. N. Precise boundaries for the approximate solution of Abel differential equation in the neighborhood of approximate value of movable special point in the complex domain / V. N. Orlov // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Mechanics of definable state. – 2010. – No. 2 (8). – P. 399–405.
- [9] Orlov, V. N. Method of approximate solutions of scalar and matrix Riccati differential equation. Monograph / V. N. Orlov. – Cheboksary : Perfektum, 2012. – 112 p.
- [10] Orlov, V. N. Approximate solution for a nonlinear differential equation in the region of holomorphy / V. N. Orlov, A. Z. Pchelova // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Natural and Technical Sciences. – 2012. – No. 4 (76). – P. 133–139.

[11] *Golubev, V. V.* Lectures on the analytic theory of differential equations / V. V. Golubev. – Moscow-Leningrad : Gostechizdat Publ., 1950. – 436 p.

*Orlov, Victor Nikolayevich*

*Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Guz, Marina Pavlovna*

*Post-graduate Student, Department of Algebra, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

**ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫХ ЗАДАЧ  
ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СОСТОЯНИЯ В ТЕОРИИ МАЛЫХ  
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ**

*Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова*

**Аннотация.** Рассмотрена потеря устойчивости толстостенной трубы из идеального упруго-пластического материала под действием внутреннего давления. Показано, что потеря устойчивости происходит до исчерпания трубой несущей способности.

**Ключевые слова:** напряжение, упругопластический материал, идеальная пластичность, линеаризация, устойчивость.

УДК: 539.375

Уравнение для определения функции напряжений имеет вид [2]

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{3A - B}{B} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} = 0. \quad (1)$$

Решение будем искать в виде разложений по четным и нечетным степеням  $z$ . Положим

$$\Phi = R_4 z^4 + R_2 z^2 + R_0. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$(\nabla_1 R_4) z^4 + (\nabla_1 R_2) z^2 + (\nabla_1 R_0) + 12\beta (\nabla_2 R_4) z^2 + 2\beta (\nabla_2 R_2) + 24R_4 = 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= \frac{\partial^4}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial}{\partial r}, \\ \nabla_2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \beta = \frac{3A - B}{B}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (3) следует

$$\nabla_1 R_4 = 0,$$

$$\nabla_1 R_2 + 12\beta \nabla_2 R_4 = 0,$$

$$\nabla_1 R_0 + 2\beta \nabla_2 R_2 + 24R_4 = 0. \quad (5)$$

Решение уравнений (5) имеет вид

$$R_4 = \frac{1}{4}C_{11}r^4 + \frac{1}{2} \left[ \left( C_{12} - \frac{C_{13}}{2} \right) + C_{13} \ln r \right] r^2 + C_{14},$$

$$R_2 = -\frac{1}{8}\beta_{11}^C r^6 + \frac{1}{4} \left[ \left( C_{31} + \frac{3}{4}\beta_{13}^C \right) - 3\beta_{13}^C \ln r \right] r^4 + \frac{1}{2} \left[ \left( C_{32} - \frac{1}{2}C_{33} \right) + C_{33} \ln r \right] r^2 + C_{34},$$

$$R_0 = \frac{1}{192}(\beta^2 - 1)_{11}^C r^8 + \frac{1}{48} \left( -\left[ \beta_{31}^C + 3C_{12} + (2\beta^2 - 5)_{13}^C \right] + 3(\beta^2 - 1)_{13}^C \ln r \right) r^6 + \\ + \frac{1}{4} \left( \left[ C_{51} + \frac{1}{8}(\beta_{33}^C + 12C_{14}) \right] - \frac{1}{2}(\beta_{33}^C + 12C_{14}) \ln r \right) r^4 + \frac{1}{2} \left[ \left( C_{52} - \frac{1}{2}C_{53} \right) + C_{53} \ln r \right] r^2 + C_{54} \quad (6)$$

Далее положим

$$\Phi = R_3 z^3 + R_1 z \quad (7)$$

Подставив (7) в (1), получим уравнение

$$(\nabla_1 R_3) z^3 + (\nabla_1 R_1) z + 6\beta (\nabla_2 R_3) z = 0. \quad (8)$$

Из (8) следует

$$\nabla_1 R_3 = 0,$$

$$\nabla_1 R_1 + 6\beta_2^\nabla R_3 = 0. \quad (9)$$

Решение уравнений (9) имеет вид

$$R_1 = -\frac{1}{16}\beta_{21}^C r^6 + \frac{1}{4} \left[ \left( C_{41} + \frac{3}{8}\beta_{23}^C \right) - \frac{3}{2}\beta_{23}^C \ln r \right] r^4 + \frac{1}{2} \left[ \left( C_{42} - \frac{1}{2}C_{43} \right) + C_{43} \ln r \right] r^2 + C_{44}, \\ R_3 = \frac{1}{4}C_{21}r^4 + \frac{1}{2} \left[ \left( C_{22} - \frac{C_{23}}{2} \right) + C_{23} \ln r \right] r^2 + C_{24}. \quad (10)$$

Очевидно, разложения (2) и (7) по четным и нечетным степеням независимы. Из определенных выражений (6) и (10) очевиден алгоритм построения решения в случае высших степеней  $z$ . Соотношения (2), (6), (7) и (10) могут быть использованы для определения компонента напряжений и деформаций.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лейбензон, Л. С. Собрание трудов / Л. С. Лейбензон. – М. : Изд-во АН СССР. – 1951. – Т. 1 Теория упругости. – С. 81–85.
- [2] Ишлинский, А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости / А. Ю. Ишлинский // Укр. мат. журнал. – 1954. – Т. 6. – № 2. – С. 140–146.
- [3] Михайлова, М. В. Устойчивость упругопластической трубы под действием внутреннего давления / М. В. Михайлова, Н. И. Петров. – Известия ИТА ЧР. – 1996 – 1997. – № 3(4)–2(7). – С. 80–85.
- [4] Ивлев Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

Петров Николай Ильич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары

e-mail: anfiska@mail.ru

N. I. Petrov

**ABOUT LOSS OF STABILITY OF THE THICK-WALLED PIPE FROM  
THE IDEAL ELASTO-PLASTIC MATERIAL UNDER THE INFLUENCE  
OF INTERNAL PRESSURE**

*Chuvash State University named after I. N. Ulyanov*

**Abstract.** Loss of stability of a thick-walled pipe from an ideal elasto-plastic material under the influence of internal pressure is considered. It is shown that loss of stability happens before exhaustion by a bearing capacity pipe.

**Keywords:** tension, elasto-plastic material, ideal plasticity, linearization, stability.

**REFERENCES**

- [1] *Leybenzon, L. S.* Meeting of works / L. S. Leybenzon. – M. : Publishing house of Academy of Sciences of the USSR. – 1951. – Vol. 1 Theory elasticity. – P. 81–85.
- [2] *Ishlinsky, A. Yu.* Consideration of questions of stability of balance of elastic bodies from the point of view of the mathematical theory of elasticity / A. Yu. Ishlinsky // Ukrainian mathematical magazine. – 1954. – Vol. 6. – № 2. – P. 140–146.
- [3] *Mikhaylova, M. V.* Stability it is elastic a plastic pipe under action of internal pressure / M. V. Mikhaylova, N. I. Petrov. – ITA ChR news. – 1996 – 1997. – № 3(4)–2(7). – P. 80–85.
- [4] *Ivlev, D. D.* Perturbation method in the theory of elastic-plastic body / D. D. Ivlev, L. V. Ershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p.

*Petrov, Nikolay Iluich*

*Candidate Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of general physics, Chuvash State University, Cheboksary*

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОСКОСТИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ, ОСЛАБЛЕННЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ, ПРИ ДВУОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева*

**Аннотация.** В работе рассматривается упругопластическое состояние плоскости с эллиптическим отверстием, подкрепленным эллиптическим включением, при двуосном растяжении. Рассматривается случай плоской деформации. Определяется граница упругопластической зоны, рассматривается влияние включения на напряженное состояние плоскости.

**Ключевые слова:** плоская деформация, тензор напряжений, пластичность, упругость, упругопластическая граница, включение.

УДК: 539.374

В работе [1] было рассмотрено упругопластическое состояние тонкой пластины с круговым отверстием и эллиптическим отверстием, свободным от усилий, при двуосном растяжении. В работах [2], [3] были рассмотрены: упругопластическое состояние неоднородной плоскости с круговым отверстием, подкрепленным эксцентрическим эллиптическим включением, при двуосном растяжении и упругопластическое состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленной включениями, ограниченными эксцентрическими окружностями, при двуосном растяжении. В настоящей работе рассмотрим упругопластическое состояние неоднородной плоскости с эллиптическим отверстием, подкрепленным эллиптическим включением, при двуосном растяжении.

Рассмотрим плоскость с эллиптическим включением, ослабленным эллиптическим отверстием, растягиваемую на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями  $p_1, p_2$ , причем контур отверстия свободен от усилий (рис. 1). Уравнение эллиптического контура отверстия  $L_1$  запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

уравнение контура включения  $L_2$  запишем в виде

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1, \quad (2)$$

где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса  $L_1$ ,  $c$  и  $d$  – полуоси эллипса  $L_2$ .

Припишем компонентам напряжения в зоне включения индекс “1” внизу, компонентам напряжения вне включения – индекс “2” внизу. Компонентам напряжения в пластической зоне припишем индекс “р” наверху, в упругой зоне – индекс “е” наверху.

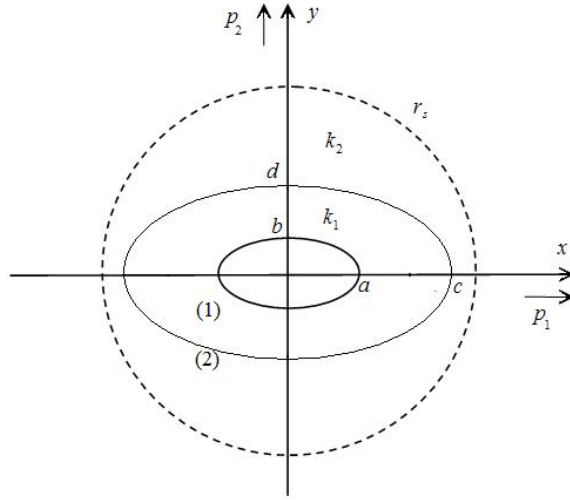


Рис. 1. Плоскость с эллиптическим включением и эллиптическим отверстием

Предположим, предел текучести материала включения равен  $k_1$ , а предел текучести материала плоскости –  $k_2$ .

Условие пластичности в области 1 примем в виде

$$(\sigma_{\rho 1} - \sigma_{\theta 1})^2 + 4\tau_{\rho\theta 1}^2 = 4k_1^2, \quad (3)$$

где  $\sigma_{\rho 1}$ ,  $\sigma_{\theta 1}$ ,  $\tau_{\rho\theta 1}$  – компоненты напряжений в полярной системе координат  $\rho$ ,  $\theta$ .

Условие пластичности в области 2 примем в виде

$$(\sigma_{\rho 2} - \sigma_{\theta 2})^2 + 4\tau_{\rho\theta 2}^2 = 4k_2^2, \quad (4)$$

где  $\sigma_{\rho 2}$ ,  $\sigma_{\theta 2}$ ,  $\tau_{\rho\theta 2}$  – компоненты напряжений в полярной системе координат  $\rho$ ,  $\theta$ .

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

В дальнейшем все величины имеющие размерность напряжения, будем считать безразмерными и отнесенными к пределу текучести материала включения  $k_1$ , а все величины, имеющие размерность длины, будем считать безразмерными, отнесенными к радиусу пластической зоны в нулевом приближении  $\rho_s^{(0)}$ . Обозначим  $\frac{k_2}{k_1} = \chi$ . Величины

$$\frac{a-b}{2\rho_s^{(0)}} = \delta_1, \quad \frac{c-d}{2\rho_s^{(0)}} = \delta_2, \quad \frac{p_1 - p_2}{2k_1} = \delta_3 \quad (6)$$

будем считать достаточно малыми, порядка  $\delta$ .

Далее примем

$$\delta_1 = d_1\delta, \quad \delta_2 = d_2\delta, \quad \delta_3 = d_3\delta, \quad d_i = \text{const}, \quad 0 \leq d_i \leq 1, \quad 0 \leq \delta \leq 1.$$

Уравнение эллипса отверстия  $L_1$  (1) перепишем в виде

$$\frac{x^2}{(\alpha + \delta d_1)^2} + \frac{y^2}{(\alpha - \delta d_1)^2} = 1, \quad (7)$$

где  $\alpha = \frac{a+b}{2\rho_s^{(0)}}$ .

Перейдя к полярным координатам по формулам  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ , уравнение эллипса (7) получим в виде

$$\rho_{L_1} = \frac{\alpha^2 - \delta^2 d_1^2}{\sqrt{\alpha^2 + \delta^2 d_1^2 - 2\alpha\delta d_1 \cos 2\theta}}. \quad (8)$$

Разложим в ряд уравнение эллипса (8)

$$\rho_{L_1} = \alpha + \delta d_1 \cos 2\theta + \dots \quad (9)$$

Поступая аналогичным образом разложим и уравнение эллиптического контура включения  $L_2$  (2) в ряд

$$\rho_{L_2} = \beta + \delta d_2 \cos 2\theta + \dots, \quad (10)$$

где  $\beta = \frac{c+d}{2\rho_s^{(0)}}$ .

Граничные условия на бесконечности в упругой зоне запишем в виде

$$\sigma_\rho^e|_{\rho=\infty} = p - q \cos 2\theta, \quad \sigma_\theta^e|_{\rho=\infty} = p + q \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^e|_{\rho=\infty} = q \sin 2\theta, \quad (11)$$

где  $q = \frac{p_1 - p_2}{2}$ ,  $p = \frac{p_1 + p_2}{2}$ .

Так как отверстие свободно от усилий, то в нулевом приближении

$$\sigma_{\rho 1}^p|_{\rho=\alpha} = 0. \quad (12)$$

Решение будем искать в приближенном виде аналогично [1], [2], [3]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}\delta + \dots, \quad \rho_s = \rho_s^{(0)} + \rho_s^{(1)}\delta + \dots, \quad (13)$$

где  $\rho_s$  – радиус пластической зоны,  $\delta$  – малый безразмерный параметр.

В исходном нулевом приближении ( $\delta = 0$ ) имеем плоскость с круговым включением радиуса  $\beta$ , ослабленным круговым отверстием радиуса  $\alpha$ , равномерно растягиваемую на бесконечности усилиями  $p = \frac{p_1 + p_2}{2k_1}$ . Будем считать, что  $\beta < 1$ .

Напряженное состояние в исходном нулевом приближении является осесимметричным

$$\tau_{\rho\theta 1}^{(0)p} = 0, \quad \tau_{\rho\theta 2}^{(0)p} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (14)$$

В области включения 1, условие пластичности (3) запишется в виде

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} - \sigma_{\theta 1}^{(0)p} = -2, \quad \sigma_{\rho 1}^{(0)p} < \sigma_{\theta 1}^{(0)p}. \quad (15)$$

Вне области включения, в области 2, условие пластичности (4) примет вид

$$\sigma_{\rho 2}^{(0)p} - \sigma_{\theta 2}^{(0)p} = -2\chi. \quad (16)$$

Уравнения равновесия (5) примут вид

$$\frac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}}{\rho} = 0. \quad (17)$$

Из (15), (17) и граничного условия на контуре отверстия  $\sigma_{\rho 1}^{(0)p}|_{\rho=\alpha} = 0$  имеем

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_{\theta 1}^{(0)p} = 2 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}. \quad (18)$$

Из (16), (17) и условия сопряжения напряжений на границе включения  $\sigma_{\rho 1}^{(0)p}|_{\rho=\beta} = \sigma_{\rho 2}^{(0)p}|_{\rho=\beta}$  получим



$$\sigma_{\rho^2}^{(0)p} = 2\chi \ln \frac{\rho}{\beta} + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha}, \quad \sigma_{\theta^2}^{(0)p} = 2\chi + 2\chi \ln \frac{\rho}{\beta} + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha}. \quad (19)$$

Решение в упругой области, согласно [1], будем искать в виде

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = p - B \frac{1}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = p + B \frac{1}{\rho^2}. \quad (20)$$

Из (19), (20) и условия сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе  $\sigma_{\rho^2}^{(0)p}|_{\rho=1} = \sigma_{\rho}^{(0)e}|_{\rho=1}$ ,  $\sigma_{\theta^2}^{(0)p}|_{\rho=1} = \sigma_{\theta}^{(0)e}|_{\rho=1}$  получим

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = p - \frac{\chi}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = p + \frac{\chi}{\rho^2}. \quad (21)$$

Радиус упругопластической зоны в нулевом приближении имеет вид

$$\rho_s^{(0)} = \frac{1}{2} \exp \left( \frac{p}{2\chi} + \left(1 - \frac{1}{\chi}\right) \ln(c+d) + \frac{1}{\chi} \ln(a+b) - \frac{1}{2} \right). \quad (22)$$

Рассмотрим первое приближение задачи.

Граничные условия на эллиптическом контуре отверстия, согласно [1], запишутся в виде

$$\left( \sigma_{\rho^1}^{(1)p} + \frac{d\sigma_{\rho^1}^{(0)p}}{d\rho} \cdot \rho_{L_1}^{(1)} \right) \Big|_{\rho=\alpha} = 0, \quad \left( \tau_{\rho\theta^1}^{(1)p} - \left( \sigma_{\theta^1}^{(0)p} - \sigma_{\rho^1}^{(0)p} \right) \cdot \frac{\dot{\rho}_{L_1}^{(1)}}{\alpha} \right) \Big|_{\rho=\alpha} = 0, \quad (23)$$

где точка наверху означает дифференцирование по  $\theta$ .

Из (9) и (23) следует

$$\sigma_{\rho^1}^{(1)p} \Big|_{\rho=\alpha} = \frac{-2d_1}{\alpha} \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta^1}^{(1)p} \Big|_{\rho=\alpha} = \frac{-4d_1}{2} \sin 2\theta. \quad (24)$$

Условие пластичности (3) в первом приближении примет вид

$$\sigma_{\rho}^{(1)p} - \sigma_{\theta}^{(1)p} = 0. \quad (25)$$

Уравнениям равновесия (5) удовлетворим, полагая

$$\sigma_{\rho^1}^{(1)p} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta^1}^{(1)p} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta^1}^{(1)p} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (26)$$

Тогда из (25) получим

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (27)$$

Решение (27) будем искать в виде

$$\Phi = R(\rho) \cos(n\theta). \quad (28)$$

Из (27), (28) получим уравнение Эйлера

$$\rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} + n^2 R = 0. \quad (29)$$

Из (29) следует:

$$\begin{aligned} R &= C_{00} + C_{01}\rho^2, \quad \text{при } n = 0, \\ R &= \rho(C_{11} + C_{12} \ln \rho), \quad \text{при } n = 1, \\ R &= \rho(C_{n1} \cos(\sqrt{n^2 - 1} \ln \rho) + C_{n2} \sin(\sqrt{n^2 - 1} \ln \rho)), \quad \text{при } n \geq 2. \end{aligned}$$

Откуда получим, согласно (25), (26), (28),

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(1)P} &= \sigma_{\theta}^{(1)P} = C_{00} + \frac{C_{11}}{\rho} \cos \theta + \frac{\bar{C}_{11}}{\rho} \sin \theta + \\
&+ \frac{1}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ [C_{n1}(1-n^2) + \sqrt{n^2-1}C_{n2}] \cos(\sqrt{n^2-1} \ln \rho) + \right. \\
&+ \left. [-\sqrt{n^2-1}C_{n1} + C_{n2}(1-n^2)] \sin(\sqrt{n^2-1} \ln \rho) \right\} \cos(n\theta), \\
\tau_{\rho\theta}^{(1)P} &= \frac{C_{11}}{\rho} \sin \theta - \frac{\bar{C}_{11}}{\rho} \cos \theta + \\
&+ \frac{1}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} n(n^2-1) [C_{n2} \cos(\sqrt{n^2-1} \ln \rho) - C_{n1} \sin(\sqrt{n^2-1} \ln \rho)] \sin(n\theta).
\end{aligned} \tag{30}$$

Согласно (24), (30), решение в области 1 будем искать в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho 1}^{(1)P} &= \sigma_{\theta 1}^{(1)P} = \frac{1}{\rho} \left\{ [-3C_{21} + \sqrt{3}C_{22}] \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + [-\sqrt{3}C_{21} - 3C_{22}] \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right\} \cos 2\theta, \\
\tau_{\rho\theta 1}^{(1)P} &= \frac{1}{\rho} \left\{ 2\sqrt{3}C_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - 2\sqrt{3}C_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right\} \sin 2\theta,
\end{aligned} \tag{31}$$

где  $C_{21}$ ,  $C_{22}$  – некоторые постоянные.

Из (24), (31) получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho 1}^{(1)P} &= \sigma_{\theta 1}^{(1)P} = -\frac{2d_1}{\rho} \left\{ \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha}{\rho}\right) + \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha}{\rho}\right) \right\} \cos 2\theta, \\
\tau_{\rho\theta 1}^{(1)P} &= -\frac{4d_1}{\rho} \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha}{\rho}\right) \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{32}$$

Условия сопряжения, согласно [1], при  $\rho = \beta$  запишутся в виде

$$\begin{aligned}
\left( \sigma_{\rho 1}^{(1)P} + \frac{d\sigma_{\rho 1}^{(0)P}}{d\rho} \cdot \rho_{L_2}^{(1)} \right) \Big|_{\rho=\beta} &= \left( \sigma_{\rho 2}^{(1)P} + \frac{d\sigma_{\rho 2}^{(0)P}}{d\rho} \cdot \rho_{L_2}^{(1)} \right) \Big|_{\rho=\beta}, \\
\left( \tau_{\rho\theta 1}^{(1)P} - \left( \sigma_{\theta 1}^{(0)P} - \sigma_{\rho 1}^{(0)P} \right) \cdot \frac{\dot{\rho}_{L_2}^{(1)}}{\beta} \right) \Big|_{\rho=\beta} &= \left( \tau_{\rho\theta 2}^{(1)P} - \left( \sigma_{\theta 2}^{(0)P} - \sigma_{\rho 2}^{(0)P} \right) \cdot \frac{\dot{\rho}_{L_2}^{(1)}}{\beta} \right) \Big|_{\rho=\beta},
\end{aligned} \tag{33}$$

где точка наверху означает дифференцирование по  $\theta$ .

Из (10), (32), (33) имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho 2}^{(1)P} \Big|_{\rho=\beta} &= -\frac{2}{\beta} \left\{ d_1 \left[ \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha}{\beta}\right) + \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha}{\beta}\right) \right] + (\chi - 1)d_2 \right\} \cos 2\theta, \\
\tau_{\rho\theta 2}^{(1)P} \Big|_{\rho=\beta} &= -\frac{4}{\beta} \left\{ d_1 \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha}{\beta}\right) + (\chi - 1)d_2 \right\} \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{34}$$

Согласно (25), (30), (34), решение в области 2 будем искать в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho 2}^{(1)P} &= \sigma_{\theta 2}^{(1)P} = \frac{1}{\rho} \left\{ [-3\tilde{C}_{21} + \sqrt{3}\tilde{C}_{22}] \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + [-\sqrt{3}\tilde{C}_{21} - 3\tilde{C}_{22}] \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right\} \cos 2\theta, \\
\tau_{\rho\theta 1}^{(1)P} &= \frac{1}{\rho} \left\{ 2\sqrt{3}\tilde{C}_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - 2\sqrt{3}\tilde{C}_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right\} \sin 2\theta,
\end{aligned} \tag{35}$$

где  $\tilde{C}_{21}$ ,  $\tilde{C}_{22}$  – некоторые постоянные.

Из (34), (35) получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho 2}^{(1)P} &= \sigma_{\theta 2}^{(1)P} = \frac{2}{\rho} \left\{ d_1 \left[ \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right) - \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right) \right] + \right. \\
&+ \left. (\chi - 1)d_2 \left[ \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right) - \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right) \right] \right\} \cos 2\theta, \\
\tau_{\rho\theta 2}^{(1)P} &= -\frac{4}{\rho} \left\{ d_1 \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right) + (\chi - 1)d_2 \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right) \right\} \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{36}$$

Далее будем следовать обозначениям и решению, изложенному в монографии [1]. На упругопластической границе из (36) справедливо

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho 2}^{(1)P} &= a_2'' \cos 2\theta, \\
\tau_{\rho\theta 2}^{(1)P} &= b_2''' \sin 2\theta,
\end{aligned} \tag{37}$$

где

$$a_2'' = -2 \{d_1 [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)] + (\chi - 1)d_2 [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta)]\}, \\ b_2''' = -4 \{d_1 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + (\chi - 1)d_2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta)\}.$$

1. Предположим, что на границе упругопластической области имеет место (37) при

$$a_2'' = -2 \{d_1 [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)] + (\chi - 1)d_2 [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta)]\}, \\ b_2''' = 0.$$

Тогда напряжения в упругой области будут определяться по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)e} &= -2 \{d_1 [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)] + (\chi - 1)d_2 [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta)]\} \times \\ &\quad \times \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2}\right) \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta^{(1)e} &= -2 \{d_1 [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)] + (\chi - 1)d_2 [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta)]\} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\rho^4} \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= -2 \{d_1 [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)] + (\chi - 1)d_2 [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta)]\} \times \\ &\quad \times \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2}\right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (38)$$

2. Предположим, что на границе упругопластической области имеет место (32) при

$$b_2''' = -4 \{d_1 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + (\chi - 1)d_2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta)\}, \\ a_2'' = 0.$$

Тогда напряжения в упругой области будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)e} &= -8 \{d_1 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + (\chi - 1)d_2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta)\} \left(\frac{1}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2}\right) \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta^{(1)e} &= 8 \{d_1 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + (\chi - 1)d_2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta)\} \frac{1}{\rho^4} \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= -4 \{d_1 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + (\chi - 1)d_2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta)\} \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2}\right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (39)$$

3. Предположим, что на границе упругопластической области имеет место (37) при

$$a_2'' = b_2''' = 0,$$

на бесконечности заданы усилия:

$$\sigma_\rho^{(1)e} \Big|_{\rho=\infty} = a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta,$$

где  $a_2 = -d_3$ ,  $b_2 = 0$ .

Тогда напряжения в упругой области имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)e} &= -\left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta^{(1)e} &= \left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (40)$$

Результирующее напряжение в упругой области определяется как сумма напряжений (38)–(40)

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho^{(1)e} &= -2 \left\{ [d_1 (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)) + \right. \\
&\quad \left. + (\chi - 1)d_2 (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta))] \left( -\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 4 [d_1 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + (\chi - 1)d_2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta)] \times \left( \frac{1}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) \right\} \cos 2\theta - \\
&\quad - \left( 1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) d_3 \cos 2\theta, \\
\sigma_\theta^{(1)e} &= -2 \left\{ d_1 [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - 3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)] + \right. \\
&\quad \left. + (\chi - 1)d_2 [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) - 3 \cos(\sqrt{3} \ln \beta)] \right\} \frac{1}{\rho^4} \cos 2\theta + \left( 1 + \frac{3}{\rho^4} \right) d_2 \cos 2\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= -2 \left\{ [d_1 (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)) + \right. \\
&\quad \left. + (\chi - 1)d_2 (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta))] \left( -\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2 [d_1 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + (\chi - 1)d_2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta)] \left( \frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) \right\} \sin 2\theta + \\
&\quad + \left( 1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) d_3 \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{41}$$

Для радиуса упругопластической области в первом приближении, согласно [1], получим

$$\rho_s^{(1)} = \frac{\sigma_{\theta 2}^{(1)p} - \sigma_\theta^{(1)e}}{\frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_{\theta 2}^{(0)p}}{d\rho}} = \frac{1}{4\chi} (\sigma_\theta^{(1)e} - \sigma_{\theta 2}^{(1)p}). \tag{42}$$

Из (36), (41), (42) получим радиус упругопластической области в первом приближении

$$\rho_s^{(1)} = \frac{1}{\chi} \left\{ 2d_1 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + 2(\chi - 1)d_2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta) + d_3 \right\} \cos 2\theta. \tag{43}$$

Таким образом, напряженное состояние в пластических (32), (36) и упругой (41) областях полностью определено, изменение границы пластической зоны определяется из соотношения (43).

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1976. – 208 с.

[2] *Кузнецов, П. Н.* Упругопластическое состояние неоднородной плоскости с круговым отверстием, подкрепленным эксцентрическим эллиптическим включением, при двусосном растяжении / П. Н. Кузнецов // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – № 8/2 (67). – С. 90–97.

[3] *Кузнецов, П. Н.* Упругопластическое состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленной включениями, ограниченными эксцентрическими окружностями, при двусосном растяжении / П. Н. Кузнецов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2009. – № 1. – С. 134–141.

Максимова Алина Петровна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

A. P. Maximova

**ELASTOPLASTIC CONDITION OF PLAIN WITH ELLIPTIC APERTURES  
AND ELLIPTIC NON-UNIFORM BODIES WITH BIAXIAL STRAIN**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** In the paper elastoplastic condition of plain with elliptic apertures and elliptic non-uniform bodies with biaxial strain is investigated. The flat deformation is observed. The elastoplastic limit, influence of elliptical non-uniform body on strained condition of plain is investigated.

**Keywords:** plane deformation, stress tensor, plasticity, elasticity, elastoplastic limit, non-uniform body.

**REFERENCES**

- [1] *Ivlev, D. D.* Perturbation method in the theory of elastic-plastic body / D.D.Ivlev, L. V. Ershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p.
- [2] *Kuznecov, P. N.* The plastic condition of the non-uniform plane with the circular opening supported with eccentric elliptic inclusion is elastic, at biaxial stretching / P. N. Kuznecov // Vestnik of SamSU. Natural-science series. – №8 /2 (67). – 2008. – P. 90–97.
- [3] *Kuznecov, P. N.* The plastic condition of the non-uniform plane weakened by a circular opening, supported with the inclusions limited by eccentric circles is elastic, at biaxial stretching / P. N. Kuznecov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2009. – № 1. – P. 134–141.

*Maximova, Alina Petrovna*

*Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ ЛИНЕЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ ПРИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева*

**Аннотация.** В работе исследуется деформированное состояние толстостенной линейно-неоднородной трубы при трансляционной анизотропии. Различные случаи неоднородных упругопластических тел рассматривались в работах [5], [7]. Задачи упругопластического состояния анизотропных тел исследовались в работах [6]. Деформированное состояние различных тел рассмотрены в [2], [4].

**Ключевые слова:** труба, перемещения, несжимаемость, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Рассмотрим толстостенную трубу, находящуюся под действием внутреннего давления  $p$  (рис. 1),  $r_a$  – внутренний радиус трубы,  $r_b$  – внешний радиус трубы.

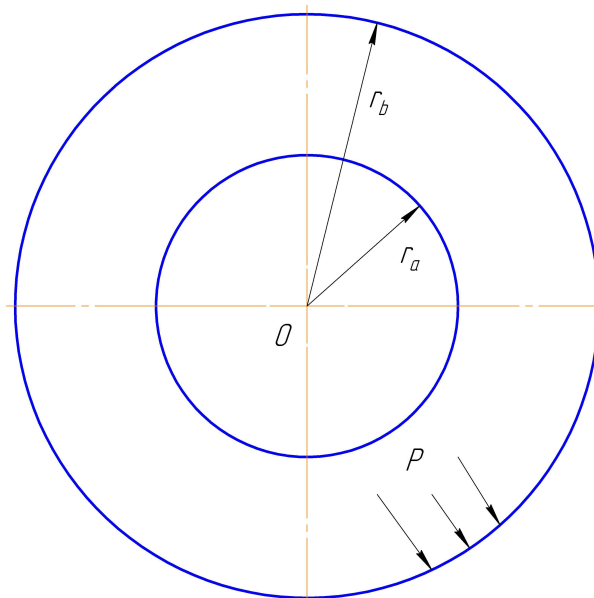


Рис 1. Толстостенная труба

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра  $\delta$ , будем искать решение в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma'_{ij}\delta + \sigma''_{ij}\delta^2 + \dots, \quad u = u^{(0)} + u'\delta + u''\delta^2 + \dots, \\ \nu = \nu^{(0)} + \nu'\delta + \nu''\delta^2 + \dots$$

Обозначим  $\frac{r_b}{r_a} = \beta$ ,  $\frac{r}{r_a} = \rho$ ,  $\frac{r_s^0}{r_a} = \alpha$ ,  $r_s^0$  – упругопластическая граница в нулевом приближении.

Предполагается, что в пластической области имеет место условие напряженного состояния. Согласно [3] оно имеет вид:

$$\left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + (\tau_{\rho\theta})^2 - 2R\left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2}\right)\cos(2\theta + \zeta) - \\ - 2\tau_{\rho\theta}\sin(2\theta + \zeta) + R^2 - 1 - 2\rho\delta R_0\sin(\theta + \eta) = 0, \quad (1)$$

где

$$R = \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + k_3^2}, \quad \frac{k_1 - k_2}{2R} = \cos \zeta, \quad \frac{k_3}{2} = \sin \zeta, \\ R_0 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \frac{b}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \eta, \quad \frac{a}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \eta.$$

В упругой области примем материал несжимаемым, тогда коэффициент Пуассона  $\mu = \frac{1}{2}$ .

Напряженное состояние трубы определено в работе в [3]. В нулевом приближении компоненты напряжений имеют вид:

$$\sigma_\rho^{(0)p} = -p + 2\ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} = -p + 2 + 2\ln \frac{\rho}{\alpha}, \\ \sigma_\rho^{(0)e} = \frac{p + 2\ln \alpha}{\beta^2 - 1} \left(1 - \frac{\beta^2}{\rho^2}\right), \quad \sigma_\theta^{(0)e} = \frac{p + 2\ln \alpha}{\beta^2 - 1} \left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2}\right).$$

В первом приближении компоненты напряжений имеют вид:

$$\sigma'_p{}^p = -R' \left( \frac{\alpha}{\rho} (\cos(\sqrt{3}\ln \frac{\rho}{\alpha}) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\ln \frac{\rho}{\alpha})) - 1 \right) \cos(2\theta + \zeta) + \\ + (a \cos \theta + b \sin \theta) \left( -\frac{\alpha^2}{\rho} + \rho \right), \\ \sigma'_\theta{}^p = -R' \left( \frac{\alpha}{\rho} (\cos(\sqrt{3}\ln \frac{\rho}{\alpha}) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\ln \frac{\rho}{\alpha})) + 1 \right) \cos(2\theta + \zeta) + \\ + (a \cos \theta + b \sin \theta) \left( -\frac{\alpha^2}{\rho} + 3\rho \right), \\ \tau'_{p\theta}{}^p = R' \left( \frac{\alpha}{\rho} (\cos(\sqrt{3}\ln \frac{\rho}{\alpha}) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\ln \frac{\rho}{\alpha})) - 1 \right) \sin(2\theta + \zeta) + \\ + (-b \cos \theta + a \sin \theta) \left( -\frac{\alpha^2}{\rho} + \rho \right), \\ \sigma'_\rho{}^e = a'_1 \cos \theta + b'_1 \sin \theta + a'_2 \cos 2\theta + b'_2 \sin 2\theta, \\ \tau'_{\rho\theta}{}^e = a''_1 \cos \theta + b''_1 \sin \theta + a''_2 \cos 2\theta + b''_2 \sin 2\theta. \quad (2)$$

где

$$b''_2 = R'\alpha \cos \zeta [\cos(\sqrt{3}\ln \alpha) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\ln \alpha)] - R' \cos \zeta, \\ a1'' = (-\alpha^2 a + a), b1'' = (-\alpha^2 b + b), a1''' = (\alpha^2 b - b), b1''' = (-\alpha^2 a + a), \\ a''_2 = -R'\alpha \cos \zeta [\cos(\sqrt{3}\ln \alpha) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\ln \alpha)] + R' \cos \zeta, \\ b''_2 = R' \sin \zeta [\cos(\sqrt{3}\ln \alpha) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\ln \alpha)] - R' \sin \zeta, \\ a''_2 = R'\alpha \sin \zeta [\cos(\sqrt{3}\ln \alpha) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\ln \alpha)] - R' \sin \zeta,$$

Определим компоненты перемещений в упругой зоне по уже определенному напряженному состоянию в упругой зоне.

В нулевом приближении в упругой области согласно [1] компоненты перемещений имеют вид:

$$u^{(0)e} = \frac{1}{2(\beta^2 - 1)E} \left[ \left( p - 2 \ln \frac{1}{\alpha} \right) + 3 \left( p - 2 \ln \frac{1}{\alpha} \right) \beta^2 \right] \quad (3)$$

Следуя [1] определим компоненты перемещений в первом приближении.

1. Предположим, что на упругопластической границе имеет место (2) при

$$a_1'' = (-\alpha^2 a + a), \quad b_1''' = (-\alpha^2 a + a), \quad b_1'' = a_1''' = a_2'' = b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0.$$

В этом случае перемещения примут вид

$$\begin{aligned} u^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left( \frac{15}{14} \hat{c}_1 \ln \left( \frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\rho^2} \hat{c}_2 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \cos \theta \\ v^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left( -\frac{15}{14} \hat{c}_1 \left[ \ln \left( \frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{3}{5} \right] + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\rho^2} \hat{c}_2 + \frac{11}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \sin \theta, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\hat{c}_1 = 0, \quad \hat{c}_2 = \hat{c}_3 = \frac{(\alpha^2 a - a) \beta}{2(\beta^4 - 1)}.$$

2. Предположим, что на упругопластической границе имеет место (2) при

$$b_1'' = (-\alpha^2 b + b), \quad a_1''' = (\alpha^2 b - b), \quad b_1''' = a_1'' = a_2'' = b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} u^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left( \frac{15}{14} \hat{c}_1 \ln \left( \frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\rho^2} \hat{c}_2 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \sin \theta, \\ v^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left( \frac{15}{14} \hat{c}_1 \left[ \ln \left( \frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{3}{5} \right] - \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\rho^2} \hat{c}_2 - \frac{11}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \cos \theta, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\hat{c}_1 = 0, \quad \hat{c}_2 = \hat{c}_3 = \frac{(\alpha^2 b - b) \beta}{2(\beta^4 - 1)}.$$

3. Предположим, что на упругопластической границе имеет место (2) при

$$a_2'' = -R' \alpha \cos \zeta \left[ \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right] + R' \cos \zeta,$$

$$b_2'' = R' \sin \zeta \left[ \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right] - R' \sin \zeta,$$

$$b_1''' = a_1'' = b_1'' = a_1''' = a_2''' = b_2''' = 0.$$

В этом случае коэффициенты перемещения будут иметь вид

$$\begin{aligned} u^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left( -3c_1 \left( \frac{\rho}{\beta} \right) + 3c_2 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2c_3 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4c_4 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta), \\ v^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left( 3c_1 \left( \frac{\rho}{\beta} \right) + 3c_2 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7c_3 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^3 - c_4 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \sin 2\theta - b_2'' \cos 2\theta), \end{aligned} \quad (6)$$

где



$$c_1 = \left( \frac{-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}}{2N} \right), \quad c_2 = \left( \frac{-3 + 2\beta^2 + \beta^4}{6N} \right) \beta^{-4},$$

$$c_3 = \left( \frac{-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}}{6N} \right) \beta^2, \quad c_4 = \left( \frac{-1 + 2\beta^{-2} - \beta^4}{2N} \right) \beta^{-2}.$$

4. Предположим, что на упругопластической границе имеет место (2) при

$$a_2''' = R' \alpha \sin \zeta \left[ \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right] - R' \sin \zeta,$$

$$b_2''' = R' \alpha \cos \zeta \left[ \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right] - R' \cos \zeta,$$

$$b_1''' = a_1'' = b_1'' = a_1''' = a_2'' = b_2'' = 0.$$

Перемещения примут вид

$$u^{(I)e} = \frac{\beta}{E} \left( -3\tilde{c}_1 \left( \frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\tilde{c}_3 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\tilde{c}_4 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (-a_2''' \sin 2\theta + b_2''' \cos 2\theta),$$

$$v^{(I)e} = \frac{\beta}{E} \left( 3\tilde{c}_1 \left( \frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\tilde{c}_3 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \tilde{c}_4 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta), \quad (7)$$

где

$$\tilde{c}_1 = \left( \frac{4 - 4\beta^2}{4N} \right), \quad \tilde{c}_2 = \left( \frac{4\beta^2 - 4\beta^4}{12N} \right) \beta^{-4},$$

$$\tilde{c}_3 = \left( \frac{3 - 4\beta^{-2} + \beta^{-4}}{12N} \right) \beta^2, \quad \tilde{c}_4 = \left( \frac{-1 + \beta^4}{2N} \right) \beta^{-2}.$$

Результирующее перемещение в упругой области определяется как сумма перемещений (4), (5), (6), (7).

$$u^{(I)e} = -\frac{1}{4} (\alpha^2 - 1) (-3\beta^4 + \rho^4) \left( \frac{a \cos \zeta + b \sin \zeta}{\rho^2 E (\beta^4 - 1)} \right) +$$

$$+ \frac{\beta}{E} \left( -3c_1 \left( \frac{\rho}{\beta} \right) + 3c_2 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2c_3 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4c_4 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta) +$$

$$+ \frac{\beta}{E} \left( -3\tilde{c}_1 \left( \frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\tilde{c}_3 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\tilde{c}_4 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (-a_2''' \sin 2\theta + b_2''' \cos 2\theta),$$

$$v^{(I)e} = -\frac{1}{4} (\alpha^2 - 1) (3\beta^4 + 11\rho^4) \left( \frac{-a \sin \theta + b \cos \theta}{\rho^2 E (\beta^4 - 1)} \right) +$$

$$+ \frac{\beta}{E} \left( 3c_1 \left( \frac{\rho}{\beta} \right) + 3c_2 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7c_3 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^3 - c_4 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \sin 2\theta - b_2'' \cos 2\theta) +$$

$$+ \frac{\beta}{E} \left( 3\tilde{c}_1 \left( \frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\tilde{c}_3 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \tilde{c}_4 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta). \quad (8)$$

Согласно ассоциированному закону течения в пластической области имеем

$$\varepsilon_\rho^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\rho} = \lambda \left( \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} - R' \cos(2\theta + \zeta) \right),$$

$$\varepsilon_\theta^p = -\varepsilon_\rho^p, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{\rho\theta}^p = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial f}{\partial \tau_{\rho\theta}} = \lambda (\tau_{\rho\theta} - R' \sin(2\theta + \zeta)).$$

Исключим величину  $\lambda$  из (9)

$$\frac{\varepsilon_{\rho\theta}}{\varepsilon_{\rho} - \varepsilon_{\theta}} = \frac{\tau_{\rho\theta} - R' \sin(2\theta + \zeta)}{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} - 2R' \cos(2\theta + \zeta)}. \quad (10)$$

Уравнение несжимаемости в нулевом приближении

$$\varepsilon_{\rho}^{(0)} + \varepsilon_{\theta}^{(0)} = 0. \quad (11)$$

Из (11) полагается

$$\frac{du^{(0)}}{d\rho} + \frac{u^{(0)}}{\rho} = 0, \quad (12)$$

где  $u^{(0)}$  – компонента перемещений вдоль радиуса  $\rho$ , компонента перемещений  $v^{(0)}$  вдоль  $\theta$  равна нулю:  $v^{(0)} = 0$ .

Решение уравнения (12) имеет вид

$$u^{(0)} = \frac{c}{\rho}, \quad c - const. \quad (13)$$

Из (13) получим:

$$\varepsilon_{\rho}^{(0)} = \frac{du^{(0)}}{d\rho} = -\frac{c}{\rho^2}, \quad \varepsilon_{\theta}^{(0)} = \frac{u^{(0)}}{\rho} = \frac{c}{\rho^2}. \quad (14)$$

Положим, что  $\tau_{\rho\theta}^{(0)} = \varepsilon_{\rho\theta}^{(0)} = 0$ .

Из (2), (12) в пластической области компоненты перемещений примут вид

$$u^{(0)p} = \frac{c}{\rho}, \quad u^{(0)p} = 0, \quad (15)$$

где

$$c = \frac{1}{2(\beta^2 - 1)E} \left[ \left( p - 2 \ln \frac{1}{\alpha} \right) + 3 \left( p - 2 \ln \frac{1}{\alpha} \right) \beta^2 \right].$$

Воспользуемся уравнением несжимаемости для нахождения компонент перемещения в первом приближении

$$\varepsilon_{\rho}^{(I)} + \varepsilon_{\theta}^{(I)} = 0, \quad \varepsilon_{\rho}^{(I)} = \frac{\partial u^{(I)}}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta}^{(I)} = \frac{u^{(I)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v^{(I)}}{\partial \theta}, \quad (16)$$

откуда

$$\frac{\partial u^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{u^{(I)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v^{(I)}}{\partial \theta} = 0, \quad (17)$$

где  $u^{(I)}$ ,  $v^{(I)}$  – компоненты перемещений в первом приближении.

Из (10) получим линеаризованное соотношение:

$$\left( \sigma_{\rho}^{(0)} - \sigma_{\theta}^{(0)} \right) \varepsilon_{\rho\theta}^{(I)} = \left( \varepsilon_{\rho}^{(0)} - \varepsilon_{\theta}^{(0)} \right) \left( \tau_{\rho\theta}^{(I)} - R' \sin(2\theta + \zeta) \right) \quad (18)$$

Имеет место:

$$\varepsilon_{\rho\theta}^{(I)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{v^{(I)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{(I)}}{\partial \theta} \right). \quad (19)$$

Из (14), (19), а также формул для  $\sigma_{\rho}^{(I)p}$ ,  $\sigma_{\theta}^{(I)p}$ ,  $\tau_{\rho\theta}^{(I)p}$  и соотношения  $\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p} = -2$ , уравнение (19) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{v^{(I)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{(I)}}{\partial \theta} = \frac{2c}{\rho^2} \left( -\frac{\alpha^2}{\rho} + \rho \right) (a \sin \zeta - b \cos \zeta) + \\ + \frac{2cR'}{\rho^2} \left\{ \frac{\alpha}{\rho} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) - 2 \right\} \sin (2\theta + \zeta) \end{aligned} \quad (20)$$

Удовлетворим уравнение несжимаемости (17), предполагая

$$u^{(I)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v^{(I)} = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (21)$$

Из (20), (21) имеем:

$$\begin{aligned} \rho^2 \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 2c \left( -\frac{\alpha^2}{\rho} + \rho \right) (a \sin \theta - b \cos \theta) + \\ + 2cR' \left\{ \frac{\alpha}{\rho} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) - 2 \right\} \sin (2\theta + \zeta) \end{aligned} \quad (22)$$

Решение уравнения (22) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения (22) имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{частн}} = c \left( 2\rho (\ln \rho)^2 - \frac{\alpha^2}{2\rho} \right) (a \sin \theta - b \cos \theta) + (d_2 \ln \rho + d_1) \rho (\sin \theta - \cos \theta) + \\ + \left( \frac{1}{\rho} [S \sin \omega + T \cos \omega] + Q \right) \sin (2\theta + \zeta), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\omega = \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad D = 2cR', \quad S = -\frac{\sqrt{3}\alpha D}{8}, \quad T = -\frac{\alpha D}{8}, \quad Q = -\frac{D}{2}, \quad c, d_2, d_1 - \text{const.}$$

Из (21), (23) имеем

$$\begin{aligned} u_{\text{частн}}^{(I)} = -\frac{c}{\rho} \left( 2\rho (\ln \rho) - \frac{\alpha^2}{2\rho} \right) (a \cos \theta + b \sin \theta) - \frac{1}{\rho} (d_2 \ln \rho + d_1) (\cos \theta + \sin \theta) - \\ - \frac{2([S \sin \omega + T \cos \omega] + Q\rho)}{\rho^2} \cos (2\theta + \zeta), \\ v_{\text{частн}}^{(I)} = c \left( \frac{\alpha^2}{2\rho^2} + 2 (\ln \rho)^2 + 4 \ln \rho \right) (a \sin \theta - b \cos \theta) + d_2 (\sin \theta - \cos \theta) + \\ + (d_2 \ln \rho + d_1) (\sin \theta - \cos \theta) - \\ - \frac{((S+T\sqrt{3}) \sin \omega + (T-S\sqrt{3}) \cos \omega)}{\rho^2} \sin (2\theta + \zeta). \end{aligned} \quad (24)$$

Согласно (21), компоненты перемещений в пластической области, соответствующие решению однородного уравнения(22) имеют вид

$$\begin{aligned} u_{\text{одн}}^{(I)p} = - \left( \bar{c}_{11} + \bar{c}_{12} \ln \rho \right) \cos \theta - \left( \bar{c}_{11} + \bar{c}_{12} \ln \rho \right) \sin \theta - \\ - 2 \left\{ [c_{11} \cos (\sqrt{3} \ln \rho) + c_{12} \sin (\sqrt{3} \ln \rho)] \sin 2\theta - [c_{21} \cos (\sqrt{3} \ln \rho) + c_{22} \sin (\sqrt{3} \ln \rho)] \cos 2\theta \right\}, \\ v_{\text{одн}}^{(I)p} = \left( \bar{c}_{11} + \bar{c}_{12} (1 + \ln \rho) \right) \sin \theta + \left( \bar{c}_{11} + \bar{c}_{12} (1 + \ln \rho) \right) \cos \theta + \\ + [c_{11} (\cos (\sqrt{3} \ln \rho) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln \rho)) + c_{12} (\sin (\sqrt{3} \ln \rho) + \sqrt{3} \cos (\sqrt{3} \ln \rho))] \sin 2\theta + \\ + [c_{21} (\cos (\sqrt{3} \ln \rho) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln \rho)) + c_{22} (\sin (\sqrt{3} \ln \rho) + \sqrt{3} \cos (\sqrt{3} \ln \rho))] \cos 2\theta \end{aligned} \quad (25)$$

На упругопластической границе имеют место условия сопряжения

$$u_2^{(I)p} = u_2^{(I)e}, \quad v_2^{(I)p} = v_2^{(I)e}, \quad \text{при } \rho = 1 \quad (26)$$

Из (8), (24)–(26) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{11} &= \frac{((-3\alpha^2+3)\beta^4+\alpha^2-1+2cE\alpha^2)a}{4E} - d_1, \\ \tilde{c}_{12} &= \frac{(3\alpha^2-3)a\beta^8 + ((1+(-4cE-1)\alpha^2)a-4d_2E)\beta^4 + (-12+(12+4cE)\alpha^2)a+4d_2E}{E(\beta^4-1)}, \\ \tilde{c}_{11} &= \frac{((2cE\alpha^2-3\alpha^2+3)b-4d_1E)\beta^4 + (-2cE\alpha^2+\alpha^2-1)b+4d_1E}{4E(\beta^4-1)}, \\ \tilde{c}_{12} &= \frac{(d_2+2d_1)E\beta^4 + (-d_2-2d_1)E + (-3\alpha^2+3)b}{E(\beta^4-1)} \end{aligned} \quad (27)$$

$$c_{21} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{b_2'''(-\tilde{c}_4\beta^4+2\tilde{c}_3-3\tilde{c}_2\beta^6+3c_1\beta^2)}{2\beta^2E}, \\ A_2 &= \frac{a_2''(-4c_4\beta^4+2c_3-3c_2\beta^6+3c_1\beta^2)}{2\beta^2E}, \\ A_3 &= \cos(\zeta)S \sin(\sqrt{3}\ln\alpha), \\ A_4 &= -\cos(\zeta)T \cos(\sqrt{3}\ln\alpha), \\ A_5 &= -\cos(\zeta)Q, \end{aligned}$$

$$c_{22} = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\sqrt{3}}{3}T((\cos(\zeta)+\sin(\zeta))\cos(\sqrt{3}\ln\alpha) - \sqrt{3}\sin(\zeta)\sin(\sqrt{3}\ln\alpha)), \\ B_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{3}S((\cos(\zeta)+\sin(\zeta))\sin(\sqrt{3}\ln\alpha) + \sqrt{3}\sin(\zeta)\cos(\sqrt{3}\ln\alpha)), \\ B_3 &= \frac{\sqrt{3}b_2''(1.5\tilde{c}_2\beta^6 - \tilde{c}_3 - 1.5\tilde{c}_1\beta^2 + 2\tilde{c}_4\beta^4)}{3\beta^2E}, \\ B_4 &= \frac{\sqrt{3}b_2'''(-3c_2\beta^6 - 7c_3 - 3c_1\beta^2 + c_4\beta^4)}{3\beta^2E}, \\ B_5 &= \frac{\sqrt{3}a_2'''((7\tilde{c}_3+3\tilde{c}_1\beta^2-\tilde{c}_4\beta^4)\tilde{c}_2(\frac{1}{\beta^3})+3\beta^3)}{3\beta^2E\tilde{c}_2(\frac{1}{\beta^3})}, \\ B_6 &= \frac{\sqrt{3}a_2''(1.5c_2\beta^6 - c_3 - 1.5c_1\beta^2 + 2c_4\beta^4)}{3\beta^2E}, \\ B_7 &= \frac{\sqrt{3}}{3}\cos(\zeta)Q. \end{aligned}$$

$$c_{12} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} Z_1 &= -\sin(\zeta)S \sin(\sqrt{3}\ln\alpha), \\ Z_2 &= \sin(\zeta)T \cos(\sqrt{3}\ln\alpha), \\ Z_3 &= \frac{b_2''(2c_3-4c_4\beta^4+3c_1\beta^2-3c_2\beta^6)}{2\beta^2E}, \\ Z_4 &= \frac{a_2'''(-2\tilde{c}_3+4\tilde{c}_4\beta^4-3\tilde{c}_1\beta^2+3\tilde{c}_2\beta^6)}{2\beta^2E}, \\ Z_5 &= \sin(\zeta)Q. \end{aligned}$$

$$c_{12} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{\sqrt{3}}{3} T ((\cos(\zeta) - \sin(\zeta)) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \cos(\zeta)), \\
L_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{3} S ((\cos(\zeta) - \sin(\zeta)) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \cos(\zeta)), \\
L_3 &= -\frac{\sqrt{3} b_2'''}{3\beta^2 E \tilde{c}_2 \left(\frac{1}{\beta^3}\right)} \left( (\tilde{c}_4 \beta^4 - 7\tilde{c}_3 - 3\tilde{c}_1 \beta^2) \tilde{c}_2 \left(\frac{1}{\beta^3}\right) - 3\beta^3 \right), \\
L_4 &= -\frac{\sqrt{3} b_2'''}{3\beta^2 E} (1.5c_1 \beta^2 - 1.5c_2 \beta^6 - 2c_4 \beta^4 + c_3), \\
L_5 &= -\frac{\sqrt{3} a_2'''}{3\beta^2 E} (-1.5\tilde{c}_1 \beta^2 + 1.5\tilde{c}_2 \beta^6 + 2\tilde{c}_4 \beta^4 - \tilde{c}_3), \\
L_6 &= -\frac{\sqrt{3} a_2'''}{3\beta^2 E} (-3c_1 \beta^2 - 3c_2 \beta^6 + c_4 \beta^4 - 7c_3), \\
L_7 &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\zeta) Q.
\end{aligned}$$

Согласно (8), (27)–(31) компоненты перемещений в первом приближении определены.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [2] *Кержаев, А. П.* Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, в случае трансляционной анизотропии / А. П. Кержаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2013. – № 2 (16). – С. 54–61.
- [3] *Никитин, А. В.* Упругопластическое состояние трансляционно-анизотропной линейно-неоднородной трубы, находящейся под действием внутренних давлений / А. В. Никитин, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Естественные и технические науки. – 2013. – № 4 (80). – Ч. 2. – С. 148–156.
- [4] *Павлова, Т. Н.* Об определении перемещений в задаче напряженно-деформированного состояния тонкой пластины с эллиптическим отверстием / Т. Н. Павлова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2010. – № 1 (65). – С. 64–69.
- [5] *Тихонов, С. В.* Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящийся под действием внутреннего давления / С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 161–168.
- [6] *Фоминых, С. О.* Упругопластическое состояние толстостенной трубы при взаимодействии различных видов пластической анизотропии / С. О. Фоминых // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 201–216.
- [7] *Целистова, Е. А.* О влияние неоднородности на напряженное состояние слоя из идеально-ноупластического материала / Е. А. Целистова // Механика микронеоднородных материалов и разрушение: Тез. докл. Всерос. науч. сем. Пермь: ПермГТУ, 1999. – С. 53.

*Никитин Андрей Витальевич,*

*аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: ligalas5@mail.ru*

A. V. Nikitin

**ELASTOPLASTIC STATE OF THE TWO-LAYER THICK-WALLED PIPE  
BEING UNDER THE INFLUENCE OF INTERNAL PRESSURE IN CASE  
TRANSMITTING ANISOTROPY**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** The elastoplastic state of the two-layer thick-walled pipe being under the influence of internal pressure is considered. It is supposed that each layer possesses the properties of transmitting anisotropy. The pipe tension is defined, the border between elastic and plastic areas is found.

**Keywords:** tension, elasticity, plasticity, transmitting anisotropy, pipe, layer.

**REFERENCES**

- [1] *Ivlev, D. D.* Perturbation method in the theory of elastic-plastic body / D. D. Ivlev, L. V. Ershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p.
- [2] *Kerzhayev, A. P.* Is elastic a plastic condition of the two-layer thick-walled pipe which is under the influence of internal pressure, in case of transmitting anisotropy / A. P. Kerzhayev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013 . – No. 2 (16). – P. 54–61.
- [3] *Nikitin, A. V.* Is elastic a plastic state transmitting and anisotropic linearly - the non-uniform pipe which is under the influence of internal pressure / A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Natural and technical science. – 2013 . – No. 4 (80). – H. 2 . – P. 148–156.
- [4] *Pavlova, T. N.* About definition of movements in a task intense the deformed condition of a thin plate with elliptic opening / T. N. Pavlova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2010 . – No. 1 (65). – P. 64–69.
- [5] *Tikhonov, S. V.* About is elastic a plastic state the non-uniform pipe, being under the influence of internal pressure / S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2007. – No. 2. – P. 161–168.
- [6] *Fominykh, S. O.* Is elastic a plastic state thick-walled pipe at interaction of different types of the plastic anisotropy / S. O. Fominykh // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2011. – No. 1 (9). – P. 201–216.
- [7] *Tselistova, E. A.* About heterogeneity influence on layer tension from ideally plastic material / E. A. Tselistova // Mechanics of micronon-uniform materials and destruction: Theses of reports All-Russian scientific seminar of Perm : PermSTU, 1999. – P. 53.

*Nikitin, Andrey Vitalevich*

*Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

**Варданыан Седрак Ваникович (vardanyan\_s@yahoo.com)** – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (cotedurhone\_mail.ru)** – доктор физико-математических наук (1996), профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский лесотехнический институт, г. Королев Московской области.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

**Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

**Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

**Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

**Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный открытый университет, г. Москва.

**Ломакин Евгений Викторович** ([lomakin@mech.math.msu.su](mailto:lomakin@mech.math.msu.su)) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Максимова Людмила Анатольевна** ([maximova\\_ng@mail.ru](mailto:maximova_ng@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Манжиров Александр Владимирович** ([manzh@ipmnet.ru](mailto:manzh@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

**Маркин Алексей Александрович** ([markin@tsu.tula.ru](mailto:markin@tsu.tula.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Матченко Николай Михайлович** ([eks\\_05@mail.ru](mailto:eks_05@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Миронов Борис Гурьевич** ([rektorat@chdpu.edu.ru](mailto:rektorat@chdpu.edu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович** ([irakon63@hotmail.com](mailto:irakon63@hotmail.com)) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

**Михайлов Глеб Константинович** ([gkmikh@mail.ru](mailto:gkmikh@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

**Немировский Юрий Владимирович** ([nemirov@itam.nsc.ru](mailto:nemirov@itam.nsc.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

**Непершин Ростислав Иванович** ([nepershin\\_ri@rambler.ru](mailto:nepershin_ri@rambler.ru)) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва.

**Победря Борис Ефимович** ([rob@mail.ru](mailto:rob@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Радаев Юрий Николаевич** ([radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

**Ревуженко Александр Филиппович** ([revuzhenko@yandex.ru](mailto:revuzhenko@yandex.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

**Радченко Владимир Павлович** ([radch@samgtu.ru](mailto:radch@samgtu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.



**Редкозубов Сергей Алексеевич (marycbka434@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

**Спориных Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

**Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv)** – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

**Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru)). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

**и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Кулиев В. Д.</i> Светлой памяти Дюиса Даниловича Ивлева.....	3
<i>Зубчанинов В. Г.</i> Теория идеальной пластичности, предельных состояний и Д. Д. Ивлев.....	5
<i>Кулиев В. Д.</i> К теории теплопроводности в конечном стержне.....	21
<i>Спорышин А. Н.</i> Исследование устойчивости двухслойной кусочно-неоднородной сферической оболочки при нагружении.....	46
<i>Золочевский А. А., Склепус С. Н., Галишин А. З.</i> Пространственная задача изгиба цилиндра с описанием зависимости характеристик ползучести и повреждаемости от вида нагружения на основе диссипативной функции.....	52
<i>Трещев А. А., Теличко В. Г., Царев А. Н., Ходорович П. Ю.</i> Моделирование сферической оболочки из разносопротивляющегося графита 3D конечными элементами.....	62
<i>Трещев А. А., Делягин М. Ю., Астахов Д. С.</i> Математическая модель связанной термоупругости существенно нелинейных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния.....	72
<i>Глаголев В. В., Глаголев Л. В., Маркин А. А.</i> Определение параметра структуры в одном модельном представлении трещины.....	80
<i>Немировский Ю. В., Романова Т. П.</i> Моделирование предельного и динамического поведения жесткопластической пластины произвольной формы с внутренней криволинейной опорой.....	89
<i>Буханько А. А., Лошманов А. Ю., Хромов А. И.</i> Предельные состояния пластических тел.....	97
<i>Митрофанова Т. В., Павлова Т. Н.</i> Напряженно-деформированное упруго-пластическое состояние тонкой анизотропной пластины, ослабленное круговым отверстием при двусосном растяжении.....	105
<i>Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю.</i> Влияние возмущения начальных данных на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в области аналитичности.....	111
<i>Орлов В. Н., Гузь М. П.</i> Исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение задачи Коши одного нелинейного дифференциального уравнения в комплексной области.....	119
<i>Петров Н. И.</i> Полиномиальное решение линеаризованных задач осесимметричного состояния в теории малых упругопластических деформаций.....	131

<i>Максимова А. П.</i> Упругопластическое состояние плоскости с эллиптическим включением, ослабленным эллиптическим отверстием, при двусосном растяжении.....	134
<i>Никитин А. В.</i> Определение деформированного состояния толстостенной линейно-неоднородной трубы при трансляционной анизотропии .....	142
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	151
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	154
СОДЕРЖАНИЕ .....	156

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2013. № 3(17)**

**Отв. за выпуск:** А. В. Балашникова

**Технические редакторы:** Л. Н. Улюкова, Н. А. Осипова, Л. А. Судленкова

**Компьютерная верстка:** А. В. Балашникова

**Макет:** А. В. Балашникова

---

Подписано в печать 27.09.2013 г. Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e.  
Усл. печ. л. 19,75. Тираж 400 экз. Заказ №

---

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный  
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38