

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал
№ 2(24)
Апрель – июнь 2015 г.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в
которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на
соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге "Пресса России" 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов,
Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, Б. Е. Победря, В. П. Радченко,
А. Ф. Ревуженко, С. А. Редкозубов, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин,
А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: Р. Ю. Амензаде (Азербайджан), В. М. Мирсалимов
(Азербайджан), В. П. Тамуж (Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-16-19.

Email: predel21@mail.ru.

WWW: <http://predel.chgpu.edu.ru>.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева», 2015

Д. А. Аброков

ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СВОБОДНЫМИ ПРОДОЛЬНЫМИ КРАЯМИ, НА ТОРЦАХ КОТОРОЙ ЗАДАНЫ ОБОБЩЕННЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ СИЛЫ И ИЗГИБАЮЩИЕ МОМЕНТЫ. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г.
Чебоксары*

Аннотация. Построено точное аналитическое решение краевой задачи изгиба тонкой пластины прямоугольной формы, продольные стороны которой свободны. Рассмотрено два случая: а) на торцах заданы ненулевые изгибающие моменты и нулевые обобщенные поперечные силы; б) на торцах заданы ненулевые обобщенные поперечные силы и нулевые изгибающие моменты. Решение представляется в рядах по функциям Фадля – Папковича. Искомые коэффициенты рядов находятся с помощью систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича.

Ключевые слова: изгиб пластины, функции Фадля – Папковича, аналитические решения.

УДК: 539.3+624.073

Актуальность исследуемой проблемы. В статьях [1]–[3] изучались свойства систем функций Фадля – Папковича, возникающих при решении двумерной краевой задачи теории упругости в прямоугольнике (полуполосе) с однородными граничными условиями по двум противоположным сторонам. Функции Фадля – Папковича комплекснозначны и не образуют базиса на отрезке в обычном смысле [1]. Поэтому разложения по ним невозможно построить, опираясь на классический аппарат теории базиса функций [7]. Решению краевой задачи предшествует изучение, так называемых, разложений Лагранжа [1], [8]. Разложения Лагранжа являются аналогами разложений по тригонометрическим системам функций и играют такую же роль при решении краевых задач, какую тригонометрические ряды играют в решениях Файлона – Рибьера. Аналогичная ситуация имеет место и в теории изгиба тонких пластин. Точные аналитические решения краевой задачи изгиба тонкой пластины, продольные стороны которой свободны от закрепления, а на двух других приложены обобщенные перерезывающие силы и моменты, до настоящего времени не были найдены.

Поступила 08.03.2015

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-13-00118.

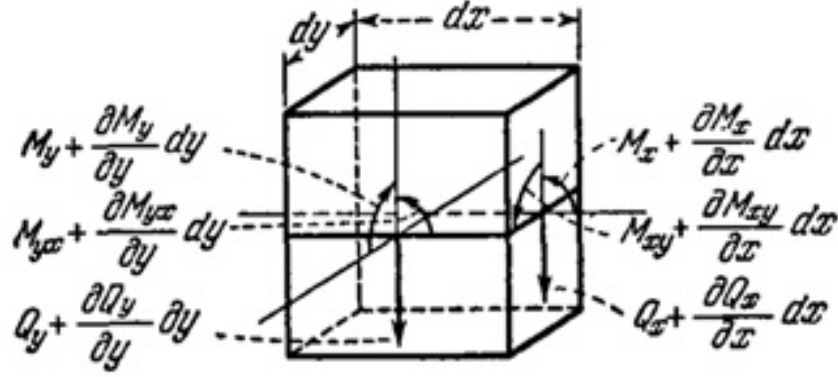


Рис. 1

Материал и методика исследований. Рассмотрим пластину, отнесенную к декартовым координатам x, y . Элемент пластины с внутренними силовыми факторами, соответствующими классической теории изгиба тонких пластин, показан на рис. 1. Дифференциальные уравнения равновесия можно записать в таком виде [5], [8]

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P(x, y) = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + T_x = 0, \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + T_y = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $P(x, y)$ — произвольная поперечная нагрузка (далее $P(x, y) = 0$), Q_x, Q_y — поперечные силы, M_x, M_y, M_{xy} — изгибающие и крутящий моменты. Функции

$$T_x(x, y) = \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial y} - Q_x(x, y), \quad T_y(x, y) = \frac{\partial M_y(x, y)}{\partial y} - Q_y(x, y). \quad (2)$$

Моменты и углы поворота Φ_x, Φ_y можно выразить через прогиб $w = w(x, y)$:

$$M_x(x, y) = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad M_y(x, y) = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \quad (3)$$

$$M_{xy}(x, y) = -M_{yx}(x, y) = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \Phi_x(x, y) = D \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Phi_y(x, y) = D \frac{\partial w}{\partial y},$$

где ν — коэффициент Пуассона, а

$$D = \frac{E\rho^3}{12(1 - \nu^2)}$$

— цилиндрическая жесткость пластины (E — модуль упругости, ρ — толщина пластины).

Кроме того,

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \quad (4)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа на плоскости.

Подставляя выражения (4) в первое из уравнения (1) получим основное дифференциальное уравнение теории изгиба пластин

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = P(x, y). \quad (5)$$

Помимо обычных сил Q_x, Q_y вводятся также обобщенные в смысле Кирхгоффа поперечные силы

$$\begin{aligned} K_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \\ K_y &= Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем строить решение, пользуясь методом начальных функций [4], позволяющим эффективно получать выражения для функций Фадля – Папковича.

Рассмотрим пластину $\{\Pi : |x| \leq l, |y| \leq h\}$ со свободными от закрепления краями $y = \pm h$:

$$M_y(x, \pm h) = K_y(x, \pm h) = 0. \quad (7)$$

Решение задачи будем искать с разделением на симметричное и обратно симметричное относительно линии симметрии пластины $y = 0$. Далее рассмотрена только симметричная задача. Решение строится методом разделения переменных в виде разложений по собственным функциям краевой задачи, так называемым, функциям Фадля – Папковича. Функции Фадля – Папковича точно удовлетворяют краевым условиям (7), а собственные числа являются корнями трансцендентного характеристического уравнения

$$L(\lambda) = -\frac{1}{4}(\nu - 1)\lambda^3 (2(\nu - 1)\lambda h + (\nu + 3) \sin 2\lambda h) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) помимо четырех нулевых имеет два действительных корня $\pm\lambda_1$ и бесконечное множество комплексных корней $\{\pm\lambda_k, \pm\bar{\lambda}_k\}_{k=2}^{\infty} = \Lambda$. Ниже для иллюстрации приведены значения пяти первых ненулевых корней уравнения (8) при $h = 2, \nu = \frac{1}{3}$, принадлежащих первой координатной четверти (табл. 1).

Таблица 1

№ корня λ_k	$Re\lambda_k$	$Im\lambda_k$
1	0,6489347699124498204415	0
2	1,920926875876095578757	0,2534177319545075720067
3	3,502055248275297722192	0,4246957870594158390368
4	5,078718900627479816160	0,5213277636781326527900
5	6,653374600317019693510	0,5900791876440081757655

Для определения точных значений комплексных корней нужно воспользоваться следующей асимптотической формулой (принципы построения асимптотических формул для корней трансцендентных уравнений можно найти в книге [6])

$$\lambda_{k+1} \approx \frac{1}{h} \left[k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(4\zeta k\pi)}{4k\pi} \right] + i \frac{1}{h} \left[\frac{\ln(4\zeta k\pi)}{2} + \frac{1}{2k} \right], \quad (9)$$

$$\zeta = \frac{1-\nu}{3+\nu}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Далее корни $\pm\lambda_1$ будем рассматривать как комплексные, а в конечных выражениях перейдем к пределу, полагая, что мнимые части этих корней стремятся к нулю.

Формулы прогиба, угла поворота, изгибающего момента и обобщенной поперечной силы с учетом соотношений (3), (6) имеют вид ($Re\lambda_k < 0$, $W(x, y) = Dw(x, y)$):

$$W(x, y) = 2h\nu(3xC_4 + C_3) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k x) + \bar{A}_k \omega(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k x),$$

$$\Phi_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \phi_y(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k x) + \bar{A}_k \phi_y(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k x), \quad (10)$$

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_y(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k x) + \bar{A}_k m_y(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k x),$$

$$K_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_y(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k x) + \bar{A}_k \chi_y(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k x).$$

где

$$\omega(\lambda_k, y) = \frac{1}{2} \lambda_k [((\nu + 1) \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h)) \cos(\lambda_k y) +$$

$$+(\nu - 1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y)];$$

$$\phi_y(\lambda_k, y) = \frac{\nu - 1}{2} \lambda_k^2 [\lambda_k y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - (\lambda_k h \cos(\lambda_k h) + \sin(\lambda_k h)) \sin(\lambda_k y)];$$

$$m_y(\lambda_k, y) = -\frac{1}{2} \lambda_k^3 (\nu - 1) [((\nu + 3) \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h)) \cos(\lambda_k y) +$$

$$+(\nu - 1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y)]; \quad (11)$$

$$\chi_y(\lambda_k, y) = \frac{(\nu - 1)^2}{2} \lambda_k^5 [y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - h \cos(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y)]$$

– функции Фадля – Папковича.

Выражения для прочих факторов можно получить по формулам (2)–(4), (6), (7):

$$M_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k x) + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k x),$$

$$M_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_{xy}(\lambda_k, y) \sinh(\lambda_k x) + \bar{A}_k m_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) \sinh(\bar{\lambda}_k x),$$

$$\begin{aligned}
\Phi_x(x, y) &= 6h\nu C_4 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \phi_x(\lambda_k, y) \sinh(\lambda_k x) + \bar{A}_k \phi_x(\bar{\lambda}_k, y) \sinh(\lambda_k x), \\
K_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_x(\lambda_k, y) \sinh(\lambda_k x) + \bar{A}_k \chi_x(\bar{\lambda}_k, y) \sinh(\bar{\lambda}_k x), \\
Q_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k q_x(\lambda_k, y) \sinh(\lambda_k x) + \bar{A}_k q_x(\bar{\lambda}_k, y) \sinh(\bar{\lambda}_k x), \\
Q_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k q_y(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k x) + \bar{A}_k q_y(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k x), \\
T_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k t_x(\lambda_k, y) \sinh(\lambda_k x) + \bar{A}_k t_x(\bar{\lambda}_k, y) \sinh(\bar{\lambda}_k x), \\
T_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k t_y(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k x) + \bar{A}_k t_y(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k x),
\end{aligned} \tag{12}$$

в которых

$$\begin{aligned}
m_x(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu - 1)^2}{2} \lambda_k^3 \left\{ \left[\lambda_k^h \cos(\lambda_k h) - \sin(\lambda_k h) \right] \cos(\lambda_k y) + \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \right\}; \\
m_{xy}(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu - 1)}{2} \lambda_k^3 \left\{ (\nu - 1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - \right. \\
&\quad \left. - [2 \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \sin(\lambda_k y) \right\}; \\
\phi_x(\lambda_k, y) &= \frac{1}{2} \lambda_k^2 \left\{ [(\nu + 1) \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1) \lambda_k^h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) + \right. \\
&\quad \left. + (\nu - 1) \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \right\}; \\
\chi_x(\lambda_k, y) &= \frac{\nu - 1}{2} \lambda_k^4 \left\{ [(\nu - 5) \sin(\lambda_k h) - (\nu - 1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) - \right. \\
&\quad \left. - (\nu - 1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \right\}; \\
q_x(\lambda_k, y) &= -(\nu - 1) \lambda_k^4 \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y); \quad q_y(\lambda_k, y) = (\nu - 1) \lambda_k^4 \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y); \\
t_x(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu - 1)^2}{2} \lambda_k^4 \left\{ [\sin(\lambda_k h) - \lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) - \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \right\}; \\
t_y(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu - 1)}{2} \lambda_k^4 \left\{ -(\nu - 1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) + \right. \\
&\quad \left. + [2 \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1) \lambda_k y \cos(\lambda_k h)] \sin(\lambda_k y) \right\}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Функции $\omega(\lambda, y)$, $\phi_y(\lambda, y)$ и т. д., получающиеся из функций Фадля – Папковича путем замены λ_k комплексным параметром λ , называются порождающими [3].

При построении биортогональных систем функций нужно знать первые члены разложений в ряды Тейлора по степеням λ порождающих функций, а так же функции $L(\lambda)$. Приведем их

$$\begin{aligned}
L(\lambda) &= -h(\nu^2 - 1)\lambda^4 + \frac{h^3(\nu + 3)(\nu - 1)}{3}\lambda^6 + \dots; \\
\omega(\lambda, y) &= h\nu\lambda^2 - \frac{h(2h^2\nu - h^2 + 3y^2)}{6}\lambda^4 + \dots; \\
\phi_y(\lambda, y) &= -hy\lambda^4 + \frac{hy(h^2\nu - y^2\nu + 2y^2)}{6}\lambda^6 + \dots; \\
m_y(\lambda, y) &= -(\nu^2 + 1)h\lambda^4 + \frac{h(\nu - 1)(h^2\nu + 3y^2)}{3}\lambda^6 + \dots; \\
\chi_y(\lambda, y) &= \frac{(\nu - 1)^2}{6}hy(h^2 - y^2)\lambda^8 - \frac{hy(h^4 - y^4)(\nu - 1)^2}{60}\lambda^{10} + \dots \\
m_x(\lambda, y) &= \frac{(\nu - 1)^2}{6}h(3y^2 - h^2)\lambda^6 + \frac{(\nu - 1)^2}{60}h(h^4 - 5y^4)\lambda^8 + \dots; \\
m_{xy}(\lambda, y) &= -hy(\nu - 1)\lambda^5 + \frac{(\nu - 1)}{6}hy(h^2\nu - \nu y^2 + 2y^2)\lambda^7 + \dots; \\
\phi_x(\lambda, y) &= \nu h\lambda^3 + \frac{h}{6}(h^2 - 3y^2 - 2h^2\nu)\lambda^5 + \dots; \\
\chi_x(\lambda, y) &= -2h(\nu - 1)\lambda^5 + \frac{(\nu - 1)}{6}h(h^2\nu - 3\nu y^2 + h^2 + 9y^2)\lambda^7 + \dots \\
q_x(\lambda, y) &= -h(\nu - 1)\lambda^5 + \frac{(\nu - 1)}{6}h(h^2 + 3y^2)\lambda^7 + \dots; \\
q_y(\lambda, y) &= (\nu - 1)hy\lambda^6 - \frac{(\nu - 1)}{6}hy(h^2 + y^2)\lambda^8 + \dots; \\
t_x(\lambda, y) &= -\frac{(\nu - 1)^2}{6}h(3y^2 - h^2)\lambda^7 + \frac{(\nu - 1)^2}{60}h(5y^4 - h^4)\lambda^9 + \dots; \\
t_y(\lambda, y) &= (\nu - 1)yh\lambda^6 - \frac{(\nu - 1)}{6}hy(2y^2 + h^2\nu - \nu y^2)\lambda^8 + \dots
\end{aligned} \tag{14}$$

Уравнение для определения систем функций $M_{xk}(y)$ биортогональных к $m_x(\lambda_k, y)$ выглядит следующим образом [9]

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_x(\lambda, y)M_{xk}(y)dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{15}$$

Функции $M_{xk}(y)$ биортогональной системы можно представить в виде суммы финитных $m_{xk}(y)$ (равных нулю вне отрезка $|y| \leq h$) и нефинитных $m_{xk}^*(y)$ частей.

Финитные части функций $M_{xk}(y)$ имеют вид

$$m_{xk}(y) = \frac{\lambda_k \cos(\lambda_k y)}{2 \sin(\lambda_k h)} - \frac{1}{2}(\delta(y - h) + \delta(y + h)), \tag{16}$$

где δ — дельта-функция. Они строятся следующим образом. Приняв в уравнении (15) $\lambda = \frac{m}{h}\pi = q_m$, для каждой пары номеров $k, m = 1, 2, \dots$ получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_x(q_m, y) M_{xk}(y) dy = \frac{q_m^2 L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2}. \quad (17)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \cos(q_m y) \cos(\lambda_k y) dy &= -\frac{2\lambda_k (-1)^m \sin(\lambda_k h)}{q_m^2 - \lambda_k^2}, \\ -\frac{(-1)^m q_m^2}{q_m^2 - \lambda_k^2} &= -(-1)^m - \frac{(-1)^m \lambda_k^2}{q_m^2 - \lambda_k^2} \end{aligned}$$

нетрудно подобрать функции $m_{xk}(y)$ (см. (16)), удовлетворяющие уравнению (15).

Вводя обозначение

$$R_k(\lambda) = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2},$$

уравнения (15) можно переписать следующим образом

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_x(\lambda, y) M_{xk}(y) dy = R_k(\lambda). \quad (18)$$

С учетом уравнений и равенств (1₂), (2₁), (1₃), (3₃), (3₄), (3₅), (6₁), (1₁), (6₂), (2₁), а также выражений (10), (12) последовательно получим следующие уравнения для определения биортогональных систем для остальных факторов:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t_x(\lambda, y) T_{xk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); & \int_{-\infty}^{\infty} m_{xy}(\lambda, y) M_{xyk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); \\ \int_{-\infty}^{\infty} q_x(\lambda, y) Q_{xk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); & \int_{-\infty}^{\infty} t_y(\lambda, y) T_{yk}(y) dy &= \lambda^2 R_k(\lambda); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda, y) W_k(y) dy &= R_k(\lambda); & \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(\lambda, y) \Phi_{xk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); \\ & & \int_{-\infty}^{\infty} \phi_y(\lambda, y) \Phi_{yk}(y) dy &= R_k(\lambda); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_x(\lambda, y) K_{xk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); & \int_{-\infty}^{\infty} q_y(\lambda, y) Q_{yk}(y) dy &= \lambda^2 R_k(\lambda); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \chi_y(\lambda, y) K_{yk}(y) dy &= \lambda^2 R_k(\lambda); & \int_{-\infty}^{\infty} m_y(\lambda, y) M_{yk}(y) dy &= \lambda^2 R_k(\lambda). \end{aligned}$$

При $\lambda = \lambda_m$ из уравнений (18), (19₈), учитывая, что при $\lambda \rightarrow \lambda_m L(\lambda) = L'(\lambda_m)(\lambda - \lambda_m)$, получаются, следующие соотношения биортогональности:

$$\int_T m_x(\lambda_m, y) M_{xk}(y) dy = \begin{cases} \frac{\lambda_m L'(\lambda_m)}{2}, & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0, & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \quad (20)$$

$$\int_T \chi_x(\lambda_m, y) K_{xk}(y) dy = \begin{cases} \frac{\lambda_m^2 L'(\lambda_m)}{2}, & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0, & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

$$\int_T m_x(\bar{\lambda}_m, y) \bar{M}_{xk}(y) dy = \begin{cases} \frac{\bar{\lambda}_m L'(\bar{\lambda}_m)}{2}, & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0, & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

$$\int_T \chi_x(\bar{\lambda}_m, y) \bar{K}_{xk}(y) dy = \begin{cases} \frac{\bar{\lambda}_m^2 L'(\bar{\lambda}_m)}{2}, & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0, & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

где $L'(\lambda_m)$ — производная функции $L(\lambda)$, определенная при $\lambda = \lambda_m$. Для комплексных значений λ прямую интегрирования $(-\infty, \infty)$ в формулах (19) нужно заменить контуром T , лежащим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и составленным из отрезка мнимой оси $y \in [-h, h]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$ [2].

Отметим, что для каждой пары номеров $k, m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \int_T m_x(\bar{\lambda}_m, y) M_{xk}(y) dy &= \int_T m_x(\lambda_m, y) \bar{M}_{xk}(y) dy = 0; \\ \int_T \chi_x(\bar{\lambda}_m, y) K_{xk}(y) dy &= \int_T \chi_x(\lambda_m, y) \bar{K}_{xk}(y) dy = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь и далее функции $\bar{M}_{xk}(y)$, $\bar{K}_{xk}(y)$, а также $\bar{m}_{xk}(y)$, $\bar{\chi}_{xk}(y)$, в отличие от соответствующих функций без черты, зависят от $\bar{\lambda}_k$.

Удовлетворяя с помощью выражений (10), (12) граничным условиям, заданным на торцах пластины $x = \pm l$, приходим к задаче определения коэффициентов A_k, \bar{A}_k из двух разложений по двум системам функций Фадля – Папковича

$$\begin{aligned} M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k l) + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k l), \\ K_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_x(\lambda_k, y) \sinh(\lambda_k l) + \bar{A}_k \chi_x(\bar{\lambda}_k, y) \sinh(\bar{\lambda}_k l), \end{aligned} \quad (22)$$

где $M_x(y) = M_x(\pm l, y)$, $K_x(y) = K_x(\pm l, y)$ — заданные на торцах пластины изгибающий момент и обобщенная поперечная сила. Отметим, что функции $M_x(y)$, $K_x(y)$ — четные и самоуравновешенные, поскольку аналогичными свойствами обладает и соответствующие им функции Фадля – Папковича (13₁), (13₄).

Умножая равенства (21) соответственно на $M_{xk}(y) + \bar{M}_{xk}(y)$ и $K_{xk}(y) + \bar{K}_{xk}(y)$ и интегрируя обе части полученных равенств по контуру T , с учетом соотношений (20), (20) для каждого номера $k = 1, 2, \dots$, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\Delta_1^*(k) &= A_k N_k \cosh(\lambda_k l) + \bar{A}_k \bar{N}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l), \\ \Delta_2^*(k) &= \lambda_k A_k N_k \sinh(\lambda_k l) + \bar{\lambda}_k \bar{A}_k \bar{N}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l),\end{aligned}\quad (23)$$

где

$$N_k = \frac{\lambda_k L'(\lambda_k)}{2}, \quad \bar{N}_k = \frac{\bar{\lambda}_k L'(\bar{\lambda}_k)}{2}; \quad (24)$$

$$\Delta_1^*(k) = \Delta_1(k) + \bar{\Delta}_1(k), \quad \Delta_2^*(k) = \Delta_2(k) + \bar{\Delta}_2(k); \quad (25)$$

$$\Delta_1(k) = \int_{-h}^h M_x(y) m_{xk}(y) dy, \quad \bar{\Delta}_1(k) = \int_{-h}^h M_x(y) \bar{m}_{xk}(y) dy; \quad (26)$$

$$\Delta_2(k) = \int_{-h}^h K_x(y) \chi_{xk}(y) dy, \quad \bar{\Delta}_2(k) = \int_{-h}^h K_x(y) \bar{\chi}_{xk}(y) dy, \quad (27)$$

а

$$\chi_{xk}(y) = -\frac{\lambda_k \cos(\lambda_k y)}{2 \sin(\lambda_k h)} + \frac{1}{2}(\delta(y-h) + \delta(y+h)). \quad (28)$$

Функции $\chi_{xk}(y)$ строятся подобно функциям $m_{xk}(y)$ (см. (16)), но уже на основе (19₈).

Умножим первое уравнение системы (22) на $\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l)$ и вычтем из него второе уравнение, умноженное на $\cosh(\bar{\lambda}_k l)$. Тогда для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ найдем

$$A_k = \frac{\Delta_2^*(k) \cosh(\bar{\lambda}_k l) - \Delta_1^*(k) \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l)}{N_k \eta_k}, \quad (29)$$

$$\eta_k = \lambda_k \sinh(\lambda_k l) \cosh(\bar{\lambda}_k l) - \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l). \quad (30)$$

Наконец, подставляя выражения (29) в соотношения (10), (12), получим окончательное решение рассматриваемой задачи.

Для *симметричной* относительно оси y краевой задачи, когда на торцах $x = \pm l$ (рис. 2) заданы самоуравновешенные изгибающие моменты, а обобщенные поперечные силы равны нулю, система уравнений (21) примет вид:

$$\begin{aligned}M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k l) + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k l), \\ 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_x(\lambda_k, y) \sinh(\lambda_k l) + \bar{A}_k \chi_x(\bar{\lambda}_k, y) \sinh(\bar{\lambda}_k l).\end{aligned}\quad (31)$$

Учитывая, что в равенстве (23₂) справедливо $\Delta_2^*(k) = \Delta_2(k) = \bar{\Delta}_2(k) = 0$ для каждого номера $k = 1, 2, \dots$, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\Delta_1^*(k) &= A_k N_k \cosh(\lambda_k l) + \bar{A}_k \bar{N}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l), \\ 0 &= \lambda_k A_k N_k \sinh(\lambda_k l) + \bar{\lambda}_k \bar{A}_k \bar{N}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l).\end{aligned}\quad (32)$$

Решая систему (29) аналогично системе (22), для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ получим

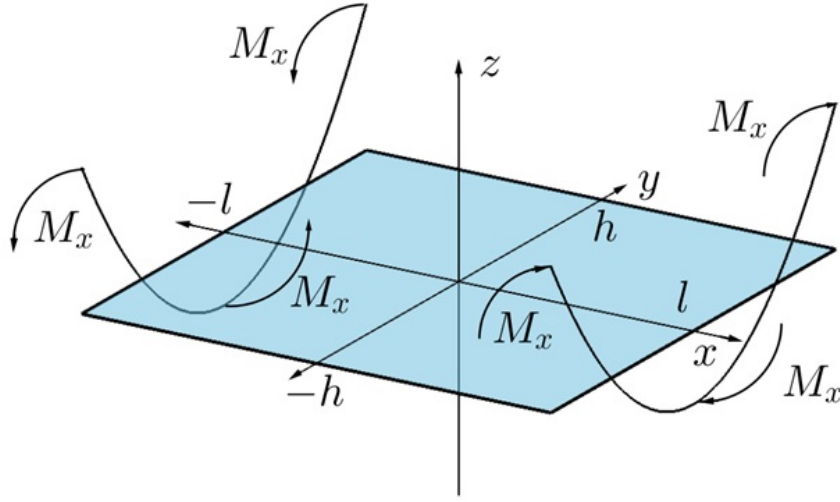


Рис. 2

$$A_k = -\frac{\Delta_1^*(k)(k)\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l)}{N_k \eta_k}. \quad (33)$$

Теперь нужно подставить (30) в равенства (10), (12), и выделить нуль-ряды в полученных выражениях. Покажем как это делается вначале на примере решения для полуполосы. В этом случае выражение, например, для $M_y(x, y)$ имеет вид [9, (45)]

$$M_y(x, y) = -\sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left(\Delta_1^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y) \bar{\lambda}_k}{N_k} \frac{e^{\lambda_k x}}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \right) \quad (34)$$

Согласно (19₁₁), нормирующий множитель соответствующий биортогональной системе $M_{yk}(y)$ имеет вид $\lambda_k^2 N_k$. Умножим числитель и знаменатель дроби (31) на λ_k^2 так, чтобы получить $\lambda_k^2 N_k$ в знаменателе выражения (31)

$$M_y(x, y) = -\sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left(\Delta_1^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y) \lambda_k \bar{\lambda}_k}{\lambda_k^2 N_k} \frac{\lambda_k e^{\lambda_k x}}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)} \right). \quad (35)$$

Вводя обозначения $\lambda_k = a_k + ib_k$, сделаем следующие преобразования под знаком суммы

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k^2 e^{\lambda_k x}}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)} &= \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k}{1} \cdot \frac{\lambda_k e^{\lambda_k x}}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)} = \\ &= \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k}{2} \cdot \frac{a_k + ib_k}{b_k i} e^{a_k x} \{ \cos b_k x + i \sin b_k x \} = \\ &= \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k}{2} e^{a_k x} \left\{ \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) + i \left(\sin b_k x - \frac{c_k \cos b_k x}{b_k} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Спроектировав последнее равенство на вещественное подпространство, т. е. на сумму векторов $M_{yk}(y) + \bar{M}_{yk}(y)$, для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ получим:

$$-2Re \left(\frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k))\bar{\lambda}_k \lambda_k^2}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)} e^{\lambda_k x} \right) = -(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k))\bar{\lambda}_k \lambda_k e^{a_k x} \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right).$$

Итак, ненулевую часть ряда (32) в силу последнего равенства можно записать следующим образом

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k e^{a_k x} \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \right\}.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ -i(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k))\bar{\lambda}_k \lambda_k e^{a_k x} \left(\sin b_k x - \frac{a_k \cos b_k x}{b_k} \right) \frac{m_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x}}{\lambda_k^2 N_k} \right\} = 0.$$

Учитывая, что для первого действительного корня λ_1 справедливо $b_k \rightarrow 0$, получим

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta_1(k) \frac{m_y(\lambda_k, y) \lambda_k \bar{\lambda}_k}{\lambda_k^2 N_k} e^{a_k x} \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}. \quad (36)$$

По аналогии с работой [10], сравнивая равенства (32) и (33), можно получить еще одну форму представления решения для полуполосы:

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta_1(k) \frac{m_y(\lambda_k, y) \lambda_k \bar{\lambda}_k}{\lambda_k^2 N_k} \frac{Im(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}. \quad (37)$$

Аналогично для других факторов полуполосы, получим, например

$$M_x(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta_1(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} \frac{Im(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \quad (38)$$

$$K_x(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta_1(k) \frac{\chi_x(\lambda_k, y) \lambda_k \bar{\lambda}_k}{\lambda_k N_k} \frac{Im(e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}. \quad (39)$$

Напомним, что корень λ_1 вещественен. Поэтому при вычислении соответствующих сумм в выражениях (33)–(39) нужно перейти к пределу при $b_1 \rightarrow 0$. Окончательные выражения решений для полуполосы приведены в работе [9].

Используем описанную выше схему для нахождения решений в случае прямоугольной пластины. Так, например, подставляя выражения (33) в соотношения (10₃) получим аналог соотношения (34)

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left(\Delta_1^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{N_k} \frac{\bar{\lambda}_k \cosh(\lambda_k x) \sinh(\bar{\lambda}_k l)}{\lambda_k \sinh(\lambda_k l) \cosh(\bar{\lambda}_k l) - \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)} \right). \quad (40)$$

Умножая числитель и знаменатель на λ_k^2 , и повторяя предыдущие рассуждения, имеем

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left(\Delta_1^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \frac{\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k \cosh(\lambda_k x) \sinh(\bar{\lambda}_k l)}{\lambda_k \sinh(\lambda_k l) \cosh(\bar{\lambda}_k l) - \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)} \right), \quad (41)$$

а затем

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left(\Delta_1(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \frac{Im \{ \lambda_k^2 \bar{\lambda}_k \cosh(\lambda_k x) \sinh(\bar{\lambda}_k l) \}}{Im \{ \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l) \}} \right). \quad (42)$$

Подставляя выражения (33) в оставшиеся соотношения (10), (12), и для первого действительного корня λ_1 полагая $b_1 \rightarrow 0$, получим формулы для прогиба, поперечных сил, углов поворота и моментов в прямоугольной пластине ($a_k = Re \lambda_k$, $b_k = Im \lambda_k$, $a_k < 0$):

$$W(x, y) = 2h\nu(3xC_4 + C_3) + \frac{\omega(\lambda_1, y)}{N_1} \Delta(1)\Omega_{11}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\omega(\lambda_k, y)}{N_k} \Delta(k)\Omega_{12}(x) \right\};$$

$$\Phi_y(x, y) = \frac{\phi_y(\lambda_1, y)}{N_1} \Delta(1)\Omega_{11}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\phi_y(\lambda_k, y)}{N_k} \Delta(k)\Omega_{12}(x) \right\};$$

$$M_x(x, y) = \frac{m_x(\lambda_1, y)}{N_1} \Delta(1)\Omega_{11}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} \Delta(k)\Omega_{12}(x) \right\};$$

$$\Phi_x(x, y) = 6h\nu C_4 + \frac{\phi_x(\lambda_1, y)}{\lambda_1 N_1} \Delta(1)\Omega_{21}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\phi_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \Delta(k)\Omega_{22}(x) \right\};$$

$$K_x(x, y) = \frac{\chi_x(\lambda_1, y)}{\lambda_1 N_1} \Delta(1)\Omega_{21}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\chi_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \Delta(k)\Omega_{22}(x) \right\}; \quad (43)$$

$$T_x(x, y) = \frac{t_x(\lambda_1, y)}{\lambda_1 N_1} \Delta(1)\Omega_{21}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{t_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \Delta(k)\Omega_{22}(x) \right\};$$

$$M_{xy}(x, y) = \frac{m_{xy}(\lambda_1, y)}{\lambda_1 N_1} \Delta(1)\Omega_{21}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{m_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \Delta(k)\Omega_{22}(x) \right\};$$

$$Q_x(x, y) = \frac{q_x(\lambda_1, y)}{\lambda_1 N_1} \Delta(1)\Omega_{21}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{q_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \Delta(k)\Omega_{22}(x) \right\};$$

$$M_y(x, y) = \frac{m_y(\lambda_1, y)}{(\lambda_1)^2 N_1} \Delta(1)\Omega_{31}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{m_y(\lambda_k, y)}{(\lambda_k)^2 N_k} \Delta(k)\Omega_{32}(x) \right\};$$

$$K_y(x, y) = \frac{\chi_y(\lambda_1, y)}{(\lambda_1)^2 N_1} \Delta(1)\Omega_{31}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\chi_y(\lambda_k, y)}{(\lambda_k)^2 N_k} \Delta(k)\Omega_{32}(x) \right\};$$

$$T_y(x, y) = \frac{t_y(\lambda_1, y)}{(\lambda_1)^2 N_1} \Delta(1)\Omega_{31}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{t_y(\lambda_k, y)}{(\lambda_k)^2 N_k} \Delta(k)\Omega_{32}(x) \right\};$$

$$Q_y(x, y) = \frac{q_y(\lambda_1, y)}{(\lambda_1)^2 N_1} \Delta(1) \Omega_{31}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{q_y(\lambda_k, y)}{(\lambda_k)^2 N_k} \Delta(k) \Omega_{32}(x) \right\},$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{11}(x) &= \frac{2\{\sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) + \lambda_1 l \cosh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) - \lambda_1 x \sinh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x)\}}{\sinh(2\lambda_1 l) + 2\lambda_1 l}; \\ \Omega_{21}(x) &= \frac{2\lambda_1^2 \{l \cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) - x \sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x)\}}{\sinh(2\lambda_1 l) + 2\lambda_1 l}; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\Omega_{31}(x) = -\frac{2\lambda_1^2 \{\sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) - \lambda_1 l \cosh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) + \lambda_1 x \sinh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x)\}}{\sinh(2\lambda_1 l) + 2\lambda_1 l};$$

$$\begin{aligned} \Omega_{12}(x) &= \frac{Im\{\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)\}}; & \Omega_{22}(x) &= \frac{Im\{\lambda_k \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)\}}; \\ \Omega_{32}(x) &= \frac{Im\{\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)\}}, & k &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (45)$$

В выражениях (45) под знаками Im стоят быстрорастущие функции, поэтому их нужно привести к виду, не приводящему к переполнению памяти компьютера:

$$\begin{aligned} \Omega_{12}(x) &= \frac{Im\{\bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k) cx(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k) c(\lambda_k, a_k)\}}; & \Omega_{22}(x) &= \frac{Im\{\lambda_k \bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k) sx(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k) c(\lambda_k, a_k)\}}; \\ \Omega_{32}(x) &= \frac{Im\{\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k) cx(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k) c(\lambda_k, a_k)\}}, \end{aligned} \quad (46)$$

где (p, q — параметры)

$$s(p, q) = \exp(pl + ql) - \exp(-pl + ql);$$

$$sx(p, q, x) = \exp(px + ql) - \exp(-px + ql); \quad (47)$$

$$c(p, q) = \exp(pl + ql) + \exp(-pl + ql);$$

$$cx(p, q, x) = \exp(px + ql) + \exp(-px + ql).$$

Теперь рассмотрим *обратно симметричную* относительно оси y деформацию прямоугольной пластины $|x| \leq l, |y| \leq h$ (рис. 3). Для нее в соотношениях (45) надо заменить гиперболические функции синуса на косинус, а косинуса на синус. Тогда выражения для всех факторов примут вид (43), где

$$\begin{aligned} \Omega_{11}(x) &= \frac{2\{\cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) + \lambda_1 l \sinh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) - \lambda_1 x \cosh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x)\}}{\sinh(2\lambda_1 l) - 2\lambda_1 l}; \\ \Omega_{21}(x) &= \frac{2\lambda_1^2 \{l \sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) - x \cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x)\}}{\sinh(2\lambda_1 l) - 2\lambda_1 l}; \end{aligned} \quad (48)$$

$$\Omega_{31}(x) = -\frac{2\lambda_1^2 \{\cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) - \lambda_1 l \sinh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) + \lambda_1 x \cosh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x)\}}{\sinh(2\lambda_1 l) - 2\lambda_1 l};$$

$$\Omega_{12}(x) = \frac{Im\{\bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k l)\}}; \quad \Omega_{22}(x) = \frac{Im\{\lambda_k \bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k x)\}}{Im\{\lambda_k \bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k l)\}};$$

$$\Omega_{32}(x) = \frac{Im\{\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k l)\}}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (49)$$

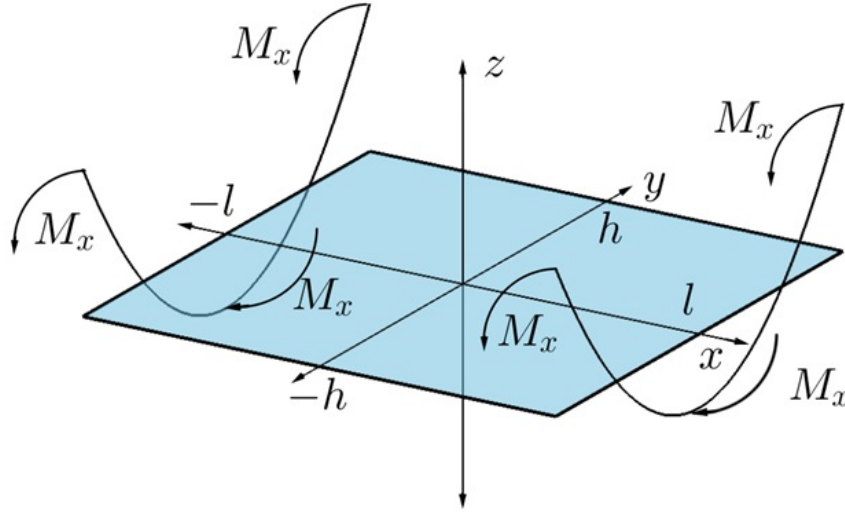


Рис. 3

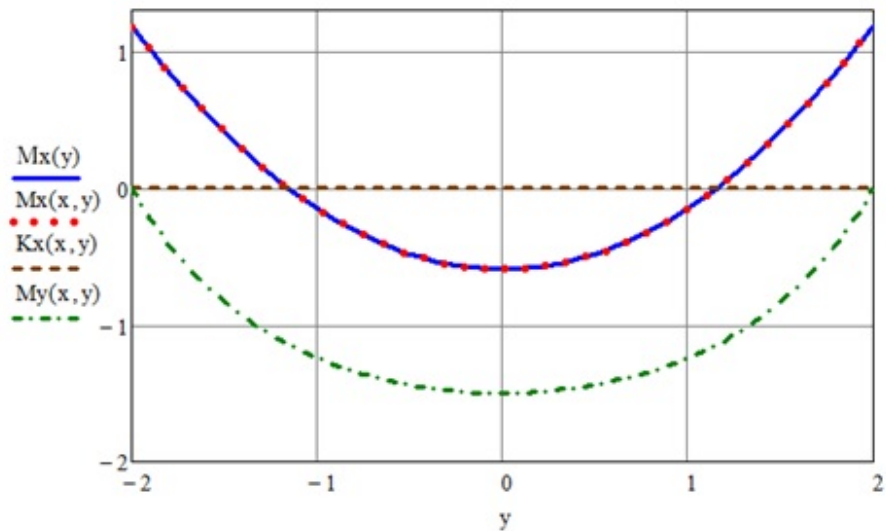
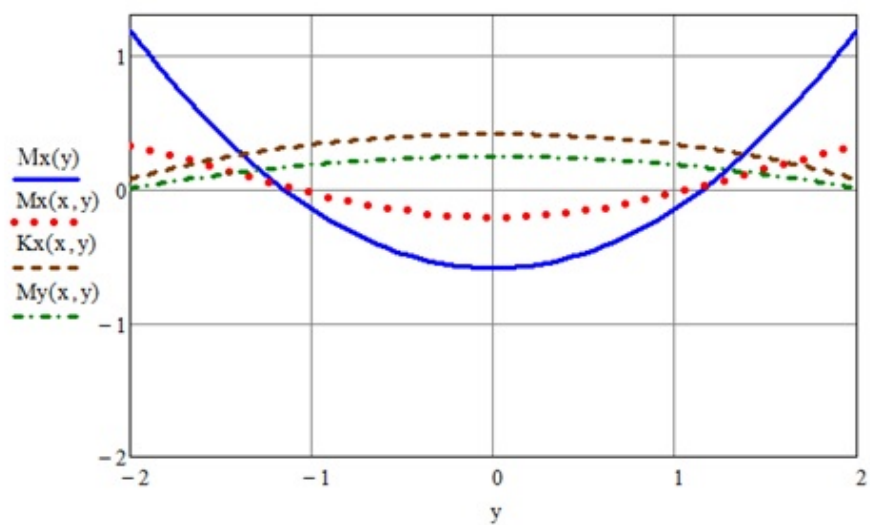
В выражениях (49) под знаками Im стоят быстрорастущие функции, поэтому их нужно привести к виду, не вызывающему переполнения памяти компьютера:

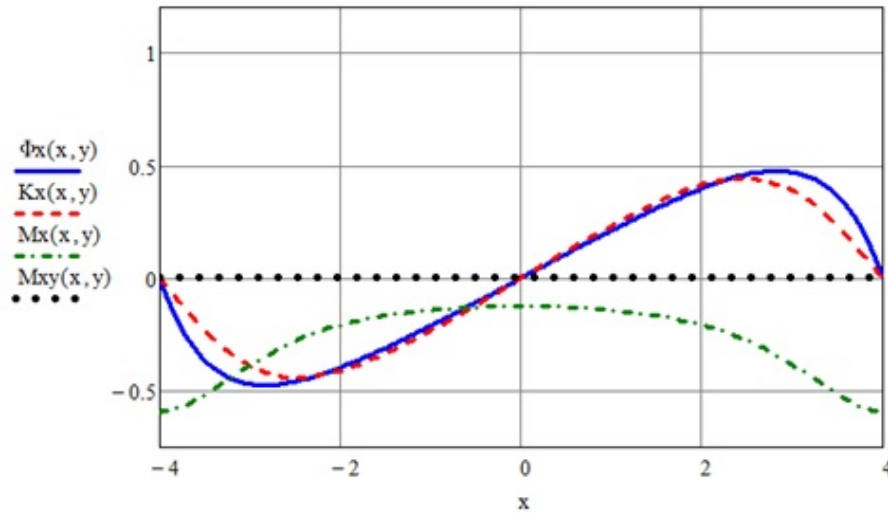
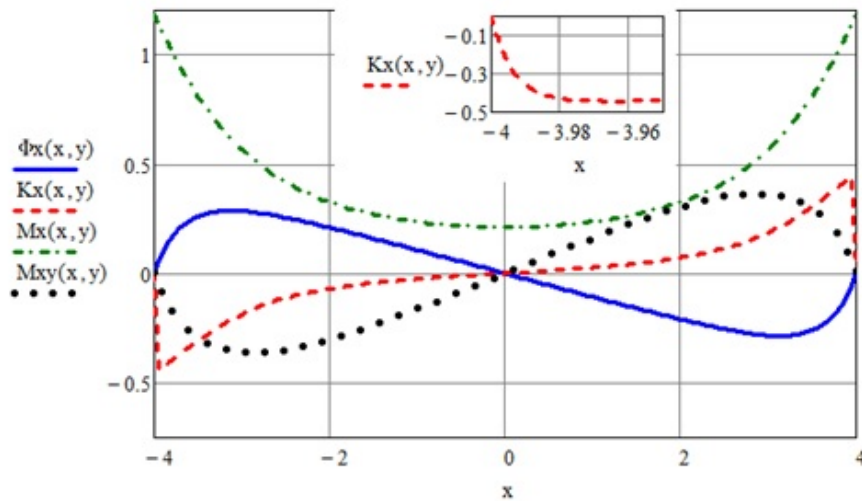
$$\Omega_{12}(x) = \frac{Im\{\bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) s x(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) s(\lambda_k, a_k)\}}; \quad \Omega_{22}(x) = \frac{Im\{\lambda_k \bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) c x(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) s(\lambda_k, a_k)\}};$$

$$\Omega_{32}(x) = \frac{Im\{\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) s x(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) s(\lambda_k, a_k)\}}. \quad (50)$$

Приведем примеры расчетов при $\nu = \frac{1}{3}$, $h = 2$, $l = 4$, $\rho = 0,4$, $E = 0,69 \cdot 10^5$ МПа (материал – катанный алюминий).

Пример 1. Симметричный случай. $M_x(y) = \frac{h(\nu - 1)^2(3y^2 - h^2)}{6}$. Сечения $x = 4$ (рис. 4а) и $x = 2$ (рис. 4б). Сечения $y = 0$ (средняя линия пластины – рис. 5а) и $y = 2$ (край пластины – рис. 5б). Сечения функции прогиба $w(x, y)$ (рис. 6): $x = 0$ (слева) и $y = 0$ (справа).

Рис. 4а. Сечение при $x = 4$ Рис. 4б. Сечение при $x = 2$

Рис. 5а. Сечение при $y = 0$ Рис. 5б. Сечение при $y = 2$

Пример 2. Обратнo симметричный случай. $M_x(y) = \frac{h(\nu - 1)^2(3y^2 - h^2)}{6}$. Сечения $x = 4$ (рис. 7а) и $x = 2$ (рис. 7б). Сечения $y = 0$ (средняя линия пластины — рис. 8а) и $y = 2$ (край пластины — рис. 8б). Сечения функции прогиба $w(x, y)$ (рис. 9): $x = 0$ (слева) и $y = 0$ (справа).

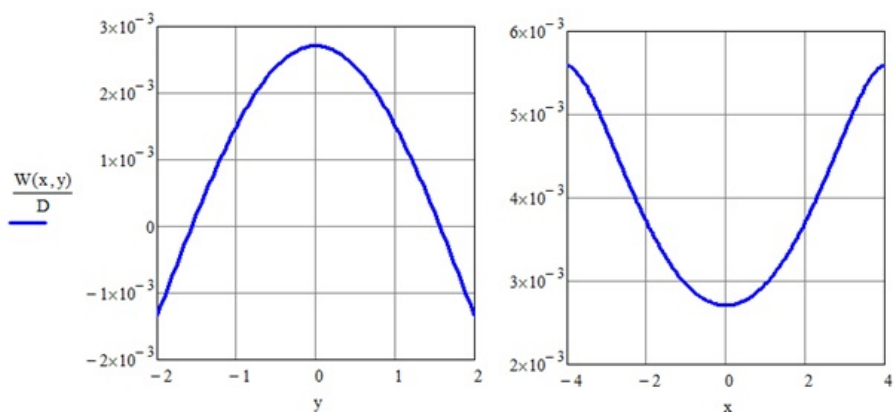


Рис. 6. Сечения функции прогиба $w(x, y)$: $x = 0$ (слева) и $y = 0$ (справа)

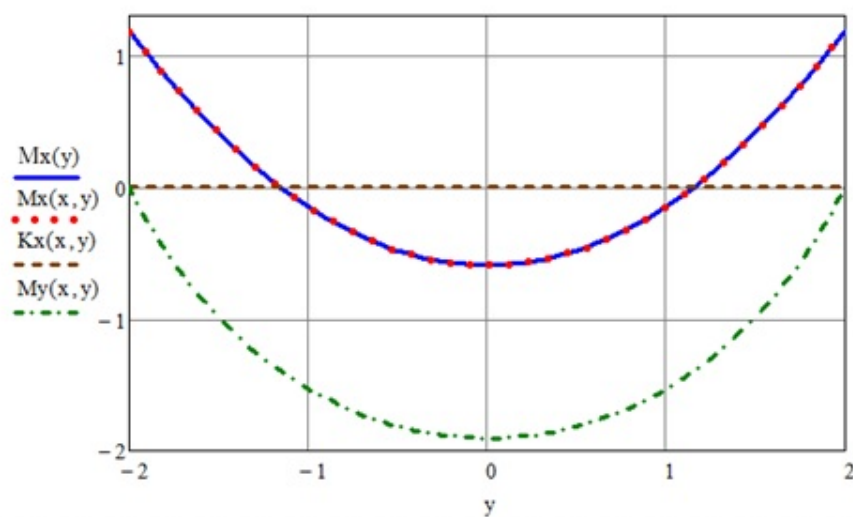
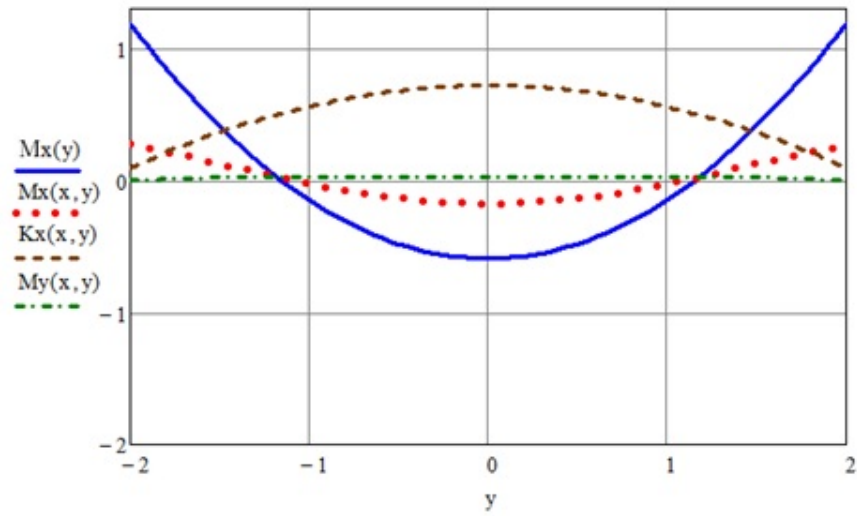
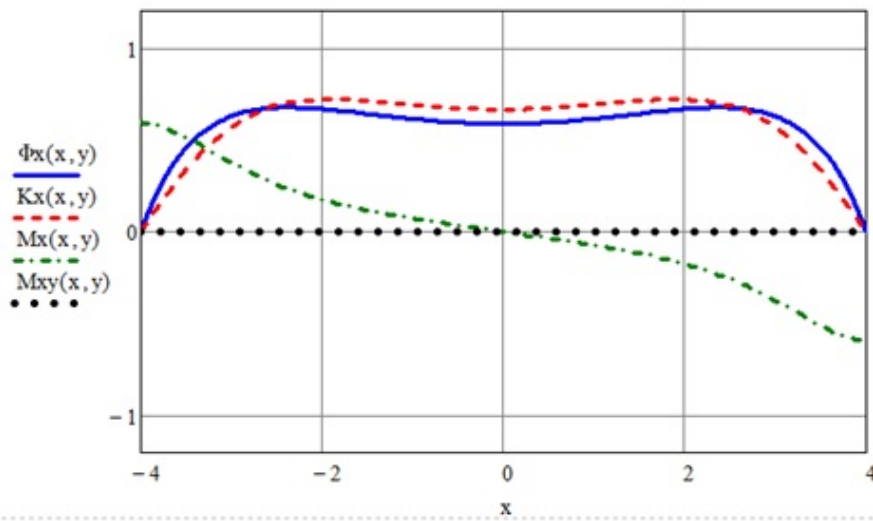


Рис. 7а. Сечение при $x = 4$

Рис. 7б. Сечение при $x = 2$ Рис. 8а. Сечение при $y = 0$

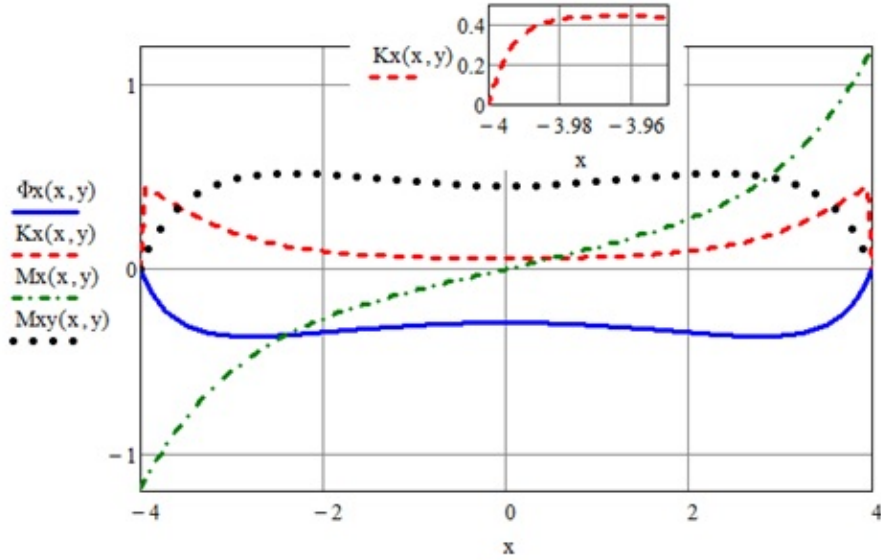


Рис. 86. Сечение при $y = 2$

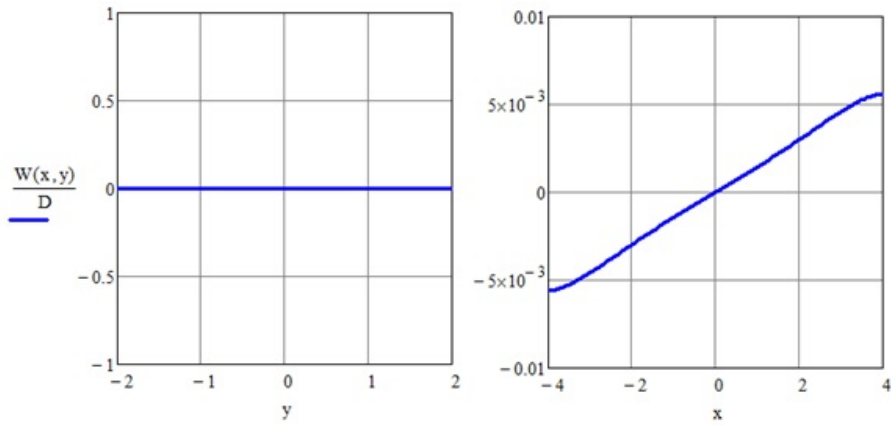


Рис. 9. Сечения функции прогиба $w(x, y)$: $x = 0$ (слева) и $y = 0$ (справа)

Для симметричной краевой задачи, когда на торцах $x = \pm l$ (рис. 10) заданы самоуравновешенные обобщенные поперечные силы, а изгибающие моменты равны нулю, система уравнений (21) примет вид:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y) \cosh(\lambda_k l) + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y) \cosh(\bar{\lambda}_k l), \\ K_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_x(\lambda_k, y) \sinh(\lambda_k l) + \bar{A}_k \chi_x(\bar{\lambda}_k, y) \sinh(\bar{\lambda}_k l), \end{aligned} \quad (51)$$

Учитывая, что в уравнениях (23₁) $\Delta_1^*(k) = \Delta_1(k) = \bar{\Delta}_1(k) = 0$ для каждого номера $k = 1, 2, \dots$, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= A_k N_k \cosh(\lambda_k l) + \bar{A}_k \bar{N}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l), \\ \Delta_2^*(k) &= \lambda_k A_k N_k \sinh(\lambda_k l) + \bar{\lambda}_k \bar{A}_k \bar{N}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l), \end{aligned} \quad (52)$$

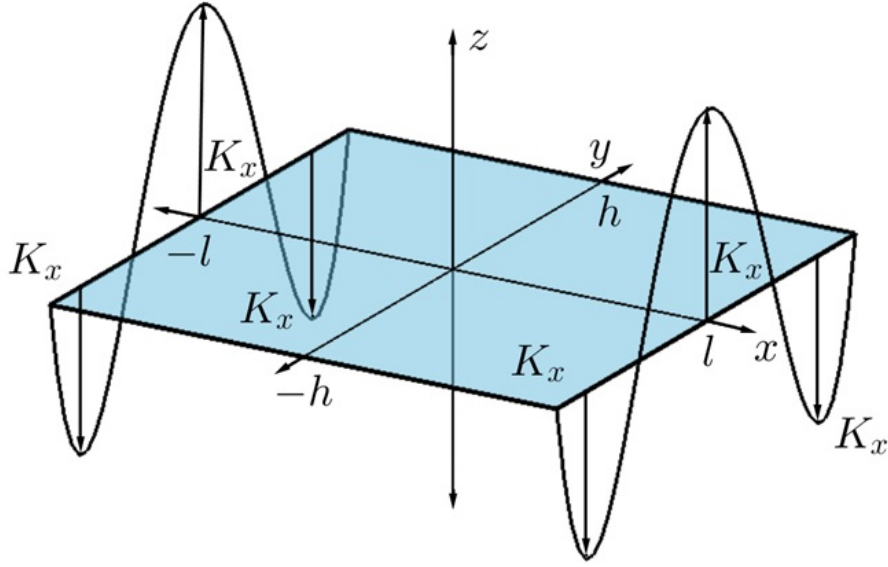


Рис. 10

Решая ее аналогично системе (22), для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ получим

$$A_k = \frac{\Delta_2^*(k) \bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l)}{N_k \eta_k}. \quad (53)$$

Дальнейшее построение решения состоит в подстановке выражений (53) в равенства (10), (12), и последующем выделении нуль-рядов. Данная операция для случая прямоугольной пластины аналогична случаю полуполосы. А потому, рассмотрим сначала его. Выражение, например, для фактора $M_y(x, y)$ имеет вид

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left(\Delta_2^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{N_k} \frac{e^{\lambda_k x}}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \right). \quad (54)$$

С учетом правой части уравнений биортогональной системы (19₁₁), умножая числитель и знаменатель на λ_k^2 , имеем

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left(\Delta_2^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \frac{\lambda_k^2 e^{\lambda_k x}}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \right). \quad (55)$$

Действуя аналогично работе [10] и выделяя нуль-ряд, приходим к выражению

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \Delta_2^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \left(2a_k \cos b_k x + \frac{a_k^2 - b_k^2}{b_k} \sin b_k x \right) e^{a_k x} \right\}. \quad (56)$$

Сравнивая равенства (55) и (56), можно получить еще одну форму представления решения для полуполосы:

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \Delta_2^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \frac{\text{Im}(\lambda_k^2 e^{\lambda_k x})}{\text{Im}(\lambda_k)} \right\}. \quad (57)$$

Аналогично для других факторов полуполосы, получим, например

$$M_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta_2(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} \frac{Im(e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \quad (58)$$

$$K_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta_2(k) \frac{\chi_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \frac{Im(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}. \quad (59)$$

Учитывая, что для первого действительного корня λ_1 справедливо $b_k \rightarrow 0$, можно получить окончательные выражения решений для полуполосы.

Используем описанную выше схему для нахождения решений в случае прямоугольной пластины. Так, например, подставляя выражения (53) в соотношения (10₃) получим аналог соотношения (54) для пластины

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left(\Delta_2^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{N_k} \frac{\cosh(\lambda_k x) \cosh(\bar{\lambda}_k l)}{\lambda_k \sinh(\lambda_k l) \cosh(\bar{\lambda}_k l) - \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)} \right). \quad (60)$$

С учетом правой части уравнений биортогональной системы (19₁₁), умножая числитель и знаменатель на λ_k^2 , имеем

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left(\Delta_2^*(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \frac{\lambda_k^2 \cosh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k x)}{\lambda_k \sinh(\lambda_k l) \cosh(\bar{\lambda}_k l) - \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)} \right). \quad (61)$$

Тогда, аналогично равенству (57), получим

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left(\Delta_2(k) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \frac{Im \{ \lambda_k^2 \cosh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k x) \}}{Im \{ \bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l) \}} \right). \quad (62)$$

Подставляя выражения (53) в оставшиеся соотношения (10), (12), и для первого действительного корня λ_1 полагая $b_k \rightarrow 0$, получим выражения для прогиба, поперечных сил, углов поворота и моментов в прямоугольной пластине, которые имеют вид (43), где

$$\Delta(1) = \Delta_2(1); \quad (63)$$

$$\Omega_{11}(x) = - \frac{2l \sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) - 2x \cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x)}{\sinh(2\lambda_1 l) + 2\lambda_1 l}; \quad (64)$$

$$\Omega_{21}(x) = \frac{2 \cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) - 2\lambda_1 l \sinh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) + 2\lambda_1 x \cosh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x)}{\sinh(2\lambda_1 l) + 2\lambda_1 l};$$

$$\Omega_{31}(x) = \frac{2\lambda_1^2 \{ 2 \cosh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) - \lambda_1 l \sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) + \lambda_1 x \cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) \}}{\sinh(2\lambda_1 l) + 2\lambda_1 l};$$

$$\Delta(k) = \Delta_2(k);$$

$$\Omega_{12}(x) = -\frac{Im\{\cosh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)\}}; \quad \Omega_{22}(x) = -\frac{Im\{\lambda_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)\}};$$

$$\Omega_{32}(x) = -\frac{Im\{\lambda_k^2 \cosh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k l)\}}. \quad (65)$$

В выражениях (65) под знаками Im стоят быстрорастущие функции, поэтому их нужно привести к виду, не приводящему к переполнению памяти компьютера:

$$\Omega_{12}(x) = -\frac{Im\{c(\bar{\lambda}_k, a_k)cx(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k)c(\lambda_k, a_k)\}}; \quad \Omega_{22}(x) = -\frac{Im\{\lambda_k c(\bar{\lambda}_k, a_k)sx(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k)c(\lambda_k, a_k)\}};$$

$$\Omega_{32}(x) = -\frac{Im\{\lambda_k^2 c(\bar{\lambda}_k, a_k)cx(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k s(\bar{\lambda}_k, a_k)c(\lambda_k, a_k)\}}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (66)$$

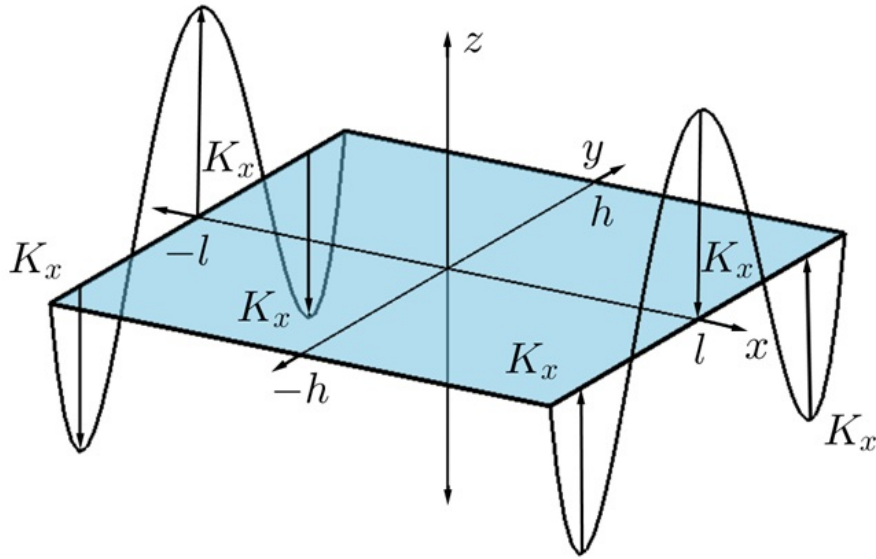


Рис. 11

В случае *обратно симметричной* относительно оси y деформации прямоугольной пластины получим (рис. 11)

$$\Omega_{11}(x) = -\frac{2l \cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) - 2x \sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x)}{\sinh(2\lambda_1 l) - 2\lambda_1 l}; \quad (67)$$

$$\Omega_{21}(x) = \frac{2 \sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) - 2\lambda_1 l \cosh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x) + 2\lambda_1 x \sinh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x)}{\sinh(2\lambda_1 l) - 2\lambda_1 l};$$

$$\Omega_{31}(x) = \frac{2\lambda_1^2 \{2 \sinh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) - \lambda_1 l \cosh(\lambda_1 l) \sinh(\lambda_1 x) + \lambda_1 x \sinh(\lambda_1 l) \cosh(\lambda_1 x)\}}{\sinh(2\lambda_1 l) - 2\lambda_1 l};$$

$$\Omega_{12}(x) = -\frac{Im\{\sinh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k l)\}}; \quad \Omega_{22}(x) = -\frac{Im\{\lambda_k \sinh(\bar{\lambda}_k l) \cosh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k l)\}},$$

$$\Omega_{32}(x) = -\frac{Im\{\lambda_k^2 \sinh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k \cosh(\bar{\lambda}_k l) \sinh(\lambda_k l)\}}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (68)$$

Под знаками Im стоят быстрорастущие функции, которые нужно привести к виду, не приводящему к переполнению памяти компьютера:

$$\Omega_{12}(x) = -\frac{Im\{s(\bar{\lambda}_k, a_k) sx(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) s(\lambda_k, a_k)\}}; \quad \Omega_{22}(x) = -\frac{Im\{\lambda_k s(\bar{\lambda}_k, a_k) cx(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) s(\lambda_k, a_k)\}},$$

$$\Omega_{32}(x) = -\frac{Im\{\lambda_k^2 s(\bar{\lambda}_k, a_k) sx(\lambda_k, a_k, x)\}}{Im\{\bar{\lambda}_k c(\bar{\lambda}_k, a_k) s(\lambda_k, a_k)\}}. \quad (69)$$

Приведем примеры расчетов при $\nu = \frac{1}{3}$, $h = 2$, $l = 4$, $\rho = 0,4$, $E = 0,69 \cdot 10^5$ МПа (материал – катанный алюминий).

Пример 3. Симметричный случай. $K_x(y) = y^4 - 1, 2y^2 h^2 + 0, 2h^4$. Сечения $x = 4$ (рис. 12а) и $x = 3, 7$ (рис. 12б). Сечения $y = 0$ (средняя линия пластины – рис. 13а) и $y = 2$ (край пластины – рис. 13б). Сечения функции прогиба $w(x, y)$ (рис. 14): $x = 0$ (слева) и $y = 0$ (справа).

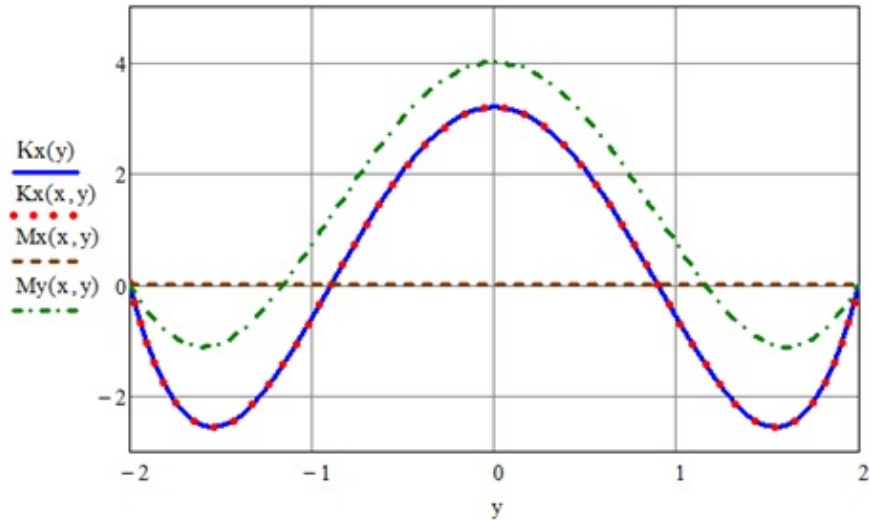
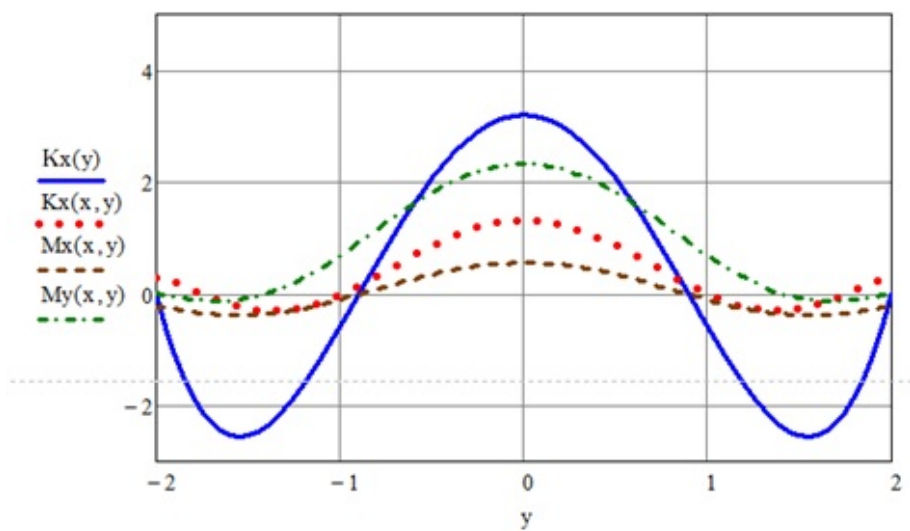
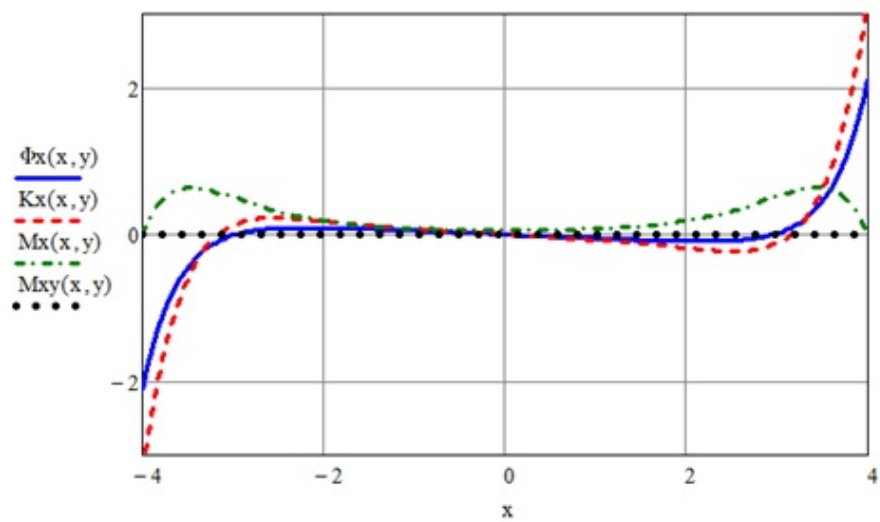


Рис. 12а. Сечение при $x = 4$

Рис. 12б. Сечение при $x = 3,7$ Рис. 13а. Сечение при $y = 0$

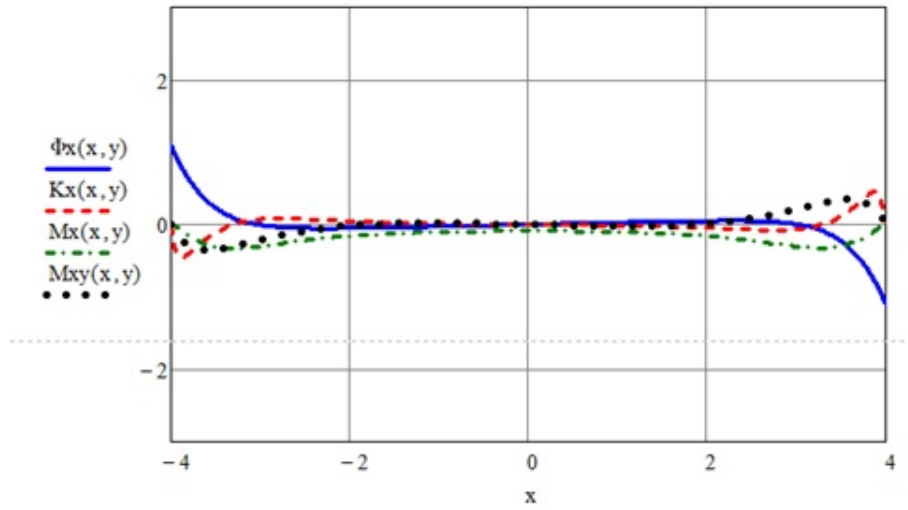


Рис. 13б. Сечение при $y = 2$

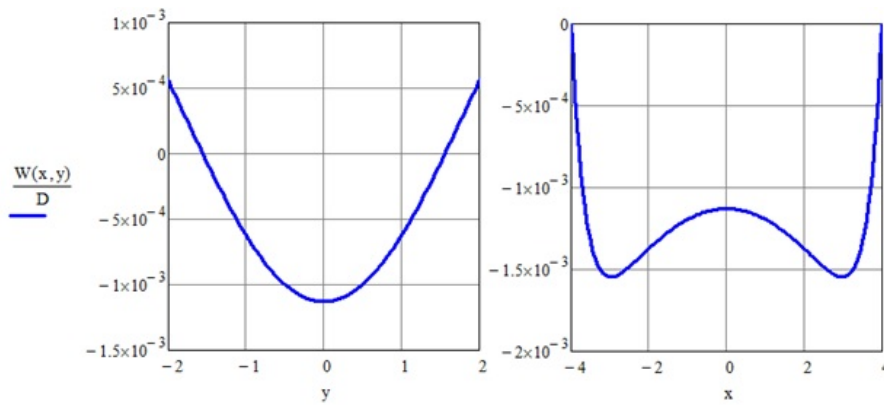
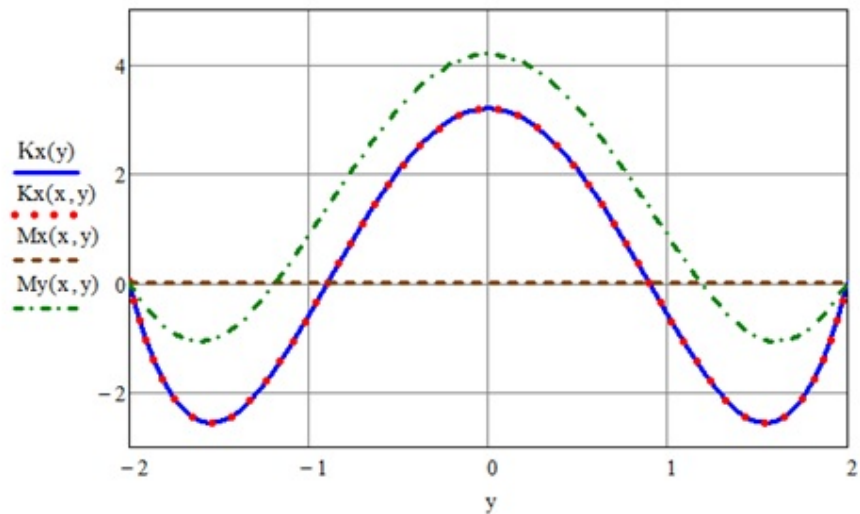
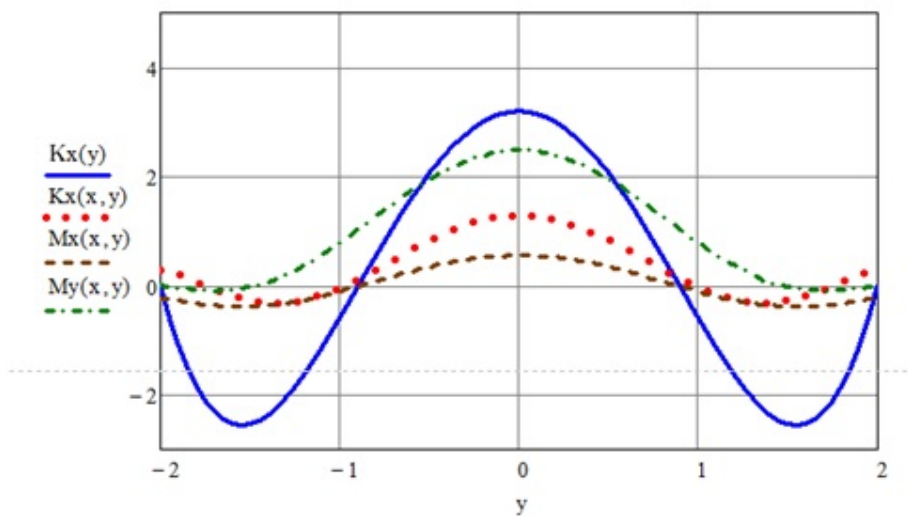
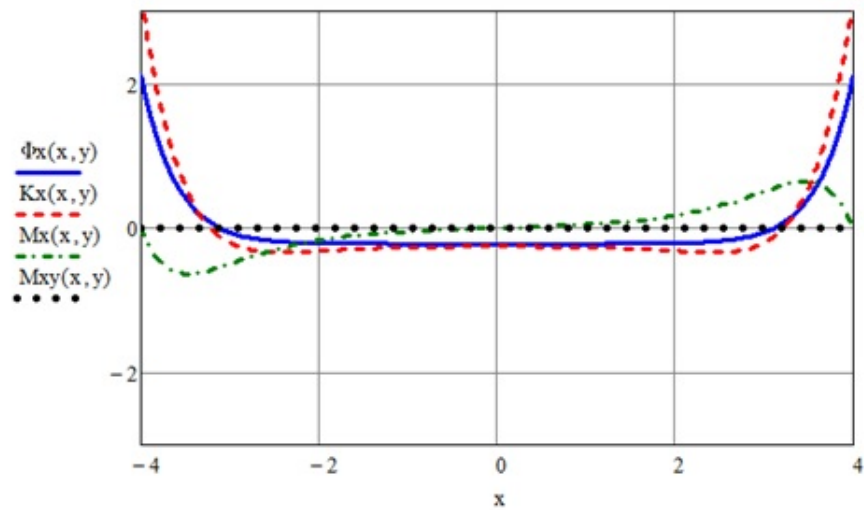
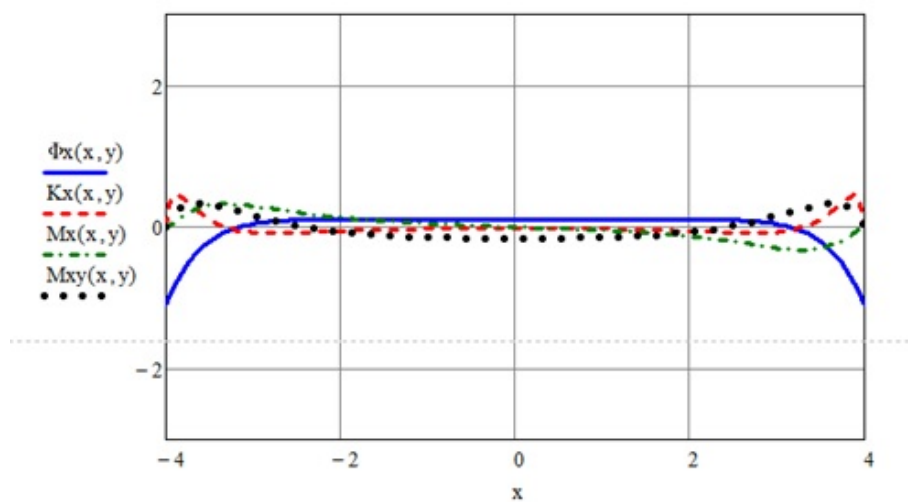


Рис. 14. Сечения функции прогиба $w(x, y)$: $x = 0$ (слева) и $y = 0$ (справа)

Пример 4. Обратносимметричный случай. $K_x(y) = y^4 - 1, 2y^2h^2 + 0, 2h^4$. Сечения $x = 4$ (рис. 15а) и $x = 3, 7$ (рис. 15б). Сечения $y = 0$ (средняя линия пластины — рис. 16а) и $y = 2$ (край пластины — рис. 16б). Сечения функции прогиба $w(x, y)$ (рис. 17): $x = 0$ (слева) и $y = 0$ (справа).

Рис. 15а. Сечение при $x = 4$ Рис. 15б. Сечение при $x = 3,7$

Рис. 16а. Сечение при $y = 0$ Рис. 16б. Сечение при $y = 2$

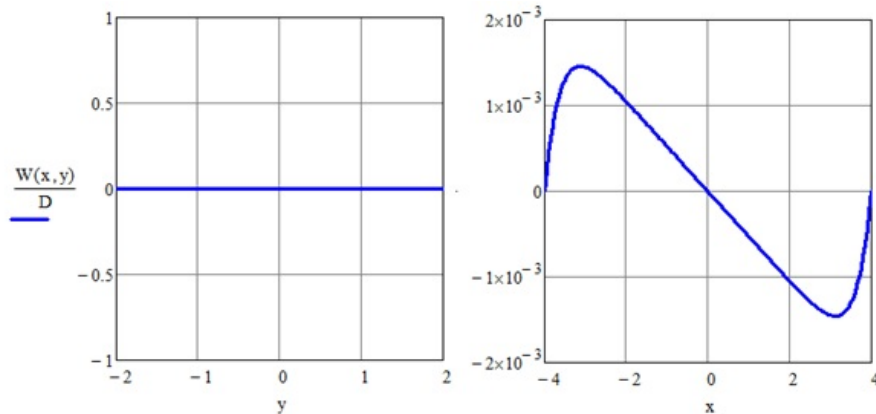


Рис. 17. Сечения функции прогиба $w(x, y)$: $x = 0$ (слева) и $y = 0$ (справа)

Результаты исследований и их обсуждение. Построено точное аналитическое решение краевой задачи изгиба тонкой пластины прямоугольной формы, продольные стороны которой свободны. Рассмотрены два случая: а) на торцах заданы ненулевые изгибающие моменты и нулевые обобщенные поперечные силы; б) на торцах заданы ненулевые обобщенные поперечные силы и нулевые изгибающие моменты.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коваленко М. Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям // Доклады РАН. 1997. Т. 352. № 4. С. 480–482.
- [2] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 78–98.
- [3] Коваленко М. Д., Меньшова И. В. Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича в обратно-симметрической задаче теории упругости для прямоугольной полуполосы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 81–90.
- [4] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. – М. : Стройиздат, 1975. 224 с.
- [5] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М. : Наука, 1966. 636 с.
- [6] Маркушевич А. И. Целые функции. Элементарный очерк. – М. : Наука, 1965. 108 с.
- [7] Кашин Б. С. Саакян А. А. Ортогональные ряды. – М. : АФЦ, 1999. 560 с.
- [8] Аbruков Д. А. Задача изгиба полуполосы со свободными продольными краями. Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 2 (20). С. 57–78.
- [9] Аbruков Д. А. Изгиб полуполосы со свободными продольными краями, на торце которой заданы изгибающий момент и обобщенная поперечная сила. Точное решение краевой задачи // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3(21). С. 94–114.

[10] Меньшова И. В. Аналитические решения двумерных краевых задач теории упругости в конечных областях с угловыми точками границы: дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук (01.02.04) / Меньшова Ирина Владимировна; ФГБОУ ВПО «МГОУ». Москва, 2013. 182 с.

Абруков Денис Александрович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: AbrukovDA@yandex.ru

D. A. Abrukov

**BEND OF A RECTANGULAR PLATE WITH THE FREE LONGITUDINAL
EDGES AT WHICH END FACES THE GENERALIZED TRANSVERSAL
FORCES AND MOMENTS OF DEFLECTION ARE SET. PRECISE SOLUTION
OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. The precise analytical solution of a boundary value problem of a bend of a squared thin plate which longitudinal parties are free is constructed. Two cases are considered: a) at end faces nonzero moments of deflection and zero generalized transversal forces are set; b) at end faces nonzero generalized transversal forces and zero moments of deflection are set. The decision is submitted in ranks on Fadle – Papkovich functions. Required coefficients of ranks are by means of systems of functions, biorthogonal to Fadle – Papkovich functions.

Keywords: plate bending, Fadle – Papkovich functions, analytical solutions.

REFERENCES

- [1] Kovalenko M. D. Lagrange’s decomposition and uncommon representations of zero on the uniform to decisions // Reports of the Russian Academy of Sciences. 1997. Vol. 352. № 4. P. 480–482. (in Russian)
- [2] Kovalenko M. D., Shulyakovskaya T. D. Decomposition on Fadlya – Papkovich’s functions in a strip. Theory bases // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. 2011. № 5. P. 78–98. (in Russian)
- [3] Kovalenko M. D., Menshova I. V. Expansions Lagrange Function Fadl - Papkovich in back-symmetric problem of the theory of elasticity for a half-strip of a rectangular // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2013. № 1 (15). P. 81–90. (in Russian)
- [4] Vlasov V. V. Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics. – M. : Stroyizdat, 1975. 224 p. (in Russian)
- [5] Tymoshenko S. P., Voynovsky-Krieger S. Plates and covers. – M. : Nauka, 1966. 636 p. (in Russian)
- [6] Markushevich A. I. Entire functions. elementary outline. – M. : Nauka, 1965. – 108 p. (in Russian)
- [7] Kashin B. S., Saakian A. A. Orthogonal ranks. – M. : AFTS, 1999. 560 p. (in Russian)
- [8] Abrukov D. A. The task of bending the half-strip with free longitudinal edges. Expansions Lagrange Function Fadl – Papkovich // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2014. № 2 (20). P. 57–78. (in Russian)
- [9] Abrukov D. A. Bending half-strip with free longitudinal edges, which are given at the end of the bending moment and shear force generalized. The exact solution of the problem // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2014. № 3 (21). P. 94–114. (in Russian)
- [10] Menshova I. V. Analytical solutions of two-dimensional boundary value problems of elasticity theory in finite domains with corners border: dis. on scientific. step. cand. Sci. sciences (01.02.04) / Menshova Irina Vladimirovna; ФГБОУ ВПО «МГОУ». Москва, 2013. 182 p. (in Russian)

Abrukov, Denis Alexandrovich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

В. Д. Кулиев, Н. Л. Борисова

ТРЕЩИНА ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА, НАХОДЯЩАЯСЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ БИУПРУГИХ ПОЛОС РАЗНОЙ ТОЛЩИНЫ. НОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

Аннотация. Методы, разработанные в статье [1], позволяют построить решение важной задачи, когда трещина продольного сдвига находится на границе раздела двух биупругих “жестко” сцепленных полос разной толщины, поверхности которых свободны от внешних нагрузок. К берегам трещины приложены равные по величине и противоположно направленные напряжения. Выявлены ранее неизвестные явления:

1⁰. Если толщины биупругих полос равны друг другу, то коэффициент интенсивности напряжений K_{III} не зависит от упругих свойств полос.

2⁰. Если толщины биупругих полос не равны друг другу, то коэффициент интенсивности напряжений K_{III} зависит от упругих свойств полос.

Ключевые слова: коэффициент интенсивности напряжений, сингулярное (особое) интегральное уравнение с обобщенным ядром Коши, напряжения, смещение, изотропная упругая среда, косинус-преобразование Фурье.

УДК: 539.375

1. Предварительное замечание. Рассмотрим сингулярное (особое) интегральное уравнение с обобщенным ядром типа Коши:

$$\sigma(x) = \frac{1}{4h_1} \cdot \frac{1}{ch \frac{\pi x}{2h_1}} \int_{-l}^l f(t) \frac{2th \frac{\pi}{2h_1} t}{ch \frac{\pi}{2h_1} t \left(th^2 \frac{\pi}{2h_1} t - th^2 \frac{\pi}{2h_1} x \right)} dt \quad (1.1)$$

$(|x| \leq l).$

Здесь $\sigma(x)$ — некоторая заданная четная функция.

Пусть $\sigma(x) \in H^\beta[-l, l]$, $1/2 < \beta < 1$, и, следовательно, $\sigma(x) \in C[-l, l]$, а искомая функция $f(t)$ удовлетворяет условиям:

$$f(t) = \frac{f_0(t)}{\sqrt{l^2 - t^2}}, \quad f_0(-t) = -f_0(t), \quad f_0(t) \in H^\beta[-l, l], \quad \frac{1}{2} < \beta < 1.$$

Заметим, что, если, например, функция $\gamma^*(t) \in H^\beta[-l, l]$, то она удовлетворяет условию Гельдера и с показателем α , где $\alpha \leq \beta$

Введем обозначения:

$$\sigma^*(x) = \sigma(x) ch \frac{\pi x}{2h_1}, \quad f^*(t) = f(t) ch \frac{\pi t}{2h_1}.$$

Поступила 16.02.2014

Очевидно, что функция $\sigma^*(x)$ является четной функцией, а функция $f^*(t)$ — нечетной функцией, причем $\sigma^*(x) \in H^\beta[-l, l]$, $f^*(t) \in K_{1/2}[-l, l]$

Уравнение (1.1) можно записать так:

$$\sigma^*(x) = \frac{1}{4h_1} \cdot \int_{-l}^l f^*(t) \frac{2th \frac{\pi t}{2h_1} \cdot \frac{1}{ch^2 \frac{\pi t}{2h_1}}}{th^2 \frac{\pi t}{2h_1} - th^2 \frac{\pi x}{2h_1}} dt. \quad (1.2)$$

Решение уравнения (1.2) в силу (1.4) в [1] дается следующей формулой:

$$f(x) = -\frac{sh \frac{\pi}{2h_1} x}{h_1 ch^2 \frac{\pi}{2h_1} x \sqrt{th^2 \frac{\pi}{2h_1} l - th^2 \frac{\pi}{2h_1} x}} \times \int_0^l \frac{\sqrt{th^2 \frac{\pi}{2h_1} l - th^2 \frac{\pi}{2h_1} t}}{\left(th^2 \frac{\pi}{2h_1} t - th^2 \frac{\pi}{2h_1} x\right)} \cdot \frac{\sigma(t)}{ch \frac{\pi}{2h_1} t} dt \quad (1.3)$$

($|x| < l$).

2. Трещина продольного сдвига на границе раздела двух биупругих “жестко” сцепленных полос разной толщины.

2.1. Постановка задачи и некоторые результаты. Пусть на границе раздела двух биупругих полос разной толщины находится трещина продольного сдвига $y = 0$, $|x| \leq l$ (рис. 1).

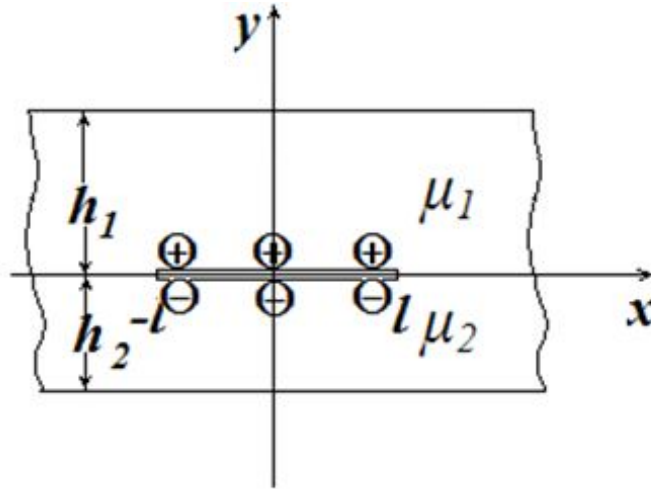


Рис. 1

При этом предполагается, что первая однородная изотропная упругая среда с упругим свойством μ_1 , занимающая область $|x| < \infty, 0 \leq y \leq h_1$, “жестко” сцеплена со второй однородной изотропной упругой средой с упругим свойством μ_2 , занимающей область $|x| < \infty, -h_2 \leq y \leq 0$, вдоль плоскости $y = 0, |x| \geq l$. Поверхности полос $y = h_1$ и $y = -h_2$ свободны от внешних нагрузок.

К берегам трещины приложены равные по величине и противоположно направленные напряжения. На бесконечности напряжения и смещение стремятся к нулю. Таким образом, приходим к следующей краевой задаче:

Граничные условия

$$|x| < \infty, (\sigma_{yz})_1(x, h_1) = 0, \quad (2.1)$$

$$|x| < \infty, (\sigma_{yz})_2(x, -h_2) = 0, \quad (2.2)$$

$$|x| \leq l, (\sigma_{yz})_1(x, +0) = (\sigma_{yz})_2(x, -0) = -\sigma(x), \quad (2.3)$$

$$|x| \geq l, (\sigma_{yz})_1(x, +0) = (\sigma_{yz})_2(x, -0), \quad (2.4)$$

$$w_1(x, +0) = w_2(x, -0). \quad (2.5)$$

Условия на конце трещины (см. §5, глава V в [2])

$$\lim_{x \rightarrow l-0} \left\{ \sqrt{2\pi(l-x)} \left[\frac{\partial w_1(x, +0)}{\partial x} - \frac{\partial w_2(x, -0)}{\partial x} \right] \right\} = -\frac{(k+1)}{\mu_1} K_{III} \quad (2.6)$$

$$(k = \mu_1/\mu_2).$$

или

$$\lim_{x \rightarrow l+0} \left\{ \sqrt{2\pi(x-l)} (\sigma_{yz})_1(x, +0) \right\} = K_{III}. \quad (2.7)$$

Условия на бесконечности (с учетом (2.3)–(2.5)):

$$|x| \rightarrow \infty, 0 \leq y \leq h_1, \quad (\sigma_{yz})_1 \rightarrow 0, (\sigma_{xz})_1 \rightarrow 0, w_1 \rightarrow 0; \quad (2.8)$$

$$|x| \rightarrow \infty, -h_2 \leq y \leq 0, \quad (\sigma_{yz})_2 \rightarrow 0, (\sigma_{xz})_2 \rightarrow 0, w_2 \rightarrow 0;$$

Здесь используются общепринятые обозначения (см., напр., [2]). Функция $\sigma(x)$ — заданная функция, причем $\sigma(-x) = \sigma(x)$.

Рассматриваемая задача, очевидно, симметрична относительно плоскости $x = 0$.

В случае антиплоской деформации отличные от нуля компоненты тензора напряжений $\sigma_{xz}(x, y)$ и $\sigma_{yz}(x, y)$ в однородной изотропной упругой среде связаны со смещением $w(x, y)$ следующим образом:

$$\sigma_{xz}(x, y) = \mu \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, \quad \sigma_{yz}(x, y) = \mu \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}, \quad (2.9)$$

причем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (2.10)$$

т. е. единственный отличный от нуля компонент вектора смещений $w(x, y)$ является гармонической функцией.

Поскольку в рассматриваемой задаче $w_j(-x, y) = w_j(x, y)$, т. е. смещения $w_j(x, y)$ в каждой полосе являются четной функцией по x , то, применяя косинус-преобразование Фурье по x к уравнению (2.10), в силу (2.8) и (2.9), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка.

$$\frac{d^2 w^*(\lambda, y)}{dy^2} - \lambda^2 w^*(\lambda, y) = 0. \quad (2.11)$$

Здесь

$$w * (\lambda, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} w(x, y) \cos \lambda x dx, \quad (2.12)$$

где λ — действительный параметр Фурье.

Из (2.11) в силу условий (2.1) и (2.2) с учетом (2.9), получаем:
в первой среде $0 \leq y \leq h_1, x \geq 0$:

$$w_1(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(\lambda) \frac{ch\lambda(h_1 - y)}{ch\lambda h_1} \cos \lambda x d\lambda, \quad (2.13)$$

$$(\sigma_{yz})_1(x, y) = -\mu_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda A(\lambda) \frac{sh\lambda(h_1 - y)}{ch\lambda h_1} \cos \lambda x d\lambda, \quad (2.14)$$

$$(\sigma_{xz})_1(x, y) = -\mu_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda A(\lambda) \frac{ch\lambda(h_1 - y)}{ch\lambda h_1} \sin \lambda x d\lambda; \quad (2.15)$$

во второй среде $-h_2 \leq y \leq 0, x \geq 0$:

$$w_2(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} B(\lambda) \frac{ch\lambda(h_2 + y)}{ch\lambda h_2} \cos \lambda x d\lambda, \quad (2.16)$$

$$(\sigma_{yz})_2(x, y) = \mu_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda B(\lambda) \frac{sh\lambda(h_2 + y)}{ch\lambda h_2} \cos \lambda x d\lambda, \quad (2.17)$$

$$(\sigma_{xz})_2(x, y) = -\mu_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda B(\lambda) \frac{ch\lambda(h_2 + y)}{ch\lambda h_2} \sin \lambda x d\lambda. \quad (2.18)$$

Здесь $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ — неизвестные функции.

2.2. Решение краевой задачи (2.1)–(2.8).

Из (2.13), (2.14), (2.16) и (2.17) в силу условий (2.3)–(2.5) находим:
при $x > l$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [A(\lambda) - B(\lambda)] \cos \lambda x d\lambda = 0 \quad (2.19)$$

(так как $w_j(l, \pm 0) = 0$ (см. глава V в [2]);
при $x \geq 0$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda [\mu_1 A(\lambda) th\lambda h_1 + \mu_2 B(\lambda) th\lambda h_2] \cos \lambda x d\lambda = 0. \quad (2.20)$$

Из (2.20) следует:

$$kA(\lambda) th\lambda h_1 = -B(\lambda) th\lambda h_2 \left(k = \frac{\mu_1}{\mu_2} \right). \quad (2.21)$$

Пусть

$$A(\lambda) - B(\lambda) = D(\lambda), \quad (2.22)$$

$$D(\lambda) = \frac{k+1}{\mu_1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt. \quad (2.23)$$

Здесь $f(t)$ — новая неизвестная функция.

В дальнейшем нам понадобится разрывной множитель (или интеграл) Дирихле [2]:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda = \begin{cases} \pi/2, & x < t, \\ \pi/4, & x = t, \\ 0, & x > t. \end{cases} \quad (2.24)$$

Теперь, учитывая (2.22) и (2.23) в (2.19), в силу (2.24) получаем:

$$\int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda dt = 0, \quad (2.25)$$

так как $x > l$.

Стало быть, условие (2.5) удовлетворяется автоматически.

Докажем, что $f(x) \in K_{1/2}[-l, l]$, т.е

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad f_0(-x) = -f_0(x), \quad f_0(x) \in H^\beta[-l, l], \quad \frac{1}{2} < \beta \leq 1 \quad (2.26)$$

Доказательство. Из (2.13) и (2.16) с учетом (2.22), (2.23) и (2.24) при $0 < x < l$ имеем:

$$\begin{aligned} w_1(x, +0) - w_2(x, -0) &= \frac{k+1}{\mu_1} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda dt = \\ &= \frac{k+1}{\mu_1} \cdot \frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{x-\varepsilon} f(t) \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda dt + \right. \\ &\left. + \int_{x+\varepsilon}^l f(t) \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda dt \right\} = \frac{k+1}{\mu_1} \int_x^l f(t) dt, \end{aligned} \quad (2.27)$$

откуда следует:

$$\frac{\partial w_1(x, +0)}{\partial x} - \frac{\partial w_2(x, -0)}{\partial x} = \frac{k+1}{\mu_1} f(x). \quad (2.28)$$

Следовательно, $f(x) \in K_{1/2}[-l, l]$.

Доказательство закончено.

Из (2.6) с учетом (2.28), находим

$$K_{III} = \sqrt{\pi l} \frac{f_0(l)}{l} \quad (2.29)$$

Остается определить функцию $f(x)$. Действительно, из (2.21) и (2.22) с учетом (2.23) находим:

$$B(\lambda) = -\frac{k+1}{\mu_2} \cdot \frac{th\lambda h_1}{kth\lambda h_1 + th\lambda h_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt, \quad (2.30)$$

$$A(\lambda) = \frac{k+1}{\mu_1} \cdot \frac{th\lambda h_2}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt. \quad (2.31)$$

Заметим, что все условия краевой задачи удовлетворены, за исключением условия (2.3). Из (2.14) с учетом (2.31) при $0 < y < h_1$ имеем:

$$\begin{aligned} (\sigma_{yz})_1(x, y) &= -(k+1) \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{th\lambda h_2}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \cdot \frac{sh\lambda(h_1-y)}{ch\lambda h_1} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{sh\lambda(h_1-y)}{ch\lambda h_1} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt - \\ &-\frac{2k}{\pi} \int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{th\lambda h_2 - th\lambda h_1}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \cdot \frac{sh\lambda(h_1-y)}{ch\lambda h_1} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt = \\ &= -\frac{1}{h_1} \int_0^l f(t) \left[\frac{\sin \frac{\pi(h_1-y)}{2h_1} \cdot sh \frac{\pi(t-x)}{2h_1}}{ch \frac{\pi(t-x)}{h_1} + \cos \frac{\pi(h_1-y)}{h_1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \frac{\pi(h_1-y)}{2h_1} \cdot sh \frac{\pi(t+x)}{2h_1}}{ch \frac{\pi(t+x)}{h_1} + \cos \frac{\pi(h_1-y)}{h_1}} \right] dt - \\ &-\frac{2k}{\pi} \int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{th\lambda h_2 - th\lambda h_1}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \cdot \frac{sh\lambda(h_1-y)}{ch\lambda h_1} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Отсюда, удовлетворив условие (2.3), приходим к сингулярному интегральному уравнению первого рода с обобщенным ядром Коши:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \frac{1}{4h_1} \cdot \frac{1}{ch \frac{\pi x}{2h_1}} \int_{-l}^l f(t) \frac{2th \frac{\pi}{2h_1} t}{ch \frac{\pi}{2h_1} t \left(th^2 \frac{\pi}{2h_1} t - th^2 \frac{\pi}{2h_1} x \right)} dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t) K(x, t) dt, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$K(x, t) = k \int_0^\infty \frac{(th\lambda h_2 - th\lambda h_1)}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda \quad (2.34)$$

$$(|x| \leq l).$$

В (2.33) первый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Из (2.33) и (2.34) видно, что только ядро $K(x, t)$, являющееся непрерывной функцией своих аргументов, зависит от свойств материалов k ($k = \mu_1/\mu_2$).

Сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши на отрезке $[-l, l]$ имеет вид [3]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad (\text{A})$$

где ядро $K(x,t)$ и свободный член $f(x)$ – заданные на отрезке $[-l, l]$ непрерывные функции своих аргументов.

Уравнение (A) часто встречается в приложениях, особенно в аэродинамике и плоской теории упругости.

Существуют приближенные методы (если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет некоторым условиям (см., напр., [3])) и численные методы решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши (см., напр. [4] и ссылки в [4]). Однако, чтобы применить их к решению (2.33) требуются дополнительные исследования. Поэтому рассмотрим два важных случая, позволяющих выявить новые явления в теории трещин продольного сдвига.

2.3. Первый случай. Коэффициент интенсивности напряжений. Пусть в рассматриваемой задаче $h_1 = h_2$. Тогда из (2.33) и (2.34) следует:

$$\sigma(x) = \frac{1}{4h_1} \cdot \frac{1}{ch \frac{\pi x}{2h_1}} \int_{-l}^l f(t) \frac{2th \frac{\pi}{2h_1} t}{ch \frac{\pi}{2h_1} t \left(th^2 \frac{\pi}{2h_1} t - th^2 \frac{\pi}{2h_1} x \right)} dt \quad (2.35)$$

($|x| \leq l$),

так как в этом случае $K(x,t) \equiv 0$.

В работе [1], опираясь на метод, предложенный в [5], построено решение таких сингулярных уравнений.

Решение уравнения (2.35) в силу (1.3), определяется формулой:

$$f_0(x) = - \frac{\sqrt{l^2 - x^2} sh \frac{\pi}{2h_1} x}{h_1 ch^2 \frac{\pi}{2h_1} x \sqrt{th^2 \frac{\pi}{2h_1} l - th^2 \frac{\pi}{2h_1} x}} \times$$

$$\times \int_0^l \frac{\sqrt{th^2 \frac{\pi}{2h_1} l - th^2 \frac{\pi}{2h_1} t}}{\left(th^2 \frac{\pi}{2h_1} t - th^2 \frac{\pi}{2h_1} x \right)} \cdot \frac{\sigma(t)}{ch \frac{\pi}{2h_1} t} dt, \quad (2.36)$$

так как $f(x) \in K_{1/2}] - l, l[$.

Отсюда, при $x \rightarrow l - 0$ находим

$$\frac{f_0(l)}{l} = \sqrt{\frac{2th \frac{\pi}{2h_1} l}{\pi l h_1}} \int_0^l \frac{\sigma(t)}{ch \frac{\pi}{2h_1} t \sqrt{th^2 \frac{\pi}{2h_1} l - th^2 \frac{\pi}{2h_1} t}} dt. \quad (2.37)$$

С помощью (2.37) и (2.29) находим коэффициент интенсивности напряжений K_{III} :

$$K_{III} = \sqrt{\frac{2}{h_1} th \frac{\pi}{2h_1} l} \int_0^l \frac{\sigma(t)}{ch \frac{\pi}{2h_1} t \sqrt{th^2 \frac{\pi}{2h_1} l - th^2 \frac{\pi}{2h_1} t}} dt. \quad (2.38)$$

Приведем анализ коэффициента интенсивности напряжений K_{III} :

Пусть $h_1 \rightarrow +\infty$. Тогда из (2.38) приходим к известной формуле (см., напр. [2]):

$$K_{III} = \sqrt{\pi l} \frac{2}{\pi} \int_0^l \frac{\sigma(t)}{\sqrt{l^2 - t^2}} dt. \quad (2.39)$$

Пусть $\sigma(t) = \sigma_0 ch \frac{\pi}{2h_1} t$, где $\sigma_0 = const$. Тогда из (31) получаем:

$$K_{III} = \sigma_0 \sqrt{h_1 sh \frac{\pi}{h_1} l},$$

откуда при $h_1 \rightarrow +\infty$ имеем

$$K_{III} = \sigma_0 \sqrt{\pi l}, \quad (2.40)$$

что и следовало ожидать.

2.4. Второй случай. Коэффициент интенсивности напряжений

Пусть $h_1 \rightarrow +\infty$, а $h_2 = const$. Тогда из (2.33) с учетом (2.34) приходим к следующему сингулярному интегральному уравнению 1-го рода типа Коши:

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(t) \frac{2t}{t^2 - x^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t) K_0(x, t) dt, \quad (2.41)$$

$$K_0(x, t) = -k \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h_2}}{sh \lambda h_2 + k \cdot ch \lambda h_2} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda \quad (2.42)$$

$$(f(t) \in K_{1/2}[-l, l]).$$

Сингулярное интегральное уравнение 1-го рода типа Коши (2.41) с помощью метода, предложенного в [1] сводится к следующему интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода с непрерывным ядром:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sigma(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau = \psi(x) + \int_0^l \psi(t) K_\Phi(x, t) dt, \quad (2.43)$$

$$K_\Phi(x, t) = -k \int_0^\infty \frac{\lambda t e^{-\lambda h_2}}{sh \lambda h_2 + k \cdot ch \lambda h_2} J_0(\lambda t) J_0(\lambda x) d\lambda, \quad (2.44)$$

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^l \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau. \quad (2.45)$$

Здесь $J_0(u)$ — бesselова функция первого рода нулевого порядка.

Чтобы получить из (2.41) и (2.42) формулы (2.43) и (2.44), следует учесть

1. $\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{2tf(t)}{t^2 - x^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(t) \left[\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{f(t)}{t-x} dt,$

так как $f(t) \in K_{1/2}[-l, l]$.

2. $J_0(\lambda t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\cos \lambda \tau}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau.$

3. Лемму 5 в [1], а именно:

Равенство:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t \psi(t) J_0(\lambda t) dt \quad (2.45^1)$$

будет справедливо в том и только в том случае, если

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi} \int_t^l \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} d\tau,$$

$$f(t) = -\frac{d}{dt} \int_t^l \frac{\tau \psi(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} d\tau.$$

4. Теорему 1 в [1] при $\delta = 1/2$ (см. также (3.3) в [1]).
Поскольку $f(x) \in K_{1/2}[-l, l]$, т. е.:

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad f_0(x) = -f_0(-x),$$

$$f_0(x) \in H^\beta[-l, l], \quad 1/2 < \beta \leq 1,$$

$$f_0(0) = 0,$$

то из (2.45) следует, что интеграл

$$\psi(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^l \frac{f_0(\tau)}{\tau \sqrt{l^2 - \tau^2}} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{f_0(\tau)}{\tau \sqrt{l^2 - \tau^2}} d\tau \quad (2.45^2)$$

существует как несобственный интеграл.

С помощью леммы 2 в [1] имеем:

$$\lim_{x \rightarrow l-0} \psi(x) = \frac{f_0(l)}{l}, \quad (2.46^1)$$

причем $\psi(x) \in C[0, l]$. Поэтому

$$\psi(l) = \frac{f_0(l)}{l}. \quad (2.46)$$

Коэффициент интенсивности напряжений K_{III} в силу (2.29) и (2.46) определяется по следующей формуле:

$$K_{III} = \sqrt{\pi l} \cdot \psi(l). \quad (2.47)$$

Пусть $\sigma(x) = \sigma_0 \equiv const$. Введем обозначения:

$$x = l\xi, \quad t = l\eta, \quad \frac{\psi_0(x)}{\sigma_0} = \frac{\psi_0(l\xi)}{\sigma_0} = \Psi(\xi),$$

$$lK_{\Phi}(x, t) = lK_{\Phi}(l\xi, l\eta) = K_{\Phi}^*(\xi, \eta). \quad (2.48)$$

Тогда уравнение (2.43) можно записать так:

$$1 = \Psi(\xi) + \int_0^1 \Psi(\eta) K_{\Phi}^*(\xi, \eta) d\eta, \quad (2.49)$$

$$K_{\Phi}^*(\xi, \eta) = -k \left(\frac{l}{h_2} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{u\eta e^{-u}}{shu + k \cdot chu} J_0 \left(u\eta \frac{l}{h_1} \right) J_0 \left(u\xi \frac{l}{h_1} \right) du$$

$$(0 \leq \xi \leq 1).$$

Коэффициент интенсивности напряжений K_{III} в силу (2.47) и (2.48) определяется формулой:

$$K_{III} = \sigma_0 \sqrt{\pi l} \cdot \Psi \left(1, k, \frac{l}{h_2} \right). \quad (2.50)$$

Применение метода последовательных приближений [4] к уравнению (2.49) позволяет провести численный анализ коэффициента интенсивности напряжений K_{III} при заданных значениях k и l/h_2 .

Результаты численного расчета зависимости поправочной функции $\Psi \left(1, k, \frac{l}{h_2} \right)$ от l/h_2 при заданных значениях k представлены на рис. 2.

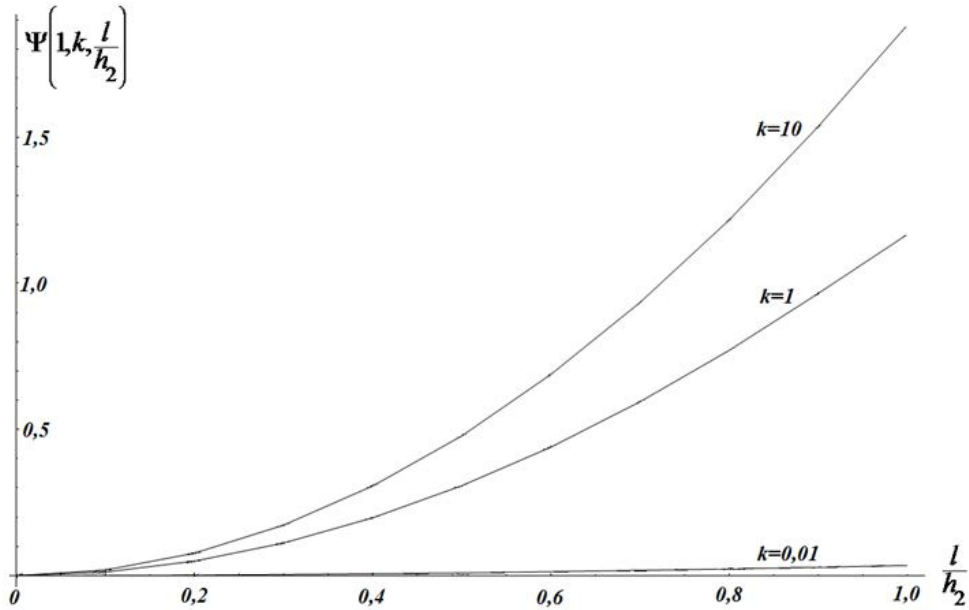


Рис. 2

Численный анализ показывает:

При заданных значениях k с увеличением l/h_2 (т. е. с уменьшением h_2 при неизменном значении l) поправочная функция $\Psi \left(1, k, \frac{l}{h_2} \right)$ увеличивается.

С увеличением k при одном и том же значении l/h_2 (при этом считается, что l не изменяется) поправочная функция $\Psi \left(1, k, \frac{l}{h_2} \right)$ увеличивается.

Если $l/h_2 \rightarrow 0$ (при неизменном значении l), то

$$\Psi(1, k, 0) = 1$$

для любого k ($0 < k < \infty$)

Если $0,01 \leq k \leq 10$, то графики зависимости поправочной функции $\Psi\left(1, k, \frac{l}{h_2}\right)$ от l/h_2 находятся между графиками $k = 0,01$ и $k = 10$, при этом полученные кривые не пересекаются друг с другом. А это говорит о том, что решение интегрального фредгольмова уравнения 2-го рода при фиксированных значениях k и l/h_2 определяются однозначно.

2.5. Новые явления, обнаруженные в рассматриваемой задаче.

1. Если в рассматриваемой задаче $h_1 = h_2 = h$, то коэффициент интенсивности напряжений K_{III} не зависит от k для любого $h > 0$, что следует из (2.38).

2. Если $h_1 = h_2 = h$, то смещения и упругие деформации, определенные в каждой полосе, обратно пропорциональны соответствующим модулям сдвига, что следует из (2.30)–(2.32), (2.36), и не зависят от k .

3. Если $h_1 \neq h_2$ ($h_1 > 0, h_2 > 0$) и если одна из толщины полосы конечна, то коэффициент интенсивности напряжений K_{III} зависит от k , что следует из (2.33), (2.34), (2.42)–(2.45).

4. Если $h_1 \neq h_2$ ($h_1 > 0, h_2 > 0$) и если одна из толщины полосы конечна, то смещения и упругие деформации, определенные в каждой полосе, обратно пропорциональны соответствующим модулям сдвига и зависят от k , что следует из (2.33), (2.34), (2.42)–(2.45), (2.30), (2.31).

Эти явления впервые обнаруженные в данной статье для рассматриваемой задачи представляют значительный практический и теоретический интерес. Аналогичные явления были обнаружены и в других работах [5], [6].

Следует отметить, что, если трещина продольного сдвига находится в многослойных материалах (при этом предполагается, что трещина перпендикулярна границам раздела сред), то коэффициент интенсивности напряжений K_{III} зависит от упругих свойств материалов (см., напр., [2], [7]–[30]).

2.6. Необходимые замечания.

Замечание 1. Сингулярное интегральное уравнение первого рода с обобщенным ядром Коши (2.33) нами получено из (2.32) с учетом (2.3).

Возникает вопрос: получается ли уравнение (2.33) с помощью (2.30), (2.17) и (2.3)? Ответ будет положительным.

Действительно, учитывая (2.30) в (2.17) с учетом (2.3) имеем:

$$\begin{aligned}
 -\sigma(x) &= (\sigma_{yz})_2(x, -0) = -(k+1) \cdot \frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow -0} \int_0^l f(t) \times \\
 &\times \int_0^\infty \frac{th\lambda h_1}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \cdot \frac{sh\lambda(h_2 + y)}{ch\lambda h_2} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt = \\
 &= -(k+1) \frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow -0} \int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{th\lambda h_2}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \cdot \\
 &\cdot \left\{ \left[\frac{th\lambda h_1}{th\lambda h_2} \cdot \frac{sh\lambda(h_2 + y)}{ch\lambda h_2} - \frac{sh\lambda(h_1 + y)}{ch\lambda h_1} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{sh\lambda(h_1 + y)}{ch\lambda h_1} \right\} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt = \\
 &= -(k+1) \cdot \frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow -0} \left\{ \int_0^l f(t) \times \right. \\
 &\times \int_0^\infty \frac{th\lambda h_2}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \cdot \left[\frac{th\lambda h_1}{th\lambda h_2} \cdot \frac{sh\lambda(h_2 + y)}{ch\lambda h_2} - \frac{sh\lambda(h_1 + y)}{ch\lambda h_1} \right] \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{th\lambda h_2}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \cdot \frac{sh\lambda(h_1 + y)}{ch\lambda h_1} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt \right\} = \\
& = -(k+1) \frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow -0} \int_0^l f(t) \int_0^\infty \frac{th\lambda h_2}{k \cdot th\lambda h_1 + th\lambda h_2} \cdot \frac{sh\lambda(h_1 + y)}{ch\lambda h_1} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda dt.
\end{aligned}$$

Отсюда, поступая точно так же, как в (2.32) приходим к обобщенному сингулярному интегральному уравнению (2.33) и (2.34).

Замечание 2. Из формулы (2.30) и (2.31) с помощью теоремы 1 (в смысле Эрдейи), доказанной нами в [2] (см. с. 194–200), имеем:

$$B(\lambda) = -\frac{1}{\mu_2} \frac{f_0(l)}{\sqrt{l}\lambda^{3/2}} \sin\left(\lambda l - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{5/2}}\right) (\lambda \rightarrow +\infty), \quad (2.51)$$

$$A(\lambda) = \frac{1}{\mu_1} \frac{f_0(l)}{\sqrt{l}\lambda^{3/2}} \sin\left(\lambda l - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{5/2}}\right) (\lambda \rightarrow +\infty), \quad (2.52)$$

если $f_0(x) \in C^1[0, l]$, (более подробно см. [1]).

Известно (см., например, [2]), что, если $f_0(x)$ дифференцируема и имеет конечную производную, то она удовлетворяет условию Липшица.

Это следует из теоремы о конечном приращении.

Если же $f_0(x) \in H^\beta[0, l]$, где $1/2 < \beta < 1$, то модуль непрерывности этой функции $\omega(\delta) = \omega(\delta, f_0) = \sup_{|x''-x'| \leq \delta} |f_0(x'') - f_0(x')|$ ($x', x'' \in [0, l]$) будет стремиться к нулю при $\delta \rightarrow +0$, как δ^β , т. е.

$$\omega(\delta) = o(\delta^\beta).$$

Поэтому в силу теоремы 2 в смысле Эрдейи (см. [2], с. 200) для формулы (2.30) и (2.31) имеют место асимптотические равенства:

$$B(\lambda) \sim -\frac{1}{\mu_2} \frac{f_0(l)}{\sqrt{l}\lambda^{3/2}} \sin\left(\lambda l - \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.53)$$

$$A(\lambda) \sim \frac{1}{\mu_1} \frac{f_0(l)}{\sqrt{l}\lambda^{3/2}} \sin\left(\lambda l - \frac{\pi}{4}\right) (\lambda \rightarrow +\infty), \quad (2.54)$$

так как при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt \sim \frac{f_0(l)}{\sqrt{l}\lambda^{3/2}} \sin\left(\lambda l - \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.55)$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t\psi(t) J_0(\lambda t) dt \sim \frac{\sqrt{a}\psi(a)}{\lambda^{3/2}} \sin\left(\lambda l - \frac{\pi}{4}\right). \quad (2.56)$$

Следствие 1. Все интегралы в формулах (2.13)–(2.18) в силу (2.51) и (2.54) являются сходящимися интегралами.

Замечание 3. С помощью леммы Римана-Лебега [2] не трудно показать, что смещения $w_j(x, y)$ и напряжения $(\sigma_{xz})_j(x, y)$, $(\sigma_{yz})_j(x, y)$, где $j = 1, 2$, определяемые по формулам (2.30), (2.31), (2.13)–(2.18) с учетом (2.45¹) и (2.56) удовлетворяют условиям в (2.8). При этом условие леммы Римана-Лебега удовлетворяется в силу известного признака Дирихле о сходимости интеграла.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кулиев В. Д. Новая формула суммирования функциональных рядов и некоторые ее приложения (ч. 1) // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С.107–119
- [2] Кулиев В. Д. Сингулярные краевые задачи. – М. : Физматлит, 2005. С. 720.
- [3] Каландия А. И. Математические методы двумерной теории упругости. – М. : Наука, 1973. С. 303.
- [4] Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. – М. : Наука, 1977. С. 312.
- [5] Кулиев В. Д. Обращение особого интеграла с обобщенным ядром Коши и одно его применение // Сборник трудов X Международной научной школы “Гидродинамика больших скоростей” и Международной научной конференции “Гидродинамика. Механика. Энергетические установки.” (к 145-летию со дня рождения академика А. Н. Крылова). Чебоксары : ЧПИ МГОУ, 2008. С. 317–333.
- [6] Кулиев В. Д. Наклонная краевая трещина продольного сдвига на границе раздела двух сред // Сборник трудов X Международной научной школы “Гидродинамика больших скоростей” и Международной научной конференции “Гидродинамика. Механика. Энергетические установки.” (к 145-летию со дня рождения академика А. Н. Крылова). Чебоксары : ЧПИ МГОУ, 2008. С. 555–569 .
- [7] Кулиев В. Д., Раджабов З. Р. Краевая трещина продольного сдвига в биметаллах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 2 (20). С. 3–12.
- [8] Кулиев В. Д., Раджабов З. Р. Краевая трещина продольного сдвига в многослойной среде // Вестник МГОУ. 2009. № 2. С. 43–49.
- [9] Кулиев В. Д. Некоторые задачи о ветвлении трещины сдвига в кусочно однородной упругой среде // Доклады АН Азерб. ССР. 1979. № 6.
- [10] Кулиев В. Д. Новый метод решения канонических сингулярных задач теории упругости кусочно однородных сред. // Механика разрушения. 1999.
- [11] Кулиев В. Д. Преломление трещины продольного сдвига // Доклады АН СССР. 1979. Т. 249. № 2.
- [12] Кулиев В. Д. Трещина на границе раздела двух сред с ответвлением в одну из них в случае антиплоской деформации // Проблемы прочности. 1979. № 7.
- [13] Кулиев В. Д., Жеков Н. Д. Сингулярные задачи теории упругости для трещин, перпендикулярных границе раздела сред // Прикладная математика и механика. 1985. Т. 49. Вып. 3.
- [14] Кулиев В. Д., Каплун А. Б. Разрушение гетерогенных сред (антиплоская деформация) // Доклады АН Азерб. ССР. Механика. 1981. № 4.
- [15] Кулиев В. Д., Жеков Н. Д. Краевая трещина в ортотропной полуплоскости // Физ.-хим. механика материалов. 1987. № 1.
- [16] Кулиев В. Д., Каплун А. Б. Трещина продольного сдвига в кусочно однородной упругой среде // Механика композитных материалов. 1981. № 3.
- [17] Кулиев В. Д., Мехтиев А. К., Насибов В. И. К проблеме разрушения многослойных сред с трещинами // Физ.-хим. механика материалов. 1986. № 2.
- [18] Кулиев В. Д., Насибов В. И. К проблеме торможения трещины в многослойных средах // Доклады АН СССР. 1986. Т. 288. № 3.
- [19] Кулиев В. Д., Насибов В. И. Краевая трещина в биупругой полосе // Механика композитных материалов. 1983. № 4.
- [20] Кулиев В. Д., Новрузов Г. М. К проблеме разрушения кусочно-однородной среды с трещиной // Доклады АН СССР. 1986. Т. 288. № 5.

- [21] Кулиев В. Д., Работнов Ю. Н., Черепанов Г. П. Торможение трещины на границе раздела различных упругих сред // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 4.
- [22] Кулиев В. Д., Разумовский И. А., Искендер-Заде Ф. А., Каплун А. Б. Расчетные и экспериментальные методы анализа хрупкой прочности и усталостной долговечности конструкций из многослойных материалов // Прочность и надежность конструкций (к 50-летию проф. В. Д. Кулиева). – М. : Изд-во МГОУ, 1993.
- [23] Максудов Ф. Г., Кулиев В. Д., Искендерзаде Ф. А. К проблеме разрушения биупругой среды // Доклады АН СССР. 1982. Т. 264. № 6.
- [24] Кулиев В. Д., Новрузов Г. М. Плоская задача для кусочно-однородной среды с ломаной трещиной // Прикладная механика. 1984. Т. 20. № 9.
- [25] Кулиев В. Д., Разумовский И. А., Злочевская О. Б. Краевая трещина в двухслойных материалах. Аналитические и экспериментальные методы определения хрупкой прочности и остаточных напряжений // Научно-технический прогресс в машиностроении. 1990. Вып. 29.
- [26] Кулиев В. Д., Разумовский И. А. К проблеме определения остаточных напряжений в металлах // Доклады АН СССР. 1990. Т. 315. № 3.
- [27] Кулиев В. Д., Черепанов Г. П. Теория устойчивости скальных откосов с тектоническими трещинами // Теоретична и приложна механика. Кн. I.- Изд-во на Българска Академия на науките, 1977.
- [28] Образцов И. Ф., Кулиев В. Д., Каплун А. Б. К теории разрушения многослойных материалов с трещиной. Статистическое нагружение // Доклады АН СССР. 1988. Т. 303. № 4.
- [29] Образцов И. Ф., Кулиев В. Д., Каплун А. Б. К теории разрушения многослойных материалов с трещиной. Циклическое нагружение // Доклады АН СССР. 1988. Т. 303. № 5.
- [30] Образцов И. Ф., Кулиев В. Д., Разумовский И. А., Фарзалибеков Н. Э. К проблеме разрушения биметаллических материалов с краевой трещиной // Доклады АН СССР. 1989. Т. 308. № 3.

Кулиев Валех Джафарович,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

e-mail: pmdekanat@rambler.ru

Борисова Наталья Львовна,

старший преподаватель кафедры прикладной математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

e-mail: nbolo@yandex.ru

V. D. Kuliev, N. L. Borisova

**CRACK LONGITUDINAL SHEAR, LOCATED ON THE BOUNDARY
BETWEEN TWO BI-ELASTIC STRIPS OF DIFFERENT THICKNESS. NEW
DEVELOPMENTS**

Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow

Abstract. Methods developed in [1] allow us to construct solution of important task when the crack is longitudinal shear at the interface of two bi-elastic "rigidly" coupled bands of different thickness, the surface of which are free from external loads. By the shores of the crack attached equal in magnitude and opposite voltages. Revealed previously unknown phenomenon:

1⁰. If the thickness bi-elastic bands equal to each other, the stress intensity factor K_{III} not depend on the elastic properties of the strips.

2⁰. If the thickness of the strips bi-elastic not equal to each other, the stress intensity factor K_{III} depends on the elastic properties of the strips.

Keywords: the stress intensity factor, singular (singular) integral equation with the generalized Cauchy kernel, stress, displacement, isotropic elastic medium, the Fourier cosine transform.

REFERENCES

- [1] Kuliev V. D. New formula of summation of functional ranks and some it appendices (P. 1) // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2013. № 1(15). p. 107-119
- [2] Kuliev V. D. Singular boundary value problems. – M. : Fizmatlit, 2005. P. 720.
- [3] Kalandia A. I. Mathematical methods of two-dimensional theory of elasticity. – M. : Nauka, 1973. P. 303.
- [4] Parton V. Z., Perlin P. I. Integral equations of the theory of elasticity. – M. : Nauka, 1977. P. 312.
- [5] Kuliev V. D. Handling the singular integral with generalized Cauchy kernel and one of his application // Proceedings of X International Scientific School “ Hydrodynamics high speeds ” and the International Scientific Conference “ Hydrodynamics. Mechanics. Power plants. ” (To the 145th anniversary of his birth Academician A. H. Krylov). Cheboksary : ChPI MGOU, 2008. P. 317–333.
- [6] Kuliev V. D. The inclined edge crack longitudinal shear at the interface two media // Proceedings of X International Scientific School “ Hydrodynamics high speeds ” and International Scientific Conference “ Hydrodynamics. Mechanics. Power plants. ” (To the 145th anniversary of Birth of Academician A. H. Krylov). Cheboksary : ChPI MGOU, 2008. P. 555–569 .
- [7] Kuliev V. D., Radjabov Z. R. The crack edges of longitudinal shear bimetal // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2014. № 2 (20). P. 3–12.
- [8] Kuliev V. D., Radjabov Z. R. The crack edges of longitudinal shear multilayer medium // Vestnik MSOU. 2009. № 2. P. 43–49.
- [9] Kuliev V. D. Some of the problem of crack branching shift piecewise homogeneous elastic media // Reports of the Azerbaijan. SSR. 1979. № 6.
- [10] Kuliev V. D. The new method of solving the problems of the theory of singular canonical elastic piecewise homogeneous media. // Fracture Mechanics. 1999.
- [11] Kuliev V. D. Refraction crack longitudinal shear // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1979. Vol. 249. № 2.
- [12] Kuliev V. D. The crack on the interface between two media with a branch in one of the which in the case of deformation antiplane // Problems of Strength. 1979. № 7.

- [13] Kuliev V. D., Zhekov N. D. Singular problem of elasticity for cracks, perpendicular to the interface media // Applied Mathematics and Mechanics. 1985. Vol. 49. Issue 3.
- [14] Kuliev V. D., Kaplun A. B. Destruction of heterogeneous environments (Antiplane strain) // Reports of the Azerbaijan. SSR. mechanics. 1981. № 4.
- [15] Kuliev V. D., Zhekov N. D. Edge cracks in orthotropic half-plane // Physico-Chemical. mechanics of Materials. 1987. № 1.
- [16] Kuliev V. D., Kaplun A. B. Longitudinal shear crack in a piecewise smooth elastic media // Mechanics of Composite Materials. 1981. № 3.
- [17] Kuliev V. D., Mehtiyev A. K., Nasibov V. I. On the problem of destruction multilayer media with cracks // Physico-Chemical. mechanics of Materials. 1986. № 2.
- [18] Kuliev V. D., Nasibov V. I. On the problem of braking cracks in multilayer Media // Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1986. Vol. 288. № 3.
- [19] Kuliev V. D., Nasibov V. I. Edge cracks in biuprugoy band // Mechanics of Composite Materials. 1983. № 4.
- [20] Kuliev V. D., Novruzov G. M. On the problem of the destruction of a piecewise homogeneous medium Cracked // Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1986. Vol. 288. № 5.
- [21] Kuliev V. D., Rabotnov Yu. N., Cherepanov G. P. Inhibition of cracks on the border section different elastic media // Izv. Mechanics of rigid body. 1978. № 4.
- [22] Kuliev V. D., Razumovsky I. A., Iskander-Zade F. A., Kaplun A. B. Calculated and experimental methods for the analysis of brittle strength and fatigue durability of structural laminates // Durability and reliability of structures (for the 50th anniversary of prof. Kuliev V. D.). – M. : MSOU, 1993.
- [23] Maksudov F. G., Kuliev V. D., Iskanderzadeh F. A. On the problem of destruction biuprugoy environment // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1982. Vol. 264. № 6.
- [24] Kuliev V. D., Novruzov G. M. Plane problem for piecewise-homogeneous environment a broken crack // Applied mechanics. 1984. Vol. 20. № 9.
- [25] Kuliev V. D., Razumovsky I. A., Zlochevskaya O. B. Edge cracks in double-layer materials. The analytical and experimental methods for determining the brittle strength and residual stresses // Scientific and technological progress in engineering. 1990. Issue 29.
- [26] Kuliev V. D., Razumovsky I. A. On the problem of determining residual stresses in Metals // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1990. Vol. 315. № 3.
- [27] Kuliev V. D., Cherepanov G. P. The theory of the stability of rock slope with tectonic fractures // Theoreticity prpilozhna and mechanics. Bk. I.- Publishing House on Blgarsa Academy for Sciences, 1977.
- [28] Obratstov I. F., Kuliev V. D., Kaplun A. B. On the theory of the destruction of multilayer materials with a crack. Statistical loading // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1988. Vol. 303. № 4.
- [29] Obratstov I. F., Kuliev V. D., Kaplun A. B. On the theory of the destruction of multilayer materials with a crack. Cyclic loading // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1988. Vol. 303. № 5.
- [30] Obratstov I. F., Kuliev V. D., Razumovsky II. A., Farzalibayov N. E. On the problem of the destruction of bimetallic materials with an edge crack // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1989. Vol. 308. № 3.

Kuliev, Valekh Dzhafarovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of the Higher Mathematics, Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow

Borisova, Natalia Lvovna

senior Lecturer, Department of the Applied Mathematics, Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow

М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, А. П. Кержаев

РАЗРЫВ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПОЛОСЕ. РЕШЕНИЕ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

Аннотация. Статья посвящена решениям в тригонометрических рядах четырех краевых задач теории упругости для бесконечной горизонтальной полосы с вертикальным разрезом. На разрезе могут быть заданы разрывы продольных или поперечных перемещений (симметричная и обратная симметричная деформации). На сторонах полосы выполняются условия периодичности: касательные напряжения и поперечные (перпендикулярные оси полосы) перемещения равны нулю. Неизвестные коэффициенты разложений находятся из условий стыка на разрезе двух функций аналитических справа от разреза (в правой полуполосе) и соответствующих им двух функций, аналитических слева от разреза (в левой полуполосе). Эти функции были впервые введены в работе [1], а затем использовались, в частности, при решении краевых задач для прямоугольника со свободными сторонами и с разрывами продольных и поперечных перемещений [2]. Показано, что решение для полосы с разрывом продольных (вдоль оси полосы) перемещений эквивалентно решению для полуполосы, на торце которой заданы продольные перемещения и нулевые касательные напряжения. А решение для полосы с поперечным разрывом эквивалентно решению для полуполосы с заданными на ее торце поперечным перемещением и нулевым нормальным напряжением. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие поведение напряжений в зависимости от гладкости кривой вблизи кончика разрыва. Решения просты и не требуют знаний специальных разделов математики – достаточно иметь представление о рядах Фурье. Анализ решений показывает, что в достаточно широкой области, прилегающей к оси полосы, и для не слишком длинных разрезов полученные решения можно использовать для предварительных оценок напряженного состояния даже в тех случаях, когда на продольных сторонах полосы заданы другие граничные условия, например, когда стороны полосы свободны.

Ключевые слова: краевая задача, полоса, полуполоса, разрыв перемещений, ряды Фурье.

УДК: 539.3

Симметричная деформация полосы

Рассмотрим бесконечную полосу $\{\Pi : |x| < \infty, |y| \leq 1\}$, полагая, что на ее сторонах $y = \pm 1$ заданы следующие условия периодичности

$$\tau_{xy}(x, \pm 1) = 0, v(x, \pm 1) = 0. \quad (1.1)$$

Решения в правой $\{\Pi^+ : x \geq 0, |y| \leq 1\}$ и левой $\{\Pi^- : x \leq 0, |y| \leq 1\}$ полуполосах можно представить следующим образом [3]:

при $x \geq 0$ ($q_k = -k\pi$):

Поступила 08.02.2015

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 15-38-50034, 15-41-02644).

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= B_0 + \frac{1-\nu}{2}A_0x - \frac{1+\nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_k + B_k(1+q_k x)) q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\
V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \frac{1+\nu}{2} q_k + B_k \left(2 + \frac{1+\nu}{2} q_k x \right) \right) q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\
\sigma_x(x, y) &= A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)q_k + B_k(2+(1+\nu)q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}, \\
\sigma_y(x, y) &= \nu A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)q_k + B_k(2(2+\nu) + (1+\nu)q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)q_k + B_k(3+\nu+(1+\nu)q_k x)) q_k^2 \sin q_k y e^{q_k x},
\end{aligned} \tag{1.2}$$

при $x \leq 0$ ($p_k = k\pi$):

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= b_0 + \frac{1-\nu}{2}a_0x - \frac{1+\nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k p_k + b_k(1+p_k x)) p_k \cos p_k y e^{p_k x}, \\
V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{1+\nu}{2} p_k + b_k \left(2 + \frac{1+\nu}{2} p_k x \right) \right) p_k \sin p_k y e^{p_k x}, \\
\sigma_x(x, y) &= a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(1+\nu)p_k + b_k(2+(1+\nu)p_k x)) p_k^2 \cos p_k y e^{p_k x}, \\
\sigma_y(x, y) &= \nu a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(1+\nu)p_k + b_k(2(2+\nu) + (1+\nu)p_k x)) p_k^2 \cos p_k y e^{p_k x}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(1+\nu)p_k + b_k(3+\nu+(1+\nu)p_k x)) p_k^2 \sin p_k y e^{p_k x}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь A_k, B_k, a_k, b_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) — неизвестные коэффициенты разложений, ν — коэффициент Пуассона, $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, G — модуль сдвига.

Следуя [1], введем две функции

$$\begin{aligned}
\Phi(y) &= -\tau_{xy}(0, y) + i \left[(1+\nu) \frac{dV(0, y)}{dy} - \frac{1-\nu}{2} \sigma_x(0, y) \right], \\
\Psi(y) &= (1+\nu) \frac{dU(0, y)}{dy} - \frac{3+\nu}{2} \tau_{xy}(0, y) + i \sigma_y(0, y).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Воспользовавшись формулами (1.2), (1.3), найдем:

для Π^+ :

$$\begin{aligned}
\Phi^+(y) &= -i \frac{1-\nu}{2} A_0 + i \sum_{k=1}^{\infty} [(1+\nu) A_k q_k^3 + (3+\nu) B_k q_k^2] e^{iq_k y}, \\
\Psi^+(y) &= i \nu A_0 + i \sum_{k=1}^{\infty} [(1+\nu) A_k q_k^3 + (4+2\nu) B_k q_k^2] e^{iq_k y},
\end{aligned} \tag{1.5}$$

для Π^- :

$$\begin{aligned}
\Phi^-(y) &= -i \frac{1-\nu}{2} a_0 + i \sum_{k=1}^{\infty} [(1+\nu) a_k p_k^3 + (3+\nu) b_k p_k^2] e^{ip_k y}, \\
\Psi^-(y) &= i \nu a_0 + i \sum_{k=1}^{\infty} [(1+\nu) a_k p_k^3 + (4+2\nu) b_k p_k^2] e^{ip_k y}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Заменим в этих формулах вещественную переменную y комплексной переменной $z = \zeta + iy$ и будем рассматривать функции $\Phi^\pm(y)$ и $\Psi^\pm(y)$, как определенные при $\zeta = 0$ значения соответствующих аналитических функций $\Phi^\pm(z)$ и $\Psi^\pm(z)$.

Допустим, что на разрезе $\{\Gamma : x = 0, |y| \leq a, a < 1\}$ известны значения перемещений справа и слева от разреза

$$U^+(0, y) = u(y), V^+(0, y) = v(y), U^-(0, y) = -u(y), V^-(0, y) = -v(y), \quad (1.7)$$

а также значения скачков напряжений на разрезе (если они есть)

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^+(0, y) - \tau_{xy}^-(0, y) &= -2\tau(y), \sigma_x^+(0, y) - \sigma_x^-(0, y) = 2\sigma_x(y), \\ \sigma_y^+(0, y) - \sigma_y^-(0, y) &= 2\sigma_y(y). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Тогда на разрезе Γ

$$\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = \phi_1(y) + i\phi_2(y), \quad \Psi^+(z) - \Psi^-(z) = \psi_1(y) + i\psi_2(y), \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_1(y) &= -2\tau(y), \quad \phi_2(y) = 2(1 + \nu) \frac{dv(y)}{dy} - (1 - \nu)\sigma_x(y), \\ \psi_1(y) &= 2(1 + \nu) \frac{du(y)}{dy} - (3 + \nu)\tau(y), \quad \psi_2(y) = 2\sigma_y(y). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Раскрывая выражения слева в (1.9), можно записать

$$\begin{cases} -i \frac{1 - \nu}{2} (A_0 - a_0) + i \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)D_k \omega_k^3 + (3 + \nu)C_k \omega_k^2] e^{i\omega_k y} = \phi_1(y) + i\phi_2(y), \\ i\nu(A_0 - a_0) + i \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)D_k \omega_k^3 + (4 + 2\nu)C_k \omega_k^2] e^{i\omega_k y} = \psi_1(y) + i\psi_2(y). \end{cases} \quad (1.11)$$

Здесь введены такие обозначения

$$\begin{aligned} \omega_1 &= q_1, \quad \omega_2 = p_1, \quad \omega_3 = q_2, \quad \omega_4 = p_2, \dots \\ D_1 &= A_1, D_2 = -a_1, D_3 = A_2, D_4 = -a_2, \dots \\ C_1 &= B_1, C_2 = -b_1, C_3 = B_2, C_4 = -b_2, \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.1. Разрыв продольных перемещений (симметричная задача). Будем считать, что на разрезе задан только скачок продольных перемещений

$$U^+(0, y) - U^-(0, y) = 2u(y). \quad (1.13)$$

Тогда

$$\psi_1(y) = 2(1 + \nu) \frac{du(y)}{dy}, \quad \phi_1(y) = \phi_2(y) = \psi_2(y) = 0, \quad (1.14)$$

а равенства (1.11) принимают вид

$$\begin{cases} -i \frac{1 - \nu}{2} (A_0 - a_0) + i \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)D_k \omega_k^3 + (3 + \nu)C_k \omega_k^2] e^{i\omega_k y} = 0, \\ i\nu(A_0 - a_0) + i \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)D_k \omega_k^3 + (4 + 2\nu)C_k \omega_k^2] e^{i\omega_k y} = 2(1 + \nu) \frac{du(y)}{dy}. \end{cases} \quad (1.15)$$

Если считать, что напряжения в правой и левой полуполосах затухают на бесконечности, то надо принять, что $A_0 = a_0 = 0$. Воспользовавшись свойством ортогональности системы функций $\{e^{i\omega_k y}\}_{k=1}^{\infty}$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{i\omega_k y} e^{-i\omega_m y} dy = \begin{cases} 1, & \omega_k = \omega_m, \\ 0, & \omega_k \neq \omega_m \end{cases} \quad (k, m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.16)$$

для каждого номера $k \geq 1$ получим систему из двух алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (1 + \nu)D_k \omega_k^3 + (3 + \nu)C_k \omega_k^2 = 0, \\ (1 + \nu)D_k \omega_k^3 + (4 + 2\nu)C_k \omega_k^2 = 2(1 + \nu)\omega_k u_k, \end{cases} \quad (1.17)$$

где $u_k = \int_{-a}^a u(y) \cos \omega_k y dy$. Решая ее, найдем

$$C_k = \frac{u_k}{\omega_k}, \quad D_k = -\frac{(3 + \nu)u_k}{(1 + \nu)\omega_k^2}.$$

Следовательно, в соответствии с обозначениями (1.12),

$$A_k = -a_k = -\frac{(3 + \nu)u_k}{(1 + \nu)q_k^2}, \quad B_k = -b_k = \frac{u_k}{q_k}. \quad (1.18)$$

Подставляя найденные выражения для коэффициентов (1.18) в формулы (1.2) и (1.3), получим (ниже приведены формулы только для правой полуполосы)

$$\begin{aligned} U^+(x, y) &= B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1 + \nu}{2} q_k x\right) u_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ V^+(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \nu}{2} + \frac{1 + \nu}{2} q_k x\right) u_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_x^+(x, y) &= (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} (1 - q_k x) u_k q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y^+(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 + q_k x) u_k q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy}^+(x, y) &= (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} u_k q_k^2 x \sin q_k y e^{q_k x}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Постоянная $B_0 = \frac{1}{2} \int_{-a}^a u(y) dy$.

Это же решение можно получить в классической постановке, как решение для полуполосы, если считать, что на ее торце заданы нулевое касательное напряжение и продольное перемещение $U(0, y) = u(y)$.

Рассмотрим три типа разрывов продольных перемещений.

1. Пусть $u(y) = (a^2 - y^2)^2$. В этом случае

$$u_k = 16 (3 \sin(aq_k) - 3aq_k \cos(aq_k) - a^2 q_k^2 \sin(aq_k)) / q_k^5, \quad B_0 = 8a^5 / 15.$$

На рисунках 1, 2 приведены графики распределения напряжений¹ и перемещений при $x = 0$, вычисленные по формулам (1.19).

¹Здесь и далее по тексту напряжениям $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ и $\tau_{xy}(x, y)$ на графиках соответствуют $\sigma x(x, y)$, $\sigma y(x, y)$, $\tau xy(x, y)$.

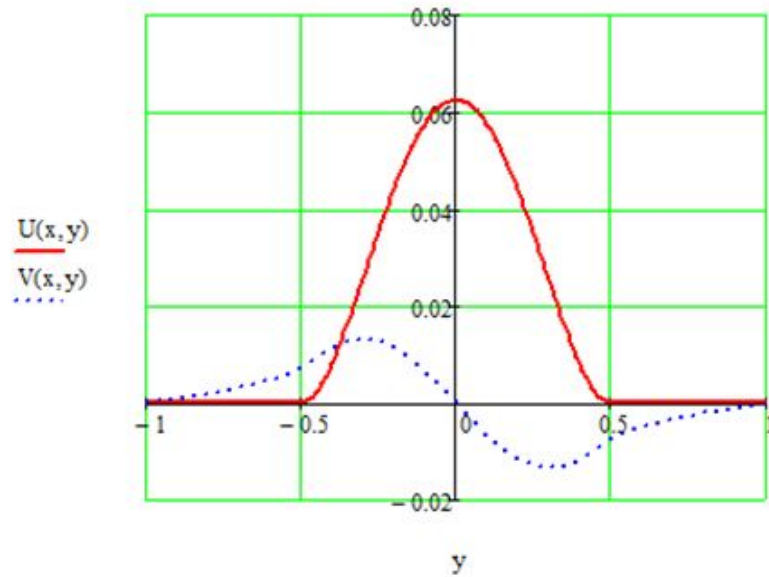


Рис. 1

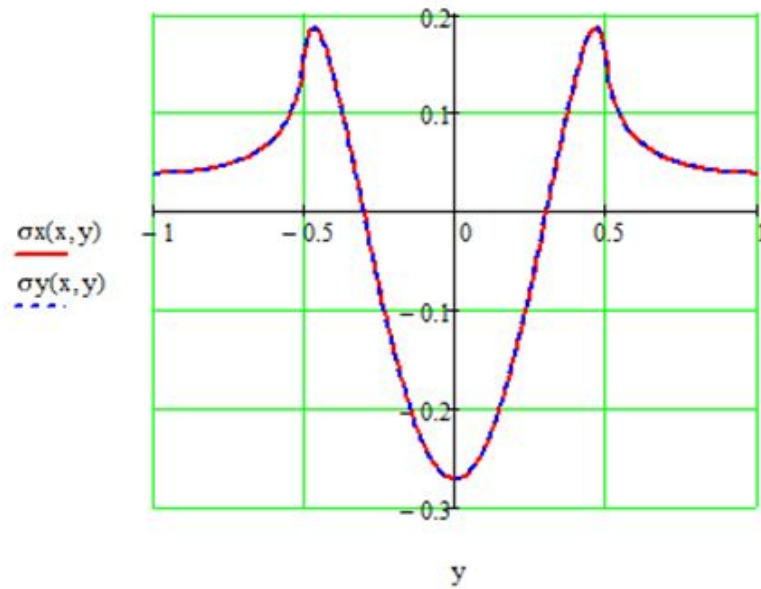


Рис. 2

2. Кончик профиля разрыва имеет меньшую гладкость, чем в первом примере: $u(y) = a^2 - y^2$. Тогда

$$u_k = 4(\sin(aq_k) - aq_k \cos aq_k) / q_k^3, \quad B_0 = 2a^3/3.$$

На рисунках 3, 4 приведены графики распределения напряжений и перемещений в сечении полосы $x = 0$.

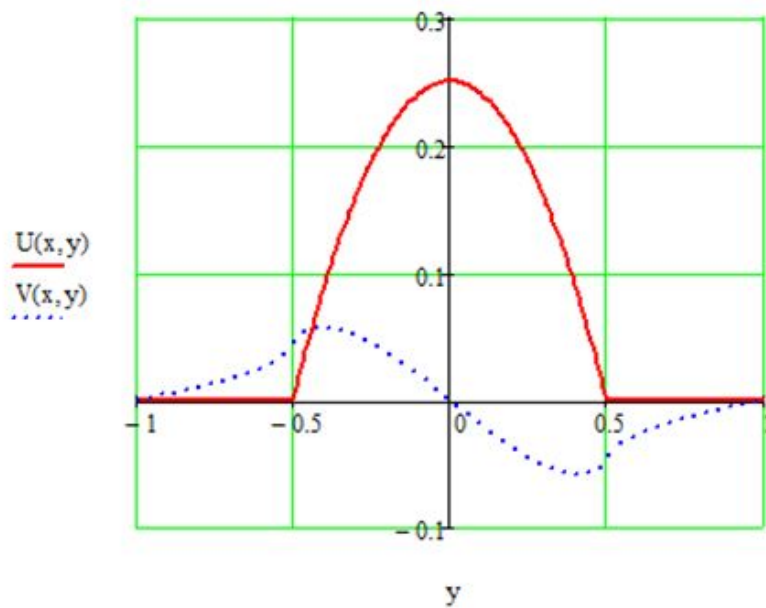


Рис. 3

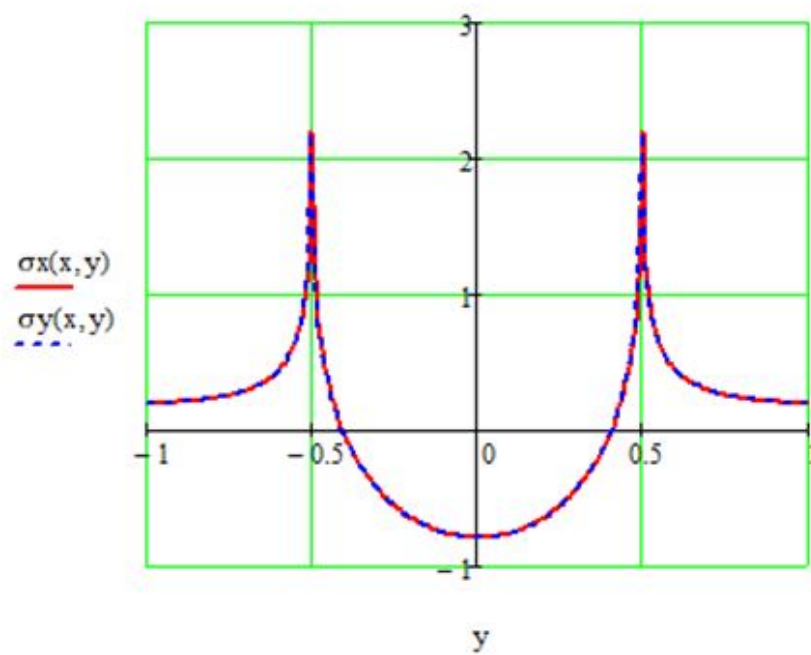


Рис. 4

3. На разрезе задан скачок продольных перемещений $2\sqrt{a^2 - y^2}$. Тогда $u_k = \pi a J_1(a|q_k|)/|q_k|$, $B_0 = a^2\pi/4$, где $J_1(a|q_k|)$ – функция Бесселя. Здесь получим следующие графики в сечении $x = 0$ (рис. 5, 6).

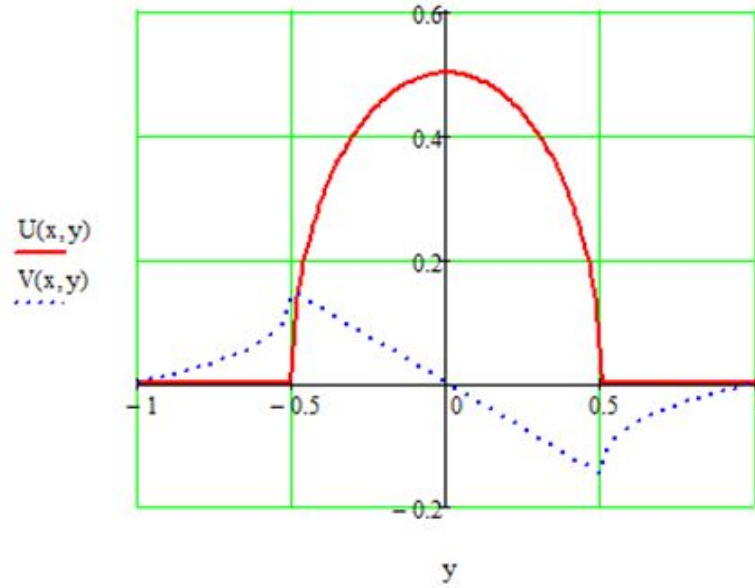


Рис. 5

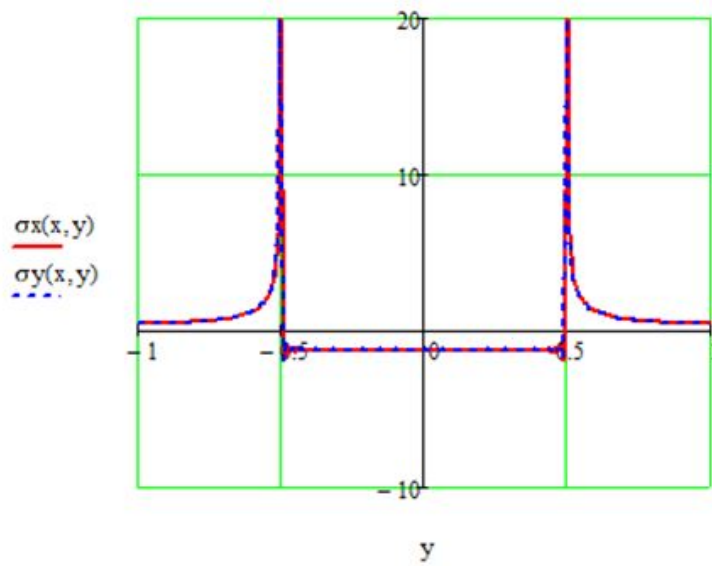


Рис. 6

1.2. Разрыв поперечных перемещений (симметричная деформация). Пусть на разрезе $\{x = 0, |y| \leq a\}$ задан разрыв поперечных перемещений

$$V^+(0, y) - V^-(0, y) = 2v(y). \quad (1.20)$$

Функция $v(y)$ — нечетна, поэтому деформация полосы симметрична относительно продольной оси. Введем функцию

$$F(y) = 2\Phi(y) - \Psi(y) = - \left[(1 + \nu) \frac{dU(0, y)}{dy} + \frac{1 - \nu}{2} \tau_{xy}(0, y) \right] - i\sigma_x(0, y). \quad (1.21)$$

Тогда

$$F^+(y) = i \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)A_k q_k^3 + 2B_k q_k^2] e^{iq_k y}, \quad F^-(y) = i \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)a_k p_k^3 + 2b_k p_k^2] e^{ip_k y}. \quad (1.22)$$

Очевидно, что на разрезе Γ

$$\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = i2(1 + \nu) \frac{d}{dy} v(y), \quad F^+(z) - F^-(z) = 0. \quad (1.23)$$

Раскрывая выражения (1.23) для функций, стоящих слева, и пользуясь обозначениями (1.12), получим равенства, аналогичные равенствам (1.15),

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)D_k \omega_k^3 + (3 + \nu)C_k \omega_k^2] e^{i\omega_k y} = 2(1 + \nu) \frac{dv(y)}{dy}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)D_k \omega_k^3 + 2C_k \omega_k^2] e^{i\omega_k y} = 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Воспользовавшись свойством ортогональности (1.16) системы экспонент, получим систему из двух алгебраических уравнений ($k = 1, 2, \dots$)

$$\begin{cases} (1 + \nu)D_k \omega_k^3 + (3 + \nu)C_k \omega_k^2 = (1 + \nu)\omega_k v_k, \\ (1 + \nu)D_k \omega_k^3 + 2C_k \omega_k^2 = 0, \\ v_k = \int_{-a}^a v(y) \sin \omega_k y dy. \end{cases} \quad (1.25)$$

Выпишем окончательные формулы для правой полуполосы:

$$\begin{aligned} U^+(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \nu}{2} - \frac{1 + \nu}{2} q_k x \right) v_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ V^+(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1 + \nu}{2} q_k x \right) v_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_x + (x, y) &= -(1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} v_k q_k^2 x \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y + (x, y) &= (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} (2 + q_k^x) v_k q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy} + (x, y) &= (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} (1 + q_k x) v_k q_k \sin q_k y e^{q_k x}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Полученное решение эквивалентно решению для полуполосы с заданными на ее торце нулевыми нормальными напряжениями и поперечными перемещениями $V(0, y) = v(y)$.

Рассмотрим три типа разрывов поперечных перемещений.

1. Пусть $v(y) = y(a^2 - y^2)^2$. В этом случае

$$v_k = 16 (15 \sin(aq_k) + a^3 q_k^3 \cos(aq_k) - 6a^2 q_k^2 \sin(aq_k) - 15aq_k \cos(aq_k)) / q_k^6.$$

На рисунках 7, 8 приведены графики распределения напряжений и перемещений при $x = 0$, вычисленные по формулам (1.26).

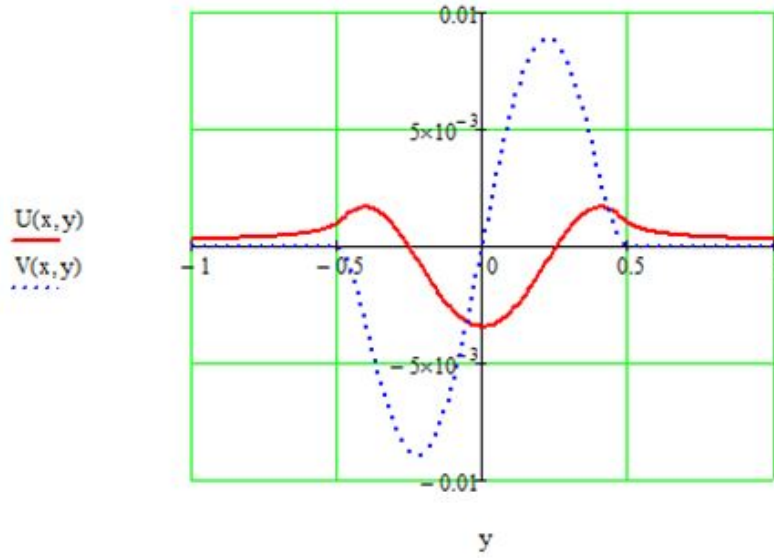


Рис. 7

2. Если $v(y) = y(a^2 - y^2)$, то

$$v_k = -4 (a^2 q_k^2 \sin(aq_k) - 3 \sin(aq_k) + 3aq_k \cos(aq_k)) / q_k^4.$$

На рисунках 9, 10 приведены графики при $x = 0$.

3. На разрезе задан скачок поперечных перемещений $2y\sqrt{a^2 - y^2}$. Тогда $v_k = \frac{\pi a^2}{q_k} \left(-J_0(a|q_k|) + 2 \frac{J_1(a|q_k|)}{a|q_k|} \right)$. Графики распределения напряжений и перемещений на разрыве, вычисленные по формулам (1.26), имеют вид (рис. 11, 12):

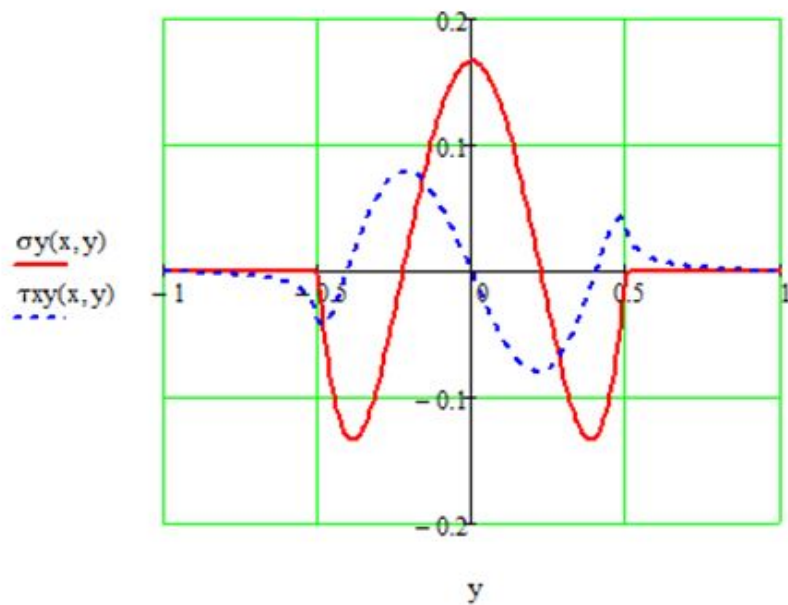


Рис. 8

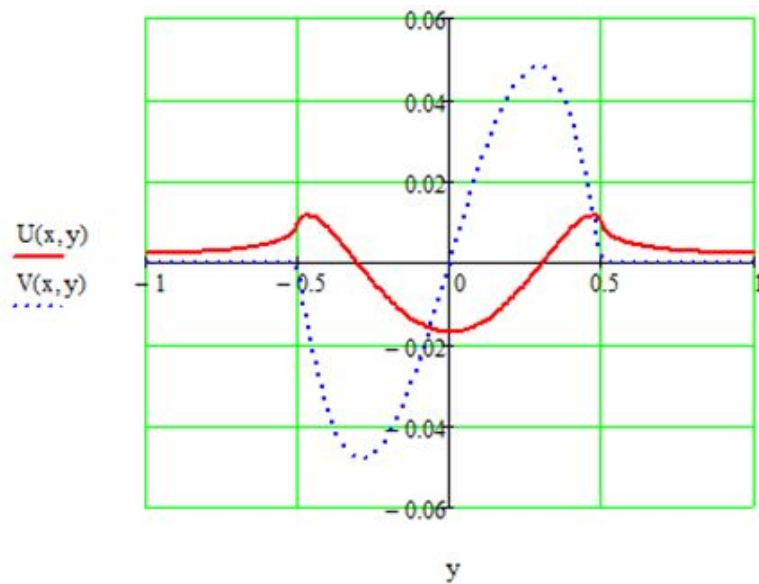


Рис. 9

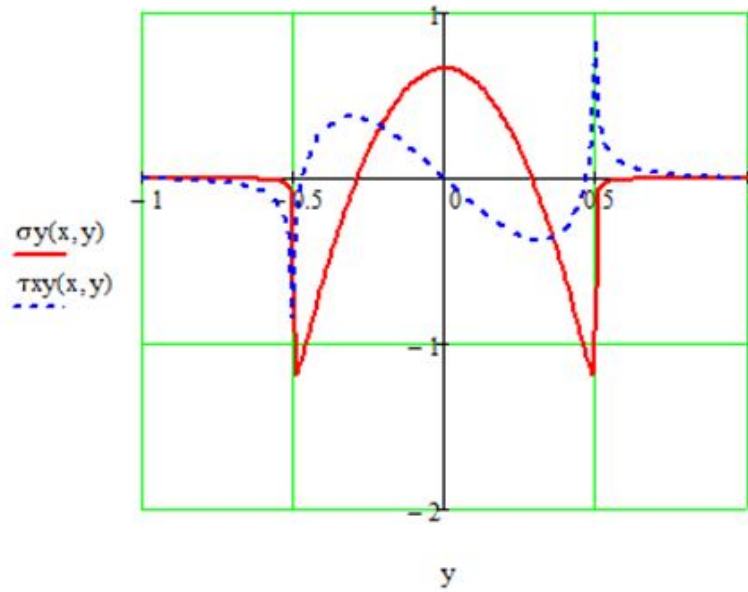


Рис. 10

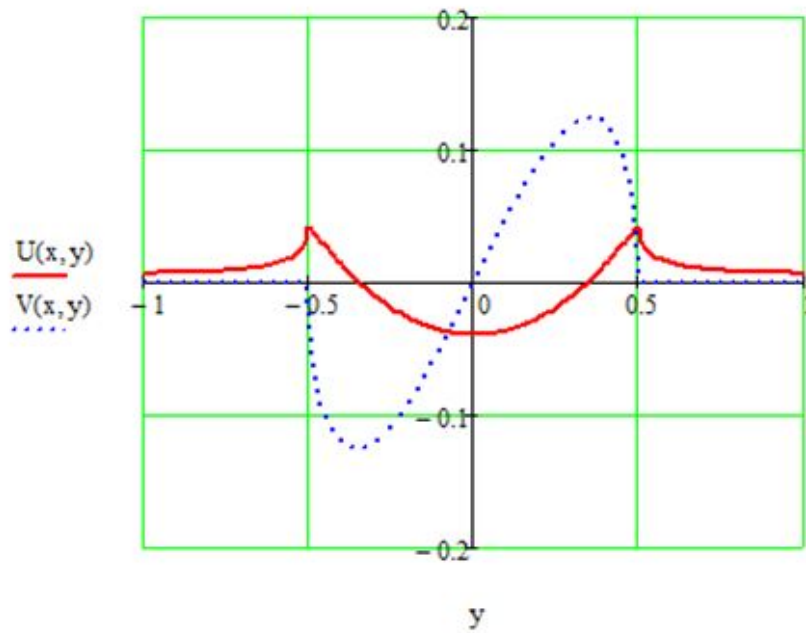


Рис. 11

2. Обратнo-симметричная деформация полосы

В этом случае решения в правой и левой полуполосах имеют вид:
в $\Pi +$ ($q_k = -k\pi$):

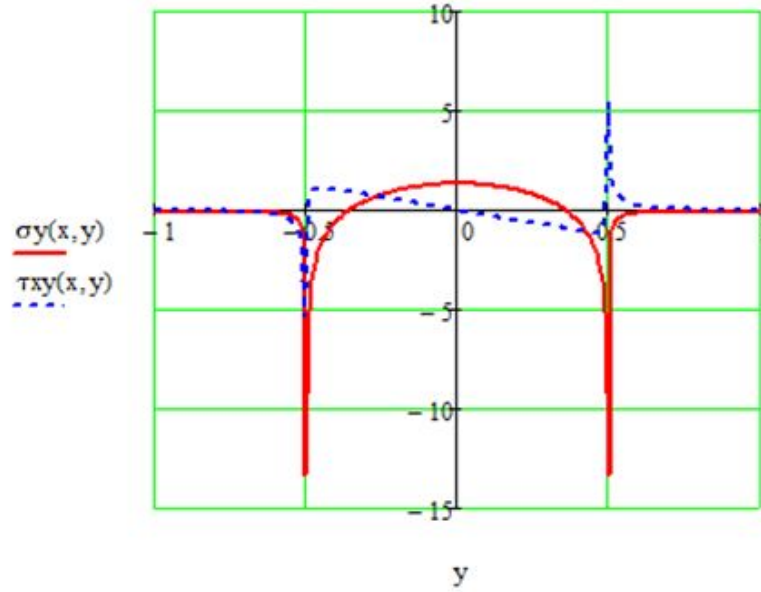


Рис. 12

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \frac{1 + \nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_k + B_k (1 + q_k x)) q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\
 V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \frac{1 + \nu}{2} q_k + B_k \left(2 + \frac{1 + \nu}{2} q_k x \right) \right) q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\
 \sigma_x(x, y) &= A_0 y + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1 + \nu) q_k + B_k (2 + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \sin q_k y e^{q_k x}, \\
 \sigma_y(x, y) &= \nu A_0 y - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1 + \nu) q_k + B_k (2(2 + \nu) + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \sin q_k y e^{q_k x}, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1 + \nu) q_k + B_k (3 + \nu + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

В Π^- ($p_k = k\pi$):

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \frac{1 + \nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k p_k + b_k (1 + p_k x)) p_k \sin p_k y e^{p_k x}, \\
 V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{1 + \nu}{2} p_k + b_k \left(2 + \frac{1 + \nu}{2} p_k x \right) \right) p_k \cos p_k y e^{p_k x}, \\
 \sigma_x(x, y) &= a_0 y + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k (1 + \nu) p_k + b_k (2 + (1 + \nu) p_k x)) p_k^2 \sin p_k y e^{p_k x}, \\
 \sigma_y(x, y) &= \nu a_0 y - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k (1 + \nu) p_k + b_k (2(2 + \nu) + (1 + \nu) p_k x)) p_k^2 \sin p_k y e^{p_k x},
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(1 + \nu)p_k + b_k(3 + \nu + (1 + \nu)p_k x)) p_k^2 \cos p_k y e^{p_k x}.$$

2.1. *Разрыв продольных перемещений.* На разрезе $\{x = 0, |y| \leq a\}$ задан разрыв продольных перемещений

$$U^+(0, y) - U^-(0, y) = 2u(y). \quad (2.3)$$

Повторяя предыдущие выкладки, для правой полуполосы найдем:

$$\begin{aligned} U^+(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1 + \nu}{2} q_k x\right) u_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ V^+(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \nu}{2} + \frac{1 + \nu}{2} q_k x\right) u_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_x^+(x, y) &= (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} (1 - q_k x) u_k q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y^+(x, y) &= (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} (1 + q_k x) u_k q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy}^+(x, y) &= -(1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} u_k q_k^2 x \cos q_k y e^{q_k x}, \\ u_k &= \int_{-a}^a u(y) \sin \omega_k y dy. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Это решение совпадает с решением для полуполосы, на торце которой заданы нулевое касательное напряжение и продольное перемещение $U(0, y) = u(y)$.

Рассмотрим опять три типа разрывов перемещений.

1. Пусть $u(y) = y(a^2 - y^2)^2$. В этом случае

$$u_k = 16 (15 \sin(aq_k) + a^3 q_k^3 \cos(aq_k) - 6a^2 q_k^2 \sin(aq_k) - 15aq_k \cos(aq_k)) / q_k^6.$$

На рисунках 13, 14 приведены графики распределения напряжений и перемещений при $x = 0$, соответствующие формулам (2.4).

2. Пусть теперь $u(y) = y(a^2 - y^2)$. Тогда

$$u_k = -4 (a^2 q_k^2 \sin(aq_k) - 3 \sin(aq_k) + 3aq_k \cos(aq_k)) / q_k^4.$$

Ниже приведены графики распределения напряжений и перемещений в сечении полосы $x = 0$ (рис. 15, 16).

3. Когда на разрезе задан скачок продольных перемещений $2y\sqrt{a^2 - y^2}$, получим $u_k = \frac{\pi a^2}{q_k} \left(-J_0(a|q_k|) + 2 \frac{J_1(a|q_k|)}{a|q_k|} \right)$. Ниже приведены графики для сечения $x = 0$ (рис. 17, 18).

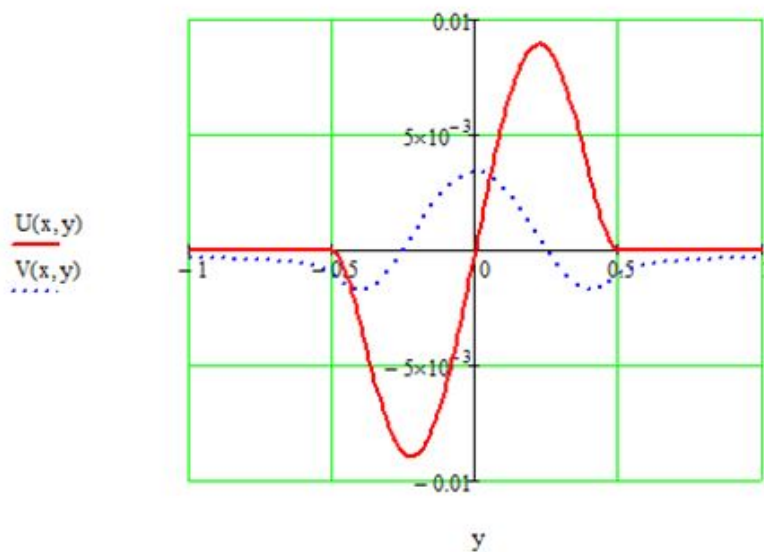


Рис. 13

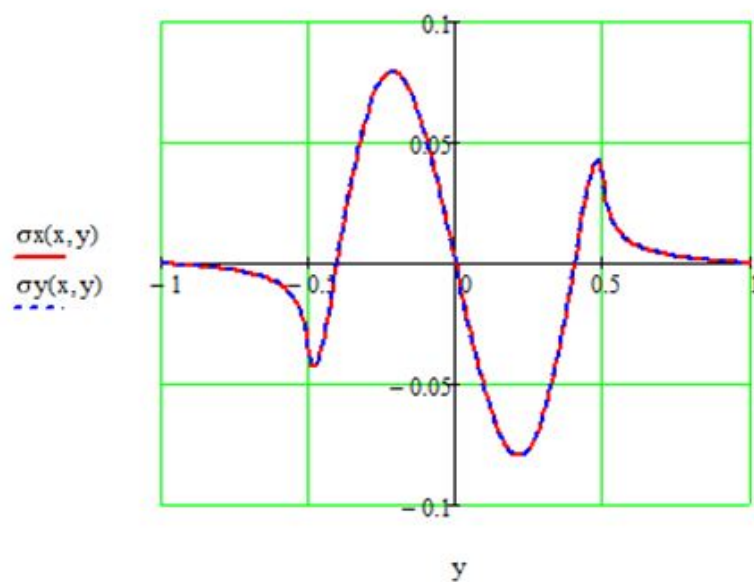


Рис. 14

2.2. Разрыв поперечных перемещений. Пусть на разрезе $\{x = 0, |y| \leq a\}$ задан разрыв поперечных перемещений

$$V^+(0, y) - V^-(0, y) = 2v(y), \quad (2.5)$$

$v(y)$ — четна.

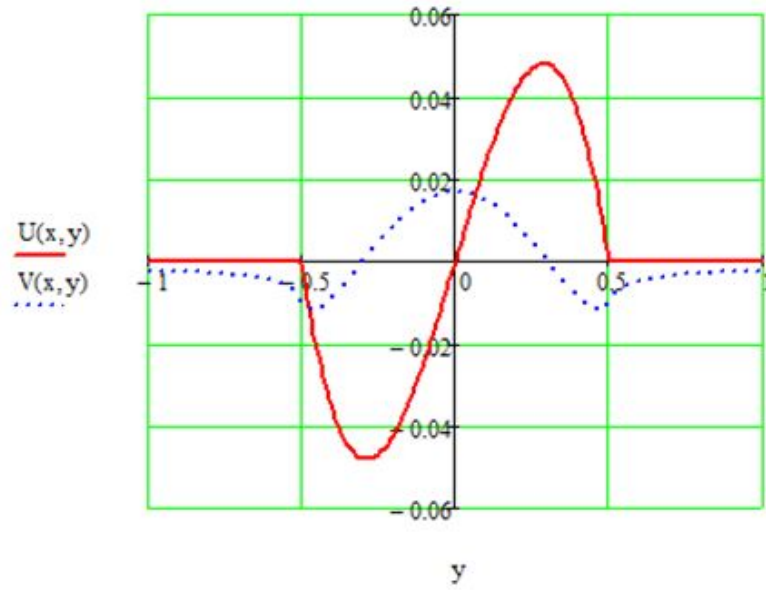


Рис. 15

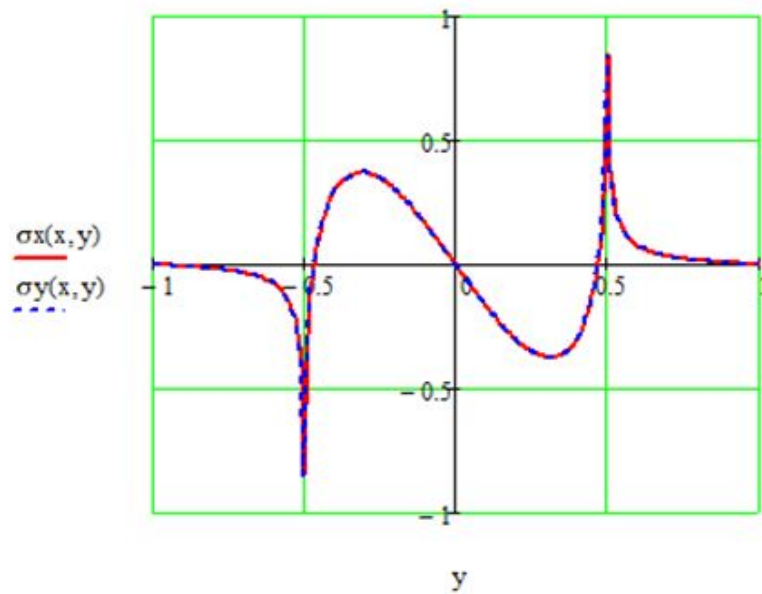


Рис. 16

Окончательные формулы для правой полулопы следующие:

$$U^+(x, y) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-\nu}{2} - \frac{1+\nu}{2} q_k x \right) v_k \sin q_k y e^{q_k x},$$

$$V^+(x, y) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1+\nu}{2} q_k x \right) v_k \cos q_k y e^{q_k x},$$

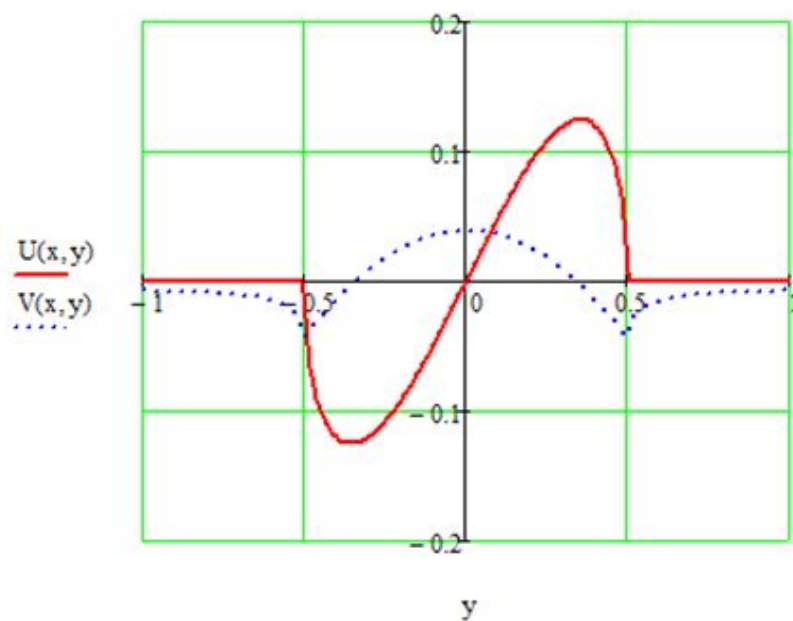


Рис. 17

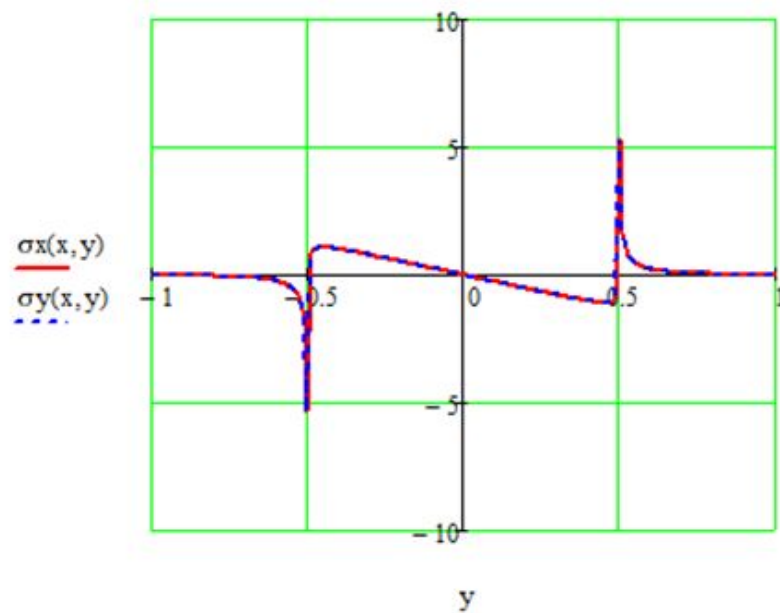


Рис. 18

$$\sigma_x^+(x, y) = (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} v_k q_k^2 x \sin q_k y e^{q_k x}, \quad (2.6)$$

$$\sigma_y^+(x, y) = -(1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} (2 + q_k x) v_k q_k \sin q_k y e^{q_k x},$$

$$\tau_{xy}^+(x, y) = (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} (1 + q_k x) v_k q_k \cos q_k y e^{q_k x}.$$

$$v_k = \int_{-a}^a v(y) \cos \omega_k y dy.$$

Постоянная $B_0 = \frac{1}{2} \int_{-a}^a v(y) dy$.

Решение (2.6) совпадает с решением для полуполосы, когда на ее торце заданы напряжение $\sigma_x(0, y) = 0$ и перемещение $V(0, y) = v(y)$.

Рассмотрим три разрыва поперечных перемещений.

1. Пусть $v(y) = (a^2 - y^2)^2$. В этом случае

$$v_k = 16 (3 \sin(aq_k) - 3aq_k \cos(aq_k) - a^2 q_k^2 \sin(aq_k)) / q_k^5, \quad B_0 = 8a^5/15.$$

На рисунках 19, 20 приведены графики распределения напряжений и перемещений при $x = 0$, вычисленные по формулам (2.6).

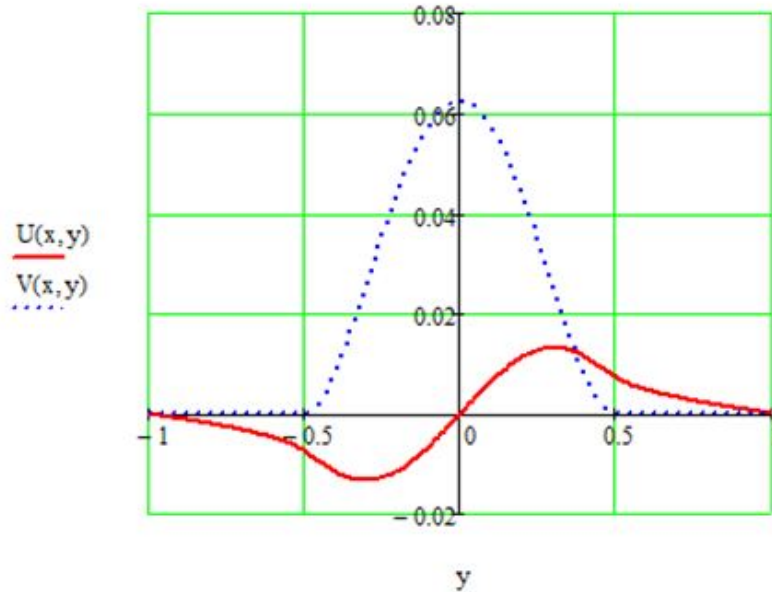


Рис. 19

2. Пусть $v(y) = a^2 - y^2$. Тогда

$$v_k = 4 (\sin(aq_k) - aq_k \cos aq_k) / q_k^3, \quad B_0 = 2a^3/3.$$

На рисунках 21, 22 приведены графики распределения напряжений и перемещений в сечении полосы $x = 0$.

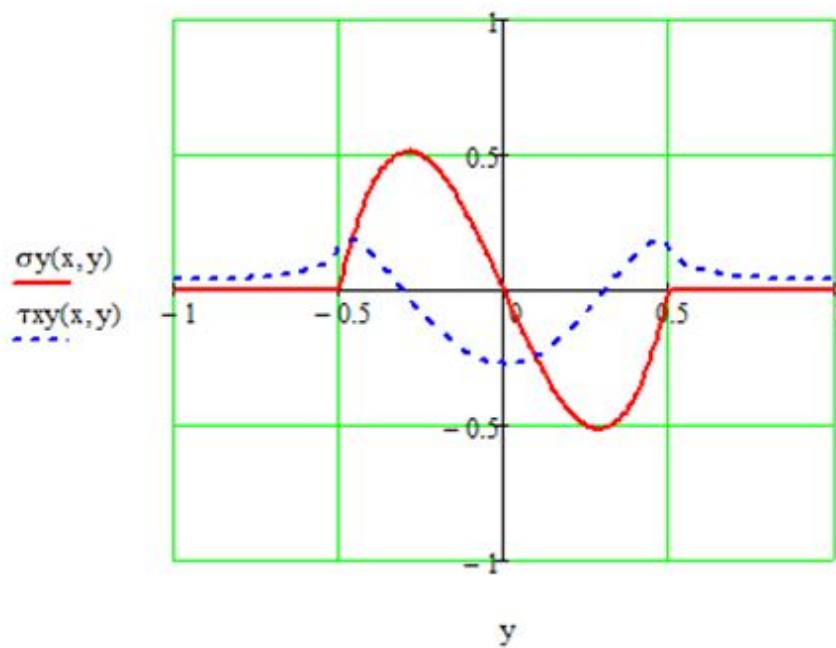


Рис. 20

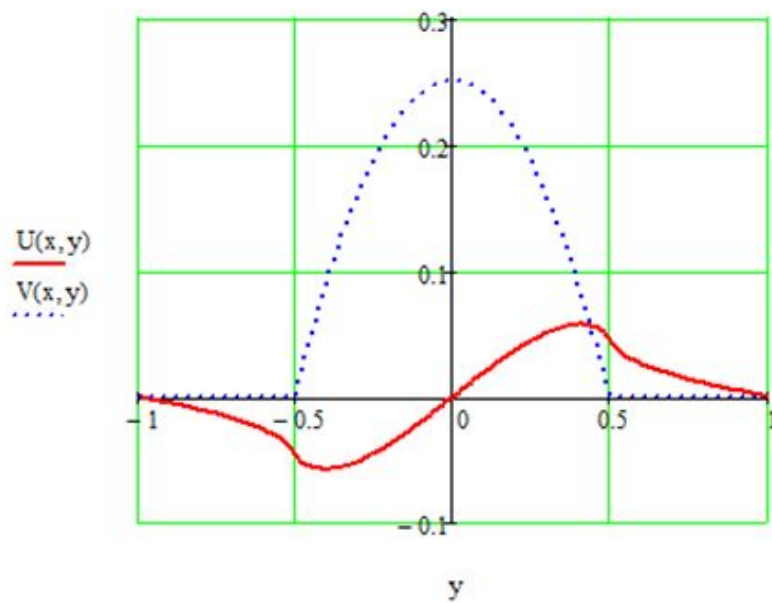


Рис. 21

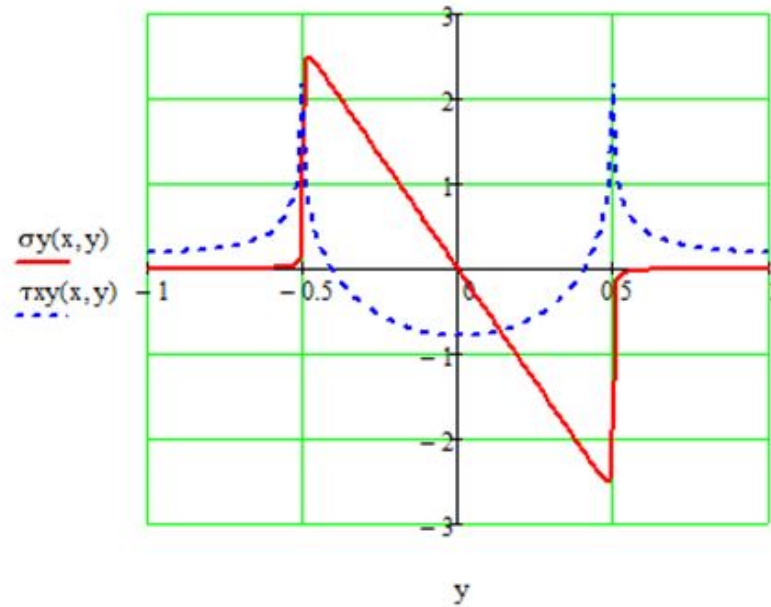


Рис. 22

3. На разрезе задан скачок поперечных перемещений $2\sqrt{a^2 - y^2}$. Тогда $v_k = \pi a J_1(a|q_k|)/|q_k|$, $B_0 = a^2\pi/4$. Графики распределения напряжений и перемещений на разрыве, вычисленные по формулам (2.6), имеют вид (рис. 23, 24):

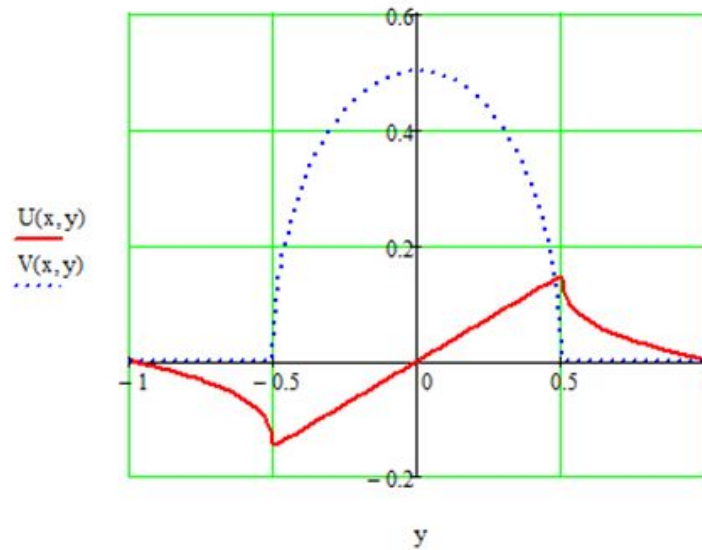


Рис. 23

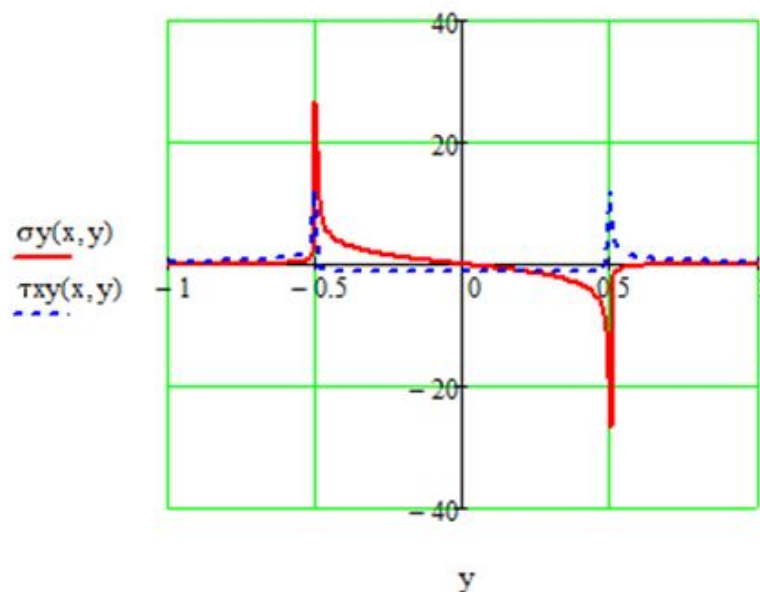


Рис. 24

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коваленко, М. Д. Стык двух полуполос / М. Д. Коваленко, С. В. Шибырин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1997. – № 1. – С. 56–63.
- [2] Коваленко, М. Д. Аналитические решения двумерных краевых задач теории упругости в конечных областях с угловыми точками границы : монография / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. – 123 с.
- [3] Меньшова, И. В. О периодических решениях Файлона-Рибьера в двумерной задаче теории упругости / И. В. Меньшова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2015. – № 1 (23). – С. 98–122.

Коваленко Михаил Денисович,

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

e-mail: kov08@inbox.ru

Меньшова Ирина Владимировна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

e-mail: menshovairina@yandex.ru

Кержаев Александр Петрович,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

e-mail: alex_kerg@mail.ru

M. D. Kovalenko, I. V. Men'shova, A. P. Kerzhaev

DISPLACEMENTS DISCONTINUITY IN A STRIP. THE SOLUTION IN TRIGONOMETRIC SERIES

Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

Abstract. The article is devoted to solutions in trigonometric series of four boundary value problems of the theory of elasticity for an infinite horizontal strip with a vertical section. On a section can be set discontinuities longitudinal or transverse displacements (symmetric and antisymmetric deformations). On the sides of a strip the periodicity conditions are performed: shear stresses and transverse (perpendicular to the axis of a strip) displacements are equal zero. Unknown expansions coefficients are found from the conditions of a joint on the section of two analytical functions to the right of the section (in the right half-strip) and the corresponding two analytic functions on the left of the section (in the left half-strip). These functions were first introduced in work [1] and then were used, in particular, at the solution of boundary value problems for a rectangle with free sides and discontinuities longitudinal and transverse displacements [2]. It is shown that the solution for the strip with discontinuity longitudinal (along the axis of the strip) displacements is equivalent to solution for the half-strip, which are given at the end of the longitudinal displacements and zero shear stresses. And the solution for the strip with a transverse discontinuity equivalent to solution for the half-strip with specified at its end transverse displacement and zero normal stress. The examples illustrating behavior of stresses depending on smoothness of the curve near the tip of the discontinuity are reviewed. Solutions is simple and does not require knowledge of special branches of mathematics - just be aware of the Fourier series. The analysis of solutions shows that in sufficiently wide area, adjacent to the axis of the strip, and for not too long section received solutions can be used for preliminary estimates of stress state even in those cases, when on the longitudinal sides of the strip other boundary conditions are given, for example, when sides of the strip are free.

Keywords: boundary value problem, strip, half-strip, displacement discontinuity, Fourier series.

REFERENCES

- [1] *Kovalenko, M. D.* The junction of two half-strips / M. D. Kovalenko, S. V. Shibirin // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids. – 1997. – No. 1. – P. 56–63.
- [2] *Kovalenko, M. D.* Analytical solutions of two-dimensional boundary value problems of the theory of elasticity in finite domains with corner points of the boundary / M. D. Kovalenko, I. V. Men'shova. – Cheboksary : Chuvash State Pedagogical University, 2014. – 123 p.
- [3] *Men'shova, I. V.* About periodic solutions of Filon-Ribiere in a two-dimensional problem of the theory of elasticity / I. V. Men'shova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2015. – No. 1 (23). – P. 98–122.

Kovalenko, Mikhail Denisovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

Menshova, Irina Vladimirovna

PhD, Senior Researcher at the Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

Kerzhaev, Alexandr Petrovich

PhD, Senior Researcher, Laboratory of Geodynamics, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

М. А. Артемов, Е. С. Барановский

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛ. ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Аннотация. Проведен сравнительный анализ теорий Сен-Венана, Леви и Мизеса. Дано сопоставление условия пропорциональности девиатора напряжений и девиатора скоростей пластических деформаций с условием соосности этих тензоров. Для плоского деформированного состояния обсуждается вопрос о нахождении среднего главного напряжения в рамках различных теорий пластического течения. Отмечается, что при выборе условия пластичности Треска значение среднего главного напряжения не определяется.

Обсуждаются следствия ассоциированного закона пластического течения для изотропной и нормально изотропной среды при выборе гладких и кусочно-гладких функций текучести.

Рассмотрены особенности альтернативных форм записи условия пластичности Треска и отмечены имеющиеся несоответствия.

Для идеальной жесткопластической и сжимаемой упругопластической среды рассмотрена осесимметричная задача для случая плоской деформации. Найдены диапазоны изменения значений напряжений на границах, в пределах которых для условия текучести Треска в пластической области реализуется только один режим пластичности. Рассмотрены случаи, когда задача является статически определимой. Показано, что при определенных значениях напряжений на границах области решения реализуется режим полной пластичности.

Приводятся формы записи обобщений условий текучести Треска, Шмитда-Ишлинского и Мизеса, рассмотренные в работах Херши, Хосфорда, Барлата, Карафиллиса, Бойса, Брона и Бессона, как функции главных значений девиатора напряжений через квадратичный и кубический инварианты девиатора напряжений.

Ключевые слова: сжимаемая упругопластическая среда, обобщенное условие пластичности Треска, плоское деформированное состояние, теория пластического течения

УДК: 539.214

Краткий обзор работ по теории идеально пластической среды

Теория Сен-Венана. Первые статьи по математической теории пластичности, в которых были приведены замкнутые системы уравнений, определяющие поведение пластического тела, принадлежат Б. Сен-Венану [1] и М. Леви [2].

В статье [1] рассмотрен случай плоской деформации для несжимаемого пластического тела. Сен-Венан [1] предположил совпадение площадок, на которых касательные напряжения и скорости сдвига принимают максимальное значение, а также выполнение условия текучести (пластичности) Треска. Если оси декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ направлены так, что для компонент тензора деформаций выполнены равенства

$$e_{j3} = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

то максимальное касательное напряжение определяется по формуле [1]

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 4\tau_{12}^2} = K,$$

а нормальное напряжение на площадках параллельных оси Ox_3 ² вычисляется по формуле

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (1)$$

В [1] утверждается, что «напряжения в теле сводятся к нормальному давлению

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad (2)$$

одинаковому во всех направлениях, и касательному напряжению K , действующему на определенной площадке».

Поскольку нормальное напряжение на площадке с нормалью \mathbf{n} вычисляется по формуле

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

а гидростатическое давление (среднее нормальное напряжение)

$$p = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}),$$

то соотношение (2) справедливо, когда главное среднее напряжение $\sigma_3 = \sigma_{33}$ определяется по формуле

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (3)$$

Однако, если не принимать это предположение, то для гидростатического давления имеет место соотношение

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \neq \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

соответственно для компоненты девиатора напряжений имеем

$$s_{33} = \frac{1}{3}(2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}) \neq 0.$$

Соотношение [1]

$$\frac{\sigma_{12}}{\varepsilon_{12}} = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}}, \quad (4)$$

определяющее связь напряжений и скоростей пластических деформаций для плоского деформированного состояния, является следствием коммутативности (условие соосности тензоров) [3]–[5]

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (5)$$

Из условия соосности (5) тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ следует также соосность всех тензоров вида $\alpha_1 \mathbf{E} + \beta_1 \boldsymbol{\sigma} + \gamma_1 \boldsymbol{\sigma}^2$ и $\alpha_2 \mathbf{E} + \beta_2 \boldsymbol{\sigma} + \gamma_2 \boldsymbol{\sigma}^2$, где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — изотропные скалярные функции тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{E} — единичный тензор второй валентности (ранга).

Теория Леви. В [6] при рассмотрении плоского деформированного состояния изотропного идеально жесткопластического тела осевое напряжение определяется формулой

$$\sigma_{33} = p = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (6)$$

«которая получается как по уравнениям деформационной теории, так и по уравнениям теории течения» (имеется ввиду теория Сен-Венана–Мизеса). При этом отмечается, что для вывода (6) достаточно принять условие несжимаемости. Последнее утверждение, по-видимому, основано на работе Леви [2], в которой для несжимаемого пластического тела предложена

²Главные (собственные) значения тензора второй валентности — инварианты [12]. При плоском деформированном состоянии напряжение σ_{33} — главное нормальное напряжение, поэтому $\sigma_{11} + \sigma_{22}$ — инвариант.

математическая модель, включающая условие текучести Треска (в форме Леви) и условие пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций

$$\frac{s_{ij}}{\varepsilon_{ij}} = \lambda, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

В случае плоской деформации соотношения (7) принимают вид

$$\frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3\varepsilon_{11}} = \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}}{3\varepsilon_{22}} = \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}}{3\varepsilon_{33}} = \frac{\sigma_{12}}{\varepsilon_{12}}.$$

Отсюда, учитывая соотношение $\varepsilon_{33} = 0$, приходим к равенству (4), полученному в работе Леви [2] несколько иным путем.

Из того, что условие пропорциональности и условие соосности в случае плоской деформации приводят к одному и тому же соотношению, не следует их совпадение, поскольку при совпадении этих условий, например, должно выполняться подобие соответствующих кругов Мора для тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций. Если выполняется пропорциональность девиаторов тензоров напряжений и скоростей деформаций (7), то имеет место соосность тензоров (5); обратное утверждение в общем случае не справедливо, что наглядно показывает рассмотрение кругов Мора [6].

Теория пластического потенциала. Рассмотрим вариант теории пластического потенциала [6, 7]). Согласно этой теории для пластического потенциала

$$f(\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), \text{tr}(\mathbf{s}^2), \text{tr}(\mathbf{s}^3)), \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{E},$$

главные компоненты тензора скоростей пластических деформаций связаны с напряжениями по формуле

$$\varepsilon_k = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})} + 2 \frac{\partial f}{\partial \text{tr}(\mathbf{s}^2)} s_k + \frac{\partial f}{\partial \text{tr}(\mathbf{s}^3)} (2s_k^2 - s_i^2 - s_j^2) \right), \quad \lambda \geq 0. \quad (8)$$

Из этого равенства следует, что девиаторы напряжений и скоростей пластических деформаций пропорциональны, если пластический потенциал не зависит от кубического инварианта девиатора напряжений (см. [8–11]).

Из закона нормальной связи (8) следует соосность тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций [12].

Ассоциированный закон пластического течения предполагает равенство пластического потенциала и функции текучести. Поэтому для несжимаемого изотропного идеально пластического тела вектор скоростей деформаций в девиаторной плоскости пространства напряжений направлен по нормали к гладкой кривой текучести [5], [6], [13]–[16]. Если пластический потенциал является гладкой четной функцией девиатора напряжений

$$f(\text{tr}(\mathbf{s}^2), \text{tr}^2(\mathbf{s}^3)),$$

то из соотношения

$$\varepsilon_k = 2\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \text{tr}(\mathbf{s}^2)} s_k + \text{tr}(\mathbf{s}^3) \frac{\partial f}{\partial \text{tr}^2(\mathbf{s}^3)} (2s_k^2 - s_i^2 - s_j^2) \right)$$

следует, что равенство $\varepsilon_3 = 0$ ($\varepsilon_3 = \varepsilon_{33}$) выполняется, когда

$$2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22} = 0.$$

Рассмотрим условие текучести Треска [13]

$$\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_2|\} = 2k,$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — собственные значения тензора напряжений.

Поскольку из ассоциированного закона пластического течения следуют соотношения

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\partial f / \partial \sigma_{ij}} = \lambda,$$

то в случае плоской деформации ($\varepsilon_{33} = 0$) при выборе условия текучести Треска имеем

$$\frac{\varepsilon_{33}}{\partial f / \partial \sigma_{33}} \neq 0,$$

если

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 0,$$

что соответствует выбору режима текучести

$$\begin{cases} |\sigma_1 - \sigma_2| = 2k, \\ \min\{\sigma_1, \sigma_2\} < \sigma_3 < \max\{\sigma_1, \sigma_2\}. \end{cases}$$

В работе [14] для несжимаемой идеально пластической среды рассматривается пластический потенциал общего вида

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = g(\mathbf{s}) = G(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = G(s_1, s_2, s_3) = K(\tau_1, \tau_2, \tau_3),$$

где G, K — симметричные функции своих аргументов, τ_i — главные касательные напряжения. На основе соотношения

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} \quad (9)$$

нормальный закон пластического течения [16] записывается в виде

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial g}{\partial s_{ij}},$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты девиатора скоростей деформаций.

В [13] вводится понятие о нормальном характере изотропии, что соответствует предположению о четности функции пластичности относительно своих аргументов

$$f(\text{tr}(\mathbf{s}^2), \text{tr}^2(\mathbf{s}^3)) = K(|\tau_1|, |\tau_2|, |\tau_3|).$$

Вообще говоря, для изотропной среды четность функции пластичности (пластического потенциала) относительно аргументов не предполагается

$$f(\text{tr}(\mathbf{s}^2), \text{tr}(\mathbf{s}^3)) = K(\tau_1, \tau_2, \tau_3).$$

При зависимости пластического потенциала от кубического инварианта девиатора напряжений для нормально изотропной идеально пластической среды получаем

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \cdot {}^4\mathbf{D} = 2\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \text{tr}(\mathbf{s}^2)} \mathbf{s} + \text{tr}(\mathbf{s}^3) \frac{\partial f}{\partial \text{tr}^2(\mathbf{s}^3)} (3\mathbf{s}^2 - \text{tr}(\mathbf{s}^2)) \mathbf{E} \right),$$

а также

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = 2\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \text{tr}(\mathbf{s}^2)} \mathbf{s} + 3\text{tr}(\mathbf{s}^3) \frac{\partial f}{\partial \text{tr}^2(\mathbf{s}^3)} \mathbf{s}^2 \right);$$

для изотропной идеально пластической имеет место

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda \left(2 \frac{\partial f}{\partial \text{tr}(\mathbf{s}^2)} \mathbf{s} + \frac{\partial f}{\partial \text{tr}(\mathbf{s}^3)} (3\mathbf{s}^2 - \text{tr}(\mathbf{s}^2)) \mathbf{E} \right),$$

соответственно

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = \lambda \left(2 \frac{\partial f}{\partial \text{tr}(\mathbf{s}^2)} \mathbf{s} + 3 \frac{\partial f}{\partial \text{tr}(\mathbf{s}^3)} \mathbf{s}^2 \right),$$

где ${}^4\mathbf{D}$ — изотропный тензор четвертой валентности, который при свертке по двум парам индексов с тензором второй валентности (двукратное скалярное умножение) выделяет девиатор последнего [12].

Поскольку тензор \mathbf{s}^2 не является девиатором, то в общем случае, когда пластический потенциал зависит от кубического инварианта девиатора напряжений, производная $\partial g / \partial \sigma_{ij}$ — девиатор, а $\partial g / \partial s_{ij}$ — нет. Следовательно,

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \neq \frac{\partial g}{\partial s_{ij}}.$$

Равенство (9) выполняется, если пластический потенциал зависит только от квадратичного инварианта, а при равенстве пластического потенциала функции текучести это соответствует выбору условия пластичности Мизеса.

В работе [14] показано, что в случае плоской деформации для пластического потенциала общего вида осевое напряжение (главное нормальное напряжение)

$$\sigma_3 = m(\sigma_1, \sigma_2).$$

Если пластический потенциал является гладкой функцией, то для нормально изотропного пластического тела³

$$m(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

а для изотропного пластического тела⁴ [8, 9]

$$m(\sigma_1, \sigma_2) \neq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

В отличие от гладких функций пластичности кусочно-линейное условие пластичности Треска из равенства

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 0$$

не позволяет определить зависимость $\sigma_3 = m(\sigma_1, \sigma_2)$.

Плоское деформированное состояние при выборе условия пластичности Шмидта-Ишлинского рассматривалось в [10].

Условие пластичности Леви. В работе [17] было показано, что из равенства

$$((\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2)((\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 4k^2)((\sigma_3 - \sigma_2)^2 - 4k^2) = 0$$

следует условие пластичности Леви [2]

$$4(k^2 - J_2)(4k^2 - J_2)^2 + 27J_3^2 = 0, \quad (10)$$

где

$$J_2 = \frac{1}{2}tr(\mathbf{s}^2), \quad J_3 = \frac{1}{3}tr(\mathbf{s}^3),$$

J_2, J_3 — второй и третий основные инварианты девиатора напряжений, являющиеся коэффициентами характеристического уравнения [6, 15]⁵

Условие Леви (10) не эквивалентно условию пластичности Треска, что видно при изображении кривых пластичности на девиаторной плоскости в пространстве главных напряжений (рис.1).

Кривую пластичности Треска на девиаторной плоскости определяет, например, система [9, 17, 19, 20]

$$\begin{cases} 4(k^2 - J_2)(4k^2 - J_2)^2 + 27J_3^2 = 0, \\ 3J_2 \leq k^2. \end{cases}$$

³Пластический потенциал является четной функцией главных нормальных напряжений.

⁴Пластический потенциал не является четной функцией главных нормальных напряжений.

⁵Иная расстановка знаков в характеристическом уравнении $-\lambda^3 - \lambda J_2(\mathbf{s}) + J_3(\mathbf{s}) = 0$, принятая в ряде работ (см., например, [12]), приводит к тому, что второй основной инвариант девиатора напряжений будет иметь противоположный знак: $J_2 = -tr(\mathbf{s}^2)/2$.

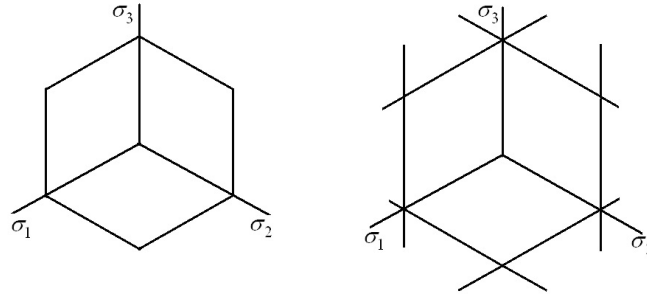


Рис. 1. Визуальная интерпретация на девиаторной плоскости условия пластичности Треска (слева) и условия Леви (справа)

При подстановке в уравнение Леви соотношений

$$(\sigma_i - \sigma_j)^2 - 4k^2 = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

то есть при рассмотрении определенной грани, получаем тождество [20].

Использование в качестве пластических потенциалов функций пластичности Треска и Леви приводит к разным соотношениям [9], [19], [20].

О соответствии условий пластичности Леви, Треска, Мизеса в случае плоской деформации. В декартовой прямоугольной системе координат условие пластичности Треска в случае плоской деформации записывается в виде

$$\begin{cases} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} = 2k, \\ \min\{\sigma_1, \sigma_2\} < \sigma_{33} < \max\{\sigma_1, \sigma_2\}, \end{cases}$$

который не следует из условия Леви (10).

Условие пластичности Мизеса [21]

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}tr(\mathbf{s}^2)} = k$$

в случае плоской деформации принимает вид

$$\begin{cases} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} = 2k, \\ \sigma_{33} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \end{cases} \quad (11)$$

Второе соотношение в (11) следует из рассмотрения определяющих соотношений деформационной теории и теории течения Сен-Венана–Мизеса [6]. Для нормально изотропного тела к системе (11) приходим при выборе любого гладкого пластического потенциала общего вида, не зависящего от первого инварианта тензора напряжений [8].

Задача о толстостенной трубе. Жесткопластическая среда.

В качестве примера рассмотрим задачу об определении предельного состояния круговой цилиндрической трубы для плоского случая деформированного состояния в рамках теории пластического течения.

Обозначим через a и b внутренний и внешний радиус трубы, а через p_a и p_b — давление на внутренней и внешней стенках трубы соответственно.

Теория Леви. При выборе условия текучести Треска в рамках теории пластического течения Леви равенство нулю осевой компоненты тензора скоростей деформаций

$$\varepsilon_z = 0$$

выполняется только для режима пластичности (r, θ, z — цилиндрические координаты)

$$\begin{cases} \sigma_\theta - \sigma_r = 2\kappa k, \quad \kappa = \text{sign}(\sigma_\theta - \sigma_r), \\ \min\{\sigma_\theta, \sigma_r\} < \sigma_z < \max\{\sigma_\theta, \sigma_r\}. \end{cases} \quad (12)$$

Относительно компонент σ_θ, σ_r задача статически определяемая.

Распределение напряжений определяется по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_a + 2\kappa k \ln \frac{r}{a}, \\ \sigma_\theta &= \sigma_r + 2\kappa k, \\ \sigma_z &= \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) = \sigma_r + \kappa k, \\ \kappa &= \text{sign}(\sigma_\theta - \sigma_r). \end{aligned}$$

Компоненты деватора напряжений имеют фиксированные значения $s_\theta = -s_r = \kappa k$, $s_z = 0$, среднее напряжение $\sigma = \sigma_z$.

Из того, что труба находится в предельном состоянии, следует равенство

$$p_b - p_a = 2\kappa k \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

Теория пластического потенциала. В рамках теории пластического течения, использующей ассоциированный закон пластического течения, при выборе условия текучести Треска можно получить решение для случая полной пластичности, когда

$$\begin{cases} \sigma_\theta - \sigma_r = 2k, \\ \sigma_\theta - \sigma_z = 2k. \end{cases} \quad (13)$$

Из обобщенного ассоциированного закона пластического течения следует, что

$$\varepsilon_z = \lambda_1 \cdot 0 - \lambda_2.$$

При условии $\varepsilon_z = 0$ получаем, что $\lambda_2 = 0$.

Для режима пластичности (13) задача является статически определяемой: для определения напряжений не требуется привлекать уравнения связи напряжений и скоростей деформаций. В этом случае распределение напряжений определяется по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_a + 2\kappa k \ln \frac{r}{a}, \\ \sigma_\theta &= \sigma_r + 2\kappa k, \\ \sigma_z &= -p_a + 2\kappa k \ln \frac{r}{a}. \end{aligned}$$

Компоненты деватора напряжений имеют фиксированные значения

$$s_\theta = \frac{4}{3}\kappa k, \quad s_r = s_z = -\frac{2}{3}\kappa k,$$

среднее напряжение вычисляется по формуле

$$\sigma = \sigma_r + \frac{2}{3}k.$$

Если рассматривается режим пластичности (12), то

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -p_a + 2\kappa k \ln \frac{r}{a}, \\ \sigma_\theta &= \sigma_r + 2\kappa k, \\ \sigma_{\min} &\leq \sigma_z \leq \sigma_{\max}.\end{aligned}$$

Задача о толстостенной трубе. Сжимаемая упругопластическая среда

Жесткопластическое тело не является частным случаем упругопластического тела, или тела, проявляющего иные механические свойства кроме свойства пластичности [18].

При учете упругой сжимаемости упругопластического тела аналитическое решение задачи о толстостенной трубе в рамках теории пластического течения можно получить для кусочно-линейного условия пластичности общего вида [22, 23]

$$\begin{aligned}\alpha\sigma_\theta + \beta\sigma_r + \gamma\sigma_z &= 2k, \quad \alpha + \beta + \gamma \neq 0, \\ \sigma_r &= C_1 r^{-1+m} + C_2 r^{-1-m} + N, \\ \sigma_\theta &= m(C_1 r^{-1+m} - C_2 r^{-1-m}) + N, \\ \sigma_z &= C_2 \frac{\alpha m - \beta}{\gamma} r^{-1-m} - C_1 \frac{\alpha m + \beta}{\gamma} r^{-1+m} + 2\nu N,\end{aligned}\tag{14}$$

где

$$m = \sqrt{\frac{D}{A}}, \quad A = \gamma^2 + 2\nu\alpha\gamma + \alpha^2, \quad D = \gamma^2 + 2\nu\beta\gamma + \beta^2, \quad N = \frac{2k(\alpha - \beta)}{\gamma(A - D)},$$

α, β, γ, k — константы. Величины C_1, C_2 определяются из граничных условий.

Реализация того или иного режима пластичности, определяемого заданием параметров α, β, γ , будет зависеть от выбора граничных условий.

При $\gamma = 0$ задача в пластической области является статически определимой относительно компонент σ_θ, σ_r :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{2k}{\delta\alpha} + Cr^{-\delta}, \\ \sigma_\theta &= \frac{2k}{\delta\alpha} \left(1 - \frac{\beta}{\delta\alpha}\right) - \frac{\beta}{\alpha} Cr^{-\delta},\end{aligned}\tag{15}$$

где $\delta = 1 + \alpha/\beta$.

Выполняя предельный переход при $\delta \rightarrow 0$, из (15) получаем ($\alpha = -\beta = 1$)

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2k \ln(r) + C, \\ \sigma_\theta &= 2k + \sigma_r.\end{aligned}$$

Переход некоторой области из упругого состояния в пластическое при заданных значениях коэффициента Пуассона ν , предела пластичности k , радиусов a, b и коэффициентов α, β, γ , фигурирующих в условии пластичности, наступает при определенном соотношении между давлениями p_a и p_b [24, 25].

Поскольку в области упругого состояния [26]

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\theta = A + \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_z = 2\nu A,$$

(величины A и B определяются из граничных условий), то из анализа этих формул следует, что при выборе условия пластичности Треска пластическая зона будет зарождаться на внутренней стенке $r = a$.

Так, на границе $r = a$ зарождается пластическая область, в которой реализуется режим пластичности

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k, \quad \sigma_\theta - \sigma_z < 2k, \quad \sigma_z - \sigma_r < 2k,\tag{16}$$

когда давления p_a и p_b связаны соотношением

$$p_a - p_b = k \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right),$$

которое получается из решения для упругого состояния при учете (16).

Режиму (16) в пластической области соответствует следующее распределение напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_a + 2\kappa k \ln\left(\frac{r}{a}\right), \\ \sigma_\theta &= \sigma_r + 2\kappa k, \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_r + \sigma_\theta). \end{aligned}$$

Поскольку при определении напряжений в пластической области решаем задачу Коши, то два последних неравенства (16) определяют диапазон изменения только давления p_a

$$-\frac{2\nu k}{1-2\nu} \leq p_a \leq \frac{2\nu k}{1-2\nu}, \quad (17)$$

Вне этого диапазона в пластической области возникают зоны, в которых нарушается режим (16).

При выполнении условия (17) режим (16) для условия пластичности Треска будет выполняться в области

$$a \leq r \leq c_1 = a \exp\left(\frac{p_a}{2k} + \frac{\nu}{1-2\nu}\right).$$

Если $c_1 \leq r \leq c \leq b$, где c — радиус упругопластической границы, то на границе $r = c_1$ происходит переход к режиму пластичности

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k, \quad \sigma_\theta - \sigma_z < 2k, \quad \sigma_z - \sigma_r < 2k, \quad (18)$$

Напряжения для режима (18) определяются по формулам (14).

Пластическая зона, в которой реализуется статически определенное состояние (13), возникает при определенном соотношении между внешним и внутренним давлением. Так, зарождение зоны статической определенности на границе $r = a$ начинается, когда

$$p_a = -\frac{2\nu k}{1-2\nu}, \quad p_b = p_a - k \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right).$$

На упругопластической границе $r = c$ должны выполняться условия непрерывности напряжений, из которых следует, что

$$c = a \exp\left(\frac{p_a}{2k} + \frac{\nu}{1-2\nu}\right), \quad p_a \geq -\frac{2\nu k}{1-2\nu},$$

а в упругой области $c \leq r \leq b$ напряжения вычисляются по формулам:

$$\sigma_r = k \left(\frac{1}{1-2\nu} - \frac{c^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\theta = k \left(\frac{1}{1-2\nu} + \frac{c^2}{r^2} \right), \quad \sigma_z = \frac{2\nu k}{1-2\nu}.$$

Для того чтобы в пластической области $a \leq r \leq c$ имело место статически определенное состояние, на границе $r = b$ внешнее давление должно принимать значение

$$p_b = k \left(\frac{a^2}{b^2} \exp^2\left(\frac{p_a}{2k} + \frac{\nu}{1-2\nu}\right) - \frac{1}{1-2\nu} \right).$$

Предельное состояние (вся область $a \leq r \leq b$ находится в пластическом состоянии) наступает, когда давление на внутренней границе достигает значения

$$p_a = 2k \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{2\nu k}{1-2\nu}.$$

Если в пластической области $a \leq r \leq c$ ($c_1 \leq c \leq b$) реализуются два режима (16) и (18), то между ними не может возникнуть зона статической определенности (13). Это следует из того, что для области $a \leq r \leq c_1$ существования режима (16) величина

$$c_1 = a \exp\left(\frac{p_a}{2k} + \frac{\nu}{1-2\nu}\right)$$

должна быть больше радиуса упругопластической границы для зоны статической определенности

$$c = a \exp\left(\frac{p_c}{2k} + \frac{\nu}{1-2\nu}\right), \quad p_c = -\sigma_r \quad (r = c),$$

что не имеет места.

Поскольку при активном процессе нагружения в пластической области между зонами, где реализуются режимы (16) и (18), зона, в которой реализуется условие полной пластичности не развивается, то на границе $r = c_1 \leq c \leq b$ перехода от режима (16) к режиму (18) деформации ε_r^p будут претерпевать скачок [20].

Альтернативные формы записи условия пластичности Треска

В качестве альтернативной формы записи условия пластичности Треска рассматривается соотношение [27], [28]

$$|\sigma_1 - \sigma_3| + |\sigma_2 - \sigma_3| + |\sigma_3 - \sigma_1| = 4k \quad (19)$$

Однако только при условии $\sigma_3 = \sigma_{33} = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$ из (19) в случае деформации следует равенство

$$\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} = 2k.$$

Выбор функции (19) и функции Треска

$$\max\{|\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} = 2k$$

в качестве пластических потенциалов приводит к одинаковым соотношениям [19, 28].

Обобщения условий пластичности Треска, Шмидта-Ишлинского и Мизеса

На примере осесимметричной упругопластической задачи для плоского деформированного состояния было показано, что рассмотрение кусочно-линейных условий пластичности может приводить к разрывам пластических деформаций [20, 37].

Непрерывные решения получаем при выборе гладких функций пластичности.

Известны обобщения [29–33] условий пластичности Треска, Мизеса и Шмидта-Ишлинского [1], [21], [34], [35]

$$|s_1 - s_2|^n + |s_2 - s_3|^n + |s_3 - s_1|^n = 2k^n, \quad (20)$$

$$|s_1|^n + |s_2|^n + |s_3|^n = \frac{2^n + 2}{3^n} k^n, \quad (21)$$

где s_i — собственные значения девиатора напряжений.

При $n = 2$ условия (20) и (21) переходят в условие пластичности Мизеса, а при $n = 1$ и $n \rightarrow \infty$ они переходят в условие пластичности максимального касательного и максимального приведенного напряжения соответственно.

Для четных значений показателя степени условия пластичности (20), (21) можно выразить через основные инварианты девиатора напряжений [36], [37]

$$\begin{aligned} & (s_1 - s_2)^{2m} + (s_1 - s_3)^{2m} + (s_2 - s_3)^{2m} = \\ & = 2tr(\mathbf{s}^{2m}) + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i C_{2m}^i [tr(\mathbf{s}^i)tr(\mathbf{s}^{2m-i}) - tr(\mathbf{s}^{2m})] + \frac{(-1)^m}{2} C_{2m}^m [tr^2(\mathbf{s}^m) - tr(\mathbf{s}^{2m})]. \end{aligned}$$

В частных случаях справедливы формулы:

$$\begin{aligned}(s_1 - s_2)^4 + (s_1 - s_3)^4 + (s_2 - s_3)^4 &= 18J_2^2, \\(s_1 - s_2)^6 + (s_1 - s_3)^6 + (s_2 - s_3)^6 &= 66J_2^3 - 81J_3^2, \\(s_1 - s_2)^8 + (s_1 - s_3)^8 + (s_2 - s_3)^8 &= (258J_2^3 - 648J_3^2)J_2.\end{aligned}$$

Однако использование условий (19), (20) и их альтернативных форм записи порождает сложности, связанные с интегрированием соотношений ассоциированного закона пластического течения.

Выводы

Если под статически определимой задачей теории жесткопластического тела понимать возможность определения напряжений в теле, рассматривая только уравнение равновесия и условия пластичности, то задача о трубе, за исключением случая, когда условие пластичности определяется системой двух уравнений, не является таковой, поскольку, рассматривая только условия пластичности и уравнение равновесия, нельзя найти распределение напряжений. Необходимо также рассматривать уравнение связи напряжений и приращений деформаций и учитывать кинематические соотношения.

При решении задачи плоской деформации для жесткопластического тела при выборе условия пластичности Треска главное среднее напряжение не определяется. Главное среднее напряжение определяется для статически определимого состояния, например, при рассмотрении условия полной пластичности.

Условие пластичности максимального касательного напряжения не эквивалентно условию пластичности Леви.

Выбор кусочно-линейных условий пластичности при решении упругопластических задач в рамках теории пластического течения может приводить к разрывам пластических деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Saint-Venant, B.* Mémoire sur l'établissement des équation différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites ou l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / B. Saint-Venant // J. d. Math. Pures Appl. Liouville. – 1871. – Ser. II. – V. 16. – P. 308-316. (Русский перевод: Сен-Венан Б. Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределом упругости // Теория пластичности. Сб. ст. – М.: ИЛ, 1948. – С. 11–19.)
- [2] *Lévy, M.* Extrait du mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / M. Lévy // J. Math. Pures Appl. – 1871. – Ser. II. – Vol. 16. – P. 369–372. (Русский перевод: Леви М. К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределом упругости // Теория пластичности. Сб. ст. – М.: ИЛ, 1948. – С. 20–23.)
- [3] *Ишлинский, А. Ю.* Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости / А. Ю. Ишлинский // Уч. Записки МГУ. Механика. – 1946. – Вып. 117. – С. 90–108.
- [4] *Ишлинский, А. Ю.* Прикладные задачи механики. Т. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел / А. Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1986. – С. 62–83.
- [5] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 704 с.
- [6] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
- [7] *Mises, R.* Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen / R. Mises // Ztschr. Angew. Math. und Mech. – 1928. – Band 8. – Heft 3. – S. 161–185.

- [8] *Артемов, М. А.* Следствия нормального закона пластического течения / М. А. Артемов, Н. С. Потапов, А. П. Якубенко // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5. – № 9. – С. 145–147.
- [9] *Артемов, М. А.* О соотношениях, вытекающих из условия пластичности Треска. / М. А. Артемов, Н. С. Потапов, А. П. Якубенко // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7. – № 3. – С. 7–8.
- [10] *Артемов, М. А.* О соотношениях, вытекающих из условия пластичности максимального приведенного напряжения / М. А. Артемов, Н. С. Потапов, А. П. Якубенко // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7. – № 4. – С. 4–5.
- [11] *Артемов, М. А.* Соотношения изотропии и ассоциированный закон течения / М. А. Артемов, Н. С. Потапов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7. – № 3. – С. 27–28.
- [12] *Лурье, А. И.* Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
- [13] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.
- [14] *Freudental, A. M.* The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum / A. M. Freudental, H. Geiringer. – Encyclopedia of physics. Vol. VI. Elasticity and plasticity. – Berlin: Springer-Verlag, 1958. – P. 229–433. (Русский пер. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. – М. : Физматгиз, 1962. – 432 с.)
- [15] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
- [16] *Каменьярж, Я. А.* Предельный анализ пластических тел и конструкций / Я. А. Каменьярж. – М.: Наука, 1997. – 512 с.
- [17] *Reuss, A.* Vereinfachte Berechnung der plastischen Formänderungsgeschwindigkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfliedbedingung / A. Reuss // Ztschr. Angew. Math. und Mech. – 1933. – Band. 13. – Heft 5. – S. 356–360.
- [18] *Ивлев, Д. Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – М. : Наука, 1971. – 232 с.
- [19] *Артемов, М. А.* Кусочно-линейные условия пластичности / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, А. П. Якубенко // Материалы Международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». – Тула, 2014. – С. 103–110.
- [20] *Артемов, М. А.* Соотношения изотропии и ассоциированный закон течения / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, А. П. Якубенко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 4. – С. 81–91.
- [21] *Mises, R.* Mechanik des festen Körpers im plastischen deformablen Zustand / R. Mises // Gottinger Nachr. Math. Phys. – 1913. – Heft 4. – S. 582–592. (Русский пер. Мизес Р. Механика твердых тел в пластически-деформированном состоянии / Теория пластичности. Сб. ст. – М.: ИЛ, 1948. – С. 57–69.
- [22] *Артемов, М. А.* Распределение напряжений и деформаций в цилиндрической трубе при выборе кусочно-линейного условия пластичности // М. А. Артемов, И. А. Ларин, Н. С. Потапов / Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6. – № 9. – С. 117–119.
- [23] *Артемов, М. А.* Математическое моделирование равновесного состояния круговой цилиндрической трубы / М. А. Артемов, Н. С. Потапов, А. П. Якубенко // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7. – № 5. – С. 126–128.
- [24] *Артемов, М. А.* К задаче Ламе / М. А. Артемов, А. П. Якубенко // Теоретические и прикладные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. – Тамбов, 2014. – С. 11–12.
- [25] *Артемов, М. А.* О выполнении условия полной пластичности при плоском деформированном состоянии / М. А. Артемов, Н. П. Бестужева, Н. С. Потапов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6. – № 7. – С. 88–92.

- [26] *Беляев, Н. М.* Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М. : Наука, 1965. – 856 с.
- [27] *Malvern, L. E.* Introduction to the mechanics of a continuous medium / L. E. Malvern. – New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1969. – 713 p.
- [28] *Артемов, М. А.* Пределные условия пластичности / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, А. П. Якубенко // Теоретические и прикладные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. – Тамбов, 2014. – С. 13–14.
- [29] *Hershey, A. V.* The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face centered cubic crystals / A. V. Hershey // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1954. – V. 21. – P. 241–249.
- [30] *Hosford, W. F.* A generalize isotropic yield criterion / W. F. Hosford // J. Appl. Mech. – 1972. – V. 39. – № 2. – P. 607–609.
- [31] *Karafillis, A. P.* A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor / A. P. Karafillis, M. C. Boyce // J. Mech. Phys. Solid. – 1993. – V. 41. – P. 1859–1886.
- [32] *Barlat, F.* Yielding description of solution strengthened aluminum alloys / F. Barlat, R. C. Becker, Y. Hayashida, Y. Maeda, M. Yanagawa, K. Chung, J. C. Brem, D. J. Lege, K. Matsui, S. J. Murtha, S. Hattori // Int. J. Plasticity. – 1997. – V. 13. – P. 385–401.
- [33] *Bron, F.* A yield function for anisotropic materials: Application to aluminium alloys / J. Besson, F. Bron // Int. J. Plast. – 2004. – V 20(4-5). – P. 937–963.
- [34] *Schmidt, R.* Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet / R. Schmidt // Ingenieur archiv. – 1932. – Band. III. – Heft 3. – S. 215–235. (Русский перевод: Шмидт Р. О зависимости между напряжениями и деформациями в области упрочнения. Теория пластичности. – М. : ИЛ, 1948. – С. 321–256.)
- [35] *Ишлинский, А. Ю.* Гипотеза прочности формоизменения / А. Ю. Ишлинский // Учен. записки МГУ. Механика. – 1940. – Вып. 46. – С. 117–124.
- [36] *Артемов, М. А.* Альтернативная форма записи условия пластичности / М. А. Артемов, Е. С. Барановский // Успехи современного естествознания. – 2014. – № 12-3. – С. 292.
- [37] *Артемов, М. А.* Альтернативные формы записи кусочно-линейных условий пластичности и их обобщения течения / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, А. П. Якубенко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 70–81.

Артемов Михаил Анатольевич,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: artemov_m_a@mail.ru

Барановский Евгений Сергеевич

кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: esbaranovskii@gmail.com

M. A. Artemov, E. S. Baranovskii

MATHEMATICAL MODELING OF PLASTIC STATE OF THE BODIES IN CASE OF PLANE STRAIN

Voronezh State University, Voronezh

Abstract. A comparative analysis of the theories of Saint-Venant, Levy and Mises has been presented. Comparison of condition of proportionality of stress deviator and plastic strain deviator has been given taking into account coaxiality of these two tensors. For plane strain case, the problem of obtaining of medium principle stress is discussed within different plastic flow theories. It is pointed out that the value of medium principle stress is undetermined in case of the Tresca plastic law.

The consequences of associated flow rule for regular isotropic and normally isotropic medium have been discussed in case of smooth and piecewise smooth flow functions.

The particularities of the alternative forms of statement of the Tresca yield criterion are considered and respective modifications are discussed.

For ideal rigid-plastic and compressible elasto-plastic medium, the plane strain axisymmetric problem is considered. Stress range variations at the boundaries, within which the only one plastic regime takes place for the Tresca yield criterion, have been obtained. Particular cases are considered when the problem is statically determined. It is shown that for some stress values at the solution region boundaries the completely plastic regime takes place.

Generalized forms of statements for the Tresca, Shmidt-Ishlinskii and Mises yield criterions proposed by A. V. Hershey, W. F. Hosford, F. Barlat, A. P. Karafillis, M. C. Boyce, F. Bron, J. Besson as functions of principle values of stress deviator have been presented via quadratic and cubic stress tensor invariants.

Keywords: compressible elastic-plastic medium, generalized Tresca's yield criterion, plane strain, plasticity theory

REFERENCES

[1] *Saint-Venant, B.* Mémoire sur l'établissement des équation différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / B. Saint-Venant // J. d. Math. Pures Appl. Liouville. – 1871. – Ser. II. – V. 16. – P. 308-316.

[2] *Lévy, M.* Extrait du mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / M. Lévy // J. Math. Pures Appl. – 1871. – Ser. II. – Vol. 16. – P. 369–372.

[3] *Ishlinskii, A. Y.* On the equations of deformation of bodies beyond the elastic limit / A. Y. Ishlinskii // Scientific notes of the Moscow State University. Mechanics. – 1946. – Vol. 117. – P. 90–108.

[4] *Ishlinskii, A. Y.* Applied problems of mechanics / A. Y. Ishlinskii. – Moscow: Nauka, 1986. – P. 62–83.

[5] *Ishlinskii, A. Y.* The Mathematical Theory of Plasticity / A. Y. Ishlinskii, D. D. Ivlev – Moscow: FIZMATLIT, 2001. – 704 p.

[6] *Kachanov, L. M.* Foundations of the Theory of Plasticity /L. M. Kachanov. – Moscow: Nauka, 1973. – 576 p.

[7] *Mises, R.* Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen / R. Mises // Ztschr. Angew. Math. und Mech. – 1928. – Band 8. – Heft 3. – S. 161–185.

- [8] *Artemov, M. A.* Normal plastic flow implications / M. A. Artemov, N. S. Potapov, A. P. Yakubenko // Proceedings of Voronezh State Technical University. – 2009. – Vol. 5. – № 9. – P. 145–147.
- [9] *Artemov, M. A.* About relations arising from Treska plasticity condition / M. A. Artemov, N. S. Potapov, A. P. Yakubenko // Proceedings of Voronezh State Technical University. – 2011. – Vol. 7. – № 3. – P. 7–8.
- [10] *Artemov, M. A.* About relations arising from the maximum reduced stress plasticity condition / M. A. Artemov, N. S. Potapov, A. P. Yakubenko // Proceedings of Voronezh State Technical University. – 2011. – Vol. 7. – № 4. – P. 4–5.
- [11] *Artemov, M. A.* Isotropic relations and the associated flow law / M. A. Artemov, N. S. Potapov // Proceedings of Voronezh State Technical University. – 2011. – Vol. 7. – № 3. – P. 27–28.
- [12] *Lurie, A. I.* Nonlinear theory of elasticity / A. I. Lurie. – Moscow: Nauka, 1980. – 512 p.
- [13] *Ivlev, D. D.* Theory of Ideal Plasticity / D. D. Ivlev. – Moscow: Nauka, 1966. – 232 p.
- [14] *Freudental, A. M.* The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum. Encyclopedia of physics. Vol. VI. Elasticity and plasticity / A. M. Freudental, H. Geiringer. – Berlin: Springer-Verlag, 1958. – P. 229–433.
- [15] *Sokolovskii, V. V.* Theory of plasticity / V. V. Sokolovskii. – Moscow: Vishaya Shkola, 1969. – 608 p.
- [16] *Kamenjarzh, J. A.* Limit analysis of plastic bodies and structures / J. A. Kamenjarzh. – Moscow: Fizmatlit, 1997. – 512 p.
- [17] *Reuss, A.* Vereinfachte Berechnung der plastischen Formänderungs-geschwindigkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfliedbedingung / A. Reuss // Ztschr. Angew. Math. und Mech. – 1933. – Band. 13. – Heft 5. – S. 356–360.
- [18] *Ivlev, D. D.* Theory of Hardening Plastic Solid / D. D. Ivlev, G. I. Bikovcev. – Moscow: Nauka, 1971. – 232 p.
- [19] *Artemov, M. A.* Ratio isotropy and associated flow law / M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, A. P. Yakubenko // Modern Problems of Mathematics, Mechanics, Computer Science. Proceedings of the International Conference, Tula, 15–19 September 2014. – Tula: Tula State University, 2014. – P. 103–110.
- [20] *Artemov, M. A.* Ratio isotropy and associated flow law / M. A. Artemov E. S. Baranovskii, A. P. Yakubenko // Proceedings of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics. – 2014. – № 4. – P. 81–91.
- [21] *Mises, R.* Mechanik des festen Körpers im plastischen deformablen Zustand / R. Mises // Gottinger Nachr. Math. Phys. – 1913. – Heft 4. – S. 582–592.
- [22] *Artemov, M. A.* Stress and strain distribution in a cylindrical tube with piecewise-linear plasticity condition / M. A. Artemov, I. A. Larin, N. S. Potapov // Proceedings of Voronezh State Technical University. – 2010. – Vol. 6. – № 9. – P. 117–119.
- [23] *Artemov, M. A.* Mathematical modeling of the equilibrium state of a circular cylindrical tube / M. A. Artemov, N. S. Potapov, A. P. Yakubenko // Proceedings of Voronezh State Technical University. – 2011. – Vol. 7. – № 5. – P. 126–128.
- [24] *Artemov, M. A.* On the Lamé problem / M. A. Artemov, A. P. Yakubenko // Theoretical and Applied Problems of Education and Science. Proceedings of the International Conference, Tambov, 31 March 2014. – Tambov: Ucom, 2014. – P. 11–12.
- [25] *Artemov, M. A.* The implementation of full plasticity condition at flat strain state / M. A. Artemov, N. P. Bestuzheva, N. S. Potapov // Proceedings of Voronezh State Technical University. – 2010. – Vol. 6. – № 7. – P. 88–92.
- [26] *Belyaev N. M.* Strength of materials / N. M. Belyaev. – Moscow: Nauka, 1965. – 856 p.
- [27] *Malvern, L. E.* Introduction to the mechanics of a continuous medium / L. E. Malvern. – New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1969. – 713 p.

[28] *Artemov, M. A.* Extreme conditions of plasticity / M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, A. P. Yakubenko // Theoretical and Applied Problems of Education and Science. Proceedings of the International Conference, Tambov, 31 March 2014. – Tambov: Ucom, 2014. – P. 13–14.

[29] *Hershey, A. V.* The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face centered cubic crystals / A. V. Hershey // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1954. – V. 21. – P. 241–249.

[30] *Hosford, W. F.* A generalize isotropic yield criterion / W. F. Hosford // J. Appl. Mech. – 1972. – V. 39. – № 2. – P. 607–609.

[31] *Karafillis, A. P.* A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor / A. P. Karafillis, M. C. Boyce // J. Mech. Phys. Solid. – 1993. – V. 41. – P. 1859–1886.

[32] *Barlat, F.* Yielding description of solution strengthened aluminum alloys / F. Barlat, R. C. Becker, Y. Hayashida, Y. Maeda, M. Yanagawa, K. Chung, J. C. Brem, D. J. Lege, K. Matsui, S. J. Murtha, S. Hattori // Int. J. Plasticity. – 1997. – V. 13. – P. 385–401.

[33] *Bron, F.* A yield function for anisotropic materials: Application to aluminium alloys / J. Besson, F. Bron // Int. J. Plast. – 2004. – V 20(4-5). – P. 937–963.

[34] *Schmidt, R.* Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet / R. Schmidt // Ingenieur archiv. – 1932. – Band. III. – Heft 3. – S. 215–235.

[35] *Ishlinskii, A. Y.* Hypothesis strength forming / A. Y. Ishlinskii // Scientific notes of the Moscow State University. Mechanics. – 1940. – Vol. 46. – P. 117–124.

[36] *Artemov, M. A.* Alternative forms of the piecewise-linear conditions of plasticity and their generalizations / M. A. Artemov E. S. Baranovskii , A. P. Yakubenko // Proceedings of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics. – 2015. – № 1. – P. 70–81.

[37] *Artemov, M. A.* Alternative forms of plasticity condition / M. A. Artemov, E. S. Baranovskii //Advances in Current Natural Sciences. – 2014. – № 12 (3). – P. 292.

Artemov Mikhail Anatolievich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Chair, Voronezh State University, Voronezh

Baranovskii Evgenii Sergeevich

PhD, Assoc. Professor, Voronezh State University, Voronezh

Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов, Н. С. Перунов

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ КРЕПИ ВЕРТИКАЛЬНОГО ШАХТНОГО СТВОЛА С
УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОЙ ПОРИСТОСТИ МАТЕРИАЛА И
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СЖАТОГО СКЕЛЕТА**

*Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия имени
профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина*

Воронежский государственный университет

Аннотация. Построена математическая модель, описывающая напряженно-деформированное состояние монолитной крепи вертикального шахтного ствола для материалов с пористой структурой, сжатый скелет которой обладает упрочняющимися упруго-пластическими свойствами. Деформирование пористой среды под действием заданных равномерно распределенных сжимающих нагрузок разделяется на два взаимосвязанных этапа: упругое деформирование пористой среды и неупругое деформирование сжатой матрицы. Задача нахождения напряженно-деформированного состояния крепи вертикальной выработки с круговой формой поперечного сечения на каждом этапе деформирования решается в рамках плоского деформированного состояния. При этом не учитываются эффекты, связанные с тем, что выработка имеет конечную глубину. Получены соотношения, определяющие поля напряжений и перемещений на первом этапе деформирования. Определена зависимость нагрузок, при которых начальная пористость материала достигает во всей области крепи нулевого значения. На втором этапе выведены аналитические выражения для нахождения напряженно-деформированных состояний в упругой и пластической зонах деформирования сжатого скелета, а так же получено уравнение для определения упругопластической границы. При этом в качестве условий совместности выбирались условия непрерывности компонент напряжений и перемещений на упругопластической границе, а также равенство нулю пластических деформаций на ней. Дана оценка влияния на величину границы раздела сред упругого и пластического деформирования начальной пористости и предела текучести материала. Построены графики зависимостей компонент напряжений от координаты при различных значениях величины начального раствора пор и других физико-механических и геометрических параметров материала и конструкции.

Ключевые слова: пористые материалы при неупругой работе сжатого скелета, монолитная крепь, вертикальная выработка, напряженно-деформированное состояние

УДК: 539.374

Определение напряженно-деформированного состояния крепей подземных выработок является первым этапом решения задачи устойчивости подземных сооружений. В отличие от работы [1], где исследуется локальная потеря устойчивости некруговых выработок при неупругой работе массива горных пород в настоящей работе исследуется вопрос об определении

полей напряжений и перемещений монолитной крепи вертикального шахтного ствола глубокого заложения. При этом материал крепи моделируется пористой средой, сжатый скелет которой обладает одновременно упругими и пластическими свойствами.

Деформирование пористого материала с начальным раствором пор ε_0 — можно разделить на два взаимосвязанных этапа [2]. Первый — упругое деформирование сжимаемой пористой среды, второй — неупругое деформирование сжатого скелета с упрочняющимися упругопластическими свойствами. Связь между напряжениями и деформациями на первом этапе деформирования берется в виде закона Гука для сжимаемого тела

$$\sigma_j^\beta = \begin{cases} \lambda_1 \varepsilon_\alpha^e g_j^\beta + 2\mu_1 \varepsilon_j^\beta, \\ -\varepsilon_\alpha^e < \varepsilon_0. \end{cases} \quad (1)$$

где g_j^β , σ_j^β , ε_j^β смешанные компоненты метрического тензора, тензора напряжений и тензора упругих деформаций соответственно, λ_1 , μ_1 — параметры Ламе сжимаемого тела.

На втором этапе упругие деформации сжатого скелета подчиняются закону Гука для несжимаемого тела [3]

$$S_j^\beta = \begin{cases} 2(\mu_0 + \mu_1)\varepsilon_j^\beta - 2\mu_0(\varepsilon_j^\beta)_0 + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0 g_j^\beta, \\ -\varepsilon_\alpha^e = \varepsilon_0. \end{cases} \quad (2)$$

где S_j^β — компоненты тензора диватора напряжений; $(\varepsilon_j^\beta)_0$ — компоненты тензора упругих деформаций, вычисленные на момент полного сжатия пор, то есть при выполнении условия $\varepsilon_\alpha^e = -\varepsilon_0$; $\mu_0 + \mu_1$ — модуль сдвига несжимаемого тела.

В зоне пластического деформирования сжатого скелета будем использовать модель несжимаемого упрочняющегося упругопластического тела [4] с поверхностью нагружения

$$F = \left(S_j^\beta - c\varepsilon_j^{p\beta} \right) \left(S_\beta^j - c\varepsilon_\beta^{pj} \right) - k^2, \quad (3)$$

где $\varepsilon_j^{p\beta}$ — компоненты тензора пластических деформаций, c — коэффициент упрочнения, k — предел текучести материала.

Полная деформация в пластической зоне складывается из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_j^\beta = \varepsilon_j^{e\beta} + \varepsilon_j^{p\beta}, \quad (4)$$

причем пластическая и упругая составляющие объемной деформации соответственно удовлетворяют условиям несжимаемости

$$\varepsilon_{nn}^p = 0, \varepsilon_{nn}^e = -\varepsilon_0. \quad (5)$$

В (2), (4), (5) и далее индексы "e" и "p" вверху величин обозначают их принадлежность соответственно к упругой и пластической зонам деформирования сжатого скелета.

Ниже рассмотрим задачу определения напряженно-деформированного состояния (далее НДС) цилиндрического тела (рисунок 1), являющегося крепью вертикального шахтного ствола. Обозначим через b и a соответственно внешний и внутренний радиусы крепи. Действие массива горных пород на крепь заменим сжимающей нагрузкой интенсивностью q_b равномерно распределенной по внешней поверхности. Сжимающая нагрузка интенсивностью q_a равномерно распределенная по внутренней поверхности моделирует собой давление жидкости или газа на крепь.

Для такого рода задач можно предположить [5], что при определении НДС не учитываются эффекты связанные с тем, что выработка имеет конечную глубину.

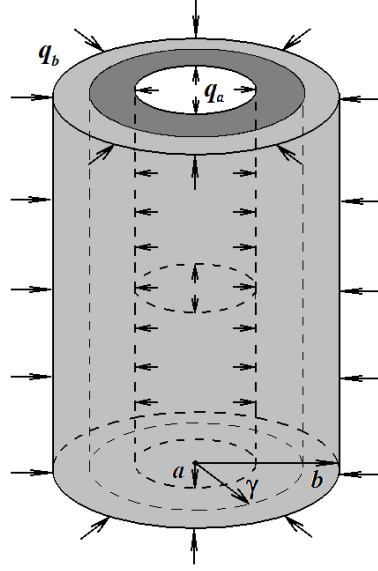


Рис. 1. Монолитная крепь вертикального шахтного ствола под действием радиального сжатия

НДС монолитной крепи вертикального шахтного ствола в рамках плоского деформированного состояния в цилиндрической системе координат (r, θ, z) будем моделировать следующими соотношениями геометрически линейной теории

– уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \quad (6)$$

– соотношения Коши

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (7)$$

где u — радиальная составляющая вектора перемещений;

– граничные условия в напряжениях

$$\sigma_r|_{r=b} = -q_b, \sigma_r|_{r=a} = -q_a (q_a > 0, q_b > 0) \quad (8)$$

Связь между напряжениями и деформациями при упругом деформировании пористой среды возьмем в виде соотношений (1), которые при принятых допущениях переписутся в форме

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_r + \lambda_1\varepsilon_\theta, \sigma_\theta = \lambda_1\varepsilon_r + (\lambda_1 + 2\mu_r)\varepsilon_\theta, \\ \sigma_z &= \lambda_1(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta). \end{aligned} \quad (9)$$

Упругие деформации сжатого скелета связаны с напряжениями соотношениями (2), которые в нашем случае примут вид

$$\begin{aligned} s_r &= 2(\mu_0 + \mu_1)\varepsilon_r - 2\mu_0\varepsilon_{r0} + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_\theta, s_\theta = 2(\mu_0 + \mu_1)\varepsilon_\theta - 2\mu_0\varepsilon_{\theta0} + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0, \\ s_z &= \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0. \end{aligned} \quad (10)$$

В (10) и далее индекс "0" внизу компонент деформаций, напряжений и перемещений обозначает, что они вычислены на момент полного сжатия пор.

Функция нагружения (3), соотношения для полных деформаций в пластической зоне сжатого скелета (4), условия несжимаемости (5) в случае плоского деформированного состояния для нашей задачи переписутся соответственно в формах

$$(s_r - c\varepsilon_r^p)^2 + (s_\theta - c\varepsilon_\theta^p)^2 + s_z^2 = 2k^2, \quad (11)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p, \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p, \quad (12)$$

$$\varepsilon_r^e + \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_z^e = -\varepsilon_0, \varepsilon_r^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_z^p = 0. \quad (13)$$

На границе γ раздела сред упругого и пластического деформирования сжатого скелета должны выполняться условия непрерывности перемещений и напряжений

$$[u]|_{r=\gamma} = 0, [\sigma_r]|_{r=\gamma} = 0, [\sigma_\theta]|_{r=\gamma} = 0. \quad (14)$$

В (14) квадратные скобки обозначают разность значений выражений соответствующих упругой и пластической области на границе $r = \gamma$.

Соотношения (6)–(14) представляют собой математические модели, описывающие НДС монолитной крепи вертикального шахтного ствола на этапах упругого деформирования пористой среды и неупругого деформирования сжатого скелета.

НДС монолитной крепи на первом этапе, то есть при наличии несхлопнутых пор согласно (6)–(9), определяется соотношениями

$$\begin{aligned} u &= \frac{q_b - q_a a^2}{2(\lambda_1 + 1)(a^2 - 1)} \cdot r + \frac{(q_b - q_a)a^2}{2(a^2 - 1)} \cdot \frac{1}{r}, \\ \varepsilon_r &= \frac{q_b - q_a a^2}{2(\lambda_1 + 1)(a^2 - 1)} - \frac{(q_b - q_a)a^2}{2(a^2 - 1)} \cdot \frac{1}{r^2}, \varepsilon_\theta = \frac{q_b - q_a a^2}{2(\lambda_1 + 1)(a^2 - 1)} + \frac{(q_b - q_a)a^2}{2(a^2 - 1)} \cdot \frac{1}{r^2}, \\ \sigma_r &= q_a \cdot \frac{a^2(r^2 - 1)}{r^2(1 - a^2)} + q_b \cdot \frac{a^2 - r^2}{r^2(1 - a^2)}, \sigma_\theta = q_a \cdot \frac{a^2(r^2 + 1)}{r^2(1 - a^2)} - q_b \cdot \frac{r^2 + a^2}{r^2(1 - a^2)}, \\ \sigma_z &= q_a \cdot \frac{\lambda_1 a^2}{(\lambda_1 + 1)(1 - a^2)} - q_b \cdot \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + 1)(1 - a^2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

В (15) и далее все соотношения записаны в безразмерном виде, при этом все величины имеющие размерность напряжений отнесены к величине μ_1 , а имеющие размерность длины к радиусу b .

Из (15) следует, что объемная деформация при упругом сжатии пор определяется в виде

$$\varepsilon_\alpha^\alpha = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \frac{q_b - q_a a^2}{(\lambda_1 + 1)(a^2 - 1)}. \quad (16)$$

Следовательно, достижение величины начального раствора пор нулевого значения (иначе - достижение объемной деформацией величины $-\varepsilon_0$) при упругом деформировании материала происходит одновременно во всей крепи под действием нагрузок удовлетворяющих условию

$$q_b = \varepsilon_0(\lambda_1 + 1)(1 - a^2) + q_a \cdot f(\varepsilon_0)a^2, \quad (17)$$

$$\text{где } f(\varepsilon_0) = \begin{cases} 1, \varepsilon_0 \neq 0, \\ 0, \varepsilon_0 = 0. \end{cases}$$

При этом НДС (15) на момент полного закрытия пор переписывается в виде

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \cdot r + \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + 1))}{2} \cdot \frac{a^2}{r}, \\ \varepsilon_{r0} &= -\frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + 1))}{2} \cdot \frac{a^2}{r^2}, \varepsilon_{\theta 0} = -\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + 1))}{2} \cdot \frac{a^2}{r^2}, \\ \sigma_{r0} &= -\varepsilon_0(\lambda_1 + 1) - \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + 1))a^2}{r^2}, \sigma_{\theta 0} = -\varepsilon_0(\lambda_1 + 1) + \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + 1))a^2}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{z0} = -\lambda_1 \varepsilon_0. \quad (18)$$

Таким образом, если $q_b < \varepsilon_0(\lambda_1 + 1)(1 - a^2) + q_a \cdot f(\varepsilon_0)a^2$, то полного закрытия пор не происходит и материал ведет себя как сжимаемая упругая среда с параметрами $\lambda_1, \mu_1 = 1, \varepsilon_0$.

Если $q_b = \varepsilon_0(\lambda_1 + 1)(1 - a^2) + q_a \cdot f(\varepsilon_0)a^2$, то во всей крепи происходит полное сжатие пор (случай сжатого скелета). А при условии $q_b > \varepsilon_0(\lambda_1 + 1)(1 - a^2) + q_a \cdot f(\varepsilon_0)a^2$ возникнет и будет расти около внутренней поверхности крепи пластическая зона, препятствовать развитию которой будет упрочнение (c) материала, то есть сжатый скелет будет деформироваться как упрочняющаяся несжимаемая упругопластическая среда с параметрами $\mu = 1 + \mu_2, k, c$.

В этом случае сплошная среда разделяется на две зоны – упругую и пластическую, в каждой из которых значения перемещений, деформаций и напряжений в точках среды складываются на компоненты:

а) пористого сжатия, определяемыми соотношениями (18);

б) упруго-пластического сжатия (которые для деформаций в пластической зоне в свою очередь складываются из упругих и пластических компонент), определяемыми из решения упругопластической задачи.

НДС сжатого скелета монолитной крепи вертикального шахтного ствола согласно (6)–(14), (18) определяется в виде

- в упругой области ($\gamma < r < 1$)

$$\sigma_r = \chi \gamma^2 \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \varepsilon_0^2} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) - q_b, \sigma_\theta = \chi \gamma^2 \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \varepsilon_0^2} \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) - q_b, \quad (19)$$

- в пластической области ($a < r < \gamma$)

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^p &= -\varepsilon_\theta^p = \frac{\chi \sqrt{k^2 - \varepsilon_0^2/3}}{c + 2\mu} \left(1 - \frac{\gamma^2}{r^2}\right), \\ \sigma_r &= -q_a + \chi \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \varepsilon_0^2} \left(\frac{\gamma^2}{a^2} - \frac{\gamma^2}{r^2} + \frac{2\mu}{c + 2\mu} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} + 2 \ln \frac{r}{a}\right)\right), \\ \sigma_\theta &= -q_a + \chi \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \varepsilon_0^2} \left(\frac{\gamma^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{r^2} + \frac{4\mu}{c + 2\mu} \left(\frac{1}{2} \left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right) - \frac{\gamma^2}{r^2} + \ln \frac{r}{a}\right)\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Перемещения и полные деформации в упругой и пластической областях определяются соотношениями

$$u = \frac{D}{r} - \frac{\varepsilon_0}{2} r, \varepsilon_r = -\frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{2}, \varepsilon_\theta = \frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (21)$$

Здесь в (19) - (21)

$$\chi = \text{sign}(q_a - q_b), D = \frac{\chi \gamma^2 \sqrt{k^2 - \varepsilon_0^2/3} + \mu_0 (q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + 1)) a^2}{2\mu}.$$

Радиус γ раздела зон упругого и пластического деформирования определяется из решения уравнения

$$q_b - q_a + \chi \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \varepsilon_0^2} \left(\frac{\gamma^2}{a^2} - \gamma^2 + \frac{2\mu}{c + 2\mu} \left(1 - \frac{\gamma^2}{a^2} + 2 \ln \frac{\gamma}{a}\right)\right) = 0. \quad (22)$$

Результаты численного эксперимента представлены на рисунках 2, 3.

На рисунке 2а кривая 1 соответствует $k = 0.01$, кривая 2 – $k = 0.015$, кривая 3 – 0.02 .

На рисунке 2б кривая 1 соответствует $\mu = 1$, кривая 2 – $\mu = 2$, кривая 3 – $\mu = 3$.

На рисунках 3а и 3б кривые 1 соответствуют $k = 8.5 \cdot 10^{-3}$, кривые 2 – $k = 0.01$, кривая 3 – $k = 0.012$.

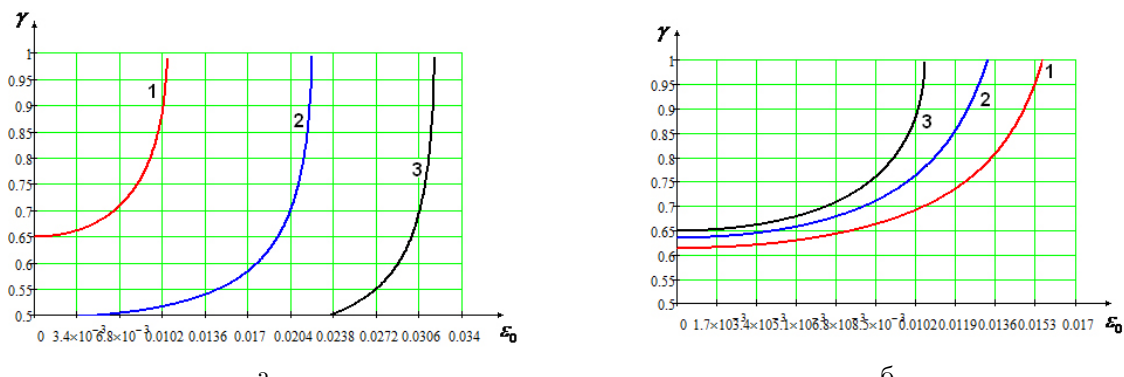


Рис. 2. Зависимость радиуса упругопластической границы γ от начального раствора пор ε_0

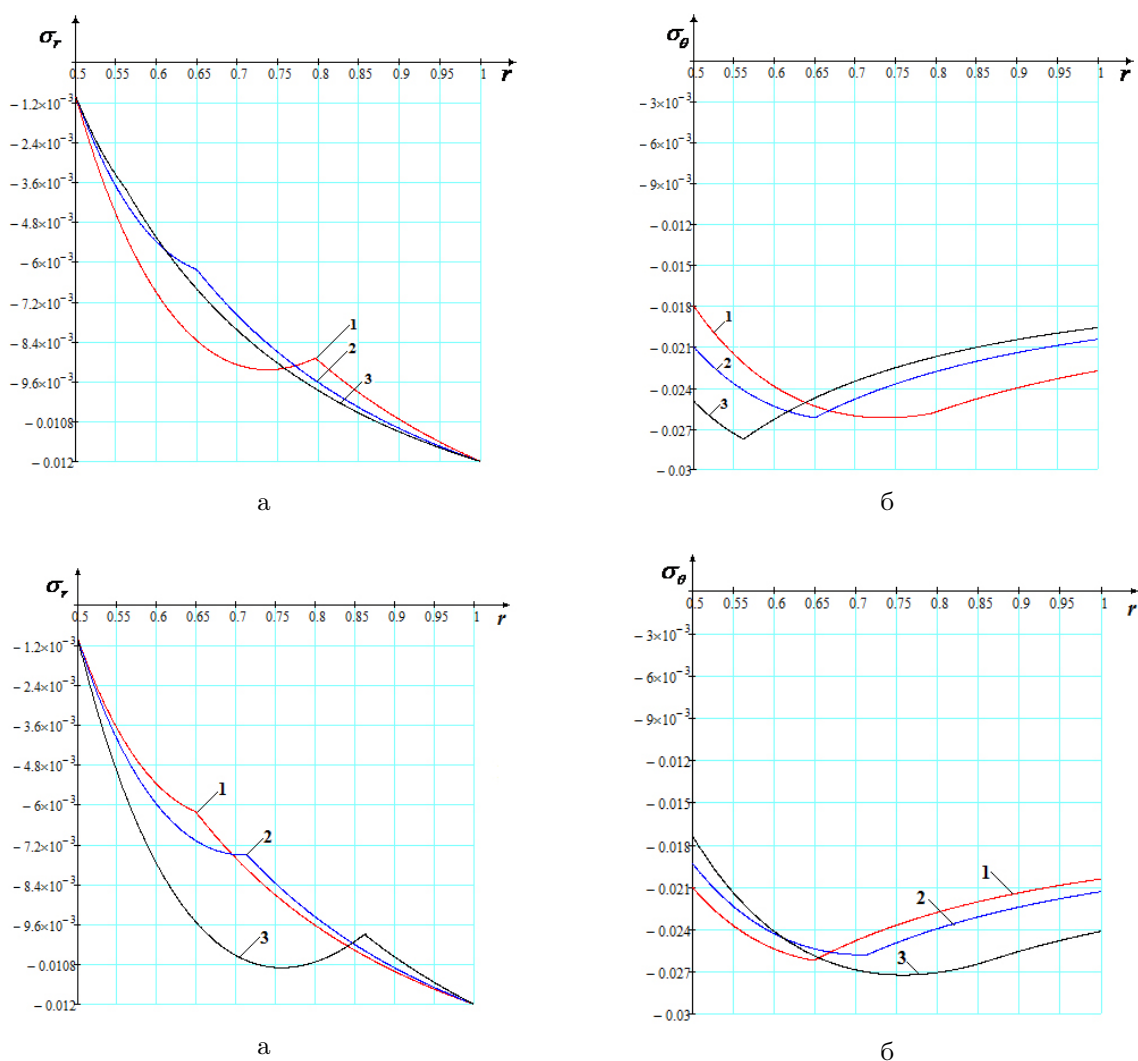


Рис. 3. Зависимость напряжений σ_r и σ_θ от радиальной координаты r

На рисунках 3в и 3г кривые 1 соответствуют $\varepsilon_0 = 10^{-4}$, кривые 2 — $\varepsilon_0 = 7 \cdot 10^{-3}$, кривая 3 — $\varepsilon_0 = 0.01$.

Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, если не оговорено особо, брались следующими $a = 0.5$, $b = 1$, $q_a = 0.001$, $q_b = 0.012$, $c = 0.005$, $\lambda_1 = 3$, $\mu_1 = 1$, $k = 0.01$, $\varepsilon_0 = 0.001$, $\mu = 2$.

Если в соотношениях (19) - (22) положить $\varepsilon_0 = 0$, то получим результаты работы [6].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гоцев, Д. В., Ененко, И. А., Спорыхин, А. Н.* Локальная неустойчивость горизонтальных выработок многоугольной формы в упруговязкопластических массивах / Гоцев Д. В., Ененко И. А., Спорыхин А. Н. // Прикладная механика и техническая физика. – 2005.

[2] *Садовская, О. В., Садовский, В. М.* Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред / О. В. Садовская, В. М. Садовский – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 368 с.

[3] *Гоцев, Д. В., Бунтов, А. Е.* Устойчивость монолитной крепи подземного нефтехранилища сферической формы с учетом начальной пористости материала / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – №4 (22). – С.114-123.

[4] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред Т2. / Д. Д. Ивлев – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.

[5] *Гузь, А. Н.* Основы теории устойчивости горных выработок. / А. Н. Гузь – Киев : Наук. думка, 1977. – 204 с.

[6] *Гоцев, Д. В., Спорыхин, А. Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости подкрепленных горных выработок. / Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2010. – 299 с.

Гоцев Дмитрий Викторович,

профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, доктор физико-математических наук, доцент, воронежский государственный университет, г.Воронеж

e-mail: rbgotsev@mail.ru

Бунтов Алексей Евгеньевич

адъюнкт, Военный учебно-научный центр ВВС "Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина г.Воронеж

e-mail: buntovkmss@mail.ru

Перунов Николай Сергеевич

студент 4 курса факультета ПММ, воронежский государственный университет, г.Воронеж

e-mail: urlikz@mail.ru

D. V. Gotsev, A. E. Buntov, N. S. Perunov

MATHEMATICAL MODEL OF THE INTENSE DEFORMED STATE FIX THE VERTICAL MINE TRUNK TAKING INTO ACCOUNT INITIAL POROSITY OF MATERIAL AND UPRUGOPLASTIYESKY PROPERTIES OF THE SQUEEZED SKELETON

*Voronezh State university, Military academy, the Air Force Military educational scientific center
"Military and air academy of professor N. E. of Zhukovsky and Yu. A. Gagarin"*

Abstract. The mathematical model describing the intense deformed state monolithic is constructed fix a vertical mine trunk for materials with porous structure which squeezed skeleton possesses the strengthened elasto-plastic properties. Deformation of the porous environment under the influence of the set evenly distributed squeezing loadings is divided into two interconnected stages: elastic deformation of the porous environment and inelastic deformation of the squeezed matrix. A problem of finding of the intense deformed state fix vertical development with a circular form of cross section at each stage of deformation decides within the flat deformed state. Thus the effects connected by that development has final depth aren't considered. The ratios defining fields of tension and movements at the first stage of deformation are received. Dependence of loadings at which initial porosity of material reaches in all area is defined fix zero value. At the second stage analytical expressions for finding of the intense deformed states in elastic and plastic zones of deformation of the squeezed skeleton are removed, and the equation for definition of elasto-plastic border is also received. Thus as conditions of compatibility continuity conditions a component of tension and movements on elasto-plastic border, and also equality to zero plastic deformations on it got out. The assessment of influence on the size of limit of the section of environments of elastic and plastic deformation of initial porosity and a limit of fluidity of material is given. Schedules of dependences a component of tension from coordinate are constructed at various values of size of initial solution of a time and other physicommechanical and geometrical parameters of material and a design.

Keywords: porous materials during the inelastic work of the squeezed skeleton, monolithic крепь, vertical development, the intense deformed state.

REFERENCES

1. Gotsev, D. V. Local instability of horizontal developments of a polygonal form in the elastic-viscous-plastic massifs / D. V. Gotsev, I. A. Enenko, A. N. Sporykhin // Applied mechanics and technical physics. 2005. T.46, No. 2 (270). P. 141–150. (in Russian)
2. Sadovskaya, O. V. Mathematical modeling in problems of mechanics of loose environments / O. Sadovskaya, V. Sadovsky - M.: FIZMATLIT, 2008. - 368 p. (in Russian)
3. Gotsev, D. V. Stability monolithic fix underground oil storage of a spherical form taking into account initial porosity of material / D. V. Gotsev, A.E. Buntov // the ChGPU Bulletin of I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state 2014 No. 4 (22). Page 114-123. (in Russian)
4. Ivlev, D. D. Mekhanika of plastic environments: in 2 t. T2/Dyuis Ivlev. – M. : FIZMATLIT, 2002. - 448 pages. (in Russian)
5. Guz, A.N. Bases of the theory of stability of excavations / A.N. Guz - Kiev: Sciences. thought, 1977. 204 pages. (in Russian)
6. Gotsev, D. V. Metod of indignations in problems of stability of the supported excavations / D. Gotsev, A. Sporykhin - Voronezh: Voronezh state university, 2010. - 299 pages. (in Russian)

Gotsev Dmitry Viktorovich

professor of chair of mechanics and computer modeling, the doctor of physical and mathematical sciences, the associate professor, Voronezh Sstate University, Voronezh

Buntov Alexey Evgenyevich

the graduated in a military academy, the Air Force Military educational scientific center "Military and air academy of professor N. E. of Zhukovsky and Yu.A. Gagarin Voronezh

Perunov Nikolay Sergeyevich

the student 4 courses of faculty of applied mathematics, information scientists and mechanics, Voronezh state university, Voronezh

К. Г. Дмитрик, А. Н. Спорыхин

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ СЖАТИИ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Аннотация. В работе исследована устойчивость двухслойной сферической оболочки, внешний слой которой упругий, а внутренний – упругопластический. В первой части находим докритическое напряженно-деформированное состояние в осесимметричном случае в сферической системе координат. Во второй части исследуем устойчивость основного состояния составной оболочки. Для этого выписываем уравнения равновесия в возмущениях для оболочки и включения при соответствующих граничных условиях. Далее, задача определения критической нагрузки сводится к задаче на собственные значения относительно временного множителя. В результате получаем зависимость критического внешнего давления от внешнего и внутреннего радиуса оболочки, соответствующую осесимметричной форме потери устойчивости оболочки с включением.

Ключевые слова: устойчивость, оболочка, напряжения, деформация, пластичность, упругость.

УДК: 539.374

Исследованию устойчивости неоднородных сферических оболочек при нагружении посвящены работы [1], [3], [5], [6], [9]. При этом в [1], [3], [9] исследована устойчивость сферических упругих оболочек, в [5] – вязкоупругих оболочек, когда заполнитель описывался соотношениями теории упруговязкопластического тела [7], а в [6] – соотношениями модели Кельвина-Фойхта, точно так же, как в работах [3, 9] в предположении, что физико-механические параметры изменяются по экспоненциальному закону.

1. Ниже в рамках трехмерной линеаризованной теории устойчивости исследуется устойчивость составной сферической оболочки, верхний слой которой является упругим, а внутренний – упругопластическим, описываемым соотношениями теории Генки-Ильюшина.

По внешнему контуру оболочки равномерно распределена нагрузка интенсивности p , а по внутреннему – нагрузка интенсивности q . Трением между оболочкой и включением пренебрегаем, полагая, что на границе контакта оболочка и заполнитель деформируются совместно, без проскальзывания и отставания. Таким образом, рассматривается двусвязная область при всестороннем равномерном сжатии: упругая оболочка с ЕР включением.

Обозначим через b внешний радиус оболочки, через γ – внешний радиус включения, через a – радиус полости. Докритическое состояние будем определять в рамках геометрически линейной теории.

Полагаем, что оболочка и включение несжимаемы, тогда

$$g_j^i \varepsilon_i^j = 0, \quad (1.1)$$

где g_j^i — компоненты метрического тензора, ε_i^j — компоненты тензора деформаций.

Упругая область представима законом Гука

$$S_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}, S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}g_{ij}. \quad (1.2)$$

Область включения подчиняется соотношениям теории малых упругопластических деформаций [4].

$$S_{ij}^{(1)} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} \varepsilon_{ij}^{(1)}, \sigma_u = W(\varepsilon_u). \quad (1.3)$$

где σ_u — интенсивность напряжений, ε_u — интенсивность деформаций.

Для ряда материалов функцию $W(\varepsilon_u)$ можно аппроксимировать при помощи степенной зависимости [4]

$$\sigma_u = k \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_\tau} \right)^m, \quad (1.4)$$

где ε_τ — деформация, соответствующая началу пластического течения, k — предел текучести материала.

Показатель степени m меняется в пределах $0 \leq m \leq 1$. Значению $m = 0$ соответствует идеально пластическое тело, а значению $m = 1$ — идеально упругое.

Заметим, что конкретизация (1.4) функции $W(\varepsilon_u)$ позволяет получить решение задачи в аналитическом виде.

Деформации связаны с перемещениями формулами Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i). \quad (1.5)$$

Уравнения равновесия для оболочки и, соответственно, включения таковы:

$$\nabla_i \sigma^{ij} = 0. \quad (1.6)$$

В силу принятых предположений, на границе контакта оболочки и заполнителя выполняются условия совместности перемещений и напряжений. Условия на внешней границе оболочки, а также внутренней границе включения совместно с уравнениями (1.1)–(1.4) соответственно для оболочки и включения представляют собой связную краевую задачу.

Исходя из уравнений равновесия (1.6), привлекая соотношения (1.1)–(1.5), и учитывая при этом граничные условия на внешнем контуре оболочки и, соответственно, внутреннем контуре заполнителя, находим докритическое напряженно-деформированное состояние, которое в осесимметричном случае в сферической системе координат (ρ, θ, ϕ) таково

– для оболочки

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 4\mu C_1 \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3} \right) - p, \\ \sigma_\theta &= \sigma_\phi = 2\mu C_1 \left(\frac{1}{r^3} + \frac{2}{b^3} \right) - p, \\ \varepsilon_r &= -\frac{2C_1}{r^3}, \varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = \frac{C_1}{r^3}, u_r = \frac{C_1}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

– для заполнителя

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \frac{2^{m+1}}{3m\varepsilon_\tau^m} k B_1^m \left(\frac{1}{a^{3m}} - \frac{1}{r^{3m}} \right) - q, \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \sigma_\phi^{(1)} = \frac{2^{m+1}}{3m\varepsilon_\tau^m} k B_1^m \left(\frac{1}{a^{3m}} - \frac{1}{r^{3m}} \right) + \frac{2^m}{\varepsilon_\tau^m} k B_1^m \frac{1}{r^{3m}} - q, \\ \varepsilon_r^{(1)} &= -\frac{2B_1}{r^3}, \varepsilon_\theta^{(1)} = \varepsilon_\phi^{(1)} = \frac{B_1}{r^3}, u_r^{(1)} = \frac{B_1}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

В соотношениях (1.7), (1.8) C_1 и B_1 — постоянные интегрирования.

Для идеально пластического заполнителя из (1.8) получаем следующее решение

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(1)} &= 2k \ln \frac{r}{a} - q, \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \sigma_\phi^{(1)} = k \left[\ln \left(\frac{r}{a} \right)^2 + 1 \right] - q, \\ \varepsilon_r^{(1)} &= -\frac{2B_1}{r^3}, \varepsilon_\theta^{(1)} = \varepsilon_\phi^{(1)} = \frac{B_1}{r^3}.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Постоянные интегрирования C_1 и B_1 определяем из условия на поверхности контакта γ оболочка-включение.

$$\sigma_r^{\text{об}} = \sigma_r^{\text{вкл}}, u_r^{\text{об}} = u_r^{\text{вкл}} \quad \text{при } r = \gamma.\tag{1.10}$$

Для случая (1.7), (1.9) они таковы

$$\begin{aligned}C_1 &= B_1 = C_0, \\ C_0 &= \frac{\left(2k \ln \frac{\gamma}{a} - q + p \right) \gamma^3 b^3}{4\mu(\gamma^3 - b^3)}.\end{aligned}\tag{1.11}$$

2. Исследование устойчивости основного состояния составной оболочки сводится [8] к решению уравнения равновесия для оболочки и включения при соответствующих граничных условиях.

Уравнения равновесия и граничные условия имеют вид

$$\nabla_j \left(\sigma^{ij} + \sigma^{jk} \nabla_k u^i \right) + X^i - \rho_0 S^2 u^i = 0,\tag{2.1}$$

$$\left(\sigma^{ij} + \sigma^{jk} \nabla_k u^i \right) n_j = p^i.\tag{2.2}$$

Здесь и далее символ “+” сверху относится к амплитудным значениям соответствующих величин, а символ “0” — к величинам докритического состояния, которые определяются соотношениями (1.7) для оболочки и (1.9) — для включения; ρ_0 — плотность среды в недеформированном состоянии; $S = i\omega$ — комплексная величина, ω — собственные значения.

В случае “мертвой” нагрузки

$$X^i = p^i = 0.\tag{2.3}$$

Связь между амплитудными значениями компонента тензора напряжений и деформации представим согласно (1.1)–(1.3) в форме

– для оболочки

$$\sigma^{ij} = \lambda \frac{e}{kk} g^{ij} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} \frac{e}{\alpha\beta},\tag{2.4}$$

– для включения [2]

$$\begin{aligned}\sigma^{ij} &= \frac{2}{3} E_c g^{i\alpha} g^{j\beta} \frac{e}{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \left(K - \frac{2}{3} E_c \right) g^{ij} \frac{e}{kk} + \frac{e_u}{\sigma_u} (E_k - E_c) S^{ij}, \\ S^{ij} &= \sigma^{ij} - \frac{1}{3} \frac{e}{kk} g^{ij}, \sigma = \frac{1}{3} \frac{e}{kk},\end{aligned}\tag{2.5}$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_u^+ = \frac{2}{9 \frac{e_u^0}{e_u^+}} & \left[\left(\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0 \right) \left(\varepsilon_{11}^+ - \varepsilon_{22}^+ \right) + \left(\varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{33}^0 \right) \left(\varepsilon_{22}^+ - \varepsilon_{33}^+ \right) + \left(\varepsilon_{33}^0 - \varepsilon_{11}^0 \right) \left(\varepsilon_{33}^+ - \varepsilon_{11}^+ \right) \right. \\ & \left. + 6 \left(\varepsilon_{12}^0 \varepsilon_{12}^+ + \varepsilon_{23}^0 \varepsilon_{23}^+ + \varepsilon_{31}^0 \varepsilon_{31}^+ \right) \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$E_k = \left. \frac{dW}{de_u} \right|_{e_u^-, e_u^0}, \quad E_c = \frac{\sigma_u^0}{e_u^0}, \quad K = \frac{E}{1 - 2\nu}.$$

В соотношениях (2.4), соответственно, (2.5), связь между амплитудными величинами деформаций и перемещений согласно (1.5) такова

$$2 \varepsilon_{ij}^+ = \nabla_i^+ u_j^+ + \nabla_j^+ u_i^+. \quad (2.7)$$

Условие несжимаемости (1.1) для амплитуд деформаций записывается так

$$\varepsilon_k^+ = 0. \quad (2.8)$$

При этом условии, (2.8), связь между амплитудными значениями компонент тензора напряжений и деформаций (2.4), соответственно, (2.5), принимает вид

– для оболочки

$$S^{ij} = 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^+, \quad (2.9)$$

– для заполнителя

$$S^{ij} (1) = \frac{2}{3} E_c g^{i\alpha} g^{j\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^+ (1) + \frac{e_u^+}{\sigma_u} (E_k - E_c) S^{ij} (1). \quad (2.10)$$

Если включение – идеально пластическое тело, то в (2.10) $E_k = 0$. Далее ограничимся этим случаем. Условия на границе раздела сред таковы

$$[\sigma_{ij} n_j] = 0, \quad [u_j] = 0. \quad (2.11)$$

Таким образом, задача определения критической нагрузки согласно [7] сводится к задаче на собственные значения относительно ω . Докритическое состояние будет устойчивым, если

$$Jm(\omega_n) \geq 0, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.12)$$

Эти условия определяют область устойчивости в пространстве параметров нагружения при конкретных физико-механических и геометрических характеристиках оболочки и включения. При этом граница области устойчивости определяется из условия

$$\min \{Jm(\omega_n)\} = 0, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.13)$$

Для осесимметричной формы потери устойчивости уравнения равновесия (2.1) в сферической системе координат имеют вид [8]

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \sigma_r^0 \frac{d^2 u}{dr^2} + \sigma_\theta^0 \frac{1}{r} \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) - \rho_o S^2 u = 0. \quad (2.14)$$

Здесь и далее символ “+” опустим.

При этом согласно (2.7), (2.9), (2.10) имеем

– для оболочки

$$\sigma_r = p_1 + 2\mu \frac{du}{dr}, \quad \sigma_\theta = p_1 + 2\mu \frac{u}{r} \quad (2.15)$$

– для включения

$$\begin{aligned}\sigma_r &= p_2 + 2E_c \left(\frac{1}{3} \frac{du}{dr} - \frac{S_r^0}{\sigma_u^0} \right) \frac{u}{r} \\ \sigma_\theta &= p_2 + 2E_c \left(\frac{1}{3} - \frac{S_\theta^0}{\sigma_u^0} \right) \frac{u}{r}\end{aligned}\tag{2.16}$$

где p_i — гидростатическое давление ($c = 1, 2$).

Условия несжимаемости (2.8) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} = 0.\tag{2.17}$$

Из условий несжимаемости (2.17) находим для оболочки и, соответственно, включения

$$u_{об} = \frac{A_1}{r^2}, u_{вкл} = \frac{A_2}{r^2}.\tag{2.18}$$

Из соотношений (2.14)–(2.16), учитывая (2.18), находим решения:

– для оболочки

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \left[\left(\left(\frac{C}{b^3} - 1 \right) \frac{4}{3} \mu - p \right) \frac{1}{r^3} - 5\mu G \frac{1}{r^6} + \rho_0 \omega^2 \frac{1}{r} \right] A_1 + A_3, \\ \sigma_\theta &= \left[\left(\left(\frac{2C}{b^3} + 1 \right) \frac{2}{3} \mu - p \right) \frac{1}{r^3} - 5\mu G \frac{1}{r^6} + \rho_0 \omega^2 \frac{1}{r} \right] A_1 + A_3,\end{aligned}\tag{2.19}$$

– для включения

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \left[\frac{k}{c} \ln r + 2k \frac{1}{r^3} \left(\ln \frac{r}{a} + \frac{1}{3} \right) + (p - k) \frac{3}{r^3} + \rho_0 \omega^2 \frac{1}{r} \right] A_2 + A_4, \\ \sigma_\theta &= \left[\frac{k}{c} \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) + 2k \frac{1}{r^3} \left(\ln \frac{r}{a} + \frac{1}{3} \right) + (p - k) \frac{3}{r^3} + \rho_0 \omega^2 \frac{1}{r} \right] A_2 + A_4.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Для определения постоянных интегрирования A_1, A_2, A_3, A_4 привлекаем граничные условия, которые, согласно (2.2), таковы

$$\sigma_{об}^r + \sigma_{об}^r \frac{du_{об}}{dr} = p_r \quad \text{при} \quad r = b,\tag{2.21a}$$

$$\sigma_{вкл}^r + \sigma_{вкл}^r \frac{du_{вкл}}{dr} = q_r \quad \text{при} \quad r = a,\tag{2.21б}$$

а также условия на границе контакта оболочка-включение, которые, согласно (2.11), таковы

$$\sigma_{об}^r = \sigma_{вкл}^r, u_{об} = u_{вкл} \quad \text{при} \quad r = \gamma.\tag{2.22}$$

Ограничимся случаем “мертвой” нагрузки, тогда в (2.21a), (2.21б) $p_r = q_r = 0$. Из условия (2.18) следует, что $A_1 = A_2 = A$. Для определения трех оставшихся постоянных интегрирования A, A_3, A_4 , согласно граничным условиям (2.21a), (2.21б), (2.22), имеем систему трех однородных линейных алгебраических уравнений. Условием существования нетривиального решения которой является равенство нулю определителя. Откуда приходим к характеристическому уравнению.

$$F = a_1 - a_2 + a_3 = 0,\tag{2.23}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left(\frac{1}{\gamma^3 - b^3} - \frac{1}{\gamma^3} - \frac{5}{4} \frac{b^3}{(\gamma^3 - b^3)\gamma^3} \right) p - \frac{2k \ln \frac{\gamma}{a} - q}{\gamma^3 - b^3} \left(1 + \frac{5}{4} \frac{b^3}{\gamma^3} \right) - \\
&\quad - \frac{4k\mu \ln \gamma (\gamma^3 - b^3)}{\gamma^3 b^3 \left(2k \ln \frac{\gamma}{a} + p - q \right)} + \left(\frac{1}{3}k - 4\mu - 2k \ln \frac{\gamma}{a} + q \right) \frac{1}{\gamma^3}, \\
a_2 &= - \left(\frac{1}{b^3} + \frac{1}{4} \frac{\gamma^3}{b^3 (\gamma^3 - b^3)} \right) p - \frac{1}{4} \frac{\gamma^3}{b^3 (\gamma^3 - b^3)} \left(2k \ln \frac{\gamma}{a} - q \right), \\
a_3 &= \frac{4k\mu (\gamma^3 - b^3) \ln a}{\left(2k \ln \frac{\gamma}{a} + p - q \right) \gamma^3 b^3} - \left(\frac{k}{3} - q \right) \frac{1}{a^3}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

При выводе (2.23) силы инерции были опущены, что соответствует квазистатической постановке. Таким образом, вопрос определения критической комбинации нагрузок, соответствующих осесимметричной форме потери устойчивости оболочки с включением, сводится к разрешимости уравнения

$$F(p, q, a, b, \gamma, \mu, k, S) = 0. \tag{2.25}$$

Анализ такого уравнения затруднен ввиду того, что $S = i\omega$ — в общем случае произвольное комплексное число. Поэтому для упрощения вычислений при численном анализе будем считать, что S — действительное число. В этом случае критерием устойчивости будет условие $S < 0$. Очевидно, в (2.25) оценка влияния каждого отдельного физико-механического и геометрического параметров оболочки и включения, изменяющихся в допустимых пределах, на критическую комбинацию нагрузок определяется, сообразуясь с практической необходимостью. Поэтому здесь ограничимся лишь случаем, когда “определяющая” роль в явлении неустойчивости принадлежит внешней нагрузке при фиксированной внутренней нагрузке, геометрических и физико-механических параметров оболочки и включения. Подставляя (2.24) в уравнение (2.23) приходим к уравнению относительно внешней нагрузки p

$$\bar{S}p^2 - \left(\bar{P} - \bar{S} \left(2k \ln \frac{\gamma}{a} - q \right) \right) p - \bar{R} - \bar{P} \left(2k \ln \frac{\gamma}{a} - q \right) = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{S} &= \left[\frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{b^3} - \frac{1}{4(\gamma^3 - b^3)} \left(4 - \frac{5b^3}{\gamma^3} + \frac{\gamma^3}{b^3} \right) \right], \\
\bar{P} &= \frac{2k \ln \frac{\gamma}{a} - q}{\gamma^3 - b^3} \left(1 - \frac{5}{4} \frac{b^3}{\gamma^3} + \frac{1}{4} \frac{\gamma^3}{b^3} \right) + \left(\frac{1}{3}k - 4\mu - 2k \ln \frac{\gamma}{a} + q \right) \frac{1}{\gamma^3} - \left(\frac{1}{3}k - q \right) \frac{1}{a^3}, \\
\bar{R} &= \frac{4k\mu (\gamma^3 - b^3)}{\gamma^3 b^3} \ln \frac{a}{\gamma}.
\end{aligned}$$

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 1 – рис. 6. На рис. 1 – рис. 3 показана зависимость критического внешнего давления \bar{p} от внешнего радиуса \bar{b} оболочки. При этом значения безразмерных характеристик принимались следующими: $k = 1, \gamma = 2, \mu = 0.1, q = 0.2; 0.7; 1.2$ – рис. 1; $k = 1, \gamma = 2, q = 0.1, \mu = 0.2; 0.7; 1.2$ – рис. 2; $k = 1, q = 0.1, \mu = 0.3, \gamma = 2; 2.5; 2.8$ – рис. 3.

На рис. 4 – рис. 6 показана зависимость критического внешнего давления \bar{p} от внутреннего радиуса \bar{a} включения. При этом значения безразмерных характеристик принимались следующими: $k = 1, \gamma = 0.5, q = 0.1, \mu = 0.1; 0.2; 0.5$ – рис. 4; $k = 1, \gamma = 0.5, \mu = 0.3, q = 0.3; 0.5; 0.75$ – рис. 5; $k = 1, \gamma = 0.5, q = 0.0001, \mu = 2.0$ – рис. 6.

Здесь, рис. 1 – рис. 6, величины, имеющие размерность давления, отнесены к пределу текучести k , имеющие размерность длины на рис. 1 – рис. 3 отнесены к внутреннему радиусу

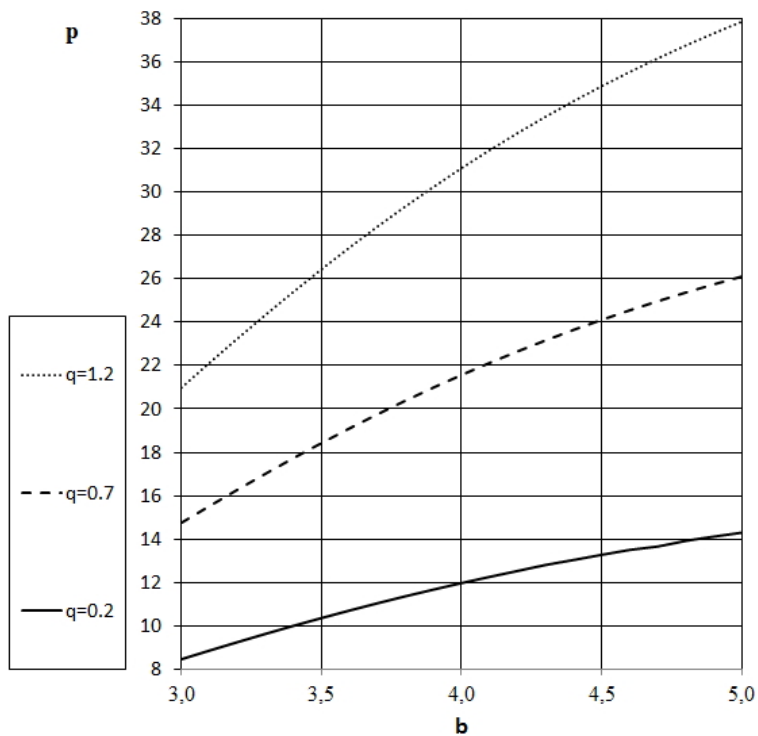


Рис. 1. Зависимость критического давления от внешнего радиуса b

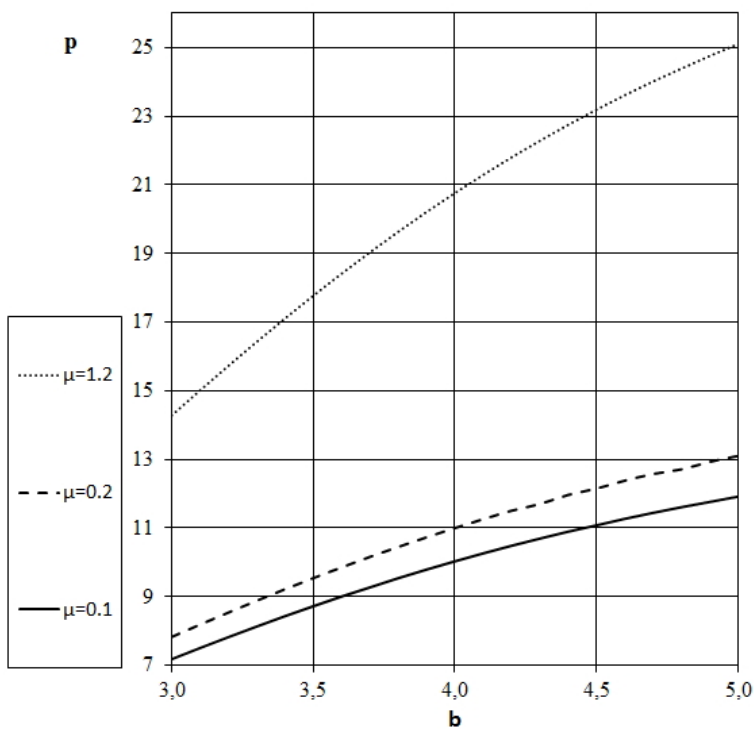
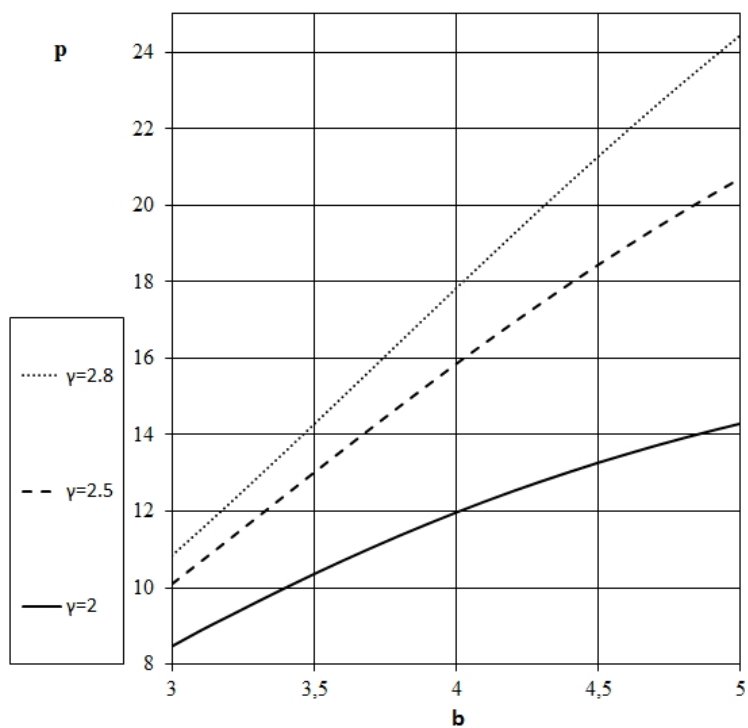
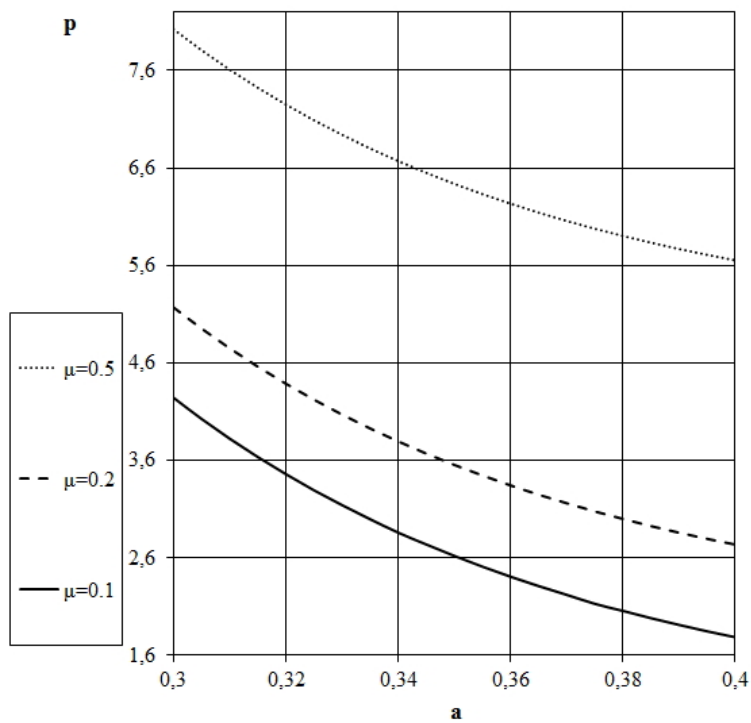


Рис. 2. Зависимость критического давления от внешнего радиуса b

Рис. 3. Зависимость критического давления от внешнего радиуса b Рис. 4. Зависимость критического давления от внутреннего радиуса a

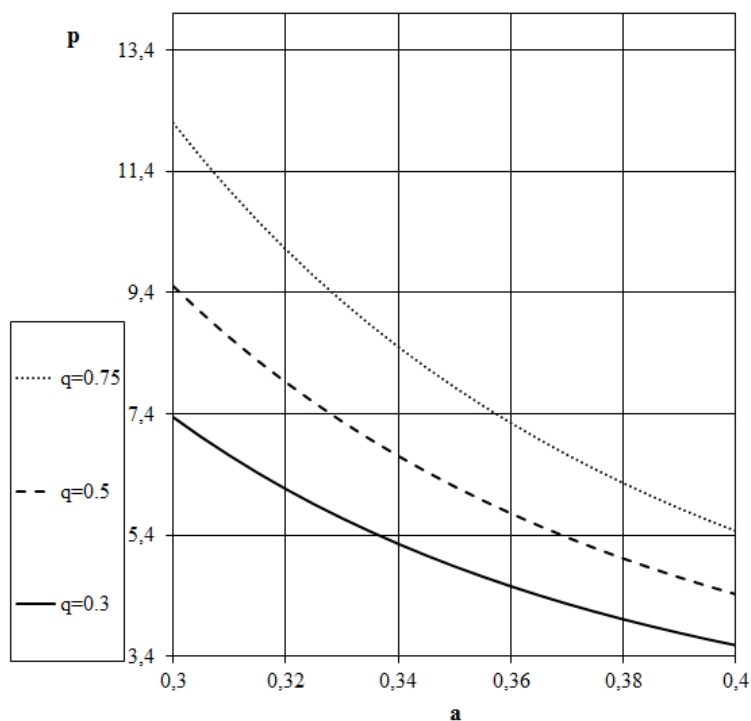


Рис. 5. Зависимость критического давления от внутреннего радиуса a

а включения, а на рис. 4 – рис. 6 – к внешнему радиусу b оболочки, при этом сохранены прежние обозначения.

Из анализа результатов вычислительного эксперимента следует:

- существенное влияние на потерю устойчивости оказывают как физико-механические, так и геометрические параметры составной оболочки (рис. 1 – рис. 6);
- при уменьшении внутреннего радиуса включения (увеличении ширины слоя – заполнителя) величина критической нагрузки возрастает, при увеличении – сжимается (рис. 4 – рис. 6).
- при увеличении упругой постоянной оболочки критическая нагрузка возрастает (рис. 2, рис. 4).
- при увеличении толщины упругой оболочки величина критической нагрузки увеличивается (рис. 1 – рис. 3).
- при возрастании внутреннего давления критическое давление также возрастает (рис. 1, рис. 5).
- при стремлении внутреннего радиуса включения и внутреннего давления к нулю, а также при стремлении предела текучести к нулю, а упругой постоянной к бесконечности, что соответствует разномодульному упругому шару, находящемуся под действием гидростатического давления, критическая нагрузка неограниченно возрастает, то есть потери устойчивости не происходит.

Сделанные выводы согласуются с общими теоретическими представлениями и выводами работы [9].

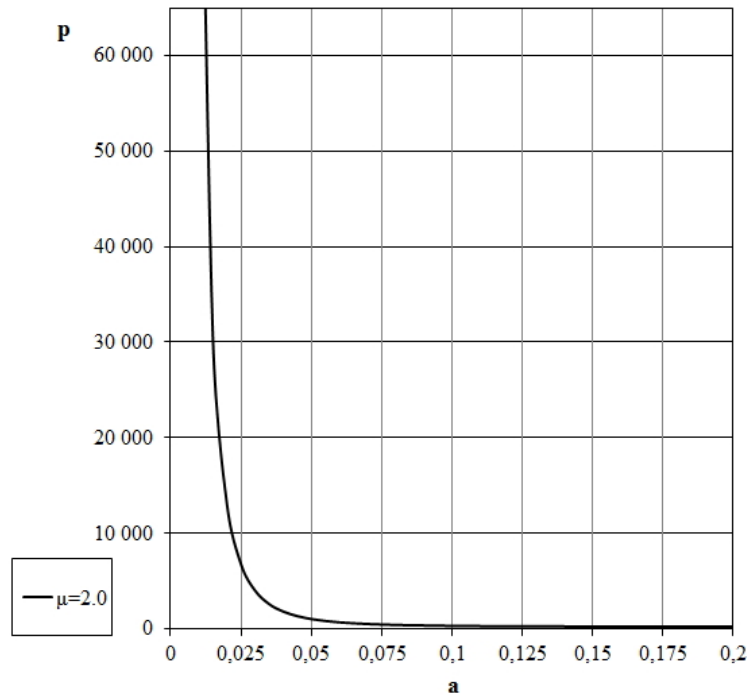


Рис. 6. Зависимость критического давления от внутреннего радиуса a

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Андреева Ю. И. Устойчивость слоистой сферической оболочки с упруговязкопластическим наполнителем при нагружении / И. Ю. Андреева, Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин // Современные проблемы механики и прикладной математики. – Воронеж, 2004. – Ч. 1. – Т. 1. – С. 12–18.
- [2] Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел / А. Н. Гузь. – Киев : Вища школа, 1986. – 321с.
- [3] Зенин А. Н. К устойчивости упругой сферической оболочки с неоднородным упруговязкопластическим наполнителем при нагружении / А. Н. Зенин, А. Н. Спорыхин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2008. – №1(4). – С. 88–95.
- [4] Ильюшин А. А. Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Изд-во А. Н. СССР, 1963. – 271с.
- [5] Спорыхин А. Н. Исследование устойчивости двухслойной кусочно-неоднородной сферической оболочки при нагружении / А. Н. Спорыхин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2013. – №3(17). – С. 46–51.
- [6] Спорыхин А. Н. Исследование устойчивости упругой сферической оболочки с неоднородным вязкоупругим наполнителем при нагружении на конечном интервале времени / А. Н. Спорыхин, Ю. Д. Щеглова // Сб. трудов . Международная конференция. Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. – Воронеж. – 2011.
- [7] Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин. – Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та, 1997. – 359с.
- [8] Спорыхин А. Н. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин. – М. : Физматлит, 2004. – 231с.

[8] Спорыхин А. Н. Численно-аналитическое исследование устойчивости упругой сферической оболочки с неоднородным упруговязкопластическим наполнителем при нагружении / А. Н. Спорыхин, Е. Д. Чуфринова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2011. – №1(9). – С. 193–200.

Спорыхин Анатолий Николаевич,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский Государственный Университет, г. Воронеж

e-mail: shashkin@amm.vsu.ru

Дмитрик Кирилл Григорьевич,

аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский Государственный Университет, г. Воронеж

e-mail: kiriksoft@mail.ru

A. N. Sporykhin, K. G. Dmitrik

NUMERICAL-ANALITICAL SOLUTION OF STABILITY OF SPHERICAL ELASTIC SHELL WITH ELASTO-PLASTIC FILLER UNDER EXTERNAL PRESSURE

Voronezh State University

Abstract. Stability of double layer spherical shell is under consideration. An internal layer of shell is elastic, an external one is elastoplastic. First, the subcritical stress-strain state has been determined. Second, stability of ground state of composite spherical shell has been examined. This involves balance equations for internal and for external layer of shell, that written in perturbations, using identified boundary conditions. Next, problem of critical pressure determination can be reduced to the eigenvalue problem with respect to the time factor. As a result, relations between critical external pressure and internal and external radius of the shell have been received.

Keywords: stability, shell, stress, strain, plasticity, elasticity.

REFERENCES

- [1] Andreeva Ju. I. Stability of layered spherical shell with elastoviscoplastic filler under pressure / I. Ju. Andreeva, D. V. Gocev, A. N. Sporykhin // Modern problems of mechanics and applied mathematics. – Voronezh, 2004. – Ch. 1. – Vol. 1. – P. 12–18. (in Russian)
- [2] Guz' A. N. Foundations of three dimensional stability theory of deformable solids / A. N. Guz'. – Kiev : Vishha shkola, 1986. – 321 p. (in Russian)
- [3] Zenin A. N. About the stability of spherical shell with inhomogeneous elastoviscoplastic filler under pressure / A. N. Zenin, A. N. Sporykhin // Vestnik I. Jakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2008. – № 1 (4). – P. 88–95. (in Russian)
- [4] Il'jushin A. A. Plasticity / A. A. Il'jushin. – M. : A. N. USSR, 1963. – 271 p. (in Russian)
- [5] Sporykhin A. N. Research of stability of double-layer sectionally inhomogeneous spherical shell under pressure / A. N. Sporykhin // Vestnik I. Jakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 3 (17). – P. 46–51. (in Russian)
- [6] Sporykhin A. N. The research of stability of elastic spherical shell with inhomogeneous viscoelastic filler under pressure during finite time interval / A. N. Sporykhin, Ju. D. Shheglola // Coll. Of scientific papers. International conference. Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics. – Voronezh. – 2011. (in Russian)
- [7] Sporykhin A. N. Perturbation method in problems of stability of continuum / A. N. Sporykhin. – Voronezh : Voronezh State University, 1997. – 359 p. (in Russian)
- [8] Sporykhin A. N. Stability of equilibrium of spatial solids and rock mechanics problems / A. N. Sporykhin, A. I. Shashkin. – M. : Fizmatlit, 2004. – 231 p. (in Russian)
- [9] Sporykhin A. N. Numerical-analitical research of stability of elastic spherical shell with inhomogeneous elastoviscoplastic filler under pressure / A. N. Sporykhin, E. D. Chufrianova // Vestnik I. Jakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2011. – №1(9). – P. 193–200. (in Russian)

Sporykhin Anatoliy Nicolaevich,

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, mechanics and computational modeling Department, Voronezh State University, Voronezh

Dmitrik Kirill Grigorievich,

Postgraduate student, mechanics and computational modeling Department, Voronezh State University, Voronezh

Т. Ю. Леонтьева

**ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ ОСОВОЙ ТОЧКИ НА
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В
КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ**

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г.
Чебоксары*

Аннотация. В настоящее время дифференциальные уравнения имеют широкое применение в различных сферах деятельности человека [1]–[5]. Теория линейных дифференциальных уравнений достаточно развита [6]–[8], что нельзя сказать о теории нелинейных дифференциальных уравнений. Их развитию препятствует наличие подвижных особых точек. В работах [9]–[12] предложен метод приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения с подвижными особыми точками, включающий решение шести задач. Первые две задачи: формулировка и доказательство теоремы существования и единственности решения нелинейного дифференциального уравнения; построение приближенного решения и исследование влияния возмущения начальных условий на приближенное решение представлены в работах [13]–[14].

В данной работе дается исследование влияния возмущения подвижной осовой точки на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в комплексной области. Что является продолжением исследования работы [15]. Полученные результаты сопровождаются расчетами.

Ключевые слова: подвижная особая точка, нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, приближенное решение, окрестность подвижной осовой точки, комплексная область, апостериорная оценка.

УДК: 517.928.4

Материалы и методы решения задачи и принятые допущения. Большой вклад в развитие теории нелинейных дифференциальных уравнений внесла Белорусская школа [16]–[22]. Простейшие нелинейные дифференциальные уравнения – уравнения Риккати появились в публикации в конце 17 в.; в начале 18 в. миру стало известно нелинейное дифференциальное уравнение Абеля; с середины 18 в. появились нелинейные дифференциальные уравнения Пенлеве. Особенностью перечисленных уравнений является наличие подвижных особых точек, классифицированных Фуксом [23]. Теоретическое обоснование метода приближенного решения перечисленных дифференциальных уравнений даны в работах [9]–[12]. Предложенный в перечисленных работах приближенный метод успешно применяется и для других нелинейных дифференциальных уравнений [24]–[25].

Результаты. Для задачи Коши

$$y''(z) = y^5(z) + r(z), \quad (1)$$

$$y(z_0) = y_0, y'(z_0) = y_1. \quad (2)$$

в случае точного значения подвижной особой точки [15] было получено приближенное решение в окрестности подвижной особой точки z^* в виде

$$y(z) = (z^* - z)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{n/2}, \quad C_0 \neq 0. \quad (3)$$

В работе [15] была получена структура приближенного решения, но так как возникает необходимость осуществлять аналитическое продолжение требующее изучение влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение. Так как существующие методы нахождения подвижной особой точки позволяют находить последнее лишь приближенно, то возмущение подвижной особой точки отражается на аналитическом приближенном решении (3), в результате чего имеем:

$$\tilde{y}_N(z) = \sum_{n=0}^N \tilde{C}_n (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2}, \quad \tilde{C}_0 \neq 0, \quad (4)$$

где \tilde{C}_n — возмущенные значения коэффициентов.

Теорема 3. Пусть z^* подвижная особая точка $y(z)$ задачи (1)–(2) и выполняются следующие условия:

$$r(z) \in C^1 \text{ области } K = \{z : |\tilde{z}^* - z| < \rho_3\}, \quad \rho_3 = \text{const} > 0;$$

$$\exists M_2 : \frac{|r^{(n)}(\tilde{z}^*)|}{n!} \leq M_2, \quad M_2 = \text{const}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$|\tilde{z}^*| \leq |z^*|;$$

известны оценки погрешности \tilde{z}^* и $\tilde{\alpha}$:

$$|\tilde{z}^* - z^*| \leq \Delta \tilde{z}^*, \quad |\tilde{\alpha} - \alpha| \leq \Delta \tilde{\alpha};$$

$$\Delta \tilde{z}^* < 1 / \left(4 \cdot \sqrt[5]{(M+1)^2} \right).$$

Тогда для аналитического приближенного решения (4) задачи (1)–(2) в областях

$$\{z : |z| \leq |\tilde{z}^*| - \Delta \tilde{z}^*\} \cap \{z : |\tilde{z}^* - z| < \rho_3\}, \quad (5)$$

$$\{z : |\tilde{z}^*| - \Delta \tilde{z}^* < |z| \leq |\tilde{z}^*|\} \cap \{z : |\tilde{z}^* - z| < \rho_3\} \quad (6)$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta \tilde{y}_N(z) \leq \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

где

$$\Delta_0 = \frac{\Delta \tilde{z}^*}{|\tilde{z}^* - z|} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

$$\Delta_1 = \frac{2^N M (M+1) \left[\frac{N}{5} \right] |\tilde{z}^* - z|^{\frac{N-1}{2}}}{1 - 2^5 (M+1) |\tilde{z}^* - z|^{5/2}} \sum_{i=0}^8 \frac{2^i \eta (M+1) \left[\frac{i}{5} \right] \cdot |\tilde{z}^* - z|^{\frac{i}{2}}}{(N+i+2)(N+i-6)},$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \frac{2^5 M(M+1)\beta^{5/2}}{1-2^{10}(M+1)^2\beta^5} \left(2 \sum_{i=0}^4 2^{2i}(M+1)^{\gamma_1} \beta^i + \beta^{1/2} \sum_{i=0}^4 2^{2i}(M+1)^{\gamma_2} \beta^i \right), \\ \Delta_3 &= \frac{2^7 \Delta \tilde{M} \mu \beta^2}{1-2^{15} \mu^2 \beta^5} \left(\sum_{i=0}^4 2^{3i} \mu^{\gamma_1} \beta^i + 2(2\beta)^{1/2} \sum_{i=0}^4 2^{3i} \mu^{\gamma_2} \beta^i \right), \\ \rho_3 &= \min\{\rho_1, \rho_2\}, \quad \rho_1 = \frac{1}{4^5 \sqrt{(M+1)^2}} \text{ (из [15])}, \quad \rho_2 = \frac{1}{8(M+\Delta M+1)^2}, \\ \beta &= \begin{cases} |\tilde{z}^* - z|, z \in (5) \\ \Delta \tilde{z}^*, z \in (6) \end{cases}, \quad \mu = \tilde{M} + \Delta \tilde{M} + 1, \\ \eta &= \begin{cases} i+1, i=0,1,2,3,4, \\ 8-i+1, i=5,6,7,8 \end{cases}, \quad \gamma_1 = \begin{cases} 0, i=0,1,2 \\ 1, i=3,4 \end{cases}, \\ \gamma_2 &= \begin{cases} 0, i=0,1 \\ 1, i=2,3,4 \end{cases}, \quad M = \max \left\{ |\alpha|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(z^*)|}{n!} \right\}, \\ \Delta \tilde{M} &= \sup_{n,G} \frac{|r^{(n+1)}(\tilde{z}^*)|}{n!} \Delta \tilde{z}^*, \quad G = \{z : |\tilde{z}^* - z| \leq \Delta \tilde{z}^*\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

где α — параметр, зависящий от условий (3), $n = 0, 1, 2, \dots$.

Доказательство. На основе правила треугольника в схеме оценок имеем:

$$\Delta \tilde{y}_N(z) = |y(z) - \tilde{y}_N(z)| \leq |y(z) - \tilde{y}(z)| + |\tilde{y}(z) - \tilde{y}_N(z)|.$$

Рассмотрим $|y(z) - \tilde{y}(z)|$:

$$\begin{aligned}|y(z) - \tilde{y}(z)| &\leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{(n-1)/2} - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2} \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{(n-1)/2} - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (z^* - z)^{(n-1)/2} + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (z^* - z)^{(n-1)/2} - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2} \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n (z^* - z)^{(n-1)/2} \right| + \left| \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n \left((z^* - z)^{(n-1)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2} \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n \left| (\tilde{z}^* - z) + \Delta \tilde{z}^* \right|^{(n-1)/2} + \sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{C}_n| \cdot \left| (z^* - z)^{(n-1)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2} \right|.\end{aligned}$$

$$\text{Далее } \sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{C}_n| \cdot \left| (z^* - z)^{(n-1)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2} \right|.$$

Учитывая $|z| < |\tilde{z}^*| \leq |z^*|$ и $|C_0| = |\tilde{C}_0| = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ при $n = 0$

$$\left| \tilde{C}_0 \right| \cdot \left| (z^* - z)^{-1/2} - (\tilde{z}^* - z)^{-1/2} \right| \leq \frac{\Delta \tilde{z}^*}{|\tilde{z}^* - z|} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Так как $|C_1| = |\tilde{C}_1| = 0$, $|C_2| = |\tilde{C}_2| = 0$, $|C_3| = |\tilde{C}_3| = 0$, $|C_4| = |\tilde{C}_4| = 0$ (из [15]), то следует:

$$|y(z) - \tilde{y}(z)| \leq \frac{\Delta \tilde{z}^*}{|\tilde{z}^* - z|} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}} + \sum_{n=5}^{\infty} |\tilde{C}_n| \cdot \left| (z^* - z)^{(n-1)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2} \right| +$$

$$+ \sum_{n=5}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n \left| (|\tilde{z}^* - z| + \Delta \tilde{z}^*)^{(n-1)/2} \right| \text{ при } n = 5, 6, 7, \dots$$

Упростим в случае $n = 5, 6, 7, \dots$

$$\begin{aligned} \left| (z^* - z)^{(n-1)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2} \right| &\leq \left| (|\tilde{z}^* - z| + \Delta \tilde{z}^*)^{(n-1)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2} \right| \leq \\ &\leq \left| \Delta \tilde{z}^* (|\tilde{z}^* - z| + \Delta \tilde{z}^*)^{(n-2)/2} \right|. \end{aligned}$$

Тогда, для оценки приближенного решения (4) получаем:

$$\begin{aligned} |y(z) - \tilde{y}_N(z)| &\leq \frac{\Delta \tilde{z}^*}{|\tilde{z}^* - z|} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \tilde{C}_n \right| \cdot |\tilde{z}^* - z|^{(n-1)/2} + \sum_{n=5}^{\infty} \left| \tilde{C}_n \right| \cdot \left| \Delta \tilde{z}^* (|\tilde{z}^* - z| + \Delta \tilde{z}^*)^{(n-2)/2} \right| + \\ &+ \sum_{n=5}^{\infty} \left| \Delta \tilde{C}_n \right| \cdot \left| (|\tilde{z}^* - z| + \Delta \tilde{z}^*)^{(n-1)/2} \right| = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \end{aligned}$$

где $\left| \tilde{C}_n - C_n \right| = \Delta \tilde{C}_n$.

Из последнего следует

$$\Delta_0 = \frac{\Delta \tilde{z}^*}{|\tilde{z}^* - z|} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Δ_1 было получено по теореме 2 в работе [15].

Проведем оценку Δ_2 . Осуществим суммирование отдельно по целым и дробным степеням, учитывая, что $\Delta \tilde{z}^* \leq |\tilde{z}^* - z|$:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \sum_{n=5}^{\infty} \left| \tilde{C}_n \right| \cdot \left| \Delta \tilde{z}^* (|\tilde{z}^* - z| + \Delta \tilde{z}^*)^{(n-2)/2} \right| = \sum_{n=3}^{\infty} \left| \tilde{C}_{2n-1} \right| \cdot \left| \Delta \tilde{z}^* (|\tilde{z}^* - z| + \Delta \tilde{z}^*)^{(2n-3)/2} \right| + \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} \left| \tilde{C}_{2n} \right| \cdot \left| \Delta \tilde{z}^* (|\tilde{z}^* - z| + \Delta \tilde{z}^*)^{n-1} \right| = \Delta_{2,1} + \Delta_{2,2}. \end{aligned}$$

Учитывая закономерность получения оценок коэффициентов C_n , оценим $\Delta_{2,1}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{2,1} &= \sum_{n=3}^{\infty} \left| \tilde{C}_{2n-1} \right| \cdot \left| \Delta \tilde{z}^* (|\tilde{z}^* - z| + \Delta \tilde{z}^*)^{(2n-3)/2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} |C_{10k-5}| \cdot \left| \Delta \tilde{z}^* (|\tilde{z}^* - z| + \Delta \tilde{z}^*)^{(10k-7)/2} \right| + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} |C_{10k-3}| \cdot \left| \Delta \tilde{z}^* (|\tilde{z}^* - z| + \Delta \tilde{z}^*)^{(10k-5)/2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} |C_{10k-1}| \cdot \left| \Delta \tilde{z}^* (|\tilde{z}^* - z| + \Delta \tilde{z}^*)^{(10k-3)/2} \right| + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} |C_{10k+1}| \cdot \left| \Delta \tilde{z}^* (|\tilde{z}^* - z| + \Delta \tilde{z}^*)^{(10k-1)/2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} |C_{10k+3}| \cdot \left| \Delta \tilde{z}^* (|\tilde{z}^* - z| + \Delta \tilde{z}^*)^{(10k+1)/2} \right| = \\ &= \sum_{t=0}^4 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \tilde{C}_{10k-5+2t} \right| \cdot \left| \Delta \tilde{z}^* (|\tilde{z}^* - z| + \Delta \tilde{z}^*)^{(10k-7+2t)/2} \right| \leq \\ &\leq \frac{2^5 \Delta \tilde{z}^* M (M+1) |\tilde{z}^* - z|^{3/2}}{1 - 2^{10} \cdot (M+1)^2 \cdot |\tilde{z}^* - z|^5} \cdot \sum_{t=0}^4 2^{2t} (M+1)^t |\tilde{z}^* - z|^t \end{aligned}$$

при условии $|\tilde{z}^* - z| < 1 / \left(4 \cdot \sqrt[5]{(M+1)^2}\right)$ (из работы [15]). Рассмотрим случай $|\tilde{z}^* - z| < \Delta\tilde{z}^*$, имеем:

$$\Delta_{2,1} \leq \frac{2^5 M (M+1) \Delta\tilde{z}^* 5/2}{1 - 2^{10} \cdot (M+1)^2 \cdot \Delta\tilde{z}^* 5} \cdot \sum_{t=0}^4 2^{2t} (M+1)^t \Delta\tilde{z}^* t.$$

А для $\Delta_{2,2}$ соответственно получим оценку

$$\Delta_{2,2} \leq \frac{2^5 M (M+1) \Delta\tilde{z}^* 3}{1 - 2^{10} \cdot (M+1)^2 \cdot \Delta\tilde{z}^* 5} \cdot \sum_{t=1}^4 2^{2t} (M+1)^t \Delta\tilde{z}^* t.$$

Перейдем к оценке Δ_3 . Из предположения оценок для $\Delta\tilde{C}_n$

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{C}_{5n} &\leq \frac{2^{5n} \Delta\tilde{M} (\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1)^n}{(5n+2)(5n-6)}, & \Delta\tilde{C}_{5n+1} &\leq \frac{2^{5n+1} \Delta\tilde{M} (\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1)^n}{(5n+3)(5n-5)}, \\ \Delta\tilde{C}_{5n+2} &\leq \frac{2^{5n+2} \Delta\tilde{M} (\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1)^n}{(5n+4)(5n-4)}, & \Delta\tilde{C}_{5n+3} &\leq \frac{2^{5n+3} \Delta\tilde{M} (\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1)^n}{(5n+5)(5n-3)}, \\ \Delta\tilde{C}_{5n+4} &\leq \frac{2^{5n+4} \Delta\tilde{M} (\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1)^n}{(5n+6)(5n-2)}, \end{aligned}$$

где $M = \sup_n \frac{|r^{(n)}(\tilde{z}^*)|}{n!}$, $\Delta\tilde{M} = \sup_{n,G} \frac{|r^{(n+1)}(\tilde{z}^*)|}{n!} \Delta\tilde{z}^*$, $G = \{z : |\tilde{z}^* - z| \leq \Delta\tilde{z}^*\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, докажем нашу гипотезу для $\Delta\tilde{C}_{5n}$ в случае $N+1 = 5(2n+1)$

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{C}_{10n+5} &= \left| \tilde{C}_{10n+5} - C_{10n+5} \right| \leq \left| \frac{2^{10n+5} \tilde{M} (\tilde{M} + 1)^{2n+1}}{(10n+7)(10n-1)} - \frac{2^{10n+5} M (M+1)^{2n+1}}{(10n+7)(10n-1)} \right| = \\ &= \frac{2^{10n+5}}{(10n+7)(10n-1)} \left| \tilde{M} (\tilde{M} + 1)^{2n+1} - (M + \Delta\tilde{M}) (\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1)^{2n+1} \right| = \\ &= \frac{2^{10n+5} \Delta\tilde{M} (\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1)^{2n+1}}{(10n+7)(10n-1)} \cdot \left| \frac{\tilde{M}}{\Delta\tilde{M}} \left(\frac{\tilde{M} + 1}{\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1} \right)^{2n+1} - \left(\frac{\tilde{M}}{\Delta\tilde{M}} + 1 \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{2^{10n+5} \Delta\tilde{M} (\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1)^{2n+1}}{(10n+7)(10n-1)}. \end{aligned}$$

Подобные выражения получим и в случаях $N+1 = 5n+1$, $N+1 = 5n+2$, $N+1 = 5n+3$ и $N+1 = 5n+4$. В результате справедлива оценка

$$\Delta\tilde{C}_{n+1} \leq \frac{2^{n+1} \Delta\tilde{M} (\tilde{M} + \Delta\tilde{M} + 1)^{\lfloor (n+1)/5 \rfloor}}{(n+3)(n-5)}.$$

В выражении Δ_3 проведем суммирование отдельно по целым и дробным степеням:

$$\Delta_3 = \sum_{n=5}^{\infty} \left| \Delta\tilde{C}_n \right| \cdot \left| (|\tilde{z}^* - z| + \Delta\tilde{z}^*)^{(n-1)/2} \right| = \sum_{n=3}^{\infty} \Delta\tilde{C}_{2n-1} \left| |\tilde{z}^* - z| + \Delta\tilde{z}^* \right|^{n-1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=3}^{\infty} \Delta \tilde{C}_{2n} \|\tilde{z}^* - z\| + \Delta \tilde{z}^* |^{(2n-1)/2} = \sum_{t=0}^4 \sum_{k=1}^{\infty} \Delta \tilde{C}_{10k-5+2t} \|\tilde{z}^* - z\| + \Delta \tilde{z}^* |^{5k-3+t} + \\
& \quad + \sum_{t=0}^4 \sum_{k=1}^{\infty} \Delta \tilde{C}_{10k-4+2t} \|\tilde{z}^* - z\| + \Delta \tilde{z}^* |^{(10k-5+2t)/2} \leq \\
& \leq \sum_{t=0}^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{10k-5+2t} \Delta \tilde{M} (\tilde{M} + \Delta \tilde{M} + 1)^{[(10k-5+2t)/5]}}{(10k-3+2t)(10k-11+2t)} \|\tilde{z}^* - z\| + \Delta \tilde{z}^* |^{5k-3+t} + \\
& + \sum_{t=0}^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{10k-4+2t} \Delta \tilde{M} (\tilde{M} + \Delta \tilde{M} + 1)^{[(10k-4+2t)/5]}}{(10k-2+2t)(10k-10+2t)} \|\tilde{z}^* - z\| + \Delta \tilde{z}^* |^{(10k-5+2t)/2} = \\
& = \sum_{t=0}^4 2^{2t-5} \Delta \tilde{M} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{10k} (\tilde{M} + \Delta \tilde{M} + 1)^{[(10k-5+2t)/5]}}{(10k-3+2t)(10k-11+2t)} \|\tilde{z}^* - z\| + \Delta \tilde{z}^* |^{5k-3+t} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{10k+1} (\tilde{M} + \Delta \tilde{M} + 1)^{[(10k-4+2t)/5]}}{(10k-2+2t)(10k-10+2t)} \|\tilde{z}^* - z\| + \Delta \tilde{z}^* |^{(10k-5+2t)/2} \right) \leq \\
& \leq \frac{2^7 \Delta \tilde{M} \mu \beta^2}{1 - 2^{15} \mu^2 \beta^5} \left(\sum_{i=0}^4 2^{3i} \mu^{\gamma_1} \beta^{i+2} (2\beta)^{1/2} \sum_{i=0}^4 2^{3i} \mu^{\gamma_2} \beta^i \right),
\end{aligned}$$

где $\beta = \begin{cases} |\tilde{z}^* - z|, z \in (5) \\ \Delta \tilde{z}^*, z \in (6) \end{cases}$, $\mu = \tilde{M} + \Delta \tilde{M} + 1$, $\gamma_1 = \begin{cases} 0, i = 0, 1, 2 \\ 1, i = 3, 4 \end{cases}$, $\gamma_2 = \begin{cases} 0, i = 0, 1 \\ 1, i = 2, 3, 4 \end{cases}$.

Таким образом, для оценки погрешности приближенного решения (4) получаем области:

$$\{z : |z| \leq |\tilde{z}^*| - \Delta \tilde{z}^*\} \cap \{z : |\tilde{z}^* - z| < \rho_3\},$$

$$\{z : |\tilde{z}^*| - \Delta \tilde{z}^* < |z| \leq |\tilde{z}^*|\} \cap \{z : |\tilde{z}^* - z| < \rho_3\},$$

$$\text{где } |\tilde{z}^* - z^*| \leq \Delta \tilde{z}^* \text{ и } \rho_3 = \min \left\{ \frac{1}{4 \sqrt[5]{(M+1)^2}}, \frac{1}{8(M+\Delta M+1)^2} \right\}.$$

Пример. Найдем приближенное решение задачи (1)-(4) в случае $r(z) = 0$ при начальных данных $y\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 1 + i$, $y'\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}i$ и $\alpha = 0,001$. Величина возмущения не

превышает $\varepsilon = 0,7 \cdot 10^{-3}$. Данная задача имеет точное решение $y = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{1 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot i - 2z}}$.

Найдем радиус окрестности подвижной особой точки $\rho_3 \approx 0,021443$. Точное значение подвижной особой точки $z^* = \frac{1}{2} + \frac{2 + \sqrt{3}}{4}i$. В случае $\tilde{z}^* = 0,5 + 0,93301i$, $\Delta \tilde{z}^* = 0,000003$. Выберем значение аргумента $z = 0,5 + 0,915i \in |z^* - z| < \rho_2$. Применяя (4), $N = 12$, вычислим приближенное значение решения. Расчеты представлены в таблице 1:

Таблица 1

z	y	\tilde{y}_{12}	Δy	$\Delta \tilde{y}_{12}$	Δ_{1y}
$0,5+0,915i$	$4,9029886-$ $4,9029886i$	$4,9033564-$ $4,9033564i$	0,0005	0,004	0,0007

где \tilde{y}_{12} – приближенное решение (4); y – значение точного решения; $\Delta \tilde{y}_{12}$ – оценка погрешности приближенного решения, полученная по теореме 3; Δy – абсолютная погрешность приближенного решения \tilde{y}_{12} ; Δ_{1y} – апостериорная оценка погрешности, которая определяется путем решения обратной задачи теории погрешности для $\varepsilon = 0,7 \cdot 10^{-3}$. В этом случае для $N = 16$ априорная оценка будет удовлетворять требуемой точности $\varepsilon = 0,7 \cdot 10^{-3}$, но с учетом того, что для номеров $n = 13, 14, 15, 16$ коэффициенты $C_n = 0$, в структуре приближенного решения можем ограничиться значением $N = 12$, при котором приближенное решение будет иметь погрешность $\varepsilon = 0,7 \cdot 10^{-3}$.

Выводы. В статье сформулирована и доказана теорема, отражающая влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в комплексной области. Для оптимизации структуры приближенного решения была использована апостериорная погрешность.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hill, J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings / J. M. Hill // Internat. J. Solids Structures. – 1977. № 13. – P. 93104.
- [2] Ockendon, J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems / J. R. Ockendon // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / ed. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. – New York, 1978. – P. 129145.
- [3] Axford, R. A. Differential equations invariant under two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion / R. A. Axford // Los Alamos Report. – 1970. (LA-4517, UC-34).
- [4] Kalman, R. New results in linear filtering and prediction theory / K. Kalman, R. Busy // J. Basic Engr. (ASME Trans.). – 1961. – V. 83D. – P. 95108.
- [5] Shi, M. On the solution of a one-dimensional Riccati equation related to risk-sensitive portfolio optimization problem / M. Shi // Repts Fac. Sci. and Eng. Soga Univ. Math. – 2005. – 34, N 1. – P. 1724.
- [6] Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. – М.: Наука, 1970. – 632 с.
- [7] Березин, И. С. Методы вычислений: в 2 т. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1960.
- [8] Фильчаков, П. Ф. Численные и графические методы прикладной математики / П. Ф. Фильчаков. – Киев: Наукова думка. – 1970. – 800 с.
- [9] Орлов, В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве / В.Н. Орлов // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2008. – № 2. – С. 42–46.
- [10] Орлов, В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В.Н. Орлов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. – 2009. – № 4 (35). – С. 102–108.
- [11] Орлов, В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В.Н. Орлов // Вестник МАИ. – Москва, 2008. – Т. 15, № 5. – С. 128–135.
- [12] Орлов, В. Н. Критерии существования подвижных особых точек решений дифференциальных уравнений Риккати / В.Н. Орлов // Вестник Самарского ГУ. Естеств. научная серия. – 2006. – № 6/1 (46). – С. 64–69.
- [13] Орлов, В. Н. Влияние возмущения начальных данных на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в области аналитичности /

В. Н. Орлов, Т. Ю. Леонтьева // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 3 (17). – С.103 – 109.

[14] Орлов, В. Н. Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в области голоморфности / В. Н. Орлов, Т. Ю. Леонтьева // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – № 4 (80). – С.156 – 162.

[15] Орлов, В. Н. Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности подвижной особой точки в комплексной области / В. Н. Орлов, Т. Ю. Леонтьева // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4 (22). – С. 157–166.

[16] Чичурин, А. В. Об интегрируемости систем третьего порядка, эквивалентных уравнению Шази с шестью неподвижными полюсами / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4 (22). – С. 176–187.

[17] Лукашевич, Н. А. Простейшие дифференциальные уравнения третьего порядка Р-типа / Н. А. Лукашевич // Дифференциальные уравнения. – 1995. – 31, № 6. – С. 955 – 961.

[18] Еругин, Н. П. Аналитическая теория и проблемы вещественной теории дифференциальных уравнений, связанные с первым методом и методами аналитической теории / Н. П. Еругин // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, № 11. – С. 1821 – 1864.

[19] Мататов, В. И. О подвижных особенностях автономных систем Гамильтона / В. И. Мататов, Л. В. Сабынич // Ред. ж. Вестник Белорусск. ун-та. Сер. 1. – Минск, 1991. – 8 с. – Деп. в ВИНТИ 09.04.91, № 1532-В91.

[20] Самодуров, А. А. Об интегрируемости дифференциального уравнения Абеля в параметрическом виде / А. А. Самодуров // Вестник БГУ. Сер. 1. Физ. мат. и мех. 1983. №2. – С. 57 – 59.

[21] Кондратеня, С. Г. К вопросу о существовании полярных решений у дифференциальных уравнений первого порядка / С. Г. Кондратеня, Е. Г. Пролиско, Т. И. Шило // Дифференциальные уравнения. – 1988. – 24, №10. – С. 1824 – 1826.

[22] Яблонский, А. И. Асимптотическое разложение правильных решений некоторых классов дифференциальных уравнений / А. И. Яблонский // Доклад АН БССР. 1964. Т. 8, № 2. С. 7780.

[23] Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. 2 изд. М.- Л: Гос. изд.-во технико-теоретической литературы. – 1950. – 436 с.

[24] Орлов, В. Н. Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности подвижной особой точки в комплексной области / В. Н. Орлов, М. П. Гузь // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4 (22).

[25] Пчелова, А. З. Границы области применения приближенного решения в окрестности возмущенной подвижной особой точки одного дифференциального уравнения в комплексной области / А. З. Пчелова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 4.

Леонтьева Татьяна Юрьевна,

аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: betty2784@mail.ru

T. Y. Leonteva

INFLUENCE OF PERTURBATION OF MOVING SINGULAR POINT ON THE APPROXIMATE SOLUTION OF A NONLINEAR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION IN THE COMPLEX REGION*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

Abstract. Currently, the differential equations are widely used in various fields of human activity [1] - [5]. The theory of linear differential equations is well developed [6] - [8], which is not true of the theory of nonlinear differential equations. Their development is hampered by moving singular points. In [9] - [12] proposed a method for the approximate solution of nonlinear differential equations with movable singularities, including the decision of six tasks. The first two problems: the formulation and proof of the existence and uniqueness of solutions of the nonlinear differential equation; construction of an approximate solution and investigation of the influence of the perturbation of the initial conditions for the approximate solution are presented in [13] - [14].

This paper presents a study of influence of the disturbance moving singular point on the approximate solution of nonlinear differential equations in the complex region. What is the continuation of the investigation [15]. The results are accompanied by estimates.

Keywords: movable singular point, nonlinear differential equation of the second order, approximate solution, neighborhood of the movable singular point, the complex region, posteriori error estimate.

REFERENCES

- [1] *Hill, J. M.* Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings / J. M. Hill // *Internat. J. Solids Structures.* – 1977. № 13. – P. 93104.
- [2] *Ockendon, J. R.* Numerical and analytical solutions of moving boundary problems / J. R. Ockendon // *Proc. Symp. Moving Boundary Problems* / ed. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. – New York, 1978. – P. 129145.
- [3] *Axford, R. A.* Differential equations invariant under two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion / R. A. Axford // *Los Alamos Report.* – 1970. (LA-4517, UC-34).
- [4] *Kalman, R.* New results in linear filtering and prediction theory / K. Kalman, R. Busy // *J. Basic Engr. (ASME Trans.).* – 1961. – V. 83D. – P. 95108.
- [5] *Shi, M.* On the solution of a one-dimensional Riccati equation related to risk-sensitive portfolio optimization problem / M. Shi // *Repts Fac. Sci. and Eng. Soga Univ. Math.* – 2005. – 34, N 1. – P. 1724.
- [6] *Bakhvalov, N. S.* Numerical Methods / N. S. Bakhvalov. – M.: Nauka, 1970. – 632 p.
- [7] *Berezin, I. S.* Methods of calculations / I. S. Berezin, N. P. Zhidkov. – M.: Fizmatgiz, 1960.
- [8] *Filchakov, P. F.* Numerical and graphical methods of Applied Mathematics / P. F. Filchakov. – Kiev: Naukova Dumka, 1970. – 800 p.
- [9] *Orlov, V. N.* On the approximate solution of the first Painlevé equation / V. N. Orlov // *Vestnik of Tupolev named KSTU.* – 2008. – № 2. – P. 42–46.
- [10] *Orlov, V. N.* Investigation of approximate solution of differential equations of Abel in the neighborhood of a singular point of mobile / V. N. Orlov // *Vestnik Bauman named MSTU. Series: Natural sciences.* – 2009. – № 4 (35). – P. 102–108.
- [11] *Orlov, V. N.* On a method of approximate solution of matrix differential Riccati equations / V. N. Orlov // *Vestnik MAI.* – Moscow, 2008. – V. 15, № 5. – P. 128–135.

[12] *Orlov, V. N.* Criteria for the existence of movable singular points of solutions of differential equations Riccati / V. N. Orlov // Vestnik of the Samara State University. Nature. Science series. – 2006. – № 6/1 (46). – P. 64–69.

[13] *Orlov, V. N.* Influence of perturbation of the initial data on the approximate solution of a nonlinear differential equation of second order in the analyticity region / V. N. Orlov, T. Y. Leonteva // Vestnik of I. Yakovlev named Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state. – 2013. – № 3 (17). – P.103 – 109.

[14] *Orlov, V. N.* Construction of an approximate solution of a nonlinear differential equation of second order in a region of holomorphy / V. N. Orlov, T. Y. Leonteva // Vestnik of I. Yakovlev named Chuvash State Pedagogical University. Series: Natural and Technical Sciences. – 2013. – № 4 (80). – P. 156 – 162.

[15] *Orlov, V. N.* Construction of an approximate solution of a nonlinear differential equation of second order in a neighborhood of mobile singularity in the complex region / V. N. Orlov, T. Y. Leonteva // Vestnik of I. Yakovlev named Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state. – 2014. – № 4 (22). – P. 157–166.

[16] *Chichurin, A. V.* On the integrability of systems of the third order, Chazy equation equivalent to six poles fixed / A. V. Chichurin, E. N. Shvychkina // Vestnik of I. Yakovlev named Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state. – 2014. – № 4 (22). – P. 176–187.

[17] *Lukashevich, N. A.* Simple differential equation of the third order of the P-type / N. A. Lukashevich // Differential Equations. – 1995 – 31, № 6. – P. 955 – 961.

[18] *Erugin, N. P.* Analytic theory and the real problems of the theory of differential equations associated with the first method and the analytic theory / N. P. Erugin // Differential Equations. – 1967. – Volume 3, № 11. – P. 1821 – 1864.

[19] *Matatov, V. I.* About the features of mobile autonomous systems Hamilton / V. I. Matatov, L. V. Sabynich // Ed. Well. Bulletin of the Belarusian. Univ. Ser. 1. – Minsk, 1991. – 8. p. – Dep. VINITI 09.04.91, № 1532-V91.

[20] *Samodurov, A. A.* Integrability of Abel differential equation in parametric form / A. A. Samodurov // Vestnik BSU. Ser. 1. Def. mat. and fur. 1983. №2. – P. 57 – 59.

[21] *Kondratenya, S. G.* On the existence of polar solutions of first order differential equations / S. G. Kondratenya, E. G. Prolisky, T. I. Shilo // Differential Equations. – 1988 – 24, №10. – P. 1824 – 1826.

[22] *Yablonsky, A. I.* Asymptotic expansion of the right solutions of certain classes of differential equations / A. I. Yablonsky // Report of the Academy of Sciences of the BSSR. – 1964. – T. 8, № 2. – P. 77 – 80.

[23] *Golybev, V. V.* Lectures on the analytic theory of differential equations. 2nd ed. M. ; L. : Gos. izd. of technical and theoretical literature. – 1950. – 436 p.

[24] *Orlov, V. N.* Construction of an approximate solution of a nonlinear differential equation of second order in a neighborhood of mobile singularity in the complex domain / V. N. Orlov, M. P. Guz // Vestnik of I. Yakovlev named Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state. – 2014. – № 4 (22).

[25] *Pchelova, A. Z.* Boundaries of the application of the approximate solution in the vicinity of the mobile perturbed singular point of the differential equation in the complex domain / A. Z. Pchelova // Herald of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. – 2014. – № 4.

Leonteva, Tatyana Yorevna

Post-graduate Student, Department of Mathematical analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

М. В. Петров, Т. Г. Федорова, Е. Г. Гоник

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

Аннотация. Рассмотрено определения устойчивости образцов при чистом изгибе. Для определения критической силы была собрана установка. По торцам прикладывалась нагрузка. Образцы подбирались из условий геометрического и физического подобия. Критическая нагрузка считалась для пустого и заполненного образцов. По значениям приложенных сил и перемещениям на торце оболочки строились графики зависимости значений сил от перемещений. Приведены эпюры распределения изгибающего момента по образцам. Результаты нижнего критического напряжения для чистого изгиба сверены со значениями, полученные теоретически.

Ключевые слова: устойчивость, оболочка, индикатор, гофры, тензодатчик.

УДК: 539.374.3

В настоящее время транспортировка и хранение сыпучих материалов осуществляется автоцистернами, цистернами, контейнерами. Все данные емкости представляются в виде цилиндрических оболочек. Обеспечение устойчивости данных оболочек во время эксплуатации является одной из ключевых задач [1].

Для исследований поведения оболочек при чистом изгибе был проведен ряд экспериментов. Для осуществления эксперимента была собрана специально разработанная установка, изображенная на рис. 1.

Экспериментальная установка состоит из модельного образца-1, нагружающего устройства-2, измерительных приборов ИЧ-10-3, измерителя деформаций ИДЦ-1-4, тензорезисторов-5.

Типы проведенных испытаний:

1. На цилиндрическую оболочку, опертую на шарнирные опоры с консолями, прикладывалась на концах поперечная нагрузка, направленная вертикально вниз. Образцы без заполнителя. Расчетная схема показана на рис. 2.

2. На цилиндрическую оболочку, опертую на шарнирные опоры с консолями, прикладывалась на концах поперечная нагрузка, направленная вертикально вниз. Образцы с заполнителем. В качестве заполнителя использовался железный порошок ПЖ-5 весом 3200грамм. Расчетная схема показана на рис. 3.

Образцы подбирались из условий геометрического и физического подобия из алюминиевого сплава 3004 или его модификации —алюминиевого сплава 3104 — в состоянии Н19 с параметрами подобия,

Поступила 08.06.2015

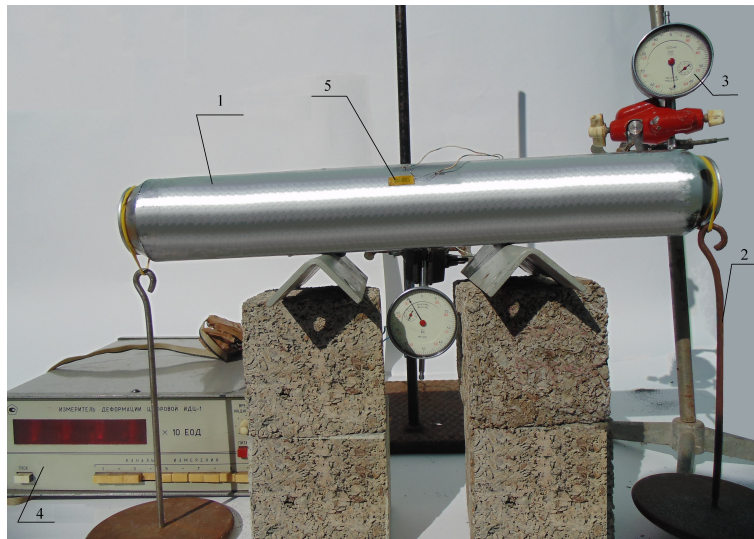


Рис. 1

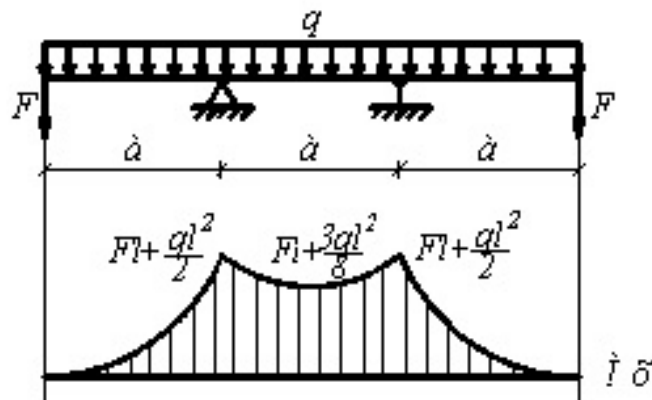


Рис. 2

$$\alpha_1 = \frac{R}{R^*} = 0,02; \quad \alpha_3 = \frac{h}{h^*} = 0,02,$$

где $R^*=1275\text{мм}$, $h^*=5\text{мм}$, радиус и толщина стенки изготавливаемых на заводе цистерн для транспортировки сыпучих грузов.

Каждый образец внимательно изучался. Визуально просматривались несовершенства на поверхности оболочки, отклонения срединной поверхности образца от идеальной цилиндрической поверхности. С целью получения сопоставимых результатов экспериментальных исследований у каждого образца электронным штангенциркулем замерялись наружные диаметры в четырех точках по окружности и толщины стенки. Все образцы были выбраны из одной заводской партии. Партия состояла из 100 образцов, выполненных из алюминиевой ленты по

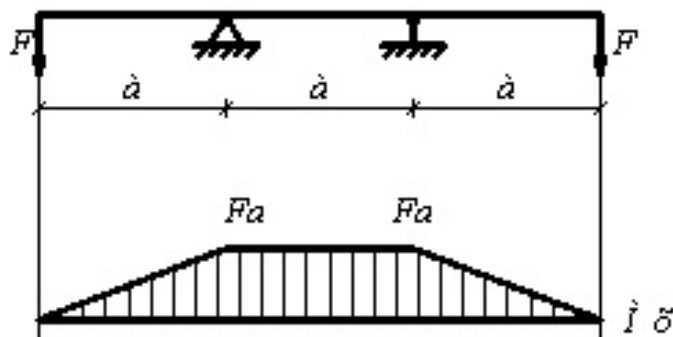


Рис. 3

технологии вытяжки с утонением. На заводе каждая партия проходила тест на наличие геометрических несовершенств и отклонений от правильной геометрической формы, при помощи светового тестера.

Образцы выполнялись следующих размеров:

- толщина стенки образца $h(t)=(0.10\pm 0.01)$ мм,
- наружный диаметр образца $D=(65.5\pm 0.5)$ мм,
- длина образца $L=(435\pm 1)$ мм,
- отношение длины оболочки к толщине $L/h=4350$.

Методика испытаний оболочки на устойчивость при изгибе с наполнителем и без наполнителя изложена в работе [1].

Перемещения, возникающие в образцах под действием внешней нагрузки, замерялись индикаторами часового типа ИЧ-10 по ГОСТ 577-68. Его характеристики:

- диапазон измерений: 0-10 мм,
- класс точности: 1,
- цена деления: 0,01 мм.

Диаметры образца в двух направлениях измерялись электронным штангенциркулем Matrix31611, погрешность измерения 0.01мм.

Деформации, возникающие в оболочке, замерялись с помощью тензорезисторов, включенных по полумостовой схеме к измерителю деформаций цифровой ИДЦ-1.

Технические характеристики ИДЦ-1:

- количество измерительных каналов 10,
- сопротивление применяемых тензорезисторов 50-500 Ом,
- основная погрешность не более 20 ЕОД,
- время одного измерения не более 2с,
- цена одной единицы дискретности показаний прибора 10 ЕОД,
- цифровой диапазон измерения 0000...1999х10ЕОД($1\cdot 10^{-7}$)

Тензорезисторы типа КФ5П1-10-200А-12 наклеивались клеем циакрин- ЭО быстросхватывающимся, холодного отверждения на предварительно очищенную и обезжиренную наружную поверхность в середине оболочки, в предполагаемом месте потери устойчивости. Приклеивались по два тензодатчика в окружном и осевом направлениях в верхней и нижней точках соответственно. Тензорезисторы испытываемых образцов проверялись на целостность цепи. При обнаружениях дефектов наклейки тензорезисторы заменялись на новые.

Технические характеристики тензорезистора КФ5П1-10-200А-12:

- номинальная база 10мм,
- номинальное электрическое сопротивление 200 Ом,
- максимальная измеряемая деформация ± 3000 мкм/м,
- чувствительность $2,1 \pm 0,2$.

Испытание оболочек на устойчивость проводилась постепенно. Вертикальные нагрузки увеличивали с шагом 10Н, приложенными по торцам оболочки. На каждом этапе замерялись показания индикаторов и тензорезисторов, измерялись диаметры оболочки. Нагрузка доводилась до критической, при которой происходит потеря устойчивости оболочки.

Конечная деформированная форма образца фиксировалась с помощью фотоаппарата.

После проведения опытов проводилась статическая обработка результатов. По значениям приложенных сил и перемещениям на торце оболочки строились графики (рис.4). График(1) для не заполненных сыпучим материалом образцов.

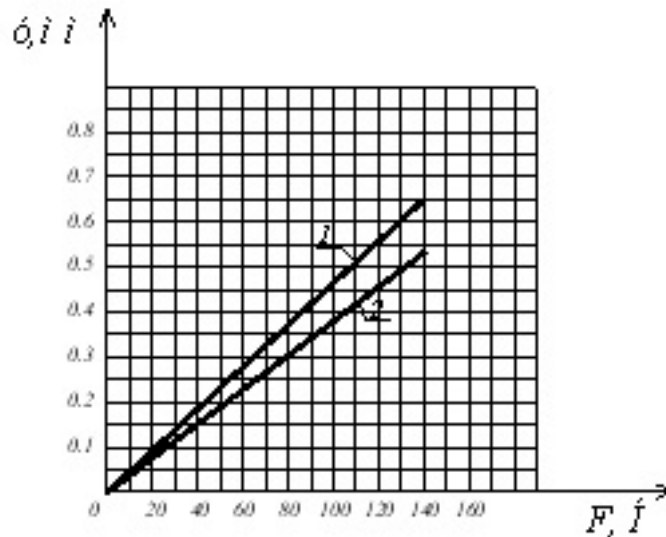


Рис. 4

Значение критической силы, при которой происходит потеря устойчивости, равна 138,3Н. Прогибы, соответственно равны на середине оболочки 0,185мм, на торце 0,65мм.

Гофры образовались в сжатой зоне. Они имеют форму в виде ромба (рис.5). Устойчивость терялась при упругих деформациях образцов.

Для заполненных железным порошком образцов построен график (2) зависимости прогиба на торце образца от приложенных сил (рис. 4). Значение критической силы равно 140Н, прогиб равен 0,53мм. Гофры имеют также форму в виде ромба.

При испытании оболочки с наполнителем в качестве наполнителя использовался железный порошок ПЖ-5, плотностью $2,66$ г/см³ и общей массой 3500гр. Среднее значение коэффициента внутреннего трения железного порошка ПЖ-5 равен 0,613. Среднее значение коэффициента трения между материалом образца и железным порошком ПЖ-5 равен 0,364. Процент заполнения 80%. Железный порошок равномерно распределялся внутри образца.

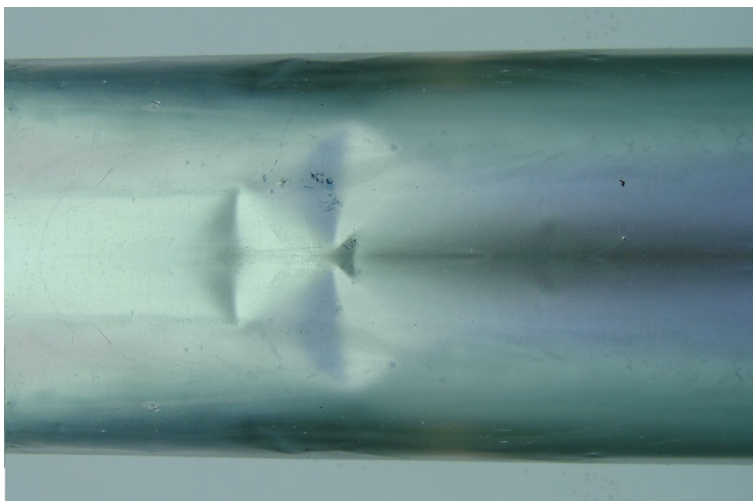


Рис. 5

Для оболочек нижнее критическое напряжение для чистого изгиба определяется по зависимости [2], [3]:

$$\sigma_k^H = 0,3 \frac{Eh}{R} = 0,3 \frac{0,65 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}}{32,75 \cdot 10^{-3}} = 59,5 \text{ МПа}$$

Для испытанных образцов без заполнителя критическое сжимающее напряжение равно $\sigma_k^H = 64$ МПа. Отличие в результатах опытных и расчетных критических напряжений составляет 7%. Результаты сравнительного анализа убеждают в правильности выполненных экспериментальных исследований.

Подводя итоги по проделанным опытам можно сделать следующие выводы:

- образец теряет устойчивость в зоне максимального изгибающего момента;
- значение критической силы, практически одинаковое в обоих случаях;
- гофры имеют одинаковое очертание как при испытании образцов с засыпкой, так и без нее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорова Т. Г. Экспериментально-теоретическое исследование упругопластического деформирования, потери устойчивости и закритического поведения цилиндрических оболочек с сыпучим заполнителем при изгибе. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Н. Новгород 2013г.

2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Издательство : “Наука” главная редакция физико-математической литературы. Москва 1967г.

3. Вольмир А. С., Григорьев Ю. П., Станкевич А. И. Сопротивление материалов. Издательство : Москва, 2007.

Петров Михаил Васильевич,

доктор технических наук, профессор кафедры строительных конструкций строительного факультета, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары

Федорова Татьяна Георгиевна,

кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры строительных конструкций строительного факультета, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары

Гоник Екатерина Григорьевна,

ассистент кафедры строительных конструкций строительного факультета, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары

M. Petrov, T. G. Fedorova, E. G. Gonick

EXPERIMENTAL STUDY OF THE BUCKLING OF THIN-WALLED SHELLS UNDER PURE BENDING

Abstract. The method of determining the stability of the samples in pure bending. To determine the critical force was assembled installation. At the ends of the applied load. Samples were selected from the conditions of geometrical and physical similarity. The critical load is considered empty and filled with samples. From the values of the applied forces and displacements at the end of the shell plotted values of forces on displacements. Diagram shows the distribution of the bending moment on the samples. Results of the lower critical stress for pure bending reconciled with the values obtained theoretically.

Keywords: stability, shell, indicator, corrugations, strain gage.

REFERENCES

[1] Fedorova T. G. Experimental and theoretical investigation of elastic-plastic deformation, buckling and supercritical behavior of cylindrical shells with free-flowing filler during bending. The thesis for the degree of candidate of technical sciences. Nizhny Novgorod 2013.

[2] Volmir A. S. The stability of deformable systems. Publishing house "Science" major revision of physical and mathematical literature. Moscow 1967.

[3] Volmir A. S., Grigoriev Y. P., Stankevich A. I. Strength of Materials. Publishing Moscow, 2007.

Petrov, Mikhail Vasilievich

doctor of technical Sciences, Professor of Department of building structures building of the faculty, Chuvash state University I. N. Ulyanov

Fedorova, Tatyana Georgievna

candidate of technical Sciences, senior lecturer of the Department of building construction and civil engineering, Chuvash state University I. N. Ulyanov

Gonic, Ekaterina Grigoryevna

assistant Professor of building construction building faculty, Chuvash state University I. N. Ulyanov

А. В. Балашникова, Б. Г. Миронов, М. В. Михайлова

**К ВОПРОСУ О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО
СЛОЯ, СЖАТОГО ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ ПРИ УСЛОВИИ
ЗАВИСИМОСТИ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ ОТ СРЕДНЕГО ДАВЛЕНИЯ
ПРИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ**

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

Аннотация. В работе рассматривается предельное состояние идеальнопластического анизотропного пространственного слоя, сжатого параллельными жесткими шероховатыми плитами. Предположим, что пространственный слой толщины $2h$ параллелен оси Ox и сдавливается параллельными шероховатыми плитами вдоль оси Oz .

Ключевые слова: сжатие, слой, идеальная пластичность, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Пусть условие пластичности зависит от среднего давления и имеет вид

$$A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + B(\sigma_y - \sigma_z)^2 + C(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(D\tau_{xy}^2 + E\tau_{yz}^2 + F\tau_{xz}^2) = 6(\kappa_0 + a\sigma)^2, \quad (1)$$

где $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} — компоненты напряжения, A , B , C , D , E , F — const.

Из условия экстремума функционала

$$\bar{A}_6 = \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + 2(\varepsilon_{xy} \tau_{xy} + \varepsilon_{yz} \tau_{yz} + \varepsilon_{xz} \tau_{xz}) - \\ - \lambda \left(A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + B(\sigma_y - \sigma_z)^2 + C(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(D\tau_{xy}^2 + E\tau_{yz}^2 + F\tau_{xz}^2) - 6(\kappa_0 + a\sigma)^2 \right)$$

определим соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 2\lambda(A(\sigma_x - \sigma_y) - C(\sigma_z - \sigma_x) - 2a(\kappa_0 + a\sigma)), \\ \varepsilon_y &= 2\lambda(B(\sigma_y - \sigma_z) - A(\sigma_x - \sigma_y) - 2a(\kappa_0 + a\sigma)), \\ \varepsilon_z &= 2\lambda(C(\sigma_z - \sigma_x) - B(\sigma_y - \sigma_z) - 2a(\kappa_0 + a\sigma)), \\ 2\varepsilon_{xy} &= 6\lambda D\tau_{xy}, \\ 2\varepsilon_{yz} &= 6\lambda E\tau_{yz}, \\ 2\varepsilon_{xz} &= 6\lambda F\tau_{xz}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ε_x , ε_y , ε_z , ε_{xy} , ε_{yz} , ε_{xz} — компоненты скорости деформации.

Из соотношений (1) найдем

Поступила 15.04.2015

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 15-41-02453, 14-01-31323 мол_а) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179)

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x - \sigma_y) &= \frac{B\varepsilon_x - C\varepsilon_y}{2\lambda\Delta} + 2a(\kappa_0 + a\sigma) \frac{B - C}{\Delta}, \\
 (\sigma_y - \sigma_z) &= \frac{C\varepsilon_y - A\varepsilon_z}{2\lambda\Delta} + 2a(\kappa_0 + a\sigma) \frac{C - A}{\Delta}, \\
 (\sigma_z - \sigma_x) &= \frac{B\varepsilon_x - A\varepsilon_z}{2\lambda\Delta} + 2a(\kappa_0 + a\sigma) \frac{B - A}{\Delta}, \\
 \varepsilon &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = -4\lambda a(\kappa_0 + a\sigma),
 \end{aligned} \tag{3}$$

где $\Delta = AB + BC + CA$.

Подставив в (1) соотношения (2), (3), получим

$$\begin{aligned}
 &A \left(\frac{B\varepsilon_x - C\varepsilon_y}{\Delta} - \frac{\varepsilon(B - C)}{4\Delta} \right)^2 + B \left(\frac{C\varepsilon_y - A\varepsilon_z}{\Delta} - \frac{\varepsilon(C - A)}{4\Delta} \right)^2 + \\
 &+ C \left(\frac{A\varepsilon_z - B\varepsilon_x}{\Delta} - \frac{\varepsilon(A - B)}{4\Delta} \right)^2 + 6 \left(\frac{\varepsilon_{xy}^2}{9D} + \frac{\varepsilon_{yz}^2}{9E} + \frac{\varepsilon_{xz}^2}{9F} \right) = \frac{3}{32a^2} \varepsilon^2.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Обозначим $\xi = \kappa_0 + a\sigma$ или $\sigma = \frac{\xi - \kappa_0}{a}$.

Следуя идеям Гартмана, положим

$$\begin{aligned}
 \xi &= \kappa e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\
 \sigma_x &= \bar{\sigma}_x e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)} + \mu, \\
 \sigma_y &= \bar{\sigma}_y e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)} + \mu, \\
 \sigma_z &= \bar{\sigma}_z e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)} + \mu, \\
 \tau_{xy} &= \bar{\tau}_{xy} e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\
 \tau_{yz} &= \bar{\tau}_{yz} e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\
 \tau_{xz} &= \bar{\tau}_{xz} e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)},
 \end{aligned} \tag{5}$$

где $\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z = \frac{\kappa}{a}$, $\mu = -\frac{\kappa_0}{a}$, $\lambda_1, \lambda_2 - const$, $\lambda_3(z)$ — некоторая функция от z .

Используя предположение (5), условие пластичности (1) запишем в виде

$$A(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y)^2 + B(\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_z)^2 + C(\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_x)^2 + 6(D\bar{\tau}_{xy}^2 + E\bar{\tau}_{yz}^2 + F\bar{\tau}_{xz}^2) = 6\kappa^2. \tag{6}$$

Уравнения равновесия согласно (5) примут вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial z} + \lambda_1 \bar{\sigma}_x + \lambda_2 \bar{\tau}_{xy} + \lambda_3' \bar{\tau}_{xz} &= 0, \\
 \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial z} + \lambda_1 \bar{\tau}_{xy} + \lambda_2 \bar{\sigma}_y + \lambda_3' \bar{\tau}_{yz} &= 0, \\
 \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} + \lambda_1 \bar{\tau}_{xz} + \lambda_2 \bar{\tau}_{yz} + \lambda_3' \bar{\sigma}_z &= 0,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где $\lambda_3' = \frac{d\lambda_3}{dz}$.

Положим

$$\begin{aligned}
 u &= U e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\
 v &= V e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\
 w &= W e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)},
 \end{aligned} \tag{8}$$

где $U, V, W - const$.

Согласно формуле Коши из (8) следует

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \lambda_1 U e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\
\varepsilon_y &= \lambda_2 V e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\
\varepsilon_z &= \lambda_3' W e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\
2\varepsilon_{xy} &= (\lambda_2 U + \lambda_1 V) e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\
2\varepsilon_{yz} &= (\lambda_3' V + \lambda_2 W) e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}, \\
2\varepsilon_{xz} &= (\lambda_3' U + \lambda_1 W) e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3(z)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Пусть

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}(z). \tag{10}$$

Тогда согласно (10) уравнения равновесия (7) переписутся в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\tau}_{xz}}{dz} + \lambda_1 \bar{\sigma}_x + \lambda_2 \bar{\tau}_{xy} + \frac{d\lambda_3}{dz} \bar{\tau}_{xz} &= 0, \\
\frac{d\bar{\tau}_{yz}}{dz} + \lambda_1 \bar{\tau}_{xy} + \lambda_2 \bar{\sigma}_y + \frac{d\lambda_3}{dz} \bar{\tau}_{yz} &= 0, \\
\frac{d\bar{\sigma}_z}{dz} + \lambda_1 \bar{\tau}_{xz} + \lambda_2 \bar{\tau}_{yz} + \frac{d\lambda_3}{dz} \bar{\sigma}_z &= 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Из соотношений (1), (3) получим

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{(2A + C)(\sigma_x - \sigma_y) + (C - B)(\sigma_y - \sigma_z)} &= \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{(2B + C)(\sigma_y - \sigma_z) + (C - A)(\sigma_x - \sigma_y)} = \\
&= \frac{\varepsilon_z - \varepsilon_x}{-(A + 2C)(\sigma_x - \sigma_y) - (2C + B)(\sigma_y - \sigma_z)} = \frac{\varepsilon_{xy}}{3D\tau_{xy}} = \frac{\varepsilon_{yz}}{3E\tau_{yz}} = \frac{\varepsilon_{xz}}{3F\tau_{xz}}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Согласно (5), (8) соотношения (11) примут вид

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_1 U - \lambda_2 V}{(2A + C)(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y) + (C - B)(\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_z)} &= \frac{\lambda_2 V - \lambda_3' W}{(2B + C)(\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_z) + (C - A)(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y)} = \\
&= \frac{\lambda_3' W - \lambda_1 U}{-(A + 2C)(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y) - (2C + B)(\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_z)} = \frac{\lambda_2 U + \lambda_1 V}{6D\bar{\tau}_{xy}} = \frac{\lambda_3' V + \lambda_2 W}{6E\bar{\tau}_{yz}} = \frac{\lambda_3' U + \lambda_1 W}{6F\bar{\tau}_{xz}}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Из условия (4), (9) получим

$$\begin{aligned}
&A \left(\frac{\lambda_1 U B - \lambda_2 V C}{\Delta} - \frac{B - C}{4\Delta} (\lambda_1 U + \lambda_2 V + \lambda_3' W) \right)^2 + \\
&B \left(\frac{\lambda_2 V C - \lambda_3' W A}{\Delta} - \frac{C - A}{4\Delta} (\lambda_1 U + \lambda_2 V + \lambda_3' W) \right)^2 + \\
&+ C \left(\frac{\lambda_3' W A - \lambda_1 U B}{\Delta} - \frac{A - B}{4\Delta} (\lambda_1 U + \lambda_2 V + \lambda_3' W) \right)^2 + \\
&+ \frac{(\lambda_2 U + \lambda_1 V)^2}{3D} + \frac{(\lambda_3' V + \lambda_2 W)^2}{3E} + \frac{(\lambda_3' U + \lambda_1 W)^2}{3F} = \frac{3}{32a^2} (\lambda_1 U + \lambda_2 V + \lambda_3' W)^2.
\end{aligned} \tag{14}$$

Согласно (14) определим

$$\lambda_3' = \tilde{A}, \quad \lambda_3 = \tilde{A} \cdot z + \tilde{C}, \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{t_2 \pm \sqrt{t_2^2 + t_1 t_3}}{2t_1}, \quad t_1 = AW^2 \frac{(B-C)^2}{16\Delta^2} + W^2 A^2 \frac{B}{\Delta^2} + W^2 B \frac{(C-A)^2}{16\Delta^2} + W^2 + \\ &\quad + W^2 \frac{C}{\Delta^2} + W^2 \frac{C(A-B)}{16\Delta^2} + \frac{1}{3E} V^2 + \frac{1}{3F} U^2 - \frac{3}{32a^2} W^2, \\ t_2 &= \frac{AW(C-B)}{2\Delta} + \frac{AW(\lambda_1 U + \lambda_2 V)(B-C)^2}{8\Delta^2} - \frac{2\lambda_2 ACBW}{3E} - \\ &\quad - \frac{BW(C-A)}{2\Delta} + 2W(\lambda_1 U + \lambda_2 V) + \frac{2\lambda_2^2 VW}{3E} + \frac{2\lambda_1 UW}{3F} - \frac{3W^2(\lambda_1 U + \lambda_2 V)}{16a^2}, \\ t_3 &= A \left(\frac{\lambda_1 UB - \lambda_2 VC}{\Delta} \right)^2 - \frac{A(B-C)}{2\Delta} (\lambda_1 U + \lambda_2 V) + A \frac{(B-C)^2}{16\Delta^2} (\lambda_1 U + \lambda_2 V)^2 + \\ &\quad + \frac{B}{\Delta^2} \lambda_2^2 V^2 C^2 - \frac{B(C-A)}{2\Delta} (\lambda_1 U + \lambda_2 V) + B \frac{(C-A)^2}{16\Delta^2} (\lambda_1 U + \lambda_2 V)^2 + \frac{C}{\Delta^2} \lambda_1^2 U^2 B^2 - \\ &\quad - \frac{C(A-B)}{2\Delta} (\lambda_1 U + \lambda_2 V) + \frac{C(A-B)^2}{16\Delta^2} (\lambda_1 U + \lambda_2 V) + \frac{\lambda_2^2 W^2}{3E} + \frac{\lambda_1^2 U^2}{3F} - \\ &\quad - \frac{3}{32a^2} (\lambda_1 U + \lambda_2 V)^2. \end{aligned}$$

Из соотношений (13) следует

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \bar{\sigma}_z + \frac{6F(R_1 - 1)(\lambda_1 U - \tilde{A}W)}{(R_1(A + 2C) - (2C + B))(\tilde{A}U + \lambda_1 W)} \cdot \bar{\tau}_{xz}, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{\lambda_2 U + \lambda_1 V}{\tilde{A}U + \lambda_1 W} \cdot \frac{F}{D} \cdot \bar{\tau}_{xz} = \frac{\lambda_2 U + \lambda_1 V}{\tilde{A}V + \lambda_2 W} \cdot \frac{E}{D} \cdot \bar{\tau}_{yz}, \\ \bar{\sigma}_y &= \bar{\sigma}_z + \frac{6E \cdot (\tilde{A}W - \lambda_2 U)}{(R_1(A + 2C) - (2C + B))(\tilde{A}V + \lambda_2 W)} \cdot \bar{\tau}_{yz}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$R_1 = \frac{(\lambda_1 U - \lambda_2 V)(2B + C) - (\lambda_2 V - \tilde{A}W)(C - B)}{(\lambda_1 U - \lambda_2 V)(C - A) - (\lambda_2 V - \tilde{A}W)(2A + C)}.$$

Из уравнения равновесия (13) и соотношений (16) найдем

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\tau}_{xz}}{dz} + \frac{6F(R_1 - 1)(\lambda_1 U - \tilde{A}W)}{(R_1(A + 2C) - (2C + B))(\tilde{A}U + \lambda_1 W)} \cdot \bar{\tau}_{xz} + \lambda_1 \cdot \bar{\sigma}_z &= 0, \\ \frac{d\bar{\tau}_{yz}}{dz} + \frac{(\lambda_1 \lambda_2 UE + \lambda_1^2 VE + (\lambda_3')^2 VD + \lambda_2 \lambda_3' WD) \cdot (A + 2B) + 6DE \cdot (\lambda_2^2 V + \lambda_2 \lambda_3' W)}{AV + \lambda_2 W} \cdot \bar{\tau}_{yz} + \\ + \lambda_2 \cdot \frac{2B + 2C - A}{A + 2B} \cdot \bar{\sigma}_z - 3\sigma \cdot \lambda_2 \cdot \frac{C - A}{A + 2B} &= 0, \\ \frac{d\bar{\sigma}_z}{dz} + \lambda_1 \bar{\tau}_{xz} + \lambda_2 \bar{\tau}_{yz} + \lambda_3' \bar{\sigma}_z &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Преобразовав систему (17), получим

$$\begin{aligned} \lambda_2 \cdot \frac{d\bar{\tau}_{xz}}{dz} - \lambda_1 \cdot \frac{d\bar{\tau}_{yz}}{dz} + \lambda_2 \cdot R_2 \cdot \bar{\tau}_{xz} - \lambda_1 \cdot R_1 \cdot \bar{\tau}_{yz} &= 0, \\ \bar{\tau}_{yz} &= \frac{\lambda_3' V + \lambda_2 W}{\lambda_3' U + \lambda_1 W} \cdot \frac{F}{E} \cdot \bar{\tau}_{xz}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$R_2 = \frac{6F(R_1 - 1)(\lambda_1^2 U - \lambda_1 \tilde{A}W)}{(R_1(A + 2C) - (2C + B))(\tilde{A}U + \lambda_1 W)} + \frac{\lambda_2^2 U + \lambda_1 \lambda_2 V}{\tilde{A}U + \lambda_1 W} \cdot \frac{F}{D} + \tilde{A},$$

$$R_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 U + \lambda_1^2 V}{\tilde{A}V + \lambda_2 W} \cdot \frac{E}{D} + \frac{6E(\tilde{A}W - \lambda_1 U)}{(R_1(A + 2C) - (2C + B))(\tilde{A}V + \lambda_2 W)} + \tilde{A}.$$

Из (18) найдем

$$(\lambda_2 U \tilde{A}E - \lambda_1 V \tilde{A}F) \frac{d\bar{\tau}_{xz}}{dz} = \left(\lambda_1 R_3 \cdot \frac{F}{E} \cdot \frac{\tilde{A}V + \lambda_2 W}{\tilde{A}U + \lambda_1 W} - \lambda_2 R_2 \right) \bar{\tau}_{xz}. \quad (19)$$

Согласно (19) получим

$$\frac{d\bar{\tau}_{xz}}{dz} = a_{13} \bar{\tau}_{xz},$$

где

$$a_{13} = \frac{\left(\lambda_1 R_3 \cdot \frac{F}{E} \cdot \frac{\tilde{A}V + \lambda_2 W}{\tilde{A}U + \lambda_1 W} - \lambda_2 R_2 \right)}{(\lambda_2 U \tilde{A}E - \lambda_1 V \tilde{A}F)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xz} &= b_{13} e^{a_{13}z}, \\ \bar{\tau}_{yz} &= b_{13} \cdot \frac{F}{E} \cdot \left(\frac{\tilde{A}V + \lambda_2 W}{\tilde{A}U + \lambda_1 W} \right) e^{a_{13}z}, \\ \frac{d\bar{\sigma}_z}{dz} + \tilde{A}\bar{\sigma}_z &= -b_{13} \left(\lambda_1 - \lambda_2 \frac{F}{E} \frac{\tilde{A}V + \lambda_2 W}{\tilde{A}U + \lambda_1 W} \right) e^{a_{13}z}, \\ \bar{\sigma}_z &= - \frac{b_{13} \left(\lambda_1 - \lambda_2 \frac{F}{E} \frac{\tilde{A}V + \lambda_2 W}{\tilde{A}U + \lambda_1 W} \right)}{a_{13} + \tilde{A}} e^{a_{13}z}, \\ \bar{\tau}_{xy} &= b_{13} \cdot \frac{F}{D} \cdot \frac{\lambda_2 U + \lambda_1 V}{\tilde{A}U + \lambda_1 W} e^{a_{13}z}, \\ \bar{\sigma}_y &= - \frac{b_{13} e^{a_{13}z}}{(\tilde{A}U + \lambda_1 W)} \left(\frac{E\lambda_1 (\tilde{A}U + \lambda_1 W) - \lambda_2 F (\tilde{A}V + \lambda_2 W)}{E(a_{13} + \tilde{A})} - \frac{6F \cdot (\tilde{A}W - \lambda_2 U)}{(R_1(A + 2C) - (2C + B))} \right), \\ \bar{\sigma}_x &= - \frac{b_{13} e^{a_{13}z}}{(\tilde{A}U + \lambda_1 W)} \left(\frac{E\lambda_1 (\tilde{A}U + \lambda_1 W) - \lambda_2 F (\tilde{A}V + \lambda_2 W)}{E(a_{13} + \tilde{A})} + \frac{6F(R_1 - 1)(\lambda_1 U - \tilde{A}W)}{(R_1(A + 2C) - (2C + B))} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние слоя определено в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= - \left(\frac{E\lambda_1 (\tilde{A}U + \lambda_1 W) - \lambda_2 F (\tilde{A}V + \lambda_2 W)}{E(a_{13} + \tilde{A})} + \frac{6F(R_1 - 1)(\lambda_1 U - \tilde{A}W)}{(R_1(A + 2C) - (2C + B))} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{b_{13} e^{a_{13}z + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \tilde{A} \cdot z + \tilde{C}}}{(\tilde{A}U + \lambda_1 W)} + \mu, \\ \sigma_y &= - \left(\frac{E\lambda_1 (\tilde{A}U + \lambda_1 W) - \lambda_2 F (\tilde{A}V + \lambda_2 W)}{E(a_{13} + \tilde{A})} - \frac{6F \cdot (\tilde{A}W - \lambda_2 U)}{(R_1(A + 2C) - (2C + B))} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{b_{13} e^{a_{13}z + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \tilde{A} \cdot z + \tilde{C}}}{(\tilde{A}U + \lambda_1 W)} + \mu, \\ \sigma_z &= - \left(\lambda_1 - \lambda_2 \frac{F}{E} \frac{\tilde{A}V + \lambda_2 W}{\tilde{A}U + \lambda_1 W} \right) \frac{b_{13} e^{a_{13}z + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \tilde{A} \cdot z + \tilde{C}}}{a_{13} + \tilde{A}} + \mu, \\ \tau_{xy} &= \frac{\lambda_2 U + \lambda_1 V}{\tilde{A}U + \lambda_1 W} \cdot \frac{F b_{13} e^{a_{13}z + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \tilde{A} \cdot z + \tilde{C}}}{D}, \\ \tau_{yz} &= \left(\frac{\tilde{A}V + \lambda_2 W}{\tilde{A}U + \lambda_1 W} \right) \cdot \frac{F b_{13} e^{a_{13}z + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \tilde{A} \cdot z + \tilde{C}}}{E}, \quad \tau_{xz} = b_{13} e^{a_{13}z + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \tilde{A} \cdot z + \tilde{C}}, \\ u &= U e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \tilde{A} \cdot z + \tilde{C}}, v = V e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \tilde{A} \cdot z + \tilde{C}}, w = W e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \tilde{A} \cdot z + \tilde{C}}, \end{aligned}$$

где \tilde{A} — определяется согласно (15).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Балашникова А. В. О сжатии идеальнопластического слоя жесткими шероховатыми плитами в случае трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. 2011. № 2 (10). С. 115–118.
- [2] Максимова Л. А. О предельном состоянии слоя, сжатого шероховатыми плитами // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 6. С. 1099–1104.
- [3] Максимова Л. А. О сжатии плиты из идеальнопластического анизотропного материала // Проблемы механики : сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М. : Физматлит, 2003. С. 520–523.

Миронов Борис Гурьевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

Балашникова Анжелика Вениаминовна,

кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории РАН "Механика предельного состояния", Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: info3006@yandex.ru

Михайлова Марина Васильевна,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

A. V. Balashnikova, B. G. Mironov, M. V. Mihalova

TO A QUESTION OF A LIMIT CONDITION OF THE ANISOTROPIC SPATIAL LAYER SQUEEZED BY ROUGH PLATES ON CONDITION OF DEPENDENCE OF A LIMIT OF FLUIDITY FROM AVERAGE PRESSURE

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. In work the limit condition of the idealnplastichesky anisotropic spatial layer squeezed by parallel rigid rough plates is considered. We will assume that the spatial layer of thickness of $2h$ is parallel to an axis of Ox and is squeezed by parallel rough plates along Oz axis.

Keywords: compression, layer, ideal plasticity, transmitting anisotropy.

REFERENCES

- [1] Balashnikova A. V. About compression of an idealnplastichesky layer by rigid rough plates in case of transmitting anisotropy // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2011. No 2 (10). P. 115–118.
- [2] Maksimova L. A. About compression of layer by rough plates // PMM. 2000. Vol. 64. No. 6. P. 1099–1104.
- [3] Maksimova L. A. About compression of plate from ideal-plastic anisotropy layer // Problems of mechanics : sb. st. on the 90th anniversary of Ishlinskiy A. – M. : Phizmatlit, 2003. P. 520–523.

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Balashnikova, Anshelika Veniaminovna

Candidate of Phys.&Math., Junior researcher of Russian Academy of Sciences laboratory "Mechanics of a limit state", I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Mihailova, Marina Vasilevna

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко

К ВОПРОСУ О РЕБРЕ ПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ИДЕАЛЬНО СВЯЗНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Тульский государственный университет, г. Тула

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары

Аннотация. Показано, что ребро полной пластичности формируется ребром сингулярности девиаторных функций на полуплоскостях кратности промежуточного главного напряжения и критериями предельного состояния при крайних значениях параметра Лоде.

Ключевые слова: ребро полной пластичности, ассоциированный закон пластического течения, ребро сингулярности, критерий предельного состояния.

УДК: 531.01

1. Закон течения, соответствующий сингулярному условию пластического течения рассматривал Рейс [3] (1933). Условие пластичности он представил в виде ребра пластичности

$$f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad (1.1)$$

где σ_i – главные напряжения.

Закон пластического течения Рейс представил в виде

$$\varepsilon_1 = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_1}, \quad \varepsilon_2 = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_2}, \quad \varepsilon_3 = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_3}. \quad (1.2)$$

где ε_i – главные скорости деформации, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ – коэффициенты Лагранжа.

Теория ассоциированного закона пластического течения для сингулярных условий текучести получила развитие в работах В. Койтера [1] (1953) и В. Прагера [2] (1953). Соотношения обобщенного закона пластического течения имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f_{\alpha} = f_{\alpha}(\sigma_{ij}), \quad (1.3)$$

где $\lambda_{\alpha} = 0$, если $f_{\alpha} < 0$, а так же если $f_{\alpha} = 0$, $f_{\alpha} \equiv \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \leq 0$ и $\lambda_{\alpha} \geq 0$ если $f_{\alpha} = 0$, $df_{\alpha} = 0$.

Для примера уравнение произвольного ребра кусочно-линейного условия текучести в пространстве главных напряжений запишем в виде пересечения двух плоскостей

$$a_1 \Sigma_1 + b_1 \Sigma_2 + c_1 \Sigma_3 = 1, \quad a_2 \Sigma_1 + b_2 \Sigma_2 + c_2 \Sigma_3 = 1, \quad (1.4)$$

причем

$$a_1 + b_1 + c_1 = 0, \quad a_2 + b_2 + c_2 = 0 \quad (1.5)$$

Согласно (1.2) ассоциированный закон пластического течения имеет вид

$$\varepsilon_1 = \lambda a_1 + \mu a_2, \quad \varepsilon_2 = \lambda b_1 + \mu b_2, \quad \varepsilon_3 = \lambda c_1 + \mu c_2. \quad (1.6)$$

Таким образом, через пересечение плоскостей (1.4) проходит пучок плоскостей

$$\lambda(a_1 \Sigma_1 + b_1 \Sigma_2 + c_1 \Sigma_3) + \mu(a_2 \Sigma_1 + b_2 \Sigma_2 + c_2 \Sigma_3) = 0. \quad (1.7)$$

Несложно установить, что угол схождения γ_1 плоскостей пластичности (1.4) и угол расхождения γ_2 пучка плоскостей (1.7) связаны соотношением

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \pi. \quad (1.8)$$

Иначе выглядит картина пластического течения, если ребро пластичности принадлежит полуплоскости кратности промежуточного главного напряжения.

В качестве примера рассмотрим условие пластичности Прагера (1956),

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 + \chi(\Sigma_2 - \Sigma_3) = \sigma_p, \quad (\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3), \quad (1.9)$$

где Σ_i — ранжированные главные напряжения.

Предел текучести при растяжении равен значению σ_p , а при сжатии $\sigma_c = \sigma_p/\chi$. Ребра полной пластичности получим при крайних значениях параметра Лоде $\mu_\sigma = \mp 1$.

Рассмотрим полуплоскость кратности промежуточного главного напряжения $\mu_\sigma = -1$. На этой полуплоскости два главных напряжения одинаковы $\Sigma_2 = \Sigma_3$.

Ребро полной пластичности получается как пересечение граней

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 + \chi(\Sigma_2 - \Sigma_3) = \sigma_p, \quad \Sigma_1 - \Sigma_3 + \chi(\Sigma_3 - \Sigma_2) = \sigma_p. \quad (1.10)$$

При условии кратности ранжированного напряжения $\Sigma_2 = \Sigma_3$ из (1.10) следует

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = \sigma_p, \quad \Sigma_1 - \Sigma_3 = \sigma_p. \quad (1.11)$$

То есть сингулярность проявляется в виде ребра равно сторонней шестигранной призмы, причем $\gamma_1 = 2\pi/3$, $\gamma_2 = \pi/3$.

Ассоциированный закон пластического течения имеет вид

$$\varepsilon_1 = \lambda + \mu, \quad \varepsilon_2 = -\lambda, \quad \varepsilon_3 = -\mu. \quad (1.12)$$

Рассмотрим полуплоскость кратности промежуточного главного напряжения $\mu_\sigma = 1$. На этой полуплоскости два главных напряжения одинаковы $\Sigma_2 = \Sigma_1$.

Ребро полной пластичности получается как пересечение граней

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 + \chi(\Sigma_2 - \Sigma_3) = \sigma_p, \quad \Sigma_2 - \Sigma_1 + \chi(\Sigma_1 - \Sigma_3) = \sigma_p. \quad (1.13)$$

При $\Sigma_2 = \Sigma_1$, получим

$$\Sigma_2 - \Sigma_3 = \sigma_p/\chi = \sigma_c, \quad \Sigma_1 - \Sigma_3 = \sigma_p/\chi = \sigma_c. \quad (1.14)$$

Из (1.14) следует, что ребро полной пластичности проявляется в виде ребра равносторонней шестигранной призмы, причем $\gamma_1 = 2\pi/3$, $\gamma_2 = \pi/3$.

Закон пластического течения имеет вид

$$\varepsilon_1 = \mu, \quad \varepsilon_2 = \lambda, \quad \varepsilon_3 = -\lambda - \mu. \quad (1.15)$$

Таким образом, **любые условия пластичности изотропных идеально связных сред в случае полной пластичности сводятся к ребрам в виде равносторонней шестигранной призмы, равно наклоненной к главным осям трехмерного векторного пространства главных напряжений.**

Параметры ребра равносносторонней шестигранной призмы при видах напряженного состояния, соответствующих значениям $\mu_\sigma = -1$ и $\mu_\sigma = 1$ отличаются только значениями максимального касательного напряжения.

При виде напряженного состояния $\mu_\sigma = -1$ правильная шестигранная призма вписывается в цилиндр радиусом $\sigma_p^* = \sigma_p \sqrt{2/3}$, а при значении $\mu_\sigma = 1$ правильная шестигранная призма вписывается в цилиндр радиусом $\sigma_c^* = \sigma_c \sqrt{2/3}$.

Если пределы сопротивления сплошной среды при одноосном растяжении и сжатии одинаковы $\sigma_c = \sigma_p$, то радиус цилиндра будет $\sigma_p^* = \sigma_p \sqrt{2/3}$, т. е. ребра полной пластичности при крайних значениях параметра Лодэ вписываются в цилиндр, равно наклоненный к осям главных напряжений.

Именно это обстоятельство привело к заблуждению, которое более сотни лет постулировалось в работах посвященных полной пластичности – ребро полной пластичности ошибочно связывалось с условием пластичности Треска.

На самом деле ребро полной пластичности задается двумя уравнениями. Первым уравнением задает сингулярность девиаторных функций на полуплоскости кратности промежуточного главного напряжения при $\mu_\sigma = -1$

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = \Sigma_1 - \Sigma_3; \quad (1.16)$$

при $\mu_\sigma = 1$

$$\Sigma_1 - \Sigma_3 = \Sigma_2 - \Sigma_3 \quad (1.17)$$

Уравнения ребра сингулярности (1.16) и (1.17) не зависят от механических свойств сплошной среды и ее симметрии, а являются топологическим свойством поля напряжений при условии кратности промежуточного главного напряжения.

Второе уравнение задает положение ребра пластичности на полуплоскости $\mu_\sigma = -1$ значением максимального касательного напряжения $T_1 = 0,5\sigma_p$, а на полуплоскости $\mu_\sigma = 1$ значением максимального касательного напряжения $T_3 = 0,5\sigma_c$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Койтер, В. Т. Общие теоремы в теории упругопластических сред : сб. научн. тр. / В. Т. Койтер // Успехи механики твердого тела : Т. 1 / под ред. И. Снеддона и Р. Хилла. – М. : Иностранная литература, 1961. – С. 79–85.

[2] Прагер, В. Проблемы теории пластичности / В. Прагер. – М. : Физматлит, 1958. – 36 с.

[3] Reuss, A. Vereinfachte Berechnung der plastischen Formänderungsgeschwindigkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfließbedingung / A. Reuss // ZAMM. – 1933. – Bd. 13. – 365 р.

Кузнецов Евгений Евгеньевич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: SmitheE71@yandex.ru

Матченко Илья Николаевич,

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ekc_05@mail.ru

Матченко Николай Михайлович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики пластического формоизменения, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc_05@mail.ru

Y. Y. Kuznetsov, I. N. Matchenko, N. M. Matchenko

**TO A QUESTION ON THE EDGE OF FULL PLASTICITY PERFECTLY
CONNECTED ISOTROPIC MEDIUM**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Tula State University, Tula

Abstract. It is shown, that the edge of full plasticity is formed by an edge singular deviator functions on полуплоскостях frequency rates of an intermediate main stress and criteria of a limiting condition at extreme values of parameter Lode.

Keywords: edge of full plasticity, the law of plastic current, an edge singular, criterion of a limiting status.

REFERENCES

[1] *Koiter, V. T.* General theorems in the theory of elastic-plastic media: Sat. Scien. tr. / V. T. Koiter // The success of solid mechanics : Vol. 1 / ed. I. Sneddon and R. Hill. – M. : Foreign Literature, 1961. – P. 79–85. (in Russian)

[2] *Prager, V.* Problems of the theory of plasticity / V. Prager. – M. : Fizmatlit, 1958. – 36 p. (in Russian)

[3] *Reuss, A.* Vereinfachte Berechnung der plastischen Formänderungsgeschwindigkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfließbedingung / A. Reuss // ZAMM. – 1933. – Bd. 13. – 365 p. (in Russian)

Kuznetsov, Yevgeniy Evgenyevich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Building, Building Materials and Designs, Tula State University, Tula

Matchenko, Ilya Nikolaevich

Dr. Sci. Phys. & Math., The senior scientific employee, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Matchenko, Nikolay Mikhaylovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Mechanics Plastic Forming, Tula State University, Tula

Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко

О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ИДЕАЛЬНО СВЯЗНЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Тульский государственный университет, г. Тула

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары

Аннотация. Показано, что предельным состояниям упругопластического деформирования соответствуют крайние и среднее значения параметра Лодэ как в пространстве напряжений, так и в пространстве упругопластических деформаций.

Ключевые слова: тензор напряжений, тензор упруго пластических деформаций, предельные состояния.

УДК: 531.01

1. Сплошную среду отнесем к декартовой системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$). Напряженное состояние сплошной среды характеризуется симметричным тензором σ_{ij} или триэдром главных напряжений σ_i и его направлением.

Введем векторное пространство главных напряжений $\vec{\sigma}_i$. Если в трехмерном векторном пространстве главных напряжений через ось гидростатического напряжения σ_1 и направления осей главных напряжений $\vec{\sigma}_i$ провести три плоскости, то векторное пространство разделится на шесть сегментов, а девиаторная плоскость на шесть секторов (рис. 1.1).

Положительное направление секторов направлено от оси σ_1 в направлении против часовой стрелки.

Наряду с неупорядоченными главными напряжениями σ_i введем ранжированные главные напряжения [4], [5], [6], [7], [8], [9]

$$\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3. \quad (1.1)$$

Связь между неупорядоченными главными напряжениями σ_i и ранжированными главными напряжениями Σ_i в каждом из секторов устанавливается в соответствии с рис. 1.1.

Введем линейные инварианты главных ранжированных напряжений [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]

$$\Sigma_I = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3), \quad \Sigma_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Sigma_1 - \Sigma_3), \quad \Sigma_{III} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3). \quad (1.2)$$

Инвариантам $\Sigma_I, \Sigma_{II}, \Sigma_{III}$ соответствуют векторы $\vec{\Sigma}_I, \vec{\Sigma}_{II}, \vec{\Sigma}_{III}$, причем

$$\vec{\Sigma} = \vec{\Sigma}_I + \vec{\Sigma}_{II} + \vec{\Sigma}_{III}. \quad (1.3)$$

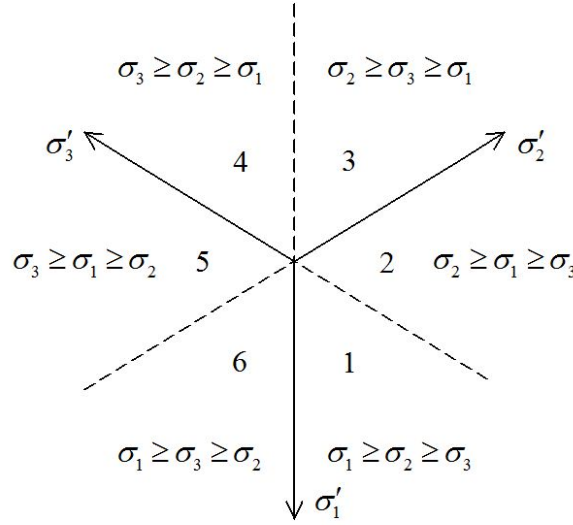


Рис. 1.1. Деление девиаторной плоскости на секторы

Векторы $\vec{\Sigma}_I$, $\vec{\Sigma}_{II}$, $\vec{\Sigma}_{III}$ имеют простой геометрический смысл. Вектор $\vec{\Sigma}_I$ является проекцией вектора напряжения $\vec{\Sigma}$ на гидростатическую ось. Вектор $\vec{\Sigma}_{II}$ является проекцией вектора напряжения $\vec{\Sigma}$ на линию сдвига. Линия сдвига является биссектрисой раствора угла каждого из секторов.

Вектор $\vec{\Sigma}_{III}$ также лежит в девиаторной плоскости и является проекцией вектора $\vec{\Sigma}$ на направление, перпендикулярное вектору $\vec{\Sigma}_{II}$. Положительное направление вектора $\vec{\Sigma}_{III}$ определяется в нечетных секторах поворотом вектора $\vec{\Sigma}_{II}$ против часовой стрелки, а в четных секторах поворотом по часовой стрелке. Сумма векторов $\vec{\Sigma}_{II}$ и $\vec{\Sigma}_{III}$ является вектором девиаторных напряжений

$$\vec{\Sigma}_d = \vec{\Sigma}_{II} + \vec{\Sigma}_{III}. \quad (1.4)$$

Из соотношений векторного базиса $\vec{\Sigma}_I$, $\vec{\Sigma}_{II}$, $\vec{\Sigma}_{III}$ как частные случаи вытекают векторные базисы А. А. Ильюшина [2] и В. В. Новожилова [12].

Направление вектора $\vec{\Sigma}_d$ в каждом из секторов девиаторной плоскости определяется углом вида напряженного состояния ω_σ , причем

$$\operatorname{tg} \omega_\sigma = \frac{\Sigma_{III}}{\Sigma_{II}} = \frac{2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3}{\sqrt{3}(\Sigma_1 - \Sigma_3)} = m_\sigma. \quad (1.5)$$

Угол ω_σ изменяется в диапазоне $-\pi/6 \leq \omega_\sigma \leq \pi/6$ и отсчитывается в каждом секторе от линии сдвига. Положительное направление отсчета угла ω_σ совпадает в нечетных секторах с поворотом по часовой стрелке, а в четных секторах – против часовой стрелки. Угол ω_σ называется углом вида напряженного состояния.

Параметр m_σ изменяется в диапазоне $-1/\sqrt{3} \leq m_\sigma \leq 1/\sqrt{3}$. При реализации одноосного растяжения $\omega_\sigma = -\pi/6$, $m_\sigma = -1/\sqrt{3}$, при чистом сдвиге $\omega_\sigma = 0$, $m_\sigma = 0$, при одноосном сжатии $\omega_\sigma = \pi/6$, $m_\sigma = 1/\sqrt{3}$.

Несложно заметить, что параметр m_σ связан с параметром Лоде [10] соотношением

$$\mu_\sigma = m_\sigma \sqrt{3}. \quad (1.6)$$

Обобщенное выражение для параметра Лоде записывается в виде

$$\mu_\sigma = \frac{2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3}{\Sigma_1 - \Sigma_3}. \quad (1.7)$$

Параметр Лоде изменяется в диапазоне $-1 \leq \mu_\sigma \leq 1$. При реализации одноосном растяжения $\mu_\sigma = -1$, при чистом сдвиге $\mu_\sigma = 0$, при одноосном сжатии $\mu_\sigma = 1$. Отсюда следует, что параметр Лоде является нормированным значением угла вида напряженного состояния m_σ .

Заметим, что соотношения для векторного базиса, предложенные А. А. Ильюшиным [2] совпадают с соотношениями (1.2) в четных секторах, а в нечетных секторах они противоречат обобщенному правилу знаков Лоде (1.8). Соотношения для векторного базиса, предложенные В. В. Новожиловым [12] совпадают с зависимостями (1.2) в нечетных секторах, а в четных секторах они противоречат обобщенному правилу Лоде (1.7).

Для модуля вектора интенсивности девиаторных напряжений справедливы равенства

$$\Sigma_d = \sqrt{\Sigma_{II}^2 + \Sigma_{III}^2} = \Sigma_{II} \sqrt{1 + \frac{1}{3}\mu_\sigma^2} = \Sigma_{III} \sqrt{1 + 3\mu_\sigma^{-2}}. \quad (1.9)$$

Легко проследить связь между линейными инвариантами $\Sigma_I, \Sigma_{II}, \Sigma_{III}$ с гидростатическим напряжением $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ и максимальным касательным напряжением T :

$$\Sigma_I = \sqrt{3}\sigma, \quad \Sigma_{II} = \sqrt{2}T, \quad \Sigma_{III} = 2T/\sqrt{3}\mu_\sigma, \quad (1.10)$$

где $T = 0.5(\Sigma_1 - \Sigma_3)$.

Плоскости, разделяющие векторное пространство главных напряжений называются плоскостями кратности, поскольку на этих плоскостях промежуточное главное напряжение является кратным. Ось гидростатического давления делит плоскости кратности на полуплоскости кратности. Уравнения полуплоскостей кратности имеют вид $\mu_\sigma = \mp 1$. След от пересечения полуплоскостей кратности $\mu_\sigma = -1$ с девиаторной плоскостью на рис. 1 показан сплошной линией, а от полуплоскости $\mu_\sigma = 1$ – пунктирной линией. На полуплоскостях кратности напряженное состояние соответствует **пространственному сдвигу**, поскольку два экстремальных касательных напряжения равны по модулю, а третье равно нулю. На полуплоскостях кратности $\mu_\sigma = -1$ справедливо равенство $\Sigma_2 = \Sigma_3$ и характерным напряжением является Σ_1 , а на полуплоскостях кратности $\mu_\sigma = 1$ – $\Sigma_2 = \Sigma_1$ характерным напряжением является Σ_3 .

Плоскости, проходящие через ось гидростатического давления и линии сдвига, называются **плоскостями плоского чистого сдвига**. На этих плоскостях одно из экстремальных напряжений $T_{13} = 0, 5(\Sigma_1 - \Sigma_3)$ является максимальным, а два других экстремальных напряжения по модулю равны половине максимального касательного напряжения $T_{12} = T_{23} = 0, 5|T_{13}|$, где $T_{12} = 0, 5(\Sigma_1 - \Sigma_2)$, $T_{23} = 0, 5(\Sigma_2 - \Sigma_3)$. Плоскости чистого сдвига задаются уравнением $\mu_\sigma = 0$.

Упругопластические деформации характеризуются тензором e_{ij} или триэдром главных скоростей деформаций e_i и его направлением. По аналогии с тензором напряжений вводятся ранжированные главные деформации $E_1 \geq E_2 \geq E_3$ и их линейные инварианты

$$E_I = \frac{1}{\sqrt{3}}(E_1 + E_2 + E_3), \quad E_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 - E_3), \quad E_{III} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2E_2 - E_1 - E_3). \quad (1.11)$$

Параметр Лоде тензора упруго пластических деформаций вычисляется по формуле

$$\mu_e = \frac{2E_2 - E_1 - E_3}{E_1 - E_3}. \quad (1.12)$$

2. Исторически сложилось так, что в теории малых упругопластических деформаций развивалось два направления: теория пластичности Генки-Ильюшина [1] и теория полной пластичности Кармана-Хаара [11]. На сегодняшний день эти два направления трактуются как альтернативные [13]. Покажем, что формулировка гибридного двух константного условия

пластичности, позволяет получить соотношения, из которых эти концепции следуют как частными случаями.

Рассмотрим класс материалов, объемное деформирование которых является упругим. Эта гипотеза используется как в концепции Генки-Ильюшина, так и Кармана-Хаара. Концепции Генки-Ильюшина и Кармана-Хаара отличаются условиями перехода материала из упругого состояния в пластическое состояние. В концепции Генки-Ильюшина предполагается, что предел упругого деформирования определяется условием пластичности Мизеса

$$\Sigma_d^2 = \Sigma_{II}^2 + \Sigma_{III}^2 = (1 + m_\sigma^2)\Sigma_{II}^2 = R^2, \quad (2.1)$$

где R – характеристика предела упругого деформирования. В условии пластичности Мизеса предполагается, что пластическое состояние наступает в случае, если модуль девиаторных напряжений достигает предельного значения $\Sigma_d = R$. Из условия пластичности (2.1) следует, что пределы упругого деформирования при одноосном растяжении σ_p и чистом сдвиге τ_s связаны зависимостью $\sigma_p = \sqrt{3}\tau_s$.

В концепции Кармана-Хаара предел упругого деформирования определяется условием пластичности Треска

$$T = \Sigma_{II}/\sqrt{2} = k. \quad (2.2)$$

где T – максимальное касательное напряжение, k – характеристика предела упругого деформирования. Условие пластичности Треска постулирует, что пластическое состояние наступает при достижении максимальным касательным напряжением предельного значения $T = (\Sigma_1 - \Sigma_3)/2 = \Sigma_{II}/\sqrt{2} = k$. Из условия пластичности (3.2) следует, что пределы упругого деформирования при одноосном растяжении σ_p и чистом сдвиге τ_s связаны соотношением $\sigma_p = 2\tau_s$.

Считая, что каждый из критериев Мизеса и Треска отражают свойства реальных материалов, сформулируем двух константное условие пластичности, обобщающее эти критерии. В качестве условия пластичности примем квадратичную функцию линейных инвариантов ранжированных напряжений [5]

$$(\Sigma_{II}^2 + a\Sigma_{III}^2) = b^2, \quad (2.3)$$

где a и b – характеристики пластических свойств материала.

Двухконстантное условие пластичности (2.3) объединяет концепции Генки-Ильюшина и Кармана-Хаара. Если пластические свойства материала таковы, что выполняется равенство $a = 1$, то материал подчиняется условию пластичности Мизеса, а если $a = 0$, то материал подчиняется условию пластичности Треска.

Значения характеристик предельного состояния a и b можно найти из двух базовых экспериментов на одноосное растяжение и чистый сдвиг. В эксперименте на чистый сдвиг имеем $\Sigma_1 = -\Sigma_3 = \tau_s$, $\Sigma_2 = 0$ и из (3.3) следует $b = \sqrt{2}\tau_s$. В эксперименте на одноосное растяжение $\Sigma_1 = \sigma_p$, $\Sigma_2 = \Sigma_3 = 0$ и из (3.3) следует $a = 3(4\tau_s^2/\sigma_p^2 - 1)$. Двухконстантное условие пластичности (2.3) применимо к нормально изотропным материалам, т. е. таким материалам у которых пределы пластическому сопротивлению при одноосном растяжении и сжатии одинаковы. Из постулата Друккера следует диапазон изменения константы $0 \leq a \leq 7/3$ или диапазон возможного изменения предельного сопротивления чистому сдвигу $\sigma_p/2 \leq \tau_s \leq 2\sigma_p/3$. Если $a = 0$, то материал подчиняется условию пластичности Треска. Если же $a = 1$, то справедливо условие пластичности Мизеса.

3. Работа деформирования изотропного тела определяется соотношением

$$\begin{aligned} W &= \vec{\Sigma}_1 \vec{E}_1 + \vec{\Sigma}_2 \vec{E}_2 + \vec{\Sigma}_3 \vec{E}_3 = \Sigma_1 E_1 + \Sigma_2 E_2 + \Sigma_3 E_3 = \vec{\Sigma}_I \vec{E}_I + \vec{\Sigma}_{II} \vec{E}_{II} + \vec{\Sigma}_{III} \vec{E}_{III} = \\ &= \Sigma_I E_I + \Sigma_{II} E_{II} + \Sigma_{III} E_{III} \end{aligned} \quad (3.1)$$

В соответствии с законом Гука потенциал упругих деформаций имеет вид

$$U_y = U_{y_0} + U_{yф}, \quad 2U_{y_0} = \Sigma_I^2/3K, \quad U_{yф} = (\Sigma_{II}^2 + \Sigma_{III}^2)/G, \quad (3.2)$$

где U_{y_0} – потенциал упругого объемного деформирования, $U_{yф}$ – потенциал упругого формоизменения, K – модуль объемной деформации, G – модуль сдвига.

Исследуя упруго пластические деформации, введем предположения, что при упруго пластическом деформировании объемное деформирование описывается законом Гука, в упругой области формоизменение так же описывается законом Гука, а деформации упругопластического формоизменения определяются потенциалом

$$U_{урф} = U_{yф} + U_{рф}, \quad U_{рф} = F(f)/2, \quad f = \Sigma_{II}^2 + a\Sigma_{III}^2. \quad (3.3)$$

Тогда, за пределом упругого деформирования соотношения между линейными инвариантами ранжированных напряжений и деформаций записываются в виде

$$E_I = \Sigma_I/3K, \quad E_{II} = 2(1 + \chi)\Sigma_{II}/G, \quad E_{III} = 2(1 + a\chi)\Sigma_{III}/G, \quad (3.4)$$

где $\chi = G/G_p^*$ – относительная мера максимального пластического сдвига, $G_p^* = 2/U_p^*$, $U_p^* = \partial U_p / \partial f$. С ростом пластических деформаций растет параметр U_p^* и, следовательно, растет параметр χ .

Из (3.4) видно, что при упругопластическом деформировании обобщенные жесткости в направлении векторов $\vec{\Sigma}_{II}$ и $\vec{\Sigma}_{III}$ в общем случае различны.

Если же свойства материала таковы, что $a = 1$, т.е. материал подчиняется условию пластичности Мизеса, то обобщенные жесткости в направлении векторов $\vec{\Sigma}_{II}$ и $\vec{\Sigma}_{III}$ одинаковы.

Если же материал подчиняется условию пластичности Треска, т.е. $a = 0$, то в направлении \vec{E}_{III} материал деформируется упруго.

4. Из (3.4) следуют соотношения между главными ранжированными деформациями и напряжениями

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sigma}{3K} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3) + \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (\Sigma_1 - \Sigma_3) \\ E_2 &= \frac{\sigma}{3K} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3) \\ E_3 &= \frac{\sigma}{3K} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_2) - \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (\Sigma_1 - \Sigma_3) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Если предположить, что материал подчиняется условию пластичности Треска, то $a = 0$ и соотношения (4.1) принимают вид

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sigma}{3K} + \frac{2}{3G} (2\Sigma_1 - \Sigma_2 - \Sigma_3) + \frac{1}{G_p} (\Sigma_1 - \Sigma_3), \\ E_2 &= \frac{\sigma}{3K} + \frac{2}{3G} (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3), \\ E_3 &= \frac{\sigma}{3K} + \frac{2}{3G} (2\Sigma_3 - \Sigma_1 - \Sigma_2) - \frac{1}{G_p} (\Sigma_1 - \Sigma_3). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Соотношения (4.2) совпадают с соотношениями Е. И. Шемякина [13].

Из соотношений (4.2) следует, что в материалах, с функцией нагружения в виде соответствующему условию пластичности Треска, в направлении промежуточного главного напряжения Σ_2 деформации будут упругими [11].

Вычислим главные сдвиги

$$\Gamma_{(12)} = E_1 - E_2 = \frac{2}{G} (\Sigma_1 - \Sigma_2) + \frac{1}{G_p} (\Sigma_1 - \Sigma_3),$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{(23)} &= E_2 - E_3 = \frac{2}{G}(\Sigma_2 - \Sigma_3) + \frac{1}{G_p}(\Sigma_1 - \Sigma_3), \\ \Gamma_{(13)} &= E_1 - E_3 = \frac{2}{G}(\Sigma_1 - \Sigma_3) + \frac{2}{G_p}(\Sigma_1 - \Sigma_3).\end{aligned}\quad (4.3)$$

Из (2.18) следует, что деформации пластического сдвига

$$\begin{aligned}\Gamma_{(12)p} &= \frac{1}{G_p}(\Sigma_1 - \Sigma_3) = \frac{2}{G_p}T_{\max}, \\ \Gamma_{(23)p} &= \frac{1}{G_p}(\Sigma_1 - \Sigma_3) = \frac{2}{G_p}T_{\max}, \\ \Gamma_{(13)p} &= \frac{2}{G_p}(\Sigma_1 - \Sigma_3) = \frac{4}{G_p}T_{\max} = \Gamma_{\max}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Следовательно, при неполной пластичности пластический сдвиг на площадках экстремальных касательных напряжений формируется за счет максимального касательного напряжения T_{\max} . Максимальный пластический сдвиг развивается на площадке (13). На площадках (12) и (23) пластический сдвиг вдвое меньше.

Эти выводы противоречат утверждению В. В. Зубчанинова о том, что в концепции Кармана-Хаара предполагается, что пластический сдвиг при неполной пластичности происходит только на одной площадке [3].

Если же $a = 1$, то материал имеет функцию нагружения, соответствующую условию пластичности Мизеса и соотношения (4.1) записываются в виде

$$\begin{aligned}E_1 &= \frac{\sigma}{K} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (2\Sigma_1 - \Sigma_2 - \Sigma_3), \\ E_2 &= \frac{\sigma}{K} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3), \\ E_3 &= \frac{\sigma}{K} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (2\Sigma_3 - \Sigma_1 - \Sigma_2).\end{aligned}\quad (4.5)$$

Соотношения (4.5) совпадают с соотношениями Генки-Ильюшина [1].

Вычислим пластические сдвиги на площадках экстремальных касательных напряжений

$$\begin{aligned}\Gamma_{(12)p} &= \frac{2}{G_p}(\Sigma_1 - \Sigma_2) = \frac{4}{G_p}T_{(12)}, \\ \Gamma_{(23)p} &= \frac{2}{G_p}(\Sigma_2 - \Sigma_3) = \frac{4}{G_p}T_{(23)}, \\ \Gamma_{(13)p} &= \frac{2}{G_p}(\Sigma_1 - \Sigma_3) = \frac{4}{G_p}T_{(13)}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Таким образом, сдвиги на площадках экстремальных касательных напряжений являются квазилинейными функциями соответствующих экстремальных напряжений. Пластическая податливость $1/G_p$ является интегральной характеристикой воздействия всех экстремальных касательных напряжений.

5. Определяющие соотношения (3.4) и (4.1)–(4.3) справедливы для любого из сегментов трехмерного векторного пространства главных напряжений. Внутри каждого из сегментов, т. е. в диапазоне изменения параметра Лоде $-1 < \mu_\sigma < 1$, девиаторные функции $U_{yф}$ и $U_{pф}$ являются регулярными.

На полуплоскостях $\mu_\sigma = -1$ на напряженное состояние накладывается ограничение в виде условия кратности промежуточного главного напряжения $\Sigma_2 - \Sigma_3 = 0$.

Запишем функционал

$$A_1 = E_i \Sigma_i - U_o - U_{yф} - U_{pф} - \lambda(\Sigma_2 - \Sigma_3), \quad (5.1)$$

где λ – множитель Лагранжа.

Отсюда следуют конституционные соотношения справедливые для полуплоскостей кратности $\mu_\sigma = -1$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sigma}{3K} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3) + \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (\Sigma_1 - \Sigma_3), \\ E_2 &= \frac{\sigma}{3K} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3) + \lambda, \\ E_3 &= \frac{\sigma}{3K} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_2) - \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (\Sigma_1 - \Sigma_3) - \lambda. \end{aligned} \quad (5.2)$$

На полуплоскостях кратности $\mu_\sigma = 1$ на главные ранжированные напряжения накладыва-ется ограничение $\Sigma_1 - \Sigma_2 = 0$.

Используя функционал аналогичный (5.2), запишем

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sigma}{3K} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3) + \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (\Sigma_1 - \Sigma_3) + \mu, \\ E_2 &= \frac{\sigma}{3K} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3) - \mu, \\ E_3 &= \frac{\sigma}{3K} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{a}{G_p} \right) (2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_2) - \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \right) (\Sigma_1 - \Sigma_3), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где μ – множитель Лагранжа.

Множители Лагранжа λ и μ находятся при решении краевой задачи.

6. Используя два последних соотношения из (3.4), получим зависимости между параметрами вида напряженного и деформированного состояния и обобщенной мерой пластических деформаций

$$\mu_e = \frac{1 + a\chi}{1 + \chi} \mu_\sigma. \quad (6.1)$$

Отсюда следует, что поскольку в концепции Генки-Ильюшина параметр $a = 1$, то обобщенные модули жесткости пластического деформирования в направлении \vec{E}_{II} и \vec{E}_{III} одинаковы и $\mu_e = \mu_\sigma$. В концепции Хаара-Кармана параметр $a = 0$ и модули жесткости деформирования различны, причем, в направлении вектора $\vec{\Sigma}_{III}$ деформация будет упругой, а параметры вида напряженного и деформированного состояния связаны соотношением $\mu_e = \mu_\sigma / (1 + \chi)$.

Рассмотрим процесс простого деформирования в пространстве деформаций. В этом случае направление осей главных деформаций не изменяются. Кроме того, параметр Лоде деформированного состояния в процессе нагружения так же остается постоянным $\mu_e = \mu_e^* = const$.

В силу изотропии материала направление осей главных напряжений в процессе деформирования так же остается неизменным, а параметры вида напряженного и деформированного материала будут связаны соотношением

$$\mu_\sigma = \frac{1 + \chi}{1 + a\chi} \mu_e^*. \quad (6.2)$$

Из (6.2) следует, что в случае, если материал подчиняется условию пластичности Мизеса, то $a = 1$, и $\mu_\sigma = \mu_e^* = const$, т.е. процессу простого деформирования в пространстве деформаций, как отклик, соответствует процесс простого нагружения в пространстве напряжений.

Если свойства материала таковы, что характеристика пластических свойств $0 \leq a < 1$, то в процессе пластического деформирования числитель в соотношении (6.2) растет быстрее, чем знаменатель, и в зависимости от знака параметра μ_e^* параметр вида напряженного состояния при развитых пластических деформациях стремится к своим крайним значениям $\mu_\sigma = \mp 1$.

Иная ситуация складывается, если характеристика пластических свойств материала $a > 1$. В этом случае знаменатель соотношения (6.2) растет быстрее, чем числитель, и параметр вида напряженного μ_σ состояния при развитых пластических деформациях стремится к нулю, т. е. $\mu_\sigma = 0$.

Следовательно, простое нагружение в пространстве деформаций для материалов, пластическая характеристика которых $a \neq 1$, сопровождается дрейфом параметра Лоде μ_σ к своим крайним значениям или нулю.

Отсюда так же следует, что предельными состояниями изотропной идеально связной среды являются три состояния: **плоский чистый сдвиг в пространстве напряжений**, при котором напряженное состояние характеризуется параметром $\mu_\sigma = 0$ и **пространственный сдвиг в пространстве напряжений**, при котором напряженное состояние характеризуется крайними значениями параметра Лоде $\mu_\sigma = \pm 1$.

Таким образом, **предельным состояниям при упругопластическом деформировании соответствуют плоскости кратности или плоскости плоского чистого сдвига**.

Теперь рассмотрим поведение материала в случае, если процесс упругопластического деформирования будет задан процессом простого нагружения в пространстве напряжений. В этом случае в силу изотропии материала направление осей главных напряжений в процессе деформирования и параметр Лоде $\mu_\sigma = \mu_\sigma^* = const$ остается неизменным, а параметры вида напряженного и деформированного материала будут связаны соотношением

$$\mu_e = \frac{1 + a\chi}{1 + \chi} \mu_\sigma^*. \quad (6.3)$$

Из (6.3) следует, что в случае, если материал подчиняется условию пластичности Мизеса, то $a = 1$, и $\mu_e = \mu_\sigma^* = const$, и простое нагружение в пространстве напряжений, как отклик, вызывает простое нагружение в пространстве деформаций.

Если свойства материала таковы, что характеристика пластических свойств $0 \leq a < 1$, то при пластическом деформировании числитель в соотношении (3.8) растет медленнее, чем знаменатель, и параметр вида деформированного состояния при развитых пластических деформациях стремится к нулю, т. е. $\mu_e \rightarrow 0$.

Если же свойства материала таковы, что характеристика пластических свойств $a > 1$, то в процессе пластического деформирования числитель в соотношении (3.9) растет быстрее, чем знаменатель, и в зависимости от знака параметра μ_σ^* параметр вида деформированного состояния при развитых пластических деформациях стремится к своим крайним значениям

$$\mu_e \rightarrow \mp 1.$$

Таким образом, в случае если характеристика пластических свойств материала $a \neq 1$, то в процессе пластического деформирования происходит дрейф параметра Лоде деформированного состояния и процесс упругопластического деформирования не будет простым.

При простом нагружении в пространстве деформаций направление дрейфа параметра Лоде μ_σ удобно определять по кривой пластичности, построенной в координатах $\Sigma_d \sim \mu_\sigma$.

Для этого из соотношений (1.8) и (2.3) получим

$$\Sigma_d = \sqrt{2}\tau_s \sqrt{\frac{1 + \mu_\sigma^2/3}{1 + a\mu_\sigma^2/3}}. \quad (6.4)$$

На кривой пластичности $\Sigma_d \sim \mu_\sigma$ дрейф параметра Лоде μ_σ направлен от значения $\Sigma_d|_{\mu_\sigma=\mu_e^*}$ в сторону возрастания Σ_d .

7. В общем случае при напряженных состояниях $\mu_\sigma = -1$, $\mu_\sigma = 0$, $\mu_\sigma = 1$ характеристики предельного состояния являются независимыми. Поэтому сформулируем трехконстантное условие пластичности [6].

$$\Sigma_{II}^2 + 2A\Sigma_{II}\Sigma_{III} + B\Sigma_{III}^2 = C, \quad (7.1)$$

где A , B и C – константы, зависящие от характеристик предельного состояния.

Константы A , B и C находятся экспериментально из опытов на одноосное растяжение, сжатие и чистый сдвиг.

Подставляя (1.2) в (7.1) получим

$$\frac{(\Sigma_1 - \Sigma_3)^2}{2} + A \frac{(\Sigma_1 - \Sigma_3)(2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3)}{\sqrt{3}} + B \frac{(2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3)^2}{6} = C. \quad (7.2)$$

В эксперименте на чистый сдвиг имеем $\Sigma_1 = -\Sigma_3 = \tau_s$, $\Sigma_2 = 0$. В этом случае из (7.2) следует

$$C = 2\tau_s^2. \quad (7.3)$$

При одноосном растяжении $\Sigma_1 = \sigma_p$, $\Sigma_2 = \Sigma_3 = 0$. Из (7.2) следует

$$1 - \frac{2}{\sqrt{3}}A + \frac{1}{3}B = 4 \frac{\tau_s^2}{\sigma_p^2}. \quad (7.4)$$

При одноосном сжатии $\Sigma_3 = -\sigma_c$, $\Sigma_2 = \Sigma_1 = 0$ и из (7.2) следует

$$1 + \frac{2}{\sqrt{3}}A + \frac{1}{3}B = 4 \frac{\tau_s^2}{\sigma_c^2}. \quad (7.5)$$

Решая совместно уравнения (7.4) и (7.5), получим

$$A = \sqrt{3}\tau_s^2 \left(\frac{1}{\sigma_c^2} - \frac{1}{\sigma_p^2} \right), \quad B = 3 \left[2\tau_s^2 \left(\frac{1}{\sigma_c^2} + \frac{1}{\sigma_p^2} \right) - 1 \right]. \quad (7.6)$$

Очевидно, что одноконстантными условиями пластичности, например, такими как условие пластичности Треска или условие пластичности Мизеса, описать три предельных состояния возможно только при очень жестких ограничениях, накладываемых на характеристики пластических свойств деформируемой среды.

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то $\sigma_p = \sigma_c$ и трехконстантное условие пластичности (7.1) переходит в двух константное условие пластичности (2.3).

Выбор направления дрейфа параметра Лоде μ_σ при простом нагружении в пространстве деформаций в случае трех константного условия пластичности удобно устанавливать с помощью графика $\Sigma_d \sim \mu_\sigma$. Так же как и при двух константном условии пластичности на кривой пластичности $\Sigma_d \sim \mu_\sigma$ дрейф параметра Лоде μ_σ направлен от значения $\Sigma_d|_{\mu_\sigma = \mu_\sigma^*}$ в сторону возрастания Σ_d .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. / А. А. Ильюшин. – М. : ОГИЗ, 1948. – 376 с.
- [2] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : Издательство АН СССР, 1963. – 272 с.
- [3] *Зубчанинов, В. Г.* К модели неполной пластичности материалов Е. И. Шемякина / В. Г. Зубчанинов // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сборник статей. К 75-летию Е. И. Шемякина. – М. : Физматлит, 2006. – С. 284–287.

[4] Кузнецов, Е. Е. Об изоморфизме упругопластических свойств / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию А. А. Ильюшина. – М. : Ленанд, 2006. – С. 166–171.

[5] Кузнецов, Е. Е. Формулировка условия предельного состояния изотропных сред в инвариантах собственных упругих состояний / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: сборник статей. К 75-летию Е. И. Шемякина. – М. : Физматлит, 2006. – С. 369–375.

[6] Кузнецов, Е. Е. Гибридное условие пластичности изотропных материалов / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2(8). – С. 265–274.

[7] Кузнецов, Е. Е. К построению теории малых упругопластических деформаций / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2(8). – С. 288–295.

[8] Кузнецов, Е. Е. О параметре Лоде / Е. Е. Кузнецов, Н. М. Матченко // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1(15). – С. 98–101.

[9] Кузнецов, Е. Е. О сингулярности девиаторных функций трехмерного тензора второго ранга / Е. Е. Кузнецов, Н. М. Матченко // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1(15). – С. 102–106.

[10] Лоде, В. Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов / В. Лоде // Теория пластичности : сб. ст. – М. : Иностранная литература, 1948. – С. 168–205

[11] Хаар, А. К теории напряженного состояния в пластических и сыпучих средах / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности : сб. переводов. – М. : Ил, 1948. – С. 41–56.

[12] Черных, К. Ф. Введение в анизотропную упругость / К. Ф. Черных. – М. : Наука, 1988. – 198 с.

[13] Шемякин, Е. И. Синтетическая теория прочности. Ч. 1 / Е. И. Шемякин // Физическая мезомеханика. – 1999. – Т. 2. – № 6. – С. 63–70.

Кузнецов Евгений Евгеньевич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: SmitheE71@yandex.ru

Матченко Илья Николаевич,

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: екс_05@mail.ru

Матченко Николай Михайлович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики пластического формоизменения, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: екс_05@mail.ru

Y. Y. Kuznetsov, I. N. Matchenko, N. M. Matchenko

**THE LIMIT STATE ELASTOPLASTIC DEFORMATION PERFECT
CONNECTED ISOTROPIC MEDIA**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Tula State University, Tula

Abstract. It is shown, that to limiting statuses it is elastic plastic deformation there correspond extreme and average option values Lode both in space of stress, and in space is elastic plastic deformations.

Keywords: tensor stress, tensor it is elastic plastic deformations, limiting statuses.

REFERENCES

- [1] *Ilyushin, A. A.* Plasticity / A. A. Ilyushin. – M. : OGIZ, 1948. – 376 p. (in Russian)
- [2] *Ilyushin, A. A.* Plasticity. Fundamentals of general mathematical theory / A. A. Ilyushin. – M. : Publisher USSR Academy of Sciences, 1963. – 272 p. (in Russian)
- [3] *Zubchaninov, V. G.* The model is incomplete plasticity and E. I. Shemyakin / V. G. Zubchaninov // Problems of mechanics of deformable solids and rocks: a collection articles. On the 75th anniversary of E. I. Shemyakin. – M. : Fizmatlit, 2006. – P. 284–287. (in Russian)
- [4] *Kuznetsov, E. E.* On the isomorphism elastoplastic properties / E. E. Kuznetsov, I. N. Matchenko, N. M. Matchenko // Elastic and inelastic. Materials International Scientific Symposium on the mechanics of deformable bodies, dedicated 95th anniversary of A. A. Ilyushin. – M. : Lenend, 2006. – P. 166–171. (in Russian)
- [5] *Kuznetsov, E. E.* The wording of the conditions of a limiting condition of isotropic media in invariants own elastic states / E. E. Kuznetsov, I. N. Matchenko, N. M. Matchenko // Problems of mechanics of deformable solids and rocks: a collection of articles. For the 75th anniversary E. I. Shemyakin. – M. : Fizmatlit, 2006. – P. 369–375. (in Russian)
- [6] *Kuznetsov, E. E.* Hybrid plasticity condition isotropic materials / E. E. Kuznetsov, I. N. Matchenko, N. M. Matchenko // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – № 2(8). – P. 265–274. (in Russian)
- [7] *Kuznetsov, E. E.* On the construction of the theory of small elastic-plastic deformations / E. E. Kuznetsov, I. N. Matchenko, N. M. Matchenko // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – № 2(8). – P. 288–295. (in Russian)
- [8] *Kuznetsov, E. E.* About parameter Lode / E. E. Kuznetsov, N. M. Matchenko // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 1(15). – P. 98–101. (in Russian)
- [9] *Kuznetsov, E. E.* Singular deviator functions of three-dimensional tensor of rank / E. E. Kuznetsov, N. M. Matchenko // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 1(15). – P. 102–106. (in Russian)
- [10] *Lode, V.* Effect of the main medium voltage to the strength of the metal / V. Lode // The theory of plasticity: Sat. Art. – M. : Foreign Literature, 1948. – P. 168–205 (in Russian)
- [11] *Haar, A.* On the theory of the state of stress in the plastic and granular media / A. Haar, T. Karman // The theory of plasticity: Sat. translation. – M. : Il., 1948. – P. 41–56. (in Russian)
- [12] *Chernyx, K. F.* Introduction to anisotropic elasticity / K. F. Chernyx. – M. : Nauka, 1988. – 198 p. (in Russian)
- [13] *Shemyakin, E. I.* Synthetic theory of strength. Part. 1 / E. I. Shemyakin // Physical mesomechanics. – 1999. – Vol. 2. – № 6. – P. 63–70. (in Russian)

Kuznetsov, Yevgeniy Evgenyevich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Building, Building Materials and Designs, Tula State University, Tula

Matchenko, Ilya Nikolaevich

Dr. Sci. Phys. & Math., The senior scientific employee, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Matchenko, Nikolay Mikhaylovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Mechanics Plastic Forming, Tula State University, Tula

Е. А. Листров, Т. Д. Семькина

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ УЧЕТА УПРУГОЙ СЖИМАЕМОСТИ

Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I,
г. Воронеж

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Аннотация. Рассматривается напряженное и деформированное состояние толстой пластины с круговым отверстием в условиях плоской деформации с учетом упругой сжимаемости.

Ключевые слова: условие пластичности Треска, метод возмущений, упругая сжимаемость.

УДК: 539.374

Рассмотрим напряженное и деформированное состояние толстой пластины с круговым отверстием в условиях плоской деформации. Решение этой задачи в случае несжимаемого материала получено в работах [1], [2]. В данном исследовании при решении учитывается упругая сжимаемость. Предполагается, коэффициент Пуассона μ можно представить в виде числового ряда

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mu_n; \quad \mu_0 = \frac{1}{2}; \quad \mu_n = \text{const}, \quad (1)$$

где δ — малый параметр, характеризующий упругую сжимаемость материала.

Такое представление коэффициента Пуассона и решение в виде рядов по степеням параметра δ предложены в [3].

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_{ij}^{(n)}; \quad e_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n e_{ij}^{(n)}; \quad \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \lambda_n. \quad (2)$$

В пластической области приращения полной деформации равны сумме приращений упругой и пластической деформации. Связь между компонентами напряжения и приращениями пластической деформации определяется ассоциативным законом течения. В качестве условия пластичности выбирается условие пластичности Треска

$$4(k^2 - I_2)(4k^2 - I_2)^2 + 27I_3^2 = 0, \quad (3)$$

где I_2, I_3 — второй и третий инварианты девиатора напряжений.

$$6I_2 = (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{r\theta}^2,$$

$$I_3 = (\sigma_r - \sigma)(\sigma_\theta - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - (\sigma_z - \sigma)\tau_{r\theta}^2.$$

В пластической области связь между напряжениями и полными приращениями деформаций имеет вид:

$$de_r = \frac{1}{E} [d\sigma_r - \mu(d\sigma_\theta + d\sigma_z)] + d\lambda \left\{ -4(2k^2 - I_2)(4k^2 - I_2)(2\sigma_r - \sigma_z - \sigma_\theta) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +18 [(\sigma_z - \sigma)(\sigma_\theta - \sigma) - \tau_{r\theta}^2] \left[(\sigma_\theta - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - \frac{1}{3}I_2 \right] (2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta) \Big\}, \\
de_\theta &= \frac{1}{E} [d\sigma_\theta - \mu(d\sigma_r + d\sigma_z)] + d\lambda \left\{ -4(2k^2 - I_2)(4k^2 - I_2)(2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z) + \right. \\
& +18 [(\sigma_r - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - \tau_{r\theta}^2] \left[(\sigma_r - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - \frac{1}{3}I_2 \right] (2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta) \Big\}, \quad (4) \\
de_z &= \frac{1}{E} [d\sigma_z - \mu(d\sigma_r + d\sigma_\theta)] + d\lambda(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta) \left\{ -4(2k^2 - I_2)(4k^2 - I_2) + \right. \\
& +18 [(\sigma_r - \sigma)(\sigma_\theta - \sigma) - \tau_{r\theta}^2] \left[(\sigma_r - \sigma)(\sigma_\theta - \sigma) - \tau_{r\theta}^2 + \frac{1}{3}I_2 \right] \Big\} = C, \\
de_{r\theta} &= \frac{1}{2G} d\tau_{r\theta} + d\lambda\tau_{r\theta} [-12(2k^2 - I_2)(4k^2 - I_2) - 54(\sigma_z - \sigma)I_3].
\end{aligned}$$

За нулевое решение примем напряженное и деформированное состояние толстой пластины с круговым отверстием радиуса a , растянутой на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями и нагруженной по контуру равномерным давлением q , определенным без учета упругой сжимаемости [1], [4].

Учитывая (2), разложим условие пластичности (3) по малому параметру:

$$\begin{aligned}
& 4(k^2 - I_2^{(0)}) (4k^2 - I_2^{(0)})^2 + 27(I_3^{(0)})^2 = 0, \\
& -12(4k^2 - I_1^{(0)}) (2k^2 - I_2^{(0)}) I_2^{(n)} + 12(3k^2 - I_2^{(0)}) \sum_{m=1}^{n-1} I_2^{(m)} I_2^{(n-m)} - \\
& -4 \sum_{m,l=1}^{m+l=n-2} I_2^{(m)} I_2^{(l)} I_2^{(n-m-l)} + 27 \sum_{m=0}^n I_3^{(m)} I_3^{(n-m)} = 0, \quad n \geq 1,
\end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
6I_2^{(0)} &= (\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)})^2 + (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)})^2 + (\sigma_z^{(0)} - \sigma_r^{(0)})^2 + 6(\tau_{r\theta}^{(0)})^2, \\
6I_2^{(n)} &= \sum_{m=0}^n \left[(\sigma_r^{(m)} - \sigma_\theta^{(m)}) (\sigma_r^{(n-m)} - \sigma_\theta^{(n-m)}) + (\sigma_r^{(m)} - \sigma_z^{(m)}) (\sigma_r^{(n-m)} - \sigma_z^{(n-m)}) + \right. \\
& \left. + (\sigma_\theta^{(m)} - \sigma_z^{(m)}) (\sigma_\theta^{(n-m)} - \sigma_z^{(n-m)}) + 6\tau_{r\theta}^{(m)}\tau_{r\theta}^{(n-m)} \right], \quad n \geq 1; \quad (6) \\
I_3^{(0)} &= (\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}) (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)}) (\sigma_z^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) + (\sigma_z^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}) (\tau_{r\theta}^{(0)})^2 \\
I_3^{(0)} &= \sum_{m,l=0}^{m+l=n} \left[(\sigma_r^{(m)} - \sigma_\theta^{(m)}) (\sigma_\theta^{(l)} - \sigma_z^{(l)}) (\sigma_z^{(n-m-l)} - \sigma_r^{(n-m-l)}) - \right. \\
& \left. - (\sigma_z^{(m)} - \sigma_\theta^{(m)}) \tau_{r\theta}^{(l)} \tau_{r\theta}^{(n-m-l)} \right], \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Учитывая нулевое решение, имеем

$$I_2^{(0)} = k^2, \quad I_3^{(0)} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0, \quad \sigma_z^{(0)} - \sigma^{(0)} = 0.$$

И для первого приближения получим

$$-36k^4 I_2^{(1)} = 0; \quad I_2^{(1)} = 0; \quad \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)} = 0. \quad (7)$$

Очевидно, формула (7) совпадает с подобным условием без учета упругой сжимаемости и аналогична [3], получим, что в пластической области

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_\theta^{(1)} = \tau_{r\theta}^{(1)} = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим второе приближение условия пластичности, учитывая (7), (8):

$$\begin{aligned} -36k^4 I_2^{(II)} + 27 \left(I_3^{(I)} \right)^2 &= 0; \quad I_3^{(I)} = -\frac{2}{3} k^2 \sigma_z^{(I)}; \\ 6I_2^{(II)} &= -6k \left(\sigma_r^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)} \right) + 2 \left(\sigma_z^{(I)} \right)^2; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\sigma_r^{(II)} - \sigma_\theta^{(II)} = 0. \quad (10)$$

Следовательно, в пластической области

$$\sigma_r^{(II)} = \sigma_\theta^{(II)} = \tau_{r\theta}^{(II)} = 0. \quad (11)$$

Выпишем условие пластичности для третьего приближения:

$$\begin{aligned} -36k^4 I_2^{(III)} + 54I_3^{(I)} I_3^{(II)} &= 0; \quad I_3^{(II)} = -\frac{2}{3} k^2 \sigma_z^{(II)}; \\ 6I_2^{(III)} &= -6k \left(\sigma_r^{(III)} - \sigma_\theta^{(III)} \right) + 4\sigma_z^{(I)} \sigma_z^{(II)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Получим

$$\sigma_r^{(III)} - \sigma_\theta^{(III)} = 0; \quad \sigma_r^{(III)} = \sigma_\theta^{(III)} = \tau_{r\theta}^{(III)} = 0. \quad (13)$$

Четвертое приближение при условиях (7)–(13) таково:

$$\begin{aligned} -36k^4 I_2^{(IV)} + 24k^2 \left(I_2^{(II)} \right)^2 + 27 \left[2I_3^{(I)} I_3^{(III)} + \left(I_3^{(II)} \right)^2 \right] &= 0; \\ 6I_2^{(IV)} &= 2 \left[-3k \left(\sigma_r^{(IV)} - \sigma_\theta^{(IV)} \right) + 2\sigma_z^{(I)} \sigma_z^{(III)} \right] + 2 \left(\sigma_z^{(II)} \right)^2; \\ I_3^{(III)} &= -\frac{2}{27} \left(\sigma_z^{(I)} \right)^3 - \frac{2}{3} k^2 \sigma_z^{(III)}; \\ \sigma_r^{(IV)} - \sigma_\theta^{(IV)} &= 0; \quad \sigma_r^{(IV)} = \sigma_\theta^{(IV)} = \tau_{r\theta}^{(IV)} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как всюду в пластической области

$$\sigma_r^{(n)} = \sigma_\theta^{(n)} = \tau_{r\theta}^{(n)} = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leq n \leq 4$$

и граничные условия на бесконечности не зависят от коэффициента Пуассона, получим, что компоненты напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ в упругой области и граница пластической зоны будут такими же, как и без учета упругой сжимаемости.

Определим σ_z в пластической области. Для этого воспользуемся условием $de_z = 0$, подставив в него (2), разложим по параметру

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \left[d\sigma_z^{(n)} - \frac{1}{2} \left(d\sigma_r^{(n)} + d\sigma_\theta^{(n)} \right) - \sum_{m=1}^n \mu_m \left(d\sigma_r^{(n-m)} + d\sigma_\theta^{(n-m)} \right) \right] + \\ + \sum_{m,l=0}^{m+l=n} d\lambda_m \left(2d\sigma_z^{(l)} - \sigma_\theta^{(l)} - \sigma_r^{(l)} \right) T^{(n-m-l)} = 0, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} T &= -4(2k^2 - I_2)(4k^2 - I_2) + \\ &+ 18 \left[(\sigma_r - \sigma)(\sigma_\theta - \sigma) - \tau_{r\theta}^2 \right] \left[(\sigma_r - \sigma)(\sigma_\theta - \sigma) - \tau_{r\theta}^2 + \frac{1}{3} I_2 \right]. \end{aligned}$$

При условиях (7)–(15) получим

$$\frac{d\sigma_z^{(n)}}{d\lambda_0} - \mu_n \frac{d \left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)} \right)}{d\lambda_0} = 0, \quad (16)$$

где λ_0 характеризует процесс нагружения тела при пластическом деформировании, $\lambda_0 = 0$ соответствует упругому состоянию тела в нулевом приближении. В упругом состоянии $\sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)$ и, следовательно, при учете (7)–(14)

$$\sigma_z^{(n)} \Big|_{\lambda_0=0} = \mu_n \left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)} \right) \Big|_{\lambda_0=0}. \quad (17)$$

Интегрируя (16) при условии (17), получим

$$\sigma_z^{(n)} = -2\mu_n \left(k - q + 2k \ln \frac{r}{a} \right). \quad (18)$$

Исследуем деформированное состояние. Вследствие учета упругой сжимаемости получим в пластической области

$$e_r^{(n)} + e_\theta^{(n)} = e_{r_e}^{(n)} + e_{\theta_e}^{(n)} + e_{z_e}^{(n)}, \quad (19)$$

где $e_{ij_e}^{(n)}$ — упругая часть деформации, определяемая законом Гука.

Условие $e_{r\theta}^{(n)} = 0$ остается прежним. Выражая деформации $e_{ij}^{(n)}$ через перемещения, а $e_{ij_e}^{(n)}$ — по линеаризованным формулам,

$$\begin{aligned} e_{r_e} &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)], \\ e_{\theta_e} &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_z)], \\ e_{z_e} &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Запишем для n -го приближения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(n)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial \theta} &= -\frac{2}{E} \sum_{m=0}^n \mu_n \left(\sigma_r^{(n-m)} + \sigma_\theta^{(n-m)} + \sigma_z^{(n-m)} \right), \\ \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial r} + \frac{u_\theta^{(n)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Правая часть первого из уравнений (21) есть функция от r , обозначим ее через R_n . Определим частное решение системы (21) в виде

$$u_r^{*(n)} = \frac{1}{r} \int \frac{R_n}{r} dr; \quad u_r^{(n)} = 0.$$

Для первого приближения

$$u_r^{*(I)} = \frac{6\mu_1}{E} \frac{\ln r}{r} \left(k - q + k \ln \frac{r}{a} - k \ln a \right). \quad (22)$$

Для второго приближения

$$u_r^{*(II)} = \frac{2(3\mu_2 + 2\mu_1^2)}{E} \frac{\ln r}{r} \left(k - q + k \ln \frac{r}{a} - k \ln a \right). \quad (23)$$

Для третьего приближения

$$u_r^{*(III)} = \frac{2(3\mu_3 + 4\mu_1\mu_2)}{E} \frac{\ln r}{r} \left(k - q + k \ln \frac{r}{a} - k \ln a \right). \quad (24)$$

Для четвертого приближения

$$u_r^{*(IV)} = \frac{2(3\mu_4 + \mu_2^2 + 2\mu_1\mu_3)}{E} \frac{\ln r}{r} \left(k - q + k \ln \frac{r}{a} - k \ln a \right). \quad (25)$$

После этого, следуя [3], можно записать общие выражения для компонент деформации:

$$e_r^{(n)} = \frac{du_r^{*(n)}}{dr} - \frac{a_{00}}{r^2} - \frac{a_{12}}{r} \cos \theta + \frac{1}{r} \sum_{m=2}^{\infty} m\beta [a_{m1} \sin(\beta \ln r) - a_{m2} \cos(\beta \ln r)] \cos(m\theta),$$

$$e_{\theta}^{(n)} = \frac{u_r^{*(n)}}{r} + \frac{a_{00}}{r^2} + \frac{a_{12}}{r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sum_{m=2}^{\infty} m\beta [a_{m1} \sin(\beta \ln r) - a_{m2} \cos(\beta \ln r)] \cos(m\theta),$$

$$e_{r\theta}^{(n)} = 0; \quad \beta = \sqrt{m^2 - 1}. \quad (26)$$

В упругой области после линеаризации уравнений, подобных (20), получим:

$$e_r^{(n)} = \frac{1}{E} \left[\sigma_r^{(n)} - \frac{1}{2} (\sigma_{\theta}^{(n)} + \sigma_z^{(n)}) - \sum_{m=1}^n \mu_m (\sigma_{\theta}^{(n-m)} + \sigma_z^{(n-m)}) \right],$$

$$e_{\theta}^{(n)} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{\theta}^{(n)} - \frac{1}{2} (\sigma_r^{(n)} + \sigma_z^{(n)}) - \sum_{m=1}^n \mu_m (\sigma_r^{(n-m)} + \sigma_z^{(n-m)}) \right], \quad (27)$$

$$e_{r\theta}^{(n)} = \frac{1}{2G} \tau_{r\theta}^{(n)} + \frac{1}{E} \sum_{m=1}^n \mu_m \tau_{r\theta}^{(n-m)}.$$

Деформированное состояние в упругой области определено, известны компоненты напряжения, постоянные в (26) определяются из условия сопряжения решений (27) и (26) на границе пластической зоны. Итак, полученные четыре приближения напряженного и деформированного состояния толстой пластины с круговым отверстием в условиях плоской деформации показывают, что при условии пластичности Треска учёт упругой сжимаемости оказывает влияние лишь на компоненту σ_z и деформированное состояние. Напряжения σ_r , σ_{θ} , $\tau_{r\theta}$ в упругой и пластической областях и граница пластической зоны остаются теми же, что и без учёта упругой сжимаемости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 794 с.
- [2] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 2. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.
- [3] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [4] Соколовский В. В. Теория пластичности. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.

Листров Евгений Адольфович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и теоретической механики, Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I, г. Воронеж

e-mail: ListrovEA@yandex.ru

Семькина Татьяна Дмитриевна,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: tdsem@mail.ru

E. A. Listrov, T. D. Semikina

**USE OF THE METHOD OF PERTURBATIONS FOR THE ACCOUNT
OF ELASTIC COMPRESSIBILITY**

Voronezh State Agricultural University named after Emperor Peter I, Voronezh

Voronezh State University, Voronezh

Abstract. The intense and strained condition of a thick plate with a circular orifice in conditions of a flat strain in view of elastic compressibility is observed{watched}.

Keywords: a condition of plasticity of the Crackling, a method of perturbations, elastic compressibility.

REFERENCES

- [1] Ishlinskii A. Yu., Ivlev D. D. The mathematical theory of plasticity. – M. : Fizmatlit, 2001. – 794 p. (in Russian)
- [2] Ivlev D. D. Mechanics plastic media. Vol. 2. – M. : Fizmatlit, 2002. – 448 c. (in Russian)
- [3] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. – M. : Nauka, 1978. – 208 p. (in Russian)
- [4] Sokolovsky V. V. The theory of plasticity. – M. : High school, 1969. – 608 p. (in Russian)

Listrov, Evgenie Adolfovich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Higher Mathematics and Theoretical Mechanics, Voronezh State Agricultural University named after Emperor Peter I, Voronezh

Semykina, Tatyana Dmitrievna,

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh

Е. А. Деревянных, Б. Г. Мионов

КРУЧЕНИЕ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары

Аннотация. В работе рассмотрено кручение кусочно-неоднородных идеальнопластических цилиндрических стержней. Определено напряженное состояние стержня, найдены линии разрыва напряжения, построено поле характеристик. Кручение изотропных цилиндрических и призматических стержней в случае, когда боковая поверхность стержней свободна от касательных нагрузок, а также в случае, когда боковая поверхность стержня находится под действием внешнего переменного давления, рассмотрено в [8], [10]. Кручение анизотропных цилиндрических и призматических стержней исследовано в [1], [8]. Кручение неоднородных призматических стержней в случае трансляционной анизотропии изучено в [2], [3], [4], [5], [6], [7].

Ключевые слова: кручение, напряжение, предел текучести, предельное состояние.

УДК: 539.374

Рассмотрим цилиндрический стержень, ориентированный в прямоугольной декартовой системе координат xuz . Ось z направим параллельно образующей стержня. Предположим, что стержень состоит из двух изотропных частей, разделенных ломаной линией AOB . Стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил с моментом M . Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок.

Положим

$$\begin{aligned}\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y).\end{aligned}\quad (1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ — нормальные и касательные напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям x, y, z .

Пусть напряженное состояние стержня в первой области характеризуется условием пластичности

$$\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 = k_1^2, \quad (2)$$

во второй области

$$\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 = k_2^2, \quad (3)$$

где $k_2 > k_1$ (рис. 1), и уравнением равновесия

Поступила 02.06.2015

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 14-01-31323 мол_а) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179)

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Уравнение контура поперечного сечения стержня (рис. 1) имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (5)$$

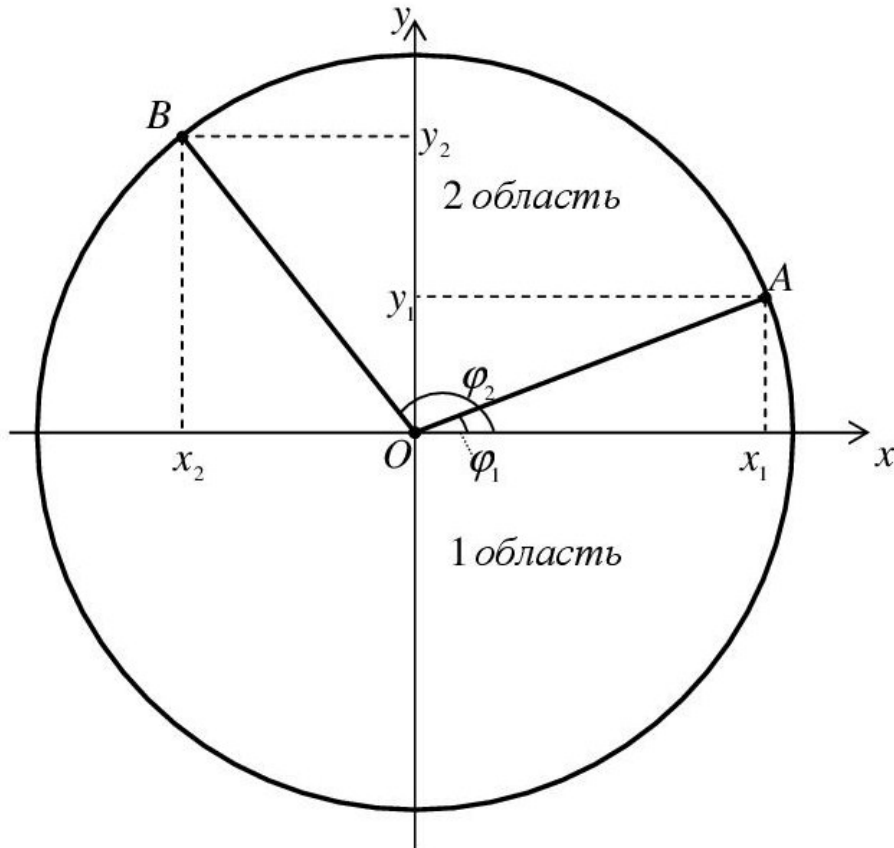


Рис. 1

Согласно [9] характеристики являются прямыми линиями, ортогональными вектору касательного напряжения $\bar{\tau}$, который направлен по касательной к контуру стержня и не меняется вдоль характеристики.

Пусть точка A имеет координаты (x_1, y_1) . Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{y_1}{x_1}, \quad (6)$$

где φ_1 — угол, образованный линией неоднородности OA с осью Ox .

Обозначим через φ_2 — угол, образованный линией неоднородности OB с осью Ox . Предположим, что $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$.

Вектор касательного напряжения $\bar{\tau}_{11}$ (рис. 2), действующий на OA со стороны первой области, направлен по касательной к контуру и имеет координаты

$$\bar{\tau}_{11} = (-k_1 \sin \varphi_1, k_1 \cos \varphi_1). \quad (7)$$

Обозначим через \bar{n}_1 — вектор нормали к контуру стержня в точке A , определяемый в виде

$$\bar{n}_1 = (n_1 \cos \varphi_1, n_1 \sin \varphi_1), \quad (8)$$

где

$$n_1 = |\bar{n}_1| = \sqrt{k_2^2 - k_1^2}. \quad (9)$$

В силу того, что линия неоднородности OA является линией разрыва напряжений, то со стороны второй области на отрезок OA действует вектор касательного напряжения $\bar{\tau}'_{12}$:

$$\bar{\tau}'_{12} = \bar{n}_1 + \bar{\tau}_{11} = (n_1 \cos \varphi_1 - k_1 \sin \varphi_1, n_1 \sin \varphi_1 + k_1 \cos \varphi_1). \quad (10)$$

Следовательно, из точки A выходит еще одна линия разрыва напряжений.

Пусть OM — характеристика, проходящая через произвольную точку $K(x, y)$ линии разрыва напряжений AC .

Вектор касательного напряжения, действующий вдоль характеристики OM , имеет вид

$$\bar{\tau}''_{12} = (-k_2 \sin \varphi, k_2 \cos \varphi), \quad (11)$$

где φ — угол, образованный характеристикой OM и с осью Ox .

Тогда направляющий вектор линии разрыва напряжений AC в точке K примет вид

$$\bar{\tau}' = \bar{\tau}''_{12} - \bar{\tau}'_{12} = (-k_2 \sin \varphi - n_1 \cos \varphi_1 + k_1 \sin \varphi_1, k_2 \cos \varphi - n_1 \sin \varphi_1 - k_1 \cos \varphi_1). \quad (12)$$

Из (12) получим дифференциальное уравнение для определения линии разрыва напряжений AC :

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + a_1 \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + b_1 \right) dy = 0, \quad (13)$$

где

$$\cos \varphi_1 = \frac{x_1}{R}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{y_1}{R}, \quad x_1^2 + y_1^2 = R^2, \quad (14)$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (15)$$

$$a_1 = -\frac{n_1 y_1 + k_1 x_1}{k_2 R}, \quad b_1 = \frac{n_1 x_1 - k_1 y_1}{k_2 R}, \quad a_1^2 + b_1^2 = 1. \quad (16)$$

Из (13) следует, что уравнение линии разрыва напряжений AC примет вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} + a_1(x - x_1) + b_1(y - y_1) = R. \quad (17)$$

Пусть

$$\sin \varphi_0 = -\frac{k_1}{k_2}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{n_1}{k_2}. \quad (18)$$

Перейдем к полярным координатам

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (19)$$

Согласно (18), (19) из (17) получим уравнение линии разрыва напряжений AC в полярной системе координат

$$\rho = \frac{\bar{R}}{1 + \sin(\theta + \chi)} = \frac{R(1 + \sin(\varphi_1 + \chi))}{1 + \sin(\theta + \chi)}. \quad (20)$$

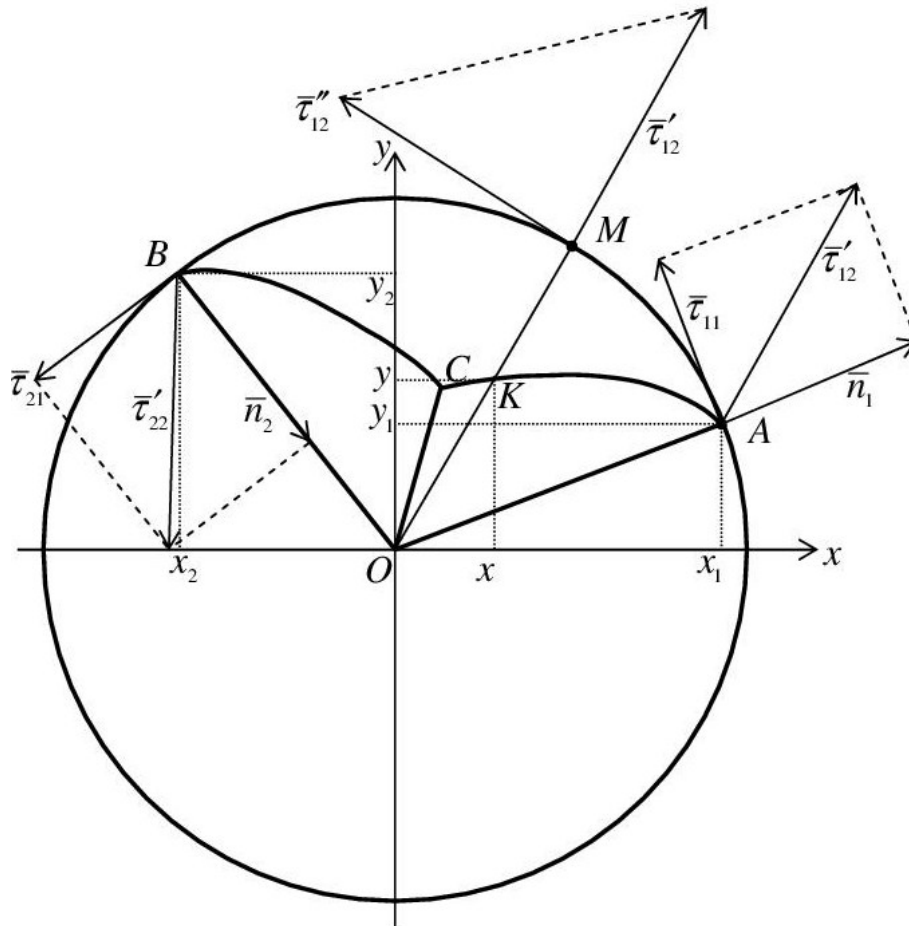


Рис. 2

где

$$\bar{R} = R + \sin \chi \cdot x_1 + \cos \chi \cdot y_1, \quad \chi = \varphi_0 - \varphi_1.$$

Пусть точка B имеет координаты (x_2, y_2) . Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{y_2}{x_2}, \quad (21)$$

где φ_2 — угол, образованный линией неоднородности OB с осью Ox .

Вектор касательного напряжения $\bar{\tau}_{21}$, действующий на OB со стороны первой области, направлен по касательной к контуру и имеет координаты

$$\bar{\tau}_{21} = (-k_1 \sin \varphi_2, k_1 \cos \varphi_2), \quad (22)$$

где $\varphi_2 < \pi$.

Обозначим через \bar{n}_2 — вектор нормали к контуру стержня в точке B , определяемый в виде

$$\bar{n}_2 = (-n_2 \cos \varphi_2, -n_2 \sin \varphi_2), \quad (23)$$

где

$$n_2 = |\bar{n}_2| = \sqrt{k_2^2 - k_1^2}. \quad (24)$$

В силу того, что линия неоднородности OB является линией разрыва напряжений, то со стороны второй области на отрезок OB действует вектор касательного напряжения $\bar{\tau}^*_{22}$:

$$\bar{\tau}^*_{22} = \bar{n}_2 + \bar{\tau}_{21} = (-n_2 \cos \varphi_2 - k_1 \sin \varphi_2, -n_2 \sin \varphi_2 + k_1 \cos \varphi_2). \quad (25)$$

Следовательно, из точки B будет выходить еще одна линия разрыва напряжений. Вектор касательного напряжения, действующий вдоль характеристики, имеет вид

$$\bar{\tau}''_{22} = (-k_2 \sin \varphi, k_2 \cos \varphi). \quad (26)$$

Тогда направляющий вектор линии разрыва напряжений BC в точке (x, y) примет вид

$$\bar{\tau}'' = \bar{\tau}''_{22} - \bar{\tau}'_{22} = (-k_2 \sin \varphi + n_2 \cos \varphi_2 + k_1 \sin \varphi_2, k_2 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi_2 - k_1 \cos \varphi_2). \quad (27)$$

Из (27) получим дифференциальное уравнение для определения линии разрыва напряжений BC :

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + a_2 \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + b_2 \right) dy = 0. \quad (28)$$

где

$$\cos \varphi_2 = \frac{x_2}{R}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{y_2}{R}, \quad x_2^2 + y_2^2 = R^2, \quad (29)$$

$$a_2 = \frac{n_2 y_2 - k_1 x_2}{k_2 R}, \quad b_2 = -\frac{n_2 x_2 + k_1 y_2}{k_2 R}, \quad a_2^2 + b_2^2 = 1. \quad (30)$$

Из (27) следует, что уравнение линии разрыва напряжений BC примет вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} + a_2(x - x_2) + b_2(y - y_2) = R. \quad (31)$$

Пусть

$$\sin \tilde{\varphi}_0 = -\frac{k_1}{k_2}, \quad \cos \tilde{\varphi}_0 = -\frac{n_2}{k_2}. \quad (32)$$

Согласно (19), (32) из (31) получим уравнение линии разрыва напряжений BC в полярной системе координат

$$\rho = \frac{\tilde{R}}{1 + \sin(\theta + \tilde{\chi})} = \frac{R(1 + \sin(\varphi_2 + \tilde{\chi}))}{1 + \sin(\theta + \tilde{\chi})}. \quad (33)$$

где

$$\tilde{R} = R + \sin \tilde{\chi} \cdot x_2 + \cos \tilde{\chi} \cdot y_2, \quad \tilde{\chi} = \tilde{\varphi}_0 - \varphi_2.$$

На рис. 3 определено напряженное состояние цилиндрического стержня, разделенного на две области линиями неоднородности OA и OB при $k_2 > k_1$. Линии неоднородности OA и OB являются линиями разрыва напряжений. Кроме того из точек A и B выходят еще по одной линии разрыва напряжений, которые задаются соотношениями (17) и (31). Линия разрыва, исходящие из точек A и B пересекаются в точке C . Линия разрыва OC образована векторами касательных напряжений $\bar{\tau}'_{12}$ и $\bar{\tau}'_{22}$. Координаты точки C удовлетворяют соотношениям (17) и (31).

На рис. 3. отображены векторы касательных напряжений, построены линии разрыва напряжений (линии изображены жирным контуром), в каждой области определено поле характеристик (характеристики изображены тонким контуром).

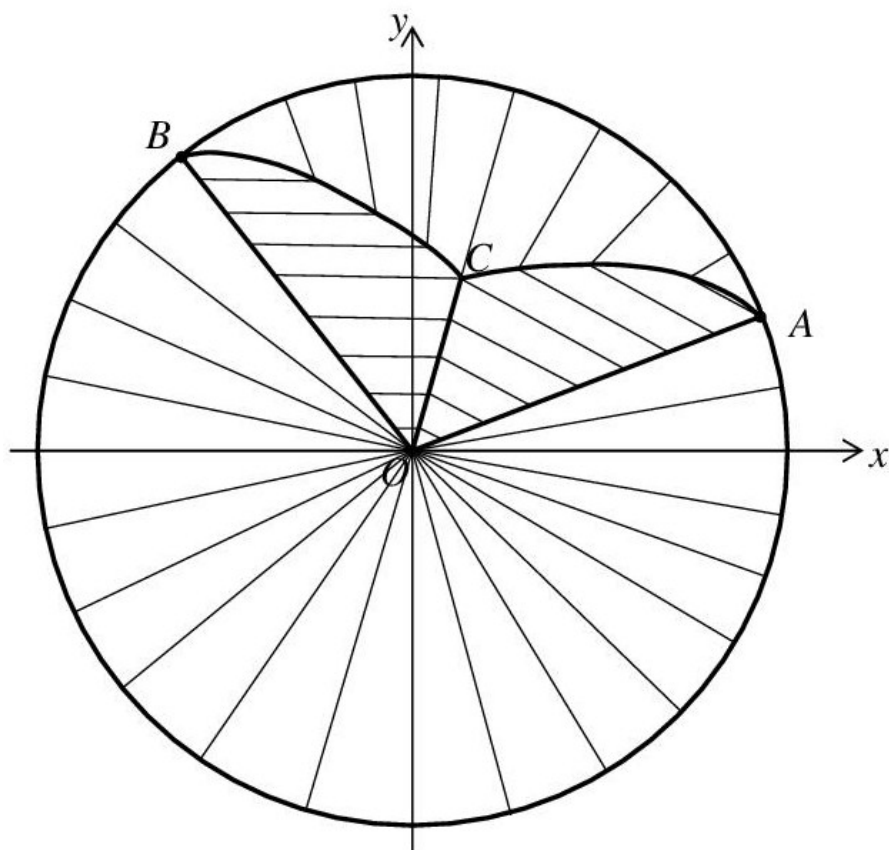


Рис. 3

Таким образом, в каждой области найдены векторы касательных напряжений, характеристики соотношений, определяющих напряженно-деформированное состояние тела, и построены линии разрыва напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.

[2] *Деревянных, Е. А.* К вопросу о кручении неоднородных призматических стержней / Е. А. Деревянных, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2014. - № 3 (21). – С. 105-111.

[3] *Деревянных, Е. А.* Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней / Е. А. Деревянных, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2012. – № 4 (76). – С. 108–112.

[4] *Деревянных, Е. А.* О предельном состоянии анизотропных призматических стержней при кручении в случае трансляционной анизотропии / Е. А. Деревянных // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – № 4 (14). – С. 174–184.

[5] *Деревянных, Е. А.* О предельном состоянии кусочно-неоднородных анизотропных призматических стержней полигонального сечения при кручении / Е. А. Деревянных // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С. 75–80.

[6] *Деревянных, Е. А.* Предельное состояние анизотропных призматических кусочно-неоднородных стержней при кручении / Е. А. Деревянных // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – № 3 (13). – С. 72–80

[7] *Деревянных, Е. А.* Предельное состояние анизотропных призматических стержней прямоугольного сечения при кручении / Е. А. Деревянных // Новый университет. Серия : Вопросы естественных наук – 2012. – №1 (7). – С. 15–18.

[8] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д. Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 576–579.

[9] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.

[10] *Миронов, Б. Г.* О кручении призматических стержней, находящихся под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей / Б. Г. Миронов // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 1 (48). – С. 98–101.

[11] *Митрофанова, Т. В.* О предельном состоянии анизотропных призматических стержней при кручении / Т. В. Митрофанова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – Ч. 3. – С. 601–609.

Деревянных Евгения Анатольевна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru

Миронов Борис Гурьевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

E. A. Derevyannih, B. G. Mironov

TORSION OF PIECEWISE AND NON-UNIFORM CYLINDRICAL CORES

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. In work torsion piecewise and non-uniform the idealnoplasticheskikh of cores is considered. The core tension is defined, lines of a rupture of tension are found, the field of characteristics is constructed. Torsion of isotropic cylindrical and prismatic cores in a case when the side surface of cores is free from tangent loadings, and also in a case when the side surface of a core is under the influence of external variable pressure, is considered in [8], [10]. Torsion of anisotropic cylindrical and prismatic cores is investigated in [1], [8]. Torsion of non-uniform prismatic cores in case of transmitting anisotropy is studied in [2], [3], [4], [5], [6], [7].

Keywords: torsion, tension, fluidity limit, limiting condition.

REFERENCES

- [1] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. – Vladivostok : Dalnauka, 1998. – 528 p. (in Russian)
- [2] Derevyannih E. A., Mironov B. G. К вопросу о кручении неоднородных призматических стержней // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2014. № 3 (21). С. 105–111. (in Russian)
- [3] Derevyannih E. A., Mironov B. G. About the general ratios of the theory of torsion of anisotropic cores // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2012. № 4 (76). P. 108–112. (in Russian)
- [4] Derevyannih E. A. About a limit condition of anisotropic prismatic cores at torsion in case of transmitting anisotropy // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2012. № 4 (14). P. 174–184. (in Russian)
- [5] Derevyannih E. A. About a limit condition of piecewise and non-uniform anisotropic prismatic cores of polygonal section at torsion // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2012. № 1 (11). P. 75–80. (in Russian)
- [6] Derevyannih E. A. Limit condition of anisotropic prismatic piecewise and non-uniform cores at torsion // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2012. № 3 (13). P. 72–80. (in Russian)
- [7] Derevyannih E. A. Limit condition of anisotropic prismatic cores of rectangular section at torsion // New university. Series: Questions of natural sciences. 2012. № 1 (11). P. 15–18. (in Russian)
- [8] Ivlev D. D., Mironov B. G. On relations perfectly plastic anisotropy of translational torsional // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2010. № 2 (8). P. 576–579. (in Russian)
- [9] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity. – M. : Nauka, 1966. 231 p. (in Russian)
- [10] Mironov B. G. Torsion of prismatic bars under the influence of pressure, varying linearly along a generator // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2006. № 1 (48). P. 98–101. (in Russian)
- [11] Mitrofanova T. V. About a limit condition of anisotropic prismatic cores at torsion // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2010. № 2 (8). Part 3. P. 601–609. (in Russian)

Derevyannih, Evgeniya Anatolevna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematics and Physics, Chuvash state agricultural Academy, Cheboksary

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Ю. В. Немировский

ДИНАМИКА КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ГИБРИДНЫХ ПЛИТ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ИШЛИНСКОГО-ИВЛЕВА

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск*

Аннотация. Для слоистых осесимметричных полиметаллических плит из жестко-пластических материалов, подчиняющихся кусочно-линейному условию пластичности Ишлинского-Ивлева и ассоциированному с ним закону пластического деформирования рассмотрены задачи пластического деформирования при воздействии нагрузок взрывного типа. В качестве примеров рассмотрены задача изгиба шарнирно опертой на внешнем контуре кольцевой пластинки, свободной от нагрузок на внутреннем контуре и задача об изгибе сплошной шарнирно опертой круговой пластинки.

Ключевые слова: слоистые полиметаллические плиты, кусочно-линейное условие пластичности Ишлинского-Ивлева, ассоциированный закон пластического деформирования, сплошные и кольцевые плиты, динамические нагрузки взрывного типа, осесимметричное деформирование.

УДК: 539.374

Введение. Решение задач по определению повреждаемости круглых и кольцевых пластин при воздействии нагрузок “взрывного” типа проводилось многими исследователями [1]–[5]. Подробный анализ полученных результатов нашел отражение в обзорах [6], [7]. Следует отметить, что все эти решения были получены при использовании условия пластичности Треска, которое при плоском напряженном состоянии определяет внутреннюю шестиугольную аппроксимацию эллипса Мизеса. Наряду с этим может быть использована внешняя шестиугольная аппроксимация эллипса Мизеса, которая в литературе получила название условия пластичности Ишлинского-Ивлева. Решение динамических задач пластичности при этом условии не было получено и предлагается в данной работе. Будем рассматривать полиметаллические n -слойные пластины с попарно-симметричным относительно срединной (нейтральной) поверхности строением и предполагать, что каждый из составляющих материалов при пластическом деформировании удовлетворяет условию пластичности Ишлинского-Ивлева и соответствующего ему закона пластического течения.

Формулировка основных уравнений. Для i -го слоя законы пластичности и пластического деформирования в соответствии с рис. 1

описывается соотношениями:

$$a_i b_i (d_i e_i) : \begin{cases} \sigma_{1i} + \sigma_{2i} = \pm 2\sigma_{0i} \\ \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 = 0, \quad \pm \dot{\epsilon}_1 > 0, \quad \pm \dot{\epsilon}_2 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Поступила 08.02.2015

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 14-01-00102.

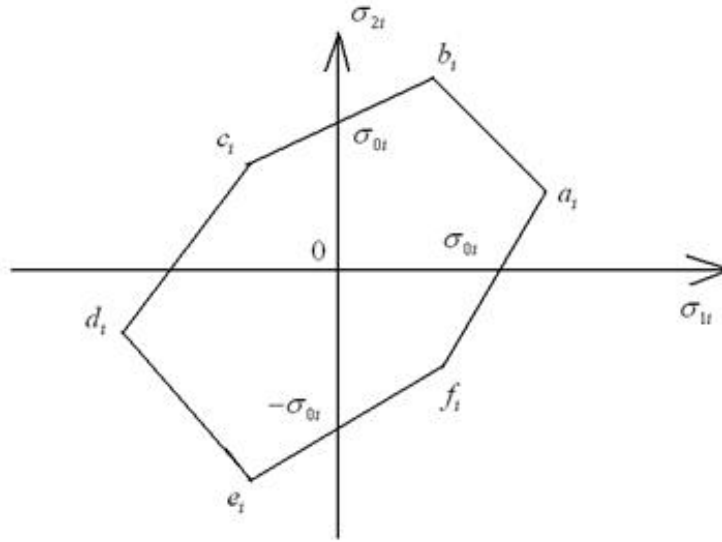


Рис. 1

$$b_i c_i (e_i f_i) : \begin{aligned} 2\sigma_{0i} - \sigma_{1i} &= \pm 2\sigma_{0i} \\ 2\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 &= 0, \quad \pm\dot{\epsilon}_1 > 0, \quad \pm\dot{\epsilon}_2 > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$c_i d_i (f_i a_i) : \begin{aligned} \sigma_{2i} - 2\sigma_{1i} &= \pm 2\sigma_{0i} \\ \dot{\epsilon}_1 + 2\dot{\epsilon}_2 &= 0, \quad \pm\dot{\epsilon}_1 > 0, \quad \pm\dot{\epsilon}_2 > 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь σ_{2i}, σ_{1i} — безразмерные окружные и радиальные напряжения (отнесенные к характерному пределу текучести $\bar{\sigma}_0$), $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2$ — радиальная и окружная скорости деформации, σ_{0i} — безразмерные пределы текучести.

Скорости деформирования связаны с безразмерным прогибом зависимостями

$$\dot{\epsilon}_1 = -z\dot{w}'', \quad \dot{\epsilon}_2 = -\frac{z}{x}\dot{w}' \quad (4)$$

$$w = \frac{h_0^2}{R_0^2 t_0} \bar{w}, \quad x = \frac{r}{R_0}; \quad (\dots)' = \frac{\partial}{\partial x} (\dots), \quad (\dots)^\bullet = \frac{\partial}{\partial t} (\dots), \quad t = \frac{\tau}{t_0}$$

где R_0, h_0, t_0 — обезразмеривающие параметры радиуса, толщины и времени.

Рассматривая далее слоистые попарно симметричные (относительно срединной поверхности) конструкции (рис. 2)

получим условие пластичности и закон пластического течения, сформулированные для обобщенных характеристик: изгибающих моментов

$$M_1 = 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_{1i} z dz, \quad M_2 = 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_{2i} z dz \quad (5)$$

и скоростей изменения кривизны

$$\dot{\kappa}_1 = -\dot{w}'', \quad \dot{\kappa}_2 = -\frac{1}{x}\dot{w}'' \quad (6)$$

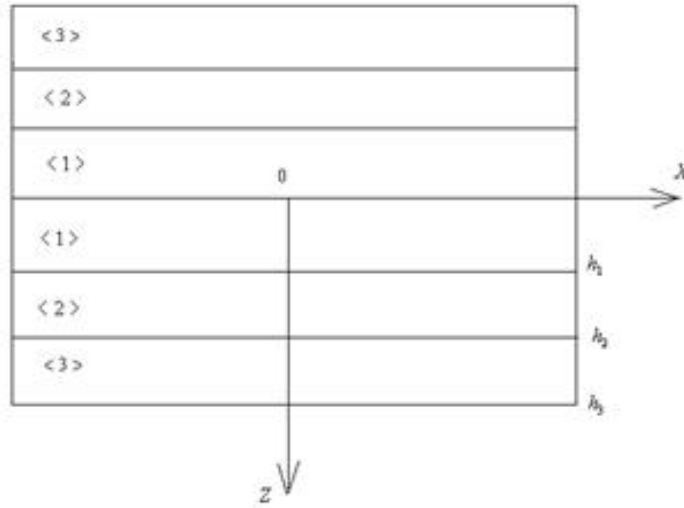


Рис. 2

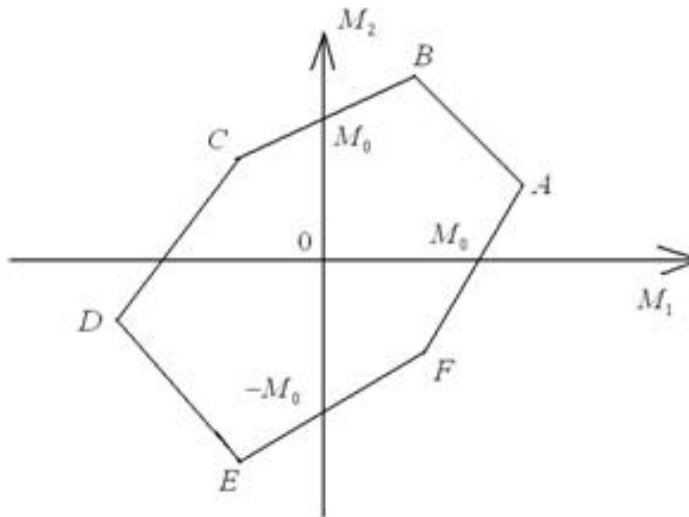


Рис. 3

В соответствии с рис. 3 будем иметь:

$$AB(DE): \quad M_1 + M_2 = \pm 2M_0, \quad \left(\frac{2}{3}M_0 \leq M_1 \leq \frac{4}{3}M_0 \right), \quad \dot{\kappa}_1 - \dot{\kappa}_2 = 0, \quad \pm \dot{\kappa}_1 > 0, \quad \pm \dot{\kappa}_2 > 0 \quad (7)$$

$$BC(EF): \quad 2M_2 - M_1 = \pm 2M_0, \quad \left(-\frac{2}{3}M_0 \leq \pm M_1 \leq \frac{2}{3}M_0 \right), \quad 2\dot{\kappa}_1 + \dot{\kappa}_2 = 0, \quad \pm \dot{\kappa}_1 < 0, \quad \pm \dot{\kappa}_2 > 0 \quad (8)$$

$$CD(AF) : \quad M_2 - 2M_1 = \pm 2M_0, \quad \left(-\frac{4}{3}M_0 \leq \pm M_1 \leq -\frac{2}{3}M_0 \right), \quad \dot{\kappa}_1 + 2\dot{\kappa}_2 = 0, \quad \pm \dot{\kappa}_1 < 0, \quad \pm \dot{\kappa}_2 > 0 \quad (9)$$

Здесь

$$M_0 = \sum_{i=1}^n \sigma_{0i} (h_i^2 - h_{0i-1}^2). \quad (10)$$

Безразмерные уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} (xQ)' - p(x, t) + m_1 \ddot{w} &= 0 \\ (xM_1)' - M_2 &= xQ \end{aligned} \quad (11)$$

Q — перерезывающая сила, $m_1 = m_1^0 \sum_{i=1}^n \rho_i \delta_i$, $\delta_i = h_i - h_{i-1}$, $p(x, t) = p_1(x) p_2(t)$ — распределенная динамическая нагрузка $\rho_i = \frac{\bar{\rho}_i}{\rho_i^0}$ — безразмерный удельный вес материала i -го слоя. В дальнейшем, рассматривая распределенные нагрузки взрывного типа будем считать для определенности $p_1(x) = p_1^0 = const$, $p_2(t) = \exp(-\alpha t)$. Система уравнений (7)–(9), (11) определяет систему разрешающих уравнений рассматриваемых задач, решение которой должно быть получено при выполнении начальных условий

$$\dot{w}(x, 0) = w(x, 0) = 0 \quad (12)$$

и граничных условий, зависящих от формы пластинки и условий ее закрепления.

1. Кольцевая пластина с шарнирно-опертым наружным контуром и свободным внутренним контуром радиуса x_0 . Рассмотрим шарнирно-опертую на наружном контуре кольцевую пластину со свободным внутренним контуром, нагруженную равномерно распределенным динамическим давлением взрывного типа. Граничные условия для такой пластинки имеют вид:

$$\begin{aligned} w(1, t) = \dot{w}(1, t) = M_1(1, t) &= 0 \\ Q(x_0, t) = M_1(x_0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

и динамический режим деформирования соответствует закономерностям (8). Следовательно

$$2\dot{w}'' + \frac{1}{x}\dot{w}' = 0.$$

Интегрируя это уравнение с учетом граничных условий (13) будем иметь

$$\dot{w} = \dot{C}_1 \left(x^{-1/2} - 1 \right), \quad \ddot{w} = \ddot{C}_1 \left(x^{-1/2} - 1 \right). \quad (14)$$

Подставляя это выражение в уравнение (11) получим

$$\begin{aligned} xQ &= p^0 (x - x_0) \exp(-\alpha t) - m_1 \ddot{C}_1 \left(x^{1/2} - x_0^{1/2} \right) \left(2 - x^{1/2} - x_0^{1/2} \right), \\ M_2 &= \frac{1}{2} M_1 + M_0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$(xM_1)' - \frac{1}{2x} (xM_1) = M_0 + xQ.$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом граничных условий для $M_1(x, t)$ будем иметь

$$M_1(x, t) = x^{-3/2} \left[\int_{x_0}^x [M_0 + xQ] x^{1/2} dx \right]. \quad (16)$$

Учитывая далее граничное условие $M(1, t) = 0$ для $\ddot{C}_1(t)$ получим уравнение

$$m_1 \ddot{C}_1 A_1 = p^0 A_2 \exp(-\alpha t) + M_0 A_3, \quad (17)$$

$$A_1 = \int_{x_0}^1 \left(x^{1/2} - x_0^{1/2} \right) \left(2 - x^{1/2} - x_0^{1/2} \right) x^{1/2} dx,$$

$$A_2 = \int_{x_0}^1 (x - x_0) x^{1/2} dx, \quad A_3 = \int_{x_0}^1 x^{1/2} dx$$

Рассматривая последнее уравнение в пределе $t \rightarrow 0$ и полагая $\ddot{C}_1 = 0$ определим амплитуду предельной нагрузки

$$p_0^0 = -\frac{M_0 A_3}{A_2}. \quad (18)$$

Динамическое деформирование пластинки будет происходить, когда амплитуда нагрузки по модулю будет превышать предельное значение (18). В этом случае интегрируя уравнение (17) при нулевых начальных условиях для скорости прогиба будем иметь выражение

$$\dot{C}_1 = -\frac{P_0 A_2}{m_1 A_1 \alpha} [1 - \exp(-\alpha t)] + \frac{M_0 A_3}{m_1 A_1} t. \quad (19)$$

Остановка происходит в момент времени $t = t_*$, когда $\dot{C}_1(t_*) = 0$ и остаточный прогиб будет определяться величиной $C_1(t_*)$.

2. Сплошная шарнирно опертая пластинка под действием равномерно-распределенной взрывной нагрузки экспоненциального типа. В этом случае граничные условия задачи имеют вид:

$$w(1, t) = \dot{w}'(0, t) = M_1(1, t) = 0,$$

$$M_1(0, t) = M_2(0, t) = M_0, \quad M_1(x_1, t) = \frac{3}{2} M_0, \quad (20)$$

$$[\dot{w}(x_1, t)] = [\dot{w}'(x_1, t)] = [M_1(x_1, t)] = 0$$

где [...] — скачек соответствующей величины при $x = x_1$. В соответствии с этими условиями решение задачи определяется режимом AB в области $0 \leq x \leq x_1$:

$$\dot{w}' = \dot{C}_3 x, \quad \dot{w} = \dot{C}_3 \frac{x^2}{2} + \dot{C}_4, \quad \ddot{w} = \ddot{C}_3 \frac{x^2}{2} + \ddot{C}_4, \quad M_2 = 2M_0 - M_1,$$

$$xQ = p_0 x \exp(-\alpha t) - m_1 x \left(\ddot{C}_3 \frac{x^2}{6} + \ddot{C}_4 \right), \quad (21)$$

$$M_1 = \exp(-2x) \left\{ \int_0^x \left[2M_0 + p_0 x \exp(-\alpha_0 t) - m_1 x \left(\ddot{C}_3 \frac{x^2}{6} + \ddot{C}_4 \right) \right] \exp(2x) dx + M_0 \right\},$$

и режимом BC в области $x_1 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{C}_1 \left(x^{-1/2} - 1 \right), \quad \ddot{w} = \ddot{C}_1 \left(x^{-1/2} - 1 \right), \quad M_2 = \frac{1}{2} M_1 + M_0, \\ xQ &= x_1 Q_1 + p_0 (x - x_1) \exp(-\alpha t) - m_1 \ddot{C}_1 \int_{x_1}^x \left(x^{-1/2} - 1 \right) dx, \\ x_1 Q_1 &= p_0 x_1 \exp(-\alpha t) - m_1 x_1 \left(\ddot{C}_3 \frac{x_1^2}{6} + \ddot{C}_4 \right), \\ M_1(x, t) &= e^{\frac{1-x}{2}} \left[\int_1^x (M_0 + xQ) e^{\frac{x-1}{2}} dx \right] \end{aligned}$$

Для определения функций $C_1(t)$, $C_3(t)$, $C_4(t)$, $x_1(t)$ далее необходимо использовать условия непрерывности и граничные условия (20), а также начальные условия (12). Соответствующие преобразования и решения из-за ограниченности объема статьи опускаем.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гопкинс Г., Праер В. Динамика пластической круглой пластинки – Механика, Сб. пер. М, “Мир”, 1955, №3, с. 112-122
- [2] Mroz Z. Plastic deformation of annular plates under dynamic loads, - Arch. Mech. Stogowanej, 1958, v. 10, №4, p. 499-576
- [3] Mazalov V. N., Nemirovsky Yu. V. Dynamical bending of rigid-plastic annular plates, - Jnt. J. Non-linear Mech., 1976, v.11, p. 25-39
- [4] Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961, 399с.
- [5] Комаров К. Л., Немировский Ю. В. Динамика жестко-пластических элементов конструкций, Новосибирск, Наука, 1984, 234с.
- [6] Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Динамическая теория пластичности, Обзор ВИНТИ, М., 1968, 112с.
- [7] Мазалов В. Н., Немировский Ю. В. Динамика тонкостенных пластических конструкций. – В кн. Проблемы динамически-упругих пластических сред, М., Мир, 1975, с. 155-247

Немировский Юрий Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Y. V. Nemirovsky

**DYNAMICS OF CIRCULAR AND ANNULAR PLATES WITH HYBRID
PLASTICITY CONDITION ISHLINSKII-IVLEV**

Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich SB RAS, Novosibirsk

Abstract. For axisymmetric layered polymetallic plates of rigid-plastic material obeying piecewise linear plasticity condition Ishlinskii-Ivlev and associative Acts considered the problem of plastic deformation plastic deformation when exposed to loads of explosive type. As examples, the bending problem hinged on the outer ring of the plate circuit, free of pressures on the domestic circuit and the problem of bending solid hinged circular plate.

Keywords: layered base metal plate, piecewise linear plasticity condition Ishlinskii-Ivlev, associated law plastic deformation, solid and annular plates, dynamic load of explosive type, axially symmetric deformation.

REFERENCES

- [1] G. Hopkins, Praeer B. Dynamics plastic circular plate - Mechanics, Proc. per. M, "Mir 1955, №3, p. 112-122. (in Russian)
- [2] Mroz Z. Plastic deformation of annular plates under dynamic loads, - Arch. Mech. Stogowanej, 1958, v. 10, №4, p. 499-576.
- [3] Mazalov V. N., Nemirovsky Yu. V. Dynamical bending of rigid-plastic annular plates, - Jnt. J. Non-linaer Mech., 1976, v.11, p. 25-39.
- [4] Rakhmatulin J. A., JA Dem'yanov Durability under intensive short-term loads. M. : Fizmatgiz, 1961, 399 p. (in Russian)
- [5] K. L. Komarov, Nemirovsky Y. V. Dynamics of rigid-plastic structural elements, Novosibirsk, Nauka, 1984, 234 p. (in Russian)
- [6] Reitman M. Shapiro G. S. Dynamic theory of plasticity Review VINITI, Moscow, 1968, 112 p. (in Russian)
- [7] Mazalov V. N., Nemirovsky Y. V. The dynamics of thin-walled plastic construction. - In the book. Problems of dynamic elastic-plastic media, M., Mir, 1975, p. 155-247. (in Russian)

Nemirovsky, Yuri Vladimirovich

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics
S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk*

А. В. НИКИТИН, С. В. ТИХОНОВ

О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ СЛОИСТОЙ ТРАНСЛЯЦИОННО-АНИЗОТРОПНОЙ ТРУБЫ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары

Аннотация. Рассматривается многослойная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления. Предполагается, что каждый слой обладает своими свойствами трансляционной анизотропии. Разработан алгоритм определения предельного напряженного состояния для произвольного числа слоев.

Ключевые слова: напряжение, пластичность, трансляционная анизотропия, труба, слой.

УДК: 539.3

Рассмотрим многослойную толстостенную трубу, находящуюся под действием внутреннего давления p (рис. 1).

Обозначим через α_1, α_2 внутренний и внешний радиусы 1-го слоя, через α_2, α_3 — внутренний и внешний радиусы 2-го слоя, через α_n, α_{n+1} — внутренний и внешний радиусы n -го слоя.

Условие предельного состояния для n -го слоя примем в виде

$$\left(\frac{\sigma_{xn} - \sigma_{yn}}{2} - \frac{k_{1n} - k_{2n}}{2} \right)^2 + (\tau_{xyn} - k_{3n})^2 = k_n^2, \quad k_{1n}, k_{2n}, k_{3n}, k_n - const, \quad (1)$$

где $\sigma_{xn}, \sigma_{yn}, \tau_{xyn}$ — компоненты напряжения в декартовой системе координат; k_{1n}, k_{2n}, k_{3n} — константы анизотропии.

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра δ , будем искать решение в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(I)} \delta + \sigma_{ij}^{(II)} \delta^2 + \dots \quad (2)$$

В нулевом приближении имеет место осесимметрическое состояние трубы

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0. \quad (3)$$

Напряжения во внутренней пластической области n в 0 приближении примут вид

$$\sigma_{\rho n}^{(0)p} = -q + 2K_n \ln \frac{\rho}{\alpha_n} + 2K_{n-1} \ln \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}, \quad \sigma_{\theta n}^{(0)p} = -q + 2K_n \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) + 2K_{n-1} \ln \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}. \quad (4)$$

Поступила 02.06.2015

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 15-41-02453, 14-01-31323 мол_а) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179)

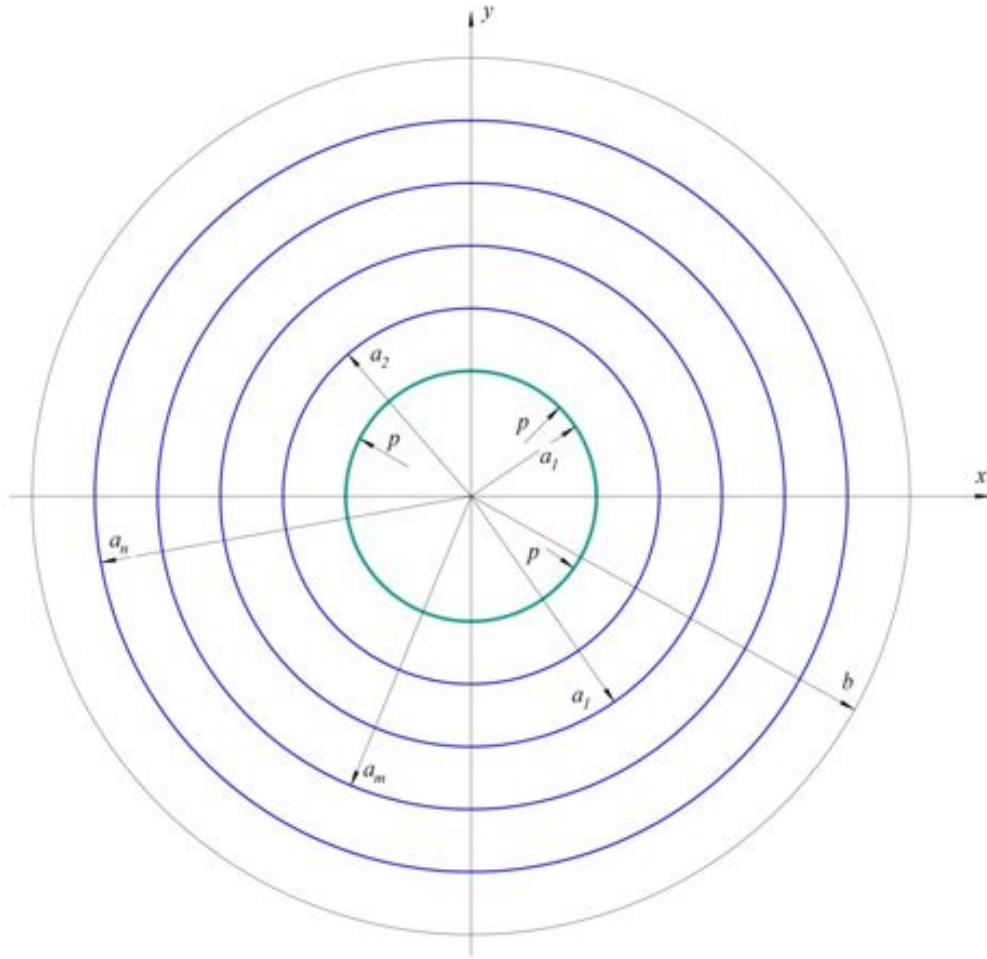


Рис. 1. Многослойная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления

Предельное состояние в n -ом слое в 1 приближении:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho n}^{(I)p} &= a_1^n \cos(2\theta) + a_2^n \sin(2\theta), \\ \sigma_{\theta n}^{(I)p} &= b_1^n \cos(2\theta) + b_2^n \sin(2\theta), \\ \tau_{\rho\theta n}^{(I)p} &= c_1^n \cos(2\theta) + c_2^n \sin(2\theta), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} a_1^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [b_1^{n-1} + R'_n \cos(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\ &+ [a_1^{n-1} - R'_n \cos(\mu_n)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right) + R'_n \cos(\mu_n), \end{aligned}$$

$$a_2^n = \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [b_2^{n-1} + R'_n \sin(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + [a_2^{n-1} + R'_n \cos(\mu_n)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right) - R'_n \sin(\mu_n), \\
& \quad b_1^n = \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [c_1^{n-1} + R'_n \cos(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\
& + [c_1^{n-1} - R'_n \cos(\mu_n)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right) - R'_n \cos(\mu_n), \\
& \quad b_2^n = \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [c_2^{n-1} + R'_n \sin(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\
& + [c_2^{n-1} + R'_n \sin(\mu_n)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right) + R'_n \sin(\mu_n), \\
& \quad c_1^n = \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [a_2^{n-1} + R'_n \sin(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\
& + [b_2^{n-1} + R'_n \sin(\mu_n)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right) - R'_n \sin(\mu_n), \\
& \quad c_2^n = \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [a_2^{n-1} - R'_n \cos(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\
& + [b_2^{n-1} + R'_n \cos(\mu_n)] \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right) - R'_n \cos(\mu_n).
\end{aligned}$$

Таким образом с помощью (4), (5) можно определить предельное состояние в каждом слое трубы в 0 и в 1 приближении.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [2] *Ивлев, Д. А.* О предельном состоянии слоистых круговых цилиндров из анизотропного материала под действием внутреннего давления / Д. А. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (66). – С. 57–63.
- [3] *Кержаев, А. П.* Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии / А. П. Кержаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 2 (16). – С. 71–81.

Никитин Андрей Витальевич,

аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: Ligalas5@mail.ru

Тихонов Сергей Владимирович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov

THE LIMITING CONDITION ANISOTROPIC LAYERED TRANSLATIONALLY PIPE

Abstract. Considered multilayer thick-walled pipe, which is under internal pressure. It is assumed that each layer has its own properties translational anisotropy. An algorithm to determine the maximum stress state for an arbitrary number of layers.

Keywords: stress, ductility, translational anisotropy, pipe layer.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* Perturbation method in the theory of elastic-plastic body / D. D. Ivlev, L. V. Ershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p. (in Russian)
- [2] *Ivlev, D. A.* The limit state layered circular cylinders of anisotropic material is under internal pressure / D. A. Ivlev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – № 2 (66). – P. 57–63. (in Russian)
- [3] *Kerzhaev, A. P.* Elastic plastic state two-layer thick-walled pipe located under internal pressure, while the anisotropy of translational / A. P. Kerzhaev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 2 (16). – P. 71–81. (in Russian)

Nikitin, Andrey Vitalaevich

Postgraduate student, Department Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Tikhonov, Seregey Vladimirovich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor of Department Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕЛ ИЗ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА ПРИ УСЛОВИИ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары

Аннотация. Упрочнение является одним из основных свойств металлов, которое характеризует влияние пластического деформирования на механическое поведение среды. В данной работе приведен вывод условия пластичности для общей задачи осесимметрического деформирования тел.

Ключевые слова: пластичность, деформирование, осевая симметрия.

УДК: 539.313:517.968.72

Введем в рассмотрение составной тензор $S_{ij} = \sigma_{ij} - s_{ij}$, где S_{ij} — компоненты тензора активных напряжений, σ_{ij} — компоненты тензора действительных напряжений, $s_{ij} = ce_{ij}$ — тензор внутренних напряжений, e_{ij} — компоненты тензора деформаций, c — коэффициент упрочнения материала.

Условие пластичности может быть записано [1] через главные направления тензора активных напряжений S_{ij} в виде

$$S_1 = S_2, \quad S_3 = S_1 + 2k \quad (1)$$

Для изотропного материала главные направления тензоров σ_{ij} и e_{ij} совпадают.

Так как $S_1 + S_2 + S_3 = 3\sigma + 3ce = 3S_1 + 2k$, то $S_1 = \sigma - ce - 2k/3$,
где $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, $e = (e_1 + e_2 + e_3)/3$.

Представим тензор S_{ij} в виде суммы двух тензоров $S_1 \cdot \delta_{ij}$ и $S_{ij} - S_1 \cdot \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. В главных направлениях ранг матрицы тензора $S_{ij} - S_1 \cdot \delta_{ij}$ равен единице.

Преобразование тензора при переходе от одной системы координат к другой представляется в виде

$$T^* = A^{-1}TA.$$

Известно [2], что при умножении матрицы на любую невырожденную матрицу ее ранг не изменяется. Из этого факта непосредственно вытекает, что ранг матрицы составного тензора $S_{ij} - S_1 \cdot \delta_{ij}$ равен единице в любой декартовой системе координат. Следовательно, все миноры второго порядка матрицы тензора $S_{ij} - S_1 \cdot \delta_{ij}$ равны нулю. В силу симметрии составного тензора из (1) получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma + ce - ce_x + 2k/3) \cdot (\sigma_y - \sigma + ce - ce_y + 2k/3) &= (\tau_{xy} - ce_{xy})^2, (x,y,z) \\ (\sigma_x - \sigma + ce - ce_x + 2k/3) \cdot (\tau_{yz} - ce_{yz}) &= (\tau_{xy} - ce_{xy}) \cdot (\tau_{yz} - ce_{yz}), (x,y,z) \end{aligned} \quad (2)$$

где (x, y, z) обозначает круговую перестановку индексов. В цилиндрических координатах условие (2) примет вид:

Поступила 12.05.2015

$$\begin{aligned} (\sigma_\rho - \sigma + ce - ce_\rho + 2k/3) \cdot (\sigma_\vartheta - \sigma + ce - ce_\vartheta + 2k/3) &= (\tau_{\rho z} - ce_{\rho z})^2 (\rho, \theta, z) \\ (\sigma_\nu - \sigma + ce - ce_\rho + 2k/3) \cdot (\tau_{\vartheta\pi} - ce_{\vartheta z}) &= (\tau_{\rho\vartheta} - ce_{\rho\vartheta}) \cdot (\tau_\pi - ce_{\rho z}), (\rho, \theta, z) \end{aligned} \quad (3)$$

В случае осесимметричной задачи при $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\rho, z)$, $e_{ij} = e_{ij}(\rho, z)$, $\tau_{\rho\vartheta} = \tau_{\rho z} = 0$, $e_{\rho\vartheta} = e_{\rho z} = 0$ из шести уравнений (3) линейно-независимыми будут лишь два соотношения:

$$(\sigma_\rho - \sigma + ce - ce_\rho + 2k/3) \cdot (\sigma_z - \sigma + ce - ce_z + 2k/3) = (\tau_{\rho z} - ce_{\rho z})^2 \quad (2)$$

$$\sigma_\vartheta - \sigma + ce - ce_\vartheta + 2k/3 = 0 \quad (5),$$

да и то при выполнении условия $\sigma_z - \sigma + ce - ce_z + 2k/3 \neq 0$.

Из уравнения (5) σ и σ_θ можно выразить следующим образом

$$\sigma = ce + \frac{1}{2} [(\sigma_\rho + \sigma_z) - c(e_\rho + e_z)] - \frac{1}{3}k \quad (3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) + \frac{3}{2}c(e_\theta - e) - k$$

Подставив равенство (3) в равенство (2) мы получим искомое условие пластичности

$$[(\sigma_\rho - \sigma_z) - c \cdot (e_\rho - e_z)]^2 + 4(\tau_{\rho z} - ce_{\rho z})^2 = 4k^2,$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) + \frac{3}{2}c(e_\theta - e) - k = \frac{1}{2} [(\sigma_\rho + \sigma_z) - n(e_\rho + e_z)] + ce_\theta - k$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток : Дальнаука, 1998. 528 с.
 [2] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М. : Наука, 1966, 576 с.

Чекмарев Георгий Евгеньевич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: SmitheE71@yandex.ru

G. E. Chekmarev

**CONDITIONS FOR THE PROBLEM OF PLASTICITY DEFORMATION
HARDENING OF BODIES MATERIAL PROVIDED AXIAL SYMMETRY**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. Hardening is one of the basic properties of metals, which characterizes the influence of plastic deformation on the mechanical behavior of the medium. In this paper, we derive the conditions of plasticity to the general problem of axially symmetric deformation of bodies.

Keywords: plasticity deformation, the axial symmetry.

REFERENCES

- [1] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. – Vladivostok : Dalnauka, 1998. – 528 p. (in Russian)
- [2] Gantmakher F. R. Matrix theory. – M. : Nauka, 1966, 576 p. (in Russian)

Chekmarev, Georgy Evgenyevich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

О СЖАТИИ АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ХИЛЛА

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

Аннотация. В работе рассматривается предельное состояние идеальнопластического анизотропного пространственного слоя, сжатого параллельными жесткими шероховатыми плитами. Предположим, что пространственный слой толщины $2h$ параллелен оси Ox и сдавливается параллельными шероховатыми плитами вдоль оси Oz .

Ключевые слова: сжатие, слой, идеальная пластичность, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Постановка задачи. Рассмотрим слой из идеально жесткопластического материала толщиной $2h$. Оси x, y декартовой системы координат расположим в срединной плоскости слоя, ось z направим ортогонально срединной плоскости. Уравнение поверхности слоя запишем в виде

$$z = \pm h, \quad |z| \leq h \quad (1)$$

Условие пластичности запишем в виде [1]

$$F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{xz}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \quad (2)$$

где $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$ – компоненты напряжения, F, G, \dots – постоянные, характеризующие свойства анизотропии материала.

Условие пластичности (2) переходит в условие пластичности Мизеса при условии

$$L = M = N = 3F = 3G = 3H \quad (3)$$

Если направить напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ вдоль осей координат x, y, z , то условие пластичности (2) примет вид

$$F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 1 \quad (4)$$

Обозначим через X предел текучести при растяжении вдоль первого главного напряжения

$$\sigma_1 = X, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (5)$$

Из соотношений (4), (5) и аналогичных им получим

$$1/X^2 = G + H \quad (F, G, H; X, Y, Z) \quad (6)$$

(Y, Z пределы текучести при растяжении вдоль главных осей анизотропии).

Из соотношений (6) следует

Поступила 08.06.2015

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 15-41-02453)

$$2F = 1/Y^2 + 1/Z^2 - 1/X^2 \quad (F, G, H; X, Y, Z) \quad (7)$$

Следуя Хиллу [1], обозначим через R, S, T пределы текучести при сдвиге по отношению к главным осям анизотропии. Согласно условию (2) получим

$$2L = 1/R^2 \quad (L, M, N; R, S, T) \quad (8)$$

Из ассоциированного закона течения, согласно условию (2), будем иметь

$$\varepsilon_x = \lambda [H(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)], \quad \varepsilon_{xy} = \lambda N \tau_{xy}, \quad (x, y, z; F, G, H; L, M, N) \quad (9)$$

Где λ - неопределенный множитель Лагранжа ($\lambda \geq 0$), $\varepsilon_x, \varepsilon_{xy}, \dots$ - компоненты скорости деформации.

Из (9) следует, что имеет место условие несжимаемости (u, v, w - компоненты скорости перемещения)

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

Предположим, что

$$\begin{aligned} u &= px + q_1 y + u_1(z) \\ v &= p_1 x + qy + v_1(z) \\ w &= mz \end{aligned} \quad (11)$$

где p, q, \dots константы

Из (11) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= p, & 2\varepsilon_{xy} &= q_1 + p_1, \\ \varepsilon_y &= q, & 2\varepsilon_{yz} &= \frac{dv_1}{dz}, \\ \varepsilon_z &= m, & 2\varepsilon_{xz} &= \frac{du_1}{dz} \end{aligned} \quad (12)$$

Из (10), (12), получим

$$p + q + m = 0 \quad (13)$$

Соотношения (11)-(13) определяют характер деформирования плиты. Припишем индекс штрих наверху компонентам девиатора напряжений.

$$\sigma_x = \sigma'_x + \sigma, \quad (x, y, z) \quad \sigma = 1/3(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (14)$$

Согласно (9), (10), (13), (14), будем иметь

$$H(\sigma'_x - \sigma'_y) + G(\sigma'_x - \sigma'_z) = p/\lambda, \quad (x, y, z; F, G, H; L, M, N) \quad (15)$$

Присоединяя к условиям (15) соотношение

$$\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0 \quad (16)$$

Из (15), (16) получим

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \Delta_x / 3\lambda\Delta, \quad \Delta_x = 2pF - qG - mH, \quad (x, y, z; F, G, H; L, M, N) \\ \Delta &= FG + HG + HF \end{aligned} \quad (17)$$

Из (9), (10), (12), также получим

$$\tau_{xy} = \frac{p_1 + q_1}{2\lambda N}, \quad \tau_{xz} = \frac{1}{2\lambda M} \frac{du_1}{dz}, \quad \tau_{yz} = \frac{1}{2\lambda L} \frac{dv_1}{dz} \quad (18)$$

Аналогично [2]. Предположим

$$\tau_{xz} = az + c_1, \quad \tau_{yz} = bz + c_2, \quad a, b, c_1, c_2 - const \quad (19)$$

Из (2), (14), (17), (18) получим выражение для неопределенного множителя Лагранжа...

$$\begin{aligned} 1/\lambda &= \sqrt{P(1 - 2M\tau_{xz}^2 - 2L\tau_{yz}^2)} \\ 1/P &= \left\{ F(qG - mH)^2 + G(mH - pF)^2 + H(pF - qG)^2 \right\} / \Delta^2 + (p_1 + q_1)^2 / 2N \end{aligned} \quad (20)$$

Согласно (19), (20) величина λ ... является функцией z , таким образом, компоненты дивергатора напряжений (17),(18) также являются функциями z .

Из (18),(19),(20) найдем

$$u_1 = 2M \int (az + c_1) \lambda dz, \quad v_1 = 2L \int (bz + c_2) \lambda dz \quad (21)$$

Из (14), (17), (19) и из уравнений равновесия получим

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + a = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} + b = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} = 0, \quad (22)$$

Из (22) следует

$$\sigma = -ax - by + C - \sigma'_z, \quad \sigma_z = -ax - by + C \quad (23)$$

Согласно (23) сдвливающие напряжение σ_z не зависит от толщины слоя и линейно изменяются относительно x, y .

Из (23) следует

$$\text{grad} \sigma_z = -ai - bj \quad (24)$$

где i, j —единичные орты вдоль осей x, y

Выражение (24) перепишем в виде

$$\text{grad} \sigma_z = -\sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi i + \sin \varphi j), \quad \text{tg} \varphi = b/a \quad (25)$$

Согласно (25), плоскость (23) имеет скат по направлению вектора $\text{grad} \sigma_z$...

Рассмотрим определение параметров a, b в зависимости от характера касательных контактных усилий на сдвливающих плитах.

Введем вектор

$$T = \tau_{xz} i + \tau_{yz} j \quad (26)$$

Припишем индекс плюс наверху компонентам вектора (26) на верхней стороне слоя при $z=h$, индекс минус наверху — компонентам при $z=-h$. Согласно (26),(19) будем иметь

$$\begin{aligned} T^+ &= (ah + c_1) i + (bh + c_2) j, \quad z = h \\ T^- &= (-ah + c_1) i + (-bh + c_2) j, \quad z = -h \end{aligned} \quad (27)$$

Предположим, что касательное усилие T достигает предельных значений на верхней и нижней сторонах плиты: $|T^+| = K^+$ при $z=h$, $\varphi = \varphi^+$, а аналогично на нижней стороне.

$$K^+ = \left[(ah + c_1)^2 + (bh + c_2)^2 \right]^{1/2} = \sqrt{2RS} / \sqrt{(R^2 + S^2) + (R^2 - S^2) \cos^2 \varphi^+}, \quad \text{tg} \varphi^+ = \frac{bh + c_2}{ah + c_1} \quad (28)$$

$$a = \frac{1}{2h} \left(\frac{K^+}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi^+}} - \frac{K^-}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi^-}} \right) \quad (29)$$

Из (14), (17), (20), (23), следует, что компоненты напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ определены с точностью до неопределенной постоянной C .

Обратимся к определению постоянной интегрирования C , входящей в соотношения, определяющие величины $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (25). Рассматриваемое решение, вполне аналогичное решению Прандтля для плоской задачи, является асимптотическим. Краевые условия могут быть удовлетворены приближенно. Предположим, что в некоторой точке на свободном крае плиты осредненное по толщине значения усилия, нормальное к краю плиты равно нулю.

Нормальное напряжение σ_n имеет вид

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (30)$$

Где α — угол, образуемый нормально к контуру с осью x

Из (14), (17), (19), (23) найдем

$$C = ax_0 + by_0 - \frac{1}{2h} \left((pF \cos^2 \alpha + qG \sin^2 \alpha - mH) / \Delta + (p_1 + q_1) \sin 2\alpha / 2N \right) \int_{-h}^h \frac{dz}{\lambda(z)} \quad (31)$$

Согласно (11), (12), (17), (31), константа C зависит от величин p, q, m, p_1, q_1, a, b характеризующих деформированное состояние материала. Таким образом, согласно (14), (17), (23), (31) сжимающее напряжение σ_z зависит от характера деформирования

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М. : ГИТТЛ, 1956. 408 с.
- [2] Максимова Л. А. О предельном состоянии слоя, сжатого шероховатыми плитами // ПММ. Т. 64. Вып 6. 2000. С. 1057–1062.
- [3] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М, :ГИТТЛ 1956, С. 324.

Максимова Людмила Анатольевна,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: maximova_ng@mail.ru

L. A. Maximova

**BEND OF A RECTANGULAR PLATE WITH THE FREE LONGITUDINAL
EDGES AT WHICH END FACES THE GENERALIZED TRANSVERSAL
FORCES AND MOMENTS OF DEFLECTION ARE SET. PRECISE SOLUTION
OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. In the work the stress-strained state of layer from the perfectly plastic anisotropic material, compressed by flat parallel rough plates, is examined. The properties of material are described by the condition of Hill's plasticity 1, generalizing plasticity conditions of Mizisa. The case of noncollinear contact efforts for rigid surfaces is examined. It is shown that the effort of pressing depends on the parameters, which determine the nature of the deformation of plate.

Keywords: ideal plasticity, anisotropy, rough plates, stress, deformation.

REFERENCES

- [1] Hill R. Mathematical theory of plasticity. M. : GITTL, 1956. 408 s. (in Russian)
- [2] Maximova L. A. On the limiting condition of the layer, compressed by rough plates // PMM. 2000. Vol. 64. Issue 6. s. 1057–1062. (in Russian)
- [3] Kachanov L. M. Bases of the theory of plasticity. M. : GITTL, 1956. s. 324. (in Russian)

Maximova, Ludmila Anatolevna

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@gmail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@inbox.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Матченко Николай Михайлович (eks_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва.

Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marycbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

Спориных Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Самара.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стил `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Абруков Д. А.</i> Изгиб прямоугольной пластины со свободными продольными краями, на торцах которой заданы обобщенные поперечные силы и изгибающие моменты. Точное решение краевой задачи	3
<i>Кулиев В. Д., Борисова Н. Л.</i> Трещина продольного сдвига, находящаяся на границе раздела двух биупругих полос разной толщины. новые явления.....	33
<i>Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Кержаев А. П.</i> Разрыв перемещений в полосе. Решение в тригонометрических рядах	50
<i>Артемов М. А., Барановский Е. С.</i> Математическое моделирование пластического состояния тел. Плоская деформация	72
<i>Гоцев Д. В., Бунтов А. Е., Перунов Н. С.</i> Математическая модель напряженно-деформированного состояния крепи вертикального шахтного ствола с учетом начальной пористости материала и упругопластических свойств сжатого скелета	88
<i>Дмитрик К. Г., Спорышин А. Н.</i> Численно-аналитическое исследование устойчивости упругой сферической оболочки с упругопластическим наполнителем при сжатии.....	97
<i>Леонтьева Т. Ю.</i> Влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в комплексной области	109
<i>Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г.</i> Экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных оболочек при чистом изгибе	119
<i>Балашникова А. В., Миронов Б. Г., Михайлова М. В.</i> К вопросу о предельном состоянии пространственного слоя, сжатого шероховатыми плитами при условии зависимости предела текучести от среднего давления при трансляционной анизотропии	126
<i>Кузнецов Е. Е., Матченко И. Н., Матченко Н. М.</i> К вопросу о ребре полной пластичности идеально связной изотропной среды	134
<i>Кузнецов Е. Е., Матченко И. Н., Матченко Н. М.</i> О предельном состоянии упругопластического деформирования идеально связных изотропных сред	139
<i>Листров Е. А., Семькина Т. Д.</i> К вопросу об использовании метода возмущений для учета упругой сжимаемости.....	151
<i>Деревянных Е. А., Миронов Б. Г.</i> Кручение кусочно-неоднородных цилиндрических стержней.....	157

<i>Немировский Ю. В.</i> Динамика круглых и кольцевых гибридных плит при условии пластичности Ишлинского-Ивлева	166
<i>Никитин А. В., Тихонов С. В.</i> О предельном состоянии слоистой трансляционно-анизотропной трубы	173
<i>Чекмарев Г. Е.</i> Условие пластичности для задачи деформирования тел из упрочняющегося материала при условии осевой симметрии	177
<i>Максимова Л. А.</i> О сжатии анизотропного слоя при условии пластичности Хилла	180
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	185
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	188
СОДЕРЖАНИЕ	190

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2015. № 2 (24)**

Отв. за выпуск: А. В. Балашникова

Технические редакторы: А. В. Балашникова, Е. В. Мурашкин, С. В. Тихонов

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова

Макет: А. В. Балашникова

Подписано в печать 26.06.2015.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 24,00.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38