

ББК 95.4; 22.251
Ч-823

Подписной индекс в каталоге ПРЕССА РОССИИ: 13109
ISSN: 2073-5499

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА

СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

2014. № 1(19)

Январь–март 2014 г.

Учредитель: ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева»

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Учредители серии: Г. Н. Григорьев, Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов,
Л. А. Максимова, А. В. Манжиров, Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов,
Т. Н. Петрова, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин, А. А. Шуканов

Редакционная коллегия: Радаев Ю. Н. – ответственный редактор, Матченко Н. М. – зам. ответственного редактора, Тихонов С. В. – ответственный секретарь, Баженов В. Г., Буренин А. А., Георгиевский Д. В., Глаголев В. В., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Каюмов Р. А., Климов Д. М., Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Кулиев В. Д., Ломакин Е. В., Максимова Л. А., Маркин А. А., Манжиров А. В., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р. И., Победря Б. Е., Радченко В. П., Ревуженко А. Ф., Редкозубов С. А., Сенашов С. И., Спорыхин А. Н., Трещев А. А., Чернышов А. Д., Хромов А. И., Шашкин А. И.

Международный совет: Амензаде Р. Ю. (Азербайджан), Варданян С. В. (Армения), Мирсалимов В. М. (Азербайджан), Тамуж В. П. (Латвия), Чигарев А. В. (Белоруссия)

Серия журнала: Механика предельного состояния издается с 2007 г.

Периодичность выхода журнала: 4 раза в год.

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19.

Email: predel21@mail.ru.

WWW: <http://predel.chgpu.edu.ru>.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-36234 от 15.05.2009 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2014

ВОЗДЕЙСТВИЕ МАЛЫХ ВЫТОЧЕК И УТОЛЩЕНИЙ НА РОСТ ТРЕЩИНЫ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЕ, РАСТЯГИВАЕМОЙ ДВУМЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ

Гянджинский государственный университет

Аннотация. Рассматривается тонкая изотропная пластина постоянной толщины всюду, за исключением некоторых областей S_1 и S_2 вблизи конца сквозной прямолинейной трещины с концевыми пластическими зонами на продолжении трещины. Пластина растягивается двумя сосредоточенными силами.

Ключевые слова: тонкая изотропная пластина, прямолинейная трещина, концевые пластические зоны, сосредоточенные силы.

УДК: 539.375

Рассмотрим бесконечную изотропную пластину, изготовленную из упруго-идеально-пластического материала с одной сквозной прямолинейной трещиной длиной 2ℓ . Берега трещин свободны от внешних усилий. Пластина растягивается в направлении оси ординат двумя сосредоточенными силами P (на единицу толщины пластинки), приложенными в точках $z_0 = \pm iH$. Для торможения роста трещины вблизи ее концов технологически создаются локальные изменения в толщине пластины в виде некоторых выточек или, наоборот, наплавления (утолщения) материала.

Материал пластины будем считать удовлетворяющим условию пластичности Треска-Сен-Венана. Таким образом, рассматриваемая упругопластическая пластина имеет постоянную толщину $2h_0$ всюду, за исключением некоторых областей S_1 и S_2 вблизи концов трещины. В областях S_1 и S_2 толщина пластины представляет собой некоторую заданную функцию координат, симметричную относительно оси абсцисс. Функция толщины пластины может быть представлена в виде

$$h(x, y) = h_0 [1 + \varepsilon h_*(x, y)], \quad \varepsilon = \frac{h_2 - h_1}{h_1 + h_2}, \quad (1)$$

где $h_*(x, y)$ – некоторая известная безразмерная непрерывная функция ($-1 \leq h_*(x, y) \leq 1$). При заданном законе изменения толщины значения ε будет постоянным; h_1 и h_2 – соответственно наименьшее и наибольшее значение толщины пластины в области S .

Очевидно, что в процессе нагружения этой пластины у концов трещины и точек приложения сил будут возникать области пластических деформаций.

Рассмотрим задачу о начальном развитии пластических деформаций в конце трещины, пренебрегая при этом влиянием пластических деформаций, которые могут возникнуть возле точек приложения сил (это допустимо при достаточно большом удалении точек приложения сил от концов щели). В соответствии со схемой Леонова – Панасюка – Дагдейла пластическая область будет представлять собой узкий слой на продолжении трещины, толщина которого

равна нулю в рамках применяемой теории малых деформаций. Из опыта хорошо известна общая тенденция к формированию пластических областей на первых стадиях развития в виде узких слоев скольжения, занимающих незначительный объем тела по сравнению с его упругой зоной [1], [3].

Как показывают опыты, пластические зоны будут представлять в таких случаях отрезки длины d . Физически в тонких пластинах она может реализоваться в виде плоскости скольжения, направленной под углом 45° к плоскости пластины.

Ниже рассматривается влияние пластических деформаций на торможение роста трещины нормального разрыва в пластинчатом элементе конструкции с помощью выточек или утолщений. В предположении, что пластинчатый элемент конструкции находится в обобщенном плосконапряженном состоянии и учитывая переменность толщины пластины, в области $S = S_1 + S_2$, могут быть записаны общие уравнения теории обобщенного плоско-напряженного состояния, т. е. имеют место уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Закон Гука имеет такой вид:

$$N_x = \frac{2Eh}{1-v^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad N_y = \frac{2Eh}{1-v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (3)$$

$$N_{xy} = \frac{Eh}{1+v} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Здесь N_x , N_y , N_{xy} – нормальные и сдвигающие усилия, приходящиеся на единицу длины; u , v – перемещения; E – модуль Юнга; v – коэффициент Пуассона материала пластинки и соотношение (1). Требуется найти решение системы уравнений (2), (3) с переменными коэффициентами, удовлетворяющими отсутствию усилий на берегах трещины при наличии пластических зон, размер которых заранее неизвестен.

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = 0 \quad \text{на берегах трещины,} \quad (4)$$

$$\sigma_y = \sigma_s; \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{на пластической линии.}$$

Краевая задача решается на основе метода возмущений. Согласно этому методу можно записать последовательность краевых задач.

Для нулевого приближения получаем следующую краевую задачу:

$$\sigma_y^{(0)} - i\tau_{xy}^{(0)} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad |x| \leq \ell \quad \text{на берегах трещины,} \quad (5)$$

$$\sigma_y^{(0)} = \sigma_s; \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad \ell \leq |x| \leq \ell + d \quad \text{на пластической линии.}$$

Для нулевого приближения на основании соотношений Колосова – Мусхелишвили [2] и граничных условий (5) имеем краевую задачу:

$$\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} + \bar{z}\Phi_0'(z) + \Psi_0(z) = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad |x| \leq \ell,$$

$$\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} + \bar{z}\Phi_0'(z) + \Psi_0(z) = \sigma_s \quad \text{при } y = 0, \quad \ell \leq |x| \leq \ell + d.$$

Решение этой краевой задачи известно [2].

Для первого приближения имеем краевую задачу при следующих граничных условиях:

$$N_y^{(*)} - iN_{xy}^{(*)} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad |x| \leq \ell, \quad (6)$$

$$N_y^{(*)} = -h_*(x, 0) N_s; \quad N_{xy}^{(*)} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad \ell \leq |x| \leq \ell + d.$$

Здесь $N_s = 2h_0\sigma_s$.

Общее решение задачи в первом приближении при наличии объемных сил складывается из общего решения задачи плоской теории упругости при отсутствии объемных сил и частного решения уравнений при наличии объемных сил:

$$X_1 + iY_1 = \frac{\partial h_*}{\partial x} (N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}) + i \frac{\partial h_*}{\partial y} (N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}). \quad (7)$$

Усилия $N_x^{(0)}$, $N_y^{(0)}$, $N_{xy}^{(0)}$ во всех точках пластины можно представить следующими формулами:

$$\begin{aligned} \frac{N_x^{(0)} + N_y^{(0)}}{2h_0} &= 4\text{Re}\Phi_0(z), \quad (8) \\ \frac{N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}}{2h_0} &= \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} + (z - \bar{z})\overline{\Phi_0'(z)}, \\ \Phi_0(z) &= \frac{PH}{\pi(1+\chi)} \frac{1}{z^2 + H^2} - \frac{PH}{2\pi(1+\chi)} \left[\frac{\chi - 1}{z^2 + H^2} + \frac{4H}{(z^2 + H^2)^2} \times \right. \\ &\times \left. \left(H + z \frac{\sqrt{z^2 - b^2}}{\sqrt{H^2 + b^2}} \right) \right] - \frac{\sigma_s}{\pi} \frac{z\sqrt{z^2 + b^2}}{z^2 + H^2} \arccos \frac{\ell}{b} - \frac{\sigma_s}{2\pi i} \ln \frac{\ell\sqrt{b^2 - z^2} - z\sqrt{b^2 - \ell^2}}{\ell\sqrt{b^2 - z^2} + z\sqrt{b^2 - \ell^2}}, \\ &b = \ell + d. \end{aligned}$$

Здесь корень $\sqrt{(\ell + d)^2 - z^2}$ считается положительным на верхнем берегу разреза $(-\ell - d, \ell + d)$ вдоль оси x , а $\ln F = \ln |F| + i \arg F$, причем $-\pi < \arg F < \pi$.

С помощью соотношений (8) после некоторых преобразований и при заданной функции $h(x, y)$ определяем объемные силы в области S_1 и S_2 .

В первом приближении для усилий имеем представления

$$\begin{aligned} \frac{N_x^{(*)} + N_y^{(*)}}{2h_0} &= 4\text{Re} \left[\Phi_1(z) - \frac{1}{2(1+\kappa)} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right], \quad (9) \\ N_x^{(*)} + N_y^{(*)} + 2iN_{xy}^{(*)} &= 2 \left[\bar{z}(\Phi^*)_1(z) + \Psi_1(z) + \frac{1}{2(1+\kappa)} \frac{\partial}{\partial z} (\kappa_0\bar{\Omega} - \bar{Q}_1) \right], \end{aligned}$$

$$\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu),$$

где $N_x^{(*)} = N_{x_0}^{(1)} + N_{x_1}^{(1)}$; $N_y^{(*)} = N_{y_0}^{(1)} + N_{y_1}^{(1)}$; $N_{xy}^{(*)} = N_{xy_0}^{(1)} + N_{xy_1}^{(1)}$.

$N_{x_0}^{(1)}$, $N_{y_0}^{(1)}$, $N_{xy_0}^{(1)}$ – любое частное решение уравнений теории упругости при наличии объемных сил; $N_{x_1}^{(1)}$, $N_{y_1}^{(1)}$, $N_{xy_1}^{(1)}$ – общее решение при отсутствии объемной силы.

В эти соотношения входят две аналитические функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$ и две функции $\Omega(z, \bar{z})$ и $Q(z, \bar{z})$, представляющие собой любые частные решения уравнений

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial \bar{z}} = F; \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = \bar{F}.$$

Затем находятся функции $\Omega(z, \bar{z})$ и $Q(z, \bar{z})$ согласно соотношениям

$$\Omega(z, \bar{z}) = \left(\int \right) z dz \left(\int \right) \bar{z} F(z, \bar{z}) d\bar{z}; \quad Q(z, \bar{z}) = \left(\int \right) z dz \left(\int \right) z \overline{F(z, \bar{z})} dz.$$

Знание функций $\Omega(z, \bar{z})$ и $Q(z, \bar{z})$ позволяет найти компоненты тензора напряжений, а также функцию $f(x)$ на берегах трещины (оси абсцисс), порожденных из-за наличия объемных сил в области S_1 и S_2 .

Общее решение задачи в первом приближении при отсутствии объемных сил представим через комплексные потенциалы $\Phi_1(z, \bar{z})$ и $\Omega_1(z, \bar{z}) = z\Phi_1(z) + \Psi_1(z)$.

Для определения аналитических функций $\Phi_1(z, \bar{z})$ и $\Omega_1(z, \bar{z})$ на основании граничных условий получим следующую граничную задачу:

$$\Phi_1(x) + \overline{\Phi_1(x)} + \Omega_1(x) = f(x) \quad \text{при } y = 0, \quad |x| \leq \ell, \quad (10)$$

$$\Phi_1(x) + \overline{\Phi_1(x)} + \Omega_1(x) = -h_*(x, 0) + f(x) \quad \text{при } y = 0, \quad \ell \leq |x| \leq \ell + d,$$

где $f(x) = f_0(x) + f_1(x)$;

$$f_0(x) = \frac{pH}{\pi(1+\chi)} \left[\frac{1-\chi}{x^2+H^2} - \frac{4H^2}{(x^2+H^2)^2} \right],$$

$$f_1(x) = \frac{1}{1+\chi} \operatorname{Re} \frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{1}{2(1+\kappa)} \left(\kappa \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} \right) \quad \text{при } y = 0.$$

Так как напряжения в упруго-идеальнопластическом теле ограничены, то решение краевой задачи (10) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Теперь заметим, что в силу условий симметрии относительно оси x функция $f(x)$ действительна, поэтому на основании (10) на всей действительной оси будет $\operatorname{Im} \Omega_1(z) = 0$. Следовательно, учитывая еще условия на бесконечности, получаем

$$\Omega_1(z) = 0.$$

Итак, на основании (10) для функции $\Phi_1(z)$ получаем задачу Дирихле:

$$\text{при } y = 0, |x| \leq \ell \quad \operatorname{Re} \Phi_1(z) = \frac{1}{2} f(x), \quad (11)$$

$$\text{при } y = 0, \ell \leq |x| \leq b \quad \operatorname{Re} \Phi_1(z) = \frac{1}{2} (-h_* \sigma_0 + f(x)),$$

$$b = \ell + d$$

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad \Phi_1(z) \rightarrow 0.$$

Искомое решение задачи (11) запишется так [2]:

$$\Phi_1(z) = \frac{\sqrt{z^2 - b^2}}{2\pi i} \int_{-b}^b \frac{F_*(x) dx}{x - z}. \quad (12)$$

Здесь $F_*(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - b^2}}$ при $|x| < \ell$

$$F_*(x) = \frac{f(x) - h_*(x, 0) \sigma_s}{\sqrt{x^2 - b^2}} \quad \text{при } \ell \leq |x| \leq b.$$

Интеграл в (12) представим в виде

$$\Phi_1(z) = \frac{\sqrt{z^2 - b^2}}{2\pi i} \left\{ \int_{-b}^b \frac{f(x) dx}{\sqrt{x^2 - b^2} (x - z)} - \sigma_s \int_{-b}^{-\ell} \frac{h_*(x, 0) dx}{\sqrt{x^2 - b^2} (x - z)} + \right. \quad (13)$$

$$\left. + \sigma_s \int_{\ell}^b \frac{h_*(x, 0) dx}{\sqrt{x^2 - b^2} (x - z)} \right\}.$$

Размер пластической зоны можно определить из условия разрешимости задачи в каждом приближении, т. е. считая, что

$$b = b_0 + \varepsilon b_1; \quad b_0 = \ell + d_0; \quad b_1 = \ell + d_1$$

Условие разрешимости краевой задачи в нулевом приближении дает соотношение для определения величины d_0 , соответственно условие разрешимости краевой задачи в первом приближении позволяет получить уравнение для нахождения величины d_1 . Однако, если исходить из физического условия ограниченности напряжений в кончиках трещины, мы получим уравнение для определения неизвестного размера пластической зоны d . Для этого надо потребовать, чтобы коэффициент интенсивности напряжений в рассматриваемой задаче был бы равен нулю, т. е. $K_I = 0$.

Так как

$$K_I = [1 + h_*(\ell, 0)] K_I^{(0)} + \varepsilon K_I^{(2)}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} K_I^{(0)} &= \frac{1}{\sqrt{\pi b}} \int_{\ell}^b f_0(x) \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} dx - \frac{\sigma_s}{\sqrt{\pi b}} \int_{-b}^{-\ell} \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} dx - \\ &\quad - \frac{\sigma_s}{\sqrt{\pi b}} \int_{\ell}^b \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} dx, \\ K_I^{(2)} &= -\frac{1}{\sqrt{\pi b}} \int_{\ell}^b f(x) \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} dx - \frac{\sigma_s}{\sqrt{\pi b}} \int_{-b}^{-\ell} \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} dx + \\ &\quad + \frac{\sigma_s}{\sqrt{\pi b}} \int_{\ell}^b h_*(x, 0) \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} dx. \end{aligned}$$

Требуя, чтобы коэффициент интенсивности напряжений был бы равен нулю, получаем следующее уравнение для определения размера пластической зоны:

$$\begin{aligned} [1 + \varepsilon h_*(\ell, 0)] \left\{ P\sqrt{b} \left[1 + \chi + \frac{2H^2}{(H^2 + b^2)} \right] / \left[(1 + \chi) \sqrt{\pi(H^2 + b^2)} \right] - \right. \\ \left. - 2\sigma_s \sqrt{\frac{b}{\pi}} \arccos \left(1 - \frac{d}{b} \right) \right\} + \varepsilon K_I^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Из полученного соотношения видно, что для разрешимости краевой задачи в нулевом приближении необходимо равенство нулю выражения, находящегося в фигурных скобках. Если это выполняется, то из (15) следует, что $K_I^{(2)} = 0$.

Последнее равенство представляет собой условие разрешимости краевой задачи (11).

Уравнение (15) позволяет численно определить длину пластической зоны. При известном законе локального изменения толщины в кончике трещины уравнение решается численно методом итерации. При этом функцию $K_I^{(2)}$ с помощью квадратурной формулы Гаусса заменяли

$$K_I^{(2)} = -\frac{P\sqrt{\pi b}}{M} \sum_{m=1}^M f_*(bt_m) + 2\sigma_s \sqrt{\pi b} \frac{(b-\ell)}{2M} \sum_{m=1}^M \sin \theta_m \frac{h_*(x_m, 0)}{\sqrt{b^2 - x^2}},$$

$$\eta_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi, \quad t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi \quad (m = 1, 2, \dots, M),$$

$$x_m = \frac{b+\ell}{2} + \frac{b-\ell}{2} \eta_m; \quad \theta_m = \frac{2m-1}{2M} \pi.$$

Предельное состояние пластины

Для определения предельного состояния пластины используем в качестве критерия хрупкого разрушения критерий критического раскрытия трещины (КРТ). Согласно этому критерию трещина начнет распространяться, как только ее раскрытие в вершине достигнет предельного (для данного материала при заданных условиях) значения δ_c .

$$2v_* = \delta_c. \quad (16)$$

Здесь $2v_*$ – расстояние между противоположными берегами трещины в ее конце (у основания пластической зоны) при $x = \ell$.

Используя решения упругопластической задачи, вычислим смещение v на пластической линии скольжения (при $y=0$, $\ell < |x| < \ell + d$):

$$v = v_0 + \varepsilon v_1,$$

$$v_0 = -\frac{1}{\pi E} \int_{-b}^b f_0(t) \Gamma(b, x, t) dt + \frac{\sigma_s}{\pi E} \left\{ (x-\ell) \Gamma(b, x, \ell)^- \right. \\ \left. - (x+\ell) \Gamma(b, x, -\ell) - 4\sqrt{b^2 - x^2} \arccos \frac{1}{b} \right\},$$

$$v_1 = -\frac{1}{\pi E} \int_{-b}^b f(t) \Gamma(b, x, t) dt + \frac{2\sigma_s}{\pi E} \int_{\ell}^b h_*(t, 0) \Gamma(b, x, t) dt.$$

$$\text{Здесь } \Gamma(b, x, t) = \ln \frac{b^2 - xt - \sqrt{(b^2 - x^2)(b^2 - t^2)}}{b^2 - xt + \sqrt{(b^2 - x^2)(b^2 - t^2)}}.$$

Раскрытие трещины в ее конце при $x = \ell$ будет равно:

$$2v_* = 2v_0(\ell, \ell, \beta) + 2\varepsilon v_1(\ell, \ell, \beta), \quad (17)$$

$$2v_* = -\frac{1}{\pi E} \int_{-b}^b f_0(t) \Gamma(b, \ell, t) dt + \frac{2\sigma_s}{\pi E} \left[\ell \Gamma(b, \ell, -\ell) - 2\sqrt{b^2 - \ell^2} \arccos \frac{1}{b} \right] - \\ - \frac{\varepsilon}{\pi E} \int_{-b}^b f(t) \Gamma(b, \ell, t) dt + \frac{2\sigma_s \varepsilon}{\pi E} \int_{\ell}^b h_*(t, 0) \Gamma(b, \ell, t) dt.$$

Для определения критических значений внешней нагрузки P^* при заданной длине ℓ начальной трещины на основании соотношения (17) и условия (16) получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi E} \int_{-b}^b f_0(t) \Gamma(b, \ell, t) dt + \frac{2\sigma_s}{\pi E} \left[\ell \Gamma(b, \ell, -\ell) - 2\sqrt{b^2 - \ell^2} \arccos \frac{1}{b} \right] - \\
& -\frac{\varepsilon}{\pi E} \int_{-b}^b f(t) \Gamma(b, \ell, t) dt + \frac{2\sigma_s \varepsilon}{\pi E} \int_{\ell}^b h_*(t, 0) \Gamma(b, \ell, t) dt = \delta_c.
\end{aligned} \tag{18}$$

Преобразуем уравнение (18) к виду, удобному для численного решения.

Заменяя интегралы квадратурными формулами и переходя к безразмерным переменным в интегралах, уравнение (18) приведем к виду

$$\begin{aligned}
& -\frac{b}{\pi E} \sum_{m=1}^M f_0(b\tau_m) \Gamma(b, \ell, b\tau_m) \Delta\tau + \frac{2\sigma_s}{\pi E} \left[\ell \Gamma(b, \ell) - 2\sqrt{b^2 - \ell^2} \arccos \frac{1}{b} \right] - \\
& -\frac{\varepsilon b}{\pi E} \sum_{m=1}^M f(b\tau_m) \Gamma(b, \ell, b\tau_m) \Delta\tau + \frac{2\sigma_s \varepsilon (b - \ell)}{\pi E} \sum_{m=1}^M h_*(t_m) \Gamma(b, \ell, t_m) \Delta\eta = \delta_c.
\end{aligned} \tag{19}$$

Отрезок интегрирования $[-1, 1]$ разбивался на M равных ячеек. В качестве узлов выбирались центры ячеек, имеющие координаты $\tau_m = (M + 0,5 - m)/M$:

$$t_m = \frac{b + \ell}{2} + \frac{b - \ell}{2} \tau_m \quad ; \quad \Delta\tau = \frac{2}{M}, \quad \Delta\eta = \frac{2}{M}.$$

Система двух уравнений (15) и (17) при известном законе изменения толщины пластины в области S решается численно методом итераций. При этом предварительно интеграл для функции $K_I^{(2)}$ заменялся квадратурной формулой Гаусса по чебышевским узлам и осуществлялся переход к безразмерным переменным.

Конкретные задачи

Рассмотрим некоторые конкретные типы выточек и утолщений.

Конусовидная выточка

Пусть выточка имеет форму усеченного кругового конуса с осью, проходящей через конец сквозной трещины перпендикулярно плоскости Оху. При этом нижнее основание конуса – круговое с радиусом R_1 , а верхнее основание – круговое с радиусом R_0 . Толщина пластинки в основании выточки равна $2h_1$. Уравнение верхней поверхности правой половины элемента конструкции (пластинки) имеет следующий вид:

$$h = \begin{cases} h_1 & \text{при } (x - \ell)^2 + y^2 \leq R_1^2 \quad \text{область } S_1 \\ h_0 + \varepsilon \left(\sqrt{(x - \ell)^2 + y^2} - R_0 \right) & \text{при } R_1^2 \leq (x - \ell)^2 + y^2 \leq R_0^2 \\ h_0 & \text{при } (x - \ell)^2 + y^2 \geq R_0^2 \end{cases}.$$

Для левой половины уравнение верхней поверхности пластинки имеет вид:

$$h = \begin{cases} h_1 & \text{при } (x + \ell)^2 + y^2 \leq R_1^2 \quad \text{область } S_2 \\ h_0 + \varepsilon \left(\sqrt{(x + \ell)^2 + y^2} - R_0 \right) & \text{при } R_1^2 \leq (x + \ell)^2 + y^2 \leq R_0^2 \\ h_0 & \text{при } (x + \ell)^2 + y^2 \geq R_0^2 \end{cases}.$$

Здесь малый параметр определяется по формуле

$$\varepsilon = (h_0 - h_1)/(R_0 - R_1).$$

Для конусовидной выточки находим:

а) для правой половины пластинки:

$$h_* = \begin{cases} -\frac{R_0 - h_1}{h_0} & \text{при } (x - \ell)^2 + y^2 \leq R_1^2 \\ \frac{1}{h_0} \left(\sqrt{(x - \ell)^2 + y^2} - R_0 \right) & \text{при } R_1^2 \leq (x - \ell)^2 + y^2 \leq R_0^2, \\ 0 & \text{при } (x - \ell)^2 + y^2 \geq R_0^2. \end{cases}$$

$$\frac{\partial h_*}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial h_*}{\partial y} = 0 \quad \text{при } (x - \ell)^2 + y^2 \leq R_1^2; \quad (x - \ell)^2 + y^2 > R_0^2.$$

В области S_1 при $R_1^2 \leq (x - \ell)^2 + y^2 \leq R_0^2$

$$\frac{\partial h_*}{\partial x} = \frac{(x - \ell)}{h_0 \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial h_*}{\partial y} = \frac{y}{h_0 \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2}},$$

$$X_1 + iY_1 = 0 \quad \text{при } (x - \ell)^2 + y^2 \leq R_1^2; \quad (x - \ell)^2 + y^2 \geq R_0^2,$$

$$X_1 + iY_1 = \frac{(x - \ell)}{h_0 \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2}} \left(N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)} \right) + \frac{iy}{h_0 \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2}} \left(N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)} \right)$$

при $R_1^2 \leq (x - \ell)^2 + y^2 \leq R_0^2$;

б) для левой половины пластинки:

$$h_* = \begin{cases} -\frac{R_0 - h_1}{h_0} & \text{при } (x + \ell)^2 + y^2 \leq R_1^2 \\ \frac{1}{h_0} \left(\sqrt{(x + \ell)^2 + y^2} - R_0 \right) & \text{при } R_1^2 \leq (x + \ell)^2 + y^2 \leq R_0^2, \\ 0 & \text{при } (x + \ell)^2 + y^2 > R_0^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial h_*}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial h_*}{\partial y} = 0 \quad \text{при } (x + \ell)^2 + y^2 \leq R_1^2; \quad (x + \ell)^2 + y^2 > R_0^2.$$

В области S_2 при $R_1^2 \leq (x + \ell)^2 + y^2 \leq R_0^2$

$$\frac{\partial h_*}{\partial x} = \frac{(x + \ell)}{h_0 \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial h_*}{\partial y} = \frac{y}{h_0 \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2}},$$

$$X_1 + iY_1 = 0 \quad \text{при } (x + \ell)^2 + y^2 \leq R_1^2; \quad (x + \ell)^2 + y^2 > R_0^2,$$

$$X_1 + iY_1 = \frac{(x + \ell)}{h_0 \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2}} \left(N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)} \right) + \frac{iy}{h_0 \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2}} \left(N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)} \right)$$

при $R_1^2 \leq (x + \ell)^2 + y^2 \leq R_0^2$.

Подставляя объемные силы $F_1 = X_1 + iY_1$ в области S_1 и $F_2 = X_2 + iY_2$ в области S_2 через переменные z и \bar{z} , с помощью интегрирования находим функции $\Omega(z, \bar{z})$ и $Q(z, \bar{z})$. По этим функциям находим функцию $f(x)$, которую удобно представить в виде $f(x) = Pf_*(x)$.

Подставляя функции $f(x)$ и $h_*(x, 0)$ в (15), (17), в результате вычислений находим длину пластической зоны и смещения берегов пластической области через геометрические параметры выточки или утолщения.

На рис. 1 представлен график зависимости безразмерной длины полос пластичности d/ℓ от безразмерной относительной толщины h_1/h_2 свободных параметров.

На рис. 2 приводится зависимость безразмерной предельной нагрузки $\sigma_* = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi \ell}}{\sqrt{E \sigma_s \delta_c}}$ от относительной толщины на дне выточки, полученная в результате совместного численного решения методом итерации уравнений (15) и (17) при тех же значениях свободных параметров.

В случае упругопластического материала смещения берегов пластической зоны и размер зоны пластических деформаций на дне конусовидной выточки в кончике трещины существенно зависят от отношения глубины выточки к толщине пластины. Угол конуса и радиусы верхнего и нижнего оснований не оказывают влияние на развитие пластических деформаций.

Численный анализ зависимости критической нагрузки позволяет изучить влияние геометрических параметров конусовидной выточки или утолщения на характер развития трещины:

$$yh_1/h_0y = \frac{P\sqrt{\pi\ell}}{h_0\sqrt{E\sigma_s\delta_c}}.$$

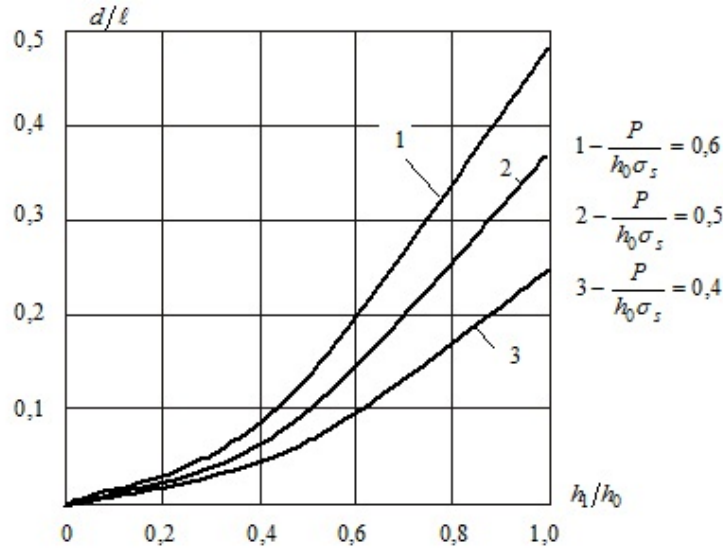


Рис. 1

На основе полученных численных результатов можно сделать следующие выводы:

– конусовидная выточка в конце трещины по толщине способствует увеличению предельной величины внешней нагрузки;

– конусовидное утолщение по толщине в конце трещины препятствует развитию пластических деформаций вдоль фронта трещины. Утолщение способствует возникновению объемного напряженного состояния, при котором затрудняется проявление материалом пластины пластических свойств. Возможна вероятность разрушения в хрупком состоянии.

В случае развитых трещин, т. е. когда длина трещины гораздо больше характерного размера области S_2 (выточки), соотношения (15) и (18) значительно упрощаются и принимают в случае конусовидной выточки следующий вид:

$$d = \frac{\pi K_I^{(0)}}{8\sigma_s^2} \left[\frac{h_1}{h_0} - \frac{(h_0 - h_1)(3 + \kappa)}{4h_0(1 + \kappa)} \right]^2,$$

$$\frac{8\sigma_s d}{\pi E} + \frac{8\varepsilon\sqrt{d}K_I^{(0)}}{\pi E} \left[\frac{h_1}{h_0} - \frac{(h_0 - h_1)(3 + \kappa)}{4h_0(1 + \kappa)} \right]^2 = \delta_c,$$

$$K_I^{(0)} = P\sqrt{\ell} \left[1 + \kappa + \frac{2H^2}{(H^2 + \ell^2)} \right] / \left[(1 + \kappa) \sqrt{\pi(H^2 + \ell^2)} \right].$$

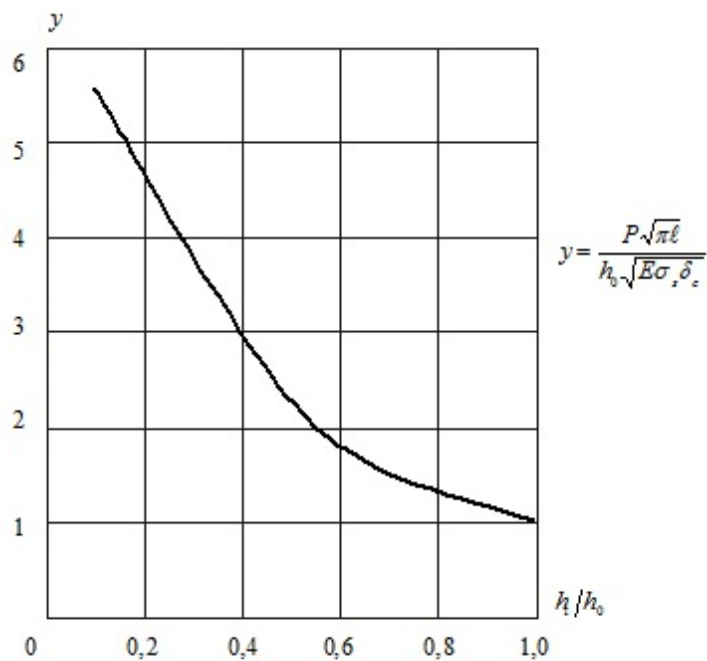


Рис. 2

Заключение. Численный анализ решения для всех рассмотренных примеров показывает, что малые конусовидные выточки в конце трещины эффективно можно применять для торможения сквозных эксплуатационных трещин в пластинчатых элементах конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Витвицкий, П. М.* Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения (обзор) / П. М. Витвицкий, В. В. Панасюк, С. Я. Ярема // Проблемы прочности. – 1973. – № 2. – С. 3–19.
- [2] *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
- [3] *Панасюк, В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев: Наукова думка, 1998. – 416 с.

Искендерова Саяра Паша гызы,

кандидат физико-математических наук, доцент, Гянджинский государственный университет, г. Гянджа

e-mail: irakon63@hotmail.com

S. P. Iskenderova

INFLUENCE OF SMALL BORES AND THICKENINGS ON GROWTH
OF THE CRACK IN ELASTOPLASTIC PLATE STRETCHED
BY TWO CONCENTRATED FORCES

Gandzha State University

Abstract. The plate of constant thickness is considered thin isotropic everywhere except for some areas S_1 and S_2 near to the end of a through rectilinear crack with end plastic zones on continuation of a crack. The plate is stretched{dragged out} by two concentrated forces.

Keywords: thin isotropic plate, a rectilinear crack, the end plastic zones, the concentrated forces.

REFERENCES

- [1] *Vitvitsky, P. M.* Plastic of deformation in a vicinity of cracks and criterion fracture (review) / P. M. Vitvitsky, V. V. Panasyuk, S. Y. Yarema // Problems of strength. – 1973. – No 2. – P. 3–19.
- [2] *Mushelishvili, N. I.* Some basic problem in the mathematical theory of elasticity / N. I. Mushelishvili. – M. : Nauka, 1966. – 707 p.
- [3] *Panasyuk, V. V.* The mechanics of the quasi brittle fracture of materials / V. V. Panasyuk. – Kiev : Naukova Dumka, 1991. – 416 p.

Iskenderova, Sayra Pasha gizi

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Gandzha State University, Gandzha

Н. М. Калантарлы

ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЕ В КРУГОВОМ ДИСКЕ, ЗАГРУЖЕННОМ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ САМОУРАВНОВЕШЕННЫМИ МОМЕНТАМИ

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Аннотация. Рассматривается изотропный упругий круговой диск, нагруженный на контуре двумя сосредоточенными моментами M . Используется модель зоны предразрушения со связями между берегами. Получены соотношения для определения критического значения внешней нагрузки, при которой происходит появление трещины.

Ключевые слова: изотропный круговой диск, зона предразрушения, зарождение трещины, силы сцепления.

УДК: 539.375

Рассмотрим изотропный круговой диск радиуса R , нагруженный на контуре двумя сосредоточенными моментами M , приложенными в точках $z_1 = R$, $z_2 = -R$ (рис. 1). Задачу рассматриваем как квазистатическую в постановке плоско-напряженного состояния. По мере нагружения кругового диска в процессе эксплуатации силовой нагрузкой в ней будут возникать зоны предразрушения, которые моделируем [1] как области ослабленных межчастичных связей материала. Зона предразрушения ориентирована в направлении максимальных растягивающих напряжений в диске.

В центре зоны предразрушения разместим начало локальной системы координат $x_1 O_1 y_1$, ось x_1 которой совпадает с зоной ослабленных межчастичных связей материала и образует угол α_1 с осью x (рис. 1). Взаимодействие берегов зоны ослабленных межчастичных связей материала моделируется путем введения между берегами связей (сил сцепления), имеющих заданную диаграмму деформирования.

При действии внешних нагрузок на диск в связях, соединяющие берега зоны предразрушения, будут возникать нормальные $q_{y_1}(x_1)$ и касательные $q_{x_1 y_1}(x_1)$ усилия. Величины этих напряжений заранее неизвестны и подлежат определению.

Так как указанная зона (прослойка перенапряженного материала) мала по сравнению с остальной упругой зоной диска, то согласно модели [1] их можно мысленно заменить разрезом, поверхности которой действуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. При этом размер зоны предразрушения заранее неизвестен и подлежит определению.

Граничные условия на берегах зоны предразрушения будут иметь вид

$$\sigma_{y_1} = q_{y_1}(x_1); \quad \tau_{x_1 y_1} = q_{x_1 y_1}(x_1) \quad \text{при} \quad |x_1| \leq \ell_1. \quad (1)$$

Основные соотношения рассматриваемой задачи должны быть дополнены следующим уравнением:

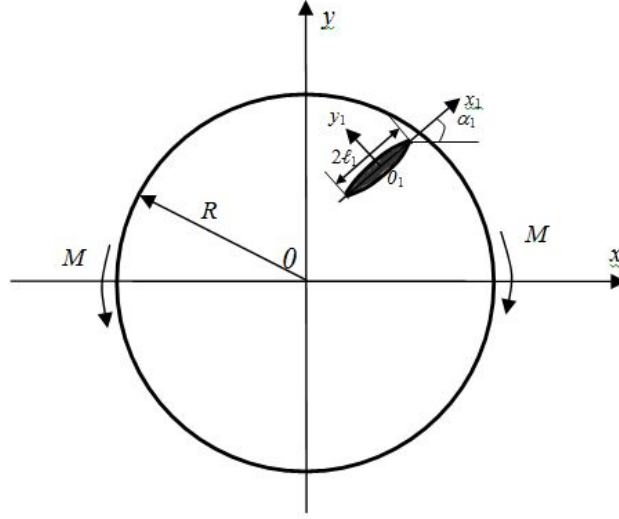


Рис. 1. Расчетная схема задачи

$$v^+(x_1, 0) - v^-(x_1, 0) - i(u^+(x_1, 0) - u^-(x_1, 0)) = C(x_1, \sigma_1) (q_{y_1}^- i q_{x_1 y_1}), \quad (2)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{q_{y_1}^2 + q_{x_1 y_1}^2}.$$

Здесь функция $C(x_1, \sigma_1)$ представляет собой эффективную податливость связей, зависящую от натяжения связей; σ_1 – модуль вектора усилий в связях; $(u^+ - u^-)$ – касательная, $(v^+ - v^-)$ – нормальная составляющая раскрытия берегов зоны предразрушения.

Для нахождения значения внешней нагрузки, при котором происходит зарождение трещины, нужно постановку задачи дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимаем критерий критического раскрытия берегов зоны ослабленных межчастичных связей материала

$$|(v^+ - v^-) - i(u^+ - u^-)| = \delta_{cr}, \quad (3)$$

где δ_{cr} – характеристика сопротивления материала диска трещинообразованию.

Напряженное состояние в круговом диске ищем в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1. \quad (4)$$

Здесь первые слагаемые $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ – напряжения, возникающие в круговом изотропном диске при отсутствии зоны предразрушения.

Для определения введенных компонент напряжений $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$, удовлетворяющих уравнениям плоской задачи теории упругости, приходим к следующей краевой задаче:

$$\sigma_y^1 + i\tau_{xy}^1 = q_{y_1}^+ i q_{x_1 y_1}^+ f(x) \quad \text{при} \quad y_1 = 0, \quad |x_1| \leq l_1, \quad (5)$$

$$\sigma_r^1 + i\tau_{r\theta}^1 = F(\tau) \quad \text{на контуре} \quad \tau = R \exp(i\theta).$$

Перейдем в начале к определению напряжений $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$. Как известно [2], компоненты тензора напряжений $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ в произвольной точке упругого диска, определяются формулами:

$$\sigma_x^0 + \sigma_y^0 = \sigma_r^0 + \sigma_\theta^0 = 4\text{Re}\Phi_0(z) \quad (i = \sqrt{-1}), \quad (6)$$

$$(\sigma_y^0 - \sigma_x^0 + 2i\tau_{xy}^0) = (\sigma_\theta^0 - \sigma_r^0 - 2i\tau_{r\theta}^0) e^{-2i\theta} = 2[\bar{z}\Phi_0'(z) + \Psi_0(z)].$$

Комплексные потенциалы в рассматриваемой задаче для сплошного упругого диска имеют вид:

$$\Phi_0(z) = \frac{Mi}{2\pi} \left[\frac{1}{(R+z)^2} - \frac{1}{(R-z)^2} \right], \quad (7)$$

$$\Psi_0(z) = \frac{Mi}{2\pi} \left[\frac{1}{(R-z)^2} - \frac{1}{(R+z)^2} + \frac{3R^2 - 4Rz + z^2}{(R-z)^4} - \frac{3R^2 + 4Rz + z^2}{(R+z)^4} \right].$$

С помощью формул (6), (7) после некоторых выкладок найдем

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 = \frac{M}{2\pi} \left\{ \left[24R^2(R+x)^3y - 24R^2(R+x)y^3 + 48Rx(R+x)^3y - 48Rx(R+x)y^3 - \right. \right. \\ \left. - 8R(R+x)^4y + 48R(R+x)^2y^3 - 8Ry^5 + 24(R+x)^3x^2y - 24(R+x)x^2y^3 - \right. \\ \left. - 8(R+x)^3y^3 + 8(R+x)y^5 - 8(R+x)^4xy + 48(R+x)^2xy^3 - 8xy^5 \right] / \left((R+x)^2 + y^2 \right)^4 + \\ \left. + \left[24R^2(R-x)^3y - 24R^2(R-x)y^3 - 48Rx(R-x)^3y + 48Rx(R-x)y^3 - \right. \right. \\ \left. - 8R(R-x)^4y + 48R(R-x)^2y^3 - 8Ry^5 + 24(R-x)^3x^2y - 24(R-x)x^2y^3 - \right. \\ \left. - 8(R-x)^3y^3 + 8(R-x)y^5 + 8(R-x)^4xy - 48(R-x)^2xy^3 + 8xy^5 \right] / \left((R-x)^2 + y^2 \right)^4 \right\}; \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^0 = \frac{M}{2\pi} \left\{ \left[-8R^2(R-x)^3y + 8R^2(R-x)y^3 + 16Rx(R-x)^3y - 16Rx(R-x)y^3 - \right. \right. \\ \left. - 8(x^2 + y^2)(R-x)^3y + 8(x^2 + y^2)(R-x)y^2 \right] / \left((R-x)^2 + y^2 \right)^4 - \\ \left. - 8R^2(R-x)y^3 + 16Rx(R+x)^3y - 16Rx(R+x)y^3 + 8(x^2 + y^2)(R+x)^3y - \right. \\ \left. - 8(x^2 + y^2)(R+x)y^3 \right] / \left((R+x)^2 + y^2 \right)^4 \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^0 = \frac{M}{2\pi} \left\{ \left[4(R^2 + x^2)(R-x)^4 - 24(R^2 + x^2)(R-x)^2y^2 + 4(R^2 + x^2)y^4 - 8Rx(R-x)^4 + \right. \right. \\ \left. + 48Rx(R-x)^2y^2 - 8Rxy^4 + 16R(R-x)^3y^2 - 16R(R-x)y^4 - 16(R-x)^3y^2 - 16x(R-x)y^4 \right] \\ \left. \frac{1}{\left((R-x)^2 + y^2 \right)^4} - \right. \\ \left. - \left[4(R^2 + x^2)(R+x)^4 - 24(R^2 + x^2)(R+x)^2y^2 + 4(R^2 + x^2)y^4 + 8Rx(R+x)^4 - 48Rx(R+x)^2y^2 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+8Rxy^4 + 16R(R+x)^3 y^2 - 16R(R+x)y^4 + 16(R+x)^3 y^2 - 16x(R+x)y^4 \Big/ \left((R+x)^2 + y^2 \right)^4 \Big\}$$

С помощью приведенных формул находятся функции $f(x_1)$ и $F(\tau)$:

$$f(x_1) = -(\sigma_{y_1}^0 + i\tau_{x_1 y_1}^0) \quad \text{при } y_1 = 0, \quad |x_1| \leq \ell_1, \quad (9)$$

$$F(\tau) = -(\sigma_r^0 + i\tau_{r\theta}^0) \quad \text{при } |z| = R.$$

Используя формулы Колосова – Мухелишвили [2], граничные условия (5) запишем в виде:

$$\Phi_1(x_1) + \overline{\Phi_1(x_1)} + x_1 \Phi_1(x_1) + \Psi_1(x_1) = q_{y_1}^+ i q_{x_1 y_1}^+ f(x_1) \quad \text{при } |x_1| \leq \ell_1, \quad (10)$$

$$\Phi_1(\tau) + \overline{\Phi_1(\tau)} - e^{2i\theta} [\tau \Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] = \overline{F(\tau)}. \quad (11)$$

Здесь x_1 – аффикс точек берегов зоны предразрушения.

Комплексные потенциалы $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$, дающие решение краевой задачи, (10)–(11) ищем в виде

$$\Phi_1(z) = \Phi_{01}(z) + \Phi_{11}(z); \quad \Psi_1(z) = \Psi_{01}(z) + \Psi_{11}(z). \quad (12)$$

Здесь комплексные потенциалы $\Phi_{11}(z)$ и $\Psi_{11}(z)$ ищем в виде:

$$\Phi_{11}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{g_1(t) dt}{t - z_1}, \quad (13)$$

$$\Psi_{11}(z) = \frac{e^{-2i\alpha_1}}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[\frac{g_1(t)}{t - z_1} - \frac{T_1 e^{i\alpha_1}}{(t - z_1)^2} g_1(t) \right] dt,$$

где $T_1 = te^{i\alpha_1} + z_1^0$; $z_1 = e^{-i\alpha_1}(z - z_1^0)$; $g_1(t)$ – искомая функция, характеризующая раскрытие берегов зоны предразрушения.

Неизвестная функция $g_1(t)$ и комплексные потенциалы $\Phi_{01}(z)$ и $\Psi_{01}(z)$ должны быть определены из краевых условий на контуре $L(r = R)$ и берегах зоны предразрушения. Используя соотношения (12)–(13), для нахождения комплексных потенциалов $\Phi_{01}(z)$ и $\Psi_{01}(z)$ краевые условия (9) представим в виде

$$\Phi_{01}(\tau) + \overline{\Phi_{01}(\tau)} - e^{-2i\theta} [\tau \Phi_{01}'(\tau) + \overline{\Psi_{01}(\tau)}] = F(\tau) - f_1(\theta), \quad (14)$$

где $f_1(\theta) = \Phi_{11}(\tau) + \overline{\Phi_{11}(\tau)} - e^{-2i\theta} [\tau \Phi_{11}'(\tau) + \overline{\Psi_{11}(\tau)}]$.

Для решения граничной задачи (14) относительно комплексных потенциалов $\Phi_{01}(z)$ и $\Psi_{01}(z)$ используем метод Н. И. Мухелишвили [2]. Для комплексных потенциалов $\Phi_{01}(z)$ и $\Psi_{01}(z)$ имеем:

$$\Phi_{01}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L N_*(\tau) \left(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{2\tau} \right) d\tau,$$

$$\Psi_{01}(z) = \frac{1}{z^2} \Phi_{01}(z) + \frac{1}{z^2} \overline{\Phi_{01}} \left(\frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z} \Phi_{01}'(z),$$

$$N_*(\tau) = F(\tau) - f_1(\theta).$$

После интегрирования и некоторых преобразований получаем:

$$\Phi_{01}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left\{ \left(\frac{1}{z\bar{T}_1 - 1} + \frac{1}{2} \right) \bar{T}_1 e^{i\alpha_1} g_1(t) + \left[\frac{T_1}{2} - \frac{z^2 \bar{T}_1 - 2z + T_1}{(z\bar{T}_1 - 1)^2} \right] e^{-i\alpha_1} \overline{g_1(t)} \right\} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_L F(\tau) \left(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{2\tau} \right) d\tau, \quad (15)$$

$$\Psi_{01}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[\frac{e^{i\alpha_1} \bar{T}_1^3}{(z\bar{T}_1 - 1)^2} g_1(t) + \left(z^2 \bar{T}_1^2 + 4 - 3z\bar{T}_1 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + zT_1 \bar{T}_1^2 - 3T_1 \bar{T}_1 \right) \frac{\bar{T}_1 e^{-i\alpha_1}}{(z\bar{T}_1 - 1)^3} \overline{g_1(t)} \right] dt + \frac{1}{z^2} \Phi_{00}(z) + \frac{1}{z^2} \bar{\Phi}_{00} \left(\frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z} \Phi'_{00}(z),$$

$$\Phi_{00}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L F(\tau) \left(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{2\tau} \right) d\tau.$$

Удовлетворяя функциями (12)–(13) граничным условиям (10) на берегах зоны предразрушения, после некоторых преобразований получим комплексное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $g_1(x_1)$:

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[R(t, x_1) g_1(t) + S(t, x_1) \overline{g_1(t)} \right] dt = \pi [q_{y_1}(x_1) + iq_{x_1 y_1}(x_1) + f(x_1) + f_0(x_1)], \quad (16)$$

$$|x_1| \leq \ell_1.$$

$$\text{Здесь } f_0(x_1) = - \left[\Phi_{00}(x_1) + \overline{\Phi_{00}(x_1)} + x_1 \overline{\Phi'_{00}(x_1)} + \overline{\Psi_{00}(x_1)} \right],$$

$$\Psi_{00}(z) = \frac{1}{z^2} \Phi_{00}(z) + \frac{1}{z^2} \bar{\Phi}_{00} \left(\frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z} \Phi'_{00}(z),$$

$$R(t, x_1) = \frac{e^{i\alpha_1}}{2} \left(\frac{1}{T_1 - X_1} + \frac{e^{-2i\alpha_1}}{T_1 - \bar{X}_1} \right) - \frac{e^{i\alpha_1}}{2} \left[\frac{X_1 \bar{T}_1^2}{1 - X_1 \bar{T}_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{X}_1^2 T_1 - 2\bar{X}_1^+ \bar{T}_1}{(1 - T_1 \bar{X}_1)^2} + e^{-2i\alpha_1} \frac{2X_1 (T_1 \bar{T}_1 - 1) + \bar{T}_1^2 (\bar{X}_1 + \bar{T}_1) (\bar{X}_1 T_1 - 3) + 4T_1}{(1 - T_1 \bar{X}_1)^3} \right],$$

$$S(t, x_1) = \frac{e^{-i\alpha_1}}{2} \left[\frac{1}{\bar{T}_1 - \bar{X}_1} - \frac{T_1 - X_1}{(\bar{T}_1 - \bar{X}_1)^2} e^{-2i\alpha_1} \right] -$$

$$- \frac{e^{-i\alpha_1}}{2} \left[\frac{T_1^2 X_1}{1 - T_1 \bar{X}_1} + \frac{X_1^2 \bar{T}_1 - 2X_1 + T_1}{(1 - X_1 \bar{T}_1)^2} + \frac{T_1^2 (X_1 - T_1) e^{-2i\alpha_1}}{(1 - T_1 \bar{X}_1)^2} \right],$$

$$X_1 = x_1 e^{i\alpha_1} + z_1^0.$$

Для внутренней зоны предразрушения к сингулярному интегральному уравнению необходимо добавить дополнительное равенство

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} g_1(t) dt = 0, \quad (17)$$

обеспечивающее однозначность смещений при обходе контура зоны предразрушения.

Так как напряжения в диске всюду ограничены, то решение сингулярного интегрального уравнения ищется в классе всюду ограниченных функций. Используя замену переменных, отделяя действительную и мнимую части и процедуру алгебраизации [3], [4], вместо каждого действительного сингулярного интегрального уравнения при дополнительных условиях (17) получаем конечную алгебраическую систему, состоящую из M уравнений, относительно приближенных значений искомых функций $v_1(t_m)$ и $u_1(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) в узловых точках соответственно:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\ell_1 R(\ell_1 t_m, \ell_1 x_r) g_1^0(t_m) + \overline{g_1^0(t_m)} S(\ell_1 t_m, \ell_1 x_r) \right] = \\ & = q_{y_1}(x_r) + i q_{x_1 y_1}(x_r) + f(x_r) + f_0(x_r) \quad (r = 1, 2, \dots, M - 1), \\ & \sum_{m=1}^M g_1^0(t_m) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь значения t_m и x_r определяются формулами:

$$\begin{aligned} t_m &= \cos \frac{2m-1}{2M} \pi \quad (m = 1, 2, \dots, M), \\ x_r &= \cos \frac{\pi r}{M} \quad (r = 1, 2, \dots, M - 1). \end{aligned}$$

Если перейти в (18) к сопряженным значениям, получаем еще M алгебраических уравнений.

Для замкнутости полученных алгебраических уравнений не хватает двух уравнений, выражающих условия разрешимости интегрального уравнения. Записывая эти условия, получим две замкнутые конечные алгебраические системы:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^0(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \\ & \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^0(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

В правые части системы (18) входят неизвестные значения нормальных $q_{y_1}(x_1)$ и касательных $q_{x_1 y_1}(x_1)$ напряжений в узловых точках зоны предразрушения. Условиями, определяющими неизвестные напряжения в связях между берегами зоны предразрушения, является дополнительное уравнение (2).

В рассматриваемой задаче это дополнительное условие удобнее представить для производной раскрытия берегов зоны предразрушения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} [v_1^+(x_1, 0) - v_1^-(x_1, 0) - i(u_1^+(x_1, 0) - u_1^-(x_1, 0))] = \\ & = \frac{\partial}{\partial x_1} [C(x_1, \sigma_1)(q_{y_1}(x_1) - i q_{x_1 y_1}(x_1))]. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя полученное решение, можно записать

$$g_1(x_1) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx_1} [C(x_1, \sigma_1)(q_{y_1}(x_1) - i q_{x_1 y_1}(x_1))]. \quad (21)$$

Это комплексное уравнение служит для определения неизвестных напряжений q_{y_1} и $q_{x_1 y_1}$ в связях между берегами зон предразрушения.

Для левой части соотношения (2) имеем

Полученная алгебраическая система (18), (19), (26), (27) из-за неизвестного размера зоны предразрушения даже при линейно-упругих связях оказывается нелинейной. Для ее решения использовали метод последовательных приближений. В каждом приближении алгебраическая система решалась методом Гаусса с выбором главного элемента. В случае нелинейного закона деформирования связей для нахождения напряжений в зонах предразрушения используется итерационный метод, подобный методу упругих решений [5].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Мирсалимов, В. М.* К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары / В. М. Мирсалимов // ПММ. – 2007. – Т. 71. – Вып. 1. – С. 132–151.
- [2] *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [3] *Каландия, А. И.* Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. – М. : Наука, 1973. – 304 с.
- [4] *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [5] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

Калантарлы Наиля Мерадж кызы,

кандидат физико-математических наук, доцент, докторант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

e-mail: irakon63@hotmail.com

N. M. Kalantarly

**CRACKING IN THE CIRCULAR DISK, LOADED BY THE CONCENTRATED
SELF-COUNTERBALANCED MOMENTS**

Institute of mathematics and mechanics NAN of Azerbaijan

Abstract. It is considered isotropic the elastic circular disk loaded on a contour by two concentrated moments of M . Utilize model of a zone of prefracture with bonds between faces. Parities for definition of critical value of external loading at which there is an occurrence of a crack are received.

Keywords: isotropic circular disk, a zone of prefracture, nucleation of a crack, cohesive force.

REFERENCES

- [1] *Mirsalimov, V. M.* The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair / V. M. Mirsalimov // J. of Applied Math. and Mech. – 2007. – Vol. 71. – P. 120–136.
- [2] *Muskhelishvili, N. I.* Some basic problem in the mathematical theory of elasticity / N. I. Muskhelishvili. – M. : Nauka, 1977. – 707 p.
- [3] *Kalandiya, A. I.* Mathematical methods of the two – dimensional elasticities / A. I. Kalandiya. – M. : Scieme, 1973. – 304 p.
- [4] *Mirsalimov, V. M.* Non-one-dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987. – 256 p.
- [5] *Il'yushin, A. A.* Plasticity / A. A. Il'yushin. – M. ; L. : Gostekhizd, 1948. – 376 p.

Kalantarly, Nailya Merach kizi

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Doctorant, Institute of Mathematics and Mechanics of NAN of Azerbaijan, Baku

В. Д. Кулиев

НОВЫЙ СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)

Аннотация. С помощью K_α – формулы суммирования функциональных рядов [1] получен новый сингулярный интеграл, имеющий многочисленные приложения.

От этого сингулярного интеграла получаются сингулярный интеграл Пуассона и формула Шварца, дающая возможность выразить аналитическую в круге функцию через ее действительную часть на окружности с точностью до постоянного мнимого слагаемого. Кроме того, из нового сингулярного интеграла также получается сингулярный интеграл с ядром Гильберта, связанный с краевой задачей Гильберта.

Ключевые слова: ядро сингулярного интеграла, ряды Фурье, сингулярный интеграл Пуассона, теорема Фату, метод Пуассона-Абеля, гармоническая функция, мероморфная функция, теорема Миттаг-Лефлера, формула Шварца, формулы Гильберта, интеграл типа Коши и др.

УДК: 517.5

§1. Понятие сингулярного интеграла и некоторые утверждения

Определение. Функция $\Phi_n(\xi, x)$, заданная в области $a \leq \xi \leq b$, $a < x < b$, называется ядром, если она суммируема по ξ при фиксированном x и если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi_n(\xi, x) d\xi = 1 \quad (a < \alpha < x < \beta < b). \quad (1.1)$$

Интеграл вида

$$f_n(x) = \int_a^b \Phi_n(\xi, x) f(\xi) d\xi,$$

где $\Phi_n(\xi, x)$ есть ядро, называется сингулярным интегралом.

Суть теории сингулярных интегралов состоит в установлении связи предельных значений интеграла $f_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ со значением функции $f(\xi)$ в точке $\xi = x$. Из теории интегралов известно, что изменение значения функции $f(\xi)$ в одной точке никак не влияет на величину интеграла $f_n(x)$. Однако, здесь следует задать форму связи между значением функции $f(\xi)$ в исследуемой точке $\xi = x$ с ее значениями в малой окрестности этой точки. Формами такой связи, например, могут служить: 1) непрерывность функции $f(\xi)$ в исследуемой точке $\xi = x$; 2) аппроксимативная непрерывность функции $f(\xi)$ в исследуемой точке $\xi = x$ (см. , например, [2], [3], теорема Данжуа), т. е.

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \alpha f(\xi) = f(x),$$

где обычный предел заменяется на аппроксимативный предел; 3) точка x является точкой Лебега [2], [3] функции $f(\xi)$; в точке Лебега $\xi = x$ функция $f(x)$ в среднем мало отличается от ее значения в близлежащих точках.

Для дальнейших целей рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_0^a g(t)\Phi(t, \lambda)dt, \quad (1.2)$$

содержащий параметр λ . Областью изменения параметра пусть будет некоторое множество $E = \{\lambda\}$, имеющее точку сгущения λ_0 , конечную или нет. Относительно функции $\Phi(t, \lambda)$ предполагается, что она при фиксированном λ из E интегрируема по $t \in [0, a]$ в собственном (римановом) смысле. Кроме того, функция $\Phi(t, \lambda)$ удовлетворяет условиям:

$$1^0) \Phi(t, \lambda) \geq 0;$$

$$2^0) \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(t, \lambda)dt = 1 \quad (0 < \alpha < x < \beta < b);$$

$$3^0) \text{ при любом } \delta, 0 < \delta < a, \text{ величина } M(\delta, \lambda) = \sup_{t \geq \delta} \Phi(t, \lambda) \text{ при } \lambda \rightarrow \lambda_0 \text{ стремится к нулю.}$$

Функцию Φ , удовлетворяющую этим условиям, следуя [4], будем называть положительным ядром.

Имеет место [4]

Лемма 1. Если $\Phi(t, \lambda)$ есть положительное ядро, а $g(t)$ – абсолютно интегрируемая функция, для которой существует предел $g(+0)$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} F(\lambda) = g(+0). \quad (1.3)$$

Замечание 1. Утверждение леммы 1, очевидно, остается в силе, если условие 2^0 заменить условием

$$\int_0^a \Phi(t, \lambda) dt = 1. \quad (1.4)$$

Утверждение 1. Пусть $\Phi(t, \lambda)$ есть положительное ядро. Предположим, что функция g , кроме переменной t , зависит еще от одной переменной x ($0 \leq x \leq a$):

$$g = g(t, x),$$

но при постоянном x удовлетворяет прежним условиям леммы 1. Тогда, если:

$$1) g(t, x) \text{ равномерно ограничена при всех } t \text{ и } x: |g(t, x)| \leq M;$$

2) стремление $g(t, x)$ к $g(+0, x)$ осуществляется равномерно относительно x , то и интеграл

$$J(\lambda, x) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x)\Phi(t, \lambda) dt \quad (1.5)$$

$$(0 < \alpha < x < \beta < b)$$

при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ стремится к пределу $g(+0, x)$ равномерно относительно x .

На доказательстве данного утверждения не будем останавливаться, оно очевидно.

Более тонкая теорема, играющая важную роль в теории интегралов Фурье, доказана в [5] (см. с. 194–200), и приведено одно ее приложение (с. 483–507).

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения и класс функций $L^*[a, b]$.

Утверждение 2 [6]. Пусть функция $f(x)$ обладает свойствами:

1. Функция $f(x)$ является периодической функцией с периодом T , т. е. $f(x) = f(x + nT)$, где $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

2. Функция $f(x)$ интегрируема на некотором отрезке длины T .
Тогда

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx. \quad (1.6)$$

Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a, b]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1. Функция $f(x)$ кусочно-непрерывна и имеет ограниченное изменение в любой части $[c, d]$ промежутка $[a, b]$.

2. В точках разрыва первого рода $x = x_j \in]a, b]$, где $j = 1, 2, \dots, n$, функции $f(x)$ считается, что значение $f(x)$ в x_j есть среднее арифметическое правого и левого пределов $f(x)$ в x_j , т. е.

$$f(x_j) = \frac{f(x_j + 0) + f(x_j - 0)}{2}.$$

3. Функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $[a, b]$.

Совокупность всех функций $f(x)$, удовлетворяющих перечисленным требованиям, обозначим через $L^*[a, b]$.

§2. Новый сингулярный интеграл

Пусть функция $f(x)$ периода 2π принадлежит к $L^*]-\pi, \pi]$. Тогда рядом Фурье функции $f(x)$ служит ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2.1)$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos k\xi d\xi, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin k\xi d\xi \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.2)$$

Поскольку функция $f(x) \in L^*]-\pi, \pi]$ и имеет период 2π , то в силу утверждения 2, например, можно было бы написать:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos k\xi d\xi \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.3)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \sin k\xi d\xi \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Вопрос о сходимости ряда (2.1) приводится к исследованию некоторого сингулярного интеграла [4].

Подставив a_k и b_k , определяемые по формулам (2.2), в ряд Фурье (2.1), вместо ряда Фурье рассмотрим несколько иной ряд:

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\lambda} \left\{ \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos k\xi d\xi \right] \cos kx + \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin k\xi d\xi \right] \sin kx \right\} \quad (2.4)$$

$$(-\pi < x < \pi).$$

Здесь λ – некоторый положительный параметр из E , допускающий предельный переход $\lambda \rightarrow +0$ ($\lambda_0 = +0$).

Из (2.4) находим

$$\begin{aligned}
u(x, \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\lambda} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos k(\xi - x) d\xi \right] = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\lambda} \cos k(\xi - x) \right\} d\xi \\
&\quad (\lambda > 0).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Применяя K_α -метод суммирования при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ [1] к ряду

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\lambda} \cos k(\xi - x) \right] = K_\lambda(\xi, x) \tag{2.6}$$

($\lambda > 0$),

находим

$$\begin{aligned}
K_\lambda(\xi, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\tau\lambda} \cos \tau(\xi - x) d\tau + \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2i\eta\pi} - 1} \{ e^{-i\eta\lambda} \cos [i\eta(\xi - x)] - \\
&\quad - e^{i\eta\lambda} \cos [-i\eta(\xi - x)] \} d\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\tau\lambda} \cos \tau(\xi - x) d\tau + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{ch\eta(\xi-x) \sin \eta\lambda}{e^{2\eta\pi} - 1} d\eta \\
&\quad (\lambda > 0),
\end{aligned}$$

откуда

$$K_\lambda(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{sh\lambda}{ch\lambda - \cos(\xi - x)}. \tag{2.7}$$

В силу (2.5)–(2.7) получаем

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \frac{sh\lambda}{ch\lambda - \cos(\xi - x)} d\xi. \tag{2.8}$$

Прежде всего, покажем, что функция $K_\lambda(\xi, x)$, заданная в квадрате $(-\pi \leq \xi \leq \pi, -\pi \leq x \leq \pi)$, при $-\pi < x < \pi$ есть ядро.

Непосредственно можно убедиться в том, что каким бы ни было λ ($\lambda > 0, \lambda_0 = 0$) из E

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{sh\lambda}{ch\lambda - \cos(\xi - x)} d\xi = 1 \quad (-\pi < x < \pi). \tag{2.9}$$

Равенство (2.9) можно доказать и без вычисления интеграла. Действительно, пусть $f(\xi) = 1$. Тогда из (2.4) следует, что $u(x, \lambda) = 1$ для любого λ из E. Следовательно, в силу (2.8) справедливо и равенство (2.9).

Рассмотрим точку $x \in]-\pi, \pi]$. Пусть $-\pi \leq \alpha < x < \beta \leq \pi$.

Если $\xi \in [-\pi, \alpha]$, то

$$\frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\xi - x}{2} \right)} \leq \max \left\{ \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha - x}{2}}, \frac{1}{\sin^2 \frac{-\pi - x}{2}} \right\} = A(x, \alpha),$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\alpha} \frac{sh\lambda}{ch\lambda - \cos(\xi - x)} d\xi &\leq \frac{sh\lambda}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\alpha} \frac{1}{1 - \cos(\xi - x)} d\xi \right| = \\
&= \frac{sh\lambda}{4\pi} \left| \int_{-\pi}^{\alpha} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\xi - x}{2} \right)} d\xi \right| < sh\lambda \cdot A(x, \alpha),
\end{aligned}$$

где $A(x, \alpha)$ не зависит от λ . Отсюда следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\alpha} \frac{sh\lambda}{ch\lambda - \cos(\xi - x)} d\xi = 0. \quad (2.10)$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{\pi} \frac{sh\lambda}{ch\lambda - \cos(\xi - x)} d\xi = 0. \quad (2.11)$$

Из (2.9) получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{sh\lambda}{ch\lambda - \cos(\xi - x)} d\xi = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\alpha} \frac{sh\lambda}{ch\lambda - \cos(\xi - x)} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{\pi} \frac{sh\lambda}{ch\lambda - \cos(\xi - x)} d\xi$$

($\alpha < x < \beta$).

Тогда с учетом (2.10) и (2.11)

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{sh\lambda}{ch\lambda - \cos(\xi - x)} d\xi = 1,$$

так что функция $K_{\lambda}(\xi, x)$ в области $-\pi \leq \xi \leq \pi$, $-\pi < x < \pi$ есть ядро.

Стало быть, интеграл (2.8) есть сингулярный интеграл при $-\pi < x < \pi$.

Так как $f(\xi + 2\pi) = f(\xi)$, то в силу утверждения 2 интеграл (2.8) может быть представлен в виде [8]

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x + \xi) + f(x - \xi)] \frac{sh\lambda}{ch\lambda - \cos \xi} d\xi. \quad (2.12)$$

Положим

$$\frac{f(x + \xi) + f(x - \xi)}{2} = g(\xi, x), \quad (2.13)$$

$$\Phi(\xi, \lambda) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{sh\lambda}{ch\lambda - \cos \xi} \quad (\lambda > 0, \lambda_0 = 1). \quad (2.14)$$

Покажем, что функция $\Phi(\xi, \lambda)$ удовлетворяет всем требованиям леммы 1 (вместо требования 2⁰ здесь и в дальнейшем принимается требование (1.4)).

Действительно,

при $\lambda > 0$, $\Phi(\xi, \lambda) > 0$.

при $\lambda > 0$, $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{sh\lambda}{ch\lambda - \cos \xi} d\xi = 1$, т. е. выполнено требование (1.4).

при любом $0 < \delta \leq \xi \leq \pi$ величина

$$M(\delta, \lambda) = \sup_{0 < \delta \leq \xi \leq \pi} \Phi(\xi, \lambda) \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{sh\lambda}{2 \sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

очевидно, стремится к нулю при $\lambda \rightarrow +0$ (и фиксированном δ), т. е. выполнено требование 3⁰.

В таком случае на основании упомянутой леммы и утверждения 1, имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} u(x, \lambda) = \lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{f(x + \xi) + f(x - \xi)}{2} = \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2}.$$

Пусть теперь функция $f(x)$ будет везде непрерывна. Тогда она необходимо ограничена: $|f(x)| \leq C$, а вместе с этим и

$$\left| \frac{f(x + \xi) + f(x - \xi)}{2} \right| \leq C.$$

Кроме того, ввиду равномерной непрерывности функции $f(x)$ выражение

$$\frac{f(x + \xi) + f(x - \xi)}{2}$$

стремится при $\xi \rightarrow +0$ к своему пределу $f(x)$ равномерно относительно x .

Таким образом, приходим к выводу: в точке x , где функция $f(x)$ непрерывна или в крайнем случае имеет разрыв первого рода, ряд Фурье (2.1), суммируем по предложенному нами методу, причем “обобщенной суммой” ряда оказывается $f(x)$ или $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, в зависимости от случая.

В дальнейшем предложенный нами метод суммирования рядов Фурье (2.4) будем называть методом A_λ -суммирования.

В теории суммирования рядов Фурье по методу Пуассона – Абеля [7] известна теорема Фату [4]: если в точке x существует конечная производная $f'(x)$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k (b_k \cos kx - a_k \sin kx), \quad (2.15)$$

полученный дифференцированием почленного ряда Фурье (2.1), суммируем по методу Пуассона – Абеля и именно к сумме $f'(x)$.

Возникает вопрос: можно ли предложить теорему, аналогичную теореме Фату, если суммирование рядов Фурье производится по методу A_λ -суммирования?

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1 (аналог теоремы Фату). Если в точке x существует конечная производная $f'(x)$, то ряд (2.15) суммируем по методу A_λ -суммирования и именно к сумме $f'(x)$.

Доказательство. Продифференцируем по x ряд (2.4):

$$\frac{\partial u(x, \lambda)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k\lambda} (b_k \cos kx - a_k \sin kx) \quad (\lambda > 0); \quad (2.16)$$

почленное дифференцирование здесь допустимо в силу равномерной относительно x сходимости полученного ряда. Тот же результат получается, если продифференцировать по x интеграл (2.8):

$$\frac{\partial u(x, \lambda)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \frac{sh\lambda \sin(\xi - x)}{[ch\lambda - \cos(\xi - x)]^2} d\xi, \quad (2.17)$$

причем в этом случае дифференцирование под знаком интеграла законно.

Интеграл (2.17) может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, \lambda)}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{sh\lambda \sin t}{(ch\lambda - \cos t)^2} dt = \\ &= e^{-\lambda} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \sin t} \frac{e^\lambda sh\lambda \sin^2 t}{(ch\lambda - \cos t)^2} dt. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Положим

$$g(t, x) = \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \sin t} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{f(x+t) - f(x)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x)}{-t} \right] \frac{t}{\sin t}.$$

Отсюда следует, что $g(+0, x) = f'(x)$.

Покажем, что функция $\Phi^*(t, \lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{\lambda sh \lambda \sin^2 t}}{(ch \lambda - \cos t)^2}$ удовлетворяет всем требованиям леммы

1 (вместо требования 2^0 здесь принимается требование (1.4)).

Действительно, если

1) при $\lambda > 0$, $\Phi^*(t, \lambda) > 0$,

2) каково бы ни было λ ($\lambda > 0$), то

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{\lambda sh \lambda \sin^2 t}}{(ch \lambda - \cos t)^2} dt = 1, \quad (2.19)$$

т. е. выполнено требование (1.4).

Равенство (2.19) легко доказывается непосредственным вычислением интеграла.

При любом $0 < \delta \leq t \leq \pi$, величина

$$M(\delta, \lambda) = \sup_{0 < \delta \leq t \leq \pi} \Phi^*(t, \lambda) \leq \frac{1}{\pi} \frac{e^{\lambda sh \lambda}}{4 \sin^4 \frac{\delta}{2}},$$

очевидно, стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0+$ (и фиксированном δ), т. е. выполнено требование 3^0 .

Стало быть (см. лемма 1 или утверждение 1), интеграл (2.18), который служит суммой ряда (2.16), стремится к $f'(x)$ при $\lambda \rightarrow 0+$. А это и означает, что ряд (2.15) суммируется по методу A_λ -суммирования к $f'(x)$, что и требовалось доказать.

Замечание 2. Доказанная теорема может быть обобщена на случай повторного дифференцирования: если в рассматриваемой точке существует конечная производная $f^{(m)}(x)$ ($m > 1$), то ряд, полученный из (3.10) m -кратным дифференцированием, суммируем к $f^{(m)}(x)$ по методу A_λ -суммирования. Этим замечание 2 завершено.

2.1 Анализ ядра сингулярного интеграла

Функция

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{shy}{chy - \cos x} \quad (2.20)$$

гармонична в любой полосе ($a \leq x \leq b$, $|y| < \infty$), которая не содержит начала координат. Действительно, она в этой полосе удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u(x, y) = 0$ и на бесконечности ($|y| \rightarrow \infty$) имеет место асимптотическое равенство $|u(x, y)| \sim \frac{1}{2\pi}$.

Заметим, что $u(x+2\pi, y) = u(x, y)$, следовательно, гармоническая функция $u(x, y)$ является действительной частью мероморфной функции $F(z)$. Действительно, в силу утверждения 2 [5], [9]

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} ctg \frac{z}{2} + iC, \quad (2.21)$$

где C – действительная постоянная, причем

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{shy}{chy - \cos x}, \quad v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin x}{chy - \cos x} + C.$$

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются сопряженными гармоническими функциями везде и всюду, за исключением начала координат.

Функция $F(z)$, где $F_1(z) = F(z) - iC$, обладает свойствами:

$$1^0. F_1(z + 2\pi) = F_1(z).$$

$$2^0. F_1(x \pm iy) = -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\frac{x}{2}} \cdot e^{\mp\frac{y}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}} \cdot e^{\pm\frac{y}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} \cdot e^{\mp\frac{y}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}} \cdot e^{\pm\frac{y}{2}}}.$$

Следовательно, при больших значениях u значения функции $F(z)$ близки к $\pm \frac{1}{2\pi}$.

3⁰. Функция $ctg \frac{z}{2}$ имеет полюсами нули функции $\sin \frac{z}{2}$ и в окрестности $z = 2n\pi$ в силу теоремы Миттаг – Лефлера и теоремы Коши, имеет место разложение

$$F_1(z) = -\frac{1}{\pi i} \left[\frac{1}{z} + \sum'_{-\infty} \left(\frac{1}{z - 2n\pi} + \frac{1}{2n\pi} \right) \right], \quad (2.22)$$

где штрих у знака суммы означает, что член ряда, соответствующий $n = 0$, следует пропустить. Ряд (2.22) оказывается абсолютно и равномерно сходящимся в любой ограниченной части плоскости $|z| < R$ после удаления из него членов, которые имеют полюсы в этой части. В самом деле, для общего члена ряда справедлива оценка

$$\left| \frac{z}{2n\pi(z - 2n\pi)} \right| = \frac{1}{n^2} \frac{|z|}{2\pi |2\pi - \frac{z}{n}|} \leq \frac{R}{2\pi(2\pi - \frac{R}{n})} \cdot \frac{1}{n^2},$$

где коэффициент при $\frac{1}{n^2}$ стремится к конечному пределу $\frac{R}{4\pi^2}$, а ряд $\sum'_{-\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится,

причем $\sum'_{-\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$ (см. [10]).

Отсюда, в частности, следует, что в ряде (2.22) можно произвольно менять порядок членов. Объединяя члены с индексом n и $-n$, получим

$$F_1(z) = -\frac{1}{\pi i} \left[\frac{1}{z} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{z - 2n\pi} + \frac{1}{z + 2\pi n} \right) \right] = -\frac{1}{\pi i} \left[\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - 4n^2\pi^2} \right].$$

По теореме Вейерштрасса эту формулу можно дифференцировать почленно.

2.2 Краевые задачи

Теперь рассмотрим задачу: найти аналитическую функцию $F_*(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, действительная часть которой на отрезке $[-\pi, \pi]$ принимает заданные значения $u(x, 0) \in L^*] - \pi, \pi[$.

Решение данной задачи в силу (2.21) определяется формулой

$$F_*(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} u(\xi, 0) ctg \left(\frac{z - \xi}{2} \right) d\xi + iC \quad (2.23)$$

$$(F_*(z) = F_*(z + 2n\pi), n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Отсюда получаем:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\xi, 0) \frac{shy}{chy - \cos(\xi - x)} d\xi, \quad (2.24)$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\xi, 0) \frac{\sin(\xi - x)}{chy - \cos(\xi - x)} d\xi + C. \quad (2.25)$$

Из (2.24) и (2.25) при $|y| > 0$ следует:

$$u(x, y) = u(x + 2n\pi, y),$$

$$v(x, y) = v(x + 2n\pi, y).$$

Из (2.25), имеем

$$v(x, 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\xi, 0) \operatorname{ctg} \left(\frac{\xi - x}{2} \right) d\xi + v_0. \quad (2.26)$$

Эта формула дает выражение краевого значения мнимой части аналитической функции через действительную.

Чтобы выразить $u(x, 0)$ через $v(x, 0)$, заметим, что для функции

$$-iF_*(z) = v(x, y) - iu(x, y)$$

действительной частью является $v(x, 0)$, а мнимой — $u(x, 0)$. Применяя формулу (2.26) к последней функции, получим

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(\xi, 0) \operatorname{ctg} \left(\frac{\xi - x}{2} \right) d\xi + u_0. \quad (2.27)$$

Эта формула дает выражение краевого значения действительной части аналитической функции через мнимую.

Формулы (2.26) и (2.27) есть формулы обращения, а выражение $\operatorname{ctg} \left(\frac{\xi - x}{2} \right)$ будем называть ядром. При $\xi = x$ ядро обращается в бесконечность первого порядка, так что интегралы (2.26) и (2.27) являются особыми и их нужно понимать в смысле главного значения.

Пусть функция $u(x, 0)$ удовлетворяет требованиям утверждения 2. Тогда отрезок интегрирования $[-\pi, \pi]$ в формулах (2.23)–(2.27) может быть заменен любым другим отрезком длины 2π . Поэтому наряду с формулами (2.23)–(2.27) получаем:

$$F_*(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} u(\xi, 0) \operatorname{ctg} \left(\frac{z - \xi}{2} \right) d\xi + iC, \quad (2.28)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi, 0) \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y - \cos(\xi - x)} d\xi, \quad (2.29)$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi, 0) \frac{\sin(\xi - x)}{\operatorname{ch} y - \cos(\xi - x)} d\xi + C, \quad (2.30)$$

$$v(x, 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi, 0) \operatorname{ctg} \left(\frac{\xi - x}{2} \right) d\xi + v_0, \quad (2.31)$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\xi, 0) \operatorname{ctg} \left(\frac{\xi - x}{2} \right) d\xi + u_0. \quad (2.32)$$

Пусть, теперь, функция $u(x, 0)$ и ее любого порядка производные $u^{(k)}(x, 0)$, где k — любое натуральное число, удовлетворяют требованиям утверждения 2. Тогда из (2.28), замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{ctg} \left(\frac{z - \xi}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{ctg} \left(\frac{z - \xi}{2} \right),$$

получаем

$$F_*^{(k)}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} u^{(k)}(\xi, 0) \operatorname{ctg} \left(\frac{z - \xi}{2} \right) d\xi. \quad (2.33)$$

Очевидно, формулы (2.28)–(2.32) остаются в силе, если $u(x, 0) \in L^*[0, 2\pi[$ и $v(x, 0) \in L^*[0, 2\pi[$; периодичность их не обязательна.

§3. Следствия

Следствие 1. Если в формуле (2.29) положить $y = -\ln \frac{r}{R}$ ($0 < \frac{r}{R} < 1$), то полученный при этом интеграл можно записать так:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi. \quad (3.1)$$

Этот интеграл есть сингулярный интеграл Пуассона или просто интеграл Пуассона [8], [11]. Если $u(\varphi) \in L^*[0, 2\pi[$, то интеграл Пуассона дает решение обобщенной задачи Дирихле. При $r = 0$ формула (3.1) принимает простой вид:

$$u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi) d\varphi = C = \text{const}. \quad (3.2)$$

В этом случае функция $v(r, \theta)$, сопряженная с функцией $u(r, \theta)$, в силу (2.25) определяется формулой

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi) \frac{2Rr \sin(\theta - \varphi)}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi + C. \quad (3.3)$$

Умножая (3.3) на i и складывая полученную формулу с формулой (3.1), после несложных операций получаем

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) \frac{Re^{i\varphi} + re^{i\theta}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} d\varphi + iC \quad (3.4)$$

$$(f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)).$$

В формуле (3.4) $u(Re^{i\varphi})$ означает, что функция $u(\varphi)$ является заданной функцией на окружности замкнутого круга с радиусом R .

Формула (3.4) есть формула Шварца [11], [12].

Формула Шварца дает возможность выразить аналитическую в круге $|z| < R$ функцию $f(z)$, где $z = re^{i\theta}$, через значения ее действительной части на окружности с точностью до постоянного мнимого слагаемого iC .

Пусть в формуле (3.4) $R = 1$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi) \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2u(\varphi)}{\tau - z} d\tau - iC \quad (3.5)$$

$$(\tau = e^{i\varphi}).$$

Эта формула устанавливает связь между интегралом Шварца и интегралом типа Коши с действительной плотностью из класса Гельдера [12].

Следствие 2. Если в формуле (2.25) $y \neq 0$, то интеграл в (2.25) существует в смысле Римана. Если же $y = 0$, то интеграл будет особым и его нужно понимать в смысле главного значения по Коши. Нами были получены формулы (2.26) и (2.27) при $y = 0$.

Из (3.4) и (3.5) с помощью формулы Сохоцкого имеем

$$v(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \left(\frac{\sigma - s}{2} \right) d\sigma + v_0. \quad (3.6)$$

Отсюда нетрудно получить

$$u(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\sigma) \operatorname{ctg} \left(\frac{\sigma - s}{2} \right) d\sigma + u_0. \quad (3.7)$$

Симметричные формулы (3.6) и (3.7), получаемые из формулы Шварца, называют формулами обращения Гильберта, а выражение $\operatorname{ctg} \left(\frac{\sigma - s}{2} \right)$ – ядром Гильберта.

Заметим, что интегралы, входящие в формулы Гильберта (3.6) и (3.7), являются особыми и их нужно понимать в смысле главного значения по Коши.

Формулы Гильберта (3.6) и (3.7) совпадают с формулами (2.26) и (2.27), полученными из нового сингулярного интеграла.

Замечание 3. Функция $K_\lambda(\xi, x)$, определяемая формулой (2.7), при $\lambda \rightarrow +0$ образует дельтаобразную последовательность [13], т. е.

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} K_\lambda(\xi, x) = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{sh\lambda}{ch\lambda - \cos(\xi - x)} = \delta(\xi - x) = \delta(x - \xi),$$

так как дельта-функция Дирака $\delta(x)$ является четной.

Замечание 4. Сингулярный интеграл с обобщенным ядром Коши и его применения рассмотрены в [14], [15].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кулиев, В. Д. Новая формула суммирования функциональных рядов и некоторые ее приложения (ч. 1) / В. Д. Кулиев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2013. – № 1 (15). – С. 107–119.
- [2] Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – М. : Наука, 1974.
- [3] Сакс, С. Теория интеграла / С. Сакс. – М. : Факториал Пресс, 2004.
- [4] Бари, Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 1961.
- [5] Кулиев, В. Д. Сингулярные краевые задачи / В. Д. Кулиев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- [6] Толстов, Г. П. Ряды Фурье / Г. П. Толстов. – М. : Наука, 1980.
- [7] Харди, Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди. – М. : ИЛ, 1951.
- [8] Кулиев, В. Д. Новый сингулярный интеграл в теории рядов Фурье / В. Д. Кулиев // Механика разрушения : сб. науч. ст. – М. : МГОУ, 2008. – С. 106–122.
- [9] Кулиев, В. Д. Некоторые математические вопросы плоской теории упругости / В. Д. Кулиев // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. статей к 75-летию Е. И. Шемякина. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006.
- [10] Кулиев, В. Д. К теории дзета-функции Римана / В. Д. Кулиев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2013. – № 2 (16). – С. 146–167.
- [11] Гурвиц, А. Теория функций / А. Гурвиц, Р. Курант. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 1968.
- [12] Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Наука, 1977.
- [13] Кулиев, В. Д. Новый метод решения канонических сингулярных задач теории упругости кусочно-однородных сред / В. Д. Кулиев // Механика разрушения : сб. науч. ст. – М. : ИСТЕК, 1999. – С. 137–142.

[14] *Кулиев, В. Д.* Обращение особого интеграла с обобщенным ядром Коши и одно его применение / В. Д. Кулиев // Сборник трудов X Международной научной школы “Гидродинамика больших скоростей” и Международной научной конференции “Гидродинамика, механика, энергетические установки” (к 145-летию со дня рождения академика А. Н. Крылова). – Чебоксары : ЧПИ МГОУ, 2008. – С. 517–533.

[15] *Кулиев, В. Д.* Наклонная краевая трещина продольного сдвига на границе раздела двух сред / В. Д. Кулиев // Сборник трудов X Международной научной школы “Гидродинамика больших скоростей” и Международной научной конференции “Гидродинамика, механика, энергетические установки” (к 145-летию со дня рождения академика А. Н. Крылова). – Чебоксары : ЧПИ МГОУ, 2008. – С. 555–569.

Кулиев Валех Джафарович,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

e-mail: pmdekanat@rambler.ru

V. D. Kuliev

NEW SINGULAR INTEGRAL IN THE THEORY OF FUNCTIONS AND SOME OF ITS CONSEQUENCES APPLICATIONS

Moscow State Machine-Building University (MAMI)

Abstract. With the help of K_{α} – summation formula functional series [1] obtained a new singular integral having numerous applications .

Of singular integral is obtained as a consequence of the singular Poisson integral and thus – Schwartz formula , enabling express an analytic function in the disc through its real part on circle up to a constant imaginary term . In addition, from new singular integral is obtained as a consequence of the singular integral with Hilbert associated with the boundary value problem of Hilbert .

Keywords: kernel singular integral, Fourier series, Poisson singular integral, Fatou theorem, Poisson-Abel method, harmonic function, meromorphic function, the Mittag-Leffler theorem, the formula Schwartz formula Hilbert integral of Cauchy type, etc.

REFERENCES

- [1] *Kuliyev, V. D.* New formula of summation of functional ranks and its some appendices (p.1) / V. D. Kuliyev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state. – 2013. – No. 1 (15). – P. 107–119.
- [2] *Natanson, I. P.* Theory of functions material variable / I. P. Natanson. – M. : Science, 1974 .
- [3] *Saks, S.* integral / page Theory. Saxophone. – M. : Factorial Press, 2004.
- [4] *Bari, N. K.* Trigonometrical ranks / N. K. Bari. – M. : State publishing house FIZMATLIT, 1961.
- [5] *Kuliyev, V. D.* Singular regional tasks / V. D. Kuliyev. – M. : FIZMATLIT, 2005.
- [6] *Tolstov, G. P.* Fourier / P. Tolstov. – M. : Science, 1980.
- [7] *Hardy, G.* Dispersing ranks / G. Hardy. – M. : SILT, 1951.
- [8] *Kuliyev, V. D.* New singular integral in the theory of ranks of Fourier / V. D. Kuliyev. – Collection scientific articles. Mechanics of destruction. – M. : MGOU publishing house, 2008. P. 106–122.
- [9] *Kuliyev, V. D.* Some mathematical questions of the flat theory of elasticity / V. D. Kuliyev. – The collection of articles to E. I. Shemyakin’s 75 anniversary. Problems of mechanics of the deformable solid bodies and rocks. – M. : FIZMATLIT, 2006.
- [10] *Kuliyev, V. D.* To the theory of dzeta-function of Riemann / V. D. Kuliyev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state. – 2013. – No. 2 (16). – P. 146–167.
- [11] *Gurvits, A.* Theory of functions / A. Gurvits, R. Courant. – M. : FIZMATLIT, 1968.
- [12] *Gakhov, F. D.* Regional tasks / F. D. Gakhov. – M. : Science, 1977.
- [13] *Kuliyev, V. D.* New method of the solution of initial singular tasks of the theory of elasticity piecewise homogeneous environments / V. D. Kuliyev. – Collection of scientific articles. Mechanics destructions. – M. : I EXPIRED publishing house, 1999. – P. 137–142.
- [14] *Kuliyev, V. D.* the Address of special integral with Cauchy’s generalized kernel and one its application / V. D. Kuliyev. - Collection of works X of the International school of sciences "Hydrodynamics of big speeds" and International scientific conference "Hydrodynamics, mechanics, power installations" (to the 145 anniversary from the date of births of the academician A. N. Krylov). – Cheboksary : ChPI MGOU, 2008. – P. 517–533.
- [15] *Kuliyev, V. D.* the Inclined regional crack of longitudinal shift on limit of the section of two environments / V. D. Kuliyev. – Collection of works X of the International school of sciences

"Hydrodynamics of big speeds" and International scientific conference "Hydrodynamics, mechanics, power installations" (to the 145 anniversary from the date of births of the academician A. N. Krylov). – Cheboksary : ChPI MGOU, 2008. – P. 555–569.

Kuliev, Valekh Dzhafarovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of the Higher Mathematics, Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow

В. М. Мирсалимов, А. Б. Мустафаев

ЧАСТИЧНОЕ КОНТАКТИРОВАНИЕ БЕРЕГОВ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНЫ В ЛИСТОВОМ ЭЛЕМЕНТЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНОГО ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Аннотация. Проведено математическое описание модели частичного закрытия криволинейной трещины в изотропной плоскости с помощью локального изменения температуры вблизи конца трещины. Считается, что взаимодействие поверхностей трещины под действием внешних нагрузок наведенного термоупругого поля напряжений может привести к возникновению зон их налегания. Находятся контактные напряжения, размер концевой контактной зоны, где берега криволинейной трещины смыкаются.

Ключевые слова: листовой элемент, криволинейная трещина, локальное температурное поле, контактная зона, контактные напряжения.

УДК: 539.375

Введение. Известно [1], [2], что температурные и термоупругие поля могут быть эффективным средством торможения роста трещин. В механике разрушения проблема о “залечивании” имеющейся в листовом элементе трещины имеет важное значение. Первым этапом в решении этой проблемы является задача о закрытии вскрытой трещины.

Воздействие [3] теплового источника уменьшает деформацию растягиваемой плоскости в направлении, перпендикулярном трещине, в связи с чем снижается коэффициент интенсивности напряжений в окрестности конца трещины. При некотором соотношении физических и геометрических параметров листового элемента и теплового источника в теле будут появляться зоны сжимающих напряжений, в которых берега трещины на некотором участке войдут в контакт, что приведет к появлению контактных напряжений на данном участке берегов трещины.

Для многих металлических материалов (сталей, алюминиевых сплавов и др.) при температуре до 300–400 °С термоупругие характеристики слабо зависят от температуры. Это экспериментально установленный факт [4], [5]. Следовательно, для всех конструкционных материалов существует такой диапазон температур, в котором допущение о постоянстве термоупругих характеристик материала является корректным, он устанавливается на основании зависимости модуля упругости от температуры. Опыты [1] показывают, что при нагреве трассы пути трещины до 70–100 °С наблюдаются замедление и торможение трещины. Можно привести другие публикации [6], [7], где дается положительный ответ об эффекте закрытия трещины. В работе [7] исследовано поведение напряжений вблизи концов трещины и определены коэффициенты интенсивности напряжений. Показано, что при некоторых значениях параметров задачи коэффициенты интенсивности напряжений оказываются отрицательными.

Поступила 03.12.2013

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при президенте Азербайджанской Республики – Грант № ЕЭФ-2012-2(3)-39/11/1.

Это означает, что берега трещины входят в контакт. Наличие отрицательных коэффициентов интенсивности напряжений по крайней мере вблизи края трещины приводит к необходимости учета частичного контакта берегов в некоторой окрестности конца трещины.

В упомянутых выше работах не было изучено взаимодействие берегов трещин. В настоящей статье впервые исследованы влияние неровности поверхности трещины и взаимодействие берегов трещин на торможение роста трещины локальными температурными полями. Область практического применения результатов заключается в возможности предотвратить развитие трещины и разрушение конструкций и избежать катастроф, связанных с внезапным разрушением.

Постановка задачи. Рассмотрим неограниченную упругую плоскость, ослабленную одной трещиной в начале координат. В реальных материалах из-за структурных и технологических факторов поверхности трещины имеют неровности и искривления. Рассмотрим задачу механики разрушения о трещине в плоскости, полагая, что контур трещины имеет неровности (малые отклонения от прямолинейной формы). Уравнение контура трещины принимается в виде $y = f(x)$. Берега трещины считаются свободными от внешних нагрузок. Для торможения развития трещины с помощью нагрева до температуры T_0 области S тепловым источником на пути распространения трещины создается зона сжимаемых напряжений. Принимается, что материал плоскости представляет собой однородное и изотропное тело и его термоупругие характеристики не зависят от температуры. Считается, что в момент $t = 0$ произвольная область S на пути роста трещины в плоскости мгновенно нагревается до постоянной температуры $T = T_0$, а остальная часть плоскости имеет температуру $T = 0$.

В случае, когда характерный линейный размер области S считается малым по сравнению с длиной трещины или с каким-либо другим характерным линейным размером L плоскости в плане, возможно эффективное асимптотическое решение этой задачи, основанное на представлении о тонкой структуре конца трещины. Задачу о тонкой структуре конца трещины (т. е. о распределении напряжений и деформаций на расстояниях r от конца трещины, удовлетворяющих условию $L \gg r \gg \rho$, здесь ρ – радиус кривизны конца трещины) можно ставить [8] следующим образом.

Рассмотрим окрестность конца искривленной трещины (рис. 1), которая мала по сравнению с характерным линейным размером в плане пластины, но больше по сравнению с характерным линейным размером области S . Тогда трещина на плоскости Oxy представится полубесконечным сквозным криволинейным разрезом вдоль $y = f(x)$, $-\infty < x < 0$. При этом в части разреза длиной d (концевой зоне, примыкающей к его вершине) берега трещины будут взаимодействовать (войдут в контакт), что способствует появлению контактных напряжений на данном участке. Вне этого участка берега трещины будут свободны от нагрузок. Область S может иметь любые конечные размеры и конфигурацию. На бесконечности реализуется напряженное поле, характерное для тонкой структуры конца трещины. Это поле считается заданным [8] и имеет следующий вид при $z \rightarrow \infty$:

$$\Phi(z) = \frac{K_I - iK_{II}}{2\sqrt{2\pi z}}, \quad \Omega(z) = \frac{K_I - iK_{II}}{2\sqrt{2\pi z}},$$

где $z = x + iy = re^{i\theta}$; r, θ – полярные координаты; $i = \sqrt{-1}$; $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ – комплексные потенциалы [9].

В рассматриваемой задаче параметрами нагружения являются коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} , представляющие собой некоторые функции формы тела и граничных условий. Они определяются из решения задачи при действии силовой нагрузки и отсутствии теплового воздействия.

Поставленная задача заключается в определении величины контактных напряжений, размера контактной зоны, а также напряженно-деформированного состояния вне трещины при воздействии наведенного тепловым источником поля напряжений.

Концевая область, примыкающая к вершине трещины, мала по сравнению с остальной частью листового элемента. Принято, что при налегании берегов трещины предельное равновесие не достигнуто и проскальзывание берегов трещины отсутствует. При действии на плоскость силовой и тепловой нагрузок на некотором участке берега трещины взаимодействуют между собой, что приводит к появлению нормальных $p_y(x)$ и касательных $p_{xy}(x)$ напряжений. Величины этих напряжений заранее неизвестны и подлежат определению.

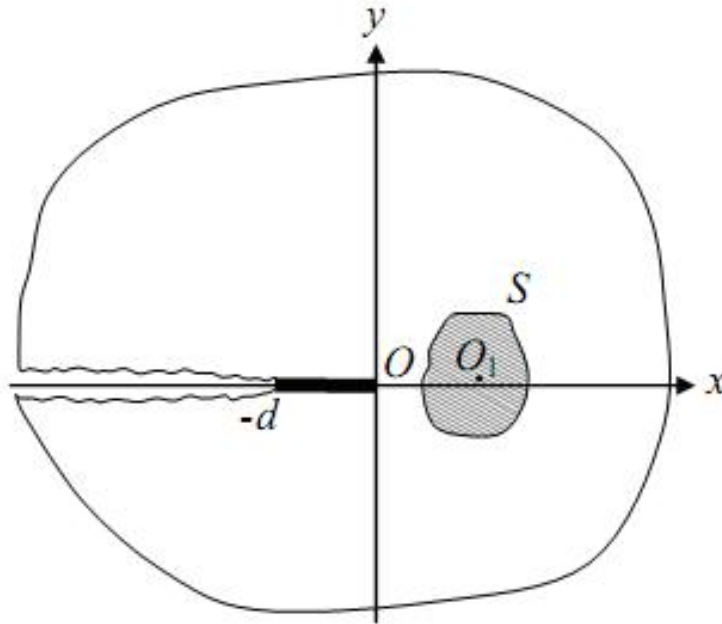


Рис. 1. Расчетная схема задачи о частичном закрытии трещины под действием локального температурного поля

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\sigma_n - i\tau_{nt} = 0 \quad \text{при} \quad y = f(x), \quad -\infty < x < -d,$$

$$\sigma_n - i\tau_{nt} = p_y - ip_{xy} \quad \text{при} \quad y = f(x), \quad -d \leq x \leq 0.$$

Метод решения краевой задачи. Напряженное состояние в плоскости с криволинейной трещиной представим в виде

$$\sigma_x = \sigma_{x_0} + \sigma_{x_1}, \quad \sigma_y = \sigma_{y_0} + \sigma_{y_1}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy_0} + \tau_{xy_1},$$

где $\sigma_{x_0}, \sigma_{y_0}, \tau_{xy_0}$ – решение задачи термоупругости для плоскости без трещины; $\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \tau_{xy_1}$ – компоненты напряжений для плоскости с трещиной с концевой контактной зоной под действием нагрузок, приложенных на поверхности трещины. Форма деформированной поверхности трещины с концевой контактной зоной определяется напряженным состоянием $\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \tau_{xy_1}$.

Для нахождения напряжений $\sigma_{x_0}, \sigma_{y_0}, \tau_{xy_0}$ решаем задачу термоупругости для сплошной плоскости. Сначала определяем распределение температуры в плоскости. Для этого решаем краевую задачу теории теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T, \quad T = \begin{cases} T_0 & (x, y \in S) \\ 0 & (x, y \notin S) \end{cases} \quad \text{при} \quad t = 0,$$

где Δ – оператор Лапласа; a – коэффициент температуропроводности материала плоскости.

Пусть для определенности нагретая тепловым источником область S представляет собой прямоугольник со сторонами $2x_0$ и $2y_0$, а центр прямоугольника S имеет координаты (L, b) . Распределение температуры будет иметь вид [10]:

$$T(x, y, t) = \frac{T_0}{4} \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{x_0 - L + x}{2\sqrt{at}} \right) + \operatorname{Erf} \left(\frac{x_0 + L - x}{2\sqrt{at}} \right) \right] \times \\ \times \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{y_0 - b + y}{2\sqrt{at}} \right) + \operatorname{Erf} \left(\frac{y_0 + b - y}{2\sqrt{at}} \right) \right], \\ \operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du$$

При определении температурного поля для упрощения задачи не учитывается возмущение температурного поля из-за наличия трещины.

Напряжения σ_{x_0} , σ_{y_0} , τ_{xy_0} выражаем через термоупругий потенциал перемещений в виде [11]:

$$\sigma_{x_0} = -2\mu \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right), \quad \sigma_{y_0} = -2\mu \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right), \quad \tau_{xy_0} = 2\mu \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right), \\ \Delta F = (1 + \nu)\alpha T(x, y, t), \quad (1)$$

где μ – модуль сдвига материала плоскости; α – коэффициент линейного температурного расширения материала; ν – коэффициент Пуассона материала плоскости.

Продифференцировав (1) по времени t , с учетом уравнения теплопроводности получаем, что

$$\Delta \left[\frac{\partial F}{\partial t} - (1 + \nu)a\alpha T \right] = 0,$$

откуда следует, что функция $\frac{\partial F}{\partial t} - (1 + \nu)a\alpha T$ гармоническая во всей плоскости и, следовательно, может быть либо постоянной величиной, либо некоторой функцией времени. Не нарушая общности задачи, можно считать, что $\frac{\partial F}{\partial t} - (1 + \nu)a\alpha T = 0$. Таким образом, для термоупругого потенциала перемещений F имеем

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (1 + \nu)a\alpha T.$$

Проинтегрировав полученное уравнение, находим, что

$$F = (1 + \nu)a\alpha \int_0^t T(x, y, t) dt + F_0(x, y),$$

где $F_0(x, y)$ – термоупругий потенциал, соответствующий начальной температуре

$$\Delta F_0 = (1 + \nu)\alpha T_0 \quad (x, y \in S), \quad \Delta F_0 = 0 \quad (x, y \notin S). \quad (2)$$

Решая (2), находим:

$$F_0(x, y) = -\frac{(1 + \nu)\alpha T_0}{2\pi} \iint_S \ln \frac{1}{r} d\xi d\eta,$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

С помощью полученных соотношений находим:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{y_0} &= -\frac{\mu(1+\nu)\alpha T_0}{4\sqrt{\pi}} \left\{ 4\sqrt{\pi}A(x, y) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{y_0 - b + y}{x_0 - L + x} \right) + \right. \right. \\
 &+ \operatorname{arctg} \left(\frac{y_0 + b - y}{x_0 + L - x} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{y_0 + b - y}{x_0 - L + x} \right) + \left. \left. \operatorname{arctg} \left(\frac{y_0 - b + y}{x_0 + L - x} \right) \right] - \right. \\
 &- \int_0^t \left[(x_0 - L + x) \exp \left(-\frac{(x_0 - L + x)^2}{4a\tau} \right) + (x_0 + L - x) \exp \left(-\frac{(x_0 + L - x)^2}{4a\tau} \right) \right] \times \\
 &\quad \times \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{y_0 - b + y}{2\sqrt{a\tau}} \right) + \operatorname{Erf} \left(\frac{y_0 + b - y}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] \frac{d\tau}{\tau\sqrt{a\tau}} \left. \right\}, \\
 \tau_{xy_0} &= -\frac{\mu(1+\nu)\alpha T_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{(x - L - x_0)^2 + (y - b + y_0)^2}{(x - L - x_0)^2 + (y - b - y_0)^2} + \right. \\
 &+ \ln \frac{(x - L + x_0)^2 + (y - b - y_0)^2}{(x - L + x_0)^2 + (y - b + y_0)^2} - \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[\exp \left(-\frac{(x_0 - L + x)^2}{4a\tau} \right) - \right. \\
 &- \left. \exp \left(-\frac{(x_0 + L - x)^2}{4a\tau} \right) \right] \times \left[\exp \left(-\frac{(y_0 - b + y)^2}{4a\tau} \right) - \exp \left(-\frac{(y_0 + b - y)^2}{4a\tau} \right) \right] d\tau \left. \right\}, \\
 A(x, y) &= \begin{cases} 1 & (x, y \in S) \\ 0 & (x, y \notin S) \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторую произвольную реализацию неровной поверхности берегов трещины (с малыми отклонениями от прямолинейной формы). Так как функции $f(x)$ и $f'(x)$ являются малыми величинами, функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = \varepsilon H(x)$, где ε – малый параметр, равный отношению амплитуды отклонения кривой $f(x)$ от прямолинейной формы к полудлине трещины l , $-\infty < x < 0$.

Граничные условия на берегах трещины можно представить в виде («+» соответствует верхнему берегу трещины, «-» – нижнему):

$$-\sigma_n^+ = \sigma_n^- = \sigma_y \cos^2 \theta + \sigma_x \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta = g_0,$$

$$-\tau_n^+ = \tau_n^- = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = g_1,$$

где g_0 и g_1 равны нулю при $y = f(x)$, $-\infty < x < -d$; $g_0 = p_y(x)$, $g_1 = p_{xy}(x)$ при $y = f(x)$, $-d < x < 0$; θ – угол, отсчитываемый против часовой стрелки от оси y к внешней нормали n верхнего или нижнего берега трещины.

Имеем

$$\cos \theta = \frac{\mp 1}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\mp f'(x)}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}.$$

Граничные условия с учетом приведенных выше формул и функции $f(x) = \varepsilon H(x)$ примут вид:

$$\sigma_y - 2\varepsilon\tau_{xy} \frac{dH}{dx} + \varepsilon^2\sigma_x \left(\frac{dH}{dx} \right)^2 = g_0, \quad y = \varepsilon H(x),$$

$$\varepsilon(\sigma_y - \sigma_x) \frac{dH}{dx} + \tau_{xy} \left[1 - \varepsilon^2 \left(\frac{dH}{dx} \right)^2 \right] = g_1.$$

Напряжения σ_{x_1} , σ_{y_1} , τ_{xy_1} , p_y , p_{xy} , перемещения u , v , а также размер контактной зоны ищем в виде разложений по малому параметру:

$$\begin{aligned}\sigma_{x_1} &= \sigma_x^{(0)} + \varepsilon\sigma_x^{(1)} + \dots, & \sigma_{y_1} &= \sigma_y^{(0)} + \varepsilon\sigma_y^{(1)} + \dots, & \tau_{xy_1} &= \tau_{xy}^{(0)} + \varepsilon\tau_{xy}^{(1)} + \dots, \\ p_y &= p_y^{(0)} + \varepsilon p_y^{(1)} + \dots, & p_{xy} &= p_{xy}^{(0)} + \varepsilon p_{xy}^{(1)} + \dots, \\ u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, & v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \dots, \\ d &= d_0 + \varepsilon d_1 + \dots\end{aligned}$$

Для подстановки вышеприведенных выражений в граничное условие необходимо знать функции $\sigma_y^{(0)}$, $\sigma_y^{(1)}$, $\sigma_x^{(0)}$, $\sigma_x^{(1)}$ при $y = \varepsilon H(x)$.

Значения напряжений при $y = f(x)$ найдем, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $y = 0$:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(0)}|_{y=f(x)} &= \sigma_y^{(0)}|_{y=0} + \varepsilon H(x) \frac{\partial \sigma_y^{(0)}}{\partial y}|_{y=0} + \dots \\ \sigma_x^{(0)}|_{y=f(x)} &= \sigma_x^{(0)}|_{y=0} + \varepsilon H(x) \frac{\partial \sigma_x^{(0)}}{\partial y}|_{y=0} + \dots \\ \tau_{xy}^{(0)}|_{y=f(x)} &= \tau_{xy}^{(0)}|_{y=0} + \varepsilon H(x) \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial y}|_{y=0} + \dots \\ \sigma_y^{(1)}|_{y=f(x)} &= \sigma_y^{(1)}|_{y=0} + \varepsilon H(x) \frac{\partial \sigma_y^{(1)}}{\partial y}|_{y=0} + \dots \\ \sigma_x^{(1)}|_{y=f(x)} &= \sigma_x^{(1)}|_{y=0} + \varepsilon H(x) \frac{\partial \sigma_x^{(1)}}{\partial y}|_{y=0} + \dots \\ \tau_{xy}^{(1)}|_{y=f(x)} &= \tau_{xy}^{(1)}|_{y=0} + \varepsilon H(x) \frac{\partial \tau_{xy}^{(1)}}{\partial y}|_{y=0} + \dots\end{aligned}$$

Из-за малости ε по сравнению с единицей ограничимся в разложении членами до первого порядка относительно малого параметра.

Используя метод возмущений с учетом предыдущих формул, находим граничные условия при $y = 0$, $-\infty < x < 0$:

– в нулевом приближении:

$$\sigma_y^{(0)} = -\sigma y_0, \quad \tau xy^{(0)} = -\tau xy_0 \quad \text{при } y = 0, \quad -\infty < x < -d_0, \quad (3)$$

$$\sigma_y^{(0)} = p_y^{(0)} - \sigma y_0, \quad \tau xy^{(0)} = p_{xy}^{(0)} - \tau xy_0 \quad \text{при } y = 0, \quad -d_0 \leq x \leq 0;$$

– в первом приближении:

$$\sigma_y^{(1)} = N, \quad \tau_{xy}^{(1)} = T \quad \text{при } y = 0, \quad -\infty < x < -d_1, \quad (4)$$

$$\sigma_y^{(1)} = p_y^{(1)} + N, \quad \tau xy^{(1)} = p_{xy}^{(1)} + T \quad \text{при } y = 0, \quad -d_1 \leq x \leq 0.$$

Здесь

$$N = 2\tau xy^{(0)} \frac{dH}{dx} - H \frac{\partial \sigma_y^{(0)}}{\partial y}, \quad T = \left(\sigma x^{(0)} - \sigma y^{(0)} \right) \frac{dH}{dx} - H \frac{\partial \tau xy^{(0)}}{\partial y}. \quad (5)$$

Для решения краевых задач в каждом приближении используем комплексные потенциалы Колосова – Мусхелишвили. Решение краевой задачи (3) запишется [9] в виде

$$\Phi_0(z) = \Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z}} \int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{t}}{t-z} f_0(t) dt + \frac{K_I^{(0)} - iK_{II}^{(0)}}{2\sqrt{2\pi z}},$$

где $f_0(x) = \begin{cases} f_1(x) - if_2(x) & \text{на свободных берегах трещины} \\ f_1(x) - if_2(x) + p_y^{(0)} - ip_{xy}^{(0)} & \text{на берегах контактной зоны} \end{cases}$,

$$f_1(x) = -\sigma_{y_0}(x, 0), \quad f_2(x) = -\tau_{xy_0}(x, 0).$$

Здесь учтено, что $K_I = K_I^{(0)} + \varepsilon K_I^{(1)} + \dots$, $K_{II} = K_{II}^{(0)} + \varepsilon K_{II}^{(1)} + \dots$.

Для окончательного определения потенциалов $\Phi_0(z)$ и $\Omega_0(z)$ необходимо также найти контактные напряжения $p_y^{(0)}$ и $p_{xy}^{(0)}$ на участке контакта между кромками трещины в нулевом приближении. Учитывая, что на участке контакта между берегами трещины раскрытие должно быть равно нулю, получаем комплексное уравнение, служащее для определения контактных напряжений $p_y(x)$ и $p_{xy}(x)$

$$(u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-) = 0. \quad (6)$$

Для определения перемещений в нулевом приближении имеем соотношение [9]

$$2\mu(u_0 + iv_0) = \kappa\varphi_0(z) - \omega_0(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_0(z)}. \quad (7)$$

Здесь κ – постоянная Мусхелишвили.

Для функций $\varphi_0(z)$ и $\omega_0(z)$ после интегрирования находим:

$$\varphi_0(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 f(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{z}}{\sqrt{t} - \sqrt{z}} dt + \frac{K_I^{(0)} - iK_{II}^{(0)}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{z}, \quad (8)$$

$$\omega_0(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 f(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{z}}{\sqrt{t} - \sqrt{z}} dt + \frac{K_I^{(0)} - iK_{II}^{(0)}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{z}.$$

На основании соотношений (7), (8) имеем

$$(u_0^+ - u_0^-) + i(v_0^+ - v_0^-) = \frac{1 + \kappa}{2\mu} \left[-\int_{-\infty}^0 \frac{f(t)}{\pi i} \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \frac{2(K_I^{(0)} - iK_{II}^{(0)})\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}} \right]. \quad (9)$$

Используя уравнение (9), получим комплексное интегральное уравнение относительно неизвестных функций $p_y^{(0)}(x)$ и $p_{xy}^{(0)}(x)$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 (f_1 - if_2) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt - \frac{1}{\pi i} \int_{-d_0}^0 (p_y^{(0)} - ip_{xy}^{(0)}) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \\ & + \frac{2(K_I^{(0)} - iK_{II}^{(0)})}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{x} = 0 \quad (-d_0 \leq x \leq 0). \end{aligned} \quad (10)$$

Отделяя в (10) действительные и мнимые части, получим два действительных интегральных уравнения относительно неизвестных функций $p_y^{(0)}(x)$ и $p_{xy}^{(0)}(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f_1 \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-d_0}^0 p_y^{(0)} \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt - \frac{2K_I^{(0)}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{-x} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f_2 \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-d_0}^0 p_{xy}^{(0)} \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt - \frac{2K_{II}^{(0)}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{-x} = 0. \quad (12)$$

Для замкнутости каждого интегрального уравнения не хватает одного уравнения, определяющего размер концевой зоны в нулевом приближении. Условием, служащим для определения размера контактной зоны (т. е. величины d), является условие конечности напряжений в окрестности вершины трещины. Для выполнения условия конечности напряжений нужно, чтобы $k_I^{(0)} - ik_{II}^{(0)}$ было равно нулю в окрестности вершины трещины. Находим по известному соотношению [8] коэффициенты интенсивности напряжений

$$k_I^{(0)} - ik_{II}^{(0)} = 2 \lim_{z \rightarrow 0} \left[\sqrt{2\pi z} \Phi_0(z) \right].$$

Используя полученное решение для функции $\Phi_0(z)$ и отделяя действительную и мнимую части и приравнявая их нулю, получаем условие конечности напряжений для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига соответственно.

Записывая это условие, получаем еще одно недостающее уравнение для каждого сингулярного интегрального уравнения соответственно в следующем виде:

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi i}} \int_{-\infty}^0 \frac{f_1(x) dx}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi i}} \int_{-d_0}^0 \frac{p_y^{(0)}(x) dx}{\sqrt{x}} + K_I^{(0)} = 0, \quad (13)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi i}} \int_{-\infty}^0 \frac{f_2(x) dx}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi i}} \int_{-d_0}^0 \frac{p_{xy}^{(0)}(x) dx}{\sqrt{x}} + K_{II}^{(0)} = 0. \quad (14)$$

Поставленная задача, как и следовало ожидать, распалась на две независимые задачи: для трещины нормального разрыва уравнения (11), (13) и для трещины поперечного сдвига уравнения (12), (14).

Решение интегральных уравнений (11) и (12) может быть получено путем решения соответствующей задачи Римана [12]. Интегральное уравнение (11) можно представить в виде

$$\int_{-d_0}^0 \frac{\sqrt{t} p_y^{(0)}(x) dt}{t-x} = \pi F_1(x), \quad (15)$$

$$\text{где } F_1(x) = \frac{2K_I^{(0)}}{\sqrt{2\pi}} x - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{f_1(t) \sqrt{t} dt}{t-x}.$$

Это уравнение получено из (11) путем дифференцирования его по x .

Введем кусочно аналитическую функцию $F(z)$, заданную интегралом Коши, плотность которого служит искомым решением интегрального уравнения

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-d_0}^0 \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - z}.$$

Аналитическая функция $F(z)$ должна являться решением задачи линейного сопряжения граничных значений

$$F^+(t) + F^-(t) = \frac{F_1(t)}{i}. \quad (16)$$

Решение задачи краевой задачи (16) в классе всюду ограниченных функций имеет вид

$$F(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-d_0}^0 \frac{F_1^*(\tau) d\tau}{X_1 + (\tau)(\tau - z)},$$

где $X(z) = \sqrt{z(z + d_0)}$, $X + (\tau) = \sqrt{\tau(\tau + d_0)}$, $F_1^*(t) = F_1(t)/\pi i$.

По формулам Сохоцкого – Племеля находим решение интегрального уравнения (15):

$$g(t) = F^+(t) - F^-(t),$$

$$F^+(z) = X + (t) \left[\frac{1}{2} \frac{F_1^*(\tau)}{X + (t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-d_0}^0 \frac{F_1^*(\tau) d\tau}{X + (\tau)(\tau - t)} \right],$$

$$F^-(z) = X - (t) \left[-\frac{1}{2} \frac{F_1^*(\tau)}{X + (t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-d_0}^0 \frac{F_1^*(\tau) d\tau}{X + (\tau)(\tau - t)} \right].$$

Учитывая, что $X - (t)/X + (t) = -1$, находим

$$p_y^{(0)}(t) = \frac{X + (z)}{\pi i} \int_{-d_0}^0 \frac{F_1^*(\tau) d\tau}{X + (\tau)(\tau - t)}.$$

Длина зоны контакта для трещины нормального разрыва определяется из уравнения (13) методом итерации, при этом интегралы, входящие в это уравнение, заменялись суммами с помощью квадратурных формул. Аналогично длина зоны контакта для трещины поперечного сдвига определяется из решения уравнения (13). Для каждого интегрального уравнения получено одно замыкающее уравнение.

Аналогично, решая интегральное уравнение (12), находим формулы для подсчета касательных контактных напряжений в нулевом приближении

$$p_{xy}^{(0)}(x) = \frac{X + (x)}{\pi i} \int_{-d_0}^0 \frac{F_2 + (t) dt}{X + (t)(t - x)},$$

где $F_2^*(t) = F_2(t)/\pi i$, $F_2(x) = \frac{2K_{II}^{(0)}}{\sqrt{2\pi}} x - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{f_2(t)\sqrt{t} dt}{t - x}$.

Определялись значения параметра d_0 , характеризующего зону контакта берегов трещины в нулевом приближении, а также контактное напряжение $p_y^{(0)}(x)$ в зависимости от геометрических, теплофизических и механических параметров упругой плоскости и наведенного температурного поля.

Аналогично, по изложенной методике решалось интегральное уравнение (12) с дополнительным условием (14) для определения контактных касательных напряжений $p_{xy}^{(0)}(x)$ и размера зоны контакта берегов трещины поперечного сдвига.

После нахождения решения в нулевом приближении переходим к отысканию решения в первом приближении. Находим функции N и T по формулам (5). Решение граничной задачи (4) запишется в виде

$$\Phi_1(z) = \Omega_1(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z}} \int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{t} f_1(t) dt}{t - z} + \frac{K_I^{(1)} - iK_{II}^{(1)}}{2\sqrt{2\pi z}},$$

где $f_1(x) = \begin{cases} N - T & \text{на свободных берегах трещины} \\ N - T + p_y^{(1)} - ip_{xy}^{(1)} & \text{на берегах контактной зоны} \end{cases}$.

Для окончательного определения потенциалов $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z)$ необходимо найти контактные напряжения $p_y^{(1)}(x)$ и $p_{xy}^{(1)}(x)$ на участке контакта между кромками трещины в первом приближении. Поступая аналогично нулевому приближению, получим комплексное интегральное уравнение относительно неизвестных функций $p_y^{(1)}(x)$ и $p_{xy}^{(1)}(x)$

$$-\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 (N - iT) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt - \frac{1}{\pi i} \int_{-d_1}^0 (p_y^{(1)} - ip_{xy}^{(1)}) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \\ + \frac{2(K_I^{(1)} - iK_{II}^{(1)})}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{x} = 0 \quad (-d_1 \leq x \leq 0). \quad (17)$$

Отделяя в (17) действительные и мнимые части, получим, как и в нулевом приближении, два действительных интегральных уравнения относительно неизвестных функций $p_y^{(1)}(x)$ и $p_{xy}^{(1)}(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-d_1}^0 p_y^{(1)} \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 N(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt - \frac{2K_I^{(1)}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{-x} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-d_1}^0 p_{xy}^{(1)} \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 T(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt - \frac{2K_{II}^{(1)}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{-x} = 0. \quad (19)$$

Для замкнутости каждого интегрального уравнения не хватает одного уравнения, определяющего размер контактной концевой зоны в первом приближении. Записывая условие конечности напряжений в первом приближении, получаем:

$$\frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{\pi}} \int_{-d_1}^0 \frac{p_y^{(1)}(x)}{\sqrt{x}} dx + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{N(x)}{\sqrt{x}} dx - K_I^{(1)} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{\pi}} \int_{-d_1}^0 \frac{p_{xy}^{(1)}(x)}{\sqrt{x}} dx + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{T(x)}{\sqrt{x}} dx - K_{II}^{(1)} = 0. \quad (21)$$

Дальнейший ход решения уравнений (18), (20) и (19), (21) аналогичен вышеизложенному для случая нулевого приближения.

Окончательно находим

$$p_y = p_y^{(0)} + \varepsilon p_y^{(1)}, \quad p_{xy} = p_{xy}^{(0)} + \varepsilon p_{xy}^{(1)}, \quad d = d_0 + \varepsilon d_1.$$

Анализ закрытия трещины в плоскости с помощью наведенного температурного поля сводится в каждом приближении к параметрическому исследованию сингулярных интегральных уравнений при различных законах распределения температурных полей и напряжений в плоскости, геометрических параметрах, а также механических постоянных материала. Непосредственно из решения сингулярных интегральных уравнений и дополнительных условий определяются нормальные и касательные усилия в концевой области, а также размер зоны контакта берегов трещины.

На рис. 2 и 3 приведены графики распределения нормального и касательного контактных напряжений вдоль контактной зоны. При расчетах были использованы безразмерные координаты $x' = 1 + 2x/d$. Наибольшие значения контактных напряжений находятся в средней части

концевой зоны, где берега трещины смыкаются. Характер изменения касательных контактных напряжений $p_{xy}(x)$ вдоль контактной зоны подобен изменению нормальных контактных напряжений $p_y(x)$, но абсолютные значения существенно меньше.

В таблице приводятся значения размеров контактной зоны $d_*^I = d_I/L$ и $d_*^{II} = d_{II}/L$ соответственно для трещины нормального разрыва и для трещины поперечного сдвига (где $l_*^I = 2K_I^2/\pi\sigma_0^2L$; $l_*^{II} = 2K_{II}^2/\pi\sigma_0^2L$) при следующих значениях свободных параметров $\nu=0,3$; $t_* = 4at/L^2 = 10$; $x_0/L = 0,5$; $y_0/L = 0,2$; $b/L = 0,1$, где L и b – координаты центра области S .

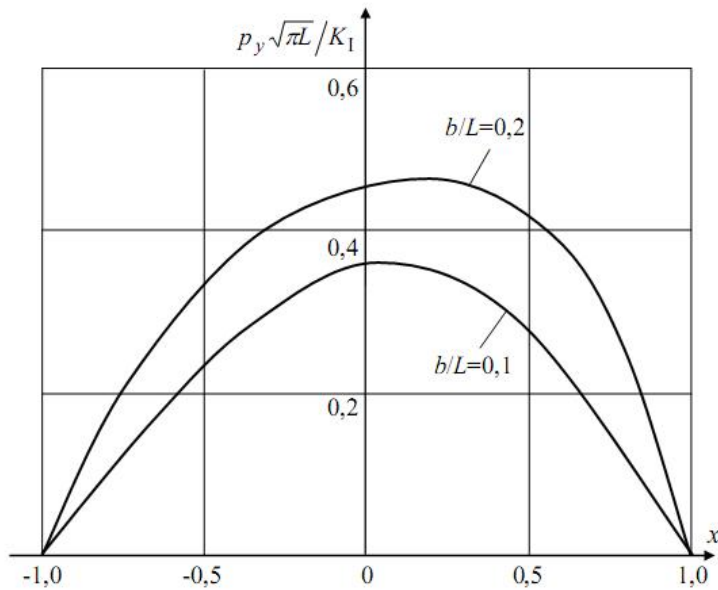


Рис. 2. Зависимость распределения нормальных контактных напряжений $p_y\sqrt{\pi L}/K_I$ вдоль контактной зоны

В расчетах было принято, что поверхность трещины имеет синусоидальную форму.

Таблица. Численные значения размеров контактной зоны

l_*^I	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
d_*^I	0,0943	0,1316	0,2452	0,3128	0,3815	0,4168	0,5102
l_*^{II}	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
d_*^{II}	0,0915	0,1321	0,2411	0,3119	0,3817	0,4153	0,5123

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что локальное температурное поле, созданное в течение некоторого ограниченного времени с целью торможения и частичного закрытия трещины, является непреодолимым барьером [1] на пути ее распространения. Последующее снятие температурного поля ($t \rightarrow \infty$) будет постепенно снижать значения сжимающих напряжений и эффект частичного закрытия трещины. Коэффициенты интенсивности напряжений, достигнув при закрытии трещины нулевого значения, постепенно будут возрастать до величины, обусловленной механической нагрузкой.

Под действием локального температурного поля максимальное растягивающее напряжение уменьшается и поворачивается по направлению к тепловому источнику. Это приводит [1],

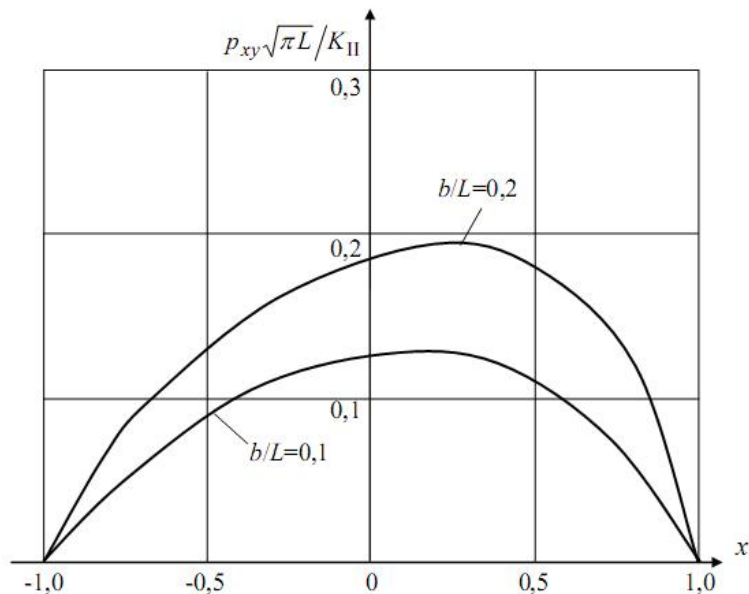


Рис. 3. Зависимость распределения касательных контактных напряжений $p_{xy}\sqrt{\pi L}/K_I$ вдоль контактной зоны

[14] к наблюдаемому в опытах смещению плоскости разрыва. После снятия локального температурного поля это обстоятельство будет способствовать увеличению внешней нагрузки, необходимой для роста трещины.

Заключение. Предложена эффективная схема расчета частично закрытой при воздействии теплового источника криволинейной трещины под действием растягивающих напряжений. Анализ частичного закрытия искривленной трещины в листовом элементе с помощью наведенного температурного поля сводится к параметрическому исследованию сингулярных интегральных уравнений при различных законах распределения температурных полей и напряжений в плоскости, геометрии поверхности параметров трещины, а также механических постоянных материала. На основе полученных результатов можно считать, что созданное локальное температурное поле является непреодолимым барьером на пути ее движения.

Учет возмущенного температурного поля будет усиливать тормозящий эффект наведенного температурного поля напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Финкель, В. М. Физические основы торможения разрушения / В. М. Финкель. – М. : Металлургия, 1977. – 360 с.
- [2] Партон, В. З. Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М. : Наука, 1985. – 504 с.
- [3] Кадиев, Р. И. Влияние теплового источника на динамику роста трещины / Р. И. Кадиев, В. М. Мирсалимов // Вестник Даг. гос. ун.-та. – 2001. – № 4. – С. 69–73.
- [4] Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / И. И. Гольденבלата. – М. : Машиностроение, 1965. – 567 с.
- [5] Тимошенко, С. П. Сопротивление материалов / С. П. Тимошенко. – М. : Наука, 1965. – Т. 2. – 480 с.
- [6] Беленький, В. Д. Закрытие центральной трещины в круговом диске под действием температурного поля / В. Д. Беленький // Проблемы прочности. – 1984. – № 6. – С. 35–38.

- [7] *Кадиев, Р. И.* Коэффициенты интенсивности напряжений для пластины, ослабленной трещиной, при воздействии теплового источника / Р.И. Кадиев // Вестник ДНЦ РАН. – 2003. – № 14. – С. 15–18.
- [8] *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
- [9] *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [10] *Карслоу, Г.* Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 488 с.
- [11] *Паркус, Г.* Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – М. : Физматгиз, 1963. – 252 с.
- [12] *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Наука, 1977. – 640 с.
- [13] *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [14] *Морозов, Е. М.* О расчете на прочность по стадии разрушения / Е. М. Морозов // Деформация и разрушение при термических и механических воздействиях. – М. : Атомиздат, 1969. – Вып. 3. – С. 87–90.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович,

доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

e-mail: mir-vagif@mail.ru

Мустафаев Азер Байрам оглы,

кандидат физико-математических наук, докторант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

e-mail: azer_bm@list.ru

V. M. Mirsalimov, A. B. Mustafayev

PARTIAL CONTACT OF SURFACES OF THE CURVILINEAR CRACK IN A PLATE ELEMENT UNDER LOCAL THERMAL FIELD

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan

Abstract. The mathematical model of partial closure of the curvilinear crack in an isotropic plane using the local temperature change near the end of the crack was described. It is assumed that the interaction between the crack surfaces under external loads and induced thermoelastic stress field can lead to zones of overlap. Contact stresses, the size of contact zone, where the surfaces of curvilinear crack are closed, are found.

Keywords: plate element, curvilinear crack, local temperature field, contact zone, contact stresses.

REFERENCES

- [1] *Finkel, V. M.* Physical basis of fracture retardation / V. M. Finkel. – M. : Metallurgiya, 1977. – 360 p.
- [2] *Parton, V. Z.* Elastic-plastic fracture mechanics / V. Z. Parton, E. M. Morozov. – M. : Nauka, 1985. – 504 p.
- [3] *Kadiyev, R. I.* Effect of heat source on the dynamics of crack growth / R. I. Kadiyev, V. M. Mirsalimov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2001. – No. 4. – P. 69–73.
- [4] *Strength, stability and vibrations calculations at high temperatures* / Ed. II Goldenblat. – M. : Mashinostroeniye, 1965. – 567 p.
- [5] *Timoshenko, S. P.* Strength of materials / S. P. Timoshenko. – M. : Nauka, 1965. – 480 p.
- [6] *Belen'kii, V. D.* Closure of a central crack in a circular disk under the influence of a temperature field / V. D. Belen'kii // Strength of Materials. – 1984. – Vol. 16. – Issue 6. – P. 806–810.
- [7] *Kadiyev, R. I.* The stress intensity factors for a plate weakened crack under the influence the heat source / R. I. Kadiyev // Vestnik Dag. nauch. sentra rossiyskoy akad. nauk. – 2003. – No. 14. – P. 15–18.
- [8] *Cherepanov, G. P.* Mechanics of brittle fracture / G. P. Cherepanov. – New York : Mc Graw-Hill, 1979. – 950 p.
- [9] *Muskhelishvili, N. I.* Some basic problems of mathematical theory of elasticity / N. I. Muskhelishvili. – M. : Nauka, 1977. – 707 p.
- [10] *Carslaw, H. S.* Conduction of heat in solids / H. S. Carslaw, J. C. Jaeger. – M. : Nauka, 1964. – 488 p.
- [11] *Parkus, H.* Transient thermal stresses / H. Parkus. – M. : Fizmatgiz, 1963. – 252 p.
- [12] *Gakhov, F. D.* Boundary value problems / F. D. Gakhov. – M. : Nauka, 1977. – 640 p.
- [13] *Mirsalimov, V. M.* Non-one-dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987. – 256 p.
- [14] *Morozov, E. M.* On calculation of the strength on the stage of destruction / E. M. Morozov // Deformation and fracture under thermal and mechanical effects. – M. : Atomizdat, 1969. – Vol. 3. – P. 87–90.

Mirsalimov, Vagif Mirakhmedovich

Dr Sci. Phys & Math, Professor, Chief Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku

Mustafayev, Azer Bayram oglu

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku

В. Г. Ефремов, Т. В. Митрофанова, Т. Н. Павлова

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ
ИЗ АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ НЕСОВПАДЕНИИ ОСЕЙ
ПРОДОЛЬНОЙ АНИЗОТРОПИИ С НАПРАВЛЕНИЯМИ КАНОНИЧЕСКИХ
ОСЕЙ ЭЛЛИПСА ОТВЕРСТИЯ**

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В статье рассматривается напряженно-деформированное состояние тонкой пластины с эллиптическим отверстием из анизотропного упруго-идеальнопластического материала при двусосном растяжении. Решение задачи находится методом малого параметра [2], в первом приближении определены компоненты напряжения в упругой и пластической областях [3], определена граница пластической зоны.

Ключевые слова: напряжение, деформация, упругость, пластичность, анизотропия, растяжение, отверстие.

УДК: 539.374

Предположим, что главные оси анизотропии ориентированы в системе координат x', y' , наклоненной к системе x, y под углом θ_0 .

Рассмотрим условие пластичности в новой системе координат x', y' :

$$\left(\frac{\sigma_{x*}^p}{k_1} - 1\right)\left(\frac{\sigma_{y*}^p}{k_2} - 1\right) - F\tau_{x*y*}^{(p)2} = 0. \quad (1)$$

Условие пластичности (1) определяет свойства анизотропного идеальнопластического материала. Коэффициенты k_1, k_2, F характеризуют анизотропию материала. Отметим, что величины k_1, k_2, F – безразмерные. При $k_1 = k_2 = F = 1$ согласно (1) имеет место изотропный материал.

Связь между напряжениями в новой и старой системе координат запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{x*} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta_0 + \tau_{xy} \sin 2\theta_0, \\ \sigma_{y*} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta_0 - \tau_{xy} \sin 2\theta_0, \\ \tau_{x*y*} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta_0 + \tau_{xy} \cos 2\theta_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Связь между напряжениями в декартовой систем координат x, y и напряжениями в полярной системе координат ρ, θ имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3), (2) получим условие пластичности в полярных координатах:

Поступила 28.02.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 13-01-97029, 14-01-31323 мол_a)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4k_1k_2} [(\sigma_\rho^p + \sigma_\theta^p)^2 - (k_1 + k_2)(\sigma_\rho^p + \sigma_\theta^p) - \\
& - \left((\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) \cos(2\theta) - \tau_{\rho\theta}^{(p)} \sin(2\theta) \right)^2 \times \cos^2(2\theta_0) - \\
& - 2 \left(-(\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) \sin(2\theta) + 2\tau_{\rho\theta}^{(p)} \cos(2\theta) \right) \times \\
& \times \left((\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) \cos(2\theta) + 2\tau_{\rho\theta}^{(p)} \sin(2\theta) \right) \cos(2\theta_0) \sin(2\theta_0) + \\
& + 2(k_1 - k_2) \left((\sigma_\rho^p + \sigma_\theta^p) \cos(2\theta) + 2\tau_{\rho\theta}^{(p)} \sin(2\theta) \right) \cos(2\theta_0) - \\
& - 2 \left(-(\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) \sin(2\theta) + 2\tau_{\rho\theta}^{(p)} \cos(2\theta) \right)^2 \times \sin^2(2\theta_0) + \\
& + 2(k_1 - k_2) \left(-(\sigma_\rho^p + \sigma_\theta^p) \sin(2\theta) + 2\tau_{\rho\theta}^{(p)} \cos(2\theta) \right) \sin(2\theta_0) + 4k_1k_2 \Big] - \\
& - F \left[- \left((\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) \cos(2\theta) + 2\tau_{\rho\theta}^{(p)} \sin(2\theta) \right) \sin(2\theta_0) + \right. \\
& \left. + 4 \left(-(\sigma_\rho^p + \sigma_\theta^p) \sin(2\theta) + 2\tau_{\rho\theta}^{(p)} \cos(2\theta) \right) \cos(2\theta_0) \right]^2 = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Решение будем искать в виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(')} + \delta^2 \sigma_{ij}^{(')} + \delta^3 \sigma_{ij}^{(')} \dots, \\
k_1 &= 1 + \delta k^*_1, k_2 = 1 + \delta k^*_2, F = 1 + \delta F^*, \\
\delta &= \frac{p_1 - p_2}{2k}, \quad p_1, p_2 - \text{const}.
\end{aligned} \tag{5}$$

В дальнейшем положим:

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0, \tag{6}$$

где индекс "0" наверху приписан компонентам в нулевом исходном состоянии при $\delta = 0$.

Подставив в уравнение (4) следующие выражения (5), получим

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}}{2} + \frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{2} \cos(2\theta) \cos(2\theta_0) - \frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{2} \sin(2\theta) \sin(2\theta_0) - 1 \right) + \right. \\
& + \frac{\delta}{2} \left((\sigma_\rho^{(')}p + \sigma_\theta^{(')}p) + (\sigma_\rho^{(')}p - \sigma_\theta^{(')}p) \cos(2\theta) \cos(2\theta_0) + (\sigma_\rho^{(')}p - \sigma_\theta^{(')}p) \sin(2\theta) \sin(2\theta_0) - \right. \\
& - k_1^{(')} (\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}) - k_1^{(')} (\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}) \cos(2\theta) \cos(2\theta_0) + \\
& + k_1^{(')} (\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}) \sin(2\theta) \sin(2\theta_0) \\
& \left. \left. + 2\tau_{\rho\theta}^{(')}p (\sin 2\theta \cos(2\theta_0) + \cos(2\theta) \sin(2\theta_0)) \right] \times \right. \\
& \times \left[\left(\frac{\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}}{2} - \frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{2} \cos(2\theta) \cos(2\theta_0) + \frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{2} \sin(2\theta) \sin(2\theta_0) - 1 \right) + \right. \\
& + \frac{\delta}{2} \left((\sigma_\rho^{(')}p + \sigma_\theta^{(')}p) - (\sigma_\rho^{(')}p - \sigma_\theta^{(')}p) \cos(2\theta) \cos(2\theta_0) + (\sigma_\rho^{(')}p - \sigma_\theta^{(')}p) \sin(2\theta) \sin(2\theta_0) - \right. \\
& - k_2^{(')} (\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}) + k_2^{(')} (\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}) \cos(2\theta) \cos(2\theta_0) - \\
& - k_2^{(')} (\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}) \sin(2\theta) \sin(2\theta_0) - \\
& \left. \left. - 2\tau_{\rho\theta}^{(')}p (\sin 2\theta \cos(2\theta_0) + \cos(2\theta) \sin(2\theta_0)) \right] \times \right. \\
& - \frac{F^*}{4} \times \left[\left[\left((\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}) + \delta (\sigma_\rho^{(')}p - \sigma_\theta^{(')}p) \right) \cos(2\theta) + 4\delta \tau_{\rho\theta}^{(')}p \sin(2\theta) \right] \sin(2\theta_0) + \right. \\
& \left. \left[\left((\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}) + \delta (\sigma_\rho^{(')}p - \sigma_\theta^{(')}p) \right) \sin(2\theta) + 4\delta \tau_{\rho\theta}^{(')}p \cos(2\theta) \right] \cos(2\theta_0) \right]^2 = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Для нулевого приближения получаем случай изотропного материала

$$\sigma_\rho^{(0)p} \sigma_\theta^{(0)p} - (\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}) + 1 = 0. \tag{8}$$

Для первого приближения имеет место условие пластичности:

$$\sigma_{\theta}^{(')p} = A_0 N_2 + B_0 N_1 - F * C_0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\sigma_{\rho}^{(0)p} + \sigma_{\theta}^{(0)p}}{2} + \frac{\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p}}{2} \cos(2\theta) \cos(2\theta_0) - \\ &\quad - \frac{\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p}}{2} \sin(2\theta) \sin(2\theta_0) - 1, \\ B_0 &= \frac{\sigma_{\rho}^{(0)p} + \sigma_{\theta}^{(0)p}}{2} - \frac{\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p}}{2} \cos(2\theta) \cos(2\theta_0) + \\ &\quad + \frac{\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p}}{2} \sin(2\theta) \sin(2\theta_0) - 1, \\ N_1 &= \frac{k*1}{2} \left[\left(\sigma_{\rho}^{(0)p} + \sigma_{\theta}^{(0)p} \right) + \left(\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p} \right) \cos(2\theta) \cos(2\theta_0) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p} \right) \sin(2\theta) \sin(2\theta_0) \right] \\ N_2 &= \frac{k*2}{2} \left[\left(\sigma_{\rho}^{(0)p} + \sigma_{\theta}^{(0)p} \right) - \left(\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p} \right) \cos(2\theta) \cos(2\theta_0) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p} \right) \sin(2\theta) \sin(2\theta_0) \right] \\ C_0 &= \frac{(\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p})^2}{4} \cos^2(2\theta) \sin^2(2\theta_0) + \frac{(\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p})^2}{4} \sin^2(2\theta) \cos^2(2\theta_0) + \\ &\quad + \frac{(\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p})^2}{2} \cos(2\theta) \sin(2\theta) \cos(2\theta_0) \sin(2\theta_0). \end{aligned}$$

Соотношения (9) согласно [5, 113] примем в виде

$$\sigma_{\theta}^{(')p} = -\frac{\alpha}{4\rho^2} [(k*1 + k*2) (2\rho - \frac{\alpha}{2}) + \frac{F*}{2} + A_2 \rho \cos(2\theta) - B_2 \rho \sin(2\theta) + A_4 \cos(4\theta) - B_4 \sin(4\theta)], \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} A_2 &= 2(k*1 - k*2) \cos(2\theta_0), \\ B_2 &= 2(k*1 - k*2) \sin(2\theta_0), \\ A_4 &= (\alpha(k*1 + k*2) - F*) \frac{\cos(4\theta_0)}{2}, \\ B_4 &= (\alpha(k*1 + k*2) - F*) \frac{\sin(4\theta_0)}{2}. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия удовлетворим, полагая

$$\begin{cases} \sigma_{\rho}^* = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_{\theta}^* = \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \rho^2}, \\ \tau_{\rho\theta}^* = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta} \right). \end{cases} \quad (11)$$

Найдем значение функции Φ , общее решение имеет вид

$$\Phi_{\text{общ}} = \Phi_{\text{неодн}} + \Phi_{\text{одн}}.$$

Из (10) и (11) найдем значение функции Φ^p :

$$\begin{aligned} \Phi^p &= \frac{\alpha}{2} \rho (k*1 + k*2) (1 - \ln \rho) + \frac{\alpha}{8} \left(\frac{\alpha}{\rho} (k*1 + k*2) + F * \ln \rho \right) + (C_{01} \rho + C_{02}) + \\ &\quad + \left(\frac{\alpha}{4} A_2 \rho (\ln \rho - 1) + C_{21} \rho + C_{22} \right) \cos(2\theta) + \\ &\quad + \left(\frac{\alpha}{4} B_2 \rho (\ln \rho - 1) + C_{21}^* \rho + C_{22}^* \right) \sin(2\theta) + \\ &\quad + \left(\frac{\alpha}{4} A_4 \ln \rho + C_{41} \rho + C_{42} \right) \cos(4\theta) - \\ &\quad - \left(\frac{\alpha}{4} B_4 \ln \rho - C_{41}^* \rho - C_{42}^* \right) \sin(4\theta). \end{aligned} \quad (12)$$

Из (11) и (12) получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(\prime)P} = & \frac{1}{8\rho^3} (\alpha (k_{*1} + k_{*2}) (-4\rho^2 \ln \rho - \alpha) + \alpha \rho F_{*} + 8C_{00}\rho^2) + \\
& + (2\alpha\rho^2 (-4 + 3 \ln \rho) A_2 - 32\rho C_{22} - 24\rho^2 C_{12}) \cos(2\theta) + \\
& + (2\alpha\rho^2 (4 - 3 \ln \rho) B_2 - 32\rho C_{22}^{*} - 24\rho^2 C_{12}^{*}) \sin(2\theta) + \\
& + (2\alpha\rho A_4 (1 - 16 \ln \rho) - 128\rho C_{24} - 120\rho^2 C_{41}) \cos(4\theta) + \\
& + (2\alpha\rho B_4 (-1 + 16 \ln \rho) - 128\rho C_{24}^{*} - 120\rho^2 C_{41}^{*}) \sin(4\theta).
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\rho\theta}^{(\prime)P} = & -\frac{2}{\rho^2} ((\alpha\rho B_2 - 4C_{22}^{*}) \cos(2\theta) + (\alpha\rho A_2 + 4C_{22}) \sin(2\theta) + \\
& + (2\alpha B_4 (\ln \rho - 1) - 8C_{42}^{*}) \cos(4\theta) + (2\alpha A_4 (\ln \rho - 1) + 8C_{42}) \sin(4\theta)).
\end{aligned}$$

В первом приближении граничные условия согласно [2] (контур свободен от усилий) имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(\prime)} + \frac{d\sigma_{\rho}^{(0)}}{d\rho} \rho_1 &= 0, \\
\tau_{\rho\theta}^{(\prime)} - (\sigma_{\theta}^{(0)} - \sigma_{\rho}^{(0)}) \dot{R}_1 &= 0,
\end{aligned} \tag{14}$$

где согласно [2]

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \alpha d_1 \cos 2\theta, \\
R_1 = \frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad \rho_0 &= -\alpha.
\end{aligned}$$

С учетом (14) граничные условия запишутся

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(\prime)P} &= -d_1 \cos(2\theta) \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \\
\tau_{\rho\theta}^{(\prime)P} &= -2d_1 \sin(2\theta) \quad \text{при} \quad \rho = \alpha.
\end{aligned} \tag{15}$$

Из (13) и (15) получим

$$\begin{aligned}
C_{01} &= \frac{(4\alpha \ln \alpha + 1) (k_{*1} + k_{*2}) - F_{*}}{8}, \\
\frac{d_1}{3} \left(\frac{1}{4\alpha^2} + 4\alpha \right) - \frac{\alpha}{4} A_2 \ln \alpha, \\
C_{22} &= \alpha^2 \left(d_1 + \frac{A_2}{4} \right), \\
C_{41} &= -\frac{\alpha A_4}{4}, \\
C_{42} &= -\frac{\alpha A_4 (\ln \alpha - 1)}{4}, \\
C_{22}^{*} &= \alpha^2 \frac{B_2}{4}, \\
C_{41}^{*} &= -\frac{\alpha B_4}{4}, \\
C_{42}^{*} &= -\frac{\alpha B_4 (\ln \alpha - 1)}{4}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Согласно (13) и (16) компоненты напряженного состояния в первом приближения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(\prime)p} &= \frac{1}{8\rho^3} ((k *_1 + k *_2) (-\alpha^2 + \rho^2) + \rho F * (\alpha - \rho)) + \\ &+ (8A_2\alpha\rho(-\alpha + \rho) + 6A_2\rho\alpha^2(\ln \alpha + \ln \rho) + 2\rho(16\alpha^2d_1 - \frac{3}{\alpha^2}\rho + 48\rho\alpha)) \cos(2\theta) + \\ &+ (8B_2\alpha\rho(-\alpha + \rho) - 6B_2\rho\alpha^2(\ln \alpha + \ln \rho)) \sin(2\theta) + \\ &+ 2\alpha\rho A_4(1 + 16(\ln \alpha - \ln \rho - 1) + 15\rho) \cos(4\theta) + \\ &+ 2\alpha\rho B_4(-1 + 16(\ln \rho + \ln \alpha - 1) + 15\rho) \sin(4\theta). \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(\prime)p} &= -\frac{\alpha}{4\rho^2} [(k *_1 + k *_2) \left(2\rho - \frac{\alpha}{\rho}\right) + \frac{F*}{2} + A_2\rho \cos(2\theta) - \\ &- B_2\rho \sin(2\theta) + A_4 \cos(4\theta) - B_4 \sin(4\theta)] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta}^{(\prime)p} &= -\frac{2}{\rho^2} (\alpha B_2(\rho - \alpha) \cos(2\theta) + (\alpha\rho A_2 + 4\alpha^2(d_1 + \frac{A_2}{4})) \sin(2\theta) \\ &+ 2\alpha B_4(\ln \rho - \ln \alpha) \cos(4\theta) + 2\alpha A_4(\ln \rho - \ln \alpha) \sin(4\theta)) . \end{aligned}$$

Граничные условия на бесконечности в упругой зоне запишем в виде

$$\sigma_\rho^e|_{\rho=\infty} = q - \delta \cos(2\theta), \quad \sigma_\theta^e|_{\rho=\infty} = q + \delta \cos(2\theta), \quad \tau_{\rho\theta}^e|_{\rho=\infty} = \delta \sin(2\theta), \quad (18)$$

где

$$\delta = \frac{p_1 - p_2}{2k}, \quad q = \frac{p_1 + p_2}{2k}.$$

Уравнение упругопластической границы запишем в виде

$$\rho_s = 1 + \delta\rho_s^{(\prime)} + \delta^2\rho_s^{(\prime\prime)} \dots \quad (19)$$

Условия сопряжения на упругопластической границе имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^p|_{\rho_s} &= \sigma_\rho^e|_{\rho_s}, \quad \tau_{\rho\theta}^p|_{\rho_s} = \tau_{\rho\theta}^e|_{\rho_s}, \\ u_{\rho\theta}^p|_{\rho_s} &= u_{\rho\theta}^e|_{\rho_s}, \quad u_\rho^p|_{\rho_s} = u_\rho^e|_{\rho_s}, \quad u_\theta^p|_{\rho_s} = u_\theta^e|_{\rho_s}. \end{aligned} \quad (20)$$

В первом приближение условие сопряжения (20) согласно (19) примут вид

$$\sigma_\rho^{(\prime)p}|_{\rho=1} = \sigma_\rho^{(\prime)e}|_{\rho=1}, \quad \sigma_\theta^{(\prime)p} + \frac{\partial\sigma_\theta^{(0)p}}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1} = \sigma_\theta^{(\prime)e} + \frac{\partial\sigma_\theta^{(0)e}}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(\prime)p} = \tau_{\rho\theta}^{(\prime)e}. \quad (21)$$

В упругой зоне ($1 < \rho < \infty$) распределение напряжений определяется согласно [2]. Удовлетворяя граничному условию при $\rho = \infty$, где $q = p/k$, получим

$$\sigma_\rho^{(0)e} = q - \frac{\alpha}{2\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = q + \frac{\alpha}{2\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0, \quad q = 1 - \frac{\alpha}{2}. \quad (22)$$

Компоненты напряжения в упругой области в первом приближении согласно (17) и условия сопряжения (20)

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(\prime)e} &= \frac{K}{\rho^2} + \left(\left(\frac{2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4} \right) N - \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) \right) \cos(2\theta) + \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4} \right) M \cos(4\theta) + \\ &+ \left(\frac{2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4} \right) N^* \sin(2\theta) + \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4} \right) M^* \sin(4\theta), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(\prime)e} &= -\frac{K}{\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho^4} N + 1 + \frac{3}{\rho^4} \right) \cos(2\theta) + \left(\frac{2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4} \right) M \cos(4\theta) + \\ &+ \frac{1}{\rho^4} N^* \sin(2\theta) + \left(\frac{2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4} \right) M^* \sin(4\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta}^{(\prime)e} &= \left(\left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) \bar{N} - \left(-1 - \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) \right) \sin(2\theta) + \left(\frac{3}{\rho^6} - \frac{2}{\rho^4} \right) \bar{M} \sin(4\theta) + \\ &+ \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) \bar{N}^* \cos(2\theta) + \left(\frac{3}{\rho^6} - \frac{2}{\rho^4} \right) \bar{M}^* \sin(4\theta). \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{8} (F * (\alpha - 1) + (k * _1 + k * _2) (4\alpha \ln \alpha - 1)), \\
N &= \frac{\alpha}{8} (A_2 (-8(1 + \alpha) + 6 \ln \alpha) - 2d_1 \alpha (17\alpha + 16)), \\
N^* &= \frac{\alpha}{8} B_2 (-8(1 + \alpha) + 6 \ln \alpha), \\
M &= 4A_4 \alpha \ln \alpha, \\
M^* &= 4B_4 \alpha \ln \alpha, \\
\bar{N} &= -\frac{\alpha}{2} B_2 (1 - \alpha), \\
\bar{N}^* &= -\frac{\alpha}{2} A_2 (1 + \alpha) - 2\alpha^2 d_1, \\
\bar{M} &= \alpha A_4 \ln \alpha, \\
\bar{M}^* &= \alpha B_4 \ln \alpha.
\end{aligned}$$

Для определения радиуса упругопластической области в первом приближении получим

$$\rho_s^{(I)} = \frac{\sigma_\theta^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)e}}{\frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho}}. \quad (24)$$

Для определения радиуса упругопластической области в первом приближении получим согласно (24)

$$\begin{aligned}
\rho'_s &= -\frac{k * _1 + k * _2}{2} \left(\frac{1}{4} + \alpha (\ln \alpha - 1) + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \frac{F *}{8} (5 - \alpha) + \\
&+ \left(A_2 (-\alpha(1 + \alpha) + \frac{3}{4} \alpha \ln \alpha - 1) - \frac{d_1 \alpha^2 (17\alpha + 16)}{4} + 4 \right) \cos(2\theta) + \\
&+ B_2 (\alpha(1 - \alpha) + \frac{3}{4} \alpha \ln \alpha - 1) \sin(2\theta) + \\
&+ A_4 (4\alpha \ln \alpha - 1) \cos(4\theta) + B_4 (4\alpha \ln \alpha - 1) \sin(4\theta), \text{ при } \rho = 1.
\end{aligned} \quad (25)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Бицено, К. Б.* Техническая динамика / К. Б. Бицено, Р. Граммель. – Л. : Госехиздат, 1950. – 900 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [3] *Кержаев, А. П.* Деформированное состояние анизотропного кольцевого диска, находящегося под действием равномерных растягивающих усилий / А. П. Кержаев // Наука и образование в XXI веке : сб. науч. тр. по материалам междунар. науч.-практ. конф. : в 6 ч. Ч. III. – М. : АР-Консалт, 2013. – С. 139–140.
- [4] *Кержаев, А. П.* Деформированное состояние анизотропной тонкой пластины при двусосном растяжении / А. П. Кержаев // Международное научное издание “Современные фундаментальные и прикладные исследования”. – 2013. – № 1 (15). – Т. 1. – С. 84–87.
- [5] *Павлова, Т. Н.* Упругопластическое состояние тонкой пластины из анизотропного материала, ослабленной отверстием под действием растягивающих усилий / Т. Н. Павлова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2010. – № 2 (66). – С. 112–121.

[6] Павлова, Т. Н. Напряжено-деформированное упругопластическое состояние тонкой анизотропной пластины, ослабленное отверстием при двuosном растяжении / Т. Н. Павлова. – Чебоксары, 2010. – 11 с. – Библиогр.: 2 назв. – Деп. в ВИНТИ 23.04.10, № 224-В2010.

[7] Павлова, Т. Н. Об определении перемещений в задаче напряженно-деформированного состояния тонкой пластины с эллиптическим отверстием / Т. Н. Павлова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2010. – № 1 (65). – С. 64–69.

Ефремов Вячеслав Геннадьевич,

кандидат физико-математических наук, доцент, декан физико-математического факультета, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: sl_270266@mail.ru

Митрофанова Татьяна Валерьевна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: mitrofanova_tv@mail.ru

Павлова Татьяна Николаевна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: tn_pavlova@mail.ru

V. G. Efremov, T. V. Mitrofanova, T. N. Pavlova

**DETERMINATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THIN PLATE
WITH AN ELLIPTIC HOLE ANISOTROPIC MATERIAL, IF NOT THE
LONGITUDINAL AXIS OF ANISOTROPY DIRECTIONS CANONICAL AXES
OF THE ELLIPSE HOLES**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. In this article the stress-strain state of a thin plate with an elliptic hole of anisotropic elastic-idealplastic material with biaxial stretching. Solution of the problem is the small parameter method [2], in the first approximation defined stress components in the elastic and plastic regions [3], defined boundary of the plastic zone.

Keywords: tension, deformation, elasticity, plasticity, anisotropy, an aperture.

REFERENCES

- [1] *Bitseno, K. B.* Technical dynamics / K. B. Bitseno, R. Grammel. – L. : Gosehizdat, 1950. – 900 p.
- [2] *Ivlev, D. D.* The theory of perfect plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 231 p.
- [3] *Kerzhaev, A. P.* Strain state of anisotropic annular disk under the action of uniform tensile stress / A. P. Kerzhaev // Science and Education in the XXI Century: Sat scientific. tr. Materials Intern. scientific-practical. conf. : 6 hrs Charles III. - M.: AR-Consult, 2013. – P. 139–140.
- [4] *Kerzhaev, A. P.* Strain state of anisotropic thin plate with biaxial stretching / A. P. Kerzhaev // International scientific publication “Modern basic and applied research” / International scientific periodical “Modern Fundamental and Applied Researches”. - Kislovodsk, 2013. – № 1 (6). – V. 1. – P. 84–87.
- [5] *Pavlova, T. N.* Elastoplastic state of a thin plate of an anisotropic material, weakened hole under tension / T. N. Pavlova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2010. – № 2 (66). – P. 112–121.
- [6] *Pavlova, T. N.* Tense-deformed state of a thin elastic-plastic anisotropic plate weakened by a hole with biaxial stretching / T. N. Pavlova - Cheboksary, 2010. – 11 p. – Bibliography : 2 refs. – Dep. VINITI 23.04.10, № 224-B2010.
- [7] *Pavlova, T. N.* On the determination of displacements in the problem of the stress-strain state of a thin plate with an elliptic hole / T. N. Pavlova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2010. – № 1 (65). – P. 64–69.

Efremov, Vyacheslav Gennadyevich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Dean of Physical & Mathematical Faculty, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Mitrofanova, Tatyana Valeryevna

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor of Department Computer Science and Computer Engineering, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Pavlova, Tatyana Nikolaevna

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor of Department Computer Science and Computer Engineering, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ НЕЛИНЕЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ ПРИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию деформированного состояния толстостенной нелинейно-неоднородной трубы при трансляционной анизотропии. Задачи определения упругопластического состояния неоднородных тел рассматривались в работах [2], [5], [7], анизотропных тел исследовались в работах [4], [6].

Ключевые слова: труба, перемещения, несжимаемость, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Рассмотрим толстостенную трубу, находящуюся под действием внутреннего давления p (рис. 1), r_a – внутренний радиус трубы, r_b – внешний радиус трубы.

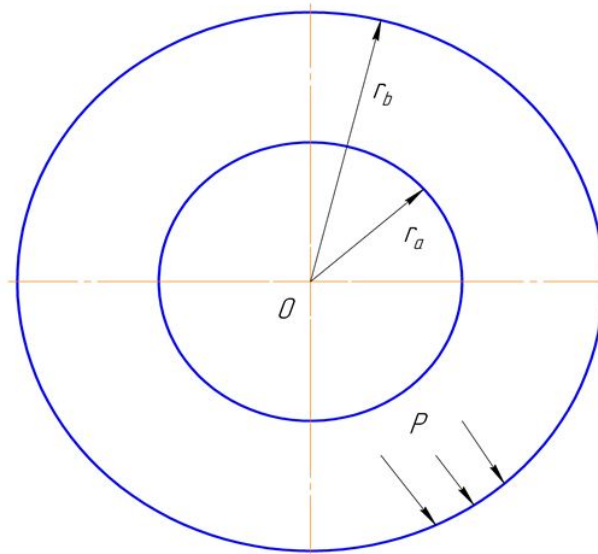


Рис 1. Толстостенная труба

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра δ . Пусть

Поступила 24.02.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 13-01-97033)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma'_{ij}\delta + \sigma''_{ij}\delta^2 + \dots, \quad u = u^{(0)} + u'\delta + u''\delta^2 + \dots,$$

$$\nu = \nu^{(0)} + \nu'\delta + \nu''\delta^2 + \dots,$$

где σ_{ij} – компоненты напряжений, u, ν – компоненты перемещений.

Обозначим $\frac{r_b}{r_a} = \beta$, $\frac{r}{r_a} = \rho$, $\frac{r_s^0}{r_a} = \alpha$, r_s^0 – упругопластическая граница в нулевом приближении.

Предполагается, что в пластической области имеет место условие [3]:

$$\left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{\rho\theta}^2 - 2R \left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2}\right) \cos(2\theta + \eta) -$$

$$- 2\tau_{\rho\theta} \sin(2\theta + \eta) + R^2 - 1 - 2\delta \left(\frac{(\rho \cos \theta + A)^2}{a^2} + \frac{(\rho \sin \theta + B)^2}{b^2}\right) = 0, \quad (1)$$

где

$$R = \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + k_3^2}, \quad \frac{k_1 - k_2}{2R} = \cos \eta, \quad \frac{k_3}{2} = \sin \eta, \quad \delta - \text{малый параметр.}$$

Предположим

$$R = \delta R^*, \quad k_1 = \delta k'_1, \quad k_2 = \delta k'_2, \quad k_3 = \delta k'_3,$$

где

$$R^* = \sqrt{\left(\frac{k'_1 - k'_2}{2}\right)^2 + (k'_3)^2}.$$

В упругой области примем материал несжимаемым, коэффициент Пуассона $\mu = \frac{1}{2}$.

Напряженное состояние трубы определено в работе [3]. В нулевом приближении компоненты напряжений имеют вид:

$$\sigma_\rho^{(0)p} = -p + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} = -p + 2 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha},$$

$$\sigma_\rho^{(0)e} = \frac{p + 2 \ln \alpha}{\beta^2 - 1} \left(1 - \frac{\beta^2}{\rho^2}\right), \quad \sigma_\theta^{(0)e} = \frac{p + 2 \ln \alpha}{\beta^2 - 1} \left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2}\right). \quad (2)$$

В первом приближении компоненты напряжений имеют вид:

$$\sigma_p^{\prime p} = \frac{2(b^2 A \cos \theta + B a^2 \sin \theta)(\rho^2 - \alpha^2)}{a^2 b^2 \rho} + \cos(2\theta + \eta) R' \left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\alpha}{\rho} \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha})\right) +$$

$$+ \frac{2}{a^2 b^2} (b^2 A^2 + a^2 B^2) \ln \left(\frac{\rho}{\alpha}\right) + \frac{\sqrt{3} \alpha R'}{\rho} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) \cos(2\theta - \eta) +$$

$$+ \frac{1}{3 \rho a^2 b^2} (\cos(2\theta) \alpha^3 (b^2 - a^2) \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha})), \quad (3)$$

$$\sigma_\theta^{\prime p} = -\frac{2\alpha^2}{a^2 b^2 \rho} (A b^2 \cos \theta + B a^2 \sin \theta) - R' \cos(2\theta + \eta) \left(\frac{\alpha}{\rho} \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) + 1\right) +$$

$$+ \frac{\alpha^2 \sqrt{3} \cos(2\theta) (b^2 - a^2) \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha})}{3 a^2 b^2 \rho} + \frac{\alpha R' \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) \cos(2\theta - \eta)}{\rho} +$$

$$+ \left(\frac{a^2 + b^2}{6 a^2 b^2 \rho}\right) (9\rho^3 - 3\alpha^2 \rho) + \left(\frac{b^2 A^2 + a^2 B^2}{6 a^2 b^2 \rho}\right) (12\rho (\ln \frac{\rho}{\alpha} + 1)) + \frac{6\rho}{a^2 b^2} (A b^2 \cos \theta + B a^2 \sin \theta) +$$

$$+ \rho^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2}\right) \cos 2\theta;$$

$$\tau_{p\theta}^{\prime p} = \frac{2(B a^2 \cos \theta - A b^2 \sin \theta)(\alpha^2 - \rho^2)}{a^2 b^2 \rho} + \sin(2\theta + \eta) \frac{R' \alpha}{\rho} (-\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) + \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha})) +$$

$$+ \frac{\sin(2\theta) \alpha^3 (a^2 - b^2) (3 \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}))}{6 a^2 b^2 \rho} + \frac{\rho^2}{2 a^2 b^2} (b^2 - a^2) \sin(2\theta),$$

$$\sigma_\rho^{\prime e} = a_0'' + a_1'' \cos \theta + b_1'' \sin \theta + a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta,$$

$$\tau_{\rho\theta}^{\prime e} = a_0''' + a_1''' \cos \theta + b_1''' \sin \theta + a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
b_2''' &= R' \alpha \left(\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \cos \eta + \\
&\quad + \frac{\alpha^3 (a^2 - b^2) (3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha))}{6a^2b^2} + \frac{(b^2 - a^2)}{2a^2b^2}, \\
a_1'' &= \frac{2A}{a^2} (1 - \alpha^2), \quad b_1'' = \frac{2B}{b^2} (1 - \alpha^2), \quad a_1''' = \frac{2B}{b^2} (\alpha^2 - 1), \quad b_1''' = -\frac{2A}{a^2} (\alpha^2 - 1), \\
a_0'' &= \frac{-2}{a^2b^2} (b^2A^2 + a^2B^2) \ln(\alpha), \quad a_0''' = 0, \\
a_2'' &= \left(\frac{R'\alpha^2}{a^2} - R'\alpha \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \cos \eta - \sqrt{3} \alpha R' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \cos \eta - \\
&\quad - \frac{1}{3a^2b^2} \alpha^3 (b^2 - a^2) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha), \\
b_2'' &= - \left(\frac{R'\alpha^2}{a^2} - R'\alpha \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \sin \eta - \alpha R' \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \sin \eta, \\
a_2''' &= R'\alpha (\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)) \sin \eta.
\end{aligned}$$

Определим компоненты перемещений в упругой зоне по уже определенному напряженному состоянию.

В нулевом приближении в упругой области согласно [1] компоненты перемещений имеют вид

$$\begin{aligned}
u^{(0)e} &= \frac{1}{2(\beta^2 - 1)E} \left[\left(p - 2 \ln \frac{1}{\alpha} \right) + 3 \left(p - 2 \ln \frac{1}{\alpha} \right) \beta^2 \right], \\
v^{(0)e} &= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Следуя [1], определим компоненты перемещений в первом приближении.

1. Предположим, что на упругопластической границе имеет место (4) при

$$a_0'' = -\frac{2}{a^2b^2} (b^2A^2 + a^2B^2) \ln(\alpha), \quad a_0''' = a_1'' = a_1''' = a_2'' = b_1'' = b_1''' = b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0.$$

Тогда перемещения примут вид

$$\begin{aligned}
u^{(I)e} &= \frac{(b^2A^2 + a^2B^2) \ln(\alpha) (\rho^2 + 3\beta^2)}{\rho(\beta^2 - 1)Ea^2b^2}, \\
v^{(I)e} &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

2. Предположим, что на упругопластической границе имеет место (4) при

$$a_1'' = \frac{2A}{a^2} (1 - \alpha^2), \quad b_1''' = -\frac{2A}{a^2} (\alpha^2 - 1), \quad a_0''' = a_0'' = a_1''' = a_2'' = b_1'' = b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0.$$

В этом случае получим:

$$\begin{aligned}
u^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(\frac{15}{14} c_1 \ln \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\rho^2} c_2 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} c_3 \right) \cos(\theta), \\
v^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(-\frac{15}{14} c_1 \left[\ln \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{3}{5} \right] + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\rho^2} c_2 + \frac{11}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} c_3 \right) \sin \theta,
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = \frac{(\alpha^4 - 1) \beta A}{(\beta^4 - 1) a^2}.$$

3. Предположим, что на упругопластической границе имеет место (4) при

$$b_1'' = \frac{2\beta}{b^2} (1 - \alpha^2), \quad a_1''' = \frac{2\beta}{b^2} (\alpha^2 - 1), \quad a_0''' = a_0'' = a_1'' = a_2'' = b_1''' = b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0.$$

Перемещения примут вид

$$\begin{aligned}
u^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(\frac{15}{14} \hat{c}_1 \ln \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\rho^2} \hat{c}_2 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \sin \theta, \\
v^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(\frac{15}{14} \hat{c}_1 \left[\ln \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{3}{5} \right] - \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\rho^2} \hat{c}_2 - \frac{11}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \cos \theta, \quad (8)
\end{aligned}$$

где

$$\hat{c}_1 = 0, \quad \hat{c}_2 = \hat{c}_3 = \frac{(\alpha^4 - 1) \beta B}{(\beta^4 - 1) b^2}.$$

4. Предположим, что на упругопластической границе имеет место (4) при

$$\begin{aligned}
a_2'' &= \left(\frac{R' \alpha^2}{a^2} - R' \alpha \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \cos \mu - \sqrt{3} \alpha R' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \cos \mu - \frac{\alpha^3 (b^2 - a^2)}{3a^2 b^2}, \\
b_2'' &= \left(\frac{R' \alpha^2}{a^2} - R' \alpha \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) (-\sin \mu) - \sqrt{3} \alpha R' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \sin \mu, \\
a_0''' &= a_0'' = a_1''' = b_1''' = a_1'' = b_1'' = a_2''' = b_2''' = 0.
\end{aligned}$$

В данном случае имеем:

$$\begin{aligned}
u^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(-3c_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3c_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2c_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4c_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta), \\
v^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(3c_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3c_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7c_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - c_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \sin 2\theta - b_2'' \cos 2\theta), \quad (9)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\hat{c}_1 &= \left(\frac{-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}}{2N} \right), \quad \hat{c}_2 = \left(\frac{-3 + 2\beta^2 + \beta^4}{6N} \right) \beta^{-4}, \\
\hat{c}_3 &= \left(\frac{-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}}{6N} \right) \beta^2, \quad \hat{c}_4 = \left(\frac{-1 + 2\beta^{-2} - \beta^4}{2N} \right) \beta^{-2}.
\end{aligned}$$

5. Предположим, что на упругопластической границе имеет место (4) при

$$\begin{aligned}
a_2''' &= R' \alpha \sin \mu \left[\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right], \\
b_2''' &= R' \alpha (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \cos \mu + \\
&\quad + \frac{\alpha^3 (a^2 - b^2)}{6a^2 b^2} (3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)) + \frac{b^2 - a^2}{2a^2 b^2}, \\
a_0''' &= a_0'' = a_1''' = b_1''' = a_1'' = b_1'' = a_2''' = b_2''' = 0.
\end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned}
u^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(-3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (-a_2''' \sin 2\theta + b_2''' \cos 2\theta), \\
v^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta), \quad (10)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{c}_1 &= \left(\frac{4 - 4\beta^2}{4N} \right), & \tilde{c}_2 &= \left(\frac{4\beta^2 - 4\beta^4}{12N} \right) \beta^{-4}, \\ \tilde{c}_3 &= \left(\frac{3 - 4\beta^{-2} + \beta^{-4}}{12N} \right) \beta^2, & \tilde{c}_4 &= \left(\frac{-1 + \beta^4}{2N} \right) \beta^{-2}.\end{aligned}$$

Результирующее перемещение в упругой области определяется как сумма перемещений (6), (7), (8), (9), (10).

$$\begin{aligned}u^{(I)e} &= -\frac{(\alpha^2 - 1)(\rho^4 - 3\beta^4)(Ab^2 \cos \theta - Ba^2 \sin \theta)}{2\rho^2 a^2 (\beta^4 - 1) E b^2} + \\ &+ \frac{\beta}{E} \left(-3\hat{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\hat{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\hat{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\hat{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta) + \\ &+ \frac{\beta}{E} \left(-3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (-a_2''' \sin 2\theta + b_2''' \cos 2\theta) + \\ &\quad + \frac{(b^2 A^2 + a^2 B^2)(\rho^3 + 3\beta^2) \ln \alpha}{\rho(\beta^2 - 1) E a^2 b^2}, \\ v^{(I)e} &= \frac{(\alpha^2 - 1)(11\rho^4 + 3\beta^4)(Ab^2 \sin \theta - Ba^2 \cos \theta)}{2\rho^2 a^2 (\beta^4 - 1) E b^2} + \\ &+ \frac{\beta}{E} \left(3\hat{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\hat{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\hat{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \hat{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \sin 2\theta - b_2'' \cos 2\theta) + \\ &+ \frac{\beta}{E} \left(3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta).\end{aligned}\tag{11}$$

В пластической области имеет место ассоциированный закон течения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\rho^p &= \frac{de_\rho^p}{dt} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\rho} = \lambda \left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} - R' \cos(2\theta + \eta) \right), \\ \varepsilon_\theta^p &= \frac{de_\theta^p}{dt} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\theta} = \lambda \left(-\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} + R' \cos(2\theta + \eta) \right), \\ \varepsilon_{\rho\theta}^p &= \frac{de_{\rho\theta}^p}{dt} = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial f}{\partial \tau_{\rho\theta}} = \lambda (\tau_{\rho\theta} - R' \sin(2\theta + \eta)).\end{aligned}\tag{12}$$

где ε_{ij}^p – компоненты скоростей деформации, e_{ij}^p – компоненты деформации.

Из (12) получим:

$$\varepsilon_\rho^p + \varepsilon_\theta^p = 0,$$

$$(\varepsilon_\rho^p - \varepsilon_\theta^p) (\tau_{\rho\theta}^p - \delta R' \sin(2\theta + \eta)) = \varepsilon_{\rho\theta}^p (\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p - 2\delta R' \cos(2\theta + \eta)).\tag{13}$$

Компоненты напряжений являются фиксированными в каждой точке пластической области. Поэтому в случае малых деформаций соотношения (13) могут быть проинтегрированы по времени. После чего (13) примет вид:

$$e_\rho^p + e_\theta^p = 0,$$

$$(e_\rho^p - e_\theta^p) (\tau_{\rho\theta}^p - \delta R' \sin(2\theta + \eta)) = e_{\rho\theta}^p (\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p - 2\delta R' \cos(2\theta + \eta)).\tag{14}$$

В нулевом приближении (14) примет вид:

$$e_\rho^{(0)p} + e_\theta^{(0)p} = 0,$$

$$(e_\rho^{(0)p} - e_\theta^{(0)p}) (\tau_{\rho\theta}^{(0)p}) = e_{\rho\theta}^{(0)p} (\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}).\tag{15}$$

Предполагается, в исходном нулевом состоянии имеет место осесимметрическое состояние трубы

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)p} = \nu^{(0)p} = e_{\rho\theta}^{(0)p} = 0, \quad (16)$$

где $\tau_{\rho\theta}^{(0)p}$ – компонента касательного напряжения в нулевом приближении, $\nu^{(0)p}$ – компонента перемещения вдоль θ в нулевом приближении, $e_{\rho\theta}^{(0)p}$ – компонента деформации в нулевом приближении.

Соотношения Коши:

$$e_{\rho}^p = \frac{\partial u^p}{\partial \rho}, \quad e_{\theta}^p = \frac{u^p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v^p}{\partial \theta}, \quad e_{\rho\theta}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^p}{\partial \rho} - \frac{v^p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^p}{\partial \theta} \right). \quad (17)$$

Из (17) имеем в нулевом приближении

$$e_{\rho}^{(0)p} = \frac{\partial u^{(0)p}}{\partial \rho}, \quad e_{\theta}^{(0)p} = \frac{u^{(0)p}}{\rho}. \quad (18)$$

Из (15), (18) имеем

$$e_{\rho}^{(0)p} + e_{\theta}^{(0)p} = \frac{du^{(0)p}}{d\rho} + \frac{u^{(0)p}}{\rho} = 0, \quad (19)$$

где $u^{(0)p}$ – компонента перемещений вдоль радиуса ρ .

Согласно (5) решение уравнения (19) имеет вид

$$u^{(0)p} = \frac{c}{\rho},$$

$$c = \frac{1}{2(\beta^2 - 1)E} \left[\left(p - 2 \ln \frac{1}{\alpha} \right) + 3 \left(p - 2 \ln \frac{1}{\alpha} \right) \beta^2 \right]. \quad (20)$$

Из (18), (20) получим

$$e_{\rho}^{(0)p} = \frac{du^{(0)p}}{d\rho} = -\frac{c}{\rho^2}, \quad e_{\theta}^{(0)p} = \frac{u^{(0)p}}{\rho} = \frac{c}{\rho^2}. \quad (21)$$

Из (14) в первом приближении имеем:

$$e_{\rho}^{(I)p} + e_{\theta}^{(I)p} = 0, \quad (22)$$

$$\left(\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p} \right) e_{\rho\theta}^{(I)p} = \left(e_{\rho}^{(0)p} - e_{\theta}^{(0)p} \right) \left(\tau_{\rho\theta}^{(I)p} - R' \sin(2\theta + \eta) \right). \quad (23)$$

Из (17), (22) получим

$$e_{\rho}^{(I)p} + e_{\theta}^{(I)p} = \frac{\partial u^{(I)p}}{\partial \rho} + \frac{u^{(I)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v^{(I)p}}{\partial \theta} = 0. \quad (24)$$

Запишем (23) в виде

$$e_{\rho\theta}^{(I)p} = \frac{\left(e_{\rho}^{(0)p} - e_{\theta}^{(0)p} \right) \left(\tau_{\rho\theta}^{(I)p} - R' \sin(2\theta + \eta) \right)}{\left(\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p} \right)}, \quad (25)$$

где $u^{(I)p}$, $v^{(I)p}$ – компоненты перемещений в первом приближении.

Из (17), (25), а также [3] получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{(I)p}}{\partial \rho} - \frac{v^{(I)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{(I)p}}{\partial \theta} &= \frac{4c}{a^2 b^2 \rho^3} (Ba^2 \cos \theta - Ab^2 \sin \theta) (\alpha^2 - \rho^2) + \\ &+ \frac{2cR'}{\rho^2} \left\{ \frac{\alpha}{\rho} (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a}) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a})) - 1 \right\} \sin(2\theta + \eta) + \\ &+ \frac{2c\alpha^3(a^2 - b^2)[3 \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a}) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a})] \sin 2\theta}{6\rho^3 a^2 b^2} + \\ &+ \frac{c}{a^2 b^2} (b^2 - a^2) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (26)$$

Удовлетворим уравнение несжимаемости (22), предполагая

$$u^{(I)p} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v^{(I)p} = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (27)$$

Из (26), (27) имеем

$$\begin{aligned} \rho^2 \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} &= \frac{4c}{a^2 b^2 \rho} (Ba^2 \cos \theta - Ab^2 \sin \theta) (\alpha^2 - \rho^2) + \\ &+ 2cR' \left\{ \frac{\alpha}{\rho} (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a}) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a})) - 1 \right\} \sin(2\theta + \eta) + \\ &+ \frac{c\alpha^3(a^2 - b^2)[3 \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a}) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a})] \sin 2\theta}{3\rho a^2 b^2} + \\ &+ \frac{\rho^2 c}{a^2 b^2} (b^2 - a^2) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (28)$$

Решение уравнения (28) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения (28) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_{\text{частн}} &= \frac{c\alpha^2}{\rho} \left(\frac{B}{b^2} \cos \theta - \frac{A}{a^2} \sin \theta \right) + 2c\rho \ln^2 \rho \left(\frac{A}{a^2} \sin \theta - \frac{B}{b^2} \cos \theta \right) + \\ &+ (d_2 \ln \rho + d_1) \rho (\sin \theta - \cos \theta) + \frac{c}{4a^2 b^2} (b^2 - a^2) \rho^2 \sin 2\theta + \\ &+ \left(\frac{1}{\rho} [S \sin \omega + T \cos \omega] + Q \right) \sin(2\theta + \eta) + \\ &+ \frac{1}{\rho} [S_1 \sin \omega + T_1 \cos \omega] \frac{(a^2 - b^2)\alpha^3 \sin 2\theta}{3a^2 b^2}, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\omega = \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad D = 2cR', \quad S = -\frac{\sqrt{3}\alpha D}{8}, \quad T = -\frac{\alpha D}{8}, \quad Q = -\frac{D}{2}, \quad c, d_2, d_1 - \text{const},$$

$$D_1 = -\frac{c}{8}, \quad S_1 = \sqrt{3}D_1, \quad T_1 = -3D_1.$$

Из (27), (29) имеем:

$$\begin{aligned} u_{\text{частн}}^{(I)p} &= \frac{1}{6\rho^2 b^2 a^2} \left([-12 \cos(2\theta + \eta) a^2 b^2 T - 4T_1 \alpha^3 (a^2 - b^2) \cos 2\theta] \cos \omega + \right. \\ &+ [-12 \cos(2\theta + \eta) a^2 b^2 S - 4S_1 \alpha^3 (a^2 - b^2) \cos 2\theta] \sin \omega - \\ &- 12 \cos(2\theta + \eta) a^2 b^2 Q \rho + 3c\rho^3 (a^2 - b^2) \cos 2\theta - \\ &- 12b^2 \left(\frac{-c\alpha^2 A}{2} + c\rho^2 A \ln^2 \rho + \frac{1}{2}\rho^2 a^2 d_2 \ln \rho + \frac{1}{2}\rho^2 a^2 d_1 \right) \cos \theta - \\ &\left. - 12a^2 \left(\frac{-c\alpha^2 B}{2} + c\rho^2 B \ln^2 \rho + \frac{1}{2}\rho^2 b^2 d_2 \ln \rho + \frac{1}{2}\rho^2 b^2 d_1 \right) \sin \theta \right), \\ v_{\text{частн}}^{(I)p} &= \frac{1}{6\rho^2 b^2 a^2} \left([6a^2 b^2 (S\sqrt{3} - T) \sin(2\theta + \eta) + 2(a^2 - b^2) (\sqrt{3}S_1 - T_1) \sin 2\theta] \cos \omega + \right. \\ &+ [-6a^2 b^2 (T\sqrt{3} + S) \sin(2\theta + \eta) - 2\alpha^3 (a^2 - b^2) (\sqrt{3}T_1 + S_1) \sin 2\theta] \sin \omega - \\ &- 3c\rho^3 (a^2 - b^2) \sin 2\theta - \\ &- 12a^2 (c\rho^2 B \ln^2 \rho + 2(cB + \frac{1}{4}d_2 b^2) \rho^2 \ln \rho + \frac{1}{2}\rho^2 b^2 (d_1 + d_2) + \frac{1}{2}c\alpha^2 B) \cos \theta + \\ &\left. + 12b^2 (c\rho^2 A \ln^2 \rho + 2(cA + \frac{1}{4}d_2 a^2) \rho^2 \ln \rho + \frac{1}{2}\rho^2 a^2 (d_1 + d_2) + \frac{1}{2}c\alpha^2 A) \sin \theta \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Согласно (27) компоненты перемещений в пластической области, соответствующие решению однородного уравнения (28), имеют вид:

$$\begin{aligned}
 u_{\text{одн}}^{(I)p} &= \frac{c_{00}}{\rho} - (\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12} \ln \rho) \cos \theta - (\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12} \ln \rho) \sin \theta - \\
 &- 2 \{ [c_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + c_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)] \sin 2\theta - [c_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + c_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)] \cos 2\theta \}, \\
 v_{\text{одн}}^{(I)p} &= (\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12} (1 + \ln \rho)) \sin \theta + (\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12} (1 + \ln \rho)) \cos \theta + \\
 &+ [c_{11} (\cos(\sqrt{3} \ln \rho) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) + c_{12} (\sin(\sqrt{3} \ln \rho) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \rho))] \sin 2\theta + \\
 &+ [c_{21} (\cos(\sqrt{3} \ln \rho) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) + c_{22} (\sin(\sqrt{3} \ln \rho) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \rho))] \cos 2\theta.
 \end{aligned} \tag{31}$$

На упругопластической границе имеют место условия сопряжения

$$u^{(I)p} = u^{(I)e}, \quad \nu^{(I)p} = \nu^{(I)e}, \quad \text{при } \rho = 1. \tag{32}$$

Из (11), (30)–(32) имеем

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_{11} &= \frac{0.5(3\beta^4 - 3\alpha^2\beta^4 - 2c\alpha^2 E + 2c\alpha^2 E\beta^4 - 1 + \alpha^2)A + 0.5(2Ea^2 d_1 - 2Ea^2 d_1\beta^4)}{a^2(\beta^4 - 1)E}, \\
 \bar{c}_{12} &= \frac{-(3\beta^4 - 3\alpha^2\beta^4 - 2c\alpha^2 E + 2c\alpha^2 E\beta^4 + 5 - 5\alpha^2)A - (-Ea^2 d_2 + Ea^2 d_2\beta^4)}{a^2(\beta^4 - 1)E}, \\
 \bar{c}_{11} &= \frac{0.5(3\beta^4 - 3\alpha^2\beta^4 - 2c\alpha^2 E + 2c\alpha^2 E\beta^4 - 1 + \alpha^2)B + 0.5(2Eb^2 d_1 - 2Eb^2 d_1\beta^4)}{b^2(\beta^4 - 1)E}, \\
 \bar{c}_{12} &= \frac{-(6\alpha^2 - 6)B - (2Eb^2 d_1 - d_2 b^2 E\beta^4 - 2Eb^2 d_1\beta^4 + d_2 b^2 E)}{b^2(\beta^4 - 1)E}.
 \end{aligned} \tag{33}$$

$$c_{21} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5, \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{(a^4 b^4 S \cos \mu + \frac{1}{3} \alpha^3 S_1 (a^2 - b^2)) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)}{a^2 b^2}, \\
 A_2 &= \frac{-a(T_1(a^2 - b^2) + 3b^4 T a \cos \mu) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)}{3b^2}, \\
 A_3 &= \frac{b_2''' (3\beta^6 \bar{c}_2 + 4\beta^4 \bar{c}_4 - 3\beta^2 \bar{c}_1 - 2\bar{c}_3)}{2\beta^2 E}, \\
 A_4 &= \frac{a_2'' (-3\beta^6 \bar{c}_2 - 4\beta^4 \bar{c}_4 + 3\beta^2 \bar{c}_1 + 2\bar{c}_3)}{2\beta^2 E}, \\
 A_5 &= \frac{-(4a^4 b^4 Q \cos \mu + c(b^2 - a^2))}{4a^2 b^2}.
 \end{aligned}$$

$$c_{22} = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7 + B_8 + B_9, \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{\sqrt{3} a T_1 (a^2 - b^2) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)}{9b^2}, \\
 B_2 &= \frac{\sqrt{3} \alpha^3 S_1 (b^2 - a^2) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)}{9a^2 b^2}, \\
 B_3 &= \frac{\sqrt{3} T ([a^2 b^2 \cos \eta - \sin \eta] \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - [\sqrt{3} \sin \eta] \sin(\sqrt{3} \ln \alpha))}{3}, \\
 B_4 &= \frac{\sqrt{3} S (-[a^2 b^2 \cos \eta + \sin \eta] \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - [\sqrt{3} \sin \eta] \cos(\sqrt{3} \ln \alpha))}{3}, \\
 B_5 &= \frac{-\sqrt{3} b_2''' (3\beta^6 \bar{c}_2 + 4\beta^4 \bar{c}_4 - 3\bar{c}_1 - 2\bar{c}_3)}{6\beta^2 E}, \\
 B_6 &= \frac{\sqrt{3} b_2'' (-3\beta^6 \bar{c}_2 + \beta^4 \bar{c}_4 - 3\bar{c}_1 \beta^2 - 7\bar{c}_3)}{3\beta^2 E}, \\
 B_7 &= \frac{-\sqrt{3} a_2''' ((-7\bar{c}_3 - 3\bar{c}_1 \beta^2 + \bar{c}_4 \beta^4) \bar{c}_2 (\frac{1}{\beta^3}) - 3\beta^3)}{3\beta^2 E \bar{c}_2 (\frac{1}{\beta^3})}, \\
 B_8 &= \frac{-\sqrt{3} a_2'' (-3\bar{c}_2 \beta^6 - 4\bar{c}_4 \beta^4 + 2\bar{c}_3 + 3\bar{c}_1 \beta^2)}{6\beta^2 E}, \\
 B_9 &= \frac{\sqrt{3} (4a^4 b^4 Q \cos \eta + c(b^2 - a^2))}{12a^2 b^2}.
 \end{aligned}$$

$$c_{11} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5, \tag{36}$$

где

$$\begin{aligned}
Z_1 &= a^2 b^2 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) T \sin \eta, \\
Z_2 &= -a^2 b^2 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) S \sin \eta, \\
Z_3 &= \frac{0.5 b_2'' (-4 \bar{c}_4 \beta^4 - 3 \bar{c}_2 \beta^6 + 3 \bar{c}_1 \beta^2 + 2 \bar{c}_3)}{\beta^2 E}, \\
Z_4 &= \frac{0.5 a_2''' (4 \bar{c}_4 \beta^4 + 3 \bar{c}_2 \beta^6 - 3 \bar{c}_1 \beta^2 - 2 \bar{c}_3)}{\beta^2 E}, \\
Z_5 &= a^2 b^2 Q \sin \eta.
\end{aligned}$$

$$c_{12} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned}
L_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{3} T ((\cos \eta + a^2 b^2 \sin \eta) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \cos \eta \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)), \\
L_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{3} S ((\cos \eta - a^2 b^2 \sin \eta) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \cos \eta \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)), \\
L_3 &= \frac{0.1924 T_1 \alpha^3 ((a^2 - b^2) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} (a^2 - b^2) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha))}{a^2 b^2}, \\
L_4 &= \frac{-0.333 S_1 \alpha^3 ((a^2 - b^2) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 0.577 (b^2 - a^2) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha))}{a^2 b^2}, \\
L_5 &= \frac{\sqrt{3} \bar{c}_2 b_2''' \beta^4}{E} - \frac{0.577 \bar{c}_4 b_2''' \beta^2}{E} + \frac{1.73 \bar{c}_1 b_2'''}{E} + \frac{4.04 \bar{c}_3 b_2'''}{E \beta^2}, \\
L_6 &= \frac{0.866 \bar{c}_2 b_2'' \beta^4}{E} + \frac{1.154 \bar{c}_4 b_2'' \beta^2}{E} - \frac{0.866 \bar{c}_1 b_2''}{E} - \frac{0.577 \bar{c}_3 b_2''}{E \beta^2}, \\
L_7 &= -\frac{0.866 \bar{c}_2 a_2''' \beta^4}{E} - \frac{1.154 \bar{c}_4 a_2''' \beta^2}{E} + \frac{0.866 \bar{c}_1 a_2'''}{E} + \frac{0.577 \bar{c}_3 a_2'''}{E \beta^2}, \\
L_8 &= \frac{1.732 \bar{c}_2 a_2'' \beta^4}{E} - \frac{0.577 \bar{c}_4 a_2'' \beta^2}{E} + \frac{1.732 \bar{c}_1 a_2''}{E} + \frac{4.04 \bar{c}_3 a_2''}{E \beta^2}, \\
L_9 &= -0.577 a^2 b^2 Q \sin \eta + 0.2886 c \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right), \\
c_{00} &= \frac{(b^2 A^2 + a^2 B^2) (\rho^3 + 3 \beta^2) \ln \alpha}{(\beta^2 - 1) E a^2 b^2}. \quad (38)
\end{aligned}$$

Согласно (11) (30)–(37) компоненты перемещений в первом приближении определены.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
- [2] *Максимова, Л. А.* Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / Л. А. Максимова, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 91–95.
- [3] *Никитин, А. В.* Влияние нелинейной неоднородности материала на упругопластическое состояние толстостенной трубы под воздействием внутренних давлений при трансляционной анизотропии / А. В. Никитин, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2013. – № 4 (80). – Ч. 2. – С. 137–148.
- [4] *Павлова, Т. Н.* Упругопластическое состояние тонкой пластины из анизотропного материала, ослабленной отверстием, под действием растягивающих усилий / Т. Н. Павлова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 1. – С. 112–123.
- [5] *Тихонов, С. В.* Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящийся под действием внутреннего давления / С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 161–168.
- [6] *Фоминых, С. О.* Упругоидеальнопластическое состояние анизотропной трубы / С. О. Фоминых // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – Ч. 3. – С. 623–627.

[7] *Целистова, Е. А.* Исследование влияния неоднородности материала на напряженное состояние идеальнопластического слоя / Е. А. Целистова // Известия ИТА ЧР. Чебоксары, 1999. – С. 52–56.

Никитин Андрей Витальевич,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ligalas5@mail.ru

A. V. Nikitin

**DETERMINATION OF STRAIN STATE NONLINEARLY INHOMOGENEOUS
WALLED TUBES IN TRANSLATIONAL ANISOTROPY**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. This paper considers the nonlinear strain state of thick-walled tubes with inhomogeneous translational anisotropy. Problem of determining the elastic-plastic state of uniform bodies were considered in [2], [5], [7], anisotropic solids studied in [4], [6].

Keywords: pipe, moving, incompressibility, translational anisotropy.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* Perturbation method in the theory of elastic-plastic body / D. D. Ivlev, L. V. Ershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p.
- [2] *Maksimova, L. A.* Inhomogeneous state of elastoplastic pipe under internal pressure / L. A. Maksimova, S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state. – 2007. – No. 2. – P. 91–95.
- [3] *Nikitin, A. V.* Effect of the nonlinear material inhomogeneity on the elastic-plastic state of thick-walled pipes under internal pressure at the translational anisotropy / A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Natural and engineering sciences. – 2013. – No. 4 (80). – Part 2. – P. 137–148.
- [4] *Pavlova, T. N.* Elastoplastic state of a thin plate of an anisotropic material, weakened hole under tension / T. N. Pavlova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. – 2010. – No 1. – P. 112–123.
- [5] *Tikhonov, S. V.* On elastoplastic state inhomogeneous pipe located under internal pressure / S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state. – 2007. – No 2. – P. 161–168.
- [6] *Fomin, S. O.* Elastic and ideal plastic state anisotropic pipe / O. S. Fomin // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state. – 2010. – No. 2 (8). – Part 3. – P. 623–627.
- [7] *Tselistova, E. A.* Study of the effect of heterogeneity on the stress state of the material layer ideálnoplasticheskogo / E. A. Tselistova // Proceedings of the ITA CR. Cheboksary, 1999 - P. 52-56

Nikitin, Andrey Vitalevich

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С УЧЕТОМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе исследуется упругопластическое состояние осесимметричных тел под действием силы тяжести. Получено напряженное упругопластическое состояние полной эксцентричной сферы в первом приближении. Определен радиус пластической зоны в первом приближении.

Ключевые слова: упругость, пластичность, объемная сила, граничные условия, линеаризация.

УДК: 539.374

В работе изучается упругопластическое состояние осесимметричных тел под действием силы тяжести. Будем искать решение упругопластической задачи теории идеальной пластичности в виде рядов по степеням малого параметра δ , которое характеризует отклонение границы тела от сферической. Материал предполагается несжимаемым. В упругопластических задачах метод малого параметра использован в работах [1], [2].

Приведем основные обозначения: σ_ρ , σ_θ , σ_ϕ , $\tau_{\rho\theta}$ – компоненты напряжений в сферической системе координат; G – модуль сдвига; r , θ , ϕ – сферические координаты; r_s – радиус-вектор пластической области. Индекс p означает, что компонента относится к области пластического состояния материала, индекс e – упругого.

Все компоненты, имеющие размерность напряжений, отнесены к постоянной κ , где κ – предел текучести материала.

При решении упругопластических задач теории идеальной пластичности используются следующие соотношения:

– уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} [2\sigma_\rho - (\sigma_\theta + \sigma_\phi) + \tau_{\rho\theta} \operatorname{ctg} \theta] = \gamma \cos \theta, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} [3\tau_{\rho\theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\phi) \operatorname{ctg} \theta] = \gamma \sin \theta, \end{cases} \quad (1)$$

где γ – объемная сила;

– условие пластичности Треска-Сен-Венана

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{\rho\theta}^2 = 4, \quad \sigma_\phi = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_\theta) + 1; \quad (2)$$

– граничные условия

$$\sigma_n = Q_n, \quad \tau_n = Q_r; \quad (3)$$

– условия сопряжения в упругой и пластической областях:

$$[\sigma_\rho] = [\sigma_\theta] = [\sigma_\phi] = [\tau_{\rho\theta}] = [u] = [v] = 0. \quad (4)$$

В качестве нулевого приближения возьмем упругопластическое состояние полой сферы радиусов a и b , находящейся под действием равномерных внутреннего давления p и внешнего давления q ([1], 140).

Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{0e} &= -q + \eta \frac{4\beta_0^3}{3} \left(1 - \frac{1}{\beta^3}\right), & \sigma_\theta^{0e} &= -q + \eta \frac{4\beta_0^3}{3} \left(1 + \frac{1}{2\beta^3}\right), \\ \tau_{\rho\theta}^{0e} &= 0, & u^{0e} &= \eta \frac{\kappa\beta_0^3}{3G} \cdot \frac{1}{\rho^2}, & v^{0e} &= \omega^{0e} = 0, \\ \sigma_\rho^{0p} &= -p + 4\eta \ln \frac{\rho}{\alpha}, & \sigma_\theta^{0p} &= -p + 2\eta [1 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}], \\ \tau_{\rho\theta}^{0p} &= 0, & u^{0p} &= \eta \frac{\kappa\beta_0^3}{3G} \cdot \frac{1}{\rho^2}, & v^{0p} &= \omega^{0p} = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\rho = \frac{r}{b}, \quad \alpha = \frac{a}{b}, \quad \eta = \text{sign}(p - q), \quad \beta_0 = \frac{r_s^0}{b},$$

где β_0 – безразмерный радиус границы пластической зоны.

Пусть имеют место разложения

$$\sigma_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_\rho^{(n)}, \quad \sigma_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_\theta^{(n)}, \quad \sigma_\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_\phi^{(n)}, \quad \tau_{\rho\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \tau_{\rho\theta}^{(n)} \quad (5)$$

Из (2) в силу (5) имеем в пластической области

$$\sigma_\rho^{(1)p} = \sigma_\theta^{(1)p} = \sigma_\phi^{(1)p}. \quad (6)$$

Пусть

$$\gamma = \delta \cdot \gamma^1.$$

Тогда уравнения равновесия в пластической области для первого приближения, учитывая (6), имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho^1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^1}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \tau_{\rho\theta}^1 \text{ctg} \theta = \gamma^1 \cos \theta, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\rho^1}{\partial \theta} + \frac{3}{\rho} \tau_{\rho\theta}^1 = \gamma^1 \sin \theta. \end{cases} \quad (7)$$

Для определения первого приближения, пользуясь линеаризованным условием пластичности (2) и уравнениями равновесия (7), нетрудно получить уравнение

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \tau_{\rho\theta}^1}{\partial \rho^2} + 4\rho \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^1}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \tau_{\rho\theta}^1}{\partial \theta^2} - \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^1}{\partial \theta} \text{ctg} \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \tau_{\rho\theta}^1 = 2\rho \gamma^1 \sin \theta. \quad (8)$$

Решение однородного уравнения

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \tau_{\rho\theta}^1}{\partial \rho^2} + 4\rho \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^1}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \tau_{\rho\theta}^1}{\partial \theta^2} - \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^1}{\partial \theta} \text{ctg} \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \tau_{\rho\theta}^1 = 0 \quad (9)$$

представим в виде [1]

$$\tau_{\rho\theta}^1(\rho, \theta) = f_n(\rho) \cdot \psi_n(\theta). \quad (10)$$

Применяя метод Фурье, имеем

$$\rho^2 \frac{d^2 f_n}{d\rho^2} + 4\rho \frac{df_n}{d\rho} + n(n+1) f_n = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d^2\psi_n}{d\theta^2} + \frac{d\psi_n}{d\theta} \operatorname{ctg}\theta + \left[n(n+1) - \frac{1}{\sin^2\theta} \right] \psi_n = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (11) имеют вид [1]

$$f_0(\rho) = c_1 + \frac{c_2}{\rho^2} \quad \text{для } n=0, \quad f_1(\rho) = \frac{c_1}{\rho^2} + \frac{c_2}{\rho} \quad \text{для } n=1, \\ f_n(\rho) = [c_1 \cos(\alpha_n \ln \rho) + c_2 \sin(\alpha_n \ln \rho)] \cdot \rho^{-\frac{3}{2}} \quad \text{для } n \geq 2,$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{n(n+1) - \frac{9}{4}}.$$

Уравнение (12) есть дифференциальное уравнение присоединенных функций Лежандра. Поэтому

$$\tau_{\rho\theta}^1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\rho) \frac{dp_n(\cos\theta)}{d\theta} \quad (\psi_n(\theta) = p_n^1(\cos\theta)).$$

Частное решение неоднородного уравнения (8) представимо в виде

$$(\tau_{\rho\theta}^1)_{\text{частное}} = \frac{1}{3} \gamma^1 \rho \sin\theta.$$

Решение неоднородного уравнения (8) имеет вид

$$\tau_{\rho\theta}^1 = \frac{1}{3} \gamma^1 \rho \sin\theta + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\rho) \frac{dp_n(\cos\theta)}{d\theta}. \quad (13)$$

Из второго уравнения системы (7) находим $\frac{\partial \sigma_\rho^1}{\partial \theta}$, далее интегрируя полученное уравнение по θ , получаем

$$\sigma_\rho^1 = \frac{\gamma^1}{3} \rho \cos\theta - \sum_{n=0}^{\infty} [\rho f_n^1 + 3f_n] p_n(\cos\theta).$$

Тогда в силу (6) в пластической области имеем

$$\sigma_\rho^1 = \sigma_\theta^1 = \sigma_\phi^1 = \frac{\gamma^1 \rho}{3} \cos\theta - \sum_{n=0}^{\infty} [\rho f_n^1 + 3f_n] p_n(\cos\theta). \quad (14)$$

Уравнение границы представим в виде

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho_1(\theta).$$

Тогда граничные условия запишутся:

$$\sigma_\rho^1 + \frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho} \rho_1 = \frac{d\theta_n}{d\rho} \rho_1, \quad \tau_{\rho\theta}^1 - (\sigma_\theta^0 - \sigma_\rho^0) \frac{dR_1}{d\theta} = \frac{d\theta_r}{d\rho} \rho_1 \quad \text{при } \rho = \rho_0 \left(R_1 = \frac{\rho_1}{\rho_0} \right). \quad (15)$$

Полагая, что граница пластической зоны имеют вид

$$\rho_s = \beta_0 + \delta \beta_1(\theta)$$

получаем условия сопряжения

$$\sigma_\rho^{1p} = \sigma_\rho^{1e}, \quad \tau_{\rho\theta}^{1p} = \tau_{\rho\theta}^{1e}, \quad \beta_1 = \frac{\beta_0}{6} [\sigma_\theta^{1e} - \sigma_\theta^{1p}] \quad \text{при } \rho = \beta_0 \quad (16)$$

Решение в упругой области представляется в виде рядов по полиномам Лежандра [1], приведем решения для $n=1$.

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho^{1e} &= -6 \left[2A_1\rho + \frac{C}{\rho^2} - \frac{2D_1}{\rho^4} \right] p_1(\cos\theta), & \tau_{\rho\theta}^{1e} &= 6 \left[A_1\rho - \frac{D_1}{\rho^4} \right] \frac{dp_1}{d\theta}, \\
\sigma_\theta^{1e} &= \sigma_\phi^{1e} = -6 \left[4A_1\rho + \frac{D_1}{\rho^4} \right] p_1(\cos\theta), & u^{1e} &= \frac{2\kappa}{G} \left[A_1\rho^2 + \frac{C}{\rho} - \frac{D_1}{\rho^3} \right] p_1(\cos\theta), \\
v^{1e} &= \frac{\kappa}{G} \left[4A_1\rho^2 + \frac{C}{\rho} + \frac{D_1}{\rho^3} \right] \frac{dp_1}{d\theta}.
\end{aligned} \tag{17}$$

В качестве примера рассмотрим сферу с эксцентричной полостью радиуса a и b , находящуюся под действием внутреннего давления p и внешнего давления q . Уравнение границ можно представить

$$\rho = 1 + \delta p_1(\cos\theta), \quad \rho = \alpha,$$

где величина δ характеризует эксцентricитет.

Граничные условия (3) в данном случае имеют вид:

$$\sigma_\rho^{1e} = -4\beta_0^3 p_1(\cos\theta), \quad \tau_{\rho\theta}^{1e} = 2\beta_0^3 \frac{dp_1}{d\theta} \quad \text{при} \quad \rho = 1 \tag{18}$$

$$\sigma_\rho^{1p} = \left[\frac{\gamma^1 \alpha}{3} - \alpha f_1^1 - 3f_1(\alpha) \right] p_1(\cos\theta), \quad \rho = \alpha, \quad p_1(\cos\theta) = \cos\theta \tag{19}$$

$$\tau_{\rho\theta}^{1p} = \left[-\frac{\gamma^1 \alpha}{3} + f_1(\alpha) \right] \frac{dp_1}{d\theta} \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \quad \frac{dp_1}{d\theta} = -\sin\theta \tag{20}$$

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho^{1e} + \frac{d\sigma_\rho^{0e}}{d\rho} \rho_1 &= \frac{d\theta_n}{d\rho} \rho_1 \quad \text{при} \quad \rho = \rho_0, \quad \rho_0 = 1. \\
\sigma_\rho^{0e} &= -q + \eta \frac{4\beta_0^3}{3} \left(1 - \frac{1}{\rho^3} \right), \quad q, \beta_0 = \text{const}, \quad \eta = +1, \quad \theta_n = \text{const}. \\
\frac{d\sigma_\rho^{0e}}{d\rho} &= 4\beta_0^3. \quad \sigma_\rho^{1e} = -4\beta_0^3 p_1(\cos\theta) \quad \rho = 1.
\end{aligned}$$

Аналогично из (15), получаем

$$\tau_{\rho\theta}^{1e} = 2\beta_0^3 \frac{dp_1}{d\theta} \quad \text{при} \quad \rho = 1.$$

Из (17) и (18) при $\rho = 1$ будем иметь

$$\begin{cases} 6[2A_1 + C - 2D_1] = 4\beta_0^3, \\ 6A_1 - 6D_1 = 2\beta_0^3. \end{cases}$$

Решая систему, получаем

$$C = 0, \quad A_1 = D_1 + \frac{\beta_0^3}{3}.$$

Для определения граничных условий (19), (20) используем решение (10) уравнения (9) при

$$n = 1, \quad c_2 = 0,$$

$$\tau_{\rho\theta}^1 = f_1(\rho) \psi_1(\theta).$$

Тогда граничные условия записываются в виде (19) и (20), значения D_1 находим из второго условия сопряжения (16). Найденные значения C , A_1 подставляя в (17) будем иметь

$$\sigma_\rho^{1e} = -6 \left[\left(2D_1 + \frac{2}{3}\beta_0^3 \right) \rho - \frac{2D_1}{\rho^4} \right] p_1(\cos\theta), \tag{21}$$

$$\tau_{\rho\theta}^{1e} = 6 \left[\left(D_1 + \frac{\beta_0^3}{3} \right) \rho - \frac{D_1}{\rho^4} \right] \frac{dp_1}{d\theta}. \tag{22}$$

При $\rho = \beta_0$ имеем

$$\sigma_\rho^{1p} = \left[\frac{\gamma^1 \beta_0}{3} - \beta_0 f_1^1(\beta_0) - 3f_1(\rho_0) \right] p_1, \quad (23)$$

$$\tau_{\rho\theta}^{1p} = \left[-\frac{\gamma^1 \beta_0}{3} + f_1(\beta_0) \right] \frac{dp_1}{d\theta}. \quad (24)$$

Из (16) в силу (22) и (24), получаем уравнение для определения D_1 .

$$-\frac{\gamma^1 \beta_0}{3} + f_1(\beta_0) = 6 \left[\left(D_1 + \frac{\beta_0^3}{3} \right) \beta_0 - \frac{D_1}{\beta_0^4} \right]$$

$$D_1 = \left[f_1(\beta_0) - \frac{\gamma^1 \beta_0}{3} - 2\beta_0^4 \right] \cdot \frac{\beta_0^4}{6(\beta_0^5 - 1)}.$$

Известно, что

$$\beta_1 = \frac{\beta_0}{6} \left[\sigma_\theta^{1e} - \sigma_\theta^{1p} \right] \quad \text{при} \quad \rho = \beta_0,$$

где

$$\sigma_\theta^{1e} = -6 \left[4A_1 \beta_0 + \frac{D_1}{\beta_0^4} \right] p_1,$$

$$\sigma_\theta^{1p} = \frac{\gamma^1 \beta_0}{3} \cos \theta - \left[\beta_0 f_1^1(\beta_0) + 3f_1(\beta_0) \right] p_1,$$

где

$$A_1 = D_1 + \frac{\beta_0^3}{3}, \quad D_1 = \left[f_1(\beta_0) - \frac{\gamma^1 \beta_0}{3} - 2\beta_0^4 \right] \frac{\beta_0^4}{6(\beta_0^5 - 1)}, \quad (25)$$

$$A_1 = \frac{1}{3} \frac{\beta_0^3}{\beta_0^5 - 1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{c_1}{\beta_0} + 0 - 2 \right) - \frac{\gamma^1 \beta_0^2}{6} \right]. \quad (26)$$

Напряженное упругопластическое состояние полой эксцентричной сферы в первом приближении характеризуются выражениями

$$\sigma_\rho^{1p} = \sigma_\theta^{1p} = \sigma_\phi^{1p} = \frac{\gamma^1 \rho}{3} \cos \theta - \left[\rho f_1^1 + 3f_1 \right] p_1(\cos \theta),$$

$$\tau_{\rho\theta}^{1p} = f_1(\rho) \frac{dp_1}{d\theta}(\cos \theta) + \frac{1}{3} \gamma^1 \rho \sin \theta,$$

$$\sigma_\rho^{1e} = -6 \left[\left(2D_1 + \frac{2}{3} \beta_0^3 \right) \rho - \frac{2D_1}{\rho^4} \right] p_1(\cos \theta),$$

$$\sigma_\theta^{1e} = \sigma_\phi^{1e} = -6 \left[\left(4D_1 + \frac{4}{3} \beta_0^3 \right) \rho + \frac{D_1}{\rho^4} \right] p_1(\cos \theta),$$

$$\tau_{\rho\theta}^{1e} = 6 \left[\left(D_1 + \frac{\beta_0^3}{3} \right) \rho - \frac{D_1}{\rho^4} \right] \frac{dp_1}{d\theta},$$

где D_1 определяется соотношением (25) а c_1 определяется из первого условия сопряжения (16)

$$f_1(\beta_0) = \frac{c_1}{\beta_0^2}, \quad f_1' = \frac{df_1}{dQ}, \quad c_1 = \frac{\gamma^1 \beta_0^3}{3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ершов, Л. В. Приближенное решение осесимметричных упругопластических задач / Л.В. Ершов. – Изв. АН.СССР Механика и машиностроения. – 1959. – № 3. – С. 139–142.
 [2] Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

Яковлев Алексей Алексеевич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары

Яковлев Владимир Алексеевич,
преподаватель образовательного центра «Мария», г. Нижний Новгород

A. A. Yakovlev, V. A. Yakovlev

**THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE AXISYMMETRIC IS ELASTIC
PLASTIC TASKS TAKING INTO ACCOUNT GRAVITY**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. In work it is investigated the plastic state is elastic axisymmetric bodies by gravity. The intense is received the plastic condition of the full excentric sphere in the first is elastic approach. Radius of a plastic zone in the first is determined approach.

Keywords: elasticity, plasticity, volume force, boundary conditions, linearization.

REFERENCES

[1] *Yershov, L. V.* Approximate decision axisymmetric uprugoplasticheskikh tasks / L. V. Yershov. – Academy of Sciences of the USSR of the Mechanic and mechanical engineering. – 1959. – No. 3. – P. 139–142 .

[2] *Ivlev, D. D.* Method of indignations in the theory of uprugoplasticheskoy Body / D. D. Ivlev, L. V. Yershov. – M. : Science, 1978. – 208 p.

Yakovlev, Alexey Alekseevich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Dean of Physical & Mathematical Faculty, I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University, Cheboksary

Yakovlev, Vladimir Alekseevich

Teacher of the educational center "Maria Nizhny Novgorod

В. Г. Зубчанинов, Е. Г. Алексева

О ВЛИЯНИИ КРИВИЗНЫ ТРАЕКТОРИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НА КЛАССИФИКАЦИЮ И ЗАПАЗДЫВАНИЕ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Тверской государственной технической университет

Аннотация. Рассмотрен вопрос о классификации траекторий деформирования по их кривизне и ее влиянии на след запаздывания векторных свойств материалов.

Ключевые слова: векторные и скалярные свойства материалов, упругость, пластичность, траектории деформирования и нагружения, векторы напряжений и деформаций, векторное пятимерное пространство, свойство запаздывания, след запаздывания.

УДК: 539.3

1. Определяющие соотношения.

Связь между тензорами напряжений (σ_{ij}) и деформаций (ε_{ij}) ($i, j = 1, 2, 3$) в физическом пространстве для случая простого нагружения для начально-изотропных материалов имеет вид [1]

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad S_{ij} = \frac{\sigma}{\Theta}\Theta_{ij}, \quad (1.1)$$

где K – модуль объемной упругости,

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\delta_{ij}, \quad \sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_{ij}\Theta_{ij}} \quad (1.2)$$

– модули шаровых тензоров и девиаторов,

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \Theta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0 \quad (1.3)$$

– компоненты девиаторов напряжений и деформаций, δ_{ij} – символ Кронекера. Закон упруго-пластического упрочнения материалов при простом нагружении представляет собой единую универсальную кривую для любого сложного напряженного состояния (НДС)

$$\sigma = \Phi(\Theta) \quad (1.4)$$

Это означает, что влиянием вида НДС в теории простого нагружения (теории малых упруго-пластических деформаций – ТМУПД) пренебрегается. Тензоры напряжений (σ_{ij}) и деформаций (ε_{ij}) можно представить в виде [1], [2]

$$(\sigma_{ij}) = \sigma_0(\delta_{ij}) + \sigma(S_{ij}^*), \quad (\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_0(\delta_{ij}) + \Theta(\Theta_{ij}^*), \quad (1.5)$$

где (δ_{ij}) – единичный тензор, (S_{ij}^*) и (Θ_{ij}^*) – направляющие тензоры, связанные с девиаторами соотношениями

$$(S_{ij}) = \sigma(S_{ij}^*), \quad (\Theta_{ij}) = \Theta(\Theta_{ij}^*). \quad (1.6)$$

Поступила 16.02.2013

При простом нагружении $(S_{ij}) = (\Theta_{ij})$, при сложном $(S_{ij}) \neq (\Theta_{ij})$. Модули шаровых тензоров σ_0 и ε_0 связаны в (5) законом Гука-Бриджмена

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0. \quad (1.7)$$

Отмеченное выше послужило для введения А. А. Ильюшиным шестимерных E_6 и пятимерных E_5 линейных векторных пространств для представления тензоров (σ_{ij}) , (ε_{ij}) и (S_{ij}) , (Θ_{ij}) в виде векторов. В пространстве E_6 соответственно получим

$$\bar{S} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\varepsilon} = \Theta_k \hat{i}_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 5), \quad (1.8)$$

при ортонормированном неподвижном базисе $\{\hat{i}_k\}$ [1], [2].

Учитывая, что объемная деформация упруга и подчиняется закону (1.7), а пластическая деформация может быть вызвана в основном только упругопластическим формоизменением, векторы (1.8) можно представить в виде

$$\bar{S} = S_0 \hat{i}_0 + \bar{\sigma}, \quad \bar{\varepsilon} = \Theta_0 \hat{i}_0 + \bar{\Theta}, \quad (1.9)$$

где

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\Theta} = \Theta_k \hat{i}_k, \quad (k = 1, 2, \dots, 5) \quad (1.10)$$

– пятимерные векторы формоизменения в девятимерном подпространстве E_5 ,

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, & S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, & S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{22} - S_{33}), \\ S_3 = \sqrt{2}S_{12}, & S_4 = \sqrt{2}S_{23}, & S_5 = \sqrt{2}S_{13}, \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} \Theta_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, & \Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\Theta_{11}, & \Theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_{22} - \Theta_{33}), \\ \Theta_3 = \sqrt{2}\Theta_{12}, & \Theta_4 = \sqrt{2}\Theta_{23}, & \Theta_5 = \sqrt{2}\Theta_{13} \end{cases} \quad (1.12)$$

– компоненты или координаты векторов напряжений \bar{S} , $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\Theta}$ соответственно.

При простом нагружении концы векторов $\bar{\sigma}$ и $\bar{\Theta}$ в совмещенном подпространстве E_5 описывают прямолинейные траектории, которым соответствуют образы процессов нагружения и деформирования соответственно [1], [2]. Для обобщенных плоских напряженно-деформированных состояний (НДС) и простом нагружении векторы $\bar{\sigma}$ и $\bar{\Theta}$ в этих образах по направлениям могут несколько отличаться до $6^\circ - 7^\circ$, что составляет точность процессов простого нагружения. При сложном нагружении с явно выраженными криволинейными траекториями $(S_{ij}) \neq (\Theta_{ij})$ в каждой их точке вектор напряжений $\bar{\sigma}$, согласно постулату изотропии А. А. Ильюшина, может быть представлен разложенным в подвижном репере (базисе) Френе $\{\hat{p}_k\}$ [1], [2]

$$\bar{\sigma} = P_k \hat{p}_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 5) \quad (1.13)$$

где

$$\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\Theta}}{ds}, \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{\varkappa_1} \frac{d^2\bar{\Theta}}{ds^2}, \quad \hat{p}_3 = \frac{1}{\varkappa_2} \left[\varkappa_1 \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2\bar{\Theta}}{ds^2} \right) \right], \dots \quad (1.14)$$

\varkappa_m ($m = 1, 2, 3, 4$) – параметры кривизны и кручения траектории, характеризующие сложное нагружение, s – длина дуги траектории деформирования.

В работах В. Г. Зубчиной [2] была построена общая теория определяющих соотношений теории процессов на основе постулата изотропии А. А. Ильюшина [1]. Основные соотношения этой теории для трехмерных задач имеют вид [2]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = P_k^* \hat{p}_k = M_1 \hat{p}_1 + M \hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3, \quad (1.15)$$

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta_1}{ds} + \varkappa_1 \cos \vartheta_2 = \frac{1}{\sigma} [-M_1 \sin \vartheta_1 + M_3 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2], \\ \sin \vartheta_1 \left(\frac{d\vartheta_2}{ds} + \varkappa_2 \right) = \varkappa_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \frac{M_3}{\sigma} \cos \vartheta_2, \end{cases} \quad (1.16)$$

где

$$M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 - M_3 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2, \quad (1.17)$$

$M_1, M_3, d\sigma/ds$ – функционалы процесса деформирования, которые зависят от параметров сложного нагружения $s, \varkappa_1, \varkappa_2$, углов излома траектории θ_m^0 . Углы сближения ϑ_1 и депланации ϑ_2 вектора $\bar{\sigma}$ в репере Френе $\{\hat{p}_k\}$ и модуль вектора $\bar{\sigma}$ являются функционалами тех же параметров процесса сложного нагружения

$$\begin{cases} \vartheta_m = \vartheta_m \{s, \varkappa_1, \varkappa_2, \theta_m^0\}, \\ \sigma = \Phi \{s, \varkappa_1, \varkappa_2, \theta_m^0\}, \end{cases} \quad (1.18)$$

причем углы ϑ_m характеризуют влияние векторных свойств материала, а σ – влияние скалярных свойств на зависимость между напряжениями и деформациями. В простейшем случае, когда траектории деформирования мало отличаются от прямолинейных пропорциональных нагружений, направляющие тензоры напряжений и скоростей деформаций практически совпадают и можно считать, что $\vartheta_1 \approx 0$ (скользящий образ процесса), то есть $(S_{ij}) \approx (\dot{\Sigma}_{ij})$ или $\hat{\sigma} = \hat{p}_1$.

В этом случае [1], [2]

$$\bar{\sigma} = \sigma \frac{d\bar{\Sigma}}{ds} \quad (1.19)$$

Для закона упрочнения независимо от вида сложного напряженного состояния принимается соотношение Одквиста-Ильюшина

$$\sigma = \Phi(s), \quad (1.20)$$

которое мало отличается от универсального закона Роша и Эйхингера при простом нагружении (1.4). Таким образом, постулируется гипотеза о том, что существует малый диапазон изменения $0 < \varkappa_1 < \varkappa_1^*$, для которого можно пренебречь векторными свойствами материала и считать $\vartheta_1 \leq 7^\circ$. Такие криволинейные траектории названы *траекториями малой кривизны*. Для них будем считать $\vartheta_1 \approx 0$.

Для *траекторий малого кручения* считается, что вектор напряжений $\bar{\sigma}$ в процессе деформирования остается лежать в соприкасающейся плоскости, то есть угол депланации $\vartheta_2 = 0$. В этом случае из соотношений (1.15)–(1.17) следуют определяющие соотношения теории процессов малого кручения В. Г. Зубчининова ($\vartheta_2 = 0, \varkappa_2 \neq 0$) [2]

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \hat{p}_1 + M \hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3, \\ \hat{\sigma} = \cos \vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin \vartheta_1 \hat{p}_2, \\ M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1, \quad M_3 = \sigma \varkappa_2 \sin \vartheta_1, \end{cases} \quad (1.21)$$

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} + \varkappa_1 = -\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1. \quad (1.22)$$

Если принять $\varkappa_2 = 0, \vartheta_2 = 0$, то получим $M_3 = 0$ и соотношения гипотезы компланарности А. А. Ильюшина, которые, строго говоря, описывают процессы деформирования для плоских траекторий [1]. Из гипотезы малого кручения и компланарности следует ряд частных теорий пластичности [2]. В этих теориях обычно сохраняется закон упрочнения Одквиста-Ильюшина (20), который распространяют на траектории средней кривизны.

Например, теория Прандтля-Рейтса-Хилла с учетом упрочнения следует из гипотезы компланарности ($M_3 = 0$) при $M_1 = 2G\dots$, $\sigma = \Phi(s)$. Действительно, в теории течения полные деформации разлагаются на упругие и пластические

$$d\bar{\mathfrak{E}} = d\bar{\mathfrak{E}}^e + d\bar{\mathfrak{E}}^p, \quad (1.23)$$

где

$$d\bar{\mathfrak{E}}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, \quad d\bar{\mathfrak{E}}^p = d\lambda \bar{\sigma}. \quad (1.24)$$

Следовательно

$$d\bar{\mathfrak{E}} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} + d\lambda \bar{\sigma}. \quad (1.25)$$

Из (1.24) следует, что вектор $\bar{\sigma}$ направлен по касательной к траектории пластических деформаций $\bar{\mathfrak{E}}^p(s^p)$, где s^p – длина ее дуги. Это означает, что угол пластического сближения ϑ_1^p вектора $\bar{\sigma}$ с $d\bar{\mathfrak{E}}^p$ равен нулю. Из второго соотношения (1.24) после умножения на $\bar{\sigma}$ следует, что

$$d\lambda = \frac{\bar{\sigma} d\bar{\mathfrak{E}}^p}{\sigma^2} = \left(1 - \frac{P}{2G}\right) \frac{\bar{\sigma} d\bar{\mathfrak{E}}}{\sigma^2} = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2G}\right) \frac{\bar{\sigma} d\bar{\sigma}}{\sigma^2}. \quad (1.26)$$

Из (1.24)–(1.26) получаем

$$d\bar{\sigma} = 2G d\bar{\mathfrak{E}} + (P - 2G) \frac{\bar{\sigma} d\bar{\mathfrak{E}}}{\sigma^2} \bar{\sigma}, \quad (1.27)$$

или

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = 2G \hat{\rho}_1 + \left(\frac{d\sigma}{ds} - 2G \cos \vartheta_1\right) \hat{\sigma}, \quad (1.28)$$

где

$$P = \frac{\bar{\sigma} d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma} d\bar{\mathfrak{E}}} = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1} \quad (1.29)$$

– известный функционал процесса сложного нагружения А. А. Ильюшина.

Угол сближения ϑ_1 определяется по теории течения из дифференциального уравнения (1.22) при $M_1 = 2G$:

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} + \varkappa_1 = -\frac{2G}{\sigma} \sin \vartheta_1. \quad (1.30)$$

Теории пластического течения Прандтля-Рейтса-Хилла и Мизеса предназначены, в основном, для расчетов значительных пластических деформаций при малом упрочнении или его отсутствии тел и материалов в технологических процессах холодной и горячей обработки металлов давлением. Поэтому в этих задачах полный угол сближения для упругопластических процессов деформирования мал и принимается $\vartheta_1^* \approx \vartheta_1^p = 0$. Но тогда из (1.30) следует, что и траектории деформирования будут малой кривизны порядка $\varkappa_1 \leq \varkappa_1^*$.

Из (1.21), (1.22) следуют частные теории пластичности средних кривизн А. С. Кравчука, В. И. Малого, теория квазипростых течений Прагера, деформационная теория течения Генки и другие [2]. В теории процессов для траекторий средней кривизны принимают $M_1 = \alpha 2G$, где α – постоянная, в пределах изменения ($0 < \alpha < 1$). Отношение

$$n(s) = \frac{M_1}{\sigma} \approx \frac{\alpha 2G}{\sigma_{\kappa}} = k, \quad (1.31)$$

где σ_K^T – новый предел текучести в точке излома траектории на диаграмме прослеживания процесса деформирования (1.20), k – постоянная величина. Параметр α в теории средних кривизн В. И. Малого принят равным $\alpha = 0,68$.

Подстановкой $t = \text{tg}(\vartheta_1/2)$ уравнение (1.30) может быть приведено к виду

$$\frac{dt}{ds} + nt = \frac{\alpha_1}{2}(1+t^2). \quad (1.32)$$

Линеаризируя уравнение (1.32) и считая α_1 постоянной величиной, находим решение

$$t = t_* + (t_0 - t_*) e^{-k\Delta s}, \quad (1.33)$$

где обозначено

$$t_0 = \text{tg}\left(\frac{\vartheta_1^0}{2}\right), \quad t_* = \text{tg}\left(\frac{\vartheta_1^*}{2}\right) = -\frac{\alpha_1}{2k}, \quad (1.34)$$

ϑ_1^0 , ϑ_1^* – углы сближения при $\Delta s = 0$ и $\Delta s \rightarrow \infty$ соответственно.

Если принять за допустимое значение для траекторий средней кривизны угол сближения $\vartheta_1^{**} = 45^\circ$, то при замене $\text{tg}(\vartheta_1/2) \approx \vartheta_1/2$ в (1.34) мы сделаем ошибку не более 5.5% и получим соотношение

$$\vartheta_1 = \vartheta_1^* + (\vartheta_1^0 - \vartheta_1^*) e^{-k\Delta s}, \quad (1.35)$$

где

$$\vartheta_1^* = -\alpha_1/k. \quad (1.36)$$

В работе [2] были предложены аппроксимации функционалов

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} - \left(2G + \frac{d\Phi_0}{ds}\right) f^p, \quad M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p) f^q, \quad (1.37)$$

где

$$f = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2} \quad (1.38)$$

– функция сложного нагружения, $2G_p = 2G(1 - \omega)$ – пластический удвоенный модуль сдвига, ω – параметр пластичности А. А. Ильюшина для простых процессов и процессов, близких к простым, G – упругий модуль сдвига.

Из (1.37) можно получить аппроксимацию

$$M_1 = n(s)\sigma, \quad n = k + \frac{1}{s}. \quad (1.39)$$

В этом случае решение линеаризованного уравнения (1.32) будет более точным

$$t = \frac{s_0}{s} e^{-k\Delta s} \left[t_0 - t_* \left(1 - \frac{1}{ks_0}\right) \right] + t_* \left(1 - \frac{1}{ks}\right). \quad (1.40)$$

Для траекторий средней кривизны с допуском для угла сближения $\vartheta_1^{**} < 45^\circ$ мы получаем соотношение

$$\vartheta_1 = \frac{s_0}{s} e^{-k\Delta s} \left[\vartheta_1^0 - \vartheta_1^* \left(1 - \frac{1}{ks_0}\right) \right] + \vartheta_1^* \left(1 - \frac{1}{ks}\right). \quad (1.41)$$

Соотношения (1.35), (1.41) позволяют построить графики для углов сближения ϑ_1 на окружностях для различных значений кривизны α_1 и определить соответствующие им значения следа запаздывания λ по допуску на малое значение ε для угла сближения ϑ_1 .

Если принять за допуск ε для угла сближения ϑ_1 с асимптотическим значением ϑ_1^* величину порядка точности теории простых процессов $(6 - 7)^\circ$, то из (1.35) получим выражение

$$\varepsilon = \tilde{\vartheta}_1 - \vartheta_1^* = (\vartheta_1^0 - \vartheta_1^*) e^{-k\lambda}, \quad (1.42)$$

откуда можно получить формулу для вычисления следа запаздывания для веера траекторий постоянной кривизны

$$\lambda_* = \frac{1}{k} \ln \frac{\vartheta_1^0 - \vartheta_1^*}{\varepsilon}. \quad (1.43)$$

В частности при $(\vartheta_1^0 - \vartheta_1^*) = \varepsilon$ получаем $\lambda_* = 0$.

В работе [1] А. А. Ильюшин отметил, что свойство запаздывания векторных свойств материала есть совершенно общее свойство пластических материалов. Величина следа запаздывания λ для различных материалов составляет несколько “упругих деформаций” и является основным линейным масштабом процесса сложного нагружения. Даже при простом нагружении траектория деформирования слегка искривлена и ее точность по углу сближения ϑ_1 для $\tilde{\sigma}$ составляет порядок $(6 - 7)^\circ$. Это позволяет сделать заключение о том, что существует класс траекторий малой кривизны, для которых кривизна $\varkappa_1 \leq \varkappa_1^*$, где \varkappa_1^* – предельное ее значение, для которого практически $\tilde{\sigma} = \hat{r}_1$, то есть имеют место законы (1.19) и (1.20) для плавного нагружения. “И только для сложных траекторий, характеризующихся кривизной $R \equiv 1 / \varkappa_1 \sim \lambda$ необходима более сложная теория пластичности” типа гипотезы компланарности либо малого кручения [1]. В. С. Ленский назвал такие траектории *средней кривизны*. Однако и здесь для различных материалов должно существовать ограничение по параметру кривизны, то есть $\varkappa^* \leq \varkappa \leq \varkappa^{**}$. В работе предлагается, что это ограничение следует оценивать по влиянию угла сближения ϑ_1 в зависимости от \varkappa_1 на некоторую функцию сложного нагружения $f(\vartheta_1)$, введенную в работах [2].

2. Принцип запаздывания векторных свойств материалов

Опыты с пластичными материалами показывают, что ориентация вектора напряжений в естественном репере $\{\hat{r}_k\}$ А. А. Ильюшина относительно траектории деформаций в некоторой точке К зависит не от всей траектории с ее параметрами внутренней геометрии s , \varkappa_m , а только от ее ограниченного участка, предшествующего ее рассматриваемой точке, называемого следом запаздывания λ . Этот след λ , различный для различных материалов, имеет длину порядка трех-десяти “упругих деформаций” $\varepsilon_T = 10^{-3}$ [1].

Свойство запаздывания векторных свойств материалов – это совершенно общее свойство пластически деформируемых тел, которое имеет место для различных криволинейных траекторий. Обычно след запаздывания λ материалов определяется на двузвенных ломанных траекториях при различных углах излома траектории ϑ_1^0 . Однако след запаздывания λ нельзя назвать стабильной характеристикой материалов.

В работе представлены расчеты для стальных образцов по определению следа запаздывания λ , которые производились на плоских криволинейных траекториях постоянной кривизны $\varkappa_1 = 1/R$, где R – радиус кривизны (рис. 2.1).

В процессе деформирования материала необходимо было в начале выйти по прямолинейному лучу в точку излома K при напряжении $\bar{\sigma}_0$; произвести излом траектории на угол $\vartheta_1^0 = 90^\circ$, а затем деформировать материал по центральной окружности радиуса R . При деформировании по окружности при достижении приращением дуги траектории, некоторого значения $\Delta s = \lambda$ устанавливается режим деформирования с практически постоянным значением угла сближения ϑ_1^* , при допуске $\vartheta_1 \leq \varepsilon$ (рис. 2.2).

Изменяя кривизну \varkappa_1 , можно получить целую серию зависимостей $\vartheta_1 - \Delta s$ и установить для них значения следа запаздывания λ . Аналогичные зависимости представлены на рис. 2.3, где сравниваются полученные кривые 1 с кривыми 2, рассчитанными по более точной формуле (1.41). Сравнение показывает, что более точная зависимость $\vartheta_1 - \Delta s$ лежит ниже, но по прежнему стремится к тому же асимптотическому значению ϑ_1^* . Это значение определяется по

формуле $\vartheta_1^* = \varkappa_1/k$. Например, для кривой с $\varkappa_1 = 50$ получаем $\vartheta_1^* = 0,125$, что соответствует $7,16^\circ$. Таким образом, все траектории, для которых кривизны $0 < \varkappa_1 < \varkappa_1^* = 50$ можно отнести к траекториям малой кривизны. В том числе, для траекторий малой кривизны с $\varkappa_1 = 25$ получаем $\vartheta_1^* = 0,0625$ или $3,6^\circ$, что меньше $\varepsilon = 7^\circ$.

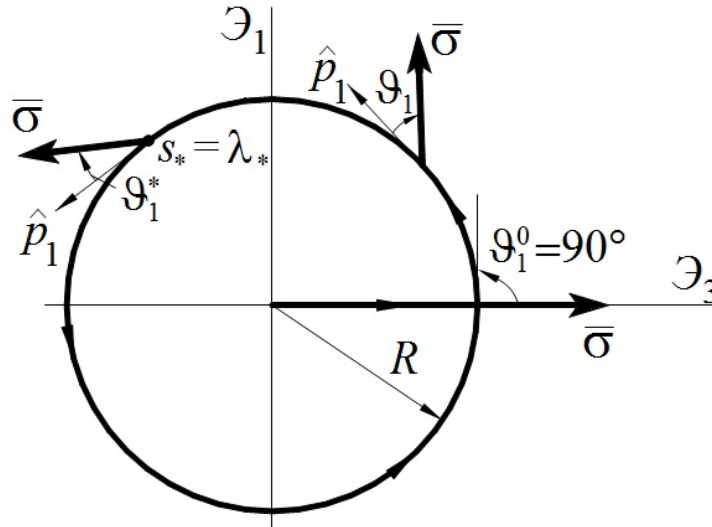


Рис. 2.1

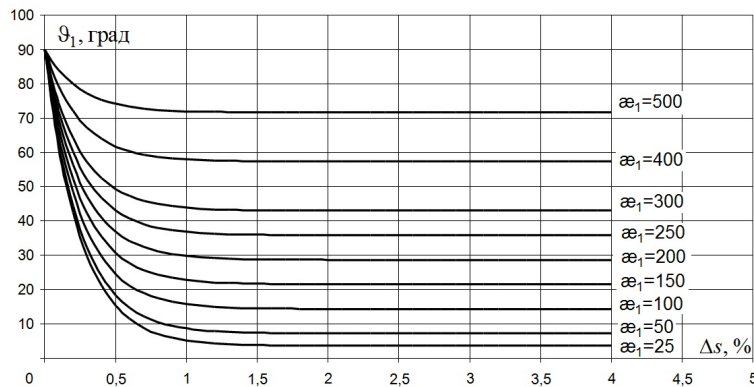


Рис. 2.2

На рис. 2.4 представлена зависимость следа запаздывания λ от значений \varkappa_1^* на установившемся участке процесса деформирования по траектории постоянной кривизны. Как видно, след запаздывания с ростом \varkappa_1 уменьшается, то есть является нестабильной характеристикой материала. На рис. 2.5 представлена зависимость функции $(\lambda \varkappa_1)$ от \varkappa_1 , на которой можно выделить участки для траекторий малой кривизны ($0 < \varkappa_1 < \varkappa_1^* = 50$) и средней кривизны ($\varkappa_1^* < \varkappa_1 \leq \varkappa_1^{**} = 200$) по классификации А. А. Ильюшина согласно критерию $\lambda \varkappa_1^{**} = 1$. На значение \varkappa_1^{**} для границы траекторий средней кривизны следует смотреть как на ориентировочное, в связи с нестабильным характером λ .

Более точный подход по определению предельного значения \varkappa_1^{**} для траекторий средней кривизны дает оценка по критерию ограничения функции сложного нагружения $f^p(\vartheta_1)$ В. Г. Зубчанинова [2]. Для траекторий средней кривизны ($\varkappa_1 \leq \varkappa_1^{**}$) векторные свойства

материалов таковы, что мало влияют на их скалярные свойства при активном деформировании и позволяют использовать в качестве закона упрочнения при сложном нагружении закон Одквиста-Ильюшина, содержащий только один параметр сложного нагружения – длину дуги $s > \Theta$. Однако, после упругой частичной разгрузки наступает этап вторичного пластического деформирования с новым пределом текучести. Этот вторичный предел текучести определяется благодаря учету обобщенного эффекта Баушингера при сложном разгрузении и связан с явлением запаздывания векторных и скалярных свойств материалов в теории процессов пластического деформирования А. А. Ильюшина.

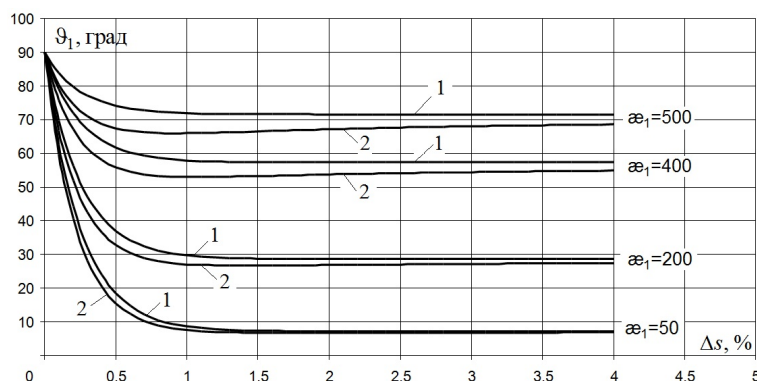


Рис. 2.3

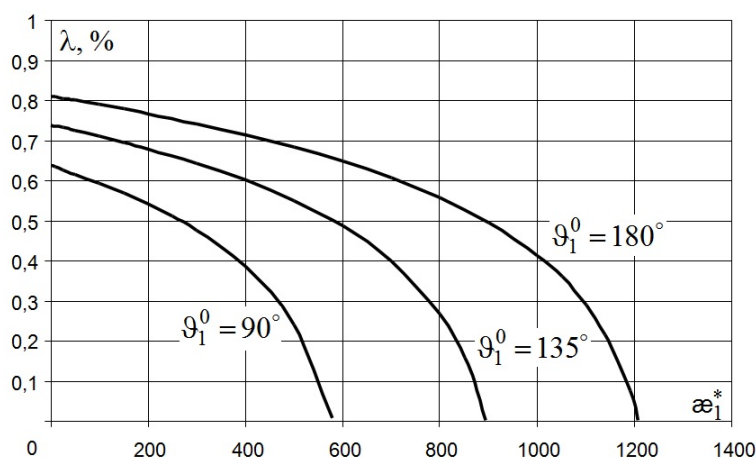


Рис. 2.4

Если принять, например, для стали 45 значения $\sigma^T = 300$ МПа, $\sigma_K^T = 360$ МПа, $2G = 1,54 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 0,68$, то получим из (1.31) $k = 290$. Опыты показывают, что сложное нагружение для такой стали начинает проявляться при достижении углом сближения $\vartheta_1 = 60^\circ$. Следовательно $\alpha_1^{**} = k \cdot (\pi/3) \approx 300$ ($R^{**} \approx 0,33\% = 0,0033$). Таким образом, можно рекомендовать считать траекториями средней кривизны для стали 45 такие, для которых кривизны α_1 не превосходят значения $\alpha_1^{**} = 300$ ($R^{**} \geq 0,33\%$). Для других материалов значение α_1^{**} может быть другим. Учет принципа запаздывания позволяет производить оценки достоверности и пределов применимости ряда частных моделей теории пластичности на основе классификации траекторий деформирования малой, средней и большой кривизны для различных материалов.

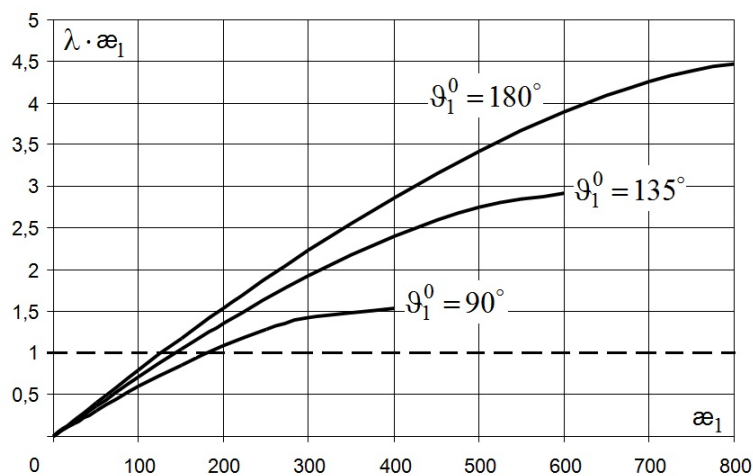


Рис. 2.5

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ильюшин, А. А.* Труды (1946-1966). Т. 2. Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Физматлит, 2004. – 480 с.
- [2] *Зубчанинов, В. Г.* Механика процессов пластических сред / В. Г. Зубчанинов. – М. : Физматлит, 2010. – 352 с.
- [3] *Зубчанинов В. Г.* Запаздывание векторных и скалярных свойств материалов при сложном нагружении / В. Г. Зубчанинов, Е. Г. Алексеева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 4 (14). – С. 26–37.

Зубчанинов Владимир Георгиевич,

доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь

e-mail: vgz@rambler.ru

Алексеева Елена Геннадьевна,

кандидат технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь

e-mail: kafsm@yandex.ru

V. G. Zubchaninov, E. G. Alekseevaa

**ABOUT INFLUENCE OF THE CURVATURE DEFORMATION PATH ON
CLASSIFICATION AND DELAY OF THE PROPERTIES OF MATERIALS
UNDER COMPLEX LOADING**

Tver State Technical University

Abstract. Considered the question of the classification of deformation path on their curvature and its influence on a trace of delay vector properties of materials.

Keywords: vector and scalar properties of materials, elasticity, plasticity, deformation and load path, vectors of stress and deformation, five-dimensional vector space, property of delay, delay trace of delay.

REFERENCES

- [1] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Vol. 2 / А. А. Ильюшин. – М. : Fizmatlit, 2004. – 480 p.
- [2] *Zubchaninov, V. G.* Механика процессов пластических сред / V. G. Zubchaninov. – М. : Fizmatlit, 2010. – 352 p.
- [3] *Zubchaninov, V. G.* Запаздывание векторных и скалярных свойств материалов при сложном нагружении / V. G. Zubchaninov, E. G. Alekseeva // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 4 (14). – P. 26–37.

Zubchaninov, Vladimir Georgievich

doctor of sciences, professor, department of the resistance of materials, elasticity and plasticity theories, Tver state technical university, Tver

Alekseeva, Elena Gennadievna

candidate of technical sciences, senior lecturer, department of the resistance of materials, elasticity and plasticity theories, Tver state technical university, Tver

**ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ
ТРАНСЛЯЦИОННО-АНИЗОТРОПНОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ,
НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ**

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Рассматривается многослойная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления. Предполагается, что каждый слой обладает своими свойствами трансляционной анизотропии. Разработан алгоритм определения предельного напряженного состояния для произвольного числа слоев.

Ключевые слова: напряжение, пластичность, трансляционная анизотропия, труба, слой.

УДК: 539.375

Рассмотрим многослойную толстостенную трубу, находящуюся под действием внутреннего давления p (рис. 1).

Обозначим через α_1, α_2 внутренний и внешний радиусы 1-го слоя, через α_2, α_3 – внутренний и внешний радиусы 2-го слоя, , через α_n, α_{n+1} – внутренний и внешний радиусы n – го слоя.

Условие предельного состояния для n -го слоя примем в виде

$$\left(\frac{\sigma_{xn} - \sigma_{yn}}{2} - \frac{k_{1n} - k_{2n}}{2} \right)^2 + (\tau_{xyn} - k_{3n})^2 = k_n^2, \quad k_{1n}, k_{2n}, k_{3n}, k_n - const, \quad (1)$$

где $\sigma_{xn}, \sigma_{yn}, \tau_{xyn}$ – компоненты напряжения в декартовой системе координат; k_{1n}, k_{2n}, k_{3n} – константы анизотропии.

В последующем все величины, которые имеют размерность напряжения, предполагаются безразмерными, отнесенными к величине предела текучести k и их обозначим:

$$\frac{k_n}{k} = K_n, \quad \frac{p}{k} = q, \quad (2)$$

все величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу упругопластической зоны в нулевом приближении $\rho_s^{(0)}$ и обозначим:

$$\frac{a_n}{\rho_s^{(0)}} = \alpha_n, \quad \frac{r}{\rho_s^{(0)}} = \rho. \quad (3)$$

Связь между напряжениями в декартовой системе координат x, y и напряжениями в полярной системе координат ρ, θ имеет следующий вид:

Поступила 24.02.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 13-01-97033, 14-01-31323 мол_а) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179)

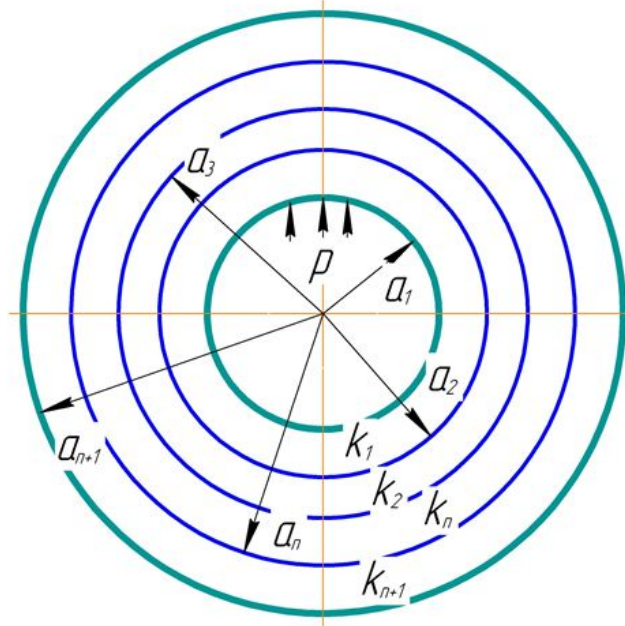


Рис 1. Многослойная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Перейдем к полярным координатам:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (5)$$

Из (4), (5) имеем условие пластичности в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}}{2} \right)^2 + (\tau_{\rho\theta n})^2 - 2R_n \left(\frac{\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}}{2} \right) \cos(2\theta + \mu_n) - \\ - 2\tau_{\rho\theta n} R_n \sin(2\theta + \mu_n) + R_n^2 - K_n^2 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$R_n = \sqrt{\left(\frac{k_{1n} - k_{2n}}{2} \right)^2 + k_{3n}^2}, \quad \frac{k_{1n} - k_{2n}}{2R_n} = \cos \mu_n, \quad \frac{k_{3n}}{R_n} = \sin \mu_n.$$

Предположим

$$k_{1n} = \delta k'_{1n}, \quad k_{2n} = \delta k'_{2n}, \quad k_{3n} = \delta k'_{3n}. \quad (7)$$

Обозначим, что $R_n = \delta R'_n$, $R'_n = \sqrt{\left(\frac{k'_{1n} - k'_{2n}}{2} \right)^2 + k'_{3n}^2}$.

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра δ , будем искать решение в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(I)} \delta + \sigma_{ij}^{(II)} \delta^2 + \dots \quad (8)$$

В исходном нулевом приближении имеет место осесимметричное состояние трубы:

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (9)$$

Из (1), (8), (9) имеет место

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p} = -2K_n. \quad (10)$$

Из уравнения равновесия:

$$\frac{d\sigma_{\rho n}^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho n}^{(0)} - \sigma_{\theta n}^{(0)}}{\rho} = 0, \quad (11)$$

с учетом (9), (10) получим

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} = 2K_n \ln \rho + C_n, \quad \sigma_{\theta}^{(0)p} = 2K_n + 2 \ln \rho + C_n, \quad (12)$$

где $C_n - \text{const}$.

Из граничного условия на внутреннем контуре:

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha_1} = -q. \quad (13)$$

а также (10), (11), (12) напряжения во внутренней пластической области I примут вид

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p} = -q + 2K_1 \ln \frac{\rho}{\alpha_1}, \quad \sigma_{\theta_1}^{(0)p} = -q + 2K_1 + 2K_1 \ln \frac{\rho}{\alpha_1}. \quad (14)$$

Граничное условие на внутреннем контуре:

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha_2} = \sigma_{\rho_2}^{(0)p}, \quad (15)$$

Из (11), (13), (15) получим во внешней пластической области II:

$$\sigma_{\rho_2}^{(0)p} = -q + 2K_2 \ln \frac{\rho}{\alpha_2} + 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \sigma_{\theta_2}^{(0)p} = -q + 2K_2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \quad (16)$$

Из (6), (7), (9), (10) в первом приближении имеем

$$\sigma'_{\theta n}{}^p - \sigma'_{\rho n}{}^p = -2(R'_n \cos(2\theta + \mu_n)). \quad (17)$$

Положим, что

$$\sigma_{\rho}^{(I)p} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(I)p} = \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_n^{(I)}}{\partial \theta} \right). \quad (18)$$

Из (17), (18) имеет место

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \theta^2} = -2R'_n \rho^2 \cos(2\theta + \mu_n). \quad (19)$$

Решение уравнения (19) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$\Phi_n^{(I)} = \Phi_{n\text{одн}}^{(I)} + \Phi_{n\text{частн}}^{(I)}. \quad (20)$$

Решая (20), получим:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho n}^{(I)p} &= \frac{\left[(-3C_{21}^{(n)} + \sqrt{3}C_{22}^{(n)}) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + (-\sqrt{3}C_{21}^{(n)} - 3C_{22}^{(n)}) \sin(\sqrt{3} \ln \rho)\right] \cos(2\theta)}{\rho} + \\
 &+ \frac{\left[(-3\bar{C}_{21}^{(n)} + \sqrt{3}\bar{C}_{22}^{(n)}) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + (-\sqrt{3}\bar{C}_{21}^{(n)} - 3\bar{C}_{22}^{(n)}) \sin(\sqrt{3} \ln \rho)\right] \sin(2\theta)}{\rho} + R'_n \cos(2\theta + \mu_n), \\
 \sigma_{\theta n}^{(I)p} &= \frac{\left[(-3C_{21}^{(n)} + \sqrt{3}C_{22}^{(n)}) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + (-\sqrt{3}C_{21}^{(n)} - 3C_{22}^{(n)}) \sin(\sqrt{3} \ln \rho)\right] \cos(2\theta)}{\rho} + \\
 &+ \frac{\left[(-3\bar{C}_{21}^{(n)} + \sqrt{3}\bar{C}_{22}^{(n)}) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + (-\sqrt{3}\bar{C}_{21}^{(n)} - 3\bar{C}_{22}^{(n)}) \sin(\sqrt{3} \ln \rho)\right] \sin(2\theta)}{\rho} - R'_n \cos(2\theta + \mu_n), \\
 \tau_{\rho\theta n}^{(I)p} &= \frac{\left[(2\sqrt{3}C_{22}^{(n)}) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - (2\sqrt{3}C_{21}^{(n)}) \sin(\sqrt{3} \ln \rho)\right] \sin(2\theta)}{\rho} + \\
 &+ \frac{\left[(-2\sqrt{3}\bar{C}_{22}^{(n)}) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + (2\sqrt{3}\bar{C}_{21}^{(n)}) \sin(\sqrt{3} \ln \rho)\right] \cos(2\theta)}{\rho} - R'_n \sin(2\theta + \mu_n),
 \end{aligned} \tag{21}$$

В первом приближении граничные условия на внутреннем контуре трубы согласно [1] имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho_1}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_1} &= 0, \\
 \tau_{\rho\theta_1}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_1} &= 0.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Предельное состояние во внутренней области I будет определяться из (21), (22):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho_1}^{(I)p} &= -R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - 1 \right) \cos(2\theta + \mu_1), \\
 \sigma_{\theta_1}^{(I)p} &= -R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) + 1 \right) \cos(2\theta + \mu_1), \\
 \tau_{\rho\theta_1}^{(I)p} &= R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - 1 \right) \sin(2\theta + \mu_1).
 \end{aligned} \tag{23}$$

Запишем (21) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho_1}^{(I)p} &= a_1^1 \cos(2\theta) + a_2^1 \sin(2\theta), \\
 \sigma_{\theta_1}^{(I)p} &= b_1^1 \cos(2\theta) + b_2^1 \sin(2\theta), \\
 \tau_{\rho\theta_1}^{(I)p} &= c_1^1 \cos(2\theta) + c_2^1 \sin(2\theta),
 \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_1^1 &= -R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - 1 \right) \cos(\mu_1), \\
 a_2^1 &= R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - 1 \right) \sin(\mu_1), \\
 b_1^1 &= -R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) + 1 \right) \cos(\mu_1), \\
 b_2^1 &= R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) + 1 \right) \sin(\mu_1), \\
 c_1^1 &= R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - 1 \right) \sin(\mu_1), \\
 c_2^1 &= R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) + 1 \right) \cos(\mu_1).
 \end{aligned}$$

Условия сопряжения, компонент напряжений на границе слоев трубы имеют вид:

$$\sigma_{\rho_1}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_2} = \sigma_{\rho_2}^{(I)p}, \quad \tau_{\rho\theta_1}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_2} = \tau_{\rho\theta_2}^{(I)p}. \tag{25}$$

Из (21), (23), (25) получаем предельное состояние во II пластической области:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho_{II}}^{(I)p} &= a_1^2 \cos(2\theta) + a_2^2 \sin(2\theta), \\
 \sigma_{\theta_{II}}^{(I)p} &= b_1^2 \cos(2\theta) + b_2^2 \sin(2\theta), \\
 \tau_{\rho\theta_{II}}^{(I)p} &= c_1^2 \cos(2\theta) + c_2^2 \sin(2\theta),
 \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [b_1^1 + R_2' \cos(\mu_2)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + \right. \\
&+ [a_1^1 - R_2' \cos(\mu_2)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) \right) + \\
&\quad \left. + R_2' \cos(\mu_2) \right\}, \\
a_2^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [b_2^1 + R_2' \sin(\mu_2)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + \right. \\
&+ [a_2^1 + R_2' \cos(\mu_2)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) \right) - \\
&\quad \left. - R_2' \sin(\mu_2) \right\}, \\
b_1^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [c_1^1 + R_2' \cos(\mu_2)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + \right. \\
&+ [c_1^1 - R_2' \cos(\mu_2)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) \right) - \\
&\quad \left. - R_2' \cos(\mu_2) \right\}, \\
b_2^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [c_2^1 + R_2' \sin(\mu_2)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + \right. \\
&+ [c_2^1 + R_2' \sin(\mu_2)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) \right) + \\
&\quad \left. + R_2' \sin(\mu_2) \right\}, \\
c_1^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [a_2^1 + R_2' \sin(\mu_2)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + \right. \\
&+ [b_2^1 + R_2' \sin(\mu_2)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) \right) - \\
&\quad \left. - R_2' \sin(\mu_2) \right\}, \\
c_2^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [a_2^1 - R_2' \cos(\mu_2)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + \right. \\
&+ [b_2^1 + R_2' \cos(\mu_2)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) \right) - \\
&\quad \left. - R_2' \cos(\mu_2) \right\}.
\end{aligned}$$

Аналогично из условия сопряжения компонент напряжений на границе n -го слоя трубы:

$$\sigma_{\rho n}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_n} = \sigma_{\rho_{n-1}}^{(I)p}, \quad \tau_{\rho\theta n}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_n} = \tau_{\rho\theta_{n-1}}^{(I)p} - \quad (27)$$

можно найти предельное состояние в n -ом слое:

$$\begin{aligned}
\sigma_{pn}^{(I)p} &= a_1^n \cos(2\theta) + a_2^n \sin(2\theta), \\
\sigma_{\theta n}^{(I)p} &= b_1^n \cos(2\theta) + b_2^n \sin(2\theta), \\
\tau_{p\theta n}^{(I)p} &= c_1^n \cos(2\theta) + c_2^n \sin(2\theta), \\
a_1^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [b_1^{n-1} + R_n' \cos(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\
&+ [a_1^{n-1} - R_n' \cos(\mu_n)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right) + \\
&\quad \left. + R_n' \cos(\mu_n) \right\}, \\
a_2^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [b_2^{n-1} + R_n' \sin(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\
&+ [a_2^{n-1} + R_n' \cos(\mu_n)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right) - \\
&\quad \left. - R_n' \sin(\mu_n) \right\}, \\
b_1^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [c_1^{n-1} + R_n' \cos(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\
&+ [c_1^{n-1} - R_n' \cos(\mu_n)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right) - \\
&\quad \left. - R_n' \cos(\mu_n) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_2^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [c_2^{n-1} + R'_n \sin(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\
 &+ [c_2^{n-1} + R'_n \sin(\mu_n)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right) + \\
 &\quad \left. + R'_n \sin(\mu_n) \right\}, \\
 c_1^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [a_2^{n-1} + R'_n \sin(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\
 &+ [b_2^{n-1} + R'_n \sin(\mu_n)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right) - \\
 &\quad \left. - R'_n \sin(\mu_n) \right\}, \\
 c_2^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [a_2^{n-1} - R'_n \cos(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\
 &+ [b_2^{n-1} + R'_n \cos(\mu_n)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right) - \\
 &\quad \left. - R'_n \cos(\mu_n) \right\}.
 \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

[2] *Ивлев, Д. А.* О предельном состоянии слоистых круговых цилиндров из анизотропного материала под действием внутреннего давления / Д. А. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (66). – С. 57–63.

[3] *Кержаев, А. П.* Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии / А. П. Кержаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2013. – № 2 (16). – С. 71–81.

Никитин Андрей Витальевич,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ligalas5@mail.ru

Тихонов Сергей Владимирович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov

LIMIT CONDITION ANISOTROPIC MULTILAYER TRANSLATIONNALLY THICK-WALLED PIPES UNDER INTERNAL PRESSURE

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Considered multilayer thick-walled pipe, which is under internal pressure. It is assumed that each layer has its own properties translational anisotropy. An algorithm to determine the maximum stress state for an arbitrary number of layers.

Keywords: stress, ductility, translational anisotropy, pipe layer.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* Perturbation method in the theory of elastic-plastic body / D. D. Ivlev, L. V. Ershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p.
- [2] *Ivlev, D. A.* The limit state of layered circular cylinders of an anisotropic material under internal pressure / D. A. Ivlev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics a limit state. – 2010. – No. 2 (66). – P. 57–63.
- [3] *Kerzhayev, A. P.* Is elastic a plastic state thick-walled tube under the action of internal pressure at the translational anisotropy / A. P. Kerzhayev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics a limit state. – 2013. – No 2 (16). – P. 71–81.

Nikitin, Andrey Vitalevich

Postgraduate student, Departament of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Tikhonov, Seregey Vladimirovich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor of Department Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Е. С. Лапикова, М. Н. Юринкина

**ПОЛУПОЛОСА С ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ,
РАБОТАЮЩИМИ НА ИЗГИБ. РАЗЛОЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА
ПО ФУНКЦИЯМ ФАДЛЯ – ПАПКОВИЧА**

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Даны примеры разложений Лагранжа в ряды по функциям Фадля – Папковича, возникающим при решении задачи для полуполосы, продольные стороны которой усилены ребрами жесткости, работающими на изгиб.

Ключевые слова: полуполоса, ребра жесткости, функции Фадля – Папковича, аналитические решения.

УДК: 539.3+517.95

Рассмотрим полуполосу, у которой продольные стороны $y = \pm 1$ усилены ребрами жесткости, работающими на изгиб.

Введем следующие обозначения: G – модуль сдвига пластины, E_1 – модуль упругости ребра; ν – коэффициент Пуассона для пластины и ребра; I – момент инерции поперечного сечения ребра, t – толщина пластины; $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – соответственно продольное и поперечное перемещения в пластине.

Из условия контакта ребра и пластины можно получить следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{E_1 I}{Gt} \cdot \frac{d^4 V(x, \pm 1)}{dx^4} - \sigma_y(x) = 0. \quad (1)$$

Кроме того, будем считать, что

$$\tau_{xy}(x, \pm 1) = 0. \quad (2)$$

Граничные условия при $x = 0$ могут быть различными, например, к концам ребер могут быть приложены сосредоточенные силы или моменты, а на торцах пластин могут быть заданы как напряжения, так и перемещения.

Запишем граничные условия (1), (2) с помощью соотношений метода начальных функций [1], [2]

$$\begin{aligned} (C\alpha^4 L_{VU}(1) - L_{YU}(1))U_0(x) + (L_{VY}(1) - L_{YV}(1))Y_0(x) &= 0, \\ L_{XU}(1)U_0(x) + L_{XY}(1)Y_0(x) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $L_{VU}(1)$, $L_{YU}(1)$ и т. д. – соответствующие операторы метода начальных функций, определенные при $y = 1$, а

$$C = \frac{E_1 I}{Gt}.$$

Поступила 20.02.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-08-00118)

Вводя разрешающую функцию $F(x)$ по формулам

$$U_0(x) = L_{XY}(1)F(x), \quad Y_0(x) = -L_{XU}(1)F(x), \quad (4)$$

тождественно удовлетворим второму уравнению (3), а первое, если его разделить на α , примет такой вид ($\alpha = \partial/\partial x$):

$$C\alpha^4 \sin^2 \alpha + (1 + \nu)(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) = 0. \quad (5)$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения бесконечного порядка (5) ищем в виде

$$F(x) = e^{\lambda x}. \quad (6)$$

Тогда получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$C\lambda^4 \sin^2 \lambda + (1 + \nu)(\lambda + \sin \lambda \cos \lambda) = 0. \quad (7)$$

Оно, помимо нулевых, имеет бесконечное множество комплексных корней $\{\pm\lambda_k, \pm\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$. В таблице 1 показаны значения первых пяти комплексных корней уравнения (7) (нулевым корням отвечает элементарное решение краевой задачи, которое полагается известным).

Таблица 1

№ корня λ_k	$Re\lambda_k$	$Im\lambda_k$
1	0,63700	0,63629
2	3,314677	0,18271
3	6,28384	0,91757
4	9,42498	0,61220
5	12,56645	0,45928

Следовательно, функцию $F(x)$ можно представить в виде ряда

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k = 1.$$

Подставляя функцию $F(x)$ в формулы (4), найдем начальные функции, а затем, в соответствии с зависимостями метода начальных функций, – все перемещения и напряжения.

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k U(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k U(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k V(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k V(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \sigma_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \sigma_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \tau_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}. \end{aligned} \quad (8)$$

Функции Фадля – Папковича $U(\lambda_k, y)$, $V(\lambda_k, y)$ и т. д. имеют такой вид:

$$\begin{aligned}
U(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1-\nu}{2} \sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\
V(\lambda_k, y) &= \left(\sin \lambda_k + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \sin \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y, \\
\sigma_x(\lambda_k, y) &= (1+\nu) \lambda_k ((\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y), \\
\sigma_y(\lambda_k, y) &= (1+\nu) \lambda_k ((\sin \lambda_k + \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y),
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\tau_{xy}(\lambda_k, y) = (1+\nu) \lambda_k^2 (\cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y).$$

Удовлетворим с помощью выражений (8) граничным условиям, заданным на торце полуполосы. Если, например, на торце полуполосы заданы нормальное $\sigma(y)$ и касательное $\tau(y)$ напряжения, то получим

$$\begin{aligned}
\sigma(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \sigma_x(\bar{\lambda}_k, y), \\
\tau(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \tau_{xy}(\bar{\lambda}_k, y),
\end{aligned} \tag{10}$$

Коэффициенты a_k определяются отсюда в явном виде с помощью биортогональных систем функций. Искомые функции должны быть найдены из решения уравнений [3]

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} U(\lambda, y) U_k(y) dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & \int_{-\infty}^{\infty} V(\lambda, y) V_k(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\
\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(\lambda, y) X_k(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y(\lambda, y) Y_k(y) dy &= \frac{\lambda^3 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\
\int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}(\lambda, y) T_k(y) dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $U(\lambda, y)$, $V(\lambda, y)$ и т. д. – порождающие функции, а функция

$$L(\lambda) = C \lambda^4 \sin^2 \lambda + (1+\nu)(\lambda + \sin \lambda \cos \lambda).$$

При $\lambda = \lambda_m$ из уравнений (10) получаются следующие соотношения биортогональности:

$$\begin{aligned}
\int_T U(\lambda_m, y) U_k(y) dy &= \begin{cases} \frac{\lambda_m L'(\lambda_m)}{2} & \text{при } (\lambda_m = \lambda_k), \\ 0 & \text{при } (\lambda_m \neq \lambda_k); \end{cases} \\
\int_T V(\lambda_m, y) V_k(y) dy &= \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2} & \text{при } (\lambda_m = \lambda_k), \\ 0 & \text{при } (\lambda_m \neq \lambda_k); \end{cases} \\
\int_T \sigma_x(\lambda_m, y) X_k(y) dy &= \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2} & \text{при } (\lambda_m = \lambda_k), \\ 0 & \text{при } (\lambda_m \neq \lambda_k); \end{cases} \\
\int_T \sigma_y(\lambda_m, y) Y_k(y) dy &= \begin{cases} \frac{\lambda_m^2 L'(\lambda_m)}{2} & \text{при } (\lambda_m = \lambda_k), \\ 0 & \text{при } (\lambda_m \neq \lambda_k); \end{cases}
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\int_T \tau_{xy}(\lambda_m, y) T_k(y) dy = \begin{cases} \frac{\lambda_m L'(\lambda_m)}{2} & \text{при } (\lambda_m = \lambda_k), \\ 0 & \text{при } (\lambda_m \neq \lambda_k). \end{cases}$$

$L'(\lambda_m)$ – производная функции $L(\lambda)$, определенная при $\lambda = \lambda_m$.

Для комплексных значений λ прямую интегрирования $(-\infty, \infty)$ в формулах (10) нужно заменить Т-образным контуром, лежащим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и составленным из отрезка мнимой оси $y \in [-1, 1]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$ [3].

Следует иметь в виду, что при всех λ_m

$$\begin{aligned} \int_T U(\overline{\lambda_m}, y) U_k(y) dy &= \int_T U(\lambda_m, y) \overline{U_k(y)} dy = 0, \\ \int_T V(\overline{\lambda_m}, y) V_k(y) dy &= \int_T V(\lambda_m, y) \overline{V_k(y)} dy = 0, \\ \int_T \sigma_x(\overline{\lambda_m}, y) X_k(y) dy &= \int_T \sigma_x(\lambda_m, y) \overline{X_k(y)} dy = 0, \\ \int_T \sigma_y(\overline{\lambda_m}, y) Y_k(y) dy &= \int_T \sigma_y(\lambda_m, y) \overline{Y_k(y)} dy = 0, \\ \int_T \tau_{xy}(\overline{\lambda_m}, y) T_k(y) dy &= \int_T \tau_{xy}(\lambda_m, y) \overline{T_k(y)} dy = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Первые члены разложений в ряд Тейлора по степеням λ порождающих функций в формулах (10) имеют такой вид:

$$\begin{aligned} U(\lambda, y) &= -\nu\lambda + \dots, \quad V(\lambda, y) = \lambda^2 y + \dots, \\ \sigma_x(\lambda, y) &= -\lambda^4 \frac{(3y^2 - 1)(\nu + 1)}{3} + \dots, \quad \sigma_y(\lambda, y) = 2\lambda^2(1 + \nu) + \dots, \\ \tau_{xy}(\lambda, y) &= -\lambda^5 (y^3 - y) \frac{(\nu + 1)}{3} + \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

а первые члены разложений правых частей равенств (10) равны:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} &= -\frac{2\lambda^3(1 + \nu)}{\lambda_k^2} + \dots, \quad \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} = -\frac{2\lambda^2(1 + \nu)}{\lambda_k^2} + \dots, \\ \frac{\lambda^3 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} &= -\frac{2\lambda^4(1 + \nu)}{\lambda_k^2} + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Сравнивая степенные разложения (12) и (13), можно заметить, например, что биортогональные функции $U_k(y)$, $Y_k(y)$ ортогональны константе при всех $k \geq 1$, а

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y V_k(y) dy = -\frac{2(1 + \nu)}{\lambda_k^2}. \quad (16)$$

Элементы $U_k(y)$, $V_k(y)$, $X_k(y)$, $Y_k(y)$ и $T_k(y)$ биортогональных систем функций можно представить в виде суммы финитных, равных нулю вне отрезка $|y| \leq 1$, и не финитных частей, ортогональных ко всем функциям $\{\sin m\pi\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\cos m\pi\}_{m=1}^{\infty}$ [3].

При решении краевых задач, как правило, используются финитные части биортогональных функций, поэтому важно знать их явное представление. Приведем их ($\delta(\cdot)$ – дельта-функция):

$$\begin{aligned}
u_k(y) &= \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k} - (\delta(y-1) + \delta(y+1)), \quad v_k(y) = -\frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k}, \\
x_k(y) &= \frac{\cos \lambda_k y}{2\lambda_k \sin \lambda_k}, \quad y_k(y) = \frac{-\lambda_k \cos \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} + \frac{\delta(y-1) + \delta(y+1)}{2}, \\
t_k(y) &= -\frac{\sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Формулы (15) получаются следующим образом. Например, построим функцию $u_k(y)$. Примем в первой формуле (10) $\lambda = m\pi$ ($m = 1, 2, \dots$). Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(m\pi, y) u_k(y) dy = \frac{(m\pi)^2 L(m\pi)}{(m\pi)^2 - \lambda_k^2}$$

или

$$-\frac{1+\nu}{2} m\pi (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(m\pi y) u_k(y) dy = \frac{(m\pi)^3 (1+\nu)}{(m\pi)^2 - \lambda_k^2}.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(m\pi y) u_k(y) dy = -\frac{(-1)^m 2(m\pi)^2}{(m\pi)^2 - \lambda_k^2}.$$

Слева стоит преобразование Фурье с параметром $m\pi$ функции $u_k(y)$. Используя обратное преобразование Фурье, можно найти функцию $u_k(y)$. Однако практически ее легко подобрать, зная, что она финитна и, следовательно, последний интеграл берется в пределах от -1 до 1 .

Дадим примеры разложений Лагранжа по всем функциям Фадля – Папковича (8). Найдем коэффициенты a_k, \bar{a}_k разложения в ряд Лагранжа по системе функций $\{U(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$

$$U(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k U(\lambda_k, y) + \bar{a}_k U(\bar{\lambda}_k, y). \tag{18}$$

Умножим обе части равенства (16) на функцию $U_m(y)$ ($m = 1, 2, \dots$) и проинтегрируем по y от $-\infty$ до $+\infty$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} U(y) U_m(y) dy = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} U(\lambda_k, y) U_m(y) dy + \bar{a}_k \int_{-\infty}^{+\infty} U(\bar{\lambda}_k, y) U_m(y) dy.
\end{aligned} \tag{19}$$

Значение интеграла слева обозначим через u_m . Интегралы, стоящие справа, не существуют для комплексных чисел λ_k , поэтому интегрирование справа опять нужно заменить интегрированием по Т-образному контуру. Тогда, в соответствии с соотношениями биортогональности (11), (13), из (17) получим

$$u_m = a_m \frac{L'(\lambda_m) \lambda_m}{2} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Отсюда находим

$$a_m = \frac{2u_m}{\lambda_m L'(\lambda_m)} \quad (m = 1, 2, \dots). \tag{20}$$

Подобным образом определяются коэффициенты разложений a_k по другим системам функций Фадля – Папковича.

В результате получим такие разложения в ряды Лагранжа по функциям Фадля – Папковича:

$$\begin{aligned} U(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2u_k}{\lambda_k L'(\lambda_k)} U(\lambda_k, y) \right\}, \quad V(y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2v_k}{L'(\lambda_k)} V(\lambda_k, y) \right\}, \\ \sigma_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2x_k}{L'(\lambda_k)} \sigma_x(\lambda_k, y) \right\}, \quad \sigma_y(y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2y_k}{\lambda_k^2 L'(\lambda_k)} \sigma_y(\lambda_k, y) \right\}, \\ \tau_{xy}(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2t_k}{\lambda_k L'(\lambda_k)} \tau_{xy}(\lambda_k, y) \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $U(y)$, $V(y)$, $\sigma_x(y)$, $\sigma_y(y)$ и $\tau_{xy}(y)$ – раскладываемые функции, заданные на отрезке $[-1, 1]$, а числа u_k , v_k , x_k , y_k и t_k находятся по формулам:

$$\begin{aligned} u_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(y) U_k(y) dy, \quad v_k = \int_{-\infty}^{+\infty} V(y) V_k(y) dy, \quad x_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x(y) X_k(y) dy, \\ y_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y(y) Y_k(y) dy, \quad t_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{xy}(y) T_k(y) dy. \end{aligned} \quad (22)$$

Из этих формул видно, что для определения чисел u_k , v_k , и т. д. необходимо раскладываемые функции, первоначально определенные при $y \in [-1, 1]$, каким-то образом продолжить вне этого отрезка. В зависимости от того, как выполнено это продолжение, числа u_k , v_k и т. д. будут разными. Однако ряды Лагранжа (19) всегда будут сходиться к своим функциям при $y \in (-1, 1)$ независимо от того, как выполнено продолжение. Неединственность разложений в ряды Лагранжа – характерное свойство систем функций Фадля – Папковича [3].

Пусть раскладываемыми функциями в формулах (20) являются соответствующие порождающие функции, т. е. $U(y) = U(t, y)$, $V(y) = V(t, y)$ и т. д., где t – вещественный параметр. Тогда, в соответствии с формулами (10), получим

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{t^2 L(t)}{t^2 - \lambda_k^2}, \quad v_k = \frac{t L(t)}{t^2 - \lambda_k^2}, \quad x_k = \frac{t L(t)}{t^2 - \lambda_k^2}, \\ y_k &= \frac{t^3 L(t)}{t^2 - \lambda_k^2}, \quad \tau_k = \frac{t^2 L(t)}{t^2 - \lambda_k^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя числа (21) в формулы (19), получим ($|y| < 1$):

$$\begin{aligned} U(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2t^2 L(t)}{\lambda_k L'(\lambda_k) (t^2 - \lambda_k^2)} U(\lambda_k, y) \right\}, \\ V(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2t L(t)}{L'(\lambda_k) (t^2 - \lambda_k^2)} V(\lambda_k, y) \right\}, \\ \sigma_x(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2t L(t)}{L'(\lambda_k) (t^2 - \lambda_k^2)} \sigma_x(\lambda_k, y) \right\}, \\ \sigma_y(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2t^3 L(t)}{\lambda_k^2 L'(\lambda_k) (t^2 - \lambda_k^2)} \sigma_y(\lambda_k, y) \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\tau_{xy}(t, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2t^2 L(t)}{\lambda_k L'(\lambda_k)(t^2 - \lambda_k^2)} \tau_{xy}(\lambda_k, y) \right\}.$$

На рис. 1–5 показаны графики раскладываемых функций и соответствующие им ряды Лагранжа (22) (сплошные кривые) при $t = \pi$ и $C = 4$.

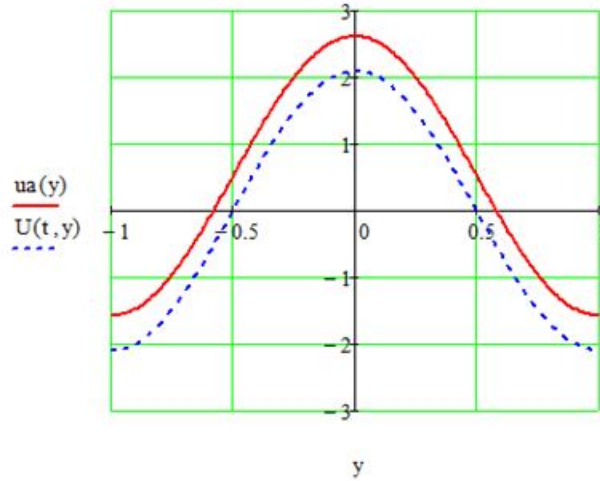


Рис. 1

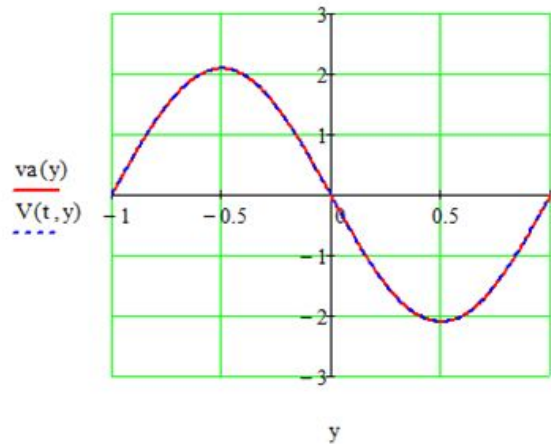


Рис. 2

Ряды Лагранжа для порождающих функций $U(t, y)$, $V(t, y)$ отличаются от них самих на константу в силу того, что биортогональные системы функций $\{U_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{Y_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональны к константе, как отмечалось выше.

Переходя в формулах (22) к пределу при $t \rightarrow 0$, можно получить, например, такое разложение:

$$y = -4(1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{V(\lambda_k y)}{\lambda_k^2 L'(\lambda_k)} \right\}.$$

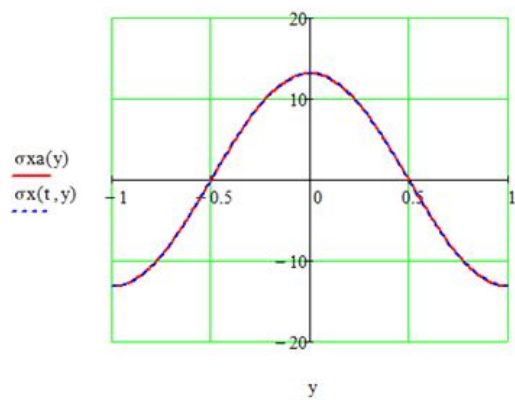


Рис. 3

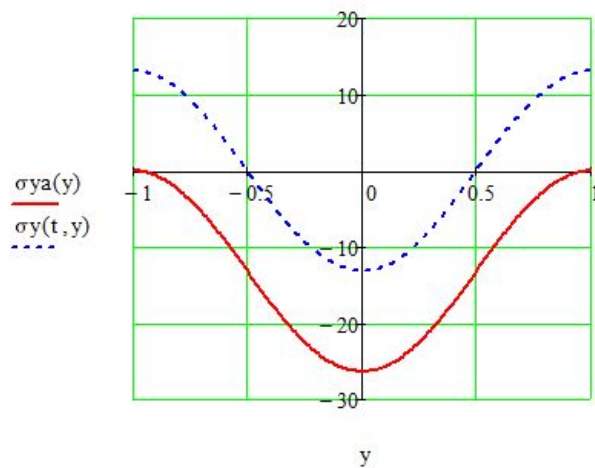


Рис. 4

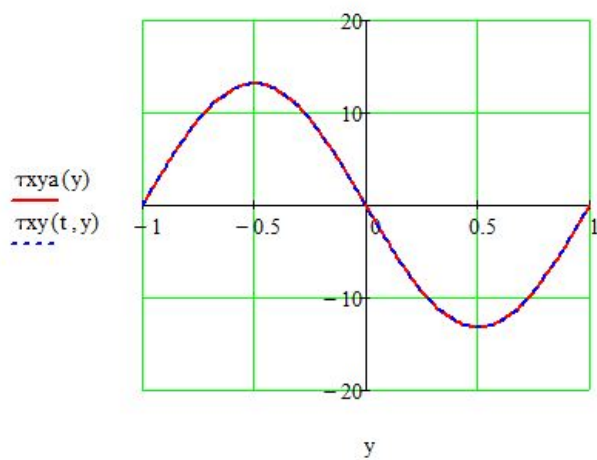


Рис. 5

Если раскладываемые функции, стоящие в левых частях формул (19), продолжить периодически вне отрезка $[-1, 1]$ с периодом, равным 2, то для чисел u_k , v_k , и т. д. получим следующие простые формулы:

$$\begin{aligned} u_k &= \int_{-1}^{+1} U(y)u_k(y)dy, & v_k &= \int_{-1}^{+1} V(y)v_k(y)dy, \\ y_k &= \int_{-1}^{+1} \sigma_y(y)y_k(y)dy, & x_k &= \int_{-1}^{+1} \sigma_x(y)x_k(y)dy, \\ t_k &= \int_{-1}^{+1} \tau_{xy}(y)t_k(y)dy. \end{aligned} \quad (25)$$

Приведем примеры разложений с числами (23). Пусть

$$U(y) = \frac{2\nu + 1}{6} - \frac{y^2}{2}.$$

По первой формуле (23) найдем

$$u_k = \frac{6(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) - 2\lambda_k^2(1 - \nu) \sin \lambda_k}{3\lambda_k^2 \sin \lambda_k}. \quad (26)$$

Соответствующее разложение выглядит так:

$$\frac{2\nu + 1}{6} - \frac{y^2}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2u_k}{\lambda_k L'(\lambda_k)} U(\lambda_k, y) \right\}. \quad (27)$$

Аналогично можно получить такие разложения:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2v_k}{L'(\lambda_k)} V(\lambda_k, y) \right\}, & y^2 - \frac{1}{3} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2x_k}{L'(\lambda_k)} \sigma_x(\lambda_k, y) \right\}, \\ y^2 - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2y_k}{\lambda_k^2 L'(\lambda_k)} \sigma_y(\lambda_k, y) \right\}, \\ \frac{\nu + 1}{3}(y^3 - y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2t_k}{\lambda_k L'(\lambda_k)} \tau_{xy}(\lambda_k, y) \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

в которых числа

$$\begin{aligned} v_k &= -2 \frac{(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k)}{\lambda_k^2 \sin \lambda_k}, \\ x_k &= -6 \frac{(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) + 2\lambda_k^2 \sin \lambda_k}{3\lambda_k^4 \sin \lambda_k}, \\ y_k &= 2 \frac{\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k}{\lambda_k^2 \sin \lambda_k}, \\ t_k &= \frac{-2(\nu + 1)(\sin \lambda_k (\lambda_k^2 - 3) + 3\lambda_k \cos \lambda_k)}{3\lambda_k^4 \sin \lambda_k}. \end{aligned} \quad (29)$$

На рис. 6–10 показаны раскладываемые функции, стоящие в левых частях формул (25), (26), и их ряды Лагранжа (сплошные кривые).

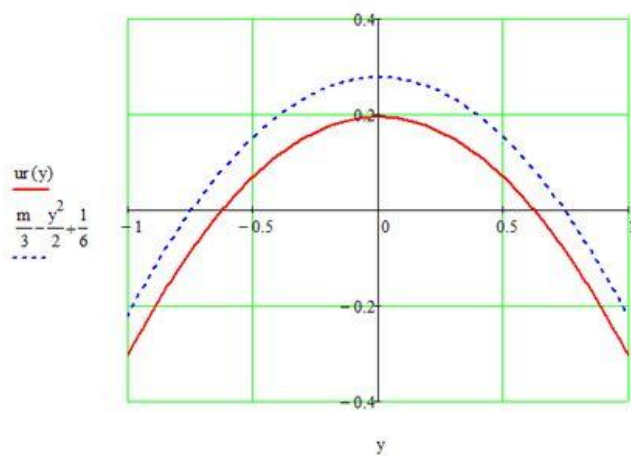


Рис. 6

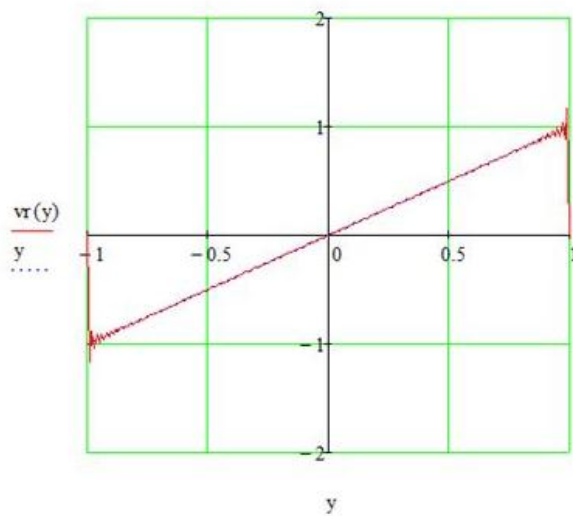


Рис. 7

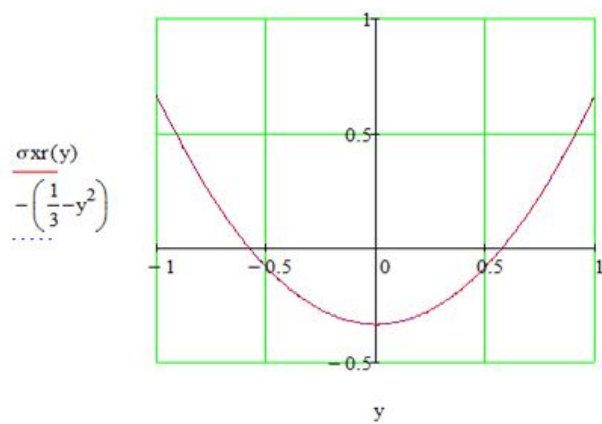


Рис. 8

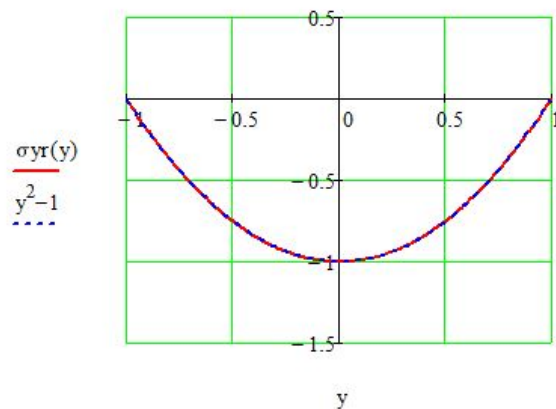


Рис. 9

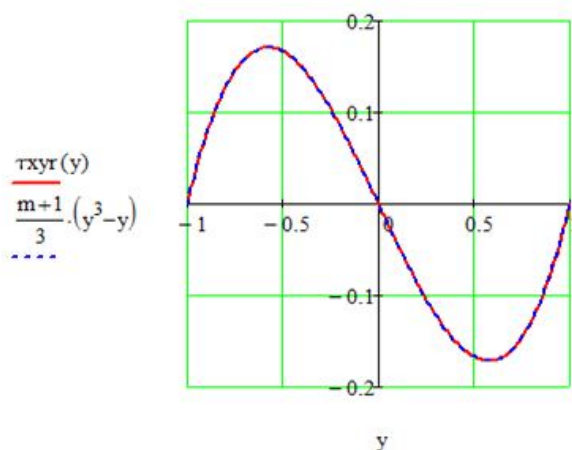


Рис. 10

Ряды Лагранжа по функциям $U(\lambda_k, y)$ и $\sigma_y(\lambda_k, y)$ могут отличаться от раскладываемых функций на некоторую постоянную, в силу того, что биортогональные системы функций для этих функций Фадля – Папковича по построению ортогональны к константе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224с.

[2] Лапикова Е. С. Разложения Лагранжа в периодической задаче для полуполосы с продольными ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие / Е. С. Лапикова, М. Н. Юринкина, А. П. Кержаев, А. В. Никитин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2013. – № 4 (18). – С. 63–79.

[3] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. МГТ. – 2011. – № 5. – С. 78–98.

Лапикова Елена Семеновна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: enchantress_tais@mail.ru

Юринкина Мария Николаевна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: m.yurinkina@yandex.ru

E. S. Lapikova, M. N. Yurinkina

**THE SEMI-STRIP WHICH HAS BENDING STIFFNESS RIBS. THE
LAGRANGE EXPANSIONS ON THE FADLE – PAPKOVICH FUNCTIONS**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The examples of Lagrange expansions on the Fadle – Papkovich functions for the semi-strip with bending stiffness ribs are constructed.

Keywords: semi-strip, ribs, Fadle – Papkovich functions, analytical solutions.

REFERENCES

- [1] *Vlasov, V. V.* Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p.
- [2] *Lapikova, E. S.* The Lagrange expansion in the periodic boundary value problem for the semistrip with longitudinal stiffening ribs / E. S. Lapikova, M. N. Yurinkina, A. P. Kerzhaev, A. V. Nikitin // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – No. 18. – P. 68–85.
- [3] *Kovalenko, M. D.* Expansions in Fadle – Papkovich functions in a strip. Theory foundations / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya. – Mechanics of Solids, 2011. – No 5. – H. 46. – P. 721–738.

Lapikova, Elena Semenovna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Yurinkina, Maria Nikolaevna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Е. С. Лапикова, М. Н. Юринкина

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУПОЛОСЫ С ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ, РАБОТАЮЩИМИ НА ИЗГИБ. РАЗЛОЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Построены примеры разложений Лагранжа в ряды по функциям Фадля – Папковича, возникающим при решении периодической задачи для полуполосы, продольные стороны которой усилены ребрами жесткости, работающими только на изгиб.

Ключевые слова: полуполоса, ребра жесткости, функции Фадля – Папковича, аналитические решения.

УДК: 539.3+517.95

Рассмотрим полуполосу, продольные стороны которой $y = \pm 1$ подкреплены ребрами жесткости, обладающими изгибной жесткостью. Обозначим: G – модуль сдвига пластины, E_1 – модуль упругости ребра; ν – коэффициент Пуассона для пластины и ребра; I – момент инерции поперечного сечения ребра, t – толщина пластины; $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – соответственно продольное и поперечное перемещения в пластине.

Условие контакта ребра и пластины имеет такой вид [1]

$$\frac{E_1 I}{Gt} \cdot \frac{d^4 V(x, \pm 1)}{dx^4} - \sigma_y(x) = 0. \quad (1)$$

Кроме того, будем считать, что

$$U(x, \pm 1) = 0. \quad (2)$$

Граничные условия (1), (2) соответствуют периодической краевой задаче, условно показанной на рис. 1. Граничные условия при $x = 0$ могут быть различными (например, сосредоточенные силы или моменты, приложенные к концам ребер жесткости; напряжения или перемещения, заданные на торцах полуполос).

Используя представления метода начальных функций, перепишем граничные условия (1), (2) следующим образом [1], [2]

$$\begin{aligned} C\alpha^4(L_{VU}(1) - L_{YU}(1))U_0(x) + (L_{VY}(1) - L_{YY}(1))Y_0(x) &= 0, \\ L_{UU}(1)U_0(x) + L_{UY}(1)Y_0(x) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $C = E_1 I / Gt$, $L_{VU}(1)$, $L_{YU}(1)$ и т. д. – определенные при соответствующих операторах метода начальных функций.

Введем разрешающую функцию $F(x)$ по формулам (4).

$$U_0(x) = -L_{UY}(1)F(x), \quad Y_0(x) = L_{UU}(1)F(x). \quad (4)$$

Поступила 20.02.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-08-00118)

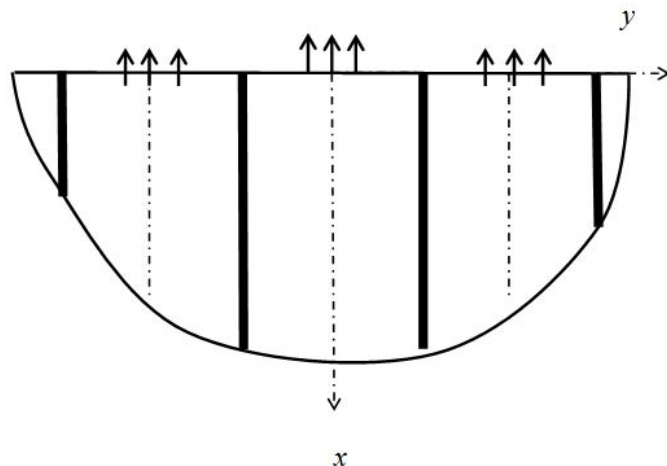


Рис. 1. Периодическая задача для полуполосы, продольные ребра которой работают на изгиб

При этом второе уравнение будет тождественно удовлетворено, а первое примет такой вид

$$(C\alpha^4 L_{VU}(1) - L_{YU}(1))L_{UY}(1) - (L_{VY}(1) - L_{YU}(1))L_{UV}(1) = 0. \tag{5}$$

Раскрывая выражения для дифференциальных операторов, получим

$$\cos^2 \alpha - \frac{C\alpha^3}{4}((1 + \nu)\alpha + (\nu - 3) \sin \alpha \cos \alpha) = 0.$$

Разыскивая его решение в виде

$$F(x) = e^{\lambda x}, \tag{6}$$

получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$\cos^2 \lambda - \frac{C\lambda^3}{4}((1 + \nu)\lambda + (\nu - 3) \sin \lambda \cos \lambda) = 0, \tag{7}$$

имеющее (помимо нулевых) один вещественный и бесконечное множество комплексных корней $\{\pm\lambda_k, \pm\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$. Ниже для иллюстрации приведены значения первых пяти комплексных корней уравнения (7)

Таблица 1

№ корня λ_k	$Re\lambda_k$	$Im\lambda_k$
1	0,04131	0
2	0,61037	0,645679
3	3,78769	1,02483
4	10,13576	1,32438
5	13,29001	1,50901

Следовательно, $F(x)$ можно представить в виде ряда

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k = 1.$$

Подставляя $F(x)$ в формулы (4), найдем начальные функции, а затем – все перемещения и напряжения

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k U(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k U(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
 V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k V(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k V(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
 \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \sigma_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
 \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \sigma_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \tau_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Функции Фадля – Папковича $U(\lambda_k, y)$, $V(\lambda_k, y)$ и т. д. имеют вид:

$$\begin{aligned}
 U(\lambda_k, y) &= \frac{1+\nu}{4} (\sin \lambda_k \cos \lambda_k y - y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y), \\
 V(\lambda_k, y) &= -\left[\frac{(1+\nu)}{4} \sin \lambda_k + \frac{(\nu-3)}{4\lambda_k} \cos \lambda_k \right] \sin \lambda_k y - \frac{1+\nu}{4} y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y, \\
 \sigma_x(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1+\nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k + \nu \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y, \\
 \sigma_y(\lambda_k, y) &= \left(\cos \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k \right) \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y, \\
 \tau_{xy}(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1-\nu}{2} \cos \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k \right) \sin \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Удовлетворяя с помощью представлений (8) граничным условиям, заданным на торце полуполосы, приходим к задаче определения коэффициентов a_k , \bar{a}_k из разложений по функциям Фадля – Папковича. Например,

$$\begin{aligned}
 U(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k U(\lambda_k, y) + \bar{a}_k U(\bar{\lambda}_k, y), \\
 V(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k V(\lambda_k, y) + \bar{a}_k V(\bar{\lambda}_k, y),
 \end{aligned} \tag{10}$$

где $U(y)$ и $V(y)$ – заданные на торце полуполосы продольное и поперечное перемещения.

Явные выражения для коэффициентов разложений a_k находятся отсюда с помощью биортогональных систем функций, которые определяются как решения уравнений

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} U(\lambda, y) U_k(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & \int_{-\infty}^{+\infty} V(\lambda, y) V_k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x(\lambda, y) X_k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y(\lambda, y) Y_k(y) dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2},
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{xy}(\lambda, y) T_k(y) dy = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}.$$

Здесь через $U(\lambda, y)$, $V(\lambda, y)$ и т. д. обозначены порождающие функции. Целая функция экспоненциального типа равного 2

$$L(\lambda) = \cos^2 \lambda - \frac{C\lambda^3}{4}((1 + \nu)\lambda + (\nu - 3) \sin \lambda \cos \lambda).$$

Из уравнений (9) при $\lambda = \lambda_m$ получаются соотношения биортогональности:

$$\begin{aligned} \int_T U(\lambda_m, y) U_k(y) dy &= \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2} & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k; \end{cases} \\ \int_T V(\lambda_m, y) V_k(y) dy &= \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2\lambda_m} & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k; \end{cases} \\ \int_T \sigma_x(\lambda_m, y) X_k(y) dy &= \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2\lambda_m} & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k; \end{cases} \\ \int_T \sigma_y(\lambda_m, y) Y_k(y) dy &= \begin{cases} \frac{\lambda_m L'(\lambda_m)}{2} & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k; \end{cases} \\ \int_T \tau_{xy}(\lambda_m, y) T_k(y) dy &= \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2} & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Через $L'(\lambda_m)$ обозначена определенная при $\lambda = \lambda_m$ производная функции $L(\lambda)$.

Прямую интегрирования $(-\infty, \infty)$ в формулах (9) для комплексных значений параметра λ нужно заменить Γ -образным контуром, лежащим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и составленным из отрезка мнимой оси $y \in [-1, 1]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$ [3], [4].

Следует иметь в виду, что при всех $\bar{\lambda}_m$

$$\begin{aligned} \int_T U(\bar{\lambda}_m, y) U_k(y) dy &= \int_T U(\lambda_m, y) \overline{U_k(y)} dy = 0, \\ \int_T V(\bar{\lambda}_m, y) V_k(y) dy &= \int_T V(\lambda_m, y) \overline{V_k(y)} dy = 0, \\ \int_T \sigma_x(\bar{\lambda}_m, y) X_k(y) dy &= \int_T \sigma_x(\lambda_m, y) \overline{X_k(y)} dy = 0, \\ \int_T \sigma_y(\bar{\lambda}_m, y) Y_k(y) dy &= \int_T \sigma_y(\lambda_m, y) \overline{Y_k(y)} dy = 0, \\ \int_T \tau_{xy}(\bar{\lambda}_m, y) T_k(y) dy &= \int_T \tau_{xy}(\lambda_m, y) \overline{T_k(y)} dy = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Выпишем первые члены разложений в ряд Тейлора по степеням λ порождающих функций в формулах (11):

$$U(\lambda, y) = -\lambda \frac{\nu + 1}{4} (y^2 - 1) + \dots,$$

$$\begin{aligned}
V(\lambda, y) &= \frac{\nu - 1}{2}y + \dots, \\
\sigma_x(\lambda, y) &= \nu + \dots, \\
\sigma_y(\lambda, y) &= 1 + \dots, \\
\tau_{xy}(\lambda, y) &= -\lambda\nu y + \dots
\end{aligned} \tag{14}$$

и правых частей равенств (11)

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} &= -\frac{\lambda}{\lambda_k^2} + \dots, \\
\frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} &= -\frac{1}{\lambda_k^2} + \dots, \\
\frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} &= -\frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} + \dots
\end{aligned} \tag{15}$$

Сравнивая степенные разложения (14) и (15), замечаем, что биортогональная функция $Y_k(y)$ ортогональна константе при всех $k \geq 1$, а

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu + 1}{4}(y^2 - 1)U_k(y)dy &= \frac{1}{\lambda_k^2}, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu - 1}{4}yV_k(y)dy &= -\frac{1}{\lambda_k^2}, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \nu X_k(y)dy &= -\frac{1}{\lambda_k^2}, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \nu yT_k(y)dy &= \frac{1}{\lambda_k^2}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Известно, что элементы $U_k(y)$, $V_k(y)$, $X_k(y)$, $Y_k(y)$ и $T_k(y)$ биортогональных систем можно представить в виде суммы финитных, не равных нулю на отрезке $|y| \leq 1$, и нефинитных частей, ортогональных ко всем функциям $\{\sin \frac{2m+1}{2}\pi\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\cos \frac{2m+1}{2}\pi\}_{m=1}^{\infty}$ [3], [4]. Финитные части биортогональных функций имеют такой вид ($\delta(\cdot)$ – дельта-функции):

$$\begin{aligned}
u_k(y) &= \frac{-C}{2} \left\{ \frac{\lambda_k^4 \cos \lambda_k^y}{\cos \lambda_k} + \lambda_k^2 (\delta'(y-1) - \delta'(y+1)) - (\delta'''(y-1) - \delta'''(y+1)) \right\}, \\
v_k(y) &= \frac{C}{2} \left\{ \frac{\lambda_k^3 \sin \lambda_k^y}{\cos \lambda_k} + \lambda_k^2 (\delta(y-1) - \delta(y+1)) - (\delta''(y-1) - \delta''(y+1)) \right\}, \\
x_k(y) &= \frac{-C}{4} \left\{ \frac{\lambda_k^2 \cos \lambda_k^y}{\cos \lambda_k} + (\delta'(y-1) - \delta'(y+1)) \right\}, \\
y_k(y) &= \frac{C}{4} \left\{ \frac{\lambda_k^4 \cos \lambda_k^y}{\cos \lambda_k} - \lambda_k^2 (\delta'(y-1) - \delta'(y+1)) + (\delta'''(y-1) - \delta'''(y+1)) \right\},
\end{aligned} \tag{17}$$

$$t_k(y) = \frac{C}{4} \left\{ \frac{\lambda_k^3 \sin \lambda_k^y}{\cos \lambda_k} + \lambda_k^2 (\delta(y-1) - \delta(y+1)) - (\delta''(y-1) - \delta''(y+1)) \right\}.$$

Формулы (17) строятся так. Построим, например, функцию $u_k(y)$. Примем в первой формуле (11) $\lambda = \frac{2m+1}{2}\pi = q_m$ ($m = 1, 2, \dots$). Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(q_m, y) u_k(y) dy = \frac{q_m L(q_m)}{(q_m)^2 - \lambda_k^2}$$

или

$$\frac{1 + \nu}{4} (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(q_m y) u_k(y) dy = \frac{C q_m^5 (1 + \nu)}{4(q_m^2 - \lambda_k^2)}.$$

Откуда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(q_m y) u_k(y) dy = \frac{(-1)^m C q_m^5}{q_m^2 - \lambda_k^2}.$$

Зная, что функции $u_k(y)$ финитны, с носителем на $(-1, 1)$ и, следовательно, интеграл берется в пределах от -1 до 1 , их легко подобрать.

Рассмотрим примеры разложений Лагранжа по всем функциям Фадля – Папковича (9). Пусть, например, нужно найти коэффициенты a_k, \bar{a}_k разложения в ряд Лагранжа по системе функций $\{U(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$

$$U(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k U(\lambda_k, y) + \bar{a}_k U(\bar{\lambda}_k, y). \tag{18}$$

Умножая обе части равенства (18) на $U_m(y)$ ($m = 1, 2, \dots$) и интегрируя по y от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(y) U_m(y) dy = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} U(\lambda_k, y) U_m(y) dy + \bar{a}_k \int_{-\infty}^{+\infty} U(\bar{\lambda}_k, y) U_m(y) dy. \tag{19}$$

Обозначим u_m значение интеграла слева

$$u_m = \int_{-\infty}^{+\infty} U(y) U_m(y) dy.$$

В интегралах, стоящих справа, и не существующих для комплексных λ_k , интегрирование справа нужно заменить интегрированием по Т-образному контуру, фигурирующему в формулах (12) и (13). В соответствии с соотношениями биортогональности, из (19) получим

$$u_m = a_m \frac{L'(\lambda_m)}{2} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Откуда

$$a_m = \frac{2u_m}{L'(\lambda_m)} \quad (m = 1, 2, \dots). \tag{20}$$

Аналогично находятся коэффициенты разложений a_k по другим системам функций Фадля – Папковича.

Окончательно получим такие разложения в ряды Лагранжа по функциям Фадля – Папковича:

$$\begin{aligned}
 U(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{2u_k}{L'(\lambda_k)} U(\lambda_k, y) \right\}, \\
 V(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{2\lambda_k v_k}{L'(\lambda_k)} V(\lambda_k, y) \right\}, \\
 \sigma_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{2\lambda_k x_k}{L'(\lambda_k)} \sigma_x(\lambda_k, y) \right\}, \\
 \sigma_y(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{2y_k}{\lambda_k L'(\lambda_k)} \sigma_y(\lambda_k, y) \right\}, \\
 \tau_{xy}(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{2t_k}{L'(\lambda_k)} \tau_{xy}(\lambda_k, y) \right\}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь $U(y)$, $V(y)$, $\sigma_x(y)$, $\sigma_y(y)$ и $\tau_{xy}(y)$ – раскладываемые функции, заданные на отрезке $[-1, 1]$, а числа u_k , v_k , x_k , y_k и t_k находятся как интегралы:

$$\begin{aligned}
 u_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(y) U_k(y) dy, \\
 v_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} V(y) V_k(y) dy, \\
 x_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x(y) X_k(y) dy, \\
 y_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y(y) Y_k(y) dy, \\
 t_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{xy}(y) T_k(y) dy.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Из формул (22) видно, что для определения чисел u_k , v_k , и т. д. раскладываемые функции, первоначально определенные при $y \in [-1, 1]$, нужно каким-то образом продолжить вне этого отрезка. В зависимости от того, как выполнено это продолжение, числа u_k , v_k и т. д. будут разными. Несмотря на это, ряды Лагранжа (21) будут сходиться к своим функциям при $y \in (-1, 1)$ независимо от способа продолжения. Неединственность разложений в ряды Лагранжа по функциям Фадля – Папковича – их характерное свойство [3], [4].

Если в формулах (22) раскладываемыми функциями являются порождающие функции, т. е. $U(y) = U(t, y)$, $V(y) = V(t, y)$ и т. д., где t – вещественный параметр, то, в соответствии с формулами (11), будем иметь:

$$\begin{aligned}
 u_k &= \frac{tL(t)}{t^2 - \lambda_k^2}, \\
 v_k &= \frac{L(t)}{t^2 - \lambda_k^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{L(t)}{t^2 - \lambda_k^2}, \\ y_k &= \frac{t^2 L(t)}{t^2 - \lambda_k^2}, \\ \tau_k &= \frac{tL(t)}{t^2 - \lambda_k^2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Подставляя (23) в (21), получим следующие разложения, справедливые, в общем случае, при ($|y| < 1$):

$$\begin{aligned} U(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2tL(t)}{L'(\lambda_k)(t^2 - \lambda_k^2)} U(\lambda_k, y) \right\}, \\ V(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\lambda_k L(t)}{L'(\lambda_k)(t^2 - \lambda_k^2)} V(\lambda_k, y) \right\}, \\ \sigma_x(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\lambda_k L(t)}{L'(\lambda_k)(t^2 - \lambda_k^2)} \sigma_x(\lambda_k, y) \right\}, \\ \sigma_y(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2t^2 L(t)}{\lambda_k L'(\lambda_k)(t^2 - \lambda_k^2)} \sigma_y(\lambda_k, y) \right\}, \\ \tau_{xy}(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2tL(t)}{L'(\lambda_k)(t^2 - \lambda_k^2)} \tau_{xy}(\lambda_k, y) \right\}. \end{aligned} \tag{24}$$

На рис. 2–6 показаны графики раскладываемых функций (пунктир) и соответствующие им ряды Лагранжа (24) (сплошные кривые) для $t = \pi$ и при $C = 4$.

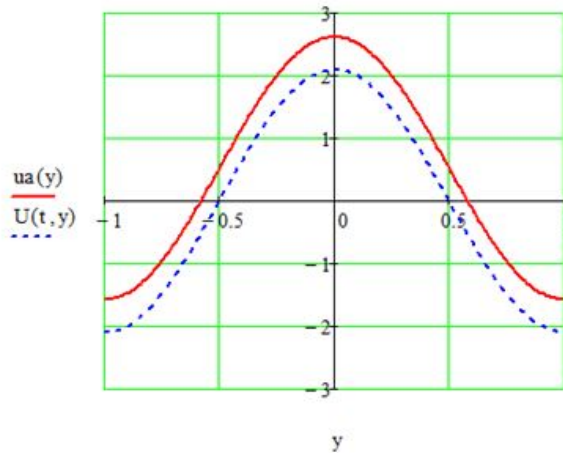


Рис. 2

Если в формулах (24) перейти к пределу при $t \rightarrow 0$, то можно получить:

$$\frac{\nu + 1}{4}(y^2 - 1) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2}{\lambda_k^2 L'(\lambda_k)} U(\lambda_k, y) \right\},$$

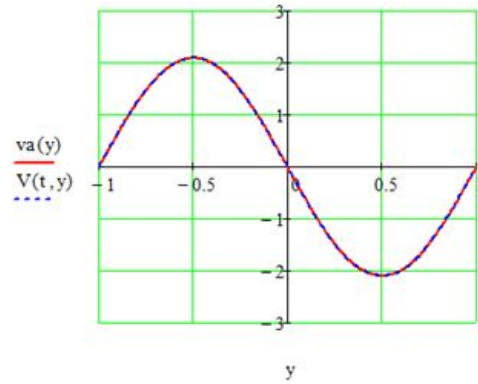


Рис. 3

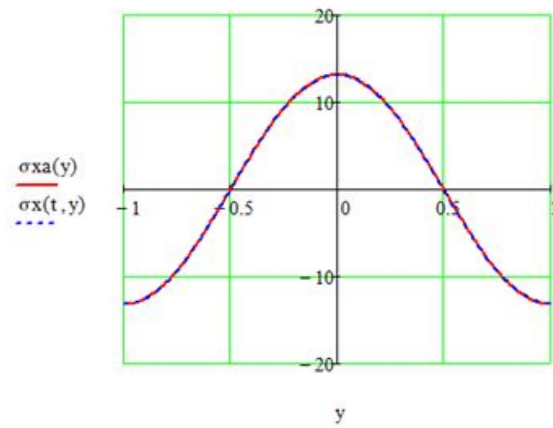


Рис. 4

$$\begin{aligned} \frac{\nu - 1}{2}y &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{-2}{\lambda_k L'(\lambda_k)} V(\lambda_k, y) \right\}, \\ \nu &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{-2}{\lambda_k L'(\lambda_k)} \sigma_x(\lambda_k, y) \right\}, \\ \nu y &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2}{\lambda_k^2 L'(\lambda_k)} \tau_{xy}(\lambda_k, y) \right\}. \end{aligned}$$

В том случае, когда раскладываемые функции, стоящие в левых частях формул (21) и первоначально заданные на отрезке $[-1, 1]$ продолжаютс я периодически вне отрезка $[-1, 1]$ с периодом, равным 4, для чисел u_k, v_k , и т. д. получаются такие формулы:

$$u_k = \int_{-1}^{+1} U(y) u_k(y) dy,$$

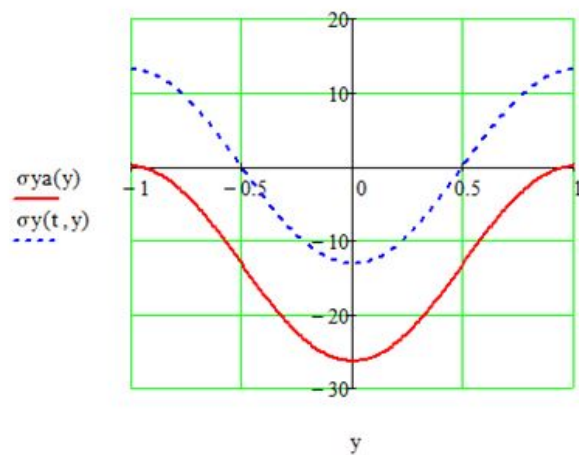


Рис. 5

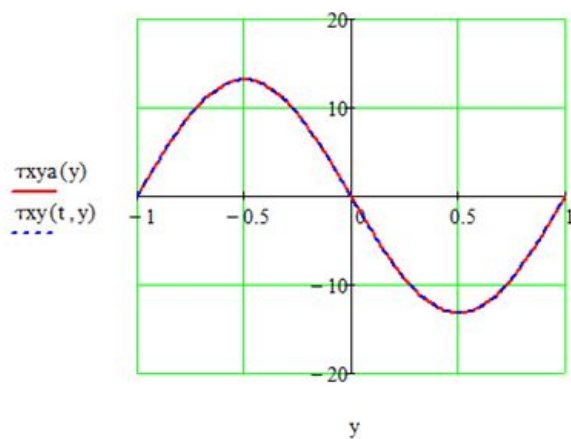


Рис. 6

$$\begin{aligned}
 v_k &= \int_{-1}^{+1} V(y)v_k(y)dy, \\
 x_k &= \int_{-1}^{+1} \sigma_x(y)x_k(y)dy, \\
 y_k &= \int_{-1}^{+1} \sigma_y(y)y_k(y)dy, \\
 t_k &= \int_{-1}^{+1} \tau_{xy}(y)t_k(y)dy.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Ниже даны примеры разложений с использованием формул (23). Пусть $U(y) = y^2 - 1$. По первой формуле (25) находим

$$u_k = \frac{2C\lambda_k(\lambda_k \cos \lambda_k - \sin \lambda_k)}{\cos \lambda_k}. \quad (26)$$

Искомое разложение будет таким

$$y^2 - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2u_k}{L'(\lambda_k)} U(\lambda_k, y) \right\}. \quad (27)$$

Точно так же получаются разложения:

$$\begin{aligned} y^3 &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\lambda_k v_k}{L'(\lambda_k)} V(\lambda_k, y) \right\}, \\ (y^2 - 1)^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\lambda_k x_k}{L'(\lambda_k)} \sigma_x(\lambda_k, y) \right\}, \\ y^2 - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2y_k}{\lambda_k L'(\lambda_k)} \sigma_y(\lambda_k, y) \right\}, \\ y^3 &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2t_k}{L'(\lambda_k)} \tau_{xy}(\lambda_k, y) \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

в которых числа

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{3C(2 \cos \lambda_k - 2 \sin \lambda_k + \lambda_k \sin \lambda_k)}{\lambda_k \cos \lambda_k}, \\ x_k &= C \left(\frac{4\lambda_k^2 \sin \lambda_k + 12\lambda_k \cos \lambda_k - 12 \sin \lambda_k}{\lambda_k^3 \cos \lambda_k} \right), \\ y_k &= C \frac{\lambda_k(\lambda_k \cos \lambda_k - \sin \lambda_k)}{\cos \lambda_k}, \\ t_k &= \frac{C(2\lambda_k^2 \cos \lambda_k - 12 \cos \lambda_k + 6 \sin \lambda_k - 3\lambda_k \sin \lambda_k)}{2\lambda_k \cos \lambda_k}. \end{aligned} \quad (29)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224 с.
- [2] Лапикова, Е. С. Разложения Лагранжа в периодической задаче для полуполосы с продольными ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие / Е. С. Лапикова, М. Н. Юринкина, А. П. Кержаев, А. В. Никитин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2013. – № 4 (18). – С. 63–79.
- [3] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. МГТ. – 2011. – № 5. – С. 78–98.
- [4] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 5. – С. 136–158.

Лапикова Елена Семеновна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: enchantress_tais@mail.ru

Юринкина Мария Николаевна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: m.yurinkina@yandex.ru

E. S. Lapikova, M. N. Yurinkina

THE LAGRANGE EXPANSIONS IN THE PERIODIC PROBLEM FOR THE SEMI-STRIP WITH BENDING STIFFNESS RIBS

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The examples of Lagrange expansions on the Fadde-Papkovich functions for the periodic problem of the half-strip are constructed. The longitudinal sides of the semi-strip have the bendingstiffness ribs.

Keywords: semi-strip, Fadde – Papkovich functions, analytical solutions.

REFERENCES

- [1] *Vlasov, V. V.* Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p.
- [2] *Lapikova, E. S.* The Lagrange expansion in the periodic boundary value problem for the semistrip with longitudinal stiffening ribs / E. S. Lapikova, M. N. Yurinkina, A. P. Kerzhaev, A. V. Nikitin // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – No. 18. – P. 68–85.
- [3] *Kovalenko, M. D.* Expansions in Fadde-Papkovich functions in a strip. Theory foundations / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya. – Mechanics of Solids, 2011. – No 5. – H. 46. – P. 721–738.
- [4] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on functions Fadlya – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // – Mechanics of Solids, 2011. – No 5. – H. 46. – P. 721–738.

Lapikova, Elena Semenovna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Yurinkina, Maria Nikolaevna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Л. С. Козлова, Б. Г. Миронов, М. В. Михайлова

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ, МЕНЯЮЩЕГОСЯ ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩЕЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе исследуется задача о предельном состоянии призматических стержней при кручении. Предполагается, что стержень находится под давлением, линейно меняющимся вдоль образующей. Определено напряженно-деформированное состояние стержня, построено поле характеристик.

Ключевые слова: кручение, напряжение, деформация, стержень, давление, характеристики.

УДК: 539.375

1. Введение. В работах [1], [2], [3] рассмотрено кручение изотропных цилиндрических и призматических стержней в случае, когда боковая поверхность стержней свободна от касательных нагрузок, а также в случае, когда боковая поверхность стержня находится под действием внешнего переменного давления.

В настоящей работе рассматривается предельное состояние призматических стержней, находящихся под давлением, линейно меняющимся вдоль образующей.

2. Постановка задачи. Рассматривается призматический стержень, ориентированный в декартовой системе координат $x y z$, образующие которого направлены параллельно оси z . Предполагается, что стержень закручивается вокруг своей оси (фиг. 1).

Пусть напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется условием пластичности Мизеса

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 6. \quad (1)$$

К соотношению (1) присоединим три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{xz}/\partial z &= 0, \\ \partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{yz}/\partial z &= 0, \\ \partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y + \partial\sigma_z/\partial z &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

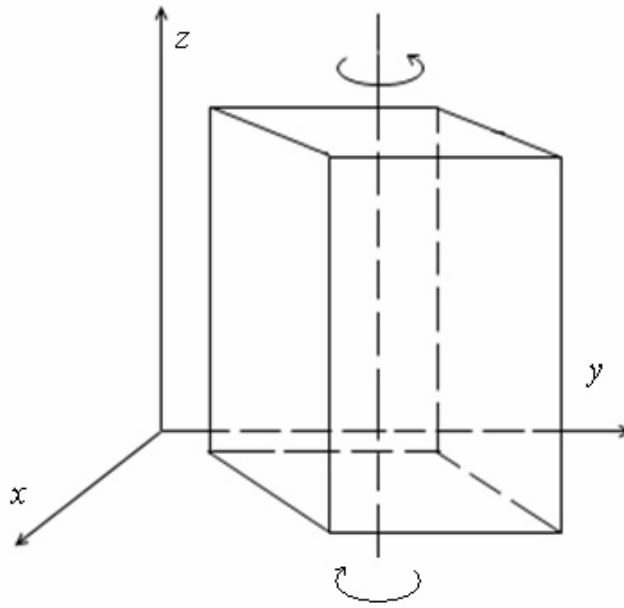
Система соотношений (1), (2) является статически неопределимой.

3. Построение решения. Предположим, что

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z + c, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y) \quad (3)$$

Поступила 03.02.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 13-01-97029) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179)



Фиг. 1

$$\lambda = \text{const}, c = \text{const}.$$

Согласно (3) из (1) и (2) получим

$$\partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y = \lambda, \quad \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 = 1. \quad (4)$$

Положим

$$\tau_{xz} = \cos \varphi, \quad \tau_{yz} = \sin \varphi. \quad (5)$$

Подставляя выражения (5) в первое уравнение (4), имеем

$$-\sin \varphi \partial\varphi/\partial x + \cos \varphi \partial\varphi/\partial y = \lambda. \quad (6)$$

Система уравнений для определения характеристик (6) имеет вид

$$-dx/\sin \varphi = dy/\cos \varphi = d\varphi/\lambda. \quad (7)$$

Из системы (7) следует

$$\lambda x = \cos \varphi + c_1, \quad \lambda y = \sin \varphi + c_2. \quad (8)$$

Исключая из (8) φ , получим уравнения характеристик соотношения (6)

$$(x - c_1/\lambda)^2 + (y - c_2/\lambda)^2 = 1/\lambda^2. \quad (9)$$

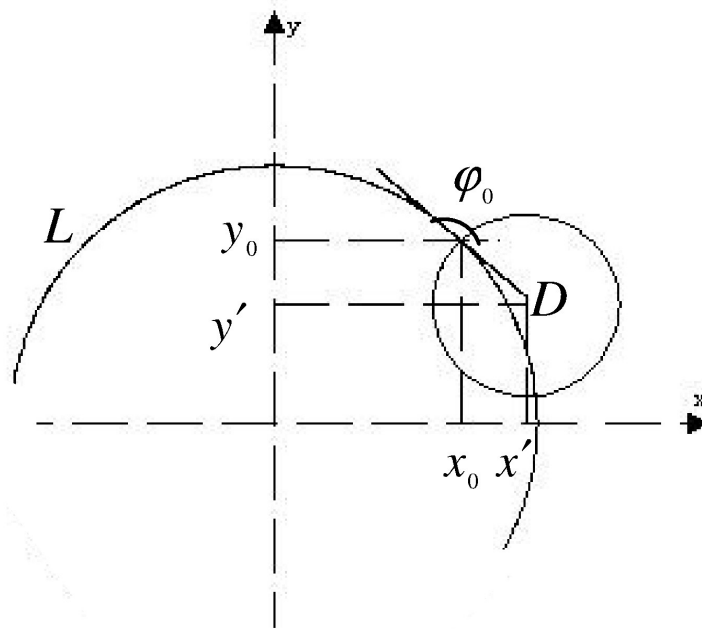
Обозначим через L контур поперечного сечения стержня в плоскости xy ($z = \text{const}$).

Пусть $(x_0, y_0) \in L$ и $\varphi(x_0, y_0) = \varphi_0$. Тогда из (8) следует

$$\lambda x_0 = \cos \varphi_0 + c_1, \quad \lambda y_0 = \sin \varphi_0 + c_2. \quad (10)$$

С учетом (10) из (9) получим (Фиг. 2):

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = 1/\lambda^2, \quad x' = x_0 - \cos \varphi_0/\lambda, \quad y' = y_0 - \sin \varphi_0/\lambda. \quad (11)$$



Фиг. 2

Пусть $\tau = \tau_{xz}i + \tau_{yz}j$ – вектор касательного напряжения, где i, j – единичные векторы вдоль осей x и y . Согласно (5):

$$\tau_{yz}/\tau_{xz} = \operatorname{tg} \varphi, \quad (12)$$

т. е. φ – угол наклона касательного напряжения τ к оси x . Из (7) следует, что вдоль характеристик (11):

$$dy/dx = -\operatorname{ctg} \varphi \quad (13)$$

Следовательно, вектор касательного напряжения τ всегда направлен ортогонально к характеристике.

Предположим, что боковая поверхность стержня свободна от касательных усилий. Следовательно, вектор касательного напряжения τ во всех точках контура L направлен по касательной к ней.

Таким образом, характеристики уравнения (6) в плоскости xu есть окружности радиуса $1/|\lambda|$, причем центры этих окружностей расположены на касательных к контуру L и расстоянии $1/|\lambda|$ от точки касания.

Согласно (8) и (10) из (7) имеем

$$\tau_{xz} = \cos \varphi_0 + \lambda(x - x_0), \quad \tau_{yz} = \sin \varphi_0 + \lambda(y - y_0), \quad (14)$$

где φ_0 – угол, образованный касательной к контуру L в точке (x_0, y_0) и осью x .

Рассмотрим кручение призматического стержня, контур поперечного сечения которого обозначим L . В тех случаях, когда через данную точку сечения могут проходить две и более характеристики, имеет место линия разрыва напряжений. Рассмотрим соотношения на линии l разрыва напряжений. Разложим вектор касательного напряжения τ на линии разрыва напряжений на две составляющие τ_{iz} и τ_{nz} , направленные соответственно по касательной и нормали к ней.

Пусть γ – угол, образованный касательной к линии разрыва напряжений и осью x . Тогда

$$\tau_{iz} = \tau_{xz} \cos \gamma + \tau_{yz} \sin \gamma, \quad \tau_{nz} = \tau_{xz} \sin \gamma - \tau_{yz} \cos \gamma. \quad (15)$$

Согласно (5) из (15) имеем

$$\tau_{iz} = \cos(\varphi - \gamma), \quad \tau_{nz} = -\sin(\varphi - \gamma). \quad (16)$$

Припишем компонентам слева от линии разрыва напряжений верхний индекс “плюс” и справа от линии разрыва напряжений – индекс “минус”. Из равенства $\tau_{nz}^+ = \tau_{nz}^-$ нормальных к линии разрыва напряжений получим

$$\sin(\varphi^+ - \gamma) = \sin(\varphi^- - \gamma). \quad (17)$$

Из (17) имеем

$$dy/dx = -ctg^{1/2}(\varphi^+ + \varphi^-), \quad (18)$$

где $dy/dx = tg\gamma$. Таким образом, для определения линии разрыва напряжений имеет место дифференциальное уравнение (18).

Рассмотрим случай, когда контур поперечного сечения L стержня образует произвольный угол θ , одна из сторон которого совпадает с отрицательной осью Ox и с вершиной в начале координат. Для определения напряженного состояния необходимо найти линию разрыва напряжений, которая согласно (18) имеет вид

$$dy/dx = \frac{x/2 \sin 2\theta - y \sin^2 \theta + \sin \theta \cdot \sqrt{1/\lambda^2 - (x \sin \theta + y \cos \theta)^2}}{x \sin^2 \theta + y/2 \sin 2\theta - \sqrt{1/\lambda^2 - y^2} - \cos \theta \cdot \sqrt{1/\lambda^2 - (x \sin \theta + y \cos \theta)^2}}. \quad (19)$$

В этом случае линия разрыва напряжений l выходит из вершины этого угла и, согласно (19) ее уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} & x^2/2 \sin 2\theta - 2xy \sin^2 \theta - y^2/2 \sin 2\theta + \left[(x \sin \theta + y \cos \theta) \sqrt{1/\lambda^2 - (x \sin \theta + y \cos \theta)^2} + \right. \\ & \left. + 1/\lambda^2 \arcsin \lambda (x \sin \theta + y \cos \theta) + y \sqrt{1/\lambda^2 - y^2} + 1/\lambda^2 \arcsin \lambda y \right] = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

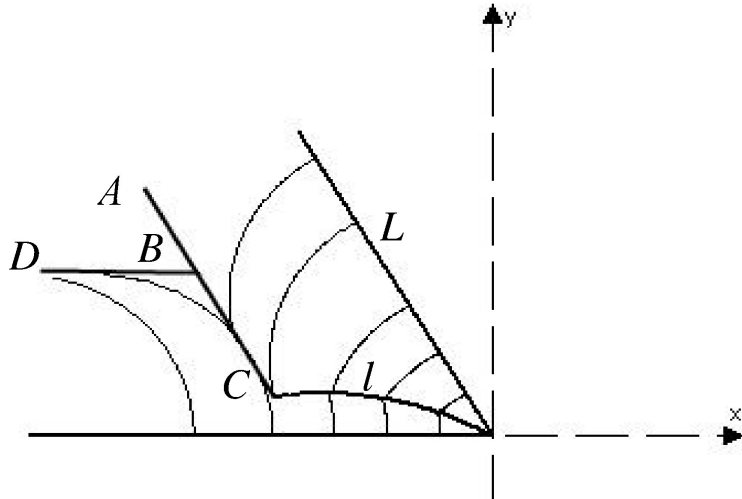
В случае, когда $\theta = \pi/3$, имеем

$$dy/dx = \frac{(\sqrt{3}x - 3y) \cdot \lambda + \sqrt{12 - 3\lambda^2 \cdot (\sqrt{3}x + y)^2}}{(3x + \sqrt{3}y) \cdot \lambda - 4\sqrt{1 - \lambda^2 y^2} - \sqrt{4 - \lambda^2 \cdot (\sqrt{3}x + y)^2}}. \quad (21)$$

Уравнение линии разрыва следующее:

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}x^2/4 - 3/2xy - \sqrt{3}y^2/4 + \left(\sqrt{3}x/2 + y/2 \right) \cdot \sqrt{1/\lambda^2 - \left(\sqrt{3}x/2 + y/2 \right)^2} + \\ & + 1/\lambda^2 \arcsin \lambda \left(\sqrt{3}x/2 + y/2 \right) + y \sqrt{1/\lambda^2 - y^2} + 1/\lambda^2 \arcsin \lambda y = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

На фиг. 3 построено поле характеристик и линия разрыва напряжений. На отрезке BC касательное напряжение не сопрягается. Следовательно, вдоль отрезка BC необходимо предположить наличие щели. Вектор касательного напряжения τ направлен ортогонально к левому берегу щели по образующей стержня. Аналогично нормальная составляющая вектора касательного напряжения τ к правому берегу щели направлена по образующей стержня вглубь щели. Решение не может быть продолжено за огибающие характеристик ABD , вдоль этих линий действуют касательные напряжения, направленные вдоль оси z , уравнивающие перепад давления σ_z .



Фиг. 3

В случае, когда $\theta = \pi/2$, имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y + \sqrt{1/\lambda^2 - x^2}}{x - \sqrt{1/\lambda^2 - y^2}}. \quad (23)$$

Уравнение линии разрыва таково:

$$x\sqrt{1/\lambda^2 - x^2} + y\sqrt{1/\lambda^2 - y^2} + 1/\lambda^2 (\arcsin \lambda x + \arcsin \lambda y) - 2xy = 0. \quad (24)$$

На фиг. 4 построено поле характеристик и линия разрыва напряжений.

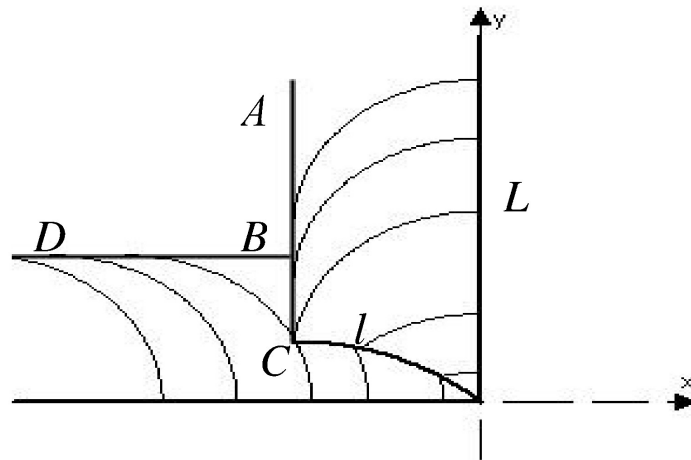
В случае, когда $\theta = 2\pi/3$, имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(\sqrt{3}x + 3y) \cdot \lambda + \sqrt{12 - 3\lambda^2 \cdot (\sqrt{3}x - y)^2}}{(3x - \sqrt{3}y) \cdot \lambda - 4\sqrt{1 - \lambda^2 y^2} + \sqrt{4 - \lambda^2 \cdot (\sqrt{3}x - y)^2}}. \quad (25)$$

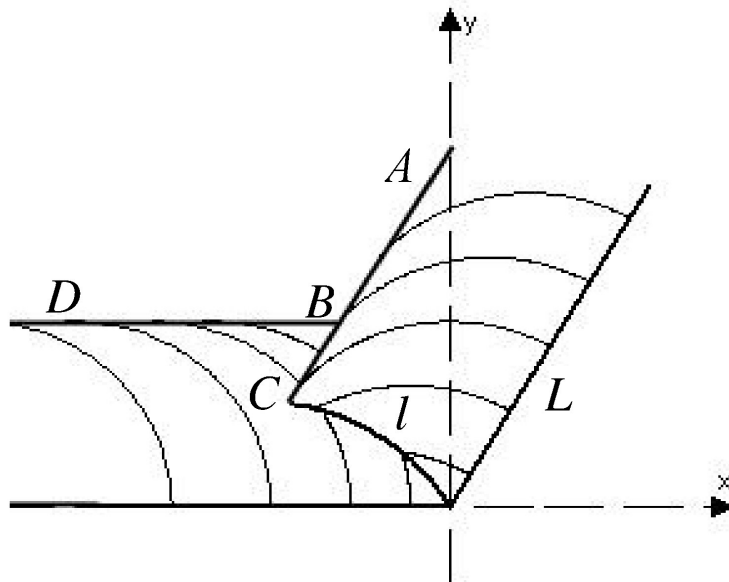
Уравнение линии разрыва следующее:

$$\begin{aligned} & -\sqrt{3}x^2/4 - 3/2xy + \sqrt{3}y^2/4 + (\sqrt{3}x/2 - y/2) \cdot \sqrt{1/\lambda^2 - (\sqrt{3}x/2 - y/2)^2} + \\ & + 1/\lambda^2 \arcsin \lambda (\sqrt{3}x/2 - y/2) + y\sqrt{1/\lambda^2 - y^2} + 1/\lambda^2 \arcsin \lambda y = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

На фиг. 5 построено поле характеристик и линия разрыва напряжений.



Фиг. 4



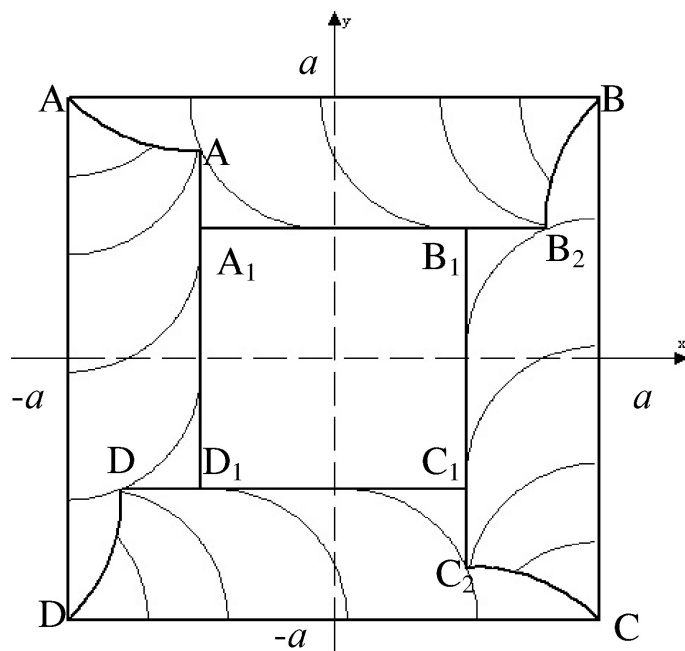
Фиг. 5

Рассмотрим случай, когда контур поперечного сечения L стержня – квадрат, сторона которого равна $2a$. Характеристики уравнения (6) в плоскости xy – окружности радиуса $1/|\lambda|$.

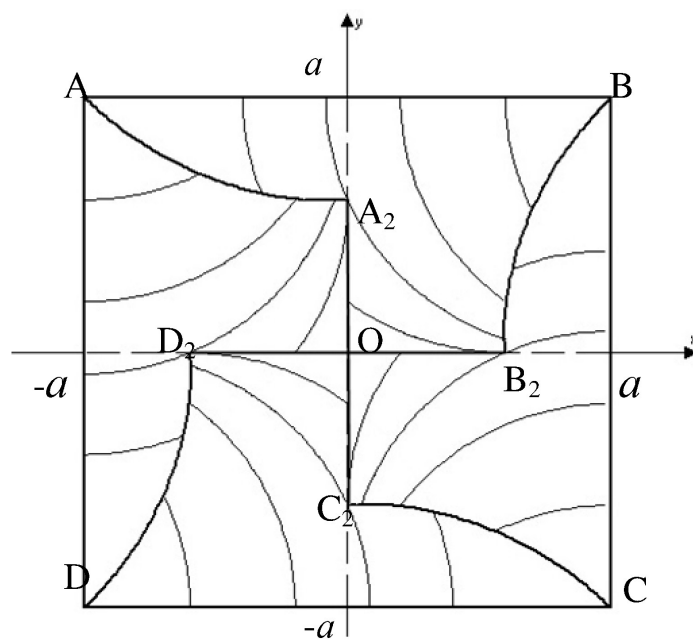
Расположение характеристик и линий разрыва напряжений в случае, когда радиус окружности $1/|\lambda|$ меньше a , приведено на фиг. 6.

На отрезках A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 , D_1D_2 касательное напряжение не спрягается. Следовательно, вдоль них необходимо предположить наличие щели. Вектор касательного напряжения τ направлен ортогонально к правому берегу щели по образующей стержня. Аналогично нормальная составляющая вектора касательного напряжения τ к левому берегу щели направлена по образующей стержня вглубь щели. Решение не может быть продолжено за огибающие характеристик A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 и A_1D_1 . Вдоль этих линий действуют касательные напряжения, направленные вдоль оси z , уравновешивающие перепад давления σ_z .

Случай, когда радиус окружности $1/|\lambda|$ равен a , представлен на фиг. 7. Кривые AA_2 , BB_2 , CC_2 , DD_2 – линии разрыва напряжений.



Фиг. 6

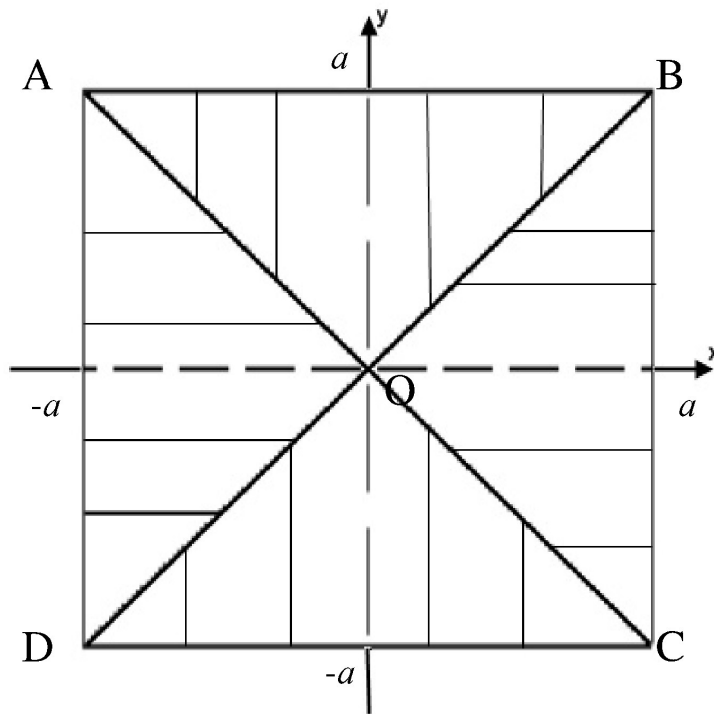


Фиг. 7

На отрезках OA_2 , OB_2 , OC_2 , OD_2 касательное напряжение не спрягается. Вдоль них предполагается наличие щели. Вектор касательного напряжения τ направлен ортогонально к правому берегу щели по образующей стержня. Аналогично нормальная составляющая вектора касательного напряжения τ к левому берегу щели направлена по образующей стержня вглубь щели.

В предельном случае, при $1/|\lambda| \rightarrow +\infty$, характеристики переходят в прямые, ортогональные контуру.

Линии разрыва напряжений принимают предельное положение в виде отрезков OA , OB , OC , OD (фиг. 8).



Фиг. 8

Деформированное состояние стержня определим из соотношений ассоциированного закона пластического течения. Из условия экстремума функционала

$$A = \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + 2(\varepsilon_{xy} \tau_{xy} + \varepsilon_{yz} \tau_{yz} + \varepsilon_{xz} \tau_{xz}) - \mu \left((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) - 6 \right) \quad (27)$$

имеем:

$$\varepsilon_x = 2\mu(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z), \quad \varepsilon_{xy} = 6\mu\tau_{xy},$$

$$\varepsilon_y = 2\mu(-\sigma_x + 2\sigma_y - \sigma_z), \quad \varepsilon_{yz} = 6\mu\tau_{yz}, \quad (28)$$

$$\varepsilon_z = 2\mu(-\sigma_x - \sigma_y + 2\sigma_z), \quad \varepsilon_{xz} = 6\mu\tau_{xz}.$$

Согласно (3), из (27) и (28) получим

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0, \quad \varepsilon_{yz}\tau_{xz} = \varepsilon_{xz}\tau_{yz}. \quad (29)$$

Считая деформации настолько малыми, что изменениями геометрии тела можно пренебречь, имеем, что при кручении напряжения в данной точке остаются постоянными по величине и направлению. В этом случае соотношения ассоциированного закона течения интегрируются. Так как в начальный момент закручивания все компоненты деформации равны нулю, то из (29) получим

$$e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0, \quad e_{yz}\tau_{xz} = e_{xz}\tau_{yz}, \quad (30)$$

где e_{ij} – компоненты деформации в декартовой системе координат.

Используя соотношения связи между компонентами деформаций и компонентами перемещений, из (30) имеем:

$$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y = \partial w/\partial z, \quad \partial u/\partial y + \partial v/\partial x = 0, \quad (31)$$

$$\left(\partial v/\partial z + \partial w/\partial y\right) \cos \varphi = \left(\partial u/\partial z + \partial w/\partial x\right) \sin \varphi. \quad (32)$$

Удовлетворим соотношениям (31), полагая

$$u = \rho yz, \quad v = -\rho xz, \quad w = w(x, y), \quad \rho = const. \quad (33)$$

С учетом (33) из (32) следует

$$-\partial w/\partial x \sin \varphi + \partial w/\partial y \cos \varphi = \rho(y \sin \varphi + x \cos \varphi). \quad (34)$$

Система уравнений для определения характеристик соотношения (34) имеет вид

$$-dx/\sin \varphi = dy/\cos \varphi = dw/\rho(y \sin \varphi + x \cos \varphi). \quad (35)$$

Из (35) вытекает, что характеристики уравнений (6) и (34) совпадают. Согласно (8) из (35) получим

$$dw/d\varphi = \rho/\lambda^2 (1 + c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi). \quad (36)$$

Отсюда следует

$$w = \rho/\lambda^2 (\varphi - c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi) + c, \quad (37)$$

где c – постоянная, своя вдоль каждой характеристики.

Учитывая (8) и (10), из (37) вдоль характеристики имеем

$$\begin{aligned} w = \rho \left(\varphi_0/\lambda^2 + \left(y - y_0 + \sin \varphi_0/\lambda \right) \left(y_0 - \sin \varphi_0/\lambda \right) - \right. \\ \left. - \left(x - x_0 + \cos \varphi_0/\lambda \right) \left(x_0 - \cos \varphi_0/\lambda \right) \right) + c. \end{aligned} \quad (38)$$

Постоянная c определяется из граничных условий для перемещения w . Рассматривая линию разрыва напряжений l как предельное положение жесткого слоя, положим деформацию сдвига на этих линиях равной нулю. Тогда получим

$$2e_{xz} = \partial w/\partial x + \rho y = 0, \quad 2e_{yz} = \partial w/\partial y - \rho x = 0. \quad (39)$$

Согласно (39) вдоль линии разрыва напряжений имеем

$$dw = \rho(-ydx + xdy). \quad (40)$$

Так как w определяется с точностью до жесткого перемещения, то, принимая в какой-нибудь точке линии разрыва напряжений $w = 0$ и интегрируя (39) вдоль линии разрыва напряжений, находим значение w во всех точках линии разрыва напряжений, а, следовательно, можем определить константу c для каждой характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.
[2] *Козлова, Л. С.* Предельное состояние призматических стержней при кручении / Л. С. Козлова, Б. Г. Миронов // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов. Чуваш. гос. пед. ун-т. – 2009. – № 2 (14). – С. 8–17.
[3] *Козлова, Л. С.* Предельное состояние призматических стержней, находящихся под давлением / Л. С. Козлова, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2009. – № 3. – 4 (63). – С. 6–14.

Козлова Людмила Святославовна,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары
e-mail: kozlova@mail.ru

Миронов Борис Гурьевич,
доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары
e-mail: rektorat@chgpu.edu.ru

Михайлова Марина Васильевна,
доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары
e-mail: strangcheb@mail.ru

L. S. Kozlova, B. G. Mironov, M. V. Mihailova

ON THE TORSION BARS UNDER THE PRESSURE, CHANGING ALONG THE GENERATRIX

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. In this paper we study the problem of the limit state prismatic bars with torsion. It is assumed that the rod is under pressure varying linearly along the generator. Determined the stress-strain state of the rod, built field characteristics.

Keywords: torsion stress, strain, valve, pressure, characteristics.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* Theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 232 p.
- [2] *Kozlova, L. S.* Limit state prismatic bars with torsion / L. S. Kozlova, B. G. Mironov // Scientific-Information Gazette doctoral graduate students. Chuvash. Reg. ped. Univ. – 2009. – № 2 (14). – P. 8–17.
- [3] *Kozlova, L. S.* Limit state prismatic bars under pressure / L. S. Kozlova, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2009. – № 3. – 4 (63). – P. 6–14.

Kozlova, Ludmila Stanislavovna

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Mihailova, Marina Vasilevna

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Б. Г. Миронов, Т. В. Митрофанова

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСЛЯЦИОННО АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Рассматриваются соотношения теории трансляционной анизотропии при кручении. Исследованы напряженное и деформированное состояния тела. Исходные уравнения проинтегрированы. Получено поле характеристик. Показано, что характеристики являются прямыми линиями, вдоль которых касательные напряжения сохраняют постоянное значение. Определены компоненты перемещения.

Ключевые слова: напряжение, деформация, идеальная пластичность, кручение, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Введение. В работах [1], [2] рассмотрено кручение изотропных цилиндрических и призматических стержней в случае, когда боковая поверхность стержней свободна от касательных нагрузок, а также в случае, когда боковая поверхность стержня находится под действием внешнего переменного давления. В работах [1], [3] исследовано кручение анизотропных цилиндрических и призматических стержней. В работе [4] рассмотрено предельное состояние сектора анизотропного кругового кольца при кручении.

В настоящей работе рассматривается предельное состояние трансляционно анизотропных тел в случае кручения.

Постановка задачи. Исследуется предельное состояние тела в случае трансляционной идеальнопластической анизотропии. Рассматривается анизотропный призматический или цилиндрический стержень, ориентированный в прямоугольной системе координат xuz , причем образующие стержня направлены параллельно оси z . Стержень закручивается вокруг своей оси.

Предполагается, что предельное условие для напряжения в случае трансляционной анизотропии имеет вид

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = k^2, \quad (1)$$

где τ_{xz} , τ_{yz} – касательные напряжения, k_1 , k_2 , k – const, $k_1^2 + k_2^2 < k^2$.

Компоненты напряжения удовлетворяют условию

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Поступила 28.02.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 13-01-97033, 13-01-97029, 14-01-31323 мол_a) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179)

Построение решения. Перейдем к безразмерным величинам и отнесем все величины, имеющие размерность напряжений к величине k . Сохраним обозначения для τ_{xz} , τ_{yz} , k_1 , k_2 . Условие (1) примет вид

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = 1, \quad (4)$$

где $k_1^2 + k_2^2 < 1$.

На рис. 1 показана предельная кривая, соответствующая условию (4). Центр окружности (4) смещен в точку $O_1(k_1, k_2)$ (рис. 1).

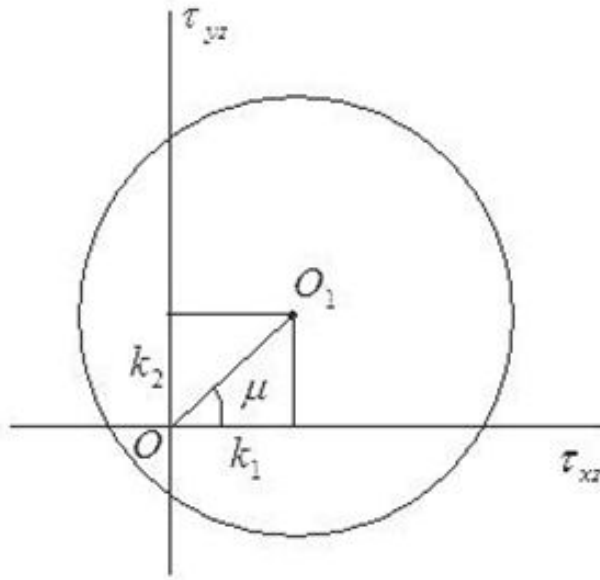


Рис. 1

Соотношение (4) перепишем в виде

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - 2(k_1\tau_{xz} + k_2\tau_{yz}) - T^2 = 0, \quad (5)$$

где

$$T^2 = 1 - k_1^2 - k_2^2, \quad T - \text{const}. \quad (6)$$

Положим

$$\tau_{xz} = k(\theta) \cos \theta, \quad \tau_{yz} = k(\theta) \sin \theta, \quad \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \text{tg} \theta. \quad (7)$$

Из (5), (7) найдем

$$k^2(\theta) - 2k(\theta)(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta) - T^2 = 0. \quad (8)$$

В дальнейшем положим

$$\rho = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \frac{k_1}{\rho} = \cos \mu, \quad \frac{k_2}{\rho} = \sin \mu, \quad \text{tg} \mu = \frac{k_2}{k_1}. \quad (9)$$

Из (6) следует

$$\rho < 1. \quad (10)$$

Согласно (9) соотношение (8) примет вид

$$k^2(\theta) - 2k(\theta)\rho \cos(\theta - \mu) - T^2 = 0, \quad T^2 = 1 - \rho^2. \quad (11)$$

Из (11) найдем

$$k(\theta)_{1,2} = \rho \cos(\theta - \mu) \pm \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(\theta - \mu)}, \quad (12)$$

где всегда

$$\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(\theta - \mu)} \geq \rho \cos(\theta - \mu). \quad (13)$$

Исходя из неравенств (10) и (13), в (12) следует ограничиться верхним знаком, так как предел текучести $k(\theta)$ не может принимать отрицательное значение.

Таким образом, получим

$$k(\theta) = \rho \cos(\theta - \mu) + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(\theta - \mu)}. \quad (14)$$

На рис. 2 показана зависимость $k = k(\theta)$ от угла θ согласно соотношению (14) при различных k_1, k_2 .

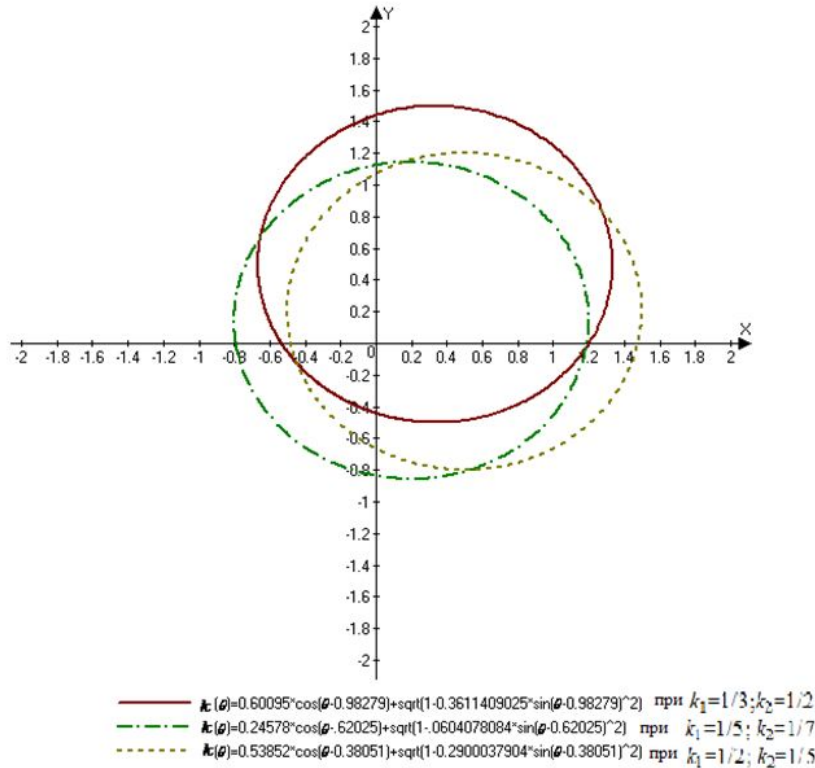


Рис. 2

Из уравнения равновесия (3) и выражений (7) получим

$$(k' \cos \theta - k(\theta) \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} + (k' \sin \theta + k(\theta) \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad k' = \frac{dk}{d\theta}, \quad (15)$$

где, согласно (14),

$$k'(\theta) = \frac{dk}{d\theta} = -\rho \sin(\theta - \mu) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\rho^2 \sin 2(\theta - \mu)}{\sqrt{2 - \rho^2(1 - \cos 2(\theta - \mu))}}. \quad (16)$$

Уравнения характеристик соотношения (15) имеют вид

$$y = \frac{k' \sin \theta + k(\theta) \cos \theta}{k' \cos \theta - k(\theta) \sin \theta} x + C(\theta), \quad (17)$$

где вдоль каждой из характеристик $\theta = \text{const}$.

Обозначим

$$\frac{k'}{\sqrt{k'^2 + k^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{k}{\sqrt{k'^2 + k^2}} = \sin \alpha. \quad (18)$$

Тогда из (17) и (18) следует

$$y = \text{tg}(\theta + \alpha)x + C(\theta), \quad (19)$$

где α – угол между характеристикой и вектором касательного напряжения.

Рассмотрим контур L стержня, в плоскости поперечного сечения xy (рис. 3).

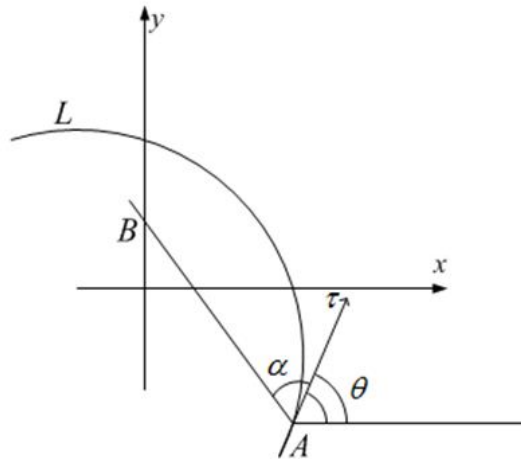


Рис. 3

Если боковая поверхность стержня свободна от усилий, то результирующее касательное напряжение $\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$ должно быть направлено по касательной к контуру L . В точке A контура L (рис. 3) известны координаты x_A, y_A для характеристики (17), проходящей через точку A , и угол θ_A , следовательно из (17) может быть определена константа $C = C_A$. Таким образом, характеристика AB (17), показанная на рис. 3, – прямая, проходящая через точку A , определена. Вдоль характеристики, согласно (7), (12), касательное напряжение $\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = k(\theta)$ постоянно и полностью определено по величине и направлению. В случаях, когда через данную точку сечения могут проходить две и более характеристик, возникает неопределенность в определении напряжений, которая устраняется введением линии разрыва. По процедуре решения, если в этом есть необходимость, строятся линии разрыва

напряжений, причем линия разрыва напряжений проходит по биссектрисе между пересекающимися характеристиками.

Определим деформированное состояние тела. Из соотношений ассоциированного закона пластического течения получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0, \\ 2\varepsilon_{xz} = \lambda \left(2\tau_{xz} - 2kk' \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{xz}} \right), \\ 2\varepsilon_{yz} = \lambda \left(2\tau_{yz} - 2kk' \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{yz}} \right), \quad k' = \frac{dk}{d\theta}. \end{aligned} \quad (20)$$

где ε_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации.

Согласно (4), из двух последних соотношений (20) следует

$$\varepsilon_{xz} \left(\tau_{yz} - \frac{k'}{k} \tau_{xz} \right) = \varepsilon_{yx} \left(\tau_{xz} + \frac{k'}{k} \tau_{yz} \right). \quad (21)$$

В случае малых деформаций в соотношениях (21) возможен переход от компонент скоростей деформаций ε_{ij} к компонентам деформации e_{ij} :

$$\begin{aligned} e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0, \\ e_{xz} \left(\tau_{yz} - \frac{k'}{k} \tau_{xz} \right) = e_{yz} \left(\tau_{xz} - \frac{k'}{k} \tau_{yz} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Из (22) следует

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\tau_{yz} - \frac{k'}{k} \tau_{xz} \right) = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \left(\tau_{xz} + \frac{k'}{k} \tau_{yz} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

где u, v, w – компоненты перемещения вдоль осей x, y, z соответственно.

Удовлетворим уравнениям (23), полагая

$$u = \chi yz, \quad v = -\chi xz, \quad w = w(x, y), \quad (24)$$

где χ – крутка.

Выражения (24) означают, что каждое сечение тела поворачивается как жесткое целое на угол χ и деформируется вдоль оси z на величину w .

Для определения функции w , определяющей деформацию сечения, воспользуемся уравнениями (23), (24) и (4). Получим

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \chi y \right) (k \sin \theta - k' \cos \theta) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \chi x \right) (k \cos \theta + k' \sin \theta). \quad (25)$$

Из (25) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} (-k \sin \theta + k' \cos \theta) + \frac{\partial w}{\partial y} (k \cos \theta + k' \sin \theta) = \\ = \chi [y (k \sin \theta - k' \cos \theta) + x (k \cos \theta + k' \sin \theta)]. \end{aligned} \quad (26)$$

Соответствующие уравнения для определения характеристик имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{-k \sin \theta + k' \cos \theta} = \frac{dy}{k \cos \theta + k' \sin \theta} = \\ = \frac{dw}{\chi [y (k \sin \theta - k' \cos \theta) + x (k \cos \theta + k' \sin \theta)]}. \end{aligned} \quad (27)$$

Из уравнения (27) видно, что характеристики уравнения (26) совпадают с характеристиками поля напряжений (17).

Найдем условие на характеристиках. Обозначим через ds элемент характеристики. Тогда вдоль характеристики имеем

$$\frac{dw}{ds} = \chi [y (k \sin \theta - k' \cos \theta) + x (k \cos \theta + k' \sin \theta)]. \quad (28)$$

С учетом выражения (27) получим

$$\frac{dw}{ds} = \chi c(\theta) (k \sin \theta - k' \cos \theta), \quad (29)$$

где $c(\theta)$ постоянно для данной характеристики и зависит от θ .

Отсюда следует

$$dw = \int \chi c(\theta) (k \sin \theta - k' \cos \theta) ds + c_1, \quad (30)$$

где c_1 – постоянная, своя вдоль каждой характеристики.

Постоянная c_1 определяется из граничных условий для перемещения w . Рассматривая линию разрыва напряжений как предельное положение жесткого слоя, положим деформацию сдвига на этих линиях равной нулю. Тогда получим

$$2e_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \chi y = 0, \quad 2e_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \chi y = 0. \quad (31)$$

Согласно (31), вдоль линии разрыва имеет место соотношение

$$dw = \chi (-ydx + xdy). \quad (32)$$

Так как w определяется с точностью до жесткого перемещения, то, принимая в какой-нибудь точке линии разрыва $w = 0$ и интегрируя (32) вдоль линии разрыва, положение которой известно, находим значение w во всех точках линии разрыва, следовательно, константа c_1 для каждой характеристики будет известна.

Заключение. Из работы следует, что характеристики соотношений, описывающих как напряженное, так и деформированное состояние тела совпадают. При этом характеристики являются прямыми линиями, вдоль которых касательное напряжение сохраняет постоянное значение.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.
- [2] *Миронов, Б. Г.* О кручении призматических стержней, находящихся под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей / Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 1 (48). – С. 98–101.
- [3] *Козлова, Л. С.* Предельное состояние призматических стержней при кручении / Л. С. Козлова // Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева. – Чебоксары, 2010. – 7 с. – Библиогр. : 3 назв. – Рус. – Деп. в ВИНТИ 29.04.10 № 232-В2010.
- [4] *Миронов, Б. Г.* Кручение сектора анизотропного кругового кольца при действии переменного давления / Б. Г. Миронов, Л. С. Козлова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2010. – № 4 (68). – С. 132–136.

Миронов Борис Гурьевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: rektorat@chgpu.edu.ru

Митрофанова Татьяна Валерьевна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: mitrofanova_tv@mail.ru

B. G. Mironov, T. V. Mitrofanova

LIMIT CONDITION TRANSLATION OF ANISOTROPIC SOLID IN THE EVENT TORSION

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Discusses the relation between theory translational anisotropy torsion. Investigated stress and strain state of the solids. Initial equations integrated. Obtained field characteristics. Shown that the characteristics are straight lines along which the shear stresses remain constant. The components of the displacement.

Keywords: stress, strain, perfect plasticity, torsion, translational anisotropy.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* Theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 231 p.
- [2] *Mironov, B. G.* On the torsion of prismatic bars under the influence of pressure, linearly varying along the generator / B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2006. – № 1 (48). – P. 98–101.
- [3] *Kozlova, L. S.* Limit state of prismatic bars with torsion / L. S. Kozlova // Detection sensitivity. Reg. I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – Cheboksary, 2010. – 7 p. – Bibliography : 3 refs. – Rus. – Dep. VINITI 29.04.10 № 232-V2010.
- [4] *Mironov, B. G.* Twist sector anisotropic circular ring with an alternating pressure / B. G. Mironov, L. S. Kozlova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2010. – № 4 (68). – P. 132–136.

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Mitrofanova, Tatyana Valeryevna

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor of Department Computer Science and Computer Engineering, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

А. В. Балашникова

К ВОПРОСУ О СЖАТИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО АНИЗОТРОПНОГО ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе рассматривается предельное состояние слоя из идеальнопластического материала при трансляционной анизотропии, сжатого параллельными шероховатыми плитами.

Ключевые слова: сжатие, слой, идеальная пластичность, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Рассмотрим сжатие идеальнопластического слоя параллельными жесткими шероховатыми плитами при условии пластичности Мизеса.

Запишем уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Условие пластичности запишем в виде

$$A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + B(\sigma_y - \sigma_z)^2 + C(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6[D\tau_{xy}^2 + F\tau_{yz}^2 + E\tau_{xz}^2] = 6k_0^2,\tag{2}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ – компоненты напряжения, A, B, C, D, F, E, k_0 – const, определяющие предел текучести и параметры анизотропии.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам, все величины, имеющие размерность напряжений, отнесем к величине предела текучести k_0 и сохраним обозначения напряжений σ_{ij} .

Условие пластичности (2) примет вид

$$A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + B(\sigma_y - \sigma_z)^2 + C(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6[D\tau_{xy}^2 + F\tau_{yz}^2 + E\tau_{xz}^2] = 6.\tag{3}$$

Соотношения связи между напряжениями и скоростями деформаций согласно ассоциированному закону течения, имеют вид

Поступила 04.02.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 13-01-97033, 14-01-31323 мол_а) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179)

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= 2\lambda \cdot (A(\sigma_x - \sigma_y) - C(\sigma_z - \sigma_x)), \\
 \varepsilon_y &= 2\lambda \cdot (-A(\sigma_x - \sigma_y) + B(\sigma_y - \sigma_z)), \\
 \varepsilon_z &= 2\lambda \cdot (-B(\sigma_y - \sigma_z) + C(\sigma_z - \sigma_x)), \\
 \varepsilon_{xy} &= 6\lambda \cdot D\tau_{xy}, \\
 \varepsilon_{yz} &= 6\lambda \cdot F\tau_{yz}, \\
 \varepsilon_{xz} &= 6\lambda \cdot E\tau_{xz},
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$ - компоненты скорости деформации.

Из (4) следует условие несжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0. \tag{5}$$

Используя условие несжимаемости (5) из (4) выразим:

$$(\sigma_z - \sigma_x) = -(\sigma_x - \sigma_y) - (\sigma_y - \sigma_z). \tag{6}$$

Подставляя полученное выражение (6) в ассоциированный закон течения (4) найдем

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_x}{2\lambda} = (A + C)(\sigma_x - \sigma_y) + C(\sigma_y - \sigma_z), \\ \frac{\varepsilon_y}{2\lambda} = -A(\sigma_x - \sigma_y) + B(\sigma_y - \sigma_z). \end{cases} \tag{7}$$

Определитель данной системы (7) равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} A + C & C \\ -A & B \end{vmatrix} = AB + BC + AC.$$

Найдем решения системы (7):

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x - \sigma_y) &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{B\varepsilon_x - C\varepsilon_y}{2\lambda\Delta}, \\
 (\sigma_y - \sigma_z) &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{A\varepsilon_x + (A+C)\varepsilon_y}{2\lambda\Delta}, \\
 (\sigma_z - \sigma_x) &= \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{(A+B)\varepsilon_x + A\varepsilon_y}{2\lambda\Delta}, \\
 \tau_{xy} &= \frac{\varepsilon_{xy}}{6\lambda\Delta}, \tau_{yz} = \frac{\varepsilon_{yz}}{6\lambda\Delta}, \tau_{xz} = \frac{\varepsilon_{xz}}{6\lambda\Delta}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Полученное решение подставим в уравнение пластичности (2) и выразим λ :

$$6\lambda = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{3}{2} \left[A(B\varepsilon_x - C\varepsilon_y)^2 + B(A\varepsilon_x + (A+C)\varepsilon_y)^2 + C((A+B)\varepsilon_x + A\varepsilon_y)^2 \right] + D\varepsilon_{xy}^2 + F\varepsilon_{yz}^2 + E\varepsilon_{xz}^2}. \tag{9}$$

Имеют место формулы Коши

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{10}$$

где u, v, w - скорости перемещения.

Имеем

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \sigma_x + \frac{1}{3}((\sigma_y - \sigma_x) + (\sigma_z - \sigma_x)). \tag{11}$$

Используя (11) из (4) выразим напряжения через компоненты скорости деформации:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \sigma + \frac{1}{6\lambda\Delta} ((A + 2B)\varepsilon_x + (A - C)\varepsilon_y), \\
 \sigma_y &= \sigma + \frac{1}{6\lambda\Delta} ((A - B)\varepsilon_x + (A + 2C)\varepsilon_y), \\
 \sigma_z &= \sigma + \frac{1}{6\lambda\Delta} (-(2A + B)\varepsilon_x - (2A + C)\varepsilon_y).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Предположим, что все компоненты девиаторов напряжений и скорости деформации ε_{ij} зависят от z :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{ij} = \sigma'_{ij}(z). \quad (13)$$

Положим аналогично Прандтлю:

$$\tau_{xz} = az, \tau_{yz} = bz, \quad (14)$$

где $a, b - const.$

Из (4), (14) следует

$$\varepsilon_{xz} \cdot Fb = \varepsilon_{yz} \cdot Ea. \quad (15)$$

Согласно принятым предположениям уравнения равновесия (1) примут вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + a = 0, \frac{\partial \sigma}{\partial y} + b = 0, \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-(2A+B)\varepsilon_x - (2A+C)\varepsilon_y}{6\lambda\Delta} \right) = 0. \quad (16)$$

Из (16) находим

$$\sigma_z = -ax - by + C, \sigma = -ax - by + C + \frac{(2A+B)\varepsilon_x + (2A+C)\varepsilon_y}{6\lambda\Delta}, C - const. \quad (17)$$

Условие несжимаемости (5), согласно (10), имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (18)$$

Положим

$$\begin{aligned} u &= m_1x + n_1y + \varphi_1(z), \\ v &= m_2x + n_2y + \varphi_2(z), \\ w &= m_3x + n_3y + qz, \end{aligned} \quad (19)$$

где $m_i, n_i, q - const.$

Согласно (10), (18) формулы Коши перепишем, учитывая предположение (14) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= m_1, \varepsilon_y = n_2, \varepsilon_z = q, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot (n_1 + m_2), \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \cdot \left(n_3 + \frac{d\varphi_2}{dz} \right), \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \cdot \left(m_3 + \frac{d\varphi_1}{dz} \right), m_1 + n_2 + q = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для нахождения λ в соотношении (9) подставим полученные формулы Коши (20) и найдем:

$$\lambda = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{3}{2} \left[A(Bm_1 - Cn_2)^2 + B(Am_1 + (A+C)n_2)^2 + C((A+B)m_1 + An_2)^2 \right] + D\varepsilon_{xy}^2 + F\varepsilon_{yz}^2 + E\varepsilon_{xz}^2}. \quad (21)$$

Согласно (12), (15), (17), (20) получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_z + \frac{3}{6\lambda\Delta} [(A+B)\varepsilon_x + A\varepsilon_y] = -ax - by + C + \frac{3}{6\lambda\Delta} [(A+B)m_1 + An_2], \\ \sigma_y &= \sigma_z + \frac{3}{6\lambda\Delta} [A\varepsilon_x + (A+C)\varepsilon_y] = -ax - by + C + \frac{3}{6\lambda\Delta} [Am_1 + (A+C)n_2], \\ \tau_{xy} &= \frac{\varepsilon_{xy}}{6\lambda\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n_1 + m_2}{6\lambda\Delta}, \\ (\sigma_x - \sigma_y) &= \frac{3}{6\lambda\Delta} [Bm_1 - Cn_2], (\sigma_y - \sigma_z) = \frac{3}{6\lambda\Delta} [Am_1 + (A+C)n_2], \\ (\sigma_z - \sigma_x) &= -\frac{3}{6\lambda\Delta} [(A+B)m_1 + An_2]. \end{aligned} \quad (22)$$

В условие пластичности (3) подставим предположение (14), полученные формулы для напряжений (22) и найдем λ :

$$\frac{1}{6\lambda} = Q \cdot \sqrt{1 - (Ea^2 + Fb^2)z^2},$$

$$Q = \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{3}{2} \left[A (Bm_1 - Cn_2)^2 + B (Am_1 + (A + C)n_2)^2 + C ((A + B)m_1 + An_2)^2 \right] + \frac{1}{4} D (n_1 + m_2)^2}} \quad (23)$$

Обозначим толщину слоя $2h$, предположим, что в некоторой точке x_0y_0 определено осредненное давление

$$p = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma dz, \quad p - const. \quad (24)$$

Для нахождения константы C подставим полученные данные (16), (23), в формулу (24), сделав преобразования, получим:

$$\begin{aligned} C &= p + ax_0 + by_0 - \frac{(2A+B)m_1 + (2A+C)n_2}{2h\Delta} \int_{-h}^h \frac{dz}{6\lambda} = \\ &= p + ax_0 + by_0 - \frac{(2A+B)m_1 + (2A+C)n_2}{h\Delta} Q \left[\sqrt{1 - (Ea^2 + Fb^2)h^2} + \frac{\arcsin(h \cdot \sqrt{Ea^2 + Fb^2})}{\sqrt{Ea^2 + Fb^2}} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Согласно (17), (23), (25) величина сдвливающего напряжения σ_z будет зависеть от характера деформирования плиты.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 3. – № 2 (8). – С. 580–583.

[2] *Балашникова, А. В.* О сжатии идеальнопластического слоя жесткими шероховатыми плитами в случае трансляционной анизотропии / А. В. Балашникова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2011. – № 2 (10). – С. 115–118.

[3] *Максимова, Л. А.* О сжатии плиты из идеальнопластического анизотропного материала / Л. А. Максимова // Проблемы механики : сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М. : Физматлит, 2003. – С. 520–523.

Балашникова Анжелика Вениаминовна,

младший научный сотрудник лаборатории РАН "Механика предельного состояния", Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: info3006@yandex.ru

A. V. Balashnikova

COMPRESSION OF A SPATIAL IDEALNOPLASTICHESKY LAYER AT
TRANSMITTING ANISOTROPY

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. In work the limit condition of a layer from an idealnoplastichesky material is considered at the transmitting anisotropy, squeezed by parallel rough plates.

Keywords: compression, layer, ideal plasticity, transmitting anisotropy.

REFERENCES

[1] *Ivlev, D. D.* About ratios of the theory of transmitting idealnoplastichesky anisotropy / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit condition. – 2010. – Vol. 3. – No 2 (8). – P. 580–583.

[2] *Balashnikova, A. V.* About compression of an idealnoplastichesky layer by rigid rough plates in case of transmitting anisotropy / A. V. Balashnikova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit condition. – 2011. – No 2 (10). – P. 115–118

[3] *Maksimova, L. A.* About compression of plate from ideal-plastic anisotropy layer / L. A. Maksimova // Problems of mechanics : sb. st. on the 90th anniversary of Ishlinskiy A. – M. : Phizmatlit, 2003. – P. 520–523.

Balashnikova, Anshelika Veniaminovna

Junior researcher of Russian Academy of Sciences laboratory "Mechanics of a limit state", I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

Варданян Седрак Ваникович (vardanyan_s@yahoo.com) – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (cotedurhone_mail.ru) – доктор физико-математических наук (1996), профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Матченко Николай Михайлович (екс_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (irakon63@hotmail.com) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва.

Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marucbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

Спориных Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Искендерова С. П.</i> Воздействие малых выточек и утолщений на рост трещины в упругопластической пластине, растягиваемой двумя сосредоточенными силами	3
<i>Калантарлы Н. М.</i> Трещинообразование в круговом диске, нагруженном сосредоточенными самоуравновешенными моментами	14
<i>Кулиев В. Д.</i> Новый сингулярный интеграл в теории функций и некоторые следствия его применения	23
<i>Мирсалимов В. М., Мустафаев А. Б.</i> Частичное контактирование берегов криволинейной трещины в листовом элементе под действием локального теплового поля	37
<i>Ефремов В. Г., Митрофанова Т. В., Павлова Т. Н.</i> Определение напряженно-деформированного состояния тонкой пластины с эллиптическим отверстием из анизотропного материала при несовпадении осей продольной анизотропии с направлениями канонических осей эллипса отверстия	52
<i>Никитин А. В.</i> Определение деформированного состояния толстостенной нелинейно-неоднородной трубы при трансляционной анизотропии	60
<i>Яковлев А. А., Яковлев В. А.</i> Приближенное решение осесимметричных упругопластических задач с учетом силы тяжести	71
<i>Зубчанинов В. Г., Алексеева Е. Г.</i> О влиянии кривизны траекторий деформирования на классификацию и запаздывание свойств материалов при сложном нагружении	78
<i>Никитин А. В., Тихонов С. В.</i> Предельное состояние многослойной трансляционно-анизотропной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления	88
<i>Лапикова Е. С., Юринкина М. Н.</i> Полуполоса с продольными ребрами жесткости, работающими на изгиб. Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича	95
<i>Лапикова Е. С., Юринкина М. Н.</i> Периодическая задача для полуполосы с продольными ребрами жесткости, работающими на изгиб. Разложения Лагранжа	108
<i>Козлова Л. С., Миронов Б. Г., Михайлова М. В.</i> К вопросу о кручении стержней, находящихся под действием давления, меняющегося вдоль образующей	121
<i>Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В.</i> Предельное состояние трансляционно-анизотропных стержней при кручении	132
<i>Балашникова А. В.</i> К вопросу о сжатии пространственного анизотропного идеальнопластического слоя	140

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	145
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ.....	148
СОДЕРЖАНИЕ	150

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2014. № 1 (19)**

Отв. за выпуск: А. В. Балашникова

Технические редакторы: Л. Н. Улюкова, Н. А. Осипова, Л. А. Судленкова

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова

Макет: А. В. Балашникова

Подписано в печать 28.03.2014 г. Выход в свет 31.03.2014.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 19,00.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38