

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал
№ 4(26)
Октябрь – декабрь 2015 г.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в
которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на
соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге "Пресса России" 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов,
Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, Б. Е. Победря, В. П. Радченко,
А. Ф. Ревуженко, С. А. Редкозубов, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин,
А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: Р. Ю. Амензаде (Азербайджан), В. М. Мирсалимов
(Азербайджан), В. П. Тамуж (Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-16-19.

Email: predel21@mail.ru.

WWW: <http://predel.chgpu.edu.ru>.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева», 2015

Ю. В. Немировский¹, А. В. Станиславович²

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ И РАСПОЛОЖЕНИЯ АРМИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИТОВ

¹ *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

² *Кемеровский государственный университет (КемГУ), г. Кемерово, Россия*

Аннотация. Рассматривается структурная математическая модель теплопроводности однонаправленного армированного слоя, в рамках которой построены эффективные теплофизические и механические характеристики волокнистых композитов. Существенно новым элементом предлагаемой модели является проведение процедуры осреднения теплового потока по представительному объему двухкомпонентного композитного материала в соответствии с законом Рихмана о теплообмене, происходящем между телами, находящимися в соприкосновении, а не на основе правила простых смесей, как это обычно принято. В рамках выбранного подхода рассматриваются различные варианты армирующего волокна, имеющие различную форму в поперечном сечении (параллелограмм, равнобедренный треугольник, правильный шести- и восьмиугольник). Произведена аппроксимация круглого в сечении армирующего волокна вписанными и описанными вокруг окружности многоугольниками. Произведено сравнение расчетных значений коэффициента теплопроводности с характеристиками некоторых композитных материалов.

Ключевые слова: теплопроводность, структурная модель, волокнистый композит, армированные среды.

УДК: 536.21

Введение. Во многих областях современной техники – авиационной, ракетной, судостроительной, в энергетическом и химическом машиностроении – широко используются тонкостенные элементы композитных конструкций типа слоисто-волокнистых стержней, пластин и оболочек. Во многих случаях в энергетических установках, реактивных двигателях, аэрокосмической технике и в охлаждающих установках такие элементы работают в условиях высоко- или низкотемпературных нестационарных

© Немировский Ю. В., Станиславович А. В., 2015

Немировский Юрий Николаевич

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск, Россия.

Станиславович Алексей Вячеславович

e-mail: alexey.st@bk.ru, аспирант, Кемеровский государственный университет (КемГУ), г. Кемерово, Россия.

Поступила 02.10.2015

воздействий, приводящих к возникновению тепловых напряжений, знание величины и характера которых необходимо для всестороннего анализа предельной несущей способности конструкций. Тепловые напряжения как сами по себе, так и в сочетании с механическими напряжениями от внешних нагрузок могут вызывать появление трещин в элементах конструкций из хрупких материалов, возникновение и развитие пластических деформаций и деформаций ползучести, приводящих к полному или прогрессирующему разрушению или к предельному состоянию термовыпучивания. Современные технологии создания композитных конструкций позволяют в широком диапазоне изменять их внутреннюю структуру за счет изменения топологии фазовых материалов в конструкции и формы фазовых материалов. Эти изменения могут приводить к существенным изменениям интегральных характеристик тепловых полей и создавать управляемые конструкции требуемого качества. Решение таких проблем является важнейшей задачей современного проектирования композитных конструкций, и в данной статье рассматривается один из подходов к ее реализации.

1. Структурная модель теплопроводности однонаправлено армированного слоя. Изложение структурной модели теплопроводности однонаправлено армированных волокнистых композитов здесь соответствует материалам монографий [1], [2], а также статей [3], [4]. Принимаются следующие допущения [1]–[9]:

1. Число армирующих волокон достаточно велико, поэтому полиармированный слой можно считать макроскопически квазиоднородным анизотропным телом [1]–[4].

2. Материал полиармированного слоя получен путем внедрения в однородное и изотропное связующее регулярной сети однонаправленных трансверсально изотропных волокон. Причем главная ось анизотропии совпадает с направлением армирования. Связь между вектором теплового потока и градиентом температуры в обеих фазах композиции подчиняется линейному закону теплопроводности Фурье [10], [11], а связь между осредненными по представительному объему вектором теплового потока и температурой – закону теплопроводности Фурье для анизотропной среды [10]:

$$\Theta_n = -\lambda_n \nabla T_n, \Theta_i = -\Lambda_{ij} \nabla_j T, \quad (1.1)$$

где Θ_n , λ_n , T_n – вектор теплового потока, коэффициент линейной теплопроводности и температура связующего ($n = \langle c \rangle$) и арматуры ($n = \langle a \rangle$) соответственно, Λ – тензор интегральных коэффициентов теплопроводности, ∇ – оператор Гамильтона.

3. Градиенты внешних силовых и тепловых полей «не слишком велики». Поэтому изменением характеристик теплового поля в пределах представительного объема можно пренебречь [3], [4].

4. На границе между связующим и арматурой реализуются условия идеального теплового контакта.

5. Осреднение температуры и вектора плотности теплового потока по представительному объему двухкомпонентного композитного материала выполняется в соответствии с законом Г. В. Рихмана [12], [13]:

$$T = \frac{c_1 m_1}{c_1 m_1 + c_2 m_2} T_1 + \frac{c_2 m_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2} T_2, \Theta = \frac{c_1 m_1}{c_1 m_1 + c_2 m_2} \Theta_1 + \frac{c_2 m_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2} \Theta_2. \quad (1.2)$$

Здесь T , Θ – конечная температура и осредненный тепловой поток двух соприкасающихся тел, c_1 , m_1 , T_1 , Θ_1 , c_2 , m_2 , T_2 , Θ_2 – удельная массовая теплоемкость, масса, температура, тепловой поток для первого и второго тел соответственно.

Величины, относящиеся к связующему, будем отмечать индексом «с», к арматуре – индексом «а».

1.1 Армирующие волокна параллелограммного сечения. Рассмотрим однонаправленно армированный слой, армирующее волокно в котором имеет в поперечном сечении форму параллелограмма.

Формулами

$$\omega = d/l, \quad \omega_z = \delta/h$$

(рис. 1) вводим параметры армирования – интенсивность армирования в плоскости слоя (ω), по его высоте (ω_z) и угол φ – угол KMG на рис. 1. Оси прямоугольной декартовой системы координат $x^1, x^2, x^3 = z$ направим, как показано на рис. 1.

Прямоугольником $EFGHE'F'G'H'$ (рис. 1) выделим из представительного элемента армированной среды параллелепипед. Этот параллелепипед, содержащий армирующее волокно назовем представительным элементом армирующего слоя. Сначала найдем его осредненные характеристики [4].

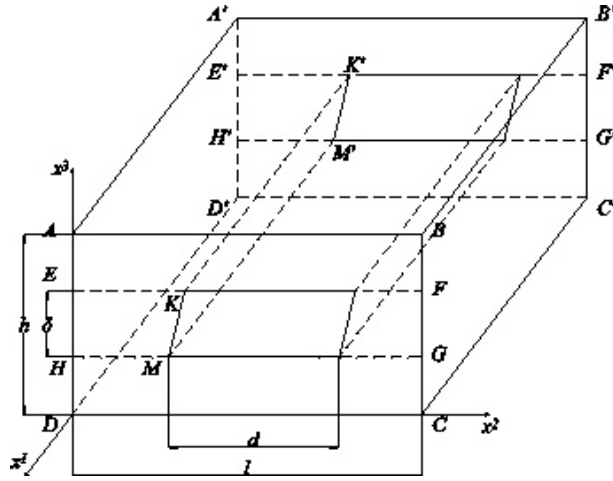


Рис. 1. Представительный элемент армированного слоя. Армирующее волокно имеет форму параллелограмма в сечении

Переходим к определению компонент тензора линейной теплопроводности армированной среды. Приведенную объемную плотность $\langle \rho \rangle$, массовую $\langle c_{em} \rangle$ и объемную $\langle c_\varepsilon \rangle$ теплоемкость квазиоднородного вещества представительного элемента армирующего слоя определим по формулам [4]:

$$\langle \rho \rangle = \omega \rho_a + (1 - \omega) \rho_c, \quad (2.1.1)$$

$$\langle c_{em} \rangle = \frac{\omega \rho_a}{\langle \rho \rangle} c_{em}^a + \frac{(1 - \omega) \rho_c}{\langle \rho \rangle} c_{em}^c, \quad \langle c_\varepsilon \rangle = \omega \rho_a c_{em}^a + (1 - \omega) \rho_c c_{em}^c. \quad (2.1.2)$$

Здесь и далее в параграфе в угловых скобках – величины, осредненные по объему представительного элемента армирующего слоя, $\rho_n, c_\varepsilon^n, c_{em}^n$ – объемная плотность, удельная объемная и массовая теплоемкость арматуры ($n = \langle a \rangle$) и связующего ($n = \langle c \rangle$) соответственно.

Используя характеристики (2.1.2) из (1.2), выводим:

$$\nabla \langle T \rangle = \bar{\omega} \nabla T_a + (1 - \bar{\omega}) \nabla T_c, \quad \langle \Theta \rangle = \bar{\omega} \Theta_a + (1 - \bar{\omega}) \Theta_c, \quad \bar{\omega} = \frac{c_\varepsilon^a}{\langle c_\varepsilon \rangle} \omega. \quad (2.1.3)$$

Записывая (2.1.3) в скалярной форме и учитывая (1.1), получаем зависимости:

$$\nabla_i \langle T \rangle = \bar{\omega} \nabla_i T_a + (1 - \bar{\omega}) \nabla_i T_c \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.1.4)$$

$$\langle \Theta_1 \rangle = -[\bar{\omega} \lambda_{a1} \nabla_1 T_a + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c \nabla_1 T_c], \quad \langle \Theta_i \rangle = -[\bar{\omega} \lambda_{a2} \nabla_i T_a + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c \nabla_i T_c]. \quad (2.1.5)$$

Здесь λ_{a1} , λ_{a2} — коэффициенты линейной теплопроводности арматуры в продольном и поперечном направлениях соответственно.

В силу допущения 2 имеем:

$$\langle \Theta_i \rangle = -\langle \Lambda_{ij} \rangle \nabla_j \langle T \rangle. \quad (2.1.6)$$

Здесь $\langle \Lambda \rangle$ — неизвестный тензор интегральных коэффициентов теплопроводности армирующего слоя. Для его определения необходимо найти линейную зависимость величин $\langle \Theta_i \rangle$ в (2.1.5) от $\nabla_i \langle T \rangle$ в (2.1.4).

В силу допущения 4 на поверхности Γ раздела фаз арматуры и связующего выполнены условия идеального контакта по температуре [14], [15]:

$$T_a = T_c, \quad \lambda_a \frac{\partial T_a}{\partial n} = \lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial n}. \quad (2.1.7)$$

Здесь n — вектор единичной нормали к поверхности.

Обозначим

$$l_1 = \cos \varphi, \quad l_2 = \sin \varphi, \quad l = \{0; l_1; l_2\}, \quad n = \{0; -l_2; l_1\}.$$

Здесь l — направляющий вектор прямой, содержащей отрезок MK (рис. 1).

Дифференцируя обе части первого из равенств (2.1.7) по \hat{x}^1 , а также по направлению вектора l , приходим к соотношениям:

$$\nabla_1 T_a = \nabla_1 T_c, \quad l_1 \nabla_2 T_a + l_2 \nabla_3 T_a = l_1 \nabla_2 T_c + l_2 \nabla_3 T_c,$$

$$\lambda_a (-l_2 \nabla_2 T_a + l_1 \nabla_3 T_a) = \lambda_c (-l_2 \nabla_2 T_c + l_1 \nabla_3 T_c). \quad (2.1.8)$$

Зависимости (2.1.4), (2.1.8) вместе составляют систему шести линейных алгебраических уравнений для определения шести величин — $\nabla_1 T_a$, $\nabla_2 T_a$, $\nabla_3 T_a$, $\nabla_1 T_c$, $\nabla_2 T_c$, $\nabla_3 T_c$.

Решив систему (2.1.4), (2.1.8), получаем:

$$\nabla_1 T_c = \nabla_1 T_a = \nabla_1 \langle T \rangle, \quad I_1 = \bar{\omega} \lambda_c + (1 - \bar{\omega}) \lambda_{a2},$$

$$\nabla_2 T_a = [(1 - \bar{\omega}) (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \bar{\omega} \lambda_c] I_1^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle + [(1 - \bar{\omega}) l_1 l_2 (\lambda_{a2} - \lambda_c)] I_1^{-1} \nabla_3 \langle T \rangle,$$

$$\nabla_2 T_c = [\bar{\omega} (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + (1 - \bar{\omega}) \lambda_{a2}] I_1^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle + [\bar{\omega} l_1 l_2 (\lambda_c - \lambda_{a2})] I_1^{-1} \nabla_3 \langle T \rangle,$$

$$\nabla_3 T_a = [(1 - \bar{\omega}) l_1 l_2 (\lambda_{a2} - \lambda_c)] I_1^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle + [(1 - \bar{\omega}) (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \bar{\omega} \lambda_c] I_1^{-1} \nabla_3 \langle T \rangle,$$

$$\nabla_3 T_c = [\bar{\omega} l_1 l_2 (\lambda_c - \lambda_{a2})] I_1^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle + [\bar{\omega} (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + (1 - \bar{\omega}) \lambda_{a2}] I_1^{-1} \nabla_3 \langle T \rangle. \quad (2.1.9)$$

Подставляя (2.1.9) в (2.1.5), приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned}
\langle \Theta_1 \rangle &= - [\bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c] \nabla_1 \langle T \rangle, \\
B &= \lambda_{a2} \lambda_c (\bar{\omega}^2 + (1 - \bar{\omega})^2), \\
\langle \Theta_2 \rangle &= - [(\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B) I_1^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle + \\
&\quad + (l_1 l_2 \bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2) I_1^{-1} \nabla_3 \langle T \rangle], \\
\langle \Theta_3 \rangle &= - \left[(l_1 l_2 \bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2) I_1^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle + \right. \\
&\quad \left. + (B + \bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c))) I_1^{-1} \nabla_3 \langle T \rangle \right]. \quad (2.1.10)
\end{aligned}$$

Сравнивая (2.1.10) с (2.1.6), находим:

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda_{11} \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \quad \langle \Lambda_{12} \rangle = \langle \Lambda_{13} \rangle = \langle \Lambda_{21} \rangle = \langle \Lambda_{31} \rangle = 0, \\
\langle \Lambda_{22} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B] I_1^{-1}, \\
\langle \Lambda_{23} \rangle &= \langle \Lambda_{32} \rangle = [l_1 l_2 \bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2] I_1^{-1},
\end{aligned}$$

$$\langle \Lambda_{33} \rangle = [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c)) + B] I_1^{-1}. \quad (2.1.11)$$

Переходим к определению компонент тензора линейной теплопроводности представительного элемента армированного слоя. В силу допущений 1, 2 считаем, что квазиоднородный анизотропный материал элементарного армирующего слоя подчиняется закону Фурье для анизотропных сред (2.1.6), (2.1.11), а материал прослоек связующего, дополняющего этот параллелепипед до представительного элемента армированного слоя, подчиняется линейному закону теплопроводности Фурье (1.1).

Приведенную объемную плотность, массовую $\langle\langle c_{\varepsilon m} \rangle\rangle$ и объемную $\langle\langle c_{\varepsilon} \rangle\rangle$ теплоемкость квазиоднородного вещества представительного элемента армированного слоя определим по формулам:

$$\langle\langle \rho \rangle\rangle = \omega_z \langle \rho \rangle + (1 - \omega_z) \rho_c, \quad (2.1.12)$$

$$\langle\langle c_{\varepsilon m} \rangle\rangle = \frac{\omega_z \langle \rho \rangle}{\langle\langle \rho \rangle\rangle} \langle c_{\varepsilon m} \rangle + \frac{(1 - \omega_z) \rho_c}{\langle\langle \rho \rangle\rangle} c_{\varepsilon m}^c, \quad \langle\langle c_{\varepsilon} \rangle\rangle = \omega_z \langle \rho \rangle \langle c_{\varepsilon m} \rangle + (1 - \omega_z) \rho_c c_{\varepsilon m}^c. \quad (2.1.13)$$

Здесь и далее в параграфе в двойных угловых скобках – величины, осредненные по объему представительного элемента армированного слоя.

Из соотношений (1.2), с учетом (1.1), (2.1.6), (2.1.11), следует:

$$\nabla_i \langle\langle T \rangle\rangle = \bar{\omega}_z \nabla_i \langle T \rangle + (1 - \bar{\omega}_z) \nabla_i T_c, \quad \bar{\omega}_z = \frac{\langle c_{\varepsilon} \rangle}{\langle\langle c_{\varepsilon} \rangle\rangle} \omega_z, \quad (2.1.14)$$

$$\langle\langle \Theta_i \rangle\rangle = - [\bar{\omega}_z (\langle \Lambda_{ij} \rangle \nabla_j \langle T \rangle) + (1 - \bar{\omega}_z) \lambda_c \nabla_i T_c] \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.1.15)$$

В силу допущения 2 имеем:

$$\langle\langle \Theta_i \rangle\rangle = - \hat{\Lambda}_{ij} \nabla_j \langle\langle T \rangle\rangle. \quad (2.1.16)$$

Здесь $\hat{\Lambda}$ – тензор интегральных коэффициентов теплопроводности армированного слоя. Для его определения, как и выше, необходимо найти линейную зависимость величин $\langle\langle\Theta_i\rangle\rangle$ от $\nabla_i\langle\langle T\rangle\rangle$.

В силу допущения 4 на поверхности Γ раздела фаз арматуры и связующего выполнены условия идеального контакта по температуре [14], [15]:

$$\langle T \rangle = T_c, \quad \lambda_a \nabla_3 \langle T \rangle = \lambda_c \nabla_3 T_c. \quad (2.1.17)$$

Направление нормали совпадает с направлением оси $O\hat{x}^3$. Дифференцируя обе части первого из равенств (2.1.17) по переменным \hat{x}^1, \hat{x}^2 , приходим к следующим соотношениям:

$$\nabla_1 \langle T \rangle = \nabla_1 T_c, \quad \nabla_2 \langle T \rangle = \nabla_2 T_c, \quad \lambda_a \nabla_3 \langle T \rangle = \lambda_c \nabla_3 T_c. \quad (2.1.18)$$

Зависимости (2.1.14), (2.1.18) вместе составляют систему шести линейных алгебраических уравнений относительно шести неизвестных величин $\nabla_1 \langle T \rangle, \nabla_2 \langle T \rangle, \nabla_3 \langle T \rangle, \nabla_1 T_A, \nabla_2 T_A, \nabla_3 T_A$.

Решив эту систему, приходим к зависимостям:

$$\begin{aligned} \nabla_1 T_c &= \nabla_1 \langle T \rangle = \nabla_1 \langle\langle T \rangle\rangle, \quad \nabla_2 T_c = \nabla_2 \langle T \rangle = \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle, \\ \nabla_3 \langle T \rangle &= \lambda_c I_2^{-1} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle, \quad \nabla_3 T_c = \langle\Lambda_{33}\rangle I_2^{-1} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle, \quad I_2 = \bar{\omega}_z \lambda_c + (1 - \bar{\omega}_z) \langle\Lambda_{33}\rangle. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Подставляя (2.1.19) в (2.1.15) получаем:

$$\begin{aligned} \langle\langle\Theta_1\rangle\rangle &= -[\bar{\omega}\bar{\omega}_z\lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}\bar{\omega}_z)\lambda_c] \nabla_1 \langle\langle T \rangle\rangle, \\ \langle\langle\Theta_2\rangle\rangle &= -[(\bar{\omega}_z \langle\Lambda_{22}\rangle + (1 - \bar{\omega}_z) \lambda_c) \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle + \bar{\omega}_z \langle\Lambda_{23}\rangle \lambda_c I_2^{-1} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle], \\ \langle\langle\Theta_3\rangle\rangle &= -[\bar{\omega}_z \langle\Lambda_{32}\rangle \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle + \lambda_c \langle\Lambda_{33}\rangle I_2^{-1} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle]. \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Сравнивая (2.1.20) с (2.1.16), находим:

$$\hat{\Lambda}_{11} = \bar{\omega}\bar{\omega}_z\lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}\bar{\omega}_z)\lambda_c, \quad \hat{\Lambda}_{22} = \bar{\omega}_z \langle\Lambda_{22}\rangle + (1 - \bar{\omega}_z) \lambda_c, \quad \hat{\Lambda}_{32} = \bar{\omega}_z \langle\Lambda_{32}\rangle,$$

$$\hat{\Lambda}_{23} = \bar{\omega}_z \langle\Lambda_{23}\rangle \lambda_c I_2^{-1}, \quad \hat{\Lambda}_{33} = \lambda_c \langle\Lambda_{33}\rangle I_2^{-1}, \quad \hat{\Lambda}_{12} = \hat{\Lambda}_{13} = \hat{\Lambda}_{21} = \hat{\Lambda}_{31} = 0. \quad (2.1.21)$$

Формулами (2.1.21) компоненты тензора теплопроводности определены во вспомогательной декартовой системе координат $\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3 = z$, направление оси $O\hat{x}^1$ которой совпадает с направлением армирования. Отметим, что в результате предельного перехода

$$\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

соотношения (2.1.21) сводятся к виду:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_{11} &= \bar{\omega}\bar{\omega}_z\lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}\bar{\omega}_z)\lambda_c, \quad \hat{\Lambda}_{22} = \lambda_c (\bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z)\lambda_c + (1 - \bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z))\lambda_{a2}) I_1^{-1}, \\ \hat{\Lambda}_{33} &= \lambda_c \frac{\bar{\omega}\lambda_{a2} + (1 - \bar{\omega})\lambda_c}{\bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z)\lambda_{a2} + (1 - \bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z))\lambda_c}, \quad \hat{\Lambda}_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j). \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Соотношения (2.1.22) для компонент тензора интегральных коэффициентов теплопроводности получены в [2], [4] для случая прямоугольного сечения армирующего волокна.

1.2 Армирующие волокна треугольного сечения. Рассмотрим однонаправленно армированный слой, армирующее волокно в котором имеет в поперечном сечении форму равнобедренного треугольника.

Формулами

$$\omega = d/2l, \quad \omega_z = \delta/h$$

(рис. 2) вводим параметры армирования – интенсивность армирования в плоскости слоя (ω), по его высоте (ω_z) и угол φ (угол NMP на рис. 2). Оси прямоугольной декартовой системы координат $x^1, x^2, x^3 = z$ направим, как показано на рис. 2.

Плоскостями $EFF'E'$, $GHH'G'$ выделим из представительного элемента армированной среды параллелепипед. Этот параллелепипед, содержащий армирующее волокно, назовем представительным элементом армирующего слоя и найдем его осредненные характеристики по схеме [4].

Параллелепипед $EFF'E'GHH'G'$ в свою очередь разобьем плоскостью $NPP'N'$ на две части и рассмотрим отдельно средние характеристики каждой из них. Сначала рассмотрим параллелепипед $ENPHE'N'P'H'$.

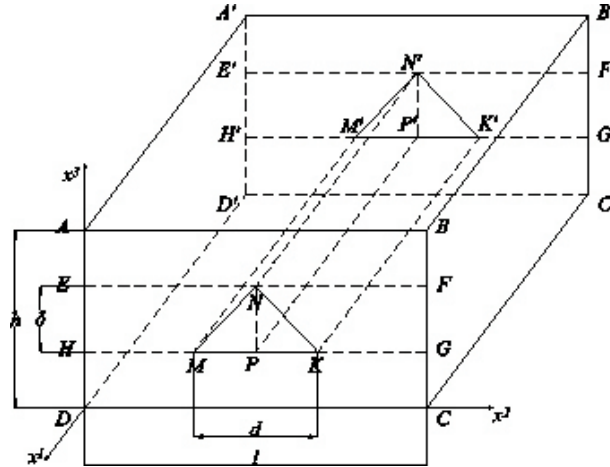


Рис. 2. Армирующее волокно треугольного сечения

Приведенную объемную плотность $\langle \rho^I \rangle$, массовую $\langle c_{em}^I \rangle$ и объемную $\langle c_\varepsilon^I \rangle$ теплоемкость квазиоднородного вещества представительного элемента армирующего слоя определим по формулам [4]:

$$\langle \rho^I \rangle = \omega \rho_a + (1 - \omega) \rho_c, \quad (2.2.1)$$

$$\langle c_{em}^I \rangle = \frac{\omega \rho_a}{\langle \rho \rangle} c_{em}^a + \frac{(1 - \omega) \rho_c}{\langle \rho \rangle} c_{em}^c, \quad \langle c_\varepsilon^I \rangle = \omega \rho_a c_{\varepsilon m}^a + (1 - \omega) \rho_c c_{\varepsilon m}^c. \quad (2.2.2)$$

Здесь и далее в параграфе в угловых скобках – величины, осредненные по объему представительного элемента армирующего слоя. Верхний индекс у осредненных величин будет указывать на принадлежность к параллелепипеду $ENPHE'N'P'H'$ ($k = \langle I \rangle$) или $NFGPN'F'G'P'$ ($k = \langle II \rangle$), если верхний индекс отсутствует, то это указывает, что осредненная величина относится ко всему представительному элементу армирующего слоя (параллелепипед $EFF'E'GHH'G'$).

Повторяя рассуждения (2.1.3)–(2.1.11), получаем выражения для компонент тензора интегральных коэффициентов теплопроводности:

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_{11}^I \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \quad \langle \Lambda_{12}^I \rangle = \langle \Lambda_{13}^I \rangle = \langle \Lambda_{21}^I \rangle = \langle \Lambda_{31}^I \rangle = 0, \\ \langle \Lambda_{22}^I \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{23}^I \rangle &= \langle \Lambda_{32}^I \rangle = l_1 l_2 \omega (1 - \omega) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 I_1^{-1},\end{aligned}$$

$$\langle \Lambda_{33}^I \rangle = [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c)) + B] I_1^{-1}. \quad (2.2.3)$$

Рассмотрим параллелепипед $NFGPN'F'G'P'$.

Приведенную объемную плотность $\langle \rho^{II} \rangle$, массовую $\langle c_{\varepsilon m}^{II} \rangle$ и объемную $\langle c_{\varepsilon}^{II} \rangle$ теплоемкость квазиоднородного вещества представительного элемента армирующего слоя определим по формулам, аналогичным (2.2.1), (2.2.2):

$$\langle \rho^{II} \rangle = \omega \rho_a + (1 - \omega) \rho_c, \quad (2.2.4)$$

$$\langle c_{\varepsilon m}^{II} \rangle = \frac{\omega \rho_a}{\langle \rho \rangle} c_{\varepsilon m}^a + \frac{(1 - \omega) \rho_c}{\langle \rho \rangle} c_{\varepsilon m}^c, \quad \langle c_{\varepsilon}^{II} \rangle = \omega \rho_a c_{\varepsilon m}^a + (1 - \omega) \rho_c c_{\varepsilon m}^c. \quad (2.2.5)$$

Прямая, содержащая отрезок NK , составляет с осью $O\hat{x}^2$ угол $\varphi_2 = \pi - \varphi$ (рис. 2). Обозначим

$$l_3 = \cos \varphi_2, \quad l_4 = \sin \varphi_2, \quad l = \{0; l_3; l_4\} = \{0; -l_1; l_2\}, \quad n = \{0; -l_4; l_3\} = \{0; -l_2; -l_1\}.$$

Здесь l – направляющий вектор прямой, содержащий отрезок NK , а n – нормальный вектор этой прямой.

Повторяя рассуждения (2.1.3)–(2.1.11) почти дословно, приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_{11}^{II} \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \quad \langle \Lambda_{12}^{II} \rangle = \langle \Lambda_{13}^{II} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{II} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{II} \rangle = 0, \\ \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} ((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c ((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{23}^{II} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{II} \rangle = \frac{-l_1 l_2 \omega (1 - \omega) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2}{\bar{\omega} \lambda_c + (1 - \bar{\omega}) \lambda_{a2}}, \\ \langle \Lambda_{33}^{II} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} ((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c ((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c)) + B] I_1^{-1}. \quad (2.2.6)\end{aligned}$$

Легко заметить, что выполняются следующие равенства:

$$\langle \Lambda_{11}^I \rangle = \langle \Lambda_{11}^{II} \rangle, \quad \langle \Lambda_{22}^I \rangle = \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle, \quad \langle \Lambda_{33}^I \rangle = \langle \Lambda_{33}^{II} \rangle,$$

$$\langle \Lambda_{23}^I \rangle = \langle \Lambda_{32}^I \rangle = -\langle \Lambda_{23}^{II} \rangle = -\langle \Lambda_{32}^{II} \rangle. \quad (2.2.7)$$

Рассмотрим теперь параллелепипед $EFGHE'F'G'H'$, представляющий представительный элемент армирующего слоя и найдем его осредненные характеристики.

Приведенную объемную плотность $\langle \rho \rangle$, массовую $\langle c_{\varepsilon m} \rangle$ и объемную $\langle c_{\varepsilon} \rangle$ теплоемкость квазигомогенного вещества представительного элемента армирующего слоя определим по формулам, аналогичным (2.2.1), (2.2.2):

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{2} (\langle \rho^I \rangle + \langle \rho^{II} \rangle), \quad (2.2.8)$$

$$\langle c_{\varepsilon m} \rangle = \frac{1}{2 \langle \rho \rangle} (\langle \rho^I \rangle \langle c_{\varepsilon m}^I \rangle + \langle \rho^{II} \rangle \langle c_{\varepsilon m}^{II} \rangle), \quad \langle c_{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \rho^I \rangle \langle c_{\varepsilon}^I \rangle + \langle \rho^{II} \rangle \langle c_{\varepsilon}^{II} \rangle). \quad (2.2.9)$$

Используя характеристики (2.2.9) из (1.2), выводим:

$$\nabla_i \langle T \rangle = \bar{\omega} \nabla_i \langle T^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \nabla_i \langle T^{II} \rangle, \quad (2.2.10)$$

$$\langle \Theta_i \rangle = - [\bar{\omega} \langle \Theta_i^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Theta_i^{II} \rangle] \quad (i = 1, 2, 3), \quad \bar{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\langle c_{\varepsilon}^I \rangle}{\langle c_{\varepsilon} \rangle}. \quad (2.2.11)$$

В силу допущения 2 имеем:

$$\langle \Theta_i \rangle = - \langle \Lambda_{ij} \rangle \nabla_j \langle T \rangle. \quad (2.2.12)$$

Здесь $\langle \Lambda \rangle$ – неизвестный тензор интегральных коэффициентов теплопроводности армирующего слоя. Для его определения необходимо найти линейную зависимость величин $\langle \Theta_i \rangle$ в (2.2.11) от $\nabla_i \langle T \rangle$ в (2.2.10).

В силу допущения 4 на поверхности Γ раздела фаз арматуры и связующего выполнены условия идеального контакта по температуре [14], [15]:

$$\langle T^I \rangle = \langle T^{II} \rangle, \quad \langle \Lambda_{22}^I \rangle \nabla_2 \langle T^I \rangle = \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle \nabla_2 \langle T^{II} \rangle, \quad (2.2.13)$$

направление нормали совпадает с направлением оси $O\hat{x}^2$.

Дифференцируя обе части первого из равенств (2.2.13) по \hat{x}^1, \hat{x}^3 , получаем:

$$\nabla_1 \langle T^I \rangle = \nabla_1 \langle T^{II} \rangle, \quad \nabla_3 \langle T^I \rangle = \nabla_3 \langle T^{II} \rangle, \quad \langle \Lambda_{22}^I \rangle \nabla_2 \langle T^I \rangle = \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle \nabla_2 \langle T^{II} \rangle. \quad (2.2.14)$$

Зависимости (2.2.10), (2.2.14) вместе составляют систему шести линейных алгебраических уравнений. Решив эту систему, получаем:

$$\begin{aligned} \nabla_1 \langle T^I \rangle &= \nabla_1 \langle T^{II} \rangle = \nabla_1 \langle T \rangle, \quad \nabla_3 \langle T^I \rangle = \nabla_3 \langle T^{II} \rangle = \nabla_3 \langle T \rangle, \\ \nabla_2 \langle T^I \rangle &= \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle I_3^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle, \quad \nabla_2 \langle T^{II} \rangle = \langle \Lambda_{22}^I \rangle I_3^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle, \quad I_3 = \bar{\omega} \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{22}^I \rangle. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Подставляя (2.2.15) в (2.2.11), приходим к соотношениям:

$$\langle \Theta_1 \rangle = - [\bar{\omega} \Lambda_{11}^I + (1 - \bar{\omega}) \Lambda_{11}^{II}] \nabla_1 \langle T \rangle, \quad I_3 = \bar{\omega} \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{22}^I \rangle,$$

$$\langle \Theta_2 \rangle = - [\langle \Lambda_{22}^I \rangle \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle I_3^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle + (\bar{\omega} \langle \Lambda_{23}^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{23}^{II} \rangle) \nabla_3 \langle T \rangle],$$

$$\langle \Theta_3 \rangle = - [(\bar{\omega} \langle \Lambda_{32}^I \rangle \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{32}^{II} \rangle \langle \Lambda_{22}^I \rangle) I_3^{-1} \nabla_2 \langle T \rangle +$$

$$(\bar{\omega} \langle \Lambda_{33}^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{33}^{II} \rangle) \nabla_3 \langle T \rangle]. \quad (2.2.16)$$

Сравнивая (2.2.16) с (2.2.12) и учитывая (2.2.7), находим:

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda_{11} \rangle &= \bar{\omega} \langle \Lambda_{11}^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{11}^{II} \rangle = \langle \Lambda_{11}^I \rangle, \quad \langle \Lambda_{12} \rangle = \langle \Lambda_{13} \rangle = \langle \Lambda_{21} \rangle = \langle \Lambda_{31} \rangle = 0, \\
\langle \Lambda_{22} \rangle &= \langle \Lambda_{22}^I \rangle \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle I_3^{-1} = \langle \Lambda_{22}^I \rangle, \quad \langle \Lambda_{23} \rangle = \bar{\omega} \langle \Lambda_{23}^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{23}^{II} \rangle, \\
\langle \Lambda_{33} \rangle &= \bar{\omega} \langle \Lambda_{33}^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{33}^{II} \rangle = \langle \Lambda_{33}^I \rangle, \\
\langle \Lambda_{32} \rangle &= \bar{\omega} \langle \Lambda_{32}^I \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{32}^{II} \rangle.
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Переходим к определению компонент тензора линейной теплопроводности представительного элемента армированного слоя. В силу допущений 1, 2 считаем, что квазиоднородный анизотропный материал элементарного армирующего слоя подчиняется закону Фурье для анизотропных сред (2.2.12), (2.2.17), а материал прослоек связующего, дополняющего этот параллелепипед до представительного элемента армированного слоя ($ABCD A'B'C'D'$), подчиняется линейному закону теплопроводности Фурье (1.1).

Повторяя почти дословно рассуждения (2.1.12)–(2.1.21), получаем:

$$\begin{aligned}
\langle \langle \Lambda_{11} \rangle \rangle &= \bar{\omega} \bar{\omega}_z \langle \Lambda_{11} \rangle + (1 - \bar{\omega} \bar{\omega}_z) \lambda_c, \quad \langle \Lambda_{12} \rangle = \langle \Lambda_{13} \rangle = \langle \Lambda_{21} \rangle = \langle \Lambda_{31} \rangle = 0, \\
\langle \langle \Lambda_{22} \rangle \rangle &= \bar{\omega}_z \langle \Lambda_{22}^I \rangle \langle \Lambda_{22}^{II} \rangle I_3^{-1} + (1 - \bar{\omega}_z) \lambda_c, \quad \langle \langle \Lambda_{23} \rangle \rangle = \bar{\omega}_z \lambda_c \langle \Lambda_{23} \rangle I_2^{-1}, \\
\langle \langle \Lambda_{33} \rangle \rangle &= \lambda_c \langle \Lambda_{33} \rangle I_2^{-1}, \quad \langle \langle \Lambda_{32} \rangle \rangle = \bar{\omega}_z \langle \Lambda_{32} \rangle.
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

1.3 Армирующие волокна шестиугольного сечения. Рассмотрим однонаправленно армированный слой, армирующее волокно в котором имеет в поперечном сечении форму правильного шестиугольника.

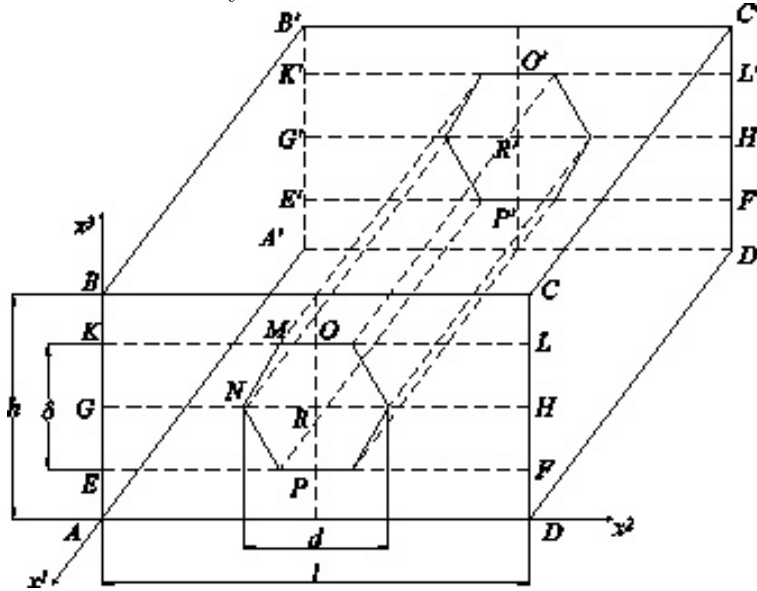


Рис. 3. Армирующее волокно шестиугольного сечения

Формулами

$$\omega = d/l, \quad \omega_z = \delta/h$$

вводим параметры армирования – интенсивность армирования в плоскости слоя (ω), по его высоте (ω_z) и угол $\varphi = \pi/3$ (угол MNR на рис. 3). Оси прямоугольной декартовой системы координат $x^1, x^2, x^3 = z$ направим, как показано на рис. 3. Представительный элемент армирующего слоя (параллелепипед $EFLKE'F'L'K'$) разделим на 2 части и рассмотрим отдельно характеристики каждой их них.

Аналогично рассмотренному выше случаю треугольного сечения разделим параллелепипед $KLHGK'L'H'G'$ плоскостью $OPP'O'$ и найдем средние характеристики каждого из получившихся параллелепипедов отдельно.

Рассмотрим параллелепипед $KORGK'O'R'G'$. Величины, относящиеся к этой области, будем обозначать индексом «1a».

Повторяя рассуждения (2.1.1)–(2.1.11), получаем:

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_{11}^{10} \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \langle \Lambda_{12}^{10} \rangle = \langle \Lambda_{13}^{10} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{10} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{10} \rangle = 0, \\ \langle \Lambda_{22}^{10} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{23}^{10} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{10} \rangle = l_1 l_2 \bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{33}^{10} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c)) + B] I_1^{-1}, \\ \bar{\omega} &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})} \frac{c_\varepsilon^a}{\langle c_\varepsilon \rangle} \omega.\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

Рассмотрим параллелепипед $OLHRO'L'H'R'$. Величины, относящиеся к этой области, будем обозначать индексом «1b».

Повторяя рассуждения (2.2.4)–(2.2.6), получаем:

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_{11}^{1b} \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \langle \Lambda_{12}^{1b} \rangle = \langle \Lambda_{13}^{1b} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{1b} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{1b} \rangle = 0, \\ \langle \Lambda_{22}^{1b} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} ((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c ((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{23}^{1b} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{1b} \rangle = -l_1 l_2 \bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{33}^{1b} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} ((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c ((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c)) + B] I_1^{-1}, \\ \bar{\omega} &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})} \frac{c_\varepsilon^a}{\langle c_\varepsilon \rangle} \omega.\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

Легко заметить, что выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_{11}^{1a} \rangle &= \langle \Lambda_{11}^{1b} \rangle, \langle \Lambda_{22}^{1a} \rangle = \langle \Lambda_{22}^{1b} \rangle, \langle \Lambda_{33}^{1a} \rangle = \langle \Lambda_{33}^{1b} \rangle, \\ \langle \Lambda_{23}^{1a} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{1a} \rangle = -\langle \Lambda_{23}^{1b} \rangle = -\langle \Lambda_{32}^{1b} \rangle.\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

Рассмотрим теперь параллелепипед $KLHGK'L'H'G'$ и найдем его осредненные характеристики.

Повторяя рассуждения (2.2.8)–(2.2.17), получаем:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^1 \rangle &= \langle \Lambda_{11}^{1a} \rangle, \langle \Lambda_{22}^1 \rangle = \langle \Lambda_{22}^{1a} \rangle, \langle \Lambda_{33}^1 \rangle = \langle \Lambda_{33}^{1a} \rangle, \\ \langle \Lambda_{23}^1 \rangle &= \bar{\omega} \langle \Lambda_{23}^{1a} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{23}^{1b} \rangle, \langle \Lambda_{32}^1 \rangle = \bar{\omega} \langle \Lambda_{32}^{1a} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{32}^{1b} \rangle, \\ \langle \Lambda_{12}^1 \rangle &= \langle \Lambda_{13}^1 \rangle = \langle \Lambda_{21}^1 \rangle = \langle \Lambda_{31}^1 \rangle = 0, \bar{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\langle c_\varepsilon^I \rangle}{\langle c_\varepsilon \rangle}. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Область $GHFEG'H'F'E'$ аналогична рассмотренной выше области $KLHGK'L'H'G'$. Поэтому приведем только основные получившиеся формулы. Разделим параллелепипед $GHFEG'H'F'E'$ плоскостью $OPP'O'$. Величины, относящиеся к этим областям $GRPEG'R'P'E'$ и $RHFPR'H'F'P'$, будем обозначать индексами «2a» и «2b» соответственно и найдем средние характеристики каждого из получившихся параллелепипедов отдельно.

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^{2a} \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \langle \Lambda_{12}^{2a} \rangle = \langle \Lambda_{13}^{2a} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{2a} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{2a} \rangle = 0, \\ \langle \Lambda_{22}^{2a} \rangle &= \left[\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) \left(\lambda_{a2} \left((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c \right) + \lambda_c \left((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2} \right) \right) + B \right] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{23}^{2a} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{2a} \rangle = -l_1 l_2 \omega (1 - \omega) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{33}^{2a} \rangle &= \left[\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) \left(\lambda_{a2} \left((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2} \right) + \lambda_c \left((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c \right) \right) + B \right] I_1^{-1}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^{2b} \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \langle \Lambda_{12}^{2b} \rangle = \langle \Lambda_{13}^{2b} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{2b} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{2b} \rangle = 0, \\ \langle \Lambda_{22}^{2b} \rangle &= \left[\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) \left(\lambda_{a2} \left(l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c \right) + \lambda_c \left(l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2} \right) \right) + B \right] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{33}^{2b} \rangle &= \left[\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) \left(\lambda_{a2} \left(l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2} \right) + \lambda_c \left(l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c \right) \right) + B \right] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{23}^{2b} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{2b} \rangle = l_1 l_2 \omega (1 - \omega) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 I_1^{-1}, \bar{\omega} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})} \frac{c_\varepsilon^a}{\langle c_\varepsilon \rangle} \omega. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^2 \rangle &= \langle \Lambda_{11}^{2a} \rangle, \langle \Lambda_{22}^2 \rangle = \langle \Lambda_{22}^{2a} \rangle, \langle \Lambda_{33}^2 \rangle = \langle \Lambda_{33}^{2a} \rangle, \\ \langle \Lambda_{23}^2 \rangle &= \bar{\omega} \langle \Lambda_{23}^{2a} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{23}^{2b} \rangle, \langle \Lambda_{32}^2 \rangle = \bar{\omega} \langle \Lambda_{32}^{2a} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{32}^{2b} \rangle, \\ \langle \Lambda_{12}^2 \rangle &= \langle \Lambda_{13}^2 \rangle = \langle \Lambda_{21}^2 \rangle = \langle \Lambda_{31}^2 \rangle = 0, \bar{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\langle c_\varepsilon^I \rangle}{\langle c_\varepsilon \rangle}. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Переходим к определению компонент тензора линейной теплопроводности представительного элемента армированного слоя (параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$ на рис. 4). Процесс осреднения аналогичен (2.2.8)–(2.2.18).

Во многих случаях мы имеем дело с многослойными слоистыми конструкциями. Поэтому необходимо рассмотреть случай нескольких тел. Формулы (1.2), для случая N тел преобразуются следующим образом [12]:

$$T = \sum_i \left[\left(\sum_j c_j m_j \right)^{-1} c_i m_i T_i \right], \Theta = \sum_i \left[\left(\sum_j c_j m_j \right)^{-1} c_i m_i \Theta_i \right]. \quad (2.3.8)$$

Здесь c_i , m_i , T_i , Θ_i – удельная массовая теплоемкость, масса, температура, вектор плотности теплового потока для i -го тела соответственно. Здесь и далее (если не указаны пределы суммирования) суммирование ведется от единицы до 3.

Для определения эффективных коэффициентов теплопроводности необходимо установить связь между осредненным тепловым потоком $\langle\langle \Theta \rangle\rangle$ и градиентом осредненной температуры $\nabla \langle\langle T \rangle\rangle$.

Приведенную объемную плотность $\langle\langle \rho \rangle\rangle$ определяем по формуле, аналогичной (2.1.1):

$$\langle\langle \rho \rangle\rangle = \sum_i \Omega_i \langle \rho \rangle^{(i)}. \quad (2.3.9)$$

Здесь $\Omega_i = \frac{h_i}{h}$ – удельная толщина i -й области, h_i – толщина i -й области, $\langle \rho \rangle^{(i)}$ – осредненная объемная плотность i -й области. Здесь и далее в угловых скобках с индексом сверху будем обозначать величины, осредненные по объему i -й области, а в двойных угловых скобках без индекса – величины, осредненные по всему представительному элементу армированного слоя. Областью с номером «3» обозначим прослойки связующего ($BCLKB'C'L'K'$ и $EFDAE'F'D'A'$). Отметим, что:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \frac{\omega_z}{2}, \Omega_3 = 1 - \omega_z.$$

Приведенную массовую $\langle\langle c_{em} \rangle\rangle$ и объемную $\langle\langle c_\varepsilon \rangle\rangle$ теплоемкости найдем по формулам:

$$\langle\langle c_{em} \rangle\rangle = \frac{1}{\langle\langle \rho \rangle\rangle} \sum_i \Omega_i \langle \rho \rangle^{(i)} \langle c_{em} \rangle^{(i)}, \langle\langle c_\varepsilon \rangle\rangle = \sum_i \Omega_i \langle \rho \rangle^{(i)} \langle c_{em} \rangle^{(i)}. \quad (2.3.10)$$

Из выражений (2.3.8), использованных для осреднения температуры и вектора плотности теплового потока для нескольких слоев, с учетом характеристик (2.3.10) и закона теплопроводности Фурье (1.1), получим:

$$\nabla_i \langle\langle T \rangle\rangle = \sum_j \bar{\Omega}_j \nabla_i \langle T \rangle^{(j)}, \bar{\Omega}_i = \frac{\langle c_\varepsilon \rangle^{(i)}}{\langle\langle c_\varepsilon \rangle\rangle} \Omega_i, \quad (2.3.11)$$

$$\langle\langle \Theta_1 \rangle\rangle = - \sum_k \bar{\Omega}_k \langle \Lambda_{11}^{(k)} \rangle \nabla_1 \langle T \rangle^{(k)},$$

$$\langle\langle \Theta_i \rangle\rangle = - \left[\sum_k \bar{\Omega}_k \langle \Lambda_{i2}^{(k)} \rangle \nabla_2 \langle T \rangle^{(k)} + \sum_k \bar{\Omega}_k \langle \Lambda_{i3}^{(k)} \rangle \nabla_3 \langle T \rangle^{(k)} \right], \quad i = 2, 3. \quad (2.3.12)$$

Здесь $\langle \Lambda^{(k)} \rangle$ – тензор интегральных коэффициентов теплопроводности k -й области ($k = 1, 2, 3$).

На поверхностях $\Gamma|_{km}$ контакта между областями заданы условия идеального теплового контакта:

$$\langle T \rangle^{(k)} \Big|_{km} = \langle T \rangle^{(m)} \Big|_{km}, \quad (2.3.13)$$

$$\left\langle \Lambda_{33}^{(k)} \right\rangle \nabla_3 \langle T \rangle^{(k)} \Big|_{km} = \left\langle \Lambda_{33}^{(m)} \right\rangle \nabla_3 \langle T \rangle^{(m)} \Big|_{km}, \quad k = 1, 2, \quad m = k + 1. \quad (2.3.14)$$

Условия (2.3.13), (2.3.14) можно заменить эквивалентными [1]:

$$\langle T \rangle^{(k)} = \langle T \rangle^{(1)}, \quad \left\langle \Lambda_{33}^{(k)} \right\rangle \nabla_3 \langle T \rangle^{(k)} = \left\langle \Lambda_{33}^{(1)} \right\rangle \nabla_3 \langle T \rangle^{(1)}, \quad k = 2, 3. \quad (2.3.15)$$

Дифференцируя обе части равенства первого из равенств (2.3.15) по x^1, x^2 , приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned} \nabla_1 \langle T \rangle^{(k)} &= \nabla_1 \langle T \rangle^{(1)}, \quad \nabla_2 \langle T \rangle^{(k)} = \nabla_2 \langle T \rangle^{(1)}, \\ \nabla_3 \langle T \rangle^{(k)} \left\langle \Lambda_{33}^{(k)} \right\rangle &= \nabla_3 \langle T \rangle^{(1)} \left\langle \Lambda_{33}^{(1)} \right\rangle, \quad k = 2, 3. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Зависимости (2.3.11), (2.3.16) вместе составляют систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных величин $\nabla_i \langle T \rangle^{(k)}$ ($i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3$).

Решая систему, получаем:

$$\begin{aligned} \nabla_1 \langle\langle T \rangle\rangle &= \sum_i \bar{\Omega}_i \nabla_1 \langle T \rangle^{(1)} = \nabla_1 \langle T \rangle^{(1)}, \quad \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle = \sum_i \bar{\Omega}_i \nabla_2 \langle T \rangle^{(1)} = \nabla_2 \langle T \rangle^{(1)}, \\ \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle &= \sum_i \bar{\Omega}_i \frac{\left\langle \Lambda_{33}^{(1)} \right\rangle}{\left\langle \Lambda_{33}^{(i)} \right\rangle} \nabla_3 \langle T \rangle^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Подставляя (2.3.17) в (2.3.12) и исключая из выражений зависимость от $\nabla_i \langle T \rangle^{(1)}$, получаем:

$$\begin{aligned} \langle\langle \Theta_1 \rangle\rangle &= - \left[\sum_k \bar{\Omega}_k \left\langle \Lambda_{11}^{(k)} \right\rangle \nabla_1 \langle T \rangle \right], \\ \langle\langle \Theta_2 \rangle\rangle &= - \left[\sum_k \bar{\Omega}_k \left\langle \Lambda_{22}^{(k)} \right\rangle \nabla_2 \langle T \rangle + \sum_k \bar{\Omega}_k \frac{\left\langle \Lambda_{23}^{(k)} \right\rangle}{\left\langle \Lambda_{33}^{(k)} \right\rangle} \left(\sum_j \frac{\bar{\Omega}_j}{\left\langle \Lambda_{33}^{(j)} \right\rangle} \right)^{-1} \nabla_3 \langle T \rangle \right], \\ \langle\langle \Theta_3 \rangle\rangle &= - \left[\sum_k \bar{\Omega}_k \left\langle \Lambda_{32}^{(k)} \right\rangle \nabla_2 \langle T \rangle + \left(\sum_k \frac{\bar{\Omega}_k}{\left\langle \Lambda_{33}^{(k)} \right\rangle} \right)^{-1} \nabla_3 \langle T \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Сравнивая (2.3.18) с (2.3.12), получаем:

$$\begin{aligned} \langle\langle \Lambda_{11} \rangle\rangle &= \sum_k \bar{\Omega}_k \left\langle \Lambda_{11}^{(k)} \right\rangle, \quad \langle\langle \Lambda_{22} \rangle\rangle = \sum_k \bar{\Omega}_k \left\langle \Lambda_{22}^{(k)} \right\rangle, \quad \langle\langle \Lambda_{33} \rangle\rangle = \left(\sum_k \frac{\bar{\Omega}_k}{\left\langle \Lambda_{33}^{(k)} \right\rangle} \right)^{-1}, \\ \langle\langle \Lambda_{23} \rangle\rangle &= \sum_k \bar{\Omega}_k \frac{\left\langle \Lambda_{23}^{(k)} \right\rangle}{\left\langle \Lambda_{33}^{(k)} \right\rangle} \left(\sum_j \frac{\bar{\Omega}_j}{\left\langle \Lambda_{33}^{(j)} \right\rangle} \right)^{-1}, \quad \langle\langle \Lambda_{32} \rangle\rangle = \sum_k \bar{\Omega}_k \left\langle \Lambda_{32}^{(k)} \right\rangle, \\ \langle\langle \Lambda_{12} \rangle\rangle &= \langle\langle \Lambda_{13} \rangle\rangle = \langle\langle \Lambda_{21} \rangle\rangle = \langle\langle \Lambda_{31} \rangle\rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Здесь $\langle \Lambda_{ij}^{(k)} \rangle$ задаются выражениями (2.3.4), (2.3.7),

$$\langle \Lambda_{11}^3 \rangle = \langle \Lambda_{22}^3 \rangle = \langle \Lambda_{33}^3 \rangle = \lambda_c, \quad \langle \Lambda_{ij}^3 \rangle = 0 \quad (i \neq j).$$

1.4 Армирующие волокна восьмиугольного сечения. Рассмотрим однонаправленно армированный слой, армирующее волокно в котором имеет в поперечном сечении форму правильного восьмиугольника.

Формулами

$$\omega = d/l, \quad \omega_z = \delta/h$$

вводим параметры армирования – интенсивность армирования в плоскости слоя (ω), по его высоте (ω_z), и угол $\varphi = \pi/4$ (угол TSQ на рис. 4). Оси прямоугольной декартовой системы координат $x^1, x^2, x^3 = z$ направим, как показано на рис. 4.

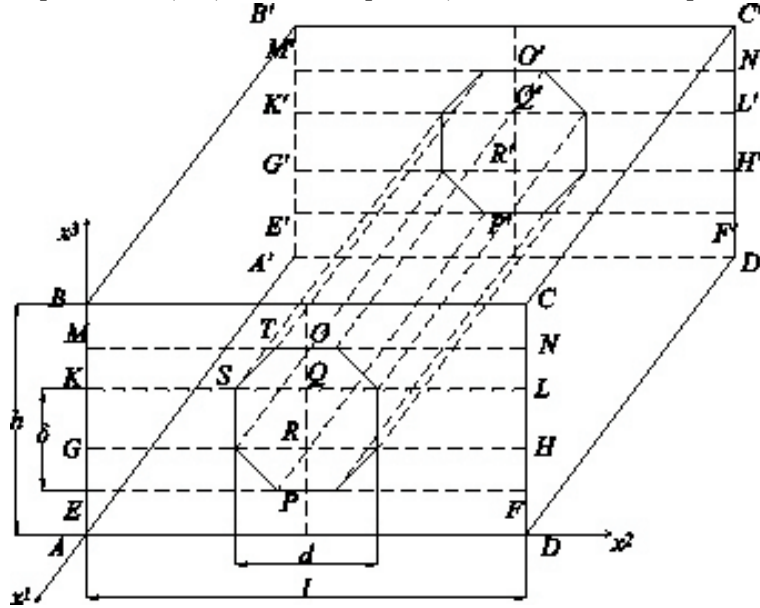


Рис. 4. Армирующее волокно восьмиугольного сечения

Представительный элемент армирующего слоя (параллелепипед $EMNFE'M'N'F'$) разделим плоскостями $KLK'L'$, $GHG'H'$ на 3 части и рассмотрим отдельно характеристики каждой из них.

Аналогично рассмотренному выше случаю треугольного сечения разделим параллелепипед $MNLKM'N'L'K'$ плоскостью $OPP'O'$ и найдем средние характеристики каждого из получившихся параллелепипедов отдельно.

Рассмотрим параллелепипед $MOQKM'O'Q'K'$. Величины, относящиеся к этой области, будем обозначать индексом «1а».

Повторяя рассуждения (2.1.1)–(2.1.11), получаем:

$$\langle \Lambda_{11}^{10} \rangle = \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c,$$

$$\langle \Lambda_{22}^{10} \rangle = [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B] I_1^{-1},$$

$$\langle \Lambda_{23}^{10} \rangle = \langle \Lambda_{32}^{10} \rangle = l_1 l_2 \omega (1 - \omega) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 A_1^{-1},$$

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{33}^{10} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c)) + B] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{12}^{10} \rangle &= \langle \Lambda_{13}^{10} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{10} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{10} \rangle = 0, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{c_\varepsilon^a}{\langle c_\varepsilon \rangle} \omega. \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Рассмотрим параллелепипед $ONLQO'N'L'Q'$ (область «1b»). Повторяя рассуждения (2.2.4)–(2.2.6), получаем:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^{1b} \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \\ \langle \Lambda_{22}^{1b} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} ((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c ((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{23}^{1b} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{1b} \rangle = -l_1 l_2 \omega (1 - \omega) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{33}^{1b} \rangle &= [\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} ((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c ((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c)) + B] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{12}^{1b} \rangle &= \langle \Lambda_{13}^{1b} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{1b} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{1b} \rangle = 0, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{c_\varepsilon^a}{\langle c_\varepsilon \rangle} \omega. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Легко заметить, что выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^{1a} \rangle &= \langle \Lambda_{11}^{1b} \rangle, \quad \langle \Lambda_{22}^{1a} \rangle = \langle \Lambda_{22}^{1b} \rangle, \quad \langle \Lambda_{33}^{1a} \rangle = \langle \Lambda_{33}^{1b} \rangle, \\ \langle \Lambda_{23}^{1a} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{1a} \rangle = -\langle \Lambda_{23}^{1b} \rangle = -\langle \Lambda_{32}^{1b} \rangle. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Рассмотрим теперь параллелепипед $MNLKM'N'L'K$ и найдем его осредненные характеристики.

Повторяя рассуждения (2.2.8)–(2.2.17), получаем:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^1 \rangle &= \langle \Lambda_{11}^{1a} \rangle, \quad \langle \Lambda_{22}^1 \rangle = \langle \Lambda_{22}^{1a} \rangle, \quad \langle \Lambda_{33}^1 \rangle = \langle \Lambda_{33}^{1a} \rangle, \\ \langle \Lambda_{23}^1 \rangle &= \bar{\omega} \langle \Lambda_{23}^{1a} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{23}^{1b} \rangle, \\ \langle \Lambda_{32}^1 \rangle &= \bar{\omega} \langle \Lambda_{32}^{1a} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{32}^{1b} \rangle, \\ \langle \Lambda_{12}^1 \rangle &= \langle \Lambda_{13}^1 \rangle = \langle \Lambda_{21}^1 \rangle = \langle \Lambda_{31}^1 \rangle = 0, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\langle c_\varepsilon^I \rangle}{\langle c_\varepsilon \rangle}. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Рассмотрим параллелепипед $KLHGK'L'H'G'$ (область «2») и найдем его средние характеристики. Формулы для компонент тензора теплопроводности можно найти в [4]:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^2 \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \\ \langle \Lambda_{22}^2 \rangle &= \lambda_{a2} \lambda_c I_1^{-1}, \end{aligned}$$

$$\langle \Lambda_{33}^2 \rangle = \bar{\omega} \lambda_{a2} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \langle \Lambda_{ij}^2 \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, 3; \quad i \neq j). \quad (2.5.5)$$

Область $GHFEG'H'F'E'$ аналогична рассмотренной выше области $MNLKM'N'L'K'$. Поэтому приведем только основные получившиеся формулы. Разделим параллелепипед $GHFEG'H'F'E'$ плоскостью $OPP'O'$ (области «3a» и «3b») и найдем средние характеристики каждого из получившихся параллелепипедов отдельно.

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11}^{3a} \rangle &= \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \langle \Lambda_{12}^{3a} \rangle = \langle \Lambda_{13}^{3a} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{3a} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{3a} \rangle = 0, \\ \langle \Lambda_{22}^{3a} \rangle &= \left[\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) \left(\lambda_{a2} \left((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c \right) + \lambda_c \left((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2} \right) \right) + B \right] I_1^{-1}, \\ \langle (\Lambda_{23})^{3a} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{3a} \rangle = -l_1 l_2 \omega (1 - \omega) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{33}^{3a} \rangle &= \left[\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) \left(\lambda_{a2} \left((-l_1)^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2} \right) + \lambda_c \left((-l_1)^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c \right) \right) + B \right] I_1^{-1}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

$$\langle \Lambda_{11}^{3b} \rangle = \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c,$$

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{22}^{3b} \rangle &= \left[\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2})) + B \right] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{23}^{3b} \rangle &= \langle \Lambda_{32}^{3b} \rangle = l_1 l_2 \omega (1 - \omega) (\lambda_{a2} - \lambda_c)^2 I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{33}^{3b} \rangle &= \left[\bar{\omega} (1 - \bar{\omega}) (\lambda_{a2} (l_1^2 \lambda_c + l_2^2 \lambda_{a2}) + \lambda_c (l_1^2 \lambda_{a2} + l_2^2 \lambda_c)) + B \right] I_1^{-1}, \\ \langle \Lambda_{12}^{3b} \rangle &= \langle \Lambda_{13}^{3b} \rangle = \langle \Lambda_{21}^{3b} \rangle = \langle \Lambda_{31}^{3b} \rangle = 0, \bar{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{c_\varepsilon^a}{\langle c_\varepsilon \rangle} \omega. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

$$\langle \Lambda_{11}^3 \rangle = \langle \Lambda_{11}^{3a} \rangle, \langle \Lambda_{22}^3 \rangle = \langle \Lambda_{22}^{3a} \rangle, \langle \Lambda_{33}^3 \rangle = \langle \Lambda_{33}^{3a} \rangle,$$

$$\langle \Lambda_{23}^3 \rangle = \bar{\omega} \langle \Lambda_{23}^{3a} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{23}^{3b} \rangle, \langle \Lambda_{32}^3 \rangle = \bar{\omega} \langle \Lambda_{32}^{3a} \rangle + (1 - \bar{\omega}) \langle \Lambda_{32}^{3b} \rangle,$$

$$\langle \Lambda_{12}^3 \rangle = \langle \Lambda_{13}^3 \rangle = \langle \Lambda_{21}^3 \rangle = \langle \Lambda_{31}^3 \rangle = 0, \bar{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\langle c_\varepsilon^I \rangle}{\langle c_\varepsilon \rangle}. \quad (2.5.8)$$

Определение осредненных характеристик представительного элемента армированного слоя (параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$) выполняется аналогично (2.3.8)–(2.3.19), поэтому ограничимся лишь конечными формулами:

$$\begin{aligned} \langle \langle \Lambda_{11} \rangle \rangle &= \sum_k \bar{\Omega}_k \langle \Lambda_{11}^{(k)} \rangle, \langle \langle \Lambda_{22} \rangle \rangle = \bar{\Omega}_k \langle \Lambda_{22}^{(k)} \rangle, \langle \langle \Lambda_{33} \rangle \rangle = \left(\sum_k \frac{\bar{\Omega}_k}{\langle \Lambda_{33}^{(k)} \rangle} \right)^{-1}, \\ \langle \langle \Lambda_{23} \rangle \rangle &= \sum_k \bar{\Omega}_k \frac{\langle \Lambda_{23}^{(k)} \rangle}{\langle \Lambda_{33}^{(k)} \rangle} \left(\sum_j \frac{\bar{\Omega}_j}{\langle \Lambda_{33}^{(j)} \rangle} \right)^{-1}, \langle \langle \Lambda_{32} \rangle \rangle = \sum_k \bar{\Omega}_k \langle \Lambda_{32}^{(k)} \rangle. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Суммирование по k ведется от 1 до 4,

$$\Omega_1 = \Omega_3 = \frac{\omega_z}{2 + \sqrt{2}}, \Omega_2 = \frac{\omega_z}{1 + \sqrt{2}}, \Omega_4 = 1 - \omega_z.$$

Индекс при Ω_i соответствует номеру области. $\langle \Lambda_{ij}^{(k)} \rangle$ задаются выражениями (2.5.4), (2.5.5), (2.5.8),

$$\langle \Lambda_{11}^4 \rangle = \langle \Lambda_{22}^4 \rangle = \langle \Lambda_{33}^4 \rangle = \lambda_c, \quad \langle \Lambda_{ij}^4 \rangle = 0 \quad (i \neq j).$$

2. Аппроксимация круглого сечения многоугольниками. Выполним аппроксимацию круглого (в сечении) армирующего волокна серией многоугольников: квадратами, правильными шести- и восьмиугольниками. Будем строить вписанные в окружность и описанные вокруг нее многоугольники.

2.1 Аппроксимация квадратами. Зададим объемную интенсивность армирования формулой (рис. 5):

$$w = \frac{\pi r^2}{l^2}. \quad (3.1.1)$$

Интенсивности армирования волокнами квадратного сечения зададим формулами (ω_1 для вписанного квадрата, ω_2 для описанного) (рис. 5):

$$\omega_1 = \frac{a}{l} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{w}{\pi}}, \quad \omega_2 = \frac{A}{l} = 2 \sqrt{\frac{w}{\pi}}. \quad (3.1.2)$$

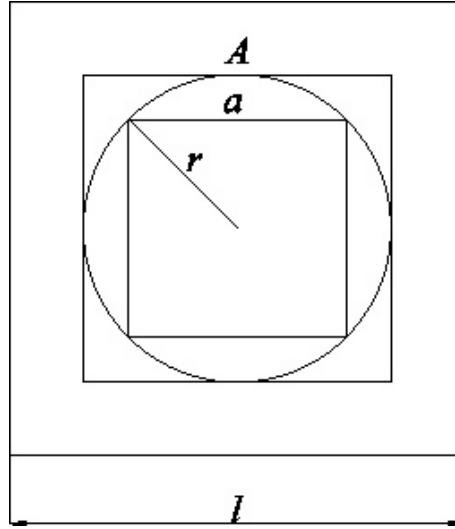


Рис. 5. Аппроксимация квадратами

Для коэффициентов тензора теплопроводности будем иметь [4]:

$$\Lambda_{11} = \bar{\omega} \bar{\omega}_z \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega} \bar{\omega}_z) \lambda_c, \quad \Lambda_{22} = \lambda_c \frac{\bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z) \lambda_c + (1 - \bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z)) \lambda_{a2}}{\bar{\omega} \lambda_c + (1 - \bar{\omega}) \lambda_{a2}},$$

$$\Lambda_{33} = \lambda_c \frac{\bar{\omega} \lambda_{a2} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c}{\bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z) \lambda_{a2} + (1 - \bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z)) \lambda_c}, \quad \Lambda_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j. \quad (3.1.3)$$

Здесь в качестве частного случая принимаем $\omega = \omega_z = \omega_k$ ($k = 1, 2$ для вписанного и описанного квадратов соответственно).

2.2 Аппроксимация шестиугольниками. Объемную интенсивность армирования формулой (3.1.1) (рис. 6).

Интенсивности армирования волокнами шестиугольного сечения зададим формулами (ω_1 для вписанного шестиугольника, ω_2 для описанного):

$$\omega_1 = \frac{d}{l} = 2\sqrt{\frac{w}{\pi}}, \quad \omega_2 = \frac{D}{l} = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{w}{\pi}}. \quad (3.2.1)$$

Коэффициенты тензора теплопроводности определяются по формулам (2.3.19).

2.3 Аппроксимация восьмиугольниками. Зададим объемную интенсивность армирования формулой (3.1.1) (рис. 7):

$$w = \frac{\pi r^2}{l^2}.$$

Интенсивности армирования волокнами восьмиугольного сечения зададим формулами (ω_1 для вписанного восьмиугольника, ω_2 для описанного):

$$\omega_1 = \frac{d}{l} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}\sqrt{\frac{w}{\pi}}, \quad \omega_2 = \frac{D}{l} = 2\sqrt{\frac{w}{\pi}}. \quad (3.3.1)$$

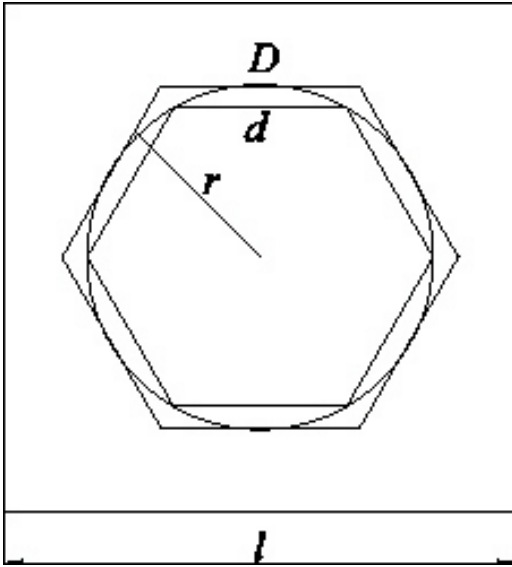


Рис. 6. Аппроксимация шестиугольниками

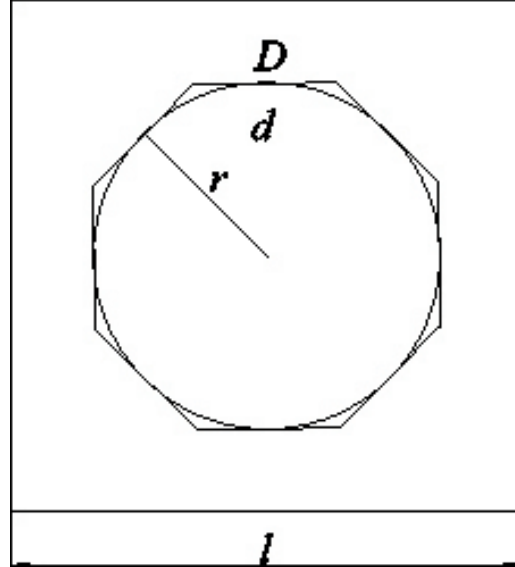


Рис. 7. Аппроксимация восьмиугольниками

Коэффициенты тензора теплопроводности определяются по формулам (2.5.9).

Для верификации данных используем физико-механические характеристики одного из известных композитных материалов, для которых экспериментально найдены значения коэффициентов теплопроводности вдоль и поперек направления армирования. Используем композитный материал на основе кевлара-49 и эпоксисвязующего DER 332 / Джеффалин Т-403 [16, с. 368]: $\lambda_{a1} = 4.816 \text{ Вт} / (\text{м} \bullet \text{К})$; $\lambda_{a2} = 4.11 \text{ Вт} / (\text{м} \bullet \text{К})$; $\lambda_c = 0.133 \text{ Вт} / (\text{м} \bullet \text{К})$; $\rho_a = 1440 \text{ кг} / \text{м}^3$; $\rho_c = 1160 \text{ кг} / \text{м}^3$; $c_{em}^a = 1420 \text{ Дж} / (\text{кг} \bullet \text{К})$; $c_{em}^c = 1750 \text{ Дж} / (\text{кг} \bullet \text{К})$.

На рис. 8 приведены зависимости каждой из компонент тензора теплопроводности от объемной интенсивности армирования.

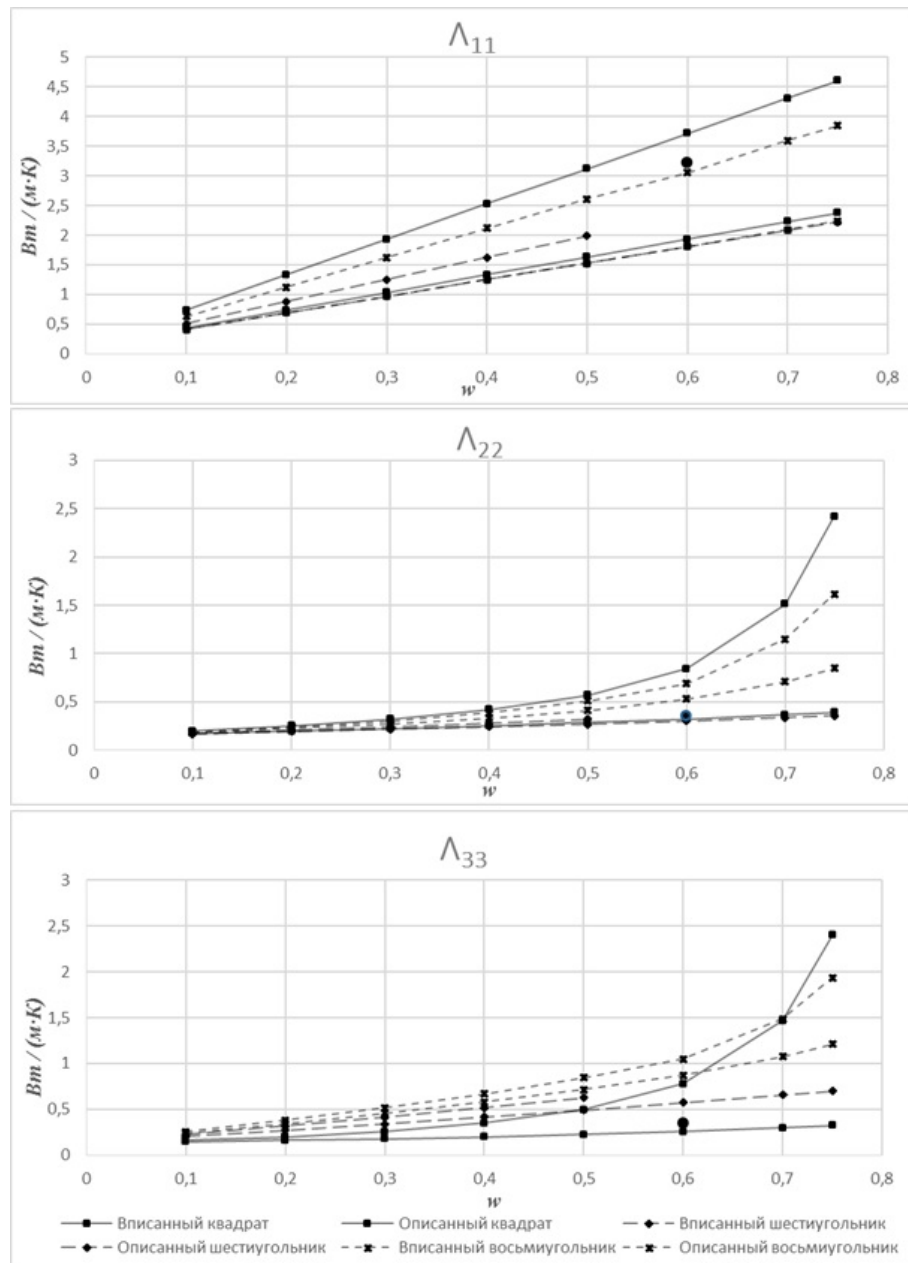


Рис. 8. Расчетные значения компонент тензора теплопроводности для различных форм армирующего волокна

По графикам видно, что коэффициент теплопроводности в продольном и поперечном направлении существенно различаются, что хорошо согласуется с экспериментальными данными [16, с. 368] и ранее построенными моделями [1]. Аппроксимация вписанным и описанным многоугольниками позволяет получить своеобразный «коридор», позволяющий получить аппроксимацию сверху и снизу. Отметим, что при относительно невысоких интенсивностях армирования аппроксимации, полученные с применением различных многоугольников, сближаются.

Заключение. Решения аналогичных задач для гибридных слоисто-волоконистых конструкций рассмотрены в работе [17]. Решение задач для тепловых полей с большими градиентами, приводящими к изменению характеристик теплового поля в пределах представительного объема, было рассмотрено в работе [18].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №15-01-00825.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В., Янковский А. П. Теплопроводность однородных и композитных тонкостенных конструкций. Новосибирск: Изд-во «Арт-Авеню», 2008. 512 с.
- [2] Андреев Александр. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrücken, Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 с.
- [3] Немировский Ю. В. К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин // Мех. полимеров. 1972. № 5. С. 861–873.
- [4] Андреев А. Н. Моделирование процессов теплопроводности в однонаправлено армированных композитных средах // Вестник КемГУ. 2015. Т. 1, № 2 (62). С. 6–10.
- [5] Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск: Наука, 2001. 288 с.
- [6] Немировский Ю. В. Янковский А. П. Моделирование процессов теплопроводности в ортогонально армированных гибридных композитах с дисперсным упрочнением связующего // Прикладная физика. 2008. № 5. С. 10–17.
- [7] Немировский Ю. В., Янковский А. П. Рациональное проектирование армированных конструкций. Новосибирск: Наука, 2002. 488 с.
- [8] Немировский Ю. В. Янковский А. П. Определение эффективных физико-механических характеристик гибридных композитов, перекрестно армированных трансверсально изотропными волокнами, и сопоставление расчетных характеристик с экспериментальными данными // Механика композитных материалов и конструкций. 2007. Т. 13, № 1. С. 3–32.
- [9] Янковский А. П. Моделирование процессов теплопроводности в пространственно армированных композитах с произвольной ориентацией волокон // Прикладная физика. Научно-технический журнал. 2011. № 3. С. 32–39.
- [10] Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел: учеб. пособие. – 3-е изд., перераб и доп. М.: Высш. шк., 2001. 550 с.
- [11] Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
- [12] Кухлинг Х. Справочник по физике. М.: Мир, 1985. 520 с.
- [13] Поль Р. В. Механика, акустика и учение о теплоте. М.: ГИТТЛ, 1957. 479 с.
- [14] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
- [15] Коляно Ю. М., Ломакин В. А., Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородных структур. М.: Наука, 1984. 368 с.
- [16] Справочник по композиционным материалам: в 2 кн. Кн. 1 / под ред. Дж. Любина. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.
- [17] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Теплопроводность пакета полиармированных слоев // Вестник КемГУ. 2015. Т. 3, № 4 (64). С. 177–183.

[18] Горынин, Г. Л. Немировский Ю. В. Математическое моделирование процесса теплопроводности для 2D-периодических композитных анизотропных материалов // Математические методы и физико-механические поля. 2014. Т. 57, № 2. С. 142 – 151.

Yu. V. Nemirovskii, A. V. Stanislavovich

THE INFLUENCE OF SHAPE AND ARRANGEMENT OF REINFORCING ELEMENTS ON THE THERMAL PROPERTIES OF REINFORCED MATERIALS

Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

Kemerovo State University, Kemerovo, Russia

Abstract. Structural model of thermal conductivity of unidirectionally reinforced layer is under consideration, which includes effective thermal and physical characteristics of fiber composites. Significant distinction of presented model is averaging of rate of heat flow by representative volume element of two-component composite material using Richmanns law of heat transfer between bodies which are in contact instead of simple mixture rule. Within selected approach different cross-sectional shapes of reinforcing fibers are under consideration: parallelogram, isosceles triangle, regular hexagon and regular octagon. Reinforcing fibers which are round in cross-section are approximated by inscribed and circumscribed polygons. Comparison of calculated values of thermal conductivity with several composite material whit knows properties is made.

Keywords: thermal conductivity, structural model, fiber composite, reinforced materials.

REFERENCES

- [1] Nemirovskii Y. V., Iankovskii A. P. The thermal conductivity of homogeneous and composite thin-walled structures. Novosibirsk: «Art-avenue», 2008. 512 p. (in Russian).
- [2] Andreev Alexander. Elasticity and thermoelasticity of layered composite shells. Mathematical model and some aspects of numerical analysis. Saarbrucken, Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 p. (in Russian).
- [3] Nemirovskii Y. V. On the theory of thermoelastic bending of reinforced shells and plates // Mechanics of polymers. 1972. № 5. P. 861–873. (in Russian).
- [4] Andreev A. N. Modelling of processes of heat conduction in unidirectionally reinforced composite environments // Bulletin of KemSU. 2015. Vol. 1, № 2 (62). P. 6–10. (in Russian).
- [5] Andreev A. N., Nemirovskii Y. V. Multilayer anisotropic shell and plates: Bend, stability, oscillations. Novosibirsk: Nauka, 2001. 288 p. (in Russian).
- [6] Nemirovskii Y. V., Iankovskii A. P. Modelling of processes of heat conduction in the orthogonal reinforced hybrid composites with disperse hardened binding material // Applied physics. 2008. №5. P. 10–17. (in Russian).

Nemirovsky Yuri Vladimirovich

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.

Stanislavovich Alexey Viacheslavovich

e-mail: alexey.st@bk.ru, Postgraduate student, Kemerovo State University, Kemerovo, Russia.

- [7] Nemirovskii Y. V., Iankovskii A. P. Rational design of reinforced structures. Novosibirsk: Nauka, 2002. 488 p. (in Russian).
- [8] Nemirovskii Y. V., Iankovskii A. P. Calculation of effective physical and mechanical properties of hybrid composites reinforced by cross transversely isotropic fibers, and a comparison of the design characteristics of the experimental data // Composite mechanics and design. 2007. Vol. 13, № 1. P. 3–32. (in Russian).
- [9] Iankovskii A. P. Modelling of processes of heat conduction in a spatially reinforced composites with unrestricted orientation of the fibers // Applied physics. 2011. № 3. P. 32–39. (in Russian).
- [10] Kartashov E. M. Analytical methods in the theory of heat conduction in solid bodies: Textbook. M.: Vyssh. Shkola., 2001. 550 p. (in Russian).
- [11] Novatekii V. Dynamic thermoelasticity problem. M.: World, 1970. 256 p. (in Russian).
- [12] Kukhling H. Physics reference book. M.: Mir, 1985. 520 p. (in Russian).
- [13] Pol R. V. Mechanics, acoustics and the study of heat. M.: GITTL, 1957. 479 p. (in Russian).
- [14] Boli B., Wayner J. The theory of thermal stress. M.: Mir, 1964. 517 p. (in Russian).
- [15] Koliano Y. M., Lomakin V. A., Podstrigach I. S. Thermoelasticity bodies non-homogeneous structures. M.: Mir, 1984. 368 p. (in Russian).
- [16] Reference book of composite materials: in 2 books. Book. 1 / edited by J. Lubin. M.: Mashinostroenie, 1988. 448 p. (in Russian).
- [17] Nemirovskii Y. V., Stanislavovich A. V. Thermal conductivity of the packet of multidirectional reinforced layers // Bulletin of KemSU. 2015. Vol. 3, № 4 (64). P. 177–183. (in Russian).
- [18] Gorynin, G. L. Nemirovskii Y. V. Mathematical modelling of heat conduction process for 2D-periodic anisotropic composite materials// Mathematical methods and physics-mechanical fields. 2014. Vol. 57, № 2. P. 142–151. (in Russian).

А. В. Манжиров^{1,2,3}, С. П. Курдина², К. Е. Казаков², И. Федотов⁴

СОГЛАСОВАННЫЙ КОНТАКТ ВЯЗКОУПРУГОГО ОСНОВАНИЯ С ШЕРОХОВАТЫМ ПОКРЫТИЕМ И КОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ОДИНАКОВЫХ ЖЕСТКИХ ШТАМПОВ

¹Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

²Московский городской технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия

³Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва, Россия

⁴Цванский университет технологии, г. Претория, ЮАР

Аннотация. При изготовлении деталей машин, механизмов и приборов для улучшения прочностных характеристик в областях предполагаемого контакта используются разнообразные покрытия. Такие покрытия наносятся слой за слоем с использованием современных аддитивных технологий [1]. В работе рассматривается контактное взаимодействие основания с покрытием и системы одинаковых жестких штампов, причем форма поверхности покрытия полностью повторяет форму оснований штампов. Такая ситуация возникает, например, когда для нанесения покрытия используется метод лазерной наплавки или склейки и жесткий штамп частично погружается в еще незатвердевшее покрытие. В зависимости от способа обработки поверхности ее форма описывается сложными и часто быстро осциллирующими функциями. С точки зрения классификации контактных задач исследуется следующий шаг усложнения периодической контактной задачи, когда все штампы одинаковы, но система конечна (см., например, [2]–[10]). С точки зрения интегральных уравнений рассматривается векторное интегральное уравнение с матричным ядром и одной быстро осциллирующей функцией при внематричном члене [11].

© Манжиров А. В., Курдина С. П., Казаков К. Е., Федотов И., 2015

Манжиров Александр Владимирович

e-mail: manzh@inbox.ru, доктор физико-математических наук, профессор, иностранный член Национальной академии наук Республики Армении, заместитель директора Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия; профессор кафедры прикладной математики МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия; профессор кафедры высшей математики НИЯУ «МИФИ», г. Москва, Россия.

Курдина Светлана Павловна

e-mail: svetlana-ka@yandex.ru, старший преподаватель кафедры прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия.

Казаков Кирилл Евгеньевич

e-mail: kazakov@irmnet.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия.

Федотов Игорь

Доктор философии, профессор кафедры математики и статистики Цванского университета технологии, г. Претория, ЮАР.

Ключевые слова: покрытие, аддитивные технологии, множественный контакт, штамп, контактные напряжения, осадка, угол поворота, форма поверхности, система интегральных уравнений, быстро осциллирующая функция.

УДК: 539.3

Постановка задачи. Вязкоупругий стареющий слой произвольной толщины H , изготовленный в момент времени τ_2 , лежит на подстилающем недеформируемом основании (рис. 1). В момент времени $\tau_1 \geq \tau_2$ на слой нанесено вязкоупругое стареющее покрытие, жесткость которого не превышает жесткости слоя. В момент времени $\tau_0 \geq \tau_1$ на такой пакет слоев начинает действовать система из n одинаковых штампов, ширины которых значительно больше толщины покрытия, причем форма покрытия и формы оснований штампов полностью совпадают даже до начала нагружения, то есть зазор между ними равен нулю при $t < \tau_0$. Под воздействием нагрузки слой с покрытием деформируется, а штампы перемещаются и поворачиваются.

На каждом штампе можно задать один из 4 типов условий:

- а) осадку и угол поворота,
- б) вдавливающую силу и момент,
- в) осадку и момент,
- г) силу и угол поворота.

Разумеется, на каждом штампе возможен различный набор условий. Можно показать, что существует всего 15 возможных вариантов постановки задачи. В данной работе рассмотрим лишь решение для случая, когда на всех штампах заданы сила и момент. Решения для остальных 14 вариантов строятся аналогично.

Заменим штампы некоторыми распределенными, пока еще неизвестными, нагрузками $p_i(x, t) = -q_i(x, t)$ ($i = \overline{1, n}$), действующими на тех же участках, где и штампы, и равными нулю вне этих участков. Тогда вертикальные перемещения верхней грани покрытия под действием нагрузок $q_i(x, t)$ можно представить в виде [2] ($i = \overline{1, n}$, $x \in [a_i, b_i]$, $t \geq \tau_0$):

$$u_{zi}(x, t) = (\mathbf{I} - \mathbf{V}_1) \frac{k_\nu q_i(x, t) h(x)}{E_1(t - \tau_1)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} \sum_{j=1}^n (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \int_{a_j}^{b_j} k_{\text{pl}} \left(\frac{x - \xi}{H} \right) \frac{q_j(\xi, t)}{E_2(t - \tau_2)} d\xi, \quad (1)$$

где $h(x)$ — толщина покрытия, $E_1(t - \tau_1)$ — модуль упругомгновенной деформации покрытия, ν_2 , $E_2(t - \tau_2)$ — коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации нижнего слоя, k_ν — безразмерный коэффициент, зависящий от условий соединения покрытия с нижним слоем, причем в случае гладкого контакта $k_\nu = 1 - \nu_1^2$, а в случае идеального — $k_\nu = 1 - 2\nu_1^2/(1 - \nu_1)$, ν_1 — коэффициент Пуассона покрытия; \mathbf{I} — тождественный оператор, \mathbf{V}_k — интегральные операторы Вольтерра с ядрами ползучести при растяжении $K_k(t, \tau) = E_k \frac{\partial}{\partial \tau} [E_k^{-1}(\tau) + C_k(t, \tau)]$, $C_k(t, \tau)$ — мера ползучести ($k = 1, 2$), $k_{\text{pl}}[(x - \xi)/H]$ — ядро плоской контактной задачи [2], которое имеет вид:

$$k_{\text{pl}}(s) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos(su) du,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-08-93964 ЮАР_а и № 15-31-70002 мол_а_мос), Программы № 12 ОЭММПУ РАН и гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-2611.2014.1.

Поступила 20.09.2015

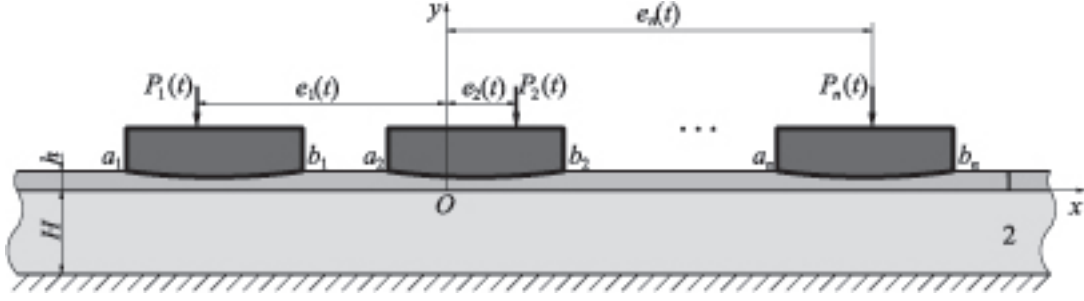


Рис. 1. Взаимодействие основания и системы штампов

причем в случае гладкого контакта между нижним слоем и основанием

$$L(u) = \frac{\operatorname{ch}(2u) - 1}{\operatorname{sh}(2u) + 2u},$$

а в случае идеального контакта

$$L(u) = \frac{2\kappa \operatorname{sh}(2u) - 4u}{2\kappa \operatorname{ch}(2u) + 4u^2 + 1 + \kappa^2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu_2.$$

С другой стороны штампы перемещаются не деформируясь, поэтому вертикальные перемещения под ними представимо в виде ($i = \overline{1, n}$, $x \in [a_i, b_i]$, $t \geq \tau_0$)

$$u_{yi}(x, t) = \delta_i(t) + \alpha_i(t)(x - \bar{a}_i), \quad (2)$$

где $\delta_i(t)$ — осадка i -го штампа, $\alpha_i(t)$ — угол его поворота, $\bar{a}_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$ — его срединная точка. Приравнявая правые части равенств (1) и (2), получим систему интегральных уравнений задачи множественного конформного контакта ($i = \overline{1, n}$, $x \in [a_i, b_i]$, $t \geq \tau_0$):

$$u_{zi}(x, t) = (\mathbf{I} - \mathbf{V}_1) \frac{k_\nu q_i(x, t) h(x)}{E_1(t - \tau_1)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} \sum_{j=1}^n (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \int_{a_j}^{b_j} k_{\text{пл}} \left(\frac{x - \xi}{H} \right) \frac{q_j(\xi, t)}{E_2(t - \tau_2)} d\xi = \delta_i(t) + \alpha_i(t)(x - \bar{a}_i). \quad (3)$$

Условия равновесия штампов на основании описываются уравнениями ($i = \overline{1, n}$, $t \geq \tau_0$):

$$\int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi, t) d\xi = P_i(t), \quad \int_{a_i}^{b_i} (\xi - \bar{a}_i) q_i(\xi, t) d\xi = M_i(t) \equiv e_i(t) P_i(t), \quad (4)$$

где через $P_i(t)$ обозначены действующие на штампы силы, а через $e_i(t)$ и $M_i(t)$ — эксцентриситеты и моменты приложения этих сил.

Преобразование системы разрешающих уравнений. Сделаем в (3) и (4) замену переменных по формулам ($i, j = \overline{1, n}$, $x \in [a_i, b_i]$, $\xi \in [a_j, b_j]$, $t \geq \tau_0$)

$$x^* = \frac{x - \bar{a}_i}{\frac{1}{2}l} = \frac{x}{\frac{1}{2}l} - \eta_i, \quad \xi^* = \frac{\xi - \bar{a}_j}{\frac{1}{2}l} = \frac{\xi}{\frac{1}{2}l} - \eta_j, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau_k^* = \frac{\tau_k}{\tau_0}, \quad \lambda = \frac{H}{\frac{1}{2}l}, \quad \eta_i = \frac{\bar{a}_i}{\frac{1}{2}l},$$

$$\delta^{i*}(t^*) = \frac{\delta_i(t)}{\frac{1}{2}l}, \quad \alpha^{i*}(t^*) = \alpha_i(t), \quad c^*(t^*) = \frac{E_2(t - \tau_2)}{E_1}, \quad m^*(x^*) = \frac{k_\nu}{2(1 - \nu_2^2)} \frac{h(x)}{\frac{1}{2}l},$$

$$q^{i*}(x^*, t^*) = \frac{2(1 - \nu_2^2)q_i(x, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \quad P^{i*}(t^*) = \frac{2(1 - \nu_2^2)P_i(t)}{E_2(t - \tau_2)\frac{1}{2}l}, \quad M^{i*}(t^*) = \frac{2(1 - \nu_2^2)M_i(t)}{E_2(t - \tau_2)(\frac{1}{2}l)^2},$$

$$\mathbf{F}^{ij*} f(x^*) = \int_{-1}^1 k^{ij}(x^*, \xi^*) f(\xi^*) d\xi^*, \quad k^{ij}(x^*, \xi^*) = \frac{1}{\pi} k_{\text{pl}} \left(\frac{x^* + \eta_i - \xi^* - \eta_j}{\lambda} \right),$$

$$\mathbf{V}_k^* f(t^*) = \int_1^{t^*} K_k^*(t^*, \tau^*) f(\tau^*) d\tau^*, \quad K_2(t^*, \tau^*) = K_2(t - \tau_2, \tau - \tau_2)\tau_0,$$

$$K_1^*(t^*, \tau^*) = \frac{E_1(t - \tau_1)}{E_1(\tau - \tau_1)} \frac{E_2(\tau - \tau_1)}{E_2(t - \tau_1)} K_1(t - \tau_1, \tau - \tau_1)\tau_0,$$

где $l = b_1 - a_1 = \dots = b_n - a_n$ — ширины штампов, а $\frac{1}{2}l$ — полуширины штампов. Опустив в окончательных формулах звездочки, получим безразмерную систему интегральных уравнений с дополнительными условиями ($i = \overline{1, n}$, $x \in [-1, 1]$, $t \geq 1$)

$$c(t)m(x)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)q^i(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \sum_{j=1}^n \mathbf{F}^{ij} q^j(x, t) = \delta^i(t) + \alpha^i(t)x, \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 q^i(\xi, t) d\xi = P^i(t), \quad \int_{-1}^1 \xi q^i(\xi, t) d\xi = M^i(t). \quad (6)$$

Приведем систему уравнений (5) с дополнительными условиями (6) к одному операторному уравнению с двумя дополнительными векторными условиями. Примем, что

$$\mathbf{q}(x, t) = q^i(x, t)\mathbf{i}^i, \quad \boldsymbol{\delta}(t) = \delta^i(t)\mathbf{i}^i, \quad \boldsymbol{\alpha}(t) = \alpha^i(t)\mathbf{i}^i, \quad \mathbf{P}(t) = P^i(t)\mathbf{i}^i,$$

$$\mathbf{M}(t) = M^i(t)\mathbf{i}^i, \quad \mathbf{k}(x, \xi) = k^{ij}(x, \xi)\mathbf{i}^i\mathbf{j}^j, \quad \mathbf{G}\mathbf{f}(x) = \int_{-1}^1 \mathbf{k}(x, \xi) \cdot \mathbf{f}(\xi) d\xi.$$

Здесь и далее по верхним повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до n , если левая часть формулы не зависит от этого индекса; $x \in [-1, 1]$ и $t \geq 1$, если не указано иное. Тогда уравнения (5), (6) можно записать в виде

$$c(t)m(x)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)\mathbf{q}(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{G}\mathbf{q}(x, t) = \boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x, \quad (7)$$

$$\int_{-1}^1 \mathbf{q}(\xi, t) d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^1 \xi \mathbf{q}(\xi, t) d\xi = \mathbf{M}(t). \quad (8)$$

Введя (7), (8) обозначения

$$\mathbf{Q}(x, t) = \sqrt{m(x)}\mathbf{q}(x, t), \quad \mathbf{K}(x, t) = \frac{\mathbf{k}(x, \xi)}{\sqrt{m(x)m(\xi)}}, \quad \mathbf{F}\mathbf{f}(x) = \int_{-1}^1 \mathbf{K}(x, \xi) \cdot \mathbf{f}(\xi) d\xi,$$

получим

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)\mathbf{Q}(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{FQ}(x, t) = \frac{\delta(t) + \alpha(t)x}{\sqrt{m(x)}} \equiv \mathbf{\Delta}(x, t), \quad (9)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathbf{Q}(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^1 \frac{\xi \mathbf{Q}(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi = \mathbf{M}(t), \quad (10)$$

где через $\mathbf{\Delta}(x, t)$ обозначена правая часть уравнения (9).

Таким образом, мы получили смешанное операторное уравнение (9) с векторными дополнительными условиями (10).

Построение решения в случае известных приложенных сил и моментов.

Решение полученного разрешающего операторного уравнения (9) с векторными дополнительными условиями (10) будем строить в классе вектор-функций из гильбертова пространства $L_2([-1, 1], V)$. Так как в операторное уравнение и дополнительные условия входит функция $\sqrt{m(x)}$, связанная с толщиной покрытия, то при построении решения следует учитывать, что эта функция может быть быстро осциллирующей. Поэтому в структуру функционального базиса должна входить функция $\sqrt{m(x)}$. Система ортонормированных базисных вектор-функций, удовлетворяющая вышеописанному условию, может быть построена по следующему правилу

$$\mathbf{p}_k^i(x) = \frac{\mathbf{p}_k^{i*}(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad \mathbf{p}_k^{i*}(x) = p_k^*(x)\mathbf{i}^i, \quad d_{-1} = 1, \quad J_k = \int_{-1}^1 \frac{\xi^k d\xi}{m(\xi)},$$

$$d_k = \begin{vmatrix} J_0 & \cdots & J_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k & \cdots & J_{2k} \end{vmatrix}, \quad p_k^*(x) = \frac{1}{\sqrt{d_{k-1}d_k}} \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{k-1} & J_k & \cdots & J_{2k-1} \\ 1 & x & \cdots & x^k \end{vmatrix}.$$

Следуя обобщенному проекционному методу [9], [11], пространство $L_2([-1, 1], V)$ представим в виде прямой суммы евклидова пространства $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$, базисом которого являются функции $\{\mathbf{p}_0^i(x), \mathbf{p}_1^i(x)\}$, и ортогонального ему гильбертова пространства $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ с базисом $\{\mathbf{p}_k^i(x)\}$, $i = \overline{1, n}$, $k = 2, 3, \dots$, то есть $L_2([-1, 1], V) = L_2^{(0)}([-1, 1], V) \oplus L_2^{(1)}([-1, 1], V)$. Тогда неизвестная вектор-функция $\mathbf{Q}(x, t)$ и правая часть уравнения (9) представимы в виде алгебраической суммы вектор-функций, определенных в пространствах $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$ и $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$:

$$\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_0(x, t) + \mathbf{Q}_1(x, t), \quad \mathbf{\Delta}(x, t) = \mathbf{\Delta}_0(x, t) + \mathbf{\Delta}_1(x, t),$$

где

$$\mathbf{Q}_0(x, t) = \sum_{l=0}^1 z_l^i(t) \mathbf{p}_l^i(x) \in L_2^{(0)}([-1, 1], V), \quad (11)$$

$$\mathbf{\Delta}_0(x, t) = \sum_{l=0}^1 [k_{\delta l}^i \delta^i(t) + k_{\alpha l}^i \alpha^i(t)] \mathbf{p}_l^i(x) \in L_2^{(0)}([-1, 1], V). \quad (12)$$

Здесь $k_{\delta l}^i$ и $k_{\alpha l}^i$ — коэффициенты разложения вектор-функций $\mathbf{i}^i/\sqrt{m(x)}$ и $\mathbf{i}^i x/\sqrt{m(x)}$, которые можно определить по формулам

$$k_{\delta l}^i = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{m(\xi)}} \mathbf{p}_l^i(\xi) \cdot \mathbf{i}^i d\xi = \begin{cases} \sqrt{J_0}, & l = 0, \\ 0, & l = 1, \end{cases}$$

$$k_{\alpha l}^i = \int_{-1}^1 \frac{\xi}{\sqrt{m(\xi)}} \mathbf{p}_l^i(\xi) \cdot \mathbf{i}^i d\xi = \begin{cases} J_1/\sqrt{J_0}, & l = 0, \\ \sqrt{(J_0 J_2 - J_1^2)/J_0}, & l = 1. \end{cases}$$

Заметим, что в представлении $\mathbf{Q}(x, t)$ нам известно слагаемое $\mathbf{Q}_0(x, t)$, функции разложения которого $z_l^i(t)$ ($l = 1, 2, i = \overline{1, n}$) определяются дополнительными условиями (10)

$$z_0^i(t) = \frac{P^i(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad z_1^i(t) = \frac{J_0 M^i(t) - J_1 P^i(t)}{\sqrt{J_0(J_0 J_2 - J_1^2)}},$$

а слагаемое $\mathbf{Q}_1(x, t)$ подлежит определению. В правой части $\mathbf{\Delta}_1(x, t) \equiv 0$, а требуется определить $\mathbf{\Delta}_0(x, t)$. Для нахождения неизвестной вектор-функции $\mathbf{Q}_1(x, t)$ введем ортогональные проекторы $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$, которые отображают гильбертово пространство $L_2([-1, 1], V)$ на подпространства $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$ и $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$, соответственно:

$$\mathbf{P}_0 \mathbf{f}(x) = \sum_{l=0}^1 k_{fl}^i \mathbf{p}_l^i(x), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0,$$

где коэффициенты разложения вектор-функции $\mathbf{f}(x)$ определяются по формуле

$$k_{fl}^i = \int_{-1}^1 \frac{\mathbf{f}(\xi) \cdot \mathbf{p}_l^i(\xi)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi, \quad l = 1, 2, \quad i = \overline{1, n}.$$

Очевидно, что имеют место соотношения

$$\mathbf{P}_l \mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_l(x, t), \quad \mathbf{P}_l \mathbf{\Delta}(x, t) = \mathbf{\Delta}_l(x, t), \quad l = 1, 2.$$

Поддействовав оператором \mathbf{P}_1 на (9), получим уравнение с известной правой частью

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)\mathbf{Q}_1(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{P}_1 \mathbf{F} \mathbf{Q}_1(x, t) = -(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{P}_1 \mathbf{F} \mathbf{Q}_2(x, t) \equiv \tilde{\mathbf{\Delta}}_1(x, t). \quad (13)$$

Решение уравнения (11) необходимо строить в виде ряда по собственным функциям оператора $\mathbf{P}_1 \mathbf{F}$, который является вполне непрерывным, самосопряженным и сильно положительным оператором из $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ в $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$. Система его собственных функций составляет базис пространства $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$. Поставив для него спектральная задачу

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{F} \varphi_k(x) = \gamma_k \varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \psi_{km}^i \mathbf{p}_m^i(x), \quad k = 2, 3, \dots,$$

получим невырожденную систему линейных алгебраических уравнений относительно ψ_{km}^i

$$\sum_{l=2}^{\infty} K_{ml}^{ij} \psi_{kl}^j = \gamma_k \psi_{km}^i, \quad k, m = 2, 3, \dots, \quad i = \overline{1, n},$$

где коэффициенты разложения ядра $\mathbf{K}(x, \xi)$ определяются из соотношений

$$K_{ml}^{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{p}_m^i(x) \cdot \mathbf{K}(x, \xi) \mathbf{p}_l^j(\xi) dx d\xi, \quad m, l = 0, 1, 2, \dots, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Представив функцию $\mathbf{Q}_1(x, t)$ в виде разложения по $\varphi_k(x)$, то есть

$$\mathbf{Q}_1(x, t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t) \varphi_k(x),$$

и подставив это представление в (11), получим уравнение для определения функций $z_k(t)$:

$$\sum_{k=2}^{\infty} [c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1) \varphi_k(x) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \gamma_k \varphi_k(x)] z_k(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \Delta_k(t) \varphi_k(x),$$

где $\Delta_k(t)$ — функциональные коэффициенты разложения вектор-функции $\tilde{\mathbf{A}}_1(x, t)$, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta_k(t) &= \int_{-1}^1 \tilde{\mathbf{A}}_1(x, t) \cdot \varphi_k(x) dx = \\ &= -(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \int_{-1}^1 \mathbf{P}_1 \mathbf{F} \mathbf{Q}_0(x, t) \cdot \varphi_k(x) dx = -(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \sum_{l=0}^1 K_{lk}^i z_l^i(t). \end{aligned}$$

Легко показать, что коэффициенты K_{lk}^i в этом выражении вычисляются по формуле

$$K_{lk}^i = \sum_{m=2}^{\infty} K_{ml}^{ji} \psi_{km}^j, \quad i = \overline{1, n}, \quad l = 0, 1, \quad k = 2, 3, \dots$$

Тогда

$$[c(t) + \gamma_k] z_k(t) - [c(t) \mathbf{V}_1 + \gamma_k \mathbf{V}_2] z_k(t) = -(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) [K_{0k}^i z_0^i(t) + K_{1k}^i z_1^i(t)],$$

откуда ($k = 2, 3, \dots$)

$$z_k(t) = -(\mathbf{I} + \mathbf{W}_k) \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) [K_{0k}^i z_0^i(t) + K_{1k}^i z_1^i(t)]}{c(t) + \gamma_k},$$

$$\mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

где $R_k(t, \tau)$ — резольвенты ядер $[c(t)K_1(t, \tau) + \gamma_k K_2(t, \tau)]/[c(t) + \gamma_k]$. Отметим, что решение имеет вид

$$q^i(x, t) = \frac{1}{m(x)} [z_0^i(t) p_0^*(x) + z_1^i(t) p_1^*(x) + \dots], \quad i = \overline{1, n},$$

то есть в нем отдельным сомножителем выделена функция $m(x)$, связанная с толщиной покрытия и формой оснований штампов, что позволяет производить вычисления для оснований с покрытиями, толщина которых описывается быстро осциллирующими функциями. Этого невозможно добиться другими известными методами.

Определив функцию $\mathbf{Q}_1(x, t)$ можно найти и осадки и углы поворотов штампов, для чего необходимо подействовать оператором \mathbf{P}_0 на уравнение (9):

$$\begin{aligned} c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1) \sum_{l=0}^1 z_l^i(t) \mathbf{p}_l^i(x) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \mathbf{P}_0 \mathbf{F} \left[\sum_{l=0}^1 z_l^i(t) \mathbf{p}_l^i(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t) \varphi_k(x) \right] = \\ = \sum_{l=0}^1 [k_{\delta l}^i \delta^i(t) + k_{\alpha l}^i \alpha^i(t)] \mathbf{p}_l^i(x). \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$\mathbf{P}_0 \mathbf{F} \mathbf{p}_l^i(x) = \sum_{m=0}^1 K_{ml}^{ji} \mathbf{p}_m^j(x), \quad \mathbf{P}_0 \mathbf{F} \varphi_k(x) = \sum_{m=0}^1 K_{mk}^i \mathbf{p}_m^i(x).$$

Тогда мы получим систему уравнений относительно $\delta^i(t)$ и $\alpha^i(t)$:

$$\begin{aligned} c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)z_0^i(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \left[K_{00}^{ij} z_0^j + K_{01}^{ij} z_1^j + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^i z_k(t) \right] &= k_{\delta 0}^i \delta^i(t) + k_{\alpha 0}^i \alpha^i(t), \\ c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)z_1^i(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \left[K_{10}^{ij} z_0^j + K_{11}^{ij} z_1^j + \sum_{k=2}^{\infty} K_{1k}^i z_k(t) \right] &= k_{\delta 1}^i \delta^i(t) + k_{\alpha 1}^i \alpha^i(t), \end{aligned}$$

решая которую с учетом выражений для коэффициентов $k_{\delta l}^i$ и $k_{\alpha l}^i$ получим следующие выражения для осадок и углов поворота штампов ($i = \overline{1, n}$)

$$\begin{aligned} \alpha^i(t) &= \sqrt{\frac{J_0}{J_0 J_2 - J_1^2}} \left\{ c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)z_1^i(t) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \left[K_{10}^{ij} z_0^j(t) + K_{11}^{ij} z_1^j(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{1k}^i z_k(t) \right] \right\}, \\ \delta^i(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)z_0^i(t) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \left[K_{00}^{ij} z_0^j(t) + K_{01}^{ij} z_1^j(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^i z_k(t) \right] \right\} - \frac{J_1}{J_0} \alpha^i(t). \end{aligned}$$

Численные эксперименты. Рассмотрим двухслойное основание, лежащее на недеформируемой подложке, нижний слой которого из упругого материала, а верхний — из вязкоупругого стареющего. Будем считать, что изменение модуля упругости вязкоупругого материала несущественно ($E_1(t) \equiv E_1$), а его мера ползучести представлена в виде

$$C(t, \tau) = (C_0 + A_0 e^{-\chi \tau}) [1 - e^{-\psi(t-\tau)}].$$

Зададимся следующими значениями параметров для стального основания, покрытого слоем полимера,

$$\begin{aligned} c(t) &\equiv \frac{E_2}{E_1} = 40, \quad \nu_1 = 0.3, \quad \nu_2 = 0.1, \\ C_0 E_1 &= 0.5522, \quad A_0 E_1 = 4, \quad \chi \tau_0 = 0.31, \quad \psi \tau_0 = 0.6 \quad (\tau_0 = 10 \text{ сут}), \end{aligned}$$

между слоями и между нижним слоем и нижним подстилающим основанием осуществляется идеальный контакт, т.е. $k_\nu = 1 - 2\nu_1^2/(1 - \nu_1) \approx 0.74$, $L(u) = [5.2 \operatorname{sh}(2u) - 4u]/[5.2 \operatorname{ch}(2u) + 4u^2 + 7.76]$. Без ограничения общности будем предполагать, что момент изготовления вязкоупругого слоя примем равным нулю, т.е. $\tau_1 = 0$.

Рассмотрим случай, когда на вышеописанное основание действуют 2 одинаковых штампа, расстояние между которыми равно полуширине штампов, т.е. $\eta_2 - \eta_1 = 3$. Единичные нагрузки приложены по осям штампов, то есть $P_k(t) \equiv 1$, $e_k(t) \equiv 0$. Будем

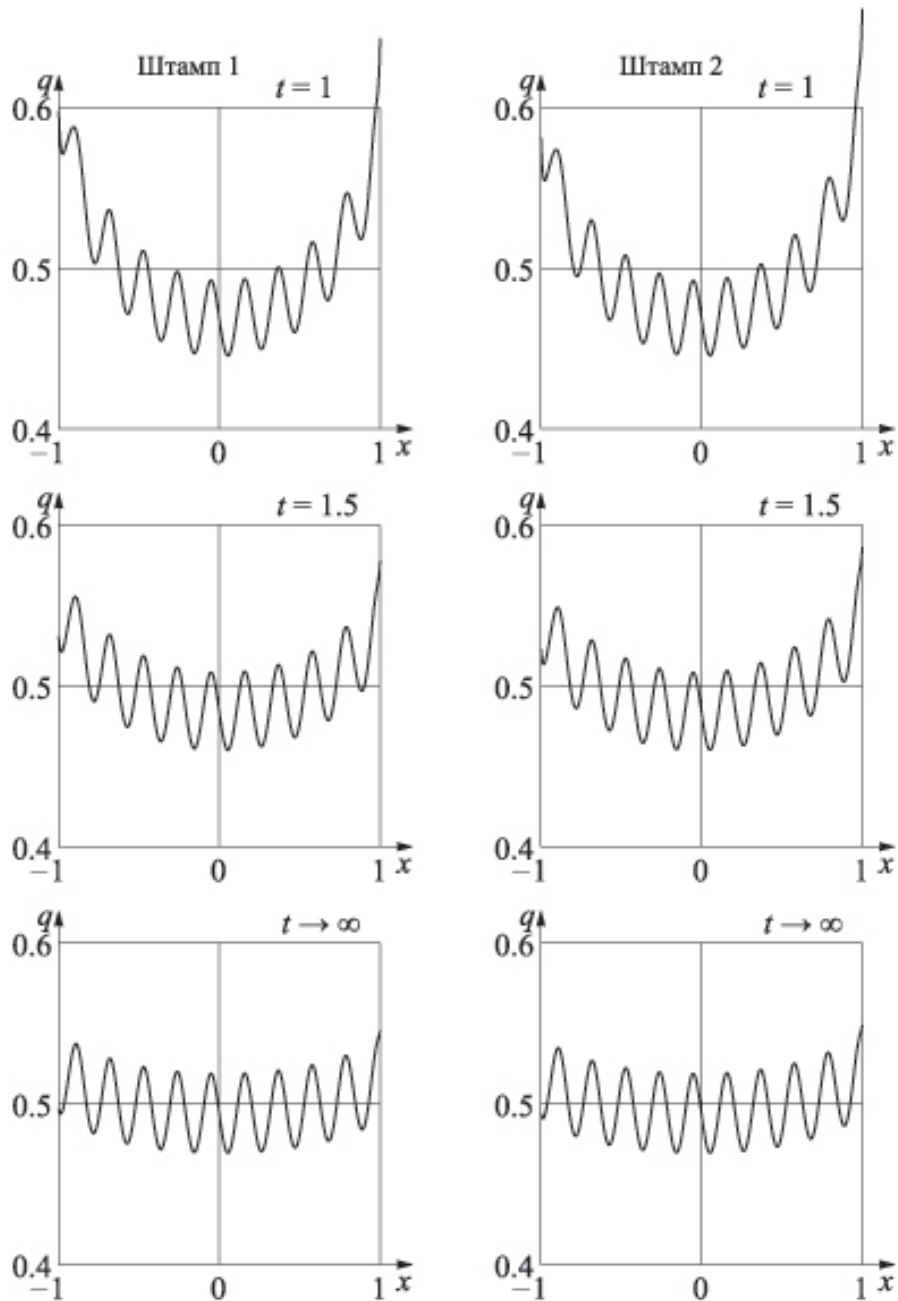


Рис. 2. Контактные давления для случая двух штампов при $\eta_2 - \eta_1 = 3$

считать, что функция $m(x)$, пропорциональная высоте покрытия и форме оснований штампов, задается формулой

$$m(x) = 0.025 + 0.00125 \sin(30x),$$

т.е. происходят небольшие колебания высоты покрытия вокруг среднего значения 0.025. Толщина нижнего слоя равна ширине штампов, т.е. $\lambda = 2$. На рис. 2 показано

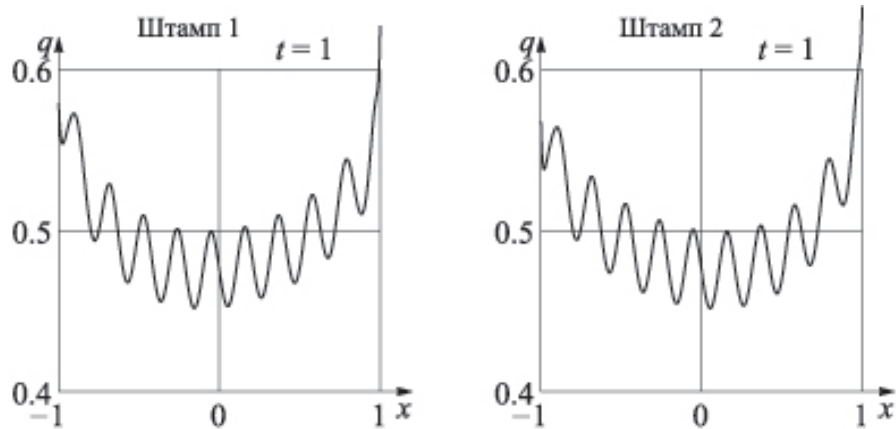


Рис. 3. Контактные давления для случая двух штампов при $\eta_2 - \eta_1 = 2.3$

распределение контактных давлений под штампами в различные моменты времени ($t = 1$, $t = 10$ и установившееся значение). Видно, что с течением времени контактные давления перераспределяются, однако всюду в явном виде видна прямая зависимость от функции $m^{-1}(x)$, а следовательно, от высоты покрытия. Рассматривая график каждого штампа в отдельности, можно заметить, что распределение контактных давлений несимметрично относительно оси, что вызовет его наклон (в нашем случае штампы наклонятся друг к другу). Причем, чем ближе штампы друг к другу, тем сильнее их взаимовлияние друг на друга и тем сильнее будет их наклон ($\eta_2 - \eta_1 = 2.3$, рис. 3). Если же, наоборот, штампы находятся вдали друг от друга, то распределение контактных давлений под штампами практически не будет зависеть от давлений на другом штампе, и расчеты можно производить для каждого штампа в отдельности. Чтобы избавиться от наклонов, необходимо прикладывать нагрузки с другими эксцентриситетами. Характер наклона также изменится, если изменить профиль основания штампов.

Выводы. Поставлена и решена плоская задача о согласованном контакте между вязкоупругим стареющим основанием с вязкоупругим стареющим покрытием и конечной системой одинаковых жестких штампов, расположенных на одном и том же расстоянии друг от друга (одно из обобщений периодической задачи). Решение задач получено в аналитическом виде, причем в выражениях для контактных напряжений функция формы поверхности основания выделена в явном виде. Это позволяет проводить расчеты для реальных форм поверхности покрытий, часто описываемых быстро осциллирующими функциями.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gibson I., Rosen D., Stucker B. Additive Manufacturing Technologies. New York: Springer, 2015. 498 p.
- [2] Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В., Наумов В. Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
- [3] Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.

- [4] Манжиров А. В. Осесимметричные контактные задачи для неоднородно-стареющих вязкоупругих слоистых оснований // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 684–693.
- [5] Манжиров А. В. Об одном методе решения двумерных интегральных уравнений осесимметричных контактных задач для тел со сложной реологией // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1019–1025.
- [6] Манжиров А. В., Александров В. М. О двумерных интегральных уравнениях в прикладной механике деформируемых твердых тел // ПМТФ. 1987. № 5. С. 146–152.
- [7] Манжиров А. В., Черныш В. А. О взаимодействии жесткой усиливающей втулки с неоднородной стареющей трубой высокого давления // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 112–118.
- [8] Манжиров А. В., Черныш В. А. Контактная задача для слоистого неоднородного стареющего цилиндра, подкрепленного жестким кольцом // ПМТФ. 1990. № 6. С. 101–109.
- [9] Манжиров А. В., Казаков К. Е. Проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений механики и его приложения к контактным задачам для тел с неоднородными покрытиями // Актуальные проблемы механики: механика деформируемого твердого тела: сб. трудов / под ред. Р. В. Гольдштейна. Ин-т проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. М.: Наука, 2009. С. 238–263.
- [10] Kazakov K., Kurdina S., Manzhirov A. Multibody Contact Problems for Discretely Growing Systems // IUTAM Symposium on Growing Solids. Symposium Materials. Edited by A. Manzhirov and N. Gupta. M.: ИПМех РАН. 2015. P. 39–42.
- [11] Polyanin A. D., Manzhirov A. V. Handbook of Integral Equations. Second Edition. Boca Raton, London: Chapman & Hall/CRC Press, 2008. 1144 p.

A. V. Manzhirov^{1,2,3}, S. P. Kurdina², K. E. Kazakov², I. Fedotov⁴

CONFORMAL CONTACT BETWEEN A VISCOELASTIC FOUNDATION WITH ROUGH COATING AND A FINITE SYSTEM OF IDENTICAL RIGID PUNCHES

¹*Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

²*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

³*National Research Nuclear University (MEPhI), Moscow, Russia*

⁴*Tshwane University of Technology, Pretoria, South Africa*

Abstract. Various coatings are used in the manufacturing of machine, device, and instrument parts to improve the strength characteristics of the latter in the designed contact regions. Such coatings are applied layer by layer with the use of modern additive technologies [1]. The paper deals with the contact interaction of a coated base with a system of identical rigid dies, the shape of the coating surface being completely identical to that of the die bases. Such a situation occurs, e.g., if the coating is applied by laser cladding or bonding and the rigid die is partly immersed in the still unhardened coating. Depending on the processing technique, the surface shape can be described by rather complicated functions, which are often rapidly oscillating. From the viewpoint of the classification of contact problems, we make one more step in the complication of the periodic contact problem: all dies are identical, but the system is finite (e.g., see [2]–[10]). From the viewpoint of integral equations, we consider a vector integral equation with matrix kernel and with one rapidly oscillating function in the free term [11].

Keywords: coating, additive technology, multibody contact, tilt angle, settlement, surface shape, system of integral equations, rapidly oscillating function.

REFERENCES

[1] Gibson I., Rosen D., Stucker B. Additive Manufacturing Technologies. New York: Springer, 2015. 498 p.

Manzhirov Alexander Vladimirovich

e-mail: manzh@inbox.ru, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Foreign Member of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Deputy Director of the Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Professor of the Department of Applied Mathematics at the Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; Professor of the Department of Higher Mathematics at the National Research Nuclear University (MEPhI), Moscow, Russia.

Kurdina Svetlana Pavlovna

e-mail: svetlana-ka@yandex.ru, Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics at the Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.

Kazakov Kirill Evgenievich

e-mail: kazakov@ipmnet.ru, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics at the Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.

Fedotov Igor

Ph.D., Professor of Department of Mathematics and Statistics at the Tshwane University of Technology, Pretoria, South Africa.

- [2] Arutyunyan N. Kh., Manzhirov A. V., Naumov V. E. Contact Problems of Mechanics of Growing Bodies. Moscow: Nauka, 1991. 176 p.
- [3] Arutyunyan N. Kh., Manzhirov A. V.. Contact Problems of the Theory of Creep. Erevan: Izd-vo Inst. Mekaniki NAN RA, 1999. 318 p.
- [4] Manzhirov A. V. Axisymmetric contact problems for non-uniformly aging layered viscoelastic foundations // J. Appl. Math. Mech. 1983. Vol. 47. Issue 4. P. 558–566.
- [5] Manzhirov A. V. On using the more-accurate equations of thin coatings in the theory of axisymmetric contact problems for composite foundations // J. Appl. Math. Mech. 1985. Vol. 49. Issue 6. P. 770–777.
- [6] Alexandrov V. M., Manzhirov A. V. Two-dimensional integral equations in applied mechanics of deformable solids // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1987. Vol. 28. № 5. P. 781–786.
- [7] Manzhirov A. V., Chernysh V. A. On the interaction of a rigid reinforcing sleeve and inhomogeneous aging high-pressure pipes // Izv. AN SSSR. MTT. 1988. № 6. P. 112–118.
- [8] Manzhirov A. V., Chernysh V. A. Contact problem for a layered inhomogeneous aging cylinder reinforced by a rigid ring // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1990. Vol. 30. № 6. P. 894–900.
- [9] Manzhirov A. V., Kazakov K. E. Projection method for solving mixed integral equations of mechanics and its application in contact problems for bodies with inhomogeneous coatings // Actual Problems in Mechanics: mechanics of solids: collection of papers / Edited by R. V. Goldstein. Ishlinsky Institute for problems in mechanics. Moscow: Nauka, 2009. P. 238–263.
- [10] Kazakov K., Kurdina S., Manzhirov A. Multibody Contact Problems for Discretely Growing Systems // IUTAM Symposium on Growing solids. Symposium Materials. Edited by A. Manzhirov and N. Gupta. M.: ИПМех РАН. 2015. P. 39–42.
- [11] Polyanin A. D., Manzhirov A. V. Handbook of Integral Equations. Second Edition. Boca Raton, London: Chapman & Hall/CRC Press, 2008. 1144 p.

В. Г. Зубчанинов, А. А. Алексеев, В. И. Гультияев

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ОБРАЗА ПРОЦЕССА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТАЛИ ПО СЛОЖНЫМ ПЛОСКИМ ОКРУЖНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия

Аннотация. Представлены результаты численного моделирования процесса непропорционального упругопластического деформирования стали 45 по сложной плоской траектории с участком постоянной кривизны. Использована теория процессов А. А. Ильюшина и математическая модель В. Г. Зубчанинова, учитывающая все параметры сложного нагружения для плоских траекторий. Для оценки достоверности используемых определяющих соотношений результаты численного моделирования сопоставлены с данными физического эксперимента, проведенного на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ. Установлена правильность моделирования непропорционального пластического деформирования стали 45 с использованием предлагаемой математической модели. Показано, что отсутствие некоторых параметров сложного нагружения в аппроксимациях функционалов дает расчетные результаты, отличающиеся от экспериментальных данных.

Ключевые слова: пластичность, математическая модель, численное моделирование, верификация, сложное нагружение, плоская криволинейная траектория, векторные и скалярные свойства материалов, испытательный комплекс СН-ЭВМ.

УДК: 539.3

1. Основные уравнения и определяющие соотношения теории процессов упругопластического деформирования материалов. В теории процессов А. А. Ильюшина тензоры напряжений и деформаций представляются [1]–[3] в виде

$$(\sigma_{ij}) = \sigma_0(\delta_{ij}) + \sigma(S_{ij}^*), \quad (\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_0(\delta_{ij}) + \varepsilon(\varepsilon_{ij}^*), \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

© Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультияев В. И., 2015

Зубчанинов Владимир Георгиевич

e-mail: vlgzub@gmail.com, доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Алексеев Андрей Алексеевич

e-mail: alexeew@bk.ru, кандидат технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Гультияев Вадим Иванович

e-mail: vig0@mail.ru, доктор технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 07.10.2015

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \delta_{ij}, \quad \sigma = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_{ij} \Theta_{ij}} \quad (2)$$

— модули шаровых тензоров и тензоров-девиаторов соответственно (первые и вторые инварианты);

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \quad \Theta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0, \quad S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{\sigma}, \quad \Theta_{ij}^* = \frac{\Theta_{ij}}{\Theta} \quad (3)$$

— компоненты девиаторов и их направляющих тензоров; δ_{ij} — символ Кронекера.

При простом (пропорциональном) нагружении направляющие тензоры напряжений и деформаций совпадают, то есть $(S_{ij}^*) = (\Theta_{ij}^*)$, и с учетом упругости объемной деформации имеют место соотношения теории малых упругопластических деформаций А. А. Ильюшина [4]

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad S_{ij} = \frac{\sigma}{\Theta} \Theta_{ij} = 2G_p \Theta_{ij}, \quad \sigma = \Phi(\Theta) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Здесь K — упругий модуль объемной деформации; $2G_p$ — удвоенный пластический модуль сдвига; $\sigma = \Phi(\Theta)$ — универсальная функция единой диаграммы деформирования материалов Роша и Эйхингера, которая для произвольного напряженно-деформированного состояния определяет только скалярные свойства материала.

При сложном (непропорциональном) нагружении направляющие тензоры напряжений и деформаций, а также их скоростей не равны между собой, то есть $(S_{ij}^*) \neq (\Theta_{ij}^*)$, $(\dot{S}_{ij}^*) \neq (\dot{\Theta}_{ij}^*)$. В этом случае учет в определяющих соотношениях (1) только скалярных свойств материалов недостаточен. А. А. Ильюшин предложил [1, 2] векторное представление деформаций и напряжений в линейном координатном шестимерном евклидовом пространстве с ортонормированным неподвижным базисом $\{\hat{i}_k\}$, где $k = 0, 1, 2, \dots, 5$. В этом пространстве E_6 тензорам напряжений и деформаций ставятся в соответствие векторы напряжений \bar{S} и деформаций $\bar{\varepsilon}$

$$\begin{cases} \bar{S} = \bar{S}^0 + \bar{\sigma}, & \bar{S}^0 = S_0 \hat{i}_0, & \bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \\ \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^0 + \bar{\Theta}, & \bar{\varepsilon}^0 = \varepsilon_0 \hat{i}_0, & \bar{\Theta} = \Theta_k \hat{i}_k, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, 5), \quad (5)$$

где \bar{S}^0 , $\bar{\varepsilon}^0$ — векторы напряжений и деформаций объемного растяжения-сжатия в одномерном пространстве; $\bar{\sigma}$, $\bar{\Theta}$ — векторы напряжений и деформаций формоизменения в пятимерном девиаторном пространстве E_5 . Координаты векторов связаны с компонентами тензоров и девиаторов взаимно-однозначными преобразованиями [1–3]

$$\begin{aligned} S_0 &= \sqrt{3} \sigma_0, & S_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} S_{11}, & S_2 &= \frac{S_{22} - S_{33}}{\sqrt{2}}, & S_3 &= \sqrt{2} S_{12}, \\ S_4 &= \sqrt{2} S_{23}, & S_5 &= \sqrt{2} S_{13}, \\ \Theta_0 &= \sqrt{3} \varepsilon_0, & \Theta_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \Theta_{11}, & \Theta_2 &= \frac{\Theta_{22} - \Theta_{33}}{\sqrt{2}}, & \Theta_3 &= \sqrt{2} \Theta_{12}, \\ \Theta_4 &= \sqrt{2} \Theta_{23}, & \Theta_5 &= \sqrt{2} \Theta_{13}, \end{aligned} \quad (6)$$

а модули векторов $\bar{\sigma}$ и $\bar{\Theta}$ равны соответственно

$$\sigma = \sqrt{S_{ij} S_{ij}} = \sqrt{S_k S_k}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_{ij} \Theta_{ij}} = \sqrt{\Theta_k \Theta_k}. \quad (7)$$

В пространстве E_5 конец вектора деформаций $\bar{\Theta} = \Theta \hat{\Theta}$ описывает траекторию деформирования $\bar{\Theta}(s)$ с длиной дуги s , которая отображает в этом пространстве процесс

деформирования материала при его формоизменении. В каждой точке этой траектории $\bar{\Theta}(s)$ строится естественный обобщенный ортонормированный репер Френе—Ильюшина $\{\hat{p}_k\}$, где $k = 1, 2, \dots, 5$, а также вектор напряжений $\bar{\sigma} = \sigma \hat{\sigma}$ и его приращение $d\bar{\sigma}/ds$, где $\hat{\Theta}$ и $\hat{\sigma}$ — единичные векторы деформаций и напряжений соответственно. Совокупность траектории деформирования $\bar{\Theta}(s)$ и векторов $\bar{\sigma}$, $d\bar{\sigma}/ds$, построенных в каждой ее точке вместе с соответствующей температурой T , модулем ε_0 и нетермомеханическими параметрами β образуют *геометрический образ физического процесса деформирования* в девиаторном пространстве E_5 . Очевидно, что направления и длины векторов $\bar{\sigma}$ и $\hat{\Theta}$, характеризующих траекторию и процесс деформирования, будут зависеть от инвариантов тензоров, параметров кривизны и кручения траектории κ_m ($m = 1, 2, 3, 4$), температуры T и параметров β .

На основе частного постулата изотропии А. А. Ильюшина [1], В. Г. Зубчаниновым получены [3] определяющие соотношения связи векторов напряжений и деформаций в E_5 , локальная форма которых для трехмерных задач имеет вид

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \hat{p}_1 + M \hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3. \quad (8)$$

Здесь

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} = \cos \vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin \vartheta_1 (\cos \vartheta_2 \hat{p}_2 + \sin \vartheta_2 \hat{p}_3) \quad (9)$$

— единичный вектор напряжений; ϑ_1, ϑ_2 — углы сближения и депланации, которые являются полярными сферическими координатами вектора $\bar{\sigma}$ в подвижном репере Френе $\{\hat{p}_k\}$ ($k = 1, 2, 3$), для которого

$$\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\Theta}}{ds}, \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{\kappa_1} \frac{d^2\bar{\Theta}}{ds^2}, \quad \hat{p}_3 = \frac{1}{\kappa_2} \left[\kappa_1 \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2\bar{\Theta}}{ds^2} \right) \right]; \quad (10)$$

$$M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 - M_3 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2; \quad (11)$$

$M_1, M_3, d\sigma/ds$ — функционалы процесса деформирования, зависящие от параметров сложности процесса: s — длины дуги траектории деформирования, углов ее излома ϑ_1^0 и параметров кривизны κ_1 и кручения κ_2 .

Для определения углов ϑ_1 и ϑ_2 используются дифференциальные нелинейные уравнения [3]

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 \cos \vartheta_2 &= \frac{1}{\sigma} (-M_1 \sin \vartheta_1 + M_3 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2), \\ \sin \vartheta_1 \left(\frac{d\vartheta_2}{ds} + \kappa_2 \right) &= \kappa_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \frac{M_3}{\sigma} \cos \vartheta_2. \end{aligned} \quad (12)$$

В случае плоских траекторий при $\vartheta_2 = 0, \kappa_2 = 0$ из (8), (12) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} &= M_1 \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 \right) \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}, \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} &= - \left(\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1 + \kappa_1 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Угол сближения ϑ_1 , который характеризует отклонение вектора напряжений $\bar{\sigma}$ от касательной к траектории деформирования в каждой ее точке является функционалом параметров сложности процесса $\vartheta_1 = \vartheta_1(s, \vartheta_1^0, \kappa_1)$. Этот угол отражает влияние

векторных свойств материала на процесс деформирования, а $\sigma = \sigma(s, \vartheta_1^0, \kappa_1)$, являющийся функционалом тех же параметров, — влияние скалярных свойств материала.

В простейших случаях сложного нагружения, близких к простому, то есть когда траектории деформирования близки к прямолинейному пропорциональному нагружению, например, по траекториям малой кривизны, может быть использован приближенный закон упрочнения Одквиста—Ильюшина

$$\sigma = \Phi(s) \quad (14)$$

мало отличающийся от универсального закона Роша и Эйхингера $\sigma = \Phi(\Theta)$ при простом нагружении. В (14) всегда $s \geq \Theta$ и в явном виде не учитывается история сложного нагружения, то есть считается, что она слабо влияет на процессы сложного нагружения. Такое пренебрежение параметрами κ_1 и ϑ_1^0 в соотношении (14) при практических расчетах может приводить к недостоверным результатам, особенно для траекторий средней и большой кривизны, а также траекторий с большими углами излома $\vartheta_1^0 \geq 90^\circ$. Поэтому создание новых математических моделей, описывающих неупругое деформирование материалов и построение на их базе более точных аппроксимаций функционалов, учитывающих все параметры сложности процесса, является важной задачей теории пластичности.

2. Математическая модель теории процессов в плоских задачах. К основным уравнениям математической модели теории процессов в плоских задачах относятся определяющие соотношения (13) и универсальные аппроксимации функционалов В. Г. Зубчанинова [3]

$$\sigma = \sigma(s, \vartheta_1^0, \kappa_1) = \Phi(s) + Af_0^p \Omega(\Delta s) - B\Delta s \kappa_1, \quad (15)$$

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} + Af_0^p \frac{d\Omega}{ds} - B \frac{d}{ds}(\Delta s \kappa_1);$$

$$M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0)f^q, \quad (16)$$

где $\Delta s = s - s_K^T$ — приращение дуги траектории деформирования; s_K^T — длина дуги в точке ее излома; G , G_p — упругий и пластический модули сдвига для начально-изотропного материала; G_p^0 — значение G_p в точке излома;

$$\Omega(\Delta s) = -\left(\gamma \Delta s e^{-\gamma \Delta s} + b(1 - e^{-\gamma \Delta s})\right), \quad (17)$$

— функция, описывающая ”нырок” модуля вектора напряжений и обобщенный эффект Баушингера при сложной разгрузке и последующем вторичном пластическом деформировании;

$$f = f(\vartheta_1) = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}, \quad f_0 = f(\vartheta_1^0) = \frac{1 - \cos \vartheta_1^0}{2} \quad (18)$$

— функция сложного нагружения, учитывающая ориентацию вектора напряжений в процессе деформирования и ее значение в точке излома траектории; A , B , b , γ , p , q — материальные параметры для каждого конструкционного материала, экспериментально определяемые из базовых опытов. Обобщенный на сложное нагружение эффект Баушингера рассматривается как проявление общего свойства запаздывания скалярных свойств материалов [3].

При заданных начальных условиях с конкретизированными функционалами (15)–(16), определяющие соотношения (13) приводятся к задаче Коши, которая решалась

с помощью численного метода Рунге—Кутты четвертого порядка точности. Полученные решения при сравнении расчетных и экспериментальных данных позволяют производить верификацию различных вариантов модели, в том числе при неучете некоторых параметров сложности процесса в аппроксимациях функционалов.

3. Результаты физического эксперимента и численного моделирования.

По рассмотренной математической модели теории процессов были проведены численные расчеты и экспериментальные исследования упругопластического деформирования (жесткое нагружение) тонкостенного трубчатого образца по плоской траектории, содержащей прямолинейный участок и участок окружности постоянной кривизны. Экспериментальные исследования проводились на автоматизированном испытательном комплексе СЧ-ЭВМ имени А. А. Ильюшина в лаборатории механических испытаний кафедры «Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета.

Трубчатые образцы, выполненные из стали 45 с механическими характеристиками $E = 2,05$ МПа, $\mu = 0,3$, $G = 0,788$ МПа, имели толщину стенки $h = 1$ мм, радиус средней поверхности $r = 15,5$ мм, длину рабочей части $l = 110$ мм. На рис. 1 приведена полученная при деформировании такого образца экспериментальная диаграмма растяжения материала сталь 45 при нормальной температуре (экспериментальные точки отмечены "кружочками").

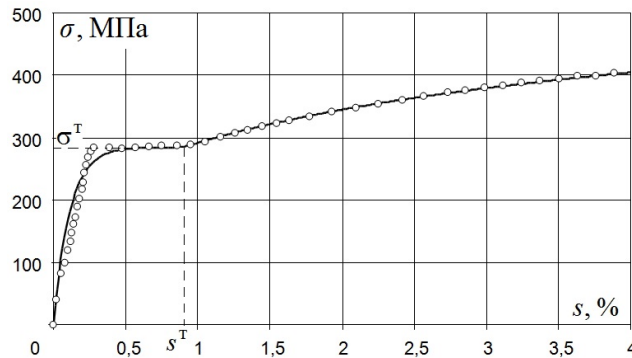


Рис. 1

Ее аппроксимация (сплошная линия на рис. 1) выполнялась по двум участкам с помощью выражений

$$\sigma = \Phi(s) = \begin{cases} \frac{2G}{\alpha}(1 - e^{-\alpha s}), & \text{при } 0 \leq s < s^T, \\ \sigma^T + 2G_*(s - s^T) + \sigma_*(1 - e^{-\beta(s-s^T)}), & \text{при } s \geq s^T, \end{cases} \quad (19)$$

где $\sigma^T = \sqrt{2/3} \sigma_T$; σ_T — предел текучести при растяжении; σ_* , α , β , G_* , — постоянные параметры. Обработка экспериментальной диаграммы дала следующие численные значения параметров для материала образцов: $\sigma^T = 286$ МПа, $s^T = 9 \cdot 10^{-3}$, $2G = 1,577 \cdot 10^5$ МПа, $\beta = 70$, $\alpha = 900$, $\sigma_* = 78,8$ МПа, $2G_* = 1619$ МПа. Материал образцов в достаточной степени был начально изотропен, что подтвердилось хорошим совпадением диаграммы растяжения с диаграммой простого нагружения при кручении.

Программы испытаний сложного нагружения в условии нормальной температуры при непропорциональном воздействии осевой силы и крутящего момента реализовывались с постоянной скоростью $\dot{\varepsilon} = 10^{-6} \text{ сек}^{-1}$ в плоскости Θ_1 - Θ_3 девиаторного пространства деформаций E_5 . В серии проведенных испытаний реализовано несколько траекторий деформирования с участками различной постоянной кривизны $\kappa_1 = \text{const}$ [5]. Одна из таких двузвенных неаналитических траекторий представлена на рис. 2.

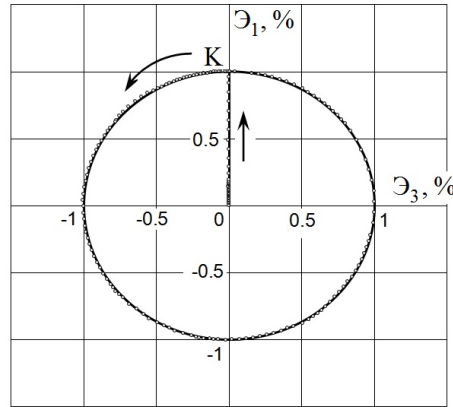


Рис. 2

На первом прямолинейном участке траектории реализовывалось растяжение до значения $\Theta_1 = 1 \%$, в точке К начала второго участка производился излом на угол $\vartheta_1^0 = 90^\circ$ и осуществлялось непропорциональное растяжение с кручением в виде окружной траектории радиуса $R = \Theta = 1 \%$ и кривизной $\kappa_1 = 100$ (рис. 2). Для проведения численных расчетов из базовых опытов по типу веера двузвенных траекторий определены значения материальных параметров для материала сталь 45: $b = 0,125$, $A = 370,2 \text{ МПа}$, $B = 23 \text{ МПа}$, $\gamma = 386,8$, $p = 1,8$, $q = 0,5$.

На рис. 3 приведен отклик на реализованную траекторию деформирования в плоскости S_1 - S_3 девиаторного пространства напряжений. На рис. 4, 5 представлены диаграммы $\sigma - s$ и $\vartheta - \Delta s$, характеризующие скалярные и векторные свойства материалов соответственно. Локальные диаграммы деформирования растяжения-сжатия $S_1 - \Theta_1$ и кручения $S_3 - \Theta_2$ приведены на рис. 6, 7. Экспериментальные точки на рис. 2-7 отмечены кружочками.

Кривые 1 на рис. 3-7 отвечают расчетным данным согласно рассматриваемой математической модели теории процессов в плоских задачах, учитывающей в аппроксимациях функционалов процесса (15) все параметры сложности процесса s , κ_1 , ϑ_1^0 для плоских траекторий и обобщенный эффект Баушингера. Как видно, численные расчеты по представленной математической модели теории процессов с использованием аппроксимаций функционалов (15)-(16) достаточно хорошо соответствуют экспериментальным данным для данного типа траекторий как по скалярным (рис. 3, 4, 6, 7), так и по векторным свойствам (рис. 5).

Кривые 2 на рис. 3-7 получены в предположении $B = 0$, то есть без учета влияния кривизны κ_1 в аппроксимациях (15). В таком виде функционалы используются для процессов деформирования материалов вида ломаных прямолинейных траекторий и

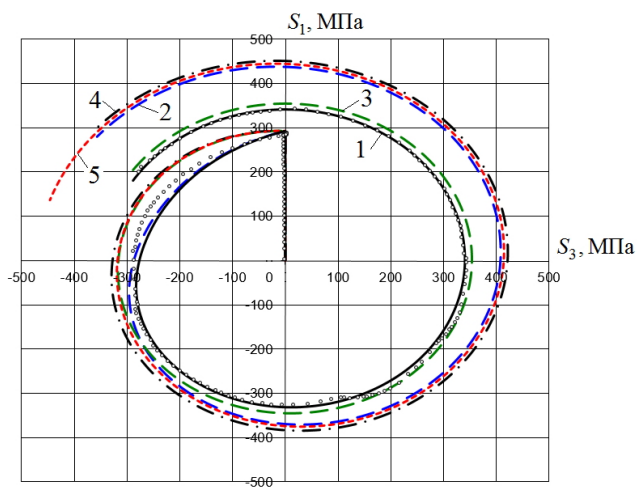


Рис. 3

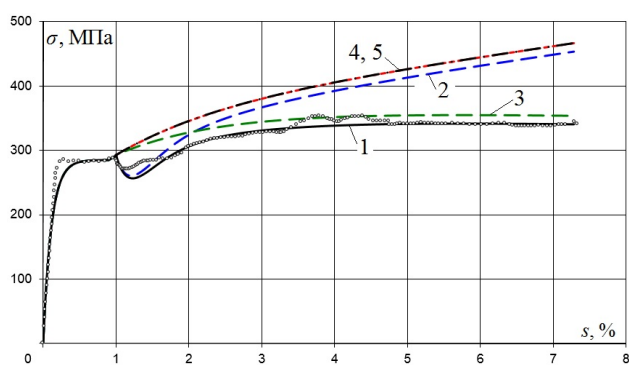


Рис. 4

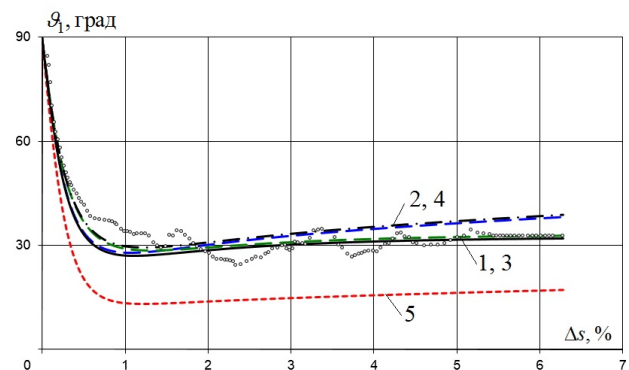


Рис. 5

хорошо зарекомендовали себя для траекторий с большими углами излома, например,

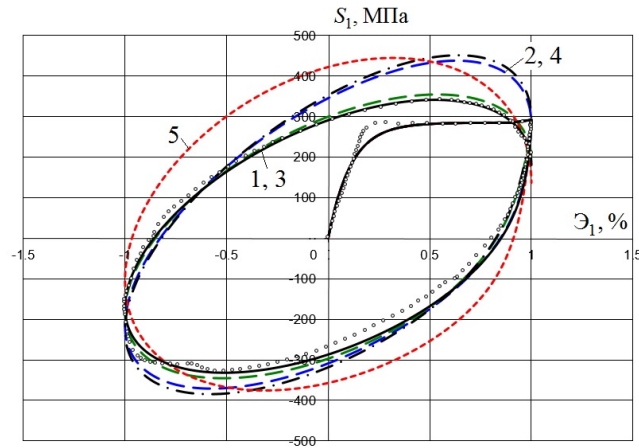


Рис. 6

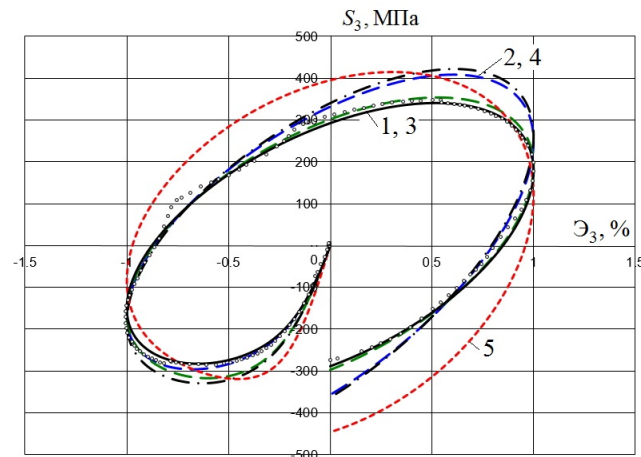


Рис. 7

при $\vartheta_1^0 = 135^\circ$ [6]. Соответственно, для реализованной криволинейной траектории такой расчет приводит к несоответствию с данными эксперимента по скалярным свойствам (рис. 3, 4, 6, 7). Учет кривизны κ_1 во втором определяющем соотношении (13) для определения угла сближения дает удовлетворительное соответствие по векторным свойствам (рис. 5).

Кривые 3 на рис. 3–7 получены в предположении $A = 0$, то есть без учета в (15) функции сложного нагружения $\Omega(\Delta s)$, описывающей «нырок» напряжений и значения функции $f(\vartheta_1^0) = f_0$ угла излома траектории, но с учетом кривизны κ_1 . В этом случае с ростом длины дуги траектории деформирования после точки ее излома достигается достаточно хорошее соответствие расчетных и опытных данных как по скалярным, так и по векторным свойствам (рис. 3–7). Однако, такой расчет фактически соответствует гладкой траектории без угла излома и неизбежно приведет к ошибочным результатам для больших углов излома $\vartheta_1^0 > 90^\circ$, которые существенно

вливают на процесс деформирования и величину скалярного "нырка" модуля вектора напряжений в окрестности точки излома.

Кривые 4 на рис. 3–7 получены в предположении $A = 0, B = 0$, в аппроксимациях (10), то есть с использованием закона упрочнения Одквиста–Ильюшина $\sigma = \Phi(s)$ и без учета влияния параметров сложного нагружения κ_1, ϑ_1^0 , но с учетом аппроксимации для функционала M_1 по (16), отвечающего за векторные свойства материалов. Кривые 5 на рис. 3–7 представляют результаты расчета по теории пластического течения Прандтля–Рейсса–Хилла для упрочняющихся материалов. В этой теории также используется зависимость $\sigma = \Phi(s)$, принимается значение функционала $M_1 = 2G$ и не учитываются векторные свойства материала в явном виде, но при этом в определяющих соотношениях (13) сохраняется дифференциальное уравнение для определения угла сближения ϑ_1 . Как видно, обе расчетные кривые 4 и 5 не соответствуют экспериментальным данным по скалярным свойствам (рис. 3, 4, 6, 7). Расчет по теории течения (кривая 5), не учитывающей в явном виде векторные свойства материалов, так же заметно отличается от опытных данных при определении угла сближения ϑ_1 (рис. 5). Более подробный анализ расчетных результатов при сложном нагружении по криволинейным траекториям по теориям пластичности, использующим закон упрочнения Одквиста–Ильюшина (14) приведен в [7].

На рис. 8 приведены расчетные значения функционалов M_1 и $d\sigma/ds$ в зависимости от изменения длины дуги Δs траектории деформирования. Кривые на этом рисунке имеют ту же нумерацию.

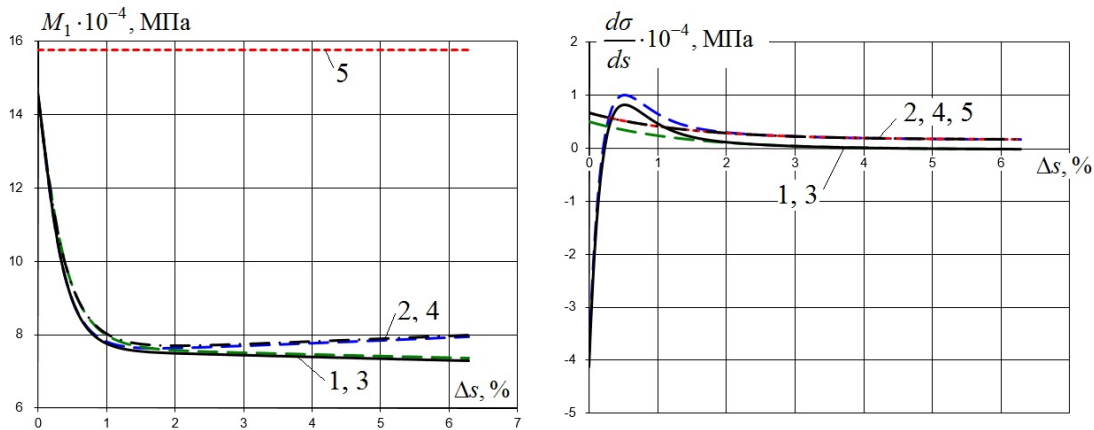


Рис. 8

Как видно, предлагаемая математическая модель теории процессов для плоских траекторий криволинейных дала результаты, хорошо соответствующие экспериментальным данным, а неучет параметров сложного нагружения κ_1, ϑ_1^0 привел к отклонению расчетных результатов от данных эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
- [2] Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.

[3] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.

[4] Ильюшин А. А. Пластичность. Упругопластические деформации. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.

[5] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультьяев В. И. Моделирование процессов сложного упругопластического деформирования материалов по плоским криволинейным траекториям // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77, Ч. 2. С. 113–123.

[6] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультьяев В. И. Численное моделирование процессов сложного упругопластического деформирования стали по двузвенным ломаными траекториям // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Т. 76, Ч. 1. С. 18–25.

[7] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Алексеева Е. Г. Математическое моделирование процессов пластического деформирования материалов по сложным плоским траекториям // Materials Physics and Mechanics (MPM). 2015. Vol. 24, № 2. P. 107–118.

V. G. Zubchaninov, A. A. Alekseev, V. I. Gulyaev

NUMERICAL MODELLING AND CREATION OF THE IMAGE OF PROCESS UNDER ELASTO-PLASTIC DEFORMATION STEEL ALONG COMPLEX FLAT CIRCLE TRAJECTORIES

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. The results of numerical modeling of process nonproportional elasto-plastic deformation steel 45 along complex flat trajectory with a constant curvature are presented. The theory of processes of A. A. Ilyushin and mathematical model of V. G. Zubchaninov considering all parameters of complex loading for flat trajectories is used. To assess the reliability of used constitutive equations, the numerical simulation results are compared with experimental data conducted on an automated SN-EVM test stand. Set the correct of modeling nonproportional plastic deformation of steel 45 using the proposed mathematical model. It is shown that the absence of some parameters of complex loading in functional approximations gives the calculated results that differ from the experimental data.

Keywords: plasticity, mathematical model, numerical simulation, verification, complex loading, flat curved trajectory, vector and scalar properties of materials, SN-EVM test stand.

REFERENCES

[1] Ilyushin A. A. Plasticity. Bases of the General Mathematical Theory. Moscow: Izdatelstvo AS USSR, 1963. 271 p. (in Russian)

Zubchaninov Vladimir Georgievich

e-mail: vlgzub@gmail.com, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

Alekseev Andrey Alekseevich

e-mail: alexeev@bk.ru, Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

Gulyaev Vadim Ivanovich

e-mail: vig0@mail.ru, Doctor of Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

- [2] Ilyushin A. A. Continuum Mechanics. Moscow: Izdatelstvo MSU, 1990. 310 p. (in Russian)
- [3] Zubchaninov V. G. Mechanics of processes in plastic environments. Moscow: Fizmatlit, 2010. 352 p. (in Russian)
- [4] Ilyushin A. A. Plasticity. Elastic- plastic deformation. Moscow: Gostekhizdat, 1948. 376 p. (in Russian)
- [5] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gulyaev V. I. Modeling the processes of complex elastoplastic deformation of materials along flat curvilinear trajectories // Problems of strength and plasticity. 2015. Vol. 77, № 2. P. 113–123. (in Russian)
- [6] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gulyaev V. I. Numerical simulation a processes of complex elastoplastic deformation steel on two-link broken trajectories // Problems of strength and plasticity. 2014. Vol. 76, № 1. P. 18–25. (in Russian)
- [7] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Alekseeva E. G. Mathematical modeling of plastic deformation of materials on complex flat trajectories // Materials Physics and Mechanics (MPM). 2015. Vol. 24, № 2. P. 107–118. (in Russian)

Г. М. Севастьянов¹, В. И. Штука², А. А. Буренин¹

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД В ПРИБЛИЖЁННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОБ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ НЕСЖИМАЕМОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ

¹Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

²Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

Аннотация. Получено приближённое решение одномерной задачи нелинейной динамической теории упругости об ударном скручивающем нагружении цилиндрического слоя, подвергнутого предварительным антиплоским деформациям. Показано, что граничное ударное воздействие распространяется по среде посредством двух поверхностей разрывов деформаций. Указаны особенности построения прифронтных лучевых асимптотик за каждой из поверхностей разрывов и вычисления коэффициентов лучевых рядов согласно условиям совместности разрывов и краевым условиям.

Ключевые слова: нелинейная упругость, большие деформации, динамические задачи, ударные волны, лучевой метод

УДК: 539.3

Введение. Метод приближённого решения существенно нестационарных краевых задач механики деформирования в форме построения прифронтных асимптотических разложений решений при помощи лучевых рядов был независимо предложен Дж. Ахенбахом [1] и Г. И. Быковцевым [2] вместе с учениками. В первом случае лучевой ряд представлялся в форме степенного ряда по времени, во втором – по лучевой координате, отсчитываемой от поверхности разрывов. Коэффициенты таких рядов представляют собой разрывы функций и их производных на фронте волны;

© Севастьянов Г. М., Штука В. И., Буренин А. А., 2015

Севастьянов Георгий Мамиевич

e-mail: akela.86@mail.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Штука Виктор Игоревич

e-mail: onslice@mail.ru, аспирант, инженер-математик, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Буренин Анатолий Александрович

e-mail: burenin@iacr.dvo.ru, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00292).

Поступила 30.09.2015

их построение основано на динамических (следующих из законов сохранения), геометрических и кинематических условиях совместности разрывов [3], [4], [5]. Кинематические условия используются в форме рекуррентных зависимостей, связывающих разрывы функции и её производных по пространственным координатам и времени до любого используемого порядка. Теория таких рекуррентных зависимостей для условий совместности разрывов была завершена сравнительно недавно [6]. Первоначально данный метод использовался для построения решения в прифронтных областях, деформирование в которых подчинялось линейным системам уравнений. Он оказался также пригодным и для нелинейных систем уравнений с тем только ограничением, чтобы поверхности разрывов не были ударными волнами (поверхностями разрывов деформаций), а только слабыми (звуковыми волнами или, что то же, поверхностями разрывов градиентов деформаций). На ударных волнах рекуррентный характер условий совместности разрывов не следует. Предложение по преодолению таких трудностей было дано в [7]. Оно было основано на дополнительном разложении интенсивности ударной волны в степенной ряд по времени с учётом того, что данная функция задана на продвигающейся поверхности разрывов и, следовательно, коэффициентами разложения оказываются дельта-производные по Томасу [8] от интенсивности по времени, для которых снова следует воспользоваться рекуррентными зависимостями для вычисления производных следующего порядка на каждом шаге вычислений. Таким способом был получен ряд приближённых решений краевых задач нелинейной динамической теории упругости с ударными волнами. Основная их часть помещена в основательный обзор [9], посвящённый главным образом лучевому методу. Далее отметим только публикации, относящиеся к ставящейся задаче.

В [10] приведено решение одномерной задачи об ударе по предварительно продеформированному полупространству. Указаны особенности построения прифронтных лучевых рядов за тремя движущимися поверхностями разрывов: квазипродольной ударной волной, несущей в деформируемую среду главным образом объёмные деформации, за плоскополяризованной ударной волной сдвиговой нагрузки и за ударной волной круговой поляризации (нейтральной волной). В настоящей работе первую из таких волн с целью упрощения исключим, предположив среду несжимаемой. В работе [11] рассмотрена задача с цилиндрической ударной волной. Однако, полагая отсутствие в среде предварительных деформаций, авторы [11] получили лишь случай с одной распространяющейся ударной волной. Это было связано с целью работы – предложить на основе прифронтных лучевых разложений способ выделения разрывов на каждом временном шаге численных расчётов. Использование для таких целей прифронтных асимптотик впервые было предложено в [12]. Отсутствие в динамике деформируемых сред (в отличие от газовой динамики) общеупотребимых алгоритмов вычисления на каждом шаге места и интенсивностей разрывов делает подобные подходы перспективными в тех ситуациях, когда методы сквозного счёта по каким-либо причинам применять нежелательно.

Здесь построим только приближённое решение задачи об ударном скручивающем нагружении цилиндрического слоя, подвергнутого предварительной антиплоской деформации, считая, что на малых временах прифронтные асимптотики с достаточной степенью точности приближают решение динамической задачи. Таким образом, неизвестные коэффициенты лучевых рядов найдём из краевых условий. Построенные асимптотические разложения можно будет использовать в численных расчётах, как

это предлагалось в [11], [13]. В этом случае коэффициенты лучевых рядов определяются решением соответствующей разностной схемы для исходного уравнения движения с учётом прифронтального лучевого разложения для поля перемещений.

Исходные модельные соотношения. Движение несжимаемой упругой среды опишем в пространственных переменных Эйлера x_1, x_2, x_3 зависимостями

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), & \sigma_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}) - p\delta_{ij}, \\ 2\alpha_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}, & v_i &= \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \\ \dot{u}_i &= \partial u_i / \partial t, & u_{i,j} &= \partial u_i / \partial x_j. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u_i и v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей, ρ и p – плотность среды и функция добавочного всестороннего давления, обусловленная принимаемой несжимаемостью $\rho = const$, α_{ij} и σ_{ij} – компоненты тензоров деформаций Альманзи и напряжений Коши-Эйлера. Система уравнений (1) окажется замкнутой когда в рассматриваемом здесь адиабатическом приближении для упругой среды упругий потенциал $W = W(\alpha_{ij})$ (массовая плотность распределения внутренней энергии) будет задан в форме функции деформаций α_{ij} . Полагая среду изотропной, такую зависимость принимаем в виде $W = W(A_1, A_2)$, где $A_1 = \alpha_{ii}$, $A_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}$ – инварианты тензора деформаций. То обстоятельство, что в данной зависимости участвуют только два инварианта, следует из принимаемого условия несжимаемости. Более того, осуществимость простейших движений среды (антиплоского, винтового и др.) накладывает дополнительные ограничения [14], такие, что коэффициенты в разложении функции $W(A_1, A_2)$ в ряд Тейлора относительно свободного состояния оказываются зависимыми и число их сокращается. Для рассматриваемого случая винтового движения точек среды следует принять

$$W(A_1, A_2) = -2\mu A_1 - \mu A_2 + bA_1^2 - (\mu - b)A_1A_2 - aA_1^3 + \dots \quad (2)$$

В (2) многоточием отмечены иные не выписанные здесь слагаемые, имеющие четвёртый и более высокие порядки по компонентам α_{ij} тензора деформаций; μ – модуль сдвига, a и b – упругие постоянные более высоких порядков.

Частные решения системы уравнений (1), (2), соответствующие как раз винтовому движению частиц среды в цилиндрической системе координат r, φ, z будем искать в форме зависимостей

$$u_r = r(1 - \cos \psi(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin \psi(r, t), \quad u_z = u(r, t). \quad (3)$$

В таком случае неизвестными в системе уравнений, следующей из (1), (2), наряду с функцией добавочного всестороннего давления $p = p(r, t)$, остаются осевое перемещение $u(r, t)$ и скрутка $\psi(r, t)$. Действительно, для отличных от нуля компонент тензора деформаций Альманзи имеем

$$\begin{aligned} \alpha_{rr} &= -\frac{1}{2}m, & \alpha_{r\varphi} &= \frac{1}{2}r\psi_{,r}, & \alpha_{rz} &= \frac{1}{2}u_{,r}, \\ m &= u_{,r}^2 + r^2\psi_{,r}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и далее в индексе после запятой содержится обозначение частной производной по переменной r : $\psi_{,r} = \partial\psi/\partial r$, $u_{,r} = \partial u/\partial r$. Частную производную по переменной t будем обозначать по аналогии: $\psi_{,t} = \partial\psi/\partial t$, $u_{,t} = \partial u/\partial t$.

Следуя формуле Мурнагана из (1), в цилиндрической системе координат для компонент тензора напряжений получаем следующие зависимости:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -p - 2\mu - \theta_1 m - \theta_2 m^2 + \dots, \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= -p - 2\mu - \theta_1 m - \theta_2 m^2 + \mu r^2 \psi_{,r}^2 - \theta_3 u_{,r}^2 m + \dots, \\
\sigma_{zz} &= -p - 2\mu - \theta_1 m - \theta_2 m^2 + \mu u_{,r}^2 - \theta_3 r^2 \psi_{,r}^2 m + \dots, \\
\sigma_{\varphi z} &= u_{,r} r \psi_{,r} (\mu + \theta_3 m + \dots), \\
\sigma_{r\varphi} &= \mu r \psi_{,r} (1 + \chi_1 m^2 + \dots) = \rho h r \psi_{,r}, \\
\sigma_{rz} &= \mu u_{,r} (1 + \chi_1 m^2 + \dots) = \rho h u_{,r}, \\
\theta_1 &= \frac{\mu + b}{2}, \quad \theta_2 = \frac{3(a - b + \mu)}{4}, \quad \theta_3 = \frac{b - \mu}{2}, \quad \chi_1 = \frac{\theta_2}{\mu}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Подстановка (5) в уравнение движения, записанное в цилиндрической системе координат для рассматриваемого случая,

$$\begin{cases} \sigma_{rr,r} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = \rho w_r, \\ \sigma_{r\varphi,r} + 2r^{-1}\sigma_{r\varphi} = \rho w_\varphi, \\ \sigma_{rz,r} + r^{-1}\sigma_{rz} = \rho w_z, \end{cases} \tag{6}$$

где w_r, w_φ, w_z – компоненты вектора ускорений, приводит к системе трёх дифференциальных уравнений относительно трёх функций $p(r, t)$, $u(r, t)$ и $\psi(r, t)$ при $C = \sqrt{\mu/\rho}$

$$\begin{cases} p_{,r} + r^{-1}(\mu r^2 \psi_{,r}^2 - \theta_3 u_{,r}^2 m) + 2(\theta_1 + 2\theta_2 m)(u_{,rr} u_{,r} + r^2 \psi_{,rr} \psi_{,r} + r \psi_{,r}^2) = r \psi_{,t}^2, \\ (1 + \chi_1 m^2)(\psi_{,rr} + 3r^{-1} \psi_{,r}) + 4\chi_1(u_{,rr} u_{,r} + r^2 \psi_{,rr} \psi_{,r} + r \psi_{,r}^2) \psi_{,r} m = C^{-2} \psi_{,tt}, \\ (1 + \chi_1 m^2)(u_{,rr} + r^{-1} u_{,r}) + 4\chi_1(u_{,rr} u_{,r} + r^2 \psi_{,rr} \psi_{,r} + r \psi_{,r}^2) u_{,r} m = C^{-2} u_{,tt}. \end{cases} \tag{7}$$

Ударные волны. Ударной волной называем здесь поверхность Σ разрывов деформаций. Когда деформации на некоторой поверхности претерпевают разрыв, то разрывными окажутся скорости движения среды и напряжений в ней. Следствиями законов сохранения на поверхности разрывов являются ограничения на разрывы, называемые динамическими условиями совместности разрывов [15]. Анализ этих ограничений позволяет сделать выводы о скоростях движения таких поверхностей и соотношениях их интенсивностей. Для случая адиабатической упругой среды и принимаемого условия её несжимаемости содержательным оказывается только следствие закона сохранения импульса на поверхности разрывов

$$[\sigma_{ij}] n_j = \rho^+ (v_j^+ n_j - G) [v_i]. \tag{8}$$

Это динамическое условие совместности разрывов записано в общем виде в прямоугольной декартовой системе координат. В нём квадратными скобками обозначены разрывы величин $[f] = f^+ - f^-$. При этом индексом "плюс" обозначено значение разрывной величины непосредственно перед поверхностью разрывов, индексом "минус" – сразу за такой поверхностью. Ограничение (8) на возможные разрывы справедливы в каждой точке продвигающейся поверхности разрывов Σ , в которой задан единичный вектор внешней нормали с компонентами n_j и величина скорости движения G в

направлении нормали. В рассматриваемом случае (8) сводится к системе трёх уравнений ($n_r = 1, n_\varphi = 0, n_z = 0$):

$$\begin{cases} [\sigma_{rr}] = 0, \\ [\sigma_{r\varphi}] = -\rho G[v_\varphi], \\ [\sigma_{rz}] = -\rho G[v_z]. \end{cases} \quad (9)$$

Первое из соотношений (9) является вспомогательным и служит для вычисления разрыва функции добавочного всестороннего давления $[p]$. Два последних соотношения являются системой двух уравнений, в которые входят три неизвестных $[\psi, r]$, $[u, r]$, G . Действительно, перепишем их, опираясь на условие совместности Адамара [8]:

$$[f, r] = -G^{-1}[f, t]. \quad (10)$$

Вычисляя $[\sigma_{r\varphi}]$, $[\sigma_{rz}]$ согласно (5) и исключая $[v_\varphi]$, $[v_z]$ при помощи (10), получим

$$\begin{aligned} h[\psi, r] + (\psi, r - [\psi, r]) [h] &= G^2[\psi, r], \\ h[u, r] + (u, r - [u, r]) [h] &= G^2[u, r], \\ [h] &= C^2[m] (\chi_1 (m - 2[m]) + \dots), \end{aligned} \quad (11)$$

где $h = h^+$, $\psi = \psi^+$, $u = u^+$, $m = m^+$ – значения разрывных функций перед Σ . Далее при обозначении величин перед поверхностью разрывов индекс плюс будем опускать.

Домножим первое уравнение системы (11) на $[u, r]$ а второе – на $[\psi, r]$ и вычтем одно из другого. В результате получим условие существования поверхностей разрывов в форме

$$[h] (\psi, r [u, r] - [\psi, r] u, r) = 0. \quad (12)$$

Таким образом, в несжимаемой упругой среде могут распространяться поверхности разрывов, на которых необходимо выполнены условия (12), согласно им возможны два случая.

1. Выполнение (12) обеспечивается равенством нулю выражения, содержащегося в скобках

$$\psi, r [u, r] - [\psi, r] u, r = 0,$$

отсюда

$$\frac{r\psi, r}{u, r} = \frac{r[\psi, r]}{[u, r]}. \quad (13)$$

Следовательно такая поверхность разрывов Σ_1 является плоскополяризованной; она не способна изменить направленность присутствующего в среде предварительного сдвига и меняет скачкообразно только его интенсивность. В статье [16] подобная ударная волна в плоском случае называется волной нагрузки. В частности, когда перед Σ_1 присутствуют лишь антиплоские деформации $u, r \neq 0$, а $\psi, r = 0$, то и за такой поверхностью разрывов скручивающие деформации будут отсутствовать: $\psi, r^- = 0$, и наоборот. Термодинамические ограничения (аналог теоремы Цемпелена для совершенного газа) приводят к существованию ударных волн, увеличивающих предварительный сдвиг, и невозможности существования разгружающих ударных волн [16]. Полагая разрывы функций на Σ_1 известными, найдём скорость движения поверхности разрывов

$$G_1 = \left(h - [h] + \frac{u_{,r}}{[u_{,r}]} [h] \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Следовательно, скорость распространения плоскополяризованной ударной волны нагрузки зависит как от уровня предварительных деформаций, так и от интенсивности ударного воздействия на деформируемую среду.

2. Условие существования разрывов (12) будет выполнено при $[h] = 0$ или, что то же, $[m] = 0$. На такой поверхности разрывов Σ_2 не изменяется интенсивность предварительного сдвига, но скачкообразно изменяется его направленность. Такую поверхность разрывов называют нейтральной ударной волной или волной круговой поляризации [16]. Данная ударная волна является изоэнтропической [16] и её скорость полностью определяется предварительными деформациями

$$G_2 = h^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Можно показать [16], что в случае несжимаемой упругой среды $G_1 > G_2$.

Постановка задачи. Лучевой метод. Полагаем, что слой несжимаемой упругой среды расположен между двумя цилиндрическими поверхностями $r = r_0$ и $r = R$ ($r_0 < R$) и подвержен осевой антиплоской деформации, связанной с краевыми условиями при $t = 0$:

$$\begin{aligned} \psi(r_0, 0) = 0, \quad \psi(R, 0) = 0, \\ u(r_0, 0) = u_0, \quad u(R, 0) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $u_0 = const$ – задаваемое предварительное смещение границы $r = r_0$. Неизвестные функции $\psi(r) = \psi(r, 0)$ и $u(r) = u(r, 0)$ такой задачи определяем интегрированием уравнения равновесия.

Пусть, начиная с момента времени $t = 0$, на таким способом продеформированный упругий слой производится ударное скручивающее воздействие

$$\begin{aligned} \psi(r_0, t) = \psi_1 t + \psi_2 t^2, \quad \psi(R, t) = 0, \\ u(r_0, t) = u_0, \quad u(R, t) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Данное ударное воздействие согласно предыдущим рассмотрениям приведёт к распространению по слою двух ударных волн Σ_1 и Σ_2 . На рисунке 1 римской цифрой I обозначена область, содержащая только предварительные деформации, когда $r_1 < r < R$, II – область за Σ_1 и перед Σ_2 , когда $r_2 < r < r_1$, III – область за Σ_2 , когда $r_0 < r < r_2$.

Поверхность разрывов Σ_1 является плоскополяризованной ударной волной. Разрывной за ней оказывается только $u_{,r}$ ($[u_{,r}] \neq 0$), в то время как ψ остаётся равной нулю всюду в области II (рис. 1). Приближённое решение в области II будем представлять в форме лучевого ряда

$$\begin{aligned} u^-(r, t) = u(r) - \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \frac{(t - t_1)^j}{j!}, \\ \kappa_j = \left[\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{t=t_1}, \quad t_1 = \int_0^r G_1^{-1}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь G_1 вычисляется согласно (14), когда полагается $\psi_{,r} = 0$ и $[\psi_{,r}] = 0$,

$$G_1 = C \left(1 + \chi_1 u_{,r}^4 \left(5 - 10 \frac{\kappa_1}{Cu_{,r}} + 10 \left(\frac{\kappa_1}{Cu_{,r}} \right)^2 - 5 \left(\frac{\kappa_1}{Cu_{,r}} \right)^3 + \left(\frac{\kappa_1}{Cu_{,r}} \right)^4 \right) + \dots \right).$$

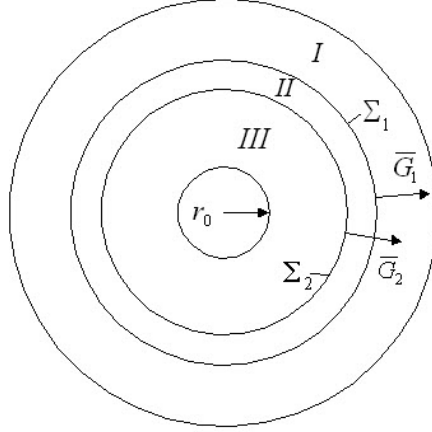


Рис. 1. Схематическое изображение распространяющихся волн разрывов деформаций в цилиндрическом слое

В области III за волной круговой поляризации Σ_2 появляется $\psi^- \neq 0$, поскольку $[\psi_{,r}] \neq 0$. Запишем приближение решения в виде

$$u^-(r, t) = u(r, t) - \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \frac{(t - t_2)^j}{j!}, \quad \psi^-(r, t) = - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \frac{(t - t_2)^j}{j!}, \quad (19)$$

$$\eta_j = \left[\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{t=t_2}, \quad \omega_j = \left[\frac{\partial^j \psi}{\partial t^j} \right]_{t=t_2}, \quad t_2 = \int_0^r G_2^{-1}(\xi) d\xi.$$

Здесь G_2 вычисляется согласно (15), когда в нём полагается действительным представлением (18):

$$G_2 = C \left(1 + \chi_1 u_{,r}^4 \left(1 - 4 \frac{\kappa_1}{Cu_{,r}} + 6 \left(\frac{\kappa_1}{Cu_{,r}} \right)^2 - 4 \left(\frac{\kappa_1}{Cu_{,r}} \right)^3 + \left(\frac{\kappa_1}{Cu_{,r}} \right)^4 \right) + \dots \right).$$

Чтобы определить неизвестные коэффициенты в разложениях (18) и (19), необходимо воспользоваться уравнением движения в разрывах, записанном на Σ_1 и Σ_2 при помощи геометрических и кинематических условий совместности (10) и

$$[f_{,rr}] = G^{-2} \left([f_{,tt}] - 2 \frac{\delta[f_{,t}]}{\delta t} + G^{-1} \frac{\delta G}{\delta t} [f_{,t}] \right). \quad (20)$$

Итак, на волне нагрузки Σ_1 получим

$$A[u_{,rr}] + B = C^{-2}[u_{,tt}], \quad (21)$$

где

$$A = 1 + 5\chi_1 (u_{,r}^4 - [u_{,r}^4] + \dots),$$

$$B = r^{-1}[u,r] (1 + \chi_1 u_{,r}^4) + \chi_1 ((5u_{,rr} + r^{-1}(u_{,r} - [u,r])) [u_{,r}^4] + \dots).$$

Таким образом выразим на волне нагрузки Σ_1 дельта-производную разрыва скорости осевого смещения

$$\frac{\delta \kappa_1}{\delta t} = \kappa_1 \left(-\frac{1}{2} \frac{C}{r} + 10\chi_1 \frac{u_{,r}^3}{C} (\kappa_2 - C^2 u_{,rr}) \right) + \dots, \quad (22)$$

из чего следует зависимость скорости изменения интенсивности разрыва κ_1 от геометрии поверхности (множитель $-r^{-1}C/2$ при κ_1) предварительных деформаций $u_{,r}$ и величины разрыва ускорения κ_2 .

Поскольку соотношения записаны на поверхности разрывов Σ_1 , то полагаем в (21), (22), что $r = r_1$.

На волне круговой поляризации Σ_2 соотношения будут следующими

$$\begin{aligned} D[\psi_{,rr}] + F[u_{,rr}] + H &= C^{-2}[\psi_{,tt}], \\ K[u_{,rr}] + L[\psi_{,rr}] + M &= C^{-2}[u_{,tt}], \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} D &= 1 + \chi_1 (u_{,r}^4 - [m^2] - 4r^2[\psi_{,r}^2 m] + \dots), \quad F = -4\chi_1 [u_{,r} \psi_{,r} m] + \dots, \\ H &= 3r^{-1}[\psi_{,r}] + \chi_1 (3r^{-1}[\psi_{,r}] (u_{,r}^4 - [m^2]) + 4(u_{,rr}[u_{,r} \psi_{,r} m] + r[\psi_{,r}^3 m]) + \dots), \\ K &= 1 + \chi_1 (u_{,r}^4 - [m^2] + 4(u_{,r}^4 - [u_{,r}^2 m]) + \dots), \quad L = -4r^2 \chi_1 [u_{,r} \psi_{,r} m] + \dots, \\ M &= r^{-1}[u_{,r}] + \chi_1 ((u_{,rr} + r^{-1}u_{,r}) [m^2] + r^{-1}[u_{,r}] (u_{,r}^4 - [m^2]) + 4(u_{,rr}[u_{,r}^2 m] + r[u_{,r} \psi_{,r}^2 m]) + \dots). \end{aligned}$$

В (18) коэффициенты A и B определяются величинами разрывов деформаций и состоянием среды перед поверхностью разрывов, а в (23) коэффициенты D , F , H , K , L и M записаны для состояния среды за волной нагрузки через предварительные деформации и разрывы скоростей κ и λ на волне нагрузки согласно (18).

Аналогично запишем систему уравнений на волне круговой поляризации Σ_2

$$\begin{aligned} \frac{\delta \eta_1}{\delta t} &= \eta_1 \left(-\frac{3}{2} \frac{C}{r} + 2\chi_1 \frac{u_{,r}^3}{C} (\kappa_2 - C^2 u_{,rr}) \right) + \\ &+ \chi_1 u_{,r}^2 \kappa_1 \left(3\eta_1 \left(\frac{u_{,r}}{r} + 2 \left(\frac{\kappa_2}{C^2} - u_{,rr} \right) \right) + 2 \frac{\eta_2 u_{,r}}{C} \right) + \dots, \\ \omega_2 &= -\frac{r^2 \eta_1 \eta_2}{C u_{,r}} \left(1 - \frac{4}{5} \frac{\kappa_1}{C u_{,r}} (1 - \chi_1 u_{,r}^4) \right) + \dots, \\ \omega_1 &= -\frac{1}{2} \frac{r^2 \eta_1^2}{C u_{,r}} + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) следует зависимость скорости изменения интенсивности разрыва η_1 от геометрии поверхности (множитель $-3r^{-1}C/2$ при η_1), предварительных деформаций $u_{,r}$, величин разрыва скорости κ_1 и ускорений κ_2 , η_2 , а также явная связь коэффициентов ω_2 и η_2 . Поскольку соотношения записаны на поверхности разрывов Σ_2 , то полагаем в (23), (24), что $r = r_2$.

Системы дифференциальных уравнений (21) и (23) относительно дельта-производных, равно как (22) и (24), являются существенно нелинейными, параметрическими и незамкнутыми. На n -ом шаге лучевого метода на ударных волнах будем

получать соотношения вида

$$f(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \frac{\delta \eta_n}{\delta t}, \eta_{n+1}) = 0,$$

которые невозможно разрешить без знания η_{n+1} – по сути параметра, определить который можно только на следующем шаге, который также зависит от параметра – разрыва более старшей производной. В этом и заключается коренное отличие в методе от случая слабых волн (поверхностей разрывов ускорений). В случае линейных уравнений движения данную зависимость также можно рассматривать в качестве обыкновенных дифференциальных уравнений для интенсивностей разрывов (η_{n+1} отсутствует), которые и задают коэффициенты лучевых рядов. В рассматриваемом случае разрывы скоростей и разрывы ускорений ищем в форме рядов на поверхностях разрывов. Для этого воспользуемся дополнительными разложениями функций, положив времена в таких представлениях малыми, чтобы они удовлетворяли решению с достаточной степенью точности в окрестности фронта волны. Разрывы на Σ_1 и Σ_2 запишем в виде

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa_1|_{t_1=0} + \frac{\delta \kappa_1}{\delta t}|_{t_1=0} t_1 + \dots \simeq \kappa_{10} + \kappa_{11} t_1, & \kappa_2 &= \kappa_2|_{t_1=0} + \dots \simeq \kappa_{20}, \\ \omega_1 &= \omega_1|_{t_2=0} + \frac{\delta \omega_1}{\delta t}|_{t_2=0} t_2 + \dots \simeq \omega_{10} + \omega_{11} t_2, & \omega_2 &= \omega_2|_{t_2=0} + \dots \simeq \omega_{20}, \\ \eta_1 &= \eta_1|_{t_2=0} + \frac{\delta \eta_1}{\delta t}|_{t_2=0} t_2 + \dots \simeq \eta_{10} + \eta_{11} t_2, & \eta_2 &= \eta_2|_{t_2=0} + \dots \simeq \eta_{20}. \end{aligned} \quad (25)$$

Количество неопределённых коэффициентов в (25) достаточно для первого шага лучевого метода: n -ый шаг метода состоит в том, чтобы воспользоваться уже продифференцированным $n-1$ раз по времени уравнением движения, записанного на волнах нагрузки и круговой поляризации, и крайевыми условиями для определения неизвестных коэффициентов лучевых рядов. Чтобы сделать следующий $n+1$ -ый шаг в разложениях (25) необходимо учитывать члены более высоких порядков, чтобы получить алгебраические уравнения на определение соответствующих коэффициентов из системы дифференциальных уравнений.

При помощи (25) запишем (17), (21) и (23) в виде системы, выделяя коэффициенты при t и t^2 ; ω_{10} и ω_{11} являются зависимыми от η_{10} и η_{11} согласно (24). Поскольку мы определяем коэффициенты в разложениях (25) и устремляем t_1 и t_2 к нулю, то r_1 и r_2 стремятся к r_0 , за счёт чего возможно определение неизвестных коэффициентов из крайевых условий. Решение данной системы достаточно громоздко для коэффициентов κ_{10} , κ_{11} , κ_{20} , η_{11} , ω_{20} , поэтому представим их лишь первыми слагаемыми

$$\begin{aligned} \kappa_{10} &= \frac{1}{2} \frac{r_0^2 \psi_1^2}{C u_{,r}(r_0)} + \dots, & \kappa_{11} &= -\frac{1}{4} \frac{r_0 \psi_1^2}{u_{,r}(r_0)} + \dots, & \kappa_{20} &= C^2 u_{,rr}(r_0) + \dots, \\ \eta_{10} &= -\psi_1, & \eta_{11} &= \frac{3}{2} \frac{C}{r_0} \psi_1 + \dots, & \eta_{20} &= -\psi_2, & \omega_{20} &= -C^2 u_{,rr}(r_0) + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь, определив все неизвестные коэффициенты в разложениях, можем записать решение за Σ_2 в виде

$$\begin{aligned} \psi(r, t) &= \psi(r) - (\eta_{10} + \eta_{11} t_2) (t - t_2) - \eta_{20} (t - t_2)^2 + \dots, \\ u(r, t) &= u(r) - (\kappa_{10} + \kappa_{11} t_1) (t - t_1) - \kappa_{20} (t - t_1)^2 - \\ &\quad - (\omega_{10} + \omega_{11} t_2) (t - t_2) - \omega_{20} (t - t_2)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{r - r_0}{C (1 + 5\chi_1 u_{,r}^2(r_0) (u_{,r}^2(r_0) + 2C^{-1}\kappa_{10} (C^{-1}\kappa_{10} - u_{,r}(r_0))))} - \\
 &\quad - \frac{5\chi_1 \kappa_{11} u_{,r}^2(r_0) (2C^{-1}\kappa_{10} - u_{,r}(r_0)) (r - r_0)^2}{C^3 (1 + 5\chi_1 u_{,r}^2(r_0) (u_{,r}^2(r_0) + 2C^{-1}\kappa_{10} (C^{-1}\kappa_{10} - u_{,r}(r_0))))^3} + \dots, \\
 t_2 &= \frac{r - r_0}{C (1 + \chi_1 u_{,r}^2(r_0) (u_{,r}^2(r_0) + 2C^{-1}\kappa_{10} (3C^{-1}\kappa_{10} - 2u_{,r}(r_0))))} - \\
 &\quad - \frac{2\chi_1 \kappa_{11} u_{,r}^2(r_0) (3C^{-1}\kappa_{10} - u_{,r}(r_0)) (r - r_0)^2}{C^3 (1 + \chi_1 u_{,r}^2(r_0) (u_{,r}^2(r_0) + 2C^{-1}\kappa_{10} (3C^{-1}\kappa_{10} - 2u_{,r}(r_0))))^3} + \dots
 \end{aligned} \tag{28}$$

Отметим ещё раз рекуррентность описанных процедур определения постоянных лучевых рядов согласно условиям при $r = r_0$.

Заключение. Таким образом, здесь удалось показать, что ударное граничное воздействие в одномерном случае с осевой симметрией распространяется по предварительно продеформированной несжимаемой упругой среде при помощи двух ударных волн. Одна из таких волн является плоскополяризованной цилиндрической поверхностью разрывов (волна нагрузки); другая – волной круговой поляризации (нейтральной ударной волной). Предложен приближённый метод построения лучевых разложений решений за такими поверхностями разрывов и указан способ определения коэффициентов лучевых рядов согласно краевым воздействиям. Показано, что волна нагрузки увеличивает предварительный сдвиг, а волна круговой поляризации изменяет его направленность и всегда следует за волной нагрузки при наличии предварительных деформаций. Последние оказывают существенное влияние на скорости ударных волн: чем они больше, тем дальше с течением времени отстоят друг от друга соответствующие поверхности разрывов. Заметим, что предположения о малости деформаций или интенсивностей разрывов принципиально не делалось, что позволяет использовать полученные решения (25), (27), (28) в качестве приближённых для процессов с большими интенсивностями производимых ударных нагрузок. Однако для целей определения коэффициентов лучевых рядов нами использовались лучевые разложения в предположении малости времён ударного воздействия. Данное обстоятельство необходимо учитывать при интерпретации результатов. Такие лучевые ряды с достаточной степенью точности описывают решение за поверхностями разрывов в прифронтальной зоне.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Achenbach J. D., Reddy D. R. Note on wave propagation in lineary viscoelastic media // Zeitschr. fur angew. Match. und Phus. 1967. Vol. 18, № 1. P. 141–144.
- [2] Бабичева Л. А., Быковцев Г. И., Вербейко Н. Д. Лучевой метод решения задач в упруго-вязко-пластических средах // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37, № 1. С. 145–155.
- [3] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [4] Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.

- [5] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998. 412 с.
- [6] Герасименко Е. А., Рагозина В. Е. Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях // Дальневосточный математический журнал. 2004. Т. 5, № 1. С. 100–109.
- [7] Буренин А. А., Россихин Ю. А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями разрывов // Прикладные задачи механики деформируемых сред. Владивосток: ДВО АН СССР. 1991. С. 129–137.
- [8] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твёрдых телах. М.: Мир, 1964. 528 с.
- [9] Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. mech. rev. 1995. Vol. 48, № 1. P. 1–39.
- [10] Буренин А. А. Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях // Дальневосточный мат. сборник. 1999. Вып. 8. С. 49–72.
- [11] Герасименко Е. А., Завертан А. В. Расчеты динамики несжимаемой упругой среды при антиплоском и скручивающем ударе. М.: Вычислительная механика сплошных сред. 2008. Т. 1, № 3. С. 46–56.
- [12] Burenin A. A., Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. A Ray method for solving boundary value problems connected with the propagations of finite amplitude shock waves // Proc. 1993 Gnt. Symp. of Nonlinear Theory and its Applications. – Hawaii, December 5–10. 1993. Vol. 3. P. 1085–1088.
- [13] Буренин А. А., Зиновьев П. В. К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред // Проблемы механики. Сборник статей к 90-летию А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 146–155.
- [14] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [15] Седов Л. И. Механика сплошных сред. Том 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
- [16] Буренин А. А., Дудко О. В., Лаптева А. А. К закономерностям распространения деформаций изменения формы // Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 14–23.

G. M. Sevastyanov, V. I. Shtuka, A. A. Burenin

THE RAY METHOD IN APPROXIMATE SOLVE OF SHOCK LOADING OF NONCOMPRESSIBLE CYLINDRICAL LAYER PROBLEM

Institute of Machine Engineering and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. The paper is devoted to an approximate solution of one-dimensional problem of nonlinear dynamic theory of elasticity about the torsional shock load on the cylindrical layer subjected to preliminary antiplane shear. It is shown that the boundary impact action extends in the environment in the form of the two surfaces of deformation discontinuities. The features of construction of frontline ray asymptotics for each surface ruptures and calculating the coefficients of the ray series according to the conditions of compatibility gaps and boundary conditions are specified.

Keywords: nonlinear elasticity, finite deformations, dynamics, shock waves, ray method.

REFERENCES

- [1] Achenbach J. D., Reddy D. R. Note on wave propagation in lineary viscoelastic media // Zeitschr. fur angew. Match. und Phus. 1967. Vol. 18, № 1. P. 141–144.
- [2] Babicheva L. A., Bykovtsev G. I., Vervevko N. D. The ray method for solving problems in visco-elastic-plastic media // Applied Mathematics and Mechanics. 1973. Vol. 37, № 1. P. 145–155. (in Russian).
- [3] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [4] Blend D. Nonlinear dynamic elasticity. M.: Mir, 1972. 183 p. (in Russian).
- [5] Kulikovskii A. G., Sveshnikova E. I. Nonlinear waves in elastic media. M.: Moscow High School, 1998. 412 p. (in Russian).
- [6] Gerasimenko E. A., Ragozina V. E. Geometric and kinematic constraints on functions discontinuities on moving surfaces // Far Eastern Mathematical Journal. 2004. Vol. 5, № 1. P. 100–109. (in Russian).
- [7] Burenin A. A., Rossikhin Yu. A. Ray method for solving one-dimensional problems of nonlinear dynamic theory of elasticity with flat surfaces breaks // In the collection: Applied problems of mechanics of deformable media. Vladivostok: FEB AS USSR, 1991. P. 129–137. (in Russian).
- [8] Tomas T. Plastic flow and fracture in solids. M.: Mir, 1964. 528 p. (in Russian).

Sevastyanov Georgiy Mamievich

e-mail: akela.86@mail.ru, Ph. D., Researcher, Institute of Machine Engineering and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Shtuka Victor Igorevich

e-mail: onslice@mail.ru, Post-Graduate Student, Mathematician Engineer, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Burenin Anatoly Aleksandrovich

e-mail: burenin@iacp.dvo.ru, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute for Machine Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of Russian Academy of Science, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

[9] Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // *Appl. mech. rev.* 1995. Vol. 48, № 1. P. 1–39.

[10] Burenin A. A. On a possibility of constructing approximate solutions transient dynamics problems of elastic media under Impact // *Far Eastern mathematical collection.* 1999. Vol. 8. P. 49–72. (in Russian).

[11] Gerasimenko E. A., Zavertan A. V. The calculations of the dynamics of an incompressible elastic medium and twisting at impact antiplane. M.: *Computational Continuum Mechanics*, 2008. Vol. 1, № 3. P. 46–56. (in Russian).

[12] Burenin A. A., Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. A Ray method for solving boundary value problems connected with the propagations of finite amplitude shock waves // *Proc. 1993 Gnt. Symp. of Nonlinear Theory and its Applications.* – Hawaii, December 5–10. 1993. Vol. 3. P. 1085–1088.

[13] Burenin A. A., Zinoviev P. V. On the problem of isolation surfaces of discontinuity in numerical methods dynamics of deformable media / A. A. Burenin, P. V. Zinoviev // *Mechanical problems. Collection of articles on the 90th anniversary A. Yu. Ishlinskii.* M.: *Fizmatlit.* 2003. P. 146–155. (in Russian).

[14] Lurie A. I. *Nonlinear theory of elasticity.* M.: *Nauka*, 1980. 512 p. (in Russian).

[15] Sedov L. I. *Mechanics of Continuous Media. Volume 1.* M.: *Nauka*, 1970. 492 p. (in Russian).

[16] Burenin A. A., Dudko O. V., Lapteva A. A. By the patterns of distribution change of shape deformations // *Siberian Journal of Industrial Mathematics.* 2011. Vol. 14, № 4. P. 14–23. (in Russian).

В. Д. Кулиев, Н. Л. Борисова

К ПРОБЛЕМЕ РАЗРУШЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва,
Россия

Аннотация. Предполагается, что биупругие слои в композите жестко сцеплены между собой вдоль плоскостей $y = \pm h_1$. Центральный слой $|y| \leq h_1, |x| < \infty$ содержит трещину продольного сдвига $y = 0, |x| \leq l$, параллельную плоскостям $y = \pm h_1$ и $y = \pm h_2$ ($h_2 > h_1$). На поверхностях полосы $y = \pm h_2$ смещения равны нулю. К берегам трещины приложены по величине и противоположно направленные напряжения.

Методы, разработанные в статье [1], позволили построить решение этой задачи. Определен коэффициент интенсивности напряжений K_{III} и дан соответствующий анализ.

Ключевые слова: центральный слой, биупругая полоса, коэффициент интенсивности напряжений, сингулярное (особое) интегральное уравнение второго рода типа Коши, интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром, упругая среда.

УДК: 539.375

§1. Смешанная краевая задача и ее решение. Пусть однородные изотропные упругие слои (первый слой с упругим свойством μ_1 занимает область $|y| \leq h_1, |x| < \infty$, а второй слой с упругим свойством μ_2 - область $h_1 \leq y \leq h_2, |x| < \infty$ и $-h_2 \leq y \leq -h_1, |x| < \infty$) жестко сцеплены между собой вдоль плоскостей $y = \pm h_1$ (рис. 1).

© Кулиев В. Д., Борисова Н. Л., 2015

Кулиев Валех Джафарович

e-mail: pmdekanat@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва, Россия.

Борисова Наталья Львовна

e-mail: nbolo@yandex.ru, старший преподаватель кафедры прикладной математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва, Россия.

Поступила 16.02.2015

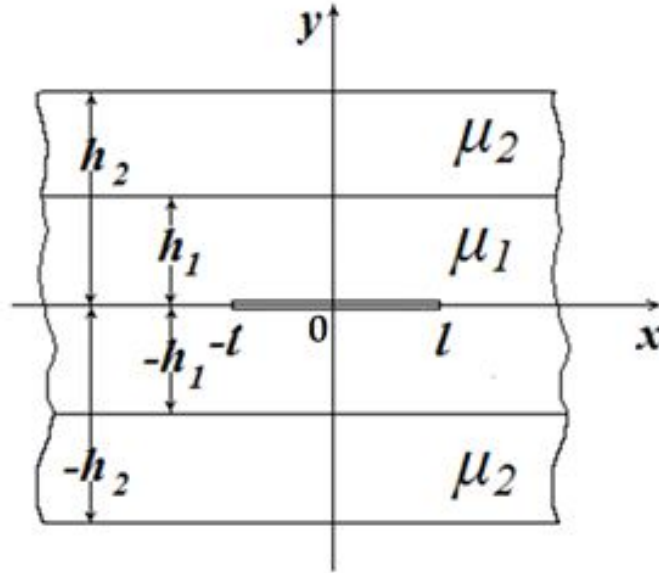


Рис. 1

Далее, пусть центральный слой $|y| \leq h_1, |x| < \infty$ содержит трещину продольного сдвига $y = 0, |x| \leq l$, параллельную плоскостям $y = \pm h_1$ и $y = \pm h_2$. На поверхности полосы $y = \pm h_2$ смещения равны нулю. К берегам трещины приложены равные по величине и противоположно направленные напряжения. На бесконечности (при $x \rightarrow \infty$) напряжения и смещения равны нулю.

Таким образом, приходим к смешанной краевой задаче:

1. Граничные условия

$$|x| < \infty, w_2(x, \pm h_2) = 0; \quad (1.1)$$

$$|x| < \infty, (\sigma_{yz})_2(x, \pm h_1 \pm 0) = (\sigma_{yz})_1(x, \pm h_1 \mp 0); \quad (1.2)$$

$$|x| < \infty, w_1(x, \pm h_1 \mp 0) = w_2(x, \pm h_1 \pm 0); \quad (1.3)$$

$$|x| \leq l, (\sigma_{yz})_1(x, \pm 0) = -\sigma(x); \quad (1.4)$$

$$|x| > l, w_1(x, \pm 0) = 0. \quad (1.5)$$

2. Условия на конце трещины [2]:

$$\lim_{x \rightarrow l-0} \left\{ \sqrt{2\pi(l-x)} (\sigma_{xz})_1(x, +0) \right\} = -K_{III} \quad (1.6)$$

или

$$\lim_{x \rightarrow l+0} \left\{ \sqrt{2\pi(x-l)} (\sigma_{yz})_1(x, 0) \right\} = K_{III}. \quad (1.7)$$

Условия на бесконечности (с учетом (1.4) и (1.5)):

$$|x| \rightarrow \infty, |y| \leq h_2, \quad (\sigma_{xz})_j \rightarrow 0, (\sigma_{yz})_j \rightarrow 0, w_j \rightarrow 0 \quad (1.8)$$

$$(j = 1, 2).$$

Здесь $\sigma(x)$ – заданная четная непрерывная функция, причем $\sigma(x) \in H^\beta [0, a]$, где $1/2 < \beta \leq 1$ (см. [1]).

Остальные обозначения – общепринятые (см., например, [2]). Рассматриваемая задача, очевидно, симметрична относительно плоскостей $x = 0$ и $y = 0$. Поэтому построим решение смешанной краевой задачи (1.1)–(1.8) в области $0 \leq y \leq h_2, x \geq 0$.

Поступая точно так же, как в [3], [4], в силу условий (1.1)–(1.3) и (1.8) имеем: во второй среде ($h_1 \leq y \leq h_2, x \geq 0$, упругое свойство μ_2):

$$w_2(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A(\lambda) \frac{sh\lambda(h_2 - y)}{sh\lambda h_2} \cos \lambda x d\lambda, \quad (1.9)$$

$$(\sigma_{yz})_2(x, y) = -\mu_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda A(\lambda) \frac{ch\lambda(h_2 - y)}{sh\lambda h_2} \cos \lambda x d\lambda, \quad (1.10)$$

$$(\sigma_{xz})_2(x, y) = -\mu_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda A(\lambda) \frac{sh\lambda(h_2 - y)}{sh\lambda h_2} \sin \lambda x d\lambda; \quad (1.11)$$

в первой среде ($0 \leq y \leq h_1, x \geq 0$, упругое свойство μ_1):

$$w_1(x, y) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{A(\lambda)}{sh\lambda h_2} [ksh\lambda h \cdot ch\lambda(h_1 - y) + ch\lambda h \cdot sh\lambda(h_1 - y)] \cos \lambda x d\lambda, \quad (1.12)$$

$$(\sigma_{yz})_1(x, y) = -\mu_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda \frac{A(\lambda)}{sh\lambda h_2} [ksh\lambda h \cdot sh\lambda(h_1 - y) + ch\lambda h \cdot ch\lambda(h_1 - y)] \cos \lambda x d\lambda, \quad (1.13)$$

$$(\sigma_{xz})_1(x, y) = -\mu_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda \frac{A(\lambda)}{ch\lambda h_2} [ksh\lambda h \cdot ch\lambda(h_1 - y) + ch\lambda h \cdot sh\lambda(h_1 - y)] \sin \lambda x d\lambda \quad (1.14)$$

$$(h = h_2 - h_1, k = \mu_1/\mu_2).$$

В формулах (1.9)–(1.14) $A(\lambda)$ – неизвестная функция, подлежащая определению из оставшихся условий (1.4)–(1.7).

Функция $w_1(x, +0)$ будет удовлетворять условию (1.5) только в том случае, если функция $A(\lambda)$ определяется так:

$$A(\lambda) = \frac{ksh\lambda h_2}{ksh\lambda h \cdot ch\lambda h_1 + ch\lambda h \cdot sh\lambda h_1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt, \quad (1.15)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t\psi(t) J_0(\lambda t) dt, \quad (1.16)$$

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi} \int_t^l \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} d\tau, \quad f(t) = -\frac{d}{dt} \int_t^l \frac{\tau\psi(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} d\tau. \quad (1.17)$$

Здесь $f(t)$ (или $\psi(t)$) – новая неизвестная функция.

Действительно, учитывая (1.15) в (1.12) силу разрывного множителя Дирихле (см. [3], [4]) или разрывного множителя Вебера (см. [2, с. 44]), если учесть и (1.16), условие (1.5) удовлетворяется автоматически.

При этом легко доказывается, что $f(t) \in K_{1/2}[-l, l]$, т. е.

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad f_0(x) = -f_0(x), \quad (1.18)$$

$f_0(x) \in H^\beta[0, l]$, $1/2 < \beta \leq 1$, причем (см. [2, с. 336]):

$$\mu_1 \frac{\partial w_1(x, 0)}{\partial x} = (\sigma_{xz})_1(x, 0) = -\mu_1 f(x). \quad (1.19)$$

Поэтому коэффициент интенсивности напряжений в силу (1.6), (1.19) и (1.18) определяется так:

$$K_{III} = \sqrt{\pi l} \mu_1 \frac{f_0(l)}{l}. \quad (1.20)$$

Поскольку функция $f(t) \in K_{1/2}[-l, l]$, поэтому в силу теоремы 3 в [1] четная функция $\psi(t) \in H^\beta[0, l]$, $1/2 < \beta \leq 1$. Эти условия в силу леммы 5 и теорем 1, 3, 4 и 5 в [1] дают возможность равносильного перехода от одного интегрального уравнения к другому.

Равенство (1.5) следует учесть в формулах (1.9)–(1.14).

Учитывая (1.5) в (1.13), получим:

$$(\sigma_{yz})_1(x, y) = -\mu_1 \frac{2}{\pi} \int_0^l f(t) \left[\int_0^\infty \frac{ksh\lambda h \cdot sh\lambda(h_1 - y) + ch\lambda h \cdot ch\lambda(h_1 - y)}{ksh\lambda h \cdot ch\lambda h_1 + ch\lambda h \cdot sh\lambda h_1} \times \right. \\ \left. \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda \right] dt. \quad (1.21)$$

Отсюда при $h = 0$ (т. е. $h_1 = h_2$), поступая точно так же, как в [3], удовлетворив условию (1.4), приходим к сингулярному интегральному (особому) уравнению:

$$\frac{\sigma(x)}{\mu_1} = \frac{1}{2h_1 ch^2 \left(\frac{\pi x}{2h_1} \right)} \int_{-l}^l f(t) \frac{th \frac{\pi t}{2h_1}}{th^2 \frac{\pi t}{2h_1} - th^2 \frac{\pi x}{2h_1}} dt. \quad (1.22)$$

Решение данного интегрального уравнения, опираясь на полученный результат в [1], [5], построено в [3] и определен коэффициент интенсивности напряжений K_{III} в [6] в виде:

$$K_{III} = \frac{1}{ch\frac{\pi}{2h_1}l} \sqrt{\frac{2}{h_1}th\frac{\pi}{2h_1}l} \cdot \int_0^l \frac{\sigma(\xi) ch^2\frac{\pi}{2h_1}\xi}{\sqrt{th^2\frac{\pi}{2h_1}l - th^2\frac{\pi}{2h_1}\xi}} d\xi. \quad (1.23)$$

В этой же работе [5] проведен анализ коэффициента интенсивности напряжений. Из (1.21), применяя обычную процедуру, аналогичную [3], и удовлетворяя условию (1.4), приходим к сингулярному интегральному уравнению первого рода типа Коши:

$$\frac{\sigma(x)}{\mu_1} = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{f(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t)K(x,t)dt, \quad (1.24)$$

$$K(x,t) = \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda h_1} (ch\lambda h - ksh\lambda h)}{ksh\lambda h \cdot ch\lambda h_1 + ch\lambda h \cdot sh\lambda h_1} \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda \quad (1.25)$$

$$(|x| < l).$$

Теперь сведем сингулярное интегральное уравнение (1.24) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции $\psi(x)$. Определим функцию $\psi(x)$ по формуле:

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^l \frac{f(\tau)d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad (1.26)$$

где функция $f(x)$ является плотностью особого интеграла в уравнении (1.24).

Поскольку плотность особого интеграла $f(x) \in K_{1/2}[-l, l]$, то в силу теоремы 3 в [1] $\psi(x) \in H^\beta[0, l]$, причем $\psi(-x) = \psi(x)$. Кроме того, поскольку функция $\psi(x)$ определяется формулой (1.26), то в силу леммы 5 в [1] справедливо равенство (1.16). Заменив в (1.24) x на τ с учетом (1.16), получаем:

$$\frac{\sigma(\tau)}{\mu_1} = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{f(t)}{t-\tau} dt + \int_0^l \psi(t)K_0(\tau,t)dt \quad (1.27)$$

$$K_0(\tau,t) = \int_0^\infty \frac{\lambda te^{-\lambda h_1} (ch\lambda h - ksh\lambda h)}{ksh\lambda h \cdot ch\lambda h_1 + ch\lambda h \cdot sh\lambda h_1} J_0(\lambda t) \cos \lambda \tau d\lambda.$$

Применив к обеим частям (1.27) оператор типа Абеля (см. теорему 1 в [1]), находим:

$$\frac{1}{\mu_1} \int_0^x \frac{\sigma(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \int_{-l}^l \frac{f(t)}{t-\tau} dt d\tau +$$

$$+\frac{\pi}{2} \int_0^l \psi(t) K_\phi(x, t) dt, \quad (1.28)$$

$$K_\phi(x, t) = \int_0^\infty \frac{\lambda t e^{-\lambda h_1} (ch\lambda h - ksh\lambda h)}{ksh\lambda h \cdot ch\lambda h_1 + ch\lambda h \cdot sh\lambda h_1} J_0(\lambda t) J_0(\lambda x) d\lambda. \quad (1.29)$$

Поскольку $f(x) \in K_{1/2}[-l, l]$, то в силу теоремы 1 в [1] (см. также (2.3) и (2.4) в [1])

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \int_{-l}^l \frac{f(t)}{t - \tau} dt d\tau = \frac{\pi}{2} \psi(x), \quad (1.30)$$

где $\psi(x)$ определяется формулой (1.26).

Учитывая (1.30) в (1.28), приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным ядром:

$$\frac{2}{\mu_1 \pi} \int_0^x \frac{\sigma(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau = \psi(x) + \int_0^l \psi(t) K_\phi(x, t) dt. \quad (1.31)$$

Здесь ядро уравнения Фредгольма $K_\phi(x, t)$ определяется формулой (1.29).

Поскольку $\psi(l) = f_0(l)/l$ (см. лемму 2, (1.42) в [1]), то из (1.20) следует:

$$K_{III} = \sqrt{\pi l} \mu_1 \psi(l). \quad (1.32)$$

Замечание 3. Предположим, что функции $\psi(t)$ и $f(t)$ связаны между собой формулами (1.17). Далее, пусть $\psi(t) \in B[0, l]$ (см. определение 6 в [1]). Тогда:

1⁰. В силу теоремы 4 в [1] $f(t) \in K_{1/2}[-l, l]$ (см. (1.18)).

2⁰. В силу леммы 5 в [1] имеет место равенство (1.16).

С помощью формулы обращения Абеля, а также формул (1.16) и (1.17) и (1.72) в [1] (при $\delta = 1/2$) из (1.31) приходим к интегральному уравнению (1.24).

§2. Анализ коэффициента интенсивности напряжений K_{III} . Ядро интегрального уравнения $K_\phi(x, t)$ (1.29) можно записать в виде:

$$K_\phi(x, t) = -2 \int_0^\infty \frac{\lambda t e^{-2\lambda h_1} (kth\lambda h - 1)}{(1 + e^{-2\lambda h_1}) (kth\lambda h + th\lambda h_1)} J_0(\lambda t) J_0(\lambda x) d\lambda \quad (2.1)$$

$$(h = h_2 - h_1, h_2 \geq h_1, k = \mu_1 - \mu_2).$$

Для случая $h=0$, т. е. $h_2 = h_1$, нами определен коэффициент интенсивности напряжений K_{III} в виде (1.23).

Замечая, что

$$th\lambda (h_2 - h_1) = \frac{th\lambda h_2 - th\lambda h_1}{1 - kth\lambda h_2 th\lambda h_1}$$

из (2.1) при $h_2 \rightarrow +\infty$ ($h_1 = const$), имеем:

$$K_{\phi}(x, t) = -2(k-1) \int_0^{\infty} \frac{\lambda t e^{-2\lambda h_1}}{(1 + e^{-2\lambda h_1})(k + t h \lambda h_1)} J_0(\lambda t) J_0(\lambda x) d\lambda \quad (2.2)$$

Этот случай имеет большое практическое значение.

Переходя к безразмерным переменным в (1.31) и (2.2), при $\sigma(x) = \sigma_0 \equiv const$ имеем:

$$\Psi(\xi) - \int_0^1 \Psi(\eta) K_{\varphi}^0(\xi, \eta) d\xi = 1, \quad (2.3)$$

$$K_{\varphi}^0(\xi, \eta) = 2(k-1) \left(\frac{l}{h_1}\right)^2 \int_0^{\infty} \frac{\eta u e^{-2u}}{(1 + e^{-2u})(k + t h u)} \times \\ \times J_0\left(u \eta \frac{l}{h_1}\right) J_0\left(u \xi \frac{l}{h_1}\right) du. \quad (2.4)$$

При этом коэффициент интенсивности напряжений K_{III} определяется по формуле:

$$K_{III} = \sigma_0 \sqrt{\pi l} \Psi\left(1, \frac{l}{h_1}, k\right). \quad (2.5)$$

Анализ (2.3) и (2.4) показывает:

Если $k > 1$, то поправочная функция $\Psi\left(1, \frac{l}{h_1}, k\right)$ в (2.5) возрастает с увеличением $\frac{l}{h_1} \in [0, 1[$, начиная с 1.

Если $k > 1$, то при заданном значении $\frac{l}{h_1}$ функция $\Psi\left(1, \frac{l}{h_1}, k\right)$ возрастает с увеличением k .

Если $k < 1$, то функция $\Psi\left(1, \frac{l}{h_1}, k\right)$ убывает с увеличением $\frac{l}{h_1}$, начиная с 1. При этом значение $\frac{K_{III}}{\sigma_0 \sqrt{\pi h_1}}$ всегда больше 1.

Из (2.2), (1.31) и (1.32) при $h_1 \rightarrow +\infty$ приходим к известному результату (см., напр., [2]):

$$K_{III} = \sqrt{\pi l} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^l \frac{\sigma(\tau)}{\sqrt{l^2 - \tau^2}} d\tau. \quad (2.6)$$

Если в (1.23) $h_1 \rightarrow +\infty$, то для коэффициента интенсивности напряжений K_{III} получаем формулы (2.6).

Если в (2.2) положить $k=1$, то коэффициент интенсивности напряжений K_{III} определяется по формуле (2.6).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кулиев В. Д. Новые эффективные методы решения класса смешанных краевых задач // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1 (23). С. 132–162.

[2] Кулиев В. Д. Сингулярные краевые задачи. М.: Физматлит. 2005, 720 с.

[3] Кулиев В. Д., Борисова Н. Л. Трещина продольного сдвига, находящаяся на границе раздела двух биупругих полос разной толщины. Новые явления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 33–49.

[4] Кулиев В. Д., Борисова Н. Л. Трещина продольного сдвига в многослойных композитных материалах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3 (25). С. 152–161.

[5] Kuliev V. D., Izmailova N. V., Borisova N. L. On the problem of the destruction biuprugih media with longitudinal shear crack at the interface // Australian journal of scientific research, Adelaide University Press. Adelaide. 2014. Vol. 4, № 1 (5). P. 149–160.

[6] Кулиев В. Д., Обращение особого интеграла с обобщенным ядром Коши и одно его применение // Сборник трудов X Международной научной школы “Гидродинамика больших скоростей” и Международной научной конференции “Гидродинамика. Механика. Энергетические установки.” (к 145-летию со дня рождения академика А. Н. Крылова). Чебоксары: ЧПИ МГОУ, 2008. С. 317–333.

V. D. Kuliev, N. L. Borisova

IN THE ISSUE OF MULTILAYER COMPOSITE MATERIALS

Moscow State Engineering University (MAMI), Moscow, Russia

Abstract. It is assumed that the composite layers bi-elastic rigidly linked to each other along planes $y = \pm h_1$. The central layer comprises longitudinal shear crack parallel to the plane and. On the surfaces of the strip shear is zero. By the shores of the crack attached in magnitude and opposite in direction stress.

The methods developed in [1] allow us to construct a solution to this problem. Defined stress intensity factor K_{III} and given appropriate analysis.

Keywords: the central layer, bi-elastic strip stress intensity factor, singular integral equation of the second kind of Cauchy type, Fredholm integral equation of the second kind with a continuous kernel, elastic body.

REFERENCES

[1] Kuliev V. D. New effective methods for solving a class of mixed boundary value problems // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 1 (23). P. 132–162. (in Russian).

[2] Kuliev V. D. Singular boundary value problems. M.: FIZMATLIT, 2005. 720 p. (in Russian).

Kuliev Valekh Dzhafarovich

e-mail: pmdekanat@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of the Applied Mathematics, Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI), Moscow, Russia.

Borisova Natalia Lvovna

e-mail: nbolo@yandex.ru, Department of the Applied Mathematics, Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI), Moscow, Russia.

[3] Kuliev V. D., Borisova N. L. Crack longitudinal shear, located at the interface of two elastic bands of varying thickness. New developments // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 2 (24). P. 33–49. (in Russian).

[4] Kuliev V. D., Borisova N. L. Crack of longitudinal shear in two-layer composite materials // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 3 (25). P. 152–161.

[5] Kuliev V. D., Izmailova N. V., Borisova N. L. On the problem of the destruction biuprugih media with longitudinal shear crack at the interface // Australian journal of scientific research, Adelaide University Press. Adelaide. 2014. Vol. 4, № 1 (5). P. 149–160.

[6] Kuliev V. D. Handling the singular integral with generalized Cauchy kernel and one its application // Proceedings of X International Scientific School “ Hydrodynamics high speeds ” and the International Scientific Conference “ Hydrodynamics. Mechanics. Power plants. ” (To the 145th anniversary of Krylov). Cheboksary: PRF MGOU, 2008. P. 317–333. (in Russian).

Б. Б. Казбеков

ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИН ПРИ ОДНОРОДНОМ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ

Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджанская Республика

Аннотация. Проведено математическое описание модели формирования трещин при однородном изгибе в тонкой изотропной пластине, ослабленной двоякопериодической системой круговых отверстий. Строятся общие представления решений, описывающие класс задач с двоякопериодическим распределением напряжений вне круговых отверстий. Решение задачи о формировании трещин сведено к двум бесконечным алгебраическим системам и двум сингулярным интегральным уравнениям первого рода.

Ключевые слова: тонкая пластина, двоякопериодическая система круговых отверстий, однородный изгиб, зоны предразрушения.

УДК: 539.375

Перфорированные пластины являются одним из наиболее широко используемых элементов конструкций и вопросы их разрушения представляют большой интерес.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую изотропную упругую пластину, ослабленную двоякопериодической системой круговых отверстий, которая подвергается изгибу средними моментами (изгиб на бесконечности)

$$M_x = M_x^\infty, M_y = M_y^\infty, H_{xy} = 0.$$

Круговые отверстия имеют радиус λ ($\lambda < 1$) и центры (рис. 1) в точках

$$P_m = m\omega_1 + n\omega_2 (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$\omega_1 = 2, \omega_2 = 2h_* \exp(i\alpha), h_* > 0, \operatorname{Im}\omega_2 > 0.$$

© Казбеков Б. Б., 2015

Казбеков Бабек Биалл оглы

e-mail: brrustam@mail.ru, аспирант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Поступила 12.10.2015

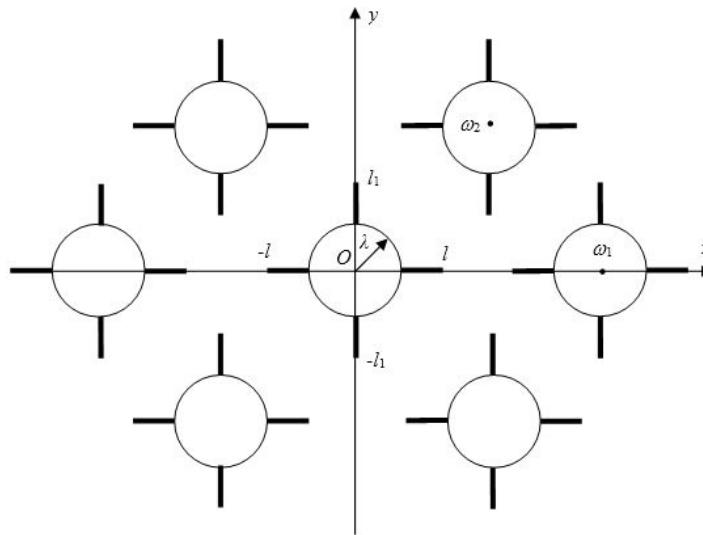


Рис. 1. Расчетная схема задачи о зарождении трещин в перфорированной пластине

Разрушение реальных материалов является сложным, зависящим от химического состава, структуры материала, вида напряжения и других факторов, процессом. В настоящее время известны различные механизмы зарождения трещин [1]. Задача о формировании трещин является [1]–[4] важной проблемой теории прочности.

Нагружение упругой пластины изгибающими моментами будет вызывать появление в материале зон предразрушения. Зоны предразрушения будем рассматривать как области ослабленных межчастичных связей материала (прослойки перенапряженного материала) и моделировать в виде узких слоев со связями между берегами. Взаимодействие между берегами зон предразрушения моделируется имеющими заданную диаграмму деформирования связями между ними. Их физическая природа, а также размеры областей, где осуществляется взаимодействие берегов, зависят от вида материала перфорированной пластины. Прослойки перенапряженного материала малы по сравнению с остальной (упругой) частью пластины; их можно мысленно заменить разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. Известна общая тенденция к формированию областей предразрушения на ранних стадиях развития в виде узких слоев, занимающих незначительный объем тела по сравнению с его упругой зоной [1], [5]–[7].

Зоны предразрушения ориентированы в направлении максимальных растягивающих напряжений. Для математического описания взаимодействия берегов зон предразрушения полагаем, что в этих зонах между берегами имеются связи, которые сдерживают раскрытие берегов зон предразрушения. Считается, что в зонах предразрушения имеет место пластическое течение при постоянном напряжении.

Под действием внешних нагрузок (изгибающих моментов) на перфорированную пластину в связях, соединяющих берега зон предразрушения, возникают усилия $\sigma_y = \sigma_s$, имеющие только нормальную составляющую силу симметрии задачи. К берегам зон предразрушения будут приложены только нормальные изгибающие усилия M_s .

Размер зон предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения краевой задачи механики разрушения перфорированной пластины при однородном изгибе. Задача заключается в определении напряженно-деформированного состояния пластины, ослабленной двоякопериодической системой круговых отверстий, а также в нахождении предельной нагрузки, по достижении которой произойдет формирование трещин. Формирование трещин рассматривается как процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала.

Дифференциальное уравнение для искомой функции прогиба w , определяющей напряженное и деформированное состояние пластины, ослабленной двоякопериодической системой круговых отверстий, имеет вид

$$\Delta\Delta w = 0,$$

где Δ – оператор Лапласа.

По мере увеличения интенсивности изгибающей нагрузки в пластине вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположенные двоякопериодическим образом. Зоны повышенных напряжений, способствуя зарождению трещин возле отверстий, могут привести к полному разрушению перфорированной пластины.

Рассмотрим перфорированную пластину, ослабленную двумя двоякопериодическими системами прямолинейных зон предразрушения коллинеарных осей абсцисс и ординат неравной длины (рис. 1). Контуры двоякопериодической системы круговых отверстий свободны от внешних нагрузок. В силу симметрии краевых условий и геометрии области, занятой материалом пластины, напряжения являются двоякопериодическими функциями с периодами ω_1 и ω_2 . Для однородной задачи теории изгиба удельные моменты и удельные поперечные силы представим через две аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ [8]:

$$\begin{aligned} M_x + M_y &= -4D(1 + \nu) \operatorname{Re}\Phi(z), \\ M_y - M_x + 2iH_{xy} &= 2D(1 + \nu) _ [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \\ D &= \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \end{aligned}$$

где M_x , M_y и H_{xy} – соответственно удельные изгибающие и крутящие моменты; E и ν – модуль упругости Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины; h – толщина пластины.

На основании соотношений классической теории Кирхгофа и формул Колосова-Мусхелишвили [9], а также граничных условий на контурах круговых отверстий и берегах зон предразрушения, задача сводится к отысканию двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из краевых условий

$$L'_2 \quad \text{на берегах круговых отверстий,} \quad (1)$$

$$\varepsilon\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} = M_s + iC \quad \text{на } L'_1, \quad (2)$$

$$\varepsilon\Phi(t_1) + \overline{\Phi(t_1)} + t_1\overline{\Phi'(t_1)} + \overline{\Psi(t_1)} = M_s + iC_1 \quad \text{на } L'_2, \quad (3)$$

где $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); t и t_1 – аффиксы точек берегов зон предразрушения, направленных по осям абсцисс и ординат, соответственно; C , C_1 – действительные

постоянные, определяемые в ходе решения задачи из условия равенства нулю скачка прогиба $[w]$ в вершинах зон предразрушения, $\varepsilon = -(3 + \nu)/(1 - \nu)$; L'_1 – совокупность берегов зон предразрушения, коллинеарных оси абсцисс; L'_2 – тоже для берегов зон предразрушения, коллинеарных оси ординат.

Для определения значений внешней нагрузки (изгибающих моментов), при которой произойдет зарождение трещин, нужно постановку задачи дополнить условиями (критерием) появления трещин (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимаем [3], [4] критерий критического раскрытия берегов зон предразрушения. В рассматриваемой задаче условия появления трещин запишутся в виде

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = \delta_{cr} \quad \text{для } L'_1, \quad (4)$$

$$u^+(x, 0) - u^-(x, 0) = \delta_{cr} \quad \text{для } L'_2,$$

для δ_{cr} – характеристика сопротивления материала пластины трещинообразованию.

Дополнительные условия (4) позволяют определить параметры изгибаемой перфорированной пластины, при которых в ней появляются трещины.

Решение краевой задачи. Решение краевой задачи (1)–(3) ищем в виде

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z), \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z); \quad (5)$$

$$\Phi_*(z) = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4(1 + \nu)D} + \Phi(z), \Psi_*(z) = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2(1 - \nu)D} + \Psi(z); \quad (6)$$

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z), \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z); \quad (7)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{\pi i(1 + \kappa)} \int_{L_1} g(t)\zeta(t - z)dt + A'; \quad (8)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{\pi i(1 + \kappa)} \int_{L_1} g(t) [\kappa\zeta(t - z) + Q(t - z) - t\gamma(t - z)] dt + B';$$

$$\Phi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k + 1)_-!};$$

$$\Psi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k + 1)_-!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} Q^{(2k+1)}(z)}{(2k + 1)_-!};$$

$$\Phi_3(z) = \frac{1}{\pi(1 + \kappa)} \int_{L_2} g_1(t_1)\zeta(it_1 - z)dt_1 + A''; \quad (9)$$

$$\Psi_3(z) = -\frac{1}{\pi(1 + \kappa)} \int_{L_2} \left\{ \overline{-g_1(t_1)}_- \kappa\zeta(it_1 - z) - g_1(t_1)_- [Q(it_1 - z) + it_1\gamma(it_1 - z)] \right\} dt + B'',$$

где $\gamma(z)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса; $\zeta(z)$ – дзета-функция Вейерштрасса; $Q(z)$ – специальная мероморфная функция [10]; $L_1 = [-\ell, -\lambda] \cup [\lambda, \ell]$ и $L_2 = [-\ell_1, -\lambda] \cup [\lambda, \ell_1]$.

Из условий равенства нулю главного вектора сил и главного момента этих же сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области, занятой перфорированной пластиной, следует соотношение

$$(\kappa A - \bar{A})\omega_k - \bar{B}\omega_k = -(\bar{\delta}_k + \delta_k) a_* + (\bar{\gamma}_k + \bar{\delta}_k)\bar{a}_* + (\bar{\delta}_k - \delta_k) b + \quad (10)$$

$+(\bar{\delta}_k - \bar{\gamma}_k)\bar{b} + \beta_2\lambda^2\bar{\delta}_k - \alpha_2\lambda^2(\kappa\delta_k - \bar{\gamma}_k)$ ($k = 1, 2$);

$$a_* = \frac{\kappa}{\pi i(1 + \kappa)} \int_{L_1} g(t)t_- dt; b = -\frac{\kappa}{\pi(1 + \kappa)} \int_{L_2} g_1(t_1)t_{1-} dt_1.$$

Из условий симметрии относительно координатных осей будем иметь

$$\text{Im}\alpha_{2k} = 0; \quad \text{Im}\beta_{2k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Можно убедиться, что представления (5)–(9) определяют класс симметричных задач с двоякопериодическим распределением напряжений. Неизвестные функции $g(x)$, $g_1(y)$ и коэффициенты α_{2k} , β_{2k} должны быть определены из граничных условий (1)–(3).

Так как выполняются условия двоякопериодичности, то система граничных условий (1) вырождается в одно функциональное уравнение, например, на контуре L_0 ($\tau = \lambda \exp(i\theta)$), а система краевых условий (2)–(3) вырождается в граничные условия на L_1 и L_2 .

К основным представлениям (6)–(9) требуется добавить [11] дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{-\lambda} g(t)dt = 0; \quad \int_{\lambda}^{\ell} g(t)dt = 0; \\ \int_{-\ell_1}^{-\lambda} g_1(t_1)dt_1 = 0; \quad \int_{\lambda}^{\ell_1} g_1(t_1)dt_1 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив в левую часть (1) выражения для $\Phi_*(z)$ и $\Psi_*(z)$, учитывая (6)–(9), перепишем (1) в виде

$$\Phi_2(\tau) + \overline{\Phi_2(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} = \quad (12)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A'_{2k} e^{2ki\theta} + f_1^*(\theta) + if_2^*(\theta) + \varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta),$$

где $A'_0 = A_0 + \frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{2(1+\nu)D}$; $A'_2 = A_2 + \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2(1-\nu)D}$; $A'_{2k} = A_{2k}$ ($k = -1, \pm 2, \dots$);

$$f_1^*(\theta) + if_2^*(\theta) = -\Phi_1(\tau) - \overline{\Phi_1(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta}, \quad (13)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = -\Phi_3(\tau) - \overline{\Phi_3(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi_3'(\tau) + \Psi_3(\tau)] e^{2i\theta}. \quad (14)$$

Подставив в левой части граничного условия (12) вместо потенциалов $\Phi_2(\tau)$, $\overline{\Phi_2(\tau)}$, $\Phi_2'(\tau)$ и $\Psi_2(\tau)$ их разложения в ряды Лорана в окрестности точки $z=0$, а в правой части вместо $f_1^*(\theta) + if_2^*(\theta)$ и $\varphi_1^*(\theta) + i\varphi_2^*(\theta)$ ряды Фурье, и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$, получаем две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k} , β_{2k} . После некоторых преобразований приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно α_{2k} .

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (15)$$

Удовлетворяя граничным условиям на берегах зон предразрушения, решение задачи сводится к двум сингулярным интегральным уравнениям первого рода.

Относительно искомой функции $g(x)$ и $g_1(y)$ имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \varepsilon}{\pi_- i(1 + \kappa)} \int_L g(t) \zeta(t - x) dt + \frac{1}{\pi_- i(1 + \kappa)} \int_L g(t) [\kappa \zeta(t - x) + Q(t - x) - \\ & - (t - x) \gamma(t - x)] dt - \kappa A + \bar{A} + \bar{B} + (1 + \varepsilon) \Phi_0(x) + x \overline{\Phi'_0(x)} + \overline{\Psi_0(x)} = iC; \\ & \Phi_0(x) = \Phi_2(x) + \Phi_3(x), \Psi_0(x) = \Psi_2(x) + \Psi_3(x); \\ & - \frac{1 + \varepsilon}{\pi i(1 + \kappa)} \int_{L_1} \left\{ g_1(t_1) \left[i \zeta(it - iy) - i \overline{\zeta(it - iy)} \right] + \overline{g_1(t_1)} [iQ(it - iy) + \right. \\ & \left. + (it - iy) \gamma(it - iy) - i \overline{\zeta(it - iy)}] \right\} dt_1 + N(y) = iC_1 \end{aligned}$$

где $N(iy) = \varepsilon_- \Phi_s(iy) + \overline{\Phi_s(iy)} + iy \overline{\Phi'_s(iy)} + \overline{\Psi_s(iy)}$; $\Phi_s(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$; $\Psi_s(x) = \Psi_1(x) + \Psi_2(x)$.

Далее каждое сингулярное интегральное уравнение задачи сводится с помощью интерполяционного полинома Лагранжа, построенного по чебышевским узлам, к конечной системе алгебраических уравнений без промежуточного этапа приведения к уравнению Фредгольма. Полученные алгебраические системы решались методами урезания и Гаусса с выбором главного элемента для различных значений порядка M (M – число чебышевских узлов) в зависимости от радиуса круговых отверстий.

Для определения постоянной C имеем следующие соотношения [11]:

$$Re \int_{-\ell}^{-\lambda} \bar{t} g(t) dt = 0; Re \int_{\lambda}^{\ell} \bar{t} g(t) dt = 0, \quad (16)$$

обеспечивающие равенство нулю скачка прогиба в вершине L_1 при $x = \pm \ell$.

Аналогично, для определения постоянной C_1 имеем следующие соотношения

$$Re \int_{-\ell_1}^{-\lambda} \bar{t}_1 g_1(t_1) dt_1 = 0; Re \int_{\lambda}^{\ell_1} \bar{t}_1 g_1(t_1) dt_1 = 0, \quad (17)$$

обеспечивающие равенство нулю скачка прогиба в вершинах L_2 при $y = \pm \ell_1$

Из-за неизвестных размеров зон предразрушения (параметров ℓ и ℓ_1) объединенная алгебраическая система уравнений оказалась нелинейной. Так как напряжения в тонкой пластине, ослабленной двоякопериодической системой круговых отверстий, ограничены, то решение краевой задачи ищется в классе всюду ограниченных функций. Для получения такого решения необходимо добавить к основным разрешающим уравнениям условия разрешимости краевой задачи в классе всюду ограниченных функций. Эти условия (условия ограниченности напряжений в окрестности вершин $x = \pm \ell$ и $y = \pm \ell_1$ зон предразрушения) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M (-1)^k g_k^0(\tau_m)_- \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} = 0 \theta_k = \frac{2k-1}{2M} \pi, \quad (18) \\ & \sum_{k=1}^M (-1)^k g_{1k}^0(\tau_m)_- \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения служат для определения размеров зон предразрушения (параметров ℓ и ℓ_1).

Добавляя эти два уравнения (18) к основным разрешающим уравнениям получаем замкнутую систему уравнений. Упомянутые системы полностью определяют решение

задачи теории изгиба пластины с зонами предразрушения. Удовлетворяя условиям (16) и (17), находим, что постоянные C и C_1 равны нулю.

Согласно критерию (4) появление трещины произойдет, как только раскрытие берегов зоны предразрушения достигнет предельного (для данного материала при заданных условиях) значения δ_{cr} . Используя решение задачи, эти условия можно представить в виде

$$\int_x^\ell g(t)dt = -i\delta_{cr}, \int_y^{\ell_1} g_1(y)dy = -i\delta_{cr}. \quad (19)$$

Чтобы решить каждое сингулярное интегральное уравнение, воспользуемся разложением функций $\zeta(z)$, $\gamma(z)$ и $Q(z)$ в основном параллелограмме периодов. Используя замену переменных, каждое сингулярное интегральное уравнение приводится к стандартному виду. Затем, применяя процедуру алгебраизации [6], [11] вместо каждого интегрального уравнения, получаем конечную систему алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^M b_{mk} p_k^0 + \frac{N(\eta_m)}{2} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, M-1), \quad (20)$$

$$\sum_{\nu=1}^M b_{m\nu} R_\nu^0 + \frac{N_*(\eta_m)}{2} = 0,$$

где $b_{mk} = \frac{1}{2M} \left\{ \frac{1}{\sin \theta_m} ctg \frac{\theta_m + (-1)^{|m-k|} \theta_k}{2} + B(\eta_k, \tau_m) \right\}$, $p_k^0 = g(\tau_k)$, $R_\nu^0 = g_1(\tau_k)$.

К системе (20) необходимо присоединить дополнительные условия (18), записанные в дискретной форме.

Очевидно, что разрыв межчастичных связей материала будет происходить при $x = \pm\lambda$ или $y = \pm\lambda$.

Полученные уравнения дают возможность при заданных характеристиках материала определить предельную внешнюю нагрузку, при которой происходит появление трещины в пластине, ослабленной двоякопериодической системой круговых отверстий.

Численные результаты и их анализ. Для нахождения искомых величин совместно решались алгебраические системы (15), (18), (20). Использовался метод урезания алгебраических систем. Исследовался односторонний изгиб пластины постоянными моментами M_y^∞ ($M_x^\infty = 0$) и всесторонний изгиб моментами $M_x^\infty = M_y^\infty = M_0$.

Объединенная нелинейная алгебраическая система решалась методом последовательных приближений. При изменении радиуса кругового отверстия в диапазоне $0,1 < \lambda \leq 0,6$ значения коэффициентов α_{2k} , β_{2k} , а также значений искомых функций $g(x)$ и $g_1(y)$ в узловых точках по существу не меняются (совпадают с точностью до шестого знака), начиная с $M = 20$. В диапазоне изменения $0,6 \leq \lambda \leq 0,8$ оказалось достаточным взять $M = 40$, а бесконечные системы урезать до 12 уравнений (решения совпадают с точностью до четвертого знака). Урезанные системы уравнений в каждом приближении решались методом Гаусса с выбором главного элемента для разных значений порядка M в зависимости от радиуса отверстий.

Для численной реализации изложенного способа были выполнены расчеты. Для радиуса кругового отверстия $\lambda > 0,8$, начиная с $M = 60$, решение совпадает с точностью

до третьего знака, при этом бесконечные системы урезались до 30 уравнений. Заметим, что значения параметра $\lambda > 0,8$ выпадают из рабочего диапазона изменения радиуса кругового отверстия пластины.

На рис. 2 представлены зависимости безразмерной зоны предразрушения от внешней изгибающей нагрузки M_y^∞ / M_s для одностороннего изгиба для различных значений радиуса отверстия $\lambda = 0,3; 0,4; 0,5$ (кривые 1–3).

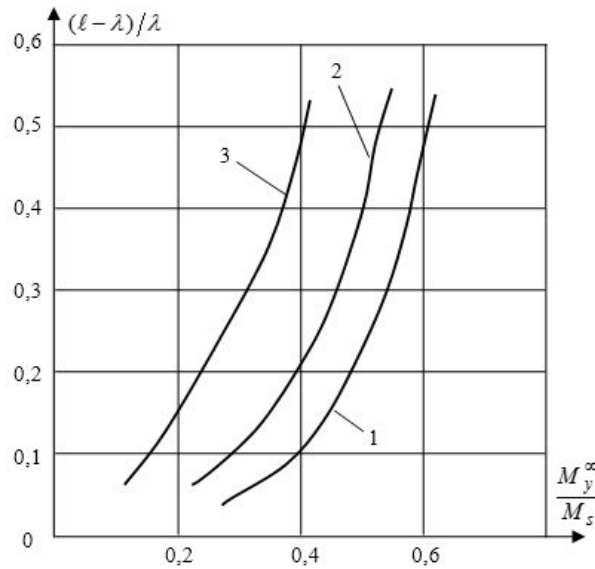


Рис. 2. Зависимость длины зоны предразрушения $(\ell - \lambda)/\lambda$ для треугольной сетки отверстий

Анализ модели зарождения трещины в тонкой пластине, ослабленной двоякопериодической системой круговых отверстий, при однородном изгибе сводится к параметрическому исследованию алгебраических систем (15), (18), (20) и критерия появления трещины при различных характеристиках материала и геометрических параметров пластины.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наукова думка, 1991. 416 с.
- [2] Болотин В. В. Механика зарождения и начального развития усталостных трещин // ФХММ. 1986. Т. 22, № 1. С. 18–23.
- [3] Мирсалимов В. М. Зарождение дефекта типа трещины во втулке контактной пары // Математическое моделирование. 2005. Т. 17, № 2. С. 35–45.
- [4] Мирсалимов В. М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 1. С. 132–151.
- [5] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Непершин Р. И., Радаев Ю. Н., Сенашов С. И., Шемякин Е. И. Предельное состояние деформируемых тел и горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 832 с.

- [6] Мирсалимов В. М. Неодномерные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.
- [7] Rusinko A., Rusinko K. Plasticity and creep of metals. Berlin: Springer Verlag, 2011. 434 p.
- [8] Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. М.;Л.: Гостехиздат, 1951. 496 с.
- [9] Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [10] Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
- [11] Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1981. 324 с.

B. B. Kazbekov

CRACK NUCLEATION UNDER UNIFORM BENDING OF THIN PERFORATED PLATE

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Republic of Azerbaijan

Kemerovo State University, Kemerovo

Abstract. The mathematical description of the model of cracks formation in uniform thin isotropic plate weakened by a doubly periodic system of circular holes at the bending is carried out. We construct the general representations of solutions describing the class of problems with a doubly periodic stress distribution out of the circular holes. The solution of the cracks formation problem is reduced to two infinite algebraic systems and two singular integral equations of the first kind.

Keywords: thin plate, doubly periodic system of circular holes, uniform bend, prefracture zone.

REFERENCES

- [1] Panasyk V. V. Mechanics of quasibrittle fracture of materials. Kiev: Naukova Dumka, 1991. (in Russian).
- [2] Bolotin V. V. Mechanics of the initiation and initial development of fatigue cracks // Materials Science. 1986. Vol. 22, № 1. P. 18–23. (in Russian).
- [3] Mirsalimov V. M. Nucleation crack in the hub of contact pair // Mathematical modelirovanie. 2005. Vol. 17, № 2. P. 35–45. (in Russian).
- [4] Mirsalimov V. M. The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair // J. of Applied mathematics and mechanics. 2007. Vol. 71. P. 120–136. (in Russian).
- [5] Ivlev D. D., Maksimova L. A., Nepershin R. I., Radaev Y. N., Senashov S. I., Shemyakin E. I. Limit state of deformable bodies and rocks. Moscow: Fizmatlit, 2008. (in Russian).

Kazbekov Babek Bilal oglu

e-mail: brrustam@mail.ru, Postgraduate student, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Republic of Azerbaijan.

-
- [6] Mirsalimov V. M. Non-one dimensional elastoplastic problems. Moscow: Nauka, 1987. (in Russian).
- [7] Rusinko A., Rusinko K. Plasticity and creep of metals. Berlin: Springer Verlag, 2011.
- [8] Savin G. N. Concentration of stresses around the holes. Moscow - Leningrad: Qostekhizdat, 1951. (in Russian).
- [9] Muskhelishvili, N.I. Some basic problem of mathematical theory of elasticity. Amsterdam: Kluwer, 1977. (in Russian).
- [10] Grigolyuk E. I., Filshinsky L. A. Perforated plates and shells. Moscow: Nauka, 1970. (in Russian).
- [11] Savruk M. P. Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka, 1981. (in Russian).

В. М. Козин¹, В. Ю. Верещагин², В. Л. Земляк³, А. С. Верещагина⁴,
А. А. Матюшина²

ЗАВИСИМОСТЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ РАЗРУШЕНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ОТ ЕГО ЗАСНЕЖЕННОСТИ

¹Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

²Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет,
г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

³Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема, г. Биробиджан,
Россия

⁴Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,
г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Рассматривается интегральная характеристика — плотность потенциальной энергии изгиба пластины, позволяющая оценить ледоразрушающую способность изгибно-гравитационных волн при движении судна на воздушной подушке по заснеженному ледяному покрову. На основании выполненных расчетов установлено, что плотность потенциальной энергии изгиба ледяного покрова существенно снижается при наличии на нем снежного покрова.

© Козин В. М., Верещагин В. Ю., Земляк В. Л., Верещагина А. С., Матюшина А. А. 2015
Козин Виктор Михайлович
e-mail: kozinvictor@rambler.ru, доктор технических наук, профессор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.
Верещагин Владислав Юрьевич
e-mail: klirickv@gmail.com, старший преподаватель, Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.
Земляк Виталий Леонидович
e-mail: vellkom@list.ru, кандидат физико-математических наук, проректор по научной работе и инновациям, заведующий кафедрой технических дисциплин, Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема, г. Биробиджан, Россия.
Верещагина Александра Сергеевна
e-mail: osa321@gmail.com, кандидат технических наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.
Матюшина Анна Александровна
e-mail: amatiushina@gmail.com, аспирант, Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Поступила 29.09.2015

Ключевые слова: изгибно-гравитационные волны, критерий разрушения, ледяной покров, судно на воздушной подушке.

УДК: 629.124.791.2.039

Проблеме судоходства в высоких широтах, продления навигации на замерзающих внутренних водных путях всегда уделялось большое внимание. В условиях нашей страны, в силу развитости водных путей, эта проблема имеет особое значение.

Существенным недостатком морского и речного флота (самого дешевого вида транспорта) является сезонность его работы, отрицательно влияющая на надежность доставки грузов в зимний, ранневесенний и позднесенний периоды года. Поэтому продление навигации, как и борьба с ледовыми осложнениями, весьма актуальная проблема.

Необходимость обеспечения навигации, в свою очередь, ставит задачу разрушения ледяного покрова в замерзающих портах, заливах и бухтах при прокладке каналов во льду с целью более раннего вскрытия рек, водохранилищ и т. д. В периоды ледохода и ледостава для предотвращения опасности наводнений приходится разрушать ледяные заторы и зажоры. Необходимость разрушения льда также возникает при обслуживании гидротехнических сооружений. В последнее время в связи с расширяющейся добычей нефти и газа на континентальном шельфе особое значение приобрело обеспечение безопасности от повреждения ледовыми нагрузками морских платформ в тех районах, где в зимнее время акватория покрывается льдом.

Известно большое количество способов борьбы со льдом. Среди них — использование амфибийных судов на воздушной подушке (СВП), которые в определенных условиях оказываются более эффективными по сравнению с традиционными средствами разрушения льда.

При проведении ледокольных работ с использованием СВП ставится задача оценки ледоразрушающей способности изгибно-гравитационных волн (ИГВ). Для ее решения может быть использована такая интегральная характеристика, как плотность потенциальной энергии изгиба ледяной пластины U , названная в данной работе энергетическим критерием разрушения ледяного покрова. Для ее характеристики может быть использовано выражение [1]:

$$U = \frac{1}{4G\lambda_\sigma k_m (1 + \mu)} \int_0^{\lambda_\sigma} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + 2(1 + \mu)\tau_{xy}^2) dx, \quad (1)$$

где: $k_m = \sigma_h/\sigma_0$, G — модуль упругости льда при сдвиге; μ — коэффициент Пуассона для льда; σ_h — предел прочности льда на изгиб толщиной h ; σ_0 — предел прочности льда на изгиб толщиной ≥ 80 см (при таких толщинах проявление масштабного эффекта несущественно); λ_σ — длина волны максимальных напряжений σ_x ; σ_x , σ_y , τ_{xy} — нормальные и касательные напряжения, определялись на основании решения уравнения [1]

$$\frac{Gh^3}{3} \left[1 + \tau_\phi \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \nabla^4 w + \rho_\pi h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2v \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (p - p_0) \Big|_{z=-h/2} = f(x, y). \quad (2)$$

С учетом линейного приближения

$$p - p_0 = \rho_{\text{в}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \Big|_{z=-h/2} + \rho_{\text{в}} g w,$$

где: h – толщина ледяного покрова; τ_{ϕ} – время релаксации деформаций; w – прогиб льда; g – ускорение силы тяжести; $\rho_{\text{л}}, \rho_{\text{в}}$ – плотности льда и воды; Φ – потенциал движения жидкости; p_0, p – абсолютное давление жидкости на нижнюю поверхность льда в статике и динамике соответственно.

Также известно, что при проведении ледокольных работ резонансным методом чистый от снега ледяной покров встречается достаточно редко. В работе [2] рассмотрено влияние снежного покрова на параметры ИГВ, возбуждаемых в ледяном покрове движущимися нагрузками. Но в указанной выше статье не был проведен анализ влияния ледоразрушающей способности СВП на заснеженном ледяном покрове. Было получено уравнение малых колебаний плавающей вязко-упругой ледяной пластины с учетом влияния слоя снега:

$$\begin{aligned} \frac{G_m h^3}{3} \mathbf{Q} \nabla^4 w = \\ = \mathbf{P} \left(-q - \rho_2 g w - (\rho_1 h + \rho_c h_c) \frac{\rho_2 w}{\partial t^2} - \eta_c h_c \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w - \rho_2 w - \rho_2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} \right), \quad (3) \end{aligned}$$

при этом линейные дифференциальные операторы \mathbf{P} и \mathbf{Q} имели вид [3]:

$$\mathbf{P} = \tau_m^{-1} + \left(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \tau_k \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial}{\partial t} + \tau_k \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

где ρ_c – плотность снежного покрова; τ_m, τ_k – времена релаксации для моделей Максвелла и Кельвина-Фойгта, G_m и G_k – соответствующие модули упругости при сдвиге.

Так же в работе [2] были рассчитаны нормальные σ_x, σ_y и касательные напряжения τ_{xy} при наличии на ледяном покрове слоя снега,

$$\sigma_x = \pm \frac{6M_x}{h^2}; \quad \sigma_y = \pm \frac{6M_y}{h^2}; \quad \tau_{xy} = \pm \frac{6M_{xy}}{h^2},$$

где в соответствии с работой [2]:

$$\begin{aligned} M_x = D \frac{q_0}{4\rho_2 u^2 \alpha_1 \alpha_2} \int_0^\infty \lambda^2 \tanh(\lambda h) \int_0^\lambda (\alpha^2 + \nu(\lambda^2 - \alpha^2)) \cos(\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} y) \times \\ \times \frac{\sin\left(\alpha \frac{L}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} \frac{L}{2\omega}\right)}{\sinh\left(\pi \frac{\alpha}{2\alpha_1}\right) \sinh\left(\pi \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} \frac{1}{2\alpha_2}\right)} \times \end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{\left[(\tau_m^{-1} - \tau_k u^2 \alpha^2) \cos(\alpha x) + \left(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m} \right) u \alpha \sin(\alpha x) \right] \xi +}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} (\xi^2 + \eta^2)} + \frac{\left[(\tau_m^{-1} - \tau_k u^2 \alpha^2) \sin(\alpha x) - \left(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m} \right) u \alpha \cos(\alpha x) \right] \eta}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} (\xi^2 + \eta^2)} \right) d\alpha d\lambda; \quad (4)$$

$$M_y = D \frac{q_0}{4\rho_2 u^2 \alpha_1 \alpha_2} \int_0^\infty \lambda^2 \tanh(\lambda h) \int_0^\lambda (\lambda^2 - \alpha^2 + \nu \lambda^2) \cos(\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} y) \times \\ \times \frac{\sin\left(\alpha \frac{L}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} \frac{L}{2\omega}\right)}{\sinh\left(\pi \frac{\alpha}{2\alpha_1}\right) \sinh\left(\pi \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} \frac{1}{2\alpha_2}\right)} \times \\ \times \left(\frac{\left[(\tau_m^{-1} - \tau_k u^2 \alpha^2) \cos(\alpha x) + \left(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m} \right) u \alpha \sin(\alpha x) \right] \xi +}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} (\xi^2 + \eta^2)} + \frac{\left[(\tau_m^{-1} - \tau_k u^2 \alpha^2) \sin(\alpha x) - \left(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m} \right) u \alpha \cos(\alpha x) \right] \eta}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} (\xi^2 + \eta^2)} \right) d\alpha d\lambda; \quad (5)$$

$$M_{xy} = D(1 - \nu) \frac{q_0}{4\rho_2 u^2 \alpha_1 \alpha_2} \int_0^\infty \lambda^2 \tanh(\lambda h) \int_0^\lambda \alpha \sin(\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} y) \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} \times \\ \times \frac{\sin\left(\alpha \frac{L}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} \frac{L}{2\omega}\right)}{\sinh\left(\pi \frac{\alpha}{2\alpha_1}\right) \sinh\left(\pi \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} \frac{1}{2\alpha_2}\right)} \times \\ \times \left(\frac{\left[-(\tau_m^{-1} - \tau_k u^2 \alpha^2) \sin(\alpha x) + \left(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m} \right) u \alpha \cos(\alpha x) \right] \xi +}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} (\xi^2 + \eta^2)} + \frac{\left[(\tau_m^{-1} - \tau_k u^2 \alpha^2) \cos(\alpha x) + \left(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m} \right) u \alpha \sin(\alpha x) \right] \eta}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} (\xi^2 + \eta^2)} \right) d\alpha d\lambda, \quad (6)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость.

Для оценки влияния ледоразрушающей способности СВП на заснеженном ледяном покрове был произведен расчет на плотность потенциальной энергии изгиба ледяной пластины U по формулам (1), (4), (5), (6). Результаты расчетов U представлены в таблице 1, достижения которой приводило к полному разрушению ледяного покрова.

Таблица 1

Результаты расчетов плотности потенциальной энергии изгиба

Название СВП	Масса, т	U , Дж/м ³	U_c , Дж/м ³
«КНАПИ-1»	0,34	743	601
«Скат»	20,5	724	608
«Гепард»	7,5	607	515
«Вояжер»	38	589	528
«Мурена»	60	651	531

В таблице 1 параметр U рассчитывался по нормальным и касательным напряжениям (2), в которых наличие снежного покрова не учитывалось ($h_c = 0$). Параметр U_c рассчитывался с наличием снежного покрова ($h_c = 1$ м). При толщине ледяного покрова ($h = 0,5$ м).

На основании сравнения U и U_c можно сделать вывод, что плотность потенциальной энергии изгиба ледяной пластины существенно снижается (в нашем случае на 15–20 %) при наличии снежного покрова на ледяном покрове, т.е. при использовании СВП в реальных условиях в качестве ледокольного судна следует уточнять их ледоразрушающие свойства.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Козин В. М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова: дис. ... д-ра техн. наук в форме научного доклада. Владивосток: ИМиМ ДВО РАН, 1993. С. 44.
- [2] Козин В. М. Земляк В. Л., Верещагин В. Ю. Влияние снежного покрова на параметры изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 319. С. 134–141.
- [3] Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические модели неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.

V. M. Kozin, V. Yu. Vereshchagin, V. L. Zemlyak, A. S. Vereshchagina, A. A. Matiushina

**THE DEPENDENCE OF THE ENERGY CRITERION OF ICE COVER
DESTRUCTION ON SNOW COVER**

*Institute of Machining and Metallurgy, Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk-na-Amure,
Russia*

Amur State University of Humanities and Pedagogy, Komsomolsk-na-Amure, Russia

Sholom-Aleichem Priamursky State University, Birobidzhan

Komsomolsk-na-Amure State Technical University, Komsomolsk-na-Amure, Russia

Abstract. Integral characteristic — the density of potential energy of bending plate allowing to estimate the ice-breaking capacity of flexural-gravity waves at the movement of air-cushion vehicle on snow-covered ice is consider. Based on the calculations it was found that the density of potential energy of bending ice plate is significantly reduced in the presence of snow cover.

Keywords: flexural-gravity waves, failure criterion, ice cover, air-cushion vehicle.

REFERENCES

[1] Kozin V. M. Resonance method of destruction of ice cover // Dissertation of the Dr. Sci. Tech. in the form of a scientific paper. Vladivostok: Inst. of Machining and Metallurgy, FEB RAS, 1993. P. 44. (in Russian).

[2] Kozin V. M., Zemlyak V. L., Vereshchagin V. Yu. Influence of snow cover on the parameters flexural-gravity waves in ice cover // J. of Applied Mech. and Tech. Phys. 2013. Vol. 54, № 3. P. 458–464.

[3] Freudental A. M., Geiringer H. The mathematical theories of the inelastic continuum. M.: Fizmatgiz, 1962. 432 p. (in Russian).

Kozin Victor Mikhailovich

e-mail: kozinvictor@rambler.ru, Dr. Sci. Tech., Professor, Institute of Machining and Metallurgy, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Vereshchagin Vladislav Yurievich

e-mail: klirickv@gmail.com, Senior Lecturer, Amur State University of Humanities and Pedagogy, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Zemlyak Vitaly Leonidovich

e-mail: vellkom@list.ru, Candidate Sci. Phys. & Math., Vice-rector for Research and Innovation, Head of the Department of Technical Disciplines, Sholom-Aleichem Priamursky State University, Birobidzhan, Russia.

Vereshchagina Alexandra Sergeevna

e-mail: osa321@gmail.com, Candidate Sci. Tech., Docent, Komsomolsk-na-Amure State Technical University, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Matiushina Anna Alexandrovna

e-mail: amatiushina@gmail.com, Postgraduate student, Amur State University of Humanities and Pedagogy, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Э. Г. Шахбандаев

РАЗВИТИЕ ТРЕЩИНЫ СО СВЯЗЯМИ МЕЖДУ БЕРЕГАМИ В ПЛОСКОСТИ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ НАПРЯЖЕННОМ ПОЛЕ

Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджанская Республика

Аннотация. Рассмотрена однородная изотропная плоскость, ослабленная прямолинейной трещиной с концевыми зонами со связями между берегами. Используется модель трещины с концевыми зонами, в которых действуют силы сцепления материала. По мере нагружения плоскости неоднородным напряженным полем в концевых областях трещины будут возникать зоны предразрушения, которые моделируются как области ослабленных межчастичных связей материала. Зона процесса разрушения представляет собой рассматриваемый как часть трещины слой конечной длины, в котором частично нарушены связи между отдельными структурными элементами материала. Задача о равновесии плоскости с трещиной со связями между берегами в концевой зоне при действии неоднородного напряженного поля и усилий в связях, препятствующих ее раскрытию, сводится к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши. Из решения этой системы уравнений находятся нормальные и касательные усилия в связях.

Ключевые слова: изотропная плоскость в неоднородном поле напряжений, прямолинейная трещина с концевыми зонами, силы сцепления.

УДК: 539.375

Постановка задачи. Рассмотрим однородную изотропную плоскость в неоднородном поле напряжений, ослабленную одной сквозной прямолинейной трещиной. Используется модель трещины со связями между берегами в концевой зоне [1]. По мере нагружения плоскости силовой нагрузкой в концевых областях трещины будут возникать зоны предразрушения, которые моделируем как области ослабленных межчастичных связей материала. Опубликован ряд работ [2]–[8], посвященных исследованию деформируемых тел с трещинами с учетом наличия сил сцепления между берегами.

Пусть в изотропной среде, занимающей плоскость Oxy , имеется прямолинейная трещина. Ось абсцисс направим вдоль линии трещины ($a \leq x \leq b$). На бесконечности

© Шахбандаев Э. Г., 2015

Шахбандаев Эльмеддин Гусейн оглы

e-mail: mir-vagif@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Поступила 10.09.2015

действуют напряжения, являющиеся полиномиальными функциями декартовых координат x и y . Связи между берегами зоны предразрушения, имеющие заданную диаграмму деформирования, моделируют взаимодействие берегов зоны предразрушения. Их физическая природа зависит от вида материала плоскости. Размеры концевых зон предразрушения в рассматриваемой задаче заранее неизвестны и подлежат определению. Они также зависят от вида материала плоскости. Закон деформирования связей в общем случае нелинейный.

При действии силовой нагрузки на изотропную плоскость в связях, соединяющих берега зоны предразрушения, будут возникать нормальные $q_y(x)$ и касательные $q_{xy}(x)$ усилия. Величины этих напряжений $q_y(x)$ и $q_{xy}(x)$ заранее неизвестны. Граничные условия задачи на берегах трещины с концевыми зонами для рассматриваемой задачи с напряжениями, являющимися полиномиальными функциями декартовых координат, имеют вид

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad a_1 \leq x \leq b_1, \quad (1)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = q_y(x) - iq_{xy}(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad a \leq x \leq a_1, \quad b_1 \leq x \leq b.$$

Уравнения задачи необходимо дополнить соотношением, связывающим раскрытие трещины в концевых зонах и усилия в связях. Это дополнительное соотношение представим в виде

$$(v^+ - v^-) - i(u^+ - u^-) = \Pi(x, \sigma) [q_y(x) - iq_{xy}(x)], \quad (2)$$

где функцию $\Pi(x, \sigma)$ можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящую от их натяжения; $\sigma = \sqrt{q_y^2(x) + q_{xy}^2(x)}$ – модуль вектора усилий в связях.

Метод решения задачи. Используя принцип суперпозиции, напряженное состояние в плоскости с трещиной запишем в виде суммы двух напряженных состояний

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1. \quad (3)$$

Здесь $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ – компоненты тензора напряжений в сплошной плоскости, когда на бесконечности действуют напряжения, являющиеся полиномиальными функциями декартовых координат x и y ; $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$ – компоненты тензора напряжений для плоскости с трещиной, когда напряжения исчезают на бесконечности.

Для напряжений $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ будем иметь

$$\sigma_x^0 + \sigma_y^0 = 4\text{Re}\Phi_0(z), \quad z = x + iy,$$

$$\sigma_y^0 - \sigma_x^0 + 2i\tau_{xy}^0 = \Phi_0(z) + \Omega_0(\bar{z})(z - \bar{z})\overline{\Phi_0'(z)}, \quad (4)$$

$$\Phi_0(z) = A_0z^m + A_1z^{m-1} + \dots + A_m, \quad (5)$$

$$\Omega_0(z) = B_0z^m + B_1z^{m-1} + \dots + B_m.$$

Эти функции (5) в зависимости от значений коэффициентов A_j и B_j ($j = 0, 1, \dots, m$) определяют напряженное состояние в плоскости без трещины.

Учитывая формулы (4), краевые условия (1) представим в виде

$$\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 = -(\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad a_1 \leq x \leq b_1, \quad (6)$$

$$\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 = q_y(x) - iq_{xy}(x) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad a \leq x \leq a_1, \quad b_1 \leq x \leq b.$$

Напряжения σ_x^1 , σ_y^1 , τ_{xy}^1 и перемещения u_1 и v_1 выразим через две кусочно-аналитические функции комплексного переменного $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ [9]:

$$\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (7)$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u_1 + iv_1) = \kappa \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)},$$

где μ – модуль сдвига материала; постоянная Мусхелишвили $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напряженного состояния и $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации; ν – коэффициент Пуассона материала.

На основании краевых условий (6), следуя Н. И. Мусхелишвили [9], приходим к задаче линейного сопряжения с разрывными коэффициентами:

$$[\Phi(t) + \Omega(t)]^{-+} + [\Phi(t) + \Omega(t)]^{-} = 2f(t), \quad (8)$$

$$[\Phi(t) - \Omega(t)]^{-+} - [\Phi(t) - \Omega(t)]^{-} = 0,$$

$$\text{где } f(t) = \begin{cases} -(\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{при } a_1 \leq t \leq b_1 \\ q_y - iq_{xy} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{при } a \leq t \leq a_1, \quad b_1 \leq t \leq b \end{cases}.$$

Так как напряжения в изотропной плоскости ограничены, то решение граничной задачи (8) ищется в классе всюду ограниченных функций. Решение задачи (8) запишется в виде

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-z)}} dt, \quad (9)$$

При $z > b$ $X(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)} \rightarrow z + O(1/z)$. Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви соответствующей функции, определяемой приведенным условием на верхнем берегу трещины.

Условие разрешимости краевой задачи в классе всюду ограниченных функций

$$\int_a^b \frac{f(t)}{(t-a)(t-b)} dt = 0, \quad \int_a^b \frac{t f(t)}{(t-a)(t-b)} dt = 0 \quad (10)$$

служат для отыскания параметров a и b .

В полученные соотношения входят неизвестные напряжения в концевых зонах предразрушения. Дополнительное соотношение (2) является условием, определяющим неизвестные напряжения в связях между берегами трещины в концевых зонах. Используя полученное решение задачи, определяем раскрытие между противоположными берегами трещины с концевыми зонами:

$$\begin{aligned} 2\mu i \frac{\partial}{\partial x} [u^+(x, 0) - u^-(x, 0) + i(v^+(x, 0) - v^-(x, 0))] = \\ = (1 + \kappa) [\Phi^+(x) - \Phi^-(x)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя формулы Сохоцкого–Племеля, на основе полученного решения (9) находим:

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{(x-a)(x-b)} \int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-x)}} dt. \quad (12)$$

Для нахождения усилий в связях в концевых зонах трещины $q_y(x)$ и $q_{xy}(x)$ подставляем выражение (12) в соотношение (11). В результате получаем нелинейное комплексное сингулярное интегродифференциальное уравнение:

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu\pi}\sqrt{(x-a)(x-b)}\int_a^b\frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-x)}}dt=\frac{\partial}{\partial x}[\Pi(x,q_-(q_y(x)-iq_{xy}(x))), \quad (13)$$

Напомним, что

$$\int_a^b\frac{f(t)_-}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-x)}}dt=\int_a^{a_1}\frac{q_y(t)-iq_{xy}(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-x)}}dt+ \\ +\int_{b_1}^b\frac{q_y(t)-iq_{xy}(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-x)}}dt-\int_a^b\frac{\sigma_y^0-i\tau_{xy}^0}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-x)}}dt.$$

Уравнение (13) представляет собой нелинейное интегродифференциальное уравнение с ядром типа ядра Коши и может быть решено численно. Для его решения можно использовать [10]–[12] коллокационную схему с аппроксимацией неизвестной функции. В общем случае, разделяя в (13) действительные и мнимые части, находим систему из двух нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений относительно $q_y(x)$ и $q_{xy}(x)$:

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{(x-a)(b-x)}\left[\int_a^b\frac{q_y(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}}dt+f_y(x)\right]=-\frac{2\mu}{1+\kappa}\frac{d}{dx}[\Pi(x,\sigma)q_y(x)], \quad (14)$$

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{(x-a)(b-x)}\left[\int_a^b\frac{q_{xy}(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}}dt+f_{xy}(x)\right]=-\frac{2\mu}{1+\kappa}\frac{d}{dx}[\Pi(x,\sigma)q_{xy}(x)]. \quad (15)$$

Здесь $f_y(x)=-\int_a^b\frac{\sigma_y^0}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}}dt$, $f_{xy}(x)=-\int_a^b\frac{\tau_{xy}^0}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}}dt$,

$$\int_a^b\frac{q_y(t)_-}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}}dt=\int_a^{a_1}\frac{q_y(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}}dt+\int_{b_1}^b\frac{q_y(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}}dt,$$

$$\int_a^b\frac{q_{xy}(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}}dt=\int_a^{a_1}\frac{q_{xy}(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}}dt+\int_{b_1}^b\frac{q_{xy}(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}}dt.$$

Как и следовало ожидать, в общем случае поставленная задача распалась на две независимые задачи: 1) для трещины нормального разрыва – уравнение (14); 2) для трещины поперечного сдвига – уравнение (15). Чтобы избежать решения интегродифференциальных уравнений, представим уравнения (14) и (15) в следующем виде:

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu}\int_a^xQ_1(x)dx=\Pi(x,\sigma)q_y(x), \quad (16)$$

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu}\int_a^xQ_2(x)dx=\Pi(x,\sigma)q_{xy}(x),$$

где

$$Q_1(x)=\frac{1}{\pi}\sqrt{(b-x)(x-a)}\left[\int_a^b\frac{q_y(t)}{\sqrt{(b-t)(t-a)(t-x)}}dt+f_y(x)\right], \quad (17)$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{(b-x)(x-a)} \left[\int_a^b \frac{q_{xy}(t)}{\sqrt{(b-t)(t-a)(t-x)}} dt + f_{xy}(x) \right].$$

Разбивая отрезок (a, b) на M узловых точек t_m ($m = 1, 2, \dots, M$) и требуя выполнения условий (16) в узловых точках концевых зон, получим вместо каждого из уравнений (16) алгебраические системы из M_1 уравнений для определения приближенных значений $q_y(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M_1$):

$$\begin{aligned} C_0 Q_1(t_1) &= C(t_1, \sigma(t_1)) _q_y(t_1), \\ C_0 (Q_1(t_1) + Q_2(t_2)) &= C(t_2, \sigma(t_2)) _q_y(t_2), \end{aligned} \quad (18)$$

.....

$$C_0 \sum_{m=1}^{M_1} Q_1(t_m) = C(t_{M_1}, \sigma(t_{M_1})) _q_y(t_{M_1});$$

и $q_{xy}(t_m)$:

$$\begin{aligned} C_0 Q_2(t_1) &= C(t_1, \sigma(t_1)) _q_{xy}(t_1), \\ C_0 (Q_2(t_1) + Q_2(t_2)) &= C(t_2, \sigma(t_2)) _q_{xy}(t_2), \end{aligned} \quad (19)$$

.....

$$C_0 \sum_{m=1}^{M_1} Q_2(t_m) = C(t_{M_1}, \sigma(t_{M_1})) _q_{xy}(t_{M_1}).$$

Здесь $C_0 = -\frac{(1+\kappa)\pi}{4\mu} \cdot \frac{b-a}{M}$, M_1 – число узловых точек, принадлежащим концевым зонам трещины.

При получении алгебраических систем все интервалы интегрирования приводились к одному интервалу $[-1, 1]$, затем интегралы заменялись конечными суммами с помощью квадратурных формул Гаусса.

Для определения предельного состояния вершины прямолинейной трещины необходимо ввести критическое условие. В качестве такого условия принимаем критерий критического раскрытия трещины. Принимаем, что разрыв связей на краю концевой зоны ($x_0 = a_1$ или $x_0 = b_1$) происходит при выполнении следующего условия:

$$V(x_0) = \sqrt{u^2(x_0) + iv^2(x_0)} = \delta_c, \quad (20)$$

где $u(x_0) = u^+(x_0, 0) - u^-(x_0, 0)$; $v(x_0) = v^+(x_0, 0) - v^-(x_0, 0)$; δ_c – характеристика сопротивления материала плоскости развитию трещины.

Совместное решение уравнений (18)–(20) и дополнительных условий разрешимости краевой задачи (10) дает возможность при заданной длине прямолинейной трещины и характеристиках связей найти критическую внешнюю нагрузку и размеры концевых зон $d_1 = a_1 - a$ и $d_2 = b - b_1$ для предельно-равновесного состояния вершины трещины и края концевой зоны.

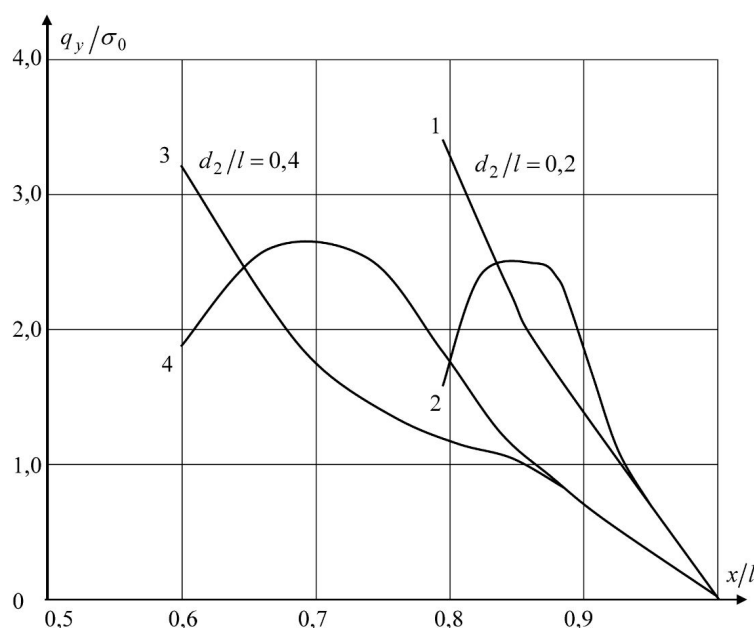


Рис. 1. Распределение нормальных усилий в связях между берегами конечных зон трещины

В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в конечных зонах используется итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений А. А. Ильюшина.

На рис. 1 показано распределение нормальных усилий в связях между берегами конечных зон трещины при $\nu = 0,3$. Здесь σ_0 – характерный силовой фактор поля напряжений на бесконечности, l – полудлина трещины. Кривые 1, 3 относятся к линейному закону деформирования связей, 2, 4 – к билинейному.

Усилия в связях при линейном законе деформирования всегда имеют максимальные значения на краю конечной зоны, также как и величины раскрытия берегов трещины. На краю конечной зоны трещины раскрытие берегов максимально при линейном и нелинейном законах деформирования. С увеличением относительной податливости связей раскрытие берегов трещины возрастает.

Заключение. Анализ предельно-равновесного состояния однородной изотропной плоскости при наличии прямолинейной трещины с концевыми зонами и действии силовой нагрузки сводится к параметрическому исследованию решения алгебраических систем (18), (19), (20) и (10) при различных законах деформирования связей, упругих и геометрических характеристиках плоскости.

Непосредственно из решения полученных алгебраических систем определяются нормальные и касательные усилия в связях между берегами в конечных зонах и раскрытие берегов прямолинейной трещины. Раскрытие берегов трещины в пределах конечных зон можно также определять по соотношениям (2).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] The special issue: Cohesive models // Engineering Fracture Mechanics. 2003. V. 70, № 14. P. 1741–1987.

- [2] Мир-Салим-заде М. В. Трещина со связями между берегами в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // Механика композитных материалов. 2005. Т. 41, вып. 6. С. 773–782.
- [3] Мирсалимов В. М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары // ПММ. 2007. Т. 71, вып. 1. С. 132–151.
- [4] Мирсалимов В. М. Трещины со связями между берегами в тепловыделяющем перфорированном массиве // Деформация и разрушение материалов. 2009. № 3. С. 11–17.
- [5] Мирсалимов В. М. Моделирование закрытия трещины со связями между берегами во втулке контактной пары // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 78–92.
- [6] Гасанов Ш. Г. Когезионная трещина с частично контактирующими берегами в сечении дорожного покрытия // Механика машин, механизмов и материалов. 2012. № 2 (19). С. 58–64.
- [7] Мирсалимов В. М., Гасанов Ф. Ф. Решение задачи о взаимодействии жестких включений и когезионных трещин в изотропной среде при продольном сдвиге // Известия ТулГУ, Естественные науки. 2014. Вып. 1, часть 1. С. 196–206.
- [8] Мир-Салим-заде М. В. Трещины со связями в перфорированной стрингерной пластине // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 5. С. 34–43.
- [9] Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [10] Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1981. 324 с.
- [11] Мирсалимов, В. М. Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.
- [12] Ladopoulos E. G. Singular integral equations, Linear and non-linear theory and its applications in science and engineering. New York, Berlin: Springer Verlag. 2000. 547 p.

E. G. Shahbandaev

DEVELOPMENT OF A CRACK WITH BONDS BETWEEN THE FACES IN THE PLANE UNDER NON-UNIFORM STRESS FIELD

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Republic of Azerbaijan

Abstract. A homogeneous isotropic plane weakened by rectilinear crack with end zones with bonds between the faces is considered. The model of crack with end zones, in which cohesive forces of the material are act, is used. At the loading of the plane by non-uniform stress field in the end zones the pre-fracture zones will occur, which are modeled as a zone of weakened interparticle bonds of the material. The fracture process zone is a layer of finite length considering as a part of the crack, in which bonds between the individual structural elements of the material is partially broken. The problem of equilibrium of the plane with the crack with bonds between the faces in the end zones under the influence of non-uniform stress field and tractions in the bonds, preventing of crack disclosure is reduced to a system of singular integral-differential equations with Cauchy kernel. From the solution of this system of equations the normal and tangential forces in the bonds are found.

Keywords: isotropic plane in a non-uniform stress field, rectilinear crack with end zones, cohesive forces.

REFERENCES

- [1] The special issue: Cohesive models // Engineering Fracture Mechanics. 2003. Vol. 70, № 14. P. 1741–1987.
- [2] Mir-Salim-zadeh M. V. A crack with interfacial bonds in an isotropic medium strengthened with a regular system of stringers // Mechanics of Composite Materials. 2005. Vol. 41, Issue 6. P. 519–526. (in Russian).
- [3] Mirsalimov V. M. The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2007. Vol. 71, Issue 1. P. 120–136. (in Russian).
- [4] Mirsalimov V. M. Cracks with bonds between edges in heat-evolving perforated rock mass // Deformatsiya i Razrushenie materialov. 2009. № 3. P. 11–17. (in Russian).
- [5] Mirsalimov V. M. Simulation of bridged crack closure in a contact pair bushing // Mechanics of Solids. 2009. Vol. 44, Issue 2. C. 232–243. (in Russian).
- [6] Hasanov Sh. H. Cohesive crack with partially contacting faces in section of the road covering // Mechanics of machines, mechanisms and materials. 2012. № 2 (19). P. 58–64. (in Russian).
- [7] Mirsalimov V. M., Hasanov F. F. Solution of a problem of rigid inclusions and cohesive cracks interaction in isotropic medium at longitudinal shear // Izvestija Tulsogo gosudarstvennogo universiteta. 2014. Issue. 1, Part 1. P. 196–206. (in Russian).
- [8] Mir-Salim-zade M. V. Cracks with interfacial bonds in a perforated stringer plate // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2014. № 5. P. 34–43. (in Russian).
- [9] Muskhelishvili N. I. Some basic problems of mathematical theory of elasticity. Amsterdam: Kluwer, 1977. 707 p. (in Russian).
- [10] Savruk M. P. Two-dimensional problem of elasticity for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka, 1981. 324 p. (in Russian).
- [11] Mirsalimov V. M. Non-one dimensional elastoplastic problems. M.: Nauka. 1987. 256 p. (in Russian).
- [12] Ladopoulos E. G. Singular integral equations, Linear and non-linear theory and its applications in science and engineering. – New York, Berlin: Springer Verlag. 2000. 547 p. (in Russian).

Shahbandoev Elmeddin Huseyn oglu

e-mail: mir-vagif@mail.ru, PhD, Senior researcher, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Republic of Azerbaijan.

В. Н. Орлов^{1,2}, К. В. Коллэ²

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ В ОКРЕСТНОСТИ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

¹Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, г. Ялта, Россия

²Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Теория нелинейных дифференциальных уравнений, связанная с именем итальянского математика Риккати и появившаяся в начале XVII века, продолжает пополняться новыми результатами и по сегодняшний день. Большой вклад в развитие данной теории внесли математики Белорусской школы, результаты исследований которых связаны с разрешимостью нелинейных дифференциальных уравнений в квадратурах, но это удается сделать лишь в частных случаях [1]–[15]. Решение некоторых задач математической теории аналитического приближенного метода решения таких уравнений представлено в работах [16]–[22]. Главной дачей в теории дифференциальных уравнений является теорема существования решений дифференциального уравнения. Особенность нелинейных дифференциальных уравнений связана с подвижными особыми точками, которые существенно уменьшают значимость результата классических теорем существования. Следует отметить, что классические теоремы существования – теорема Коши, теорема Пикара – не в полном объеме решают задачу для отмеченной категории дифференциальных уравнений. При этом вариант метода мажорант, применяемый в теореме Коши, ограничивает возможность использовать эту теорему в приближенном методе решения. В данной работе дано доказательство теоремы существования решений рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки в новой интерпретации метода мажорант. Построено аналитическое приближенное решение рассматриваемого уравнения в окрестности подвижной особой точки в случае точного значения последней.

© Орлов В. Н., Коллэ К. В., 2015

Орлов Виктор Николаевич

e-mail: orlowvn@gambler.ru, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Математика, теория и методика обучения математике», Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Россия; доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Коллэ Ксения Валентиновна

e-mail: ksenija-kolle2012@mail.ru, студентка 5 курса физико-математического факультета, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, задача Коши, метод мажоранты, окрестность подвижной особой точки, теорема существования, аналитическое приближенное решение, оценка погрешности.

УДК: 517.928.4

Результаты исследования и их обсуждение. В данной работе, в доказательстве теоремы существования решения рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения, использована идея метода мажорант не к правой части дифференциального уравнения, а к решению самого дифференциального уравнения, предложенного в работах [16]–[22]. Такой подход в доказательстве теоремы существования позволяет решить все задачи, связанные с приближенным методом решения нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки. Упомянутый метод успешно был апробирован к ряду других нелинейных дифференциальных уравнений в работах [23]–[26].

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y''' = a_1(x)y^2 + a_2(x)y + a_3(x), \quad (1)$$

которое с помощью замены переменной

$$y = u(x)w(x) + v(x) \quad (2)$$

приводиться к нормальной форме

$$y''' = y^2 + r(x) \quad (3)$$

при условиях

$$\begin{cases} u(x) = C, \\ v(x) = -\frac{Ca_2(x)}{2}, \\ r(x) = \frac{a_3(x)}{C} - \frac{1}{4}a_2^2(x) + \frac{a_2'''(x)}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим задачу Коши

$$y''' = y^2 + r(x), \quad (5)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_1) = y_1, \\ y''(x_2) = y_2. \end{cases} \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть

(1) x^* – подвижная особая точка для задачи Коши (5)–(6);

(2) $r(x) \in C^\infty$ в области

$$|x - x^*| < \rho_1, \quad (7)$$

где $0 < \rho_1 = \text{const}$;

(1) $\exists M_1 : \frac{|r^n(x^*)|}{n!} \leq M_1$, где $n=0, 1, 2, \dots$, $M_1 = \text{const}$,

тогда существует единственное решение задачи Коши (5)–(6), представимое в виде

$$y(x) = (x - x^*)^{-3} \sum_0^\infty C_n (x - x^*)^n, \quad (8)$$

в области

$$|x - x^*| < \rho_2,$$

где $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[M+1]} \right\}$, $M = \sup_n \left\{ \frac{|r^n(x^*)|}{n!} \right\}$, $n=0, 1, 2, \dots$.

Доказательство. Учитывая структуру решения уравнения (5) в окрестности подвижной особой точки в общем случае

$$y(x) = (x - x^*)^\rho \sum_0^\infty C_n (x - x^*)^n, \quad C_0 \neq 0$$

и представления функции $r(x)$ в виде ряда

$$r(x) = \sum_0^\infty A_n (x - x^*)^n,$$

из уравнения (5) получаем

$$\sum_0^\infty C_n (x - x^*)^{n+\rho-3} (n+\rho)(n+\rho-1)(n+\rho-2) = (x - x^*)^{2\rho} \sum_0^\infty C_n^* (x - x^*)^n + \sum_0^\infty A_n (x - x^*)^n.$$

Из последнего соотношения следует необходимость выполнения следующих условий:

- (1) $n + \rho - 3 = n + 2\rho$,
- (2) $(n - 3)(n - 4)(n - 5)C_n = C_n^* + A_{n-6}$.

Первое условие позволяет определить значение $\rho = -3$, характер подвижной особой точки, а второе условие представляет рекуррентное соотношение, позволяющее однозначно определить все коэффициенты C_n :

$$C_0 = -60, C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0, C_4 = 0, C_5 = 0, \\ C_6 = \frac{A_0}{126}, C_7 = \frac{A_1}{144}, C_8 = \frac{A_2}{180}, C_9 = \frac{A_3}{240}, C_{10} = \frac{A_4}{330}, C_{11} = \frac{A_5}{456}, \dots$$

В силу однозначности определения коэффициентов C_n следует единственность полученного формального решения.

Методом математической индукции доказываем справедливость следующих оценок:

$$|C_{6n}| \leq \frac{1}{(6n-3)(6n-4)(6n-5) + 120} (M+1)^n = V_{6n}, \quad (9)$$

$$|C_{6n+1}| \leq \frac{1}{(6n-2)(6n-3)(6n-4) + 120} (M+1)^n = V_{6n+1}, \quad (10)$$

$$|C_{6n+2}| \leq \frac{1}{(6n-1)(6n-2)(6n-3) + 120} (M+1)^n = V_{6n+2}, \quad (11)$$

$$|C_{6n+3}| \leq \frac{1}{6n(6n-1)(6n-2) + 120} (M+1)^n = V_{6n+3}, \quad (12)$$

$$|C_{6n+4}| \leq \frac{1}{(6n+1)(6n-1)6n + 120} (M+1)^n = V_{6n+4}, \quad (13)$$

$$|C_{6n+5}| \leq \frac{1}{(6n+2)(6n+1)6n + 120} (M+1)^n = V_{6n+5}, \quad (14)$$

где

$$M = \sup_n \left\{ \frac{|r^n(x^*)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ограничимся случаем оценки коэффициентов C_{6n} :

$$|C_{6n+6}| \leq \frac{1}{(6n+3)(6n+2)(6n+1) + 120} (M+1)^n. \quad (15)$$

Из рекуррентного соотношения, полученного выше, следует

$$(6n + 3)(6n + 2)(6n + 1)C_{6n+6} = C_{6n+6}^* + A_{6n} \quad (16)$$

или

$$(6n + 3)(6n + 2)(6n + 1)C_{6n+6} = \sum_1^{6n} C_i C_{6n-i} + A_{6n}. \quad (17)$$

Из (17) получаем, с учетом предполагаемых оценок для C_n :

$$\begin{aligned} |C_{6n+6}| &\leq \frac{1}{((6n + 3)(6n + 2)(6n + 1) + 120)} \cdot \\ &\cdot \left(\sum_1^{6n} \frac{(M + 1)^{\frac{i}{6}} (M + 1)^{n - \frac{i}{6}}}{((i - 3)(i - 4)(i - 5) + 120)(6n + 3 - i)(6n + 2 - i) + 120} + A_{6n} \right) \leq \quad (18) \\ &\leq \frac{1}{(6n + 3)(6n + 2)(6n + 1) + 120} (M + 1)^n \cdot \left(\sum_1^{6n} \frac{1}{(i - 3)(i - 4)(i - 5) + 120} \right) \times \\ &\times \frac{1}{(6n + 3 - i)(6n + 2 - i)(6n + 1 - i) + 120} + M) \leq \frac{(M + 1)^{n+1}}{(6n + 3)(6n + 2)(6n + 1) + 120}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом подтверждаются остальные оценки.

Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} V_n (x - x^*)^n &= \sum_{k=1}^{\infty} V_{6k} (x - x^*)^{6k} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{6k+1} (x - x^*)^{6k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{6k+2} (x - x^*)^{6k+2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} V_{6k+3} (x - x^*)^{6k+3} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{6k+4} (x - x^*)^{6k+4} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{6k+5} (x - x^*)^{6k+5}, \end{aligned}$$

который является мажорирующим для ряда (8) в силу (9)–(14).

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} V_n (x - x^*)^n &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(6k - 3)(6k - 4)(6k - 5) + 120} (M + 1)^k (x - x^*)^{6k} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(6k - 2)(6k - 3)(6k - 4) + 120} (M + 1)^k (x - x^*)^{6k+1} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(6k - 1)(6k - 2)(6k - 3) + 120} (M + 1)^k (x - x^*)^{6k+2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6k(6k - 1)(6k - 2) + 120} (M + 1)^k (x - x^*)^{6k+3} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(6k + 1)(6k - 1)6k + 120} (M + 1)^k (x - x^*)^{6k+4} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(6k + 2)(6k - 1)6k + 120} (M + 1)^k (x - x^*)^{6k+5}. \end{aligned}$$

Для первого ряда, находящегося в правой части последнего равенства, на основании признака Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(M+1)^{k+1}(x-x^*)^{6k+6}((6n-3)(6n-4)(6n-5)+120)}{((6n+3)(6n+2)(6n+1)+120)(M+1)^k(x-x^*)^{6k}} \right| =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(M+1)(x-x^*)^6| \leq 1$$

устанавливаем область сходимости

$$|x-x^*| \leq \frac{1}{\sqrt[6]{M+1}}. \quad (19)$$

Для остальных пяти рядов аналогично получаем область (19).

Следовательно, ряд (8) сходится в области (19).

Положим $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[6]{M+1}} \right\}$, получаем сходимость правильной части ряда (8) в области $|x-x^*| < \rho_2$, что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 2. Пусть x^* – подвижная особая точка и выполняются пункты 2 и 3 теоремы 1, тогда для приближенного решения в окрестности подвижной особой точки

$$y_N(x) = (x-x^*)^{-3} \sum_0^N C_n(x-x^*)^n, \quad (20)$$

задачи (1)–(2) в области

$$|x-x^*| < \rho_2,$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta y_N(x) = |y(x) - y_N(x)| \leq \Delta, \quad (21)$$

где

$$\Delta \leq \frac{(M+1)^{\frac{N+1}{6}} \cdot |x-x^*|^{N-1}}{1 - (M+1)|x-x^*|^6} \left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120} + \right.$$

$$\frac{|x-x^*|}{(N-1)(N-2)(N-3)+120} +$$

$$\left. + \frac{|x-x^*|^2}{N(N-1)(N-2)+120} + \frac{|x-x^*|^3}{(N+1)N(N-1)+120} + \frac{|x-x^*|^4}{(N+1)(N+2)N+120} + \right.$$

$$\left. \frac{|x-x^*|^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120} \right)$$

в случае $N+1 = 6n$,

$$\Delta \leq \frac{(M+1)^{\frac{N}{6}} \cdot |x-x^*|^{N+1}}{1 - (M+1)|x-x^*|^6} \left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120} + \right.$$

$$\frac{|x-x^*|}{(N-1)(N-2)(N-3)+120} +$$

$$\left. + \frac{|x-x^*|^2}{N(N-1)(N-2)+120} + \frac{|x-x^*|^3}{N(N+1)(N-1)+120} + \frac{|x-x^*|^4}{N(N+2)(N+1)+120} + \right.$$

$$\left. \frac{|x - x^*|^5}{(N + 1)(N + 2)(Nn + 3) + 120} \right)$$

в случае $N + 1 = 6n + 1$,

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \frac{(M + 1)^{\frac{N-1}{6}} \cdot |x - x^*|^{N+1}}{1 - (M + 1) |x - x^*|^6} \left(\frac{1}{(N - 2)(N - 3)(N - 4) + 120} + \right. \\ & \frac{|x - x^*|}{(N - 1)(N - 2)(N - 3) + 120} + \\ & + \frac{|x - x^*|^2}{(N - 1)N(N - 2) + 120} + \frac{|x - x^*|^3}{(N - 1)(N + 1)N + 120} + \frac{|x - x^*|^4}{(N + 2)(N + 1)N + 120} + \\ & \left. \frac{|x - x^*|^5}{(N + 3)(N + 2)(N + 1) + 120} \right) \end{aligned}$$

в случае $N + 1 = 6n + 2$,

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \frac{(M + 1)^{\frac{N-2}{6}} \cdot |x - x^*|^{N+1}}{1 - (M + 1) |x - x^*|^6} \left(\frac{1}{(N - 2)(N - 3)(N - 4) + 120} + \right. \\ & \frac{|x - x^*|}{(N - 2)(N - 1)(N - 3) + 120} + \\ & + \frac{|x - x^*|^2}{(N - 2)N(N - 11) + 120} + \frac{|x - x^*|^3}{(N + 1)N(N - 1) + 120} + \frac{|x - x^*|^4}{(N + 2)(N + 1)N + 120} + \\ & \left. \frac{|x - x^*|^5}{(N + 3)(N + 2)(N + 1) + 120} \right) \end{aligned}$$

в случае $N + 1 = 6n + 3$,

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \frac{(M + 1)^{\frac{N-3}{6}} \cdot |x - x^*|^{N+1}}{1 - (M + 1) |x - x^*|^6} \left(\frac{1}{(N - 3)(N - 2)(N - 4) + 120} + \right. \\ & \frac{|x - x^*|}{(N - 3)(N - 1)(N - 2) + 120} + \\ & + \frac{|x - x^*|^2}{N(N - 1)(N - 2) + 120} + \frac{|x - x^*|^3}{(N + 1)N(N - 1) + 120} + \frac{|x - x^*|^4}{(N + 2)(N + 1)N + 120} + \\ & \left. \frac{|x - x^*|^5}{(N + 3)(N + 2)(N + 1) + 120} \right) \end{aligned}$$

в случае $N + 1 = 6n + 4$,

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \frac{(M + 1)^{\frac{N-4}{6}} \cdot |x - x^*|^{N+1}}{1 - (M + 1) |x - x^*|^6} \left(\frac{1}{(N - 4)(N - 2)(N - 3) + 120} + \right. \\ & \frac{|x - x^*|}{(N - 1)(N - 2)(N - 3) + 120} + \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{|x - x^*|^2}{N(N-1)(N-2) + 120} + \frac{|x - x^*|^3}{(N+1)N(N-1) + 120} + \frac{|x - x^*|^4}{(N+2)(N+1)N + 120} + \\ & \frac{|x - x^*|^5}{(N+3)(N+2)(N+1) + 120} \end{aligned} \right)$$

в случае $N + 1 = 6n + 5$,

$$\text{при этом } \rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[6]{M+1}} \right\}, \quad M = \max \left\{ \sup_n \frac{|r^{(n)}(x^*)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. Докажем оценку для случая $N + 1 = 6n$. Имеем:

$$\begin{aligned} |y(x) - y_N(x)| &= \left| \sum_0^\infty C_n(x - x_0)^n - \sum_0^N C_n(x - x_0)^n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^\infty C_n(x - x^*)^n \right| = \\ &= \left| C_{N+1}(x - x^*)^{N+1} + C_{N+2}(x - x^*)^{N+2} + \dots + C_{N+k}(x - x^*)^{N+k} + \dots \right| = \\ &= \left| C_{6n}(x - x^*)^{6n} + C_{6n+1}(x - x^*)^{6n+1} + C_{6n+2}(x - x^*)^{6n+2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + C_{6n+k-1}(x - x^*)^{6n+k-1} + \dots \right| \leq \\ &\leq \frac{(M+1)^n \cdot |x - x^*|^{6n}}{(6n-3)(6n-4)(6n-5) + 120} + \frac{(M+1)^n \cdot |x - x^*|^{6n+1}}{(6n-2)(6n-3)(6n-4) + 120} + \\ &\quad \frac{(M+1)^n \cdot |x - x^*|^{6n+2}}{(6n-1)(6n-2)(6n-3) + 120} + \\ &+ \frac{(M+1)^n \cdot |x - x^*|^{6n+3}}{6n(6n-1)(6n-2) + 120} + \frac{(M+1)^n \cdot |x - x^*|^{6n+4}}{6n(6n+1)(6n-1) + 120} + \frac{(M+1)^n \cdot |x - x^*|^{6n+5}}{6n(6n+2)(6n+1) + 120} + \\ &+ \frac{(M+1)^{n+1} \cdot |x - x^*|^{6n+6}}{(6n+3)(6n+2)(6n+1) + 120} + \frac{(M+1)^{n+1} \cdot |x - x^*|^{6n+7}}{(6n+4)(6n+3)(6n+2) + 120} + \\ &\quad + \frac{(M+1)^{n+1} \cdot |x - x^*|^{6n+8}}{(6n+5)(6n+4)(6n+3) + 120} + \\ &+ \frac{(M+1)^{n+1} \cdot |x - x^*|^{6n+9}}{(6n+6)(6n+5)(6n+4) + 120} + \frac{(M+1)^{n+1} \cdot |x - x^*|^{6n+10}}{(6n+7)(6n+6)(6n+5) + 120} + \\ &\quad + \frac{(M+1)^{n+1} \cdot |x - x^*|^{6n+11}}{(6n+8)(6n+7)(6n+6) + 120} + \\ &+ \frac{(M+1)^{n+2} \cdot |x - x^*|^{6n+12}}{(6n+9)(6n+8)(6n+7) + 120} + \frac{(M+1)^{n+2} \cdot |x - x^*|^{6n+13}}{(6n+10)(6n+9)(6n+8) + 120} + \\ &\quad + \frac{(M+1)^{n+2} \cdot |x - x^*|^{6n+14}}{(6n+11)(6n+10)(6n+9) + 120} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(M+1)^{n+2} \cdot |x-x^*|^{6n+15}}{(6n+12)(6n+11)(6n+10)+120} + \frac{(M+1)^{n+2} \cdot |x-x^*|^{6n+16}}{(6n+13)(6n+12)(6n+11)+120} + \\
 & \quad + \frac{(M+1)^{n+2} \cdot |x-x^*|^{6n+17}}{(6n+14)(6n+13)(6n+12)+120} + \dots \leq \\
 & \leq \frac{1}{1-(M+1)|x-x^*|^6} \left(\frac{(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{6n}}{(6n-3)(6n-4)(6n-5)+120} + \right. \\
 & \quad \left. \frac{(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{6n+1}}{(6n-2)(6n-3)(6n-4)+120} + \right. \\
 & + \frac{(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{6n+2}}{(6n-1)(6n-2)(6n-3)+120} + \frac{(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{6n+3}}{6n(6n-1)(6n-2)+120} + \frac{(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{6n+4}}{6n(6n+1)(6n-1)+120} + \\
 & \quad \left. + \frac{(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{6n+5}}{6n(6n+2)(6n+1)+120} \right) = \\
 & = \frac{(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{6n}}{1-(M+1)|x-x^*|^6} \left(\frac{1}{(6n-3)(6n-4)(6n-5)+120} + \right. \\
 & \quad \left. \frac{|x-x^*|}{(6n-2)(6n-3)(6n-4)+120} + \right. \\
 & + \frac{|x-x^*|^2}{(6n-1)(6n-2)(6n-3)+120} + \frac{|x-x^*|^3}{6n(6n-1)(6n-2)+120} + \frac{|x-x^*|^4}{6n(6n+1)(6n-1)+120} + \\
 & \quad \left. + \frac{|x-x^*|^5}{6n(6n+2)(6n+1)+120} \right).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \Delta \leq & \frac{(M+1)^{\frac{N+1}{6}} \cdot |x-x^*|^{N=1}}{1-(M+1)|x-x^*|^6} \left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{|x-x^*|}{(N-1)(N-2)(N-3)+120} + \right. \\
 & + \frac{|x-x^*|^2}{N(N-1)(N-2)+120} + \frac{|x-x^*|^3}{(N+1)N(N-1)+120} + \frac{|x-x^*|^4}{(N+1)(N+2)N+120} + \\
 & \quad \left. + \frac{|x-x^*|^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120} \right).
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем выражения оценок для вариантов $N+1=6n+1$, $N+1=6n+2$, $N+1=6n+3$, $N+1=6n+4$, $N+1=6n+5$ соответственно, при этом $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[6]{(M+1)}} \right\}$, $M = \max \sup_n \left\{ \frac{|r^n(x^*)|}{n!} \right\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Вывод. В работе получено аналитическое приближенное решение рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения в окрестности точного значения

подвижной особой точки. Результаты работы позволяют в дальнейшем решить все задачи, возникающие в методе приближенного решения рассматриваемого уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Громак В. И. К теории уравнений Пенлеве // 6 конф. мат. Белорусси, 29 сентября — 2 октября 1992 г. : тез. докл. Ч. 3. Гродно, 1992. С. 25.
- [2] Еругин Н. П. К теории первого уравнения Пенлеве // Докл. АН БССР. 1958. Т. 2, № 1. С. 3–6.
- [3] Еругин Н. П. Теория подвижных особых точек уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 3. С. 387–416.
- [4] Еругин Н. П. О второй трансцендентной Пенлеве // Докл. АН БССР. 1958. Т. 2, № 4. С. 139–142.
- [5] Яблонский А. И. К вопросу о числе полюсов решения второго уравнения Пенлеве // Докл. АН БССР. 1959. Т. 3, № 6. С. 237–238.
- [6] Воробьев А. П. О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1.- С. 79–81.
- [7] Горбузов В. Н., Гнездовский Ю. Ю. Рост параметрических полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений не выше второго порядка и неприводимых уравнений Пенлеве // Дифференц. уравнения. Минск, 1988. 25 с. Деп. в ВИНТИ 19.12.1988, № 8847 - В88.
- [8] Лукашевич Н. А. Простейшие дифференциальные уравнения третьего порядка R-типа // Дифференц. уравнения. 1995. 31, № 6. С. 955–961.
- [9] Пугин В. В. К вопросу построения периодических решений матричного дифференциального уравнения Риккати // 3 Научные чтения по ОДУ, посвященные 80-летию Ю. С. Богданова : междунар. конф., Минск, 26 февр. — 1 марта, 2001 : тез. докл. Минск : Изд-во ИМ НАНБ, 2001. С. 59–60.
- [10] Лукашевич Н. А., Самодуров А. А. Интегрируемость уравнений Абеля общего вида через функции решения линейных уравнений // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 5. С. 859–863.
- [11] Самодуров А. А. О параметрическом представлении общего решения некоторых дифференциальных уравнений первого порядка // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28, № 1. С. 15–17.
- [12] Самодуров А. А. Об интегрируемости дифференциального уравнения Абеля в параметрическом виде // Вестник БГУ. Сер. 1. Физ. мат. и мех. 1983. № 2. С. 57–59.
- [13] Самодуров А.А. Интегрирующий множитель и проблема центра для уравнения Лъенара // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 5. С. 942–946.
- [14] Вересович П. П. О периодических решениях уравнения Абеля // 6 конф. мат. Белорусси, 29 сентября — 2 октября 1992 г. : тез. докл. Ч. 3. Гродно, 1992. С. 18.
- [15] Лукашевич Н. А., Чигурин А. В. Об уравнении Абеля с двумя известными решениями // Дифференціальні та інтегральні рівняння : тез. докл. Міжнар. конф., Одесса, 12–14 верес., 2000. Одесса, 2000. С. 175–176.
- [16] Орлов В. Н., Лукашевич Н. А. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве / Дифференц. уравнения. Т. 25, № 10. 1989. С. 1829–1832.
- [17] Орлов В. Н., Лукашевич Н. А., Самодуров А. А. Построение приближенного решения в окрестности подвижной особой точки для второго уравнения Пенлеве // Вестник БГУ. Сер. 1 Физика, математика, информатика. Минск, 2002. С. 79–85.

[18] Орлов В. Н. Критерии существования подвижных особых точек решений второго уравнения Пенлеве // Известия Тул. ГУ. Сер. Дифф. уравнения и прикладные задачи. Вып. 1. Тула: Изд-во Тул. ГУ, 2006. С. 26–29.

[19] Орлов В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2008. № 2. С. 42–46.

[20] Орлов В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 4 (35). С. 23–32.

[21] Редкозубов С. А., Орлов В. Н. Точные критерии существования подвижной особой точки дифференциального уравнения Абеля // Известия института инженерной физики. 2009. № 4 (14). С. 12–14.

[22] Орлов В. Н. Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 399–405.

[23] Орлов В. Н., Пчелова А. З. Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. 2012. № 4 (14). С. 113–122.

[24] Орлов В. Н., Редкозубов С. А., Пчелова А. З. Исследование приближенного решения задачи Коши одного нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки // Известия института инженерной физики. 2013. № 2 (28). С. 21–27.

[25] Орлов В. Н., Пчелова А. З. Влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в комплексной области // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 171–181.

[26] Пчелова А. З. Границы области применения приближенного решения в окрестности возмущенной подвижной особой точки одного дифференциального уравнения в комплексной области // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 4. С. 170–179.

[27] Орлов В. Н., Гузь М. П. Аналитическое приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в комплексной области // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 2 (12). С. 75–82.

[28] Орлов В. Н., Гузь М. П. Точные критерии существования подвижных особых точек решения одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2013. № 4 (80). Ч. 2, С. 156–161.

[29] Орлов В. Н., Гузь М. П. Исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение задачи Коши одного нелинейного дифференциального уравнения в комплексной области // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 3 (17). С. 119–131.

[30] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю., Гузь М. П., Иванов С. А. NDEL 1.4, 2.4, 2.5-AR // ФЦИС (Роспатент). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616174, 02.06.2015 г.

V. N. Orlov, K.V. Kolle

**ANALYTICAL APPROXIMATE SOLUTION OF ONE NONLINEAR
DIFFERENTIAL EQUATION OF THIRD ORDER WITH POLYNOMIAL
RIGHT-HAND SIDE OF THE SECOND DEGREE IN THE VICINITY OF THE
MOVABLE SINGULAR POINT**

Gumanitarno-pedagogical Academy (branch)" Vernadsky Crimean Federal center", Yalta, Russia

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Russia

Abstract. The theory of nonlinear differential equations associated with the name of the Italian mathematician Riccati and appeared in the early seventeenth century, continues to grow with new results to this day. A great contribution to the development of this theory has made mathematics of the Belarusian school, the results of research which are connected with the solvability of nonlinear differential equations in quadratures, but it can be done only in special cases [12]–[26]. The decision of some problems of mathematical theory of approximate analytical method of solving such equations are presented in [1]–[7]. The main cottage in the theory of differential equations is the existence theorem of solutions of differential equations. The peculiarity of nonlinear differential equations associated with moving singular points, which considerable reduces the significance of the classical theorems of existence. It should be noted that the classical existence theorem of the Cauchy theorem, theorem of Picard, not fully solve the problem for marked categories of differential equations. In this case, a variant of the method of majorants applied to the Cauchy theorem, limits the ability to use this theorem in the approximate method of solution. In this paper, given the existence proof of solutions of the nonlinear differential equation in a neighbourhood of a movable singular point in the new interpretation of the method of majorants. Built analytical approximate solution of the considered equation in a neighbourhood of a movable singular point in case the exact values of the latter.

Keywords: nonlinear differential equation, Cauchy problem, method of majorant, a neighbourhood of a movable singular point, the existence theorem, analytic approximate solution, error estimate.

REFERENCES

[1] Gromak V. I. on the theory of painlevé equations // 6 of the conference. Mat. Belorussia, 29 September — 2 October 1992 : abstracts. Dokl. Part 3; Grodno. state Univ. Grenoble, 1992. P. 25.

Orlov Victor Nikolayevich

e-mail: orlovvn@rambler.ru, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department "Mathematics, theory and methods of teaching mathematics", Gumanitarno-pedagogical Academy (branch)" Vernadsky Crimean Federal center", Yalta, Russia; Doctor of Physics and Mathematics, Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Kolle Kseniya Valentinovna

e-mail: ksenija-kolle2012@mail.ru, student of physics and mathematics, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

- [2] Erugin N. P. on the theory of the first painlevé equation // Dokl. Academy of Sciences of the BSSR. 1958. Vol. 2, № 1. P. 3–6.
- [3] Erugin N. P. Theory of moving singular points of second order equations // Differents. equation. 1976. Vol. 12, № 3. P. 387–416.
- [4] Erugin N. P. Of the second painlevé transcendent // Dokl. Academy of Sciences of the BSSR. 1958. Vol. 2, № 4. P. 139–142.
- [5] Yablonsky A. I. on the number of poles of solutions of the second painlevé equation // Dokl. Academy of Sciences of the BSSR. 1959. Vol. 3, No. 6. P. 237–238.
- [6] Vorob'ev A. P., On rational solutions of the second painlevé equation // Differents. equation. 1965. Vol. 1, No. 1. P. 79–81.
- [7] Gorbuzov V. N. The growth of parametric polynomial solutions grade algebra-racheskyy differential equations no higher than second order and irreducible of painlevé equations // Ed. well. Differents. equation. Minsk, 1988. 25 S. DEP. 19.12.1988 in VINITI, No. 8847 - coming along motorway B88.
- [8] Lukashevich N. A. Elementary differential equations third order P-type // Differents. equation. 1995. 31, № 6. P. 955–961.
- [9] Pugin, V. V., construction of periodic solutions of matrix Riccati equation // 3 Scientific reading-of the ODE, dedicated to 80-th anniversary of Yu. s. Bogdanov : Intern. Conf. Minsk, 26 Feb. — March 1, 2001 : abstracts. Dokl. Minsk : Publishing house of Belarus, 2001. P. 59–60.
- [10] Lukashevich N. A., Samodurov A. A. Integrability of Abel equations of the General form by solving linear equations // Differ. equation. 1977. Vol. 13, № 5. P. 859–863.
- [11] Samodurov A. A. On the parametric representation of the General solution of some differential equations of the first order // Dokl. Academy of Sciences of the BSSR. 1984. Vol. 28, № 1. P. 15–17.
- [12] Samodurov A. A. Mikhailov, On the integrability of the differential equation Abel in the parametric form // Vestnik BSU. Ser. 1. Phys. Mat. and fur. 1983. № 2. P. 57–59.
- [13] Samodurov A. A. the Integrating factor and the problem of the center for lenara equations // Differ. equation. 1981. Vol. 17, № 5. P. 942–946.
- [14] Weresonic P. P. On periodic solutions of Abel equations // 6 of the conference. Mat. Belorussia, 29 September — 2 October 1992 : abstracts. Dokl. Part 3; Grodno. state Univ Grenoble, 1992. P. 18.
- [15] Lukashevich N. A., Chigorin A. V. About the Abel equation with two known solutions // Differencethen integral runanga : proc. Dokl. Minor. Conf. Odessa, 12-14 Veres., 2000. Odessa, 2000. P. 175–176.
- [16] Orlov V. N., Lukashevich N. A. Studies of the approximate solution of the second Painlevé equation // Differential equation. 1989. Vol. 25, № 10. P. 1829–1832.
- [17] Orlov V. N., Lukashevich N. A., Samodurov A. A. The construction of the approximate solution in a neighbourhood of a movable singular point for the second painlevé equation // Vestnik of Belarusian state University. Ser. 1 Physics, mathematics, computer science. Minsk, 2002. P. 79-85.
- [18] Orlov V. N. Criteria for the existence of movable singular points of solutions of the second painlevé equation // Proceedings of the Tula State University. Ser. Diff. equations and applied problems. – Vol. 1. – Tula: Publishing house of the Tula State University, 2006. P. 26–29.
- [19] Orlov V. N. On an approximate solution of the first Painlevé equation // Vestnik of A. Tupolev Kazan State Technical University. 2008. № 2. P. 42–46.

[20] Orlov V. N. The study of the approximate solution of the differential equation Abel in a neighborhood of a movable singularity // Vestnik of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science. 2009. № 4 (35). P. 23–32.

[21] Redkozubov S. A., Orlov V. N. Precise criteria for the existence of the movable singular point of the differential equation Abel // Proceedings of the Institute of engineering physics. 2009. № 4 (14). P. 12–14.

[22] Orlov V. N. Exact bounds for the approximate solution of the differential equation Abel in a neighborhood of the approximate value of the movable singular point in the complex domain // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Mechanics of definable state. 2010. № 2 (8). P. 399–405.

[23] Orlov V. N., Pchelova A. Z. The construction of the approximate solution of nonlinear differential equations in the field of analyticity // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Line : Mechanics of definable state. 2012. № 4 (14). P. 113–122.

[24] Orlov, V. N., Redkozubov S. A., Pchelova A. Z. The study of the approximate solution of the Cauchy problem of a nonlinear differential equation in a neighborhood of a movable singularity // Proceedings of the Institute of engineering physics. 2013. № 2 (28). P. 21–27.

[25] Orlov V. N., Pchelova A. Z. The effect of this disturbance of the movable singular point on the approximate solution of one nonlinear differential equations in the complex domain // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Mechanics of definable state. 2013. № 1 (15). P. 171–181.

[26] Pchelova A. Z. Boundaries of the area of application of the approximate solution in a neighborhood of the perturbed movable singular point for a differential equation in a complex domain // Vestnik of Voronezh State University. : Series : Physics. Math. 2014. № 4. P. 170–179.

[27] Orlov V. N., Guz M. P. Analytical approximate solution of one nonlinear differential equations in the complex domain // Vestnik of Chelyabinsk state pedagogical University named. I. Y. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2012. № 2 (12). P. 75–82.

[28] Orlov V. N., Guz M. P. Precise criteria for the existence of movable singular points of solutions of one nonlinear ordinary differential equations // Bulletin of the Chelyabinsk state pedagogical University named. I. Y. Yakovlev. 2013. № 4 (80). Part 2, P. 156–161.

[29] Orlov V. N., Guz M. P. study of the effect of perturbations of the movable singular point on the approximate solution of the Cauchy problem of a nonlinear differential equations in the complex domain // Vestnik of Chelyabinsk state pedagogical University named. I. Y. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2013. № 3 (17). P. 119–131.

[30] Orlov V. N., Leontieva T. Yu., Guz M. P., Ivanov S. A. NDEL 1.4, 2.4, 2.5-AR // FSIS (Rospatent). The certificate of state registration of computer programs № 2015616174, 2015, 02.06.

Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович

ТРЕХМЕРНЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ КРОМОЧНЫЕ ВОЛНЫ В ТОНКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов

Аннотация. Исследуются низшие волны, распространяющиеся вдоль торца (кромки) полубесконечной круговой цилиндрической оболочки. Для описания колебаний оболочки используются трехмерные уравнения теории упругости в цилиндрических координатах. Решение трехмерной задачи ищется в виде разложения по неосесимметричным модам бесконечного полого цилиндра. В длинноволновом диапазоне результаты численного исследования подтверждают существование двух фундаментальных кромочных волн в оболочках, установленное ранее только на основе теории оболочек Кирхгофа–Лява: „антисимметричной“ волны, соответствующей изгибной кромочной волне по теории оболочек, и „симметричной“ волны, соответствующей тангенциальной волне. Предельными значениями скоростей обнаруженных волн при стремлении волнового числа к бесконечности являются скорости волн, локализованных около ребра четвертьпространства и распространяющихся по внешней и внутренней угловой окружности, соответственно. Представлены результаты исследования зависимости от волнового числа мнимой поправки к частоте, характеризующей демпфирование „симметричной“ волны распространяющейся модой.

Ключевые слова: поверхностные волны, краевые волны, волна Рэлея, упругий полый цилиндр, упругая оболочка, асимптотические методы.

УДК: 539.3+534.121.1

Введение. Локализованные волны, аналогичные поверхностной волне Рэлея [1], но распространяющиеся вдоль края (кромки) полубесконечной пластины или оболочки, исследовались до последнего времени только на основе различных прикладных

© Ардазишвили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю., 2015

Ардазишвили Роман Вячеславович

e-mail: ardazishvili.roman@yandex.ru, аспирант кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

Вильде Мария Владимировна

e-mail: mv_wilde@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

Коссович Леонид Юрьевич

e-mail: president@sgu.ru, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической теории упругости и биомеханики, президент Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

Поступила 20.09.2015

теорий. Изгибная волна, являющаяся аналогом волны Рэлея в теории изгиба пластин Кирхгофа, рассмотрена в работе [2]. В многочисленных работах, посвященных обобщению работы [2] на случай анизотропных пластин и на случай оболочки, также используются теории, основанные на гипотезах Кирхгофа, или другие приближенные теории. Исследование кромочных волн с точки зрения трехмерной теории упругости представляет значительные математические трудности, поскольку трехмерная задача не сводится к исследованию некоторого дисперсионного уравнения, записанного в замкнутой форме. Исключения составляют случаи, подобные рассмотренному в работе [3], когда на лицевых сторонах пластины ставятся смешанные граничные условия, допускающие разделение переменных. Работы, посвященные исследованию трехмерных краевых волн в пластинах со свободными лицевыми поверхностями, начали появляться совсем недавно (см. [4], [5], [6]). В работах [5], [7] показано, что кроме низших волн, описываемых теориями пластин, существует еще бесконечное счетное множество кромочных волн высшего порядка, которые могут быть описаны только трехмерной теорией упругости. В связи с этим низшие волны могут быть названы „фундаментальными“, по аналогии с терминами, принятыми для волн Лэмба в плоском слое. В отличие от теорий пластин трехмерная теория позволяет описать волны не только в случае свободной кромки, но и в случае смешанных граничных условий. Такие волны изучены в работах [8], [9]. Кромочные волны в оболочках с точки зрения трехмерной теории упругости, по-видимому, ранее не изучались. В рамках теории оболочек Кирхгофа–Лява в работе [10] показано, что в оболочке существует как волна, аналогичная изгибной волне „рэлеевского“ типа [2], так и волна, аналогичная планарной волне „рэлеевского“ типа, решение для которой строится так же, как в [1], но не в теории плоской деформации, а в теории обобщенного плоского напряженного состояния. На низких частотах изгибная волна переходит в волну третьего типа — сверхнизкочастотную, характерную только для оболочек. Таким образом, в любом случае можно говорить о том, что теория оболочек описывает две низшие, или фундаментальные, кромочные волны в тонкой оболочке.

Настоящая работа посвящена подтверждению существования кромочных волн в оболочках, исследованных в [10], с точки зрения трехмерной теории упругости и исследованию изменения их дисперсионных характеристик за пределами применимости теории Кирхгофа–Лява.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о стационарных колебаниях полубесконечного тонкостенного полого упругого цилиндра, используя трехмерные динамические уравнения теории упругости в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . Область, занятая цилиндром, определяется неравенствами $b \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z < \infty$. Перейдем для удобства к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} r = R\tilde{r}, z = R\tilde{z}, \{u_r, u_\theta, u_z\} = R\{\tilde{u}_r, \tilde{u}_\theta, \tilde{u}_z\}, \tilde{\omega} = R\omega c_2^{-1}, \\ \{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}\} = E[2(1+\nu)]^{-1}\{\tilde{\sigma}_r, \tilde{\sigma}_\theta, \tilde{\sigma}_z, \tilde{\sigma}_{r\theta}, \tilde{\sigma}_{rz}, \tilde{\sigma}_{\theta z}\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $R = (a+b)/2$ — радиус срединной поверхности, $u = \{u_r, u_\theta, u_z\}$ — вектор перемещений, $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}$ — компоненты тензора напряжений, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, c_2 — скорость поперечных волн, ρ — плотность, ω — круговая частота. Все численные результаты, приведенные в данной работе, получены при $\nu = 0.25$. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ и знак „ \sim “, обозначающий безразмерные переменные, далее опущены. Введем также полутолщину оболочки $h = (a-b)/2$

и параметр $\eta = h/R$. Тонкостенный цилиндр (тонкая оболочка) характеризуется соотношением $\eta \ll 1$.

Представления перемещений и напряжений через упругие потенциалы Ламе φ , ψ имеют вид

$$u = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\omega^2 \varphi + 2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r \partial z} \right), \\ \sigma_\theta &= -(1 - 2\kappa^2) \omega^2 \varphi + \\ &+ 2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z} \right), \\ \sigma_z &= -(1 - 2\kappa^2) \omega^2 \varphi + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \theta \partial z} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_z}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta \partial z}, \\ \sigma_{rz} &= 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r \partial \theta} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial \theta \partial z}, \\ \sigma_{\theta z} &= \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Представление (2) следует дополнить условием

$$\text{div } \psi = 0, \quad (4)$$

которое является достаточным для получения однозначного представления компонентов вектора перемещения в упругом теле в виде (2). Уравнения для потенциалов φ , ψ в случае гармонических колебаний принимают вид

$$\Delta \varphi + \kappa^2 \omega^2 \varphi = 0, \quad \Delta \psi + \omega^2 \psi = 0, \quad (5)$$

где $\kappa = \sqrt{(1 - 2\nu)(2(1 - \nu))^{-1}}$,

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad \Delta \psi = \text{grad}(\text{div } \psi) - \text{rot}(\text{rot } \psi). \quad (6)$$

На лицевых поверхностях оболочки $r = 1 \pm \eta$ следует удовлетворить граничным условиям свободной поверхности

$$\sigma_r = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0. \quad (7)$$

На торце оболочки $z = 0$ поставим условия свободного края

$$\sigma_z = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0. \quad (8)$$

Также в данной работе рассматриваются неоднородные граничные условия вида

$$\sigma_z = T_g(r) \cos p\theta, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0, \quad (9)$$

где $T_g(r)$ — заданная функция переменной r , $p = 1, 2, \dots$. Функцию $T_g(r)$ будем подбирать таким образом, чтобы резонанс интересующей нас волны возбуждался наиболее эффективно. При $z \rightarrow \infty$ ставится условие отсутствия источников энергии.

В соответствии с граничными условиями (9) будем искать функции φ , ψ в виде

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta, z) &= \varphi^0(r, z) \cos p\theta, & \psi_r(r, \theta, z) &= \psi_r^0(r, z) \sin p\theta, \\ \psi_\theta(r, \theta, z) &= \psi_\theta^0(r, z) \cos p\theta, & \psi_z(r, \theta, z) &= \psi_z^0(r, z) \sin p\theta.\end{aligned}\quad (10)$$

Решение вида (10) можно интерпретировать как стоячую волну, представляющую собой сумму двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях вдоль оси θ . Под скоростью таких волн будем понимать скорость распространения волны в направлении оси θ по срединной поверхности $r = 1$. Ее можно вычислить по формуле

$$c = \frac{\omega_0}{p}, \quad (11)$$

где ω_0 — собственная частота однородной задачи (5), (8) или резонансная частота неоднородной задачи (5), (9). Параметр p в данном случае играет роль волнового числа. Для изучения дисперсионных свойств исследуемых волн достаточно рассмотреть только целые значения p .

Метод численного решения. Для решения поставленной задачи будем использовать метод разложения по модам.

Построим нетривиальные решения уравнений (5), удовлетворяющие однородным граничным условиям (7) на лицевых поверхностях оболочки. Будем искать функции φ^0 , ψ^0 в виде

$$\begin{aligned}\varphi^0 &= \Phi(r) \exp(-sz), & \psi_r^0 &= \Psi_r(r) \exp(-sz), \\ \psi_\theta^0 &= \Psi_\theta(r) \exp(-sz), & \psi_z^0 &= \Psi_z(r) \exp(-sz).\end{aligned}\quad (12)$$

Введем функции

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} (\Psi_r + \Psi_\theta), \quad \Psi_2 = \frac{1}{2} (\Psi_r - \Psi_\theta). \quad (13)$$

Уравнения для функций Φ , Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_z сводятся к уравнениям Бесселя. Используя известные решения этих уравнений, запишем частное решение уравнений (5) в виде

$$\begin{aligned}\varphi &= C_1^0 Z_p(\alpha_1 r) \cos p\theta \exp(-sz), \\ \psi_r &= (C_2^0 Z_{p-1}(\alpha_2 r) + C_3^0 Z_{p+1}(\alpha_2 r)) \sin p\theta \exp(-sz), \\ \psi_\theta &= (C_2^0 Z_{p-1}(\alpha_2 r) - C_3^0 Z_{p+1}(\alpha_2 r)) \cos p\theta \exp(-sz), \\ \psi_z &= C_4^0 Z_p(\alpha_2 r) \sin p\theta \exp(-sz),\end{aligned}\quad (14)$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{s^2 + \kappa^2 \omega^2}, \quad \alpha_2 = \sqrt{s^2 + \omega^2}, \quad (15)$$

Z_m — цилиндрическая функция. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{p^2}{r^2} F + \alpha^2 F = 0, \quad (16)$$

сводящееся к уравнению Бесселя. Определим линейно независимые решения этого уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Cb}_p(1; \alpha) = 1, \quad \left. \frac{d\text{Cb}_p(r; \alpha)}{dr} \right|_{r=1} &= 0, \\ \text{Sb}_p(1; \alpha) = 0, \quad \left. \frac{d\text{Sb}_p(r; \alpha)}{dr} \right|_{r=1} &= \alpha. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя известные решения уравнения Бесселя [11], представим функции $\text{Cb}_p(r; \alpha)$ и $\text{Sb}_p(r; \alpha)$ в виде

$$\begin{aligned} \text{Cb}_p(r; \alpha) &= \frac{\pi\alpha}{2} [Y'_p(\alpha)J_p(\alpha r) - J'_p(\alpha)Y_p(\alpha r)], \\ \text{Sb}_p(r; \alpha) &= \frac{\pi\alpha}{2} [J_p(\alpha)Y_p(\alpha r) - Y_p(\alpha)J_p(\alpha r)], \end{aligned} \quad (18)$$

где $J_p(x)$ — функция Бесселя первого рода, $Y_p(x)$ — функция Неймана. С помощью рекуррентных соотношений для цилиндрических функций [11] нетрудно получить формулы дифференцирования (штрих обозначает дифференцирование по r):

$$\begin{aligned} \text{Sb}'_p(r; \alpha) &= \alpha\text{Cb}_{p-1}(r; \alpha) + (p-1)\text{Sb}_{p-1}(r; \alpha) - \frac{p}{r}\text{Sb}_p(r; \alpha), \\ \text{Sb}'_p(r; \alpha) &= \alpha\text{Cb}_{p+1}(r; \alpha) - (p+1)\text{Sb}_{p+1}(r; \alpha) + \frac{p}{r}\text{Sb}_p(r; \alpha), \\ \text{Cb}'_p(r; \alpha) &= -\alpha \left(1 - \frac{p(p-1)}{\alpha^2} \right) \text{Sb}_{p-1}(r; \alpha) + p\text{Cb}_{p-1}(r; \alpha) - \frac{p}{r}\text{Cb}_p(r; \alpha), \\ \text{Cb}'_p(r; \alpha) &= -\alpha \left(1 - \frac{p(p+1)}{\alpha^2} \right) \text{Sb}_{p+1}(r; \alpha) - p\text{Cb}_{p+1}(r; \alpha) + \frac{p}{r}\text{Cb}_p(r; \alpha). \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя в (18) представления функций Бесселя и Неймана в виде степенных рядов [11], получим асимптотики при малых α :

$$\begin{aligned} \text{Sb}_p(r; \alpha) &= \frac{\alpha}{2} \left[2(\alpha/2)^{2p} r^p S_p^{(1)}(\alpha) S_p^{(1)}(\alpha r) \ln r + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha/2)^{2p} r^p \left(S_p^{(1)}(\alpha r) S_p^{(2)}(\alpha) - S_p^{(1)}(\alpha) S_p^{(2)}(\alpha r) \right) + \right. \\ &\quad \left. + r^p S_p^{(1)}(\alpha r) S_p^{(3)}(\alpha) - r^{-p} S_p^{(1)}(\alpha r) S_p^{(3)}(\alpha) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{Cb}_p(r; \alpha) &= -2(\alpha/2)^{2p} r^p S_p^{(4)}(\alpha) S_p^{(1)}(\alpha r) \ln r + \\ &\quad + (\alpha/2)^{2p} r^p \left(S_p^{(1)}(\alpha r) S_p^{(1)}(\alpha) - S_p^{(1)}(\alpha r) S_p^{(5)}(\alpha) + S_p^{(4)}(\alpha) S_p^{(2)}(\alpha r) \right) + \\ &\quad - r^p S_p^{(1)}(\alpha r) S_p^{(6)}(\alpha) + r^{-p} S_p^{(3)}(\alpha r) S_p^{(4)}(\alpha), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}
S_p^{(1)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(p+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, & S_p^{(3)}(x) &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(p-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \\
S_p^{(2)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(p+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{p+k} \frac{1}{j} \right), \\
S_p^{(4)}(x) &= \frac{p}{2} S_p^{(1)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!(p+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \\
S_p^{(5)}(x) &= \frac{p}{2} S_p^{(2)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!(p+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{p+k} \frac{1}{j} \right), \\
S_p^{(6)}(x) &= -\frac{p}{2} S_p^{(3)}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-k-1)!}{(k-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Заметим, что в отличие от функции $Y_p(\alpha r)$ введенные нами функции $\text{Cb}_p(r; \alpha)$ и $\text{Sb}_p(r; \alpha)$ не имеют логарифмической особенности при $\alpha = 0$, более того, являются ограниченными в этой точке.

Представим функции φ , ψ , удовлетворяющие уравнениям (5), в виде

$$\begin{aligned}
\varphi &= [C_1 \text{Cb}_p(r; \alpha_1) + C_5 \text{Sb}_p(r; \alpha_1)] \cos p\theta \exp(-sz), \\
\psi_r &= [C_2 \text{Cb}_{p-1}(r; \alpha_2) + C_3 \text{Cb}_{p+1}(r; \alpha_2) + \\
&\quad + C_6 \text{Sb}_{p-1}(r; \alpha_2) + C_7 \text{Sb}_{p+1}(r; \alpha_2)] \sin p\theta \exp(-sz), \\
\psi_\theta &= [C_2 \text{Cb}_{p-1}(r; \alpha_2) - C_3 \text{Cb}_{p+1}(r; \alpha_2) + \\
&\quad + C_6 \text{Sb}_{p-1}(r; \alpha_2) - C_7 \text{Sb}_{p+1}(r; \alpha_2)] \cos p\theta \exp(-sz), \\
\psi_z &= [C_4 \text{Cb}_p(r; \alpha_2) + C_8 \text{Sb}_p(r; \alpha_2)] \sin p\theta \exp(-sz).
\end{aligned} \tag{23}$$

Удовлетворяя граничным условиям (7) и соотношению (4) (последнее должно выполняться при $r \in [1 - \eta, 1 + \eta]$), получим систему восьми однородных алгебраических уравнений относительно восьми неизвестных констант представления (23):

$$\sum_{j=1}^8 \beta_{ij} C_j = 0, \quad i = \overline{1, 8}. \tag{24}$$

В (24)

$$\begin{aligned}
\beta_{11} &= \left(\alpha_3^2 - \frac{p^2}{r_+^2}\right) c_{p,+}^{(1)} + \frac{d_{p,+}^{(1)}}{r_+}, & \beta_{21} &= \frac{p}{r_+} \left(d_{p,+}^{(1)} - \frac{c_{p,+}^{(1)}}{r_+}\right), & \beta_{31} &= s d_{p,+}^{(1)}, & \beta_{12} &= -s d_{p-1,+}^{(2)}, \\
\beta_{22} &= \frac{s}{2} \left(d_{p-1,+}^{(2)} + \frac{p-1}{r_+} c_{p-1,+}^{(2)}\right), & \beta_{32} &= \left(\alpha_3^2 - \frac{p(p-1)}{2r_+^2}\right) c_{p-1,+}^{(2)} + \frac{p}{2r_+} d_{p-1,+}^{(2)}, \\
\beta_{23} &= \frac{s}{2} \left(d_{p+1,+}^{(2)} - \frac{p+1}{r_+} c_{p+1,+}^{(2)}\right), & \beta_{33} &= -\left(\alpha_3^2 - \frac{p(p+1)}{2r_+^2}\right) c_{p+1,+}^{(2)} + \frac{p}{2r_+} d_{p+1,+}^{(2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{13} &= s d_{p+1,+}^{(2)}, & \beta_{14} &= -\frac{p}{r_+} \left(d_{p,+}^{(2)} - \frac{c_{p,+}^{(2)}}{r_+} \right), & \beta_{34} &= \frac{s}{2} \frac{p}{r_+} c_{p,+}^{(2)}, & \beta_{88} &= -s, & \beta_{48} &= 0, \\
\beta_{24} &= -\left(\alpha_3^2 - \frac{s^2}{2} - \frac{p^2}{r_+^2} \right) c_{p,+}^{(2)} - \frac{1}{r_+} d_{p,+}^{(2)}, & \beta_{41} &= 0, & \beta_{42} &= -(p-1), & \beta_{43} &= p+1, \\
\beta_{44} &= -s, & \beta_{45} &= 0, & \beta_{46} &= \alpha_2, & \beta_{47} &= \alpha_2, & \beta_{81} &= 0, & \beta_{82} &= -\alpha_2 \left(1 - \frac{p(p-1)}{\alpha_2^2} \right), \\
\beta_{83} &= -\alpha_2 \left(1 - \frac{p(p+1)}{\alpha_2^2} \right), & \beta_{84} &= 0, & \beta_{85} &= 0, & \beta_{86} &= -p, & \beta_{87} &= p,
\end{aligned}$$

где $r_{\pm} = 1 \pm \eta$, $A_{m,+}^{(k)} = \text{Cb}_m(r_+; \alpha_k)$, $d_{m,+}^{(k)} = \text{Cb}'_m(r_+; \alpha_k)$, $\alpha_3^2 = s^2 + \omega^2/2$, коэффициенты β_{ij} ($i = \overline{1, 3}, j = \overline{5, 8}$) получаются из коэффициентов $\beta_{i,j-4}$ заменой $\text{Cb} \rightarrow \text{Sb}$, коэффициенты β_{ij} ($i = \overline{5, 7}, j = \overline{1, 8}$) получаются из коэффициентов $\beta_{i-4,j}$ заменой $r_+ \rightarrow r_-$. Приравнявая определитель системы (24) нулю, получим дисперсионное уравнение

$$\det(\beta_{ij}) = 0. \quad (25)$$

Определитель в (25) сводится к определителю шестого порядка. На основании известных свойств корней дисперсионных уравнений для упругих волноводов (см. [12]) мы можем заключить, что уравнение (25) имеет счетное множество корней $s_n = s_n(\omega)$, определяющих моды кругового бесконечного полого цилиндра $\mathbf{f}^{(n)}$, где $\mathbf{f} = (\varphi, \psi_r, \psi_\theta, \psi_z)^T$. В [12] доказана теорема, из которой следует полнота системы функций, образованных функциями $\mathbf{f}^{(n)}$ в некотором поперечном сечении. Задача построения мод полого цилиндра не является новой (см., например, [13], [14]), однако в данном исследовании требуется построить неосесимметричные моды тонкостенного цилиндра при большом значении числа волн по окружной координате, что связано со значительными вычислительными трудностями. Для примера на рис. 1 представлены дисперсионные кривые при $\eta = 0.02$, $p = 550$. Заметим, что при $\omega \rightarrow 0$ значения s могут быть как действительными, так и комплексными, причем каждому комплексному корню соответствует комплексно сопряженный. Для высших мод характерно разделение на приближенно симметричные и приближенно антисимметричные, однако точное разделение симметричных и антисимметричных волновых движений в оболочке отсутствует. В областях сближения дисперсионных кривых приближенно симметричных и приближенно антисимметричных мод возникает явление отталкивания, или происходит преобразование двух действительных корней в пару комплексно сопряженных. При больших значениях p дисперсионные кривые низших номеров сгущаются (см. рис. 1).

Далее будем искать решение поставленной задачи в виде разложения по модам

$$\mathbf{f} = \sum_m C_m \mathbf{f}^{(m)}, \quad (26)$$

где C_m — неизвестные постоянные, которые определяются при удовлетворении граничным условиям (9). После определения постоянных C_m можно рассчитать любую характеристику НДС, используя соотношения (2) и (3). На основании энергетического принципа излучения (принципа Мандельштама) [12] в представление (26) следует включить моды, удовлетворяющие условию $\text{Re}s_n > 0$, или, если $\text{Re}s_n = 0$, условию

$d(\text{Im}s_n)/d\omega > 0$. Для удовлетворения граничным условиям применим метод коллокаций. Система для определения неизвестных постоянных C_m имеет вид

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{n_0} C_n T_n(y_m) &= T_g(y_m), & \sum_{n=0}^{n_0} C_n \int_1^{1+\eta} T_n(r) r dr &= \int_1^{1+\eta} T_g(r) r dr, \\
\sum_{n=0}^{n_0} C_n \int_1^{1-\eta} T_n(r) r dr &= \int_1^{1-\eta} T_g(r) r dr, & \sum_{n=0}^{n_0} C_n S_n(y_m) &= 0, \\
\sum_{n=0}^{n_0} C_n \int_1^{1-\eta} S_n(r) r dr &= 0, & \sum_{n=0}^{n_0} C_n \int_1^{1+\eta} S_n(r) r dr &= 0, \\
\sum_{n=0}^{n_0} C_n \int_1^{1+\eta} H_n(r) r dr &= 0, & \sum_{n=0}^{n_0} C_n H_n(y_m) &= 0, \\
\sum_{n=0}^{n_0} C_n \int_1^{1-\eta} H_n(r) r dr &= 0, & m &= \overline{0, n_1 - 1},
\end{aligned} \tag{27}$$

где $n_1 = n_0/3$, $y_m = 1 - \eta + 2\eta(m+1)/(n_1+1)$, n_0+1 — число мод в разложении (26), функции $T_n(r)$, $S_n(r)$, $H_n(r)$ определены формулами

$$\sigma_z^{(n)} = T_n(r) \exp(-s_n z), \quad \sigma_{rz}^{(n)} = S_n(r) \exp(-s_n z), \quad \sigma_{\theta z}^{(n)} = H_n(r) \exp(-s_n z) \tag{28}$$

и соотношениями (3). Интегральные условия, выражающие требование статической самоуравновешенности погрешностей, позволяют локализовать влияние невязок по принципу Сен-Венана. Точки коллокаций при этом располагаются вне некоторой малой окрестности крайних точек $r = 1 \pm \eta$, благодаря чему погрешности локализуются в окрестности угловых окружностей.

Пример анализа сходимости метода представлены в табл. 1, где

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}^{\max} &= \max_{|r-1| \leq \eta} \{|\sigma_{\theta}(r, 0, 0)|\}, & \varepsilon_1 &= \max_{|r-1| \leq \eta} \left\{ \frac{|\sigma_r(r, 0, 0)|}{\sigma_{\theta}^{\max}} \right\} \cdot 100, \\
\varepsilon_2 &= \max_{|r-1| \leq \eta} \left\{ \frac{|\sigma_{rz}(r, 0, 0)|}{\sigma_{\theta}^{\max}} \right\} \cdot 100, & \varepsilon_3 &= \max_{|r-1| \leq \eta} \left\{ \frac{|\sigma_{\theta z}(r, 0, 0)|}{\sigma_{\theta}^{\max}} \right\} \cdot 100.
\end{aligned} \tag{29}$$

Таблица 1. Сходимость численного метода

n_0	$ u_r(1, 0, 0) $	σ_{θ}^{\max}	$y_1^{(0.01)}$	$y_2^{(0.01)}$	$y_3^{(0.01)}$	$\varepsilon_1, \%$	$\varepsilon_2, \%$	$\varepsilon_3, \%$
24	3.821	14.729	0.009	0.02	0.0008	0.063	0.0085	0.97
48	3.861	14.882	0.019	0.02	0.014	0.037	0.0079	0.53
96	3.869	14.908	0.02	0.02	0.018	0.006	0.0007	0.28
192	3.870	14.912	0.02	0.02	0.019	0.005	0.0006	0.14

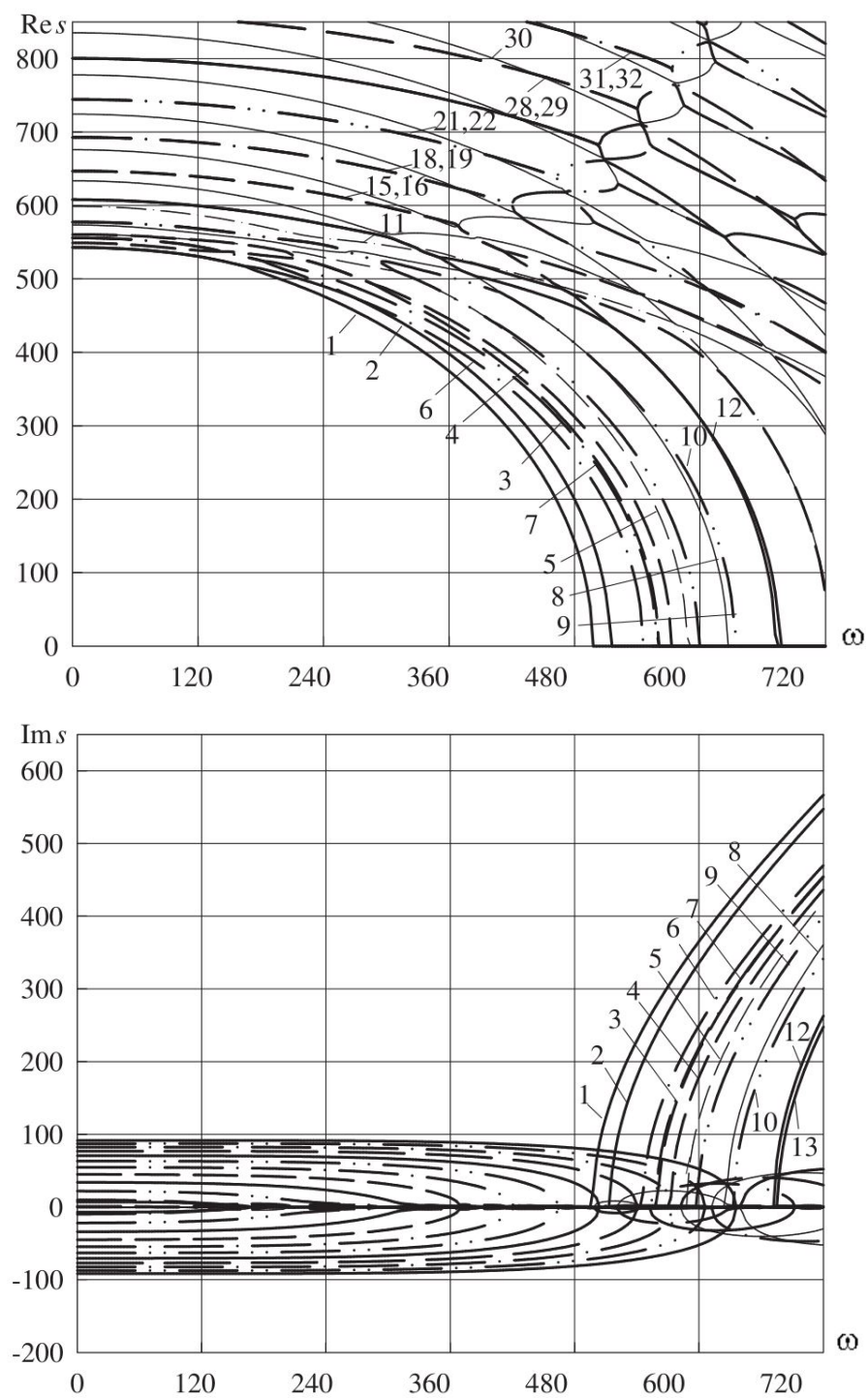


Рис. 1. Дисперсионные кривые мод бесконечного полого цилиндра при $p = 550$

Данные табл. 1 получены при $T_g(r) = (r - 1)/\eta$, $p = 9$, $\omega = 1.4674$. Также в табл. 1 представлены величины $y_i^{(0.01)}$ ($i = 1, 2, 3$), определенные следующим образом:

$$\begin{aligned} \max_{|r-1| \leq y_1^{(0.01)}} \left\{ \frac{|\sigma_r(r, 0, 0)|}{\sigma_\theta^{\max}} \right\} &< 0.0001, \\ \max_{|r-1| \leq y_2^{(0.01)}} \left\{ \frac{|\sigma_{rz}(r, 0, 0)|}{\sigma_\theta^{\max}} \right\} &< 0.0001, \\ \max_{|r-1| \leq y_3^{(0.01)}} \left\{ \frac{|\sigma_{\theta z}(r, 0, 0)|}{\sigma_\theta^{\max}} \right\} &< 0.0001. \end{aligned} \quad (30)$$

Табл. 1 и аналогичный анализ сходимости при других значениях параметров позволяют заключить, что предложенный метод сходится, при этом граничные условия, за исключением малых окрестностей угловых окружностей, удовлетворяются с погрешностью менее 1%. Результаты расчетов, приведенные далее, получены при $n_0 = 96$.

Фундаментальные кромочные волны. Будем изучать волны, описываемые в низкочастотном диапазоне теорией оболочек Кирхгофа–Лява. В оболочке, в отличие от пластины, разделение волновых движений на симметричные и антисимметричные относительно срединной поверхности отсутствует, однако в низкочастотной области может доминировать либо симметричная (тангенциальные волны), либо антисимметричная часть (изгибные волны). На основании этого волну, соответствующую тангенциальной кромочной волне в теории Кирхгофа–Лява, будем называть для краткости „симметричной“ и обозначать ES_0 . Волну, соответствующую изгибной кромочной волне, переходящей на низких частотах в сверхнизкочастотную, будем называть „антисимметричной“ и обозначать EA_0 .

Для исследования волны EA_0 приложим нагрузку $T_g(r) = (r - 1)/\eta$ на низких частотах и $T_g(r) = 1$ на высоких частотах. Численные расчеты показали, что волна EA_0 , исследованная ранее только в рамках теории Кирхгофа–Лява, существует также с точки зрения трехмерной теории упругости. При выходе за пределы применимости теории Кирхгофа–Лява (то есть при $p \rightarrow \infty$) волна продолжает существовать, сохраняя при этом свойство отсутствия демпфирования распространяющимися модами. На рис. 2 приведены результаты, полученные по трехмерной теории и по теории Кирхгофа–Лява для $\eta = 0.02$ и $\eta = 0.1$. Поведение скорости волны EA_0 , представленное на этих графиках, аналогично поведению скоростей других изгибных волн в пластинах и оболочках. Приблизительно линейный рост скорости имеет место только при небольших значениях p (длинные волны), далее кривая скорости поворачивает и выходит на некоторую константу. Анализ формы колебаний при больших p показал, что с уменьшением длины волны колебания все сильнее локализуются у внешней угловой окружности. Следовательно, предельной скоростью волны EA_0 должна быть скорость угловой волны, распространяющейся вдоль ребра четвертьпространства. Для такой волны в работе [15] было найдено значение скорости $c^E = 0.9014$ (при $\nu = 0.25$). Поскольку в нашем случае волна распространяется вдоль наружной угловой окружности, значение предельной скорости будет ниже. Например, для $\eta = 0.02$ имеем

$$c_+^E = \frac{c^E}{1 + \eta} = 0.8837. \quad (31)$$

При исследовании волны ES_0 всегда прикладывалась нагрузка $T_g(r) = 1$. На рис. 3 показаны значения скорости волны ES_0 , вычисленные по трехмерной теории и по

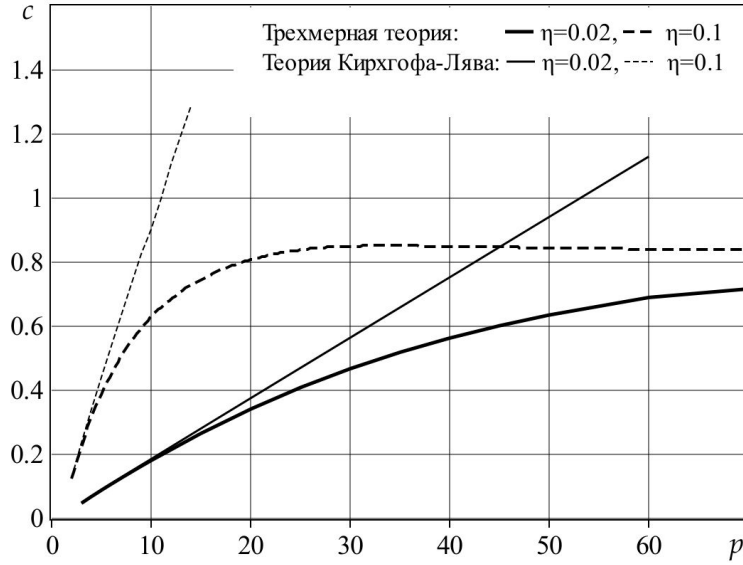


Рис. 2. Сравнение трехмерной теории и теории оболочек Кирхгофа–Лява для волны EA_0

теории Кирхгофа–Лява. В [10] получена асимптотическая оценка, согласно которой скорость тангенциальной волны должна стремиться к скорости c_{pl} планарной волны „рэлеевского“ типа. Скорость c_{pl} (отнесенная к скорости волны сдвига c_2) является корнем уравнения

$$(2 - c_{pl}^2)^2 - 4\sqrt{1 - \kappa_1^2 c_{pl}^2} \sqrt{1 - c_{pl}^2} = 0, \quad (32)$$

где $\kappa_1 = \sqrt{0.5(1 - \nu)}$. Расчеты по трехмерной теории показали, что для волны ES_0 эта скорость не является предельной, с ростом p значение скорости начинает снижаться. Дальнейшее поведение скорости волны ES_0 при $\eta = 0.02$ показано на рис. 4, где приведен также график скорости для волны EA_0 . Временно снизившись, скорость волны ES_0 снова возрастает и стремится к скорости угловой волны, распространяющейся вдоль внутренней угловой окружности. Для $\eta = 0.02$ получаем

$$c_-^E = \frac{c^E}{1 - \eta} = 0.9198. \quad (33)$$

Анализ формы колебаний при больших p подтверждает вывод о том, что предельной скоростью волны ES_0 в тонкой оболочке является скорость (33).

Для оболочки с $\eta = 0.1$ было обнаружено, что при определенном значении p волна ES_0 исчезает. Это можно объяснить следующим образом: при большом значении относительной полутолщины скорость c_-^E становится настолько большой, что волна ES_0 начинает взаимодействовать с кромочными волнами высшего порядка. Чтобы изучить этот процесс подробнее, нужно исследовать кромочные волны высшего порядка в толстостенном полом цилиндра, что выходит за рамки данной работы.

В работе [10] (см. также [5]) было показано, что тангенциальная кромочная волна демпфируется изгибной распространяющейся модой. Это явление характеризуется малой мнимой частью собственной частоты, если рассматривается задача о собственных колебаниях, либо шириной резонансного пика, если рассматривается задача о

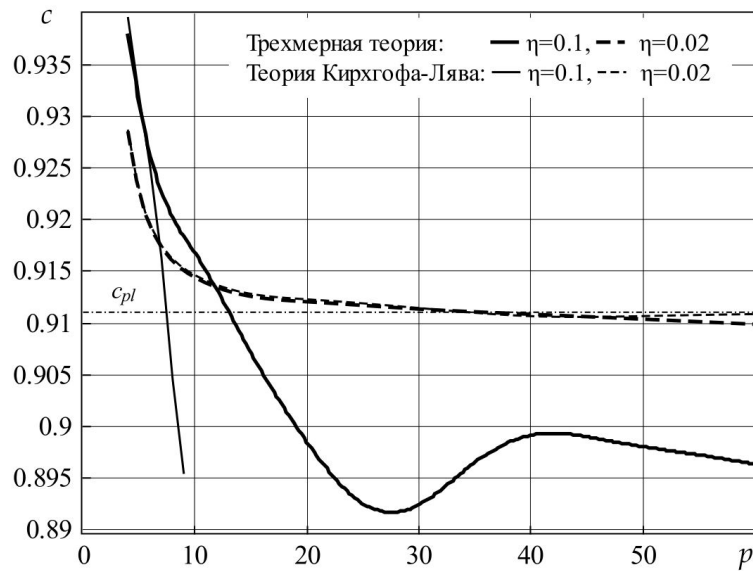


Рис. 3. Сравнение трехмерной теории и теории оболочек Кирхгофа–Лява для волны ES_0

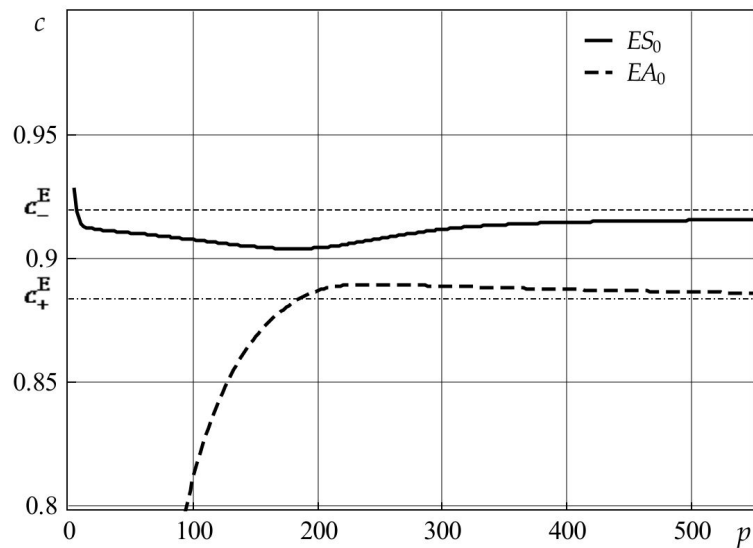
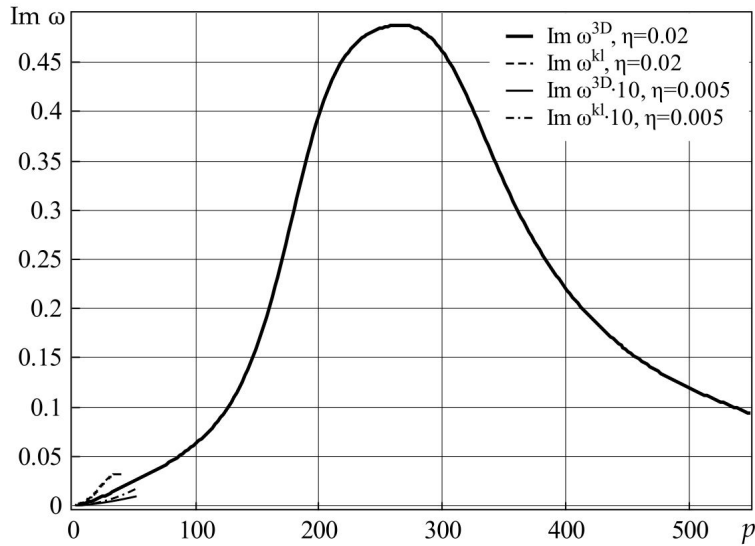


Рис. 4. Дисперсионные кривые волн ES_0 и EA_0

вынужденных колебаниях. С точностью до малых высшего порядка оба эти способа эквиваленты. На рис. 5 представлено поведение мнимой части частоты для волны ES_0 при $\eta = 0.02$. Также на рис. 5 приведено сравнение мнимой поправки, вычисленной по теории Кирхгофа–Лява и по трехмерной теории упругости для двух значений относительной полутолщины: $\eta = 0.02$ и $\eta = 0.005$. Как видно из рисунка, теория Кирхгофа–Лява дает количественно близкие значения поправки только для очень

Рис. 5. Демпфирование волны ES_0

тонких оболочек. При $\eta \sim 0.01$ и выше можно говорить только об описании с точностью до порядка.

Заключение. Основные результаты и выводы из исследования, проведенного в данной работе, заключаются в следующем:

- Показано, что две фундаментальные кромочные волны в тонкой оболочке, исследованные ранее только в рамках теории Кирхгофа–Лява, существуют также с точки зрения трехмерной теории упругости.
- Первая (низшая) из двух волн при малых значениях волнового числа приблизительно антисимметрична относительно срединной поверхности, а при больших значениях волнового числа вырождается в волну, локализованную у наружной угловой окружности.
- Вторая волна при малых значениях волнового числа является приблизительно симметричной, а при больших значениях волнового числа вырождается в волну, локализованную у внутренней угловой окружности.
- В отличие от первой волны, вторая волна демпфируется распространяющейся модой; мнимая поправка к частоте, характеризующая степень демпфирования, возрастает при малых значениях волнового числа и убывает при $p \rightarrow \infty$.

Методика исследования трехмерных кромочных волн в полубесконечном полом цилиндра, развитая в данной работе, может быть применена также к случаю, когда на торце оболочки ставятся смешанные граничные условия. Результаты расчетов для этого случая опубликованы в работе [16].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Rayleigh J. On waves propagated along the surface of an elastic solid // Proc. Lond. Math. Soc. 1885. Vol. 17, № 253. P. 4–11.
- [2] Коненков Ю. К. Об изгибной волне „рэлеевского“ типа // Акуст. журн. 1960. Т. 6, вып. 1. С. 124–126.
- [3] Зильберглейт А. С. О поверхностных упругих волнах в толстой плите // Акуст. журн. 1980. Т. 26, вып. 3. С. 416–421.
- [4] Zernov V., Kaplunov J. Three-dimensional edge waves in plates // Proc. R. Soc. Lond. A. 2008. Vol. 464. P. 301–318.
- [5] Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М: Физматлит, 2010. 280 с.
- [6] Krushynska A. A. Flexural edge waves in semi-infinite elastic plates // J. of Sound and Vibration. 2011. Vol. 330, № 9. P. 1964–1976.
- [7] Ардазишвили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю. Антисимметричные кромочные волны высшего порядка в пластинах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 50–56.
- [8] Ардазишвили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю. Трехмерная поверхностная волна в полупространстве и кромочные волны в пластинах в случае смешанных граничных условий на поверхности распространения // Вестн. Сам. гос. техн. Ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. Т. 37, № 4. С. 53–64.
- [9] Ардазишвили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю. Кромочные волны в пластинах с жёстко закреплёнными лицевыми поверхностями при различных способах закрепления на торце // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 187–193.
- [10] Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wilde M. V. Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell // J. Acoust. Soc. Am. 2000. Vol. 107, № 3. P. 1383–1393.
- [11] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовица и И. М. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [12] Гетман И. П., Устинов Ю. А. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов-на-Дону: изд-во Рост. ун-та, 1993. 144 с.
- [13] Gazis D. C. Three-dimension investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. I. Analytical foundation // J. Acoust. Soc. Am. 1959. Vol. 31, № 5. P. 568–572.
- [14] Gazis D. C. Three-dimension investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. II. Numerical results // J. Acoust. Soc. Am. 1959. Vol. 31, № 5. P. 573–578.
- [15] Головчан В. Т., Кубенко В. Д., Шульга Н. А., Гузь А. Н., Гринченко В. Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т. 5. Динамика упругих тел. Киев: Наук. Думка, 1986. 288 с.
- [16] Ардазишвили Р. В., Вильде М. В. Кромочные волны в цилиндрической оболочке со смешанными граничными условиями на торце: теория оболочек и трехмерная теория упругости // Материалы Всероссийской научной школы-конференции „Механика предельного состояния и смежные вопросы“, посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева (Чебоксары, 15–18 сентября 2015 г.): в 2 ч. Ч. 1. / под ред. Н. Ф. Морозова, Б. Г. Миронова, А. В. Манжирова, Ю. Н. Радаева. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2015. С. 82–86.

R. V. Ardazishvili, M. V. Wilde, L. Yu. Kossovich

THREE-DIMENSIONAL FUNDAMENTAL EDGE WAVES IN THIN SHELL

Saratov State University, Saratov

Abstract. Lower order waves propagating along the edge of a semi-infinite circular cylindrical shell are studied. The 3D equations of elasticity in cylindrical coordinates are used for describing of vibrations of the shell. The solution of 3D problem is presented as modal expansion with non-axisymmetric modes of a hollow cylinder. In the long-wave domain, the results of numerical investigation confirm the existence of two fundamental edge waves established before only in the framework of Kirchhoff–Love theory of shells. They are the „antisymmetric“ wave corresponding to flexural edge wave in the theory of shells and the „symmetric“ wave corresponding to tangential edge wave. The short-wave limits of the velocities of these wave are the velocities of the waves localized near the ridge of a quarter-space and propagating on the outer and the inner circumference of the front edge, respectively. The graph for the imaginary part of the frequency which characterizes the damping of the „symmetric“ wave caused by the propagating modes is presented.

Keywords: surface waves, edge waves, Rayleigh wave, elastic hollow cylinder, elastic shell, asymptotic methods.

REFERENCES

- [1] Rayleigh J. On waves propagated along the surface of an elastic solid // Proc. Lond. Math. Soc. 1885. Vol. 17, № 253. P. 4–11.
- [2] Kononkov Yu. K. On the Rayleigh-type flexural wave // Akust. zhurn. 1960. Vol. 6, iss. 1. P. 122–123. (in Russian).
- [3] Zil'bergleit A. S. On surface elastic waves in thick plate // Akust. zhurn. 1980. Vol. 26, iss 3. P. 416–421. (in Russian).
- [4] Zernov V., Kaplunov J. Three-dimensional edge waves in plates // Proc. R. Soc. Lond. A. 2008. Vol. 464. P. 301–318.
- [5] Wilde M.V., Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu. Edge and interfacial resonance phenomena in elastic bodies. M. : FIZMATLIT, 2010. 280 p. (in Russian).
- [6] Krushynska A. A. Flexural edge waves in semi-infinite elastic plates // J. of Sound and Vibration. 2011. Vol. 330, № 9. P. 1964–1976.
- [7] Ardazishvili R. V., Wilde M. V., Kossovich L. Yu. Antisymmetric higher order edge waves in plates. // Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2013. Vol. 13, iss. 1, part 1. C. 50–56. (in Russian).

Ardazishvili Roman Vyacheslavovich

e-mail: ardazishvili.roman@yandex.ru, Postgraduate student, Department of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics, Saratov State University, Saratov.

Wilde Maria Vladimirovna

e-mail: mv_wilde@mail.ru, Doctor of Science, Professor of Department of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics, Saratov State University, Saratov.

Kossovich Leonid Yurjevich

e-mail: president@sgu.ru, Doctor of Science, Head of Department of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics, President of Saratov State University, Saratov State University, Saratov.

- [8] Ardazishvili R. V., Wilde M. V., Kossovich L. Yu. Three-dimensional surface wave in half-space and edge waves in plates with mixed boundary conditions on the front edge // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014. Vol. 37, № 4. P. 53–64. (in Russian).
- [9] Ardazishvili R. V., Wilde M. V., Kossovich L. Yu. Edge waves in plates with fixed faces and various boundary conditions on the front edge // Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2015. Vol. 15, iss. 2. P. 187–193. (in Russian).
- [10] Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wilde M. V. Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell // J. Acoust. Soc. Am. 2000. Vol. 107, № 3. P. 1383–1393.
- [11] Handbook of special functions with formulae, graphs and mathematical tables. / ed. M. Abramowitz and I.A. Stegun. M.: Nauka, 1979. 832 p. (in Russian).
- [12] Getman I. P., Ustinov Yu. A. Mathematical theory of non-regular solid waveguides. Rostov-on-Don: Rostov State University, 1993. 144 p. (in Russian).
- [13] Gazis D. C. Three-dimension investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. I. Analytical foundation // J. Acoust. Soc. Am. 1959. Vol. 31, № 5. P. 568–572.
- [14] Gazis D. C. Three-dimension investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. II. Numerical results // J. Acoust. Soc. Am. 1959. Vol. 31, № 5. P. 573–578.
- [15] Golovchan V. T., Kubenko V. D., Shul'ga N. A., Guz' A. N., Grinchenko V. T. Three-dimensional problems of the theory of elasticity and plasticity. Dinamika uprugikh tel [Dynamics of elastic bodies]. Vol. 5. Kiev, Nauk. dumka, 1986, 288 pp. (in Russian).
- [16] Ardazishvili R. V., Wilde M. V. Edge waves in a cylindrical shell with the mixed boundary conditions on the edge: shells theory and three-dimensional theory of elasticity // Proc. of All-Russian scientific school-conference „Mechanics of limit state and relevant questions“, dedicated to professor D. D. Ivlev's 85th anniversary (Cheboksary, 15–18 September 2015). Part 1. / ed. N. F. Morozov, B. G. Mironov, A. V. Manzhirov, Yu. N. Radayev. Cheboksary: Chuvash. State Ped. Univ, 2015. P. 82–86. (in Russian).

М. Ф. Аноп¹, Е. В. Мурашкин^{2,3,4}, А. В. Балашникова⁵

О МЕТОДАХ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНЫХ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ДЕФЕКТА СПЛОШНОСТИ В МОДЕЛИ БОЛЬШИХ УПРУГОПОЛЗУЧИХ ДЕФОРМАЦИЙ

¹Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

³Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва, Россия

⁴Московский государственный университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия

⁵Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе предлагается метод поиска оптимального процесса формирования поля остаточных напряжений в окрестности микродефекта сплошности по предписанному полю перемещений. Для моделирования поведения материала в окрестности микропоры используется модель больших упругоползучих деформаций. Как следствие законов сохранения получена разрешающая система интегро-дифференциальных уравнений. Предложены алгоритмы поиска оптимального решения поставленной краевой задачи. Вычислены и проанализированы параметры напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: ползучесть, упругость, остаточное напряжение, метод роя пчел, метод нулевой оптимизации.

УДК: 539.374

© Аноп М. Ф., Мурашкин Е. В., Балашникова А. В., 2015

Аноп Максим Федорович

e-mail: maop@iasp.dvo.ru, аспирант, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия.

Балашникова Анжелика Вениаминовна

e-mail: info3006@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия; Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва, Россия; Московский государственный университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 15-31-21111).

Поступила 28.09.2015

Воспользуемся моделью больших упругопластических деформаций [1], [2], основные кинематические соотношения которой в прямоугольной декартовой системе пространственных (эйлеровых) координат могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} \left((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj}) \right), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_m u_{i,m}, \\ r_{ij} &= w_{ij} + z_{ij}(e_{ij}, \varepsilon_{ij}), \quad w_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}), \\ d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}. \end{aligned} \quad (1)$$

В соотношениях (1) u_i, v_i — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды; e_{ij} и p_{ij} — обратимая и необратимая составляющие тензора полных деформаций Альманси d_{ij} ; $\frac{D}{Dt}$ — объективная производная тензоров по времени; источник ε_{ij}^p в уравнении изменения тензора p_{ij} — тензор скоростей необратимых деформаций; $z_{ij} = -z_{ji}$ — нелинейная часть тензора вращений, определяющая его отличие от тензора жесткого вращения w_{ij} .

Следуя формализму неравновесной термодинамики, напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями, и для рассматриваемого случая несжимаемой среды данные зависимости записываются в виде

$$\sigma_{ij} = -p_1 \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}). \quad (2)$$

В соотношениях (2) p_1 — добавочное гидростатическое давление, W — упругий потенциал, который для изотропной среды принимается в форме

$$\begin{aligned} W &= (a - \mu)J_1 + aJ_2 + bJ_1^2 - kJ_1J_2 - \zeta J_1^2, \\ J_1 &= e_{jj} - \frac{1}{2}e_{ij}e_{ji}, \quad J_2 = e_{ij}e_{ji} - e_{ij}e_{jk}e_{ki} + \frac{1}{4}e_{ij}e_{jk}e_{ks}e_{si}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\lambda, \mu, a, b, \theta$ — упругие модули среды.

Принимаем, что компоненты тензора скоростей необратимых деформаций связаны с компонентами напряжений законом ползучести Нортон:

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{dV(\Sigma)}{d\sigma_{ij}}, \quad V(\Sigma) = B\Sigma(\sigma_{ij})^n, \quad (4)$$

$$\Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}} \left((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

Здесь B и n — заданные постоянные, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений.

Постановка задачи. Разрешающаяся система уравнений. В рамках описанной выше модели больших деформаций были решены задачи о поведении границы сферического микродефекта (микропоры) в условиях эксплуатационных нагрузок.

Рассмотрим шар начального радиуса R_0 с одиночным сферическим дефектом сплошности (микropора) начального радиуса r_0 в центре шара. Процесс деформирования задается краевыми условиями

$$\sigma_{rr}|_{r=R(t)} = -P(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=s(t)} = 0, \quad (5)$$

в которых σ_{rr} — радиальная компонента тензора напряжений в сферической системе координат r, φ, θ , $R(t) \gg r_0$ — радиус сферической поверхности, на которой задается внешнее давление, $s(t)$ — текущий радиус границы микropоры.

Кинематика среды согласно принятому условию несжимаемости определяется с точностью до неизвестной функции $\varphi(t)$:

$$u_r = r - (r^3 + \varphi(t))^{\frac{1}{3}}, \quad \varphi(t) = s_0^3 - s^3(t) = R_0^3 - R^3(t), \quad (6)$$

где $u = u_r$ — единственная не равная нулю компонента вектора перемещений.

Согласно формулам (2) и (3) компоненты напряжений вычисляются с точностью до неизвестной функции добавочного гидростатического давления.

Компоненты полных деформаций по известному полю перемещений (6) находятся соотношениями

$$d_{rr} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 + \frac{\varphi(t)}{r^3} \right)^{-4/3} \right), \quad d_{\theta\theta} = d_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 + \frac{\varphi(t)}{r^3} \right)^{2/3} \right), \quad (7)$$

$$d_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 2d_{rr}}} \right).$$

Согласно кинематическим зависимостям (1) имеем:

$$\varepsilon_{rr}^p = \frac{dp_{rr}}{dt} (1 - 2p_{rr})^{-1}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{dp_{\theta\theta}}{dt} (1 - 2p_{\theta\theta})^{-1}, \quad (8)$$

$$e_{rr} = 1 - \left(\frac{1 - 2p_{rr}}{1 - 2d_{rr}} \right)^{-2}, \quad e_{\theta\theta} = 1 - \left(\frac{1 - 2p_{rr}}{1 - 2d_{rr}} \right).$$

Подстановка (7) и (8) в определяющие соотношения (4) приводит к уравнению

$$\frac{dp_{rr}}{dt} (1 - 2p_{rr})^{-1} = Bn |\Sigma|^{n-2} \Sigma, \quad (9)$$

$$\Sigma = N(p_{rr}, \varphi(t), r) = \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta},$$

где $N(p_{rr}, \varphi(t), r)$ определяется подстановкой (7), (8) в (3).

Уравнение (9) в каждой точке среды $s(t) \leq r \leq R(t)$ является обыкновенным дифференциальным уравнением относительно компоненты необратимых деформаций p_{rr} (или $p_{\theta\theta}$). С другой стороны, компоненты напряжений находятся интегрированием уравнения движения

$$\sigma_{rr,r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\rho_0 \left(\frac{\ddot{\varphi}(t)}{3r^2} + \frac{2\dot{\varphi}^2(t)}{9r^5} \right), \quad (10)$$

используя второе граничное условие (5). Вычислив напряжения на внешней границе согласно первому граничному условию (5), получаем интегро-дифференциальную

связь между нагружающим давлением $P(t)$ и функцией $\varphi(t)$:

$$P(t) = 2 \int_{s(t)}^{R(t)} \frac{N(p_{rr}, \varphi(t), r)}{r} dr - \rho_0 \left(\frac{\ddot{\varphi}(t)}{3} \left(\frac{1}{R(t)} - \frac{1}{s(t)} \right) + \frac{\dot{\varphi}^2(t)}{18} \left(\frac{1}{R(t)^4} - \frac{1}{s(t)^4} \right) \right). \quad (11)$$

Решение системы уравнений. Система (9), (11) может быть решена численно в двух постановках — при задании нагружающего давления $P(t)$ и в случае, когда задается перемещение точек среды посредством упомянутой выше функции $\varphi(t)$.

В последнем случае уравнение (9) может быть решено как обыкновенное дифференциальное уравнение на каждом из m - радиусов, после чего полученное решение может быть подставлено в интеграл (11), и численным интегрированием найдено $P(t)$, вызывающее заданный процесс.

Решение задачи в случае, когда задается нагружающее усилие, является намного более нетривиальным, так как (9), (11) в совокупности представляют из себя систему интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. Для нахождения решения предлагается представить интеграл в (11) как сумму по m - радиусам формулой трапеций, а производные от $\varphi(t)$ и p_{rr} по t в виде конечных разностей, которые бы зависели от значений функции в текущий момент времени и в некоторые прошедшие моменты. Таким образом, получим итеративную схему, на каждом шаге по времени которой должен быть найден корень системы $m + 1$ нелинейных алгебраических уравнений относительно m - переменных p_{rr} и неизвестной функции $\varphi(t)$.

Постановка оптимальной полуобратной задачи. Задачу оптимального управления для рассматриваемой краевой задачи формально можно описать следующим образом: найти минимальные внешние нагрузки p , которые нужно симметрично прикладывать к поверхности тела так, чтобы в конечный момент времени размер микрорпоры в центре имел заданное значение. Математически это можно записать так. Рассмотрим функционал

$$J(f(\cdot)) = \max P(f(\cdot)) = \int_{s(t)}^{R(t)} \frac{\Sigma(e_{rr}, e_{\theta\theta})}{r} dr$$

и сформулируем следующую оптимизационную задачу. $J(f(\cdot)) \rightarrow \inf$ при условии, что функция, определяющая параметры процесса деформирования материала

$$f(\tau) = 269 \cdot 10^{-7} \left(1 - \exp \left(\int \left(\sum_{i=1}^5 \alpha_i \tau^i \right)^2 d\tau \right) \right),$$

определяется полиномом пятой степени с неизвестными коэффициентами, принадлежащими интервалу $\alpha_i \in [-2; 2]$. То есть, по сути, требуется найти набор коэффициентов α_i , доставляющих минимум заданному функционалу.

Для решения поставленной задачи было принято решение использовать не классические вариационные методы решения, а попытаться найти нужный набор параметров (коэффициентов), используя алгоритмы прямого случайного поиска. Данный выбор обусловлен следующим:

- вычисление целевой функции осуществляется численно, что довольно сильно ограничивает класс оптимизационных методов, которые можно применить для решения поставленной задачи;
- данные методы просты в реализации;
- у методов данного класса очень хороший потенциал параллелизма по данным, что может оказаться довольно существенным для дальнейших исследований.

Метод простого слепого поиска является простейшим в реализации. Он никак не адаптируется по ходу решения задачи и никак не учитывает в процессе решения полученную информацию об уже проверенных значениях. Тем не менее его простота довольно привлекательна как в теретическом, так и в практическом смысле [4]. Вычислительный процесс строится довольно просто. Алгоритм состоит из двух этапов:

- *Шаг 0.* Генерация набора коэффициентов полинома как равномерно распределенных на отрезке $[-2; 2]$ случайных величин.
- *Шаг 1.* Вычисление значения целевой функции и осуществление проверки на минимальность.

Эти шаги повторяются заданное число раз. Критерием остановки в данном случае является ограничение на количество итераций.

С помощью данного метода были получены результаты, представленные на рисунках 1-2.

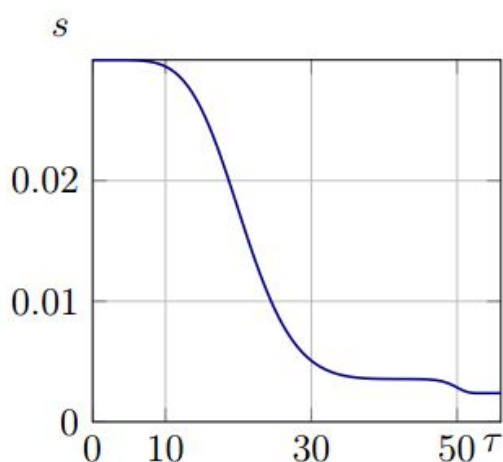


Рис. 1. Оптимальный радиус

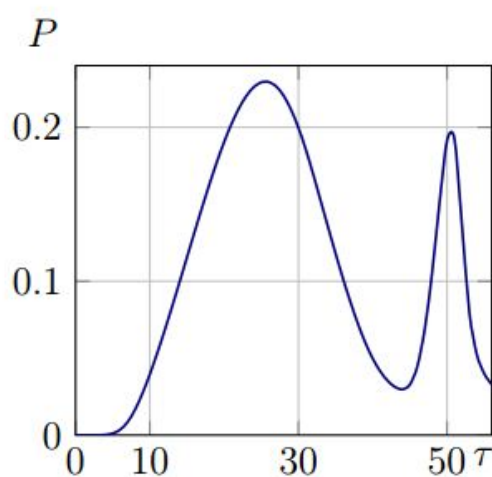


Рис. 2. Оптимальное давление

Метод ненаправленного случайного поиска (слепого поиска) является уникальным среди всех алгоритмов стохастической оптимизации. Его уникальность в том, что в методе не используется ни одного настроечного параметра. Однако эта уникальность и простота одновременно является и слабостью метода [5]. Ряд независимых запусков алгоритма показал, что он имеет не слишком высокую эффективность в работе и крайне невысокую надежность. Под надежностью здесь понимается среднеквадратическое отклонение от среднего значения всех найденных оптимумов.

Для устранения указанных недостатков был разработан довольно простой в реализации оптимизационный алгоритм, учитывающий особенности рассматриваемой

задачи. В основе алгоритма лежит принцип, заложенный в довольно распространенный метод роя пчел [3]. В отличие от классической версии алгоритма используются всего три (вместо восьми) настроечных параметра: количество пчел-разведчиков s_j , количество пчел-рабочих w_k и размер окрестности (участка) $range$, в котором будет осуществляться уточняющий локальный поиск. Все параметры фиксированы и не изменяются в процессе вычислений. Таким образом, рой представляет собой множество $SW = \{s_j \cup w_k, j = \overline{1, S}, k = \overline{1, W}\}$. Пчелы-разведчики занимаются исследованием всей области поиска. Рабочие отвечают за уточняющий вид поиска в окрестности найденных «лучших» участков.

Основной особенностью метода является то, что в нем активно используется процедура сортировки. На этапе инициализации выделяется массив для хранения значений коэффициентов полинома и вычисленных значений целевой функции. Количество элементов в этом массиве фиксировано и равно $2|SW|$ – удвоенному общему количеству пчел в рое. Весь массив заполняется случайным образом, и в этих «точках» вычисляется значение целевой функции. Затем массив упорядочивается по значению целевой функции для того, чтобы найти «лучшие» участки, которые будут использоваться пчелами-рабочими.

В первой части массива хранятся найденные «лучшие участки», во второй части расположены проверяемые значения. Благодаря использованию процедуры сортировки в начале массива всегда оказываются «лучшие участки», что намного упрощает реализацию процедуры уточняющего поиска.

Основной цикл состоит из трех этапов. На первом этапе генерируются значения из всей области поиска и значения из окрестностей «лучших участков». На втором этапе осуществляется вычисление целевой функции в сгенерированных точках. Третий этап – сортировка обновленного массива. Эти шаги повторяются до тех пор, пока не будет удовлетворен критерий остановки. В нашем случае, как и для простого ненаправленного случайного поиска, использовалось простое ограничение на количество итераций.

Разработанный алгоритм имеет ряд преимуществ по сравнению с классическим алгоритмом роя пчел и ненаправленного случайного поиска. Выделим основные из них:

- малое количество настраиваемых параметров;
- вычислительная схема незначительно сложнее ненаправленного случайного поиска;
- высокая надежность и довольно быстрая сходимость к оптимальному решению;
- высокий потенциал параллелизма.

На рисунках 3-4 приведены графики сходимости методов ненаправленного случайного поиска и роя пчел соответственно.

Из графиков очевидно, что небольшие усложнения в организации вычислительного процесса привели к значительным повышением скорости сходимости поиска оптимальных значений. Таким образом, поставленная цель в повышении эффективности оптимизационной процедуры была достигнута.

На рис. 5-6 показаны найденные оптимальные значения нагружающего усилия и размеров микрополости.

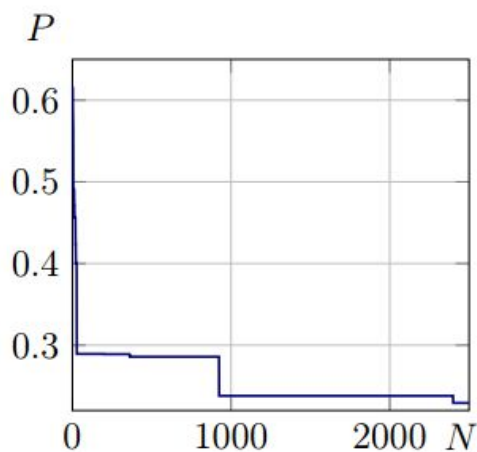


Рис. 3. Сходимость метода ненаправленного случайного поиска

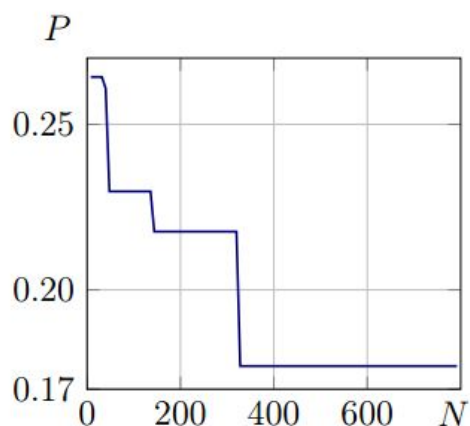


Рис. 4. Сходимость метода роя пчел

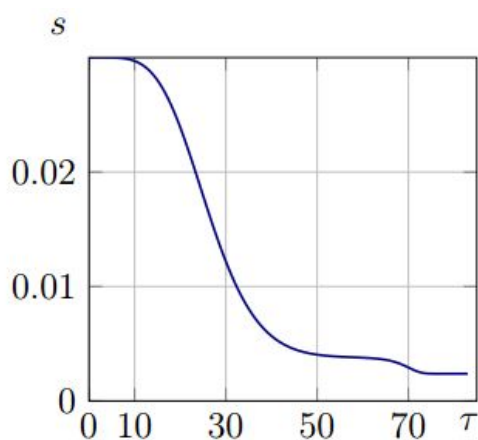


Рис. 5. Оптимальный радиус

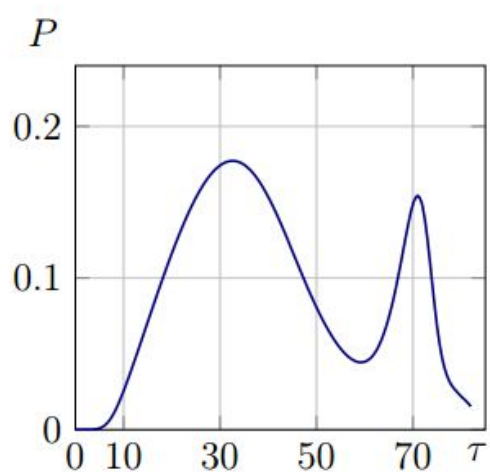


Рис. 6. Оптимальное давление

Заключение. В работе рассмотрен разработанный авторами эвристический алгоритм, который можно рассматривать как сильно упрощенную реализацию метода роя пчел. По сравнению с алгоритмом ненаправленного случайного поиска предложенный метод показал высокую эффективность и надежность. Разработка собственной модификации метода роя пчел обусловлена большим количеством настраиваемых параметров, отсутствием универсального набора их значений и рекомендаций по эффективному перебору различных комбинаций настроек. Предложенный метод глобальной оптимизации является более универсальным и в меньшей степени завязанным от качества настройки параметров.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bazhin A. A., Murashkin E. V. Creep and Stress Relaxation in the Vicinity of a Micropore under the Conditions of Hydrostatic Loading and Unloading // *Doklady Physics*, Pleiades Publishing, Ltd. 2012. Vol. 57. No. 8. P. 294–296.

[2] Murashkin E. V., Polonik M. Determination of a Loading Pressure in the Metal Forming by the Given Movements // *Advanced Materials Research*. 2014. Vol. 842. P. 494–499.

[3] Pham D.T., Ghanbarzadeh A., Koc E., Otri S., Rahim S., Zaidi M. The Bees Algorithm – A Novel Tool for Complex Optimisation Problems Manufacturing Engineering Centre, Cardiff University, Cardiff CF24 3AA, UK.

[4] Kolda T. G., Lewis R. M., and Torczon V. “Optimization by Direct Search: New Perspectives on Some Classical and Modern Methods” // *SIAM Review*. 2003. Vol. 45. No. 3. P. 385–482.

[5] Spall J. C. Introduction to stochastic search and optimization: estimation, simulation, and control // John Wiley and Sons. 2003.

M. F. Anop, E. V. Murashkin, A. V. Balashnikova

FINITE STRAINS OF THE CONTINUUM WITH ONE FREE MICROSTRUCTURE DIRECTOR

Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia

Institute For Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Chuvashia State Pedagogical University n.a. I. Ya. Yakovlev, Cheboksary, Russia

Abstract. The present study is concerned to the optimization problem of loading pressure computation by the prescribed displacements vector. The mathematical model of finite creep and elastic strains is used. The problem for the deformable material in the vicinity of microdefect was considered. Integro-differential equations for the external pressure, irreversible deformations and displacements were derived. The optimization algorithm for this problem was proposed. The optimal strain-stress state parameters were computed and analyzed.

Keywords: creep, elasticity, residual stress, swarm intelligence method, zero-order optimization.

REFERENCES

Anop Maxim Fedorovich

e-mail: manop@iacp.dvo.ru, MD, Post Graduate, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Murashkin Evgenii Valerievich

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, PhD, Senior Researcher, Institute For Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

Balashnikova Angelika Veniaminovna

e-mail: info3006@yandex.ru, PhD, Senior Researcher, Chuvashia State Pedagogical University n.a. I. Ya. Yakovlev, Cheboksary, Russia.

[1] Bazhin A. A., Murashkin E. V. Creep and Stress Relaxation in the Vicinity of a Micropore under the Conditions of Hydrostatic Loading and Unloading // *Doklady Physics*, Pleiades Publishing, Ltd. 2012. Vol. 57. No. 8. P. 294–296.

[2] Murashkin E. V., Polonik M. Determination of a Loading Pressure in the Metal Forming by the Given Movements // *Advanced Materials Research*. 2014. Vol. 842. P. 494–499.

[3] Pham D.T., Ghanbarzadeh A., Koc E., Otri S., Rahim S., Zaidi M. The Bees Algorithm – A Novel Tool for Complex Optimisation Problems Manufacturing Engineering Centre, Cardiff University, Cardiff CF24 3AA, UK.

[4] Kolda T. G., Lewis R. M., and Torczon V. “Optimization by Direct Search: New Perspectives on Some Classical and Modern Methods” // *SIAM Review*. 2003. Vol. 45. No. 3. P. 385–482.

[5] Spall J. C. Introduction to stochastic search and optimization: estimation, simulation, and control // John Wiley and Sons. 2003.

Л. А. Максимова^{1,2}, А. В. Юденков³

ТЕОРИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА В ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

¹ Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

² Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия

³ Смоленская государственная сельскохозяйственная академия, г. Смоленск, Россия

Аннотация. В статье развивается стохастическая теория потенциала в связи с её применением к решению основных задач теории упругости. Особое внимание уделяется задаче Дирихле для N -аналитических функций. Актуальность темы исследования связана с тем, что теория стохастических краевых задач на классе N -аналитических функций только формируется.

В работе дана точная математическая постановка стохастической задачи Дирихле для N -аналитической функции. Разработан необходимый математический аппарат. Доказана теорема о существовании и единственности решения. Получен общий алгоритм решения стохастической задачи Дирихле для достаточно широкого класса областей и контуров, исследована ее устойчивость. Дается пример решения первой основной задачи теории упругости с применением стохастической задачи Дирихле для n -аналитических функций.

При исследовании использовалась теория краевых задач для аналитических и бианалитических функций, краевые свойства X -аналитических функций, свойства стохастических дифференциальных систем.

Ключевые слова: бианалитическая функция, комплексный потенциал, задача Дирихле.

УДК: 539.3+534.121.1

Введение. Задача Дирихле является одной из важнейших задач теории потенциала. Её значение определяется в основном двумя причинами: во-первых, она служит основой для решения более сложных краевых задач (задача Гильберта, задача Римана

© Максимова Л. А., Юденков А. В., 2015

Максимова Людмила Анатольевна

e-mail: maximova_ng@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия; Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Юденков Алексей Витальевич, доктор физико-математических наук, профессор, Смоленская государственная сельскохозяйственная академия, г. Смоленск, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 15-41-02453 р_поволжье_а).

Поступила 20.09.2015

и др.) [4], во-вторых с её помощью можно определить комплексный потенциал стационарного векторного поля [3]. В большинстве работ задача Дирихле рассматривается для аналитических (гармонических) функций. Это связано с тем, что комплексный потенциал наиболее практически важных векторных полей является аналитической функцией. Несколько особняком стоят краевые задачи статической теории упругости для изотропного тела и тела, обладающего прямолинейной анизотропией. В этом случае комплексный потенциал представляет собой либо бианалитическую функцию, либо аналитический вектор от бианалитических аргументов [1], [4].

На сегодняшний момент можно выделить два основных способа решения задачи Дирихле для аналитических функций. Первый основан на использовании свойств интеграла типа Коши и уравнений Фредгольма 2-го рода. Наиболее полное решение задачи Дирихле указанным методом можно найти в работе Н. И. Мусхелишвили [4]. Помимо этого, начиная с 1923 года, разрабатывался вероятностный подход к решению задачи Дирихле и ее обобщений. В 1944 году С. Какутани показал, что решение краевой задачи Дирихле может быть выражено в терминах броуновского движения. Второй подход позволяет существенно ослабить условия, накладываемые на краевые коэффициенты задачи. Это приводит к тому, что задачу Дирихле можно рассматривать в стохастической постановке [5].

Стохастическая задача Дирихле на более широком классе n -аналитических функций не рассматривалась. Краевые задачи для n -аналитических функций были поставлены Ф. Д. Гаховым с целью дать обобщенную модель основных задач теории упругости для однородных изотропных тел [2]. На сегодняшний день теория краевых задач для n -аналитических функций в классической постановке достаточно развита [2], [10], [11]. Полученные решения успешно применяются для исследования основных задач теории упругости [8].

Цель данной работы провести исследование одной из основных краевых задач – задачи Дирихле для n -аналитических функций в стохастической постановке.

Постановка задачи. Прежде, чем приступить к изложению основного материала, приведём основные обозначения, используемые в работе.

S – расширенная плоскость комплексного переменного z .

D – область (конечная или бесконечная) на плоскости S .

L – контур, ограничивающий область D .

$\bar{z} = x - iy$ – комплексно сопряжённая величина.

Греческими буквами будем обозначать аналитические функции в области D .

$H(L)$ – класс функций, удовлетворяющих на контуре L условию Гельдера

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A |t_2 - t_1|^\mu.$$

σ – произвольная точка на контуре L .

$\tau_U = \inf \{t > 0, X(z) \notin D\}$ – первый момент выхода из D диффузного процесса Ито $\{X(t)\}$.

M^* – математическое ожидание.

Определение 1. $F(z)$ называется n -аналитической функцией в области D , если она является решением уравнения

$$\frac{\partial^n F(z)}{\partial \bar{z}^n} = 0. \quad (1)$$

Можно дать равносильное определение [12], [10].

Определение 2. Функцию $F(z)$, заданную в некоторой конечной области D , назовем n -аналитической, если она представима в виде

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z), \quad (2)$$

где $\varphi_k(z)$ – аналитические компоненты.

В случае, когда $n=2$, функция называется бианалитической

$$F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z). \quad (3)$$

В детерминированном случае задача Дирихле для n -аналитических функций формулируется следующим образом.

Требуется определить неизвестную n -аналитическую функцию в области D по краевым условиям

$$Re \frac{\partial^{n-1} F(\sigma)}{\partial^{n-k} x \partial^{k-1} y} = c_k(\sigma), k = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Здесь $c_k(\sigma)$ – заданные на контуре L функции класса $H^{(n-1)}(L)$.

Несложно заметить, что при $n=1$ задача (4) переходит в классическую задачу Дирихле для аналитических (гармонических) функций. При $n=2$ задача (4) представляет собой первую основную задачу упругости для изотропных однородных тел.

Сформулируем теперь стохастический вариант задачи (4).

Требуется определить неизвестную n -аналитическую функцию в области D по краевым условиям (4), где равенства выполняются почти наверное, $c_k(\sigma)$ принадлежит классу функций, имеющих производную степени $(n-1)$, сходящуюся в среднем квадратическом.

Сразу возникает вопрос, вопрос о существовании решения задачи Дирихле для n -аналитических функций, удовлетворяющих определениям 1,2. В общем случае ответ отрицателен [5, с. 215]. Для решения задачи (4) необходимо расширить понятие n -аналитической функции.

Математический аппарат. Введём понятие N -аналитической функции.

Определение 3. Функция

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z) + \dots + \bar{z}^n \varphi_n(z)$$

в области D называется N -аналитической, если для всех $z \in D$ и всех открытых множеств w , для которых $\bar{w} \in D$ аналитические компоненты $\varphi_0(z), \dots, \varphi_n(z)$ представимы в следующем виде:

$$\varphi_k(z) = U_k(x, y) + iV_k(x, y) = M(U_k(X_{\tau_w}, Y_{\tau_w})) + iM(V_k(X_{\tau_w}, Y_{\tau_w})), (k = 0, \dots, n). \quad (5)$$

Функции U_k и V_k связаны между собой соотношениями Коши-Римана.

Справедливо утверждение.

Теорема 1. Пусть F – N -аналитическая функция, тогда

$$A^2 F = 0,$$

где $Af(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{M(f(z_{\tau_w})) - f(z)}{M(\tau_w)}$ – характеристический оператор.

Обратно, если $F \in C^{2n}(D)$ и $A^2 F = 0$, то F – N -аналитическая функция.

Доказательство. Проведём доказательство для $n=2$. Применим дважды к функции $F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z)$ характеристический оператор.

$$AF = \lim_{w \rightarrow z} \frac{M(F(z_{\tau_w})) - F(z)}{M(\tau_w)} = \varphi_1'(z),$$

$$A^2F = \lim_{w \rightarrow z} \frac{M(\varphi_1'(z_{\tau_w})) - \varphi_1'(z)}{M(\tau_w)} = \Delta\varphi_1'(z) = 0.$$

Для доказательства обратного утверждения воспользуемся формулой Дынкина [5, с. 235]

$$M(F(z_{\tau_w})) = \varphi_0(z) + \lim_{k \rightarrow \infty} M \left(\int_0^{\tau_w \wedge k} (A\varphi_0)(z_s) ds \right) + \bar{z} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} M \left(\int_0^{\tau_w \wedge k} (A\varphi_1)(z_s) ds + \varphi_1(z) \right) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z).$$

Теорема доказана.

Таким образом, N -аналитическая функция является стохастическим аналогом n -аналитической функции. С другой стороны, N -аналитическая функция является естественным обобщением X -аналитических функций, широко используемых в теории случайных процессов [5], [9].

Решение задачи. С учётом предыдущих пунктов сформулируем стохастическую задачу Дирихле.

Требуется определить неизвестную N -аналитическую функцию

$$F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z) + \dots + \bar{z}^n\varphi_n(z) \tag{6}$$

по краевым условиям

$$Re \frac{\partial^{n-1} F(z)}{\partial^{n-k} x \partial^{k-1} y} \Big|_{z=\sigma_{\tau_D}} = c_k(\sigma_{\tau_D}), k = 1, \dots, n. \tag{7}$$

С учётом (5) и соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right). \end{aligned}$$

Условия (5) можно переписать в виде

$$Re \left\{ i^{k-1} \sum_{\alpha=0}^{n-k} C_{n-k}^{\alpha} \sum_{\beta=0}^{k-1} (-1)^{\beta} C_{k-1}^{\beta} \sum_{p=\alpha+\beta}^{n-1} \frac{p!}{(p-\alpha-\beta)!} \bar{\sigma}^{p-\alpha-\beta} \cdot (\varphi_p(\sigma_{\tau_D}))^{(n-\alpha-\beta-1)} \right\} = \tag{8}$$

$$= c_k(\sigma_{\tau_D}).$$

Исследование задачи начнём со случая, когда контур L представляет собой единичную окружность. В этом случае на контуре выполняется условие

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sigma}. \tag{9}$$

Введем вспомогательные функции

$$\Phi_k(z) = \sum_{\alpha=0}^{n-k} C_{n-k}^{\alpha} \sum_{\beta=0}^{k-1} (-1)^{\beta} C_{k-1}^{\beta} \sum_{p=\alpha+\beta}^{n-1} \frac{p!}{(p-\alpha-\beta)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{p-\alpha-\beta} (\varphi_p(z))^{(n-\alpha-\beta-1)}. \quad (10)$$

Учитывая (8) можно переписать условие (7) в следующем виде

$$Re \{ \Phi_k(\sigma_{\tau_D}) \} = c_k(\sigma_{\tau_D}). \quad (11)$$

Рассмотрим первое уравнение системы (10).

$$Re \{ \Phi_1(\sigma_{\tau_D}) \} = c_1(\sigma_{\tau_D}). \quad (12)$$

Задача (11) является задачей Дирихле относительно 1-аналитической или X-аналитической функции.

Зафиксируем точку $z_0 = 0$. Пусть $\{D_k\}$ – возрастающая последовательность открытых множеств, содержащих точку z , причем $D_k \subset D$ и $D = \bigcup_k D_k$.

Положим $\tau_k = \tau_{D_k}$, $\tau = \tau_D$. Тогда в силу марковского свойства

$$Re \mathbb{S}_1(Z_{\tau_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} M^{z_{\tau_k}} [c_1(z_{\tau})] = M^z [c_1(Z_{\tau}) | F_{\tau_k}].$$

Справедливо следующее утверждение (см. [5, с. 218])

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Re \mathbb{S}_1(Z_{\tau_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} M^z [c_1(Z_{\tau}) | F_{\tau_k}] = c_1(z_{\tau}). \quad (13)$$

Здесь сходимость полагается почти для всех реализаций на пространстве $L^2(Q^z)$.

Рассмотрим следующий процесс

$$N_t = \mathbb{S}_1(z_{\tau_k} \vee (t \wedge \tau_{k+1})) - \mathbb{S}_1(z_{\tau_k}).$$

Данный процесс для любых значений k является мартингалом.

Справедлива оценка

$$Q^z = Q^z \left[\sup_{\tau_k \leq s \leq \tau_{k+1}} |\mathbb{S}_1(z_s) - \mathbb{S}_1(z_{\tau_k})| > \varepsilon \right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} M^z \left[|\mathbb{S}_1(z_{\tau_{k+1}}) - \mathbb{S}_1(z_{\tau_k})|^2 \right].$$

Получим, что при $k \rightarrow \infty$ $Q^z \rightarrow 0$.

Следовательно, функция $\mathbb{S}_1(z)$ является решением задачи (11), что доказывает существование решения данной задачи.

Докажем единственность задачи.

Пусть $\psi(z)$ – X-аналитическая функция. Тогда $\psi(z) = M^z(\psi(z_{\tau_k}))$ для всех k .

Положим, что $Re \{ \psi(\sigma_{\tau_D}) \} = c_1(\sigma_{\tau_D})$. Тогда

$$Re \psi(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} M^z [c_1(Z_{\tau}) | F_{\tau_k}] = c_1(z_{\tau}).$$

Таким образом, единственное решение задачи (11) дается формулой

$$\mathbb{S}_1(z) = M(c_1(z_{\tau_D})) + i \left(\int_0^z -\frac{\partial M(c_1(z_{\tau_D}))}{\partial y} dx + \frac{\partial M(c_1(z_{\tau_D}))}{\partial x} dy \right) = G_1(z). \quad (14)$$

Аналогично можно определить функции $\mathbb{S}_k(z)$ ($k = 2, \dots, n$).

Искомые аналитические компоненты определим по формулам [2]

$$\sum_{p=k-1}^{n-1} \frac{p!}{(p-k-1)!} z^{p-k-1} \varphi(z)^{(n-k)} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{q=0}^{n-k} C_{n-k}^q \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu} C_{k-1}^{\nu} \Phi_{q+\nu+1}(z). \quad (15)$$

Подставляя в равенство (14) последовательно $k=n, n-1, \dots, 1$, определим функции $\varphi_k(z)$.

Полученный метод решения можно распространить на случай, когда функция $\omega(\xi)$, конформно отображающая внутренность единичного круга на плоскости ξ на область D , является полиномом или рациональной функцией. Напомним, что для конечной области D конформно отображающая функция имеет вид

$$\omega(\xi) = \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \dots + \alpha_g\xi^g.$$

Для бесконечной области

$$\omega = \frac{C_{-1}}{\xi} + C_1\xi + \dots + C_r\xi^r.$$

Рассмотрим конечную область. В этом случае

$$\bar{\omega}\left(\frac{1}{\xi}\right) = \xi^{-g}(\bar{\alpha}_1\xi^g + \bar{\alpha}_2\xi^{g-2} + \dots + \bar{\alpha}_g\xi). \quad (16)$$

Введём дополнительные функции, которые в силу соотношения (15) будут являться X-аналитическими

$$\Phi_k(\xi) = \sum_{\alpha=0}^{n-k} C_{n-k}^{\alpha} \sum_{\beta=0}^{k-1} (-1)^{\beta} C_{k-1}^{\beta} \sum_{p=\alpha+\beta}^{n-1} \frac{p!}{(p-\alpha-\beta)!} \bar{\omega}^{p-\alpha-\beta} \left(\frac{1}{\xi}\right) (\varphi_p(z))_{z=\omega(\xi)}^{(n-\alpha-\beta-1)}. \quad (17)$$

С учётом (16) краевые условия (7) примут вид

$$Re \{ \Phi_k(s_{\tau_D}) \} = c_k(\omega(s_{\tau_D})). \quad (18)$$

Здесь s – текущая точка на единичной окружности γ .

Система (17) исследуется аналогично системе (10).

Для бесконечной области схема решения стохастической задачи Дирихле не изменяется.

Устойчивость задачи. Устойчивость задачи Дирихле для N-аналитических функций зависит от того, устойчивы ли задачи системы (11). Внешние факторы могут менять нагрузки на тело, что в краевых задачах (11) означает изменение параметров $c_k(\sigma)$. Согласно формуле (13) бесконечно малое изменение параметров $c_k(\sigma)$ приведёт к бесконечно малому изменению математического ожидания функций $\Phi_k(z)$. Такое свойство отвечает системам, устойчивым в p-квадратичном [6]. Обычно выбирается сходимость в среднем квадратическом ($c_k \in L^2(Q^z)$).

Пример. Рассмотрим в качестве примера одноосное растяжение или сжатие изотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием.

Отображающая функция задается формулой

$$z = \omega(\xi) = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\xi} + \xi m \right), \left(R = \frac{a+b}{2}, m = \frac{a-b}{a+b} \right).$$

Математическая модель первой основной задачи теории упругости имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(\sigma) + \frac{\left(\frac{1}{\sigma} + \bar{\sigma}m\right)}{-\frac{1}{\sigma^2+m}} \varphi'(\sigma) + \varphi(\sigma) &= - \left(\psi(\sigma) + \frac{\left(\frac{1}{\sigma} + \bar{\sigma}m\right)}{-\frac{1}{\sigma^2+m}} \varphi'(\sigma) + \varphi(\sigma) \right) + c_1(\sigma), \\ \psi(\sigma) + \frac{\left(\frac{1}{\sigma} + \bar{\sigma}m\right)}{-\frac{1}{\sigma^2+m}} \varphi'(\sigma) - \varphi(\sigma) &= - \left(\psi(\sigma) + \frac{\left(\frac{1}{\sigma} + \bar{\sigma}m\right)}{-\frac{1}{\sigma^2+m}} \varphi'(\sigma) - \varphi(\sigma) \right) + c_2(\sigma). \end{aligned}$$

Здесь $\psi(\xi) = \varphi_0'(\omega(\xi))$, $\varphi(\xi) = \varphi_1(\omega(\xi))$,

$$\begin{aligned} A_1(\sigma) &= \frac{p}{4} (e^{-2i\alpha}\omega(\sigma) + e^{2i\alpha}\bar{\omega}(\sigma)) - \frac{p}{2}(\omega(\sigma) + \bar{\omega}(\sigma)), \\ A_2(\sigma) &= \frac{p}{4} (e^{-2i\alpha}\omega(\sigma) - e^{2i\alpha}\bar{\omega}(\sigma)) - \frac{p}{2}(\bar{\omega}(\sigma) - \omega(\sigma)). \end{aligned}$$

Используя формулу (13) получим

$$\begin{aligned} \Phi_1(\xi) &= \frac{pi}{2R} (e^{-2i\alpha}m + e^{2i\alpha}) + \frac{p}{R} (1 - m) \xi. \\ \Phi_2(\xi) &= \frac{pi}{2R} (e^{-2i\alpha}m\xi - e^{2i\alpha}\xi) + \frac{p}{R} (1 - m) \xi. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\varphi(\xi) = \frac{p}{2R}\omega(\xi) + \frac{\Phi_1(\xi) - \Phi_2(\xi)}{2} = \frac{p}{R} \left(\frac{1}{\xi} + (2e^{2i\alpha} - m) \xi \right).$$

Напряжения на контуре определим по формуле

$$\begin{aligned} \sigma_\Theta &= 4Re \left[\frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right] = pRe \frac{(2e^{i\alpha} - m)\sigma^2 - 1}{m\sigma^2 - 1} = \\ &= p \frac{(1 - m^2 + 2m \cos 2\alpha + 2 \cos(\Theta + \alpha))}{1 - 2m \cos 2\Theta + m^2}. \end{aligned}$$

Данные результаты совпадают с результатами, полученными классическими методами [7].

Заключение. В работе исследована стохастическая задача Дирихле для N -аналитических функций для достаточно широкого класса контуров. Задача исследована на устойчивость. Приведены численные примеры. Введено понятие N -аналитической функции, исследованы ее свойства. Практическая важность работы состоит в том, что разработанная теория позволит применять к решению основных задач теории упругости статистические методы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Володченков А. М., Юденков А. В. Моделирование основных задач плоской теории упругости однородных анизотропных тел краевыми задачами со сдвигом // Обозрение прикладной и промышленной математики. М., 2006. Вып. 3. С. 482–483.
- [2] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
- [3] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
- [4] Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [5] Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. М.: Мир, 2003. 300 с.
- [6] Пугачев В. С., Сеницын И. Н. Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004. 1000 с.
- [7] Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1975.
- [8] Редкозубов С. А., Юденков А. В., Володченков А. М. Моделирование процесса линейной деформации упругого однородного тела с помощью бианалитических функций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2006. № 1 (48). С. 128–137.
- [9] Хант Дж. А. Марковские процессы и потенциалы. М.: Мир, 1962.

[10] Юденков А. В. Краевые задачи со сдвигом для полианалитических функций и их приложения к вопросам статической теории упругости. Смоленск: Смядынь, 2002. 268 с.

[11] Юденков А. В., Романков А. В. Стохастическая задача Дирихле для бианалитических функций в изотропной теории упругости // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2012. № 6. С. 160–170.

[12] Balk M. B. Polyanalytic functions // In Complex Analysis: Methods, Trends and Applications / Eds.: E. Lanckau, W. Tutschke. Berlin: Akademie – Verlag, 1983. С. 63–84.

L. A. Maximova, A. V. Yudenkov

THE THEORY OF STOCHASTIC POTENTIAL IN THE PLANE THEORY OF ELASTICITY

Chuvash State University, Cheboksary, Russia

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Smolensk State Agricultural Academy, Smolensk, Russia

Abstract. The paper develops a stochastic theory-building in connection with its application to the solution of basic problems of the theory of elasticity. Particular attention is paid to the Dirichlet problem for N analytic functions. The relevance of the research topic is related to the fact that the theory of stochastic boundary value problems in the class of N analytic functions being formed.

In the work is given an exact mathematical formulation of stochastic Dirichlet problem for N an analytic function. It develops the necessary mathematical apparatus. A theorem on the existence and uniqueness of solutions. Get a general algorithm for solving stochastic Dirichlet problem for a fairly wide class of regions and contours, its stability is investigated. We give an example of the first major decisions of the elasticity problem with the use of stochastic Dirichlet problem for the n -analytic functions.

In the study we used the theory of boundary value problems for analytic functions and bianalytic, X -boundary properties of analytic functions, properties of stochastic differential systems.

Keywords: analytic function, complex potential, Dirichlet problem.

REFERENCES

[1] Volodchenkov A. M., Yudenkov A. V. Simulation of the main problems of the plane theory of elasticity of anisotropic bodies inhomogeneous boundary value problems with a shift // Review of Applied and Industrial Mathematics. M., 2006. Issue 3. P. 482–483. (in Russian).

[2] Gakhov F. D. Boundary Value Problems. M.: Nauka, 1977. 640 p. (in Russian).

Maximova Lyudmila Anatolievna

e-mail: maximova_ng@mail.ru, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chuvash State University, Cheboksary, Russia; I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Yudenkov Alexey Vitalevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Smolensk State Agricultural Academy, Smolensk, Russia.

- [3] Lavrentiev M. A., Shabbat B. V. *Methods of complex variable theory*. M.: Nauka, 1973. 736 p. (in Russian).
- [4] Muskhelishvili N. I. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. M.: Nauka, 1966. 707 p. (in Russian).
- [5] Oksendal B. *Stochastic Differential Equations*. M.: Mir, 2003. 300 p. (in Russian).
- [6] Pugachev V. S., Sinitsyn I. N. *Theory of stochastic systems*. M.: Logos, 2004. 1000 c. (in Russian).
- [7] Savin G. N. *Stress distribution near the opening*. Kiev: Naukova Dumka, 1975. (in Russian).
- [8] Redkozubov S. A., Yudenkov A. V., Volodchenkov A. M. Modeling of linear deformation of elastic homogeneous body with the help of analytic functions // *Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*. 2006. № 1 (48). P. 128–137. (in Russian).
- [9] Hunt G. A. *Markov processes and potentials*. M.: Mir, 1962. (in Russian).
- [10] Yudenkov A. V. *Boundary-value problems with a shift for analytic functions of sex and their application to issues of static elasticity theory*. Smolensk: Smyadyn, 2002. 268 p. (in Russian).
- [11] Yudenkov A. V., Romankov A. V. Stochastic Dirichlet problem for analytic functions in anisotropic elasticity theory // *Mining informational and analytical bulletin*. 2012. № 6. P. 160–170. (in Russian).
- [12] Balk M. B. Polyanalytic functions // *In Complex Analysis: Methods, Trends and Applications* / Eds.: E. Lanckau, W. Tutschke. Berlin: Akademie – Verlag, 1983. C. 63–84.

И. Е. Илларионов

НАУЧНЫЕ ОСНОВЫ РАЗРАБОТКИ СТЕРЖНЕВЫХ И ФОРМОВОЧНЫХ СМЕСЕЙ НА ОСНОВЕ НЕОРГАНИЧЕСКИХ ФОСФАТНЫХ СВЯЗУЮЩИХ И ПОРОШКООБРАЗНЫХ ОТВЕРДИТЕЛЕЙ

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе приведены теоретические и технологические основы разработки экологически чистых формовочных и стержневых смесей с применением металлофосфатных связующих и порошкообразных отвердителей для получения отливок из черных и цветных металлов и сплавов высокого качества. Данные технологии получения отливок экологически безопасны, а связующие имеют длительный срок хранения, низкую себестоимость, обеспечивают требуемые физико-механические и технологические свойства.

Ключевые слова: металлофосфатные связующие и смеси, прочность, термостойкость, выбиваемость, экологичность, пластичность, качество отливок.

УДК: 621.74

В настоящее время во многих литейных цехах страны для изготовления стержней в качестве связующих, отверждаемых при тепловой обработке и в холодной оснастке, применяются синтетические смолы и различные их отвердители, обладающие концентрогенностью, токсичностью и высокой газотворной способностью. Из неорганических связующих широкое применение находят жидкое стекло и фосфатные связующие. Однако жидкое стекло обладает низкой термостойкостью и обеспечивает затрудненную выбиваемость и регенерируемость стержней и форм.

Нами проведены исследования по разработке фосфатных связующих и смесей для получения на их основе стержней и форм чугунного и стального литья. В качестве связующих применяли алюмохромфосфатное связующее АХФС по ТУ 6-18-166-83 (изменение 1), выпускаемое Актюбинским заводом хромовых соединений, и фосфатные системы $P_2O_5 - Al_2O_3 - H_2O$; $P_2O_5 - MgO - H_2O$; $P_2O_5 - Al_2O_3 - MgO - H_2O$. Синтез связующих для получения ХТС проводили путем нейтрализации ортофосфорной кислоты оксидом магния, гидратом оксида алюминия [1].

Зависимость ν и γ разработанных магнифосфатного и алюмофосфатного связующих и содержания фосфорного ангидрида приведена на рис. 1, 2.

© Илларионов И. Е., 2015
Илларионов Илья Егорович
e-mail: tmilp@rambler.ru, доктор технических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 30.09.2015

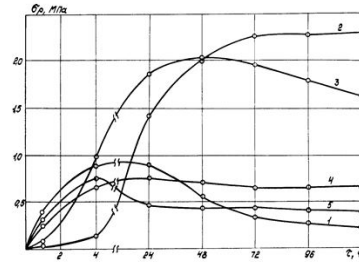


Рис. 1. Изменение прочности образцов ХТС при выдержке на воздухе ($T=293\text{ K}$, $W=60-70\%$) от содержания компонентов, %:
 1 - H_3PO_4 - 4, ОЭСР - 3,5; 2 - H_3PO_4 - 4, ОЭСР - 4;
 3 - МАФС - 4, ОЭСР - 4; 4 - ЦМФС - 4, ОЭСР - 4,0;
 5 - ОФ-3042 - 3,0, БСК - 0,8 и продолжительности выдержки

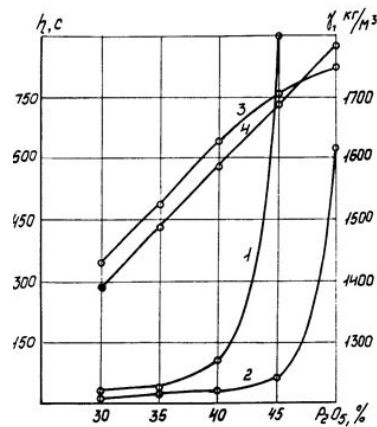


Рис. 2. Влияние содержания фосфорного ангидрида на вязкость и плотность магнийфосфатного (МФС) и алюмофосфатного (АФС) связующих:
 1 - вязкость МФС; 3 - плотность МФС;
 2 - вязкость АФС; 4 - плотность АФС

Исходя из того, что вязкость жидкой композиции для непрерывных смесителей не должна превышать 100-150 с по ВЗ-4, можно сделать вывод, что на практике могут быть пригодны алюмофосфатное связующее (АФС) с содержанием (мас.ч.): P_2O_5 не более 47,5, магнийфосфатное связующее (МФС) - не более 42 (рис. 2), химический состав которых приведен в табл. 1 и 2. Алюмофосфатное связующее (АФС) не обладает достаточно высокой стабильностью при хранении (независимо от состава его кристаллизация и выпадение осадка возникают в течение месяца). Смеси, приготовленные с его использованием, имеют высокую прочность при повышенных температурах, что значительно затрудняет выбиваемость ХТС. Магнийфосфатное связующее (МФС) с вышелимитированным содержанием фосфорного ангидрида не обладает достаточными связующими способностями, что затрудняет применение его из-за низких прочностных свойств ХТС (табл. 3 и 4).

Таблица 1

Свойства алюмофосфатных связующих

Наименование ингредиентов и физико-химических свойств	Химический состав, мас.ч. и показатели физико-химических свойств АФС, №				
	1	2	3	4	5
Фосфорный ангидрид	30,0	35,0	40,0	45,0	50,0
Оксид алюминия	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
Вода	64,0	58,0	52,0	46,0	40,0
Плотность, кг/м ³	1390	1491	1589	1680	1790
Вязкость по ВЗ-4 при 293 К, с	15	17	22	70	630
pH	0,73	0,61	0,42	0,35	0,10

Таблица 2

Свойства ХТС на основе алюмофосфатных связующих

Наименование ингредиентов и показатели физико-механических свойств ХТС	Содержание ингредиентов, мас.ч. и показатели физико-механических свойств				
	1	2	3	4	5
Кварцевый песок марки ОбК02А или Б	92,8	92,8	92,8	92,8	92,8
Алюмофосфатное связующее, №					
1	3,2	-	-	-	-
2	-	3,2	-	-	-
3	-	-	3,2	-	-
4	-	-	-	3,2	-
5	-	-	-	-	3,2
ОЭСП ПО "ЧЗПТ"	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0
Живучесть, мин	8	7	6	4	3
Прочность на растяжение, МПа, через ч					
1	0,13	0,13	0,35	0,42	0,22
4	0,26	0,56	0,68	0,96	0,65
24	0,34	0,44	0,51	0,97	0,85
48	0,30	0,35	0,45	0,72	1,00

Таблица 3

Свойства магнийфосфатных связующих

Наименование ингредиентов и физико-химических свойств связующего	Химический состав, мас.ч. и показатели физико-химических свойств МФС, №			
	1	2	3	4
Фосфорный ангидрид	30,0	35,0	40,0	45,0
Оксид магния	7,2	8,5	9,7	10,9
Вода	62,8	56,5	50,3	44,1
Плотность, кг/м ³	1430	1490	1630	1750
Вязкость по ВЗ-4 при 293 К, с	15	19	97	900
pH	1,48	1,18	0,95	0,83

Таблица 4

Свойства ХТС на основе магнийфосфатных связующих

Наименование ингредиентов и показатели физико-механических свойств ХТС	Содержание ингредиентов, мас.ч. и показатели физико-механических свойств			
	1	2	3	4
Кварцевый песок марки ОбК02А или Б	92,8	92,8	92,8	92,8
Магнийфосфатное связующее, №				
1	3,2	-	-	-
2	-	3,2	-	-
3	-	-	3,2	-
4	-	-	-	3,2
ОЭСП*) ПО "ЧЗПТ"	4,0	4,0	4,0	4,0
Живучесть, мин	10	8	7	5
Прочность на растяжение, МПа, через ч				
1	0,010	0,05	0,05	0,05
4	0,05	0,10	0,10	0,18
24	0,15	0,19	0,20	0,65
48	0,10	0,15	0,17	0,60

* ОЭСП ПО "ЧЗПТ" представляет собой мелкодисперсную порошкообразную пыль с удельной поверхностью 250-450 м²/кг, в состав которых входят (мас.ч.): оксиды: магния 10-15, кальция 4-6, алюминия 11-13; диоксид кремния 8-10; углерод 0,5-2,0; оксиды Fe²⁺ 6-15 и Fe³⁺ - остальное.

На рис. 3 приведены экспериментальные данные по изменению водородного показателя (pH) (кривая 1), плотности (γ) (кривая 2) и вязкости (ν) (кривая 3) АФС от содержания оксида алюминия.

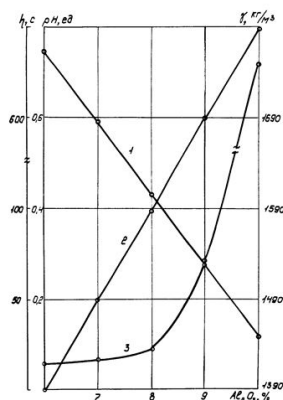


Рис. 3. Влияние содержания оксида алюминия на свойства алюмофосфатного связующего: 1 - водородный показатель; 2 - плотность; 3 - вязкость

Отмечается прямолинейный характер снижения pH и повышения плотности АФС с увеличением содержания в связующем Al₂O₃. При этом плотность АФС практически незначительно увеличивается при росте содержания Al₂O₃ от 6 до 8 %. Дальнейшее повышение содержания Al₂O₃ от 8 до 10 % приводит к резкому росту вязкости связующего, что исключает его практическое применение. Однако с повышением содержания Al₂O₃ в АФС наблюдается рост прочностных свойств ХТС (рис. 4) до оптимума (содержание Al₂O₃ 9%), затем – снижение прочности на растяжение, что связано с ухудшением смачиваемости минеральных частиц смеси АФС из-за высокой его вязкости и плотности.

Оксид алюминия в алюмофосфатном связующем (АФС) влияет на некоторые свойства этой системы. Например, по мере увеличения содержания оксида алюминия в АФС до 10% обратно пропорционально уменьшается pH (кривая 1) среды (от 0,75 при 6% до 0,1 при 10% Al₂O₃), прямо пропорционально увеличивается плотность (кривая 2), соответственно повышается и вязкость (кривая 3) системы (рис. 3).

Повышение содержания оксида магния (рис.5) в МФС приводит к аналогичному увеличению плотности и вязкости (кривые 2 и 3) связующего при снижении pH (кривая 1). Резкое увеличение прочности ХТС на МФС наблюдается лишь при содержании MgO в пределах 9,8-10,5% (рис. 5).

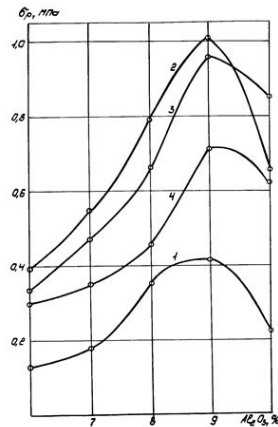


Рис. 4. Влияние прочности ХТС на растяжение в зависимости от содержания оксида алюминия в АФС и продолжительности выдержки на воздухе, ч.:
1 - 1; 2 - 4; 3 - 24; 4 - 48

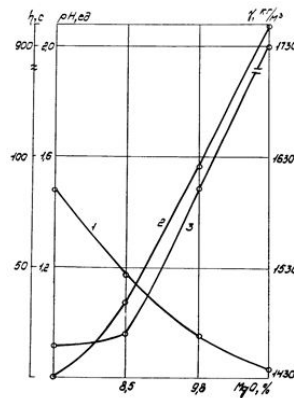
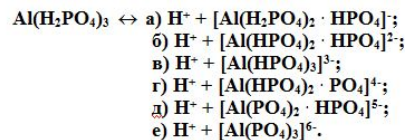
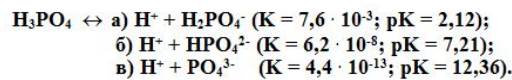
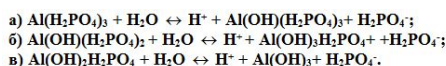
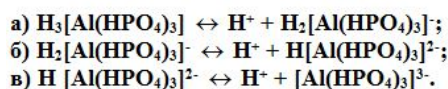
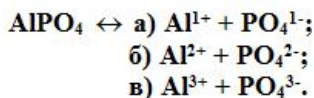
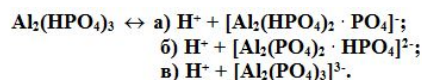


Рис. 5. Зависимость свойств магнийфосфатного связующего от содержания оксида магния: в АФС и продолжительности выдержки на воздухе, ч.:
1 - водородный показатель; 2 - плотность; 3 - вязкость



Изменение рН среды можно объяснить исходя из процесса диссоциации ортофосфорной кислоты H_3PO_4 и АФС. Ортофосфорная кислота диссоциирует по схеме: где K и $\text{p}K$ соответственно константа диссоциации и отрицательный десятичный логарифм константы диссоциации кислот.

Однозамещенное алюмофосфатное связующее (АФС) диссоциирует по схеме:



Двухзамещенное АФС диссоциирует по схеме:

Трехзамещенное АФС диссоциирует по схеме:

Кроме того, соединение однозамещенного ортофосфата алюминия $\text{Al}(\text{H}_2\text{PO}_4)_3$, вероятно, можно рассматривать как комплексное соединение однозамещенного ортофосфата алюминия $\text{Al}(\text{H}_2\text{PO}_4)_3$, которое может диссоциироваться по следующей схеме:

Из этих данных следует, что для ортофосфорной кислоты, диссоциирующей по трем ступеням, максимальная степень диссоциации соответствует первой степени. Однако степень диссоциации для кислых солей алюминия ортофосфорной кислоты (АФС) должна быть несколько выше по мере замещения атомов водорода на атомы алюминия. При этом константа диссоциации должна быть максимальной для однозамещенных АФС и уменьшаться для 2-х и 3-х замещенных АФС. В такой же последовательности должен уменьшаться рН АФС как показатель концентрации ионов водорода с обратным знаком. Из вышеприведенных уравнений видно, что только однозамещенное АФС может диссоциироваться по значительно большим ступеням, чем ортофосфорная кислота, двух- и трехзамещенные соли ортофосфорной кислоты. Отсюда бесспорно, что по мере увеличения содержания оксида алюминия в однозамещенных АФС рН должен уменьшаться, и в дальнейшем, в многозамещенных кислых солях ортофосфорной кислоты, рН должен, наоборот, увеличиваться до нейтральной среды для трехзамещенных АФС.

Вязкость и плотность системы должны соответственно увеличиваться по мере повышения содержания алюминия в АФС, так как отношение Al^{3+} к H_2PO_4^- , HPO_4^{2-} и PO_4^{3-} также увеличивается от 0,093 до 0,284 раза.

Однако более значительным является то, что изменение рН среды АФС может находиться в большей зависимости от процесса гидролиза алюмофосфатов, чем от процесса диссоциации. Процесс гидролиза данного фосфата многоступенчатый и эта соль слабого основания и слабой кислоты к гидролизу подвергается легко по следующей схеме:

Однако указанные механизмы в литературе мало изучены и поэтому изменение рН среды следует изучать и для других, более насыщенных Al_2O_3 фосфатов.

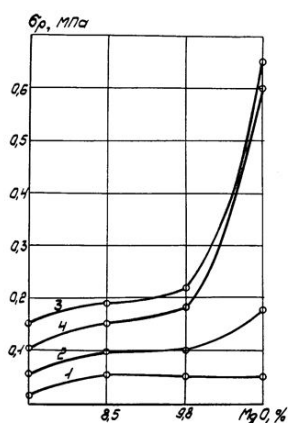


Рис. 6. Влияние содержания оксида магния в магнийфосфатном связующем и продолжительности отверждения ХТС на прочность, через ч:
1 - 1; 2 - 4; 3 - 24; 4 - 48

Прочность холоднотвердеющей смеси (ХТС, полученной на основе АФС, отверждаемой отходом (пылью) электросталеплавильного производства (ОЭСП) в зависимости от содержания Al_2O_3 и продолжительности отверждения изменяется своеобразно (рис. 4).

Например, при увеличении его до 9% прочность повышается монотонно, но при содержании в АФС оксида алюминия 10% эта закономерность нарушается. Отсюда следует, что оптимальное содержание Al_2O_3 в АФС, обеспечивающей необходимую вязкость и плотность связующего, не должно превышать 9%.

При выдержке образцов ХТС до 4 ч. прочность ХТС возрастает, а затем незначительно снижается, что объясняется переходом фосфатов двухвалентного железа в кислые фосфаты трехвалентного железа.

Аналогичные изменения вязкости, плотности и водородного показателя, а также прочностных свойств ХТС наблюдаются в случае применения магнийфосфатных связующих в зависимости от содержания оксидов магния (рис. 5 и 6).

Комбинирование в связующем оксидов алюминия и магния привело к синтезу и разработке магнийалюмофосфатного связующего (МАФС 2ОИК), на которое были разработаны и утверждены технические условия ТУ 6-18-10-11-85. Предлагаемое связующее, содержащее (мас.ч.): 38-42 P_2O_5 ; 4,5-5,0 Al_2O_3 ; 4,5-5,5 MgO, воду - остальное, сочетает высокую связующую способность и длительную стабильность при хранении. Химическая формула связующего $Mg_{2,8} Al_2(H_2PO_4)_{12}$.

Приготовление ХТС проводили путем предварительного перемешивания сухих компонентов (песка и ОЭСП) в течение 2 мин и с последующим введением связующих и совместного перемешивания в течение 1,5 мин в смесителе периодического действия марки 018М. Стандартные образцы, приготовленные из полученных смесей, испытывали согласно РТМ2 Н83-31-78 через определенные промежутки времени после выдержки при комнатной температуре. На рис. 5 и 6 приведены свойства МФС и ХТС на их основе.

Отверждение АФС, МФС и МАФС 2ОИК успешно проводится порошкообразными отвердителями, содержащими оксиды основных металлов. При этом формирование

твердой структуры происходит за счет повышения водородного показателя связующего на 1-1,5 ед, в результате чего начинается формирование твердой фазы, состоящей из кристаллогидратов кислых ортофосфатов магния, алюминия и других ортофосфатов. Повышение pH системы связано со взаимодействием избытка ортофосфатной кислоты в связующем с оксидами основных металлов.

Термографический анализ МАФС 20ИК на приборе “Derivatograph Q-metricconverterProductID1500”1500” показал, что в исходном состоянии оно состоит из соединений $Mg(H_2PO_4)_2$ и $Al(H_2PO_4)_3$. Возможно также присутствие соединения $Mg(H_2PO_4)_2 \cdot nH_2O$ и $MgHPO_4$.

Экспериментальные данные по изменению физико-механических и технологических свойств ХТС с применением термической ортофосфорной кислоты, АФС и МАФС, отверждаемых ОЭСП и трифолином, приведены в табл. 5 и на рис. 7.

Из табл. 5 видно, что применение АФС и МАФС 20ИК позволяет повысить пластичность ХТС в начальный период отверждения. За меру пластичности принимали деформацию образцов размером 170 x 22,5 x metricconverterProductID22,5 мм22,5 мм при изгибе, испытанных на приборе № 403 фирмы “Dietert”.

Исследования показали (рис. 7), что по сравнению АФС (кривая 2) и H_3PO_4 (кривая 1) наиболее высокие прочностные показатели ХТС обеспечивает магнийалюмофосфатное связующее (кривая 3). В то же время с точки зрения экологичности и техники безопасности целесообразно применение на практике алюмофосфатного и магнийалюмофосфатного связующих, отверждаемых порошкообразными отвердителями (ОЭСП, трифолин, крокус и др.) взамен ортофосфорной кислоты.

Деформация стержней в начальный период отверждения ХТС на АФС и МАФС 20ИК по сравнению с H_3PO_4 повышается соответственно в 2,72 и 6,57 раз, что способствует устранению брака стержней при извлечении стержней из стержневого ящика, кантовке и транспортировке. Выполненные исследования позволили разработать оптимальные составы магнийалюмофосфатного связующего МАФС 20ИК и порошкообразного отвердителя для получения ХТС с необходимыми физико-механическими и технологическими свойствами. Сравнительные характеристики алюмохромфосфатного АХФС и магнийалюмофосфатного МАФС 20ИК связующих приведены в табл. 6.

Таблица 5

Свойства холоднотвердеющих смесей

Наименование ингредиентов, в мас.ч. и физико-механических свойств	Содержание ингредиентов, в мас.ч. и показатели физико-механических свойств			
	1	2	3	4
Кварцевый песок марки ОБК02А или Б	93,5	93,5	93,5	93,5
Ортофосфорная кислота термическая Алюмофосфатное связующее Магнийфосфатное связующее МАФС 20ИК ОЭСП ПО "ЧЗПТ"				
Трифолин по ТУ 6-14-870-83	-	-	-	3,0
Прочность на растяжение, МПа, через ч				
1	0,36	0,44	0,24	0,20
4	0,88	0,96	0,89	0,40
24	0,88	1,00	1,36	0,75
Прочность на изгиб, Н/м ² ·10 ⁴ , через ч				
0,5	196,20	158,86	98,10	78,48
1,0	372,78	44,94	23,54	19,62
Деформация, мм через ч				
0,5	0,19	0,51	1,25	0,65
1	0,16	0,40	0,40	0,36
Живучесть, мин	8	10	13	15
Осыпаемость, %	0,1	0,05	0,01	0,04
Газопроницаемость, ед	173	183	163	173
Газотворность, см ³ /г при 1273 К не более	2,2	2,0	2,0	2,0

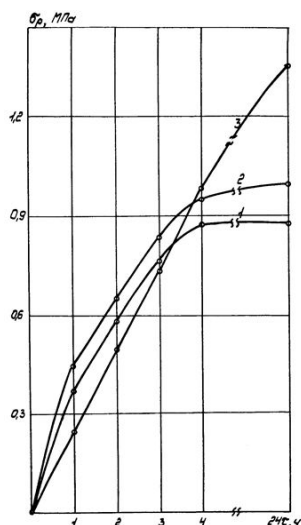


Рис. 7. Зависимость прочности ХТС от продолжительности выдержки и содержания фосфатных связующих: 1 - Н₃РО₄; 2 - АХФС; 3 - МАФС 20ИК

Таблица 6

Характеристика фосфатных связующих

Наименование показателей	АХФС	МАФС 20ИК
1. Внешний вид	Вязкая темно-зеленая жидкость	Прозрачная жидкость от бесцветного до серого цвета
2. Вязкость по вискозиметру ВЗ-4 при 293 К, с не более	200-250	не более 150
3. Плотность, г/см ³	1,55-1,65	1,570-1,697
4. Длительность хранения, мес	до 36	не ограничена
5. Массовые доли: алюминия в пересчете на Al ₂ O ₃ , %	6,5-9,0	4,5-5,0
хрома в пересчете на Cr ₂ O ₃ , %	3,5-4,5	-
соединений фосфора в пересчете на P ₂ O ₅ , %	35-39	38-42
магния в перерасчете на MgO, %	-	4,5-5,5
формальдегида %	не более 0,2	-

Для отверждения МАФС 20ИК и АХФС рекомендуется применять порошкообразные отвердители: трифолин - продукт, применяемый для очистки семян в сельском

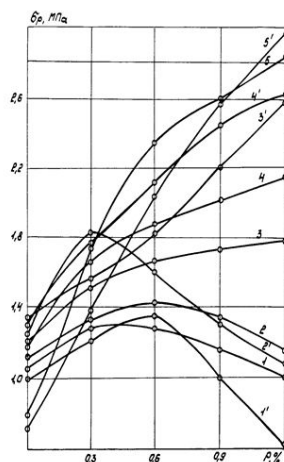


Рис. 8. Зависимость прочности на растяжение фосфатных смесей от содержания полиглицерина и температуры отверждения при 10 мин выдержке в печи:
 1 - 393 К, АХФС; 1' - 393 К, МАФС 20ИК; 2 - 423 К, АХФС; 2' - 423 К, МАФС 20ИК;
 3 - 453 К, АХФС; 3' - 453 К, МАФС 20ИК; 4 - 483 К, АХФС; 4' - 483 К, МАФС 20ИК;
 5 - 513 К, АХФС; 5' - 513 К, МАФС 20ИК

хозяйстве и выпускаемый Кемеровским анилино-красочным заводом, магнезитовый порошок каустической марки ПМК-75, выпускаемый заводом «Магнезит» г.Сатка по ГОСТ 1216-75, обладающие стабильностью свойств при хранении и безопасные в процессе применения. Отвердители указанных составов позволяют получать стержни и формы из ХТС с необходимыми физико-механическими и технологическими свойствами.

Представляет интерес исследование возможности применения АХФС и МАФС 20ИК для изготовления стержней, отверждаемых при кратковременной тепловой обработке. В качестве активирующих добавок использовали полиглицерин (ПГ) и глицерин (ГЛ). ПГ является кубовым остатком от дисцилляции синтетического глицерина, многотоннажного производства ПО «Каустик» (г.Стерлитамак) и поставляется в виде густой малоподвижной жидкости темно-коричневого цвета, плотностью 1320 кг/м³. Полиглицерин содержит (мас.ч.): 4-5 глицерина, 71-75 диглицерина, 4-5 триглицерина, 12-13 тетраглицеринов, 5-6 воды и неорганические примеси - остальное. Глицерин (ГЛ) представляет собой светлую маслянистую жидкость плотностью 1260 кг/м³.

С целью изучения прочности стержневых смесей готовили смеси следующих составов (мас.ч.): АХФС или МАФС 20ИК - 3,5 глицерин или полиглицерин - 0,3-1,2, огнеупорной наполнитель (песок марки Об2К02А или Балашейского месторождения). Согласно методике сухие составляющие перемешивались в течение 2 мин, а со связующими - 2,5 мин. Приготовление комплексного связующего (фосфатное связующее + глицерин или полиглицерин) проводили путем механического перемешивания их в емкости в течение 5 мин, затем вводили этот состав в смешивающие бегуны и перемешивали с сухими составляющими. После приготовления стандартных образцов на растяжение их выдерживали в сушильном шкафу типа СНОЛ при различной температуре в течение 5,10, 15 и 20 мин. Результаты экспериментальных данных приведены на рис. 8. Введение полиглицерина (ПГ) способствует повышению прочности на растяжение в 2-3 раза при содержании ПГ 0,6-1,2% и температуре обработки 453-513

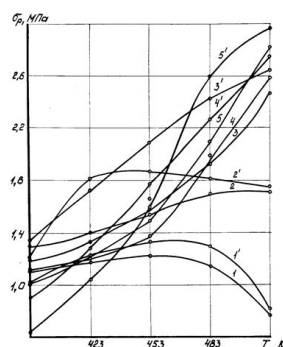


Рис. 9. Влияние температуры отверждения фосфатных смесей, содержащих полиглицерин, при их выдержке в печи в течение 10 мин на прочность:
 1 - АХФС, без ПГ; 1̇ - МАФС 20ИК, без ПГ; 2 - АХФС, без ПГ; 2̇ - МАФС 20ИК, без ПГ;
 3 - АХФС, без ПГ; 3̇ - МАФС 20ИК, без ПГ; 4 - АХФС, 0,9 % ПГ; 4̇ - МАФС 20ИК, 0,9 % ПГ;
 5 - АХФС, 1,2 % ПГ; 5̇ - МАФС 20ИК, 1,2 % ПГ

К в течение 10 мин (рис. 8 и 9). Влияние ПГ существенно заметно с увеличением его содержания от 0,6% и выше (кривые 3, 4, 5, 3̇, 4̇, 5̇, рис. 8 и 9). Температура обработки 483 К является оптимальной для смесей на основе как АХФС (кривые 3, 4, 5), так и МАФС 20ИК (кривые 3̇, 4̇, 5̇, рис. 8 и 9). Увеличение содержания ПГ в смеси требует повышения температуры прогрева смеси и времени их выдержки при заданной температуре, что связано с увеличением влажности смеси. При этом достигается получение стержней с прочностью на растяжение 2,6–3,0 МПа (кривые 3, 4, 5 и 3̇, 4̇, 5̇, рис. 8 и 9) при содержании ПГ в количестве 0,9–1,2 %. В этом случае необходимое время тепловой обработки образцов достигает 20 мин. Снижение продолжительности термической обработки достигается при повышении температуры отверждения до 513 К.

При температуре прогрева 393 К для смесей со связующим АХФС и МАФС 20ИК и добавке ПГ от 0,1 до 0,6 % наблюдается повышение прочности, а дальнейшее увеличение добавки ПГ до 1,2 % приводит к снижению прочностных свойств (кривые 1 и 1̇, рис. 9). При температуре обработки 423 К и содержании 0,3 % ПГ наблюдается заметное повышение прочности (кривые 2 и 2̇, рис. 9). Однако температура прогрева 423 К недостаточна для смесей, содержащих ПГ свыше 0,3 %, ибо при этом происходит снижение прочностных свойств.

Влияние температуры отверждения фосфатных смесей, содержащих ПГ, при их выдержке в печи в течение 10 мин наглядно отражено на рис. 9. Видно, что для смесей, не содержащих ПГ, температура обработки не должна превышать 483 К (кривые 1 и 1̇, рис. 9). Чем выше содержание ПГ в смеси, тем заметнее увеличение прочностных свойств, тем выше должна быть и температура прогрева смеси (кривые 2, 3, 4, 5 и 2̇, 3̇, 4̇, 5̇, рис. 9). При этом значительное влияние на изменение прочности оказывает продолжительность выдержки образцов смеси при заданной температуре (рис. 10). Например, для смеси с АХФС без добавки ПГ оптимальное время выдержки составляет 5–10 мин (кривая 1, рис. 10).

Аналогичные результаты повышения прочностных свойств наблюдаются при активации АХФС и МАФС 20ИК глицерином. Однако максимальные результаты повышения прочности при содержании в смеси глицерина в количестве 0,3–1,2 % достигается

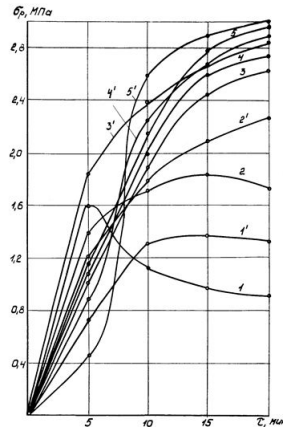


Рис. 10. Зависимость прочности фосфатных смесей от продолжительности их выдержки в печи при температуре 483 К:

- 1 - АХФС, без ПГ; 1̇ - МАФС 20ИК, без ПГ; 2 - АХФС, 0,3 % ПГ; 2̇ - МАФС 20ИК, 0,3 % ПГ;
 3 - АХФС, 0,6 % ПГ; 3̇ - МАФС 20ИК, 0,6 % ПГ; 4 - АХФС, 0,9 % ПГ; 4̇ - МАФС 20ИК, 0,9 % ПГ;
 5 - АХФС, 1,2 % ПГ; 5̇ - МАФС 20ИК, 1,2 % ПГ

лишь до 1,6–1,8 МПа. Такой результат на 30–40 % ниже, чем в случае применения ПГ, а это связано с структурой и химическим составом применяемых добавок. В случае, когда в смесях с АХФС и МАФС 20ИК отсутствуют глицерин или полиглицерин, прочность образцов на растяжение при таких же режимах термической обработки составляет 1,2–1,3 МПа, которая вполне удовлетворяет условиям получения средних и крупных стержней для чугунного и стального литья. Это подтверждено многолетней практикой применения смеси на АХФС для указанных целей на ПО «Чебоксарский завод промышленных тракторов».

Приведенные данные (рис. 8–10) показывают, что активация фосфатных связующих такими органическими добавками, как глицерин и полиглицерин, способствует существенному повышению прочностных свойств и позволяет значительно расширить область применения фосфатных смесей. Варьируя количество активирующей добавки, продолжительность и температуру термической обработки, можно получать стержни с заранее запланированными свойствами. У вышеуказанных смесей живучесть составляет 40–60 мин, газопроницаемость не менее 250 ед, прочность на сжатие во влажном состоянии не более 0,01 МПа.

Влияние температуры обработки и продолжительности выдержки стержневых смесей на основе фосфатных связующих обусловлено усилением диффузии последних во внутренние слои зерен наполнителя через слой новообразований между связующим и наполнителем, что приводит к повышению прочности смеси. Увеличение прочности смеси на фосфатных связующих возможно тогда, когда скорость роста температуры при сушке стержней не превышает определенную величину, при которой сохраняется соотношение между скоростями химической реакции и структурообразования.

При температуре выше 373 К происходит удаление воды, образуются конденсированные аморфные фосфаты, чем и обусловлено резкое возрастание прочности смеси. Результаты рентгенофазового анализа (на приборе ДРОН-2) продуктов отверждения на основе АХФС при различных температурах показали, что они при взаимодействии АХФС с наполнителем имеют, в основном, аморфный характер.

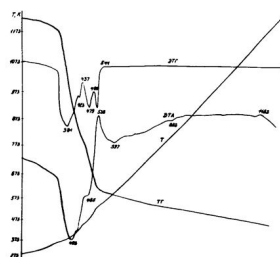
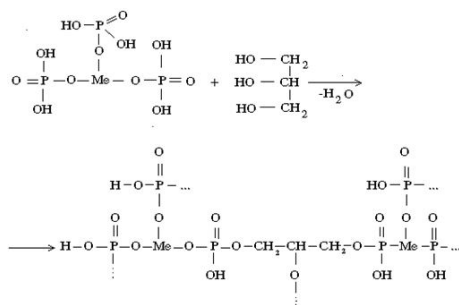


Рис. 11. Термограммы алюмохромфосфатного связующего с ПГ:
 ДТГ - кривая дифференциально-термогравиметрического анализа (скорость изменения массы образца);
 ДТА - кривая дифференциально-термического анализа (кривая изменения энтальпии связующего);
 Т - кривая изменения температуры образца;
 ТГ - термогравиметрическая кривая (изменение массы образца)

Фосфатные связующие, в том числе АХФС и МАФС 20ИК, уже в исходном состоянии обладают клеящими способностями дополнительно и возможностью пленкообразования. Следовательно, МАФС 20ИК и АХФС можно рассматривать в качестве неорганических полимеров, отверждающихся при относительно невысокой температуре (423–523) с образованием аморфных и кристаллических структур. Естественно, наличие такого связующего в стержневой или формовочной смеси в чистом виде или совмещенного с органической композицией придает смеси новые, более высокие физико-механические свойства.

Для изучения процессов, происходящих при отверждении фосфатных стержневых смесей с полиглицерином, провели термографические и ИК-спектрометрические исследования образцов смесей, содержащих 3,5 % связующего и 0,7 % полиглицерина. Установлено (рис. 11), что на кривой ДТА в области интервала температур 373–541 К просматриваются два пика, один из них отвечает эндотермическому эффекту, другой - экзотермическому. Из анализа формы эндотермического пика видно, что в нем имеются две точки перегиба. Это однозначно указывает на то, что в данном температурном интервале 373–541 К (температура, соответствующая эндотермическому пику) протекают три перекрывающихся эндотермических процесса. Первый эндотермический процесс происходит в температурном интервале 373–408 К, второй – 408–437 К, третий – 437–486 К. Температурный интервал, равный 484–541 К, соответствует экзотермическому эффекту. Из анализа кривой ДТГ в температурном интервале 373–541 К видно, что потеря массы исследуемого образца происходит за счет четырех процессов (три эндотермических и один экзотермический), максимальная скорость потери массы которых происходит при температурах 381, 423, 479 и 538 К. При этом процент потери массы соответствует при эндотермическом эффекте 33,5, при экзотермическом эффекте теряется 18,0, при втором – 4,5, при третьем – 11 от общей потери массы образца, которая составляет 40 %. Приведенный выше анализ показывает, что первый эндотермический пик соответствует удалению несвязанной воды из раствора (10 %) максимальная ее потеря происходит при 381 К. Вторым эндотермическим эффектом соответствует уходу кристаллогидратной воды, при 423 К происходит максимальная ее потеря (4,5 %). Третий эндотермический пик свидетельствует о происходящей реакции этерификации. В этом случае максимальная скорость потери массы (11 %) наблюдается в области температуры, равной 479 К. Четвертый, эндотермический эффект однозначно указывает на переход в аморфную фазу, происходящий также с выделением воды с



максимальной скоростью при температуре 538 К. В этом случае теряется 6,5 % массы от общей потери ее образцом.

В том случае, когда ПГ выступает в роли пластификатора на ИК-спектре, мы видим интенсивную широкую полосу поглощения валентных колебаний гидроксильных групп ПГ или ГЛ в области 3200–3400 см⁻¹, участвующую в межмолекулярных водородных связях в полиассоциатах, и широкую, но менее интенсивную полосу поглощения валентных колебаний также гидроксильной группировки Р-О-Н фрагмента, участвующую в водородных связях в области 2500–2700 см⁻¹. ИК-спектрометрические исследования проводили на приборе “Specord-75JR” (рис. 12).

В случае прохождения реакции этерификации на ИК-спектре наблюдается уменьшение интенсивности полос поглощения гидроксильных группировок ПГ или ГЛ и Р-О-Н фрагмента в соответствующих областях. Но явно просматривается увеличение интенсивности полосы поглощения в области 1050–990 см⁻¹, что соответствует Р-О-С (АСК) радикалу и однозначно указывает на протекание реакции этерификации с отщеплением Н₂О.

Исходя из вероятности строения фосфатного связующего и ПГ и из сведений, полученных с помощью ИК-спектроскопии и термографических исследований, можно предложить следующую схему процесса отверждения смеси на основе фосфатного связующего, активированного ПГ.

В результате реакции этерификации между многоатомными спиртами жирного ряда и фосфатным связующим образуется пространственный сшитый полимер разветвленного строения, что и приводит к повышению прочности смесей.

Получение отливок высокого качества зависит не только от прочности смесей, но и от поведения смесей при их контакте с жидким металлом.

Для оценки сопротивляемости смеси тепловому и механическому воздействию расплава изучали термостойкость разработанных смесей и смесей, применяемых на ПО “ЧЗПТ” при 1273 К и нагрузке до 0,51 МПа. Высокотемпературные испытания проводили при температуре 1273 К, исходя из того, что интенсивность нагрева образца смеси в этом случае согласуется с условиями нагрева поверхностного слоя стержней чугунных и стальных отливок с толщиной стенок до metricconverterProductID50 мм50 мм. Образец устанавливают между двумя огнеупорными прокладками и вводят в нагретую до 1273 К печь. Время от ввода образца в печь до приложения нагрузки 245 КПа составляет 8–10 с. Испытания смесей проводили на dilatometre фирмы “Dietert” (табл. 7). Оценивали смеси, отверждаемые при тепловой обработке.

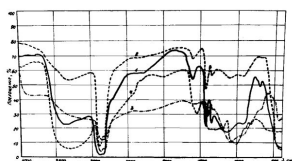


Рис. 12. Инфракрасные спектры поглощения связующих, записанные в интервале волновых чисел 4000–400 см⁻¹ на инфракрасном спектрометре “Specord-75 JR”:
 1 - алюмохромфосфатное связующее; 2 - магнийалюмофосфатное связующее;
 3 - алюмохромфосфатнополиглицериновое связующее; 4 - полиглицерин

Таблица 7

Составы стержневых смесей

№	Составляющие смеси, мас.ч.							
пп	Песок кварцевый обогащенный марки ОбК02А	АХФС по ТУ 6-18-166-83	Крахмалит по ТУ РСФСР 462-77	Полиглицерин	ЛСТ по ОСТ 13-183-83	КО по ОСТ 01326-83	Огнеупорная глина марки НУ-1	Глицерин
1	100,0	3,5	1,0	0,7	-	-	-	-
2	100,0	3,5	1,0	-	-	-	-	-
3	100,0	-	-	-	3,0	2,0	1,5	-
4	100,0	3,5	-	-	-	-	-	-
5	100,0	3,5	-	-	-	-	-	0,5

Результаты дилатометрических исследований смесей приведены на рис. 13а и б. Поддерживая исходную нагрузку 245 КПа при 1273 К, замеряли абсолютное изменение высоты столбика смеси. Предварительно образцы смесей 1 и 2 сушили при 473 К в течение 0,5 ч., смеси 3 – при 473 К в течение 1,5 ч; смеси 4 – при 473 К в течение 0,5 ч.; смеси 5 – при 453 К в течение 1 ч.

Видно (рис. 13а), что разрушение смеси на органических связующих ЛСТ и КО (кривая 3) носит хрупкий характер. Смеси, приготовленные на основе АХФС, активированного ПГ (кривая 1) и глицерина (кривая 5), по термостойкости не уступают смесям (кривые 2, 3, 4), применяемым в массовом производстве ПО “ЧЗПТ” для изготовления чугунных и стальных отливок. Кроме того, активация АХФС ПГ снижает положительную величину деформации смеси при высокой температуре и тем самым не приведет к возникновению термических напряжений.

На рис. 13б приведены результаты высокотемпературных испытаний ХТС (табл. 8).

Как видим (рис.13б), ХТС составов 1 и 3 имеют хрупкий характер разрушения. При этом образцы смеси 1 разрушаются в течение 165 с, а смесь 3 имеет величину относительного расширения 1,65 % и выдерживает температуру 1273 К в течение 1500с, что в 9 раз выше, чем у ХТС на смоле СФ-3042, активированной силаном АГМ-9. Одновременно величина относительного расширения смеси 1 в два раза ниже, чем у

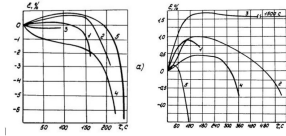


Рис. 13. Высокотемпературные деформации (E) стержневых смесей при 1273 К и нагрузке 245 КПа:
а - отверждаемых при тепловой обработке; б - холоднотвердеющих смесей

ХТС на связующем МАФС 20ИК (смесь 3). Низкие величины относительной деформации и термостойкости смесей (с) на практике приводят к растрескиванию стержней и заполнению трещин жидким металлом в процессе формирования поверхности отливок. В то же время смесь 3 имеет высокую степень деформации и термостойкости, что на практике обеспечивает чистую поверхность отливок из чугуна и стали.

Таблица 8

Холоднотвердеющие смеси

№	Составляющие смеси, мас.ч.							Жидкое	ОЭСП ПО
пп	Песок кварцевый марки ОбК02	Смола СФ-3042 с добавкой 0,3 мас.ч. силана АГМ-9	75%-ный раствор БСК в 2,5%-ном растворе поливинилбутирального лака	МАФС 20ИК-ТУ-6-18-10-11-85	СОК-магния	H_3PO_4 г/см ³	Крокус ТУ-6-14-483-83	стекло М=2,5 г=1,42 г/см ³ *)	“ЧЗПТ”
1.	100,0	1,8	0,7	-	-	-	-	-	-
2.	100,0	-	-	3,5	0,5	-	-	-	4,5
3.	100,0	-	-	3,5	0,5	-	-	-	3,0
4.	100,0	-	-	-	-	4,0	5,0	-	-
5.	100,0	-	-	-	-	-	-	4,5	-

*) Отверждено продувкой CO_2 .

Исследования ХТС показали, что наименьшую термостойкость имеет смесь 5 на основе жидкого стекла (кривая 5, рис. 13б). Она размягчается при 1273 К в течение 105 с, что может привести к искажению геометрии изготавливаемых отливок и затрудненной выбиваемости стержней. В подтверждение высказанных предпосылок заливали технологические пробы сталью ЗОЛ при температуре 1853 К. Просечки наблюдались со стороны стержня из смеси 1, искажение геометрии – со стороны стержня из смеси 5 (жидкое стекло).

Промышленные испытания ХТС с разработанными фосфатными связующими проводили *) в литейном цехе № 2 ПО “Чебоксарский завод промышленных тракторов”.

Смеси готовили в лопастном смесителе периодического действия № 10653 и непрерывного действия “Спид Флоу-metricconverterProductID1000”1000”. Масса стержней изменялась от 70 до metricconverterProductID450 кг450 кг. Уплотнение их проводилось на вибростоле с небольшим ручным доуплотнением. Масса отливок из чугуна и стали составляла в пределах от 200 до metricconverterProductID800 кг800 кг. Одновременно проводили изготовление облицовочного слоя ХТС указанных составов для крупных форм. Испытания показали пригодность данной технологии для изготовления средних и крупных стержней и получения облицовочного слоя форм для чугунного и стального литья.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Илларионов И. Е., Гамов Е. С., Васин Ю. П., Чернышев Е. Г. Металлофосфатные связующие и смеси. Чебоксары: Изд-во ЧГУ, 1995. 524 с.

I. E. Illarionov

SCIENTIFIC BASIS OF DESIGN ROD AND MOLDING MIXTURES BASED ON INORGANIC PHOSPHATE BONDS AND POWDERED HARDENER

Chuvash State University, Cheboksary

Abstract. Piecewise linear plastic potentials within the framework of the theory of the thermal stresses concerning to shrink fit The boundary problem in the theory of the thermal stresses on shrink fit of cylinder shaped details is solved. The peculiarities of the task formulation and the methods for solution of this task using piecewise linear plastic potentials are considering. The numerical algorithms are proposed in case, when the temperature stresses, sequentially changing under variable yield point, could correspond to different planes and fins of an yield surface. It’s mentioned, that such changes at configuration of the plastic flow are influencing considerably on forming of the resulting interference.

Keywords: metal phosphate binder and a mixture of strength, heat resistance, vybivaemost, environmental friendliness, flexibility, quality castings.

REFERENCES

[1] Illarionov I. E., Gamov E. S., Vasin Yu. P., Chernyshevich E. G. Metalphosphatic binding and mixes. Cheboksary: Publishing house of ChSU, 1995. 524 p.

Е. П. Дац¹, М. Р. Петров^{2,3}, А. В. Ткачева³

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПЛАСТИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ О СБОРКЕ ГОРЯЧЕЙ ПОСАДКОЙ

¹Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток,
Россия

²Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,
г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

³Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Решена краевая задача теории температурных напряжений о сборке цилиндрических деталей способом горячей посадки. Указаны особенности постановки и методы решения задачи, связанные с использованием кусочно-линейных пластических потенциалов. Построены расчетные алгоритмы, позволяющие учитывать тот факт, что при переменном пределе текучести температурные напряжения могут, последовательно изменяясь, соответствовать разным граням и ребрам поверхности текучести. Показано, что такие изменения в характере пластического течения существенно влияют на формирование итогового натяга.

Ключевые слова: упругость, термопластичность, сборка с натягом, горячая посадка, остаточные напряжения

УДК: 539.374+ 539.224

Введение. Решая задачу о температурных напряжениях в длинной круглой трубе, находящейся в условиях интенсивного термомеханического воздействия, Д. Бленд

© Дац Е. П., Петров М. Р., Ткачева А. В., 2015

Дац Евгений Павлович

e-mail: dats@mail.dvo.ru, ассистент, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток, Россия.

Петров Михаил Радиевич

e-mail: mail@imim.ru, кандидат технических наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия; Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Ткачева Анастасия Валерьевна

e-mail: 4nansi4@mail.ru, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН "Дальний Восток" (проект 0262-2015-0064.)

Поступила 10.10.2015

линейной зависимости предела текучести от температуры в [8]–[10] вычисляется итоговый натяг [11] в сборке горячей посадкой цилиндрических деталей как для случая плоской деформации [9], так и для случая плоского напряженного состояния [8,10]. Ниже на примере посадки горячей муфты на холодный вал рассмотрим особенности расчета как процессов, следующих за моментом посадки, так и итогового натяга в сборке.

Исходные модельные зависимости. Считаем материал сборки изотропным и упругопластическим. Деформации d_{ij} полагаем малыми и складываемыми из обратимых (упругих) e_{ij}^e и необратимых (пластических) e_{ij}^p , ($i, j = 1, 2, 3$) деформаций

$$d_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.1)$$

Здесь u_i – компоненты вектора перемещений, индексом после запятой обозначается производная по соответствующей пространственной координате. Обратимые деформации, температуру T и напряжения связывают соотношения Дюамеля–Неймана [3], [4]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (\lambda e_{kk}^e - K\theta) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \\ \theta &= 3\alpha(T - T_0). \end{aligned} \quad (2.2)$$

В записи (2.1) и (2.2) использована прямоугольная декартова система координат и правило суммирования по повторяющемуся индексу, δ_{ij} – компоненты единичного тензора (символ Кронекера), λ , μ , K – упругие постоянные материала $K = (\lambda + \frac{2}{3}\mu)$, λ , μ – параметры Ламе, K – модуль всестороннего сжатия, α – коэффициент линейного температурного расширения, T_0 – комнатная температура.

Пластические деформации накапливаются в материале только при напряжениях, удовлетворяющих условию текучести $f(\sigma_{ij}) = 0$. В принимаемых далее условиях принципа максимума Мизеса уравнение поверхности $f(\sigma_{ij}) = 0$ в пространстве напряжений выполняет роль пластического потенциала со следованием ассоциированного закона пластического течения

$$de_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad d\lambda > 0. \quad (2.3)$$

В качестве поверхности нагружения далее будет использоваться призма Треска [8]

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k, \quad (2.4)$$

где σ_i – главные значения тензора напряжений, $k = k(\theta)$ – предел текучести материала. Далее, для предела текучести принимаем следующую его зависимость от температуры

$$k = k_0 \left((T_p - T_0)^{-2} (T_p - T(r, t))^2 \right). \quad (2.5)$$

В (2.5) k_0 – предел текучести материала при комнатной температуре T_0 , T_p – температура плавления материала.

Постановка задачи. Термоупругое деформирование. Полагаем, что муфта (полый цилиндр), нагретая до температуры T_* и имеющая при этом размеры $R_1 \leq r \leq R_2$, в момент времени $t = 0$ насаживается на вал, находящийся при комнатной температуре T_0 и имеющий размеры $0 \leq r \leq R_1$. Считая сборку муфты и

вала достаточно длинной и пренебрегая краевыми эффектами, приходим, таким образом, к одномерной задаче температурных напряжений. Распределение температуры по элементам сборки найдем, решая уравнение теплопроводности, записанное в цилиндрической системе координат r, φ, z

$$T_{,t} = a (T_{,rr} + r^{-1}T_{,r}) \quad (3.1)$$

В (3.1) индексом после запятой обозначается соответствующее частное дифференцирование: $T_{,t} = \partial T / \partial t$, ; $T_{,r} = \partial T / \partial r$, a – коэффициент температуропроводности ($a = a_1$ для материала вала и $a = a_2$ для материала муфты).

Уравнение теплопроводности (3.1) следует дополнить начальными и краевыми условиями. В качестве начальных условий имеем

$$\begin{aligned} T(r, 0) &= T_0, \quad \text{при } 0 < r \leq R_1, \\ T(r, 0) &= T_*, \quad \text{при } R_1 \leq r \leq R_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Граничными условиями рассматриваемой одномерной задачи являются значения: на свободной границе $r = R_2$

$$\psi_2 T_{,r} \Big|_{r=R_2} = \chi (T_0 - T), \quad (3.3)$$

на контактной поверхности $r = R_1$

$$\begin{aligned} T^{(1)} \Big|_{r=R_1} &= T^{(2)} \Big|_{r=R_1} \\ \psi_1 T_{,r}^{(1)} \Big|_{r=R_1} &= \psi_2 T_{,r}^{(2)} \Big|_{r=R_1} \end{aligned}, \quad (3.4)$$

на центральной оси вала

$$T_{,r} = 0. \quad (3.5)$$

В (3.3)–(3.5) ψ_1, ψ_2 – коэффициенты теплопроводности для материала вала и муфты соответственно, χ – коэффициент теплоотдачи от внешней поверхности муфты $r = R_2$ в окружающую среду.

Первоначально за моментом времени $t = 0$ материалы сборки деформируются упруго. Деформации в них связаны с единственной отличной от нуля компонентой вектора перемещений $u_r = u$ зависимостями

$$\begin{aligned} e_{rr} &= u_{,r}, \\ e_{\varphi\varphi} &= r^{-1}u. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Остальные компоненты тензора деформаций равны нулю. Для компонент тензора напряжений в таком случае из (2.1) следует

$$\begin{aligned} \sigma_r &= wu_{,r} + \lambda r^{-1}u - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= wr^{-1}u + \lambda u_{,r} - K\theta, \\ \sigma_z &= \lambda (u_{,r} + r^{-1}u) - K\theta, \\ w &= \lambda + 2\mu. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Задающим состояние равновесия материала сборки является единственное не тривиальное уравнение равновесия, следующее из закона сохранения импульса

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0. \quad (3.8)$$

Подстановка соотношений (3.7) в уравнение равновесия (3.8) приводит к дифференциальному уравнению второго порядка относительно $u(r, t)$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) = \frac{K}{w} \frac{\partial \theta}{\partial r}. \quad (3.9)$$

Подставляя решение уравнения (3.9) в (3.7), получим соотношения для вычисления напряженно-деформируемых состояний упругодеформируемых материалов сборки в зависимости от распределения по ней температуры. Данное распределение полагаем далее известным, найденным при решении температурной задачи (3.1)–(3.5). Последнее можно в данном простейшем случае найти аналитически, а в случае более сложной геометрии численно. Таким образом, решение механической части задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u &= w^{-1} F(-1, l_j, r) + r C_1^{(j)}(t) + r^{-1} C_2^{(j)}(t), \\ \sigma_r &= -2\mu (wr)^{-1} F(-1, l_j, r) + 2g C_1^{(j)}(t) - 2\mu r^{-2} C_2^{(j)}(t), \\ \sigma_\varphi &= 2\mu (wr)^{-1} F(-1, l_j, r) - 2\mu w^{-1} \theta(r, t) + 2g C_1^{(j)}(t) + 2\mu r^{-2} C_2^{(j)}(t), \\ \sigma_z &= 2\lambda C_1^{(j)}(t) - 2\mu w^{-1} \theta(r, t) \\ F(h, l_j, r) &= r^{-h} \int_{l_j}^r \rho^h \theta(\rho, t) d\rho, \quad g = (\lambda + \mu). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь $j = 1$ для материала вала и $j = 2$ для материала муфты, $l_1 = 0$, $l_2 = R_1$. Следует также учитывать, что параметры λ и μ для материалов вала и муфты могут принимать разные значения (также как и значения коэффициентов температуропроводности).

В (3.10) σ_r , σ_φ , σ_z – главные значения тензора напряжений (рис. 1а). Коэффициенты интегрирования (функции времени) находятся из граничных условий. В качестве последних принимаем

$$\begin{aligned} u^{(1)}|_{r=0} &= 0, & \sigma_r^{(2)}|_{r=R_2} &= 0, \\ u^{(1)}|_{r=R_1} &= u^{(2)}|_{r=R_1}, & \sigma_r^{(1)}|_{r=R_1} &= \sigma_r^{(2)}|_{r=R_1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Заметим, что для того чтобы внутренний размер муфты оказался при нагревании ее до температуры T_* равным R_1 , необходимо изготовить ее с внутренним радиусом $r = r_*$

$$r_* = R_1 \left(1 - \frac{3K\alpha(T_* - T_0)}{2g} \right). \quad (3.12)$$

Зависимости (3.10) задают решения, справедливые только до некоторого последующего за моментом посадки момента времени $t < t_1$. С момента времени $t = t_1$ в материале муфты возникает и далее распространяется область пластического течения.

Пластическое течение. Расчетно можно показать, что пластическое течение возникает в материале муфты на ее контактной поверхности $r = R_1$ и распространяется далее по муфте, отделяя пластическую область от упругой упругопластической границей, движущейся по закону $r = n_1(t) > R_1$. Пластическое течение материала в области $R_1 \leq r \leq n_1(t)$ осуществляется в условиях соответствия напряжений грани призмы Треска: $\sigma_r - \sigma_\varphi = -2k$. Следовательно, материал сборки разделяется таким способом на три области, в двух из которых $0 \leq r \leq R_1$, $n_1(t) \leq r \leq R_2$ он продолжает

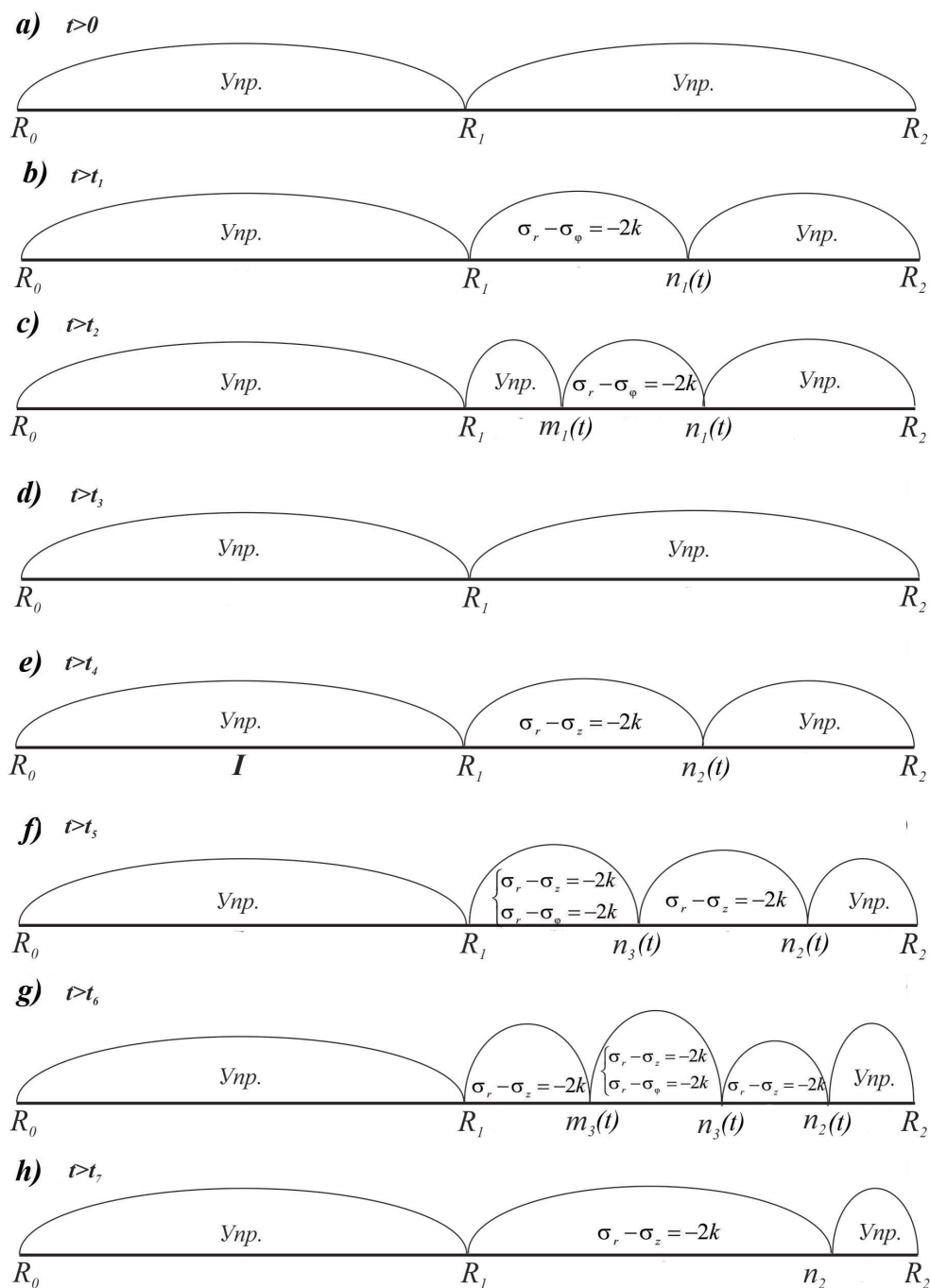


Рис. 1. Схематичное представление возникновения и исчезновения различных областей пластического деформирования: а) – термоупругое деформирование, б) – развитие первой области пластического течения и т.д.

деформироваться упруго, а в третьей области $R_1 \leq r \leq n_1(t)$ деформируется необратимо (пластически). На рис. 1 данное положение представлено схематически: верхний

рисунок – до момента времени t_1 , следующий – до некоторого последовательного момента времени t_2 (ниже такой момент будет задан) и так далее.

Для нахождения напряжений в области пластического течения перепишем соотношения (3.7) с учетом развивающихся пластических деформаций e_r^p, e_φ^p .

$$\begin{aligned}\sigma_r &= w(u_{r,r} - e_r^p) + \lambda(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= \lambda(u_{r,r} - e_r^p) + w(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - K\theta, \\ \sigma_z &= \lambda(r^{-1}u_r + u_{r,r} - e_\varphi^p - e_r^p) - K\theta.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Используя принадлежность напряжений к определенной грани ($\sigma_r - \sigma_\varphi = -2k$) призмы Треска и, как следствие ассоциированного закона пластического течения, условие пластической несжимаемости $e_r^p + e_\varphi^p = 0, e_z^p = 0$, найдем

$$e_r^p = 0.5(u_{r,r} - r^{-1}u + k\mu^{-1}). \quad (4.2)$$

Перепишем соотношение (4.1) для рассматриваемого случая

$$\begin{aligned}\sigma_r &= g(u_{r,r} + r^{-1}u) + k - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= g(u_{r,r} + r^{-1}u) + k - K\theta, \\ \sigma_z &= \lambda(u_{r,r} + r^{-1}u) - K\theta.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Уравнение равновесия (3.8) с учетом (4.3) запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) \right) = -g^{-1} \left(\frac{2}{r}k + \frac{\partial k}{\partial r} + K \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (4.4)$$

Подставляя решение дифференциального уравнения (4.4) в (4.3) и (4.2), получим зависимости для нахождения перемещений и напряжений в пластически деформируемой области. Отметим еще раз, что получены данные зависимости с использованием условия, что напряжения соответствуют определенной грани призмы Треска: $\sigma_r - \sigma_\varphi = -2k$.

$$\begin{aligned}u &= g^{-1} (F(-1, l, r) + G(1, l, r)) + 0.5C_1^{(3)}(t)r + C_2^{(3)}(t)r^{-1}, \\ \sigma_r &= gC_1^{(3)}(t) + 2r^{-1}G(1, l, r), \\ \sigma_\varphi &= gC_1^{(3)}(t) + 2r^{-1}G(h, l, r) + 2k(r, t), \\ \sigma_z &= -g^{-1} (K\mu\theta(r, t) - \lambda(2r^{-1}G(h, l, r) + k(r, t))) + \lambda C_2^{(3)}(t), \\ e_r^p &= (2g)^{-1} (K\theta(r, t) + w\mu^{-1}k(r, t)) - r^{-1} (g^{-1}F(-1, l, r)) - r^{-2}C_2^{(3)}(t),\end{aligned}\quad (4.5)$$

$$F(h, l, r) = Kr^{-h} \int_l^r \rho^h \theta(\rho, t) d\rho, \quad G(h, l, r) = r^h \int_l^r \rho^{-h} k(\rho, t) d\rho, \quad l = R_1.$$

Зависимости (4.5) справедливы для области пластического течения $R_1 \leq r \leq n_1(t)$. Они решают задачу вместе с зависимостями (3.10), которые справедливы в областях обратимого деформирования. Однако во всех таких зависимостях присутствует шесть неизвестных функций времени: $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, C_1^{(2)}, C_2^{(2)}$, и $C_1^{(3)}$ (3.10) и $C_2^{(3)}$ в (4.5). Эти функции определяются в каждый рассчитанный момент времени из краевых и контактных условий (3.11) совместно с условиями непрерывности перемещений и радиальных напряжений σ_r на упругопластической границе. Более того, на каждом шаге

(по времени) расчетов необходимо определить положение упругопластической границы $r = n_1$, для чего следует воспользоваться условием равенства нулю на упругопластической границе пластических деформаций. Соответствующую систему алгебраических уравнений необходимо разрешить на каждом временном шаге расчётов. Дальнейшее перераспределение температуры по сборке, остывание снова приведет к качественному изменению в характере последующего деформирования, поскольку напряжения в материале муфты при $r = R_1$ сдвинутся внутрь поверхности нагружения, то есть материал снова возвратится в упругое состояние.

Разгрузка. Расчётные зависимости (3.10) вместе с (4.5) позволяют построить решение задачи только до некоторого последующего момента времени $t = t_2 > t_1 > 0$. В момент времени $t = t_2$ от поверхности $r = R_1$ отделится, перемещаясь по материалу муфты, новая упругопластическая граница $r = m_1(t)$ (рис. 1с). В материале муфты формируется область упругого деформирования $R_1 \leq r \leq m_1(t)$ при наличии в данной области накопленных, но далее не изменяющихся пластических деформаций $p_r(r)$ и $p_\varphi(r)$. Отличие $e_r(r, t)$ и $e_\varphi(r, t)$ от $p_r(r)$ и $p_\varphi(r)$ соответственно заключается в том, что последнее есть то же, что и первые, только в них t фиксировано моментом прихода в точку с текущей координатой r упругопластической границы $r = m_1(t)$ (для каждой координаты r это свой момент времени).

Заменив в соотношении (4.1) e_r^p, e_φ^p на p_r, p_φ и подставив такие зависимости в уравнение равновесия (3.8), получим дифференциальное уравнение для изменяющейся компоненты перемещения $u(r, t)$ в форме

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) = \frac{K}{w} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{2\mu}{rw} (p_r - p_\varphi) - \frac{\lambda}{w} \frac{\partial}{\partial r} (p_\varphi) + \frac{\partial p_r}{\partial r}. \quad (5.1)$$

Разрешая обыкновенное дифференциальное уравнение (5.1) для поля перемещений в области упругого деформирования $R_1 \leq r \leq m_1(t)$, получим

$$\begin{aligned} u(r, t) &= 0.5rC_1^{(4)}(t) + r^{-1}C_2^{(4)}(t) + w^{-1} (F(1, l, r) + 2\mu\Phi_r(1, l, r)), \\ \Phi_r(1, l, r) &= r \int_l^r \rho^{-1} p_r(\rho) d\rho, \quad l = R_1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Подстановка (5.2) в (4.1) позволяет записать соотношения, задающие распределения напряжений в исследуемой области, в любой рассчитываемый момент времени.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= gC_1^{(4)}(t) + (-2\mu)r^{-2}C_2^{(4)}(t) + 2\mu(rw)^{-1} (2g\Phi_r(1, l, r) - F(1, l, r)), \\ \sigma_\varphi &= 2\mu(rw)^{-1} (g(2\Phi_r(1, l, r) - 2rp_\varphi(r, t)) + F(1, l, r) - rK\theta(r, t)) + \\ &+ C_1^{(4)}(t)g + 2r^{-2}\mu C_2^{(4)}(t), \\ \sigma_z &= \lambda C_1^{(4)}(t) + 2\mu w^{-1} (\lambda(r^{-1}\Phi_r(1, l, r) - p_\varphi(r)) - K\theta(r, t)). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Теперь материал сборки разделен на четыре области: в областях $(0 \leq r \leq R_1)$ и $(n_1(t) \leq r \leq R_2)$ материал продолжает деформироваться упруго, в области $m_1(t) \leq r \leq n_1(t)$ продолжается пластическое течение и, наконец, в области $R_1 \leq r \leq m_1(t)$ деформирование обратимо, но в условиях присутствия неизменяющихся необратимых деформаций. К граничным условиям добавятся условия непрерывности u и σ_r на упругопластической границе $r = m_1(t)$, а к прежним коэффициентам (неизвестным функциям времени) добавляются ещё и $C_1^{(4)}, C_2^{(4)}$. Таким образом, для их нахождения

на каждом временном шаге следует решить систему уже из десяти алгебраических уравнений, добавляя еще неизвестные на данном шаге расчетов m_1, n_1 .

С выравниванием температуры в материале сборки в момент времени $t = t_3$ происходит полное затухание пластического течения: $n_1(t_3) = m_1(t_3)$. Теперь материал сборки снова деформируется только упруго, напряжения в материале муфты найдутся из соотношений (5.3), в материале вала из – (3.10). Однако, значения функции времени следует снова находить на каждом временном шаге по времени решением алгебраической системы уравнений (пять уравнений), следующих из граничных условий.

Казалось бы, данный процесс на этом заканчивается. Однако, это не так. Дальнейшее перераспределение температуры за счет теплопроводности и остывания приведет в некоторый момент времени $t = t_4 > t_3$ к возникновению новой области пластического течения.

Повторное пластическое течение. Течение в состоянии полной пластичности. Продолжая расчёты процесса теперь уже только упругодеформирования (производя последующие шаги по времени), заметим, что в некоторый момент времени $t = t_4 > t_3$ в материале муфты на её граничной поверхности $r = R_1$ снова выполняется условие пластичности теперь в форме: $\sigma_r - \sigma_z = -2k$. Таким способом возникает новая упругопластическая граница $r = n_2(t)$ ($n_2(t_4) = R_1$) и новая область течения $R_1 \leq r \leq n_2(t)$ (рис. 1е). Последняя будет называться областью повторного пластического течения [12]. Напряжения в данной области подчинены зависимостям, следующим из закона Дюамеля – Неймана:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= w(u_{,r} - p_r - e_r^p) + \lambda(r^{-1}u - p_\varphi - e_z^p) - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= \lambda(u_{,r} - p_r + e_z^e - e_r^p - e_z^p) + w(r^{-1}u - p_\varphi) - K\theta, \\ \sigma_z &= \lambda(r^{-1}u + u_{,r} - p_\varphi - p_r - e_r^p) - w(e_z^p) - K\theta.\end{aligned}\quad (6.1)$$

Отличие $p_r(r)$ от $e_r^p(r, t)$, $p_\varphi(r)$ от $e_\varphi^p(r, t)$ ранее уже отмечалось, только теперь $e_r^p(r, t)$ и $e_\varphi^p(r, t)$ отсчитываются от своих начальных значений, которыми и являются $p_r(r)$ и $p_\varphi(r)$. Потому же для $e_z^p(r, t)$ начальными значениями являются их нулевые значения. На данной грани призмы Треска условие пластической несжимаемости переписется в форме: $e_r^p + e_z^p = 0$, $e_\varphi^p = 0$. Отсюда следует

$$e_r^p = 0.5(u_{,r} + k\mu^{-1}) - 0.5p_r. \quad (6.2)$$

С учетом (6.1) и (6.2) уравнение равновесия (3.8) в рассматриваемой области повторного пластического течения $R_1 \leq r \leq n_2(t)$ сводится к дифференциальному уравнению для нахождения перемещения $u(r, t)$

$$g \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{g}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - w \frac{u}{r^2} = K \frac{\partial \theta}{\partial r} + \left(\frac{\partial k}{\partial r} + \frac{k}{r} \right) + \mu r^{-1} (p_r - 0.5p_\varphi) + gp_{r,r} + \lambda p_{\varphi,r}. \quad (6.3)$$

Подстановка результата интегрирования (6.3) в (6.2) и (6.1) позволяет записать соотношения, задающие перемещение $u(r, t)$, напряжения $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ и деформации e_r^p , а следовательно и e_z^p , в зависимости от распределения температуры по материалу муфты в рассматриваемой области повторного пластического течения.

$$u = (2gh)^{-1} [q_1 \Phi_r(-h, l, r) + q_2 \Phi_r(h, l, r) + s_1 \Phi_\varphi(-h, l, r)] +$$

$$\begin{aligned}
& + (2gh)^{-1} [-s_2\Phi_\varphi(h, l, r) + h(G(-h, l, r) + G(h, l, r))] + \\
& + (2gh)^{-1} [(h+1)F(-h, l, r)_* + (h-1)F(h, l, r)] + \\
& \quad + r^{-h}C_1^{(5)}(t) + r^hC_2^{(5)}(t), \\
\sigma_z & = (2ghr)^{-1} (-q_1s_2\Phi_\varphi(h, l, r) + q_2s_1\Phi_\varphi(-h, l, r)) + \\
& + (2ghr)^{-1} (-q_1q_2(\Phi_r(h, l, r) - \Phi_r(-h, l, r))) + \\
& + (2ghr)^{-1} q_1((h-1)F(h, l, r) - hG(h, c, r)) + \\
& + (2ghr)^{-1} q_2((h+1)F(-h, l, r)_* - hG(-h, l, r)) + \\
& + q_2r^{-1-h}C_1^{(5)}(t)q_1r^{h-1}C_2^{(5)}(t) + 2k(r, t), \\
\sigma_\varphi & = (2ghr)^{-1} q_1q_2(\Phi_\varphi(-h, l, r) - \Phi_\varphi(h, l, r)) + \\
& + (2ghr)^{-1} (s_2q_1\Phi_r(-h, l, r) - s_1q_2\Phi_r(h, l, r)) + \\
& + (2ghr)^{-1} s_1((h-1)F(h, l, r) - hG(h, l, r)) + \\
& + (2ghr)^{-1} s_2((h+1)F(-h, l, r) - hG(-h, l, r)) + \\
& - (w - \lambda^2g^{-1})p_\varphi(r, t) - \mu g^{-1}\theta(r, t) - \lambda bg^{-1}k(r, t) + \\
& + s_1r^{h-1}C_2^{(5)}(t) - s_2C_1^{(5)}(t)r^{-(1+h)}, \tag{6.4} \\
e_r^p & = (4gr)^{-1} (-q_1\Phi_r(-h, l, r) - q_2\Phi_r(h, l, r)) + \\
& + (4gr)^{-1} (-s_2\Phi_\varphi(h, l, r) - s_1\Phi_\varphi(-h, l, r)) + k(r, t)w(2g\mu)^{-1} \\
& + (4gr)^{-1} (F(h, l, r)(h-1) - F(-h, l, r)(h+1)) + \\
& + (4gr)^{-1} h(G(-h, l, r) - G(h, l, r)) + (2g)^{-1}K\theta(r, t) + \\
& + (2g)^{-1}p_\varphi(r, t) + 0.5hr^{h-1}C_2^{(5)}(t) - 0.5hC_1^{(5)}(t)r^{-(1+h)}, \\
\Phi_r(h, l, r) & = r^h \int_l^r \rho^{-h} p_r(\rho) d\rho, \quad \Phi_\varphi(h, l, r) = r^h \int_l^r \rho^{-h} p_\varphi(\rho) d\rho, \\
F(h, l, r) & = Kr^h \int_l^r \rho^{-h} \theta(\rho, t) d\rho, \quad G(h, l, r) = -r^h \int_l^r \rho^{-h} k(\rho, t) d\rho, \\
h & = \sqrt{w/g}, \quad s_1 = h\lambda + w, \quad s_2 = w - h\lambda, \quad s_3 = (hg)^2 - \lambda^2, \\
q_1 & = hg + \lambda, \quad q_2 = \lambda - hg, \quad q_3 = gh - w, \quad l = R_1.
\end{aligned}$$

Зависимости (6.4) справедливы в области повторного пластического течения $R_1 \leq r \leq n_2(t)$. В других двух областях происходит обратимое деформирование. Для этих областей остаются справедливыми зависимости (3.10), (5.3), (5.2). Следует только учесть в (5.3) и (5.2), что $l = n_2(t)$. Новые значения функций времени $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, $C_1^{(4)}$, $C_2^{(4)}$, появившиеся в результате интегрирования (6.3), функций $C_1^{(5)}$, $C_2^{(5)}$, так же, как и ранее вычисляются на каждом временном шаге расчетов согласно краевым условиям и условиям непрерывности перемещения u и напряжения σ_r на упругопластической границе $r = n_2(t)$.

Продолжая расчеты по обозначенному алгоритму, убеждаемся, что в некоторый последующий момент времени $t = t_5 \leq t_4$ на контактной поверхности материала муфты выполнится условие Треска $\sigma_r - \sigma_\varphi = -2k$. Вместе с продолжающим выполняться

требованием $\sigma_r - \sigma_z = -2k$ данное условие определит состояние полной пластичности [2] (ребро призмы Треска). С момента времени $t = t_5$ от поверхности $r = R_1$ продвигается поверхность $r = n_3(t)$, разделяющая пластическую область $R_1 \leq r \leq n_2(t)$ на две подобласти, в которых пластическое течение осуществляется в соответствии с различными системами уравнений. В подобласти $n_3(t) \leq r \leq n_2(t)$ напряжения соответствуют грани $\sigma_r - \sigma_z = -2k$, а в подобласти $R_1 \leq r \leq n_3(t)$ – ребру призмы Треска. В первой из них остаются справедливыми (с точностью до функций времени $C_1^{(5)}, C_2^{(5)}$, которые придется определить заново) зависимости (6.4). В подобласти полной пластичности необходимо найти зависимости, аналогичные (6.4). Так, из закона Дюгамеля – Неймана для области полной пластичности следует

$$\begin{aligned}\sigma_r &= w(u_{,r} - p_r - e_r^p) + \lambda(r^{-1}u - p_\varphi - e_\varphi^p - e_z^p) - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= \lambda(u_{,r} - p_r - e_r^p - e_z^p) + w(r^{-1}u - p_\varphi - e_\varphi^p) - K\theta, \\ \sigma_z &= \lambda(r^{-1}u + u_{,r} - p_\varphi - p_r - e_r^p - e_\varphi^p) - w(e_z^p) - K\theta.\end{aligned}\quad (6.5)$$

Условие полной пластичности $\sigma_r - \sigma_z = -2k$ и $\sigma_r - \sigma_\varphi = -2k$ и условие пластической несжимаемости $e_r^p + e_\varphi^p + e_z^p = 0$ приводят к соотношениям

$$\begin{aligned}e_r^p &= 2/3u_{,r} - 1/(3r)u + 2k(r, t)(3\mu)^{-1} + 1/3(p_\varphi - 2p_r), \\ e_\varphi^p &= -1/3u_{,r} - 2/(3r)u - k(r, t)(3\mu)^{-1} - 1/3(2p_\varphi - p_r).\end{aligned}\quad (6.6)$$

Подставляя соотношения (6.5) с учетом (6.6) в уравнение равновесия (3.8), получим дифференциальное уравнение

$$K \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right) \right) = K \frac{\partial \theta}{\partial r} + 4/3 \frac{\partial k}{\partial r} + 2 \frac{k}{r} + \frac{\partial p_r}{\partial r} + \frac{\partial p_\varphi}{\partial r}.\quad (6.7)$$

Подставляя решение дифференциального уравнения (6.7) в выражения (6.5) и (6.6), получим, что в области полного пластического течения $R_1 \leq r \leq n_3(t)$ справедливы зависимости

$$\begin{aligned}u &= K^{-1}F(-1, l, r) + (3K)^{-1}G(-1, l, r) + 2K^{-1}G(1, l, r) + \\ &+ 0.5C_1^{(6)}(t)r + C_2^{(6)}(t)r^{-1}, \\ \sigma_r &= KC_1^{(6)}(t) + k(r, t) + 4r^{-1}G(1, l, r), \\ e_r^p &= (2G(1, l, r) - 3G(-1, l, r))(3rK)^{-1} + 1/6C_1^{(6)}(t) + \\ &+ 2/3\theta(r, t) - r^{-2}C_2^{(6)}(t) + p_\varphi(r, t) + \\ &- 1/3 \left(-14(3K)^{-1} - 2\mu^{-1} \right) k(r, t) - (Kr)^{-1}F(-1, l, r) \\ e_\varphi^p &= (2G(1, x, r) + 3G(-1, x, r))(3rK)^{-1} + \\ &+ 1/6C_1^{(6)}(t) + r^{-2}C_2^{(6)}(t) - 3^{-1}\theta(r, t) - p_\varphi(r, t) + \\ &+ 1/3 \left(-7(3K)^{-1} - \mu^{-1} \right) k(r, t) + (Kr)^{-1}F(-1, l, r).\end{aligned}\quad (6.8)$$

$$l = R_1.$$

Перемещения, напряжения и деформации в материале сборки в областях, кроме области полной пластичности, определяются теми же зависимостями (3.10), (5.3), в которых следует считать $l_2 = n_2(t)$ в (3.10), $l = n_3(t)$ в (5.3).

Затухание полного пластического течения начинается с момента времени $t = t_6$. У поверхности контакта скорость роста окружной пластической деформации становится равной нулю, из чего следует, что перестает выполняться условие Треска

$\sigma_r - \sigma_\varphi = -2k$. Напряженное состояние возвращается на грань $\sigma_r - \sigma_z = -2k$ призмы Треска. На поверхности $r = R_1$ зарождается разгружающая пластическая граница $m_3(t)$, которая, продвигаясь по материалу муфты, достигает в момент времени $t = t_7$ пластической границы $r = n_3(t_5)$, что приводит к затуханию полного пластического течения. В области $R_1 \leq r \leq m_3(t)$ $e_\varphi^p(r, t) = e_\varphi^p(r, t_7) = p\varphi(r)$, при этом пластические деформации e_r^p, e_z^p продолжают свой рост.

Во временном интервале $t_6 \leq t \leq t_7$ перемещения, деформации и напряжения задаются ранее приведенными зависимостями. В области $R_1 \leq r \leq m_3(t)$ выполняются соотношения (6.4), в области $m_3(t) \leq r \leq n_3(t)$ – (6.8) с тем только отличием, что $l = m_3(t)$. В области $n_3(t) \leq r \leq n_2(t)$ задачу решают те же зависимости (6.4) при $l = n_3(t)$. Область материала муфты $n_2(t) \leq r \leq R_2(t)$ остается упругой, и здесь справедливы соотношения (3.10) с $l = n_2(t)$. На каждом временном шаге расчетов наряду с положениями упругопластических границ необходимо снова осуществлять перерасчет коэффициентов (функций времени) интегрирования уравнений равновесия, записанных по-разному для различных областей течения и упругого деформирования.

Когда полное пластическое течение перестанет существовать, в материале сборки останется три области, две из которых ($0 \leq r \leq R_1, n_2(t) \leq r \leq R_2$) деформируются упруго, а одна ($R_1 \leq r \leq n_2(t)$) деформируется необратимо в соответствии с условием пластичности $\sigma_r - \sigma_z = -2k$.

Остаточные напряжения. Итоговый натяг. После завершения процесса теплопроводности (данный процесс завершится, когда температура по элементам сборки выровняется и станет равной комнатной температуре T_0) напряжения в элементах сборки будут иметь некоторое распределение по пространственной координате r . Такие напряжения называют остаточными, а значения σ_r на поверхности контакта $r = R_1$ называют натягом в соединении [11]. В рассматриваемом случае при комнатной температуре в части муфты напряженно-деформированное состояние по-прежнему продолжает удовлетворять грани $\sigma_r - \sigma_z = -2k$ призмы Треска (рис. 1h). Следовательно, в условиях, когда $T = T_0$, в материале муфты присутствуют две области: область $R_1(t) \leq r \leq n_2 - const$, где $\sigma_r - \sigma_z = -2k$, и область $n_2(t) \leq r \leq R_2(t)$, где нет необратимых деформаций. В последней области уравнение равновесия примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) = 0. \quad (7.1)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (7.1), получим остаточные напряжения и перемещения в области деформирования $R_1(t) \leq r \leq n_2 - const$.

$$\begin{aligned} u &= 0.5rC_1^{(j)} + r^{-1}C_2^{(j)} \\ \sigma_r &= gC_1^{(j)} + (-2\mu)r^{-2}C_2^{(j)} - K\theta \\ \sigma_\varphi &= C_1^{(j)}g + 2r^{-2}\mu C_2^{(j)} - K\theta \\ \sigma_z &= \lambda C_1^{(j)} - K\theta \\ l_1 &= 0, \quad l_2 = n_2. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Дифференциальное уравнение равновесия (6.3), определяющее состояние нейтрального нагружения области материала, в которой выполняется условие Треска $\sigma_r - \sigma_z = -2k$, в случае отсутствия температурного градиента примет вид:

$$g \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{g}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - w \frac{u}{r^2} = -b \left(\frac{k}{r} \right) + \mu r^{-1} (p_r - 0.5p_\varphi) + gp_{r,r} + \lambda p_{\varphi,r}. \quad (7.3)$$

Подставляя решение уравнения (7.3) в соотношения (6.3) и (6.2), получим выражения для нахождения напряжений, перемещений и деформаций нейтрально нагруженной области, в которой выполняется условие Греска $\sigma_r - \sigma_z = -2k$.

$$\begin{aligned} u_r &= -(2gh)^{-1} (\mu - g(h+1)) \Phi_r(-1, n_2, r) + r^{-h} C_1^{(8)} + r^h C_2^{(8)} + \\ &- (2gh)^{-1} (2\mu - \lambda(h+1)) \Phi_\varphi(-1, n_2, r) + r^h C_2^{(8)} + \\ &(2gh)^{-1} [(\mu - g(h-1)) \Phi_r(1, n_2, r)] + \\ &+ (2gh)^{-1} \left[-(2\mu + \lambda(1-h)) P_\varphi(1, n_2, r) - 2hr(1-h^2)^{-1} k_0 \right], \\ \sigma_z &= -h^{-1} (2\mu p_\varphi(r) + g(h-1) \Phi_r(r)) + (\lambda - hg) r^{-1-h} C_1^{(8)} + \\ &+ (\lambda + hg) r^{h-1} C_2^{(8)} + (2ghr)^{-1} q_1 (s_2 (\Phi_\varphi(1, n_2, r) - \Phi_r(1, n_2, r))) + \\ &+ (2ghr)^{-1} q_2 (P_\varphi(-1, n_2, r) (\lambda(h+1) - 2\mu)) - K\theta + \\ &- (2ghr)^{-1} [q_3 \Phi_r(-1, n_2, r)] - (\lambda - g(h^2 - 2)) (g(h^2 - 1))^{-1} k_0, \\ \sigma_\varphi &= (2ghr)^{-1} [-s_1 s_3 \Phi_r(1, n_2, r) - \Phi_\varphi(1, n_2, r) (4\mu g + \lambda^2 (1 - h^2))] + \\ &+ (2ghr)^{-1} [-s_2 (\Phi_\varphi(-1, n_2, r) (\lambda(1+h) - 2\mu) + q_1 \Phi_r(-1, n_2, r))] + \\ &+ \lambda (h^{-1} - 1) p_r(r) - g^{-1} (\mu (3kh + 2\lambda) h^{-1} p_\varphi(r)) + \\ &- 2k_0^{(2)} (h^2 - 1)^{-1} - K\theta^{(2)} + s_1 r^{h-1} C_2^{(8)} - s_2 C_1^{(8)} r^{-(1+h)}, \\ e_r^p &= 0.5 (h^{-1} - 1) p_r(r) - p_\varphi(r) \left(\mu (gh)^{-1} - \lambda (2g)^{-1} \right) + \\ &+ (4gr)^{-1} [(2\mu - \lambda(h+1)) \Phi_\varphi(-1, n_2, r) - s_3 \Phi_r(1, n_2, r)] + \\ &+ (4gr)^{-1} [s_2 \Phi_\varphi(1, n_2, r) - q_1 \Phi_r(-1, n_2, r)] \\ &+ k_0 (\mu - g(h^2 - 1)) (2\mu g (1 - h^2))^{-1} + \\ &+ 0.5hr^{h-1} C_2^{(8)} - 0.5hC_1^{(8)} r^{-(1+h)}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Теперь для определения остаточных напряжений остается по неоднократно описанному здесь алгоритму определить на последнем шаге по времени расчетов постоянные интегрирования C_1^8 и C_2^8 вместе со значением n_2 в момент останова этой упруго-пластической границы и значениями C_1^1 , C_2^1 , C_1^2 и C_2^2 из (7.2), выполняя граничные условия и условия непрерывности u и σ_r при $r = n_2$.

Остается заметить, что приведенная схема деформирования является общей в том смысле, что в конкретных условиях некоторые из описанных стадий пластических течений могут отсутствовать. Так, например, в случае когда вал и муфта изготовлены из одного материала (бронзы), состояние полной пластичности отсутствует [9].

Заключение. Приведем в качестве иллюстрации некоторые результаты расчетов по полученным в настоящей статье решениям. Эти расчеты были проведены с использованием специально построенного для этих целей комплекса программ [13], основанного на использовании алгоритмических приемов данной публикации.

Как уже отмечалось, не все стадии пластического течения осуществляются в конкретных задачах. Полная пластичность возникает в материале муфты при достаточно высокой температуре ее первоначального нагрева. В случае, когда начальная температура нагрева не достигает некоторого своего порогового значения, состояние полной пластичности отсутствует. Однако, при учете существенной зависимости предела текучести от температуры пластическое течение может возникнуть при достаточно

умеренном нагреве муфты. Следовательно, не учитывать пластическое течение в металлических цилиндрических элементах сборки горячей посадкой, как это рекомендуется современными техническими условиями, совершенно непозволительно.

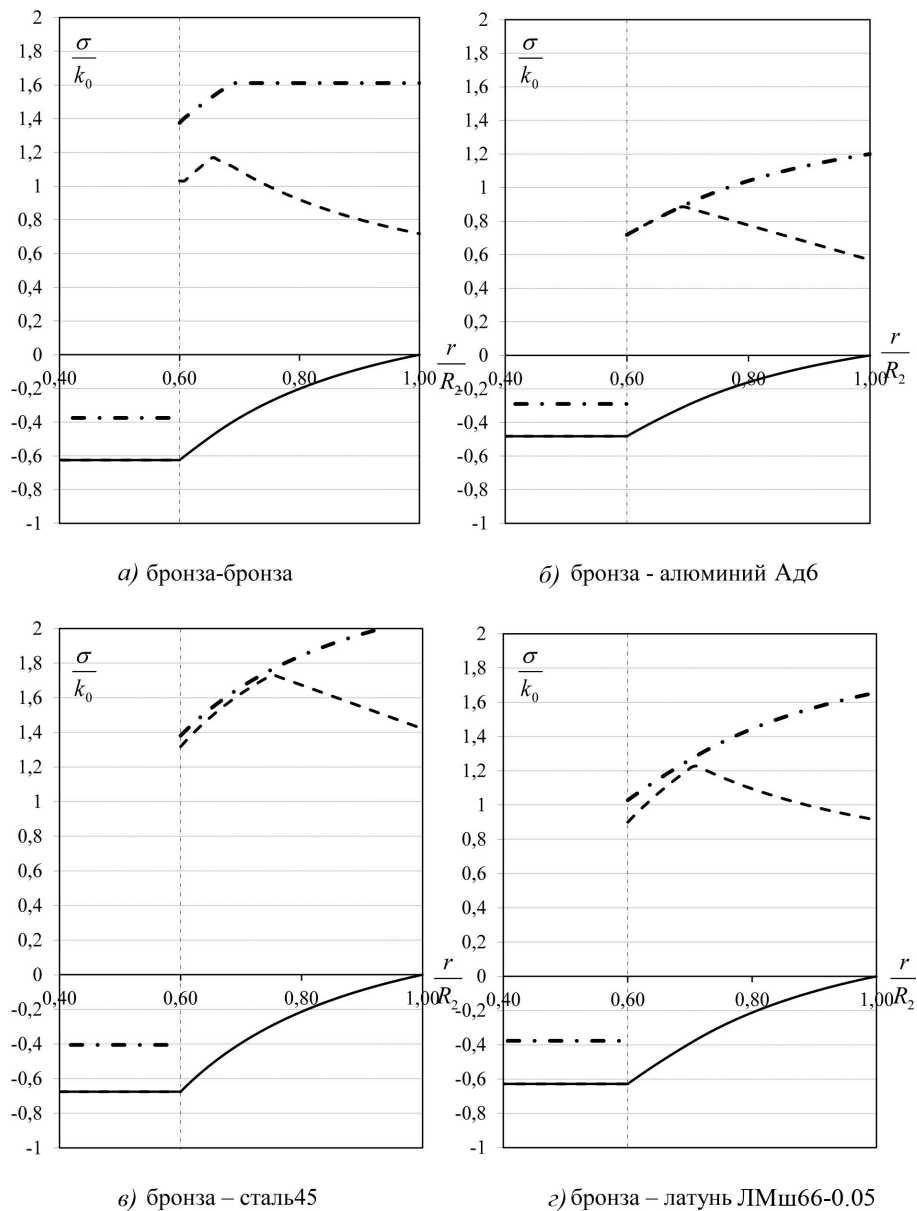


Рис. 2. Распределение остаточных напряжений в цилиндрическом соединении, полученном в результате горячей посадки муфты на вал

Некоторые качественные стороны процесса посадки иллюстрируют графики распределения остаточных напряжений. В них принято, что радиус вала 0,06м, внешний радиус муфты 0,1м, во всех четырех представленных случаях температура нагрева муфты одинакова и равна 280° , также принято, что во всех таких случаях материал

вала одинаков (бронза БрАЭС9-4). Все различие заключается в том, что разными приняты материалы, из которых изготовлена муфта (они указаны в подписях под рисунками). Константы материалов, задающие их физико-механические свойства, здесь приводить не станем (они не являются специфическими); марки металлов указаны на рис. 2. Важнее указать качественные особенности.

Если муфта изготовлена из бронзы той же марки, что и вал, то область пластического течения (рис. 2а) окажется незначительной, менее $0.4(R_2 - R_1)$, а материал алюминиевой муфты в полном объеме переходит в итоге в пластическое состояние. Более того, в последнем случае состояние полной пластичности не исчезает даже при полном остывании материалов сборки. Это крайне качественное различие иллюстрирует рис. 2, где сплошной линией указывается распределение σ_r , пунктирной – σ_φ , штрих-пунктирной – σ_z , отнесенные к пределу текучести при комнатной температуре. Случай, когда до полного остывания материал проходит все описанные здесь стадии пластического течения, иллюстрируется на рис. 2в и на рис. 2г.

Натяг оказывается наибольшим, когда муфта выполнена из стали (рис. 2в), наименьшим, когда из алюминия (рис. 2б)

Авторы благодарны А. А. Буренину и Е. В. Мурашкину за оказанное внимание к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients // *Journal of the mechanics and physics of solids*. 1956. Vol. 4. P. 209–229.
- [2] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
- [3] Паркус Г. Неустоявшиеся температурные напряжения. Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 252 с.
- [4] Боли Б. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964.
- [5] Шевченко Ю. Н. Термопластичность при переменных нагружениях. Киев: Наукова думка, 1970.
- [6] Orcan Y., Gamer U. Elastic–plastic deformation of centrally heated cylinder // *Acta Mechanica*. 1991. Vol. 90. Issue 1–4. P. 61–80.
- [7] Bengeri M., Mack M. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // *Acta Mechanica*. 1994. Vol. 103. P. 243–257.
- [8] Kovacs A. Residual stresses in thermally loaded shrink fits // *Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng.* 1996. Vol. 40, № 2. P. 103–112.
- [9] Буренин А. А., Дац Е. П., Ткачева А. В. К вопросу математического моделирования процесса горячей посадки цилиндрических металлоизделий // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2014. Т. 17, № 3 (59) С. 40–47.
- [10] Дац Е. П., Ткачева А. В., Шпорт Р. В. Сборка конструкции «кольцо в кольце» способом горячей посадки // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2014. № 4 (22). С. 204–213.
- [11] Берникер Е. И. Посадки с натягом в машиностроении. Л.: Машиностроение, 1966. 168 с.

[12] Буренин А. А., Ковтаниук Л. В., Полоник М. В. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // ДАН. 2000. Т. 375, № 6. С. 767–769.

[13] Дац Е. П., Ткачева А. В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015617259 «Математическое моделирование температурных и деформационных процессов, сопровождающих технологию горячей посадки в сборке металлоконструкций», 3 июля 2015.

E. P. Dats, M. R. Petrov, A. V. Tkacheva

PIECEWISE LINEAR PLASTIC POTENTIALS WITHIN THE FRAMEWORK OF THE THEORY OF THE THERMAL STRESSES CONCERNING TO SHRINK FIT

Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok, Russia

Komsomolsk-on-Amur State Technical University, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. Piecewise linear plastic potentials within the framework of the theory of the thermal stresses concerning to shrink fit The boundary problem in the theory of the thermal stresses on shrink fit of cylinder shaped details is solved. The peculiarities of the task formulation and the methods for solution of this task using piecewise linear plastic potentials are considering. The numerical algorithms are proposed in case, when the temperature stresses, sequentially changing under variable yield point, could correspond to different planes and fins of an yield surface. It's mentioned, that such changes at configuration of the plastic flow are influencing considerably on forming of the resulting interference.

Keywords: elasticity, plasticity, shrink fit, thermal stresses, residual deformation, residual stresses

REFERENCES

[1] Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients // Journal of the mechanics and physics of solids. Vol. 4. 1956. pp.– 209–229.

[2] Bykovtsev G. I. Theory of plasticity. Dalnauka, Vladivostok, 1998. (in Russian).

[3] Parkus G. Unsteady thermal stresses . Moscow : State publishing house of physical and mathematical literature, 1963 p. (in Russian).

[4] Boly B., Weiner J. H. Theory of thermal stresses. Moscow: Mir, 1964. (in Russian).

[5] Shevchenko Yu. N. Thermoplasticity with variable loading . Naukova Dumka, Kiev, 1970. (in Russian).

[6] Orcan Y., Gamer U. Elastic–plastic deformation of centrally heated cylinder // Acta Mechanica. Vol. 90. Issue 1–4. 1991. pp. 61–80.

Dats Evgeniy Pavlovich, Assistant, Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok, Russia.

Petrov Mikhail Radionovich, Assistant professor, Komsomolsk-on-Amur State Technical University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Tkacheva Anastasia Valerevna, Research Assistant, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

- [7] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the residual stress field under local thermal actions // *Mechanics of Solids*, №2, 2014, pp. 124–131.
- [8] Kovacs A. Residual Stresses in thermally loaded shrink fits // *Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng.* Vol. 40. №. 2. 1996. pp. 103–112.
- [9] Burenin A. A., Dats E. P., Tkacheva A. V. On the modelling of the shrink fit technology // *Siberian journal of industrial mathematics*. Novosibirsk, Publishing house of the Institute of mathematics. T. 17, № 3 (59), pp. 40–47 . (in Russian).
- [10] Dats E. P., Tkacheva A. V., Shport R. V. The Assemblage of "Ring in Ring" constructions with the shrink fit method // *Chuvash State Pedagogical University IY Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state*, №4 (22), 2014, pp. 204–213. (in Russian).
- [11] Berniker E. I. Interference fit in the Mechanical Engineering . L.: Engineering, 1966. 168 pp. (in Russian).
- [12] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Polonik M. V. Possibility of repeating plastic flow under the general unloading of an elastic-plastic medium // *DAN*. 2000 T. 375, № 6. S.767-769. (in Russian).
- [13] Dats E. P., Tkacheva A. V. Certificate of the software state registration №2015617259 « Mathematical modeling of temperature and deformation processes accompanying a technology of a shrink fit in assembly of metal structures "July 3, 2015 . (in Russian).

В. В. Сильвестров¹, Ю. О. Уракова², И. И. Ильина²

ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ УПРУГОГО КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ ПРИ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ НА СТОРОНАХ РАЗРЕЗА

¹Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина, г. Москва, Россия

²Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Рассматривается антиплоское напряженное состояние кусочно-однородного упругого тела с полубесконечной трещиной вдоль линии раздела сред. На верхнем берегу трещины вдоль конечного интервала, примыкающего к вершине трещины, известны значения продольного смещения. Тело нагружено заданными сдвиговыми напряжениями вдоль берегов трещины и на бесконечности. Задача сводится к матричной краевой задаче Римана с кусочно-постоянным коэффициентом для комплексного потенциала в классе симметричных функций. Комплексный потенциал находится явно с помощью гипергеометрической функции Гаусса. Исследуется напряженное состояние тела вблизи особых точек. Определяются коэффициенты интенсивности напряжений.

Ключевые слова: антиплоский сдвиг, трещина, кусочно-однородное тело, матричная задача Римана, коэффициенты интенсивности напряжений.

УДК: 539.375

Рассматривается кусочно-однородное упругое изотропное тело в пространстве \mathbb{R}^3 , составленное из двух полупространств $y > 0$ и $y < 0$ с модулями сдвигов μ_1 и μ_2 соответственно, в условиях продольного сдвига. Вдоль полуплоскости $y = 0$, $x > 0$ расположена полубесконечная открытая трещина. На верхнем берегу трещины вдоль полосы $y = 0$, $0 \leq x \leq l$ известны значения продольного смещения:

$$w^+(x, 0, z) = s_0, \quad x \in [0, l], \quad z \in (-\infty, +\infty) \quad (1)$$

© Сильвестров В. В., Уракова Ю. О., Ильина И. И., 2015

Сильвестров Василий Васильевич

e-mail: v-silvestrov@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина, г. Москва, Россия.

Уракова Юлия Олеговна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры актуарной и финансовой математики, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Ильина Ирина Игоревна, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00003).

Поступила 20.09.2015

где w – компонента вектора смещений в направлении оси z , $s_0 = const$. Остальная часть верхнего берега трещины и весь нижний берег свободны от напряжений:

$$\begin{aligned}\tau_{yz}^+(x, 0, z) &= 0, \quad x \in (l, +\infty), \quad z \in (-\infty, +\infty), \\ \tau_{yz}^-(x, 0, z) &= 0, \quad x \in (0, +\infty), \quad z \in (-\infty, +\infty).\end{aligned}\quad (2)$$

Верхние индексы «+» и «-» у функций означают их значения на верхнем и нижнем берегах трещины соответственно. Вдоль полуплоскости $y = 0$, $x < 0$ полупространства полностью сцеплены.

На бесконечности полупространств $y > 0$ и $y < 0$ действуют заданные сдвигающие касательные напряжения $\tau_{xz1}^\infty = \tau$ и $\tau_{xz2}^\infty = \mu_2\tau/\mu_1$ соответственно. Известен главный вектор внешних продольных сил P , действующих на единицу высоты полосы $y = 0$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq z \leq 1$.

Требуется определить напряженное состояние тела.

В силу известных соотношений для антиплоского сдвига [1] напряжения и смещения точек составного тела могут быть определены с помощью некоторой аналитической функции $F_*(\zeta)$, $\zeta = x + iy$, по формулам

$$\begin{aligned}\mu_j w'(\zeta) &= \operatorname{Re} F_j(\zeta) \\ \tau_{xz}(\zeta) - i\tau_{yz}(\zeta) &= F_j(\zeta),\end{aligned}$$

где $j = 1$ и $j = 2$ для $0 < \arg \zeta \leq \pi$ и $\pi \leq \arg \zeta < 2\pi$ соответственно, и

$$F_1(\zeta) = F_*(\zeta), \quad F_2(\zeta) = 0.5 \left((\mu_* + 1)F_*(\zeta) + (\mu_* - 1)\overline{F_*(\bar{\zeta})} \right), \quad \mu_* = \mu_2/\mu_1.$$

На линии разрыва $[0, +\infty)$ функция $F_*(\zeta)$ удовлетворяет матричной краевой задаче Римана

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^+(t) &= \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{H}^-(t), \quad t \in (0, 1), \\ \mathbf{H}^+(t) &= \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{H}^-(t), \quad t \in (1, +\infty), \quad t = x/l.\end{aligned}\quad (3)$$

$$\mathbf{H}(\theta) = (H_1(\theta), H_2(\theta))^T, \quad H_1(\theta) = F_*(l\theta), \quad H_2(\theta) = \overline{F_*(l\bar{\theta})}, \quad \theta = \zeta/l,$$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}$$

с условием симметрии

$$\overline{H_1(\bar{\theta})} = H_2(\theta), \quad \overline{H_2(\bar{\theta})} = H_1(\theta).\quad (4)$$

Решение приведенной матричной задачи Римана (3) с кусочно-постоянным коэффициентом находится явно через гипергеометрическую функцию Гаусса. Процедура построения этого решения подробно описана в работе [2], где рассмотрена аналогичная плоская задача. В отличие от плоской задачи в рассматриваемом случае искомые функции $H_1(\theta)$, $H_2(\theta)$ должны удовлетворять дополнительному условию симметрии (4), что существенно усложняет решение задачи (3). В этом случае решение имеет вид

$$H_j(\theta) = (A_0 + A_1\theta)\chi_{j1}(\theta) + A_2\chi_{j2}(\theta), \quad j = 1, 2,\quad (5)$$

где

$$A_0 = \frac{P}{2\pi\sqrt{\xi_1}a\delta l(\alpha - 1)} - 2\lambda(\lambda + 1)A_1, \quad A_1 = \frac{\tau_{xz1}^\infty}{\sqrt{\xi_1}a\delta(\alpha - 1)}, \quad A_2 = -2A_1$$

и

$$\begin{aligned}\xi_{1,2} &= \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (|\xi_1| = |\xi_2| = 1, \quad 0 < \arg \xi_1 < \pi, \quad \pi < \arg \xi_2 < 2\pi), \\ a &= 2\lambda + 1, \quad \lambda = -(2\pi)^{-1} \arccos \alpha, \quad \delta = \pi^{-1/2}(i - \sqrt{\mu_*}).\end{aligned}$$

Функции $\chi_{jk}(\theta)$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2$ – элементы канонической матрицы $\mathbf{X}(\theta)$ задачи (3), которая имеет вид

$$\mathbf{X}(\theta) = \delta\theta^\lambda \mathbf{C} \mathbf{X}_*(\theta),$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \xi_2 & c_2 \xi_1 \\ -c_1 & -c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1 = (\xi_1 - 1)\xi_1(2\lambda + 1)2^{-2\lambda-2}, \quad c_2 = (1 - \xi_2)(2\lambda + 1)2^{2\lambda}$$

и, используя гипергеометрическую функцию Гаусса $F(a, b; c; \theta)$, имеем следующий вид для матрицы $\mathbf{X}_*(\theta)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_*(\theta) &= \begin{pmatrix} F_{11}^1(\theta) & (\lambda + 1)(1 - \theta)F_{12}^1(\theta) \\ \theta^{-2\lambda-1}F_{21}^1(\theta) & \lambda\theta^{-2\lambda-1}(\theta - 1)F_{22}^1(\theta) \end{pmatrix}, \quad |\theta| < 1, 0 < \arg \theta < 2\pi, \\ \mathbf{X}_*(\theta) &= \mathbf{P}^\pm \begin{pmatrix} F_{11}^2(\theta) & \frac{2}{3}\lambda(\lambda + 1)(\theta - 1)F_{12}^2(\theta) \\ (\theta - 1)^{-1/2}F_{21}^2(\theta) & \frac{1}{2}(\theta - 1)^{-1/2}F_{22}^2(\theta) \end{pmatrix}, \quad |\theta - 1| < 1, \operatorname{Im}(\theta) \neq 0, \\ \mathbf{X}_*(\theta) &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \theta^{-(\lambda+1)}F_{11}^3(\theta) & 2\lambda(\lambda + 1)(1 - \theta)\theta^{-\lambda-2}F_{12}^3(\theta) \\ \theta^{-(\lambda+3/2)}F_{21}^3(\theta) & \frac{1}{2}(\theta - 1)\theta^{-(\lambda+3/2)}F_{22}^3(\theta) \end{pmatrix}, \quad |\theta| > 1, 0 < \arg \theta < 2\pi, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_{1j}^1(\theta) &= F(\lambda + 1 + \varepsilon_j, \lambda + \frac{3}{2}; 2\lambda + 2; \theta), \quad F_{2j}^1(\theta) = F(-\lambda + \varepsilon_j, \frac{1}{2} - \lambda; -2\lambda; \theta), \\ F_{1j}^2(\theta) &= F(\lambda + 1 + \varepsilon_j, \lambda + \frac{3}{2}; \frac{3}{2} - \varepsilon_j; 1 - \theta), \quad F_{2j}^2(\theta) = F(\lambda + 1 - \varepsilon_j, \lambda + \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \varepsilon_j; 1 - \theta), \\ F_{1j}^3(\theta) &= F(\lambda + 1 + \varepsilon_j, -\lambda + \varepsilon_j; \frac{1}{2} + \varepsilon_j; \theta^{-1}), \quad F_{2j}^3(\theta) = F(\lambda + \frac{3}{2}, \frac{1}{2} - \lambda; \frac{3}{2} - \varepsilon_j; \theta^{-1}), \end{aligned}$$

$j = 1, 2$ и $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$. Матрицы \mathbf{P}^\pm , \mathbf{Q} даются соотношениями

$$\mathbf{P}^+ = \begin{pmatrix} -a2^a & i2^a \\ a2^{-a} & i2^{-a} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^- = \operatorname{diag}(1, \xi_1^2)\mathbf{P}^+, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\xi_1^{-1/2}2^a & i\xi_1^{-1/2}a2^a \\ \xi_1^{1/2}2^{-a} & i\xi_1^{1/2}a2^{-a} \end{pmatrix}.$$

У многозначных функций θ^p и $(\theta - 1)^q$ берутся ветви, однозначные в плоскости с разрезами $[0, +\infty)$ и $[1, +\infty)$ соответственно, определяемые условиями $0 < \arg \theta < 2\pi$ и $0 < \arg(\theta - 1) < 2\pi$.

На основании решения (5) исследована асимптотика напряжений вблизи точек $\zeta = 0$ и $\zeta = l \pm i0$, определены коэффициенты интенсивности напряжений вблизи этих точек.

В данном случае напряжения на правом конце накладки $\zeta = l + i0$ имеют традиционную степенную особенность порядка $1/2$, а в точке $\zeta = l - i0$ они ограничены. Вблизи вершины трещины $\zeta = 0$ на линии соединения полупространств $y = 0$, $x < 0$ поведение напряжений характеризуется асимптотикой:

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = -\frac{iK_{\text{III}}^2(0)}{\sqrt{2\pi}|x|^{1-\gamma}}e^{-i\pi(1-\gamma)} - \frac{iK_{\text{III}}^1(0)}{\sqrt{2\pi}|x|^\gamma}e^{-i\pi\gamma} + O(1), \quad x \rightarrow 0 - 0,$$

где $\gamma = (2\pi)^{-1} \arccos[(\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)]$, $\gamma \in (1/2, 1)$, $K_{\text{III}}^1(0)$, $K_{\text{III}}^2(0)$ – коэффициенты интенсивности сдвигающих напряжений вблизи вершины трещины – имеют вид

$$K_{\text{III}}^1(0) = \sqrt{2}a2^{-a}l^\gamma(A_0 + (1 - \gamma)A_2), \quad K_{\text{III}}^2(0) = \sqrt{2}a2^a l^{1-\gamma}(A_0 + \gamma A_2).$$

Графики зависимости коэффициентов $K_{\text{III}}^1(0)$, $K_{\text{III}}^2(0)$ от отношения модулей сдвигов $\mu_* = \mu_2/\mu_1$ приведены на рис.1. Здесь представлен случай растяжения плоскости на бесконечности напряжениями $\tau_{xz1}^\infty = \tau$, $\tau_{xz2}^\infty = \mu_2\tau/\mu_1$ и отсутствия всех остальных

исходных нагрузок и случай, когда отличен от нуля лишь главный вектор внешних сил P , приложенных к полосе $y = 0$, $0 \leq x \leq l$.

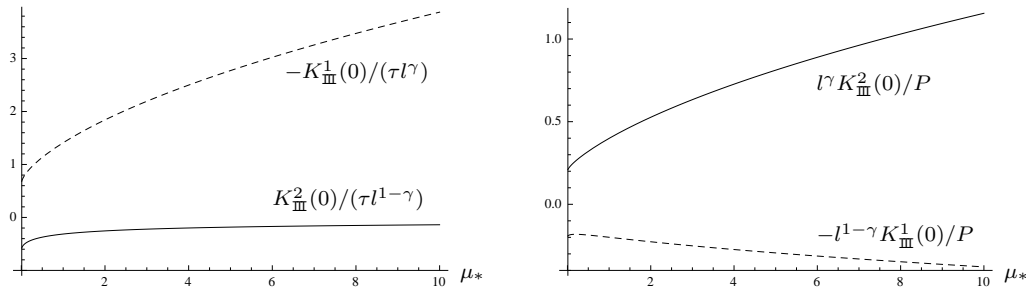


Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Sih G. C. Stress distribution near internal crack tip for longitudinal shear problems // J. Appl. Mech. 1965. Vol. 32. P. 51–58.

[2] Васильева Ю. О., Сильвестров В. В. Задача о межфазной трещине с жесткой накладкой на части ее берега // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 6. С. 1017–1037.

V. V. Silvestrov, Yu. O. Urakova, I. I. Ilina

LONGITUDINAL SHEAR OF AN ELASTIC PIECEWISE-HOMOGENEOUS SPACE WITH A SEMI-INFINITE CUT UNDER MIXED BOUNDARY CONDITIONS ON THE SIDES OF THE CUT

Russian State University of Oil and Gas, Moscow, Russia

Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. Antiplane stress state of a piecewise-homogeneous elastic body with a semi-infinite crack along the interface is considered. The longitudinal displacements along one of the crack edges on a finite interval, adjacent to the crack tip, are known. Shear stresses are applied to the body along the crack edges and at infinity. The problem reduces to a Riemann-Hilbert boundary-value matrix problem with a piecewise-constant coefficient for a complex potential in the class of symmetric functions. The complex potential is found explicitly using a Gaussian hypergeometric function. The stress state of the body close to the singular points is investigated. The stress intensity factors are determined.

Keywords: antiplane shear, crack, piecewise-homogeneous body, matrix Riemann-Hilbert problem, stress intensity factors.

Silvestrov Vasily Vasilyevich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematics, Russian State University of Oil and Gas, Moscow, Russia.

Urakova Iuliia Olegovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Lecturer of the

REFERENCES

- [1] Sih G. C. Stress distribution near internal crack tip for longitudinal shear problems // J. Appl. Mech. 1965. Vol. 32. P. 51–58.
- [2] Vasileva Yu. O., Silvestrov V. V. The problem of interfacial crack child grip on parts of its shore // Applied Mathematics and Mechanics. 2011. Vol. 75. Issue 6. P. 1017–1037. (in Russian).

Department of Actuarial and Financial Mathematics, Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Irina Irina Igorevna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

С. Г. Жилин, И. Г. Сапченко, О. Н. Комаров

УПРУГИЙ ОТКЛИК ПРЕССОВОК ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ ГЕТЕРОГЕННЫХ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются процессы получения прессовки из гетерогенных порошковых материалов. Основной проблемой при деформировании порошковой системы является анизотропия получаемой прессовки, результатом которой является неравномерный упругий отклик. На основе экспериментальных данных предложены варианты решения проблемы: прессование гетерогенной порошковой системы с высоким содержанием упругих элементов рекомендуется при понижении скорости ее деформирования с целью достижения равномерного распределения плотности. Такой подход позволяет получить прессовку с равномерным упругим откликом, прогнозировать и учитывать ее размерную точность при проектировании пресс-оснастки.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, прессование, пористость, гетерогенные материалы, размерно-геометрическая точность, упругий отклик.

УДК: 621.74.045

В машиностроении металлические заготовки получают преимущественно литьем. Поверхность таких заготовок, как правило, нуждается в механической обработке. Для получения точных металлоизделий, особенно в случаях, когда механическая обработка не представляется возможной или недопустима, их получают литьем по выплавляемым моделям (ЛВМ) [1]. Основные технологические операции в ЛВМ выполняются в следующем порядке: изготовление моделей заливкой, либо запрессовкой жидкого (или

© Жилин С. Г., Сапченко И. Г., Комаров О. Н., 2015

Жилин Сергей Геннадьевич

e-mail: zhilin@imim.ru, кандидат технических наук, доцент, заведующий лабораторией, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Сапченко Игорь Георгиевич

e-mail: mail@imim.ru, доктор технических наук, доцент, заместитель директора по научным вопросам, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Комаров Олег Николаевич

e-mail: autor@imim.ru, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта ДВО РАН (проект 15-I-4-018).

Поступила 25.09.2015

в виде пасты) воскообразного модельного состава в пресс-форму, извлечение затвердевшей выплавляемой модели (ВМ); сборка элементов литниково-питающей системы в модельный блок; изготовление керамической оболочковой формы (КОФ) послойным нанесением на блок моделей жидкой огнеупорной суспензии с последующей сушкой; выплавление модельного блока из КОФ; прокаливание КОФ и их заливка расплавом. Для достижения высокой размерно-геометрической точности (РГТ) отливок ВМ получают прессованием порошков, в качестве которых используются воскообразные материалы. При этом уплотнение материала ВМ осуществляют до технологически обусловленной пористости $P=10\%$, которая, в свою очередь, регламентируется технологически допустимой прочностью получаемой прессовки.

Такой прием позволяет устранить усадочные явления, поверхностные неровности, обеспечить равномерное распределение напряжений модельного материала, существенно снизить напряжения, возникающие в КОФ в процессе выплавления ВМ [2], [3]. Однако, при получении таких ВМ возможно появление дефектов, связанных с упругим последствием прессуемого модельного материала, возникающем после снятия нагрузки. При осуществлении прессования порошка модельной композиции (МК) образуются области его неравномерного уплотнения с различным упругим последствием, что ведет к снижению РГТ прессовок. В результате неравномерности уплотнения и упругого последствия более плотных участков ВМ после получения отливки требуется их механическая доработка. Задачей исследований является изучение особенностей получения ВМ с равномерным распределением свойств по объему [4]. Достижение данного эффекта возможно при соблюдении достаточного узкого интервала таких технологических параметров, как скорость прессования, гранулометрический состав модельных материалов и др. [5], [6]. Отечественная и зарубежная практика получения точного литья достоверными сведениями о технологических режимах изготовления таких моделей и их конечных свойствах не располагает.

Снижение влияния упругого последствия прессовок на их РГТ возможно при использовании гетерогенных равнотрационных модельных материалов, состоящих из растворимых компонентов шаровидной формы и воскообразных полимерных материалов [7]. Форма компонентов МК обуславливается их потенциалом к самопроизвольному равномерному распределению в полости пресс-формы как перед началом формовки, так и по завершении последней. Содержание растворимого компонента в составе прессованной ВМ определяется технологической целесообразностью. Такие ВМ удаляются из КОФ в 2 стадии: растворение включений и выплавление воскообразного материала связи. Этим достигается устранение терморасширяющего воздействия модельной массы на внутреннюю поверхность КОФ при удалении ВМ. Диапазон технологически обоснованного содержания гранул растворимого компонента в объеме прессовки составляет 25-50%.

Таким образом, целью эксперимента является установление предпочтительных режимов прессования гетерогенных порошковых модельных материалов, при которых достигается равномерная плотность в объеме прессовки, позволяющая учесть упругий отклик последних при проектировании пресс-оснастки [8].

Идеализированный процесс уплотнения порошковых материалов выражается зависимостью плотности прессовки от давления прессования и характеризуется основными стадиями [4]. Первая – интенсивное уплотнение порошка, связанное со свободным неравномерным перемещением частиц под действием внешних сил, сопровождающееся разрушением «арок» – структурная деформация порошкового тела. Вторая стадия

характеризуется максимально плотной упаковкой частиц порошка, сопротивляющихся сжатию, при котором давление прессования возрастает, плотность некоторое время не увеличивается, а пластическая деформация в приконтактной зоне носит ограниченный локальный характер. Когда давление прессования превышает сопротивление сжатию частиц порошка, пластическая деформация охватывает весь объем каждой частицы, смещение межчастичных контактов прекращается и они фиксируются.

На практике при прессовании порошков происходит взаимное наложение стадий порошкового тела, протекающих одновременно. Деформация отдельных частиц начинается при малых давлениях прессования (например: порошка модельной массы ПС50/50, содержащей равное количество парафина и стеарина), в то время как скольжение некоторых частиц наблюдается и при высоких давлениях. Поэтому преимущественное значение для уплотнения порошка имеет перемещение частиц на первой стадии (чем пластичнее материал, тем при более низких давлениях начинается уплотнение, связанное с деформацией частиц). Для материалов с относительно высоким пределом текучести начальная и конечная стадии уплотнения резко разграничены.

Равномерность физико-механических свойств в объеме прессовки, состоящей в данном случае из двух компонентов, зависит от пропорционально равного их удельного содержания в каждом участке подвергающейся прессованию гетерогенной смеси. Распределение компонентов в гетерогенной смеси происходит преимущественно на второй стадии прессования, при этом равномерное их расположение локализует очаги деформации полимерного компонента в окрестности более плотного компонента смеси, что позволит получить равномерный упругий отклик сформированной системы после извлечения из пресс-матрицы.

Для проведения натурального эксперимента выбраны различные по плотности материалы шаровидной формы ($\Phi = \text{metricconverterProductID10 мм10 мм}$): полимерный – парафин марки Т1 и имитатор растворимого компонента гетерогенной смеси – стальные шары. Считаем, что стальные шары, используемые в данном эксперименте, не деформируются и служат для передачи энергии прессования полимерным компонентам смеси. Компоненты гетерогенной смеси располагались в пресс-форме в один слой (рис.1). Начальная стадия уплотнения представленной системы имеет кубическую упаковку ее компонентов в пресс-матрице.

На рис. 2 и 3 представлены диаграммы значений сил (Н) и перемещений (мм) пресс-пуансона при одностороннем прессовании гетерогенных материалов со скоростью 0,5 мм/с и 3 мм/с соответственно. При этом диаграммы визуализируют этапы прессования, соответствующие завершению второй стадии описанного выше идеализированного процесса, при которой достигается кубическая упаковка элементов, а деформация в приконтактной зоне сферических элементов системы носит ограниченно-локальный характер. Завершение этой стадии представляется весьма условным и, в общем случае, иллюстрирует фактическое распределение элементов в системе, после которого начинается пластическое течение воскообразного компонента. Представленные на рис. 2 и 3 иллюстрации соответствуют перемещениям пресс-пуансона $\text{metricconverterProductID35 мм35 мм}$ (т.е. $\sim 40\%$ от начальной высоты упаковки компонентов в пресс-форме), при которых объемная плотность ($\rho_{об}$) воскообразных компонентов смеси составляет 1,3–1,4 насыпной плотности ($\rho_{нас}$). При этом насыпная плотность рассматриваемой в эксперименте фракции воскообразного материала составляет $\rho_{нас} = 0,5 \text{ кг/м}^3$. Дальнейшее прессование характеризуется интенсивным

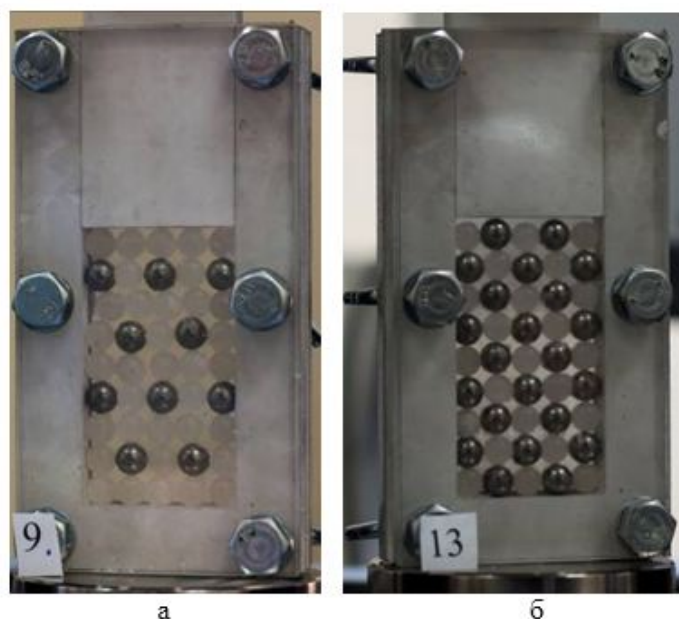


Рис. 1. Варианты расположения компонентов в деформируемом слое: а – вариант 1; б – вариант 2

увеличением сопротивлению прессования при относительно небольших перемещениях пресс-пуансона во всех рассматриваемых случаях.

Анализ полученных зависимостей (рис. 2) показывает, что вторая стадия при скорости прессования 0,5 мм/с (т.е. $\sim 0,55\%/с$ от начальной высоты материала в пресс-матрице) более выражена в МК с 50% содержанием недеформирующихся элементов (рис.1б). Внешний вид прессовок, соответствующий 40%-му их деформированию показывает, что распределение твердого компонента в случае с 25% его содержанием в системе представляется менее упорядоченным.

Для зависимостей, представленных на рис.3, полученных при перемещении пресс-пуансона со скоростью 3 мм/с, характерно незначительное расхождение значений до момента, соответствующего 30% деформации уплотняемой системы. В этот момент в прессовке плотность повышается фронтально, в направлении от пресс-пуансона к нижним слоям. Стадия максимального уплотнения компонентов системы завершается и начинается деформация ее воскообразных элементов во всем объеме прессовки. При этом различие зависимостей перемещений от силы прессования у различных вариантов размещения элементов в прессовке увеличивается. Очевидно, что для деформирования элементов системы с большей плотностью (т.е. по варианту 2) затрачиваются более значительные усилия. Скорость прессования, равная 3 мм/с, является технологическим порогом. Ее превышение не позволяет получить прессовку с равномерным упругим откликом.

Таким образом, завершение второй классической стадии уплотнения прессовки при различных вариантах начальной плотности систем и скоростей уплотнения различно. Технологически оптимальным представляется вариант распределения элементов в уплотняемой системе, при котором удельная плотность в любом участке прессовки

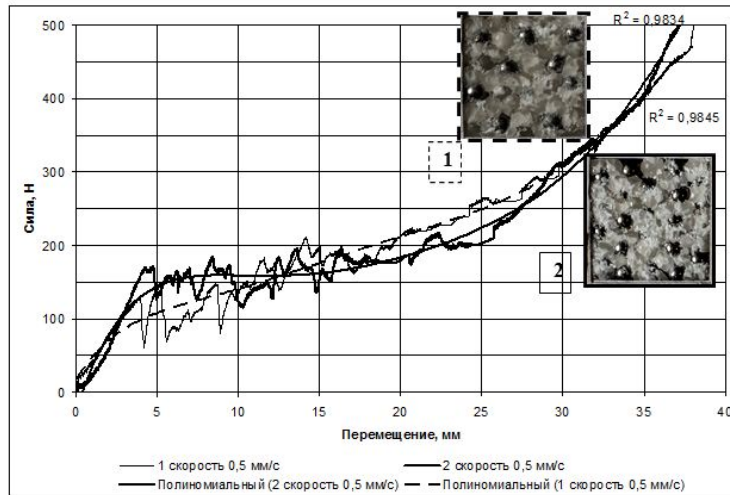


Рис. 2. Зависимость перемещения (мм) от силы (Н) пресс-пуансона при одностороннем прессовании со скоростью 0,5 мм/с:
1) вариант 1 по рис. 1а; 2) вариант 2 по рис. 1б

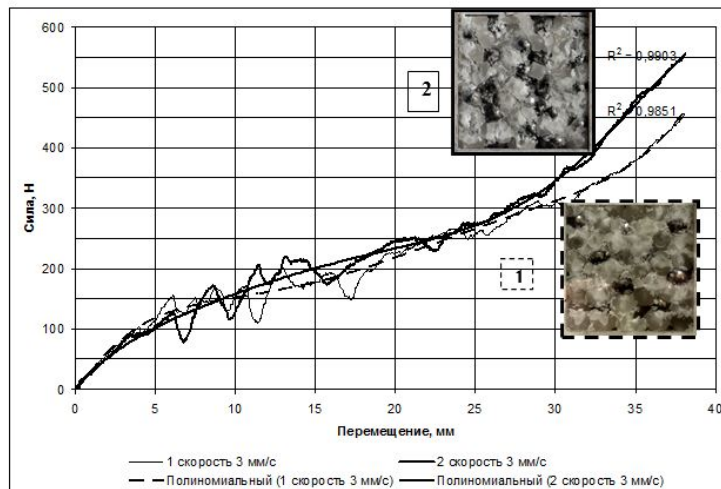


Рис. 3. Зависимость перемещения (мм) от силы (Н) пресс-пуансона при одностороннем прессовании со скоростью 3 мм/с:
1) вариант 1 по рис. 1а; 2) вариант 2 по рис. 1б

одинакова по завершении 2-й стадии уплотнения. Оценка влияния начальной плотности гетерогенной системы (т.е. различных вариантов содержания разноплотностных элементов) на завершение 2-й стадии прессования представляется важной. На рис. 4 представлены результаты сравнительного анализа абсолютных значений усилий прессования гетерогенных систем по вариантам 1 и 2 (см. рис. 1) с итерацией значений перемещения равным $\text{metricconverterProductID}5 \text{ мм}^5 \text{ мм}$. Левая часть каждого значения представляет абсолютную разницу сил при скорости 0,5 мм/с (по рис. 2) и скорости 3 мм/с (по рис. 3) соответственно.

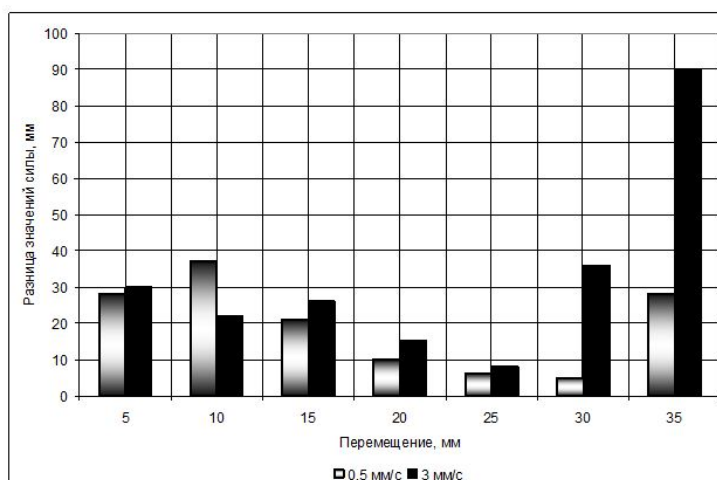


Рис. 4. Расхождение абсолютных значений сил при прессовании гетерогенных систем по вариантам 1 и 2 при скорости 0,5 мм/с (слева) и 3 мм/с (справа)

Из рис. 4 видно, что при 30-40%-м деформировании системы (т.е. в условиях данного эксперимента при перемещении пресс-пуансона более чем на $\text{metricconverterProductID30 мм} \times 30 \text{ мм}$) различия в усилиях прессования становятся значительными. При увеличении скорости перемещения пресс-пуансона происходит дестабилизация распределения плотности в уплотняющейся гетерогенной системе.

Таким образом, на равномерность упругого отклика уплотняемой гетерогенной системы при начальной изотропности системы оказывают влияние соотношение разнородных компонентов в системе и скорость прессования. Прессование гетерогенной порошковой системы с высоким содержанием упругих элементов рекомендуется при понижении скорости ее деформирования с целью достижения равномерного распределения плотности. Такой подход позволяет получить прессовку с равномерным упругим откликом, прогнозировать и учитывать ее размерную точность при проектировании пресс-оснастки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Литье по выплавляемым моделям / под. общ. ред. В. А. Озерова. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1994. 448 с.
- [2] Сапченко И. Г., Жилин С. Г., Комаров О. Н. Управление структурой и свойствами пористых комбинированных удаляемых моделей. Владивосток: Дальнаука, 2007. 138 с.
- [3] Сапченко И. Г., Некрасов С. А., Жилин С. Г., Штерн М. В. Напряженно-деформированное состояние оболочковых форм в литье по выплавляемым моделям. Комсомольск-на-Амуре: ИМиМ ДВО РАН, 2005. 156 с.
- [4] Сапченко И. Г., Жилин С. Г., Комаров О. Н., Соснин А. А. Особенности формирования и разрушения прессовок из полимерного порошкового материала // Успехи механики сплошных сред. Сборник докладов Международной конференции, приуроченной к 75-летию академика В. А. Левина. Иркутск: ООО "Мегапринт", 2014. С. 428–432.

[5] Жилин С. Г., Сапченко И. Г., Комаров О. Н. Определение свойств пористых удаляемых моделей // Литейное производство. 2006. № 7. С. 29–30.

[6] Сапченко И. Г., Жилин С. Г., Комаров О. Н. Усовершенствование технологии получения точных металлоизделий в литье по выплавляемым моделям // Заготовительные производства в машиностроении. 2009. № 4. С. 9–12.

[7] Пат. 2227770 РФ, Способ изготовления удаляемых моделей. Сапченко И. Г., Жилин С. Г.; опубл. 27.04.2004, Бюл. № 12.

[8] Сапченко И. Г., Жилин С. Г., Евстигнеев А. И. Об особенностях проектирования и использования оснастки при изготовлении пористых выплавляемых моделей // Литейное производство. 2010. № 2. С. 26–31.

S. G. Zhilin, I. G. Sapchenko, O. N. Komarov

ELASTIC RESPONSE OF COMPACTS FROM HETEROGENEOUS POWDER MATERIALS DURING THE DEFORMATION PROCESS

Institute of Machinery and Metallurgy FEBRAS, Komsomolsk-na-Amure

Abstract. In this paper the processes of obtaining compacts from heterogeneous powder materials are investigated. The main problem, during the deformation of the powder system, is anisotropy of obtained compact, which results in non-uniform elastic response. Options for solution of problem, based on experimental data, are offered: pressing heterogeneous magnetic systems with high elastic members is recommended for decreasing the velocity of its deformation in order to achieve a uniform density distribution. This approach permits obtaining compact with uniform elastic response, predict and take into account its dimensional accuracy during designing equipment for pressing.

Keywords: stress and strain state, pressing, porosity, heterogeneous materials, dimensional-geometrical accuracy, elastic response.

REFERENCES

[1] Лит'е по выплавляемым моделям / Под. общ. ред. В. А. Озерова. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Mashinostroenie, 1994. 448 p. (in Russian).

[2] Sapchenko I. G., Zhilin S. G., Komarov O. N. Upravlenie struktur i svojstvami poristyh kombinirovannyh udalyaemyh modelej. CityplaceVladivostok, Dal'nauka, 2007. 138 p. (in Russian).

Zhilin Sergey Gennadyevich

e-mail: zhilin@imim.ru, PhD, Assistant Professor, Head of the Laboratory of Chemical and Phase Transformation in Materials, Institute of Machinery and Metallurgy FEBRAS, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Sapchenko Igor Georgiyevich

e-mail: mail@imim.ru, Doctor of Technical Sciences, Assistant Professor, Deputy Director of Science, Institute of Machinery and Metallurgy FEBRAS, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Komarov Oleg Nikolayevich

e-mail: olegnikolaevitsch@rambler.ru, PhD, Assistant Professor, Leading Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy FEBRAS, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

[3] Sapchenko I. G., Nekrasov S. A., ZHilin S. G., SHtern M. V. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie obolochkovykh form v lit'e po vyplavlyаемым modelyam // Komsomol'sk-na-Amure: IMiM DVO RAN, 2005. 156 p. (in Russian).

[4] Sapchenko I. G., ZHilin S. G., Komarov O. N., Sosnin A. A. Osobennosti formirovaniya i razrusheniya pressovok iz polimernogo poroshkovogo materiala // Uspekhi mekhaniki sploshnykh sred. Sbornik dokladov Mezhdunarodnoj konferencii, priurochennoj k 75-letiyu akademika V. A. Levina. CityplaceIrkutsk: ООО "Megaprint", 2014. P. 428–432. (in Russian).

[5] ZHilin S. G., Sapchenko I.G., Komarov O. N. Opredelenie svojstv poristykh udalyaemykh modelej // Litejnoe proizvodstvo. 2006. № 7. P. 29–30. (in Russian).

[6] Sapchenko I. G., ZHilin S. G., Komarov O. N. Uovershenstvovanie tekhnologii polucheniya tochnykh metalloizdelij v lit'e po vyplavlyаемым modelyam // Zagotovitel'nye proizvodstva v mashinostroenii. 2009. № 4. P. 9–12. (in Russian).

[7] Pat. 2227770 RF, Sposob izgotovleniya udalyaemykh modelej. Sapchenko I. G., ZHilin S. G.: opubl. 27.04.2004, Byul. № 12. (in Russian).

[8] Sapchenko I. G., ZHilin S. G., Evstigneev A. I. Ob osobennostyakh proektirovaniya i ispol'zovaniya osnastki pri izgotovlenii poristykh vyplavlyаемым modelej // Litejnoe proizvodstvo. 2010. № 2. P. 26–31. (in Russian).

К. З. Хайрнасов

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛОПАСТЕЙ ДВИГАТЕЛЕЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г.
Москва, Россия*

Аннотация. В статье рассматриваются собственные колебания лопаток винтовентилятора при действии центробежных и газовых нагрузок при различном сочетании стеклопластика и углепластика и ориентации основы материала. Лопатка рассматривается как естественно закрученный стержень. Принимаются справедливыми гипотезы плоских сечений по толщине пакета, материал подчиняется закону Гука. Задачей исследования собственных частот и форм колебаний лопастей двигателей является определение соотношения композиционных материалов и их ориентации, при котором достигаются наибольшая разнесенность изгибных и крутильных частот колебаний, а также общая разнесенность частот с целью избежать широкого резонансного фронта и наложения резонансных частот. При этом при прочих равных условиях необходимо добиться как можно более высокого уровня частот колебаний. Выявлено соотношение, при котором достигаются наибольшая разнесенность и наибольший уровень частот колебаний. По результатам исследований динамических характеристик предложена наиболее компромиссная структура лопатки. Приводится сопоставление результатов для лопатки из композита и титана для двигателей летательных аппаратов.

Ключевые слова: лопасти двигателей, колебания, композиционные материалы, метод конечных элементов, аналитические методы.

УДК: 624.074:678.067

Применение композиционного материала находит все большее распространение в областях техники, предъявляющих повышенные требования к прочностным и динамическим характеристикам. Это относится и к лопаткам винтовентиляторов, применяемых в турбинах реактивных двигателей, компрессорах и других конструкциях. В связи с этим важно провести исследование лопаток винтовентилятора, изготовленных из композиционных материалов.

Геометрия лопатки и необходимые обозначения показаны на рисунке 1.

При исследовании частотных характеристик лопатка моделируется четырехузловыми конечными элементами естественной кривизны, имеющими форму произвольного четырехугольника и полностью совместимыми по геометрии и перемещениям [1].

© Хайрнасов К. З., 2015

Хайрнасов Камилль Зайнутдинович

e-mail: kamilh@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия.

Поступила 12.10.2015

Этот конечный элемент учитывает деформацию поперечного сдвига, обжатие нормали и инерцию вращения и имеет 48 степеней свободы (по 12 в каждом узле). В качестве узловых перемещений принимаются три линейных перемещения u_1^i, u_2^i, u_3^i , шесть производных от этих перемещений по криволинейным координатам к поверхности оболочки $\frac{1}{A_1}u_1^{\alpha_1}, \frac{1}{A_1}u_2^{\alpha_1}, \frac{1}{A_1}u_3^{\alpha_1}, \frac{1}{A_2}u_1^{\alpha_1}, \frac{1}{A_2}u_2^{\alpha_1}, \frac{1}{A_2}u_3^{\alpha_1}$, два угла поворота γ_1, γ_2 и “угол” обжатия нормали γ_3 .

Линейные перемещения аппроксимируются бикубическими, а углы поворота и обжатия – билинейными полиномами относительно узловых неизвестных. В элементе представлен 21 силовой фактор срединной поверхности $\{N\}$ и соответствующий им вектор компонент деформаций $\{e\}$:

$$\{N\} = [N_1, N_2, N_3, M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, S_{12}, H_{11}, H_{12}],$$

$$[S_{21}, H_{21}, H_{22}, Q_{12}, P_{13}, Q_{21}, P_{22}, P_{23}, N_3].$$

Обозначая вектор перемещений через $\{S\} = (u_1, u_2, u_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6)$, можно записать:

$$\{S\} = [L] \{q\}^e; \{e\} = [d] \{S\} = [B] \{q\}^e = [D] [d] \{q\}^e,$$

где $[B] = [d] [L]$ – матрица аппроксимирующих функций; $[D]$ – матрица упругих характеристик материала [1]; $\{q\}^e$ – вектор узловых перемещений элемента; $[d]$ – операторная матрица.

Опуская промежуточные выкладки, матрицы жесткости и масс можно записать в виде

$$[K]^e = \iint [B]^T [D] [B] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2;$$

$$[M]^e = \iint [L]^T [\rho] [L] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dz,$$

через $[S]^e [S]^e$ здесь обозначена поверхность элемента.

Объединение матриц элементов в глобальные матрицы производится по известным правилам.

Уравнение собственных колебаний в принятых в методе конечных элементов обозначениях имеет вид

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = 0,$$

где $\{q\}$ – вектор узловых перемещений, точки над буквой обозначают дифференцирование по времени.

Нахождение собственных частот и форм колебаний сводится к определению собственных значений и собственных векторов матрицы $[K]^{-1} [M]$ уравнения 1.

Проблема собственных значений и собственных векторов в настоящем исследовании решается методом итераций в подпространстве [3].

Задачей исследования собственных частот и форм колебаний является определение соотношения композиционных материалов и их ориентации, при котором достигаются наибольшая разнесенность изгибных и крутильных частот колебаний, общая разнесенность частот с целью избежать широкого резонансного фронта и наложения

резонансных частот. При этом при прочих равных условиях необходимо добиться как можно более высокого уровня частот колебаний.

Исследовалось влияние слоев, расположенных под углом ноль градусов к осевым линиям кривизны в наружных слоях лопасти, на частотные характеристики. При этом для восприятия сдвиговых напряжений 25 слоев от толщины принимались перекрестными $\pm 15^\circ$, $\pm 30^\circ$, $\pm 15^\circ$.

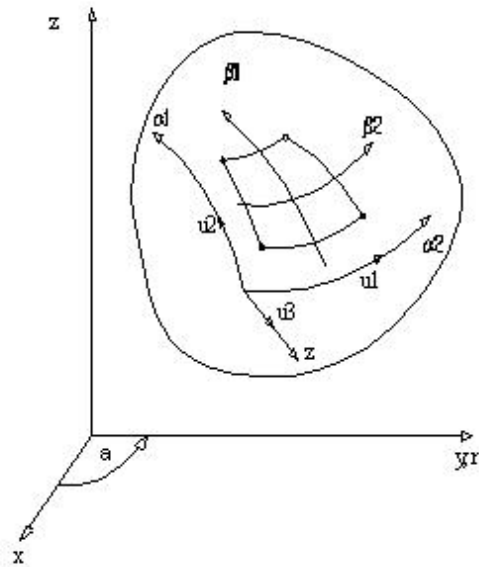


Рис. 1. Конечный элемент

В результате проведенного исследования выявлено, что наибольший уровень частот колебаний достигается для углепластиковой лопасти с расположением основы по линиям кривизны в направлении оси лопасти. Повышение содержания стеклопластика снижает уровень частотных характеристик, при этом разнесенность частот практически не изменяется (см. табл. 1). Уменьшение содержания стеклопластика в периферийных слоях основы, расположенной под углом ноль градусов к оси, ведет к снижению частотных характеристик. Минимальный уровень частот получается при расположении всех слоев по линиям кривизны в направлении, перпендикулярном оси лопасти.

Из сопоставления частот композиционной и титановой лопастей (см. табл. 1) видно, что композиционная лопасть дает более высокий уровень первого тона. В то же время разнесенность частот хуже для композиционной лопасти.

Таблица 1

Собственные частоты колебаний композиционной и титановой лопасти
 структуры: $h1\ 0^\circ y / h2\ 0^\circ c / 0.9 \pm 15^\circ y / 0.9 \pm 15^\circ c / 1.2 \pm 30^\circ y / 1.2 \pm 30^\circ c$
 $/ 0.9 \pm 15^\circ y / 0.9 \pm 15^\circ c / 0.9 \pm 15^\circ c / h3\ 0^\circ y //$ симметрично

Структура			Собственные частоты, Гц					
h1	h2	h3	1 тон	2 тон	3 тон	4 тон	5 тон	6 тон
7.4	1.6	7.0	42.95	108.94	209.93	262.32	404.91	503.04
4.5	4.5	7.0	40.91	104.79	208.60	237.42	366.88	496.00
2.8	6.2	7.0	40.36	101.86	202.52	235.65	377.98	503.44
0.5	8.5	7.0	40.34	99.24	191.61	244.50	373.94	507.17
9.0	0.0	7.0						
Все слои из УОЛ			43.92	111.75	212.82	271.63	409.91	525.17
0.0	9.0	7.0						
Все слои из Т-25-ВМ-78			32.25	82.82	155.23	217.45	334.32	396.41
4.5	4.5	7.0						
Все слои 0°			45.62	110.72	209.36	255.10	398.33	
4.5	4.5	7.0						
Все слои 90°			18.41	57.91	103.52	155.44	234.01	
4.5	4.5	7.0						
Титан			32.34	97.46	155.23	276.51	403.52	

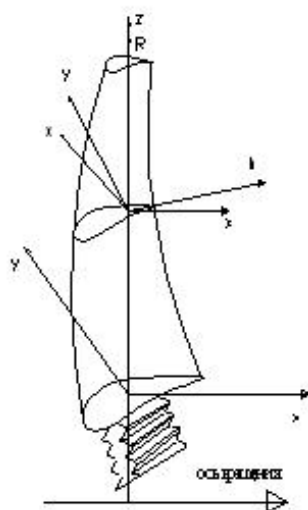


Рис. 2. Расположение осей лопасти винтовентилятора

Таким образом, основываясь на проведенных расчетах, можно сказать, что лопасти, выполненные из композиционного материала, имеют значительные преимущества по динамическим характеристикам по сравнению с лопастями, выполненными из материалов, традиционно применяемых в технике при изготовлении винтовентиляторов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кузнецов Н. Д., Карташов Г. Г. Собственные колебания слоистых анизотропных пластин и пологих оболочек // Прикл. механика. 1981. Т. 17, № 4. С. 31–37.
- [2] Веселов С. И., Карташов Г. Г. Композиционные материалы в авиадвигателестроении. Куйбышев, 1986. 121 с.
- [3] Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982.

K. Z. Khayrnasov

RESEARCH OF FREQUENCY CHARACTERISTICS OF BLADES OF ENGINES FROM COMPOSITE MATERIAL

Abstract. Consider frequency of blade from composites materials. The worked out methodology and algorithms. Determination of the influence of the location of the layers of composite material on the frequency characteristics of the blades of the engines. A method of designing there were user: finite-element methods and also analytical methods. The worked out methodology and algorithms allow: to define frequency characteristics of blades; optimize characteristics of blades of different characteristic composite materials.

Keywords: blades of engine, frequency, composite materials, finite element methods, analytical methods.

REFERENCES

- [1] Kuznetsov N. D., Kartashov G. G. Natural oscillations layered anisotropic plates and shallow shells // Applied mechanics. 1981. Vol. 17, № 4. P. 31–37.
- [2] Veselov S. I., Kartashov G. G. Composite materials aircraft engine. Kuibyshev, 1986. 121 p.
- [3] Bath K., Wilson E. Numerical methods for the analysis and the method of finite element. M.: Stroyizdat, 1982.

Khayrnasov Camille Zainutdinovich, Candidate of Engineering Science, Associate professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia.

А. Л. Григорьева, А. И. Хромов

ОДНООСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г.
Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Рассматривается задача об одноосном растяжении жесткопластической полосы в условиях плоского напряженного состояния при конечных деформациях и однородном поле скоростей деформаций. Строится поле скоростей деформаций, соответствующее однородному деформированию полосы, и определяется поле конечных деформаций в пластической области. В качестве меры деформаций используется тензор конечных деформаций Альманси.

Ключевые слова: жесткопластическое тело, тензор конечных деформаций, тензор скоростей деформаций.

УДК: 539.3

Постановка задачи. Задачи о одноосном растяжении плоских и цилиндрических образцов в условиях плоской и осесимметричной деформации рассматривались в работах [1], [2], [3]. Алгоритм решения рассматриваемой задачи в целом соответствует указанным работам.

Пусть полоса длиной l_0 , шириной a_0 и толщиной f_0 растягивается при кинематических граничных условиях на концах полосы со скоростью V , $a_0 \ll f_0$ (рис. 1). В качестве условия пластичности используется условие Мизеса, связывающее компоненты тензора напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} соотношением:

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 = 3k^2 \quad (1)$$

Согласно [4] компоненты вектора скоростей перемещений V_x , V_y связаны с компонентами тензора напряжений уравнениями:

© Григорьева А. Л., Хромов А. И., 2015

Григорьева Анна Леонидовна

e-mail: nja198282@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой «Высшая математика», Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Хромов Александр Игоревич

e-mail: khromovai@list.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Поступила 02.10.2015

$$\frac{\frac{\partial V_x}{\partial x}}{2\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\frac{\partial V_y}{\partial y}}{2\sigma_y - \sigma_x} = \frac{\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}}{6\tau_{xy}}, \quad (2)$$

которые следуют из соотношений СенВенана–Мизеса для жесткопластического тела [4].

Граничные условия для напряжений:

$$y = 1, \quad \sigma_y = 2k; \quad y = -1, \quad \sigma_y = 2k. \quad (3)$$

Напряжения на боковой поверхности образца нулевые.

Приведенные граничные условия (3) приводят к однородному напряженному состоянию при условии, что образец находится в пластическом состоянии:

$$\sigma_y = 2k, \quad \sigma_x = \tau_{xy} = 0 \quad (4)$$

и прямолинейному полю линий скольжения, наклоненных к оси x под углом $\varphi = 54^{\circ}44'$ [4].

Граничные условия для скоростей перемещений:

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0, \quad V_y = 0; \quad \text{при } x = 0, \quad V_x = 0; \\ \text{при } y = 1, \quad V_y = V; \quad \text{при } x = a, \quad V_x = \text{const}. \end{aligned} \quad (5)$$

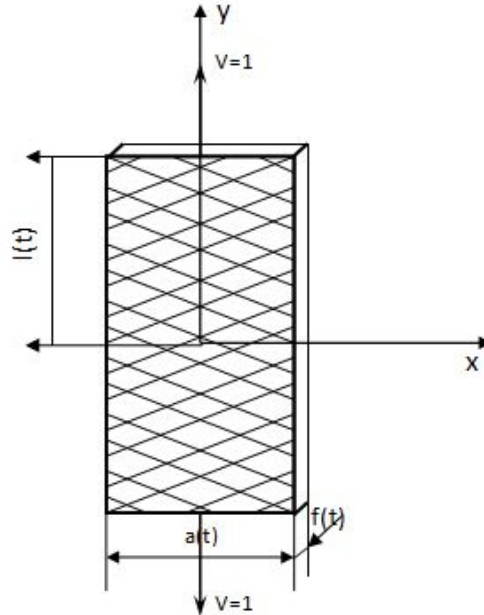


Рис. 1. Растяжение полосы с непрерывным полем скоростей деформаций в условиях плоского напряженного состояния

Определение поля скоростей деформаций при плоском напряженном состоянии сводится к интегрированию системы уравнений (2), которая может быть записана в виде:

$$\begin{cases} (2\sigma_x - \sigma_y) \frac{\partial V_y}{\partial y} = (2\sigma_y - \sigma_x) \frac{\partial V_x}{\partial x}, \\ (2\sigma_x - \sigma_y) \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) = 6\tau_{xy} \frac{\partial V_x}{\partial x}. \end{cases} \quad (6)$$

При условиях (3), (4) система уравнений (6) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0, & (I), \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0. & (II). \end{cases} \quad (7)$$

Преобразуя (7) по законам $\frac{\partial}{\partial x} (I) - \frac{\partial}{\partial y} (II)$ и $\frac{\partial}{\partial y} (I) - 2 \frac{\partial}{\partial x} (II)$, получаем волновые уравнения:

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Общее решение системы (8) имеет вид:

$$V_y(x, y) = \theta_1(\sqrt{2}y - x) + \theta_2(\sqrt{2}y + x), \quad V_x(x, y) = \psi_1(\sqrt{2}y - x) + \psi_2(\sqrt{2}y + x), \quad (9)$$

где $\theta_1, \theta_2, \psi_1, \psi_2$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

Подставляем (5) в (9), получаем:

$$\theta_1(-x) + \theta_2(x) = 0, \quad \psi_1(\sqrt{2}y) + \psi_2(\sqrt{2}y) = 0,$$

откуда следует, что:

$$-\theta_1(-x) = \theta_2(x) = \theta(x), \quad \psi_1(\sqrt{2}y) = -\psi_2(\sqrt{2}y) = \psi(y). \quad (10)$$

При дифференцировании уравнений (7) возможно приобретение новых решений. Подставляем (9) в (7) и учитываем (10), получаем:

$$\sqrt{2}\theta + \sqrt{2}\theta - \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0, \quad \theta + \theta - + = 0, \quad (11)$$

откуда следует, что $\theta' = \psi'$. При этом условии уравнение (9) будет определять общее решение системы уравнений (7).

Пусть $\theta' = \psi' = A'$, где $A(t)$ – некоторая дифференцируемая функция. Тогда получим $A = \theta = \psi + C$, где C – const. Из граничных условий (5) находим:

$$V_x = A(\sqrt{2}y) - A(\sqrt{2}y) + C = 0, \quad V_y = A(-x) - A(x) = 0. \quad (12)$$

Из (12) следует, что $A(t)$ – четная функция и $C = 0$.

При граничных условиях (5) общее решение системы (7) определяется в виде:

$$V_y(x, y) = A(\sqrt{2}y - x) + A(\sqrt{2}y + x), \quad V_x(x, y) = A(\sqrt{2}y - x) - A(\sqrt{2}y + x), \quad (13)$$

где $A(t)$ – четная дифференцируемая функция.

Объемная плотность мощности энергии диссипации $\frac{dW}{dt}$, учитывая (3), запишется в виде

$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon_{ij}\sigma_{ij} = \frac{\partial V_y}{\partial y} 2k = 4\sqrt{2}kA', \quad A' > 0. \quad (14)$$

Деформация материала может происходить неоднородно по объему образца. Модель жесткопластического тела является предельной по отношению к другим более сложным моделям, например, к моделям упрочняющегося тела в случае, когда параметр упрочнения стремится к нулю. Одним из параметров упрочнения может быть накопленная удельная диссипация энергии W . Упрочнение тесно связано с деформациями материала – там, где частицы материала ранее деформировались, произошло упрочнение, и последующие деформации происходят интенсивней в соседних частицах материала, что приводит к выравниванию деформаций по всему объему образца и равномерному их накоплению. То, что упрочнение материала способствует равномерному распределению деформаций, отмечалось в [6]. Предпочтительным пластическим течением будем считать течение с минимальной плотностью мощности диссипации энергии в пластической области.

Из граничных условий для скоростей перемещений следует, что $A(0) = 0$, $A(\sqrt{2}) = \frac{V}{2}$.

Функция $A(t)$ – гладкая дифференцируемая функция, монотонно возрастающая на отрезке $[0, \sqrt{2}]$. Видно, что такому условию отвечает линейная функция вида $A(t) = ct$, которая имеет постоянную производную $A = c$, $c = const$, доставляющая минимум $\frac{dW}{dt}$ в пластической области и обеспечивающая однородное деформирование.

Тогда из (13) при $A(t) = ct$ получаем:

$$V_x(x, y) = c(\sqrt{2}y - x) - c(\sqrt{2}y + x), \quad V_y = c(\sqrt{2}y - x) + c(\sqrt{2}y + x). \quad (15)$$

При $y = l$, $V_y = V$ и из (15) следует, что $c = \frac{V}{2\sqrt{2}l}$. Система (15) может быть представлена в виде:

$$V_x(x, y) = -\frac{V}{\sqrt{2}l}x, \quad V_y(x, y) = \frac{V}{l}y. \quad (16)$$

Компоненты тензора скоростей деформаций ε_{ij} определяется в виде:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{V}{\sqrt{2}l}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{V}{l}, \quad \varepsilon_{33} = -\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} = \frac{V}{\sqrt{2}l}(1 - \sqrt{2}), \quad (17)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) = 0.$$

Главные значения тензора скоростей деформации выражаем формулами:

$$\varepsilon_1 = -\frac{V}{\sqrt{2}l}, \quad \varepsilon_2 = \frac{V}{l}, \quad \varepsilon_3 = \frac{V}{\sqrt{2}l}(1 - \sqrt{2}). \quad (18)$$

Объемная плотность мощности диссипации энергии $\bar{W} = \varepsilon_{ij}\sigma_{ij} = 2kc = k\frac{V}{\sqrt{2}l}$ одинакова во всех частицах образца.

Компоненты тензоров E_{ij} и ε_{ij} связаны уравнениями:

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} \nu_k + E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (19)$$

В развернутом виде для случая плоского напряженного состояния систему (19) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \frac{dE_{11}}{dt} + 2E_{11}\varepsilon_{11} + 2E_{12}\frac{\partial V_y}{\partial x} = \varepsilon_{11}, \\ \frac{dE_{12}}{dt} + E_{12}\varepsilon_{22} + E_{11}\frac{\partial V_x}{\partial y} + E_{21}\varepsilon_{11} + E_{22}\frac{\partial V_y}{\partial x} = \varepsilon_{12}, \\ \frac{dE_{22}}{dt} + 2E_{22}\varepsilon_{22} + 2E_{21}\frac{\partial V_x}{\partial y} = \varepsilon_{22}, \\ \frac{dE_{33}}{dt} = \varepsilon_{33}. \end{cases} \quad (20)$$

Сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} E_{11} &= e + g\cos 2\theta, & E_{22} &= e - g\cos 2\theta, & E_{12} &= g\sin 2\theta, & E_{33} &= -2e, \\ \varepsilon_{11} &= s + p\cos 2\gamma, & \varepsilon_{22} &= s - p\cos 2\gamma, & E_{12} &= p\sin 2\gamma, & E_{33} &= -2s, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22}), & g &= \frac{1}{2}\sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2}, \\ s &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), & p &= \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2}. \end{aligned}$$

Будем рассматривать монотонное растяжение полосы, которая до разрушения была недеформированна ($E_{ij} = 0$).

Подставляем (21) в (20), получаем:

$$\begin{cases} \frac{de}{dt} + \frac{dg}{dt}\cos 2\theta - 2g\sin 2\theta\frac{d\theta}{dt} + 2(e + g\cos 2\theta)(s + p\cos 2\gamma) + 2pg\sin 2\theta = s + p\cos 2\gamma, \\ \frac{de}{dt} - \frac{dg}{dt}\cos 2\theta + 2g\sin 2\theta\frac{d\theta}{dt} + 2(e - g\cos 2\theta)(s - p\cos 2\gamma) + 2pg\sin 2\theta = s - p\cos 2\gamma, \\ 2g\frac{d\theta}{dt}\cos 2\theta + \frac{dg}{dt}\sin 2\theta - 2gs \cdot \sin 2\theta + 2epsin 2\gamma = p\sin 2\gamma, \\ \frac{de}{dt} = s. \end{cases} \quad (22)$$

Выполняя преобразования (I)+(II), ((I) - (II)) $\cos 2\theta$ + (III) $\sin 2\theta$, ((I) - (II)) $\sin 2\theta$ - (III) $\cos 2\theta$, получим:

$$\begin{cases} \frac{de}{dt} + 2pg\cos 2(\theta - \gamma) = s(1 - 2e), \\ \frac{dg}{dt} + 2p\cos 2(\gamma - \theta)(e - \frac{1}{2}) = -2gs, \\ 2g\frac{d\theta}{dt} + 2p\sin 2(\theta - \gamma)(e - \frac{1}{2}) = 0, \\ \frac{de}{dt} = s. \end{cases} \quad (23)$$

В этом случае главные направления ε_{ij} определены и можно принять $\theta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, и при однородном деформировании эти углы не изменяются. Перепишем систему, принимая во внимание, что компоненты тензора скоростей деформаций определяются в виде (17) и $\theta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, $s = \frac{V}{2\sqrt{2}l}(\sqrt{2}-1)$, $p = \frac{V}{2\sqrt{2}l}(1+\sqrt{2})$, $l(t) = l_0 + Vt$. Преобразуем систему (23) к виду:

$$\frac{d\left(\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2\right)}{dt} = \frac{V}{\sqrt{2}(l_0 + Vt)}(1 - \sqrt{2})\left(\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2\right),$$

$$-\frac{d\left(g - e + \frac{1}{2}\right)}{dt} + \frac{V}{\sqrt{2}(l_0 + Vt)}(1 + \sqrt{2})\left(g - e + \frac{1}{2}\right) = \frac{V}{\sqrt{2}(l_0 + Vt)}(\sqrt{2} - 1)\left(g - e + \frac{1}{2}\right). \quad (24)$$

Получаем первый интеграл системы:

$$\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 = (l_0 + Vt)^{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} C, \quad \text{где } C - \text{const.}$$

Так как при $t = 0$, $e = 0$, $g = 0$, то $C = \frac{1}{4l_0^{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}$,

$$\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{l_0 + Vt}{l_0}\right)^{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}.$$

Второй интеграл системы:

$$\left|g - e + \frac{1}{2}\right| = (l_0 + Vt)^{\sqrt{2}} C_1, \quad \text{где } C_1 - \text{const.}$$

Так как при $t = 0$, $e = 0$, $g = 0$, то $C_1 = \frac{1}{2l_0^{\sqrt{2}}}$,

$$\left|g - e + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \left(\frac{l_0 + Vt}{l_0}\right)^{\sqrt{2}}.$$

Введем обозначение $\delta(t) = \frac{Vt}{l_0}$:

$$\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 = \frac{(1 + \delta)^{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}{4}, \quad \left|g - e + \frac{1}{2}\right| = \frac{(1 + \delta)^{\sqrt{2}}}{2}.$$

Получаем:

$$e = \frac{1}{2} - \frac{(1 + \delta)^{\sqrt{2}} + (1 + \delta)^{\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}{4}, \quad g = \frac{(1 + \delta)^{\sqrt{2}} - (1 + \delta)^{\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}{4},$$

$$E_1 = e + g = \frac{1}{2} - \frac{(1 + \delta)^{\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}{2}, \quad E_2 = e - g = \frac{1}{2} - \frac{(1 + \delta)^{\sqrt{2}}}{2}, \quad E_3 = -1 + \frac{(1 + \delta)^{\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}{2} + \frac{(1 + \delta)^{\sqrt{2}}}{2}. \quad (25)$$

Изменение ширины полосы a с течением времени из (18) при условии $a(0) = a_0$:

$$a(t) = a_0 - \int_0^t \frac{V}{\sqrt{2}(l_0 + Vt)} a(t) dt.$$

Продифференцируем по t , получим:

$$a'(t) = -\frac{V}{\sqrt{2}(l_0 + Vt)} a(t), \quad a(0) = a_0.$$

$$a(t) = \frac{a_0 l_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{(l_0 + Vt)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}, \quad a(\delta) = \frac{a_0}{(1 + \delta)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}. \quad (26)$$

Изменение толщины полосы f с течением времени из (18) при условии $f(0) = f_0$:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= f_0 - \int_0^t \frac{V(1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}(l_0+Vt)} f(t) dt, \\
 f(t) &= -\frac{V(1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}(l_0+Vt)} f(t), \\
 f(t) &= \frac{f_0(l_0+Vt)^{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}}{l_0^{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}}, \quad f(\delta) = f_0(1+\delta)^{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Усилие, необходимое для растяжения полосы, используя (3), (27), (28), определяем выражением:

$$\begin{aligned}
 P(\delta) &= a(\delta) f(\delta) \sigma_y, \quad P(\delta) = a(\delta) f(\delta) \sigma_y = a(\delta) = \frac{a_0}{(1+\delta)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}} f_0(1+\delta)^{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} 2k, \\
 P(\delta) &= 2k \frac{a_0 f_0}{(1+\delta)^{\sqrt{2}-1}}.
 \end{aligned}$$

Усилие, необходимое для растяжения полосы в условиях плоской деформации, выражается формулой:

$$P(\delta) = 4k \frac{a_0}{(1+\delta)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хромов А. И. Деформация и разрушение жесткопластической полосы при растяжении // Известия РАН. Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 136–142.
- [2] Козлова О. В., Хромов А. И. Константы разрушения для идеальных жесткопластических тел // ДАН. 2002. Т. 385. № 3. С. 342–345.
- [3] Хромов А. И., Козлова О. В. Разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения. Владивосток: Дальнаука, 2005. 159 с. ISBN 5-8044-0591-8.
- [4] Качанов Л. М. Основы теории пластичности / под ред. Добровольского В. Л. М.: 1969. 420 с.
- [5] Хромов А. И., Жигалкин К. А. Математическое моделирование процесса разрушения материалов // Дальневосточный математический журнал. 2002. Т. 3. № 1. С. 93–101.
- [6] Фридман Я. Б. Механические свойства металлов. Ч. 1. Деформация и разрушение. М.: Машиностроение, 1974. 472 с.

A. L. Grigorieva, A. I. Khromov

**UNIAXIAL TENSILE HARD-PLASTIC STRIPS IN FLAT TENSION
CONDITIONS AT A UNIFORM VELOCITY FIELD STRAINS**

Komsomolsk-on-Amur State Technical University, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. A task is considered concerning monoaxial stretching of rigid plastic strip in conditions of flat tense state and finite deformations and homogeneous field of strain rate. Field of strain rate is constructed corresponding to homogeneous strip deformation and finite deformations' field is defined in plastic range. Almansi finite strain tensor is used as measure of deformations.

Keywords: zhestkoplastichesky body, tensor of final deformations, tensor of speeds of deformations.

REFERENCES

- [1] Khromov A. I. Deformation and representations strip under tension // proceedings of the Russian Academy and Sciences. Mekh. 2002. № 1. S. 136-142
- [2] Kozlova O. V., Khromov A. I. Constants of destruction for ideal hard-plastic bodies // DOKL. 2002. Vol. 385, № 3. P. 342-345
- [3] Khromov A. I., Kozlova O. V. The Destruction of rigid-plastic bodies. Constants destruction // Vladivostok. , Russia, 2005. 159 p. ISBN 5-8044-0591-8.
- [4] Kachanov L. M. Fundamentals of theory of plasticity / edited by Dobrowolski V. L. M.: 1969, 420 p.
- [5] A. I. Khromov, Gigalink.A.Mathematical modeling of process of destruction of materials // Eastern mathematical journal 2002. Vol. 3, № 1. P. 93-101.
- [6] Friedman J. B. Mechanical mathematical. Part 1. Deformation and destruction. M.: Mashinostroenie, 1974, S. 472

Grigorieva Anna Leonidovna

e-mail: naj198282@mail.ru, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Komsomolsk-on-Amur State Technical University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Khromov Alexander Igorevich

e-mail: khromovai@list.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Komsomolsk-on-Amur State Technical University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@gmail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@inbox.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Матченко Николай Михайлович (eks_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва.

Победра Борис Ефимович (rob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marycbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

Спорохин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Самара.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стил `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Немировский Ю. В., Станиславович А. В.</i> Влияние формы и расположения армирующих элементов на тепловые свойства композитов	3
<i>Манжиров А. В., Курдина С. П., Казаков К. Е., Федотов И.</i> Согласованный контакт вязкоупругого основания с шероховатым покрытием и конечной системы одинаковых жестких штампов	26
<i>Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультияев В. И.</i> Численное моделирование и построение образа процесса упругопластического деформирования стали по сложным плоским окружным траекториям	39
<i>Севастьянов Г. М., Штука В. И., Буренин А. А.</i> Лучевой метод в приближенном решении задачи об ударном нагружении несжимаемого цилиндрического слоя	50
<i>Кулиев В. Д., Борисова Н. Л.</i> К проблеме разрушения многослойных композитных материалов	63
<i>Казбеков Б. Б.</i> Зарождение трещин при однородном изгибе тонкой перфорированной пластины	72
<i>Козин В. М., Верещагин В. Ю., Земляк В. Л., Верещагина А. С., Матюшина А. А.</i> Зависимость энергетического критерия разрушения ледяного покрова от его заснеженности	82
<i>Шахбандаев Э. Г.</i> Развитие трещины со связями между берегами в плоскости при неоднородном напряженном поле	88
<i>Орлов В. Н., Коллэ К. В.</i> Аналитическое приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с полиномиальной правой частью второй степени в окрестности подвижной особой точки	96
<i>Ардашивили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю.</i> Трехмерные фундаментальные кромочные волны в тонкой оболочке	109
<i>Аноп М. Ф., Мурашкин Е. В., Балашникова А. В.</i> О методах расчета оптимальных остаточных напряжений в окрестности дефекта сплошности в модели больших упругоползучих деформаций	125
<i>Максимова Л. А., Юденков А. В.</i> Теория стохастического потенциала в плоской теории упругости	134
<i>Илларионов И. Е.</i> Научные основы разработки стержневых и формовочных смесей на основе неорганических фосфатных связующих и порошкообразных отвердителей	143

<i>Дац Е. П., Петров М. Р., Ткачева А. В.</i> Кусочно-линейные пластические потенциалы в задачах теории температурных напряжений о сборке горячей посадкой.....	162
<i>Сильвестров В. В., Уракова Ю. О., Ильина И. И.</i> Продольный сдвиг упругого кусочно-однородного пространства с полубесконечным разрезом при смешанных краевых условиях на сторонах разреза.....	179
<i>Жилин С. Г., Сапченко И. Г., Комаров О. Н.</i> Упругий отклик прессовок при деформировании гетерогенных порошковых материалов	184
<i>Хайрнасоев К. З.</i> Исследование частотных характеристик лопастей двигателей из композиционного материала.....	192
<i>Григорьева А. Л., Хромов А. И.</i> Одноосное растяжение жесткопластической полосы в условиях плоского напряженного состояния при однородном поле скоростей деформаций	197
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	205
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	208
СОДЕРЖАНИЕ	210

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2015. № 4 (26)**

Отв. за выпуск: А. В. Балашникова

Технические редакторы: А. В. Балашникова, Е. В. Мурашкин, С. В. Тихонов

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова

Макет: А. В. Балашникова

Подписано в печать 27.11.2015. Выход в свет 30.11.2015
Формат 70х100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 24,00.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38