

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**

**Научный журнал
№ 3(21)
Июль – сентябрь 2014 г.**

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.

Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых
должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание
ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге "Пресса России" 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов, д-р физ.-мат. наук, профессор
Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев, д-р физ.-мат. наук, профессор
Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко, д-р физ.-мат. наук, про-
фессор

Ответственный секретарь: С. В. Тихонов, канд. физ.-мат. наук, доцент
Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов, Ю. В. Немировский,
Р. И. Непершин, Б. Е. Победря, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. А. Редкозубов,
С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов,
А. И. Шашкин

Международный совет: Р. Ю. Амензаде (Азербайджан), С. В. Варданян (Армения),
В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж (Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-16-19.

Email: predel21@mail.ru.

WWW: <http://predel.chgpu.edu.ru>.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева», 2014

А. В. Манжиров

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОСНОВАНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНО НЕОДНОРОДНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Московский государственный университет приборостроения и информатики

Аннотация. Исследуется контактная задача о взаимодействии системы жестких штампов с вязкоупругим основанием при наличии тонкого неоднородного упругого покрытия в случае плоской деформации. Рассмотрены различные варианты постановки задачи. Получена система разрешающих интегральных уравнений, которая приведена к одному смешанному интегральному уравнению с тензорным ядром в функциональном векторном пространстве. Для решения уравнения развит эффективный проекционно-спектральный метод. Решена модельная задача. Проведены детальные расчеты. Сформулированы выводы качественного характера.

Ключевые слова: контактные задачи, вязкоупругость, покрытие, неоднородность, быстрая осцилляция, система смешанных интегральных уравнений.

УДК: 539.3

Постановка задачи. На подстилающем недеформируемом основании лежит вязкоупругий слой толщины H с тонким упругим произвольно неоднородным покрытием, толщина которого h (рис. 1). В общем случае свойства покрытия зависят от двух координат x и y . В монографии [1] показано, что свойства относительно тонкого верхнего слоя осредняются по его глубине (интегрируются по y от 0 до h). Таким образом, можно считать, что свойства покрытия изменяются только от точки к точке поверхности основания (зависят только от x). Будем считать, что осредненная жесткость покрытия $R(x)$, зависящая от условий его соединения с нижним слоем, не превышает жесткости нижнего слоя (случай мягкого покрытия). В случае гладкого контакта

$$R(x) = \frac{E_1(x)}{1 - \nu_1^2(x)},$$

а в случае идеального контакта

$$R(x) = \frac{E_1(x)[1 - \nu_1(x)]}{[1 + \nu_1(x)][1 - 2\nu_1(x)]},$$

где $\nu_1(x)$ и $E_1(x)$ — коэффициент Пуассона и модуль Юнга покрытия. На такое основание действуют n жестких штампов, вдавливаемых силами $P_i(t)$ с эксцентриситетами приложения

Поступила 18.07.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00991-а и 13-01-92693-ИНД_а).

$e_i(t) (i = \overline{1, n})$. Ширина каждого штампа значительно больше толщины покрытия, т.е. $b_i - a_i \gg h$, где a_i, b_i — абсцисса начала и абсцисса конца i -го штампа ($i = \overline{1, n}$).

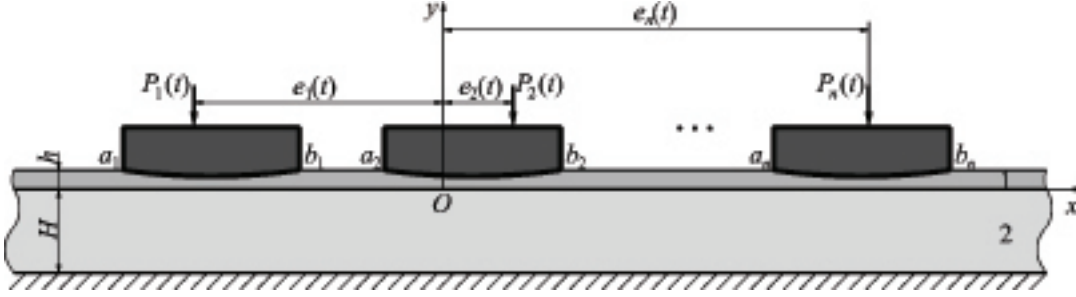


Рис. 1. Контактная задача

Приравнявая вертикальные перемещения верхней грани основания, вызванные нагрузкой

$$p(x, t) = \begin{cases} -q_i(x, t), & x \in [a_i, b_i], \quad i = \overline{1, n}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и перемещения жестких штампов, получим систему интегральных уравнений контактной задачи (см. также [2-7]):

$$\begin{aligned} \frac{q_i(x, t)h}{R(x)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j \frac{q_j(x, t)}{E_2(t - \tau_2)} = \\ = \delta_i(t) + \alpha_i(t) \left(x - \frac{a_i + b_i}{2} \right) - g_i(x), \quad x \in [a_i, b_i], \\ \mathbf{F}_i f(x, t) = \int_{a_i}^{b_i} k_{\text{пл}} \left(\frac{x - \xi}{H} \right) f(\xi, t) d\xi \quad (i = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ν_2 и $E_2(t - \tau_2)$ — коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации нижнего слоя; $\delta_i(t)$, $\alpha_i(t)$ — осадки и углы поворота штампов, $g_i(x)$ — функции форм оснований штампов; \mathbf{I} — тождественный оператор, \mathbf{V}_2 — интегральный оператор Вольтерра с ядром ползучести при растяжении $K^{(2)}(t, \tau)$, \mathbf{F}_j — интегральные операторы с известным ядром контактной задачи $k_{\text{пл}}[(x - \xi)/H]$.

Дополнительные условия равновесия штампов на основании описываются уравнениями

$$P_i(t) = \int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi, t) d\xi, \quad M_i(t) = \int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi, t) \left(\xi - \frac{a_i + b_i}{2} \right) d\xi \quad (i = \overline{1, n}). \quad (2)$$

Сделав в (1) и (2) замену переменных по формулам

$$\begin{aligned}
 x^* &= \frac{2x - a_i - b_i}{b_i - a_i}, \quad \xi^* = \frac{2\xi - a_i - b_i}{b_i - a_i}, \quad x, \xi \in [a_i, b_i], \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \lambda = \frac{2H}{b_1 - a_1}, \\
 \eta_j &= \frac{a_j + b_j}{b_1 - a_1}, \quad \zeta_j = \frac{b_j - a_j}{b_1 - a_1}, \quad \delta^{i*}(t^*) = \frac{2\delta_i(t)\sqrt{\zeta_i}}{b_1 - a_1}, \quad \alpha^{i*}(t^*) = \alpha_i(t)\zeta_i^{3/2}, \\
 g^{i*}(t^*) &= \frac{2g_i(x)\sqrt{\zeta_i}}{b_1 - a_1}, \quad q^{i*}(x^*, t^*) = \frac{2q_i(x, t)(1 - \nu_2^2)\sqrt{\zeta_i}}{E_2(t - \tau_2)}, \quad P^{i*}(t^*) = \frac{4P_i(t)(1 - \nu_2^2)\sqrt{\zeta_i}}{E_2(t - \tau_2)(b_i - a_i)}, \\
 M^{i*}(t^*) &= \frac{8M_i(t)(1 - \nu_2^2)\sqrt{\zeta_i}}{E_2(t - \tau_2)(b_i - a_i)^2}, \quad c^*(t^*) = \frac{E_2(t - \tau_2)}{E_0}, \quad m^i(x^*) = \frac{1}{1 - \nu_2^2} \frac{E_0}{R(x)} \frac{h}{b_1 - a_1}, \\
 \mathbf{F}^{ij*} f(x^*, t^*) &= \int_{-1}^1 k_{ij}(x^*, \xi^*) f(\xi^*, t^*) d\xi^*, \quad k^{ij}(x^*, \xi^*) = \frac{\sqrt{\zeta_i \zeta_j}}{\pi} k_{pl} \left(\frac{x - \xi}{H} \right), \\
 \mathbf{V}_2^* f(x^*, t^*) &= \int_1^{t^*} K_2(t^*, \tau^*) f(x^*, \tau^*) d\tau^*, \quad K_2(t^*, \tau^*) = K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2) \tau_0
 \end{aligned}$$

и опустив в окончательных формулах звездочки, получим систему интегральных уравнений

$$c(t)m^i(x)q^i(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \sum_{j=1}^n \mathbf{F}^{ij} q_j(x, t) = \delta^i(t) + \alpha^i(t)x - g^i(x), \quad r \in [0, 1] \quad (3)$$

с дополнительными условиями

$$\int_{-1}^1 q^i(\xi, t) d\xi = P^i(t) \quad \int_{-1}^1 q^i(\xi, t) \xi d\xi = M^i(t) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4)$$

Сведение системы уравнений к операторному уравнению.

Основные определения.

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2([-1, 1])$ функций, интегрируемых с квадратом в области $[-1, 1]$, скалярное произведение и норма которого определяется соотношениями

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(\xi)g(\xi)d\xi, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}, \quad f(x), g(x) \in L_2([-1, 1]).$$

Если $\mathbf{L}_2([-1, 1])$ — пространство функций двух переменных, интегрируемых с квадратом в области $\{x, \xi\} \in [-1, 1]\}$, то скалярное произведение и норма представляются в форме

$$\begin{aligned}
 [k(x, \xi), h(x, \xi)] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k(x, \xi)h(x, \xi) dx d\xi, \\
 \|k\| &= \sqrt{[k, k]}, \quad k(x, \xi), h(x, \xi) \in \mathbf{L}_2([-1, 1]).
 \end{aligned}$$

Пусть $\{p_k^0(x)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) — ортонормированный базис пространства $L_2([-1, 1])$, т. е. $(p_i^0, p_j^0) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда функции $f(x) \in L_2([-1, 1])$ и $k(x, \xi) \in \mathbf{L}_2([-1, 1])$ могут быть представлены в виде

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i p_i^0(x), \quad k(x, \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} k_{mk} p_m^0(x) p_k^0(\xi).$$

Рассмотрим теперь гильбертово пространство $L_2([-1, 1], V)$ вектор-функций, скалярное произведение и норма в котором введены по следующему правилу:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x)) &= \int_{-1}^1 \mathbf{f}(\xi) \cdot \mathbf{g}(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 f^i(\xi) g^i(\xi) d\xi, \\
 \|\mathbf{f}\| &= \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})}, \quad \mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x) \in L_2([-1, 1], V),
 \end{aligned}$$

где здесь и далее по верхним повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до n , если левая часть формулы не зависит от этого индекса. Ясно, что $\mathbf{f}(x) \in L_2([-1, 1], V)$ тогда и только тогда, когда ее компоненты $f^i(x) \in L_2([-1, 1])$ ($i = \overline{1, n}$). Также можно ввести и гильбертово пространство $\mathbf{L}_2([-1, 1], V)$ тензор-функций двух переменных со следующими скалярным произведением и нормой

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}(x, \xi), \mathbf{H}(x, \xi)] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{K}(x, \xi) \cdot \mathbf{H}(x, \xi) dx d\xi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K^{ij}(x, \xi) H^{ji}(x, \xi) dx d\xi, \\ \|\mathbf{K}\| &= \sqrt{[\mathbf{K}, \mathbf{K}]}, \quad \mathbf{K}(x, \xi), \mathbf{H}(x, \xi) \in L_2([-1, 1], V). \end{aligned}$$

Очевидно, что тензор-функция $\mathbf{K}(x, \xi) \in \mathbf{L}_2([-1, 1], V)$ тогда и только тогда, когда ее компоненты $K^{ij}(x, \xi) \in L_2([-1, 1])$ ($i, j = \overline{1, 2, \dots, n}$). Функциональный векторный базис $\{\mathbf{p}_k^i(x)\}$ ($i = \overline{1, n}, k = 0, 1, 2, \dots$) пространства $L_2([-1, 1], V)$ можно построить следующим образом:

$$\mathbf{p}_k^i(x) = p_k^i(x) \mathbf{i}^i, \quad (\mathbf{p}_k^i, \mathbf{p}_m^j) = \delta^{ij} \delta_{km},$$

где $\mathbf{i}^i \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор, i -я компонента которого равна 1, а остальные нулю, а $\{p_k^i(x)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) — ортонормированный базис пространства $L_2([-1, 1])$, в общем случае различный для каждого $i = \overline{1, n}$. Тогда вектор-функция $\mathbf{f}(x) \in L_2([-1, 1], V)$ и тензор-функция $\mathbf{K}(x, \xi) \in \mathbf{L}_2([-1, 1], V)$ могут быть представлены в виде

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^i \mathbf{p}_k^i(x), \quad \mathbf{K}(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} K_{km}^{ij} \mathbf{p}_k^i(x) \mathbf{p}_m^j(\xi).$$

Произведение (справа) тензор-функции $\mathbf{K}(x, \xi) \in \mathbf{L}_2([-1, 1], V)$ на вектор-функцию $\mathbf{f}(\xi) \in L_2([-1, 1], V)$ введем следующим соотношением:

$$(\mathbf{K}(x, \xi), \mathbf{f}(\xi)) = \int_{-1}^1 \mathbf{K}(x, \xi) \cdot \mathbf{f}(\xi) d\xi.$$

Преобразование уравнения.

Принимая, что (аргументы функций опускаем)

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x, t) &= q^i(x, t) \mathbf{i}^i, \quad \boldsymbol{\delta}(t) = \delta^i(t) \mathbf{i}^i, \quad \boldsymbol{\alpha}(t) = \alpha^i(t) \mathbf{i}^i, \\ \mathbf{P}(t) &= P^i(t) \mathbf{i}^i, \quad \mathbf{M}(t) = M^i(t) \mathbf{i}^i, \quad \mathbf{k}(x, \xi) = k^{ij}(x, \xi) \mathbf{i}^i \mathbf{i}^j, \quad \mathbf{D}(x) = m^i(x) \mathbf{i}^i \mathbf{i}^i, \end{aligned}$$

получим систему интегральных уравнений с симметричными положительно определенными ядрами и преобразованные дополнительные условия. Систему уравнений (3) с дополнительными условиями (4) можно записать в виде операторного уравнения плоских контактных задач

$$c(t) \mathbf{D}(x) \cdot \mathbf{q}(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \mathbf{G} \mathbf{q}(x, t) = \boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x - \mathbf{g}(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (5)$$

$$(\mathbf{E}, \mathbf{q}(x, t)) = \mathbf{P}(t), \quad (x \mathbf{E}, \mathbf{q}(x, t)) = \mathbf{M}(t), \quad (6)$$

где $\mathbf{G} \mathbf{f}(x) = (\mathbf{k}(x, \xi), \mathbf{f}(\xi))$, $\mathbf{E} = \text{diag}_n \{1, \dots, 1\}$ — единичный тензор. Так как $\mathbf{D}(x)$ — симметричный положительно определенный тензор, то его можно представить в виде $\mathbf{D}(x) = \mathbf{N}^2(x)$, где в качестве $\mathbf{N}(x)$ можно взять $\mathbf{N}(x) = \sqrt{m^i(x)} \mathbf{i}^i \mathbf{i}^i$. В дальнейшем будем обозначать эту матрицу как $\mathbf{D}^{1/2}(x)$. Домножив уравнение (5) на $\mathbf{D}^{-1/2}(x) = (\mathbf{D}^{1/2}(x))^{-1}$ и введя обозначения

$$\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{D}^{1/2}(x) \cdot \mathbf{q}(x, t), \quad \mathbf{K}(x, \xi) = \mathbf{D}^{-1/2}(x) \cdot \mathbf{k}(x, \xi) \cdot \mathbf{D}^{-1/2}(\xi), \quad (7)$$

получим следующее уравнение и дополнительные условия:

$$c(t) \mathbf{Q}(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \mathbf{F} \mathbf{Q}(x, t) = \boldsymbol{\Delta}(x, t), \quad x \in [-1, 1], \quad (8)$$

$$(\mathbf{D}^{-1/2}(x), \mathbf{Q}(x, t)) = \mathbf{P}(t), \quad (\mathbf{D}^{-1/2}(x) \mathbf{X}, \mathbf{Q}(x, t)) = \mathbf{M}(t), \quad (9)$$

где $\boldsymbol{\Delta}(x, t) = \mathbf{D}^{-1/2}(x) \cdot [\boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x - \mathbf{g}(x)]$, $\mathbf{F} \mathbf{f}(x) = (\mathbf{K}(x, \xi), \mathbf{f}(\xi))$.

Таким образом, будем исследовать операторное уравнение (8) с дополнительным условием (9), $\mathbf{Q}(x, t)$, $\mathbf{\Delta}(x, t)$ – непрерывные по t в $L_2([-1, 1], V)$ вектор-функции, $\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{M}(t)$ – непрерывные по t вектор-функции. Можно показать, что вполне непрерывный оператор \mathbf{F} является самосопряженным и положительно определенным оператором из $L_2([-1, 1], V)$ в $L_2([-1, 1], V)$.

Варианты математической постановки.

Рассмотрим варианты постановки контактной задачи о системе штампов, возникающие в плоском случае. Легко видеть, что на каждом штампе можно задать один из четырех типов условий: вдавливающую силу и момент, силу и угол поворота, осадку и момент, осадку и угол поворота. На разных штампах могут быть поставлены разные типы условий. Таким образом получается следующее: 1) если на всех штампах одинаковые условия, то всего 4 варианта постановки; 2) если штампы делятся на две группы с разными типами условий, то тогда будет 6 вариантов постановки; 3) если всего 3 группы штампов с разными условиями в каждой, то таких вариантов 4; 4) и, наконец, если есть 4 группы штампов, то такой вариант всего один. Таким образом, существуют пятнадцать возможных вариантов постановки плоской контактной задачи для системы штампов.

Анализ всех вариантов показывает, что они обладают одной закономерностью. Пространство $L_2([-1, 1], V)$ всегда можно представить в виде суммы ортогональных подпространств $L_2^1([-1, 1], V)$ и $L_2^2([-1, 1], V)$ так, что $L_2([-1, 1], V) = L_2^1([-1, 1], V) \oplus L_2^2([-1, 1], V)$, причем вектор-функция $\mathbf{Q}(x, t)$ имеет вид

$$\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_1(x, t) + \mathbf{Q}_2(x, t),$$

где $\mathbf{Q}_i(x, t)$ непрерывны по t в $L_2^i([-1, 1], V)$ ($i = 1, 2$). Более того, $\mathbf{Q}_1(x, t)$ всегда представляет известную часть решения, а $\mathbf{Q}_2(x, t)$ подлежит определению.

Далее будут рассмотрены лишь 3 варианта постановки задачи. Решения для всех остальных вариантов получаются аналогичным образом.

Решение задачи для одной группы штампов.

Для решения задачи необходимо в первую очередь построить функциональный базис гильбертова пространства $L_2([-1, 1], V)$, для чего требуется рассмотреть последовательность тензор-функций $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(x)\}$ ($i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$), составляющую базис пространства $L_2([-1, 1], V)$ [15]. При этом необходимо, чтобы в структуру всех базисных функций входили функции из матрицы $\mathbf{D}^{-1/2}(x)$ или в структуру каждой i -й группы функций $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(x)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) входила функция $\sqrt{m_i(x)}$. Это позволит учесть ее особенности (осцилляции, разрывность и пр.) уже на этапе формирования базиса, что даст возможность производить расчеты для оснований, неоднородности покрытий которых описываются сложными функциями. В этом случае система базисных функций сможет быть построена по следующему правилу:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{p}_k^i(x), \mathbf{p}_m^j(x)) &= \delta_{km} \delta^{ij}, \quad \mathbf{p}_k^i(x) = \mathbf{D}^{-1/2}(x) \cdot \mathbf{p}_k^{i*}(x), \quad \mathbf{p}_k^{i*}(x) = p_k^{i*}(x) \mathbf{i}^i, \\
 p_k^{i*}(x) &= \frac{1}{\sqrt{d_{k-1,i} d_{k,i}}} \begin{vmatrix} J_{0,i} & J_{1,i} & \cdots & J_{k-1,i} & J_{k,i} \\ J_{1,i} & J_{2,i} & \cdots & J_{k,i} & J_{k+1,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ J_{k-1,i} & J_{k,i} & \cdots & J_{2k-2,i} & J_{2k-1,i} \\ 1 & x & \cdots & x^{k-1} & x^k \end{vmatrix}, \quad J_{k,i} = \left(x^k, \frac{1}{m^i(x)} \right), \\
 d_{-1,i} &= 1, \quad d_{k,i} = \begin{vmatrix} J_{0,i} & J_{1,i} & \cdots & J_{k,i} \\ J_{1,i} & J_{2,i} & \cdots & J_{k+1,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{k,i} & J_{k+1,i} & \cdots & J_{2k,i} \end{vmatrix}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots, \quad i = \overline{1, n}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(x)\}$ ($i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$) составляет базис $L_2([-1, 1], V)$.

Заданные осадки и углы поворота штампов (решение уравнения с известной правой частью).

Пусть система штампов представляет из себя группу с заданными осадками $\delta(t)$ и углами поворота $\alpha(t)$ штампов. Тогда требуются контактные давления $\mathbf{q}(x, t)$ под каждым из штампов, вдавливающие усилия $\mathbf{P}(t)$ и моменты $\mathbf{M}(t)$.

Тогда решение уравнения (9) следует искать в виде ряда по собственным функциям оператора \mathbf{F} , который является вполне непрерывным, самосопряженным и сильно положительным оператором из $L_2([-1, 1], V)$ в $L_2([-1, 1], V)$. Система его собственных вектор-функций составляет базис пространства $L_2([-1, 1], V)$. Спектральная задача для оператора \mathbf{F} может быть записана в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\varphi_k(x) &= \gamma_k\varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{km}^i \mathbf{p}_m^i(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \mathbf{K}(x, \xi) &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} K_{m_1 m_2}^{ij} \mathbf{p}_{m_1}^i(x) \mathbf{p}_{m_2}^j(\xi). \end{aligned} \quad (11)$$

Представив искомую вектор-функцию $\mathbf{Q}(x, t)$ и $\Delta(x, t)$ в виде разложения по собственным вектор-функциям $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) в $L_2([-1, 1], V)$, то есть

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \varphi_k(x), \quad \Delta(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t) \varphi_k(x), \\ \Delta_k(t) &= \delta_k^i \delta^i(t) + \alpha_k^i \alpha^i(t) + \tilde{g}_k, \end{aligned} \quad (12)$$

и подставив эти представления в (8), получим

$$c(t) \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \varphi_k(x) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \mathbf{F} \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t) \varphi_k(x).$$

Коэффициенты разложения δ_k^i , α_k^i и \tilde{g}_k ($i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, \dots$) известны. Учитывая представления из спектральной задачи (11), можно получить

$$z_k(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_\ell) \frac{\Delta_k(t)}{c(t) + \gamma_k}, \quad \mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где $R_k(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_k(t, \tau) = \gamma_k K_2(t, \tau) / [c(t) + \gamma_k]$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Таким образом, чтобы найти контактные давления $\mathbf{q}(x, t)$ под штампами, необходимо воспользоваться формулами (7), (11)–(13). При этом исходные базисные функции необходимо строить по формулам (10). Отметим, что

$$q^i(x, t) = \frac{1}{m^i(x)} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} p_\ell^{i*}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{k\ell}^i z_k(t) \right], \quad i = \overline{1, n},$$

то есть в решении в явном виде выделены функции $m^i(x)$, которые связаны с функциями неоднородности покрытия, а в квадратных скобках стоит сумма гладких функций (многочленов). Это позволяет производить расчеты для случаев, когда неоднородность описывается быстро осциллирующей и даже разрывной функцией.

Для получения векторов вдавливающих усилий $\mathbf{P}(t)$ и моментов $\mathbf{M}(t)$ необходимо воспользоваться уже полученной вектор-функцией $\mathbf{q}(x, t)$, подставив ее в уравнение (6).

Заданные все вдавливающие силы и моменты (решение уравнения с частично известной правой частью).

Пусть система штампов представляет из себя группу с заданными вдавливающими силами $\mathbf{P}(t)$ и моментами $\mathbf{M}(t)$. Тогда требуются контактные давления $\mathbf{q}(x, t)$ под каждым из штампов, осадки $\delta(t)$ и углы поворота $\alpha(t)$ штампов.

В этом случае пространство $L_2([-1, 1], V)$ необходимо представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $L_2([-1, 1], V) = L_2^{(0)}([-1, 1], V) \oplus L_2^{(1)}(\Omega, V)$, где $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$ — евклидово пространство с базисными функциями $\{\mathbf{p}_0^i(x), \mathbf{p}_1^i(x)\}$ ($i = \overline{1, n}$), а $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ — гильбертово пространство с базисом $\{\mathbf{p}_k^i(x)\}$ ($i = \overline{1, n}, k = 2, 3, \dots$). Подинтегральная функция и правая часть уравнения (8) представимы в виде алгебраической суммы вектор-функций, непрерывных по времени t в $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$ и $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ соответственно, то есть

$$\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_0(x, t) + \mathbf{Q}_1(x, t), \quad \Delta(x, t) = \Delta_0(x, t) + \Delta_1(x, t), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0(x, t) &= z_0^i(t)\mathbf{p}_0^i(x) + z_1^i(t)\mathbf{p}_1^i(x), \\ \Delta_0(x, t) &= \Delta_{00}^i(t)\mathbf{p}_0^i(x) + \Delta_{01}^i(t)\mathbf{p}_1^i(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Функции разложения $\Delta_{00}^i(t)$ и $\Delta_{01}^i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) включают в себя линейную комбинацию функции угла поворота $\alpha^i(t)$, функции осадки $\delta^i(t)$ и известных коэффициентов разложения $\{\hat{g}_0^i, \hat{g}_1^i\}$ функции формы $\mathbf{g}(x)$ по $\{\mathbf{p}_0^i(x), \mathbf{p}_1^i(x)\}$ ($i = \overline{1, n}$).

Заметим, что в представлении для $\mathbf{Q}(x, t)$ нам известно слагаемое $\mathbf{Q}_0(x, t)$, функция разложения $z_0^i(t)$ и $z_1^i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) которого определяется дополнительными условиями (9), а слагаемое $\mathbf{Q}_1(x, t)$ требуется найти. Для правой части, наоборот, требуется определить $\Delta_0(x, t)$, а функция $\Delta_1(x, t)$ известна.

Введем оператор ортогонального проектирования (ортопроектор), который отображает пространство $L_2([-1, 1], V)$ в $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$:

$$\mathbf{P}_0\phi(x, t) = (\phi(x, t), \mathbf{p}_0^i(x))\mathbf{p}_0^i(x) + (\phi(x, t), \mathbf{p}_1^i(x))\mathbf{p}_1^i(x). \quad (16)$$

Очевидно, что ортопроектор $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0$ переводит пространство $L_2([-1, 1], V)$ в $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$. Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{P}_i\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_i(x, t), \quad \mathbf{P}_i\Delta(x, t) = \Delta_i(x, t), \quad i = 0, 1.$$

Подействуем на уравнение (8) оператором ортогонального проектирования \mathbf{P}_1 . В результате получим уравнение для определения $\mathbf{Q}_1(x, t)$ с известной правой частью:

$$c(t)\mathbf{Q}_1(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_1(x, t) = -(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_0(x, t) + \Delta_1(x, t) = \tilde{\Delta}(x, t). \quad (17)$$

Его решение необходимо строить в виде ряда по собственным функциям оператора $\mathbf{P}_1\mathbf{F}$, который, как можно показать, является вполне непрерывным, самосопряженным и сильно положительным из $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ в $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$. Система собственных функций такого оператора составляет базис пространства $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$. Спектральная задача для оператора $\mathbf{P}_1\mathbf{F}$ может быть записана в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1\mathbf{F}\varphi_k(x) &= \gamma_k\varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \psi_{km}^i \mathbf{p}_k^i(x), \quad k = 2, 3, \dots, \\ \mathbf{K}(x, \xi) &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} K_{m_1 m_2}^{ij} \mathbf{p}_{m_1}^i(x) \mathbf{p}_{m_2}^j(\xi). \end{aligned} \quad (18)$$

Представив искомую функцию $\mathbf{Q}_1(x, t)$ и правую часть (17) в виде разложения по новым базисным функциям $\varphi_k(x)$ ($k = 2, 3, \dots$) в $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$, то есть

$$\mathbf{Q}_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\varphi_k(x), \quad \tilde{\Delta}(x, t) = \sum_{k=2}^{\infty} \Delta_k(t)\varphi_k(x), \quad (19)$$

и подставив это представление в (17), получим уравнение для определения неизвестных функций разложения $z_k(t)$ ($k = 2, 3, \dots$):

$$z_k(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k) \frac{\Delta_k(t)}{c(t) + \gamma_k}, \quad \mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (20)$$

где $R_k(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_k(t, \tau) = \gamma_k K_2(t, \tau) / [c(t) + \gamma_k]$ ($k = 2, 3, \dots$).

Таким образом, чтобы найти контактные давления $\mathbf{q}(x, t)$ под штампами, необходимо воспользоваться формулами (7), (14), (15), (18)–(20). При этом исходные базисные функции необходимо строить по формулам (10). Как и в случае с заданной правой частью, в выражениях для контактных давлений в явном виде выделены функции $m_i(x)$, которые связаны с функциями неоднородности покрытия:

$$q^i(x, t) = \frac{1}{m^i(x)} \left[p_0^{i*}(x) z_0^i(t) + p_1^{i*}(x) z_1^i(t) + \sum_{\ell=2}^{\infty} p_{\ell}^{i*}(x) \sum_{k=2}^{\infty} \psi_{k\ell}^i z_k(t) \right], \quad i = \overline{1, n}.$$

Полностью определив контактные давления под штампами, можно найти и неизвестные осадки и углы поворотов. Для этого подействуем оператором \mathbf{P}_0 на уравнение (8):

$$c(t) \mathbf{Q}_0(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \mathbf{P}_0 \mathbf{F} \mathbf{Q}(x, t) = \Delta_{00}^i(t) \mathbf{p}_0^i(x) + \Delta_{01}^i(t) \mathbf{p}_1^i(x).$$

Подставив сюда представление для $\mathbf{Q}(x, t)$ и, в частности, для $\mathbf{Q}_0(x, t)$, получим непосредственное уравнение для определения $\Delta_{00}^i(t)$ и $\Delta_{01}^i(t)$, а следовательно, и $\delta^i(t)$, $\alpha^i(t)$ ($i = \overline{1, n}$).

Замечание.

Решения остальных задач как с одной группой штампов, так и с несколькими, строятся аналогично тому, что было описано выше. Меняется только ортопроектор.

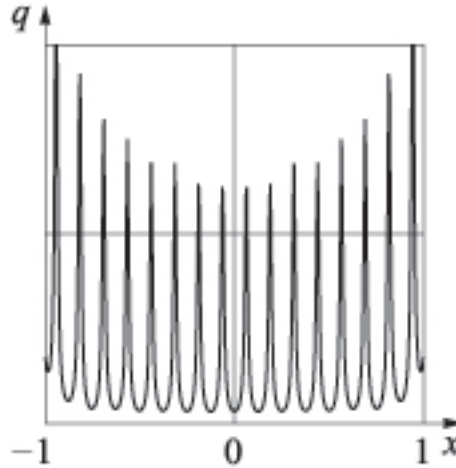


Рис. 2. Неоднородность описывается быстро осциллирующей функцией

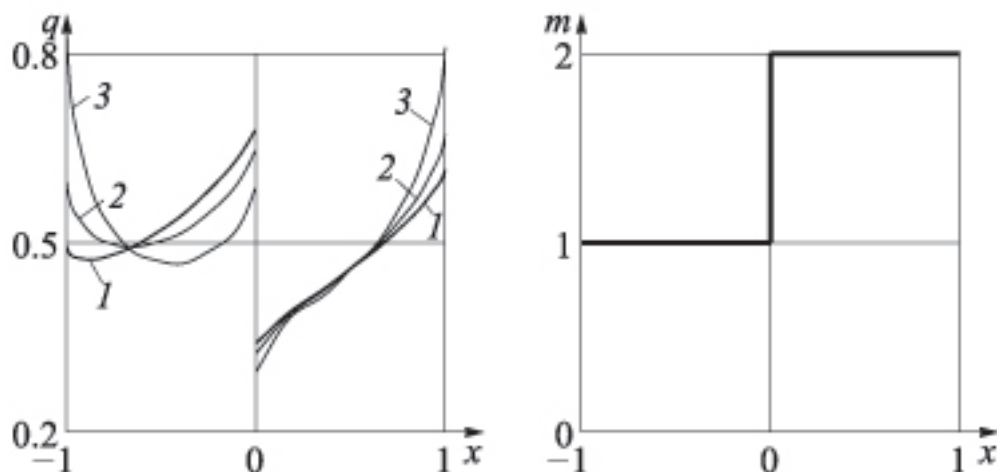


Рис. 3. Неоднородность описывается разрывной функцией

Анализ результатов.

Проведенные расчеты показали эффективность развитого подхода в случае, когда неоднородность задана быстро осциллирующей (рис. 2) и разрывной (рис. 3) функциями, что часто встречается в прикладных задачах. Этого невозможно добиться в рамках известных методов, применение которых дает ошибку в расчетах порядка 100%.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Арутюнян, Н. Х. Контактные задачи теории ползучести / Н. Х. Арутюнян, А. В. Манжиров. – Ереван : Изд-во НАН РА, 1999. – 318 с.
- [2] *Manzhirov, A. V.* Conformal contact between a punch and a layer with thin coating / A. V. Manzhirov, K. E. Kazakov // *Prace IPPT – IFTR Reports.* – 2008. – Vol. 2. – С. 248–249.
- [3] Казаков, К. Е. О конформном контакте слоистых оснований и штампов / К. Е. Казаков, А. В. Манжиров // *Известия РАН. МТТ.* – 2008. – № 3. – С. 227–240.
- [4] *Manzhirov, A. V.* Conformal contact between foundations and punches / A. V. Manzhirov, K. E. Kazakov // *Topical Problems in Solid Mechanics* / Ed. by N. K. Gupta, A. V. Manzhirov. – New Delhi : IT Delhi, 2008. – P. 92–104.
- [5] Манжиров, А. В. О согласованном контакте штампов и тел с покрытиями, имеющих сложный профиль поверхности / А. В. Манжиров, С. П. Курдина, С. Кухарский // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф.* – 2012. – Т. 12. – Вып. 4. – С. 80–89.
- [6] Манжиров, А. В. Системы смешанных интегральных уравнений с быстро осциллирующими функциями в исходных данных / А. В. Манжиров // *Современные проблемы механики сплошной среды. Тезисы докладов XVI Международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 16-19 октября 2012 г.* – Ростов-на-Дону : Изд-во ЮФУ, 2012. – С. 66.
- [7] Манжиров, А. В. Системы смешанных интегральных уравнений в проблеме множественного конформного контакта / А. В. Манжиров, К. Е. Казаков, С. Кухарский // *Развитие идей Л. А. Галина в механике.* – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2013. – С. 280–304.

Манжиров Александр Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва;

заведующий филиалом кафедры "Прикладная математика", МГТУ им. Н. Э. Баумана;
профессор кафедры "Высшая математика", МГУПИ

e-mail: manzh@inbox.ru

A. V. Manzhirov

**CONTACT PROBLEMS FOR FOUNDATIONS
WITH ARBITRARILY NONUNIFORM COVERS**

Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences

Bauman Moscow State Technical University

Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science

Abstract. A contact problem of the interaction between a system of rigid punches and a viscoelastic foundation with a thin nonuniform elastic coating in the case of plane strain state is under research. Various versions of mathematical formulation are considered. A principal system of integral equations is obtained. It is reduced to an integral equation with a tensor kernel in a functional vector space. The effective projective spectral method is developed. A model problem is solved. Detailed calculations are performed. Qualitative conclusions are formulated.

Keywords: contact problems, viscoelasticity, coating, non-uniformity, rapid oscillation, system of mixed integral equations.

REFERENCES

- [1] *Арутюнян, Н. Х.* Contact problems of the theory of creep / N. X. Harutyunyan, A. V. Manzhirov. – Yerevan : Publishing House of NAS RA, 1999. – 318 p.
- [2] *Manzhirov, A. V.* Conformal contact between a punch and a layer with thin coating / A. V. Manzhirov, K. E. Kazakov // Prace IPPT – IFTR Reports. – 2008. – Vol. 2. – P. 248–249.
- [3] *Kazakov, K. E.* Conformal contact layered grounds and stamps / K. E. Kazakov, A. V. Manzhirov // Proceedings of the Academy of Sciences. MRB. – 2008. – № 3. – P. 227–240.
- [4] *Manzhirov, A. V.* Conformal contact between foundations and punches / A. V. Manzhirov, K. E. Kazakov // Topical Problems in Solid Mechanics / Ed. by N. K. Gupta, A. V. Manzhirov. – New Delhi : IIT Delhi, 2008. – P. 92–104.
- [5] *Manzhirov, A. V.* On the agreed contact punches and bodies with a coating having a complex surface profile / A. V. Manzhirov, S. P. Kurdina, S. Kukharsky // Math. Sarat. Univ. New. Ser. Ser. Mat. Meh. Inf. – 2012. – Vol. 12. – Issue 4. – P. 80–89.
- [6] *Manzhirov, A. V.* Mixed system of integral equations with rapidly oscillating functions in the source data / A. V. Manzhirov // Contemporary problems of continuum mechanics. Abstracts XVI International Conference, Rostov-on-Don, 16-19 October 2012. – Rostov-on-Don : Publ SFU, 2012. – P. 66.
- [7] *Manzhirov, A. V.* Mixed system of integral equations in the problem of multiple conformal contact / A. V. Manzhirov, K. E. Kazakov, S. Kukharsky // Development of ideas in mechanics L. A. Galina. – Izhevsk : Institute of Computer Science, 2013. – P. 280–304.

Manzhirov, Alexander Vladimirovich

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of Department for Modeling in Solid Mechanics, Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow;
Head of Branch Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University;
Professor of Mathematics, Department of Higher Mathematics, Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science*

А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк, А. О. Лемза

НЕОБРАТИМОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МАТЕРИАЛА МЕЖДУ ЖЕСТКИМИ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН
Дальневосточный федеральный университет*

Аннотация. Рассматривается деформирование материала, расположенного между двумя жесткими коаксиальными цилиндрами, при повороте внутреннего цилиндра. Материал полагается несжимаемым и проявляющим нелинейные упругие и вязкие свойства. Для математического моделирования используется теория больших деформаций, основанная на дифференциальных определениях для обратимых и необратимых деформаций. Рассчитаны поля перемещений, напряжений, обратимых, необратимых и полных деформаций.

Ключевые слова: большие деформации, упругость, ползучесть, остаточные напряжения, необратимые деформации.

УДК: 539.374

Модель упругопластического тела предполагает независимость механических свойств материалов от времени. Однако у многих современных технологических материалов наблюдается заметное изменение их механических свойств от времени. Явление ползучести выражается либо в возрастании деформаций с течением времени при неизменной нагрузке, либо в падении напряжений при постоянной деформации. Свойство ползучести обнаруживают материалы различной природы. Физические механизмы ползучести у разных материалов различны. Например, бетон и полимеры ползут при нормальной температуре и обладают свойством ограниченной ползучести. Ползучесть металлов не ограничена и требует более высокой температуры. Накопление деформаций в теле, образующихся в результате ползучести, может приводить к искажению или даже разрушению этого тела. Таким образом, изучение процесса ползучести и связанных с ним явлений актуально и представляет значительный интерес для современных теоретических и прикладных наук.

1. Основные модельные соотношения. Для описания движения среды будем использовать модель больших деформаций [2], [3], [5]. В прямоугольной декартовой системе координат

Эйлера x_i кинематика среды задается соотношениями

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}, \\
\frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2}((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj})), \\
\frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
r_{ij} &= w_{ij} + z_{ij}(e_{ks}, \varepsilon_{ks}), \quad w_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}),
\end{aligned} \tag{1}$$

$$z_{ij} = A^{-1}[(\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj})B^2 + B(\varepsilon_{ik}e_{ks}e_{sj} - e_{ik}e_{ks}\varepsilon_{sj}) + e_{ik}\varepsilon_{ks}e_{st}e_{tj} - e_{ik}e_{ks}\varepsilon_{st}e_{tj}],$$

$$A = 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3, \quad B = 2 - E_1,$$

$$E_1 = e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}.$$

В формулах (1) d_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси; e_{ij} и p_{ij} — их обратимая и необратимая составляющие; u_i, v_i — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды; $\frac{D}{Dt}$ — оператор используемой объективной производной тензоров по времени, которая приведена для произвольного тензора n_{ij} ; r_{ij} — компоненты тензора вращений. Считаем, что необратимые деформации p_{ij} могут быть и деформациями ползучести, и пластическими деформациями. Источник γ_{ij} в уравнении переноса для необратимых деформаций — скорость их накопления.

Далее полагаем, что необратимые деформации накапливаются в материале непосредственно с начала процесса деформирования и определяются реологическими свойствами материала.

Напряжения полностью определяются обратимыми деформациями и связаны с ними формулой, аналогичной формуле Мурнагана для несжимаемой среды в нелинейной теории упругости:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}). \tag{2}$$

В зависимости (2) σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, p — добавочное гидростатическое давление, $W(e_{ij})$ — упругий потенциал (плотность распределения свободной энергии). Зададим данную функцию в виде

$$\begin{aligned}
W &= -2\mu I_1 - \mu I_2 + bI_1^2 + (b - \mu)I_1 I_2 - \chi I_1^3 + \dots, \\
I_1 &= e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \quad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Формула $W(I_1, I_2)$ задает консервативный механизм деформирования, μ — модуль сдвига, b, χ — постоянные материала.

Считаем, что диссипативный механизм деформирования связан с вязкими и пластическими свойствами материалов. В областях, где напряженное состояние еще не достигло поверхности текучести (где пластические деформации отсутствуют), и в областях разгрузки (где есть накопленные пластические деформации)

$$\varepsilon_{ij}^p = 0, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v.$$

Здесь ε_{ij}^p — скорость пластических деформаций, ε_{ij}^v — скорость деформаций ползучести. Соответствующий диссипативный механизм деформирования зададим, введя потенциал

$V(\sigma_{ij})$ в форме степенного закона ползучести Нортона [1]:

$$V(\sigma_{ij}) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \max|\sigma_i - \sigma_j|, \quad (4)$$

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений, постоянные B и n являются параметрами ползучести материала.

Когда напряженное состояние в материале достигает поверхности нагружения, диссипативный механизм деформирования меняется, появляется область пластического течения. В таком случае

$$\varepsilon_{ij}^v = 0, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p.$$

Связь скоростей пластических деформаций ε_{ij}^p с напряжениями в таких областях согласно принципу максимума Мизеса устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0, \quad \lambda > 0. \quad (5)$$

Пренебрегая вязкими свойствами материала на стадии его пластического течения, в качестве поверхности нагружения выберем призму Треска

$$f(\sigma_{ij}) = \max|\sigma_i - \sigma_j| - 2k = 0, \quad (6)$$

где k — предел текучести материала.

Согласно уравнению переноса для необратимых деформаций из (1) в области разгрузки компоненты тензора пластических деформаций изменяются как при жестком движении тела, в области пластического течения таким же образом изменяются компоненты тензора деформаций ползучести.

С целью учета вязкости при пластическом течении среды можно воспользоваться соответствующим обобщением условия Треска [4]:

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max|\varepsilon_k^p|, \quad (7)$$

где ε_k^p — главные значения тензора скоростей пластических деформаций, η — коэффициент вязкости.

2. Постановка задачи. Деформирование материала до начала пластического течения. В настоящей работе в рамках модели, описанной выше, изучается изотермическое деформирование материала, помещенного в зазор между двумя жесткими цилиндрическими поверхностями (радиус внутренней $r = r_0$, внешней — $r = R$). В качестве примера рассмотрим случай поворота внутреннего жесткого цилиндра за счет приложенного к нему момента закручивания, в то время как внешний является неподвижным. В дальнейшем используется цилиндрическая система координат r, φ, z . На жестких поверхностях выполняется условие прилипания, тогда граничные условия зададим в виде

$$\vec{u}\Big|_{r=R} = \vec{v}\Big|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}\Big|_{r=r_0} = \frac{c(t)}{r_0^2}. \quad (1)$$

Считаем, что в рассматриваемом случае все точки среды движутся по окружностям, тогда согласно соотношениям (1) кинематика задается зависимостями

$$u_r = r(1 - \cos \theta), \quad u_\varphi = r \sin \theta,$$

$$d_{rr} = -\frac{1}{2} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2} r \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad v_\varphi = r \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} r \frac{\partial \theta}{\partial r \partial t}, \quad \omega_{r\varphi} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{2} r \frac{\partial \theta}{\partial r \partial t}, \quad r_{r\varphi} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{2\varepsilon_{r\varphi}(1 - e_{\varphi\varphi})}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 1},$$

где $\theta = \theta(r, t)$ — центральный угол закручивания.

Напряжения в среде через обратимые деформации согласно формулам (2) и (3) определяются зависимостями

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -(p + 2\mu) + 2(b + \mu)e_{rr} + 2be_{\varphi\varphi} - (2b + 3\chi)e_{rr}^2 + \mu e_{r\varphi}^2 - \\ &\quad - 2(b + \mu + 3\chi)e_{rr}e_{\varphi\varphi} - (\mu + 3\chi)e_{\varphi\varphi}^2 + \dots, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -(p + 2\mu) + 2(b + \mu)e_{\varphi\varphi} + 2be_{rr} - (\mu + 3\chi)e_{rr}^2 + \\ &\quad + \mu e_{r\varphi}^2 - 2(b + \mu + 3\chi)e_{rr}e_{\varphi\varphi} - (2b + 3\chi)e_{\varphi\varphi}^2 + \dots, \quad (3) \\ \sigma_{zz} &= -(p + 2\mu) + 2b(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}) - (\mu + 3\chi)(e_{rr}^2 + e_{\varphi\varphi}^2) - 2\mu e_{r\varphi}^2 - 6\chi e_{rr}e_{\varphi\varphi} + \dots, \\ \sigma_{r\varphi} &= 2\mu e_{r\varphi} - (\mu - 2b)e_{r\varphi}(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}) + \dots\end{aligned}$$

Здесь выписаны слагаемые до второго порядка по компонентам обратимых деформаций. Следствием формул (3) является соотношение

$$\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma_{r\varphi}} = \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}}.$$

В дальнейшем будем придерживаться квазистатического подхода, тогда уравнения равновесия в рассматриваемом случае можно записать в форме

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0. \quad (4)$$

Интегрируя второе уравнение (4), сразу найдем, что

$$\sigma_{r\varphi} = c(t)/r^2, \quad (5)$$

то есть, если напряжение $\sigma_{r\varphi}$ задано на внутренней жесткой поверхности, то его распределение будет известно во всей области деформирования.

Используя уравнения переноса, из соотношений (1) получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_{rr}}{\partial t} &= 2p_{r\varphi} \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r\partial t} \frac{r(1 - e_{\varphi\varphi})}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} - 2Bn\sigma_{r\varphi}Q^{\frac{n}{2}-1} \right) + Bn \frac{\sigma_{r\varphi}}{e_{r\varphi}} (e_{rr} - e_{\varphi\varphi})Q^{\frac{n}{2}-1}(1 - 2p_{rr}), \\ \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= 2p_{r\varphi} \left(r \frac{\partial^2\theta}{\partial r\partial t} \frac{r(e_{\varphi\varphi} - 1)}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} - 2Bn\sigma_{r\varphi}Q^{\frac{n}{2}-1} \right) - Bn \frac{\sigma_{r\varphi}}{e_{r\varphi}} (e_{rr} - e_{\varphi\varphi})Q^{\frac{n}{2}-1}(1 - 2p_{\varphi\varphi}), \\ \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t} &= (p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) \frac{\partial^2\theta}{\partial r\partial t} \frac{r(e_{\varphi\varphi} - 1)}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} + 2Bn\sigma_{r\varphi}Q^{\frac{n}{2}-1}(1 - p_{rr} - p_{\varphi\varphi}), \\ \frac{\partial e_{rr}}{\partial t} &= e_{r\varphi} \frac{\partial^2\theta}{\partial r\partial t} \frac{r(3 - e_{rr} - 2e_{\varphi\varphi})}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} + Bn \frac{\sigma_{r\varphi}}{e_{r\varphi}} (e_{rr}^2 + 2e_{r\varphi}^2 - e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - e_{rr}e_{\varphi\varphi})Q^{\frac{n}{2}-1}, \\ \frac{\partial e_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= e_{r\varphi} \frac{\partial^2\theta}{\partial r\partial t} \frac{r(e_{\varphi\varphi} - 1)}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} + Bn \frac{\sigma_{r\varphi}}{e_{r\varphi}} (e_{\varphi\varphi}^2 + 2e_{r\varphi}^2 + e_{rr} - e_{\varphi\varphi} - e_{rr}e_{\varphi\varphi})Q^{\frac{n}{2}-1}, \\ \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} &= -\frac{\partial^2\theta}{\partial r\partial t} \frac{r(e_{\varphi\varphi} - 1)^2}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} + Bn \frac{\sigma_{r\varphi}}{e_{r\varphi}} (e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2)Q^{\frac{n}{2}-1},\end{aligned}$$

$$Q = \sigma_{r\varphi}^2 \left(4 + \left(\frac{(e_{rr} - e_{\varphi\varphi})}{e_{r\varphi}} \right)^2 \right)$$

с неизвестными $p_{r\varphi}, p_{rr}, p_{\varphi\varphi}, e_{r\varphi}, e_{rr}, e_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\varphi}$ и θ . Эта система замыкается последним уравнением из (3) и соотношением $\sigma_{r\varphi} = \frac{c(t)}{r^2}$ и может быть проинтегрирована численно с использованием конечно-разностной схемы.

Пусть закручивающий момент сначала увеличивается по абсолютной величине ($0 \leq t \leq t_1$), затем уменьшается ($t_1 \leq t \leq t_2$) и далее становится постоянным ($t_2 \leq t$). Тогда функцию $c(t)$ зададим, например, в следующем виде (рис. 1):

$$\begin{cases} c(t) = -tr_0^2(2\sqrt{P_{\max}} - t), & 0 \leq t \leq t_2, \\ c(t) = -t_2r_0^2(2\sqrt{P_{\max}} - t_2), & t_2 \leq t. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $P_{\max} < k$ – максимальное значение закручивающего момента, $t_1 = 2\sqrt{P_{\max}}$.

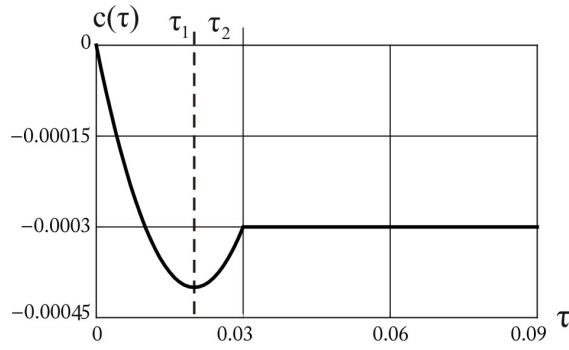


Рис. 1. Нагружающие усилие на $r = r_0$

На рис. 2–4 приведены графики распределения в зависимости от радиуса обратимых и необратимых деформаций и напряжений в моменты времени t_1 , t_2 и $t_3 > t_2$, на рис. 5 – зависимость необратимых деформаций от времени при $r = r_0$.

Расчеты проводились в безразмерных переменных

$$\tilde{r} = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu} \quad (7)$$

при значении постоянных

$$\frac{k}{\mu} = 0.003, \quad \frac{b}{\mu} = 4, \quad \frac{\chi}{\mu} = 80, \quad \frac{r_0}{R} = 0.5, \quad n = 3, \quad \frac{BnR\mu^{n-1}\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\mu}} = 3.5. \quad (8)$$

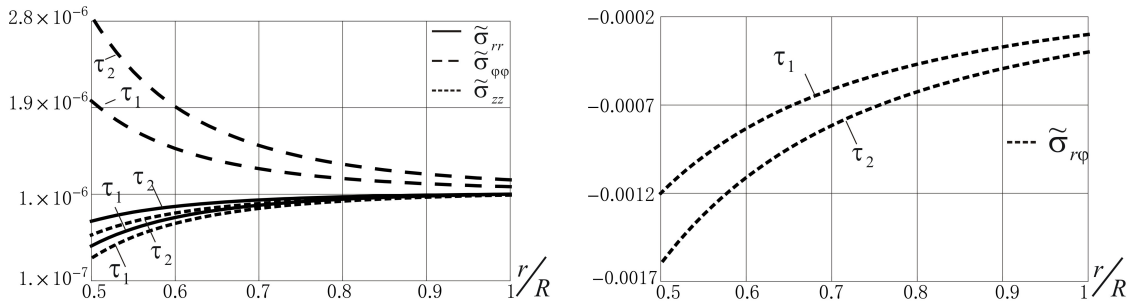


Рис. 2. Распределение напряжений в зависимости от радиуса

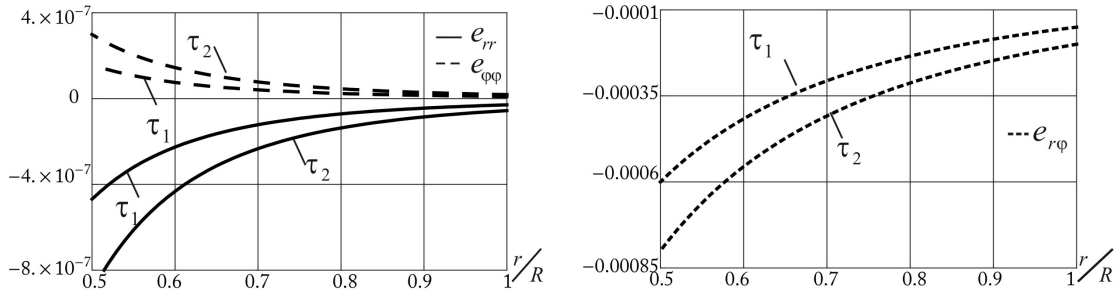


Рис. 3. Распределение обратимых деформаций в зависимости от радиуса

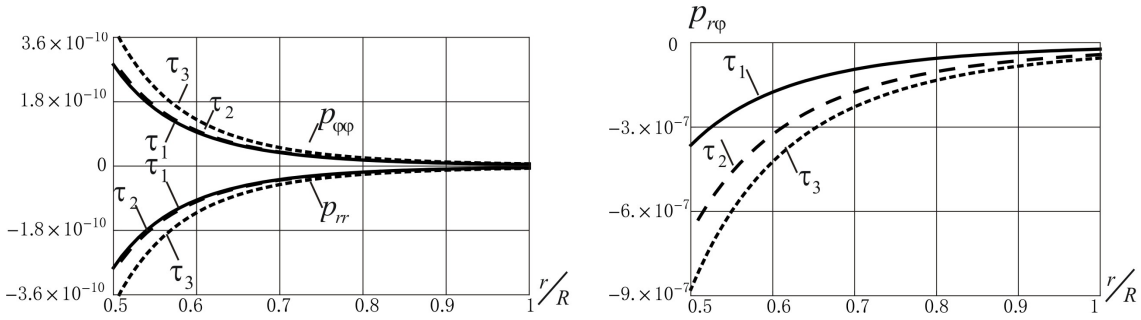


Рис. 4. Распределение необратимых деформаций в зависимости от радиуса

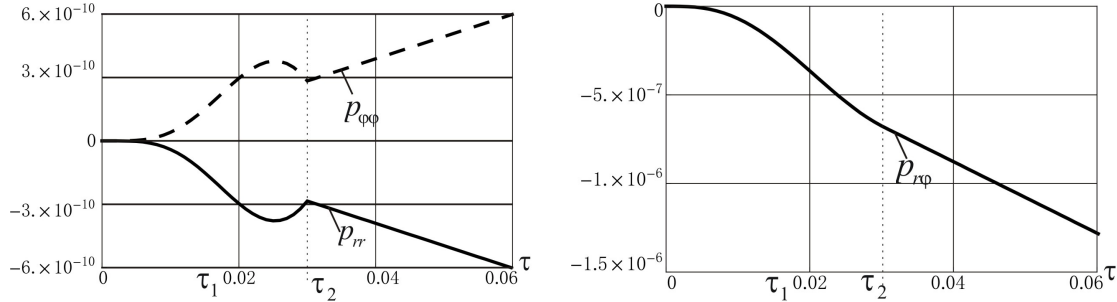


Рис. 5. Необратимые деформации при $r = r_0$

Если в законе нагружения задать $P_{\max} > k$, то в некоторый момент времени на внутренней поверхности $r = r_0$ выполнится условие пластичности, при дальнейшем повороте жесткого цилиндра будет развиваться область пластического течения. В рассматриваемом случае оказалось невозможным использовать теорию идеальной пластичности. Классическое условие Треска (6) в нашем случае записывается в виде

$$((\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + 4\sigma_{r\varphi}^2) = 4k^2.$$

Согласно формулам Мурнагана компонента напряжений $\sigma_{r\varphi}$ имеет первый порядок малости по обратимым деформациям, а разность $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}$ — второй. Тогда согласно (5) следует, что соотношение условий пластичности не может выполняться сразу во всей пластической области. Таким образом, приходим к необходимости введения в модель дополнительных параметров. Указанную трудность можно преодолеть, например, вводом вязкости. Учёт вязкости на стадии пластического течения представляет интерес для дальнейшего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Norton, F. N.* The creep steel of high temperature / F. N. Norton. — Y. : Mc Graw Hill, 1929. — 110 с.
- [2] *Бажин, А. А.* О ползучести и релаксации напряжений в окрестности микроструктуры в условиях гидростатического нагружения и разгрузки / А. А. Бажин, Е. В. Мурашкин // ДАН. — 2012. — № 6. — Т. 445. — С. 640–642.
- [3] *Буренин, А. А.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // ДАН. — 1996. — № 2. — Т. 347. — С. 199–201.
- [4] *Знаменский, В. А.* Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах / В. А. Знаменский, Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1963. — № 6. — С. 114–118.
- [5] *Ковтанюк, Л. В.* О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов / Л. В. Ковтанюк, А. В. Шитиков // Вестник ДВО РАН. — 2006. — № 4. — С. 87–93.

Бегун Александра Сергеевна,

кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории необратимого деформирования, Институт автоматике и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: asustinova@mail.ru

Ковтанюк Лариса Валентиновна,

доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией необратимого деформирования, Институт автоматике и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: lk@iacp.dvo.ru

Лемза Александр Олегович,

аспирант, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

e-mail: al-fencer@mail.ru

A. S. Begun, L. V. Kovtaniuk, A. O. Lemza

IRREVERSIBLE DEFORMATION OF THE MATERIAL BETWEEN THE RIGID COAXIAL CYLINDERS UNDER CREEP

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

Far Eastern Federal University

Abstract. The deformation of the elasticity-creep material between two the rigid cylinders is analyzed. The mathematical model of large deformation is used, which is based on the differential definitions for reversible and irreversible deformations. The field displacements, stresses, reversible, irreversible and total strains are calculated.

Keywords: elasticity, viscoplasticity, large deformations, residual stresses.

REFERENCES

- [1] *Norton, F. N.* The creep steel of high temperature / F. H. Norton. — Y. : Mc Graw Hill, 1929. — 110 с.
- [2] *Bazhin, A. A.* Creep and stress relaxation in the vicinity of a micropore under the conditions of hydrostatic loading and unloading / A. A. Bazhin, E. V. Murashkin // DAN. — 2012. — № 6. — Т. 445. — P. 640–642.
- [3] *Burenin, A. A.* A Simple Model of Finite Strains in an Elastoplastic Medium / A. A. Burenin, G. V. Bykovtsev, and L. V. Kovtanyuk // Dokl. Akad. Nauk. — 1996. — Vol. 347. — № 2. — P. 199–201.
- [4] *Znamenskii, V. A.* On the equations a viscoplastic body with piecewise-linear potentials / V. A. Znamenskii, D. D. Ivlev // Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekhanika Mashinostroenie. — 1963. — № 6. — P. 114–118.
- [5] *Kovtanyuk, L. V.* On the theory of large elastoplastic deformations of materials with the temperature and rheological effects taken into account / L. V. Kovtanyuk, A. V. Shitikov // Vestnik Dal'nevostochn. Otd. Ross. Akad. Nauk. — 2006. — № 4. — P. 87–93.

Begun, Aleksandra Sergeevna

Candidate of Phys.&Math., Junior Researcher, Laboratory of Irreversible Deformation, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Kovtaniuk, Larisa Valentinovna

Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Laboratory of Irreversible Deformation, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Lemza, Aleksandr Olegovich

Postgraduate student, Far Eastern Federal University, Vladivostok

М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БОРЕЛЯ В КЛАССЕ КВАЗИЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ¹

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН

Аннотация. Вводится класс W квазицелых функций и исследуются свойства преобразования Бореля в этом классе. Квазицелые функции экспоненциального типа впервые были рассмотрены А. Пфлюгером в 1935 г. [2]. Более поздние работы в этом направлении нам не известны. Выделение из класса целых функций экспоненциального типа подкласса W функций, суммируемых с квадратом на вещественной оси, позволило Пэли и Винеру получить фундаментальные результаты в теории интеграла Фурье, которые стали затем очень сильным инструментом в теории базиса функций [3]. Подкласс W для квазицелых функций экспоненциального типа вводится так же, как и для целых функций, т. е. к этому подклассу отнесены квазицелые функции, суммируемые с квадратом на вещественной оси. В теории целых функций экспоненциального типа целая функция представляется как преобразование Бореля от некоторой функции, определенной на комплексной плоскости и аналитической вне некоторого круга, по которому берется соответствующий интеграл [3], [4]. Если целая функция принадлежит к классу W , то окружность, по которой происходит интегрирование, можно прижать к отрезку мнимой оси, совпадающему с диаметром окружности. При этом преобразование Бореля превращается в обычное преобразование Фурье на отрезке. Таким путем Пэли и Винеру удалось связать преобразование Фурье на отрезке с мощным аппаратом теории аналитических функций. Для квазицелых функций экспоненциального типа возникает похожая ситуация. Но здесь, для того чтобы сделать функцию, ассоциированную по Борелю с рассматриваемой квазицелой функцией, однозначной, приходится рассматривать ее на римановой поверхности логарифма, где она аналитична вне некоторой спирали определенного радиуса. Если теперь потребовать, чтобы квазицелая функция была суммируемой с квадратом на вещественной оси, то (как и в теории Пэли и Винера) спираль можно прижать к бесконечной системе отрезков, расположенных на мнимой оси на листах римановой поверхности логарифма один над другим. Следующий шаг в построении теории заключается в том, чтобы от римановой поверхности логарифма перейти к обычной комплексной плоскости с одним разрезом на мнимой оси (как в теории Пэли и Винера) вне которого функция, ассоциированная по Борелю с квазицелой функцией, аналитична. Тогда для обеспечения однозначности этой функции на рассматриваемой плоскости в ней нужно провести соответствующий разрез. Этот разрез, как правило, выбирается совпадающим либо с отрицательной, либо с положительной частью вещественной оси. Результаты Пэли-Винера получаются из теории как частный случай.

¹Статья является дополненным и исправленным вариантом работы [1], которая, по не зависящим от автора причинам, вышла только в электронном виде.

Поступила 10.08.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-08-00118).

Ключевые слова: преобразование Бореля, целая функция, квазицелая функция.

УДК: 517.53

Класс W квазицелых функций

Квазицелую функцию экспоненциального типа $G(\lambda)$ ($\lambda = \xi + i\zeta$, $\lambda = te^{i\theta}$), т. е. [2] аналитическую и однозначную на римановой поверхности логарифма $\{K(\lambda) : \lambda, 0 < |\lambda| < \infty, |\arg \lambda| < \infty\}$, растущую на бесконечности, как целую функцию экспоненциального типа отнесем к классу W , если ее тип равен 1 и если она удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(\xi)|^2 d\xi < \infty. \tag{1.1}$$

Такое определение класса W для квазицелых функций можно рассматривать как естественное обобщение класса W для целых функций [4].

Через $g(\omega)$ ($\omega = x + iy$, $\omega = ue^{i\phi}$) обозначим функцию, ассоциированную по Борелю [2] с квазицелой функцией $G(\lambda)$. Легко показать (следуя аналогичной выкладке для целых функций [5]), что если квазицелая функция $G(\lambda) \in W$, то функция $g(\omega)$ аналитична и однозначна на римановой поверхности логарифма $\{K(\omega) : \omega, 0 < |\omega| < \infty, |\arg \omega| < \infty\}$, все листы которой разрезаны по отрезкам $\{\bar{\Gamma} : x = 0, |y| \leq 1\}$.

Функции $G(\lambda)$ и $g(\omega)$ удобно рассматривать не на римановых поверхностях логарифма $K(\lambda)$ и $K(\omega)$, а в комплексных плоскостях $C(\lambda)$ и $C(\omega)$, на которых проведены соответствующие разрезы, обеспечивающие однозначность этих функций.

Разрез κ в плоскости $C(\lambda)$ может быть проведен по любому лучу, выходящему из начала координат. Будем считать далее, что он совпадает с отрицательной частью вещественной оси, т. е. $\{\kappa : \zeta = 0, \xi \leq 0\}$.

В качестве разреза в плоскости $C(\omega)$ выберем T -образный разрез T , образованный отрезком мнимой оси $\bar{\Gamma}$ и лучом $\{\ell : y = 0, x \leq 0\}$.

Пусть S произвольный контур, охватывающий разрез T и проходимый в положительном направлении (против часовой стрелки). Тогда в силу свойства (1.1) формулы преобразования Бореля [2] могут быть представлены следующим образом:

$$G(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_S g(\omega) e^{\lambda\omega} d\omega \quad (Re\lambda > 0), \tag{1.2}$$

$$g(\omega) = \begin{cases} \int_0^{\infty} G(\xi) e^{-\xi\omega} d\xi & (Re\omega > 0), \\ -\int_0^{\infty} G(\xi e^{\mp i\pi}) e^{\xi\omega} d\xi & (Re\omega < 0, \frac{\pi}{2} \pm \arg \omega\pi). \end{cases} \tag{1.3}$$

Расположим бесконечные ветви контура S по верхнему и нижнему берегам разреза ℓ и будем стягивать S к разрезу $\bar{\Gamma}$, следуя аналогичным выкладкам в теории целых функций из класса W [3], [4], [5].

Через

$$g_y^*(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} [g(iy + \varepsilon) - g(iy - \varepsilon)] \quad (\varepsilon > 0), \tag{1.4}$$

$\text{supp } g_y^*(y) \in \bar{\Gamma};$

$$g_x^*(-u) = \frac{1}{2\pi i} [g(ue^{-i\pi}) - g(ue^{i\pi})], \tag{1.5}$$

$\text{supp } g_x^*(-u) \in \ell^-$

обозначим скачки функции $g(\omega)$ на разрезах $\bar{\Gamma}$ и ℓ соответственно. Тогда вместо формулы (1.2) получим следующее представление для квазицелых функций $G(\lambda)$:

$$G(\lambda) = G_y(\lambda) + G_x(\lambda) \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0), \quad (1.6)$$

где функции

$$G_y(\lambda) = \int_{-1}^1 g_y^*(y) e^{i\lambda y} dy \quad (\lambda \in C(\lambda)), \quad (1.7)$$

$$G_x(\lambda) = \int_0^{\infty} g_x^*(-u) e^{-\lambda u} du \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0) \quad (1.8)$$

(функция $G_x(\lambda)$, очевидно, аналитически продолжаются во всю область аналитичности и однозначности $C(\lambda)/\ell$).

С помощью второго равенства (1.3) и в соответствии с определением (1.5) функции $g_x^*(-u)$ легко получить формулу обращения интеграла (1.8)

$$g_x^*(-u) = \int_0^{\infty} G_x^*(-t) e^{-tu} dt \quad (u > 0), \quad (1.9)$$

где через

$$G_x^*(-t) = \frac{1}{2\pi i} [G_x(te^{-i\pi}) - G_x(te^{i\pi})] \quad (1.10)$$

обозначен скачок функции $G_x(\lambda)$ на разрезе κ .

Рассмотрим интегралы (1.7)–(1.9). В силу двойственности Пэли–Винера [4], [5] функция $G_y(\lambda)$ удовлетворяет условию (1.1) тогда и только тогда, когда $g_y^*(y) \in L_2(\Gamma)$.

Подобным свойством обладает и пара функций $G_x(\lambda)$, $g_x^*(-u)$. А именно функция $G_x(\xi) \in L_2(0, \infty)$ тогда и только тогда, когда $g_x^*(-u) \in L_2(\ell)$. В самом деле, если функция $G_x(\xi) \in L_2(0, \infty)$, то и $G_x^*(-t) \in L_2(0, \infty)$. На основании формулы (1.9) и предельных соотношений для преобразования Лапласа [6] заключаем, что тогда функция $g_x^*(-u) \in L_2(\ell)$. Причем, так как функция $G_x(\lambda)$ имеет не более чем логарифмическую особенность в начале координат и, следовательно, функция $G_x^*(-t)$ ограничена в нуле, то функция $g_x^*(-u)$ убывает на бесконечности, по крайней мере, как $|u|^{-1}$. Обратное утверждение устанавливается так же, только на основании формулы (1.8).

Как отмечалось выше, разрезы κ и ℓ , обеспечивающие однозначность функций $G(\lambda)$ и $g(\omega)$, вообще могут быть проведены по любым лучам, выходящим из начала координат в комплексных плоскостях $C(\lambda)$ и $C(\omega)$ соответственно. В частности, если разрез ℓ направить по лучу $x \geq 0$, а разрез κ — по лучу $\xi \geq 0$, то для функции $G_x(\lambda)$ вместо (1.8) можно получить следующее представление (интеграл берется по лучу $ue^{i\pi}$):

$$G_x(\lambda) = \int_0^{\infty e^{i\pi}} g_x^*(u) e^{-\lambda u e^{i\pi}} d(ue^{i\pi}) \quad (\operatorname{Re} \lambda < 0). \quad (1.11)$$

Здесь

$$g_x^*(u) = \frac{1}{2\pi i} [g(u) - g(ue^{2\pi i})], \quad \operatorname{supp} g_x^*(u) \in [0, \infty) \quad (1.12)$$

— скачок функции $g(\omega)$ на разрезе $x \geq 0$.

Формула обращения интеграла (1.11) на этот раз получается с помощью первого равенства (1.3)

$$g_x^*(u) = \int_0^\infty G_x^*(t)e^{-tu}dt \quad (u > 0), \quad (1.13)$$

где

$$G_x^*(t) = \frac{1}{2\pi i} [G_x(te^{2\pi i}) - G_x(t)] \quad (1.14)$$

— скачок функции $G_x(\lambda)$ на разрезе $\xi \geq 0$.

Ясно, что пара функций $G_x(\lambda)$ и $g_x^*(u)$ (1.11) обладают следующим свойством (аналогичным установленному выше для пары функций $G_x(\lambda)$ и $g_x^*(-u)$ (1.8)): $G_x(\xi) \in L_2(-\infty, 0)$ тогда и только тогда, когда $g_x^*(u) \in L_2(0, \infty)$.

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Лемма. *Квазицелая функцию минимального типа $G_x(\lambda)$ удовлетворяет условию (1) тогда и только тогда, когда функция, ассоциированная с ней по Борелю, имеет суммируемые с квадратами скачки $g_x^*(-u) \in L_2(\ell)$, $g_x^*(u) \in L_2(0, \infty)$.*

Так как квазицелую функцию из класса W можно представить в виде суммы целой функции из класса W и квазицелой функции минимального типа (удовлетворяющей условию (1.1)), то на основе теоремы Пэли-Винера и леммы получаем следующую теорему.

Теорема. *Для того чтобы квазицелая функция $G(\lambda) \in W$ необходимо и достаточно, чтобы ассоциированная с ней по Борелю функция $g(\omega)$ имела суммируемые с квадратами скачки (1.4), (1.5) и (1.12).*

Замечание 1. *В соответствии с формулой (1.2), когда контур S стягивается к разрезу $\bar{\Gamma}$, целая функция $G_y(\lambda)$ может быть представлена в виде*

$$G_y(\lambda) = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1+r}^{1+r} q_y^*(y)e^{i\lambda y} dy + \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_+} q(\omega)e^{\lambda\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_-} q(\omega)e^{\lambda\omega} d\omega \right\}. \quad (1.15)$$

Контурные интегралы берутся по окружностям c_+ и c_- малого радиуса $r > 0$, охватывающим соответствующие концы $y = \pm 1$ отрезка $\bar{\Gamma}$. Если квазицелая функция $G(\lambda) \in W$, то функция $g(\omega)$ имеет особенности логарифмического типа на концах отрезка $\bar{\Gamma}$, и, следовательно, в этом случае контурные интегралы равны нулю. Если же квазицелая функция $G(\lambda) \notin W$, но не более чем степенного роста на вещественной оси, то ассоциированная с ней по Борелю функция $g(\omega)$ имеет степенные особенности в точках $\{x = 0, y = \pm 1\}$. В этом случае функция $g_y^*(y)$ имеет в точках $y = \pm 1$ разрывы типа δ -функций или ее производных (порядок которых зависит от скорости роста на бесконечности функции $G(\xi)$). Эти утверждения вполне аналогичны известным в теории целых функций экспоненциального типа [7].

Замечание 2. *В теории целых функций аналога леммы нет. Точнее, не существует целой функции минимального типа со свойством (1.1).*

Функция $g(\omega)$, ассоциированная по Борелю с квазицелой функцией $G(\lambda) \in W$, полностью определяется по своим скачкам (1.4), (1.5) (или (1.12)) на разрезе T следующим образом:

$$g(\omega) = g_y(\omega) + g_x(\omega) \quad (\omega \in C(\omega)T), \quad (1.16)$$

где

$$g_y(\omega) = - \int_{-1}^1 \frac{g_y^*(y)}{iy - \omega} dy \quad (\omega \in C(\omega)\bar{\Gamma}), \quad (1.17)$$

$$g_x(\omega) = \int_0^\infty \frac{g_x^*(-u)}{u + \omega} du \quad (\omega \in C(\omega)\ell). \quad (1.18)$$

Представление (1.16) получается в результате подстановки равенства (1.6) в формулу (1.3).

Квазицелая функция минимального типа $G_x(\lambda)$ также определяется по своим скачкам $G_x^*(-t)$ или $G_x^*(t)$. В частности, подставляя (1.9) в (1.8), получим

$$G_x(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{G_x^*(-t)}{\lambda + t} dt. \quad (1.19)$$

2. Равенства типа Парсеваля

Пусть функция $h^*(y) \in L_2(-\infty, \infty)$ (носитель функции $h^*(y)$, вообще говоря, может быть любым), а $H(\xi) \in L_2(-\infty, \infty)$ — ее преобразование Фурье. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} h(u) &= \int_0^{\infty} H(\xi) e^{-\xi u} d\xi \quad (u > 0), \\ h(-u) &= - \int_{-\infty}^0 H(\xi) e^{\xi u} d\xi \quad (u > 0). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Тогда имеется следующее равенство типа Парсеваля, которое получается на основании формулы (1.8) и первой формулы (2.1):

$$\int_0^{\infty} g_x^*(-u) \overline{h(u)} du = \int_0^{\infty} G_x(\xi) \overline{H(\xi)} d\xi. \quad (2.2)$$

Примем в (1.11) $\lambda = \xi$ и заменим интегрирование по лучу $ue^{i\pi}$ интегрированием по переменной $u \geq 0$. Тогда получим

$$G_x(-\xi) = - \int_0^{\infty} g_x^*(u) e^{\xi u} du \quad (\xi < 0). \quad (2.3)$$

Пользуясь формулой (2.3) и второй формулой (2.1), установим еще одно равенство типа Парсеваля:

$$\int_0^{\infty} g_x^*(u) \overline{h(-u)} du = \int_{-\infty}^0 G_x(-\xi) \overline{H(\xi)} d\xi. \quad (2.4)$$

Складывая равенства (2.2) и (2.4) и переходя от переменной интегрирования $u \geq 0$ к переменной x , определенной на всей вещественной оси, получим равенство типа Парсеваля вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_x^*(-x) \overline{h(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(|\xi|) \overline{H(\xi)} d\xi. \quad (2.5)$$

Отсюда в силу обычного равенства Парсеваля для функций, интегрируемых с квадратами, следует равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_x^*(-x) \overline{h(x)} dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} g_x(y) \overline{h^*(y)} dy. \quad (2.6)$$

Заметим, что здесь через $g_x(y)$ обозначено преобразование Фурье функции $G_x(|\xi|)$.

Складывая равенство (2.6) с известным равенством Парсеваля

$$2\pi \int_{-1}^1 g_y^*(y) \overline{h^*(y)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(\xi) \overline{H(\xi)} d\xi, \quad (2.7)$$

приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} g_x^*(-x) \overline{h(x)} dx + 2\pi \int_{-1}^1 g_y^*(y) \overline{h^*(y)} dy = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} [G_y(\xi) + G_x(|\xi|)] \overline{H(\xi)} d\xi, \end{aligned} \quad (2.8)$$

из которого на основании (2.6) получаем следующее равенство типа Парсеваля:

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} [g_y^*(y) + g_x(y)] \overline{h^*(y)} dy = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} [G_y(\xi) + G_x(|\xi|)] \overline{H(\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $G(\xi) = ReG(\xi)$ при $\xi \geq 0$ и что функция $ReG(\xi)$ четна. Тогда $G_y(\xi) + G_x(|\xi|) = ReG(\xi)$ и равенство (2.9) приобретает следующий, более компактный вид:

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} [g_y^*(y) + g_x(y)] \overline{h^*(y)} dy = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} Re[G(\xi)] \overline{H(\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Рассмотрим важные частные случаи полученных равенств типа Парсеваля.

1. Пусть функция $h^*(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\lambda y}$, где λ — вещественный параметр. Тогда $H(\xi) = \delta(\xi - \lambda)$ — образ Фурье этой функции, а функции $h(u)$ и $h(-u)$, согласно определениям (2.1), равны

$$h(u) = \begin{cases} e^{-\lambda u} (\lambda > 0), \\ 0 (\lambda < 0), \end{cases} \quad h(-u) = \begin{cases} -e^{\lambda u} (\lambda < 0), \\ 0 (\lambda > 0). \end{cases} \quad (2.11)$$

В этом случае равенства типа Парсеваля (2.2) и (2.4) превращаются в формулы (1.8) и (2.3) соответственно, а из равенства (2.10) получаем следующую важную формулу:

$$ReG(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} [g_y^*(y) + g_x(y)] e^{i\lambda y} dy. \quad (2.12)$$

Перейдем в соотношениях (2.11) от переменной $u \geq 0$ к переменной x , определенной на всей вещественной оси. Полученную функцию $h(x)$ обозначим через $E(\lambda x)$. Она, очевидно, равна

$$E(\lambda x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} (\lambda, x > 0), \\ -e^{-\lambda x} (\lambda, x < 0). \end{cases} \quad (2.13)$$

Тогда, пользуясь равенством (2.8), получим другое представление для функции $ReG(\lambda)$:

$$ReG(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g_x^*(-x) E(\lambda x) dx + \int_{-1}^1 g_y^*(y) e^{i\lambda y} dy. \quad (2.14)$$

2. Пусть функция $H(\xi) = e^{-\xi\omega}$. По формуле (2.1) находим $h(u) = (u + \omega)^{-1}$. На основе равенства типа Парсеваля (2.2) получаем

$$\begin{aligned}
g_x(\omega) &= \int_0^{\infty} \frac{g_x^*(-u)}{u+\omega} du = \\
&= \int_0^{\infty} G_x(\xi) e^{-\xi\omega} d\xi \quad (\operatorname{Re}\omega > 0).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Очевидно, что интеграл, стоящий слева в равенстве (2.15), является аналитическим продолжением интеграла, стоящего справа, во всю область аналитичности и однозначности функции $g_x(\omega)$.

3. Примеры

Приведем несколько простых и важных примеров преобразования Бореля в классе квазицелых функций.

1. $G_x(\lambda) = \ln \lambda$ — квазицелая функция минимального типа. По формуле (1.3) находим функцию, ассоциированную с ней по Борелю:

$$g_x(\omega) = \int_0^{\infty} \ln t e^{-t\omega} dt = -\frac{\ln \omega + \gamma}{\omega} \quad (\operatorname{Re}\omega > 0). \tag{3.1}$$

Здесь $\gamma = e^C$ (C — постоянная Эйлера). Функция $g_x(\omega)$, очевидно, аналитически продолжается во всю область аналитичности и однозначности $C(\omega) \setminus \ell$ (для определенности считаем, что разрез ℓ направлен по лучу $x \leq 0$).

Восстановим функцию $\ln \lambda$. С этой целью рассмотрим следующий интеграл, взятый по контуру, охватывающему разрез ℓ , и составленный из окружности c_r малого радиуса r с центром в начале координат и двух лучей, проведенных по верхнему и нижнему берегам разреза ℓ :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-r} g_x(ue^{-i\pi}) e^{\lambda ue^{-i\pi}} d(ue^{-i\pi}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-r} g_x(ue^{i\pi}) e^{\lambda ue^{i\pi}} d(ue^{i\pi}) + \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_r} g(\omega) e^{\lambda\omega} d\omega = \int_r^{\infty} g_x^*(-u) e^{-\lambda u} du - \\
&- \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln r + i\phi + \gamma) d\phi = - \int_r^{\infty} \frac{e^{-\lambda u}}{u} du - (\ln r + \gamma) = \operatorname{Ei}(-\lambda r) - (\ln r + \gamma).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь через $g_x^*(-u) = -\frac{1}{u}$ обозначен скачок (1.5) функции $g_x(\omega)$ на разрезе $ue^{i\pi} \leq r$, а через $\operatorname{Ei}(-\lambda r)$ — интегральная показательная функция. Переходя в (3.2) к пределу при $r \rightarrow 0$ (на основе асимптотического представления [8] для функции $\operatorname{Ei}(-\lambda r)$), получим искомую функцию $\ln \lambda$.

Скачок $g_x^*(-u)$ функции $g_x(\omega)$ на всем разрезе ℓ можно представить в смысле обобщенных функций следующим образом:

$$g_x^*(-u) = - \left(\frac{1}{u} + \gamma \delta(u) \right). \tag{3.3}$$

Подставив (3.3) в формулу (1.8), получим квазицелую функцию $\ln \lambda$, а подстановка (3.3) в формулу (1.18) дает функцию $g_x(\omega)$ (3.1), определенную во всей области $C(\omega) \setminus \ell$.

2. Пусть $G_x(\lambda+a)$ ($a > 0$ вещественное) — квазицелая функция минимального типа с точкой ветвления $\lambda = -a$. Обозначим $g_{ax}(\omega)$ функцию, ассоциированную по Борелю с $G_x(\lambda+a)$. По формуле (1.3) находим

$$g_{ax}(\omega) = \int_{-a}^{\infty} G_x(\xi+a) e^{-\xi\omega} d\xi = e^{a\omega} g_x(\omega) \tag{3.4}$$

($\operatorname{Re}\omega > 0$),

где $g_x(\omega)$ — функция, ассоциированная по Борелю с квазицелой функцией $G_x(\lambda)$, имеющей точку ветвления в начале координат. Поскольку функция $g_x(\omega)$ аналитична и однозначна в области $C(\omega) \setminus \ell$, то и функция $g_{ax}(\omega)$ аналитична и однозначна в этой же области.

Учитывая равенство (3.4), на основании формулы (1.18) получим следующее представление функции $g_x(\omega)$ в области $C(\omega) \setminus \ell$:

$$g_{ax}(\omega) = e^{a\omega} \int_0^{\infty} \frac{g_x^*(-u)}{u + \omega} d\omega, \quad (3.5)$$

где $g_x^*(-u)$ — скачок функции $g_x(\omega)$ на разрезе ℓ . Кроме того, из равенства (3.4) сразу следует формула для скачка функции $g_{ax}(\omega)$ на разрезе ℓ :

$$g_{ax}^*(-u) = e^{-au} g_x^*(-u). \quad (3.6)$$

Пусть, например, функция $G_x(\lambda + a) = \ln(\lambda + a)$. Тогда функция, ассоциированная с ней по Борелю,

$$g_{ax}(\omega) = -e^{-a\omega} \frac{\ln \omega + \gamma}{\omega} \quad (\omega \in C(\omega) \setminus \ell), \quad (3.7)$$

а скачок функции (3.7) на разрезе ℓ равен

$$g_{ax}^*(-u) = -e^{-au} \left(\frac{1}{u} + \gamma \delta(u) \right). \quad (3.8)$$

3. Пусть функция $G_x(t) = \ln |a + t|$ — вещественная часть квазицелой функции $\ln(a + t)$ ($a > 0$ вещественное). Интегрируя по частям, найдем

$$g_{ax}(\omega) = \int_0^{\infty} \ln |a + t| e^{-t\omega} dt = \frac{\ln a - e^{-a\omega} \text{Ei}(-a\omega)}{\omega} \quad (\text{Re} \omega > 0). \quad (3.9)$$

Функция $g_{ax}(\omega)$, очевидно, аналитически продолжается во всю область аналитичности и однозначности $C(\omega) \setminus \ell$ и асимптотически равна при $|\omega| \rightarrow 0$ функции (3.7). Следовательно, скачки этих функций на разрезе ℓ совпадают, то есть одному скачку (3.8) соответствуют две разные функции (3.7) и (3.9). На самом деле функции (3.7) и (3.9) определяются по разным формулам: функция (3.7) — по формуле (3.5), а функция (3.9) получается подстановкой (3.8) в формулу (1.8). Заметим, что функции (3.7) и (3.9) отличаются на целую функцию.

4. Функция $G_x(t) = \ln |a - t|$ — вещественная часть квазицелой функции $\ln(a - t)$. По формуле (1.3) находим

$$g_{ax}(\omega) = \frac{\ln a - e^{-a\omega} \text{Ei}^*(a\omega)}{\omega} \quad (\omega \in C(\omega) \setminus \ell), \quad (3.10)$$

$\text{Ei}^*(a\omega)$ — интегральная показательная функция [8]. При $|\omega| \rightarrow 0$ имеется асимптотическое равенство

$$g_{ax}(\omega) \approx -e^{-a\omega} \frac{\ln \omega + \gamma}{\omega}. \quad (3.11)$$

Следовательно, скачок функции (3.10) на разрезе ℓ равен

$$g_{ax}^*(-u) = -e^{au} \left(\frac{1}{u} + \gamma \delta(u) \right). \quad (3.12)$$

5. Рассмотрим функцию $G_x(t) = \ln |a^2 - t^2|$ — вещественную часть квазицелой функции $\ln(a^2 - t^2)$.

Ясно, что функция, ассоциированная с ней по Борелю, равна сумме функций (3.9) и (3.10), а ее скачок на разрезе ℓ — сумме скачков (3.8) и (3.12). Учитывая это и приняв в равенстве (2.6) функцию $h^*(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-ity}$, получим следующие две формы представления функции $\ln|a^2 - t^2|$:

$$\ln|a^2 - t^2| = \int_{-\infty}^{\infty} g_{ax}^*(-x)E(tx) dx, \quad (3.13)$$

где функция

$$g_{ax}^*(-x) = \begin{cases} -2\left(\frac{1}{x} + \gamma\delta(x)\right) \cosh ax & (x > 0), \\ 2\left(\frac{1}{x} + \gamma\delta(x)\right) \cosh ax & (x < 0) \end{cases} \quad (3.14)$$

и

$$\ln|a^2 - t^2| = - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\cos ay}{|y|} + 2\gamma\delta(y) \right] e^{ity} dy. \quad (3.15)$$

6. Пусть теперь $P(\lambda) = e^{i\lambda} \ln \lambda$ — квазицелая функция экспоненциального типа, равного 1. Она аналитична и однозначна в области $C(\lambda) \setminus \kappa$ (напомним, что разрез κ совпадает с полуосью $\xi \leq 0$). Функция $P(\lambda)$ является примером простого и важного класса квазицелых функций, представимых в виде произведения целой функции и квазицелой функции минимального типа. Функция $P(\lambda) \notin W$, так как она не удовлетворяет условию (1.1). Примером квазицелой функции, принадлежащей классу W , может служить, например, функция $\frac{\sin \lambda}{\lambda} \ln(\pi^2 - \lambda^2)$.

По формулам (1.3) найдем функцию, ассоциированную по Борелю с $P(\lambda)$:

$$p(\omega) = \int_0^{\infty} \ln t e^{-(\omega-i)t} dt = -\frac{\ln(\omega-i)+\gamma}{\omega-i} \quad (\operatorname{Re} \omega > 0), \quad (3.16)$$

$$p(\omega) = - \int_0^{\infty} \ln(te^{\mp\pi}) e^{-(-\omega+i)t} dt = \frac{\ln(-\omega+i) \pm i\pi + \gamma}{-\omega+i} \quad (\operatorname{Re} \omega < 0, \frac{\pi}{2} \pm \arg \omega \pi). \quad (3.17)$$

Полагая в формулах (3.16), (3.17) $\omega = \varepsilon + iy$ ($\varepsilon > 0$) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, определим скачок $p_y^*(y)$ (1.4) функции $p(\omega)$ на мнимой оси. В терминах обобщенных функций его можно представить в виде

$$p_y^*(y) = \frac{1}{y-1} - \left(i\frac{\pi}{2} + \gamma\right) \delta(y-1) \quad (0 \leq y \leq 1).$$

По формуле (1.5) найдем скачок функции $p(\omega)$ на луче ℓ :

$$p_x^*(-u) = -\frac{1}{i+u}.$$

Таким образом, функция $p(\omega)$ аналитична и однозначна в комплексной плоскости $C(\omega)$, разрезанной по отрезку мнимой оси $0 \leq y \leq 1$ и лучу ℓ .

Теперь по формулам (1.7), (1.8) можно восстановить целую $P_y(\lambda)$ и квазицелую $P_x(\lambda)$ части функции $P(\lambda)$:

$$P_y(\lambda) = \int_0^1 \left[\frac{1}{y-1} - \left(i\frac{\pi}{2} + \gamma\right) \delta(y-1) \right] e^{i\lambda y} dy = -[\operatorname{Ei}(-i\lambda) - \ln \lambda] e^{i\lambda} \quad (\lambda \in C(\lambda)),$$

$$P_x(\lambda) = - \int_0^{\infty} \frac{1}{u+i} e^{-\lambda u} du = \text{Ei}(-i\lambda)e^{i\lambda}$$

$$(\lambda \in C(\lambda) \setminus \kappa).$$

Аналогично рассмотрим другую квазицелую функцию $Q(\lambda) = e^{-i\lambda} \ln \lambda \notin W$. Ассоциированная с ней по Борелю функция $q(\omega)$ имеет вид

$$q(\omega) = - \frac{\ln(\omega + i) + \gamma}{\omega + i}.$$

Ясно, что она будет аналитична и однозначна в комплексной плоскости $C(\omega)$, разрезанной по отрезку мнимой оси $-1 \leq y \leq 0$ и лучу ℓ .

Точно так же восстановим целую и квазицелую составляющие квазицелой функции $Q(\lambda)$:

$$Q_y(\lambda) = - [\text{Ei}(i\lambda) - \ln \lambda] e^{-i\lambda} \quad (\lambda \in C(\lambda)),$$

$$Q_x(\lambda) = \text{Ei}(i\lambda)e^{-i\lambda} \quad (\lambda \in C(\lambda) \setminus \kappa).$$

Теперь квазицелую функцию $\frac{\sin \lambda}{\lambda} \ln \lambda \in W$ можно представить в виде суммы (1.6) целой функции из класса W и квазицелой функции минимального типа следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \ln \lambda &= \frac{1}{2i\lambda} [P(\lambda) - Q(\lambda)] = \\ &= \left\{ - \frac{\text{Ei}(-i\lambda)e^{i\lambda} - \text{Ei}(i\lambda)e^{-i\lambda} + i\pi}{2i\lambda} + \frac{\sin \lambda}{\lambda} \ln \lambda \right\} + \frac{\text{Ei}(-i\lambda)e^{i\lambda} - \text{Ei}(i\lambda)e^{-i\lambda} + i\pi}{2i\lambda}. \end{aligned}$$

Здесь (по построению) выражение, стоящее в фигурных скобках, — целая функция из класса W , тогда как последняя дробь представляет собой квазицелую функцию минимального типа, удовлетворяющую условию (1.1) (существование квазицелой функции минимального типа с этим свойством утверждалось приведенной выше леммой).

Ясно, что функция, ассоциированная по Борелю с квазицелой функцией $\frac{\sin \lambda}{\lambda} \ln \lambda$, определяется как сумма функций $p(\omega)$ и $q(\omega)$. Следовательно, она аналитична и однозначна в комплексной плоскости $C(\omega)$, разрезанной по отрезку мнимой оси $-1 \leq y \leq 1$ и лучу ℓ .

4. Обобщения

Пусть квазицелая функция $G(\lambda) \in W$ и $g_\phi(\omega)$ — функция, ассоциированная с ней по Борелю. Будем считать, что разрез ℓ_ϕ , обеспечивающий однозначность функции $g_\phi(\omega)$, совпадает с произвольным лучом $\{re^{i(\phi+\pi)} : r \geq 0, -\pi \leq \phi \leq \pi, \phi \neq \pm \frac{\pi}{2}\}$.

Обозначим через $T_\phi = \ell_\phi \cup \bar{\Gamma}$ разрез, составленный из разрезов ℓ_ϕ и $\bar{\Gamma}$, а S_ϕ — произвольный контур, охватывающий T_ϕ , проходимый в положительном направлении и как угодно близко прижатый к T_ϕ . В этом случае вместо (1.2) получаем следующую формулу:

$$G(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\phi} g_\phi(\omega) e^{\lambda \omega} d\omega \quad (\text{Re} \lambda e^{i\phi} > 0). \quad (4.1)$$

Стягивая в представлении (4.1) контур интегрирования S_ϕ к разрезу T_ϕ и обозначая через

$$g_\phi^*(-ue^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi i} \{g_\phi(ue^{i(\phi-\pi)}) - g_\phi(ue^{i(\phi+\pi)})\}, \quad (4.2)$$

$$\text{supp} g_\phi^*(-ue^{i\phi}) \in \ell_\phi$$

скачок функции $g_\phi(\omega)$ на разрезе ℓ_ϕ , после несложных преобразований получим представление (1.6) функции $G(\lambda)$, в котором целая функция $G_y(\lambda)$ определяется по той же формуле (1.7), а квазицелая функция минимального типа $G_x(\lambda)$ — по формуле

$$G_x(\lambda) = \int_0^{\infty e^{i\phi}} g_\phi^*(-ue^{i\phi}) e^{-\lambda(ue^{i\phi})} d(ue^{i\phi}). \quad (4.3)$$

Эту формулу можно переписать несколько иначе:

$$G_x(\lambda e^{i\phi}) = e^{i\phi} \int_0^{\infty} g_\phi^*(-ue^{i\phi}) e^{-u(\lambda e^{i\phi})} du \quad (\operatorname{Re}(\lambda e^{i\phi}) > 0). \quad (4.4)$$

В частности, принимая в выражении (4.4) $\lambda = te^{-i\phi}$, получим

$$G_x(t) = e^{i\phi} \int_0^{\infty} g_\phi^*(-ue^{i\phi}) e^{-ut} du. \quad (4.5)$$

Из формулы (4.4) при $\phi = 0$ и $\phi = \pi$ соответственно получаются формулы (1.8) и (2.3).

Соединим концы контура интегрирования S_ϕ в формуле (4.1) окружностью бесконечного радиуса и обозначим полученный контур через C_∞ . Так как функция $g_\phi(\omega)$ аналитична всюду в области $C(\omega)T_\phi$, то справедливо равенство

$$G(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\phi} g_\phi(\omega) e^{\lambda\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} g_\phi(\omega) e^{\lambda\omega} d\omega. \quad (4.6)$$

По теореме Коши

$$g_\phi(\omega) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{g_\phi(p)}{p-\omega} dp. \quad (4.7)$$

Воспользуемся представлением

$$-\frac{1}{p-\omega} = e^{i\phi} \int_0^{\infty} e^{(p-\omega)te^{i\phi}} dt. \quad (4.8)$$

Подставляя (4.8) в (4.7), получим

$$\begin{aligned} g_\phi(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} g_\phi(p) \left(e^{i\phi} \int_0^{\infty} e^{(p-\omega)te^{i\phi}} dt \right) dp = \\ &= e^{i\phi} \int_0^{\infty} e^{-\omega te^{i\phi}} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} g_\phi(p) e^{pte^{i\phi}} dp \right) dt. \end{aligned}$$

Замечая, что в скобках в последнем равенстве справа стоит представление (4.6) функции $G(te^{i\phi})$, получим формулу обращения интеграла (4.1):

$$g_\phi(\omega) = e^{i\phi} \int_0^{\infty} G(te^{i\phi}) e^{-te^{i\phi}\omega} dt \quad (\operatorname{Re}(\omega e^{i\phi}) > 0) \quad (4.9)$$

или

$$g_\phi(\omega) = \int_0^{\infty e^{i\phi}} G(te^{i\phi}) e^{-te^{i\phi}\omega} d(te^{i\phi}). \quad (4.10)$$

Получим формулу, выражающую функцию $g_\phi(\omega)$ через ее скачок на разрезе T_ϕ , аналогичную формуле (1.16). Так как функция $g_\phi(\omega)$ аналитична всюду в области $C(\omega) \setminus T_\phi$, то из (4.7) следует

$$g_\phi(\omega) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{S_\phi} \frac{g_\phi(p)}{p - \omega} dp. \quad (4.11)$$

Стягивая контур S_ϕ к разрезу T_ϕ и переходя к скачкам (1.4) и (4.2) функции $g_\phi(\omega)$ на разрезе T_ϕ , получим искомое представление

$$g_\phi(\omega) = -\int_{-1}^1 \frac{g_y^*(y)}{iy - \omega} dy + \int_0^{\infty e^{i\phi}} \frac{g_\phi^*(-ue^{i\phi})}{ue^{i\phi} + \omega} d(ue^{i\phi}) \quad (4.12)$$

$(\omega \in C(\omega) \setminus T_\phi).$

Получим теперь некоторые обобщения равенств типа Парсеваля. Пусть функция $h^*(y) \in L_2(-\infty, \infty)$, а $H(\xi) \in L_2(-\infty, \infty)$ — ее преобразование Фурье. Обозначим

$$h_\phi(ue^{i\phi}) = \int_0^{\infty e^{-i\phi}} H(te^{-i\phi}) e^{-ue^{i\phi}(te^{-i\phi})} d(te^{-i\phi}), \quad (4.13)$$

или несколько иначе

$$h_\phi(ue^{i\phi}) = e^{-i\phi} \int_0^{\infty} H(te^{-i\phi}) e^{-ut} dt. \quad (4.14)$$

Из представлений (4.13) и (4.14), как частные случаи, получаются формулы (2.1).

Будем считать, что $G_x(\lambda)$ — квазицелая функция минимального типа, удовлетворяющая условию (1.1). Воспользовавшись представлением (4.13) функции $h_\phi(ue^{i\phi})$ и формулой (4.4) для функции $G_x(te^{-i\phi})$, в результате простой перемены порядка интегрирования получим равенство типа Парсеваля вида

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty e^{i\phi}} g_\phi^*(-ue^{i\phi}) h_\phi(ue^{i\phi}) d(ue^{i\phi}) = \\ & = \int_0^{\infty e^{-i\phi}} G(te^{-i\phi}) H(te^{-i\phi}) d(te^{-i\phi}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Если пользоваться представлением (4.14) для функции $h_\phi(ue^{-i\phi})$ и формулой (4.5) для функции $G_x(t)$, то равенство типа Парсеваля приобретает вид

$$\begin{aligned} & e^{i\phi} \int_0^{\infty} g_\phi^*(-ue^{i\phi}) h_\phi(ue^{i\phi}) du = \\ & = e^{-i\phi} \int_0^{\infty} G(t) H(te^{-i\phi}) dt. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Из него, как частные случаи при $\phi = 0$ и $\phi = \pi$, получаются равенства типа Парсеваля (2.2) и (2.4) (если считать в них, что функции $h(u)$ и $H(\xi)$ вещественны).

Аналогично могут быть получены другие обобщения.

5. Выводы

Теория преобразования Бореля в классе W квазицелых функций играет фундаментальную роль при решении краевых задач двумерной теории упругости в конечных канонических областях с угловыми точками границы [9], [10].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коваленко, М. Д. О преобразовании Бореля в классе W квазицелых функций / М. Д. Коваленко // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. – № 3. – С. 761–774.
- [2] Pflüger A. Über eine Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reihen // Commentarii Mathem. Helv. – 1935/36. – Vol. 8. – P. 89–129.
- [3] Винер, Н. Преобразование Фурье в комплексной области / Н. Винер, Р. Пэли. – М. : Наука, 1964. – 267 с.
- [4] Ахиезер, Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. – М. : Наука, 1965. – 407 с.
- [5] Левин, Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. – М. : Гостехиздат, 1956. – 632 с.
- [6] Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : ГИФМЛ, 1958. – 678 с.
- [7] Хургин, Я. И. Финитные функции в физике и технике / Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. – М. : Наука, 1971. – 408 с.
- [8] Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 2 т. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1974. – 295 с.
- [9] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 5. – С. 78–98.
- [10] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 5. – С. 136–158.

Коваленко Михаил Денисович,

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

e-mail: kov08@inbox.ru

Меньшова Ирина Владимировна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

e-mail: menshovairina@yandex.ru

M. D. Kovalenko, I. V. Menshova

THE BOREL INTEGRAL TRANSFORMATION IN CLASS OF QUASI ENTIRE FUNCTIONS

Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

Abstract. The W class of quasi-entire functions is introduced and the properties of the Borel transformation in this class are investigated. It has to be noted that quasi-entire functions of exponential type were for the first time considered apparently by A. Pflüger in 1935 [2], and we have not heard of any other works in this field since then. In essence, the Pflüger's work amounted to the construction of an analog of Borel transform for integer function of exponential type. The extraction of sub-class W – square summable functions on real axis – from the class of integer, exponential type functions allowed Paley and Winer to obtain fundamental results for the theory of Fourier integral, which have proven to be a very powerful tool for the theory of function's basis [3]. Subclass W for quasi-entire, exponential type functions is introduced in the same way as it is introduced for entire functions, i.e. it includes quasi-entire functions which are square summable on real axis. The results thus obtained were used as essential input data in the studies of basic properties of Faddeev-Papkovitch functions of the elasticity theory. In the theory of entire, exponential type functions, an entire function is presented as a Borel transform of a function which is defined on a complex plane and is analytical outside a circle over which a corresponding integral is taken [3], [4]. If an entire function belongs to the W class, the circle over which integration is made can be fixed to the segment of imaginary axis which coincides with the circle's diameter. In this case, Borel transform turns into an ordinary Fourier transform on a segment. Following this way, Paley and Winer managed to link Fourier transform on a segment with the powerful apparatus of the theory of analytical functions. For quasi-entire, exponential type functions the situation is basically similar, but in order to ensure single-valuedness of the function, associated by Borel with the considered quasi-entire function, it is necessary to consider it on the Riman logarithmic surface where it is analytical; this time, analyticity is observed outside a spiral with a certain radius. Now, if we require this quasi-entire function to be square summable on real axis, then (like in the theory of Paley and Winer), it will be possible to affix it (which is easy to guess) – this time not to a single segment, but to an infinite system of segments located on imaginary axis on the sheets of the Riman logarithmic surface, one over another. A next step in our theory - building is transition from the Riman logarithmic surface to an ordinary complex plane with a single cross-section on the imaginary axis (like in the Paley and Winer theory), outside which the function, associated by Borel with the quasi-entire function, is analytical. Then, in order to ensure that this function is single-valued over the considered plane, a corresponding cross-section needs to be made in it. Cross-section is usually chosen to coincide either with the negative or with the positive segment of real axis. The results obtained by Paley and Winer represent a specific case within the framework of this theory.

Keywords: Borel transformation, entire function, quasi entire function.

REFERENCES

- [1] *Kovalenko, M. D.* Borel transformations in the class W quasi-functions / M. D. Kovalenko // *Fundamental and Applied mathematics.* – 2001. – № 3. – P. 761–774.
- [2] *Pflüger A.* Über eine Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reihen // *Commentarii Mathem. Helv.* – 1935/36. – Vol. 8. – P. 89–129.

- [3] *Winer, N.* Fourier's transformation in complex area / N. Winer, R. Paley. – М. : Nauka, 1964. – 267 p.
- [4] *Akhiezer, N. I.* Lectures on the theory of approximation / N. I. Akhiezer. – М. : Nauka, 1965. – 407 p.
- [5] *Levin, B. Ya.* Distribution of roots of the whole functions / B. Ya. Levin. – М. : Gostekhizdat, 1956. – 632 p.
- [6] *Lavrentyev, M. A.* Methods of the theory of functions of the complex variable / M. A. Lavrentyev, B. V. Sabbath. – М. : GIFML, 1958. – 678 p.
- [7] *Hurgin, Ya. I.* Finite functions in the physicist and the technician / Ya. I. Hurgin, V. P. Yakovlev. – М. : Nauka, 1971. – 408 p.
- [8] *Beytmen, G.* The highest transcendental functions: in 2 t. T. 2. Bessel's functions, function of the parabolic cylinder, orthogonal polynomials / G. Beytmen, A. Erdey. – М. : Nauka, 1974. – 295 p.
- [9] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on Fadlya – Papkovich's functions in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – № 5. – P. 78–98.
- [10] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on functions Fadlya – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2013. – № 5. – P. 136–158.

Kovalenko, Mikhail Denisovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

Menchova, Irina Vladimirovna

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Senior Research Officer, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

Н. М. Калантарлы

ПРЕДЕЛЬНО-РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОГО КОЛЬЦЕВОГО ДИСКА, ОСЛАБЛЕННОГО ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ КОГЕЗИОННЫХ ТРЕЩИН

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Аннотация. Исследовано предельно-равновесное состояние неравномерно нагретого кольцевого диска, ослабленного системой прямолинейных трещин с концевыми зонами предразрушения. С помощью деформационного критерия разрушения получено соотношение, позволяющее определить критическое значение интенсивности теплового воздействия на диск, при котором происходит рост трещин.

Ключевые слова: неравномерно нагретый кольцевой диск, трещины со связями между берегами, зона предразрушения, сила сцепления.

УДК: 539.375

Введение. Задачи прочности кольцевых дисков весьма актуальны, и, несомненно, интерес к этим задачам будет повышаться в связи с имеющейся тенденцией развития машиностроения и энергетики. Для анализа надежности кольцевых дисков необходимо проводить исследование их напряженно-деформированного состояния и разрушения. Моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния в кольцевых дисках имеют особое прикладное значение, в первую очередь, для правильного выбора их конструкции, оптимальных размеров и допустимых величин рабочих нагрузок. Кольцевые диски часто работают в весьма напряженных условиях. Расчетам кольцевых дисков посвящена обширная литература (см. обзор в монографиях [1], [2]). В настоящей работе используется модель трещины со связями между берегами [3], [4], [5].

Постановка задачи. Рассматривается неравномерно нагретый кольцевой диск, поперечное сечение которого заполняет в плоскости $z = x + iy$ область S , ограниченную круговыми границами L_1 и L , представляющими собой окружности радиуса R_1 и R соответственно. В материале неравномерно нагретого диска имеется N произвольно размещенных прямолинейных трещин с концевыми зонами предразрушения. Требуется определить напряженно-деформированное состояние в кольцевой области S , ослабленной теплоизолированной прямолинейной трещиной с концевыми зонами предразрушения при неравномерном температурном поле. Принято, что имеет место плоское напряженное состояние. Распределение температуры $T(r, \theta)$ по сечению кольцевого диска принято известным из решения задачи теории теплопроводности. Считается, что в концевых зонах предразрушения имеют место силы сцепления материала. Размер концевых зон предразрушения заранее неизвестен, однако сравним с длиной трещины.

Отнесем кольцевой диск к полярной системе координат r, θ с началом координат в центре концентрических окружности L_1 и L . Пусть в центрах прямолинейных термоизолированных

трещин будут начала локальных систем координат $x_k O_k y_k$, оси x_k которых совпадают с линиями трещин и образуют угол α_k ($k = 1, 2, \dots, N$) с осью x ($\theta = 0$) (рис. 1). Под действием тепловой нагрузки в связях, соединяющих берега трещин в концевых зонах предразрушения, будут возникать нормальные q_{y_k} и касательные $q_{x_k y_k}$ усилия. Таким образом, взаимодействие между берегами в концевых зонах предразрушения при тепловой нагрузке характеризуется q_{y_k} и касательными $q_{x_k y_k}$ напряжениями сил сцепления материала. Во внутренней области трещин (вне концевых зон) их берега будут свободны от внешних усилий.

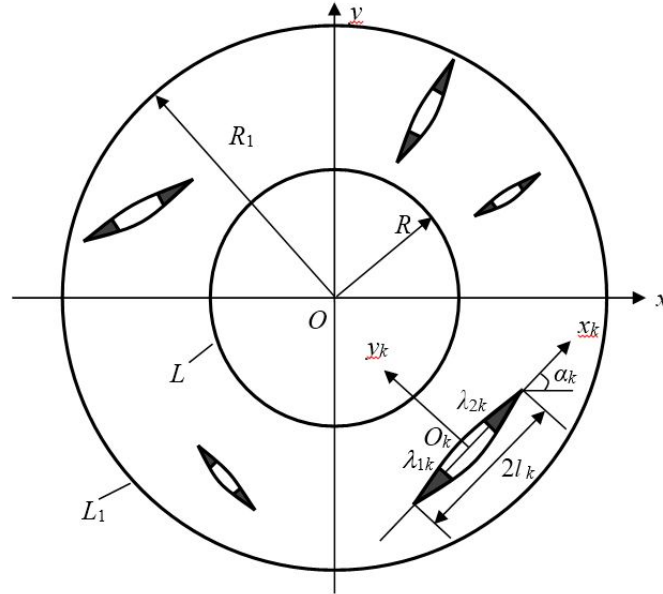


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Для исследования напряжений и деформаций в неравномерно нагретом диске, ослабленном системой трещин с концевыми зонами предразрушения, необходимо решение уравнений термоупругости [6] при следующих граничных условиях:

$$\sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{на } L; \quad \sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{на } L_1, \quad (1)$$

$$\sigma_{y_k} = 0; \quad \tau_{x_k y_k} = 0 \quad \text{на } L' \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

$$\sigma_{y_k} = q_{y_k}; \quad \tau_{x_k y_k} = q_{x_k y_k} \quad \text{на } L''.$$

Здесь L' – совокупность свободных от внешней нагрузки берегов трещин; L'' – совокупность берегов трещин в концевых зонах предразрушения.

Дополнительные уравнения, связывающие перемещения раскрытия берегов концевых зон трещин и усилия в связях, принимаем в виде

$$(v_k^+ - v_k^-) - i(u_k^+ - u_k^-) = \Pi(x_k, \sigma_k) [q_{y_k}(x_k) - i q_{x_k y_k}(x_k)], \quad (3)$$

где $k = 1, 2, \dots, N$; $(v_k^+ - v_k^-)$ и $(u_k^+ - u_k^-)$ – нормальная и касательная составляющая раскрытия берегов k -той зоны предразрушения соответственно; $\Pi(x_k, \sigma_k)$ представляет собой податливость связей, зависящую от натяжения связей, при $\Pi = const$ закон деформирования связей

– линейный; $\sigma_k = \sqrt{q_{y_k}^2 + iq_{x_k y_k}^2}$ – модуль вектора сил сцепления в связях. В общем случае закон деформирования связей является нелинейным и задан.

Для определения значения интенсивности теплового воздействия, при котором происходит рост трещины, нужно постановку задачи дополнить условием развития трещин. В качестве такого условия принимается деформационный критерий разрушения

$$|(v_k^+ - v_k^-) - i(u_k^+ - u_k^-)| = \delta_c, \quad (4)$$

где δ_c – трещиностойкость материала кольцевого диска, определяемая опытным путем. Это дополнительное условие позволяет находить параметры кольцевого диска, при которых трещины растут.

Метод решения краевой задачи. Решение краевой задачи (1), (2) ищем в виде суммы двух решений. Определение первого напряженного состояния $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{r\theta}$ осуществляется с помощью термоупругого потенциала напряжений [6]. Напряженное состояние $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{r\theta}$ не удовлетворяет краевым условиям (1), (2). Поэтому необходимо найти еще второе напряженное состояние $\bar{\bar{\sigma}}_r, \bar{\bar{\sigma}}_\theta, \bar{\bar{\tau}}_{r\theta}$, чтобы сумма этих двух напряженных состояний удовлетворяла граничным условиям (1), (2). Для определения второго напряженного состояния имеем следующие граничные условия:

$$\bar{\bar{\sigma}}_r = -\bar{\sigma}_r, \quad \bar{\bar{\tau}}_{r\theta} = -\bar{\tau}_{r\theta} \quad \text{на } L; \quad \bar{\bar{\sigma}}_\theta = -\bar{\sigma}_\theta, \quad \bar{\bar{\tau}}_{r\theta} = -\bar{\tau}_{r\theta} \quad \text{на } L_1, \quad (5)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{y_k} = -\bar{\sigma}_{y_k}, \quad \bar{\bar{\tau}}_{x_k y_k} = -\bar{\tau}_{x_k y_k} \quad \text{на } L' \quad (6)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{y_k} = -\bar{\sigma}_{y_k}, \quad \bar{\bar{\tau}}_{x_k y_k} = q_{x_k y_k} - \bar{\tau}_{x_k y_k} \quad \text{на } L''.$$

При использовании формулы Колосова – Мусхелишвили [7] краевая задача (5), (6) сводится к определению двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из краевых условий

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau} \Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] = -(\bar{\sigma}_r - i\bar{\tau}_{r\theta}) \quad \text{при } \tau = R e^{i\theta}, \quad (7)$$

$$\Phi(\tau_1) + \overline{\Phi(\tau_1)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}_1 \Phi'(\tau_1) + \Psi(\tau_1)] = -(\bar{\sigma}_r - i\bar{\tau}_{r\theta}) \quad \text{при } \tau_1 = R_1 e^{i\theta},$$

$$\begin{aligned} \Phi(x_k) + \overline{\Phi(x_k)} + x_k \overline{\Phi'(x_k)} + \overline{\Psi(x_k)} &= -(\bar{\sigma}_{y_k}(x_k) - i\bar{\tau}_{x_k y_k}(x_k)) \\ \text{на } L' \quad (k = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Phi(x_k) + \overline{\Phi(x_k)} + x_k \overline{\Phi'(x_k)} + \overline{\Psi(x_k)} = q_{y_k} - iq_{x_k y_k} - (\bar{\sigma}_{y_k}(x_k) - i\bar{\tau}_{x_k y_k}(x_k)) \quad \text{на } L''.$$

Функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, описывающие второе напряженно-деформированное состояние, ищем в виде [7], [8]

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z), \quad (9)$$

где

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k,$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} \frac{g_k(t) dt}{t - z_k},$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N e^{-2i\alpha_k} \int_{-l_k}^{l_k} \left[\frac{\overline{g_k(t)}}{t - z_k} - \frac{\bar{T}_k e^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2} g_k(t) \right] dt,$$

$$T_k = te^{i\alpha_k} + z_k^0, \quad z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0, \quad z_k = e^{-i\alpha_k} (z - z_k^0).$$

Здесь $g_k(x_k)$ – искомые функции, характеризующие раскрытие берегов конечных зон предразрушения в сечении неравномерно нагретого кольцевого диска.

$$g_k(x_k) = \frac{2\mu}{i(1+\kappa)} \frac{\partial}{\partial x_k} [u_k + (x_k, 0) - u_k - (x_k, 0) + i(v_k + (x_k, 0) - v_k - (x_k, 0))] \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (10)$$

Неизвестные искомые функции $g_k(x_k)$ и комплексные потенциалы $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ должны быть определены из краевых условий на берегах зон предразрушения и на контуре $r = R_1$. После некоторых преобразований и вычислений соответствующих интегралов находим

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} \left\{ \left(\frac{1}{z\bar{T}_k - 1} + \frac{1}{2} \right) \bar{T}_k e^{i\alpha_k} g_k(t) + \right. \\ \left. + \left[\frac{T_k}{2} - \frac{z^2 \bar{T}_k - 2z + T_k}{(z\bar{T}_k - 1)^2} \right] e^{-i\alpha_k} \overline{g_k(t)} \right\} dt; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} \left[\frac{e^{i\alpha_k} \bar{T}_k^3}{(z\bar{T}_k - 1)^2} g_k(t) + z^2 \bar{T}_k^2 + 4 - 3z\bar{T}_k + zT_k \bar{T}_k^2 - 3T_k \bar{T}_k + \frac{\bar{T}_k e^{-i\alpha_k}}{(z\bar{T}_k - 1)^3} \overline{g_k(t)} \right] dt.$$

Для отыскания функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ краевые условия (7) записываются в виде

$$\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)] = -(\bar{\sigma}_r - i\bar{\tau}_{r\theta}) - (f_1^*(\theta) - if_2^*(\theta)), \quad \tau = R e^{i\theta}; \quad (12)$$

$$\Phi_0(\tau_1) + \overline{\Phi_0(\tau_1)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi_0'(\tau_1) + \Psi_0(\tau_1)] = -(\bar{\sigma}_r - i\bar{\tau}_{r\theta}), \quad \tau_1 = R_1 e^{i\theta},$$

где

$$f_1^*(\theta) - if_2^*(\theta) = \Phi_*(\tau) + \overline{\Phi_*(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi_*'(\tau) + \Psi_*(\tau)],$$

$$\Phi_*(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z).$$

Для отыскания функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ граничные условия (12) записываются в виде

$$\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)] = -(\sigma_r - i\tau_{r\theta}) - (f_1^*(\theta) - if_2^*(\theta)), \quad \tau = R e^{i\theta}; \quad (13)$$

$$\Phi_0(\tau_1) + \overline{\Phi_0(\tau_1)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi_0'(\tau_1) + \Psi_0(\tau_1)] = -(\bar{\sigma}_r - i\bar{\tau}_{r\theta}) \quad \text{при} \quad \tau_1 = R_1 e^{i\theta}.$$

Здесь

$$f_1^*(\theta) - if_2^*(\theta) = \Phi_*(\tau) + \overline{\Phi_*(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi_*'(\tau) + \Psi_*(\tau)],$$

$$\Phi_*(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z).$$

Решение краевой задачи (13) находим методом степенных рядов. Искомые коэффициенты a_k и b_k определяются с помощью формул

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{B_0 R_1^2 - (A_0 - A_0^*) R^2}{2(R_1^2 - R^2)}, \quad a_{-1} = \frac{(\bar{A}_1 - \bar{A}_1^*) R}{1 + \kappa}, \quad \kappa = 3 - 4\nu; \\
 b_{-1} &= -\frac{\kappa(A_1 - A_1^*) R}{1 + \kappa}, \quad a_1 = \frac{\bar{M}_{-1}}{R_1^4 - R^4} - \frac{2(A_1 - A_1^*) R}{(1 + \kappa)(R_1^2 + R^2)}, \\
 a_k &= \frac{(1 + k)(R_1^2 - R^2) M_k - (R_1^{-2k+2} - R^{-2k+2}) \bar{M}_{-k}}{(1 - k^2)(R_1^2 - R^2)^2 - (R_1^{2k+2} - R^{2k+2})(R_1^{-2k+2} - R^{-2k+2})}, \\
 &\quad (k = \pm 2, \pm 3 \pm \dots),
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$M_k = B_k R_1^{-k+2} - (A_k - A_k^*) R_1^{-k+2},$$

$$b_{-2} R_{-2} = 2a_0 - A_0 + A_0^*, \quad b_{k-2} R_1^{k-2} = (1 - k) a_k R_1^k + \bar{a}_{-k} R_1^{-k} - B_k.$$

Удовлетворяя краевым условиям на берегах трещин с концевыми зонами предразрушения при $y_k = 0$, $|x_k| \leq l_k$, после некоторых преобразований получаем систему N комплексных сингулярных интегральных уравнений относительно искомым функций $g_k(x_k)$ ($k = 1, 2, \dots, N$):

$$\sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} \left[R_{nk}(t, x) g_k(t) + S_{nk}(t, x) \overline{g_k(t)} \right] dt = \pi f(x) \quad (n = 1, 2, \dots, N), \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left\{ \begin{array}{ll} -(\bar{\sigma}_{y_k} - i\bar{\tau}_{x_k y_k}) + f_0(x) & \text{на } L' \\ q_{y_k} - iq_{x_k y_k} - (\bar{\sigma}_{y_k} - i\bar{\tau}_{x_k y_k}) + f_0(x) & \text{на } L'' \end{array} \right\}, \\
 f_0(x) &= -\left[\Phi_0(x) + \overline{\Phi_0(x)} + x\overline{\Phi_0'(x_1)} + \overline{\Psi_0(x)} \right].
 \end{aligned}$$

Функции $R_{nk}(t, x)$ и $S_{nk}(t, x)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
 R_{nk}(t, x) &= \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left(\frac{1}{T_k - X_n} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{\bar{T}_k - \bar{X}_n} \right) - \\
 &\quad - \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left(\frac{X_n \bar{T}_k^2}{1 - X_n \bar{T}_k} + \frac{\bar{X}_k^2 T_k - 2\bar{X}_n + \bar{T}_k}{(1 - T_k \bar{X}_n)^2} \right) + \\
 &\quad + e^{-2i\alpha_n} \left(\frac{2X_n (T_k \bar{T}_k - 1) + T_k^2 (\bar{X}_n + \bar{T}_k) (\bar{X}_n T_k - 3) + 4T_k}{(1 - T_k \bar{X}_n)^3} \right), \\
 S_{nk}(t, x) &= \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left[\frac{1}{\bar{T}_k - \bar{X}_n} - \frac{T_k - X_n}{(\bar{T}_k - \bar{X}_n)^2} e^{-2i\alpha_n} \right] - \\
 &\quad - \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left[\frac{T_k^2 \bar{X}_n}{1 - T_k \bar{X}_n} + \frac{X_n^2 \bar{T}_k - 2X_n + T_k}{(1 - \bar{T}_k \bar{X}_n)^2} + \frac{T_k^2 (X_n - T_k) e^{-2i\alpha_n}}{(1 - T_k \bar{X}_n)^2} \right], \\
 X_n &= x_n e^{-i\alpha_n} + z_n^0.
 \end{aligned}$$

Для внутренних трещин с концевыми зонами предразрушения в сечении диска к системе N сингулярных интегральных уравнений добавляются N дополнительных равенств

$$\int_{-l_k}^{l_k} g_k(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (16)$$

обеспечивающих однозначность смещений при обходе контуров трещин с концевыми зонами.

Система (14) с дополнительными условиями (15) с помощью процедуры алгебраизации [8], [9] сводится к конечной алгебраической системе, состоящей из $N \times M$ комплексных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N l_k \left[\varphi_{0k}(t_m) R_{nk}(l_k t_m, l_n x_r) + \overline{\varphi_{0k}(t_m)} S_{nk}(l_k t_m, l_n x_r) \right] &= f_n(x_r), \\ \sum_{m=1}^M \varphi_{0n}(t_m) &= 0 \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad r = 1, 2, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi \quad (m = 1, 2, \dots, M); \quad x_r = \cos \frac{\pi r}{M} \quad (r = 1, 2, \dots, M-1).$$

Если в системе (16) перейти к комплексно сопряженным значениям, получим еще $N \times M$ алгебраических уравнений.

Так как напряжения в нагретом диске всюду ограничены, решение системы сингулярных интегральных уравнений (16) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Поэтому необходимо к системе уравнений (16) добавить условия конечности напряжений в окрестности концов зон предразрушения:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M (-1)^m \varphi_{0k}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N), \\ \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} \varphi_{0k}(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

В правые части системы (16) входят неизвестные значения нормальных $q_{y_k}(x_k)$ и касательных $q_{x_k y_k}(x_k)$ напряжений в узловых точках концевых зон. Условиями, определяющими неизвестные напряжения в связях между берегами концевых зон трещин, являются дополнительные условия (3). Эти дополнительные условия удобнее представить для производной раскрытия берегов зон предразрушения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k^+(x_k, 0) - v_k^-(x_k, 0) - (u_k^+(x_k, 0) - u_k^-(x_k, 0))] &= \\ = \frac{\partial}{\partial x_k} [\Pi(x_k, \sigma_k)(q_{y_k}(x_k) - i q_{x_k y_k}(x_k))] &. \end{aligned}$$

Используя полученное решение, можно записать

$$g_k(x_k) = \frac{2\mu}{1+k} \frac{d}{dx_k} [\Pi(x_k, \sigma_k)(q_{y_k}(x_k) - i q_{x_k y_k}(x_k))] \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Эти комплексные уравнения служат для определения неизвестных напряжений $q_{y_k}(x_k)$ и $q_{x_k y_k}(x_k)$ в связях между берегами концевых зон трещин. Для левой части соотношения (3) имеем

$$(v_k^+ - v_k^-) - i(u_k^+ - u_k^-) = -\frac{1+k}{2\mu} \int_{-l_k}^{x_k} g_k(x_k) dx_k. \quad (19)$$

С учетом (3) соотношение (18) принимает вид

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-l_k}^{x_k} g_k(x_k) dx_k = \Pi(x_k, \sigma_k)(q_{y_k}(x_k) - iq_{x_k y_k}(x_k)). \quad (20)$$

Разделяя в (19) действительные и мнимые части, получим

$$\begin{aligned} -\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-l_k}^{x_k} v_k(x_k) dx_k &= \Pi(x_k, \sigma_k) q_{y_k}(x_k), \\ -\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-l_k}^{x_k} u_k(x_k) dx_k &= \Pi(x_k, \sigma_k) q_{x_k y_k}(x_k). \end{aligned} \quad (21)$$

Для построения недостающих уравнений, служащих для определения напряжений в связях между берегами концевых зон трещин, требуем выполнения условий (20) в узловых точках t_m , содержащихся в концевых зонах. В результате получаем еще $2 \times N$ системы уравнений для определения приближенных значений $q_{y_k}(t_m)$ и $q_{x_k y_k}(t_m)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 v_k^0(t_{1,k}) = \Pi(t_{1,k}, \sigma_k(t_{1,k})) q_{y_k}(t_{1,k}) \\ C_0 (v_k^0(t_{1,k}) + v_k^0(t_{2,k})) = \Pi(t_{2,k}, \sigma_k(t_{2,k})) q_{y_k}(t_{2,k}) \\ \dots \\ C_0 \sum_{m=1}^{M_*} v_k^0(t_{m,k}) = \Pi(t_{M,k}, \sigma_k(t_{M,k})) q_{y_k}(t_{M,k}), \\ \\ C_0 u_k^0(t_{1,k}) = \Pi(t_{1,k}, \sigma_k(t_{1,k})) q_{x_k y_k}(t_{1,k}) \\ C_0 (u_k^0(t_{1,k}) + u_k^0(t_{2,k})) = \Pi(t_{2,k}, \sigma_k(t_{2,k})) q_{x_k y_k}(t_{2,k}) \\ \dots \\ C_0 \sum_{m=1}^{M_*} u_k^0(t_{m,k}) = \Pi(t_{M,k}, \sigma_k(t_{M,k})) q_{x_k y_k}(t_{M,k}), \end{array} \right\} \quad (22)$$

где $C_0 = -\frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\pi l_k}{M}$.

Для модуля вектора раскрытия берегов концевых зон трещин при $x_k = \lambda_{1,k}$ получим

$$V_{0,k} = \sqrt{(v_k^+ - v_k^-)^2 + (u_k^+ - u_k^-)^2} = \frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\pi l_k}{M} \sqrt{A_k^2 + B_k^2},$$

$$A = \sum_{m=1}^{M_{1,k}} v_k(t_m), \quad B = \sum_{m=1}^{M_{1,k}} u_k(t_m),$$

где $M_{1,k}$ – число узловых точек, содержащихся в интервале $(-l_k, \lambda_{1,k})$.

Для определения предельно-равновесного состояния диска, при котором происходит рост трещин, имеем условие

$$\frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\pi l_k}{M} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} = \delta_c \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (23)$$

Из-за неизвестных размеров длин концевых зон предразрушения система (16), (17), (21) оказалась нелинейной. Для ее численного решения целесообразно использовать алгоритм метода последовательных приближений и итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [10]. В каждом приближении решается линейная алгебраическая система методом Гаусса с выбором главного элемента.

Используя полученное решение, находим раскрытие берегов трещин у края концевой зоны предразрушения при $x_k = \lambda_{1k}$ и $x_k = \lambda_{2k}$ ($k = 1, 2, \dots, N$): для левой вершины k -ой трещины у края концевой зоны предразрушения при $x_k = \lambda_{1k}$ ($k = 1, 2, \dots, N$):

$$v_k^+(\lambda_{1k}, 0) - v_k^-(\lambda_{1k}, 0) = -\pi \frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{l_k}{M} \sum_{m=1}^{M_{1,k}} v_k^0(t_m),$$

$$u_k^+(\lambda_{1k}, 0) - u_k^-(\lambda_{1k}, 0) = -\pi \frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{l_k}{M} \sum_{m=1}^{M_{1,k}} u_k^0(t_m);$$

для правой вершины k -ой трещины у края концевой зоны предразрушения при $x_k = \lambda_{2k}$:

$$v_k^+(\lambda_{2k}, 0) - v_k^-(\lambda_{2k}, 0) = -\pi \frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{l_k}{M} \sum_{m=1}^{M_{2,k}} v_k^0(t_m),$$

$$u_k^+(\lambda_{2k}, 0) - u_k^-(\lambda_{2k}, 0) = -\pi \frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{l_k}{M} \sum_{m=1}^{M_{2,k}} u_k^0(t_m).$$

Для модуля раскрытия берегов трещины у основания концевой зоны предразрушения в диске находим: для левой вершины k -ой трещины:

$$V_k^{\text{л}} = \pi \frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{l_k}{M} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

для правой вершины k -ой трещины

$$V_k^{\text{п}} = \pi \frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{l_k}{M} \sqrt{C_k^2 + D_k^2} \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Условие, определяющее критическое значение интенсивности теплового воздействия на кольцевой диск, при котором происходит рост трещины, получаем с помощью критерия критического раскрытия трещины: для левой вершины k -ой трещины:

$$V_k^{\text{л}} = \delta_c \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (24)$$

для правой вершины k -ой трещины

$$V_k^{\text{п}} = \delta_c \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (25)$$

Проведен параметрический анализ зависимости напряжений q_{y_k} и $q_{x_k y_k}$ в концевых зонах предразрушения от их расположения и физико-механических параметров связей. Численные расчеты проводились применительно к турбинному диску из стали ЭИ417. На рис. 2 показана зависимость относительной длины концевой зоны предразрушения от безразмерного значения интенсивности теплового воздействия q_*/σ_* ($q_* = \alpha E T_0$, T_0 – характерная температура диска) для различных значений угла α_1 . Кривая 1 соответствует $\alpha_1 = 45^\circ$, кривая 2 – $\alpha_1 = 30^\circ$.

При проектировании элементов механизмов и конструкций в виде кольцевого диска его параметры необходимо подбирать таким образом, чтобы максимальная интенсивность теплового воздействия не превышала некоторого критического значения, вызывающего рост трещин. Это условие можно записать в виде

$$q_{* \max} < q_*^c,$$

где $q_{* \max}$ – максимальная интенсивность теплового воздействия в кольцевом диске.

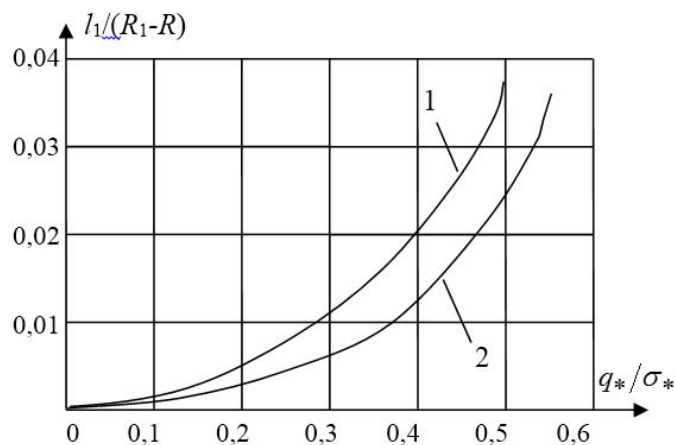


Рис. 2. Зависимость относительной длины концевой зоны от безразмерного значения интенсивности теплового воздействия

Выводы. Знание основных значений критических параметров разрушения и влияния на них свойств материала кольцевого диска дает возможность обоснованно управлять процессом роста трещин путем выбора конструкторско-технологических решений при проектировании. С помощью разработанной математической модели на стадии проектирования возможно оценивать гарантированный ресурс кольцевого диска с учетом ожидаемых дефектов и условий нагружения; устанавливать допустимый уровень дефектности, максимальные значения рабочих нагрузок; выбирать материал диска с требуемыми статическими и циклическими характеристиками трещиностойкости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Саврук, М. П. Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие : в 2 т. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М. П. Саврук. – Киев : Наукова думка, 1988. – 620 с.
- [2] Саврук, М. П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. – Киев : Наукова думка, 1989. – 248 с.
- [3] *The special issue: Cohesive models* // Eng. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 70. – No. 14. – P. 1741–1987.
- [4] Мирсалимов, В. М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары / В. М. Мирсалимов // ПММ. – 2007. – Т. 71. – Вып. 1. – С. 132–151.
- [5] *Mirsalimov, M. V. Interaction between Periodic System of Rigid Inclusions and Rectilinear Cohesive Cracks in an Isotropic Medium under Transverse Shear* / M. V. Mirsalimov, F. F. Hasanov // Acta Polytechnica Hungarica. – 2014. – Vol. 11. – No. 5. – P. 161–176.
- [6] Паркус, Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – М. : Физматгиз, 1963. – 252 с.
- [7] Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [8] Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – Киев : Наукова думка, 1976. – 443 с.
- [9] Мирсалимов, В. М. Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [10] Ильюшин, А. А. Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

Калантарлы Наиля Мерадж кызы,

*кандидат физико-математических наук, доцент, докторант, Институт математики и механики
НАН Азербайджана, г. Баку*

e-mail: nailyak1975@gmail.com

N. M. Kalantarly

LIMIT-EQUILIBRIUM STATE OF NON-UNIFORMLY HEATED ANNULAR DISK, WEAKENED BY AN ARBITRARY SYSTEM OF COHESIVE CRACKS

Institute of mathematics and mechanics NAN of Azerbaijan

Abstract. The limit-equilibrium state of non-uniformly heated annular disk, weakened by a system of rectilinear cracks with end pre-fracture zones is investigated. Using deformation fracture criterion the relation allowing to determine the critical value of the intensity of the heat effect on the disc at which the cracks growth is obtained.

Keywords: non-uniformly heated annular disk, cracks with interfacial bonds, pre-fracture zone, cohesive forces.

REFERENCES

- [1] *Savruk, M. P.* Fracture mechanics and strength of materials. Vol. 2: Stress intensity factors in cracked bodies. – Kiev : Naukova dumka, – 1988. – 620 p.
- [2] *Savruk, M. P.* Numerical analysis in plane problems of cracks theory / M. P. Savruk, P. N. Osiv, I. V. Prokopchuk. – Kiev : Naukova dumka. – 1989. – 248 p.
- [3] *The special issue: Cohesive models* // Eng. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 70. – No. 14. – P. 1741–1987.
- [4] *Mirsalimov, V. M.* The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair / V. M. Mirsalimov // J. of Applied Math. and Mech. – 2007. – Vol. 71. – P. 120–136.
- [5] *Mirsalimov, M. V.* Interaction between Periodic System of Rigid Inclusions and Rectilinear Cohesive Cracks in an Isotropic Medium under Transverse Shear / M. V. Mirsalimov, F. F. Hasanov // Acta Polytechnica Hungarica. – 2014. – Vol. 11. – No. 5. – P. 161–176.
- [6] *Parkus, H.* Instationare Warmes-Pannungen / H. Parkus. – Springer, Wien, 1959. – 252 p.
- [7] *Muskhelishvili, N. I.* Some basic problem in the mathematical theory of elasticity / N. I. Muskhelishvili. – M. : Nauka, 1977. – 707 p.
- [8] *Panasyuk, V. V.* Stress distribution near cracks in plates and shells / V. V. Panasyuk, M. P. Savruk, A. P. Datsyshyn. – Kiev : Naukova dumka, 1976. – 443 p.
- [9] *Mirsalimov, V. M.* Non-one-dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987. – 256 p.
- [10] *Il'yushin, A. A.* Plasticity / A. A. Il'yushin. – M. ; L. : Gostekhizd, 1948. – 376 p.

Kalantarly, Nailya Merach kizi

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Doctorant, Institute of Mathematics and Mechanics of NAN of Azerbaijan, Baku

СЖАТИЕ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЫ ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

Воронежский государственный университет инженерных технологий

Аннотация. В работе рассмотрено деформирование упругой полосы из несжимаемого материала. Отклонение контура сечения от прямоугольника и материала полосы от однородного характеризуется двумя независимыми малыми параметрами, являющимися случайными величинами. С точностью до величин второго порядка малости найдено решение для частного случая поставленной задачи. Проведен анализ влияния учета случайных несовершенств при определении напряженно-деформированного состояния полосы.

Ключевые слова: напряжение, деформация, упругость, граничные условия, линеаризация, подвижная граница, независимые малые параметры, случайная величина.

УДК: 539.3

Следуя [1], [2], рассмотрим деформирование упругой полосы из несжимаемого материала, поперечное сечение которой мало отличается от прямоугольного. Она находится под воздействием усилий интенсивности p_1 и p_2 , приложенных соответственно по горизонтальным и вертикальным кромкам сечения.

Ее напряженно-деформированное состояние описывается решением следующей задачи [1], [3]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0;\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x - \sigma_y &= 4G \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \tau &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\sigma_n |_{y=g_i} &= -p_1; \quad \tau_n |_{y=g_i} = 0; \quad (i = 1, 2) \\ \sigma_x |_{x=0} &= \sigma_x |_{x=\ell} = -p_2; \\ \tau |_{x=0} &= \tau |_{x=\ell} = 0\end{aligned},\tag{3}$$

где u, v – компоненты вектора перемещений, σ_x, σ_y, τ – напряжения в поперечном сечении полосы, g_i – функции, описывающие верхнюю и нижнюю кромки сечения в деформированном состоянии, в недеформированном они характеризуются функциями f_i .

Пусть f_i и G заданы в следующем виде:

$$\begin{aligned}f_i(x) &= h + \varepsilon_1 \varphi_1(x) \quad (i = 1, 2); \\ G(x) &= G_0 + \varepsilon_2 \varphi_2(x),\end{aligned}\tag{4}$$

где ε_i – независимые малые параметры, являющиеся случайными величинами, h – половина высоты прямоугольного сечения, G_0 – модуль упругости однородной полосы, $\varphi_i(x)$ – функции, описывающие отклонение реальных характеристик от идеализированных.

Решение задачи (1)–(3) будем искать вблизи однородного состояния ($\varepsilon_i = 0$) в виде рядов по малым параметрам [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n \sigma_x^{(mn)}; & \sigma_y &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n \sigma_y^{(mn)}; & \tau &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n \tau^{(mn)}; \\ u &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n u^{(mn)}; & v &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n v^{(mn)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(00)} &= -p_2; & \sigma_y^{(00)} &= -p_1; & \tau^{(00)} &= 0; \\ u^{(00)} &= \frac{p_1 - p_2}{4G_0}x; & v^{(00)} &= \frac{p_2 - p_1}{4G_0}y. \end{aligned} \quad (6)$$

Для того чтобы (5) сходились, необходимо провести исследование аналитичности решения задачи (1)–(3) по ε_1 , ε_2 в окрестности $\varepsilon_i = 0$. Основным требованием, как было получено в [5], является условие непрерывной зависимости решения от f и G в окрестности $f = h$, $G = G^0$. Для проверки этого условия составим вспомогательную задачу относительно функций ζ_i , задаваемых следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^{(00)} + \zeta_1; & \sigma_y &= \sigma_y^{(00)} + \zeta_2; & \tau &= \tau^{(00)} + \zeta_1; \\ u &= u^{(00)} + \zeta_4; & v &= v^{(00)} + \zeta_5. \end{aligned} \quad (7)$$

Однородная линеаризованная задача, соответствующая (1)–(3), (7), будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial \zeta_4}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial y} &= 0; \\ \zeta_1 - \zeta_2 &= 4G \frac{\partial \zeta_4}{\partial x}, & \zeta_4 &= G \left(\frac{\partial \zeta_4}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial x} \right); \\ \left((p_2 - p_1) \frac{\partial \zeta_5}{\partial x} + \zeta_3 \right)_{y=\pm g^0} &= 0, & \zeta_2(x, \pm g^0) &= 0; \\ \zeta_1|_{x=0} = \zeta_1|_{x=\ell} &= 0; & \zeta_3|_{x=0} = \zeta_3|_{x=\ell} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $g^0(x) = \left(1 + \frac{p_2 - p_1}{4G_0}\right)h$ характеризует идеальную границу в деформированном состоянии. Если (8) допускает только тривиальное решение, то решение исходной задачи непрерывно зависит от f и G при $f = h$, $G = G^0$.

Задача (8) с точностью до обозначений совпадает с анализируемой по наличию у нее нетривиального решения из [5]. Следуя этой работе, получаем, что (8) имеет нетривиальное решение, если выполняется условие

$$\operatorname{ch}(2ah(2 + \gamma_2 - \gamma_1)) - (1 + \gamma_2 - \gamma_1)^2(2 + \gamma_2 - \gamma_1)^2 4a^2h^2 - 2 = 0, \quad (9)$$

где $\gamma_i = p_i/4G_0$.

Следовательно, если исходные данные задачи (1)–(3) таковы, что их параметры принадлежат области, ограниченной кривой (9), то в силу аналитичности выражений в (1)–(3) решения будут аналитическими функциями малых параметров ε_i в окрестности $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ и ряды (4) будут сходиться.

В дальнейшем считаем, что исходные параметры удовлетворяют полученным условиям.

Рассмотрим случай $\left| \frac{p_2 - p_1}{4G_0} \right| \ll 1$ и $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \sin ax$.

Составим соотношения для первого и второго приближений. Вид задач, с учетом найденных компонент, вполне аналогичен (1), (2), за исключением соотношений (2) для (01) и (11) :

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(01)} - \sigma_y^{(01)} &= 4G_0 \frac{\partial u^{(01)}}{\partial x} + 4\varphi_2(x) \frac{\partial u^{(00)}}{\partial x}; \\ \tau^{(01)} &= G_0 \left(\frac{\partial u^{(01)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(01)}}{\partial x} \right) + \varphi_2(x) \left(\frac{\partial u^{(00)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(00)}}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (10)$$

Для приближения (11) следует заменить в (10) индексы (01) на (11) , а (00) и (10) .

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(10)} \Big|_{y=\pm h} &= 0 \\ \left(\tau^{(10)} - (p_1 - p_2) \frac{\partial v^{(10)}}{\partial x} \right) \Big|_{y=\pm h} &= (p_1 - p_2) \varphi_1'(x);\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(01)} \Big|_{y=\pm h} &= 0 \\ \left(\tau^{(01)} - (p_1 - p_2) \frac{\partial v^{(01)}}{\partial x} \right) \Big|_{y=\pm h} &= 0.\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(20)} \Big|_{y=\pm h} &= (p_2 - p_1) \left(\frac{dg^{(10)}}{dx} \right)^2 - 2\tau^{(10)} \frac{dg^{(10)}}{dx} \\ \left(\tau^{(20)} - (p_1 - p_2) \frac{\partial v^{(20)}}{\partial x} \right) \Big|_{y=\pm h} &= (p_1 - p_2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v^{(10)}}{\partial y} \varphi_1(x) - \right. \\ &\left. - \frac{\partial(\varphi_1 + v^{(10)})}{\partial x} u^{(10)} \right) + (\sigma_x^{(10)} - \sigma_y^{(10)}) \frac{dg^{(10)}}{dx} - \frac{\partial \tau^{(10)}}{\partial y} g^{(10)},\end{aligned}\quad (13)$$

где $g^{(10)} = \varphi_1(x) + v^{(10)}(x, h)$. Вид соотношений для (11) , (02) аналогичен (12). На вертикальных кромках условия будут тривиальными.

В результате решения полученных задач найдены функции, которые с точностью до величин второго порядка малости характеризуют напряженно-деформированное состояние рассматриваемой полосы:

$$\begin{aligned}u &= \frac{p_1 - p_2}{4G_0} x + u^{(10)} \varepsilon_1 + u^{(01)} \varepsilon_2 + u^{(11)} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + u^{(20)} \varepsilon_1^2 + u^{(02)} \varepsilon_2^2; \\ v &= \frac{p_2 - p_1}{4G_0} y + v^{(10)} \varepsilon_1 + u^{(01)} \varepsilon_2 + v^{(11)} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + v^{(20)} \varepsilon_1^2 + v^{(02)} \varepsilon_2^2; \\ \sigma_x &= -p_2 + \sigma_x^{(10)} \varepsilon_1 + u^{(01)} \varepsilon_2 + \sigma_x^{(11)} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \sigma_x^{(20)} \varepsilon_1^2 + \sigma_x^{(02)} \varepsilon_2^2; \\ \sigma_y &= -p_1 + \sigma_y^{(10)} \varepsilon_1 + u^{(01)} \varepsilon_2 + \sigma_y^{(11)} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \sigma_y^{(20)} \varepsilon_1^2 + \sigma_y^{(02)} \varepsilon_2^2; \\ \tau &= \tau^{(10)} \varepsilon_1 + u^{(01)} \varepsilon_2 + \tau^{(11)} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \tau^{(20)} \varepsilon_1^2 + \tau^{(02)} \varepsilon_2^2,\end{aligned}\quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}u^{(10)} &= \frac{1}{2a} ((aD_1 + D_2) \text{sh}ay + aD_2 \text{y}chay) \cos ax; \\ v^{(10)} &= \frac{1}{2} (D_1 \text{c}hay + D_2 \text{y}shay) \sin ax; \\ \sigma_x^{(10)} &= -G_0 ((aD_1 + 2D_2) \text{sh}ay + aD_2 \text{y}chay) \sin ax; \\ \sigma_y^{(10)} &= aG_0 (D_1 \text{sh}ay + D_2 \text{y}chay) \sin ax; \\ \tau^{(10)} &= G_0 ((aD_1 + D_2) \text{c}hay + aD_2 \text{y}shay) \cos ax; \\ D_i &= D_i(p_1, p_2, h, a) \quad i = 1, 2.\end{aligned}\quad (15)$$

$$u^{(01)} = v^{(01)} = \sigma_x^{(01)} = \sigma_y^{(01)} = \tau^{(01)} = 0.\quad (16)$$

$$\begin{aligned}
u^{(11)} &= u(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \sin 2ax; \\
v^{(11)} &= v(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \cos 2ax; \\
\sigma_x^{(11)} &= \sigma_x(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \cos 2ax; \\
\sigma_y^{(11)} &= \sigma_y(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \cos 2ax; \\
\tau^{(11)} &= \tau(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \sin 2ax.
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
u^{(20)} &= u(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \sin 2ax + \frac{C(h)}{4G_0}x; \\
v^{(20)} &= v(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \cos 2ax - \frac{C(h)}{4G_0}y; \\
\sigma_x^{(20)} &= \sigma_x(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \cos 2ax; \\
\sigma_y^{(20)} &= \sigma_y(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \cos 2ax - C(h); \\
\tau^{(20)} &= \tau(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \sin 2ax.
\end{aligned} \tag{18}$$

$$u^{(02)} = v^{(02)} = \sigma_x^{(02)} = \sigma_y^{(02)} = \tau^{(02)} = 0. \tag{19}$$

Вид функций $u(a, G_0, p_1, p_2, h, y), \dots, \tau(a, G_0, p_1, p_2, h, y), C(h)$ не приводится из-за громоздкости выражений.

Поскольку ε_i являются случайными величинами, то математические ожидания основных характеристик имеют вид:

$$\begin{aligned}
\langle u \rangle &= \frac{p_1 - p_2}{4G_0}x + u^{(20)} \langle \varepsilon_1^2 \rangle; \\
\langle v \rangle &= \frac{p_2 - p_1}{4G_0}y + v^{(20)} \langle \varepsilon_1^2 \rangle; \\
\langle \sigma_x \rangle &= -p_2 + \sigma_x^{(20)} \langle \varepsilon_1^2 \rangle; \\
\langle \sigma_y \rangle &= -p_1 + \sigma_y^{(20)} \langle \varepsilon_1^2 \rangle; \\
\langle \tau \rangle &= \tau^{(20)} \langle \varepsilon_1^2 \rangle.
\end{aligned} \tag{20}$$

Из (20) следует, что если напряженно-деформированное состояние полосы близко к однородному, то при замене характеристик материала и контура сечения их среднестатистическими значениями порядок ошибки не превзойдет порядка ε_1^2 . Учет неоднородности материала в этом случае не оказывает значительного влияния на результат.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ишлинский, А. Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости / А. Ю. Ишлинский // Укр. матем. журнал. – 1954. – Т. 6. – № 2. – С. 140–146.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Об устойчивости полосы при сжатии / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов // ДАН СССР. – 1961. – Т. 138. – № 5. – С. 1047–1049.
- [3] *Филоненко-Бородич, М. М.* Теория упругости / М. М. Филоненко-Бородич. – М. : Физматгиз, 1959. – 364 с.
- [4] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластических деформаций / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [5] *Минаева, Н. В.* Метод возмущений в механике деформируемых тел / Н. В. Минаева. – М. : Научная книга, 2002. – 156 с.

Минаева Надежда Витальевна,

доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж

e-mail: minaeva@yandex.ru

Хвостов Михаил Геннадьевич,

аспирант, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж

N. V. Minaeva, M. G. Khvostov

COMPRESSION STOCHASTICALLY INHOMOGENEOUS INCOMPRESSIBLE STRIPS OF MATERIAL

Voronezh state University of engineering technologies

Abstract. In this work the elastic deformation of the strip of compressible material. The deviation of the contour of the cross section of the rectangle and strip material from a homogeneous characterized by two independent small parameters are random variables. Accurate to quantities of the second order of smallness found the solution of this problem. The analysis of the impact of accounting for random imperfections in the determination of the stress-strain state band

Keywords: stress, strain, elasticity, boundary conditions, linearization, movable boundary, independent small parameters, random variable.

REFERENCES

- [1] *Ishlinsky, A. U.* Consideration of questions about the stability of equilibrium of elastic bodies from the point of view of the mathematical theory of elasticity / A. U. Ishlinsky // Ukr. Math. J. – 1954. – V. 6. – No 2. – P. 140–146.
- [2] *Ivlev, D. D.* About resistance band compression / D. D. Ivlev, L. V. Ershov // Rep. Ac. Sci. USSR. – 1961. – V. 138. – No 5. – P. 1047–1049.
- [3] *Filonenko-Borodich, M. M.* Theory of elasticity / M. M. Filonenko-Borodich. – M. : Fizmatgiz, 1959. – 364 p.
- [4] *Ivlev, D. D.* The method of perturbations in the theory of elastic-plastic deformation / D. D. Ivlev, L. V. Ershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p.
- [5] *Minaeva N. V.* The method of perturbations in the mechanics of deformable bodies / N. V. Minaeva. – M. : Science book, 2002. – 156 p.

Minaeva Nadezhda Vitalevna

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh state University of engineering technologies, Voronezh

Khvostov Michael Gennadevich

graduate Voronezh state University of engineering technologies, Voronezh

Е. Е. Кузнецов, Н. М. Матченко

ОБ ОДНОЙ ДИСКУССИИ

Тулский государственный университет

Аннотация. Приведены некоторые положения дискуссии о постулате изотропии. Показано, что в трехмерном векторном пространстве главных напряжений на плоскостях кратности промежуточного главного напряжения квадратичная функция интенсивности девиаторных напряжений имеет особенность и поэтому не удовлетворяет постулату изотропии.

Ключевые слова: постулат изотропии, квадратичная функция интенсивности девиаторных напряжений, сингулярность.

УДК: 539.1

1. В статье Д. Д. Ивлева “Три дискуссии” [1] приведены его воспоминания о трех дискуссиях в механике, в которых он принимал участие. Одна из дискуссий посвящена представлению симметричного тензора второго ранга в шестимерном векторном пространстве и постулату изотропии.

Множество Π_6 всех симметричных тензоров второго ранга, которые можно определить для фиксированной точки сплошной среды, замкнуто относительно линейных комбинаций своих элементов и поэтому представляет некоторую шестимерную линейную систему. С точки зрения линейных свойств эта система аналогична шестимерному евклидову пространству. Но между этими линейными системами имеется и существенное различие.

Вектор в евклидовом пространстве имеет лишь один скалярный инвариант – длину вектора, в то время как элемент системы Π_6 – три инварианта.

В рамках классической механики сплошных сред тензор напряжений и тензор деформаций являются симметричными тензорами второго ранга и, следовательно, относятся к элементам Π_6 . Конкретизируя физическую размерность базисных элементов, будем рассматривать два представителя этого подмножества – “пространство напряжений” и “пространство деформаций”. Девиаторы в каждом из этих пространств образуют линейные подмножества соответственно D_s и D_e . Постулат изотропии А. А. Ильюшина [5] представляет собой утверждение, согласно которому для начально изотропной среды траектория процесса в пространстве D_s зависит от таких свойств траектории, которые инвариантны по отношению к ортогональным преобразованиям. Под ортогональными преобразованиями принимаются линейные преобразования пространства, при которых сохраняются квадратичные скаляры девиаторов.

Д. Д. Ивлев, полемизируя по поводу постулата изотропии, пишет [2]: “Согласно постулату изотропии, связь между тензорами-девиаторами напряжений и деформаций изотропна в пространстве тензоров-девиаторов напряжений и деформаций. Следствием этого предположения является то обстоятельство, что зависимость между тензорами-девиаторами напряжений и деформаций в общем случае записывается в виде

$$D_s = \sum_{n=1}^5 A_n \frac{d^n D_e}{ds^n}, \quad (1.1)$$

где D_s, D_e – соответственно тензоры-девиаторы напряжений и деформаций, s – второй инвариант девиатора деформаций, A_n – функция (или функционал), зависящая, если для простоты исключить влияние временных факторов, от некоторых инвариантов тензоров-девиаторов $D_e, d^n D_e/ds^n$, где $n = 1, 2, \dots, 5$.”

Далее он пишет: “Единственным условием пластичности, изотропным в пространстве девиатора напряжений, является условие пластичности Мизеса. Всякое другое условие пластичности, являющееся комбинацией второго и третьего инвариантов девиатора напряжений, например Треска, не изотропно в пространстве девиатора напряжений”.

По существу, Д. Д. Ивлев указал, что постулат изотропии не является универсальным.

Гораздо позже, уже в зрелые годы, Д. Д. Ивлев, возвращаясь к этой дискуссии, напишет [1]: “В свое время я заметил, что в предложенной форме постулата изотропии не учитывается влияние третьего инварианта девиатора напряжений, хотя для изотропного тела третий инвариант девиатора имеет место”.

Нужно отдать должное А. А. Ильюшину, что сам он не претендовал на универсальность постулата изотропии: “Многочисленные опыты наших и зарубежных ученых с изотропными в исходном состоянии материалами при нормальных и высоких температурах, малых и больших временах деформирования показывают, что *влияние третьего инварианта деформирования (напряжений) на механические свойства при малых деформациях является слабым*, и это согласуется с теорией малых упругопластических деформаций. Поэтому в рассмотренных формулировках постулата изотропии мы принимаем, что от третьих инвариантов тензоров коэффициенты $A_n \dots$ не зависят. Это означает, что пятимерные пространства напряжений, деформаций и т. д. изотропны, т. е. законы связи напряжений с деформациями инвариантны не только относительно преобразований поворота осей координат в теле, но и относительно преобразований вращения и отражения в пятимерных пространствах, и, значит, только длина дуги и четыре параметра кривизны являются единственными внутренними характеристиками процессов сложного нагружения” [6].

Уже в настоящее время В. Г. Зубчанинов замечает [8]: “Как видно, Д.Д. Ивлев по существу не вступал в дискуссию с А. А. Ильюшиным. Он отметил лишь то, что уже предполагалось в постулате самим автором”.

Покажем, что для напряженных (деформированных) состояний, при которых промежуточное главное напряжение (деформация) является кратным, квадратичная девиаторная функция не изотропна.

2. Рассмотрим девиаторную квадратичную функцию тензора напряжений

$$\Sigma_d = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} / \sqrt{3}, \quad (2.1)$$

где σ_i ($i = 1, 2, 3$) – главные напряжения. Функция Σ_d представляет собой модуль вектора интенсивности девиаторных напряжений.

В трехмерном векторном пространстве главных напряжений поверхности равного уровня интенсивности девиаторных напряжений $\Sigma_d = const$ представляют собой цилиндры, образующие которых параллельны оси гидростатического давления.

В механике деформированного твердого тела принято считать, что поверхности равного уровня $\Sigma_d = const$ являются регулярными, т.е. производная от этой функции в пространстве главных напряжений по главным напряжениям имеет вид [4], [5], [6], [7], [11], [12]

$$\frac{\partial \Sigma_d}{\partial \sigma_i} = \frac{2\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k}{3\Sigma_d}, \quad (i \neq j \neq k). \quad (2.2)$$

Согласно гипотезе о регулярности функции $\Sigma_d = const$ из (2.2) следует, что вектор $grad\Sigma_d$ ортогонален к поверхностям $\Sigma_d = const$ равного уровня во всех точках пространства главных напряжений, включая и линии пересечения поверхности равного уровня с плоскостями кратности.

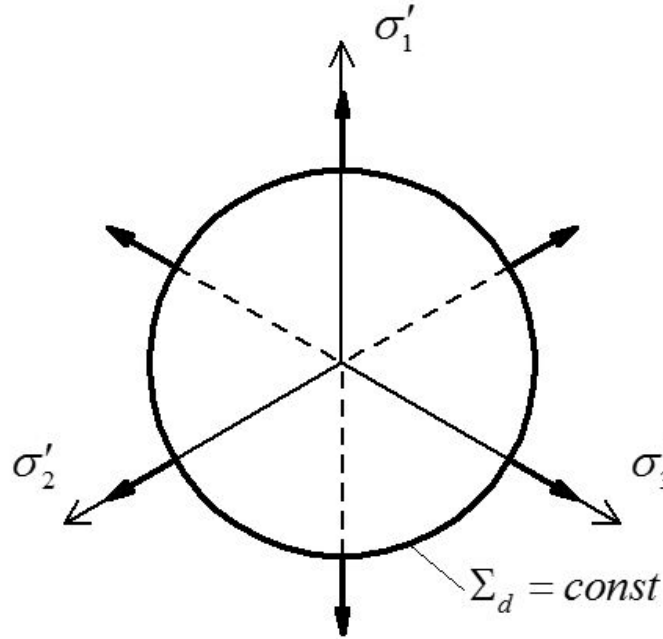


Рис. 1 Общепринятое представление $grad\Sigma_d$

Покажем, что гипотеза о регулярности функции Σ_d является некорректной.

Рассмотрим трехмерное векторное пространство главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Если через гидростатическую ось этого пространства и направления главных напряжений провести три плоскости, то они разделят векторное пространство на шесть равных сегментов, а девиаторную плоскость соответственно на шесть секторов. Введем нумерацию секторов арабскими цифрами в направлении против хода часовой стрелки от положительной проекции главного напряжения $\vec{\sigma}_1$. Поскольку на плоскостях между сегментами промежуточное главное напряжение является кратным (оно равно минимальному или максимальному главному напряжению), то эти плоскости называются плоскостями кратности.

Теорема.

При пересечении поверхности $\Sigma_d = const$ с плоскостями кратности функция Σ_d проявляет сингулярность.

Доказательство.

Несложно убедиться в том, что модуль интенсивности девиаторных напряжений Σ_d является однородной функцией первой степени. Подставляя (2.2) в уравнение

$$\frac{\partial \Sigma_d}{\partial \sigma_1} \sigma_1 + \frac{\partial \Sigma_d}{\partial \sigma_2} \sigma_2 + \frac{\partial \Sigma_d}{\partial \sigma_3} \sigma_3 = \Sigma_d, \quad (2.3)$$

получим тождество.

Поскольку функция Σ_d удовлетворяет условию (2.3), то она является однородной функцией первой степени [9].

Для примера рассмотрим пересечение поверхностей Σ_d равного уровня с плоскостью кратности $\sigma_2 = \sigma_3$.

На плоскости кратности $\sigma_2 = \sigma_3$ функция Σ_d принимает два значения $\Sigma_d^{(2)}$ и $\Sigma_d^{(3)}$, причем

$$\Sigma_d^* = \Sigma_d^{(2)} = \sqrt{2/3}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \Sigma_d^* = \Sigma_d^{(3)} = \sqrt{2/3}(\sigma_1 - \sigma_3). \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что сингулярность на линиях пересечения поверхностей Σ_d равного уровня с плоскостью кратности $\sigma_2 = \sigma_3$ проявляется в виде ребра равносносторонней шестигранной призмы, образующие которой равно наклонены к осям главных напряжений.

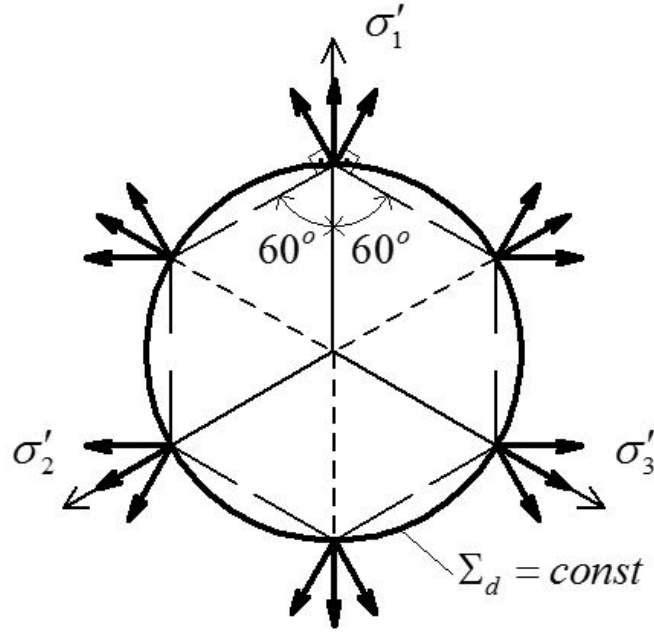


Рис. 2. Точки сингулярности квадратичной функции (2.1)

Следовательно, нормаль к поверхности Σ_d вырождается в вектор нормалей

$$\frac{\partial \Sigma_d^*}{\partial \sigma_i} = \alpha \frac{\partial \Sigma_d^{(2)}}{\partial \sigma_i} + \alpha_1 \frac{\partial \Sigma_d^{(3)}}{\partial \sigma_i}, \quad (2.5)$$

где $\alpha \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0$ – неопределенные множители Лагранжа.

Так как по определению Σ_d , $\Sigma_d^{(2)}$, $\Sigma_d^{(3)}$ – однородные функции первой степени, то по теореме Эйлера [9] об однородных функциях имеем

$$\frac{\partial \Sigma_d}{\partial \sigma_i} \sigma_i = \Sigma_d, \quad \frac{\partial \Sigma_d^{(2)}}{\partial \sigma_i} \sigma_i = \Sigma_d^{(2)}, \quad \frac{\partial \Sigma_d^{(3)}}{\partial \sigma_i} \sigma_i = \Sigma_d^{(3)}. \quad (2.6)$$

Свертывая (2.5) и учитывая (2.6), получим

$$\Sigma_d^* = \alpha \Sigma_d^{(2)} + \alpha_1 \Sigma_d^{(3)}. \quad (2.7)$$

Так как на пересечении $\Sigma_d^* = \Sigma_d^{(2)} = \Sigma_d^{(3)}$, то $\alpha + \alpha_1 = 1$ и поэтому соотношения (2.7), (2.5) принимают вид

$$\Sigma_d^* = \alpha \Sigma_d^{(2)} + (1 - \alpha) \Sigma_d^{(3)}; \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \Sigma_d^*}{\partial \sigma_i} = \alpha \frac{\partial \Sigma_d^{(2)}}{\partial \sigma_i} + (1 - \alpha) \frac{\partial \Sigma_d^{(3)}}{\partial \sigma_i}. \quad (2.9)$$

Поскольку на линиях пересечения поверхности равного уровня Σ_d с плоскостью кратности главных напряжений $\sigma_2 = \sigma_3$ функция Σ_d проявляет сингулярность, то функция Σ_d не является регулярной. Аналогично доказывается сингулярность и для остальных точек пересечения следа девиаторной функции (2.1) с девиаторной плоскостью и плоскостями кратности промежуточного главного напряжения.

Выводы.

1. Плоскости кратности промежуточного главного напряжения разделяют трехмерное векторное пространство на шесть независимых сегментов [9]. На плоскостях кратности квадратичная функция интенсивности девиаторных напряжений имеет особенность, поэтому не удовлетворяет постулату изотропии.

2. При решении задач механики деформированного твердого тела следует учитывать эту особенность.

3. Сингулярность девиаторной функции (2.1) не связана с механическими характеристиками материала, а является топологическим свойством симметричного тензора второго ранга.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Три дискуссии / Д. Д. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 157–163.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* О постулате изотропии в теории пластичности / Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – № 2. – С. 125–127.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* О работе В. С. Ленского “Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении” / Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – № 6. – С. 1795–181.
- [4] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Ч 1. Упругопластические деформации / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.
- [5] *Ильюшин, А. А.* О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред / А. А. Ильюшин // ПММ. – 1954. – Т. 18. – Вып. – С. 641–666.
- [6] *Ильюшин, А. А.* Еще о постулате изотропии / А. А. Ильюшин // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – С. 201–204.
- [7] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
- [8] *Зубчанинов, В. Г.* Теория идеальной пластичности, предельных состояний и Д. Д. Ивлев / В. Г. Зубчанинов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1. – С. 157–163.
- [9] *Корн, Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1978. – 256 с.
- [10] *Кузнецов, Е. Е.* О сингулярности девиаторных функций трехмерного тензора второго ранга / Е. Е. Кузнецов, Н. М. Матченко // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий : сб. ст. по материалам междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 12-15 августа 2013 г.) : в 2 ч. Ч. 1. Механика деформируемого твердого тела / отв. ред. Б. Г. Миронов. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2013. – С. 127–132.

[11] *Работнов, Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела: учебное пособие для мех. мат. и физ. спец. университетов / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1988. – 711 с.

[12] *Труделл, К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Труделл. – М. : Мир, 1975. – 592 с.

Кузнецов Евгений Евгеньевич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: smithe71@yandex.ru

Матченко Николай Михайлович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики пластического формоизменения, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc_05@mail.ru

Y. Y. Kuznetsov, N. M. Mattchenko

ABOUT ONE DISCUSSION

Tula State University

Abstract. Some positions of discussion about a postulate isotropy are resulted. It is shown, that in three-dimensional vector space of the main stress on planes of frequency rate of an intermediate main stress square-law function of intensity deviator/s stress has feature and consequently does not satisfy to a postulate isotropy.

Keywords: Postulate isotropy, square-law function of intensity deviator/s stress, singularity.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* Three discussion / D. D. Ivlev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2007. – № 1. – P. 157–163.
- [2] *Ivlev, D. D.* About an isotropy postulate in the theory of plasticity / D. D. Ivlev // AN news USSR. OTN. Mechanics and mechanical engineering. – 1960. – № 2. – P. 125–127.
- [3] *Ivlev, D. D.* About V. S. Lensky's work "Some new data on plasticity of metals at difficult loading" / D. D. Ivlev // News of Academy of Sciences of the USSR. OTN. Mechanics and mechanical engineering. – 1960. – № 6. – P. 1795–181.
- [4] *Ilyushin, A. A.* Plasticity. P. 1. Elasto-plastic deformations / A. A. Ilyushin. – M. ; L. : Gostekhizdat, 1948. – 376 p.
- [5] *Ilyushin, A. A.* About communication between tension and small deformations in mechanics of continuous environments / A. A. Ilyushin // ПИММ. – 1954. – Vol. 18. – Issue – P. 641–666.
- [6] *Ilyushin, A. A.* About an isotropy postulate / A. A. Ilyushin // News of Academy of Sciences of the USSR. OTN. Mechanics and mechanical engineering. – 1962. – № 1. – P. 201–204.
- [7] *Ilyushin, A. A.* Plasticity. Bases of the general mathematical theory / A. A. Ilyushin. – M. : Publishing house of Academy of Sciences of the USSR, 1963. – 271 p.
- [8] *Zubchaninov, V. G.* Теория идеальной пластичности, предельных состояний и Д. Д. Ивлева / V. G. Zubchaninov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 1 (15). – P. 157–163.
- [9] *Korn, G.* The reference book on mathematics for scientists and engineers / G. Korn, T. Korn. – M. : Nauka, 1978. – 256 p.
- [10] *Kuznetsov, E. E.* About singularity deviatornykh of functions of a three-dimensional tensor of the second rank / E. E. Kuznetsov, N. M. Mattchenko // Fundamental and applied problems of mechanics of a deformable solid body, mathematical modeling and information technologies : the collection of the Art. on materials of the international scientific and practical conference (Cheboksary, on August 12-15, 2013): in 2 p. P. 1. Mechanics of a deformable solid body / responsible edition B. G. Mironov. – Cheboksary : Chuvash State Pedagogical University, 2013. – P. 127–132.
- [11] *Rabotnov, Yu. N.* Mechanics of a deformable solid body: the manual for fur. mat. and the physical special universities / Yu. N. Rabotnov. – M. : Nauka, 1988. – 711 p.
- [12] *Trusdell, K.* Initial course of rational mechanics of continuous environments / K. Trusdell. – M. : Mir, 1975. – 592 p.

Kuznetsov, Yevgeniy Yevgenevich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor of Department of building, building materials and designs, Tula State University, Tula

Mattchenko, Nikolay Mihailovich

Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, Department of mechanics plastic forming, Tula State University, Tula

В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова

**МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ОДНОМЕРНОЙ ДИНАМИКЕ
НЕСЖИМАЕМОГО УПРУГО НЕОДНОРОДНОГО
ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СДВИГАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ
ПЕРЕМЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ**

Институт автоматизи и процессов управления ДВО РАН

Аннотация. Методом сращиваемых асимптотических разложений получено решение одномерной плоской краевой задачи о переменной сдвиговой нагрузке на границе нелинейно-упругого несжимаемого слабо неоднородного полупространства. Показано, что решение в прифронтной области определяется системой эволюционных уравнений относительно изменений квадрата интенсивности сдвига и его направленности. Получено ее общее решение, построено частное решение для иррациональных функций перемещений на нагружаемой границе.

Ключевые слова: нелинейно-упругая несжимаемая неоднородная среда, поперечные ударные волны, сдвиговая нагрузка с переменной направленностью, система эволюционных уравнений, эволюционное уравнение для изменения интенсивности сдвига, эволюционное уравнение для изменения направления сдвига.

УДК: 539.3

Введение. Математическому моделированию нелинейных динамических процессов в твердых телах посвящено большое количество работ [1], [2], [3], [4]. В них показано, что объемное деформирование и формоизменение взаимосвязаны и возникающие ударные волны носят квазипродольный или квазипоперечный характер. При этом сдвиговое деформирование не имеет аналогии с гидро- и газодинамикой, поэтому поперечные и квазипоперечные ударные волны менее изучены, чем продольные. Общая нелинейность краевых задач с ударными волнами приводит к невозможности получения точных решений. Поэтому возникает необходимость построения обобщенных приближенных аналитических или численных решений. Одним из эффективных аналитических методов решения задач нелинейной динамики является метод малого параметра [5]. Ранее [6], [7] метод сращиваемых асимптотических разложений при решении одномерных плоских задач с единственным волновым процессом приводил к анализу единственного эволюционного уравнения. Для продольных волн в однородных средах это было уравнение Коула-Хопфа [4], для поперечных волн — уравнение Коула-Хопфа для квадрата интенсивности волнового процесса [8]. В средах со слабой неоднородностью переход к эволюционному уравнению происходил при помощи рекуррентной цепочки внутренних задач с изменением всех зависимых переменных [9]. В данной статье рассматривается обобщение методики на случай присутствия нескольких ударных волн. Одномерный плоский волновой

Поступила 18.08.2014

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 14-01-31030 мол_а, 14-01-00292 А).

процесс, вызванный переменной нагрузкой на границе несжимаемого нелинейно-упругого полупространства, приводит к образованию ударных волн двух типов: плоскополяризованной волны и волны круговой поляризации. Дополнительным фактором, влияющим на деформирование, считаем неоднородность свойств среды в направлении движения ударных волн. Сделанные предположения позволяют одновременно учесть нелинейность модели, описывающей ударные волны, и неоднородность, возникающую в твердых телах больших размеров. Методом сращиваемых асимптотических разложений задача сводится к системе эволюционных уравнений, описывающих решение на достаточно больших расстояниях от нагружаемой границы. Авторами получено общее решение этой системы в случае распространения общего фронта волновых процессов; в качестве примера рассмотрено частное решение задачи при иррациональном краевом условии на границе полупространства.

1. Общие модельные соотношения и постановка краевой задачи. Рассмотрим замкнутую систему уравнений, описывающую движение нелинейно-упругой несжимаемой изотропной среды в пространственных декартовых координатах Эйлера x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 = const, \quad \dot{u}_i = (\delta_{ij} - u_{i,j}v_j), \quad 2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}, \\ \sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \quad \sigma_{ij} = -p_0\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \\ W(I_1, I_2) &= (a - \mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + \\ &\quad + dI_2^2 + kI_1^2 I_2 + \chi I_1^2 I_2 + \dots \\ I_1 &= \alpha_{ii}, \quad I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u_i, v_i — компоненты векторов перемещений и скорости, α_{ij}, σ_{ij} — компоненты тензоров деформаций Альманси и напряжений Эйлера-Коши, p_0 — функция добавочного гидростатического давления, W — функция упругого потенциала, задаваемого разложением в ряд Тейлора относительно свободного состояния, $\mu, a, b, \kappa, \theta, c, d, k, \chi$ — упругие модули среды в адиабатическом приближении, $\rho = \rho_0 = const$ — плотность среды. В системе (1.1) и далее принимается суммирование по повторяющемуся латинскому индексу, многоточием обозначены невыписанные слагаемые с более высокой малостью.

Дополнительно примем слабую неоднородность свойств среды линейного типа в направлении координатной оси x_1 :

$$\begin{aligned} \rho &= \tilde{\rho}_0 + \delta^2 \tilde{\rho}_1 s, \quad \mu = \mu_0 + \delta^2 \mu_1 s, \quad a = a_0 + \delta^2 a_1 s, \quad b = b_0 + \delta^2 b_1 s, \\ \kappa &= \kappa_0 + \delta^2 \kappa_1 s, \quad \theta = \theta_0 + \delta^2 \theta_1 s, \quad c = c_0 + \delta^2 c_1 s, \quad d = d_0 + \delta^2 d_1 s, \\ k &= k_0 + \delta^2 k_1 s, \quad \chi = \chi_0 + \delta^2 \chi_1 s, \quad s = \frac{x_1}{C_0 T}, \quad C_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\tilde{\rho}_0}}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где T и $C_0 T$ — характерное время и характерное расстояние, $\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1, \mu_0, \mu_1, a_0, a_1, b_0, b_1, \kappa_0, \kappa_1, \theta_0, \theta_1, c_0, c_1, d_0, d_1, k_0, k_1$ — константы, $\delta \ll 1$ — первый малый параметр задачи. Асимптотический анализ основной системы уравнений (1.1) далее покажет, что именно квадрат малого параметра δ позволит учесть и фактор неоднородности свойств материала, и нелинейность модельных соотношений.

Пусть, начиная с момента $t = 0$, к границе $x_1 = 0$ предварительно недеформированного несжимаемого полупространства $x_1 \geq 0$ приложены нагрузки:

$$\sigma_{1j} \Big|_{x_1=0, t \geq 0} = g_j(t), \quad j = 2, 3, \quad \sigma_{11} \Big|_{x_1=0, t \geq 0} = 0, \quad (1.3)$$

где $g_j(t)$ — известные функции времени. Считаем, что следствием такого нагружения будет поле перемещений $u_1 = 0, u_2 = u_2(x_1, t), u_3 = u_3(x_1, t)$ и мгновенно или с течением времени по среде начинают распространяться поверхности сильных разрывов — ударные волны. В этом

случае необходимо учитывать дополнительные условия: геометрические, кинематические и динамические условия совместности [10], [11]:

$$\begin{aligned}
[f, i] &= \left[\frac{df}{dn} \right] n_i + a^{\alpha\beta} [f]_{,\alpha} x_{i,\beta}, \quad [\dot{f}] = -G \left[\frac{df}{dn} \right] + \frac{\delta[f]}{\delta t}, \\
[\rho(v_i n_i - G)] &= 0, \quad [\sigma_{ij}] n_j = \rho^+ (v_j^+ n_j - G) [v_i], \\
\sigma_{ij}^+ [v_i] n_j &= \rho^+ (v_j^+ n_j - G) \left\{ \frac{[v_i][v_i]}{2} + [e] \right\} - [q_j] n_j, \\
a_{\alpha\beta} &= x_{i,\alpha} x_{i,\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial y^\beta}, \quad a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha, \quad n_i n_i = 1, \quad x_{i,\alpha} n_i = 0, \\
\frac{df}{dn} &= f_{,i} n_i, \quad [f] = f^+ - f^-, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где e — плотность распределения внутренней энергии, q_j — компоненты вектора теплового потока, n_i — компоненты единичной внешней нормали к поверхности ударной волны Σ , G — скорость ударной волны в направлении внешней нормали, y^α — поверхностные координаты, $a_{\alpha\beta}$ — ковариантная метрика на ударной волне, индексами «+» и «-» обозначаем предельные значения разрывной величины перед Σ и сразу за ней, квадратными скобками обозначен разрыв величины, заключенной в них, $\delta/\delta t$ — производная по Томасу [11] (дельта-производная).

В рассматриваемой задаче зависимость напряжений σ_{12} , σ_{13} от деформаций имеет вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} &= u_{2,1} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k h^k, \quad \sigma_{13} = u_{3,1} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k h^k, \quad h = \frac{u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2}{2}, \\
\gamma_0 &= \mu, \quad \gamma_1 = 2(a + b + \kappa + d), \dots
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Подстановка соотношений (1.5) в условия совместности (1.4) дает систему уравнений относительно компонент волнового вектора разрывов:

$$\begin{aligned}
\tau_2 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (h^+)^k - \left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k h^k \right] \right\} + u_{2,1}^+ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k h^k \right] &= \rho G^2 \tau_2, \\
\tau_3 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (h^+)^k - \left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k h^k \right] \right\} + u_{3,1}^+ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k h^k \right] &= \rho G^2 \tau_3, \\
\tau_2 &= [u_{2,1}], \quad \tau_3 = [u_{3,1}],
\end{aligned} \tag{1.6}$$

которая имеет нетривиальное решение в двух случаях. В первом из них $\frac{u_{2,1}^+}{u_{3,1}^+} = \frac{\tau_2}{\tau_3}$, т.е. предварительные деформации не изменяют свою направленность и по среде распространяется плоскополяризованная ударная волна Σ_1 со скоростью

$$\begin{aligned}
G_1 &= \left\{ \rho^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k h^k + \frac{u_{3,1}^+ - \tau_3}{\tau_3} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k h^k \right] \right) \right\}^{1/2}, \\
\frac{u_{3,1}^+ - \tau_3}{\tau_3} &= \frac{u_{2,1}^+ - \tau_2}{\tau_2}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Во втором случае $[h] = 0$ и по среде распространяется ударная волна круговой поляризации Σ_2 , изменяющая только направление предварительного сдвига без изменения его абсолютной величины. Скорость такой волны

$$G_2 = \left\{ \rho^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (h^+)^k \right\}^{1/2}. \tag{1.8}$$

Волна Σ_1 может возникать и на границе среды, и внутри объема. Волна Σ_2 образуется только на нагружаемой поверхности. Отметим, что скорость волны Σ_1 больше, чем скорость волны Σ_2 [12], [13]. Если предварительных деформаций в среде нет, то образуется общий передний фронт ударной волны Σ , скорость которого G вычисляется как

$$G = \left\{ \rho^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (h^-)^k \right\}^{1/2}. \quad (1.9)$$

На этой поверхности изменяется и интенсивность деформаций, и их направленность. Отметим, что волна круговой поляризации может образоваться и впоследствии при $t > 0$. В настоящей статье будем рассматривать решение задачи при условии общего единственного переднего фронта Σ ударного процесса. Исходя из такого предположения, поставим краевые условия на ударной волне:

$$u_2|_{\Sigma} = u_3|_{\Sigma} = 0, \quad x_1|_{\Sigma} = \int_0^t G(\xi) d\xi. \quad (1.10)$$

Из системы уравнений (1.1) остановимся на уравнениях движения Навье, определяющих кинематику точек среды:

$$\begin{aligned} & u_{2,11} (\mu + \alpha (u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2)) + 2\alpha u_{2,1} (u_{2,1}u_{2,11} + u_{3,1}u_{3,11}) + \mu_{,1}u_{2,1} + \\ & \quad + \alpha_{,1}u_{2,1} (u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2) + \dots = \rho\ddot{u}_2, \\ & u_{3,11} (\mu + \alpha (u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2)) + 2\alpha u_{3,1} (u_{2,1}u_{2,11} + u_{3,1}u_{3,11}) + \mu_{,1}u_{3,1} + \\ & \quad + \alpha_{,1}u_{3,1} (u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2) + \dots = \rho\ddot{u}_3, \\ & \quad \alpha = a + b + \kappa + d. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Поставленная краевая задача (1.3), (1.10), (1.11) существенно нелинейная, поэтому построить ее точное решение невозможно. Для получения ее приближенного аналитического решения воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений.

2. Метод малого параметра для одномерной задачи с переменной сдвиговой нагрузкой на границе. Для перехода к методу малого параметра введем безразмерные переменные внешней области:

$$s = \frac{x_1}{C_0 T}, \quad m = \frac{t}{T}, \quad w_i(s, m) = \frac{u_i(x_1, t)}{C_0 T} \varepsilon^{-1}, \quad i = 2, 3, \quad (2.1)$$

где ε — второй малый параметр задачи, связанный с относительной малостью возникающих на границе и внутри среды перемещений. Его конкретный вид определяется выбором функции $g_j(t)$. Перемещения u_2 и u_3 считаем одного порядка малости. Возможны различные варианты связи малых параметров задачи δ и ε , но наиболее интересный случай возникает, когда они равны. В переменных (2.1) система уравнений движения (1.11) и краевые условия (1.3) записываются как внешняя краевая задача:

$$\begin{aligned} & w_{i,ss} \{1 + \alpha_0 \varepsilon^2 s + \varepsilon^2 (\alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon^2 s) (w_{2,s}^2 + w_{3,s}^2)\} + 2\varepsilon^2 (\alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon^2 s) w_{i,s} (w_{2,s} w_{2,ss} + \\ & \quad + w_{3,s} w_{3,ss}) + \alpha_0 \varepsilon^2 w_{i,s} + \alpha_2 \varepsilon^4 w_{i,s} (w_{2,s}^2 + w_{3,s}^2) = (1 + \varepsilon^2 \rho_1 s) w_{i,mm}, \\ & \alpha_0 = \frac{\mu_1}{\mu_0}, \quad \rho_1 = \frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}_0}, \quad \alpha_1 = \frac{a_0 + b_0 + \kappa_0 + d_0}{\mu_0}, \quad \alpha_2 = \frac{a_1 + b_1 + \kappa_1 + d_1}{\mu_0}, \\ & \quad w_{i,s} \Big|_{s=0} = f_i(m), \quad i = 2, 3, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $f_i(m)$ — известные функции времени, определяемые граничными условиями (1.3). Искомые безразмерные перемещения представим асимптотическими рядами по четным степеням

малого параметра:

$$w_i(s, m) = w_{i0}(s, m) + \varepsilon^2 w_{i2}(s, m) + \varepsilon^4 w_{i4}(s, m) + \dots, \quad i = 2, 3. \quad (2.3)$$

Подстановка рядов (2.3) в формулы (2.2) позволяет получить внешнее решение до требуемого порядка методом последовательных линейных приближений:

$$\begin{aligned} w_i(s, m) = & - \int_0^\xi f_i(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} + \varepsilon^2 \left\{ -\frac{\alpha_0 + \rho_1}{4} s^2 f_i(\xi) - \frac{\alpha_1}{2} f_i(\xi) f(\xi) s - \right. \\ & \left. - \int_0^\xi \left(\frac{\alpha_0 - \rho_1}{4} \tilde{\xi} + \frac{\alpha_1}{2} f(\tilde{\xi}) \right) f_i(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} + \frac{\alpha_0 - \rho_1}{4} (\xi + s) \int_0^\xi f_i(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} \right\} + \dots, \quad (2.4) \\ & \xi = m - s, \quad f(\xi) = f_2^2(\xi) + f_3^2(\xi). \end{aligned}$$

Полученное решение (2.4) не может учесть условий, поставленных на ударной волне (1.10). Область неравномерности для рядов (2.4) впервые возникает при $s \sim \varepsilon^{-1}$, $\xi \sim 1$. Поэтому дополнительное внутреннее решение построим в прифронтальной области для переменных $n_1 = \varepsilon s$, $l = s - m$, $w_i = w_i(n_1, l)$, причем функции w_i представим асимптотическими рядами по степеням малого параметра ε . В результате на i -м шаге метода приходим к системе волновых уравнений:

$$h_{ji, n_1} + \frac{1}{2}(\alpha_0 - \rho_1)n_1 h_{ji, l} = H_{ji}, \quad h_{ji} = w_{ji, l}, \quad H_{j0} = 0, \quad j = 2, 3, \quad (2.5)$$

где функции $H_{ji}(n_1, l)$ определяются предыдущими шагами метода. Общее решение (2.5) в нулевом приближении представим в характеристическом виде:

$$\begin{aligned} h_{j0}(n_1, l) &= h_{j0} \left(l - \frac{1}{2} \gamma n_1^2 \right), \quad \gamma = \frac{1}{2}(\alpha_0 - \rho_1), \\ w_{j0}(n_1, l) &= \int h_{j0}(\zeta) d\zeta, \quad \zeta = l - \frac{1}{2} \gamma n_1^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Это решение показывает, что при $s \sim \varepsilon^{-1}$ необходимо учитывать уточнение полухарактеристической координаты l за счет неоднородности свойств среды. Переменная ζ лишь в предельном переходе при $n_1 \rightarrow 0$ дает исходное линейное представление характеристик.

Функции $w_{j1}(n_1, l)$, необходимые для определения последующей области неравномерности по пространственной координате, на следующем шаге метода задаются формулами:

$$\begin{aligned} w_{21}(n_1, l) &= \frac{1}{2}(\gamma - \alpha_0)w_{20}(\zeta)n_1 + \frac{\gamma}{6}(2\alpha_0 - \gamma)n_1^3 h_{20}(\zeta) - \frac{\alpha_1}{2}(h_{20}^3(\zeta) + \\ & \quad + h_{20}(\zeta)h_{30}^2(\zeta))n_1 + \vartheta_2(\zeta) + \eta_2(n_1), \\ w_{31}(n_1, l) &= \frac{1}{2}(\gamma - \alpha_0)w_{30}(\zeta)n_1 + \frac{\gamma}{6}(2\alpha_0 - \gamma)n_1^3 h_{30}(\zeta) - \frac{\alpha_1}{2}(h_{30}^3(\zeta) + \\ & \quad + h_{30}(\zeta)h_{20}^2(\zeta))n_1 + \vartheta_3(\zeta) + \eta_3(n_1), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где функции $\vartheta_j(\zeta)$, $\eta_j(n_1)$ находятся из краевых условий (1.10) и сравнения с внешним решением (2.4). При этом решение не только определяется системой падающих характеристик, но и косвенно через функции $\eta_j(n_1)$ учитывает взаимодействие падающих характеристик с волной и отражение характеристик. Неизвестные функции $\vartheta_j(\zeta)$, $\eta_j(n_1)$ не влияют на оценку равномерности полученного решения. Неравномерность рядов для функций $w_j(n_1, l)$ возникает при $n_1 \sim \varepsilon^{-1/3}$, $\zeta \sim 1$. Поэтому следующими переменными выберем:

$$\begin{aligned} \theta &= l - \frac{1}{2} \gamma n_1^2, \quad x = \varepsilon^{1/3} n_1 = \varepsilon^{4/3} s, \quad w_j = w_j(x, \theta), \\ w_j(x, \theta) &= w_{j0}(x, \theta) + \varepsilon^{2/3} w_{j1}(x, \theta) + \varepsilon^{4/3} w_{j2}(x, \theta) + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Запись уравнений движения (2.2) в переменных (2.8) приводит на нулевом шаге метода к уравнениям

$$w_{j0,\theta x} + \frac{1}{2}\gamma(\gamma - 2\alpha_0)xw_{j0,\theta\theta} = 0, \quad (2.9)$$

решения которых

$$h_{j0} = w_{j0,\theta}, \quad h_{j0} = F_j(\sigma) = F_j\left(\theta - \frac{1}{6}\gamma(\gamma - 2\alpha_0)x^3\right) \quad (2.10)$$

строятся вдоль вновь уточненных характеристик. Две рассмотренные выше внутренние области носят промежуточный характер. Они показывают, что неоднородность среды приводит к необходимости построения предельной цепочки рекуррентных внутренних задач, связанных со сжатием пространственной координаты s в $2k/(k+1)$ раз для k -ой задачи и уточнением полухарактеристики за счет накопления неоднородных свойств среды. Предельная внутренняя задача получается при $k \rightarrow \infty$. При этом происходит совместное изменение обеих координат, выполненное специальным образом:

$$n = \varepsilon^2 s = \lim_{k \rightarrow \infty} n_k, \quad n_k = \varepsilon^{\frac{2k}{k+1}} s, \quad r = s - m - \sum_{k=1}^{\infty} R_k \varepsilon^{2k} s^{k+1}, \quad w_i = w_i(n, r), \quad (2.11)$$

константы R_k вычисляются при последовательном сжатии пространственной переменной. Заметим, что $r = \varepsilon^{-2}(n - \sum_{k=1}^{\infty} R_k n^{k+1}) - m$, и определим функцию, отражающую искажение полухарактеристики:

$$\Psi(n) = \left(n - \sum_{k=1}^{\infty} R_k n^{k+1}\right)' = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} R_k (k+1)n^k. \quad (2.12)$$

Записывая уравнения движения задачи в переменных (2.11) с учетом (2.12) и представляя неизвестные функции безразмерных перемещений $w_i(n, r)$ асимптотическими рядами по четным степеням малого параметра, получим, что нетривиальное решение при минимальной степени малого параметра возможно при

$$\Psi(n) = \sqrt{\frac{1 + \rho_1 n}{1 + \alpha_0 n}}. \quad (2.13)$$

С учетом (2.13) в нулевом приближении получим систему двух эволюционных уравнений:

$$\begin{aligned} (1 + \alpha_0 n)\Psi y_{,n} + \frac{3}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 n)\Psi^4 y y_{,r} + (\alpha_0 \Psi + (1 + \alpha_0 n)\Psi')y &= 0, \\ (1 + \alpha_0 n)z_{,n} + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 n)\Psi^3 y z_{,r} &= 0, \\ y = w_{20,r}^2 + w_{30,r}^2, \quad z = w_{30,r} w_{20,r}^{-1} & \end{aligned} \quad (2.14)$$

описывающих два волновых процесса. Один из них показывает изменение квадрата интенсивности воздействия, второй связан исключительно с изменением направления воздействия. В формулах (2.14) эти процессы представлены первым и вторым уравнениями соответственно. При этом изменение квадрата интенсивности сдвига y полностью определяется первым уравнением. На определение изменения угла направленности сдвига z влияют структура y , нелинейность задачи и неоднородность среды. Дополнительно отметим, что структура функции $\Psi(n)$ связана с предположением о линейной по пространственной координате неоднородности свойств среды. При выборе другой функциональной зависимости сам вид уравнений системы (2.14) и область значений пространственной координаты, для которой они решаются, могли бы измениться. В случае однородной среды ($\alpha_0, \rho_1 = 0$) функция $\Psi(n)$ перестает играть роль масштабного фактора и система эволюционных уравнений (2.14) сводится к системе уравнений для среды, однородной по своим свойствам [14].

Применяя к системе уравнений (2.14) преобразование годографа и вводя замену переменной, ее общее решение можно представить в виде соотношений

$$\begin{aligned} r - \frac{3}{2}y_1(n)N(n) &= \Phi_1(y_1), \quad y_1^{3/2}N(n) + \int y_1^{1/2}\Phi_1'(y_1)dy_1 = \Phi_2(z), \\ y_1(n) &= y(1 + \alpha_0n)\Psi(n), \quad N(n) = \int (\alpha_1 + \alpha_2n)(1 + \alpha_0n)^{-2}(\Psi(n))^2 dn, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\Phi_1(y_1)$ и $\Phi_2(z)$ — неизвестные функции, определяемые из сопоставления внешнего и внутреннего решений.

В качестве одного из наиболее простых примеров решения данной задачи рассмотрим иррациональные краевые условия вида

$$w_{i,s}|_{s=0} = \sqrt{A_i - B_i m}, \quad A_i, B_i = \text{const}, \quad i = 2, 3, \quad (2.16)$$

которые означают мгновенное образование двух совпавших волновых фронтов. Внешнее решение получим подстановкой краевых условий (2.16) в формулы (2.4). Сравнение внешнего решения и общего представления внутреннего решения (2.15) позволяет предположить, что для внутренней области выполняется условие

$$\begin{aligned} y_1 &= F\left(r - \frac{3}{2}y_1(n)N(n)\right) = a + b\left(r - \frac{3}{2}y_1(n)N(n)\right), \\ F &= \Phi_1^{-1}, \quad a = A_1 + A_2, \quad b = B_1 + B_2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где F — обратная функция к $\Phi_1(y_1)$. Тогда из формул (2.17) и (2.15) для поставленной задачи получим

$$\begin{aligned} y_1(n, r) &= \frac{a + br}{1 + \frac{3}{2}bN(n)}, \\ z(n, r) &= \frac{\sqrt{E_1\left(1 + \frac{3}{2}bN(n)\right)^{1/3} + E_2(a + br)}}{\sqrt{E_3\left(1 + \frac{3}{2}bN(n)\right)^{1/3} + E_4(a + br)}}, \\ E_1 = -E_3 &= \frac{A_2B_1 - B_2A_1}{b\left(1 - \frac{3b}{4}(\alpha_1\alpha_0 + \alpha_1\rho_1 + \alpha_0 + 3\rho_1)\right)^{1/3}}, \quad E_2 = \frac{B_2}{b}, \quad E_4 = \frac{B_1}{b}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для определения поля перемещений учитываем, что

$$w_{2,r} = z\sqrt{\frac{y_1}{(1 + \alpha_0n)\Psi(1 + z^2)}}, \quad w_{3,r} = \sqrt{\frac{y_1}{(1 + \alpha_0n)\Psi(1 + z^2)}}. \quad (2.19)$$

Подставляя в соотношения (2.19) формулы (2.18) и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} w_2(n, r) &= \frac{2\left\{E_1\left(1 + \frac{3}{2}bN(n)\right)^{1/3} + E_2(a + br)\right\}^{3/2}}{3B_2\left(1 + \frac{3}{2}bN(n)\right)^{1/2}(1 + \rho_1n)^{1/4}(1 + \alpha_0n)^{1/4}} + \varphi_2(n), \\ w_3(n, r) &= \frac{2\left\{E_3\left(1 + \frac{3}{2}bN(n)\right)^{1/3} + E_4(a + br)\right\}^{3/2}}{3B_1\left(1 + \frac{3}{2}bN(n)\right)^{1/2}(1 + \rho_1n)^{1/4}(1 + \alpha_0n)^{1/4}} + \varphi_3(n), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $\varphi_2(n)$ и $\varphi_3(n)$ — неизвестные функции, которые находим из краевых условий (1.10):

$$w_2|_{r=r(n)} = 0, \quad w_3|_{r=r(n)} = 0, \quad (2.21)$$

где функция $r(n)$ задает положение ударной волны. Положение переднего фронта ударной волны в нулевом приближении определяется решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dr_0}{dn} &= \frac{1}{2} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 n}{1 + \alpha_0 n} \Psi^3(n) (w_{20,r}^2 + w_{30,r}^2), \\ r(n) &= r_0(n) + \varepsilon^2 r_2(n) + \dots, \quad r_0(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Найденная функция $r_0(n)$ позволяет получить неизвестные функции:

$$\begin{aligned} \varphi_2(n) &= - \frac{2A_2^{3/2}}{3B_2(1 + \rho_1 n)^{1/4}(1 + \alpha_0 n)^{1/4} \left(1 - \frac{3b}{4}(\alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_0 + 3\rho_1)\right)^{1/2}}, \\ \varphi_3(n) &= - \frac{2A_1^{3/2}}{3B_1(1 + \rho_1 n)^{1/4}(1 + \alpha_0 n)^{1/4} \left(1 - \frac{3b}{4}(\alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_0 + 3\rho_1)\right)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

В результате находим точное решение задачи для нулевого шага метода. Построенное решение — простейшее, так как координата r , связанная со временем, имеет ту же форму зависимости, что и нагрузка на границе. В более общем случае решение будет отражать и затухание импульса по координате, и его искажение.

3. Заключение. В статье рассмотрена одномерная краевая задача о динамическом деформировании нелинейно-упругой несжимаемой среды, вызванном переменной сдвиговой нагрузкой на границе, с распространением по среде общего переднего фронта волновых процессов. В общем случае возможно существование двух типов ударных волн: плоскополяризованной волны и ударной волны круговой поляризации. Влияние фактора неоднородности свойств материала приводит к необходимости изменять в прифронтовой области ударной волны все безразмерные переменные внутренней задачи метода малого параметра специальным образом. Показано, что в этом случае решение определяется системой эволюционных уравнений. При этом одно из уравнений системы отвечает за изменение величины первоначального сдвига, а другое — за изменение его направленности. Получено общее решение этой системы, построено частное решение для иррациональных краевых условий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Бленд, Д. Р.* Нелинейная динамическая теория упругости / Д. Р. Бленд. — М. : Мир, 1972. — 183 с.
- [2] *Гельфанд, И. М.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений / И. М. Гельфанд // Успехи матем. наук. — 1959. — Т. 14. — № 9. — С. 87-158.
- [3] *Рождественский, Б. Л.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. — М. : Наука, 1978. — 688 с.
- [4] *Уизем, Дж.* Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. — М. : Мир, 1977. — 622 с.
- [5] *Ван-Дайк, М.* Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. — М. : Мир, 1967. — 239 с.
- [6] *Буренин, А. А.* Эволюционное уравнение для волновых процессов формоизменения / А. А. Буренин, В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова. // Известия СГУ. Серия «Математика. Механика. Информатика». — 2009. — Т. 9. — Вып. 4. — Ч. 2. — С. 14-24.

- [7] Рагозина, В. Е. Об эволюционных уравнениях задач ударного деформирования с плоскими поверхностями разрывов / В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2. – № 3. – С. 82–95.
- [8] Рагозина, В. Е. Эволюционное уравнение для одномерных сдвиговых волн разрыва деформаций / В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2011. – № 2(83). – С. 91–104.
- [9] Рагозина, В. Е. Влияние неоднородности среды на эволюционные уравнения плоских ударных волн / В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова // ПМТФ. – 2013. – Т. 54. – № 5. – С. 142–153.
- [10] Седов, Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1,2. Изд-е 2-ое испр. и дополн. / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1973. – Т. 1. – 536 с. Т. 2. – 584 с.
- [11] Томас, Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М. : Мир, 1964. – 308 с.
- [12] Куликовский, А. Г. Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. – М. : Московский Лицей, 1998. – 412 с.
- [13] Буренин, А. А. Динамика упругих сред при ударных воздействиях : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А. А. Буренин. – Владивосток, 1990. – 26 с.
- [14] Рагозина, В. Е. Об ударной деформации несжимаемого полупространства под действием сдвигающей нагрузки переменного направления / В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова // Сибирский журнал промышленной математики. – 2014. – Т. 17. – № 2(58). – С. 87–96.

Рагозина Виктория Евгеньевна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики деформирования отдела механики деформируемого твердого тела, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток

e-mail: ragoza@vlc.ru

Иванова Юлия Евгеньевна,

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики деформирования отдела механики деформируемого твердого тела, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток

e-mail: ivanova@iacp.dvo.ru

V. E. Ragozina, Y. E. Ivanova

**THE PERTURBATION METHOD IN ONE-DIMENSIONAL DYNAMICS OF
INHOMOGENEOUS INCOMPRESSIBLE ELASTIC HALF-SPACE UNDER THE
ACTION OF SHEAR LOADING OF A VARIABLE DIRECTION**

*Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far
Eastern Branch of Russian Academy of Sciences*

Abstract. The solution of one-dimensional boundary value problems for the variable shear loading at the boundary of nonlinear elastic incompressible weakly inhomogeneous half-space is obtained by the matched asymptotic expansions method. It is shown that the solution in the frontal region is determined by the system of evolution equations for the changes in the square of the shear intensity and shear direction. Its general solution is obtained, the particular solution for irrational functions of loading on the boundary is constructed.

Keywords: nonlinear elastic incompressible inhomogeneous medium, transverse shock waves, shear load with variable directivity, the evolution equations system, the evolution equation for the change of shear intensity, the evolution equation for the change of shear direction.

REFERENCES

- [1] *Bland, D. R.* Nonlinear dynamic theory of elasticity / D. R. Bland. – M. : Mir, 1972. – 183 p.
- [2] *Gelfand, I. M.* Some problems in the theory of quasilinear equations / I. M. Gelfand // Successes of Mathematical Sciences. – 1959. – Vol. 14. – No. 9. – P. 87–158.
- [3] *Rozhdestvensky, B. L.* Systems of quasilinear equations and their applications in gas dynamics / B. L. Rozhdestvensky, N. N. Yanenko. – M. : Nauka, 1978. – 688 p.
- [4] *Whitham, G. B.* Linear and Nonlinear Waves / G. B. Whitham. – M. : Mir, 1977. – 622 p.
- [5] *Van Dyke, M.* Perturbation methods in fluid mechanics / M. Van Dyke. – M. : Mir, 1967. – 239 p.
- [6] *Burenin, A. A.* The evolutionary equation for wave processes of the shift deformation / A. A. Burenin, V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova // Proceedings of the SSU. Series "Mathematics. Mechanics. Informatics". – 2009. – Vol. 9. – No. 4. – Ch. 2. – P. 14–24.
- [7] *Ragozina, V. E.* About the evolutionary equations of flat problems of a shock straining of solids / V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova // Computational Continuum Mechanics. – 2009. – Vol. 2. – No 3. – P. 82–95.
- [8] *Ragozina, V. E.* The evolutionary equation for one-dimensional shift waves of a rupture of strains / V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova // Vestnik of Samara State University. Natural Science Series. – 2011. – № 2(83). – P. 91–104.
- [9] *Ragozina, V. E.* Effect of the medium inhomogeneity on the evolution equation of plane shock waves / V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2013. – Vol. 54. – No 5. – P. 809–818.
- [10] *Sedov, L. I.* Continuum mechanics. Vol. 1,2. 2nd edition revised and updated / L. I. Sedov. – M. : Nauka, – 1973. – Vol. 1. – 536 p. Vol. 2. – 584 p.
- [11] *Tomas, T.* Plastic Flow and Fracture in Solids / T. Y. Thomas – Academic Press, 1961. – 267 p.
- [12] *Kulikovskii, A. G.* Nonlinear waves in elastic mediums / A. G. Kulikovskii, E. I. Sveshnikova. – M. : Moscow Lyceum, 1998. – 412 p.
- [13] *Burenin, A. A.* Dynamics of elastic mediums under impact loading / A. A. Burenin. – Dissertation ... Dr. Sci. Vladivostok, 1990. – 236 p.
- [14] *Ragozina, V. E.* On the impact deformation of an incompressible half-space under action of a shear load of variable direction / V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2014. – Vol. 8. – No 3. – P. 1–10.

Ragozina, Victoria Evgenevna

Candidate of Phys.&Math., Senior researcher, Laboratory of Nonlinear dynamics of deformation, Department of Mechanics of Deformable Solid, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok

Ivanova, Yulia Evgenevna

Candidate of Phys.&Math., Researcher, Laboratory of Nonlinear dynamics of deformation, Department of Mechanics of Deformable Solid, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА КАК ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Тулский государственный университет

Аннотация. В научной и учебной литературе плоская задача Сен-Венана трактуется как задача плоской деформации при справедливости условия пластичности Треска. Показано, что построения Сен-Венана представляют собой задачу предельного плоского чистого сдвига в условиях плоской деформации. Отмечается, что при такой постановке задачи нет необходимости в использовании условия пластичности.

Ключевые слова: уравнения равновесия, предельное условие сдвига, промежуточное главное напряжение, плоский чистый сдвиг.

УДК: 539.3; 539.214

1. Задача Сен-Венана. Почти полтора века назад в 1870 г. Сен-Венан (B. de Saint-Venant) предложил соотношения [17], описывающие пластическое течение идеально вязных изотропных сред для случая плоской задачи.

Сен-Венан рассмотрел плоскую задачу в декартовых координатах x, z , предполагая, что скорость пластического течения в направлении оси y отсутствует. В соответствии с современной терминологией Сен-Венан ввел гипотезу о плоской деформации.

Далее Сен-Венан считает напряжение σ_y главным. Отсюда следуют соотношения для касательных напряжений

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0. \quad (1.1)$$

В силу этой гипотезы уравнения равновесия принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (1.2)$$

В этих уравнениях опущены правые части.

Из уравнений (1.2) следует, что формально задача является один раз статически неопределимой. На самом деле она является два раза статически неопределимой, поскольку неизвестными являются четыре напряжения: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xz}$.

Формально статически определимой плоскую задачу Сен-Венан делает посредством введения гипотезы: “на площадке, перпендикулярной плоскости xz , но вообще говоря, наклонной к x и z , где касательное напряжение является наибольшим, это последнее равно постоянному максимальному сопротивлению сдвига, обозначенному Треска через $K \dots$ ” [17].

Значение константы K определяется экспериментально при чистом сдвиге.

Таким образом, Сен-Венан вводит гипотезу о предельном касательном напряжении

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\sigma_{xz}^2 = 4K^2. \quad (1.3)$$

Вследствие принятой гипотезы для определения трех напряжений $\sigma_x, \sigma_z, \sigma_{xz}$ имеется три уравнения (1.2) и (1.3). По терминологии Г. Генки (H. Hencky, 1924 г.) [1], задача является формально статически определимой.

Поэтому несмотря на то, что в статье Сен-Венана промежуточное главное напряжение σ_y не определено, все же в рамках соотношений для поля напряжений, выписанных Сен-Венаном, имеется возможность вычислить это напряжение.

Сен-Венан пишет: “Отсюда следует, что в рассматриваемом нами теле внутренние напряжения сводятся к нормальному давлению $p = (\sigma_x + \sigma_z)/2$, одинаковому **во всех** направлениях ...”. (Шрифт выделен автором статьи.)

Поскольку значение p является инвариантной характеристикой в плоскости xz , то это утверждение является естественным для этой плоскости xz . Однако если эту фразу понимать буквально, то в направлении оси y давлению p соответствует напряжение

$$\sigma_y = p = (\sigma_x + \sigma_z)/2. \quad (1.4)$$

Таким образом, задача становится статически определимой.

Конечно, можно возразить, что Сен-Венан фразой “во всех направлениях” подразумевал все направления только в плоскости xz .

Тогда обратимся в статье Сен-Венана к формуле (1). В уравнениях движения жидкости фигурирует характеристика напряженного состояния “ p – давление, предполагаемое одинаковым для всех направлений в каждой точке жидкости”.

Давление, предполагаемое одинаковым во всех направлениях, по современной терминологии называется гидростатическим давлением и вычисляется по формуле

$$p = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3. \quad (1.5)$$

Сравнивая значения p в плоской и объемной задаче, получим соотношение (1.4).

Согласно гипотезе (1.4) Сен-Венан рассматривает предельный плоский чистый сдвиг, на который наложено гидростатическое давление p , в условиях плоской деформации.

Поэтому соотношение (1.4) следует воспринимать как гипотезу Сен-Венана о предельном плоском чистом сдвиге. Эта гипотеза осталась в теории идеальной пластичности незамеченной исследователями в течение почти полутора столетий.

Таким образом, гениальная интуиция Сен-Венана определила плоскую задачу как плоский чистый сдвиг при предельном сопротивлении K в условиях плоской деформации.

2. О промежуточном главном напряжении. По определению, условием пластичности Треска постулируется, что промежуточное главное напряжение не влияет на процесс пластического течения. Следовательно, в рамках условия пластичности Треска без привлечения дополнительных гипотез нельзя определить промежуточное главное напряжение.

Однако на протяжении около 150 лет попытки определения промежуточного главного напряжения не прекращались [9], [13].

В 1871 г. М. Леви (M. Levy) [9] ввел гипотезу о пропорциональности компонент тензоров девиаторов напряжений и скоростей деформаций. Он установил, что если плоский сдвиг происходит в условиях плоской деформации, то промежуточное главное напряжение определяется соотношением (1.4).

Статья М. Леви, по существу говоря, является продолжением статьи Сен-Венана [16], поскольку в ней сохранена нумерация формул статьи Сен-Венана. Очевидно, что основной целью статьи М. Леви было получение соотношения (1.4). Запись уравнения грани призмы Треска через компоненты тензора напряжений является побочным продуктом. Таким образом, для вычисления промежуточного главного напряжения М. Леви привлек дополнительную гипотезу о пропорциональности компонент девиаторов напряжений и скоростей деформаций для случая пластического деформирования в условиях трехмерного напряженного состояния.

Следует отметить, что предположение о пропорциональности компонент тензоров девиаторов напряжений и скоростей деформаций не вытекает из условия пластичности Треска.

Гораздо позже было установлено, что М. Леви предвосхитил ассоциированный закон пластического течения Р. Мизеса (R. Mises, 1923).

Приведем еще одну попытку вычисления промежуточного главного напряжения, исходя из критерия пластичности Треска и условия плоской деформации, сделанную уже в наши дни [13].

Рассмотрим трехмерное векторное пространство главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Если через гидростатическую ось этого пространства и направления главных напряжений провести три плоскости, то они разделят векторное пространство на шесть равных сегментов, а девиаторную плоскость соответственно на шесть секторов. Введем нумерацию секторов арабскими цифрами в направлении против хода часовой стрелки от положительной проекции главного напряжения $\vec{\sigma}_1$. Поскольку на плоскостях между сегментами промежуточное главное напряжение является кратным (оно равно минимальному или максимальному главному напряжению), то эти плоскости называются плоскостями кратности.

Введем главные ранжированные напряжения $\sigma_{\max} \geq \sigma_{int} \geq \sigma_{\min}$, где $\sigma_{\max}, \sigma_{int}, \sigma_{\min}$ – максимальное, промежуточное и минимальное главные напряжения.

Критерий пластичности Треска, записанный через ранжированные главные напряжения, имеет вид:

$$(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})^2 - (2K)^2 = 0. \quad (2.1)$$

В зависимости от нумерации главных напряжений, можно записать три варианта соотношения (2.1) [6], [7], [8]:

– для секторов 3 и 6:

$$k_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (2K)^2 = 0, \quad \sigma_{int} = \sigma_3;$$

– для секторов 2 и 5:

$$k_{23}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (2K)^2 = 0, \quad \sigma_{int} = \sigma_1;$$

– для секторов 1 и 4:

$$k_{31} = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (2K)^2 = 0, \quad \sigma_{int} = \sigma_2.$$

В некоторых практически важных задачах заранее удастся установить, какую из трех форм записи критерия Треска использовать. Однако в общем случае заранее выбрать одно из трех соотношений не удастся.

В связи с этим А. Хаар (A. Haar) и Т. Карман (Th. von Karman) в 1909 году предложили условие пластичности (1.5) записать в виде [15]:

$$k(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = k_{12}k_{23}k_{31} = 0. \quad (2.2)$$

Если в уравнении (1.6) три множителя отрицательны, то сплошная среда находится в упругом состоянии. Если же два множителя в уравнении (2.2) равны нулю, то по терминологии А. Хаара и Т. Кармана сплошная среда находится в состоянии полной пластичности, т.е. осуществляется предельный пространственный сдвиг. Если же в уравнении (1.6) только один из множителей равен нулю, то сплошная среда находится в состоянии неполной пластичности (по современной терминологии осуществляется плоский пластический сдвиг). Такому плоскому сдвигу в трехмерном векторном пространстве главных напряжений соответствуют все области каждого из сегментов трехмерного векторного пространства главных напряжений [6], [7], [8], за исключением областей, напряженное состояние которых соответствует крайним значениям параметра Лоде [10] $\mu_\sigma = \pm 1$. Параметр Лоде вычисляется по формуле А. А. Ильюшина [3]:

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_{int} - \sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}. \quad (2.3)$$

Напряженное состояние, соответствующее предельному пространственному сдвигу, принадлежит плоскостям кратности промежуточного главного напряжения [7].

Через ось гидростатического напряжения проведем плоскости, которые делят каждый из сегментов на две равные части. На этих плоскостях напряженное состояние характеризуется максимальным касательным напряжением и двумя касательными напряжениями, составляющими по 1/2 от величины максимального касательного напряжения. Поскольку на этих плоскостях реализуется плоский чистый сдвиг, они называются плоскостями чистого сдвига. Плоскости чистого сдвига характеризуются параметром Лоде $\mu_\sigma = 0$.

Рассмотрим логику получения соотношения (2.3). Поскольку векторное пространство главных напряжений дискретно [6], [7], [8], то условие пластичности (2.1) должно быть записано через компоненты главных напряжений для каждого из секторов девиаторной плоскости.

В таблице 2.1 приведены записи критерия Треска для каждого из секторов девиаторной плоскости.

Таблица 2.1

1	2	3
$\sigma_1^{(1)} - \sigma_3^{(1)} = 2K$	$\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)} = 2K$	$\sigma_2^{(3)} - \sigma_1^{(3)} = 2K$
4	5	6
$\sigma_3^{(4)} - \sigma_1^{(4)} = 2K$	$\sigma_3^{(5)} - \sigma_2^{(5)} = 2K$	$\sigma_1^{(6)} - \sigma_2^{(6)} = 2K$

Эти соотношения отражают запись уравнений граней призмы Треска.

Несложно убедиться, что для трех зон на девиаторной плоскости, состоящих из спаренных секторов, критерий пластичности Треска можно записать в виде таблицы 2.2.

Таблица 2.2

1,4	2,5	3,6
$(\sigma_1^{(1,4)} - \sigma_3^{(1,4)})^2 - 4K^2 = 0$	$(\sigma_2^{(2,5)} - \sigma_3^{(2,5)})^2 - 4K^2 = 0$	$(\sigma_2^{(3,6)} - \sigma_1^{(3,6)})^2 - 4K^2 = 0$

Из таблицы 2.2 следует, что А. Хаар и Т. Карман соотношением (2.2) записали условие пластичности Треска как условие пластичности Треска применительно к пространственному напряженному состоянию.

В [12] и [13], считая σ_3 промежуточным главным напряжением и принимая условие (2.2) в качестве пластического потенциала, получено соотношение для вычисления скорости промежуточной главной деформации

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial k(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\partial \sigma_3} = 2k_{12}[(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) - (2k_0)^2][\sigma_3 - \sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_2]. \quad (2.3)$$

В случае плоской деформации $\varepsilon_3 = 0$; на основании уравнения (2.3) делается вывод, что последний множитель в соотношении (2.3) равен нулю,

$$(\sigma_3 - \sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_2) = 0 \quad (2.4)$$

и отсюда

$$\sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_2)/2. \quad (2.5)$$

Этот вывод некорректен. Поскольку σ_3 является промежуточным главным напряжением, то условие пластичности Треска записывается в форме $k_{12} = 0$ и условие $\varepsilon_3 = 0$ тождественно удовлетворяется и при ограничениях

$$[(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) - (2K)^2] \neq 0, \quad [\sigma_3 - \sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_2] \neq 0. \quad (2.6)$$

3. Предельный плоский сдвиг в условиях плоской деформации. В многочисленной научной и учебной литературе по теории идеальной пластичности [2], [4], [5], [11], [12], [13], [14], гипотеза (1.3) трактуется как использование Сен-Венаном условия пластичности Треска.

Например, в монографии [4] А. Ю. Ишлинский и Д. Д. Ивлев на странице 11 пишут: “В 1870 году Сен-Венан использовал условие пластичности Треска и предложил соотношения, описывающие идеальное пластическое течение в случае плоской задачи”.

Аналогично, в статье [13] Ю. Н. Радаев отмечает: “Сен-Венан (В. Saint-Venant. 1870 г.) одним из первых признал важность открытия Треска и использовал критерий максимального касательного для построения математической теории пластичности”.

Таким образом, в научной и учебной литературе по теории идеальной пластичности осталось незамеченным то обстоятельство, что Сен-Венан дал постановку плоской задачи как задачи теории предельного состояния.

Ниже изложим ремейк статьи Сен-Венана при использовании соотношений трехмерного напряженного и деформированного состояния.

3.1. Напряженное состояние. Сплошную среду отнесем к декартовой системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$). Напряженное состояние в элементе сплошной среды будем характеризовать симметричным тензором напряжений σ_{ij} или тройкой ранжированных напряжений σ_{\max} , σ_{int} , σ_{\min} и ортом их направлений. Растягивающие напряжения считаются положительными. Для возможности использования тензорного формализма будем использовать также обозначения $\sigma_{\max} = \sigma_1^r$, $\sigma_{\text{int}} = \sigma_2^r$, $\sigma_{\min} = \sigma_3^r$.

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с ранжированными напряжениями σ_i^r соотношениями

$$\sigma_{ij} = \sum_{m=1}^3 r_{im}r_{jm}\sigma_m^r, \quad (3.1.1)$$

где r_{im} – направляющие косинусы ранжированных напряжений по отношению к лабораторной системе координат. Направляющие косинусы должны удовлетворять условиям ортогональности

$$r_{im}r_{jm} = \delta_{ij} \quad \text{или} \quad r_{ij}r_{im} = \delta_{jm}. \quad (3.1.2)$$

Для ранжированных напряжений справедливы зависимости [69]

$$\sigma_{\max} = \sigma + a_1 T, \quad \sigma_{\text{int}} = \sigma + a_2 T, \quad \sigma_{\min} = \sigma - a_3 T, \quad (3.1.3)$$

где $a_1 = 1 - \mu_\sigma/3$, $a_2 = 2\mu_\sigma/3$, $a_3 = 1 + \mu_\sigma/3$. В соотношениях (3.1.3) фигурируют инварианты тензора напряжений: $\sigma = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$ – гидростатическое давление; $T = (\sigma_1^r - \sigma_3^r)/2$ – максимальное касательное напряжение

Подставляя зависимости (2.3) в соотношения (2.1), получим

$$\sigma_{ij} = Q\delta_{ij} + (Mr_{i1}r_{j1} - Nr_{i3}r_{j3})T, \quad (3.1.4)$$

где $Q = \sigma + 2\mu_\sigma T/3$, $M = 1 - \mu_\sigma$, $N = 1 + \mu_\sigma$.

Аналогично можно записать соотношения и для компонент тензора скоростей деформаций ε_{ij} .

3.2. Предельное состояние плоского сдвига. Выше было показано, что при плоском чистом сдвиге параметр Лоде равен нулю и задача относится к задачам теории предельного состояния.

Докажем, что любые мыслимые условия пластичности изотропных идеально связных сред, согласованные с экспериментом при плоском чистом сдвиге, приводят к одному и тому же критерию предельного состояния плоского сдвига.

Следует пояснить, что условие пластичности отличается от условия предельного состояния тем, что оно позволяет прогнозировать переход сплошной среды в пластическое состояние при любом виде напряженного состояния, а критерий предельного состояния фиксирует переход сплошной среды в состояние, при котором исчерпан предел несущей способности.

Условие пластичности изотропной идеально связной среды можно записать в общем виде

$$\Sigma_d = f(\mu_\sigma), \quad (3.2.1)$$

где $\Sigma_d = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2}/\sqrt{3}$ – модуль девиаторных напряжений [20].

Если учесть, что для модуля девиаторных напряжений Σ_d и максимального касательного напряжения справедлива зависимость [14]

$$\Sigma_d = T\sqrt{2(1 + \mu_\sigma^2/3)}, \quad (3.2.2)$$

то условию пластичности (3.2.1) можно придать вид

$$T = [2(1 + \mu_\sigma^2/3)]^{-1/2} f(\mu_\sigma). \quad (3.2.3)$$

В случае если напряженное состояние соответствует значению $\mu_\sigma = 0$, условие пластичности (3.2.3) переходит в критерий предельного состояния плоского чистого сдвига

$$T = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = K, \quad \sigma_{int} = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2, \quad (3.2.4)$$

где $K = f(\mu_\sigma)|_{\mu_\sigma=0}/\sqrt{2}$ – предельное значение максимального касательного напряжения изотропной идеально связной среды при плоском чистом сдвиге. Величина K определяется из эксперимента в режиме нагружения $\mu_\sigma = 0$. Простейшим экспериментом в этом режиме нагружения является эксперимент на кручение трубчатого образца.

Критерий предельного состояния (3.2.4) указывает на сдвиговую природу пластического деформирования при чистом плоском сдвиге и справедлив для любых идеально связных изотропных сред.

Поскольку напряженное состояние при плоском чистом сдвиге в пространстве напряжений характеризуется значением параметра Лодэ равным нулю, то такому виду напряженного состояния для промежуточного главного напряжения соответствует соотношение

$$\sigma_{int} = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2. \quad (3.2.5)$$

Зависимость (3.2.5) является фундаментальным соотношением предельного чистого плоского сдвига.

При плоском чистом сдвиге уравнения (3.1.4) принимают вид

$$\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + (r_{1i}r_{1j} - r_{2i}r_{2j})T. \quad (3.2.6)$$

3.3. Уравнения теории предельного состояния плоского чистого сдвига в условиях плоской деформации.

Рассмотрим класс задач, в которых известно направление промежуточного ранжированного напряжения $\sigma_{int} = \sigma_2^r = \sigma_3$. То есть напряженное состояние отнесем к шестому сегменту трехмерного векторного пространства главных напряжений. Для удобства дальнейшего изложения введем локальную систему координат x, y, z . Условимся, что направление промежуточного главного напряжения $\sigma_3 = \sigma_z$ совпадает с направлением оси z

$$\sigma_3 = \sigma_z. \quad (3.3.1)$$

Отсюда следует равенство нулю касательных напряжений σ_{xz} и σ_{yz} .

Тогда из соотношений (3.2.6) следует

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \phi + \sigma_2 \sin^2 \phi = p + \tau \cos 2\phi, \quad \tau = (\sigma_1 - \sigma_2)/2,$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \phi + \sigma_2 \cos^2 \phi = p - \tau \cos 2\phi, \quad \sigma_{xy} = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\phi, \quad (3.3.2)$$

где $p = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 = \sigma_z$, $\tau = \Gamma = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$, $\sigma_1 \geq \sigma_2$, ϕ – угол между максимальным главным направлением σ_1 и осью x .

Составив характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_\gamma & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y - \sigma_\gamma \end{vmatrix} = 0, \quad (\gamma = 1, 2), \quad (3.3.4)$$

и определив его корни, получим

$$\sigma_{1,2} = 0,5 \left[\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2} \right]. \quad (3.3.3)$$

Критерий предельного состояния (3.2.4) при переходе к напряжениям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ принимает вид

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 = K, \quad \sigma_3 = \sigma_z = (\sigma_x + \sigma_y)/2. \quad (3.3.5)$$

Используя зависимости (3.3.2), запишем критерий предельного состояния при чистом плоском сдвиге через компоненты тензора напряжений

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2 = 4K^2, \quad \sigma_z = (\sigma_x + \sigma_y)/2. \quad (3.3.6)$$

Подставляя (3.3.6) в (3.3.2), получим соотношения Леви

$$\sigma_x = p + K \cos 2\phi, \quad \sigma_y = p - K \cos 2\phi, \quad \sigma_{xy} = K \sin 2\phi. \quad (3.3.7)$$

При подстановке зависимостей (3.3.7) в условие предельного состояния (3.3.6) последнее удовлетворяется тождественно.

Далее все построения задачи для поля напряжений в теории предельного состояния чистого плоского сдвига совпадают с построениями Сен-Венана или задачей плоской деформации.

Уравнения равновесия при чистом плоском сдвиге имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (3.3.8)$$

Подставляя соотношения Леви (4.7) в уравнения равновесия (4.8), получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} - 2K \left(\sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} - \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} + 2K \left(\cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.3.9)$$

Прандтль (L. Prandtl, 1920 г.) установил гиперболический характер уравнений (3.3.9) и ввел понятие линий скольжения, совпадающих с линиями действия максимальных касательных напряжений.

Х. Генки (H. Hencky, 1923 г.) получил интегралы вдоль ортогональных характеристик, совпадающих с линиями скольжения:

$$p + 2K\phi = const \quad \text{вдоль } \alpha \quad \text{— линий } \frac{dy}{dx} = tg \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right) \quad (3.3.10)$$

и

$$p - 2K\phi = const \quad \text{вдоль } \beta \quad \text{— линий } \frac{dy}{dx} = tg \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right), \quad (3.3.11)$$

а также уравнения, устанавливающие фундаментальные свойства линий скольжения для плоской задачи.

Таким образом, в случае если известно направление промежуточного главного напряжения, то касательные напряжения σ_{xz} и σ_{yz} равны нулю и задача предельного плоского чистого сдвига в напряжениях является статически определимой. Дифференциальные уравнения поля напряжений относятся к гиперболическому типу уравнений, а их характеристики ортогональны.

Перейдем к построению поля скоростей пластических деформаций.

Рассмотрим функционал

$$J = \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + 2\varepsilon_{xy} \sigma_{xy} + \frac{1}{2} \varepsilon_z (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} \lambda_1 [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2 - 4K^2], \quad (3.3.12)$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа.

В функционале (3.3.12) учтены ограничения, накладываемые критерием предельного состояния на компоненты поля напряжений.

Принимая (3.3.13) в качестве потенциала, запишем ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_x + \frac{1}{2} \varepsilon_z = \lambda(\sigma_x - \sigma_y), \quad \varepsilon_y + \frac{1}{2} \varepsilon_z = -\lambda(\sigma_x - \sigma_y), \quad \varepsilon_{xy} = 2\lambda\sigma_{xy}. \quad (3.3.13)$$

Несложно убедиться, что пластическое течение идеально связной изотропной среды при плоском чистом сдвиге не сопровождается изменением объема

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0. \quad (3.3.14)$$

Далее введем предположение о том, что плоский чистый сдвиг происходит в условиях плоской деформации

$$\varepsilon_z = 0. \quad (3.3.15)$$

Тогда ассоциированный закон пластического течения принимает вид

$$\varepsilon_x = \lambda(\sigma_x - \sigma_y), \quad \varepsilon_y = -\lambda(\sigma_x - \sigma_y), \quad \varepsilon_{xy} = 2\lambda\sigma_{xy}. \quad (3.3.16)$$

Из (3.3.16) следует, что в пространстве скоростей пластических деформаций параметр Лоде соответствует плоскому чистому сдвигу $\mu_\varepsilon = 0$.

Это означает, что при предельном плоском чистом сдвиге в условиях плоской деформации изотропной идеально связной среды вид напряженного и деформированного состояния совпадает.

Используя (3.3.7), соотношения для компонент тензора скоростей деформаций придадим вид

$$\varepsilon_x = 2\lambda\tau \cos 2\phi, \quad \varepsilon_y = -2\lambda\tau \cos 2\phi, \quad \varepsilon_{xy} = 2\lambda\tau \sin 2\phi. \quad (3.3.17)$$

Из (3.3.17) следует, что поле скоростей перемещений определяется двумя уравнениями: условием изотропии

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2\varepsilon_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\sigma_{xy}} = \operatorname{ctg} 2\phi, \quad (3.3.18)$$

и условием несжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0. \quad (3.3.19)$$

Для компонент тензора скоростей деформации ε_x , ε_y , ε_{xy} справедливы соотношения Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right),$$

где u_x, u_y – компоненты скорости перемещений.

Перейдя в уравнениях (3.3.18) и (3.3.19) к компонентам вектора скоростей перемещения, получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} - \operatorname{ctg} 2\phi \frac{\partial u_x}{\partial y} - \operatorname{ctg} 2\phi \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (3.3.20)$$

Система уравнений (3.3.20) принадлежит к гиперболическому типу и имеет характеристики, совпадающие с характеристиками поля напряжений. Вдоль характеристик имеют место соотношения Гейрингер

$$dv_\alpha - v_1 d\phi_\alpha = 0, \quad dv_\beta + v_2 d\phi_\beta = 0 \quad (3.3.21)$$

вдоль α и β линий. Здесь v_α – проекция скорости на направление α -характеристики, а v_1 – проекция скорости на направление, перпендикулярное α -характеристике, ϕ_α – угол на α -характеристике к оси x , аналогично для проекций v_β, v_2, ϕ_β .

Уравнения предельного состояния плоского сдвига совпадают с аналогичными уравнениями теории идеальной пластичности идеально связанных изотропных сред в случае плоской деформации [2], [4], [5], [11], [12], [13], [14].

Однако отличие приведенного здесь построения уравнений теории предельного состояния при плоском сдвиге от классических построений идеальной пластической плоской деформации является принципиальным.

В основе построения теории плоской деформации лежит частное предположение о справедливости условия пластичности Треска (или Мизеса), т.е. теория плоской пластической деформации является разделом теории идеальной пластичности. При этом предполагается, что условие пластичности Треска и условие пластичности Мизеса согласованы с экспериментом на чистый сдвиг, т.е. цилиндр Мизеса вписан в равностороннюю шестигранную призму Треска.

В предложенной здесь постановке задачи чистого плоского сдвига в условиях плоской деформации нет необходимости в использовании условия пластичности. Вводится универсальный критерий предельного состояния, в который входит только одна механическая характеристика – значение предельного чистого сдвига.

В основе построения теории плоской деформации лежит частное предположение о справедливости условия пластичности Треска (или Мизеса), т.е. теория плоской пластической деформации является разделом теории идеальной пластичности. При этом предполагается, что условие пластичности Треска и условие пластичности Мизеса согласованы с экспериментом на чистый сдвиг, т.е. цилиндр Мизеса вписан в равностороннюю шестигранную призму Треска.

Выводы.

1. Сен-Венан сформулировал плоскую задачу как задачу теории предельного состояния.
2. При построении теории предельного состояния плоского чистого сдвига такое понятие, как условие пластичности, не используется, поскольку любые условия пластичности идеально связанных изотропных сред при условии их согласования с экспериментом на чистый сдвиг сводятся к одному и тому же условию предельного максимального касательного напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Генки, Г.* О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах / Г. Генки // Сб. переводов: теория пластичности: – М. : Иностран. лит., 1948. – С. 80–101.

- [2] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 234 с.
- [3] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.
- [4] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 1976. – 704 с.
- [5] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1956. – 324 с.
- [6] *Кузнецов, Е. Е.* О дискретности трехмерного векторного пространства главных напряжений / Е. Е. Кузнецов, Н. М. Матченко // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2013. – Выпуск 2. – Ч. 2. – С. 140–147.
- [7] *Кузнецов, Е. Е.* Дискретность трехмерного векторного пространства главных напряжений и ее следствия / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий : сб. ст. по материалам междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 12-15 августа 2013 г.) : в 2 ч. Ч. 1. Механика деформируемого твердого тела / отв. ред. Б. Г. Миронов. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2013. – С. 121–125.
- [8] *Кузнецов, Е. Е.* Шесть вариантов представления вектора интенсивности тензора напряжений в пространстве главных напряжений / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1 (15). – С. 90–97.
- [9] *Леви, М.* К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости / М. Леви // Теория пластичности : сб. переводов. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 20–23.
- [10] *Лоде, В.* Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов / В. Лоде // Теория пластичности : сб. переводов. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 168–205.
- [11] *Радаев, Ю. Н.* Пространственная задача математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев. – Самара : Изд-во Самарского гос. университета, 2006. – 340 с.
- [12] *Радаев, Ю. Н.* К теории плоской деформации идеально пластических тел / Ю. Н. Радаев // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – №3 (62). – С. 272–289.
- [13] *Радаев, Ю. Н.* Об одной достижимой оценке снизу трехмерного инварианта напряжений Кулона-Треска системами “двумерных” касательных напряжений / Ю. Н. Радаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 4(14). – С. 3–14.
- [14] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969. – 605 с.
- [15] *Хаар, А.* К теории напряженного состояний в пластических и сыпучих средах / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности : сб. переводов. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 41–56.
- [16] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
- [17] *De Saint-Venant, B.* Mémoire sur des équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où les sélasticité pourrait les ramener á leur premier état // Comptes Rendus de sAc. Des Sciences, 1870. – Т. 71. – P. 1323–1325.

Кузнецов Евгений Евгеньевич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: smithe71@yandex.ru

Матченко Николай Михайлович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики пластического формоизменения, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc_05@mail.ru

Y. Y. Kuznetsov, N. M. Mattchenko

FLAT TASK SAINT-VENANT'S, AS THE TASK OF THE THEORY OF THE LIMITING CONDITION

Tula State University

Abstract. In the scientific and educational literature flat task Sent-Venant/s is treated, how a task of flat deformation at validity of a condition of plasticity of the Crash. It is shown, that constructions Sent-Venant/s represent a task of limiting flat clean shift in conditions of flat deformation. It is marked, that at such statement of a task there is no necessity for use of a condition of plasticity.

Keywords: the equations of balance, a limiting condition of shift, an intermediate main stress, flat clean shift.

REFERENCES

- [1] *Genki, G.* About some statically definable cases of balance in plastic bodies / G. Genki // Collection of translations: theory of plasticity: – M. : Inostr. litas., 1948. – P. 80–101.
- [2] *Ivlev, D. D.* Theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 234 p.
- [3] *Ilyushin, A. A.* Plasticity / A. A. Ilyushin. – M. ; L. : Gostekhizdat, 1948. – 376 p.
- [4] *Ishlinsky, A. Yu.* Mathematical theory of plasticity / A. Yu. Ishlinsky, D. D. Ivlev. – M. : Fizmatlit, 1976. – 704 p.
- [5] *Kachanov, L. M.* Bases of the theory of plasticity / L. M. Kachanov. – M. : Nauka, 1956. – 324 p.
- [6] *Kuznetsov, E. E.* About discretization of three-dimensional vector space of the main tension / E. E. Kuznetsov, N. M. Mattchenko // Tulgu's news. Natural sciences. – 2013. – Issue 2. – Part. 2. – P. 140–147.
- [7] *Kuznetsov, E. E.* Discretization of three-dimensional vector space of the main tension and its consequence / E. E. Kuznetsov, I. N. Mattchenko, N. M. Mattchenko // Fundamental and applied problems of mechanics of a deformable solid body, mathematical modeling and information technologies : the collection of the Art. on materials of the international scientific and practical conference (Cheboksary, on August 12-15, 2013): in 2 p. P. 1. Mechanics of a deformable solid body / responsible edition B. G. Mironov. – Cheboksary : Chuvash State Pedagogical University, 2013. – P. 121–125.
- [8] *Kuznetsov, E. E.* Six options of representation of a vector of intensity of a tensor of tension in space of the main tension / E. E. Kuznetsov, I. N. Mattchenko, N. M. Mattchenko // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 1 (15). – P. 90–97.
- [9] *Levi, M.* To a question of the general equations of the internal movements arising in solid plastic bodies outside elasticity / M. Levi // Theory of plasticity: collection of translations. – M. : The state publishing house of foreign literature, 1948. – P. 20–23.
- [10] *Lode, V.* Influence of average main tension on the fluidity of metals / V. Lode // Theory of plasticity: collection of translations. – M. : The state publishing house of foreign literature, 1948. – P. 168–205.
- [11] *Radayev, Yu. N.* Spatial task of the mathematical theory of plasticity / Yu. N. Radayev. – Samara : Publishing house the Samara state university, 2006. – 340 p.
- [12] *Radayev, Yu. N.* To the theory of flat deformation of ideally plastic bodies / Yu. N. Radayev // Vestnik SamSY. Natural-science series. – 2008. – № 3 (62). – P. 272–289.
- [13] *Radayev, Yu. N.* About one achievable assessment from below three-dimensional invariant tension of Kulona-Treska systems "two-dimensional" tangent tension / Yu. N. Radayev // Vestnik

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 4 (14). – P. 3–14.

[14] *Sokolovsky, V. V.* Theory of plasticity / V. V. Sokolovsky. – M. : The higher school, 1969. – 605 p.

[15] *Haar, A.* To the theory strained states in plastic and loose environments / A. Haar, T. Karman // Theory of plasticity: collection of translations. – M. : The state publishing house of foreign literature, 1948. – P. 41–56.

[16] *Hill, R.* Mathematical theory of plasticity / R. Hill. – M. : GITTL, 1956. – 407 p.

[17] *De Saint-Venant, B.* Mémoire sur des équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où les sélasticité pourrait les ramener à leur premier état // Comptes Rendus de sAc. Des Sciences, 1870. – T. 71. – P. 1323–1325.

Kuznetsov, Yevgeniy Yevgenevich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor of Department of building, building materials and designs, Tula State University, Tula

Mattchenko, Nikolay Mihailovich

Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, Department of mechanics plastic forming, Tula State University, Tula

А. Д. Чернышов

О СОГЛАСОВАНИИ НАЧАЛЬНЫХ, ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЕЙ С ТЕМПЕРАТУРНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Воронежский государственный университет инженерных технологий

Аннотация. Приводятся примеры согласования начальных, граничных условий и дифференциальных уравнений для различных математических моделей. Обсуждается необходимость выполнения этих условий при постановке начально-краевых задач для последующего их решения. Невыполнение этих условий приводит к разрывным решениям и существенной погрешности.

Ключевые слова: граничные условия, начальные условия, дифференциальные уравнения, теплопроводность, упругость.

УДК: 517.518.454

Введение. Вопросу согласования начальных, граничных условий и дифференциальных уравнений в научной литературе отводится слишком мало места. Редко встречаются работы, где эти условия выполнены. Так, в [1] при решении задачи об изгибе упругой консоли автор ничего не пишет об этом, но интуитивно эти условия выполняет. Можно отметить и другие работы [2], [3], [4], [5], где условия совместности выполнены. Тем не менее, часто при решении краевых задач условия совместности не выполняются. Даже в широко известной учебной литературе [6], [7], [8] вопросы согласования не обсуждаются. Так, в [6] приводится точное решение задачи о тепловом ударе в полубесконечном стержне, где начальное и граничные условия не согласованы. Но это аналитическое решение, выраженное через интеграл ошибок, не существует при $t = 0$ и существует только в пределе при $t \rightarrow 0$. Численное решение подобной задачи при малых t будет существенно отличаться от данного точного из-за неограниченных градиентов при $t \rightarrow 0$ в окрестности точки разрыва – конца стержня.

В природе в большинстве случаев такие величины, как температура, прогибы, перемещения, деформации, напряжения и т.д., из физических соображений и основных концепций механики сплошных сред в некоторой рассматриваемой области являются непрерывными, гладкими и однозначными. Выполнение этих свойств приводит к некоторым дополнительным условиям, которым должны подчиняться начальные и граничные условия, приводимые ниже. Подобные дополнительные условия в дальнейшем будем называть условиями согласования, или просто согласованиями. Если хотя бы одно из таких условий не выполняется, то непрерывное решение задачи не существует, решение будет разрывным. Данная проблема возникает, если форма границы негладкая, имеет угловые точки и граничные условия заданы кусочно. Проблема согласований имеет место не только при построении решения в аналитическом виде, но и при использовании численных методов, так как при составлении выражения для производной, например, в разностной форме $\partial U / \partial x \approx \Delta U / \Delta x$, при малом

сеточном шаге Δx приращение ΔU должно быть тоже малым. В точке разрыва приращение ΔU может оказаться конечным, а при подходе к точке разрыва значение U зависит от направления подхода. Тогда погрешность вычислений резко возрастет, что влияет на всю вычислительную процедуру в целом. Выкалывание точки разрыва не поможет, так как конечность приращения ΔU на малом шаге Δx так и останется, да и физически подобное решение неприемлемо. В любом случае увидеть недостаток полученного решения можно с помощью проверки выполнения начальных, граничных условий и дифференциальных уравнений, что принято называть невязками.

Алгоритм получения согласований опирается на следующие два положения.

Положение 1. Функции, для которых ставятся граничные и начальные условия и которые должны удовлетворять некоторой системе дифференциальных уравнений, являются однозначными в каждой точке области Ω и ее границы Γ , включая ребра, вершины и угловые точки этой границы.

Положение 2. Эти функции вместе с граничными и начальными условиями должны быть непрерывными, достаточно гладкими и при подходе к угловым точкам допускать дифференцирование по касательным к Γ направлениям нужное число раз в зависимости от конкретного случая.

Во всех примерах ниже при получении условий согласования будем использовать эти два положения. Необходимость выполнения дополнительных условий согласования покажем на простейших примерах уравнений механики сплошных сред.

1. СТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

Теплопроводность

Рассмотрим задачу теплопроводности для прямоугольной области Ω :

$$U_{xx} + U_{yy} + k_1 U_x + k_2 U_y + k_3 U + q(x, y) = 0, \quad (1.1)$$

$$\Omega = (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b), \quad U(x, y) \in C^{(2)}(\Omega), \quad q(x, y) \in C(\Omega).$$

Пусть на границах прямоугольника заданы условия первого рода:

$$U|_{x=0} = f_1(y), \quad U|_{y=0} = f_2(x), \quad U|_{x=a} = f_3(y), \quad U|_{y=b} = f_4(x), \quad f_i \in C^{(2)}(\Omega). \quad (1.2)$$

Будем строить гладкое решение задачи (1.1), (1.2). Требование непрерывности и единственности решения приводит к тому, что в углах прямоугольника должны выполняться дополнительные условия согласования: функции f_i из граничных условий должны быть не только гладкими, но и при подходе к угловым точкам по любой из двух сторон прямоугольника необходимо, чтобы значение температуры было одинаковым. Отсюда получаем следующие условия согласования граничных условий:

$$\text{в точке } (0, 0) \Rightarrow f_1(0) = f_2(0), \quad \text{в точке } (a, 0) \Rightarrow f_2(a) = f_3(0),$$

$$\text{в точке } (a, b) \Rightarrow f_4(a) = f_3(b), \quad \text{в точке } (0, b) \Rightarrow f_4(0) = f_1(b). \quad (1.3)$$

Кроме условий согласования (1.3) можно получить дополнительные условия согласования граничных условий (1.2) с дифференциальным уравнением (1.1) в угловых точках. Для этого в точке $(0, 0)$ из (1.2) найдем частные производные:

$$[U_{xx} = f_2''(0), \quad U_x = f_2'(0), \quad U_{yy} = f_1''(0), \quad U_y = f_1'(0), \quad U = f_1(0)]|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

После подстановки этих выражений в дифференциальное уравнение (1) получим искомое согласование граничных условий с дифференциальным уравнением в угловой точке $(0, 0)$:

$$f_2''(0) + f_1''(0) + k_1 f_2'(0) + k_2 f_1'(0) + k_3 f_1(0) + q(0, 0) = 0. \quad (1.4)$$

Аналогично получим условия согласования в остальных трех угловых точках:

$$\begin{aligned} [U_{xx} = f_2''(a), U_x = f_2'(a), U_{yy} = f_3''(0), U_y = f_3'(0), U = f_2(a)] \Big|_{\substack{x=a \\ y=0}} \\ f_2''(a) + f_3''(0) + k_1 f_2'(a) + k_2 f_3'(0) + k_3 f_2(a) + q(a, 0) = 0, \\ [U_{xx} = f_4''(a), U_x = f_4'(a), U_{yy} = f_3''(b), U_y = f_3'(b), U = f_3(b)] \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} \\ f_4''(a) + f_3''(b) + k_1 f_4'(a) + k_2 f_3'(b) + k_3 f_3(b) + q(a, b) = 0, \\ [U_{xx} = f_4''(0), U_x = f_4'(0), U_{yy} = f_1''(b), U_y = f_1'(b), U = f_1(b)] \Big|_{\substack{x=0 \\ y=b}} \\ f_4''(0) + f_1''(b) + k_1 f_4'(0) + k_2 f_1'(b) + k_3 f_1(b) + q(0, b) = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Таким образом, для получения гладкого решения задачи (1.1), (1.2) граничные условия 1-го рода для уравнения теплопроводности должны дополнительно удовлетворять восьми условиям согласования (1.3), (1.5) в угловых точках прямоугольника Ω . Невыполнение хотя бы одного из этих условий ведет к разрывному решению задачи.

Рассмотрим случай, когда заданы граничные условия второго рода:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} = f_1(y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} = f_2(x), \quad \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=a} = f_3(y), \\ \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=b} = f_4(x), \quad f_i \in C^{(2)}(\Omega), \quad U \in C^{(3)}(\Omega). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для получения условий согласования продифференцируем первое равенство из (1.6) по переменной y , а второе – по переменной x . В угловой точке $(0, 0)$ получим равенство $f_1'(0) = f_2'(0)$. Отсюда получаем следующие условия согласования:

$$\begin{aligned} \text{в точке } (0, 0) \Rightarrow f_1'(0) = f_2'(0), \quad \text{в точке } (a, 0) \Rightarrow f_2'(a) = f_3'(0), \\ \text{в точке } (a, b) \Rightarrow f_4'(a) = f_3'(b), \quad \text{в точке } (0, b) \Rightarrow f_4'(0) = f_1'(b). \end{aligned} \quad (1.7)$$

В данном случае при задании граничных условий второго рода (1.6) дополнительные условия их согласования с дифференциальным уравнением (1.1) в угловых точках не существуют.

Пусть заданы граничные условия третьего рода:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_1 (U - f_1(y)) \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha_2 (U - f_2(x)) \Big|_{y=0}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=a} = \alpha_3 (U - f_3(y)) \Big|_{x=a}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=b} = \alpha_4 (U - f_4(x)) \Big|_{y=b}, \\ f_i \in C^{(1)}(\Omega), \quad U \in C^{(2)}(\Omega). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Продифференцируем первое условие по переменной y , а второе – по x . В результате получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0, y=0} = \alpha_1 \left(\frac{\partial U}{\partial y} - f_1'(y) \right) \Big|_{x=0, y=0} = \alpha_2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} - f_2'(x) \right) \Big|_{x=0, y=0}.$$

После исключения отсюда частных производных $\partial U / \partial x$, $\partial U / \partial y$ с помощью первого и второго условий найдем условие согласования в точке $(0, 0)$:

$$\alpha_1 \alpha_2 (f_2(0) - f_1(0)) = \alpha_2 f_2'(0) - \alpha_1 f_1'(0). \quad (1.9)$$

Аналогично могут быть получены условия согласования и в остальных угловых точках:

$$\begin{aligned}
(x = a, y = 0) &\Rightarrow \alpha_2 \alpha_3 (f_2(a) - f_3(0)) = \alpha_2 f_2'(a) - \alpha_3 f_3'(0), \\
(x = a, y = b) &\Rightarrow \alpha_4 \alpha_3 (f_3(b) - f_4(a)) = \alpha_3 f_3'(b) - \alpha_4 f_4'(a), \\
(x = 0, y = b) &\Rightarrow \alpha_1 \alpha_4 (f_1(b) - f_4(0)) = \alpha_1 f_1'(b) - \alpha_4 f_4'(0).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

При задании граничных условий смешанного типа также можно записать условия согласования. Пусть на одной стороне угла $(0, 0)$ заданы условия 1-го рода, а на другой – 2-го рода:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = f_1(y), \quad U|_{y=0} = f_2(x). \tag{1.11}$$

Тогда условия согласования будут иметь вид

$$f_1(0) = f_2'(0). \tag{1.12}$$

При задании условий 1-го рода на одной стороне угла и 3-го рода – на другой:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha_1 (U - f_1(y))|_{x=0}, \quad U|_{y=0} = f_2(x). \tag{1.13}$$

Условия согласования представляются равенствами типа

$$\alpha_1 (f_2(0) - f_1(0))|_{x=0} = f_2'(0). \tag{1.14}$$

Если на одной стороне угла задать условия 2-го рода и на другой 3-го рода:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = f_1(y), \quad \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = \alpha_2 (U - f_2(x))|_{y=0}, \tag{1.15}$$

то условия согласования можно записать выражениями типа

$$\alpha_2 (f_1(0) - f_2'(0))|_{y=0} = f_1'(0). \tag{1.16}$$

Упругая пластина

Рассмотрим уравнение равновесия для прогиба W прямоугольной упругой пластины:

$$D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) - S \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + kW = q(x, y). \tag{1.17}$$

На границах пластины зададим условия для четных производных:

$$\begin{aligned}
W|_{x=0} = f_1(y), \quad \left. \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \phi_1(y), \quad W|_{y=0} = f_2(x), \quad \left. \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \phi_2(x), \\
W|_{x=a} = f_3(y), \quad \left. \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right|_{x=a} = \phi_3(y), \quad W|_{y=b} = f_4(x), \quad \left. \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right|_{y=b} = \phi_4(x), \\
f_i \in C^{(4)}(\Omega), \quad \phi_3 \in C^{(2)}(\Omega).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Тогда в угловых точках условия согласования будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
(0, 0) &\Rightarrow f_1(0) = f_2(0), \quad f_1''(0) = \phi_2(0), \quad f_2''(0) = \phi_1(0), \quad \phi_1''(0) = \phi_2''(0), \\
&D [f_2^{IV}(0) + 2\phi_1''(0) + f_1^{IV}(0)] - S [\phi_1(0) + \phi_2(0)] + kf_1(0) = q(0, 0), \\
(a, 0) &\Rightarrow f_3(0) = f_2(0), \quad f_3''(0) = \phi_2(a), \quad f_2''(a) = \phi_3(0), \quad \phi_3''(0) = \phi_2''(a), \\
&D [f_2^{IV}(a) + 2\phi_3''(0) + f_1^{IV}(0)] - S [\phi_3(0) + \phi_2(a)] + kf_2(0) = q(a, 0), \\
(a, b) &\Rightarrow f_3(b) = f_4(a), \quad f_3''(b) = \phi_4(a), \quad f_4''(a) = \phi_3(b), \quad \phi_3''(b) = \phi_4''(a), \\
&D [f_4^{IV}(a) + 2\phi_3''(b) + f_3^{IV}(b)] - S [\phi_3(b) + \phi_4(a)] + kf_3(b) = q(a, b), \\
(0, b) &\Rightarrow f_1(b) = f_4(0), \quad f_1''(b) = \phi_4(0), \quad f_4''(0) = \phi_1(b), \quad \phi_1''(b) = \phi_4''(0), \\
&D [f_4^{IV}(0) + 2\phi_1''(b) + f_1^{IV}(b)] - S [\phi_1(b) + \phi_4(0)] + kf_1(b) = q(0, b).
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Пусть на границах пластины заданы условия для прогиба и угла наклона:

$$\begin{aligned}
W|_{x=0} &= f_1(y) , \quad \frac{\partial W}{\partial x}|_{x=0} = \phi_1(y) , \quad W|_{y=0} = f_2(x) , \quad \frac{\partial W}{\partial y}|_{y=0} = \phi_2(x) , \\
W|_{x=a} &= f_3(y) , \quad \frac{\partial W}{\partial x}|_{x=a} = \phi_3(y) , \quad W|_{y=b} = f_4(x) , \quad \frac{\partial W}{\partial y}|_{y=b} = \phi_4(x) , \\
f_i &\in C^{(1)}(\Omega) , \quad \phi_i \in C^{(1)}(\Omega) .
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Условия согласования представляются выражениями:

$$\begin{aligned}
\text{в точке } (0, 0) &\Rightarrow \begin{aligned} f_1(0) &= f_2(0) , \quad f_1'(0) = \phi_2(0) , \\ f_2'(0) &= \phi_1(0) , \quad \phi_1'(0) = \phi_2'(0) ; \end{aligned} \\
\text{в точке } (a, 0) &\Rightarrow \begin{aligned} f_2(0) &= f_1(a) , \quad f_3'(0) = \phi_2(a) , \\ f_2'(a) &= \phi_3(0) , \quad \phi_3'(0) = \phi_2'(a) ; \end{aligned} \\
\text{в точке } (a, b) &\Rightarrow \begin{aligned} f_3(b) &= f_4(a) , \quad f_3'(b) = \phi_4(a) , \\ f_4'(a) &= \phi_3(b) , \quad \phi_3'(b) = \phi_4'(a) ; \end{aligned} \\
\text{в точке } (0, b) &\Rightarrow \begin{aligned} f_1(b) &= f_4(0) , \quad f_1'(b) = \phi_4(0) , \\ f_4'(0) &= \phi_1(b) , \quad \phi_1'(b) = \phi_4'(0) . \end{aligned}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

В данном случае условия согласования с дифференциальным уравнением равновесия не существует, так как невозможно выразить смешанную производную $\partial^4 W / \partial x^2 \partial y^2$ в угловых точках из граничных условий. Аналогичным образом можно получить условия согласования для других комбинированных граничных условий.

Упругий прямоугольный брус

Запишем уравнения упругого равновесия Ламе для перемещений при плоской деформации:

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu)U_{xx} + (\lambda + \mu)V_{xy} + \mu U_{yy} &= q_1(x, y) , \\
(\lambda + 2\mu)V_{yy} + (\lambda + \mu)U_{xy} + \mu V_{xx} &= q_2(x, y) .
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Если граница имеет угловую точку $M_0(x_0, y_0)$, то при задании на Γ напряжений условия согласования получим из следующих рассуждений. Обозначим через Γ_1, Γ_2 два участка границы, расположенные под углом $0 < \beta < \pi$. Введем единичные нормали и касательные векторы к Γ_1, Γ_2 :

$$\nu_i(\nu_{ix}, \nu_{iy}), \tau_i(\tau_{ix}, \tau_{iy}) , \quad (i = 1, 2) . \tag{1.23}$$

Зададим нормальные σ_n и касательные τ_n напряжения:

$$\sigma_n|_{\Gamma_i} = F_i(M_{\Gamma_i}) , \quad \tau_n|_{\Gamma_i} = \Phi_i(M_{\Gamma_i}) , \quad i = 1, 2. \tag{1.24}$$

Здесь M_{Γ_i} – точки на границах Γ_1, Γ_2 . Представим условия (1.24) с помощью (1.23) в более явной форме через компоненты тензора напряжений в точке излома границы $M_0(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_n|_{\Gamma_i} &= \sigma_{xx}\nu_{ix}^2 + 2\sigma_{xy}\nu_{ix}\nu_{iy} + \sigma_{yy}\nu_{iy}^2 = F_i(x_0, y_0) , \quad i = 1, 2, \\
\tau_n|_{\Gamma_i} &= \sigma_{xx}\nu_{ix}\tau_{ix} + \sigma_{xy}(\nu_{ix}\tau_{iy} + \nu_{iy}\tau_{ix}) + \sigma_{yy}\nu_{iy}\tau_{iy} = \Phi_i(x_0, y_0) .
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Если из каких-нибудь трех уравнений системы (1.25) выразить три компоненты $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ и подставить в четвертое уравнение, то получим искомое условие согласования как соотношение между четырьмя функциями F_i, Φ_i в точке излома границы $M_0(x_0, y_0)$, которое не будем выписывать явно из-за его громоздкости. В частном случае при $\beta = \pi/2$ условие согласования принимает простой вид:

$$\Phi_1(x_0, y_0) = \Phi_2(x_0, y_0) . \tag{1.26}$$

Пусть на границе Γ заданы условия для перемещений:

$$\begin{aligned}
U|_{x=0} &= f_1(y) , \quad V|_{x=0} = \phi_1(y) , \quad U|_{y=0} = f_2(x) , \quad V|_{y=0} = \phi_2(x) , \\
U|_{x=a} &= f_3(y) , \quad V|_{x=a} = \phi_3(y) , \quad U|_{y=b} = f_4(x) , \quad V|_{y=b} = \phi_4(x) , \\
&f_i \in C^{(1)}(\Omega) , \phi_3 \in C^{(1)}(\Omega) .
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Условия согласования будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
\text{в точке } (0,0) &\Rightarrow f_1(0) = f_2(0) , \quad \phi_1(0) = \phi_2(0) , \\
\text{в точке } (a,0) &\Rightarrow f_2(a) = f_3(0) , \quad \phi_2(a) = \phi_3(0) , \\
\text{в точке } (a,b) &\Rightarrow f_3(b) = f_4(a) , \quad \phi_3(b) = \phi_4(a) , \\
\text{в точке } (0,b) &\Rightarrow f_1(b) = f_4(0) , \quad \phi_1(b) = \phi_4(0) .
\end{aligned} \tag{1.28}$$

При задании на Γ напряжений

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}|_{x=0} &= f_1(y) , \quad \sigma_{xy}|_{x=0} = \phi_1(y) , \quad \sigma_{yy}|_{y=0} = f_2(x) , \quad \sigma_{xy}|_{y=0} = \phi_2(x) , \\
\sigma_{xx}|_{x=a} &= f_3(y) , \quad \sigma_{xy}|_{x=a} = \phi_3(y) , \quad \sigma_{yy}|_{y=b} = f_4(x) , \quad \sigma_{xy}|_{y=b} = \phi_4(x)
\end{aligned}$$

из непрерывности σ_{xy} при подходе к углу с двух его сторон получим

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) , \quad \phi_3(0) = \phi_2(a) , \quad \phi_3(b) = \phi_4(a) , \quad \phi_1(b) = \phi_4(0) . \tag{1.29}$$

Уравнения Навье-Стокса

На границах прямоугольника для уравнений Навье-Стокса могут быть заданы компоненты вектора скорости (U, V) , т.е.

$$\begin{aligned}
U|_{x=0} &= f_1(y) , \quad V|_{x=0} = \phi_1(y) , \quad U|_{y=0} = f_2(x) , \quad V|_{y=0} = \phi_2(x) , \\
U|_{x=a} &= f_3(y) , \quad V|_{x=a} = \phi_3(y) , \quad U|_{y=b} = f_4(x) , \quad V|_{y=b} = \phi_4(x) , \\
&f_i \in C^{(1)}(\Omega) , \quad \phi_3 \in C^{(1)}(\Omega) .
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Из условия непрерывности вектора скорости найдем условия согласования:

$$\begin{aligned}
\text{в точке } (0,0) &\Rightarrow f_1(0) = f_2(0) , \quad \phi_1(0) = \phi_2(0) , \\
\text{в точке } (a,0) &\Rightarrow f_2(a) = f_3(0) , \quad \phi_2(a) = \phi_3(0) , \\
\text{в точке } (a,b) &\Rightarrow f_3(b) = f_4(a) , \quad \phi_3(b) = \phi_4(a) , \\
\text{в точке } (0,b) &\Rightarrow f_1(b) = f_4(0) , \quad \phi_1(b) = \phi_4(0) .
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Если имеется свободная поверхность жидкости, то на ней задаются соответственные напряжения, например, нормальное напряжение равно атмосферному давлению, а касательное – нулю. На границах прямоугольника можно задать касательное и нормальное напряжения:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}|_{x=0} &= f_1(y) , \quad \sigma_{xy}|_{x=0} = \phi_1(y) , \quad \sigma_{yy}|_{y=0} = f_2(x) , \quad \sigma_{xy}|_{y=0} = \phi_2(x) , \\
\sigma_{xx}|_{x=a} &= f_3(y) , \quad \sigma_{xy}|_{x=a} = \phi_3(y) , \quad \sigma_{yy}|_{y=b} = f_4(x) , \quad \sigma_{xy}|_{y=b} = \phi_4(x) .
\end{aligned}$$

Условия совместности будут иметь вид:

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) , \quad \phi_3(0) = \phi_2(a) , \quad \phi_3(b) = \phi_4(a) , \quad \phi_1(b) = \phi_4(0) . \tag{1.32}$$

2. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

Если время t считать дополнительным измерением, то получим, что в области “прямоугольник + время” при $t = 0$ всегда будем иметь угловую точку или ребро, где должны быть выполнены условия согласования начальных и граничных условий.

Нестационарная теплопроводность

Для нестационарного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned}
U_t &= a_0 (U_{xx} + U_{yy} + k_1 U_x + k_2 U_y + k_3 U + q(t, x, y)) , \\
\Omega &= (0 \leq x \leq a , \quad 0 \leq y \leq b) , \quad U(t, x, y) \in C^{(2)}(\Omega) , \\
&q(t, x, y) \in C(\Omega) , \quad t \geq 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

в граничные условия (1.2) всюду следует формально добавить переменную t , т.е. вместо (1.2) теперь будем иметь

$$\begin{aligned} U|_{x=0} = f_1(t, y) \quad , \quad U|_{y=0} = f_2(t, x) \quad , \quad U|_{x=a} = f_3(t, y) \quad , \\ U|_{y=b} = f_4(t, x) \quad , \quad f_i \in C^{(2)}(\Omega) . \end{aligned} \quad (2.2)$$

С добавлением переменной t условия согласования (1.3) принимают форму

$$\begin{aligned} (0, 0) \Rightarrow f_1(t, 0) = f_2(t, 0) \quad , \quad (a, 0) \Rightarrow f_2(t, a) = f_3(t, 0) \quad , \\ (a, b) \Rightarrow f_4(t, a) = f_3(t, b) \quad , \quad (0, b) \Rightarrow f_4(t, 0) = f_1(t, b) . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Граничные условия дополним начальным:

$$U(t, x, y)|_{t=0} = F(x, y) . \quad (2.4)$$

При задании граничных условий (2.2) кроме (1.3) дополнительно можно записать согласования начального (2.4) и граничных (2.2) условий:

$$\begin{aligned} F(x, y)|_{x=0} = f_1(t, y)|_{t=0} \quad , \quad F|_{y=0} = f_2(t, x)|_{t=0} \quad , \\ F|_{x=a} = f_3(t, y)|_{t=0} \quad , \quad F|_{y=b} = f_4(t, x)|_{t=0} \quad , \quad (F, f_i) \in C^{(2)}(\Omega) . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Условия согласования с дифференциальным уравнением в угловых точках прямоугольника принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(t, 0)}{\partial t} = a_0 \left(\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f_2(t, x)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} + \frac{\partial^2 f_1(t, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=0} + k_1 \frac{\partial f_2(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \\ & + k_2 \frac{\partial f_1(t, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} + k_3 f_1(t, 0) + q(t, 0, 0) \end{aligned} \right) , \\ \frac{\partial f_2(t, a)}{\partial t} = a_0 \left(\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f_2(t, x)}{\partial x^2} \Big|_{x=a} + \frac{\partial^2 f_3(t, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=0} + k_1 \frac{\partial f_2(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=a} + \\ & + k_2 \frac{\partial f_3(t, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} + k_3 f_3(t, 0) + q(t, a, 0) \end{aligned} \right) , \\ \frac{\partial f_3(t, b)}{\partial t} = a_0 \left(\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f_4(t, x)}{\partial x^2} \Big|_{x=a} + \frac{\partial^2 f_3(t, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=b} + k_1 \frac{\partial f_4(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=a} + \\ & + k_2 \frac{\partial f_3(t, y)}{\partial y} \Big|_{y=b} + k_3 f_3(t, b) + q(t, a, b) \end{aligned} \right) , \\ \frac{\partial f_4(t, b)}{\partial t} = a_0 \left(\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f_4(t, x)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} + \frac{\partial^2 f_1(t, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=b} + k_1 \frac{\partial f_4(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \\ & + k_2 \frac{\partial f_1(t, y)}{\partial y} \Big|_{y=b} + k_3 f_1(t, b) + q(t, a, b) \end{aligned} \right) . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для граничных условий второго рода (1.6) кроме условий (1.7), где следует формально добавить время t , имеют место согласования граничных с начальными условиями:

$$\begin{aligned} f_1(t, y)|_{t=0} = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad , \quad f_2(t, x)|_{t=0} = \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad , \\ f_3(t, y)|_{t=0} = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=a} \quad , \quad f_4(t, x)|_{t=0} = \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{y=b} . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь возможны также следующие четыре условия согласования с дифференциальным уравнением в угловых точках:

$$\begin{aligned}
\Phi(t, x, y) &= a_0 \left[\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k_1 \frac{\partial F}{\partial x} + k_2 \frac{\partial F}{\partial y} + k_3 F + q(t, x, y) \right], \\
\left. \frac{\partial f_1(t, y)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \Phi \Big|_{t=0}, \quad \left. \frac{\partial f_2(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = \Phi \Big|_{t=0}, \\
y=0 \quad x=0 \quad y=0 & \quad x=a \quad x=a \\
\left. \frac{\partial f_3(t, y)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \Phi \Big|_{t=0}, \quad \left. \frac{\partial f_4(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = \Phi \Big|_{t=0}. \\
y=b \quad x=a \quad y=b & \quad x=0 \quad x=0 \\
& \quad y=b \quad y=b
\end{aligned} \tag{2.8}$$

При задании граничных условий третьего рода кроме (1.9), (1.10) следует учитывать согласования с начальными условиями:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha_1 (F - f_1(t, y)) \Big|_{t=0}, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y=0} = \alpha_2 (F - f_2(t, x)) \Big|_{t=0}, \\
x=0 \quad y=0 & \\
\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=a} &= \alpha_3 (F - f_3(t, y)) \Big|_{t=0}, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y=b} = \alpha_4 (F - f_4(t, x)) \Big|_{t=0}. \\
x=a \quad y=b &
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Динамическое деформирование упругой пластины

Запишем уравнение движения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) - S \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + kW - q(t, x, y) \tag{2.10}$$

с начальными условиями

$$W(t, x, y)|_{t=0} = F_1(x, y), \quad \partial W / \partial t|_{t=0} = F_2(x, y). \tag{2.11}$$

Для граничных условий (1.18) кроме (1.19) должны выполняться также следующие равенства:

$$\begin{aligned}
f_1(t, y)|_{t=0} &= F_1(x, y)|_{x=0}, \quad \phi_1(t, y)|_{t=0} = \left. \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \right|_{x=0}, \\
\left. \frac{\partial f_1}{\partial t} \right|_{t=0} &= F_2(x, y)|_{x=0}, \quad \left. \frac{\partial \phi_1(t, y)}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} \right|_{x=0}, \\
f_2(t, x)|_{t=0} &= F_1(x, y)|_{y=0}, \quad \phi_2(t, x)|_{t=0} = \left. \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} \right|_{y=0}, \\
\left. \frac{\partial f_2}{\partial t} \right|_{t=0} &= F_2(x, y)|_{y=0}, \quad \left. \frac{\partial \phi_2(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} \right|_{y=0}, \\
f_3(t, y)|_{t=0} &= F_1(x, y)|_{x=a}, \quad \phi_3(t, y)|_{t=0} = \left. \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \right|_{x=a}, \\
\left. \frac{\partial f_3}{\partial t} \right|_{t=0} &= F_2(x, y)|_{x=a}, \quad \left. \frac{\partial \phi_3(t, y)}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} \right|_{x=a}, \\
f_4(t, x)|_{t=0} &= F_1(x, y)|_{y=b}, \quad \phi_4(t, x)|_{t=0} = \left. \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} \right|_{y=b}, \\
\left. \frac{\partial f_4}{\partial t} \right|_{t=0} &= F_2(x, y)|_{y=b}, \quad \left. \frac{\partial \phi_4(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} \right|_{y=b}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Подобным образом строятся согласования начальных, граничных условий и соответственных рассматриваемой математической модели дифференциальных уравнений.

В заключение отметим, что приведение несогласованных условий к согласованному виду можно осуществить, например, при помощи введения буферной зоны, где первоначальные условия заменяются на вспомогательные.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1979. – 560 с.
- [2] Долотов, М. В. Динамическая задача для упругого полупространства при несимметричной нормальной нагрузке его границы / М. В. Долотов, И. Д. Килль // ПММ. – 2012. – Т. 76. – Вып. 6. – С. 1003–1014.
- [3] Кулиев, С. А. Колебания многоугольной пластинки ослабленной круглой полостью с двумя прямолинейными разрезами / С. А. Кулиев // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – № 6. – С. 96–115.
- [4] Чернышов, А. Д. Температурный режим при естественной конвекции термовязкой несжимаемой жидкости в емкости прямоугольной формы / А. Д. Чернышов, А. Н. Марченко, В. В. Горайнов // Тепловые процессы в технике. – 2012. – Т. 4. – № 11. – С. 482–486.
- [5] Чернышов, А. Д. Решение методом быстрых разложений задачи о сушке зерна / А. Д. Чернышов, И. О. Павлов, Е. В. Воронова, В. В. Горайнов // Теплофизика и аэромеханика. – 2012. – Т. 19. – № 6. – С. 739–749.
- [6] Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 736 с.
- [7] Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 600 с.
- [8] Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 940 с.

Чернышов Александр Данилович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж

e-mail: chernyshovad@mail.ru

A. D. Chernyshov

ABOUT USE CONSISTENT, BOUNDARY CONDITIONS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS TO OBTAIN A SMOOTH SOLUTION OF THE MODEL WITH THERMAL PROPERTIES

Voronezh State University of Engineering Technologies

Abstract. Are examples of matching the initial conditions, boundary conditions and differential equations for the various mathematical models. Discusses the need to satisfy these conditions in the formulation of the initial-boundary value problems for subsequent decisions. Failure to comply with these conditions leads to discontinuous solutions and substantial error.

Keywords: boundary conditions, initial conditions, differential equations, thermal conductivity, elasticity.

REFERENCES

- [1] *Tymoshenko, S. P.* Theory of elasticity / S. P. Tymoshenko, J. Gudyer. – M. : Nauka, 1979. – 560 p.
- [2] *Dolotov, M. V.* Dynamic task for an elastic half-space at asymmetrical normal loading of its border / M. V. Dolotov, I. D. Kiel // PMM. – 2012. – Vol. 76. – Issue 6. – P. 1003–1014.
- [3] *Kuliyev, S. A.* Fluctuations of a polygonal plate the weakened round cavity with two rectilinear cuts / S. A. Kuliyev // News of the Russian Academy of Sciences. MTT. – 2013. – № 6. – P. 96–115.
- [4] *Chernyshov, A. D.* Temperature condition at natural convection of thermoviscous incompressible liquid in squared capacity / A. D. Chernyshov, A. N. Marchenko, V. V. Goryaynov // Thermal processes in equipment. – 2012. – Vol. 4. – № 11. – P. 482–486.
- [5] *Chernyshov, A. D.* The decision by method of fast decomposition of a task about grain drying / A. D. Chernyshov, I. O. Pavlov, E. V. Voronova, V. V. Goryaynov // Thermophysics and aeromechanics. – 2012. – Vol. 19. – № 6. – P. 739–749.
- [6] *Tikhonov, A. N.* Equations of mathematical physics / A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii. – M. : Nauka, 1977. – 736 p.
- [7] *Lykov, A. V.* Theory of heat conductivity / A. V. Lykov. – M. : High school, 1967. – 600 p.
- [8] *Lurje, A. I.* Theory of elasticity / A. I. Lurje. – M. : Nauka, 1970. – 940 p.

Chernyshov, Alexander Danilovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Higher Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh

А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ УПРУГОЙ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ МЕТОДОМ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Воронежский государственный университет инженерных технологий

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Аннотация. Методом быстрых разложений решается задача об изгибе упругой консольной балки с жесткой заделкой на одной стороне и произвольно нагруженной – на трех остальных сторонах. Полученное аналитическое решение может быть использовано для анализа деформаций балки.

Ключевые слова: быстрые разложения, аналитическое решение, упругая консольная балка, изгиб.

УДК: 517.518.454

Введение. Многомерные задачи теории упругости представляют большой научный и инженерный интерес. Но к настоящему времени для подобных краевых задач хорошо разработаны лишь только численные методы [1], [2] и существуют только отдельные единицы аналитических решений. Так, в [3], [4] для балки с граничными условиями в напряжениях приводятся частные решения в полиномах и тригонометрических функциях, в некоторых случаях граничные условия выполняются только приближенно в интегральной форме. В данной работе предлагается новый аналитический метод – метод быстрых разложений [5], [6], позволяющий с высокой точностью при минимальных затратах на ЭВМ определить решение в аналитическом виде [7], [8], [9], [10], [11], [12].

Постановка задачи. В условиях плоской деформации проекции вектора перемещений материальных точек бруса зависят только от координат x , y :

$$u = u(x, y), v = v(x, y), w = 0.$$

Компоненты тензора напряжения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) u_x + \lambda v_y, \quad \sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu) v_y + \lambda u_x, \quad \sigma_{xy} = \mu (u_y + v_x), \\ \sigma_{zz} &= \lambda (u_x + v_y), \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Запишем уравнения равновесия Ламе для перемещений с учетом массовых сил $X(x, y)$, $Y(x, y)$:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) u_{xx} + (\lambda + \mu) v_{xy} + \mu u_{yy} &= X(x, y), \\ (\lambda + 2\mu) v_{yy} + (\lambda + \mu) u_{xy} + \mu v_{xx} &= Y(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

К уравнениям (2) необходимо добавить граничные условия. Будем считать, что упругий брус прямоугольного сечения $\Omega = (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq h)$ имеет жесткую заделку на нижней стороне

$$u(x, y)|_{y=0} = v(x, y)|_{y=0} = 0 \quad (3)$$

и нагружен произвольной нагрузкой на трех остальных сторонах:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}|_{x=a} = q_x^{(1)}(y), \quad \sigma_{yx}|_{x=a} = q_y^{(1)}(y), \quad \sigma_{xx}|_{x=0} = q_x^{(3)}(y), \quad \sigma_{yx}|_{x=0} = q_y^{(3)}(y), \\ \sigma_{xy}|_{y=h} = q_x^{(2)}(x), \quad \sigma_{yy}|_{y=h} = q_y^{(2)}(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Полагаем, что функции в граничных условиях должны быть непрерывными, гладкими:

$$\begin{aligned} q_x^{(1)}(y), \quad q_y^{(1)}(y), \quad q_x^{(3)}(y), \quad q_y^{(3)}(y) \in C^{(2)} \quad (0 \leq y \leq h), \\ q_x^{(2)}(x), \quad q_y^{(2)}(x) \in C^{(2)} \quad (0 \leq x \leq a), \end{aligned}$$

и удовлетворять условиям их согласования:

$$q_y^{(1)}(h) = q_x^{(2)}(a), \quad q_y^{(3)}(h) = q_x^{(2)}(0).$$

С учетом (1) граничные условия (4) принимают форму:

$$((\lambda + 2\mu)v_y + \lambda u_x)|_{y=h} = q_y^{(2)}(x), \quad \mu(u_y + v_x)|_{y=h} = q_x^{(2)}(x). \quad (5)$$

$$((\lambda + 2\mu)u_x + \lambda v_y)|_{x=0} = q_x^{(3)}(y), \quad \mu(u_y + v_x)|_{x=0} = q_y^{(3)}(y), \quad (6)$$

$$((\lambda + 2\mu)u_x + \lambda v_y)|_{x=a} = q_x^{(1)}(y), \quad \mu(u_y + v_x)|_{x=a} = q_y^{(1)}(y). \quad (7)$$

Таким образом, получена краевая задача: найти решение системы двух дифференциальных уравнений (2) относительно $(u, v) \in C^{(3)}(\Omega)$, удовлетворяющих граничным условиям (3), (5)–(7).

Решение задачи. В соответствии с методом быстрых разложений решение данной задачи следует представить суммой граничных функций второго и третьего порядка M_2, M_3 и быстрых рядов Фурье [3], [4].

$$u(x, y) = M_2 + \sum_{m=1}^N u_m(x) \sin m\pi \frac{y}{h}, \quad v(x, y) = M_3 + v_0(x) + \sum_{m=1}^N v_m(x) \cos m\pi \frac{y}{h}, \quad (8)$$

где N – число учитываемых членов в рядах Фурье, а граничные функции M_2 и M_3 имеют специальный вид [3]:

$$\begin{aligned} M_2 = \phi_1(x) \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \phi_2(x) \frac{y}{h} + \phi_3(x) \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6h} - \frac{hy}{3}\right) + \phi_4(x) \left(\frac{y^3}{6h} - \frac{hy}{6}\right), \\ M_3 = \psi_1(x) \left(y - \frac{y^2}{2h}\right) + \psi_2(x) \frac{y^2}{2h} + \psi_3(x) \left(\frac{y^3}{6} - \frac{y^4}{24h} - \frac{hy^2}{6}\right) + \psi_4(x) \left(\frac{y^4}{24h} - \frac{hy^2}{12}\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \phi_1(x) = u(x, 0), \quad \phi_2(x) = u(x, h), \quad \phi_3(x) = u_{yy}(x, 0), \quad \phi_4(x) = u_{yy}(x, h), \\ \psi_1(x) = v_y(x, 0), \quad \psi_2(x) = v_y(x, h), \quad \psi_3(x) = v_{yyy}(x, 0), \quad \psi_4(x) = v_{yyy}(x, h). \end{aligned}$$

В результате приходим к задаче о нахождении следующих $9 + 2N$ неизвестных, зависящих только от одной переменной:

$$\phi_j(x), \quad \psi_j(x), \quad v_0(x), \quad u_m(x), \quad v_m(x), \quad j = 1 \div 4, \quad m = 1 \div N, \quad (9)$$

которые найдем, выполняя дифференциальные уравнения (2) и граничные условия (3), (5)–(7). Для этого подставим быстрые разложения (8) в (2):

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \left[\phi_1'' \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \phi_2'' \frac{y}{h} + \phi_3'' \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6h} - \frac{hy}{3}\right) + \phi_4'' \left(\frac{y^3}{6h} - \frac{hy}{6}\right) + \sum_{m=1}^N u_m'' \sin m\pi \frac{y}{h} \right] + \\
& + (\lambda + \mu) \left[\psi_1' \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \psi_2' \frac{y}{h} + \psi_3' \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6h} - \frac{hy}{3}\right) + \right. \\
& \quad \left. + \psi_4' \left(\frac{y^3}{6h} - \frac{hy}{6}\right) - \sum_{m=1}^N m \frac{\pi}{h} v_m' \sin m\pi \frac{y}{h} \right] \\
& + \mu \left[\phi_3 \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \phi_4 \frac{y}{h} - \sum_{m=1}^N m^2 \frac{\pi^2}{h^2} u_m \sin m\pi \frac{y}{h} \right] = X(x, y),
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \left[\frac{\psi_2 - \psi_1}{2} + \psi_3 \left(y - \frac{y^2}{2h} - \frac{h}{3}\right) + \psi_4 \left(\frac{y^2}{2h} - \frac{h}{6}\right) - \sum_{m=1}^N m^2 \frac{\pi^2}{h^2} v_m \cos m\pi \frac{y}{h} \right] + \\
& + (\lambda + \mu) \left[\frac{\phi_2' - \phi_1'}{h} + \phi_3' \left(y - \frac{y^2}{2h} - \frac{h}{3}\right) + \phi_4' \left(\frac{y^2}{2h} - \frac{h}{6}\right) + \sum_{m=1}^N m \frac{\pi}{h} u_m' \cos m\pi \frac{y}{h} \right] + \\
& + \mu \left[\psi_1'' \left(y - \frac{y^2}{2h}\right) + \psi_2'' \frac{y^2}{2h} + \psi_3'' \left(\frac{y^3}{6} - \frac{y^4}{24h} - \frac{hy^2}{6}\right) + \right. \\
& \quad \left. + \psi_4'' \left(\frac{y^4}{24h} - \frac{hy^2}{12}\right) + v_0'' + \sum_{m=1}^N v_m'' \cos m\pi \frac{y}{h} \right] = Y(x, y).
\end{aligned} \tag{11}$$

Для построения замкнутой системы относительно неизвестных, перечисленных в (9), в соответствии с методом быстрых разложений в уравнении (10), представляющем собой разложение по синусам с граничной функцией нулевого порядка, следует положить $y = 0$, затем $y = h$. Тем самым найдем два уравнения:

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \phi_1'' + (\lambda + \mu) \psi_1' + \mu \phi_3 = X(x, 0), \\
& (\lambda + 2\mu) \phi_2'' + (\lambda + \mu) \psi_2' + \mu \phi_4 = X(x, h).
\end{aligned} \tag{12}$$

Теперь уравнение (10) надо умножить на $\sin n\pi y/h$ и проинтегрировать в пределах $0 \leq y \leq h$:

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \left[\frac{h}{n\pi} (\phi_1'' - \phi_2'' (-1)^n) + \frac{h^3}{n^3 \pi^3} (\phi_4'' (-1)^n - \phi_3'') + \frac{h}{2} u_n'' \right] + \\
& + (\lambda + \mu) \left[\frac{h}{n\pi} (\psi_1' - \psi_2' (-1)^n) + \frac{h^3}{n^3 \pi^3} (\psi_4' (-1)^n - \psi_3') - n \frac{\pi}{2} v_n' \right] + \\
& + \mu \left[\frac{h}{n\pi} (\phi_3 - \phi_4 (-1)^n) - n^2 \frac{\pi^2}{2h} u_n \right] = X_n(x), \quad X_n(x) = \int_0^h X(x, y) \sin n\pi \frac{y}{h} dy.
\end{aligned} \tag{13}$$

Уравнение (11) является разложением по косинусам с граничной функцией первого порядка, поэтому вначале его проинтегрируем по $0 \leq y \leq h$, что соответствует нахождению нулевого коэффициента перед суммой ряда по косинусам:

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) (\psi_2 - \psi_1) + (\lambda + \mu) (\phi_2' - \phi_1') + \\
& + \mu \left(\psi_1'' \frac{h^2}{3} + \psi_2'' \frac{h^2}{6} - \psi_3'' \frac{h^4}{45} - \psi_4'' \frac{7h^4}{360} + v_0'' h \right) = Y_0(x), \quad Y_0(x) = \int_0^h Y(x, y) dy.
\end{aligned} \tag{14}$$

Теперь уравнение (11) надо продифференцировать по переменной y :

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \left[\psi_3 \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \psi_4 \frac{y}{h} + \sum_{m=1}^N m^3 \frac{\pi^3}{h^3} v_m \sin m\pi \frac{y}{h} \right] + \\
& + (\lambda + \mu) \left[\phi_3' \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \phi_4' \frac{y}{h} - \sum_{m=1}^N m^2 \frac{\pi^2}{h^2} u_m' \sin m\pi \frac{y}{h} \right] + \\
& + \mu \left[\psi_1'' \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \psi_2'' \frac{y}{h} + \psi_3'' \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6h} - \frac{hy}{3}\right) + \right. \\
& \quad \left. + \psi_4'' \left(\frac{y^3}{6h} - \frac{hy}{6}\right) - \sum_{m=1}^N m \frac{\pi}{h} v_m'' \sin m\pi \frac{y}{h} \right] = \frac{\partial Y}{\partial y},
\end{aligned} \tag{15}$$

после чего в (15) положить $y = 0$, затем $y = h$. В результате будем иметь еще два уравнения:

$$(\lambda + 2\mu) \psi_3 + (\lambda + \mu) \phi'_3 + \mu \psi''_1 = Y_0^*(x) \quad , \quad Y_0^*(x) = \left. \frac{\partial Y}{\partial y} \right|_{y=0} ; \quad (16)$$

$$(\lambda + 2\mu) \psi_4 + (\lambda + \mu) \phi'_4 + \mu \psi''_2 = Y_h^*(x) \quad , \quad Y_h^*(x) = \left. \frac{\partial Y}{\partial y} \right|_{y=h} . \quad (17)$$

Последняя операция с уравнением (11) состоит в умножении его на $\cos n\pi y/h$ и последующем интегрировании в пределах $0 \leq y \leq h$:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left[-\psi_3 \frac{h^2}{n^2\pi^2} + \psi_4 (-1)^n \frac{h^2}{n^2\pi^2} - n^2 \frac{\pi^2}{2h} v_n \right] + \\ & + (\lambda + \mu) \left[-\phi'_3 \frac{h^2}{n^2\pi^2} + \phi'_4 (-1)^n \frac{h^2}{n^2\pi^2} + n \frac{\pi}{2} u'_n \right] + \\ & + \mu \left[-\psi''_1 \frac{h^2}{n^2\pi^2} + \psi''_2 (-1)^n \frac{h^2}{n^2\pi^2} + \frac{h^4}{n^4\pi^4} (\psi''_3 - \psi''_4 (-1)^n) + v''_n \frac{h}{2} \right] = Y_n^*(x) \quad , \quad (18) \\ & Y_n^*(x) = \int_0^h Y(x, y) \cos n\pi \frac{y}{h} dy. \end{aligned}$$

Перейдем к выполнению граничных условий. Подставляя быстрые разложения из (8) в (3), получим

$$\phi_1(x) = 0 \quad , \quad v_0(x) = - \sum_{m=1}^N v_m(x). \quad (19)$$

Учитывая $\phi_1(x) = 0$, из граничного условия (5) будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_2}{h} + \phi_3 \frac{h}{6} + \phi_4 \frac{h}{3} + \sum_{m=1}^N u_m m \frac{\pi}{h} (-1)^m + \\ & + (\psi'_1 + \psi'_2) \frac{h}{2} - \frac{h^3}{24} (\psi'_3 + \psi'_4) + v'_0 + \sum_{m=1}^N v'_m (-1)^m = \frac{q_x^{(2)}}{\mu}, \quad (\lambda + 2\mu) \psi_2 + \lambda \phi'_2 = q_y^{(2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Получили замкнутую систему (12)–(14), (15)–(18) из $9 + 2N$ уравнений относительно неизвестных, перечисленных в (9).

Подстановка быстрых разложений (8) в граничные условия (6), (7) с учетом ранее полученного результата $\phi_1(x) = 0$ приводит к следующим четырем уравнениям:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left(\phi'_2(0) \frac{y}{h} + \phi'_3(0) \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6h} - \frac{hy}{3} \right) + \phi'_4(0) \left(\frac{y^3}{6h} - \frac{hy}{6} \right) + \sum_{m=1}^N u'_m(0) \sin m\pi \frac{y}{h} \right) + \\ & + \lambda \left(\psi_1(0) \left(1 - \frac{y}{h} \right) + \psi_2(0) \frac{y}{h} + \psi_3(0) \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6h} - \frac{hy}{3} \right) + \psi_4(0) \left(\frac{y^3}{6h} - \frac{hy}{6} \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{m=1}^N m \frac{\pi}{h} v_m(0) \sin m\pi \frac{y}{h} \right) = q_x^{(3)}(y) \quad , \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_2(0)}{h} + \phi_3(0) \left(y - \frac{y^2}{2h} - \frac{h}{3} \right) + \phi_4(0) \left(\frac{y^2}{2h} - \frac{h}{6} \right) + \sum_{m=1}^N u_m(0) m \frac{\pi}{h} \cos m\pi \frac{y}{h} + \\ & + \psi'_1(0) \left(y - \frac{y^2}{2h} \right) + \psi'_2(0) \frac{y^2}{2h} + \psi'_3(0) \left(\frac{y^3}{6} - \frac{y^4}{24h} - \frac{hy^2}{6} \right) + \psi'_4(0) \left(\frac{y^4}{24h} - \frac{hy^2}{12} \right) + \\ & + v'_0(0) + \sum_{m=1}^N v'_m(0) \cos m\pi \frac{y}{h} = \frac{q_x^{(3)}(y)}{\mu}, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \left(\phi'_2(a) \frac{y}{h} + \phi'_3(a) \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6h} - \frac{hy}{3} \right) + \phi'_4(a) \left(\frac{y^3}{6h} - \frac{hy}{6} \right) + \sum_{m=1}^N u'_m(a) \sin m\pi \frac{y}{h} \right) + \\
& \quad + \lambda \left(\psi_1(a) \left(1 - \frac{y}{h} \right) + \psi_2(a) \frac{y}{h} + \psi_3(a) \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6h} - \frac{hy}{3} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \psi_4(a) \left(\frac{y^3}{6h} - \frac{hy}{6} \right) - \sum_{m=1}^N m \frac{\pi}{h} v_m(a) \sin m\pi \frac{y}{h} \right) = q_x^{(1)}(y), \tag{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi_2(a)}{h} + \phi_3(a) \left(y - \frac{y^2}{2h} - \frac{h}{3} \right) + \phi_4(a) \left(\frac{y^2}{2h} - \frac{h}{6} \right) + \sum_{m=1}^N m \frac{\pi}{h} u_m(a) \cos m\pi \frac{y}{h} + \\
& \quad + \psi'_1(a) \left(y - \frac{y^2}{2h} \right) + \psi'_2(a) \frac{y^2}{2h} + \psi'_3(a) \left(\frac{y^3}{6} - \frac{y^4}{24h} - \frac{hy^2}{6} \right) + \\
& \quad + \psi'_4(a) \left(\frac{y^4}{24h} - \frac{hy^2}{12} \right) + v'_0(a) + \sum_{m=1}^N v'_m(a) \cos m\pi \frac{y}{h} = \frac{q_y^{(1)}(y)}{\mu}. \tag{24}
\end{aligned}$$

Данные четыре уравнения (21)–(24) следует рассматривать как быстрые разложения функций в соответственных правых частях $q_x^{(1)}(y)$, $q_y^{(1)}(y)$, $q_x^{(3)}(y)$, $q_y^{(3)}(y)$ на отрезке $0 \leq y \leq h$. Из характера граничных условий (6) и (7) следует, что быстрые разложения для $q_x^{(1)}(y)$, $q_x^{(3)}(y)$ представлены в (21) и (23) с граничной функцией второго порядка, а для $q_y^{(1)}(y)$, $q_y^{(3)}(y)$ в (19) и (24) – с граничной функцией первого порядка. Поэтому к левой и правой частям уравнений (21) и (23) следует применить оператор быстрых разложений второго порядка [5], а для уравнений (19), (24) – оператор быстрых разложений первого порядка. Эти действия приводят к следующим алгебраическим уравнениям, играющим роль граничных условий для ранее полученной системы (12)–(14), (15)–(18). Операторы быстрых разложений сводятся к выполнению следующих действий. Из уравнения (21) при $y = 0$ и $y = h$ будем иметь

$$\lambda \psi_1(0) = q_x^{(3)}(0), \quad (\lambda + 2\mu) \phi'_2(0) + \lambda \psi_2(0) = q_x^{(3)}(h). \tag{25}$$

После вычисления второй производной по y от уравнения (21) при $y = 0$ и $y = h$ получим

$$(\lambda + 2\mu) \phi'_3(0) + \lambda \psi_3(0) = q_x^{(3)''}(0), \quad (\lambda + 2\mu) \phi'_4(0) + \lambda \psi_4(0) = q_x^{(3)''}(h). \tag{26}$$

Интеграл по y от уравнения (19) в пределах $0 \leq y \leq h$ дает

$$\begin{aligned}
\phi_2(0) + \psi'_1(0) \frac{h^2}{3} + \psi'_2(0) \frac{h^2}{6} - \psi'_3(0) \frac{h^4}{45} - \psi'_4(0) \frac{h^4}{360} + v'_0(0) h = \frac{q_{y0}^{(3)}}{\mu}, \\
q_{y0}^{(3)} = \int_0^h q_y^{(3)}(y) dy. \tag{27}
\end{aligned}$$

После вычисления первой производной по y из уравнения (19) при $y = 0$ и $y = h$ будем иметь

$$\phi_3(0) + \psi'_1(0) = \frac{q_y^{(3)'}(0)}{\mu}, \quad \phi_4(0) + \psi'_2(0) = \frac{q_y^{(3)'}(h)}{\mu}. \tag{28}$$

Из уравнения (23) при $y = 0$ и $y = h$ найдем

$$\lambda \psi_1(a) = q_x^{(1)}(0), \quad (\lambda + 2\mu) \phi'_2(a) + \lambda \psi_2(a) = q_x^{(1)}(h). \tag{29}$$

Вычисляя вторую производную по y , из уравнения (23) при $y = 0$ и $y = h$ получим

$$(\lambda + 2\mu) \phi'_3(a) + \lambda \psi_3(a) = q_x^{(1)''}(0), \quad (\lambda + 2\mu) \phi'_4(a) + \lambda \psi_4(a) = q_x^{(1)''}(h). \tag{30}$$

Уравнение (24) после интегрирования в пределах $0 \leq y \leq h$ дает

$$\begin{aligned} \phi_2(a) + \psi'_1(a) \frac{h^2}{3} + \psi'_2(a) \frac{h^2}{6} - \psi'_3(a) \frac{h^4}{45} - \psi'_4(a) \frac{h^4}{360} + v'_0(a) h = \frac{q_{y0}^{(1)}}{\mu}, \\ q_{y0}^{(1)} = \int_0^h q_y^{(1)}(y) dy. \end{aligned} \quad (31)$$

После вычисления первой производной по y из уравнения (24) при $y = 0$ и $y = h$ будем иметь

$$\phi_3(a) + \psi'_1(a) = \frac{q_y^{(1)}(0)}{\mu}, \quad \phi_4(a) + \psi'_2(a) = \frac{q_y^{(1)}(h)}{\mu}. \quad (32)$$

Теперь остается получить серийные $4N$ уравнений. Для этого уравнения (21), (23) умножим на $\sin n\pi y/h$, а уравнения (19), (24) – на $\cos n\pi y/h$ и проинтегрируем по y , где $n = 1 \div N$:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \left(-\phi'_2(0) \frac{h}{n\pi} (-1)^n - \phi'_3(0) \frac{h^3}{n^3\pi^3} + \phi'_4(0) \frac{h^3(-1)^n}{n^3\pi^3} + u'_n(0) \frac{h}{2} \right) + \\ + \lambda \left(\psi_1(0) \frac{h}{n\pi} - \psi_2(0) \frac{h}{n\pi} (-1)^n - \psi_3(0) \frac{h^3}{n^3\pi^3} + \psi_4(0) \frac{h^3(-1)^n}{n^3\pi^3} - n \frac{\pi}{2} v_n(0) \right) = q_{xn}^{(3)}, \\ q_{xn}^{(3)} = \int_0^h q_x^{(3)}(y) \sin n\pi \frac{y}{h} dy, \quad n = 1 \div N; \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} -\phi_3(0) \frac{h^2}{n^2\pi^2} + \phi_4(0) \frac{h^2(-1)^n}{n^2\pi^2} + u_n(0) n \frac{\pi}{2} - \\ -\psi'_1(0) \frac{h^2}{n^2\pi^2} + \psi'_2(0) \frac{h^2(-1)^n}{n^2\pi^2} + \psi'_3(0) \frac{h^4}{n^4\pi^4} - \psi'_4(0) \frac{h^4(-1)^n}{n^4\pi^4} + v'_n(0) \frac{h}{2} = \frac{q_{yn}^{(3)}}{\mu}, \\ q_{yn}^{(3)} = \int_0^h q_y^{(3)}(y) \cos n\pi \frac{y}{h} dy, \quad n = 1 \div N; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \left(-\phi'_2(a) \frac{h}{n\pi} (-1)^n - \phi'_3(a) \frac{h^3}{n^3\pi^3} + \phi'_4(a) \frac{h^3(-1)^n}{n^3\pi^3} + u'_n(a) \frac{h}{2} \right) + \\ + \lambda \left(\psi_1(a) \frac{h}{n\pi} - \psi_2(a) \frac{h}{n\pi} (-1)^n - \psi_3(a) \frac{h^3}{n^3\pi^3} + \psi_4(a) \frac{h^3(-1)^n}{n^3\pi^3} - n \frac{\pi}{2} v_n(a) \right) = q_{xn}^{(1)}, \\ q_{xn}^{(1)} = \int_0^h q_x^{(1)}(y) \sin n\pi \frac{y}{h} dy, \quad n = 1 \div N; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} -\phi_3(a) \frac{h^2}{n^2\pi^2} + \phi_4(a) \frac{h^2(-1)^n}{n^2\pi^2} + u_n(a) n \frac{\pi}{2} - \\ -\psi'_1(a) \frac{h^2}{n^2\pi^2} + \psi'_2(a) \frac{h^2(-1)^n}{n^2\pi^2} + \psi'_3(a) \frac{h^4}{n^4\pi^4} - \psi'_4(a) \frac{h^4(-1)^n}{n^4\pi^4} + v'_n(a) \frac{h}{2} = \frac{q_{yn}^{(1)}}{\mu}, \\ q_{yn}^{(1)} = \int_0^h q_y^{(1)}(y) \cos n\pi \frac{y}{h} dy, \quad n = 1 \div N. \end{aligned} \quad (36)$$

Исключая из системы (12)–(14), (15)–(18) и граничных условий (22), (26), найденные в (19) выражения для $\phi_1(x)$ и $v_0(x)$, получим замкнутую систему (12)–(14), (15)–(17), (18) из $7+2N$ линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных

$$\phi_j(x), \quad \psi_i(x), \quad u_m(x), \quad v_m(x), \quad j = 2 \div 4, \quad i = 1 \div 4, \quad m = 1 \div N$$

с граничными условиями (20)–(36). Данная система была решена методом Эйлера.

Вывод. Полученное аналитическое решение (8) позволяет вычислить перемещения в любой точке консольной балки прямоугольного сечения и может быть использовано для расчета и анализа в ней напряжений. Точность решения задачи будет зависеть от количества членов быстрого ряда Фурье и порядка граничной функции в быстром разложении.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зверьяев, Е. М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит / Е. М. Зверьяев // Прикладная математика и механика. – 2003. – Т. 67. – № 3. – С. 472 – 481.
- [2] Иванов, Г. В. Решение плоских задач упругости на основе конечных элементов с независимой аппроксимацией смещений / Г. В. Иванов, В. Д. Кургузов // Вычислительные технологии. – 1997. – Т. 2. – № 4. – С. 60–76.
- [3] Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1979. – С. 560.
- [4] Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – С. 940.
- [5] Чернышов, А. Д. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений / А. Д. Чернышов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54. – № 1. – С. 13–24.
- [6] Чернышов, А. Д. Оператор быстрых разложений и теорема единственности быстрых разложений / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. тр. междунар. конф. Ч. 1. – Воронеж : ВГУ, 2012. – С. 401–405.
- [7] Чернышов, А. Д. Температурный режим при естественной конвекции термовязкой несжимаемой жидкости в емкости прямоугольной формы / А. Д. Чернышов, А. Н. Марченко, В. В. Горяйнов // Тепловые процессы в технике. – 2012. – Т. 4. – № 11. – С. 482–486.
- [8] Чернышов, А. Д. Решение методом быстрых разложений задачи о сушке зерна / А. Д. Чернышов, И. О. Павлов, Е. В. Воронова, В. В. Горяйнов // Теплофизика и аэромеханика. – 2012. – Т. 19. – № 6. – С. 739–749.
- [9] Чернышов, А. Д. Решение одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения методом быстрых разложений / А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 4(14).. – С. 105–112.
- [10] Чернышов, А. Д. Решение задачи о контактном тепловом сопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений / А. Д. Чернышов, В. М. Попов, А. С. Шахов, В. В. Горяйнов, А. П. Новиков // Тепловые процессы в технике. – 2012. – Т. 4. – № 12. – С. 544–552.
- [11] Чернышов, А. Д. Решение задачи о деформировании термоупругой пластины методом быстрых разложений / А. Д. Чернышов, А. Н. Марченко, В. В. Горяйнов // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2013. – № 2. – С. 84–89.
- [12] Попов, В. М. Повышенная точность решения задачи о контактном термосопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений / В. М. Попов, А. С. Шахов, В. В. Горяйнов, О. А. Чернышов, А. П. Новиков // Тепловые процессы в технике. – 2014. – Т. 6. – № 4. – С. 179–191.

Чернышов Александр Данилович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж

e-mail: chernyshovad@mail.ru

Горяйнов Виталий Валерьевич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, г. Воронеж

e-mail: gorvit77@mail.ru

A. D. Chernyshov, V. V. Gorjajnov

ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM ABOUT BENDING OF AN ELASTIC CANTILEVER BEAM BY THE METHOD RAPID EXPANSIONS

Voronezh State University of Engineering Technologies

Abstract. Rapid expansion method to solve the problem of the bending of the elastic cantilever beam with a rigid embedded on one side and loaded randomly on the other three sides. The resulting analytical solution can be used to analyze the deformation of the beam.

Keywords: rapid expansion, an analytical solution, the elastic cantilever beam, bend.

REFERENCES

- [1] *Zveryaev, E. M.* The analysis of the hypotheses used at creation of the theory of beams and plates / E. M. Zveryaev // Applied mathematics and mechanics. – 2003. – Vol. 67. – № 3. – P. 472–481.
- [2] *Ivanov, G. V.* The solution of flat problems of elasticity on the basis of final elements with independent approximation of shifts / G. V. Ivanov, V. D. Kurguzov // Computing technologies. – 1997. – Vol. 2. – № 4. – P. 60–76.
- [3] *Tymoshenko, S. P.* Theory of elasticity / S. P. Tymoshenko, J. Gudyer. – M. : Nauka, 1979. – P. 560.
- [4] *Lurye, A. I.* Theory of elasticity / A. I. Lurye. – M. : Nauka, 1970. – P. 940.
- [5] *Chernyshov, A. D.* Method of fast decomposition for the solution of the nonlinear differential equations / A. D. Chernyshov // Zhurnal of calculus mathematics and mathematical physics. – 2014. – Vol. 54. – № 1. – P. 13–24.
- [6] *Chernyshov, A. D.* Operator of fast decomposition and theorem of uniqueness of fast decomposition / A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics : collection of works of the international conference Part 1. – Voronezh : VSU, 2012. – P. 401–405.
- [7] *Chernyshov, A. D.* Temperature condition at natural convection of thermoviscous incompressible liquid in squared capacity / A. D. Chernyshov, A. N. Marchenko, V. V. Goryaynov // Thermal processes in equipment. – 2012. – Vol. 4. – № 11. – P. 482–486.
- [8] *Chernyshov, A. D.* The decision by method of fast decomposition of a task about grain drying / A. D. Chernyshov, I. O. Pavlov, E. V. Voronova, V. V. Goryaynov // Thermophysics and aeromechanics. – 2012. – Vol. 19. – № 6. – P. 739–749.
- [9] *Chernyshov, A. D.* Solution of one nonlinear integro-differential equation by method of fast decomposition / A. D. Chernyshov, V. V. Goryaynov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 4 (14).. – P. 105–112.
- [10] *Chernyshov, A. D.* The solution of a task on contact thermal resistance between the squeezed spheres by method of fast decomposition / A. D. Chernyshov, V. M. Popov, A. S. Shahov, V. V. Goryaynov, A. P. Novikov // Thermal processes in equipment. – 2012. – Vol. 4. – № 12. – P. 544–552.
- [11] *Chernyshov, A. D.* Solution of a task on deformation of a thermoelastic plate by method of fast decomposition / A. D. Chernyshov, A. N. Marchenko, V. V. Goryaynov // Vestnik Voronezh State University of Engineering Technologies. – 2013. – № 2. – P. 84–89.
- [12] *Popov, V. M.* The increased accuracy of the solution of a task on contact thermoresistance between the squeezed spheres by method of fast decomposition / V. M. Popov, A. S. Shahov, V. V. Goryaynov, O. A. Chernyshov, A. P. Novikov // Thermal processes in equipment. – 2014. – Vol. 6. – № 4. – P. 179–191.

Chernyshov, Alexander Danilovich

Dr. Sci. Phys.&Math., Professor, Department of Higher Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh

Gorjajnov, Vitalij Valerevich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Higher Mathematics, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, Voronezh

Е. А. Деревянных, Б. Г. Мионов

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Использование новых методов пластической деформации является одним из наиболее перспективных направлений в создании мелкокристаллических материалов с уникальными свойствами. В качестве способа деформации часто выбирают кручение.

В работе используются апробированные модели механического поведения тел и математические методы исследования, результаты не противоречат исследованиям других авторов. Кручение изотропных цилиндрических и призматических стержней в случае, когда боковая поверхность стержней свободна от касательных нагрузок, а также в случае, когда боковая поверхность стержня находится под действием внешнего переменного давления, рассмотрено в [7], [9]. Кручение анизотропных цилиндрических и призматических стержней исследовано в [1], [7]. Кручение неоднородных призматических стержней в случае трансляционной анизотропии изучено в [2], [3], [4], [5], [6].

Исследовано предельное состояние неоднородных призматических стержней. Предполагается, что составляющие стержня изготовлены из изотропного идеальнопластического материала и обладают независимыми предельными условиями.

Ключевые слова: кручение, напряжение, предел текучести, предельное состояние.

УДК: 539.374

Рассмотрим составной прямоугольный призматический стержень (рис. 1), ориентированный в декартовой системе координат x, y, z . Образующие стержня параллельны оси z . Стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил с моментом M .

Пусть напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется следующими значениями компонент напряжения:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y). \quad (1)$$

Условие пластичности в каждой области (рис. 2) имеет вид

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_{i0}^2, \quad k_{i0} = \text{const}, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Уравнение равновесия в каждой области также запишется в виде

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Поступила 02.07.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 13-01-97029, 14-01-31323 мол_а) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179)

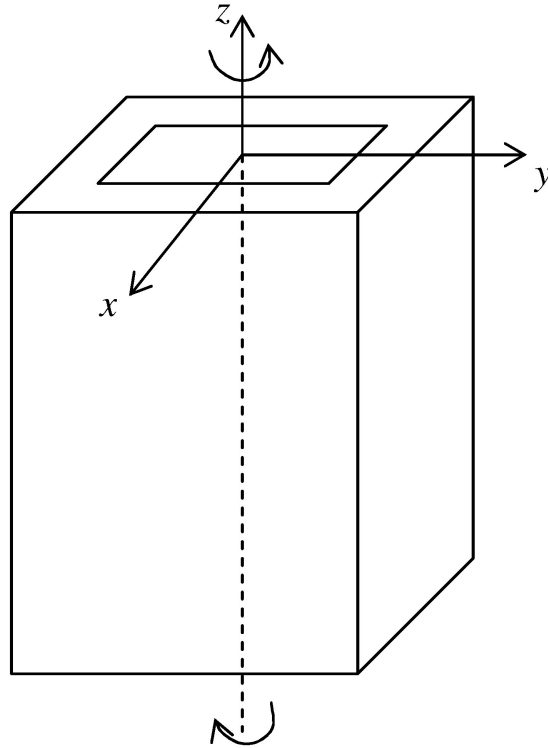


Рис. 1

На рис. 3 изображено поперечное сечение стержня плоскостью $z = const$.

В сечениях стержня плоскостью $z = const$ вектор касательного напряжения равен

$$\vec{\tau} = \tau_{xz}\vec{i} + \tau_{yz}\vec{j}, \quad (4)$$

где \vec{i}, \vec{j} — единичные орты осей x и y .

Боковая поверхность стержня предполагается свободной от нагрузок. Тогда вектор касательного напряжения $\vec{\tau}$ направлен по касательной к контуру стержня.

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} \text{вдоль } ABCD. \quad (5)$$

В этом случае задача становится статически определимой.

Положим в каждой области

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= k_{i0} \cos \theta, \\ \tau_{yz} &= k_{i0} \sin \theta, \end{aligned} \quad (6)$$

где $i = 1, 2$.

Подставляя выражение (6) в уравнение равновесия (3), получим

$$-\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

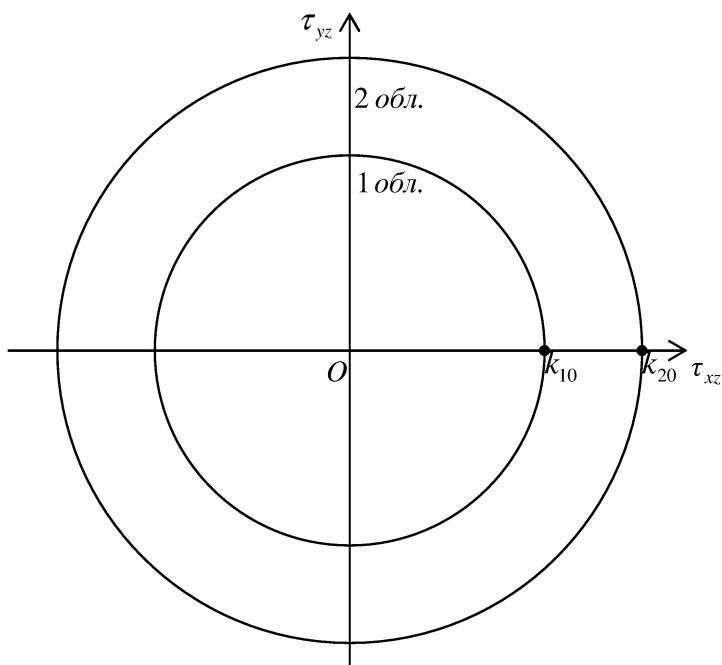


Рис. 2

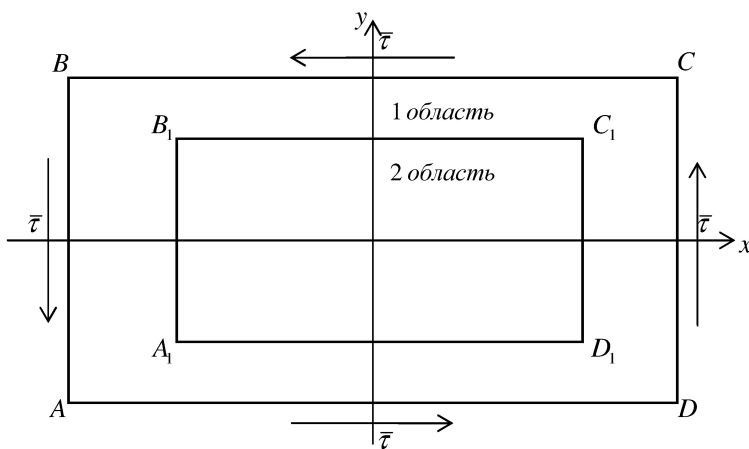


Рис. 3

Соответствующие уравнения для определения характеристик соотношения (7) имеют вид

$$\frac{dx}{-\sin \theta} = \frac{dy}{\cos \theta} = \frac{d\theta}{0}. \tag{8}$$

Интегрируя уравнение (8), получим

$$y = x \cdot \operatorname{ctg} \theta + \Phi_i(\theta), \quad \theta = \operatorname{const}. \tag{9}$$

Таким образом, характеристики уравнения (7) в каждой области есть прямые линии, перпендикулярные вектору касательного напряжения $\bar{\tau}$, причем θ есть угол наклона вектора $\bar{\tau}$ к оси x , меняющийся от одной характеристики к другой.

На рис. 4а построены линии разрыва напряжений на поперечном сечении стержня плоскостью $z = const$ при $k_{20} > k_{10}$.

На линии разрыва напряжений нормальные к линии разрыва напряжений составляющие вектора касательного напряжения непрерывны, а касательные составляющие терпят разрыв.

Линии неоднородности A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 , A_1D_1 являются линиями разрыва напряжений.

В области APA_1D_1YD действует вектор касательного напряжения $\bar{\tau}_{11}$, а в области $APQB$ – вектор касательного напряжения $\bar{\tau}_{14}$. Направляющий вектор линии разрыва AP первой области равен вектору $\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_{11} - \bar{\tau}_{14}$. Линия разрыва AP пересекает линию разрыва A_1B_1 в точке P .

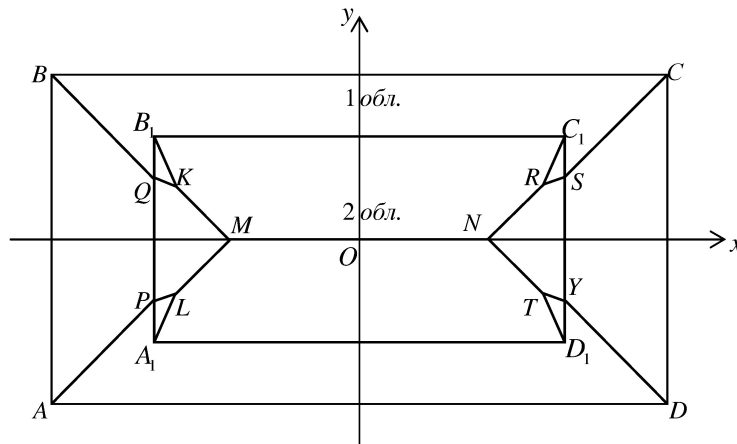


Рис. 4а

Аналогично строятся линии разрыва напряжений BQ , CS , DY в остальных углах.

В области A_1PL действует вектор касательного напряжения $\bar{\tau}'_{11}$, в области $PLMKQ$ – вектор $\bar{\tau}_{24}$, а в области A_1LMNTD_1 – вектор $\bar{\tau}_{21}$. Направляющий вектор линии разрыва PL второй области равен вектору $\bar{\tau}_2 = \bar{\tau}'_{11} - \bar{\tau}_{24}$. Направляющий вектор линии разрыва A_1L равен вектору $\bar{\tau}_3 = \bar{\tau}_{21} - \bar{\tau}'_{11}$. Линии разрыва PL и A_1L пересекаются в точке L . Направляющий вектор линии разрыва LM второй области равен вектору $\bar{\tau}_4 = \bar{\tau}_{21} - \bar{\tau}_{24}$. Аналогично строятся линии разрыва напряжений QK , B_1K , SR , C_1R , YT , D_1T , KM , RN и TN в остальных углах.

Линии разрыва KM и LM пересекаются в одной точке M , а линии разрыва TN и RN – в точке N .

Так как в области A_1LMNTD_1 действует вектор касательного напряжения $\bar{\tau}_{21}$, а в области B_1KMNRC_1 – вектор $\bar{\tau}_{23}$, то линия MN также является линией разрыва напряжений.

Линии разрыва MN , RN , TN пересекаются в одной точке N .

Таким образом, в каждой области найдены векторы касательных напряжений, характеристики соотношений, определяющих напряженно-деформированное состояние тела, и построены линии разрыва напряжений.

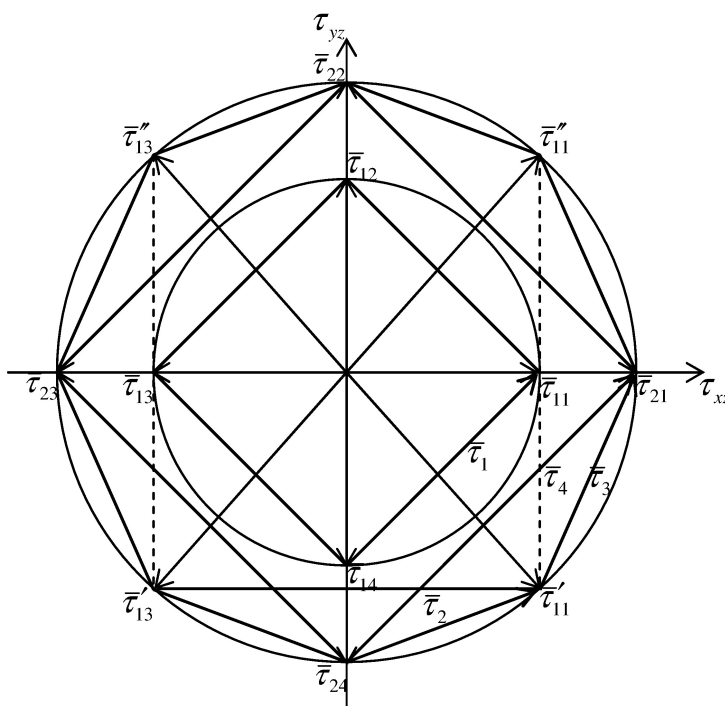


Рис. 46

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
- [2] *Деревянных, Е. А.* Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней / Е. А. Деревянных, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2012. – № 4 (76). – С. 108–112.
- [3] *Деревянных, Е. А.* О предельном состоянии анизотропных призматических стержней при кручении в случае трансляционной анизотропии / Е. А. Деревянных // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – № 4 (14). – С. 174–184.
- [4] *Деревянных, Е. А.* О предельном состоянии кусочно-неоднородных анизотропных призматических стержней полигонального сечения при кручении / Е. А. Деревянных // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С. 75–80.
- [5] *Деревянных, Е. А.* Предельное состояние анизотропных призматических кусочно-неоднородных стержней при кручении / Е. А. Деревянных // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – № 3 (13). – С. 72–80.
- [6] *Деревянных, Е. А.* Предельное состояние анизотропных призматических стержней прямоугольного сечения при кручении / Е. А. Деревянных // Новый университет. Серия : Вопросы естественных наук. – 2012. – № 1 (11). – С. 15–18.
- [7] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.

[8] *Митрофанова, Т. В.* О предельном состоянии анизотропных призматических стержней при кручении / Т. В. Митрофанова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – Ч. 3. – С. 601–609.

Деревянных Евгения Анатольевна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru

Миронов Борис Гурьевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

E. A. Derevyannih, B. G. Mironov

TO A QUESTION OF TORSION OF NON-UNIFORM PRISMATIC CORES

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The limit condition of compound prismatic cores is investigated. It is supposed that core components from an isotropic idealnplastichesky material and possess independent limit conditions.

Keywords: torsion, tension, fluidity limit, limiting condition.

REFERENCES

- [1] *Bykovtsev, G. I.* Theory of plasticity / G. I. Bykovtsev, D. D. Ivlev. – Vladivostok : Dalnauka, 1998. – 528 p.
- [2] *Derevyannih, E. A.* About the general ratios of the theory of torsion of anisotropic cores / E. A. Derevyannih, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2012. – № 4 (76). – P. 108–112.
- [3] *Derevyannih, E. A.* About a limit condition of anisotropic prismatic cores at torsion in case of transmitting anisotropy / E. A. Derevyannih // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 4 (14). – P. 174–184.
- [4] *Derevyannih, E. A.* About a limit condition of piecewise and non-uniform anisotropic prismatic cores of polygonal section at torsion / E. A. Derevyannih // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 1 (11). – P. 75–80.
- [5] *Derevyannih, E. A.* Limit condition of anisotropic prismatic piecewise and non-uniform cores at torsion / E. A. Derevyannih // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 3 (13). – P. 72–80.
- [6] *Derevyannih, E. A.* Limit condition of anisotropic prismatic cores of rectangular section at torsion / E. A. Derevyannih // New university. Series: Questions of natural sciences. – 2012. – № 1 (11). – P. 15–18.
- [7] *Ivlev, D. D.* Theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 231 p.
- [8] *Mitrofanova, T. V.* About a limit condition of anisotropic prismatic cores at torsion / T. V. Mitrofanova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – № 2 (8). – Part 3. – P. 601–609.

Derevyannih, Evgeniya Anatolevna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematics and Physics, Chuvash state agricultural Academy, Cheboksary

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

В. А. Аскарлов

ОБРАТНАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ, АРМИРОВАННОГО ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ ВОЛОКНАМИ

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Аннотация. На основе принципа равнопрочности решена задача по определению оптимальной формы поперечного сечения упругих включений (волокон), обеспечивающая минимизацию напряжений в изгибаемой пластине. Найденная форма поперечного сечения волокон обеспечивает повышение несущей способности составной пластины.

Ключевые слова: упругая составная пластина, связующее, включения, изгиб, минимизация напряжений, оптимальная форма поперечных сечений волокон.

УДК: 539.3

Рассмотрим составную упругую пластину, состоящую из сплошной упругой среды (матрицы) и распределенных в ней включений из другого упругого материала. Подкрепляющие элементы (волокна), сравнительно небольшие по массе, существенно влияют на прочность составной пластины [1], [2]. Процесс разрушения таких материалов определяется взаимодействием включений (волокон) с матрицей. Армированные волокна проектируют в основном круглые поперечные сечения. Как показывает опыт, от идеальной конструкторской геометрии реальные поверхности сечений подкрепляющих волокон отличаются наличием неровностей, являющихся неизбежным следствием процесса их изготовления. Несмотря на малые размеры неровностей, они могут оказывать существенное влияние на несущую способность составного тела. Поэтому исследование как самой геометрии реальных поверхностей волокон, так и влияния параметров неровностей поверхности соединения связующего с волокнами на несущую способность крайне актуальны.

На современном этапе развития техники важное значение имеет оптимальное проектирование конструкций и материалов.

Пусть неограниченная пластина (композит) подвергается изгибу средними моментами (изгиб на бесконечности): $M_x = M_x^\infty$, $M_y = M_y^\infty$, $H_{xy} = 0$. Рассмотрим составную упругую пластину, состоящую из сплошной упругой среды (матрицы) области D , и распределенных в ней одинаковых включений с поперечным сечением, близким к круговому. Обозначим границу раздела различных упругих сред через L'_m ($m = 0, \pm 1, \dots$). Полагаем, что границу L'_m соединения волокна с матрицей можно представить в виде

$$r = \rho(\theta) = \lambda + \varepsilon H(\theta), \quad (1)$$

а центры периодической системы волокон расположены в точках

$$P_m = m\omega, \quad (m = 0, \pm 1, \dots), \quad \omega = 2.$$

Здесь ε – малый параметр, равный R_{\max}/λ ; R_{\max} – наибольшая высота неровности профиля контура L'_m от окружности радиуса $r = \lambda$.

Поступила 08.06.2014

Считается, что всюду на границе соединения L'_m имеет место жесткое сцепление различных сред. Начало системы координат совмещаем с геометрическим центром круга L_0 ($r = \lambda$) в срединной плоскости композита. Для оптимизации несущей способности составной пластины предлагается метод, заключающийся в выборе класса неровностей поверхности поперечного сечения волокна, обеспечивающего повышение несущей способности композита. Таким образом, требуется определить такую геометрию поверхности соединения волокна и связующего, чтобы созданное ею упругое поле снижало бы концентрацию напряжений в композите. Очевидно, что чем ниже уровень напряженности в составном теле, тем выше ресурс ее работы. Решению подобных задач механики посвящены работы [3], [4], [5], [6], [7].

Управляющими переменными принимаем параметры геометрии границы соединения волокон и связующего. Представим границу неизвестного контура L_0^* в виде (1), где функция $H(\theta)$ подлежит определению в процессе решения задачи оптимизации. Не уменьшая общности поставленной задачи оптимизации, принимаем, что искомая функция $H(\theta)$ симметрична относительно координатных осей и может быть представлена в виде отрезка ряда Фурье. Следовательно, задача оптимизации сводится к определению коэффициентов a_{2k}^0 и b_{2k}^0 (параметров управления) этого ряда Фурье.

Для нахождения геометрии соединения введем в рассматриваемую задачу в качестве критерия определения геометрии соединения (функции $H(\theta)$) условие равнопрочности на контуре соединения связующего и волокон.

Требуется определить функцию $H(\theta)$, так чтобы созданное в процессе нагружения составной пластины напряженно-деформированное поле обеспечивало выполнение условия равнопрочности на контуре раздела различных сред. Это дополнительное условие позволяет определить искомую функцию $H(\theta)$ геометрии соединения материалов.

На основании симметрии граничных условий и геометрии области D , занятой упругой средой, компоненты тензора напряжений в связующем являются периодическими функциями с основным периодом ω . Так как решение для связующего обладает свойством периодичности, достаточно рассмотреть условия сопряжения связующего и волокна лишь вдоль контура L_0^* .

Обозначим через w_0 прогиб (включения) области S_0^* , ограниченной контуром L_0^* , а w – прогиб пластины вне областей S_m^* ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) соприкосновения волокон поперечного сечения, близкого к круговому. Представим эти прогибы через бигармонические функции. Комплексные потенциалы, относящиеся к волокну, обозначим через $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$, а относящиеся к связующему – через $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$. Искомые функции (прогиб, напряжения, моменты) ищем в виде разложений по малому параметру, в которых пренебрегаем для упрощения членами, содержащими ε в степени выше первой. Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений теории изгиба пластин. Значения компонент тензора напряжений (моментов) при $r = \rho(\theta)$ найдем, разлагая в ряд выражения для моментов в окрестности $r = \lambda$.

Используя процедуру метода возмущений, на основании граничных условий рассматриваемой задачи получим [8] граничные условия задачи на контуре L_0 ($\tau = \lambda \exp(i\theta)$) для комплексных потенциалов:

– для нулевого приближения:

$$\begin{aligned} & \Phi^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} - \left[\bar{\tau} \Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau) \right] e^{2i\theta} = \\ & = \Phi_0^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi_0^{(0)}(\tau)} - \left[\bar{\tau} \Phi_0^{(0)'}(\tau) + \Psi_0^{(0)}(\tau) \right] e^{2i\theta} \quad \text{на } L_0, \\ & \kappa \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} + \Phi^{(0)}(\tau) - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[\frac{\lambda^2}{\tau} \Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau) \right] = \\ & = \frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)} \left\{ \kappa_0 \overline{\Phi_0^{(0)}(\tau)} + \Phi_0^{(0)}(\tau) - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[\frac{\lambda^2}{\tau} \Phi_0^{(0)'}(\tau) + \Psi_0^{(0)}(\tau) \right] \right\}; \end{aligned} \tag{2}$$

– для первого приближения:

$$\begin{aligned}
& \Phi^{(1)}(\tau) + \overline{\Phi^{(1)}(\tau)} - \left[\bar{\tau} \Phi^{(1)'}(\tau) + \Psi^{(1)}(\tau) \right] e^{2i\theta} = \\
& = \Phi_0^{(1)}(\tau) + \overline{\Phi_0^{(1)}(\tau)} - \left[\bar{\tau} \Phi_0^{(1)'}(\tau) + \Psi_0^{(1)}(\tau) \right] e^{2i\theta} + f_1 + if_2 \quad \text{на } L_0, \\
& \kappa \overline{\Phi^{(1)}(\tau)} + \Phi^{(1)}(\tau) - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[\frac{\lambda^2}{\tau} \Phi^{(1)'}(\tau) + \Psi^{(1)}(\tau) \right] = \\
& = \frac{D_0(1-v_0)}{D(1-v)} \left\{ \kappa_0 \overline{\Phi_0^{(1)}(\tau)} + \Phi_0^{(1)}(\tau) - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[\frac{\lambda^2}{\tau} \Phi_0^{(1)'}(\tau) + \Psi_0^{(1)}(\tau) \right] \right\} + g_1 + ig_2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); v и v_0 – коэффициенты Пуассона связующего и волокна соответственно; $\kappa = -(3+v)/(1-v)$; $\kappa_0 = -(3+v_0)/(1-v_0)$; D и D_0 – цилиндрическая жесткость связующего и волокна; функция $f_1 + if_2$ выражается через функцию $H(\theta)$ и компоненты перемещений на контуре L_0 нулевого приближения; аналогично функция $g_1 + ig_2$ зависит от функции $H(\theta)$ и компонент напряжений при $\tau = \lambda e^{i\theta}$ нулевого приближения.

Рассматриваемая задача определения напряженно-деформированного состояния составной пластины сводится в каждом приближении к отысканию двух пар функций $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ и $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, аналитических в соответствующих областях и удовлетворяющих соответствующим граничным условиям (2) и (3).

Комплексные потенциалы $\Phi_0^{(0)}(z)$ и $\Psi_0^{(0)}(z)$ регулярны в области S_0 , ограниченной контуром L_0 , и, следовательно, могут быть представлены в виде [8]

$$\Phi_0^{(0)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}^{(0)} z^{2k}, \quad \Psi_0^{(0)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}^{(0)} z^{2k}. \tag{4}$$

Комплексные потенциалы $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$ в рассматриваемом случае (изгиб на бесконечности) ищем [9] в виде

$$\begin{aligned}
\Phi^{(0)}(z) &= \alpha_0^0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^0 \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+v)}, \\
\Psi^{(0)}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2}^0 \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^0 \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{D(1-v)},
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \sin^{-2}\left(\frac{\pi}{\omega}z\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$; $S(z) = \sum_m' \left[\frac{P_m}{(z-P_m)^2} - \frac{2z}{P_m^2} - \frac{1}{P_m} \right]$;

штрих у суммы означает, что при суммировании исключается индекс $m = 0$.

Из условия симметрии относительно координатных осей находим, что

$$\text{Im} \alpha_{2k}^0 = 0, \quad \text{Im} \beta_{2k}^0 = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Из условия постоянства главного вектора всех сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в D , следует

$$\alpha_0^0 = \frac{\pi^2}{24} \beta_2^0 \lambda^2.$$

Можно убедиться, что представления (5) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений.

Удовлетворяя граничным условиям (2) комплексными потенциалами (4) и (5) и используя процедуру метода степенных рядов, получим бесконечные системы алгебраических уравнений относительно α_{2k+2}^0 , β_{2k+2}^0 , a_{2k}^0 , b_{2k}^0 ($k = 0, 1, \dots$). Эти системы имеют громоздкий вид. Однако в большинстве практически важных случаев можно их урезать до двух–трех уравнений и,

несмотря на это, получить весьма точные результаты [10] для рабочих диапазонов изменения радиуса λ .

После нахождения решения в нулевом приближении можно перейти к решению задачи в первом приближении. На основании решения в нулевом приближении находятся функции $f_1 + if_2$ и $g_1 + ig_2$. Комплексные потенциалы $\Phi_0^{(1)}(z)$, $\Psi_0^{(1)}(z)$ и $\Phi^{(1)}(z)$, $\Psi^{(1)}(z)$ ищутся в виде, аналогичном (4), (5), с очевидными изменениями. Дальнейший ход решения граничной задачи (3) такой же, как в нулевом приближении. Используя процедуру метода степенных рядов к граничным условиям (3), после некоторых преобразований находим бесконечную линейную алгебраическую систему относительно $\alpha_{2k}^{(1)}$, $\beta_{2k}^{(1)}$, $a_{2k}^{(1)}$, $b_{2k}^{(1)}$. Как и в нулевом приближении, эта система уравнений такова, что позволяет в явном виде получить формулы для $a_{2k}^{(1)}$ и $b_{2k}^{(1)}$, выраженные через коэффициенты ряда Фурье функций $f_1 + if_2$ и $g_1 + ig_2$.

При заданной функции $H(\theta)$ полученные алгебраические соотношения являются замкнутыми и позволяют найти напряженно-деформированное состояние композита для каждого профиля поперечного сечения волокна.

Рассмотрим задачу оптимизации. Пусть требуется определить границу (функцию $H(\theta)$) соединения связующего и волокна.

С помощью формул [10]

$$M_\theta + M_\rho = -4D(1+v)Re\Phi(z),$$

$$M_\theta - M_\rho + 2iH_{\rho\theta} = 2D(1-v)[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{2i\theta},$$

используя полученное решение

$$\Phi(z) = \Phi^{(0)}(z) + \varepsilon\Phi^{(1)}(z), \quad \Psi(z) = \Psi^{(0)}(z) + \varepsilon\Psi^{(1)}(z),$$

найдем изгибающий момент M_θ на контуре $\tau = \rho(\theta)$ связующего с точностью до величин первого порядка относительно малого параметра:

$$\begin{aligned} M_{\theta|r=\rho(\theta)} &= M_{\theta|r=\lambda}^{(0)} + \varepsilon \left[\frac{\partial M_\theta^{(0)}}{\partial r} H(\theta) + M_\theta^{(1)} \right]_{r=\lambda} & (6) \\ M_{\theta|r=\lambda}^{(0)} &= \frac{1}{2} (M_x^\infty + M_y^\infty) + \frac{1}{2} (M_y^\infty - M_x^\infty) \cos 2\theta - \\ &- 2D(1+v) \left(\alpha_0^0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^0 \cos(2k+2)\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^0 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{2k+2j+2} r_{j,k} \cos 2j\theta \right) + \\ &+ D(1-v) \left(- \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2}^0 \cos(2k+2)\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^0 \lambda^{2k+2j+2} 2j r_{j,k} \cos 2j\theta + \right. \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2}^0 \cos 2k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{2k+2}^0 \lambda^{2k+2j+2} r_{j,k} \cos(2j+2)\theta - \\ &\left. - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2}^0 \lambda^{2k+2j+2} S_{j,k} \cos(2j+2)\theta \right) \\ M_{\theta|r=\lambda}^{(1)} &= -2D(1+v) \left(\alpha_0^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^{(1)} \cos(2k+2)\theta + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^{(1)} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{2k+2j+2} r_{j,k} \cos 2j\theta \Big) + \\
& + D(1-v) \left(- \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2}^{(1)} \cos(2k+2)\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^{(1)} \lambda^{2k+2j+2} 2j r_{j,k} \cos 2j\theta + \right. \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2}^{(1)} \cos 2k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{2k+2}^{(1)} \lambda^{2k+2j+2} r_{j,k} \cos(2j+2)\theta - \\
& \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2}^{(1)} \lambda^{2k+2j+2} S_{j,k} \cos(2j+2)\theta \right).
\end{aligned}$$

В приведенной формуле (6) коэффициенты $\alpha_{2k}^{(1)}$, $\beta_{2k}^{(1)}$ зависят от величин d_{2k} (коэффициентов) ряда Фурье искомой функции $H(\theta)$. Для построения недостающих уравнений, позволяющих определить d_{2k} , необходимо, чтобы обеспечивалась минимизация напряжений (моментов) на контуре L'_0 . Оптимальное проектирование осуществляем путем минимизации критерия

$$\sum_{k=1}^M [M_\theta(\theta_i) - M_*]^2 \rightarrow \min,$$

где M_* – оптимальное значение изгибающего момента на границе раздела сред, которое заранее неизвестно и подлежит определению.

Разбиваем отрезок $[0, 2\pi]$ на n равных частей. В узлах разбиения θ_i вычисляем значения функции $M_\theta(\theta_i)$. Функция $M_\theta(\theta_i)$ линейно зависит от управляющих переменных d_{2k} и M_* . Согласно методу наименьших квадратов наилучшими коэффициентами d_{2k} и M_* будут те, для которых функция $U = \sum_{i=1}^N [M_\theta(\theta_i) - M_*]^2$ будет принимать минимальные значения. Используя необходимое условие экстремума функции нескольких переменных, получаем бесконечную линейную систему уравнений для определения d_{2k} и M_* :

$$\frac{\partial U}{\partial M_*} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial d_{2k}} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Система уравнений упрощается, так как функция $M_\theta(\theta, d_{2k})$ линейна относительно параметров d_{2k} . Система уравнений (6) совместно с алгебраическими системами для α_{2k}^0 , β_{2k}^0 , a_{2k}^0 , b_{2k}^0 и их аналогами в первом приближении позволяет определить равнопрочную форму раздела сред, напряженно-деформированное состояние композита, а также оптимальное значение изгибающего момента M_* на контуре раздела сред. Полученные системы относительно α_{2k}^0 , β_{2k}^0 , a_{2k}^0 , b_{2k}^0 , α_{2k}^1 , β_{2k}^1 , a_{2k}^1 , b_{2k}^1 весьма громоздки. Так как $0 < \lambda < 1$, а параметр λ в высоких степенях входит в данные системы, то их можно значительно упростить. При решении большинства важных практических задач каждую из этих алгебраических систем можно урезать до двух-трех уравнений и получить достаточно точные результаты для рабочих диапазонов радиуса λ .

Для численной реализации изложенного способа совместно решали полученные системы. Использовали метод урезания алгебраических систем. Исследовали односторонний изгиб составной пластины постоянными моментами $M_y^\infty (M_x^\infty = 0)$ и всесторонний изгиб – моментами $M_x^\infty = M_y^\infty = M_0$. Урезанные системы уравнений решали методом Гаусса с выбором главного элемента в зависимости от радиуса λ .

Оптимальное решение, т.е. найденные коэффициенты d_{2k} функции $H(\theta)$, способствует повышению несущей способности составной пластины.

Таким образом, полученные результаты рассмотренной работы открывают новые возможности оптимального проектирования составных пластин (композитов) за счет выбора формы соединения связующего и волокон (включений).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Решетов, Д. Н.* Состояние и тенденции развития деталей машин / Д. Н. Решетов // Вестник машиностроения. – 2000. – № 10. – С. 11–15.
- [2] *Фудзии, Т.* Механика разрушения композиционных материалов / Т. Фудзии, М. Дзако. – М. : Мир, 1982. – 232 с.
- [3] *Mirsalimov, V. M.* The breaking crack build-up in perforated planes by uniform ring switching / V. M. Mirsalimov, E. A. Allahyarov // Int. J. Fracture. – 1996. – Vol. 79. – No 1. – P. 17–21.
- [4] *Гаджиев, Г. Х.* Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра контактной пары / Г. Х. Гаджиев, В. М. Мирсалимов // Проблема механики : сб. ст. к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского ; под ред. Д. М. Климова. – М. : Физматлит, 2003. – С. 196–207.
- [5] *Mirsalimov, V. M.* Inverse theory of elasticity problem of mounting a disk on a rotating shaft / V. M. Mirsalimov // J. of Machinery Manufacture and Reliability. – 2007. – Vol. 36. – No 1. – P. 35–38.
- [6] *Мирсалимов, В. М.* Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра / В. М. Мирсалимов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 1. – С. 165–173.
- [7] *Мирсалимов, В. М.* Минимизация параметров разрушения в составном теле / В. М. Мирсалимов, К. С. Мамедова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2012. – № 2 (19). – С. 65–68.
- [8] *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [9] *Мирсалимов, В. М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. – Баку : Элм, 1984. – 124 с.
- [10] *Григолюк, Э. И.* Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. – М. : Наука, 1970. – 556 с.

Аскарлов Вусал Али оглы,

аспирант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

e-mail: irakon63@hotmail.com

V. A. Askarov

**INVERSE PERIODIC PROBLEM OF THE THEORY OF THE BEND OF THE
PLATE REINFORCED BY UNIDIRECTIONAL FIBRES**

Institute Mathematics and Mechanics NAN of Azerbaijan

Abstract. On the basis of a principle of a uniform strength the problem of definition of an optimum form of cross-section of the elastic inclusions (fibers), provided decrease in concentration of tension in a bent plate is solved. The found form of cross-section of fibers provides increase of bearing ability of a composite plate.

Keywords: elastic composite plate, binding, inclusions, bend, minimization of stresses, optimal form of width section of fiber.

REFERENCES

- [1] *Reshetov, D. N.* Status and trends of development of machine elements. Vestnik Mashinostr / D. N. Reshetov. – 2000. – № 10. – P. 11–15.
- [2] *Fujii, T.* Fracture mechanics Composite Materials / T. Fujii, M. Dzako. 1982. – Moscow. Mir. - 232 p.
- [3] *Mirsalimov, V. M.* The breaking crack build-up in perforated planes by uniform ring switching. Int. J. Fracture / V. M. Mirsalimov, E. A. Allahyarov. – 1996. – Vol. 79. – No 1. – P. 17–21.
- [4] *Gadzhiev, G. Kh.* Inverse problem of mechanics of fracture mechanics for a composite cylinder of a contact pair. In: Klimov D. M. (ed), Problem in Mechanics (collected papers devoted to the 90th anniversary of A. Yu. Ishlinskii / G. Kh. Gadzhiev, V. M. Mirsalimov. – M. : Fizmatlit, 2003. – P. 196–207.
- [5] *Mirsalimov, V. M.* Inverse theory of elasticity problem of mounting a disk on a rotating shaft. J. of Machinery Manufacture and Reliability / V. M. Mirsalimov. – 2007. – Vol. 36. – No 1. – P. 35–38.
- [6] *Mirsalimov, V. M.* Inverse problem of fracture mechanics for a compound cylinder. Mechanics of Solid / V. M. Mirsalimov. – 2009. – Vol. 44. – № 1. – P. 141–148.
- [7] *Mirsalimov, V. M.* Minimization of stress state of the compound cylinder. J. of Machinery Manufacture and Reliability / V. M. Mirsalimov. – 2006. – Vol. 35. – № 26. – P. 97–101.
- [8] *Muskhelishvili, N. I.* Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity / N. I. Muskhelishvili. – M. : Nauka, 1966. – 707 p.
- [9] *Mirsalimov, V. M.* Destruction of elastic and elastoplasti bodies with cracks / V. M. Mirsalimov. – Baku : Elm. – 1984. – 124 p.
- [10] *Grigolyuk, E. I.* Punch of a plates and shelts / E. I. Grigolyuk, L. A. Filshinsky. – M. : Science, 1970. – 556 p.

Askarov, Vusal Ali oqli

Postgraduate student, Institute of Mathematics and Mechanics NAN of Azerbaijan, Baku

А. В. Бураков, О. Р. Дорняк, В. Ф. Лазукин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОРЕЗАНИЯ МОНОЛИТНОГО ЦЕМЕНТОБЕТОННОГО ПОКРЫТИЯ

Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина

Воронежская государственная лесотехническая академия

Аннотация. Гидрорезание – один из современных методов, применяемых для эффективного удаления разрушенных участков аэродромных покрытий. Для выбора рациональных режимов гидрорезания необходимо исследование комплекса сложных взаимосвязанных явлений.

В рамках механики многофазных систем предложена математическая модель напряженно-деформированного состояния аэродромного цементобетонного покрытия при воздействии на его поверхность высокоскоростной гидроструи. Материал покрытия рассматривается как двухфазная среда. Предложенная модель позволяет прогнозировать область разрушения цементобетонного покрытия. В квазистационарном приближении для случая плоского деформированного состояния получено аналитическое решение, определяющее глубину разрушения изотропного материала в зависимости от давления и диаметра струи, а также от значений предела прочности покрытия на сжатие и расширение. Предложена эмпирическая формула, устанавливающая значение глубины разрушения покрытия при заданной скорости подачи гидроструи.

Обоснован удобный для практических расчетов способ оценки глубины разрушения аэродромного покрытия при гидрорезании.

Ключевые слова: гидрорезание, разрушение покрытия, математическое моделирование.

УДК: 539.422.5:623.687

Введение. Повреждения цементобетонных аэродромных покрытий, как правило, имеют локальный характер. При производстве эксплуатационного ремонта поврежденный верхний слой удаляется на требуемую глубину с применением различных технологий. Помимо традиционных методов удаления разрушенного покрытия с помощью фрез, перфораторов, пневмомолотков, металлических щеток, бетоноломных установок для этих целей используют метод гидрорезания, который позволяет эффективно удалить покрытие за счет энергии высокоскоростной гидроструи (рис. 1). Для выбора рациональных режимов гидрорезания необходимо исследование комплекса сложных взаимосвязанных явлений [1], [2], [3], [4]. В данной работе предложена математическая модель процесса гидрорезания, позволяющая оценить глубину разрушения материала покрытия. Рассмотрен способ гидрорезания, обоснованный в [3], при котором разрушение покрытия происходит под воздействием двух высокоскоростных жидкостных струй. Первая струя имеет скорость до 100 м/с, она предназначена для насыщения водой пористой структуры цементобетона и снижения его прочностных характеристик. Вторая гидроструя, воздействующая уже на насыщенный водой материал аэродромного покрытия в интервале скоростей от 100 м/с до 800 м/с, осуществляет сам процесс гидрорезания.

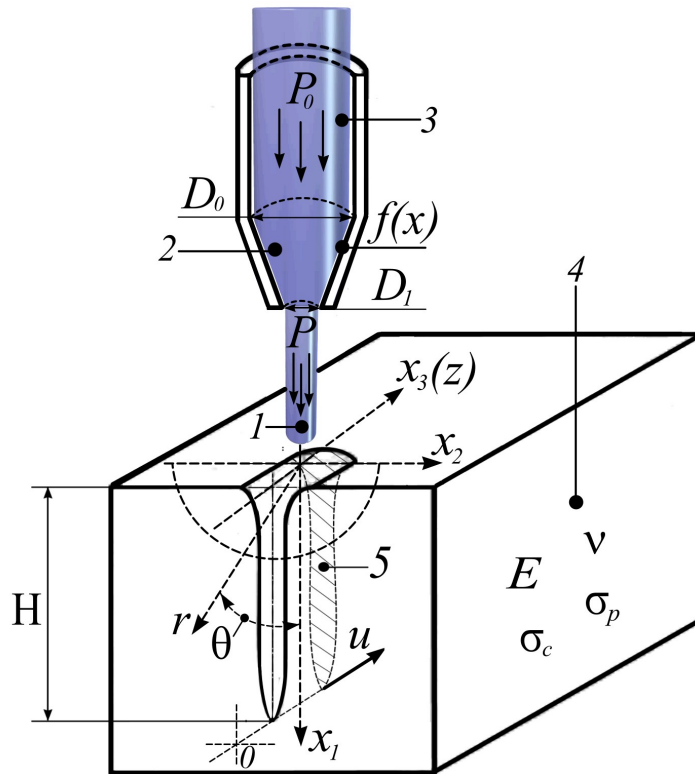


Рис. 1. Схема гидрорезания монолитного цементобетонного аэродромного покрытия.
 1 – высокоскоростная жидкостная струя; 2 – сопловое устройство гидрорезающего инструмента;
 3 – подводящий гидроканал высокого давления; 4 – цементобетон;
 5 – контур фронта гидрорезания

Анализ научных исследований, проведенный в [5], [6], показал, что результат процесса гидрорезания твердых материалов, в том числе цементобетонов различных марок, зависит от большого числа параметров. В их числе:

– *гидродинамические параметры* – давление потока жидкости (воды) в подводящем гидроканале перед сопловым устройством P_0 и давление потока жидкости на выходе из соплового устройства P ;

– *геометрические параметры* – форма образующей поверхности внутреннего профиля струеформирующего соплового устройства гидрорезающего инструмента $f(x)$; диаметр входного и выходного отверстия соплового устройства D_0 и D_1 ;

– *физико-механические и структурные характеристики цементобетонного аэродромного покрытия* – пределы прочности при различных видах нагружения, в частности, при сжатии и растяжении – σ_c и σ_p ; реологические параметры, например модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν ; пористость; удельная поверхность; гранулометрический состав твердого заполнителя цементобетонной смеси и другие;

– *параметры производительности* – скорость подачи струи u и другие.

Математическая модель. Цементно-бетонное покрытие, подвергаемое разрушению, представляет собой композиционный, в общем случае, анизотропный материал, обладающий сложной пористой структурой. Данный материал может рассматриваться как многокомпонентная гетерофазная система. Предполагается, что газообразная фаза заранее вытеснена и

пористая система материала насыщена жидкостью (водой). Далее жидкая фаза обозначена как первая, а твердая фаза – как вторая. Твердая фаза неоднородна по составу. В рассматриваемом случае ее основной компонентой является цементный камень.

Примем, что для материала аэродромного покрытия при его механическом взаимодействии с высокоскоростной гидроструей справедливы допущения механики гетерофазных систем, принятые в [7]. Считается, что размер включений в рассматриваемой системе много больше молекулярно-кинетических размеров; размер неоднородностей много меньше расстояний, на которых макроскопические и усредненные параметры фаз системы меняются существенно (вне поверхностей разрыва); микродеформации и смещения второй (твердой) фазы малы; малы изменения и осцилляции истинной плотности твердой фазы; пренебрежимо малы кинетическая энергия пульсационного движения и пульсационной перенос импульса в обеих фазах; пренебрежимо мал усредненный тензор вязких напряжений в жидкой фазе, то есть вязкость жидкости учитывается только при межфазном взаимодействии. В рамках сделанных допущений возможен переход от уравнений сохранения для микроскопических параметров к уравнениям для усредненных по объемам фаз макроскопических параметров. Такой подход в создании математических моделей позволяет последовательно учесть различное механическое поведение отдельных фаз и особенности их взаимодействия.

Запишем уравнения сохранения массы и количества движения для жидкой и твердой фазы, следуя [7]:

$$\frac{\partial(\rho_1^0 \alpha_1)}{\partial t} + \nabla^k (\rho_1^0 \alpha_1 \langle v_1'^k \rangle_1) = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1; \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho_2^0 \alpha_2)}{\partial t} + \nabla^k (\rho_2^0 \alpha_2 \langle v_2'^k \rangle_2) = 0, \quad (2)$$

$$\alpha_1 \rho_1^0 \left[\frac{\partial \langle \vec{v}_1' \rangle_1}{\partial t} + \langle v_1'^k \rangle_1 \nabla^k \langle \vec{v}_1' \rangle_1 \right] = -\nabla(\alpha_1 \langle p_1' \rangle_1) - \vec{R}_{12} + \alpha_1 \rho_1^0 \vec{g}, \quad (3)$$

$$\alpha_2 \rho_2^0 \left[\frac{\partial \langle \vec{v}_2' \rangle_2}{\partial t} + \langle v_2'^k \rangle_2 \nabla^k \langle \vec{v}_2' \rangle_2 \right] = -\nabla(\alpha_2 \langle p_1' \rangle_1) + \nabla^k \sigma_f^k + \vec{R}_{12} + \alpha_2 \rho_2^0 \vec{g}, \quad (4)$$

где α – объемная концентрация фазы; t – время, с; ρ_1^0, ρ_2^0 – истинные плотности воды и твердой фазы, кг/м³; \vec{v} – скорость, м/с; g – ускорение свободного падения, м/с²; \vec{R}_{12} – сила взаимодействия фаз 1 и 2, Н; p – давление, Па; σ_f – эффективный тензор напряжений, характеризующий прочность структурного каркаса, Па. Нижний индекс 1 относится к первой (жидкой) фазе, 2 – ко второй (твердой) фазе. Верхний индекс k – номер компоненты вектора. Символ $\langle \phi_i' \rangle_i$ обозначает усредненное по объему i -ой фазы значение микроскопической переменной ϕ_i' , определенной в i -ой фазе.

Силы \vec{R}_{12} , характеризующие интенсивность сопротивления фильтрационному переносу в пористой системе материала, можно выразить согласно закону Дарси следующим образом:

$$\vec{R}_{12} = -\vec{R}_{21} = \frac{\mu_1}{K} \alpha_1 (\langle \vec{v}_1' \rangle_1 - \langle \vec{v}_2' \rangle_2), \quad (5)$$

где μ_1 – вязкость жидкости, Па·с; K – коэффициент проницаемости, м².

Для замыкания уравнений (1)–(5) необходимо записать реологическое уравнение рассматриваемой насыщенной дисперсной системы.

Полный тензор напряжений материала σ^{kl} выражается через усредненные тензоры напряжений в жидкой и твердой фазах:

$$\sigma^{kl} = \alpha_1 \langle \sigma_1'^{kl} \rangle_1 + \alpha_2 \langle \sigma_2'^{kl} \rangle_2. \quad (6)$$

Макродеформации материала складываются из деформаций структурного каркаса ε_f^{kl} и деформаций материала зерен, из которых сформирован каркас $\langle \varepsilon_2'^{kl} \rangle_2$:

$$\varepsilon_2^{kl} = \varepsilon_f^{kl} + \langle \varepsilon_2'^{kl} \rangle_2. \quad (7)$$

В предположении малых деформаций микрообъемов твердой фазы в качестве тензора макродеформаций твердой фазы примем, следуя [7],

$$\varepsilon_2^{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle h_2'^l \rangle_2}{\partial x^k} + \frac{\partial \langle h_2'^k \rangle_2}{\partial x^l} \right), \quad (8)$$

где $\langle h_2'^k \rangle_2$ – среднее смещение элементарного макрообъема твердой фазы в направлении x^k , при этом:

$\frac{\partial \langle h_2'^k \rangle_2}{\partial t} \approx v_2^k = \langle v_2'^k \rangle_2 \langle \langle v_2'^k \rangle_2 \rangle_2$ – усреднённая скорость элементарного макрообъема твердой фазы в проекции на ось x^k .

Предположим, что деформации материала зерен структурного каркаса являются упругими, т.е.

$$\langle \varepsilon_2'^{kl} \rangle_2 = \Pi_S^{ijkl} \langle \sigma_2'^{ij} \rangle_2, \quad (9)$$

где Π_S^{ijkl} – тензор податливости материала зерен структурного каркаса, Π_a^{-1} .

Связь деформаций и напряжений структурного каркаса аналогична:

$$\varepsilon_2^{kl} = \Pi_f^{ijkl} \sigma_f^{ij}, \quad (10)$$

где Π_f^{ijkl} – тензор податливости структурного каркаса, Π_a^{-1} .

Учитывая, что

$$\sigma_f^{kl} = \sigma^{kl} + \langle p_1' \rangle_1 \delta^{kl}, \quad (11)$$

используя (6), (9)–(10), можно получить реологическое уравнение двухфазной насыщенной анизотропной среды в виде

$$\varepsilon_2^{kl} = \Pi_S^{ijkl} \frac{\sigma^{ij} + \alpha_1 p_1 \delta^{ij}}{\alpha_2} + \Pi_f^{ijkl} (\sigma^{ij} + p_1 \delta^{ij}). \quad (12)$$

В случае если среда изотропна, каждый из тензоров податливости имеет две независимые компоненты, которые можно выразить через значения модуля упругости E_k , модуля сдвига G_k или коэффициента Пуассона ν_k ($k = f, s$, индексы f и s относятся к структурному каркасу и к материалу зерен соответственно):

$$\varepsilon^{11} = \frac{1}{E_S} \frac{\sigma^{11} + \alpha_1 p_1}{\alpha_2} - \frac{\nu_S}{E_S} \frac{\sigma^{22} + \sigma^{33} + 2\alpha_1 p_1}{\alpha_2} + \frac{1}{E_f} (\sigma^{11} + p_1) - \frac{\nu_f}{E_f} (\sigma^{22} + \sigma^{33} + 2p_1); \quad (13)$$

$$\varepsilon^{22} = \frac{1}{E_S} \frac{\sigma^{22} + \alpha_1 p_1}{\alpha_2} - \frac{\nu_S}{E_S} \frac{\sigma^{11} + \sigma^{33} + 2\alpha_1 p_1}{\alpha_2} + \frac{1}{E_f} (\sigma^{22} + p_1) - \frac{\nu_f}{E_f} (\sigma^{11} + \sigma^{33} + 2p_1);$$

$$\varepsilon^{33} = \frac{1}{E_S} \frac{\sigma^{33} + \alpha_1 p_1}{\alpha_2} - \frac{\nu_S}{E_S} \frac{\sigma^{11} + \sigma^{22} + 2\alpha_1 p_1}{\alpha_2} + \frac{1}{E_f} (\sigma^{33} + p_1) - \frac{\nu_f}{E_f} (\sigma^{11} + \sigma^{22} + 2p_1);$$

$$\varepsilon^{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{G_S}{\alpha_2} + G_f \right] \sigma^{12}, \quad \varepsilon^{13} = \frac{1}{2} \left[\frac{G_S}{\alpha_2} + G_f \right] \sigma^{13};$$

$$\varepsilon^{23} = \frac{1}{2} \left[\frac{G_S}{\alpha_2} + G_f \right] \sigma^{23}; \quad G_k = 2 \frac{1 + \nu_k}{E_k}, \quad k = s, f.$$

Пусть начальное состояние исследуемой двухфазной среды соответствует условиям равновесия, так что обе фазы находятся в покое относительно условно неподвижной системы отсчета:

$$\langle h_1^k \rangle_1 = 0; \quad \langle h_2^k \rangle_2 = 0; \quad \langle v_1^k \rangle_1 = 0; \quad \langle v_2^k \rangle_2 = 0; \quad k = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Концентрации жидкой и твердой фаз в начальный момент полагаем заданными:

$$\alpha_1(0, x_1, x_2, x_3) = \alpha_{10}(x_1, x_2, x_3); \quad \alpha_2|_{t=0} = 1 - \alpha_1. \quad (15)$$

Начальное условие для давления жидкой фазы p_1 может быть определено с учетом того, что эта величина зависит от концентрации свободной и связанной воды в дисперсном материале [8].

Предположим, что слой покрытия, разрушаемый путем гидрорезания, имеет достаточно большую глубину и может рассматриваться как полупространство $x_1 > 0$. Силы давления, распределенные по поверхности контакта струи и полупространства, заменим приближенно сосредоточенной силой \vec{F} , приложенной в начале координат, величина которой равна

$$F = P\pi d^2/4, \quad (16)$$

где d – диаметр зоны контакта струи и поверхности, мм.

Будем считать, что остальная часть поверхности полупространства свободна от напряжений:

$$\sigma^{ij} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 \neq 0; \quad x_2 \neq 0 \quad x_1 = 0. \quad (17)$$

Сформулированная система уравнений (1)–(5), (8), (13), дополненная начальными и граничными условиями (14)–(17), определяет напряженно-деформируемое состояние капиллярно-пористой насыщенной среды при сделанных допущениях.

Решение поставленной начально-краевой задачи позволяет определить динамику изменения напряженно-деформированного состояния изучаемой дисперсной системы под воздействием ударного нагружения, которое может привести к разрушению материала. В качестве критерия разрушения применительно к цементобетонному покрытию воспользуемся критерием Друкера-Прагера:

$$\sqrt{J_2} = A + BI_1 \quad ; \quad A = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_c \sigma_p}{\sigma_p + \sigma_c}; \quad B = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_p - \sigma_c}{\sigma_p + \sigma_c}, \quad (18)$$

где I_1, J_2 – первый и второй инварианты тензора напряжений и девиатора тензора напряжений, МПа; σ_c, σ_p – пределы прочности материала на одноосное сжатие и растяжение, МПа.

Анализ математической модели. Выполним оценки скорости распространения продольной и поперечной волны в материале цементобетона как в упругом пространстве. Из опытов и оценок [3] установлено, что глубина разрушения цементобетона аэродромного покрытия $l_{\text{хар}} \sim 0,2$ м достигается за время большее, чем $t_{\text{проц}} \sim 10^{-3}$ с. Значения коэффициента Пуассона, модуля упругости и плотности бетонов изменяются в следующих диапазонах: $\nu = 0,1 \div 0,26$; $E = (1 \div 2,7) \cdot 10^4$, МПа; $\rho = (1,8 \div 2,5) \cdot 10^3$ кг/м³. Вычисляя величины скорости распространения продольной и поперечной волны в соответствии с выражениями

$$v_p = \sqrt{\frac{2E}{\rho} \frac{(1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}}; \quad v_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}, \quad (19)$$

можно сделать вывод, что длительность процесса воздействия гидроструи на материал существенно больше, чем характерное время распространения возмущений $t_{\text{проц}} \gg \max(l_{\text{хар}} / v_p, l_{\text{хар}} / v_s)$. Таким образом, исследуемый процесс взаимодействия гидроструи и материала покрытия можно рассматривать как квазистационарный и в синтезированной математической

модели в первом приближении пренебречь влиянием инерциальных сил. Полагая пренебрежимо малым также вклад объемных сил, из уравнений (34) получаем уравнения равновесия для двух фаз материала в виде

$$-\nabla(\alpha_1 \langle p'_1 \rangle_1) - \frac{\mu_1 \alpha_1 \langle \bar{v}'_1 \rangle_1}{K} = 0, \quad (20)$$

$$\nabla(\alpha_1 \langle p'_1 \rangle_1) + \frac{\mu_1 \alpha_1 \langle \bar{v}'_1 \rangle_1}{K} + \nabla^k \bar{\sigma}^k = 0. \quad (21)$$

Складывая почленно уравнения (20)–(21), получаем уравнение равновесия среды, записанное для вектора полного напряжения $\bar{\sigma}^k$:

$$\nabla^k \bar{\sigma}^k = 0. \quad (22)$$

Ограничимся двумерным приближением – случаем плоского деформированного состояния ($\varepsilon_{33}=0$). Уравнение (19) при сформулированных условиях имеет аналитическое решение [9]. Выражения для компонент тензора напряжений, вызванных нормальной силой F , действующей на плоской границе полубесконечного тела, в таком случае подчиняются простому радиальному распределению напряжений (рис. 1):

$$\sigma_{rr} = -\frac{2F}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r}; \quad \sigma_{\theta\theta} = 0; \quad \sigma_{r\theta} = 0; \quad \sigma_{rz} = 0; \quad \sigma_{zz} = \frac{a_1 \sigma_{rr} + a_2 \langle p'_1 \rangle_1}{a_3 + a_4 \langle p'_1 \rangle_1}; \quad (23)$$

$$a_1 = \frac{\nu_S}{\alpha_2 E_S} + \frac{\nu_f}{E_f}; \quad a_2 = 2 \left(\frac{\alpha_1 \nu_S}{\alpha_2 E_S} + \frac{\nu_f}{E_f} \right); \quad a_3 = \frac{1}{\alpha_2 E_S} + \frac{1}{E_f}; \quad a_4 = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2 E_S} + \frac{1}{E_f} \right).$$

В данном случае величина F (Н/м) имеет значение $F=Pd$.

На основе решения (23) и критерия разрушения (17) можно получить уравнение для определения границы разрушенной зоны:

$$\frac{1}{6} [\sigma_{rr}^2 + \sigma_{zz}^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2] = A^2 + \frac{2}{3} AB(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) + \frac{B^2}{9} (\sigma_{rr} + \sigma_{zz})^2. \quad (24)$$

Отметим, что если до разрушения материала покрытия $\alpha_1 \cong const$, и жидкость практически несжимаема $\rho_1^0 \cong const$, то из уравнения неразрывности следует

$$\nabla^k (\langle \bar{v}'_1 \rangle_1) = 0. \quad (25)$$

Если течение жидкой фазы осуществляется преимущественно вдоль оси x_1 , имеем

$$\langle v'_1 \rangle_1 = const = v_{10},$$

и из (19) следует

$$\frac{\partial \langle p'_1 \rangle_1}{\partial r} = -\frac{\mu_1}{K} v_{10}.$$

Оценивая $v_{10} = \sqrt{p_{10}/\rho_1^0}$, имеем выражение для давления жидкой фазы, необходимое для вычисления нормальной компоненты тензора полных напряжений материала σ_{zz} в (23):

$$\langle p'_1 \rangle_1 = p_{10} - \frac{\mu_1}{K} \sqrt{\frac{p_{10}}{\rho_1^0}} r. \quad (26)$$

Уравнение для определения зоны разрушения (24) является в общем случае нелинейным. Если $\sigma_{zz} \ll \sigma_{rr}$, то это уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{3} \sigma_{rr}^2 = A^2 + \frac{2}{3} AB \sigma_{rr} + \frac{B^2}{9} \sigma_{rr}^2. \quad (27)$$

Используя (22) и (23), получаем аналитическое выражение для оценки глубины слоя H , разрушаемого гидроструей, положив $\theta=0$:

$$H = \frac{2Pd}{3\pi} \frac{B + \sqrt{3}}{A}. \quad (28)$$

Глубина разрушаемого слоя, таким образом, зависит от давления и диаметра струи, а также от параметров критерия прочности.

Для практической оценки длительности операции оконтуривания области, запланированной для ремонта, необходимо учесть влияние скорости подачи струи на глубину разрушения цементобетонного покрытия. Данная задача может быть решена путем введения в выражение (23) уточняющей эмпирической функции $f(u)$:

$$H = \frac{2Pd}{3\pi} \frac{B + \sqrt{3}}{A} f(u). \quad (29)$$

Убывающая функция $f(u)$ должна быть определена на основе опытных данных процесса гидрорезания материала при различных скоростях подачи струи.

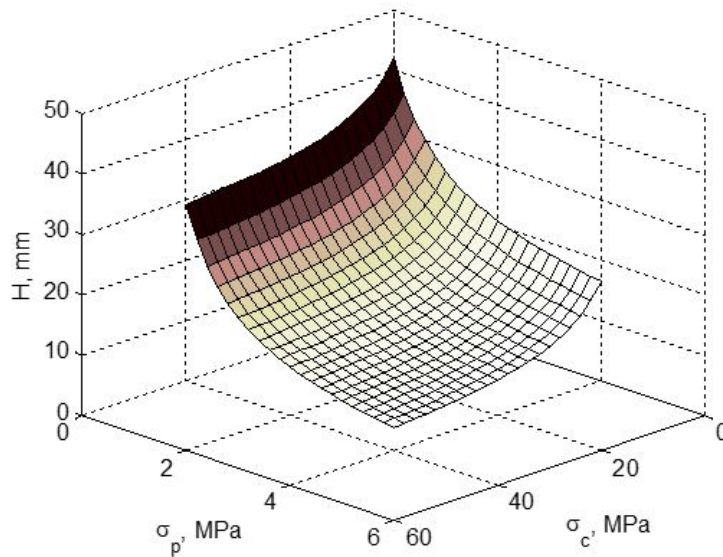


Рис. 2. Зависимость глубины разрушенного слоя H , мм от значений пределов прочности материала покрытия на растяжение и сжатие при $Pd=0.3 \cdot 10^6$ Н/м

Рис. 2 иллюстрирует влияние прочностных параметров на глубину разрушения цементобетонного покрытия, определяемое формулой (23). Значения пределов прочности при растяжении и сжатии выбраны в диапазонах, которые характерны для увлажненных тяжелых бетонов классов В5 – В40 [10]. Как видно из рис. 2, зависимость глубины разрушения покрытия от прочностных характеристик в рассматриваемом процессе гидрорезания является нелинейной. Снижение пределов прочности приводит к росту толщины слоя покрытия с разрушенной структурой, причем влияние предела прочности при растяжении σ_p более существенно, чем при сжатии σ_c .

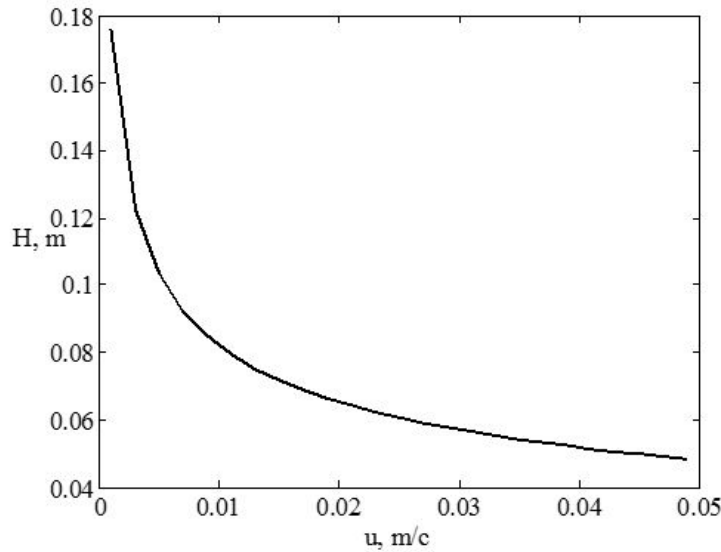


Рис. 3. Зависимость глубины разрушенного слоя H , от скорости подачи гидроструи для $\sigma_c=30$ МПа, $Pd=0.8 \cdot 10^6$ Н/м

Эмпирическая функция, дающая поправку, связанную с перемещением струи, рассчитана по данным опытов [4], проведенных для горных пород – кристаллического сланца, известняка, песчаника. Предел прочности при сжатии этих материалов составляет 33.5, 68.8, 88.2 МПа соответственно. В работе [4] представлены экспериментальные данные для глубины прорезаемой щели в зависимости от разрушаемой породы, а также параметров струи, в том числе от диаметра. Автор [4] представил данные о нелинейной зависимости глубины разрушения от диаметра струи. На рис. 3 представлен результат расчета глубины разрушения покрытия в зависимости от скорости подачи струи. Расчет проведен по формуле, следующей из (24) с учетом известного соотношения между пределами прочности – $\sigma_p/\sigma_c = 0.1$. В этом случае

$$H = \frac{8 Pd}{\pi \sigma_c} f(u). \quad (30)$$

Аппроксимация данных [4] на основе (25) при $d=4 \cdot 10^{-4}$ м дает расчетную формулу вида

$$H = 0.00134 \frac{P}{\sigma_c u^{0.331}}. \quad (31)$$

Здесь u имеет размерность м/с.

Очевидна линейная зависимость толщины разрушаемого слоя от безразмерного отношения P/σ_c (рис. 4). Рис. 5 иллюстрирует вклад двух факторов – скорости подачи и предела прочности на сжатие (связанного с пределом прочности на растяжение, как указано выше) – в увеличение глубины разрушения цементобетонного покрытия.

Выводы.

1. Предложена оригинальная математическая модель динамического воздействия гидроструи на насыщенную капиллярно-пористую систему аэродромного покрытия, позволяющая определить глубину его разрушения.

2. В квазистационарном приближении для случая плоской деформации получено аналитическое решение, позволяющее выполнять оценку глубины разрушения цементобетонного покрытия в зависимости от давления и диаметра струи и прочностных характеристик материала при растяжении и сжатии.

3. На основе аналитического решения предложена новая эмпирическая формула, уточняющая глубину разрушения покрытия за счет учета скорости подачи гидроструи.

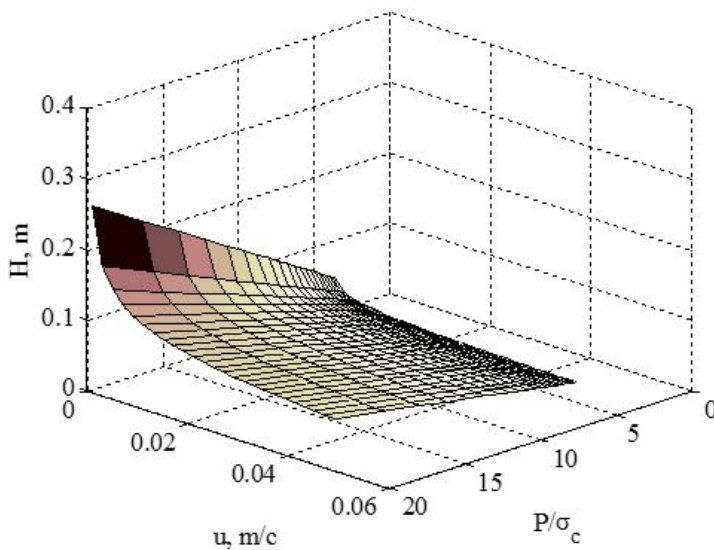


Рис. 4. Зависимость глубины разрушенного слоя H , м от скорости подачи гидроструи и отношения давления гидроструи у поверхности к пределу прочности при сжатии для $d=0.4 \cdot 10^3$ м

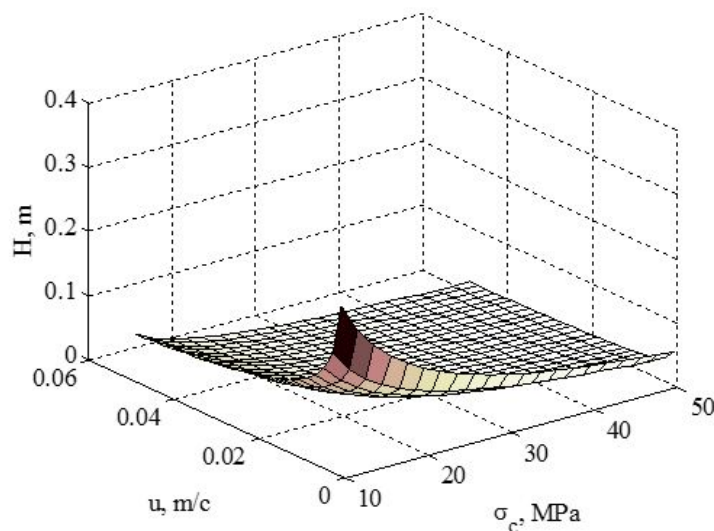


Рис. 5. Зависимость глубины разрушенного слоя H , м от значений скорости подачи гидроструи и предела прочности материала покрытия на сжатие при $Pd = 0.8 \cdot 10^6$ Н/м

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Тихомиров, Р. А.* Гидрорезание неметаллических материалов / Р. А. Тихомиров, В. С. Гуенко. – Киев : Техника, 1984. – 150 с.
- [2] *Ерухимович, Ю. Э.* Математическое моделирование и совершенствование метода расчета эффективности процесса резания горных пород гидроабразивным инструментом : автореф. дис. канд. техн. наук : 05.05.06 / Ю. Э. Ерухимович. – Тула, 1999. – 16 с.
- [3] *Andreas, W.* Hydrodemolition of Concrete Surfaces and Reinforced Concrete Structures / W. Andreas. – Germany: Faculty of Geo – Resources and Materials Technology Aachen University, 2005. – 270 p.
- [4] *Поляков, А. В.* Разработка метода расчета эффективности процесса резания горных пород струями воды сверхвысокого давления и обоснование параметров устройства для их получения применительно к проходческим комбайнам : автореф. дис. канд. техн. наук : 05.05.06 / А. В. Поляков. – Тула, 2006. – 16 с.
- [5] *Бураков, А. В.* Методы прогнозирования гидрорезания материалов / А. В. Бураков, О. Р. Дорняк, В. Ф. Лазукин, А. А. Хатунцев // Сборник статей по материалам докладов XXIII межвузовской НПК "Перспектива-2013". Проблемы и технологии инженерно-аэродромного обеспечения войск. ВУНЦ ВВС "ВВА". – Воронеж, 2013. – С. 44–53.
- [6] *Бураков, А. В.* Детерминированная математическая модель формирования высокоэнергетического жидкостного потока в сопловом устройстве гидрорежущего инструмента / А. В. Бураков, О. Р. Дорняк, В. Ф. Лазукин, А. А. Хатунцев // Сборник статей по материалам докладов XXIII межвузовской НПК "Перспектива-2013". Проблемы и технологии инженерно-аэродромного обеспечения войск. ВУНЦ ВВС "ВВА". – Воронеж, 2013. – С. 53–58.
- [7] *Нигматулин, Р. И.* Основы механики гетерогенных сред / Р. И. Нигматулин. – М. : Наука, 1978. – 336 с.
- [8] *Дорняк, О. Р.* Тепломассоперенос в ненасыщенных коллоидных капиллярно-пористых анизотропных материалах : автореф. дис. ... д-р техн. наук : 01.04.14 / О. Р. Дорняк. – Воронеж, 2007. – 32 с.
- [9] *Тимошенко, С. П.* Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1979. – 560 с.
- [10] *ГОСТ 26633-91.* Бетоны тяжелые и мелкозернистые. Технические условия. – Введ. 01.01.92. – Москва : Государственный Строительный Комитет СССР ; М. : изд-во стандартов, 1991. – 18 с.

Бураков Андрей Викторович,

начальник лаборатории, Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, г. Воронеж

e-mail: schetchik777@mail.ru

Дорняк Ольга Роальдовна,

доктор технических наук, доцент, заведующая кафедрой, Воронежская государственная лесотехническая академия, г. Воронеж

e-mail: ordornyak@mail.ru

Лазукин, В. Ф.

доктор педагогических наук, профессор, Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, г. Воронеж

e-mail: ordornyak@mail.ru

A. V. Burakov, O. R. Dorniyak, V. F. Lazukin

THE MATHEMATICAL MODEL OF THE HYDROCUTTING PROCESS OF THE MONOLITHIC CEMENT-CONCRETE COVERING

Military and air academy of the prof. of N. E. of Zhukovsky and Yu. A. Gagarin

Voronezh State Forestry Academy

Abstract. Hydrocutting - one of the modern methods applied to the effective removal of destroyed sites of airfield coverings. To select rational modes of the waterjet cutting is necessary to investigate difficult interrelated phenomena.

The mathematical model of the tense-deformed state for a cement-concrete airfield covering at affecting on its surface of high-speed hydrostream within the framework mechanics of the multiphase systems is offered. The material of a covering is considered how the diphasic environment. The offered model allows to predict the destruction area of the cement-concrete covering. At quasistationary approach for a case of the flat deformed state the analytical decision is received. The decision determines the destruction depth of the isotropic material depending on the stream pressure and its diameter, and also from the values of tensile strength at a compression and a expansion. The empirical formula, which establishes the coverage destruction depth for a given feed rate of the jet is offered.

The mode of an assessment of the destruction depth of an airfield covering convenient for practical calculations during hydrocutting is reasonable.

Keywords: hydrocutting, destruction of covering, mathematical modeling.

REFERENCES

- [1] *Tikhomirov, R. A.* Hydrocutting of nonmetallic materials / R. A. Tikhomirov, V. S. Guyenko. – Kiev: Equipment, 1984. – 150 p.
- [2] *Erukhimovich, Yu. E.* Mathematical modeling and improvement of a method of calculation of efficiency of process of cutting of rocks by the hydroabrasive tool: diss. ... Ph. D. Tech. Sci.: 05.05.06 / Y. E. Erukhimovich. – Tula, 1999. – 180 p.
- [3] *Andreas, W.* Hydrodemolition of Concrete Surfaces and Reinforced Concrete Structures / W. Andreas. – Germany : Faculty of Geo – Resources and Materials Technology Aachen University, 2005. – 270 p.
- [4] *Polyakov, A. V.* Development of a method of calculation of efficiency of process of cutting of rocks by streams of water of ultrahigh pressure and justification of parameters of the device for their receiving in relation to prokhodchesky combines: diss. ... Ph. D. Tech. Sci.: 05.05.06 / A. V. Polyakov. – Tula, 2006. – 184 p.
- [5] *Burakov, A. V.* Methods of forecasting of hydrocutting of materials / A. V. Burakov, O. R. Dorniyak, V. F. Lazukin, A. A. Hatuntsev // The Collection of articles on materials of reports of the XXIII interuniversity NPK "Prospect-2013". Problems and technologies of engineering and airfield providing armies. VUNTs Air Force "VVA". – Voronezh, 2013. – P. 44–53.
- [6] *Burakov, A. V.* The determined mathematical model of formation of a vysokoener-getichny liquid stream in the nozzle device of the hydrocutting tool / A. V. Burakov, O. R. Dorniyak, V. F. Lazukin, A. A. Hatuntsev // The Collection of articles on materials of reports of the XXIII interuniversity NPK "Prospect-2013". Problems and technologies of engineering and airfield providing armies. VUNTs Air Force "VVA". – Voronezh, 2013. – P. 53–58.
- [7] *Nigmatulin, R. I.* Fundamentals of mechanics of heterogeneous media / R. I. Nigmatulin. – M. : Science, 1978. – 336 p.

[8] *Dorniyak, O. R.* Heat and mass transfer nonsaturated colloidal capillary and porous anisotropic materials: abstract of diss. ... Dr. Tech. Sci.: 01.04.14 / O. R. Dorniyak. – Voronezh, 2007. – 32 p.

[9] *Tymoshenko, S. P.* Theory of elasticity / S. P. Tymoshenko, J. Gudyer. – M. : Science, 1979. – 560 pp.

[10] *GOST 26633-91.* Concrete heavy and fine-grained. Specifications. – Enter. 01.01.92. – M. : State Construction Committee USSR ; M. : Publishing house of standards, 1991. – 18 pp.

Burakov, Andrey Viktorovich

Head of Laboratory, Military Training and Research Center of Air Force, Professor N. E. Zhukovskii and Y. A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh

Dorniyak, Olga Roaldovna

Doctor of Technical Sciences, Head of Department, Voronezh State Academy of Forestry, Voronezh

Lazukin, V. F.

D. Sc. in Pedagogics, Military Training and Research Center of Air Force, Professor N. E. Zhukovskii and Y. A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh

В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ УДАРНОЙ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ СРЕД

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук

Аннотация. В статье представлено обобщение метода асимптотического анализа прифронтных областей для задач ударной деформации нелинейно-упругих сред, основанного на выводе эволюционного уравнения. Метод распространяется с одномерных краевых задач на многомерные за счет перехода к линейной аппроксимации системы лучевых координат. Показано, что эволюционное уравнение содержит координату эйконала только как параметр, т.е. лучевая координата прифронтной области имеет доминирующее значение при оценке скорости изменения деформации. В качестве модельного примера построено решение двумерной задачи антиплоской деформации несжимаемой нелинейно-упругой среды.

Ключевые слова: нелинейная упругость, несжимаемость, ударная волна, метод возмущений, лучевые координаты, эволюционное уравнение.

УДК: 539.3

Введение. Задача совершенствования наших представлений о динамике процессов, протекающих в твердых телах, неизбежным образом сопряжена с отказом от наиболее простых линейных модельных соотношений и переходом к моделям более высокого уровня сложности, учитывающим и геометрическую, и физическую нелинейность [1], [2], [3]. Для существенно нестационарных задач интенсивного деформирования этот переход является обязательным условием адекватного описания процесса. Он позволяет показать и взаимодействие объемной и сдвиговой деформации, и влияние на динамику передних волновых фронтов процесса послееударного воздействия и предварительных деформаций, имеющих в среде [3], [4]. Вместе с тем, возникает известная трудность в решении конкретных нелинейных краевых задач — недостаточный набор математических методов и приемов. В первую очередь это относится к возможности получения точных решений. Одновременно возрастает значение приближенного анализа, как численного, так и теоретического. В последнем случае отметим методы малого параметра [2], [5], [6] и метод лучевых рядов [7], [8]. Наибольшую наглядность имеют решения, основанные на применении метода малого параметра, сводящего задачу в прифронтной области к решению упрощенного, так называемого эволюционного уравнения. Сохраняя нелинейную структуру, это уравнение относится к вполне интегрируемым; его решения позволяют описать нелинейную динамическую деформацию. Получению и применению таких уравнений для одномерных задач нелинейно-упругих сред посвящен ряд работ [9], [10], [11]. Авторам статьи представляется вполне целесообразным дальнейшее развитие метода с целью

Поступила 15.08.2014

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14-01-31030 мол_а, код проекта 14-01-00292 А).

перенесения его на неодномерные задачи. Далее из многообразия этих задач в качестве модельного примера выбрана задача антиплоского двумерного деформирования несжимаемой нелинейно-упругой среды. Наиболее важным результатом, полученным в ходе ее решения и обсуждаемым здесь, следует считать эволюционное уравнение, также возникающее в прифронтной области, если независимыми переменными задачи выбраны лучевые координаты. Это уравнение показывает приоритетную зависимость прифронтного решения от координаты вдоль луча, поскольку координаты эйконала входят в уравнение только в качестве параметров. Подчеркнем принципиальное отличие в эволюционном уравнении распространения деформаций изменения формы от аналогичного, описывающего нелинейные особенности в распространении объемных деформаций (от уравнения квазипростых волн). Эти эффекты имеют универсальный характер, поскольку не определяются конкретными краевыми условиями задачи. Предлагаемый далее способ решения имеет как самостоятельную теоретическую ценность, так и прикладное значение: полученные формулы могут быть использованы при разработке новых схем численного счета с выделением поверхностей сильных разрывов.

1. Определяющие соотношения нелинейно-упругой несжимаемой среды и краевые условия задачи. Общая система уравнений, задающая движение несжимаемой упругой среды в пространственной криволинейной системе координат Эйлера, x^1, x^2, x^3 , имеет вид

$$\begin{aligned} v^i &= \dot{u}^i + u^i_j v^j, & 2\alpha_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u^k_j, \\ \sigma^{ij}_j &= \rho(\dot{v}^i + v^i_j v^j), & \sigma^i_j &= -p_0 \delta^i_j + \frac{\partial W}{\partial \alpha^j_k} (\delta^i_k - 2\alpha^i_k), \\ \dot{u}^i &= \frac{\partial u^i}{\partial t}, & u_{i,j} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \Gamma^k_{ij} u_k, & u^i_j &= \frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \Gamma^i_{jk} u^k, & \delta^i_j &= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u^i и v^i — контравариантные компоненты векторов перемещений и скорости среды, α_{ij} — ковариантные компоненты тензора деформаций Альманси, σ^{ij} — контравариантные компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, $\rho = const$ — плотность среды, p_0 — добавочное гидростатическое давление, W — функция упругого потенциала. В (1.1) и далее латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, если не оговорено иное. По повторяющемуся верхнему и нижнему индексу происходит суммирование. Замыкает систему (1.1) уравнение, задающее конкретный вид W и тем самым свойства среды. Считая среду изотропной и раскладывая W в ряд Тейлора в окрестности свободного состояния, приходим к формуле

$$\begin{aligned} W(I_1, I_2) &= -2\mu I_1 - \mu I_2 + b I_1^2 + (b - \mu) I_1 I_2 - \theta I_1^3 + \\ &+ c I_1^4 + \frac{b - \mu}{4} I_2^2 + (b - \mu - \frac{3}{2}\theta) I_1^2 I_2 + \dots, & I_1 &= \alpha^i_i, & I_2 &= \alpha^i_j \alpha^j_i, \end{aligned} \quad (1.2)$$

в которой μ, b, θ, c — упругие модули среды. Необходимо отметить, что в (1.2) входит меньшее число упругих модулей, чем в обычное для таких сред представление W [10]. На это обстоятельство ранее обращалось внимание в [12], оно определяется типом рассматриваемой краевой задачи.

Теперь остановимся на краевых условиях задачи. Рассматриваем пространство, занятое нелинейно-упругой несжимаемой средой, в котором присутствует полость. Границей полости считаем цилиндрическую поверхность Φ , бесконечные образующие которой параллельны прямой, совпадающей с осью x^3 . Направляющий контур L расположен в плоскости x^1, x^2 , он замкнутый и достаточно гладкий. Если контур L — неограниченная кривая, то можно перейти к задаче, в которой исследуемая область — полупространство с неплоской границей. До момента $t = 0$ среда считается недеформированной. Начиная с момента $t = 0$, на границе полости Φ происходит интенсивное сдвиговое нагружение, результатом которого будет возникающее в среде поле перемещений $u^1 = u^2 = 0, u = u^3(x^1, x^2, t)$. Движение граничных точек

Φ считаем известным и представим рядом Тейлора в положительной окрестности $t = 0$:

$$u|_{\Phi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \Big|_{t=0} t^k \approx v(y)t + \frac{a(y)t^2}{2} + \dots, \quad v(y) \neq 0, \quad (1.3)$$

где y — произвольный параметр вдоль контура L . Как следует из (1.3), в начальный момент времени от Φ отделяется ударная волна Σ . Ее положение со временем в пространстве задается параметрическими уравнениями $x^i = x^i(y^\alpha, t)$, ($\alpha = 1, 2$), где y^α — внутренняя координатная система на Σ . Каждая ее точка в любой момент времени движется в направлении единичной внешней нормали ν^i с сохранением значений y^α , так что $\dot{x}^i = G\nu^i$, где G — скорость ударной волны. Если необходимо проследить за изменением каких-либо величин, заданных во всей области или только на Σ , с течением времени, то мерой его становится оператор дельта-дифференцирования [13], [14]. Обычно ограничиваются представлением этого оператора для случая, когда x^i — декартова система координат. При этом

$$\frac{\delta f}{\delta t} = f + \frac{\partial f}{\partial x^i} G\nu^i, \quad (1.4)$$

когда $f = f(x^i(y^\alpha, t), t)$ и $\delta f/\delta t$ совпадает с частной производной по времени для $f = f(y^\alpha, t)$ (функция f задана только на Σ). Здесь для сокращения обозначений под буквой « f » подразумеваются компоненты некоторого тензорного поля. В [15] показано, что для произвольной криволинейной системы координат x^i обобщением (1.4) будет формула

$$\begin{aligned} \frac{\delta f_{j_1 \dots j_r \beta_1 \dots \beta_n}^{i_1 \dots i_s \alpha_1 \dots \alpha_m}}{\delta t} &= \frac{\partial f_{j_1 \dots j_r \beta_1 \dots \beta_n}^{i_1 \dots i_s \alpha_1 \dots \alpha_m}}{\partial t} + \left\{ \Gamma_{lk}^{i_1} f_{j_1 \dots j_r \beta_1 \dots \beta_n}^{li_2 \dots i_s \alpha_1 \dots \alpha_m} + \dots + \right. \\ &\left. + \Gamma_{lk}^{i_s} f_{j_1 \dots j_r \beta_1 \dots \beta_n}^{i_1 \dots l \alpha_1 \dots \alpha_m} - \Gamma_{j_1 k}^l f_{lj_2 \dots j_r \beta_1 \dots \beta_n}^{i_1 \dots i_s \alpha_1 \dots \alpha_m} - \dots - \Gamma_{j_r k}^l f_{j_1 \dots l \beta_1 \dots \beta_n}^{i_1 \dots i_s \alpha_1 \dots \alpha_m} \right\} G\nu^k. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Там же приводится детальное исследование свойств этой операции.

На поверхности ударной волны Σ систему уравнений (1.1), (1.2) необходимо заменить геометрическими, кинематическими и динамическими условиями совместности [15], которые с учетом (1.5) имеют вид

$$\begin{aligned} [f, i] &= \left[\frac{\partial f}{\partial \nu} \right] \nu_i + g_{ik} a^{\alpha\beta} [f]_{,\alpha} x_{,\beta}^k, \quad [f] = -G \left[\frac{\partial f}{\partial \nu} \right] + \frac{\delta [f]}{\delta t}, \\ [\rho(v^i \nu_i - G)] &= 0, \quad [\sigma^{ij}] \nu_j = \rho^+ (v_j^+ \nu^j - G) [v^i], \\ x_{,\beta}^k &= \frac{\partial x^k}{\partial y^\beta}, \quad a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha, \quad a_{\beta\gamma} = x_{,\beta}^i x_{,\gamma}^i, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial \nu} \right] = f_{,i} \nu^i, \quad [f] = f^+ - f^-, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где g_{ij} и $a_{\alpha\beta}$ — ковариантные компоненты пространственной и поверхностной метрики соответственно, греческие индексы принимают значения 1, 2, индексами «+» и «-» обозначены предельные значения индексированной величины, взятые перед Σ или сразу за ней, квадратными скобками обозначен скачок величины, заключенной в них.

Для нашей задачи следствием (1.6) и отсутствия предварительных деформаций будет система краевых условий на ударной волне:

$$\begin{aligned} u|_{\Sigma} &= 0, \quad G = C \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \tau^{2k} \right)^{1/2}, \quad \tau = \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right] \Big|_{\Sigma} = - \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma}, \\ [\sigma_{\nu\nu}]|_{\Sigma} &= 0, \quad C^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \gamma_1 = \frac{b - \mu}{8\mu}, \quad \gamma_2 = - \frac{b + 5\mu}{4\mu}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

в которых τ — мера интенсивности ударной волны. В (1.7) не содержится полной информации относительно геометрии и кинематики Σ , что отличает поставленную задачу от одномерных, где можно было сделать предварительные заключения по геометрии ударной волны.

2. Уточнение координатной системы и уравнения движения задачи. До сих пор не был конкретизирован выбор криволинейной системы координат x^i за исключением утверждения о прямолинейности оси x^3 . Свяжем оставшиеся координаты x^1, x^2 с геометрией границы полости. Будем считать, что от каждой точки L в среду направлена прямая по вектору $\bar{\nu}_0$ — нормали к Φ . Откладываемое вдоль этих прямых расстояние примем в качестве x^1 , а параметр вдоль контура L будем считать совпадающим с x^2 . При этом любой радиус-вектор в плоскости x^1, x^2 можно задать в виде

$$\bar{\mathbf{r}}(x^1, x^2) = \bar{\mathbf{r}}_0(x^2) + \bar{\nu}_0(x^2)x^1, \quad x^1 \geq 0, \quad (2.1)$$

где $\bar{\mathbf{r}}_0(x^2)$ — вектор-функция, соответствующая точкам L . Очевидно, что система координат x^i будет ортогональной. Диагональные компоненты ее метрического тензора даются формулами

$$g_{11} = g_{33} = 1, \quad g_{22}(x^1, x^2) = g_{22}^0 \left(1 - \frac{x^1 b_0}{g_{22}^0}\right)^2, \quad g_{22}|_{\Phi} = g_{22}^0(x^2), \quad b_0 = b_0(x^2), \quad (2.2)$$

где индексом «0» обозначены геометрические характеристики Φ . В частности, b_0 — единственный ненулевой элемент второй квадратичной формы поверхности Φ : $b_{\alpha\beta} = x_{0,\alpha\beta}^i \nu_i^0$, причем x_0^i значения координат, соответствующие \bar{r}_0 . В дальнейшем все геометрические характеристики Φ обозначаются дополнительно индексом «0». Выбранная система координат x^i совпадает с лучевыми координатами поставленной задачи в линейном приближении.

В системе x^i следствиями уравнений (1.1), (1.2) для нашей краевой задачи будут три уравнения движения, причем в двух из них содержатся функции $p_0(x^i, t)$ и $u(x^i, t)$, а третье уравнение решается независимым образом относительно $u(x^i, t)$. Можно было бы утверждать, что эта система переопределенная, но это обстоятельство устраняется специальным выбором W в виде (1.2), о чем уже говорилось ранее. Решение задачи относительно поля перемещений находится из уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} \left\{ 1 + 3\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x^1} \right)^2 + \alpha g^{22} \left(\frac{\partial u}{\partial x^2} \right)^2 \right\} + g^{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial x^2} \left\{ 1 + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x^1} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + 3\alpha g^{22} \left(\frac{\partial u}{\partial x^2} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} \left\{ g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \frac{\partial u}{\partial x^1} - (g^{22})^2 \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x^2} \right\} \cdot \\ & \quad \cdot \left\{ 1 + \alpha \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x^1} \right)^2 + g^{22} \left(\frac{\partial u}{\partial x^2} \right)^2 \right) \right\} + 4\alpha g^{22} \frac{\partial u}{\partial x^1} \frac{\partial u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} - \\ & \quad - \alpha (g^{22})^2 \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \frac{\partial u}{\partial x^1} \left(\frac{\partial u}{\partial x^2} \right)^2 - \alpha (g^{22})^3 \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x^2} \right)^3 + \dots = \frac{\ddot{u}}{C^2}, \quad \alpha = \frac{b - \mu}{4\mu}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Полученное уравнение и система краевых условий (1.3), (1.7) приводят к выводу о необходимости применения приближенных методов решения, о чем далее пойдет речь.

3. Безразмерные переменные и внешняя краевая задача. Поставим цель отразить влияние на решение задачи в первую очередь краевого условия (1.3), поставленного на границе полости. Для этого определим безразмерные переменные формулами

$$\begin{aligned} s &= \frac{x^1}{l} \varepsilon^{-4}, \quad m = \frac{x^1 - Ct}{l} \varepsilon^{-3}, \quad r = \frac{x^2}{X}, \\ w(s, m, r) &= \frac{u(x^1, x^2, t)}{l} \varepsilon^{-\frac{9}{2}}, \quad \varepsilon = \left(\frac{V}{C} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad V = \frac{1}{L_0} \oint v(x^2) dx^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

в которых l — некоторый характерный линейный размер на L , X — ненулевое значение x^2 , V — среднеконтурное значение скоростей точек границы, константу ε , исходя из механически допустимых значений V , можно считать малым параметром задачи, L_0 — длина замкнутого контура L . На основании масштабов координат, выбранных в (3.1), получим представление

решения в окрестности нагружаемой поверхности Φ при условии, что ударная волна Σ отошла от Φ незначительно.

В новых переменных (3.1) уравнение движения (2.3) преобразуется к виду:

$$(w_{,ss} + 2\varepsilon w_{,sm} + \varepsilon^2 w_{,mm}) (1 + 3\alpha\varepsilon N^2) - \varepsilon^2 w_{,mm} + \dots = 0, \quad N = w_{,s} + \varepsilon w_{,m}. \quad (3.2)$$

В приведенной записи многоточием обозначены слагаемые более высокого порядка малости по ε , чем третий. Здесь и в следующем параграфе латинской буквой после запятой обозначено частное дифференцирование по координате, обозначенной этой буквой. Также для решения необходимо краевое условие (1.3), заданное в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} w|_{s=0} &= -A(r)m + \frac{B(r)}{2}\varepsilon^3 m^2 + \dots, \\ A(r) &= \frac{v(Xr)}{V}, \quad B(r) = \frac{a(Xr)l}{CV}, \quad B(r) \sim 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Поскольку (3.2) содержит только степени малого параметра ε , то искомую функцию $w(s, m, r)$ тоже представим рядом по степеням ε :

$$\begin{aligned} w(s, m, r) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(s, m, r) \approx w_0(s, m, r) + \varepsilon w_1(s, m, r) + \\ &+ \varepsilon^2 w_2(s, m, r) + \varepsilon^3 w_3(s, m, r) + \dots, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где неизвестную функцию w заменяем бесконечной цепочкой новых неизвестных функций. В соответствии с принятой терминологией [16], назовем (3.4) внешним разложением решения. Последовательно подставляя (3.4) в уравнение (3.2) и краевое условие (3.3) и сохраняя слагаемые до необходимой степени малого параметра, получим:

$$\begin{aligned} w(s, r, m) &= f_0 s - A(r)m + \varepsilon \{ -f_{0,m} s^2 + f_1 s \} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{2}{3} f_{0,mm} s^3 - \right. \\ &- f_{1,m} s^2 + f_2 s \left. \right\} + \varepsilon^3 \left\{ -\frac{f_{0,mmm}}{3} s^4 + \frac{2}{3} f_{1,mm} s^3 - \frac{\alpha}{2} f_0^2 f_{0,mm} s^3 - \right. \\ &- f_{2,m} s^2 + f_3 s + \frac{B(r)}{2} m^2 \left. \right\} + \dots, \quad f_i = f_i(r, m), \quad i = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В (3.5) функции f_i остаются неизвестными. Здесь проведено решение до третьего порядка малости по степеням ε включительно. Все неизвестные функции можно будет определить, построив дополнительное решение, в котором будут учтены условия на переднем фронте ударной волны Σ .

4. Внутреннее решение и эволюционное уравнение задачи. Перейдем к новым безразмерным переменным, которые будут в исходных пространственно-временных координатах соответствовать отходу вдоль лучевой координаты от нагружаемой поверхности Φ . С этой целью изменим масштаб, сжимая пространственную переменную и считая $z = \varepsilon^k s$ ($k = 1, 2, \dots$). Остановимся на зависимости $z = \varepsilon^4 s$. Переходя к переменным z, r, m, w , из уравнения (2.3)

получим:

$$\begin{aligned}
& w_{,mm} \{3\alpha\varphi^2 + \alpha\varepsilon^6\theta\} + (2w_{,mz} + \varepsilon^3 w_{,zz}) \{1 + 3\alpha\varepsilon^3\varphi^2 + \alpha\varepsilon^9\theta\} + \frac{R}{g}\varepsilon^3 w_{,rr} \{1 + \\
& + 3\alpha\varepsilon^9\theta + \alpha\varepsilon^3\varphi^2\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{g_{,z}}{g}\varphi - \frac{R}{g^2}g_{,r}\varepsilon^3 w_{,r} \right\} (1 + \alpha\varepsilon^3\varphi^2 + \alpha\varepsilon^9\theta) + \\
& + \alpha \left\{ 4\frac{R}{g}\varepsilon^6 w_{,r}\varphi\varphi_{,r} - \frac{g_{,z}}{g}\varepsilon^9\theta\varphi - \frac{g_{,r}}{R}\varepsilon^{12}\theta^{\frac{3}{2}} \right\} + \dots = 0, \tag{4.1} \\
& g(z, r) = \frac{g_{22}(x^1, x^2)}{g_{22}(X)}, \quad R = \frac{l^2}{X^2 g_{22}(X)}, \quad \varphi = w_{,m} + \varepsilon^3 w_{,z}, \quad \theta = \frac{R}{g} w_{,r}^2.
\end{aligned}$$

Из краевых условий (1.7), заданных в новых переменных, следует:

$$\tau|_{m=M(z,r)} = -\varepsilon^{\frac{3}{2}}\varphi, \quad w(z, r, m)|_{m=M(z,r)} = 0, \tag{4.2}$$

где функция $M(z, r)$ задает положение волнового фронта Σ и пока относится к числу неизвестных. В (4.2) предполагается, что решение строится на тех расстояниях от Φ , где производная от u в направлении нормали из условия (1.7) может быть приближенно заменена частной производной по x^1 . Входящие в (4.1), (4.2) неизвестные функции w, τ, M представим степенными рядами по ε , в которых сохраним только слагаемые со степенями ε , кратными трем:

$$\begin{aligned}
& w(r, z, m) \approx w_0(r, z, m) + \varepsilon^3 w_1(r, z, m) + \dots, \\
& \chi = \tau^2(r, z) \approx \varepsilon^3 \chi_0(r, z) + \varepsilon^6 \chi_1(r, z) + \dots, \tag{4.3} \\
& M(r, z) \approx M_0(r, z) + \varepsilon^3 M_1(r, z) + \dots
\end{aligned}$$

Решение, определяемое (4.1), (4.2) и (4.3), также следуя общепринятой терминологии, назовем внутренним [15]. Для него на нулевом шаге метода относительно функции $w_0(z, r, m)$ получим следующее уравнение:

$$3\alpha w_{0,m}^2 w_{0,mm} + 2w_{0,mz} + \frac{g_{,z}}{2g} w_{0,m} = 0, \tag{4.4}$$

которое назовем эволюционным уравнением задачи, по аналогии с [5]. Отличие от процесса объемного деформирования состоит в том, что $w_{0,m}$ входит в (4.4) не в первой степени, а в квадрате. Это, казалось бы, незначительное различие отражает различную геометрию характеристических направлений за Σ в случае, когда ударная волна присутствует с начального момента воздействия. Отметим, что сходное уравнение описывает нелинейные эффекты в среде и в том случае, когда краевые условия не приводят к мгновенному формированию ударной волны. В последнем случае это уравнение показывает, как из исходного гладкого решения формируется разрывное, заменяющее область неоднозначности гладкого решения, то есть может служить для исследования переходных процессов [5]. Последнее слагаемое в (4.4) отражает влияние изменяющейся кривизны волнового фронта на решение за ним. Укажем, на наш взгляд, важное обстоятельство: переменная r , изменяющаяся вдоль волнового фронта, входит в (4.4) только как параметр, что означает фактически одномерный характер решения в прифронтной области. Это вполне согласуется с механическим смыслом ударной волны, как поверхности, заменяющей тонкий слой, где наибольшее изменения решения происходят по ширине слоя. Также результат согласуется и с математическими следствиями для ударных волн (с формулами Адамара). Решение (4.4) проведем, определив вспомогательную функцию $h_0(z, r, m) = w_{0,m}$ и понизив с ее помощью порядок уравнения (4.4):

$$3\alpha h_0^2 h_{0,m} + 2h_{0,z} + \frac{g_{,z}}{2g} h_0 = 0. \tag{4.5}$$

Интегрируя его в общем виде, получим следующие первые интегралы вдоль характеристических направлений:

$$\Psi_1 = g(z, r)h_0^4, \quad \Psi_2 = 3\alpha\sqrt{g(z, r)} \int g^{-\frac{1}{2}}(r, z)dz - 2m. \quad (4.6)$$

Для нашей краевой задачи оказывается вполне достаточно выбрать $w_0(z, m, r)$ в виде

$$w_0(z, m, r) = D(r)g^{-\frac{1}{4}}(z, r)m + \varphi_0(z, r), \quad (4.7)$$

где $D(r)$ и $\varphi_0(z, r)$ — пока неопределенные функции. Одну из них (φ_0) можно определить совместно с $M_0(z, r)$, задающей положение волны в нулевом приближении. Действительно, опять считая отклонение нормали $\bar{\nu}$ от первоначального положения $\bar{\nu}_0$ достаточно малым, из линейного варианта уравнения эйконала

$$x^1 = \int_0^t G(\xi)d\xi, \quad (4.8)$$

записанного в безразмерных переменных, получим такое уравнение на фронте Σ :

$$M_{,z} = \gamma_1\varphi^2 + \gamma_2\varepsilon^3\varphi^4 - \varepsilon^3\{\gamma_1\varphi^2 + \gamma_2\varphi^4\}^2 + \dots, \quad \alpha = 2\gamma_1. \quad (4.9)$$

В (4.9) входящие в φ частные производные от w вычисляются при условии нахождения на фронте Σ , поэтому, проведя необходимые дополнительные вычисления, получим

$$M_{0,z} = \frac{\alpha}{2}w_{0,m}^2. \quad (4.10)$$

Учитывая выбор w_0 в виде (4.7), из уравнения (4.10) приходим к следующему результату:

$$M_0(z, r) = \frac{\alpha}{2}D^2(r) \int_0^z g^{-\frac{1}{2}}(\xi, r)d\xi, \quad (4.11)$$

который получен при начальном условии $M(0, r) = 0$. Теперь, зная положение фронта ударной волны в нулевом приближении, можно установить вид функции $\varphi_0(z, r)$. Для этого из системы краевых условий (4.2) рассмотрим последнее, также записанное в нулевом приближении. С его помощью получим

$$\varphi_0(z, r) = -\frac{\alpha}{2}D^3(r)g^{-\frac{1}{4}}(z, r) \int_0^z g^{-\frac{1}{4}}(\xi, r)d\xi. \quad (4.12)$$

Проводя в (4.12) необходимое интегрирование, из (4.7) и (4.12) получим итоговую формулу для w_0 :

$$w_0(z, m, r) = D(r)m(1 - 2lH_0z)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{4} \frac{D^3(r)}{lH_0} (1 - 2lH_0z)^{-\frac{1}{2}} \ln(1 - 2lH_0z), \quad (4.13)$$

где $H_0(r)$ — средняя кривизна поверхности Φ .

Теперь можно провести сращивание внутреннего и внешнего разложений решения в нулевом приближении. Для этого применим правило аддитивного сопоставления [16]. С его помощью окончательно определяются неизвестные функции:

$$f_0(m, r) = 0, \quad D(r) = -A(r). \quad (4.14)$$

Сравнивая w_0 для внешнего и внутреннего разложений, можно заметить, что на этом шаге w_0 из внешнего решения полностью содержится в w_0 внутренней задачи. Ввиду этого здесь нет необходимости строить равномерно пригодное разложение: оно совпадает с функцией (4.13).

Следующий шаг метода хотя и связан с громоздкими вычислениями, но оказывается не слишком сложным, так как во многом повторяет приведенные выше рассуждения. Если возникает необходимость уточнить нулевой шаг метода, то для функции w надо решить следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned}
& 2w_{1,zm} + 3\alpha w_{1,mm} w_{0,m}^2 + \frac{g_{,z}}{2g} (w_{1,m} + w_{0,z}) + w_{0,zz} + 6\alpha w_{0,rm} w_{0,m}^2 + \\
& + \frac{\alpha g_{,z}}{g} w_{0,m}^3 + \frac{R}{g} w_{0,rr} - \frac{Rg_{,r}}{2g^2} w_{0,r} = 0, \\
& w_0 + \varepsilon^3 w_1 \Big|_{m=M_0(z,r)+\varepsilon^3 M_1(z,r)} = 0, \\
& M_{1,z} = \alpha w_{0,m} (w_{0,z} + w_{1,m}) + \left(\gamma_1 - \frac{\alpha^2}{4} \right) w_{0,m}^4.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Ограниченность объема статьи не позволяет привести здесь весь алгоритм решения (4.16). Мы покажем, каким будет результат решения при краевом условии (1.3):

$$\begin{aligned}
w_1 = & -\frac{m^2}{2} \sum_{k=0}^3 C_k(r) H_1^{-\frac{1}{2}-k} + m \sum_{k=0}^3 H_1^{-\frac{1}{2}-k} \{E_k(r) \ln H_1 + F_k(r)\} + \\
& + \sum_{k=0}^3 H_1^{-\frac{1}{2}-k} \{N_k(r) \ln^2 H_1 + S_k(r) \ln H_1 + T_k(r)\}, \\
& H_1 = 1 - 2lH_0z, \quad C_0 = -B(r), \\
C_1 = & -\frac{1}{4lH_0} \left(RA_{,rr} + Al^2H_0^2 + \frac{5RAH_0'^2}{4H_0^2} - \frac{2RA_{,r}H_0'}{H_0} - \frac{RAH_0''}{2H_0} \right), \\
C_2 = & -\frac{RA_{,r}H_0'}{4lH_0^2} - \frac{RAH_0''}{16lH_0^2} + \frac{5RAH_0'^2}{16lH_0^3}, \quad C_3 = -\frac{5RAH_0'^2}{48lH_0^3}, \\
E_0 = & -\frac{3\alpha B(r)}{4lH_0}, \quad E_1 = -\frac{3\alpha RA^2 A_{,r} H_0'}{8l^2 H_0^3} + \frac{\alpha RA^3 H_0''}{16l^2 H_0^3} - \frac{5\alpha RA^3 H_0'^2}{64l^2 H_0^4}, \\
E_2 = & \frac{3\alpha RA^2 A_{,r} H_0'}{16l^2 H_0^3} - \frac{\alpha RA^3 H_0''}{32l^2 H_0^3} + \frac{3\alpha RA^3 H_0'^2}{64l^2 H_0^4}, \quad E_3 = -\frac{\alpha RA^3 H_0'^2}{192l^2 H_0^4}, \\
F_0 = & -\alpha A^3 + \frac{3\alpha RA^2 A_{,r} H_0'}{32l^2 H_0^3} - \frac{5\alpha RA^3 H_0''}{64l^2 H_0^3} + \frac{109\alpha RA^3 H_0'^2}{576l^2 H_0^4}, \\
F_1 = & \alpha A^3 + \frac{\alpha RA^3 H_0''}{8l^2 H_0^3} - \frac{5\alpha RA^3 H_0'^2}{16l^2 H_0^4}, \quad F_3 = -\frac{35\alpha RA^3 H_0'^2}{576l^2 H_0^4}, \\
F_2 = & -\frac{3\alpha RA^2 A_{,r} H_0'}{32l^2 H_0^3} - \frac{3\alpha RA^3 H_0''}{64l^2 H_0^3} + \frac{35\alpha RA^3 H_0'^2}{128l^2 H_0^4}, \\
N_0 = & \frac{3\alpha^2 A^4}{32l^2 H_0^2} \left(3B - \frac{A_{,r} RH_0'}{4lH_0^2} + \frac{A_{,rr} R}{4lH_0} + \frac{AlH_0}{4} - \frac{ARH_0''}{16lH_0^2} + \frac{5ARH_0'^2}{48lH_0^3} \right), \\
N_1 = & -\frac{\alpha^2 A^5}{526lH_0} - \frac{11\alpha^2 A^4 A_{,r} RH_0'}{128l^3 H_0^4} + \frac{9\alpha^2 A^5 RH_0''}{512l^3 H_0^4} - \frac{\alpha^2 A^4 A_{,rr} R}{64l^3 H_0^3} - \frac{25\alpha^2 A^5 RH_0'^2}{1024l^3 H_0^5},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
 N_2 &= \frac{5\alpha^2 A^4 A_{,r} R H'_0}{128l^3 H_0^4} - \frac{5\alpha^2 A^5 R H''_0}{512l^3 H_0^4} + \frac{11\alpha^2 A^5 R H_0'^2}{512l^3 H_0^5}, & N_3 &= -\frac{7\alpha R H_0'^2 A^5}{1536l^3 H_0^5}, \\
 S_0 &= -\frac{3\alpha A^2}{4l H_0} \left(\alpha A^3 - \frac{\alpha A^2 A_{,r} R H'_0}{4l^2 H_0^3} + \frac{\alpha A^3 R H''_0}{32l^2 H_0^3} - \frac{109\alpha A^3 R H_0'^2}{576l^3 H_0^4} \right), \\
 S_1 &= \frac{9\alpha^2 A^5}{32l H_0} - \frac{\alpha^2 A^5 R H''_0}{64l^3 H_0^4} + \frac{\alpha^2 A^4 A_{,r} R H'_0}{8l^3 H_0^4} + \frac{\alpha^2 A^4 A_{,rr} R}{32l^3 H_0^3}, \\
 S_2 &= -\frac{7\alpha^2 A^4 A_{,r} R H'_0}{128l^3 H_0^4} + \frac{19\alpha^2 A^5 R H_0'^2}{512l^3 H_0^5}, \\
 S_3 &= -\frac{43\alpha^2 A^5 R H_0'^2}{2304l^3 H_0^5} + \frac{5\alpha^2 A^5 R H''_0}{192l^3 H_0^4}, \\
 T_0 &= \frac{\gamma_2 A^5}{2l H_0} - \frac{27\alpha A^5}{32l H_0} + \frac{25\alpha^2 A^5 R H''_0}{256l^3 H_0^4} + \frac{7\alpha^2 A^4 A_{,r} R H'_0}{128l^3 H_0^4} + \frac{2693\alpha^2 A^5 R H_0'^2}{13824l^3 H_0^5} + \frac{\alpha^2 A^4 A_{,rr} R}{32l^3 H_0^3}, \\
 T_1 &= -\frac{A^5}{2l H_0} \left(\frac{27}{16}\alpha^2 - \gamma_2 \right) - \frac{7\alpha^2 A^5 R H''_0}{64l^3 H_0^4} + \frac{15\alpha^2 A^5 R H_0'^2}{64l^3 H_0^5} + \\
 &\quad + \frac{\alpha^2 A^4 A_{,rr} R}{32l^3 H_0^3} + \frac{\alpha^2 A^4 A_{,r} R H'_0}{8l^3 H_0^4}, \\
 T_2 &= \frac{\alpha^2 A^4 A_{,r} R H'_0}{32l^3 H_0^4} + \frac{7\alpha^2 A^5 R H''_0}{512l^3 H_0^4} - \frac{119\alpha^2 A^5 R H_0'^2}{1536l^3 H_0^5}, & T_3 &= \frac{41\alpha^2 A^5 R H_0'^2}{3456l^3 H_0^5}.
 \end{aligned}$$

При записи (4.17) уже были учтены краевые условия на нагружаемой поверхности и проведено сращивание с внешним решением до третьего порядка по ε включительно. Что касается внешнего решения, то все его функции $f_i(m, r)$ обращаются в нуль тождественно. Поэтому можно сказать, что внешнее решение до ε^3 включительно содержится во внутреннем. Их различие при выбранных масштабах координат начинает проявляться с более высоких степеней ε . Это не исключает самостоятельной значимости внешнего решения, так как оно значительно проще формально и справедливо для расстояний и времен, когда кривизна волнового фронта отражается на решении незначительно. Следовательно, построенное решение справедливо только для моментов времени, близких к моменту начала деформирования, и в своем общем виде обязано рассматриваться в качестве прифронтового асимптотического разложения.

Для уточнения положения волнового фронта Σ можно использовать функцию $M_1(z, r)$:

$$\begin{aligned}
 M_1(r, z) &= O \ln^2 H_1 + \sum_{k=0}^3 J_k H_1^{-k} \ln H_1 + \sum_{k=0}^3 Q_k H_1^{-k}, \\
 O &= \frac{\alpha^2 A^3}{8l^2 H_0^2} \left(B + \frac{R A_{,rr}}{8l H_0} + \frac{A l H_0}{8} - \frac{R A_{,r} H'_0}{8l H_0^2} - \frac{R V H_0''}{32l H_0^2} + \frac{5R A H_0'^2}{96l^2 H_0^3} \right), \\
 J_0 &= \frac{\alpha A}{2l H_0} F_0, & J_1 &= -\frac{\alpha A}{2l H_0} \left(E_1 + \frac{\alpha A^2 C_1}{4l H_0} \right), \\
 J_2 &= -\frac{\alpha A}{4l H_0} \left(E_2 + \frac{\alpha A^2 C_2}{4l H_0} \right), & J_3 &= -\frac{\alpha A}{6l H_0} \left(E_3 + \frac{\alpha A^2 C_3}{4l H_0} \right),
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
Q_0 &= -\frac{\gamma_2 A^4}{2lH_0} + \frac{3}{8} \frac{\alpha^2 A^4}{lH_0} + \frac{\alpha AF_1}{2lH_0} + \frac{\alpha AE_1}{2lH_0} + \frac{\alpha^2 A^3 C_1}{8l^2 H_0^2} + \frac{13\alpha^2 A^3 C_3}{288l^2 H_0^2} + \\
&\quad + \frac{\alpha AF_2}{4lH_0} + \frac{\alpha AF_3}{6lH_0} + \frac{13\alpha AE_3}{72lH_0}, \\
Q_1 &= -\frac{\alpha AF_1}{2lH_0} - \frac{3}{8} \frac{\alpha^2 A^4}{lH_0} + \frac{\gamma_2 A^4}{2lH_0} - \frac{\alpha AE_1}{2lH_0} - \frac{\alpha^2 A^3 C_1}{8l^2 H_0^2}, \\
Q_2 &= -\frac{\alpha AF_2}{4lH_0} - \frac{\alpha AF_3}{8lH_0} - \frac{\alpha^2 A^3 C_2}{32l^2 H_0^2}, \quad Q_3 = -\frac{\alpha AF_3}{6lH_0} + \frac{\alpha AE_3}{18lH_0} - \frac{\alpha^2 A^3 C_3}{72l^2 H_0^2}.
\end{aligned}$$

Из (4.11), (4.13), а также (4.17), (4.18) легко вычисляется интенсивность волны, если она необходима для определения скорости волны. Обсудим теперь некоторые возможности использования полученных решений. Из приведенных выше рассуждений следует, что решение было построено с аппроксимацией реальных лучевых координат их линейным аналогом, поэтому оно будет удобным начальным приближением для малых послееударных времен в схемах численного счета. Если при этом считать, что вдоль каждой прямой проходит различное расстояние за счет включения в формулу для G интенсивности волны (а она вычисляется на основе (4.11), (4.17)), то можно для малого интервала времени Δt определить итоговое положение ударной волны. Оно, вообще говоря, не будет совпадать с линейным аналогом, и для него вычисляется новый вектор нормали $\vec{\nu}_1$. Геометрия Σ_1 и распределение перемещений на ней известны из предыдущего шага. Далее, отталкиваясь от Σ_1 , можно построить новую координатную сетку x^i и определить перемещения в следующем интервале времени. Если же просто остановиться на решении (4.11), (4.17), не связывая его неизвестные функции краевым условием на нагружаемой границе Φ , то его можно считать задающим прифронтовое поведение решения, а неизвестные функции определять на основании численных расчетов в остальной области деформирования. Этот метод раньше применялся к одномерным нелинейным волновым процессам [17]. Следует ожидать, что предлагаемое здесь решение найдет место при разработке схем численного счета для не одномерных нестационарных задач.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Бленд, Д. Р.* Нелинейная динамическая теория упругости / Д. Р. Бленд. – М. : Мир, 1972. – 183 с.
- [2] *Уизем, Дж.* Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М. : Мир, 1977. – 622 с.
- [3] *Куликовский, А. Г.* Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова // ПММ. – 1980. – Т. 44. – Вып. 3. – С. 523–534.
- [4] *Буренин, А. А.* Ударные волны в изотропном упругом пространстве / А. А. Буренин, А. Д. Чернышов // ПММ. – 1978. – Т. 42. – Вып. 4. – С. 711–717.
- [5] *Пелиновский, Е. Н.* Нелинейные эволюционные уравнения / Е. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман, Ю. К. Энгельбрехт. – Таллин : Валгус, 1984. – 156 с.
- [6] *Буренин, А. А.* Косой удар по упругому полупространству / А. А. Буренин, В. А. Шаруда // Изв. АН СССР. МТГ. – 1984. – № 6. – С. 172–174.
- [7] *Бабичева, Л. А.* Лучевой метод решения динамических задач в упруго-вязкопластических средах / Л. А. Бабичева, Г. И. Быковцев, Н. Д. Вервейко // ПММ. – 1973. – Т. 37. – № 1. – С. 145–155.
- [8] *Rossikhin, Y. A.* Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Appl. Mech. Rev. – 1995. – V. 48. – № 1. – P. 1–39.

- [9] *Буренин, А. А.* О прифронтовых асимптотиках в нелинейной динамической теории упругости / А. А. Буренин, В. Е. Рагозина // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций : сб. науч. тр. (к 60-летию со дня рожд. проф. Г. И. Быковцева). – Владивосток : Дальнаука, 1998. – С. 225–242.
- [10] *Иванова, Ю. Е.* Об ударных осесимметрических движениях несжимаемой упругой среды при ударных воздействиях / Ю. Е. Иванова, В. Е. Рагозина // ПМТФ. – 2006. – Т. 47. – № 6. – С. 144–151.
- [11] *Рагозина, В. Е.* Об эволюционных уравнениях задач ударного деформирования с плоскими поверхностями разрывов / В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2. – № 3. – С. 82–95.
- [12] *Лурье, А. И.* Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
- [13] *Томас, Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М. : Мир, 1964. – 308 с.
- [14] *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
- [15] *Герасименко, Е. А.* Лучевые разложения в изучении закономерностей распространения неплоских ударных волн / Е. А. Герасименко, В. Е. Рагозина // Вестник Самарского государственного университета — Естественнонаучная серия. – 2006. – № 6/1(46). – С. 94–113.
- [16] *Ван-Дайк, М.* Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – М. : Мир, 1967. – 239 с.
- [17] *Буренин, А. А.* К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред / А. А. Буренин, П. В. Зиновьев // Проблемы механики : сб. статей к 90-летию А. Ю. Ишлинского. – М. : Физматлит, 2003. – С. 146–155.

Рагозина Виктория Евгеньевна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток

e-mail: ragozina@vlc.ru

Иванова Юлия Евгеньевна,

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток

e-mail: ivanova@iacp.dvo.ru

V. E. Ragozina, Y. E. Ivanova

**ON THE ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF MULTIDIMENSIONAL
PROBLEMS SOLUTIONS OF SHOCK DYNAMICS OF NONLINEAR ELASTIC
MEDIUM**

*Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far
Eastern Branch of Russian Academy of Sciences*

Abstract. The paper presents a generalization of the asymptotic analysis method of frontline areas for problems of impact deformation of nonlinear elastic medium, based on the derivation of the evolution equation. This method can be extended from one-dimensional boundary value problems on multi-dimensional ones due to the transition to the linear approximation of the ray coordinate. It is shown that the evolution equation contains a eikonal coordinate only as a parameter, ie, the ray coordinate of frontal area has a dominant significance in the assessment of the rate of deformation change. The solution of two-dimensional problem of antiplane deformation of an incompressible nonlinear elastic medium is constructed as a model example.

Keywords: nonlinear elastic incompressible inhomogeneous medium, transverse shock waves, shear load with variable directivity, the evolution equations system, the evolution equation for the change of shear intensity, the evolution equation for the change of shear direction.

REFERENCES

- [1] *Bland, D. R.* Nonlinear dynamic theory of elasticity / D. R. Bland. – M. : Mir, 1972. – 183 p.
- [2] *Whitham, G. B.* Linear and Nonlinear Waves / G. B. Whitham. – M. : Mir, 1977. – 622 p.
- [3] *Kulikovskii, A. G.* On shock wave propagation in stressed isotropic nonlinearly elastic media / A. G. Kulikovskii, E. I. Sveshnikova // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1980. – Vol. 44 – No. 3. – P. 367–374.
- [4] *Burenin, A. A.* Shock waves in an isotropic elastic space / A. A. Burenin, A. D. Chernyshov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1978. – Vol. 42. – No. 4. – P. 758–765.
- [5] *Pelinovsky, E. N.* Nonlinear evolution equation / E. N. Pelinovsky, V. E. Fridman, J. K. Engelbrecht. – Tallinn : Valgus, 1984. – 156 p.
- [6] *Burenin, A. A.* Oblique impact against an elastic half-space / A. A. Burenin, V. A. Sharuda // Mechanics of solids. – 1984. – Vol. 19. – No. 6. – P. 166–170.
- [7] *Babicheva, L. A.* Ray method of solving dynamic problems in elastic-viscoplastic media / L. A. Babicheva, G. I. Bykovtsev, N. D. Verveiko // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1973. – Vol. 37. – No. 1. – P. 132–141.
- [8] *Rossikhin, Y. A.* Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Appl. Mech. Rev. – 1995. – Vol. 48. – № 1. – P. 1–39.
- [9] *Burenin, A. A.* About the frontline asymptotics in nonlinear dynamical elasticity theory / A. A. Burenin, V. E. Ragozina // Problems of continuum mechanics and structural elements. – Vladivostok : Dal'nauka, 1988. – P. 225–240.
- [10] *Ivanova, Yu. E.* On axisymmetric motion of an incompressible elastic medium under impact loading / Yu. E. Ivanova, V. E. Ragozina // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2006. – Vol. 47. – No. 6. – P. 892–898.
- [11] *Ragozina, V. E.* About the evolutionary equations of flat problems of a shock straining of solids / V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova // Computational Continuum Mechanics. – 2009. – Vol. 2. – No 3. – P. 82–95.
- [12] *Lurie, A. I.* Nonlinear theory of elasticity / A. I. Lurie. – M. : Nauka, 1980. – 512 p.
- [13] *Tomas, T.* Plastic Flow and Fracture in Solids / T. Y. Thomas. – Academic Press, 1961. – 267 p.

[14] *Bykovtsev, G. I.* Theory of Plasticity / G. I. Bykovtsev, D. D. Ivlev. – Vladivostok : Dal'nauka, 1998. – 528 p.

[15] *Gerasimenko, E. A.* Лучевые разложения в изучении закономерностей распространения неплоских ударных волн / E. A. Gerasimenko, V. E. Ragozina // Vestnik of Samara State University. Natural Science Series. – 2006. – № 6/1(46). – P. 94–113.

[16] *Van Dyke, M.* Perturbation methods in fluid mechanics / M. Van Dyke.– M. : Mir, 1967. – 239 p.

[17] *Burenin, A. A.* On the problem of allocation of discontinuity surfaces in the numerical methods for the dynamics of deformable medium / A. A. Burenin, P. V. Zinoviev // Problems of Mechanics : the collection of articles on the 90th anniversary of A. Yu. Ishlinskii. – M. : Fizmatlit, 2003. – P. 146–155.

Ragozina Victoria Evgenevna

Candidate of Phys.&Math., Senior Researcher, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Ivanova Yulia Evgenevna

Candidate of Phys.&Math., Researcher, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok

ПОСЛОЙНОЕ ТЕЧЕНИЕ МИКРОСТРУКТУРНОГО МАТЕРИАЛА В КАНАЛЕ ВБЛИЗИ ДЕЙСТВИЯ СИЛ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Университет г. Диала, Ирак

Воронежский государственный университет

Аннотация. Приведен расчёт скорости течения вязкого микроструктурного материала в плоском канале вблизи переднего мениска квадратичной и кубической формы. Отмечено увеличение скорости вблизи стенок канала по сравнению со скоростью внутри канала. Предполагается, что движение слоя материала толщиной δ моделирует движение слоя молекул, заполняющих нанотрубку.

Ключевые слова: микроструктура, вязкость, мениск, скорость, канал стенка.

УДК: 532.52

Введение. Экспериментально и на основе расчета движения дискретных молекул внутри нанотрубок установлено их послойное движение, причем у стенок материал движется быстрее, чем в центре [1]. Учитывая совместный характер движения молекул, предлагается моделировать процесс движением микроструктурного вязкого материала в плоском зазоре под действием сил поверхностного натяжения, втягивающих молекул внутрь нанотрубок.

Математическая модель движения микроструктурного материала. Отличительной особенностью течения и деформирования микроструктурных материалов является учет характерных размеров h представительных элементов $\Delta V = h^3$ в выражениях для деформации, скоростей деформаций и в самих уравнениях движения [1], [2]:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= e_{ij}^c + \frac{h^2}{6} \Delta e_{ij}^c; \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{h^2}{6} \Delta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $e_{ij}^c = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ – тензор скоростей деформаций Коши, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}$; v_j – вектор скорости, σ_{ij} – тензор напряжений ($i, j = 1, 2, 3$).

Закон Ньютона, связывающий напряжения со скоростями деформаций для несжимаемой вязкой жидкости

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}; \quad e_{kk} = 0 \quad (2)$$

замыкает систему дифференциальных уравнений для напряжений и скоростей и позволяет рассматривать движение такого материала в терминах скорости v_i .

Рассмотрим далее движение материала в плоской трубе шириной $2H$ под действием перепада давления $\frac{\partial P}{\partial z}$, вызванного действием силы поверхностного натяжения [1], [3].

Случай движения материала в окрестности мениска квадратичной формы. Оценим втягивающую силу поверхностного натяжения при условии постоянства касательной силы $\bar{F} = \lambda_0 \cdot \bar{\tau}_0$ (рис. 1)

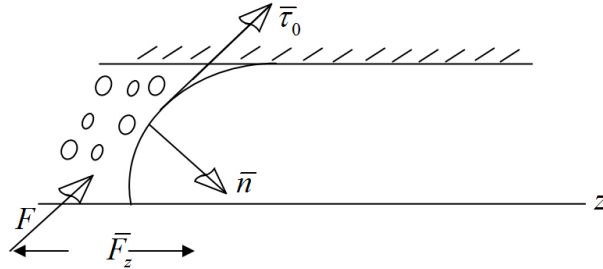


Рис. 1. Схематическое изображение формы мениска и сил, порожденных поверхностным натяжением $F = \lambda_0 = const$

Положим вид мениска в форме параболы (a, b – постоянные):

$$f(z, y) = z - (a + by^2) = 0. \quad (3)$$

Векторы нормали и касательной к мениску имеют вид

$$\bar{n} = \left(\frac{-2by}{\sqrt{1 + 4b^2y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + 4b^2y^2}} \right); \quad \bar{\tau} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4b^2y^2}}, \frac{2by}{\sqrt{1 + 4b^2y^2}} \right). \quad (4)$$

Вектор силы поверхностного натяжения определяется

$$\bar{F} = \frac{\lambda v}{\sqrt{1 + 4b^2y^2}}(1; 2by); \quad (y \geq 0). \quad (5)$$

Далее ограничимся линейным представлением втягивающей силы

$$F_z \cong 2\lambda_0 by. \quad (6)$$

Уравнение движения микроструктурного материала вблизи мениска примем в виде [1]

$$\delta^2 v^{IV} + v^{II} = \lambda y, \quad \text{где } \lambda = 2\lambda_0 b. \quad (7)$$

Дважды проинтегрировав уравнение (7), просуммировав частное решение уравнения (7) и общее решение однородного уравнения, получим

$$v = C_4 \sin \frac{y}{\delta} + C_3 \cos \frac{y}{\delta} + (C_1 - \lambda \delta^2)y + C_2. \quad (8)$$

Из условий симметрии по y следует, что

$$C_n = 0; \quad C_1 = \lambda \delta^2. \quad (9)$$

Постоянные C_3 и C_2 найдем из условий наличия ядра течения шириной $y = \check{H}$, на котором $v'(\check{H}) = 0$, что означает движение ядра течения со скоростью течения

$$v(\check{H}) = v^0 \text{ и значит } v'(\check{H}) = 0, \quad (10)$$

откуда следует, что

$$C_3 = \frac{\lambda \delta \check{H}^2}{2 \sin \frac{\check{H}}{\delta}}. \quad (11)$$

Постоянную C_2 найдем из условия качения представительного элемента вдоль стенки трубы $y = H$

$$v(H) - \gamma v'(H) = 0. \quad (12)$$

Из (12) следует, что

$$C_2 = -\lambda\delta\check{H}^2 \frac{1}{\sin \frac{\check{H}}{\delta}} \left(\cos \frac{H}{\delta} - \frac{\gamma}{\delta} \sin \frac{H}{\delta} \right) - \frac{\lambda}{2} H^2 \left(\frac{H}{3} - \gamma \right). \quad (13)$$

Учитывая знание постоянных C_1 , C_2 , C_3 и C_4 , выражение (8) для скорости течения $v(y)$ примет вид

$$w = \frac{2v(x)}{\lambda H^3} = \frac{x^3}{3} + \varepsilon \bar{H}^2 \frac{\cos \frac{x}{\varepsilon}}{\sin \frac{\bar{H}}{\varepsilon}} + \gamma - \frac{1}{3} - \varepsilon \bar{H}^2 \frac{\cos \frac{1}{3} - \left(\frac{\bar{\gamma}}{\varepsilon} \right) \sin \frac{1}{\varepsilon}}{\sin \frac{\bar{H}}{\varepsilon}} \quad (14)$$

при $x = \frac{y}{H}$; $\varepsilon = \frac{\delta}{H}$; $\bar{H} = \frac{\check{H}}{H}$; $\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{H}$.

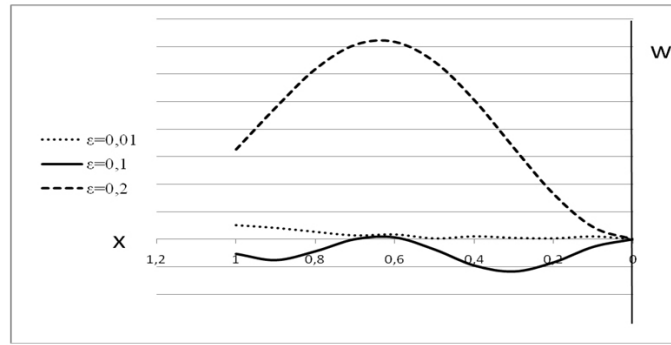


Рис. 2. График скорости течения $w(x)$ для разных ε , $x \in [0; 1]$

Скорость течения микроструктурного материала в окрестности мениска кубической формы. Положим, что мениск имеет форму кубической параболы, а сама сила поверхностного натяжения является постоянной вдоль формы мениска (рис. 1)

$$\Phi_{(yz)} = z - by^3 = 0; \quad F_z = \lambda 3by^2. \quad (15)$$

Уравнение для скорости течения материала в окрестности переднего фронта мениска имеет вид (7)

$$\delta^2 v^{IV} + v^{II} = \lambda 3by^2. \quad (16)$$

Двукратное интегрирование переводит дифференциальное уравнение 4-го порядка для v в уравнение 2-го порядка с постоянными интегрирования C_1 и C_2 :

$$\delta^2 v^{II} + v = \lambda(b/4)y^4 + C_1 y + \rho_2. \quad (17)$$

Линейное уравнение (17) имеет точное решение

$$v(y) = C_3 C_v \frac{y}{\delta} + C_n \sin \frac{y}{\delta} + \lambda_0 y + 12\lambda_0 \delta y^2 + \rho_1 y + \rho_2 - 24\lambda_0 \delta^4, \quad (18)$$

где ($\lambda b = 4\lambda_0$).

Для определения постоянных C_1 , C_2 , C_3 , C_n зададим следующие граничные условия: симметрию течения

$$v(H) = v(-H); \quad (19)$$

экстремум скорости на оси течения

$$v'(0) = 0. \quad (20)$$

Равенство сил вязкого трения и движущей силы поверхностного натяжения на стенке

$$\sigma_{zy}|_{y=H} = F_z|_{y=H} = \mu(v' + \delta^2 v''')|_{y=H}. \quad (21)$$

Условие качения представительного элемента на стенке

$$v(H) - \gamma v'(H) = 0. \quad (22)$$

Выбранные граничные условия позволяют определить постоянные интегрирования и представить выражение для скорости v с удержанием величин не выше δ^2 в виде

$$v(x)|_{\lambda_0} = x^4 + 12x^2\varepsilon^2 + \frac{2\varepsilon(3 - \bar{\mu})}{\bar{\mu} \cos(11\varepsilon)} (1 - \cos|x|\varepsilon), \quad (23)$$

где $\bar{\mu}$ – безразмерный коэффициент вязкости $\varepsilon = \frac{\delta}{H}$, $x = \frac{y}{H}$.

Выражение (23) для скорости течения $v(x)$, где $x \in [0, 1]$, отражает возмущение скорости течения с периодом $\tau = 2\pi\varepsilon$. На рис. 3 изображен график скорости $v(x)$, причем прилегающие к стене слои материала движутся быстрее внутренних.

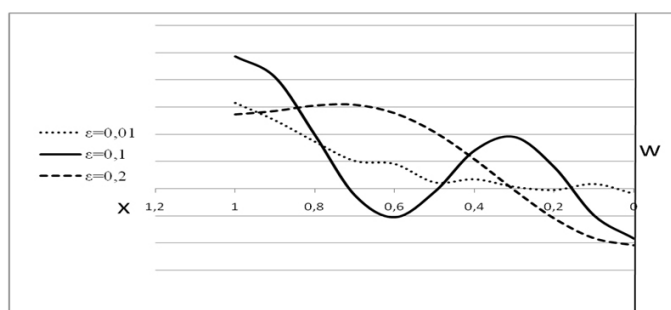


Рис. 3. График безразмерной скорости течения материала при различных значениях параметров

Выводы. Использование в качестве движущей силы поверхностного натяжения приводит к эффекту увеличения скорости движения вблизи стенок канала в отличие от течения под действием перепада давления. Вид формы мениска передней части движущегося материала влияет на величину скорости. Области локального максимума скорости можно отождествить с движением отдельных молекул в нанотрубке.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Вервейко, Н. Д.* Влияние характерного линейного размера микроструктуры и времени релаксации на переходные процессы в тонких слоях / Н. Д. Вервейко, В. И. Просветов. – Воронеж : Вестник ВГУ, 2013. – 298 с.
- [2] *Быкова, М. И.* Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры / М. И. Быкова, Н. Д. Вервейко, П. П. Сумец, С. А. Шашкина. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. – 192 с.
- [3] *Аль Имам, А. А.* Влияние микроструктуры вязкопластичного материала на форму течения в круглой трубе / А. А. Аль Имам // Материалы международной конференции (Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна) – Воронеж, 2014. – С. 21–24.

Аль Имам Адель А Абед Аль Вахаб,

аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: adelpro76@yahoo.com

A. A. Al Imam

**FLOW OF MICROSTRUCTURED MATERIAL IN THE PLANE CHANNEL
UNDER A SURFACE TENSION FORCE**

Voronezh State University

Abstract. This article take a velocity of microstructural viscosity materials flow in the plane channel under a surface tension force. Shown that the velocity nearly channel boundaries is larger more than in its center. It is assumed that the movement of the material layer thickness simulates the movement of molecular layer which fills the nanotube.

Keywords: microstructure, viscosity, velocity, channel, meniscus.

REFERENCES

[1] Verveyko, N. D. The influence of the characteristic linear dimension of the microstructure and the relaxation time on transient processes in thin layers / N. D. Verveyko, V. I. Prosvetov. – Voronezh Vestnik VSU, 2013. – 298 p.

[2] Bykova, M. I. Flow and deformation of materials and uniform microstructure / M. I. Bykova, N. D. Verveyko, P. P. Sumets, S. A. Shashkina. – Voronezh Univ. VSU, 2010. – 192 p.

[3] Al Imam A. A. Effect of microstructure viscoplastic material in the form of the flow in a circular tube / A. A. Al Imam // Materials of the International Conference (Voronezh Winter Mathematical School S. G. Kreina). – Voronezh, 2014. – P. 21–24.

Al Imam Adel A Abed Al Wahab

Postgraduate Student, Department of the theoretical and apply mechanics, Voronezh State University, Voronezh

К. И. Быкова, Н. Д. Вerveйко

ИНТЕНСИВНОСТЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЗА ДИФРАГИРОВАННОЙ ВОЛНОЙ НА СФЕРЕ И ЗА ПОРОЖДЕННОЙ УПРУГОЙ ВОЛНОЙ В ШАРЕ

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе рассмотрена задача дифракции предельной пластической волны на выпуклой поверхности в предположении, что напряженное состояние за плоской продольной волной удовлетворяет условию пластичности Мизеса. В качестве жесткой поверхности выбрана сферическая поверхность. Интенсивность дифрагированной волны на поверхности сферы вычислена по уравнению «переноса» вдоль криволинейных лучей, которыми является образующая сферы:

$$\frac{\delta w}{c \delta t} - \Omega w = F.$$

Для решения задачи Коши дифференциального уравнения «переноса», необходимо знание геометрических характеристик дифрагированной волны, а именно первой и второй главных кривизн, что позволяет вычислить среднюю кривизну $\Omega(\varepsilon, t)$. Геометрические характеристики дифрагированной волны являются функциями времени t и параметра ε , характеризующего положение текущей точки на дифрагированной волне. Параметр ε принят за поверхностную координату этой точки в меридианальной плоскости $\varphi = \text{const}$. Вторая координата φ текущей точки по широте дифрагированной волны является произвольной в силу осесимметричности задачи.

Показано, что интенсивность дифрагированной волны экспоненциально убывает при ее распространении вдоль меридиана по сфере и геометрического затухания за счет развертывания дифрагированного фронта.

Рассмотрен так же расчет интенсивности напряженного состояния в случае падения продольной волны на шар из упругого материала, который проведен лучевым методом в окрестности переднего фронта дифрагированной волны. Из проведенного рассмотрения следует, что продольная дифрагированная волна вызывает в материале препятствия только продольную волну, интенсивность которой отличается от интенсивности дифрагированной волны коэффициентом, зависящим от отношения плотностей и отношения упругих параметров материала упругой среды и материала препятствия. Показано, что в материале шара в месте контакта дифрагируемой и генерируемой волн интенсивность затухает со временем.

Ключевые слова: дифракция, шар, упругие волны, интенсивность напряжений.

УДК: 539.215

Постановка задачи расчета интенсивности дифрагированной волны на сфере. Рассмотрим задачу дифракции предельной пластической волны на выпуклой поверхности. Будем предполагать, что напряженное состояние за плоской продольной волной удовлетворяет условию пластичности Мизеса [4]: $I_2^2(0) = 2k^2$. На рис. 1 представлена геометрическая картина падения плоской волны на выпуклую поверхность и продвижение этой волны в области тени. В качестве жесткой поверхности выбрана сферическая поверхность. В соответствии с принципом Гюйгенса [3], [5], [10] каждая точка поверхности S в момент достижения волновым фронтом является источником возмущения. Поэтому касательная \vec{T} к дифрагированной поверхности S будет нормалью зарождающегося фронта, а нормаль \vec{N} к дифрагированной поверхности S будет касательной к зарождающейся дифрагированной волне.

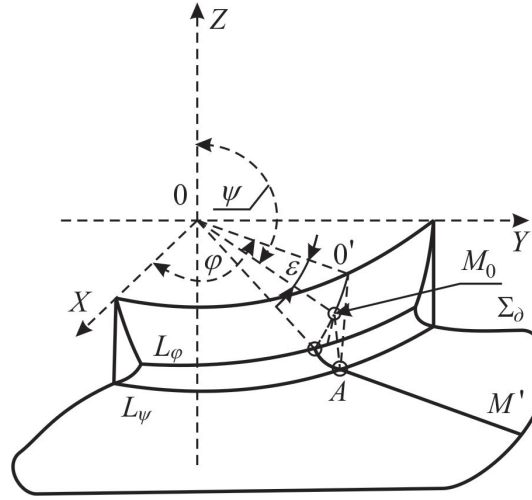


Рис. 1. Схематическое изображение падающей и дифрагированной волн

В процессе распространения сильных и слабых волн их интенсивность изменяется в соответствии с уравнением переноса (1) [2], [9]:

$$\frac{\delta w}{c \delta t} - \Omega w = F, \quad (1)$$

где w — интенсивность (скачок скорости) на переднем фронте волны, $\Omega = (\Omega_0 - K_0 c t) / (1 - 2\Omega_0 c t + K_0 c^2 t^2)$ — средняя кривизна переднего фронта [9], $\Omega_0 = (\chi_1 + \chi_2) / 2$ — начальная средняя кривизна, $K_0 = \chi_1 \chi_2$ — начальная гауссова кривизна, χ_1, χ_2 — главные кривизны переднего фронта, c — скорость переднего фронта падающей волны, t — время (здесь время t отсчитывается от начала рассмотрения задачи переноса интенсивности), $\delta / \delta t$ — производная по времени от функции, заданной на переднем фронте бегущей волны, F — функция, определяющая диссипацию интенсивности волны за счет вязкости. В рассматриваемом случае $F = 0$. Для решения этого уравнения необходимо задание начального условия и знание начальных средней Ω_0 и гауссовой K_0 кривизн. Рассмотрим вопрос определения начальных геометрических и кинематических параметров дифрагированных волн.

Как видно из рис. 1, линиями главных кривизн будут сечения дифрагированной волны плоскостью $\varphi = \text{const}$ (задающей линию долготы) L_φ и плоскостью $z = \text{const}$ (задающей линию широты) L_z .

При вычислении средней и гауссовой кривизн необходимо иметь в виду, что время t' существования определенной точки M_0^* поверхности Σ_∂ определяется параметром ε , фиксирующим положение точки M_0 зарождения дифрагированной волны так, что

$$t' = t - (R\varepsilon/c). \quad (2)$$

Геометрические характеристики дифрагированной волны будут функциями времени t и параметра ε . Угол ε характеризует положение текущей точки M_0^* на дифрагированной волне так, что ε можно принять за поверхностную координату точки на дифрагированной волне в плоскости $\varphi = \text{const}$. Вторая координата φ текущей точки дифрагированной волны является произвольной вследствие осесимметричности дифрагированной волны, и она не входит в выражение для средней и гауссовой кривизн. Таким образом, имеем $\Omega_0 = \Omega_0(\varepsilon, t)$ и $K_0 = K_0(\varepsilon, t)$.

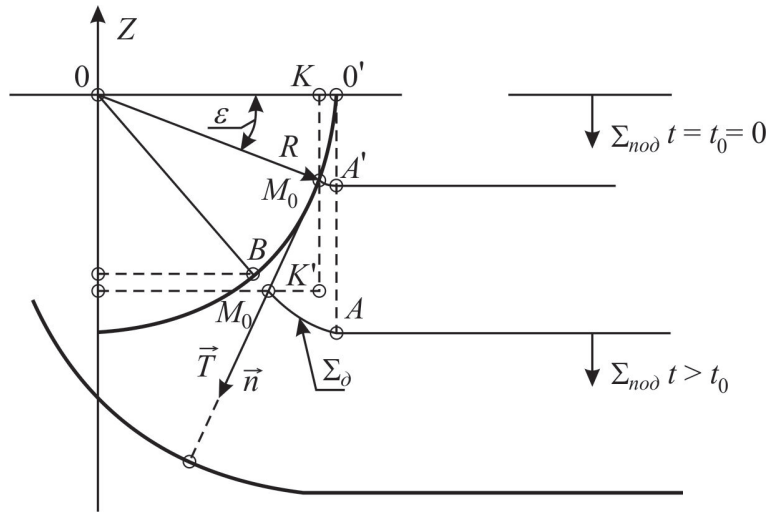


Рис. 2. Схематическое изображение дифрагированной волны

Радиус кривизны дифрагированной поверхности в плоскости $z = -R \sin \varepsilon$ (рис. 2), легко определяется в точке M_0 .

$$R_1 = R \cos \varepsilon; \quad \chi_{01} = -1/R_1 = -1/R \cos \varepsilon. \quad (3)$$

Для произвольного момента времени $t = t' + R\varepsilon/c$ существования дифрагированной волны радиус ее кривизны в плоскости $z = \text{const}$ вычисляется (рис. 2) следующим образом:

$$R_1(t, \varepsilon) = R \cos \varepsilon - (ct - R\varepsilon) \sin \varepsilon,$$

а кривизна соответственно

$$\chi_1(t, \varepsilon) = \frac{-1}{R_1(t, \varepsilon)} = \frac{-1}{R \cos \varepsilon - (ct - R\varepsilon) \sin \varepsilon}. \quad (4)$$

Рассмотрим дифрагированную поверхность Σ_∂ в меридианальной плоскости [1]. Как видно из рис. 2, след дифрагированной волны в меридианальной плоскости представляет собой множество точек, образованных лучами, исходящими по касательному направлению \vec{T} к окружности и, следовательно, след дифрагированной волны в меридианальной плоскости есть огибающая нормалей \vec{n} к окружности, причем нормали образуют семейство прямых, начало которых на окружности бежит со скоростью \vec{c}_1 вдоль окружности. Приведены значения радиуса кривизны этой линии в начальный и текущий моменты времени

$$R_{20} = 4R \sin 2\varepsilon, \quad R_2(t, \varepsilon) = 4R \sin 2\varepsilon - 3(ct - R\varepsilon) \cos 2\varepsilon \quad (5)$$

так, что вторая главная кривизна в начале и текущий момент времени известна:

$$\chi_{2_0} = \frac{-1}{4R \sin 2\varepsilon}; \quad \chi_2(t, \varepsilon) = \frac{-1}{4R \sin 2\varepsilon - 3(ct - R\varepsilon) \cos 2\varepsilon}. \quad (6)$$

Знание первой и второй главных кривизн (4), (6) позволяет вычислить среднюю кривизну $\Omega(\varepsilon, t) = (\chi_1 + \chi_2)/2$ и решить задачу Коши для дифференциального уравнения «переноса» (1).

Вычисление начальной интенсивности дифрагированной волны на сфере. Интенсивность дифрагированной волны на поверхности сферы будем вычислять по уравнению "переноса" вдоль криволинейных лучей, которыми является образующая сферы. Тогда уравнение "переноса" примет следующий вид:

$$\frac{\delta w_0(\varepsilon)}{R \delta \varepsilon} + \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{\cos \varepsilon} + \frac{1}{4 \sin 2\varepsilon} \right) w_0(\varepsilon) = 0. \quad (7)$$

Начальным условием для $w_0(\varepsilon)$ является значение интенсивности падающей волны при $\varepsilon = 0$: $w(0) = w_0(0)$. Решением дифференциального уравнения (7) является

$$\frac{w_0(\varepsilon)}{w_0(0)} = \exp \left(- \int_0^\varepsilon \frac{1}{2 \cos \psi} \left(1 + \frac{1}{8 \sin \psi} \right) d\psi \right). \quad (8)$$

Интенсивность дифрагированной волны от момента ее зарождения и до текущего момента времени t удовлетворяет уравнению (1) и выражается формулой

$$\frac{w(t, \varepsilon)}{w_0} = \exp \left(- \int_0^\xi \frac{1}{2 \cos \psi} \left(1 + \frac{1}{8 \sin \psi} d\psi \right) - \int_0^{\xi-\varepsilon} \Omega_\partial \left(\frac{R}{c} \tau, \varepsilon \right) cd\tau \right), \quad (9)$$

где средняя кривизна дифрагированного фронта Ω_∂ определяется по значениям ее главных кривизн $\chi_1(t, \varepsilon)$, $\chi_2(t, \varepsilon)$:

$$\Omega_\partial(t, \varepsilon) = \frac{1}{2R} \left[\frac{1}{\cos \varepsilon - (\xi - \varepsilon) \sin \varepsilon} + \frac{1}{4 \sin 2\varepsilon - 3(\xi - \varepsilon) \cos 2\varepsilon} \right], \quad (10)$$

причем $t > R\varepsilon/c$, $\xi = ct/R$.

Формула (9) позволяет сделать вывод, что интенсивность дифрагированной волны экспоненциально убывает за счет ее распространения вдоль меридиана по сфере и геометрического затухания развертывания дифрагированного фронта.

На рис. 3 представлен график относительной интенсивности $w(t, \varepsilon)/w_0$ дифрагированной волны вдоль ее фронта в зависимости от времени и угла ε , характеризующего положение точки на фронте дифрагированной волны в момент ее зарождения. Интерес представляет интенсивность волны на ее фронте для $\varepsilon \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, так как при $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ интенсивность продольной волны по направлению $\varphi = \frac{\pi}{2}$ становится равной 0 и дальше для $\varepsilon > \frac{\pi}{2}$ будет распространяться волна слабого разрыва порядка больше, чем падающая.

Выражение (9) для интенсивности волны содержит множители, которые определяют интенсивность дифрагированной волны на поверхности сферы и интенсивность волны при ее распространении вдоль прямолинейных лучей, имеющих своим началом точки на поверхности сферы. Как следует из рис. 3, интенсивность дифрагированной волны совпадает с интенсивностью падающей волны в начальный момент зарождения дифрагированной волны и далее экспоненциально убывает вдоль поверхности сферы и вдоль фронта волны.

Интенсивность напряжений за дифрагированной волной. Скачок напряженного состояния за фронтом дифрагированной волны порождается скоростью продольного деформирования упругого материала среды и определяется выражением [2]

$$-c_1[\sigma_{ij}] = (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) w_n, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (11)$$

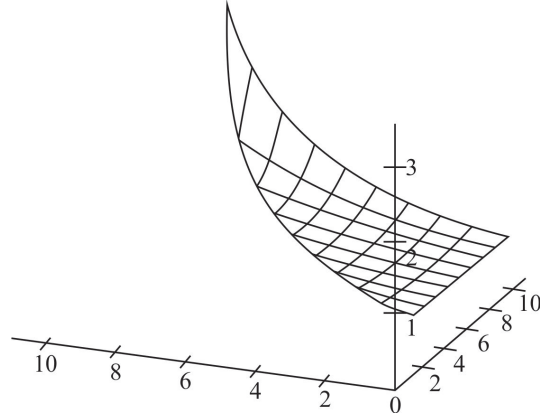


Рис. 3. График изменения интенсивности дифрагированной волны вдоль фронта волны в зависимости от времени и угла ε

Заметим, что в случае покоя материала перед фронтом дифрагированной волны $[\sigma_{ij}] = -\sigma_{ij}$, где σ_{ij} – напряжение за фронтом Σ_∂ , так что

$$\sigma_{ij} = (\lambda\delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) \frac{w}{c_1}. \quad (12)$$

Интенсивность касательных напряжений за фронтом дифрагированной волны, задаваемая вторым инвариантом девиатора тензора напряжений I_2 , определяется через интенсивность падающей волны:

$$I_2^2 = \sigma'_{ij} \cdot \sigma'_{ij} = \frac{2}{3} \mu (4\mu - 3\lambda) \cdot \left(\frac{w}{c_1} \right)^2, \quad (13)$$

где w – интенсивность дифрагированной волны. В процессе распространения падающая предельная пластическая волна, напряженное состояние за которой удовлетворяет условию пластичности Мизеса: $I_2^2(0) = 2k^2$, становится упругой, и ее относительная интенсивность определяется из знания интенсивности скорости за фронтом волны (9):

$$\begin{aligned} \frac{I_2}{I_2(0)} &= e^{\frac{1-\cos\xi}{16\cos\xi}} \cdot \left(\frac{1+\sin\xi}{1-\sin\xi} \right)^{\frac{23}{32}} \cdot \left(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon - (\xi - \varepsilon) \cdot \sin\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\sin\varepsilon}} \times \\ &\times \left(\frac{4\sin 2\varepsilon}{4\sin 2\varepsilon - (\xi - \varepsilon) \cdot 3\cos 2\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3\cos 2\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из выражения (14) следует асимптотическое убывание интенсивности касательных напряжений $I_2/I_2(0)$ за фронтом дифрагированных волн (рис. 3).

Исследование напряженного состояния в материале сферы в окрестности внешних порожденных дифрагированных волн. Рассмотрим случай прохождения дифрагированной волны Σ_∂ за упругим препятствием, ограниченным поверхностью S , внутри которого дифрагированная волна порождает возмущение в виде двух волн: продольной Σ_1 и сдвиговой Σ_2 [8]. Локальное представление о состоянии волн в момент их совместного распространения изображено на рис. 4.

В соответствии с законом Снелла синусы углов, ориентирующих поверхности Σ_1 и Σ_2 , определяются выражениями [6]

$$\sin\theta = \frac{c_{12}}{c_1} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1} \cdot \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda + 2\mu}} \leq 1, \quad \sin\gamma = \frac{c_{22}}{c_1} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1} \cdot \frac{\mu_1}{\lambda + 2\mu}} \leq 1. \quad (15)$$

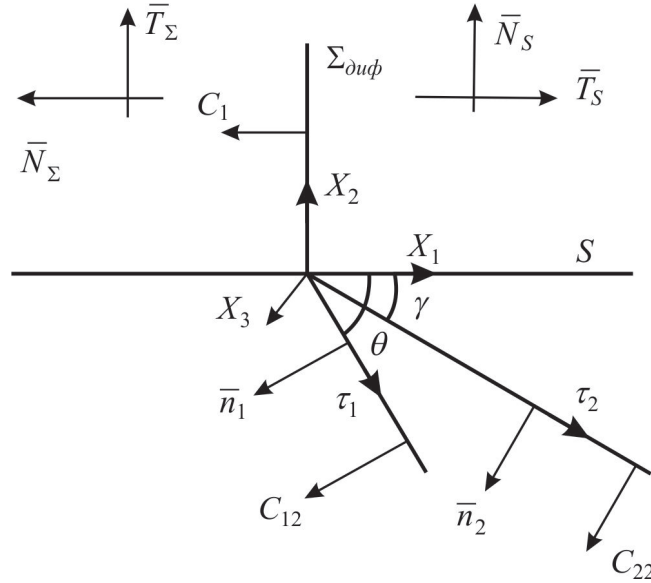


Рис. 4. Схематическое изображение момента совместного распространения вдоль элемента поверхности S дифрагированной и двух порожденных в препятствии волн

Здесь c_1 – скорость дифрагированной волны, c_{12} – скорость порожденной продольной волны, c_{22} – скорость порожденной сдвиговой волны. Индекс «1» относится к параметрам материала препятствия.

Из выражений для углов θ и γ следует, что предложенная геометрическая картина не всегда имеет место, и в случае большей плотности $\rho < \rho_1$ или большей упругости материала препятствия $\lambda_1 < \lambda$, $\mu_1 < \mu$ порожденные волны Σ_1 и Σ_2 «убегают» вперед дифрагированной волны, а дифрагированная волна может порождать рэлеевские волны [7] в препятствии.

Для расчета напряженного состояния за фронтами сдвиговой Σ_2 и продольной Σ_1 волн воспользуемся условием непрерывности напряжений на поверхности S в области напряженного состояния материала и условиями динамической совместности на продольной Σ_1 и сдвиговой Σ_2 волнах:

$$\sigma_{\tau\Sigma\tau\Sigma} = \sigma_{n^I S n^I S}, \quad \sigma_{n^I \Sigma \tau\Sigma} = 0. \quad (16)$$

$$[\sigma_{ij}]n_j + \rho c[v_i] = 0 \text{ — на } \Sigma_1 \text{ и на } \Sigma_2. \quad (17)$$

Преобразуем эти условия, введя интенсивности ω_1 и w_1 продольной и сдвиговой порожденных Σ_1 и Σ_2 волн так, что

$$v_i|_I = \omega_1 n_i^I, \text{ то есть } v_i|_I \cdot n + i^I = \omega_1, \quad (18)$$

$$[v_i]_{\Sigma_2} = w_1 \tau_i^{II},$$

или

$$(v_i^I - v_i^{II})\tau_i^{II} = w_1. \quad (19)$$

Для удобства в дальнейших расчетах выберем локальную систему координат (x_1, x_2, x_3) таким образом, чтобы направление x_1 совпадало с направлением нормали дифрагированной поверхности Σ_0 , а направление x_2 с направлением нормали к элементу поверхности S . Тогда

система балансовых уравнений для интенсивностей порожденных волн примет вид

$$\sigma_{n_I n_I^I} = -\rho_1 c_1 \omega_1, \quad (20)$$

$$\sigma_{n_I \tau_I}^I = 0, \quad (21)$$

$$\sigma_{n_{II} n_{II}^I} - \sigma_{n_{II} n_{II}^{II}} = 0, \quad (22)$$

$$\sigma_{n_{II} \tau_{II}^I} - \sigma_{n_{II} \tau_{II}^{II}} = -\rho c_2^I \omega_1, \quad (23)$$

$$\sigma_{n^S \tau^S}^{II} = 0, \quad (24)$$

$$\sigma_{n^S n^S}^{II} = \sigma_{\tau \tau}^{II} \Big|_{\Sigma} = -\frac{\lambda_1}{c} [v_n \varepsilon], \quad (25)$$

где

$$n_1(-\sin \theta, -\cos \theta, 0), \quad \tau_1(\cos \theta, -\sin \theta, 0), \quad n_2(-\sin \gamma, -\cos \gamma, 0), \quad \tau_2(\cos \gamma, -\sin \gamma, 0).$$

Балансовые уравнения на поверхности S и на фронтах Σ_1, Σ_2 порожденных волн представляют собой:

- уравнение совместности напряжений и скорости волны на поверхности Σ_1 в проекции на нормаль к Σ_1 (20);
- условие совместности на поверхности Σ_2 в проекции на касательную к Σ_1 , то есть условие продольности волны Σ_1 и условие отсутствия касательных напряжений за ней (21);
- условие непрерывности нормальных напряжений на границе раздела двух материалов, а именно внешней среды и материала (22);
- условие совместности напряжений и скорости волны на фронте сдвиговой волны Σ_2 (23);
- условие отсутствия касательных напряжений на границе раздела двух материалов (24);
- условие динамической совместности на фронте дифрагированной волны Σ (25).

Полученные уравнения позволяют сделать вывод об отсутствии сдвиговой волны (21), (24) в материале препятствия, при этом интенсивность продольной волны в материале определяется

$$\omega_1 = \frac{\lambda}{c_{na\partial} \rho_1 c_1} \omega_{na\partial}, \quad \omega_1 = \omega_{na\partial} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1} \cdot \frac{\lambda^2}{(\lambda + 2\mu)(\lambda_1 + 2\mu_1)}}. \quad (26)$$

Из проведенного рассмотрения следует, что продольная дифрагированная волна вызывает в материале препятствия только продольную волну, интенсивность которой ω отличается от интенсивности дифрагированной волны коэффициентом, зависящим от отношения плотностей и отношения упругих параметров материала упругой среды и материала препятствия.

Область пространства, возмущенная дифрагированной волной в препятствии, определяется углом θ , величина которого зависит от отношения упругих параметров окружающей среды и материала препятствия в соответствии с законом Снелла.

Для оценки напряженного состояния в материале препятствия проведем вычисление второго инварианта девиатора тензора напряжений в материале для сравнения его с пределом пластичности в соответствии с условием Мизеса.

Скорость продольного деформирования упругого материала за фронтом дифрагированной волны порождает напряженное состояние, определяемое скачком напряжений аналогично (11):

$$-c_1 [\sigma_{ij}] = (\lambda_1 \delta_{ij} + 2\mu_1 n_i n_j) \omega_1, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (27)$$

Заметим, что в случае покоя материала перед фронтом дифрагированной волны $[\sigma_{ij}] = -\sigma_{ij}$.

С учетом последнего из (27) получим:

$$\sigma_{ij} = (\lambda_1 \delta_{ij} + 2\mu_1 n_i n_j) \frac{\omega_1}{c_1}.$$

Второй инвариант девиатора тензора напряжений определяется выражением

$$I_2^2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij} = \frac{2}{3}\nu_1(4\mu_1 - 3\lambda_1) \left(\frac{\omega_1}{c_1}\right)^2. \quad (28)$$

Предельная пластическая волна, распространяющаяся в материале препятствия, вызывает напряженное состояние, не удовлетворяющее условию пластичности Мизеса $I_2^2(0) = 2k^2$, становится упругой, и ее относительная интенсивность определяется из знания интенсивности скорости за фронтом волны.

Из знания интенсивности продольной дифрагированной волны в материале можно подсчитать интенсивность напряжений в материале препятствия через интенсивность внешней дифрагированной волны в текущий момент времени. Очевидно, интенсивность напряжений за продольной волной в материале препятствия будет определяться соотношением упругих параметров препятствия и окружающей среды:

$$\frac{I_{2npен}^2}{I_{2gfд}^2} = \frac{\lambda^2\mu_1(4\mu_1 - 3\lambda_1)}{\mu(4\mu - 3\lambda)(\lambda_1 + 2\mu_1)^2}. \quad (29)$$

Для частного случая идеальной упругой среды $\lambda = \mu$, $\lambda_1 = \mu_1$ интенсивность напряжений за дифрагированной волной в препятствии будет в три раза меньше, чем в окружающей среде.

$$\frac{I_{2npен}}{I_{2над}} = \frac{1}{3}.$$

Заключение. Из (28) следует, что величина второго инварианта девиатора тензора напряжений за порожденной волной в препятствии пропорциональна плотности внешней среды и обратно пропорциональна плотности материала препятствия, а также обратно пропорциональна скорости упругих волн препятствия, то есть чем «мягче» материал препятствия, тем большее напряженное состояние вызывает в нем дифрагированная волна.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Быковцев, Г. И.* О распространении волн в трехмерных упругопластических телах при условии полной пластичности / Г. И. Быковцев, А. А. Калужин, Л. Д. Кретьева // Инж. журнал МТТ. – 1967. – № 3. – С. 13–20.
- [2] *Вервейко, Н. Д.* Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара / Н. Д. Вервейко. – Воронеж : Воронежский госуниверситет, 1997. – 204 с.
- [3] *Гузъ, А. Н.* Дифракция упругих волн / А. Н. Гузъ, В. Д. Кубенко, М. А. Черевко. – Киев : Наукова думка, 1978. – 308 с.
- [4] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред. Т. 1 / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 448 с.
- [5] *Исраилов, М. Ш.* Динамическая теория упругости и дифракция волн / М. Ш. Исраилов. – М. : Издательство МГУ, 1999. – 208 с.
- [6] *Кольский, Г.* Волны напряжений в твердых телах / Г. Кольский. – М. : Изд. иностр. лит., 1955. – 190 с.
- [7] *Ландау, Л. Д.* Механика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – Изд. 2-е, перераб., дополн. – М. : Госуд. изд-во технико-теоретической литературы, 1954. – 795 с.
- [8] *Новацкий, В.* Теория упругости / В. Новацкий // М. : Мир, 1975. – 872 с.
- [9] *Томас, Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М. : Мир, 1964. – 308 с.
- [10] *Фриндлер, Ф.* Звуковые импульсы / Ф. Фриндлер. – М. : Иностран. лит., 1962. – 234 с.

Быкова Ксения Игоревна,

аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: ksynichka_b@mail.ru

Вервейко Николай Дмитриевич,

доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

K. I. Bykova, N. D. Verveyko

**INTENSITY OF THE STRESS-DEFORMED STATE BEHIND THE
DIFFRACTIONAL WAVE ON THE SPHERE AND BEHIND THE GENERATED
ELASTIC WAVE IN THE BALL**

Voronezh State University

Abstract. The article is devoted to the problem of diffraction of the ultimate plastic wave on the convex surface. The stress state satisfies the condition Mises plasticity behind the flat longitudinal wave. The spherical surface was chosen as obstacle. The intensity of diffractive wave was calculated due to the «transfer» equation along the curved beams, that is forming sphere:

$$\frac{\delta w}{c\delta t} - \Omega w = F.$$

In order to solve Cauchy problem we must know the geometric characteristics of the diffractive wave, the first and second main curvatures. Due to that we can calculate the average curvature $\Omega(\varepsilon, t)$. The geometric characteristics of the diffractive wave are the functions of the time t and parameter ε . Parameter ε characterizes the position of the current point on the diffractive wave. The parameter ε adopted for the surface coordinate of this point in the plane $\varphi = \text{const}$. The second coordinate φ is arbitrary due to the axisymmetric problem.

It is shown that intensity of diffractive wave exponentially decreases due to its distribution along the meridian of the sphere and due to geometric attenuation deployment diffractive front.

It is considered the calculation of the stress state in the case of the fall of the longitudinal wave in a ball of elastic material. The calculations are performed in the neighborhood of the forefront of the diffractive wave by the ray method. It is shown that longitudinal diffractive wave causes only longitudinal wave in the material of the obstacle. Its intensity differs from the intensity of the diffractive wave by coefficient, which depends on the ratio of the densities and on the ratio elastic parameters of the material elastic medium and material obstacle. The intensity of the diffractive wave in the space and in the material of the sphere decays with time at the place of contact of the diffractive and generated waves.

Keywords: plasticity, ideal, absolute, elasticity, stress, fluidity limit, coefficient, intensity, static definability.

REFERENCES

- [1] *Bykovcev, G. I.* The waves propagation in the threedimensional elastoplastic bodies assuming full plasticity / G. I. Bykovcev, A. A. Kaluzhin, L. D. Kretova // Eng. Journal MHB. – 1967. – № 3. – P. 13–20.
- [2] *Verveyko, N. D.* The ray theory of the elastoviscoplastic waves and hidroimpact waves / N. D. Verveyko. – Voronezh : Voronezh State University, 1997. – 204 p.
- [3] *Guz, A. N.* The diffraction of elastic waves / A. N. Guz, V. D. Kubenko, M. A. Cherevko. – Kiev : Naukova dumka, 1978. – 308 p.
- [4] *Ivlev, D. D.* The mechanics of plastic media, v. 1 / D. D. Ivlev // M. : PhysMatLit, 2001. – 448 p.
- [5] *Israilov, M. Sh.* The dynamic elastic theory and the wave diffraction / M. Sh. Israilov. – M. : Publishing house of Moscow State University, 1999. – 208 p.
- [6] *Kolskiy, G.* The stress waves in the the hard bodes / G. Kolskiy. – M. : Publishing house of foreign literature, 1955. – 190 p.
- [7] *Landau, L. D.* The continuum mechanics / L. D. Landau, E. M. Lifshic. – M. : State publishing house of technical and theoretical literature, 1954. – 795 p.
- [8] *Nowackiy, V.* The elastic theory / V. Nowackiy. – M. : World, 1975. – 872 p.

[9] *Tomas, T.* The plastic flow and destruction of the hard bodes / Т.Томас. – М. : World, 1964. – 308 p.

[10] *Frindler, F.* Sound pulses / F. Frindler. – М. : Foreign lit., 1962. – 234 p.

Bykova Ksenya Igorevna

Postgraduate Student, Department of the theoretical and apply mechanics, Voronezh State University, Voronezh

Vervevko Nikolay Dmitrievich

Doctor of Technical Science, Professor of the Department of the theoretical and apply mechanics, Voronezh State University, Voronezh

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СТЕРЖНЕВОГО ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА, ОСЛАБЛЕННОГО СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Аннотация. Рассматривается плоская задача механики разрушения для стержневого теплового элемента, сечение которого занимает область в виде круга радиуса R_1 и ослабленного системой произвольно размещенных прямолинейных трещин с концевыми зонами ослабленных межчастичных связей материала. Взаимодействие берегов в концевых зонах моделируется путем введения связей (сил сцепления) между берегами трещин в концевых зонах. Система “тепловыделяющий элемент и защитная оболочка” рассматривается при установившемся режиме. Предложена модель разрушения теплового элемента, основанная на рассмотрении зоны процесса разрушения вблизи вершины трещины с концевыми зонами. Принято, что зона процесса разрушения представляет собой слой конечной длины, с материалом частично нарушенными связями между его отдельными структурными элементами (концевая зона). Определение неизвестных параметров, характеризующих развитие трещин, сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши. С помощью процедуры алгебраизации система интегральных уравнений сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений, которая решается методом последовательных приближений. Из решения этой системы уравнений находятся нормальные и касательные усилия в концевых зонах предразрушения. Анализ предельного равновесия теплового элемента выполняется на основе деформационного критерия разрушения.

Ключевые слова: стержневой теплового элемент, защитная оболочка, система прямолинейных трещин, концевые зоны со связями между берегами, силы сцепления.

УДК: 539.375

Тепловыделяющие сборки часто изготавливают в виде пучка цилиндрических теплового элементов (ТВЭЛ), в зазорах между которыми параллельно оси элемента течет теплоноситель. В процессе работы ядерного реактора возможны различные повреждения ТВЭЛ, в частности, образования трещин в топливном стержне. В результате таких повреждений температура, напряжения и деформации могут превысить допустимые для ТВЭЛ значения, что может привести к аварийной ситуации.

Рассмотрим систему “ТВЭЛ – защитная оболочка” при установившемся режиме. Рассматривается задача термоупругости для системы “ТВЭЛ – защитная оболочка”, для случая, когда ТВЭЛ ослаблен системой произвольно размещенных прямолинейных трещин. Считается, что выполняются условия плоской деформации.

Пусть сечение рассматриваемого стержневого ТВЭЛ заполняет в плоскости $z = x + iy$ круг радиуса R_1 с центром в начале координат, ограниченную извне окружностью L_1 , а поперечное сечение защитного цилиндра заполняет в этой же плоскости кольцо, ограниченную извне

окружностью L_2 радиуса R_2 , центр которой совпадает с центром окружности L_1 , а изнутри – с окружностью L_1 .

Пусть твэл ослаблен N прямолинейными трещинами длиной $2\ell_{ok}$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Берега трещин вне концевых зон свободны от внешних нагрузок. В центрах трещин разместим начала локальных систем координат $x_k O_k y_k$, оси x_k которых совпадают с линиями трещин и образуют углы α_k с осью x (рис. 1).

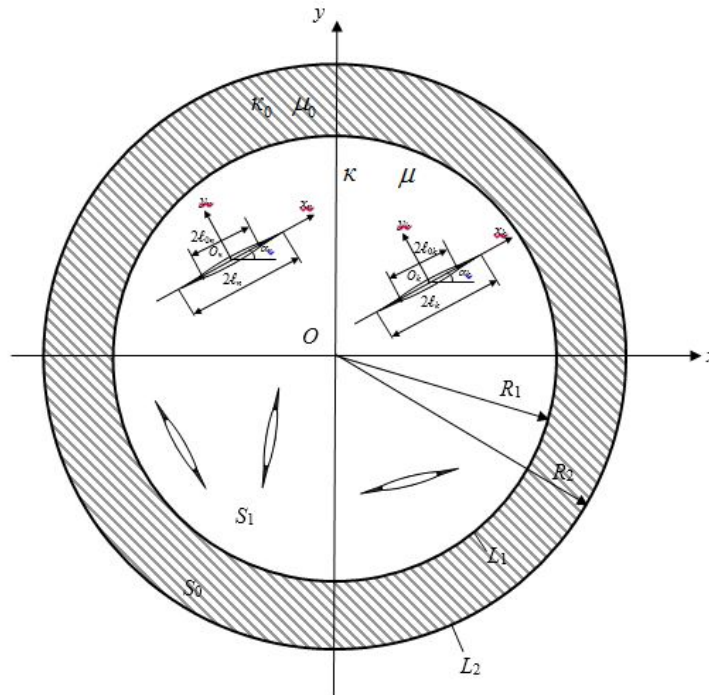


Рис. 1. Расчетная схема задачи механики разрушения тепловыделяющего элемента

Область твэла, ограниченную окружностью L_1 , обозначим через S , а область защитного покрытия через S_0 .

Материалы твэла и защитного цилиндра будем считать изотропными, однородными с неодинаковыми механическими свойствами. Обозначим их соответственно через κ, μ и κ_0, μ_0 . Здесь κ и κ_0 – постоянные Мусхелишвили для материалов твэла и защитной оболочки. А μ и μ_0 соответственно – модули сдвигов материалов.

Высокая концентрация напряжений вблизи вершин трещин в некоторых случаях приводит к разупрочнению материала, окружающего трещину. Это может проявляться в образовании зон ослабленных межчастичных связей материала. Анализ экспериментальных данных [1], а также условий равновесия и развития трещин с учетом взаимодействия ее берегов и зон разупрочнения приводит к модели трещины с концевой зоной (зоной предразрушения).

По мере повышения интенсивности тепловыделения в элементе в вершинах трещин будут возникать зоны предразрушения (концевые зоны), которые моделируются как области ослабленных межчастичных связей материала. Взаимодействие берегов этих областей моделируется путем введения между берегами связей, имеющих заданную диаграмму деформирования. Физическая природа таких связей и размеры зон предразрушения зависят от вида материала.

Межчастичные связи между берегами трещин в концевых зонах сдерживают развитие разрушения. В случае, когда размер концевой зоны трещины не является малым по сравнению с длиной трещины, приближенные методы оценки трещиноплощности твэлов, основанные на рассмотрении трещины с малой концевой зоной, неприменимы. В этих случаях [2], [3] необходимо прямое моделирование напряженного состояния в концевой зоне трещины с учетом деформационных характеристик связей.

Рассмотрим задачу механики разрушения для твэла ослабленного произвольно размещенной системой N прямолинейных трещин и скрепленного защитной оболочкой при условии, что удельная мощность внутренних источников тепла q в твэле распределена по объему равномерно. По мере увеличения интенсивности тепловыделения в связях, соединяющих берега трещин, будут возникать нормальные $q_{y_k}(x_k)$ и касательные $q_{x_k y_k}(x_k)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) усилия. Эти напряжения и размеры концевых зон заранее неизвестны и подлежат определению.

Граничные условия задачи на берегах трещин с концевыми зонами имеют вид

$$\sigma_{y_k} - i\tau_{x_k y_k} = 0 \quad \text{на} \quad L'_k, k = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

$$\sigma_{y_k} - i\tau_{x_k y_k} = q_{y_k} - iq_{x_k y_k} \quad \text{на} \quad L''_k,$$

где L'_k – совокупность свободных берегов трещин; L''_k – совокупность концевых зон трещин.

Краевые условия на круговых границах будут

$$\text{при } |z| = R_1 \quad \sigma_r - i\tau_{r\theta} = \sigma_r^0 - i\tau_{r\theta}^0, \quad (2)$$

$$v_r - iv_{r\theta} = v_r^0 - iv_{r\theta}^0;$$

$$\text{при } |z| = R_2 \quad \sigma_r^0 - i\tau_{r\theta}^0 = 0. \quad (3)$$

Основные соотношения рассматриваемой задачи необходимо дополнить уравнениями, связывающими раскрытие берегов концевых зон и усилия в соответствующих связях. Без потери общности эти уравнения представим в виде [3]

$$(v_k^+ - v_k^-) - i(u_k^+ - u_k^-) = C(x_k, \sigma_k)(q_{y_k}(x_k) - iq_{x_k y_k}(x_k)), \quad (4)$$

$$\sigma_k = \sqrt{q_{y_k}^2 + q_{x_k y_k}^2} \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Функция $C(x_k, \sigma_k)$ представляет собой эффективную податливость связей, зависящую от натяжения. σ_k – модуль вектора напряжений в соответствующих связях, $(v_k^+ - v_k^-)$ – нормальная связь, $(u_k^+ - u_k^-)$ – касательные составляющие раскрытие берегов концевых зон k -той трещины. При использовании комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили [4] рассматриваемая задача сводится к отысканию двух пар комплексных функций $\Phi_j(z)$ и $\Psi_j(z)$ ($j = 0, 1$) комплексного переменного $z = x + iy$, аналитических в областях S_j ($j = 0, 1$) и удовлетворяющим граничным условиям

$$\Phi_0(\tau_2) + \overline{\Phi_0(\tau_2)} - \frac{\tau_2^2}{R_2^2} \left[\frac{R_2}{\tau_2} \Phi_0'(\tau_2) + \Psi_0(\tau_2) \right] = 0 \quad \text{на} \quad L_2, \quad (5)$$

$$\Phi_0(\tau_1) + \overline{\Phi_0(\tau_1)} - \frac{\tau_1^2}{R_1^2} \left[\frac{R_1}{\tau_1} \Phi_0'(\tau_1) + \Psi_0(\tau_1) \right] = \quad \text{на} \quad L_1,$$

$$= \Phi_1(\tau_1) + \overline{\Phi_1(\tau_1)} - \frac{\tau_1^2}{R_1^2} \left[\frac{R_1}{\tau_1} \Phi_1'(\tau_1) + \Psi_1(\tau_1) \right] + \frac{q_* \tau_1 \bar{\tau}_1}{32}, \quad (6)$$

$$\kappa_0 \overline{\Phi_0(\tau_1)} - \Phi_0(\tau_1) + \frac{\tau_1^2}{R_1^2} \left[\frac{R_1}{\tau_1} \Phi_0'(\tau_1) + \Psi_0(\tau_1) \right] = \quad \text{на} \quad L_1,$$

$$= \frac{\mu_0}{\mu} \left\{ \overline{\kappa \Phi_1(\tau_1)} - \Phi_1(\tau_1) + \frac{\tau_1^2}{R_1^2} \left[\frac{R_1^2}{\tau_1} \Phi_1'(\tau_1) + \Psi_1(\tau_1) \right] - \frac{q_* \tau_1 \bar{\tau}_1}{32} \right\};$$

на берегах трещин с концевыми зонами $|x_k| \leq \ell_k, y_k = 0$

$$\Phi_1(t_n) + \overline{\Phi_1(t_n)} + t_n \overline{\Phi_1'(t_n)} + \overline{\Psi_1(t_n)} + \frac{3q_* t_n^2}{32} = a. \quad (7)$$

Здесь $q_* = \frac{\alpha E q}{\lambda}$; λ – коэффициент теплопроводности топлива; $a = 0$ на берегах трещин; $a = q_{y_k} - i q_{x_k y_k}$ на прослойках ослабленных связей материала (концевые зоны); $\tau_2 = R_2 e^{i\theta}$; $\tau_1 = R_1 e^{i\theta}$; t_n – аффикс точек берегов n -ой трещины с концевыми зонами; α – коэффициент линейного температурного расширения материала; E – модуль упругости материала топлива.

Под действием внутренних источников тепла за счет разности упругих свойств материалов твэла и защитной оболочки на твэл со стороны оболочки действует некоторая самоуравновешенная система сил. Считая эту нагрузку на твэл заданной, найдем комплексные потенциалы $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$.

Согласно краевым условиям (6) и (7) для определения потенциалов $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ имеем на контуре L_1 граничные условия

$$\Phi_1(t) + \overline{\Phi_1(t)} - \frac{t^2}{R_1^2} \left[\frac{R_1^2}{t} \Phi_1'(t) + \Psi_1(t) \right] + \frac{q_* t \bar{t}}{32} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta} \quad \text{на } L_1, \quad (8)$$

на отрезках $y_k = 0, |x_k| \leq \ell_k$

$$\Phi_1(t_n) + \overline{\Phi_1(t_n)} + t_n \overline{\Phi_1'(t_n)} + \overline{\Psi_1(t_n)} + \frac{3q_* t_n^2}{32} = a. \quad (9)$$

Решение краевой задачи (8)–(9) ищем в виде [5]

$$\Phi_1(z) = \Phi_{11}(z) + \Phi_{12}(z);$$

$$\Psi_1(z) = \Psi_{11}(z) + \Psi_{12}(z); \quad (10)$$

$$\Phi_{11}(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \frac{g_k(t) dt}{t - z_k};$$

$$\Psi_{11}(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N e^{-2i\alpha_k} \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \left[\frac{\overline{g_k(t)}}{t - z_k} - \frac{\bar{T}_k e^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2} g_k(t) \right] dt; \quad (11)$$

$$T_k = t e^{i\alpha_k} + z_k^0; \quad z_k^0 = x_k^0 + i y_k^0; \quad z_k = e^{-i\alpha_k} (z - z_k^0);$$

$$\frac{i(k+1)}{2\mu} g_k(x) = \frac{\partial}{\partial x} [u_k^+ - u_k^- + i(v_k^+ - v_k^-)] \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Потенциалы $\Phi_{12}(z)$ и $\Psi_{12}(z)$ регулярны в сплошном круге радиуса R_1 , они должны быть определены из решения для сплошного круга согласно краевому условию (8), а для определения неизвестных функций $g_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) служат граничные условия (9) на отрезках $y_k = 0, |x_k| \leq \ell_k$.

Удовлетворяя функциями (10)–(11) граничным условиям на берегах трещин с концевыми зонами, получим систему сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $g_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, N$):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \frac{g_n(t) dt}{t - x_n} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \left[g_k(t) K_{nk}(t, x_n) + \overline{g_k(t)} L_{nk}(t, x_n) \right] dt +$$

$$+ \frac{3q_* x_n^2}{32} + \Phi_{12}(x_n) + \overline{\Phi_{12}(x_n)} + x_n \overline{\Phi'_{12}(x_n)} + \overline{\Psi_{12}(x_n)} = a \quad (12)$$

$$|x_n| \leq \ell_n \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

$$\text{Здесь } K_{nk}(t, x) = \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left[\frac{1}{T_k - X_n} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{\overline{T_k} - \overline{X_n}} \right];$$

$$L_{nk}(t, x) = \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left[\frac{1}{\overline{T_k} - \overline{X_n}} + \frac{T_k - X_n}{(\overline{T_k} - \overline{X_n})^2} e^{-2i\alpha_n} \right];$$

$$X_n = x e^{i\alpha_n} + z_n^0.$$

Граничное условие (8) позволяет получить вспомогательную граничную задачу для сплошного круга, решение которой получено методом Н. И. Мусхелишвили [4].

К системе сингулярных интегральных уравнений (12) следует добавить дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи

$$\int_{-\ell_n}^{\ell_n} g_n(t) dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (13)$$

Для неизвестных коэффициентов A_{2k} получена бесконечная система алгебраических уравнений, связанная с системой сингулярных интегральных уравнений (12).

Система комплексных сингулярных интегральных уравнений (12) при дополнительных условиях (13) с помощью процедуры алгебраизации [5], [6] сводится к системе $N \times M$ алгебраических уравнений для определения $N \times M$ неизвестных $g_n^m(t_m)$ ($n = 1, 2, \dots, N$; $m = 1, 2, \dots, M$):

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N \ell_k \left[g_k^0(t_m) R_{nk}(\ell_k t_m, \ell_n x_r) + \overline{g_k^0(t_m)} S_{nk}(\ell_k t_m, \ell_n x_r) \right] = f_n(x_r)$$

$$(n = 1, 2, \dots, N; r = 1, 2, \dots, M - 1), \quad (14)$$

$$\sum_{m=1}^M g_n^0(t_m) = 0$$

$$\text{Здесь } t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi \quad (m = 1, 2, \dots, M), \quad x_r = \cos \frac{\pi r}{M} \quad (r = 1, 2, \dots, M-1).$$

$$R_{nk}(t, x) = K_{nk}(t, x) - \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left[\frac{X_n \overline{T_k}^2}{1 - X_n \overline{T_k}} + \frac{\overline{X_n}^2 T_k - 2\overline{X_n} + \overline{T_k}}{(1 - T_k \overline{X_n})^2} + \right.$$

$$\left. + e^{-2i\alpha_n} \frac{2X_n (T_k \overline{T_k} - 1) + T_k^2 (\overline{X_n} + \overline{T_k}) (\overline{X_n} T_k - 3) + 4T_k}{(1 - T_k \overline{X_n})^3} \right];$$

$$S_{nk}(t, x) = L_{nk}(t, x) - \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left[\frac{T_k \overline{X_n}}{1 - T_k \overline{X_n}} + \frac{X_n^2 \overline{T_k} - 2X_n + T_k}{(1 - X_n \overline{T_k})^2} + \frac{T_k^2 (X_n - T_k) e^{-2i\alpha_n}}{(1 - T_k \overline{X_n})^2} \right].$$

Перейдя в (14) к комплексно сопряженным значениям, получаем еще $N \times M$ алгебраических уравнений.

Полученные алгебраические системы уравнений не являются пока замкнутыми. Для замыкания алгебраических систем необходимо добавить условия конечности напряжений у вершин трещин (условия разрешимости краевой задачи).

Условия конечности напряжений в окрестности концов трещин можно представить в виде

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m g_n^0(t_m) \cdot \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N); \quad (15)$$

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_n^0(t_m) \cdot \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0.$$

Совокупность $2 \times N$ дополнительных уравнений позволяет определить размеры концевых зон (прослоек ослабленных связей материала).

В правые части системы (14) входят неизвестные значения нормальных $q_{y_k}(x_k)$ и касательные $q_{x_k y_k}(x_k)$ напряжений ($k = 1, 2, \dots, N$) в узловых точках соответствующей зоны ослабленных межчастичных связей материала (концевых зон). Для их нахождения используем дополнительные уравнения (4). Используя полученное решение задачи, дополнительные уравнения (4) представим в виде

$$g_k(x_k) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx_k} [C(x_k, \sigma_k)(q_{y_k}(x_k) - iq_{x_k y_k}(x_k))] \quad (16)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N).$$

Эти комплексные дифференциальные уравнения служат для нахождения неизвестных напряжений $q_{y_k}(x_k)$ и $q_{x_k y_k}(x_k)$ в связях между берегами зон ослабленных межчастичных связей материала. Для построения недостающих уравнений, служащих для нахождения напряжений в связях между берегами концевых зон, потребуем выполнения уравнений (16) в узловых точках, содержащихся в соответствующей зоне предразрушения. В результате получим еще N системы из $M_{1,k}$ уравнений, каждая для определения приближенных значений $q_{y_k}(t_{m,k})$ и $q_{x_k y_k}(t_{m,k})$. При этом использует метод конечных разностей.

Из-за неизвестных длин прослоек ослабленных связей объединенная алгебраическая система уравнений нелинейна даже при линейно-упругих связях. Для ее решения использовали метод последовательных приближений. В каждом приближении алгебраическая система решалась методом Гаусса с выбором главного элемента. В случае нелинейного закона деформирования связей для нахождения напряжений в зонах ослабленных межчастичных связей материала использовали также итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [7]. Ее численное решение позволяет найти усилия и размеры прослоек ослабленных связей (зоны предразрушения), значения $g_k^0(\tau_m)$ ($k = 1, 2, \dots, N$; $m = 1, 2, \dots, M$), определяющие функции $g_k(x)$. Зная функции $g_k(x)$, можно найти напряженно-деформированное состояние твэла и защитной оболочки. После нахождения искомым функций $g_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) вычислялось раскрытие трещины у вершин любой из трещин по соотношению

$$-\frac{\kappa+1}{2\mu} \int_{-\ell_{0k}}^{\ell_k} g_k(x) dx = v_k(\ell_{0k}, 0) - iu_k(\ell_{0k}, 0),$$

где принято $v_k(\ell_{0k}, 0) = v^+(\ell_{0k}, 0) - v^-(\ell_{0k}, 0)$;

$$u_k(\ell_{0k}, 0) = u^+(\ell_{0k}, 0) - u^-(\ell_{0k}, 0).$$

Теперь, используя замену переменной интегрирования и заменяя интеграл с помощью квадратурной формулы Гаусса суммой, найдем

$$-\frac{\kappa + 1}{2\mu} \frac{\pi \ell_k}{M} \sum_{m=1}^{M_{1k}} g_k(t_m) = v_k(\ell_{0k}, 0) - i u_k(\ell_{0k}, 0), \quad (17)$$

где M_{1k} – число узловых точек, принадлежащих отрезку $(-\ell_k, -\ell_{0k})$

Из соотношения (17), находим

$$v_k(\ell_{0k}, 0) = -\frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{\pi \ell_k}{M} \sum_{m=1}^{M_{1k}} v_k(t_m);$$

$$u_k(\ell_{0k}, 0) = -\frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{\pi \ell_k}{M} \sum_{m=1}^{M_{1k}} u_k(t_m)$$

Тогда, для модуля вектора перемещений на берегах трещины при $x = \ell_{0k}$ ($k = 1, 2, \dots, N$), получим

$$V_{0k} = \sqrt{(v_k^+ - v_k^-)^2 + (u_k^+ - u_k^-)^2} = \frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{\pi \ell_k}{M} \sqrt{A^2 + B^2},$$

где $A = \sum_{m=1}^{M_{1k}} v_k(t_m)$; $B = \sum_{m=1}^{M_{1k}} u_k(t_m)$.

В результате расчетов определялись размеры зон предразрушения в зависимости от удельной мощности внутренних источников тепла, хрупкой прочности материала σ_* , длин трещин ℓ_{0k}/R_2 и параметра R_1/R_2 . С помощью критерия критического раскрытия трещины найдено условие, определяющее предельный уровень мощности внутренних источников тепла для окрестности каждой трещины.

Значение удельной мощности внутренних источников тепла q_{*k} , вызывающей рост k -той трещины, определяется из соотношения

$$\frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{\pi \ell_k}{M} \sqrt{A^2 + B^2} = \delta_c. \quad (18)$$

Совместное решение нелинейных систем и условий типа (17) для каждой трещины позволяет определить критическую зависимость интенсивности внутренних источников тепла, при которой происходит рост k -той трещины, размеры зон предразрушения для предельного состояния и значения функций $v_k(t_m)$, $u_k(t_m)$ ($n = 1, 2, \dots, N$; $m = 1, 2, \dots, M$).

Критическим значением удельной мощности внутренних источников тепла для твэла с защитным покрытием будет минимальное среди q_{*k} ($k = 1, 2, \dots, N$),

$$q_*^c = \min \{q_{*k}\} \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Витлицкий, П. М. Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения / П. М. Витлицкий, В. В. Панасюк, С. Я. Ярема // Проблемы прочности. – 1973. – № 10. – С. 3–18.
- [2] *The special issue: Cohesive models* // Eng. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 70. – № 14. – P. 1741–1987.
- [3] Мирсалимов, В. М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии тещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары / В. М. Мирсалимов // ПММ. – 2007. – Т. 71. – Вып. 1. – С. 132–151.

- [4] *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [5] *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – Киев : Наукова думка, 1976. – 444 с.
- [6] *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [7] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М.; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

Исмаилова Рена Ашраф кызы,

аспирант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

e-mail: irakon63@hotmail.com

R. A. Ismayilova

STATE OF STRESS ROD FUEL ELEMENT WEAKENED BY SYSTEM OF CRACKS

Institute Mathematics and Mechanics NAN of Azerbaijan

Abstract. The plane problem of mechanics of fracture for rod fuel element which sections are occupied with area in the form of a circle of radius R_1 and weakened by system of any way placed rectilinear cracks with end zones of the weakened interpartial bonds of a material is considered. Interaction of face in end zones is modelled by introduction of bonds (cohesive forces) between faces of cracks in end zones. The system “fuel element and a protective cover” is considered at the established mode. The fracture model fuel element, based on consideration of a zone of process of fracture near to top of a crack with end zones is offered. It is accepted that the zone of process of fracture represents a layer of finite length, with a material partially broken bonds between its separate structural elements (end zone). Definition of the unknown parametres characterising development of cracks, is reduced to the system singular integrated equations with a kernel of type of Koshi. By means of procedure algebraization the system of the integrated equations is reduced to system of the nonlinear algebraic equations which dares a method consecutive approximations. From the solution of this system of the equations are normal and tangents the tractions in end zones of prefracture. The analysis of limiting balance fuel element is carried out on the basis of deformation criterion of fracture.

Keywords: rod fuel element, a protective cover, system of rectilinear cracks, end zones with bonds between faces, cohesive forces.

REFERENCES

- [1] *Vitvitskii, P. M.* Plastic deformation in the vicinity of a crack and the criteria of fracture a review / P. M. Vitvitskii, V. V. Panasyuk, S. Ya. Yarema // *Strength of Materials*. – 1973. – Vol.5. – Issue 2. – P. 135–151.
- [2] *The special issue: Cohesive models* // *Eng. Fract. Mech.* – 2003. – Vol. 70. – № 14. – P. 1741–1987.
- [3] *Mirsalimov, V. M.* The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair / V. M. Mirsalimov // *J. of Applied Math and Mech.* – 2007. – Vol. 71. – P. 120–136.
- [4] *Muskhelishvili, N. I.* Some basic problems in the Mathematical Theory of Elasticity / N. I. Muskhelishvili. – Amsterdam : Kluwer, 1977. – 707 p.
- [5] *Panasyuk, V. V.* Stress Distribution Around Cracks in Plates and Shells / V. V. Panasyuk, M. P. Savruk, A. P. Datsyshin. – Kiev : Naukova Dumka, 1976 – 444 p.
- [6] *Mirsalimov, V. M.* Non-one-dimensional Elastoplastic Problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987 – 256 p.
- [7] *Il'yushin, A. A.* Plasticity / A. A. Il'yushin. – M. ; L. : Gostekhizd, 1948. – 376 p.

Ismayilova, Rena Ashraf qizi

Postgraduate student, Institute of Mathematics and Mechanics NAN of Azerbaijan

С. А. Горшков, Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин

РАСЧЕТ ПЛОСКОГО ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ И РАЗГРУЗКИ

Дальневосточный федеральный университет

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Аннотация. В работе исследуется процесс формирования поля плоских температурных напряжений при нагреве тонкой заземленной пластины равномерным полем температуры. Математически физический процесс предлагается рассматривать как квазистатический процесс равномерного теплового расширения прямоугольной пластинки из термоупругопластического материала. В качестве математической модели материала выбирается среда типа Прандтля-Рейса, обобщенная на случай учета процессов теплопередачи. Защемление пары противоположных сторон пластины гарантирует выход напряженного состояния на поверхность нагружения. Условие пластичности принимается в форме Мизеса при учете зависимости предела текучести от температуры. Принцип максимума диссипации энергии Мизеса позволяет считать поверхность нагружения пластическим потенциалом и гарантирует выполнение ассоциированного закона пластического течения. В итоге, поставленная краевая задача сводится к решению систем дифференциальных уравнений в частных производных относительно параметров напряженно-деформированного состояния. Интегрирование полученных систем уравнений осуществлялось численно, для чего была построена конечно-разностная схема. По результатам численного счета определяются границы зон необратимого деформирования и разгрузки. После окончательного остывания пластины определен итоговый уровень остаточных напряжений и деформаций. Численные результаты представлены графически.

Ключевые слова: термоупругость, термопластичность, температурное напряжение, предел текучести, остаточное напряжение, остаточная деформация

УДК: 539.374

Введение. Процесс формообразования за счет необратимого деформирования при изменяющемся поле температуры требует предварительного расчета средствами математического моделирования итоговой геометрии формуемого изделия, времени формования и остаточных напряжений. Проведение таких расчетов встречает значительные трудности, связанные со следующими обстоятельствами: 1. определение неизвестной границы зоны необратимого деформирования. 2. определение разгрузочного состояния.

Поступила 15.08.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания вузам на выполнение НИР (2014/292) и гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-33064-мол_а_вед „Развитие моделей и методов механики необратимого деформирования для описания процессов формоизменения материалов с нелинейными теплофизическими и реологическими свойствами“).

В представленной работе в рамках теории идеальной термоупругопластичности с пределом текучести, зависящим от температуры, исследованы особенности изменения параметров напряженно-деформированного состояния пластинки вследствие равномерного нагрева и последующего охлаждения. На основе численного метода конечных разностей разработан подход к определению необратимых температурных деформаций в двумерном случае при смешанных граничных условиях.

Определяющие соотношения термоупругопластичности. За основу термоупругопластического поведения материала примем модель малых деформаций (типа Прандтля–Рейса) [1]:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

u_i — вектор перемещений. Деформации e_{ij} представляются в виде суммы термоупругих e_{ij}^e и пластических e_{ij}^p составляющих:

$$e_{ij} = e_{ij}^p + e_{ij}^e \quad (2)$$

В наиболее простом случае линейного изотропного тела, зависимость между термоупругими деформациями и напряжениями задается соотношениями Дюгамеля–Неймана [1]:

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - m\Theta)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \quad m = \alpha(3\lambda + 2\mu) \quad (3)$$

где λ , μ — параметры Ляме материала; $m = \alpha(3\lambda + 2\mu)$; α — коэффициент линейного теплового расширения; δ_{ij} — символ Кронекера; $\Theta = T - T_0$, T и T_0 текущая и референциальная температуры соответственно. В условиях медленного изменения температурного поля, напряжения материала определяются системой уравнений равновесия:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (4)$$

При постепенном увеличении температуры тепловое расширение тела может инициировать процесс пластического течения (необратимого деформирования). Согласно ассоциированному закону пластического течения и в условиях принятия принципа максимума Мизеса [2], приращение пластической деформации пропорционально производной поверхности нагружения по напряжениям с точностью до положительного множителя $d\lambda$, определяемого при решении конкретной краевой задачи:

$$de_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5)$$

В качестве поверхности нагружения f , выберем условие пластичности Мизеса [2]:

$$f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 8k^2(T) \quad (6)$$

где σ_i — главные напряжения, $k(T)$ — предел текучести материала. В качестве функции предела текучести от температуры выбрана линейная зависимость

$$k = k_0 \left(1 - \frac{T}{T_m} \right) \quad (7)$$

где k_0 — референциальный предел текучести, T_m — температура плавления. Таким образом, для определения напряженно-деформированного состояния материала в случае пластического течения необходимо решить совместную систему уравнений (4) и (6). Преобразуем (1) с учетом (2):

$$e_{ij}^e = e_{ij} - e_{ij}^p = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - e_{ij}^p \quad (8)$$

Для приращения пластической деформации имеем

$$de_{ij}^p = e_{ij}^p - \tilde{e}_{ij}^p \quad (9)$$

где \tilde{e}_{ij}^p — пластические деформации, вычисленные в предыдущий момент времени. С другой стороны согласно закону течения (5) ассоциированному с поверхностью нагружения (6) можно получить:

$$de_{ij}^p = d\lambda(3\sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}) \quad (10)$$

Из (10) следует условие пластической несжимаемости материала

$$de_{11}^p + de_{22}^p + de_{33}^p = 3d\lambda(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} - \sigma_{kk}) = 0 \quad (11)$$

Полагая, что существует момент времени, при котором $\tilde{e}_{ij}^p = 0$ из (9) получим $de_{ij}^p = e_{ij}^p$, т.е. пластическая деформация согласно (11) в следующий момент времени удовлетворяет соотношению

$$e_{ii}^p = 0 \quad (12)$$

откуда следует равенство:

$$e_{ii} = e_{ii}^e = u_{i,i} \quad (13)$$

Подставив (11) в (10), получим:

$$e_{ij}^p = de_{ij}^p + \tilde{e}_{ij}^p = d\lambda(3\sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}) + \tilde{e}_{ij}^p \quad (14)$$

Далее из (9) с учетом (14) будет следовать

$$e_{ij}^e = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - d\lambda(3\sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}) + \tilde{e}_{ij}^p \quad (15)$$

Подставив значения e_{ij}^e из (15) и e_{kk}^e из (13) в соотношения для напряжений (3), получим выражения для компонент тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = (\lambda u_{k,k} - m\Theta)\delta_{ij} + 2\mu \left(\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - d\lambda(3\sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}) + \tilde{e}_{ij}^p \right) \quad (16)$$

Группируя слагаемые, перепишем (16) в виде:

$$\sigma_{ij}(1 + 6\mu d\lambda) = 2\mu d\lambda \sigma_{kk} \delta_{ij} + (\lambda u_{k,k} - m\Theta)\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + 2\mu \tilde{e}_{ij}^p \quad (17)$$

Для следа тензора напряжений несложно получить выражение:

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)u_{k,k} - 3m\Theta \quad (18)$$

Тогда соотношения (17) с учетом (18) примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= ((\lambda + L)u_{k,k} - m\Theta)\delta_{ij} + M(u_{i,j} + u_{j,i} + 2\tilde{e}_{ij}^p) \\ L(d\lambda) &= \frac{4\mu^2 d\lambda}{(1 + 6\mu d\lambda)} \quad M(d\lambda) = \frac{\mu}{(1 + 6\mu d\lambda)} \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя (19) в (3), получим уравнения равновесия относительно компонент вектора перемещений

$$(\lambda + L + M)u_{k,ki} + u_{k,k}L_{,i} - m\Delta T_{,i} + M(u_{i,kk} + 2\tilde{e}_{ik,k}^p) + M_{,k}(u_{i,k} + u_{k,i} + 2\tilde{e}_{ik}^p) = 0 \quad (20)$$

Постановка краевой задачи термоупругопластичности в условиях плоского напряженного состояния. Рассмотрим тонкую квадратную пластинку с длиной стороны 1. Стороны пластины параллельные оси абсцисс закреплены:

$$\begin{aligned} u_x(x, 0) = 0, \quad u_x(x, 1) = 0 \\ u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 1) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Стороны параллельные оси ординат свободны от нагружающих усилий:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = 0 \\ \sigma_{xx}(1, y) = 0, \quad \tau_{xy}(1, y) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Температурное поле пластины равномерно и медленно изменяется с течением времени. В таком случае можно принять гипотезу о плоском напряженном состоянии, т.е.

$$\begin{aligned}\sigma_{iz} &= 0 \\ e_{iz}^p &= 0\end{aligned}\quad (23)$$

Оставшиеся компоненты тензора напряжений согласно (3) записываются в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (\lambda + L)u_{k,k} - m\Delta T + 2Mu_{x,x} + 2M\tilde{e}_{xx}^p \\ \sigma_{yy} &= (\lambda + L)u_{k,k} - m\Delta T + 2Mu_{y,y} + 2M\tilde{e}_{yy}^p \\ \tau_{xy} &= M(u_{x,y} + u_{y,x}) + 2M\tilde{e}_{xy}^p\end{aligned}\quad (24)$$

Величину $u_{k,k} = (u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z})$ определим из условия (23):

$$(\lambda + L)(u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z}) - m\Delta T + 2Mu_{z,z} = 0\quad (25)$$

Из (25) найдем $u_{z,z}$:

$$u_{z,z} = \frac{m\Delta T - (\lambda + L)}{(\lambda + L + 2M)}(u_{x,x} + u_{y,y})\quad (26)$$

Тогда след тензора деформаций запишется в виде

$$u_{k,k} = \frac{m\Delta T + 2M}{(\lambda + L + 2M)}(u_{x,x} + u_{y,y})\quad (27)$$

Таким образом результирующая система дифференциальных уравнений в частных производных при условии нулевого градиента температур примет вид

В термоупругой области и области разгрузки

$$\begin{cases} (\lambda + L + M)u_{k,kx} + u_{k,k}L_{,x} + (M(u_{x,k} + u_{k,x} + 2\tilde{e}_{xk}^p))_{,k} = 0 \\ (\lambda + L + M)u_{k,ky} + u_{k,k}L_{,y} + (M(u_{y,k} + u_{k,y} + 2\tilde{e}_{yk}^p))_{,k} = 0 \\ d\lambda = 0 \end{cases}\quad (28)$$

В области пластического течения

$$\begin{cases} (\lambda + L + M)u_{k,kx} + u_{k,k}L_{,x} + (M(u_{x,k} + u_{k,x} + 2\tilde{e}_{xk}^p))_{,k} = 0 \\ (\lambda + L + M)u_{k,ky} + u_{k,k}L_{,y} + (M(u_{y,k} + u_{k,y} + 2\tilde{e}_{yk}^p))_{,k} = 0 \\ \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2 = 4k^2 \end{cases}\quad (29)$$

Построение и анализ численного решения. Поскольку, температура в каждой точке пластинки — величина одинаковая и одновременно с этим предполагается медленное изменение ее уровня, временные интервалы удобно отождествлять с приращением температуры dT . Пусть в начальный момент времени температура пластинки $T = T_0$. Задав, малое приращение dT , вычислим напряженно-деформированное состояние пластины. Решив систему уравнений (28) получим численные значения перемещений u_i . По найденным перемещениям строятся поля напряжений согласно (19). Далее в каждом узле проверяется условие пластичности (6). В случае невыполнения условия пластичности ни в одном из узлов, рассчитываем напряженно-деформированное состояние для следующего приращения температуры. Таким образом, можно определить изменение напряженно-деформированного состояния пластины в условиях термоупругого равновесия.

При определенном уровне температуры $T = T_1$ в некоторых узлах пластины впервые выполнится условие пластичности (6), что означает начало процесса пластического течения. Для таких узлов следует интегрировать систему разрешающих уравнений (29). Численно разрешив полученную систему дифференциальных уравнений в частных производных получим значения перемещений и множителя $d\lambda$. По известным значениям $d\lambda$ и напряжениям из ассоциированного закона (10) определяется приращение пластической деформации. Таким образом, перед следующим приращением температуры в некоторых узлах будет присутствовать накопленная деформация \tilde{e}_{ij}^p . На новом временном шаге заново решаем систему уравнений (28) с целью выявить узлы, в которых вновь выполняется условие пластичности (6). После определения таких узлов для них заново решается система (28), для остальных

узлов решается система (29). Такая последовательность вычислений обеспечивает универсальный подход к вычислению напряженно-деформированного состояния. В зависимости от приращения температуры имеем, либо процесс накопления необратимых деформаций, либо процесс разгрузки, например при отрицательном приращении температуры, когда за счет накопленных деформаций на предыдущем шаге, перестает выполняться условие пластичности на следующем шаге. На рис. 1 и рис. 2 представлены остаточные напряжения при полном остывании пластины.

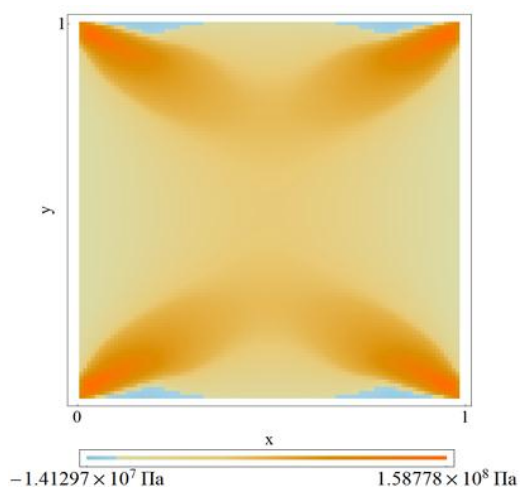


Рис. 1. Распределение остаточного напряжения σ_{xx}

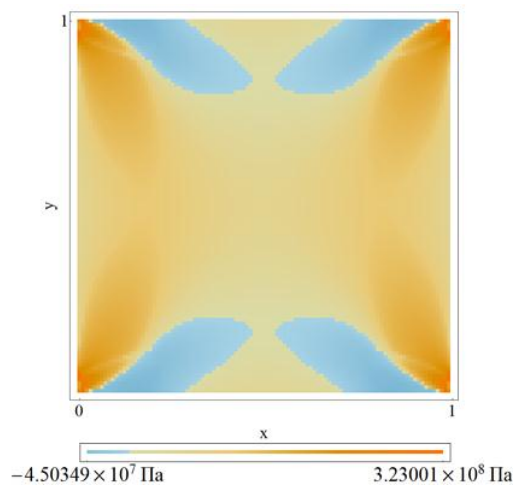


Рис. 2. Распределение остаточного напряжения σ_{yy}

Стоит отметить высокую скорость сходимости численного решения по пространственным координатам за счет использования второго порядка точности при аппроксимации частных производных от компонент вектора перемещений. Для пространственной сетки использовалось $n = 99$ узлов. Расчеты показали, что при более крупном разбиении $n = 49$ длина вектора перемещений отличается примерно на 2% от такой же величины при более мелком разбиении с размером сетки $n = 99$. Изменение приращения температуры показало значительную зависимость алгоритма вычислений от значения dT . При построении графиков использовалось удовлетворительное значение $dT = 5$, при котором граница пластического течения продвигалась на расстояние 1 узла от области с накопленными деформациями. Максимальный уровень температуры при расчете $T_2 = 500$, минимальный уровень при котором впервые происходит пластическое течение $T_1 = 300$. В расчетах использовались параметры стали марки 09ГС2.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Боли, Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М. : Мир, 1964. – 512 с.
- [2] Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
- [3] Коваленко, А. Д. Развитие исследований в области термоупругости, термопластичности, термовязкоупругости / А. Д. Коваленко // Прикладная механика. – 1969. – Т. 5. – № 12. – С. 1–16.
- [4] Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.

Горшков Сергей Александрович,
бакалавр, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

e-mail: iceberg93@yul.ru

Дац Евгений Павлович,
магистр, ассистент, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса,
г. Владивосток

e-mail: dats@dvo.ru

Мурашкин Евгений Валерьевич,
кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им.
А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

e-mail: murashkin@ipmnet.ru

S. A. Gorshkov, E. P. Dats, E. V. Murashkin

CALCULATION OF PLANE STRESS FIELD UNDER PLASTIC FLOW AND UNLOADING

Far East Federal University

Vladivostok State University of Economics and Service

Institute For Problems in Mechanics n.a. A. Yu. Ishlinskiy RAS

Abstract. The present study is devoted to the investigation of the process of formation of the 2-dimensional thermal stresses fields during heating of the clamped thin plate by the uniform temperature field. This physical process is mathematically proposed as a quasi-static process of the uniform thermal expansion of rectangular plate made of thermoelastoplastic material. The generalized Prandtl-Reuss thermoelastoplastic model is used. The clamped pair of opposite sides of the plate ensures yield stress state. Yield condition is taken by the von Mises form with yield stress depend on temperature. The principle of maximum dissipation energy suggests Mises loading surface as a plastic potential and guarantees the associated law of plastic flow. Thus, the boundary value problem is reduced to partial differential equations systems with respect to the stress-strain state parameters. Then, the resulting system is numerically integrated. The finite-difference scheme is developed. The border of irreversible deformation domain and unloading domain are computed according to the numerical results. The level of residual stresses and strains are calculated after the final cooling plate. Numerical results are graphically presented.

Keywords: thermoelasticity, thermoplasticity, thermal stress, yield point, residual stress, residual strain

REFERENCES

- [1] *Boley, B.* Theory of Thermal Stresses / B. Boley, J. Weiner. – M. : Mir, 1964. 512 p.
- [2] *Bykovtsev, G. I.* Theory of Plasticity / G. I. Bykovtsev, D. D. Ivlev. – Vladivostok : Dalnauka, 1998. 528 p.
- [3] *Kovalenko, A. D.* Development of Research in The Field of Thermoelasticity, Thermoplasticity, Thermoviscoelasticity / A. D. Kovalenko // Applied Mechanics. – 1969. – Vol. 5. – № 12. – P. 1–16.
- [4] *SamarSKIY, A. A.* Numerical Methods / A. A. SamarSKIY, A. V. Gulin. – M. : Nauka, 1989. – 432 p.

Gorshkov Sergey Alexandrovich

Bachelor, Far East Fedaral University, Vladivostok

Dats Evgeniy Pavlovich

Master, Assistant, Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok

Murashkin Evgenii Valerievich

PhD, Institute For Problems in Mechanics n.a. A. Yu. Ishlinskiy RAS, Moscow

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

Варданян Седрак Ваникович (vardanyan_s@yahoo.com) – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (cotedurhone_mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Матченко Николай Михайлович (eks_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (irakon63@hotmail.com) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва.

Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marycbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стил `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Манжиров А. В.</i> Контактные задачи для оснований с произвольно неоднородными покрытиями.....	3
<i>Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., Лемза А. О.</i> Необратимое деформирование материала между жесткими коаксиальными цилиндрами в условиях ползучести	14
<i>Меньшова И. В., Коваленко М. Д.</i> Интегральное преобразование Бореля в классе квазицелых функций ¹	22
<i>Калантарлы Н. М.</i> Предельно-равновесное состояние неравномерно нагретого кольцевого диска, ослабленного произвольной системой когезионных трещин ...	37
<i>Минаева Н. В., Хвостов М. Г.</i> Сжатие стохастически неоднородной полосы из несжимаемого материала.....	48
<i>Кузнецов Е. Е., Матченко Н. М.</i> Об одной дискуссии.....	54
<i>Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е.</i> Метод возмущений в одномерной динамике несжимаемого упругого неоднородного полупространства под действием сдвигающей нагрузки переменного направления.....	62
<i>Кузнецов Е. Е., Матченко Н. М.</i> Плоская задача Сен-Венана как задача теории предельного состояния.....	73
<i>Чернышов А. Д.</i> О согласовании начальных, граничных условий и дифференциальных уравнений для получения гладких решений моделей с температурными свойствами.....	86
<i>Чернышов А. Д., Горяйнов В. В.</i> Аналитическое решение задачи об изгибе упругой консольной балки методом быстрых разложений.....	96
<i>Деревянных Е. А., Миронов Б. Г.</i> К вопросу о кручении неоднородных призматических стержней.....	105
<i>Аскарлов В. А.</i> Обратная периодическая задача теории изгиба пластины, армированного однонаправленными волокнами.....	112
<i>Бураков А. В., Дорняк О. Р., Лазукин В. Ф.</i> Математическая модель гидро-резания монолитного цементобетонного покрытия.....	119
<i>Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е.</i> Об асимптотическом представлении решений многомерных задач ударной динамики нелинейно-упругих сред.....	131
<i>Аль Имам Адель А. Абед Аль Вахаб</i> Послойное течение микроструктурного материала в канале вблизи действия сил поверхностного натяжения.....	144

<i>Быкова К. И., Вerveйко Н. Д.</i> Интенсивность напряженно-деформированного состояния за дифрагированной волной на сфере и за порожденной упругой волной в шаре	149
<i>Исмаилова Р. А.</i> Напряженное состояние стержневого тепловыделяющего элемента, ослабленного системой трещин	160
<i>Горшков С. А., Дац Е. П., Мурашкин Е. В.</i> Расчет плоского поля температурных напряжений в условиях пластического течения и разгрузки	169
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	176
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	179
СОДЕРЖАНИЕ	181

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2014. № 3 (21)**

Отв. за выпуск: А. В. Балашникова

Технические редакторы: Л. Н. Улюкова, Л. А. Судленкова, П. А. Шалимова

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова

Макет: А. В. Балашникова

Подписано в печать 26.09.2014 г. Выход в свет 30.09.2014.
Формат 70х100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 22,88.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38