

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"

**ВЕСТНИК**  
**ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**  
**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**

**Научный журнал**  
**№ 2(28)**  
**Апрель – июнь 2016 г.**

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"  
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.  
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в  
которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на  
соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге "Пресса России" 13109

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Ответственный редактор:** Ю. Н. Радаев

**Заместитель ответственного редактора:** Н. М. Матченко

**Ответственные секретари:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

**Редакционная коллегия:** В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,  
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,  
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,  
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов,  
Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, Б. Е. Победря, В. П. Радченко,  
А. Ф. Ревуженко, С. А. Редкозубов, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин,  
А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

**Международный совет:** В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж  
(Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

**Тел.:** (8352) 62-16-19.

**Email:** predel21@mail.ru.

**WWW:** <http://predel.chgpu.edu.ru>.

© ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический  
университет им. И. Я. Яковлева», 2016



С. Г. Жилин, И. Г. Сапченко, О. Н. Комаров

## ФОРМИРОВАНИЕ ПРЕССОВОК ИЗ ПОРОШКОВ ПОЛИМЕРНЫХ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия*

**Аннотация.** При формировании прессовок из полимерных дисперсных материалов, применяемых в специальных видах литья для получения выплавляемых моделей, существенным недостатком является упругий отклик материала. Определенные сложности в учете этого эффекта возникают вследствие объемной анизотропии свойств получаемых прессовок и малой точностью прогноза их конечных размеров. В работе представлены данные, полученные в ходе эксперимента. Рассмотрены варианты размещения элементов в пресс-матрице, при которых может быть получена прессовка. Изменением скорости формирования прессовок достигается снижение их анизотропии, что позволяет прогнозировать конечные размеры формируемого изделия, учет которых важен при проектировании пресс-оснастки.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние, прессование, пористость, гетерогенные материалы, размерно-геометрическая точность, упругий отклик.

УДК: 621.74.045: 53.09

Из ряда технологий, направленных на получение точных литых заготовок, литье по выплавляемым моделям представляется наиболее предпочтительным. Такой метод позволяет получать литые заготовки различной пространственной конфигурации, а в ряде случаев, – с поверхностями, не требующими механической обработки [1], [2]. В ходе реализации такого метода получения заготовок традиционно проблематичным

---

© Жилин С. Г., Сапченко И. Г., Комаров О. Н., 2016

*Жилин Сергей Геннадьевич*

**e-mail:** zhilin@imim.ru, кандидат технических наук, доцент, заведующий лабораторией, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

*Сапченко Игорь Георгиевич*

**e-mail:** mail@imim.ru, доктор технических наук, доцент, заместитель директора по научным вопросам, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

*Комаров Олег Николаевич*

**e-mail:** autor@imim.ru, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта ДВО РАН (проект 15-I-4-018).

Поступила 28.01.2016

является этап изготовления выплавляемой модели, включающий запрессовку модельной массы в жидком или пастообразном состоянии в пресс-форму. Остывшая модельная масса должна формировать модель отливки, однако в силу различных факторов последняя, как правило, нуждается в дополнительной обработке, связанной с устранением усадочных дефектов и неровностей поверхности. Одним из основных направлений повышения размерной и геометрической точности в литье по выплавляемым моделям является получение отливок по пористым выплавляемым моделям [3]. Формирование пористых выплавляемых моделей “холодным” прессованием дисперсного модельного материала решает проблему усадки материала, а размерные параметры такой выплавляемой модели регламентированы пресс-формой [4], [5].

Сущность процесса прессования заключается в деформировании компонентов порошкового полимерного материала, при котором происходит уменьшение первоначального объема и формирование прессовки заданной формы, размеров и свойств. Объем порошкового материала при прессовании изменяется в результате смещения частиц, заполняющих пустоты между ними, и их деформированием [6].

При реализации разработанного способа модели имеют рассредоточенную мелкодисперсную открытую пористость по всему объему в пределах 3–20 %. Процесс порообразования саморегулирующийся и модели имеют меньшую пористость в тонких частях. Заложенный принцип изготовления пористых выплавляемых моделей позволяет распределить внутренние напряжения по всему объему, что обуславливает их инертность к перепадам температур, имеющим место при формировании керамической оболочки. Плотность прессовки зависит от прикладываемого давления. Процесс уплотнения характеризуется повторяющимися явлениями. Пластические свойства порошков модельного материала характеризуются уплотняемостью, формуемостью, вязкостью, сыпучестью и текучестью [7]. Провести существенные различия между этими характеристиками не всегда возможно ввиду их взаимосвязанности. Эти параметры существенно влияют на воспроизводимость смесью модельного порошка конфигурации модели, влияя на ее размерно-геометрические характеристики.

При получении выплавляемой модели с развитой пространственной поверхностью прессованием порошка модельной массы возникают проблемы с равномерностью распределения свойств в объеме прессовки, а именно сложности прогнозирования плотности в различных участках выплавляемой модели. Модельный материал пластичен, а в диспергированном виде он в процессе прессования течет. Текучесть модельного материала, как и в случае с жидкостью, зависит от скорости ее движения, давления и плотности. Для дисперсной сыпучей среды, состоящей из полимерных элементов, определить такие характеристики текучести численными методами не представляется возможным. В ходе одностороннего деформирования (прессования) такой сыпучей среды текучесть зависит не только от состояния этих характеристик для каждого положения пресс-пуансона, но и от таких свойств среды, как наличие “арок”, хаотично складывающихся из элементов сыпучего материала, его температуры, трения материала о внутреннюю поверхность пресс-матрицы и т. д. В силу неоднородности свойств в объеме подвергающейся прессованию системы локальное воздействие указанных выше свойств растет с увеличением деформации системы.

Текучесть однородной смеси согласно определения Г. М. Орлова [8] – это способность смеси перемещаться (перетекать) в направлении, перпендикулярном сжимающим напряжениям, т. е. это способность элементов предварительно уплотненной смеси к взаимным перемещениям без разрыва связей под действием сил, превышающих

сопротивление сдвигу. Таким образом, если порошковый материал не уплотнен до заданной плотности, то отсутствует его текучесть.

Согласно классической теории механики грунтов [9] пластичность определяется как напряженное состояние, при котором материал способен изменять форму без изменения объема и нарушения сплошности, т. е. сопротивление сдвигу материала изучается в условиях предельного напряженного состояния, соответствующего незатухающим скольжениям (сдвигам) одной части слоя материала над другой. Действующие на материал критические нагрузки при таком состоянии вызывают последовательные сдвиги, приводящие к необратимым деформациям.

В случае высокой пластичности [7] модельного материала изделие формируется при относительно невысоком давлении, а полученные прессовки легко деформируются даже под действием собственной массы. Модельные материалы с низкой пластичностью требуют повышенного давления, прессовки обладают высокой стойкостью против необратимых деформаций, а требования к жесткости и прочности конструкций пресс-форм значительно возрастают.

Технологически важным при получении пористой выплавляемой модели является отсутствие размерно-геометрических дефектов, связанных с упругим последствием материала модели, возникающим вследствие его переуплотнения как во всем объеме прессовки, так и в локальных участках. Для получения прессовок простых сечений (когда размеры сторон сопоставимы) достаточным, в большинстве случаев, является уплотнение модельного материала до плотности на 10–12% меньшей, чем плотность этого материала в литом состоянии. Пористые выплавляемые модели при такой плотности сохраняют требуемые прочностные характеристики и не оказывают расширяющего воздействия на керамическую форму при выплавлении из последней модельной массы [10]. При получении всего тела прессовки или отдельных участков с переуплотнением возникают напряжения, приводящие к появлению упругого последствия материала и снижению размерной и геометрической точности. Экспериментально установлено, что при формировании прессовки из дисперсного полимерного материала наибольшая плотность достигается в зонах, расположенных непосредственно под пресс-пуансоном, а при получении сложной пространственно ориентированной прессовки требуемая плотность во всех ее участках не достигается. В литейном производстве при деформировании формовочных смесей, особенно высокопрочных, импульсным уплотнением упругий возврат и обратная упругая деформация отсутствуют [11]. Однако влияние скорости уплотнения полимерных модельных материалов на появление упругого последствия пористых выплавляемых моделей не установлено. Таким образом, поиск метода получения пористой выплавляемой модели с равномерным распределением напряжений в объеме представляется актуальным.

Целью работы является изучение механизма распределения свойств в объеме прессовки в процессе односторонней деформации дисперсного полимерного материала. В рамках поставленной цели решаются следующие задачи: исследование влияния начальной упаковки материала в пресс-матрице на его сопротивление деформированию при увеличении нагрузки; определение оптимальной скорости прессования гомогенного полимерного материала.

В практике получения пористых выплавляемых моделей прессованием применяются модельные материалы из различных полимерных композиций с формой порошков в виде ломаных частиц различной формы, получаемых в ходе экструзии модельного материала с последующим рассевом по фракциям [12]. Примечательно, что на стадии

загрузки фракции модельного материала в пресс-матрицу заполнение поднутрений последней регламентировано углом естественного откоса модельного материала, который для каждой фракции определяется не только размером, но и формой компонентов [12]. Снижение влияния упругого последствия прессовок на их размерно-геометрическую точность возможно при использовании гомогенных модельных материалов, состоящих из воскообразных полимерных компонентов шаровидной формы [13]. Форма компонентов модельного материала обуславливается их потенциалом к самопроизвольному равномерному распределению в полости пресс-формы как перед началом формовки, так и по завершении последней. Использование шаровидной формы компонентов смеси одной фракции позволяет упразднить учет фактора неоднородности формы материала при получении прессовки.

Идеализированный процесс уплотнения порошковых материалов выражается зависимостью плотности прессовки от давления прессования и характеризуется 3-мя основными стадиями [4], [14]: структурной деформацией порошкового тела; максимально плотной упаковкой частиц порошка, сопротивляющихся сжатию; пластической деформацией частиц. На практике при прессовании порошков происходит взаимное наложение стадий порошкового тела, протекающих одновременно. Процесс распределения компонентов смеси завершается, как правило, на второй стадии прессования и определяет картину напряжений, возникающих в прессовке по завершении процесса деформирования смеси. Таким образом, при одностороннем прессовании практический интерес вызывает графическая зависимость силы прессования от перемещения пресс-пуансона, характерная для процесса завершения второй стадии уплотнения смеси.

В процессе получения заготовок методом порошковой металлургии, как правило, требуется внешний подвод тепла. При отсутствии такового необходима оснастка, жесткость которой позволит выдержать деформацию материала. Для формирования прессовок из полимерных дисперсных композиций внешний подвод тепла не требуется, поэтому при обработке результатов эксперимента жесткостью пресс-матрицы пренебрегаем. Для проведения натурального эксперимента выбран полимерный модельный материал – парафин марки Т1 шаровидной формы. Элементы смеси, с целью визуализации процесса, были выполнены с  $\varnothing = 10$  мм и размещались в пресс-форме в один слой. Для снижения влияния трения о стенки пресс-матрицы на начальном этапе уплотнения компоненты смеси размещены с зазором. Перед деформированием компоненты в пресс-матрице расположены в соответствии с рис. 1.

Из рис. 1 видно, что наиболее плотная упаковка элементов системы характерна для гексагонального их размещения в пресс-форме (вариант 3), а наличие арок при свободной засыпке (вариант 2) должно привести к наименьшим (из трех представленных вариантов) усилиям на первой стадии уплотнения.

На рис. 2 и 3 представлены диаграммы значений силы (Н), затрачиваемой на уплотнение шарообразных элементов из полимерного материала, от перемещения (мм) пресс-пуансона при одностороннем уплотнении полимерного изотропного материала с начальными упаковками согласно рис. 1 со скоростью 0,5 мм/с и 3 мм/с соответственно. На диаграммах представлены этапы прессования, соответствующие началу уплотнения смеси и завершению второй стадии описанного выше идеализированного процесса уплотнения, при котором деформация в приконтактной зоне сферических элементов системы носит ограниченно-локальный характер. Завершение этой стадии

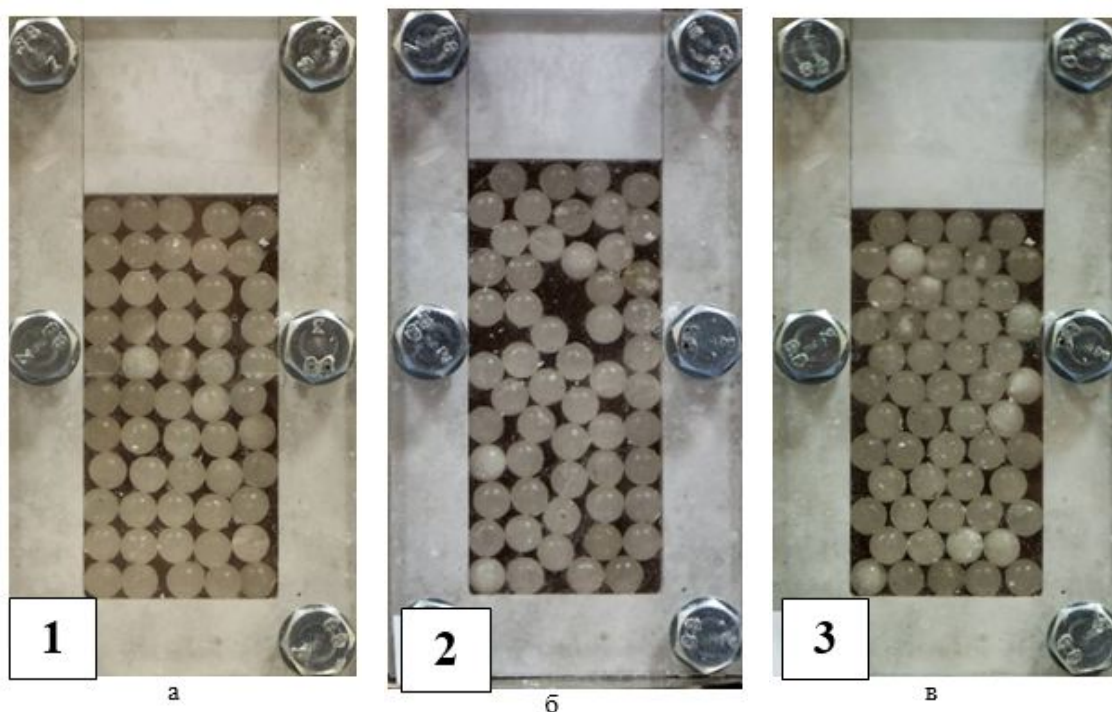


Рис. 1. Варианты размещения элементов, изготовленных из модельной массы, в пресс-форме: 1 – кубическая упаковка; 2 – свободная засыпка, 3 – гексагональная упаковка

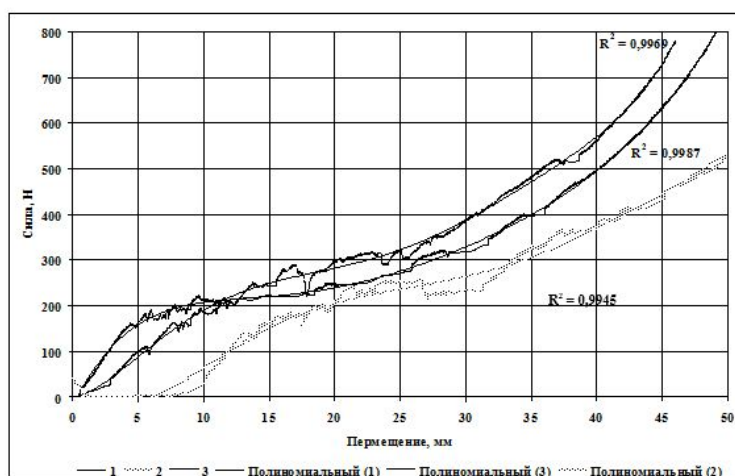


Рис. 2. Зависимость силы (Н), затрачиваемой на уплотнение шарообразных элементов из полимерного материала, от перемещения (мм) пресс-пуансона со скоростью 0,5 мм/с с различной начальной упаковкой элементов в пресс-матрице: 1 – кубическая, 2 – свободная, 3 – гексагональная

представляется весьма условным и, в общем случае, иллюстрирует фактическое распределение элементов в системе, после которого начинается пластическое течение материала.

Зависимости, представленные на рис. 2 и 3, соответствуют перемещениям пресс-пуансона на 50 мм (т. е.  $\sim 55\%$  от начальной высоты размещенных в пресс-форме элементов смеси), при которых объемная плотность ( $\rho_{об}$ ) воскообразных компонентов смеси до деформирования составляет 1,3-1,4 от их насыпной плотности ( $\rho_{нас}$ ). Насыпная плотность фракции полимерного материала составляет  $\rho_{нас} \sim 0,5 \text{ кг/м}^3$ . Дальнейшее прессование характеризуется интенсивным увеличением сопротивления деформированию материала при относительно небольших перемещениях пресс-пуансона для всех рассмотренных вариантов начальной упаковки элементов в пресс-матрице.

Очевидно, что расположение элементов в пресс-матрице перед началом прессования материала оказывает значительное влияние на характер его уплотнения. Для уплотнения гексагонально упакованных элементов порошкового тела требуются значительно более высокие энергетические затраты на первой стадии прессования. Первая стадия прессования структуры со свободной упаковкой, напротив, характеризуется малозначительным усилием, затрачиваемым на перемещение пресс-пуансона.

Для всех вариантов начальной упаковки при повышении скорости прессования характерно сокращение второй стадии уплотнения, при которой должно наблюдаться завершение процесса максимально плотной упаковки элементов полимерного материала, сопротивляющегося сжатию. С увеличением скорости деформирования материала растет его сопротивление сжатию и требуются большие усилия для уплотнения порошкового тела.

Для исключения влияния “арок” на процесс деформирования смесей модельного материала необходима их предварительная подготовка. Выключение двух первых стадий из процесса прессования на практике возможно принудительным распределением элементов порошкового тела, например, встряхиванием [14]. При этом на эффективность указанного процесса предположительно влияют размеры емкости, в которую помещены компоненты модельного материала и их гранулометрические параметры. Экспериментальное подтверждение данного предположения проводили путем встряхивания засыпанного в цилиндрическую емкость материала различных фракций. Емкость с помещенным в нее путем свободной засыпки модельным материалом, встряхивали с частотой осевой вибрации 300 ударов в минуту при амплитуде встряхивания  $3,0 \pm 0,2 \text{ мм}$ . Параметры емкости:  $\varnothing = 35 \text{ мм}$ ; высота  $h = 80 \text{ мм}$ ; внутренний объем  $V = 76,93 \text{ см}^3$ . В ходе эксперимента использован модельный материал фракций 0,63, 1,0 и 1,6 мм. Изменяемый параметр – время встряхивания. На рис. 4. представлены зависимости утряски различных фракций дисперсного модельного материала от времени встряхивания.

Из рис. 4 видно, что после 5 мин уплотнения встряхиванием деформация порошков модельного материала прекращается. Насыпные плотности модельного материала фракций 0,63, 1,0 и 1,6 мм составили  $0,3523 \text{ г/см}^3$ ,  $0,3457 \text{ г/см}^3$  и  $0,3379 \text{ г/см}^3$  соответственно. Плотность рассматриваемых модельных материалов повышается пропорционально утряске. Таким образом, деформация порошков модельного материала, прошедших предварительную подготовку в ходе уплотнения встряхиванием, должна осуществляться посредством разрушения частиц порошкового тела.

Полученные в результате эксперимента выводы не позволяют, однако, в полной мере судить о качественных характеристиках получаемой прессовки, а именно об упругом последствии материала и равномерности распределения свойств в ее объеме.

Корректное определение влияния скорости прессования на распределение свойств в объеме прессовки может быть возможным при исключении из процесса уплотнения



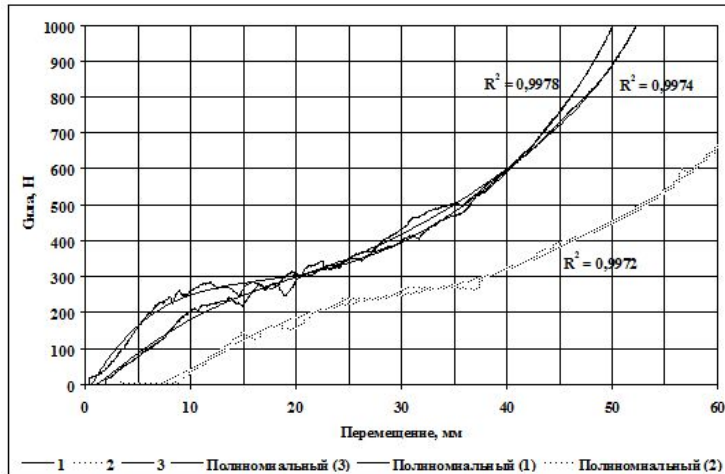


Рис. 3. Зависимость силы (Н), затрачиваемой на уплотнение шарообразных элементов из полимерного материала, от перемещения (мм) пресс-пуансона со скоростью 3 мм/с с различной начальной упаковкой элементов в пресс-матрице: 1 – кубическая, 2 – свободная, 3 – гексагональная

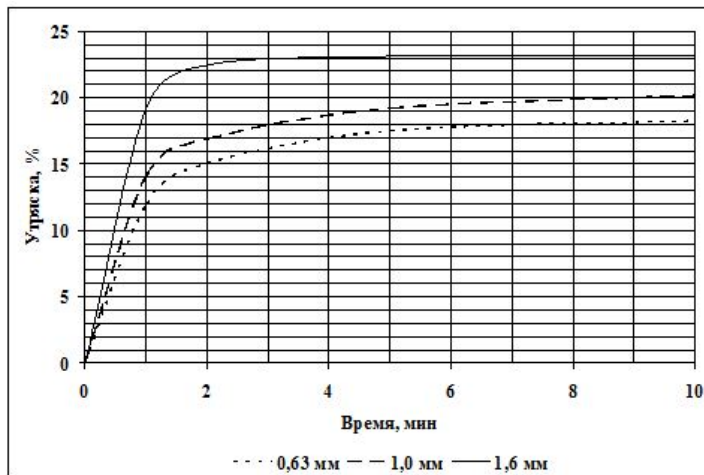
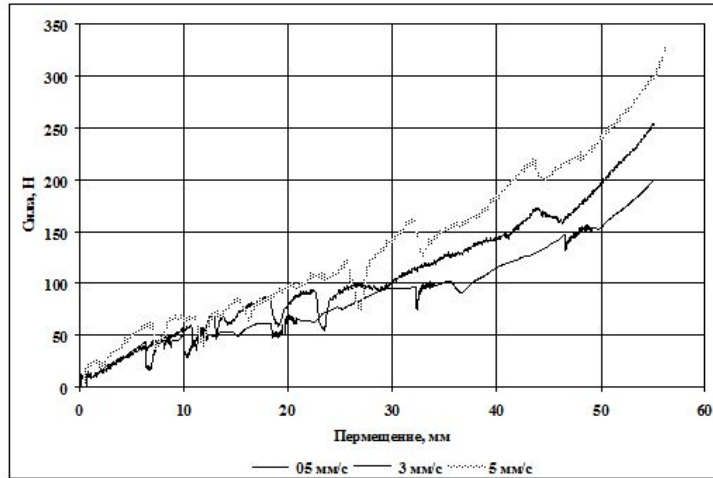


Рис. 4. Зависимость утряски порошкового модельного материала от времени встряхивания

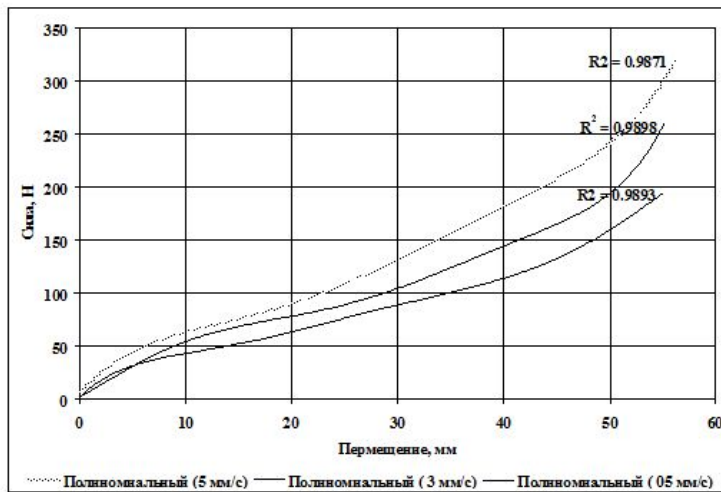
порошкового тела первой стадии, при которой в идеализированном процессе проходит его структурная деформация. С этой целью шаровидные полимерные элементы последовательно помещались в пресс-матрицу, как показано на рис. 6, и подвергались одноосному нагружению при различных скоростях перемещения пресс-пуансона. Такая упаковка элементов не допускает горизонтальных перемещений в пресс-форме, и нагрузка от элемента к элементу передается с самого начала уплотнения, при котором происходит деформирование самих элементов уплотняемой системы.

На рис. 5. приведены фактические значения и результаты полиномиальной аппроксимации зависимостей перемещения (мм) пресс-пуансона от силы (Н) при одноосном уплотнении столба парафиновых шаров и различных скоростях прессования. Из анализа зависимостей, представленных на рис. 4, видно, что на силу сопротивления

материала деформированию оказывает влияние только скорость перемещения пресс-пуансона. Вывод: с повышением скорости деформирования адекватно увеличивается сила сопротивления деформируемого материала.



а



б

Рис. 5. Зависимость перемещения (мм) пресс-пуансона от силы (Н) при одноосном уплотнении столба парафиновых шаров и различных скоростях прессования:

а – фактические значения; б – полиномиальная аппроксимация

Однако очевидность влияния скорости прессования на равномерность распределения напряжений в уплотненном теле в нашем случае удастся установить только визуально. На рис. 6 визуально представлена динамика зарождения разрушений в элементах уплотняемой системы при одноосном деформировании с различными скоростями перемещения пресс-пуансона (от 0,5 до 5 мм/с).

Из рис. 6 видно, что появление цветовых изменений в виде белых пятен (свидетельствующих о начале разрушения полимерных элементов) в ходе деформации представляется более равномерным при скорости 0,5 мм/с (рис. 6а). Увеличение скорости прессования на порядок (рис. 6в) приводит к формированию фронта разрушения в зоне контакта уплотняемого порошкового тела с пресс-пуансоном. Разрушение элементов, размещенных в диаметрально-противоположной стороне порошкового тела, начинается только тогда, когда деформация превышает 50%. Таким образом, повышение скорости уплотнения полимерного порошкового тела неизбежно приведет к структурной неоднородности и неравномерности напряжений в прессовке.

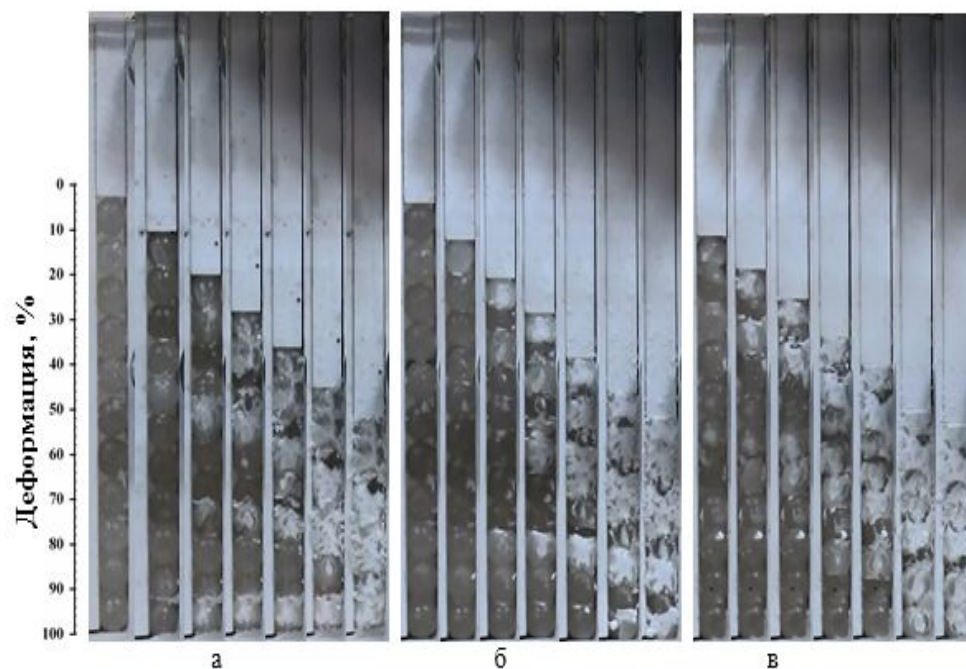


Рис. 6. Динамика зарождения разрушений в элементах уплотняемой системы при одноосном деформировании: а – скорость 0,5 мм/с; б – скорость 3 мм/с; в – скорость 5 мм/с

Экспериментально установлено, что упаковка полимерных элементов модельного материала в пресс-матрице перед началом прессования материала влияет на характер его уплотнения: чем ниже степень свободы элементов перед началом уплотнения, тем более высокие энергетические затраты требуются на его осуществление. Увеличением скорости деформирования материала приводит к росту сопротивления сжатию, что также требует увеличения усилий для уплотнения порошкового тела. Для получения прессовки с равномерным распределением свойств в ее объеме необходима предварительная подготовка смеси модельного материала встряхиванием и уплотнение порошкового тела с минимальной скоростью.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] Литье по выплавляемым моделям / под. общ. ред. В. А. Озерова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1994. 448 с.

- [2] Сапченко И. Г., Жилин С. Г., Комаров О. Н. Управление структурой и свойствами пористых комбинированных удаляемых моделей. Владивосток: Дальнаука, 2007. 138 с.
- [3] Сапченко И. Г., Жилин С. Г. Влияние пористости моделей на их свойства, качество оболочковых форм и отливок // Литейное производство. 2003. № 4. С. 12–15.
- [4] Патент № 2188735 RU. Способ изготовления выплавляемых моделей / Сапченко И. Г., Жилин С. Г., Костина Т. В., Некрасов С. А. // Оpubл. 10.09.2002. Бюл. № 25.
- [5] Патент РФ № 2227769 Способ изготовления удаляемых моделей / Сапченко И. Г., Жилин С. Г. // Оpubл. 27.04.2004, Бюл. № 12.
- [6] Жилин С. Г., Сапченко И. Г., Комаров О. Н. Упругий отклик прессовок при деформировании гетерогенных порошковых материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4 (26). С. 163–168.
- [7] Медведев Я. И., Валисовский И. В. Технологические испытания формовочных материалов. М., Машиностроение, 1973. 312 с.
- [8] Орлов Г. М. Текучесть формовочных смесей // Теория формовки. М.: Изд-во АН СССР, 1961 (Тр. 6-го совещ. По теории литейных процессов)
- [9] Цытович Н. А. Механика грунтов. М.: Высш. шк., 1973
- [10] Сапченко И. Г., Жилин С. Г., Евстигнеев А. И. Об особенностях проектирования оснастки при изготовлении пористых выплавляемых моделей // Литейное производство. 2010. №2, С.26–31.
- [11] Болдин А. Н. О деформации формовочной смеси при импульсном уплотнении // Литейное производство. 2006. № 6. С. 15.
- [12] Жилин С. Г., Сапченко И. Г. Влияние упругого отклика деформируемого порошкового полимерного материала на размерно-геометрические параметры прессовки // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов (Казань, 20–24 августа 2015 г.). Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015., С. 1383–1385.
- [13] Жилин С. Г., Сапченко И. Г., Комаров О. Н. Экспериментальное определение деформаций, возникающих при изменении скорости формирования прессовок из гетерогенных материалов на полимерной основе // “Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред”. Сборник материалов Всероссийской научной конференции. Москва, 15 – 17 декабря 2015 г. – М.: ИПРИМ РАН, 2015. С. 126–129.
- [14] Кипарисов С. С., Либенсон Г. А. Порошковая металлургия: Учебник для техникумов – 3-е изд., перераб. – М.: Металлургия, 1991. 432 с.

S. G. Zhilin, I. G. Sapchenko, O. N. Komarov

## FORMATION OF COMPACTS FROM POWDERS OF POLYMER ISOTROPIC MATERIAL

*Institute of engineering science and Dalno's metallurgy east office of the Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

**Abstract.** Elastic response of the material is the significant disadvantage during process of formation of compacts from disperse polymer materials used in special types of casting. Certain difficulties in view of this effect come out from volume anisotropy of properties of the obtaining compacts and poor precision of finite size prediction. This paper presents results and analysis of data obtained during experiment. Different variants of elements' positioning in former block, where it may be obtained by pressing, are considered. By varying of speed of compacts forming is achieved reduction of anisotropy, that allows to predict the finite size of forming product, which is important in the design of equipment for press forming.

**Keywords:** stress-strain state, press forming, porosity, heterogeneous materials, dimensional and geometrical accuracy, elastic response, precision casting.

## REFERENCES

- [1] Litje po vyplavlyaemym modelyam / pod. obshch. red. V. A. Ozerova. – 4-e izd., pererab. i dop. – M.: Mashinostroenie, 1994. 448 s. (in Russian).
- [2] Sapchenko I. G., Zhilin S. G., Komarov O. N. Upravlenie strukturaj i svojstvami poristyh kombinirovannyh udalyaemyh modelej. Vladivostok: Dal'nauka, 2007. 138 s. (in Russian).
- [3] Sapchenko I. G., Zhilin S. G. Vliyanie poristosti modelej na ih svojstva, kachestvo obolochkovykh form i otlivok / Litejnoe proizvodstvo. 2003. № 4. S. 12–15. (in Russian).
- [4] Patent № 2188735 RU. Sposob izgotovleniya vyplavlyaemyh modelej / Sapchenko I. G., Zhilin S. G., Kostina T. V., Nekrasov S. A. // Opubl. 10.09.2002. Byul. № 25. (in Russian).
- [5] Patent RF № 2227769 Sposob izgotovleniya udalyaemyh modelej / Sapchenko I. G., Zhilin S. G. // Opubl. 27.04.2004, Byul. № 12. (in Russian).
- [6] Zhilin S. G., Sapchenko I. G., Komarov O. N. Uprugij otklik pressovok pri deformirovanii geterogennyh poroshkovykh materialov // Vestnik CHGPU im. I. YA. YAkovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2015. № 4 (26). S. 163–168. (in Russian).

---

*Zhilin Sergey Gennayedyevich*

e-mail: zhilin@imim.ru, PhD, manager laboratory, Institute of engineering science and Dalno's metallurgy east office of the Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

*Sapchenko Igor Georgiyevich*

e-mail: mail@imim.ru, Doctor of Engineering, Associate Professor, Deputy Director on Scientific Questions, Institute of engineering science and Dalno's metallurgy east office of the Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

*Komarov Oleg Nikolaevich*

e-mail: autor@imim.ru, PhD, Associate Professor, leading scientific employee, Institute of engineering science and Dalno's metallurgy east office of the Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

- [7] Medvedev Y. I., Valisovskij I. V. Tekhnologicheskie ispytaniya formovochnyh materialov. M.: Mashinostroenie, 1973. 312 s. (in Russian).
- [8] Orlov G. M. Tekuchest' formovochnyh smesej // Teoriya formovki. M.: Izd-vo AN SSSR, 1961 (Tr. 6-go soveshch. Po teorii litejnyh processov) (in Russian).
- [9] Cytovich N. A. Mekhanika gruntov. M.: Vyssh. shk., 1973. (in Russian).
- [10] Sapchenko I. G., Zhilin S. G., Evstigneev A. I. Ob osobennostyah proektirovaniya osnastki pri izgotovlenii poristyh vyplavlyaemyh modelej // Litejnoe proizvodstvo. 2010. № 2. S. 26–31. (in Russian).
- [11] Boldin A. N. O deformacii formovochnoj smesipri impul'snom uplotnenii // Litejnoe proizvodstvo. 2006. № 6. S. 15. (in Russian).
- [12] Zhilin S. G., Sapchenko I. G. Vliyanie uprugogo otklika deformiruemogo poroshkovogo polimernogo materiala na razmerno-geometricheskie parametry pressovki // XI Vserossijskij s"ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoy i prikladnoj mekhaniki: sbornik dokladov (Kazan', 20–24 avgusta 2015 g.). Kazan': Izd-vo Kazan. un-ta, 2015. S. 1383–1385. (in Russian).
- [13] Zhilin S. G., Sapchenko I. G., Komarov O. N. Eksperimental'noe opredelenie deformacij, vznikayushchih pri izmenenii skorosti formirovaniya pressovok iz geterogennyh materialov na polimernoj osnove // "Mekhanika kompozicionnyh materialov i konstrukcij, slozhnyh i geterogennyh sred". Sbornik materialov Vserossijskoj nauchnoj konferencii. M.: IPRIM RAN, 2015. S. 126–129. (in Russian).
- [14] Kiparisov S.S., Libenson G.A. Poroshkovaya metallurgiya: Uchebnik dlya tekhnikumov – 3-e izd., pererab. M.: Metallurgiya, 1991. 432 s. (in Russian).

Л. А. Максимова<sup>1,2</sup>, А. В. Юденков<sup>3</sup>, Л. П. Римская<sup>3</sup>

## ОБОБЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ШЕРМАНА СО СДВИГОМ В ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

<sup>1</sup> Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

<sup>2</sup> Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия

<sup>3</sup> Смоленская государственная сельскохозяйственная академия, г. Смоленск, Россия

**Аннотация.** В работе изучается система сингулярных интегральных уравнений со сдвигом и комплексным сопряжением, являющаяся обобщением математической модели основных задач теории упругости Д. И. Шермана. Актуальность исследований связана с тем, что интегральные уравнения позволяют провести общий анализ напряжённого состояния упругого тела без непосредственного решения системы. Это, в свою очередь, способствует оптимальному использованию численных методов.

В статье дается точная постановка задачи, доказываемость исследуемой системы, подсчитывается её индекс. На основе полученных результатов разработан общий алгоритм сведения систем сингулярных интегральных уравнений к равносильным системам уравнений Фредгольма второго рода. В качестве следствия исследована обобщённая задача типа Карлемана для бианалитических функций.

При доказательстве основных результатов использовалась теория краевых задач для аналитических и бианалитических функций, сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и общие свойства нетеровых операторов.

---

© Максимова Л. А., Юденков А. В., Римская Л. П., 2016

*Максимова Людмила Анатольевна*

**e-mail:** maximova\_ng@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия; Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

*Юденков Алексей Витальевич*

**e-mail:** mail@imim.ru, д.ф.-м.н., профессор, Смоленская государственная сельскохозяйственная академия, Россия.

*Римская Лилия Павловна*

**e-mail:** autor@imim.ru, к.ф.-м.н., Смоленская государственная сельскохозяйственная академия, Россия.

Поступила 28.01.2016

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 15-41-02453 р\_поволжье\_а).

**Ключевые слова:** теория упругости, сингулярное уравнение, краевая задача.

УДК: 539.374

**Введение.** Уже традиционно для моделирования основных задач плоской теории упругости применяются краевые задачи для бианалитических функций и их обобщений [1], [5], [9].

Пусть  $D$  — область плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная гладким контуром  $L$ .

Бианалитической функцией в области  $D$  (конечной или бесконечной) назовем функцию вида

$$F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z). \quad (1)$$

Здесь  $\varphi_k(z)$  ( $k=1, 2$ ) — аналитические функции в области  $D$  или аналитические компоненты,  $\bar{z} = x - iy$ .

Можно показать, что бианалитическая функция является решением дифференциального уравнения в частных производных следующего вида:

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} = 0. \quad (2)$$

В работах [2], [4], [5] показано, что основные характеристики напряженного состояния упругого тела могут быть выражены через комплексный потенциал, представляющий собой бианалитическую функцию (1). Математическую модель первой задачи плоской теории упругости можно представить в виде векторной краевой задачи

$$\begin{aligned} \varphi'_0(t) + \bar{t}\varphi'_1(t) + \varphi_1(t) &= -\overline{[\varphi'_0(t) + \bar{t}\varphi'_1(t) + \varphi_1(t)]} + g_1(t), \\ \varphi'_0(t) + \bar{t}\varphi'_1(t) - \varphi_1(t) &= \overline{[\varphi'_0(t) + \bar{t}\varphi'_1(t) - \varphi_1(t)]} + g_2(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varphi_{0,1}(t)$  — аналитические компоненты бианалитической функции  $F(z)$  в некоторой области  $D$  комплексного переменного  $z$ ,  $g_{1,2}(\tau)$  — заданные функции,  $t$  — точка на контуре  $L$ .

При работе с анизотропными средами в соответствующих краевых задачах возникает функция сдвига  $\alpha(t)$ .

Представим неизвестные аналитические функции через следующие интегралы типа Коши:

$$\begin{aligned} \varphi'_0(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_0(\tau) d\tau}{\tau - z}, \\ \varphi'_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\tau) d\tau}{\tau - z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Считая, что функция  $\omega_1(\tau)$  имеет на контуре  $L$  производную класса Гельдера, получим



$$\begin{aligned}
 \varphi'_0(t) &= \frac{1}{2}\omega_0(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_0(\tau)d\tau}{\tau-t}, \\
 \varphi_1^{(k)}(t) &= \frac{1}{2}\omega_1^{(k)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_1^{(k)}(\tau)d\tau}{\tau-t}, \quad k = 0, 1, \\
 \overline{\varphi'_0(t)} &= \frac{1}{2}\overline{\omega_0(t)} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega_1(\tau)\tau'^2(\sigma)d\tau}}{\bar{\tau}-t}, \\
 \overline{\varphi_1^{(k)}(t)} &= \frac{1}{2}\overline{\omega_1(t)} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega_1^{(k)}(\tau)\tau'^2(\sigma)d\tau}}{\bar{\tau}-t}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Используя полученные соотношения, приведем задачу (3) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 \omega_0(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega_0(\tau)d\tau}{\tau-t} + \overline{\omega_0(t)} - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega_0(\tau)\tau'^2(\sigma)d\tau}}{\bar{\tau}-t} + \omega_1(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\tau)d\tau}{\tau-t} + \\
 + \overline{t\omega'_1(t)} + \frac{\bar{t}}{\pi i} \int_L \frac{\omega'_1(\tau)d\tau}{\tau-t} + \overline{\omega_1(t)} - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega_1(\tau)\tau'^2(\sigma)d\tau}}{\bar{\tau}-t} + \overline{t\omega'_1(t)} - \\
 - \frac{t}{\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega'_1(\tau)\tau'^2(\sigma)d\tau}}{\bar{\tau}-t} = 2g_1(t),
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_0(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega_0(\tau)d\tau}{\tau-t} - \overline{\omega_0(t)} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega_0(\tau)\tau'^2(\sigma)d\tau}}{\bar{\tau}-t} - \omega_1(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\tau)d\tau}{\tau-t} + \\
 + \overline{t\omega'_1(t)} + \frac{\bar{t}}{\pi i} \int_L \frac{\omega'_1(\tau)d\tau}{\tau-t} - \overline{\omega_1(t)} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega_1(\tau)\tau'^2(\sigma)d\tau}}{\bar{\tau}-t} - \overline{t\omega'_1(t)} + \\
 + \frac{t}{\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega'_1(\tau)\tau'^2(\sigma)d\tau}}{\bar{\tau}-t} = 2g_2(t).
 \end{aligned}$$

Система сингулярных уравнений (6) содержит помимо искомым неизвестных функций их производные и сопряженные значения. Известно [5], что систему (6) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 \omega_0(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)d\tau}{\tau-t} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{\tau-t} \right] \omega_0(\tau)d\tau + \\
 + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\bar{t}-\bar{\tau}}{\tau-t} \right] \overline{\omega_0(\tau)}d\tau = f(t).
 \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнение (7) и равносильная ей система (6) были исследованы Д. И. Шерманом. С этого времени появилось значительное число работ, в которых изучались аналогичные уравнения и их приложения к решению задач теории упругости [4], [6], [7], [8]. В данной работе представлена система сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными граничными значениями неизвестных функций.

**Постановка задачи.** Пусть  $D$  — односвязная область плоскости комплексного переменного  $z$ ,  $L$  — граница области, причем  $L \in C_\mu^{(3)}$ . Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений, обобщающих систему уравнений Шермана.

$$\begin{aligned}
(K_1\omega_1\omega_2)(t) &\equiv a_1(t)\overline{[\omega_1(t) + \bar{t}\omega_2'(t) + \omega_2(t)]} + b_1(t)\{\omega_1[\alpha(t)] + \\
&+ \overline{\alpha(t)}\omega_2'(t) + \omega_2[\alpha(t)]\} + c_1(t)\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\tau) + \bar{t}\omega_2'(\tau) + \omega_2(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\
&+ \frac{d_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\tau) + \overline{\alpha(t)}\omega_2'(\tau) + \omega_2(\tau)}{\tau - \alpha(t)} d\tau + \int_L K_{11}(t, \tau)\omega_1(\tau) d\tau + \overline{\int_L K_{12}(t, \tau)\omega_1(\tau) d\tau} + \\
&+ \int_L K_{11}^*(t, \tau)\omega_2(\tau) d\tau + \overline{\int_L K_{12}^*(t, \tau)\omega_2(\tau) d\tau} = g_1(t), \\
(K_2\omega_1\omega_2)(t) &\equiv a_2(t)\overline{[\omega_1(t) + \bar{t}\omega_2'(t) - \omega_2(t)]} + b_2(t)\{\omega_1[\alpha(t)] + \\
&+ \overline{\alpha(t)}\omega_2'[\alpha(t)] - \omega_2[\alpha(t)]\} + c_2(t)\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\tau) + \bar{t}\omega_2'(\tau) - \omega_2(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\
&+ \frac{d_2(t)}{\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\tau) + \overline{\alpha(t)}\omega_2'(\tau) - \omega_2(\tau)}{\tau - \alpha(t)} d\tau + \int_L K_{21}(t, \tau)\omega_1(\tau) d\tau + \overline{\int_L K_{22}(t, \tau)\omega_1(\tau) d\tau} + \\
&+ \int_L K_{21}^*(t, \tau)\omega_2(\tau) d\tau + \overline{\int_L K_{22}^*(t, \tau)\omega_2(\tau) d\tau} = g_2(t),
\end{aligned} \tag{8}$$

где  $ak(t)$ ,  $bk(t)$ ,  $ck(t)$ ,  $dk(t)$  ( $k = 1, 2$ ) – заданные на  $L$  функции класса  $H(2n - k - 1)(L)$ ;  $f_k(t)$  – известные на  $L$  функции;  $g_k(t) \in H(2n - 1)(L)$ ;  $\alpha(t)$  – прямой или обратный сдвиг Карлемана ( $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$ ),  $\alpha'(t) \neq 0$ ,  $\alpha(t) \in H(2n - 1)(L)$ ;  $K_{kl}^*(t, \tau)$ ,  $K_{kl} \in H(1)(L \times L)$  ( $l=1,2$ ) – заданные ядра Фредгольма.

Характеристическая часть системы (8) равносильна обобщенной краевой задаче типа Карлемана для бианалитических функций вида

$$\begin{aligned}
a_1^*(t)\frac{\partial \overline{F^+(t)}}{\partial x} + b_1^*(t)\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x} + c_1^*(t)\frac{\partial \overline{F^-(t)}}{\partial x} + b_1^*(t)\frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial x} &= g_1(t), \\
a_2^*(t)\frac{\partial \overline{F^+(t)}}{\partial y} + b_2^*(t)\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial y} + c_1^*(t)\frac{\partial \overline{F^-(t)}}{\partial y} + b_2^*(t)\frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial y} &= ig_2(t),
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
F^\pm(z) &= \varphi_0^\pm(z) + \bar{z}\varphi_1^\pm(z); \\
a_k^*(t) &= ak(t) + ck(t); \\
b_k^*(t) &= bk(t) + dk(t); \\
c_k^*(t) &= ck(t) - ak(t); \\
d_k^*(t) &= dk(t) - bk(t) \quad (k = 1, 2).
\end{aligned}$$

В частном случае, когда  $\alpha(t) = t$ ,  $c_k^*(t) = d_k^*(t) \equiv 0$ ,  $a_1^*(t) = b_1^*(t) = 1$ ,  $a_2^*(t) = -b_2^*(t) = 1$ , система (9) представляет собой первую основную задачу теории упругости изотропного тела для конечной области.

Если  $b_k^*(t) = b_k^*(t) \equiv 0$ ,  $d_k^*(t) = 1$ ,  $c_1^*(t) = -1$ ,  $c_2^*(t) = 1$ , то первая основная задача ставится для бесконечной плоскости с отверстием. При этих же условиях система (8) перейдет в систему уравнений Шермана.

Задачей исследования является установление необходимых и достаточных условий нетеровости системы (8).

Напомним, что система сингулярных интегральных уравнений является нетеровой, если ее индекс (разность между числом линейно независимых решений неоднородной

системы и числом условий разрешимости однородной системы) конечное число. Установление нетеровости позволяет определить условия для равносильной регуляризации (сведению сингулярных уравнений к уравнениям Фредгольма второго рода).

**Основной результат.** Краевая задача (9) по своей постановке схожа с краевой многоэлементной задачей типа Карлемана для аналитического вектора [3], но ее исследование существенно затрудняется наличием неаналитической компоненты  $\bar{t}$ . Это в полной мере можно сказать и о системе (8), обобщающей задачу (9). Для проведения равносильной регуляризации системы (8) необходимо убрать из ядер интегралов типа Коши компоненту  $\bar{t}$ . Для этого выполним предварительно следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\omega'_2(\tau)d\tau}{\tau-t} &= \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\omega'_2(\tau)d\tau}{\tau-t} + \frac{1}{\pi i} \int_L (\bar{t} - \bar{\tau}) \frac{\omega'_2(\tau)d\tau}{\tau-t} = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\omega'_2(\tau)d\tau}{\tau-t} + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \int_L \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\bar{t}-\bar{\tau}}{\tau-t} \right) \right] \omega_2(\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\omega'_2(\tau)d\tau}{\tau-t} &= \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\omega'_2(\tau)d\tau}{\tau-\alpha(t)} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega'_2(\tau)(\overline{\alpha(t)}-\bar{\tau})d\tau}{\tau-\alpha(t)} = \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\omega'_2(\tau)d\tau}{\tau-\alpha(t)} + \frac{1}{\pi i} \int_L \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\overline{\alpha(t)}-\bar{\tau}}{\tau-\alpha(t)} \right) \right] \omega_2(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что правые части выражений (10) и (11) представляют собой сумму, состоящую из обычного интеграла типа Коши с ядром, принадлежащим классу Гельдера, и интеграла с ядром, имеющим слабую особенность (ядро Фредгольма).

Преобразуем систему (8) к следующему виду:

$$\begin{aligned} &a_1(t) \overline{[\omega_1(t) + \bar{t}\omega'_2(t) + \omega_2(t)]} + b_1(t) \{ \omega_1[\alpha(t)] + \overline{\alpha(t)}\omega'_2[\alpha(t)] + \omega_2[\alpha(t)] \} + \\ &+ c_1(t) \overline{\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\tau) + \bar{\tau}\omega'_2(\tau) + \omega_2(\tau)}{\tau-t} d\tau} + \frac{d_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\tau) + \bar{\tau}\omega'_2(\tau) + \omega_2(\tau)}{\tau-\alpha(t)} d\tau + \\ &+ c_1(t) \overline{\frac{1}{\pi i} \int_L \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\bar{t}-\bar{\tau}}{\tau-t} \right) \right] \omega_2(\tau)d\tau} + \frac{d_1(t)}{\pi i} \int_L \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\overline{\alpha(t)}-\bar{\tau}}{\tau-\alpha(t)} \right) \right] \omega_2(\tau)d\tau + \\ &+ \int_L K_{11}(t, \tau)\omega_1(\tau)d\tau + \int_L K_{12}(t, \tau)\omega_2(\tau) + \overline{\int_L K_{11}^*(t, \tau)\omega_1(\tau)d\tau} + \\ &+ \overline{\int_L K_{12}^*(t, \tau)\omega_2(\tau)d\tau} = g_1(t), \\ &a_2(t) \overline{[\omega_1(t) + \bar{t}\omega'_2(t) - \omega_2(t)]} + b_2(t) \{ \omega_1[\alpha(t)] + \overline{\alpha(t)}\omega'_2[\alpha(t)] + \omega_2[\alpha(t)] \} + \\ &+ c_2(t) \overline{\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\tau) + \bar{\tau}\omega'_2(\tau) - \omega_2(\tau)}{\tau-t} d\tau} + \frac{d_2(t)}{\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\tau) + \bar{\tau}\omega'_2(\tau) + \omega_2(\tau)}{\tau-\alpha(t)} d\tau + \\ &+ c_2(t) \overline{\frac{1}{\pi i} \int_L \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\bar{t}-\bar{\tau}}{\tau-t} \right) \right] \omega_2(\tau)d\tau} + \frac{d_2(t)}{\pi i} \int_L \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\overline{\alpha(t)}-\bar{\tau}}{\tau-\alpha(t)} \right) \right] \omega_2(\tau)d\tau + \\ &+ \int_L K_{21}(t, \tau)\omega_1(\tau)d\tau + \int_L K_{22}(t, \tau)\omega_2(\tau) + \overline{\int_L K_{21}^*(t, \tau)\omega_1(\tau)d\tau} + \\ &+ \overline{\int_L K_{22}^*(t, \tau)\omega_2(\tau)d\tau} = g_2(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Введем вспомогательные функции

$$\begin{aligned} W_1(t) &= \omega_1(t) + \bar{t}\omega_2'(t) + \omega_2(t), \\ W_2(t) &= \omega_1(t) + \bar{t}\omega_2'(t) - \omega_2(t). \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом обозначений (13) характеристическая часть системы (12) примет вид

$$\begin{aligned} a_1(t)\overline{W_1(t)} + b_1(t)W_1[\alpha(t)] + c_1(t)\overline{\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{W_1(\tau)d\tau}{\tau-t}} + \frac{d_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{W_1(\tau)d\tau}{\tau-\alpha(t)} &= f_1(t), \\ a_2(t)\overline{W_2(t)} + b_2(t)W_2[\alpha(t)] + c_2(t)\overline{\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{W_2(\tau)d\tau}{\tau-t}} + \frac{d_2(t)}{\pi i} \int_L \frac{W_2(\tau)d\tau}{\tau-\alpha(t)} &= f_2(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Система (14) представляет собой систему из двух характеристических независимых сингулярных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными значениями неизвестной функции.

Достаточно полное исследование таких уравнений проведено в работе [3].

Относительно системы (14) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Система сингулярных интегральных уравнений (12) нетерова тогда и только тогда, когда:

$$\text{а) } \Theta_k(t) = [a_k(t) + c_k(t)] \cdot \overline{\{c_k[\alpha(t)] - a_k[\alpha(t)]\}} - \overline{\{b_k[\alpha(t)] + d_k[\alpha(t)]\}} \times \\ \times [d_k(t) - b_k(t)] \neq 0, \quad (k = 1, 2) \quad (15)$$

в случае прямого сдвига  $\alpha(t)$

$$\text{б) } \Theta_{1,k}(t) = [a_k(t) + c_k(t)] \cdot \overline{\{a_k[\alpha(t)] + c_k[\alpha(t)]\}} - \overline{\{b_k[\alpha(t)] - d_k[\alpha(t)]\}} \times \\ \times [b_k(t) + d_k(t)] \neq 0, \quad (16)$$

$$\Theta_{2,k}(t) = [c_k(t) - a_k(t)] \cdot \overline{\{c_k[\alpha(t)] - a_k[\alpha(t)]\}} - \overline{\{d_k[\alpha(t)] - b_k[\alpha(t)]\}} \times \\ \times [d_k(t) - b_k(t)] \neq 0,$$

в случае обратного сдвига  $\alpha(t)$ .

Индекс системы в случае прямого сдвига рассчитывается по формуле

$$\frac{1}{\pi} \{\arg \Theta_1(t)\} + \frac{1}{\pi} \{\arg \Theta_2(t)\},$$

в случае обратного –

$$\frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\Theta_{11}(t)}{\Theta_{12}(t)} \right\} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\Theta_{21}(t)}{\Theta_{22}(t)} \right\}.$$

В силу постановки задачи необходимые и достаточные условия нетеровости системы (8) будут также и необходимыми и достаточными условиями нетеровости краевой задачи (9).

Условия (15) и (16) являются необходимыми и достаточными, чтобы была возможна равносильная регуляризация Карлемана – Векуа [3], [4].

Аналогичными методами можно исследовать более общую краевую задачу для полианалитических функций произвольного порядка. Требуется определить исчезающую на бесконечности кусочно полианалитическую функцию  $F_{\pm}(z)$  порядка  $n$ , которая непрерывно продолжается на контур  $L$  вместе со своими производными по  $\partial z$  и  $\partial \bar{z}$  до порядка  $(n - 1)$  включительно, по следующим краевым условиям:

$$a_k(t) \frac{\partial^{n-1} \overline{F^+(t)}}{\partial x^{n-k} \partial y^{k-1}} + b_k(t) \frac{\partial^{n-1} F^+[\alpha(t)]}{\partial x^{n-k} \partial y^{k-1}} + c_k(t) \frac{\partial^{n-1} \overline{F^-(t)}}{\partial x^{n-k} \partial y^{k-1}} + d_k(t) \frac{\partial^{n-1} F^-[\alpha(t)]}{\partial x^{n-k} \partial y^{k-1}} = f_k(t), \quad t \in L, \quad (17)$$

где  $a_k(t)$ ,  $b_k(t)$ ,  $c_k(t)$ ,  $d_k(t)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) – заданные на  $L$  функции класса  $H(2n - k - 1)(L)$ ;  $f_k(t)$  – известные на  $L$  функции,  $f_k(t) \in H(n - 1)(L)$ ;  $\alpha(t)$  – прямой сдвиг Карлемана второй кратности ( $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$ ),  $\alpha'(t) \neq 0$ ,  $\alpha(t) \in H(2n - 1)(L)$ . Так же можно исследовать и систему сингулярных интегральных уравнений, характеристическая часть которых равносильна краевой задаче (17).

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Володченков А. М., Юденков А. В. Моделирование основных задач плоской теории упругости однородных анизотропных тел краевыми задачами со сдвигом // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. 2006. Вып. 3. С. 482–483.
- [2] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
- [3] Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
- [4] Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
- [5] Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [6] Римская Л. П. Системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана в теории склеивания упругих поверхностей // *Вестник Брянского государственного университета*. 2014. № 4. С. 31–34.
- [7] Скородулина Е. Ю., Володченков А. М., Юденков А. В. Системы сингулярных интегральных уравнений в плоской теории упругости в пространстве LP. *Обозрение прикладной и промышленной математики*. 2006. Т. 13 № 3. С. 546–547.
- [8] Юденков А. В., Римская Л. П. Метод регуляризации систем сингулярных интегральных уравнений для бианалитических функций // *Universum: технические науки*. 2015. № 6 (18). С. 5.
- [9] Юденков А. В. Краевые задачи со сдвигом для полианалитических функций и их приложения к вопросам статической теории упругости. Смоленск: Смядынь, 2002. 268 с.

L. A. Maximova, A. V. Yudenkov, L. P. Rimskaja

## THE THEORY OF STOCHASTIC POTENTIAL IN THE PLANE THEORY OF ELASTICITY

*Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

*Smolensk State Agricultural Academy, Smolensk, Russia*

**Abstract.** The paper develops a stochastic theory-building in connection with its application to the solution of basic problems of the theory of elasticity. Particular attention is paid to the Dirichlet problem for  $N$  analytic functions. The relevance of the research topic is related to the fact that the theory of stochastic boundary value problems in the class of  $N$  analytic functions being formed.

In the work is given an exact mathematical formulation of stochastic Dirichlet problem for  $N$  an analytic function. It develops the necessary mathematical apparatus. A theorem on the existence and uniqueness of solutions. Get a general algorithm for solving stochastic Dirichlet problem for a fairly wide class of regions and contours, its stability is investigated. We give an example of the first major decisions of the elasticity problem with the use of stochastic Dirichlet problem for the  $n$ -analytic functions.

In the study we used the theory of boundary value problems for analytic functions and bianalytic,  $X$ -boundary properties of analytic functions, properties of stochastic differential systems.

**Keywords:** analytic function, complex potential, Dirichlet problem.

## REFERENCES

- [1] Volodchenkov A. M., Judenkov A. V. Modelirovanie osnovnyh zadach ploskoj teorii uprugosti odnorodnyh anizotropnyh tel kraevymi zadachami so sdvigom // Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki. 2006. Vyp. 3. S. 482–483. (in Russian).
- [2] Gahov F. D. Kraevye zadachi. M.: Nauka, 1977. 640 s. (in Russian).
- [3] Litvinchuk G. S. Kraevye zadachi i singuljarnye uravnenija so sdvigom. M.: Nauka, 1977. 448 s. (in Russian).
- [4] Mushelishvili N. I. Singuljarnye integral'nye uravnenija. M.: Nauka, 1968. 511 s. (in Russian).
- [5] Mushelishvili N. I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti. M.: Nauka, 1966. 707 s. (in Russian).
- [6] Rimskaja L. P. Sistemy singuljarnyh integral'nyh uravnenij so sdvigom Karlemana v teorii skleivaniya uprugih poverhnostej // Vestnik Brjanskogo gosudarstvennogo universiteta. 2014. № 4. S. 31–34. (in Russian).

---

*Maximova Lyudmila Anatolievna*

e-mail: maximova\_ng@mail.ru, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chuvash State University, Cheboksary, Russia; I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

*Yudenkov Alexey Vitalevich*, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Smolensk State Agricultural Academy, Smolensk, Russia.

[7] Skorodulina E. Ju., Volodchenkov A. M., Judenkov A. V. Sistemy singuljarnyh integral'nyh uravnenij v ploskoj teorii uprugosti v prostranstve LP. Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki. 2006. T. 13 № 3. S. 546–547. (in Russian).

[8] Judenkov A. V., Rimskaĵa L. P. Metod reguljarizacii sistem singuljarnyh integral'nyh uravnenij dlja bianaliticheskikh funkcij. Universum: tehniĵeskie nauki. 2015. № 6 (18). S. 5. (in Russian).

[9] Judenkov A. V. Kraevye zadachi so sdvigom dlja polianaliticheskikh funkcij i ih prilozhenija k voprosam staticheskoj teorii uprugosti. Smolensk: Smjadyn', 2002. 268 s. (in Russian).

В. М. Мирсалимов

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ БЕРЕГОВ ЩЕЛИ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ С КОНЦЕВЫМИ ЗОНАМИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

*Азербайджанский технический университет, Институт математики и механики НАН  
Азербайджана, г. Баку, Азербайджан*

**Аннотация.** Рассматривается плоская задача о сжатии объемными силами однородной плоскости с щелью переменной ширины, сравнимом с упругими деформациями. Берега щели находятся под действием внутреннего давления. Считается, что щель имеет концевые зоны в состоянии пластического течения материала. Исследуется случай возникновения нескольких участков контакта берегов щели. При этом считается, что на некоторой части площадки контакта возникает сцепление берегов, на остальной части возможно проскальзывание. Задача о равновесии щели с частично контактирующими берегами под действием объемных и поверхностных нагрузок сводится к задаче линейного сопряжения аналитических функций. Определены контактные напряжения, размеры участков контакта, зон сцепления и концевых зон.

**Ключевые слова:** изотропная среда, щель переменной ширины, концевые зоны щели, контакт берегов щели, сцепление берегов щели, проскальзывание берегов щели, объемные силы.

УДК: 539.375

**Введение.** Как известно, учет контакта берегов трещины значительно усложняет решение задачи механики разрушения. Это связано с увеличением числа неизвестных параметров задачи, таких как контактные напряжения, границы контакта и т. д. В то же время задачи с учетом контакта берегов трещины представляют значительный интерес при исследовании разрушения композиционных материалов, горных пород и др.

Частичное контактирование берегов щели переменной ширины в настоящее время малоизучено и практически не исследован учет переменной ширины щели при контакте берегов. В последнее время опубликован ряд работ, посвященных исследованию тел с трещинами с учетом сил сцепления между берегами и возможности их контакта [1]–[12].

В настоящей работе дается общая постановка задачи, в которой учитывается переменность ширины щели, трение и сцепление ее берегов при действии объемных сил. Получено решение этой проблемы для щели со связями между берегами в концевых

---

© Мирсалимов В. М., 2016

*Мирсалимов Вагиф Мирзахмедович*

e-mail: mir-vagif@mail.ru, д. ф.-м. н., профессор, Азербайджанский технический университет, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан.

Поступила 28.01.2016



зонах. Контактные напряжения определяются в квадратурах, что удобно для практического применения в расчетах.

**Постановка задачи.** Рассматривается однородная изотропная среда, ослабленная прямолинейной щелью переменной ширины  $h(x)$ , поверхность которой находится под давлением газа  $p(x)$ . Принято, что щель имеет концевые зоны в состоянии пластического течения материала. В материалах при наличии вблизи трещины зон с нарушенной структурой в процессе разрушения вовлекается достаточно большая часть трещины. В этом случае область процесса разрушения рассматривается как некоторый слой (концевая зона), примыкающий к трещине и содержащий материал с частично нарушенными связями. Используется модель Леонова–Панасюка–Дагдейла, согласно которой пластическая область сосредоточена в некоторой узкой области на продолжении трещины. Пусть в среде, занимающей плоскость  $xOy$ , имеется щель длиной  $2\ell = b - a$  (рис. 1).

Считается, что на частицы среды действуют объемные силы  $F = X + iY$ , где  $X(x, y)$  и  $Y(x, y)$  – заданные функции. При  $x, y \rightarrow \infty$  компоненты вектора перемещений и компоненты тензора напряжений стремятся к нулю. В процессе деформации берега щели вступают в контакт на участках  $(\alpha_k, \beta_k)$ . Считается, что каждая площадка контакта состоит из участка сцепления берегов  $(c_k, d_k)$  и двух участков  $(\alpha_k, c_k)$  и  $(d_k, \beta_k)$  на которых возможно проскальзывание. Обозначим:  $L_1$  – совокупность участков сцепления;  $L_2$  – совокупность участков проскальзывания;  $L_3$  – совокупность участков на которых действует давление  $p(x)$ ;  $L_4$  – совокупность концевых участков пластических деформаций  $(a_1, a) \cup (b, b_1)$ .

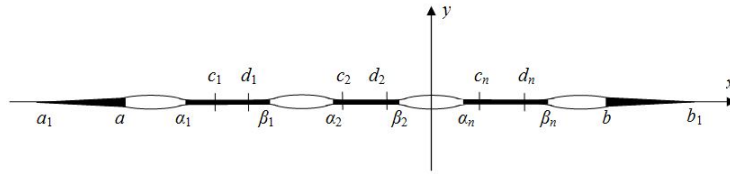


Рис. 1. Расчетная схема контактной задачи

Граничные условия на берегах щели с концевыми зонами для рассматриваемой задачи с исчезающими на бесконечности напряжениями имеют вид

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = p_y - ip_{xy} \quad \text{на } L_1; \tag{1}$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = (1 - if(x))p_y \quad \text{на } L_2;$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = -p(x) \quad \text{на } L_3;$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \sigma_s - i\tau_s \quad \text{на } L_4;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (v^+ - v^-) = -h'(x) \quad \text{на } L_1 + L_2; \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u^+ - u^-) = 0 \quad \text{на } L_1.$$

Здесь принято, что на участках проскальзывания имеют место силы сухого трения (закон трения принимается в форме Амонтона–Кулона);  $f(x)$  – коэффициент трения;  $\sigma_s$  и  $\tau_s$  соответственно – пределы текучести материала на растяжение и сдвиг;  $(u^+ - u^-)$  – касательная,  $(v^+ - v^-)$  – нормальная составляющая раскрытия берегов щели;  $p_y(x)$  и  $p_{xy}(x)$  соответственно, нормальные и касательная контактные напряжения.

Модель контакта с трением и сцеплением впервые была рассмотрена Л. А. Галиным [13], [14].

Размеры контактных зон заранее неизвестны и подлежат определению.

**Метод решения.** Напряженное состояние в плоскости с щелью представили в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1, \quad (3)$$

где  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  – любое частное решение уравнений плоской теории упругости для плоскости без щели при наличии объемных сил;  $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$  – решение уравнений плоской теории упругости для плоскости с щелью при отсутствии объемных сил.

Для напряжений  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  имеем соотношения

$$\sigma_x^0 + \sigma_y^0 = -\frac{2}{1+\kappa} \operatorname{Re} \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad z = x + iy; \quad (4)$$

$$\sigma_y^0 - \sigma_x^0 + 2i\tau_{xy}^0 = \frac{1}{1+\kappa} \frac{\partial}{\partial z} (\kappa \bar{Q} - \bar{F}_1),$$

в которые входят две функции  $Q(z, \bar{z})$  и  $F_1(z, \bar{z})$ , представляющие собой частные решения уравнений

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial \bar{z}} = F(z, \bar{z}), \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} = \overline{F(z, \bar{z})}. \quad (5)$$

Здесь  $\kappa$  – постоянная Мусхелишвили.

С учетом формул (3) граничные условия (1) запишем в виде

$$\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 = p_y - ip_{xy} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_1; \quad (6)$$

$$\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 = (1 - if) p_y - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_2;$$

$$\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 = p(x) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_3;$$

$$\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 = \sigma_s - i\tau_s - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_4.$$

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$  и вектора перемещений  $u_1, v_1$  выразим через две кусочно-аналитические функции комплексного переменного  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  [15]:

$$\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}, \quad (7)$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + iv_1) = \kappa \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)};$$

где  $\mu$  – модуль сдвига материала.

Следуя Н. И. Мусхелишвили [15], на основании граничных условий (6) приходим к задаче линейного сопряжения с разрывными коэффициентами

$$[\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- = 2f_0(t); \quad (8)$$

$$[\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- = 0,$$

где

$$f_0(t) = \begin{cases} p_y - ip_{xy} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_1 \\ (1 - if)p_y - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_2 \\ -p(x) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_3 \\ \sigma_s - i\tau_s - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_4 \end{cases}.$$

Так как напряжения в среде ограничены, то решение краевой задачи (8) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Искомое решение задачи (8) запишется в виде

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{\sqrt{(z - a_1)(z - b_1)}}{2\pi i} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_0(t)dt}{\sqrt{(t - a_1)(t - b_1)(t - z)}}. \quad (9)$$

При  $z \rightarrow \infty$   $X(z) = \sqrt{(z - a_1)(z - b_1)} = z + O(\frac{1}{z})$ . Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви соответствующей функции, выделяемой приведенным условием на верхнем берегу щели. Для определения  $a_1$  и  $b_1$  имеем два соотношения:

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{f_0(t)dt}{X^+(t)} = 0, \quad \int_{a_1}^{b_1} \frac{tf_0(t)dt}{X^+(t)} = 0. \quad (10)$$

В соотношения (9) и (10) входят неизвестные контактные напряжения  $p_y(x)$ ,  $p_{xy}(x)$ . Перейдем к построению интегральных уравнений для определения неизвестных функций  $p_y(x)$ ,  $p_{xy}(x)$ . Условиями, их определяющими, являются соотношения (2).

Используя второе соотношение в (7) и граничные значения функций  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  на отрезке  $y = 0$ ,  $a_1 \leq x \leq b_1$ , получим

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{2\mu}{1 + \kappa} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u^+ - u^-) + i \frac{\partial}{\partial x} (v^+ - v^-) \right]. \quad (11)$$

Используя формулы Сохоцкого–Племеля [15] и учитывая формулу (9), находим

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = -\frac{iX^+(x)}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_0(t)dt}{X^+(t)(t - x)}. \quad (12)$$

Учитывая соотношения (2), (11) и (12), после некоторых преобразований получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций  $p_y(x)$ ,  $p_{xy}(x)$

$$-\frac{X_1^+(x)}{\pi} \left[ \int_{L_1+L_2} \frac{p_y(t)dt}{X_1^+(t)(t - x)} - \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sigma_y^0 dt}{X_1^+(t)(t - x)} - \int_{L_3} \frac{p(t)dt}{X_1^+(t)(t - x)} + \right. \quad (13)$$

$$\left. + \int_{L_4} \frac{\sigma_s dt}{X_1^+(t)(t - x)} \right] = -\frac{2\mu}{1 + \kappa} h'(x);$$

$$\int_{L_1} \frac{p_{xy}(t)dt}{X_1^+(t)(t - x)} + \int_{L_2} \frac{fp_y(t)dt}{X_1^+(t)(t - x)} - \int_{a_1}^{b_1} \frac{\tau_{xy}^0(t)dt}{X_1^+(t)(t - x)} + \int_{L_4} \frac{\tau_s dt}{X_1^+(t)(t - x)} = 0, \quad (14)$$

где  $X_1^+(t) = \sqrt{(t - a_1)(b_1 - t)}$ .

Решение интегрального уравнения (13) может быть получено путем решения соответствующей задачи Римана [16]. Интегральное уравнение (13) представим в виде

$$\int_{L_1+L_2} \frac{p_y^*(\tau)d\tau}{\tau-t} = f_*(t),$$

где  $p_y^*(t) = \frac{p_y(t)}{X_1^+(t)}$ ,

$$f_*(t) = \frac{2\mu h'(t)}{(1+\kappa)X_1^+(t)} + \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sigma_y^0 d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau-t)} + \int_{L_3} \frac{p(\tau)d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau-t)} - \int_{L_4} \frac{\sigma_s d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau-t)}.$$

Введем кусочно-аналитическую функцию  $F_*(z)$ , заданную интегралом Коши, плотность которого является искомым решением интегрального уравнения

$$F_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{p_y^*(\tau)d\tau}{\tau-z}.$$

Аналитическая функция  $F_*(z)$  представляет собой решение задачи линейного сопряжения граничных значений

$$F_*^+(\tau) + F_*^-(\tau) = \frac{f_*(\tau)}{\pi i}. \quad (15)$$

Решение краевой задачи (15) в классе всюду ограниченных функций имеет вид

$$F_*(z) = \frac{X_2(z)}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)d\tau}{X_2^+(\tau)(\tau-z)},$$

где  $X_2^+(\tau) = \prod_{k=1}^n \sqrt{(\tau-\alpha_k)(\tau-\beta_k)}$ ;  $X_2(z) = \prod_{k=1}^n \sqrt{(z-\alpha_k)(z-\beta_k)}$ ;  $f_*^1(\tau) = \frac{f_*(\tau)}{\pi i}$ .

С использованием формул Сохоцкого–Племеля получаем решение интегрального уравнения (13):

$$\begin{aligned} p_y^*(t) &= F_*^+(t) - F_*^-(t), \\ F_*^+(t) &= X_2^+(t) \left( \frac{1}{2} \frac{f_*^1(t)}{X_2^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)d\tau}{X_2^+(\tau)(\tau-t)} \right), \\ F_*^-(t) &= X_2^-(t) \left( -\frac{1}{2} \frac{f_*^1(t)}{X_2^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)d\tau}{X_2^+(\tau)(\tau-t)} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $X_2^-(t)/X_2^+(t) = -1$ , имеем

$$p_y^*(t) = \frac{X_2^+(t)}{\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)d\tau}{X_2^+(\tau)(\tau-t)},$$

из которого следует

$$p_y(t) = X_1^+(t) \frac{X_2^+(t)}{\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)d\tau}{X_2^+(\tau)(\tau-t)}. \quad (16)$$

Для определения параметров  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  имеем уравнения

$$p_y(t) = \int_{L_1+L_2} \frac{t^{k-1} f_*(\tau) d\tau}{X_2^+(t)} \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Недостающие  $n$  уравнений для определения координат концов участков контакта берегов щели получим из условий

$$v^+(\alpha_k) - v^-(\alpha_k) = -h(\alpha_k) \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Имеем  $v^+(\alpha_k) - v^-(\alpha_k) = \frac{1}{4\pi i \gamma} \int_{\alpha_1}^x G(t) dt$ , где  $\gamma = \frac{\mu}{\pi(1+\kappa)}$ ,  $G(t) = [\Phi + \bar{\Phi}]^+ - [\Phi + \bar{\Phi}]^-$ .

Используя предыдущие формулы, находим искомые уравнения:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_1} G(t) dt = -4\pi i \gamma h(\alpha_1) \quad (18)$$

$$\int_{\beta_k}^{\alpha_{k+1}} G(t) dt = -4\pi i \gamma [h(\alpha_{k+1}) - h(\beta_k)] \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Аналогично, решая сингулярное интегральное уравнение (14), получим

$$p_{xy}(x) = \frac{X_1^+(x) X_3^+(x)}{\pi^2} \int_{L_1} \frac{f_{xy}(\tau) d\tau}{X_3^+(\tau)(\tau-x)}, \quad (19)$$

где  $X_3^+(x) = \prod_{k=1}^m \sqrt{(x-c_k)(x-d_k)}$ ,

$$f_{xy}(x) = - \int_{L_2} \frac{f p_y(t) dt}{X_1^+(t)(t-x)} + \int_{a_1}^{b_1} \frac{\tau_{xy}^0(t) dt}{X_1^+(t)(t-x)} - \int_{L_4} \frac{\tau_s dt}{X_1^+(t)(t-x)}.$$

Для определения неизвестных  $c_k$  и  $d_k$  имеем

$$\int_{L_1} \frac{t^{k-1} f_{xy}(t) dt}{X_3^+(t)(t-x)} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (20)$$

Недостающие  $m$  уравнений для нахождения координат концов участков контакта получим из условий

$$u^+(c_k) - u^-(c_k) = \int_{a_1}^{c_k} \frac{\partial}{\partial t} (u^+ - u^-) dt = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Имеем

$$\int_{a_1}^{c_1} [\Phi^+ - \Phi^-] dt = -2\pi i \gamma h(c_1), \quad (21)$$

$$\int_{d_k}^{c_{k+1}} [\Phi^+ - \Phi^-] dt = -2\pi i \gamma [h(c_{k+1}) - h(d_k)], \quad k = 1, 2, \dots, m-1.$$

Для определения участков сцепления имеем полную систему уравнений.

Для определения напряжений и смещений, а также размеров контактных зон и концевых зон пластических деформаций необходимо задать законы изменения объемной силы. Для упрощения вычислений функции  $X(x,y)$  и  $Y(x,y)$  разлагались в ряды Тейлора в начале системы координат, причем ограничивались несколькими первыми членами разложения. С помощью интегрирования уравнений (5) находим

$$Q(z, \bar{z}) = \int_z dz \int_{\bar{z}} F(z, \bar{z}) d\bar{z},$$

$$F_1(z, \bar{z}) = \int_z dz \int_{\bar{z}} \overline{F(z, \bar{z})} d\bar{z}.$$

По найденным функциям  $Q(z, \bar{z})$  и  $F_1(z, \bar{z})$  согласно (4) находим функции  $\sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ .

Необходимые интегралы, содержащие функции  $X_1^+(t), X_2^+(t)$  и  $X_3^+(t)$ , вычислялись приемом, предложенным Н. И. Мухелишвили [15, §110].

Для определения предельного состояния среды под действием объемных сил в качестве критерия разрушения использовался критерий критического раскрытия щели [17].

$$|(u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-)| = \delta_c,$$

где  $\delta_c$  – трещиностойкость материала.

На основании полученного решения находим при  $x = a$  (у основания левой концевой зоны)

$$\frac{1 + \kappa}{2\mu} \left| \int_{a_1}^a [\Phi^+ - \Phi^-] dx \right| = \delta_c, \quad (22)$$

при  $x = b$  (у основания правой концевой зоны)

$$\frac{1 + \kappa}{2\mu} \left| \int_b^{b_1} [\Phi^+ - \Phi^-] dx \right| = \delta_c.$$

Для вычисления интеграла в левой части (22) проводим замену переменных для перехода к отрезку интегрирования  $[-1,1]$ , затем используем квадратурную формулу Чебышева. Полученные уравнения дают возможность при заданных характеристиках материала найти критическое напряженное состояние, при котором происходит рост щели.

Проведен параметрический анализ зависимости контактных напряжений  $p_y(x)$  и  $p_{xy}(x)$  от размеров щели. При вычислениях контактных напряжений и размеров концевых и контактных зон полагалось, что на берегах щели действует постоянное давление. Результаты расчета абсолютных величин контактных напряжений  $p_y/F_0$  вдоль контактной зоны при различных значениях относительного размера щели  $\ell_* = (b - -a)/R$  ( $R$  – характерный линейный размер среды) приведены на рис. 2. При расчетах использованы безразмерные координаты  $x'$ :

$$x = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2} x'.$$

Ширина щели принимались в виде параболического закона.

Наибольшие значения контактных напряжений имеют место в средней части контактной зоны, где берега щели смыкаются. При увеличении размера концевой зоны пластических деформаций контактные напряжения уменьшаются. Характер изменения касательных напряжений  $p_{xy}(x)$  вдоль контактной зоны подобен изменению нормальных контактных напряжений  $p_y(x)$ , но абсолютные значения касательных напряжений существенно меньше.

На рис. 3 приведены графики зависимости размеров зоны пластических деформаций  $(b_1 - b)/(b - a)$  от безразмерного силового фактора объемных сил  $F_0/\sigma_s$  при различных значениях длины щели  $l_* = 0,02; 0,05; 0,10$ . В расчетах принято  $\nu = 0,3$  (коэффициент Пуассона),  $M = 30$  (число чебышевских узлов разбиения интервала интегрирования).

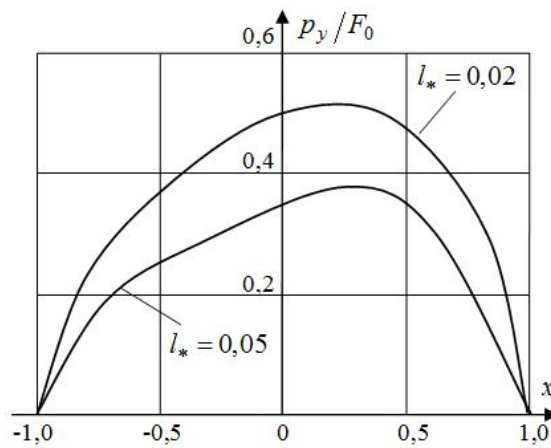


Рис. 2. Зависимость контактных напряжений вдоль контактной зоны при различных значениях относительного размера щели

Предложена эффективная схема расчета частично закрытой внешними силами щели под действием внутреннего давления. Анализ модели частичного закрытия щели переменной ширины с концевыми пластическими зонами в изотропной среде при наличии объемных сил сводится к параметрическому исследованию системы сингулярных интегральных уравнений при различных геометрических и физических параметрах среды. Непосредственно из решения полученных уравнений определяются контактные напряжения  $p_y(x)$ ,  $p_{xy}(x)$ , а также размеры контактных и концевых зон пластических деформаций. Полученные соотношения позволяют решать обратную задачу, т. е. определить параметры объемных сил и напряженное состояние изотропной среды, при которых достигается заданная область контакта берегов щели.

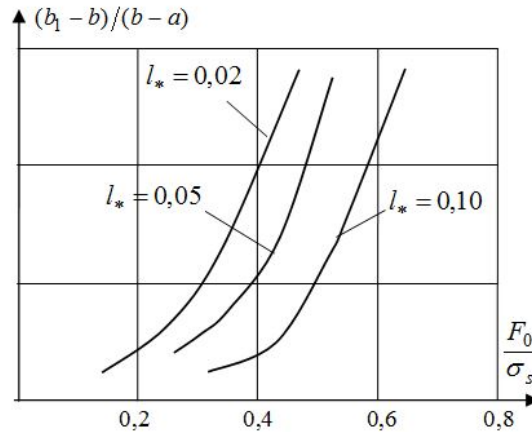


Рис. 3. Зависимость контактных напряжений вдоль от безразмерного силового фактора объемных сил при различных значениях длины щели

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мирсалимов В. М. Моделирование закрытия трещины со связями между берегами во втулке контактной пары // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 2. С. 78–92.
- [2] Мир-Салим-заде М. В. Моделирование частичного закрытия трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // Прикл. мех. и техн. физика. 2010. Т. 51. № 2. С. 148–159.
- [3] Мирсалимов В. М., Рустамов Б. Э. Разрушение горящего твердого топлива, ослабленного трещиновидной полостью // Прикл. мех. и техн. физика. 2011. Т. 52. № 1. С. 173–184.
- [4] Mirsalimov V. M., Rustamov B. E. Effect of damages on crack-visible of the cavity opening displacement on burning solid fuel // Int. J. Damage Mechanics. 2012. № 21. P. 373–389.
- [5] Mirsalimov V. M., Rustamov B. E. Interaction of prefracture zones and crack visible cavity in a burning solid with mixed boundary conditions // Acta Mech. 2012. № 223. P. 627–643.
- [6] Гасанов Ш. Г. Когезионная трещина с частично контактирующими берегами в сечении дорожного покрытия // Механика машин, механизмов и материалов. 2012. № 2(16). С. 58–64.
- [7] Мирсалимов В. М., Рустамов Б. Э. Моделирование частичного закрытия трещиновидной полости со связями между берегами в изотропной среде // Прикл. мех. и техн. физика. 2013. Т. 54. № 6. С. 181–190.
- [8] Mirsalimov V. M., Zolghannein E. Cracks with interfacial bonds in the hub of a friction pair // Meccanica. 2012. 47. P. 1591–1600.
- [9] Prechtek M., Leiva Randa P., Janisch R., et al. Simulation of fracture in heterogeneous elastic materials with cohesive zone models // Int. of J. Fracture. 2011. 168. P. 15–29.
- [10] Kovtunencko V. A. Nonconvex problem for crack with nonpenetration // ZAMM. 2005. № 85. P. 242–251.



- [11] Belhouari M., Amiri A., Mehidi A., et al. Elastic–plastic analysis of interaction between an interface and crack in bi-materials // *Int. J. Damage Mech.* 2014. № 23. P. 299–326.
- [12] Fan H., Sun Y. M., Xiao Z. M. Contact zone in an interfacial Zener–Stroh crack // *Mechanics of Materials*. 1998. 30. P. 151–159.
- [13] Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // *ПММ*. 1945. Т. 9. № 5. С. 413–424.
- [14] Горячева И. Г., Маланчук Н. И., Мартыняк Р. М. Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании // *ПММ*. 2012. № 76. Вып. 5. С. 695–709.
- [15] Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [16] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
- [17] Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наукова думка, 1991. 416 с.

V. M. Mirsalimov

**CONTACT PROBLEM FOR INTERACTION OF FACES OF VARIABLE WIDTH SLOT WITH PLASTIC DEFORMATION END ZONES**

*Azerbaijan Technical University, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*

**Abstract.** A plane problem on compression of homogeneous plane with a slot of variable width is considered. The compression of the plane is carried out by body forces. The variable width of the slot is comparable with elastic deformations. Slot faces are under internal pressure. It is assumed that the slot has end zones in a state of plastic flow of the material. Case of occurrence of several sections of the slot faces contact is investigated. It is assumed that in some part of the contact section a stick of the slot faces occurs and in the remaining part a slippage of the slot faces is possible. Equilibrium problem for the slot with partially contacting bonds under the influence of body and surface loads is reduced to a problem of linear conjugation of analytic functions. Contact stresses, sizes of the contact, stick and end zones are found.

**Keywords:** isotropic medium, slot of variable width, end zones of slot, contact of slot faces, stick of slot faces, slipping of slot faces, body forces.

**REFERENCES**

- [1] Mirsalimov V. M. Simulation of bridged crack closure in a contact pair bushing // *Mechanics of Solids*. 2009. № 4. Issue 2. P. 232–243. (in Russian).
- [2] Mir-Salim-zada M. V. Modeling of partial closure of cracks in a perforated isotropic medium reinforced by a regular system of stringers // *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2010. № 51. Issue 2. P. 269–279. (in Russian).

---

*Mirsalimov Vagif*

e-mail: mir-vagif@mail.ru, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Azerbaijan Technical University, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan.

- [3] Mirsalimov V. M., Rustamov B. E. Fracture of a burning solid propellant attenuated by a crack type cavity // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 2011. № 52. Issue 1. P. 141–150. (in Russian).
- [4] Mirsalimov V. M., Rustamov B. E. Effect of damages on crack-visible of the cavity opening displacement on burning solid fuel // Int. J. Damage Mechanics. 2012. № 21. P. 373–389. (in Russian).
- [5] Mirsalimov V. M., Rustamov B. E. Interaction of prefracture zones and crack visible cavity in a burning solid with mixed boundary conditions // Acta Mech. 2012. № 223. P. 627–643. (in Russian).
- [6] Hasanov Sh. H. Cohesive crack with partially contacting faces in section of the road covering // Mechanics of machines, mechanisms and Materials. 2012. № 2 (16). P. 58–64. (in Russian).
- [7] Mirsalimov V. M., Rustamov B. E. Simulation of partial closure of a crack-like cavity with cohesion between the faces in an isotropic medium // J of Applied Mechanics and Technical physics. 2013. № 54. 1021–1029. (in Russian).
- [8] Mirsalimov V. M., Zolghannein E. Cracks with interfacial bonds in the hub of a friction pair // Meccanica. 2012. № 47. P. 1591–1600. (in Russian).
- [9] Prechtek M., Leiva Randa P., Janisch R., et al. Simulation of fracture in heterogeneous elastic materials with cohesive zone models // Int. of J. Fracture. 2011. № 168. P. 15–29. (in Russian).
- [10] Kovtunenکو V. A. Nonconvex problem for crack with nonpenetration // ZAMM. 2005. № 85. P. 242–251.
- [11] Belhouari M., Amiri A., Mehidi A., et al. Elastic–plastic analysis of interaction between an interface and crack in bi-materials // Int. J. Damage Mech. 2014. № 23. P. 299–326.
- [12] Fan H., Sun Y. M., Xiao Z. M. Contact zone in an interfacial Zener–Stroh crack // Mechanics of Materials. 1998. № 30. P. 151–159.
- [13] Galin L. A. Indentation of stamp in presence of friction and cohesion // J. of Applied Mathematics and Mechanics. 1945. Vol. 9. № 5. P. 413–424. (in Russian).
- [14] Goryacheva I. G., Malanchuk N. I., Martynyak R.M. Contact interaction of bodies with a periodic relief during partial slip // J. of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 7. Issue. 5. P. 621–630. (in Russian).
- [15] Muskhelishvili N. I. Some basic problems of mathematical theory of elasticity. Amsterdam: Kluwer, 1977. (in Russian).
- [16] Gakhov F. D. Boundary value problems. M.: Nauka. (in Russian).
- [17] Panasyuk V. V. Mechanics of quasibrittle fracture of material. Kiev: Naukova Dumka, 1991. (in Russian).

А. Г. Терентьев, А. О. Казакова

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

*Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

**Аннотация.** Предложен численный метод решения основной краевой задачи плоской теории упругости в напряжениях для произвольной многосвязной области. Особое внимание уделено переходу от граничных условий задачи теории упругости к граничным условиям для бигармонической функции напряжений, что позволяет применить разработанный авторами ранее алгоритм решения краевых задач для полигармонических функций к решению плоской задачи теории упругости. На тестовых примерах с применением компьютерного моделирования показана достаточно высокая точность предложенного метода.

**Ключевые слова:** теория упругости, краевые задачи, метод граничных элементов, многосвязная область, компьютерное моделирование.

УДК: 519.635.4:539.3

**Введение.** Определение упругого равновесия в плоской задаче сводится к решению краевых задач для бигармонического уравнения. Первые и основополагающие результаты в этом направлении с использованием аппарата функций комплексного переменного и конформного отображения были получены в фундаментальных исследованиях Г. В. Колосова [1] и Н. И. Мухелишвили [2]. В последующем различными авторами было рассмотрено значительное количество новых задач для некоторых областей частного вида. Следует отметить, что не всегда удается получить приемлемые аналитические результаты, удобные для вычислений. Поэтому незаменимым остается использование численных методов. В настоящее время предложено достаточно большое количество работ по численным методам. Наиболее простыми для применения являются методы конечных и граничных элементов [3]. Первый метод аналогичен методу конечных разностей, и численное решение строится в области, поэтому частные производные определяются численно по разностным алгоритмам. Этот метод неизбежно ведет к накоплению ошибок, особенно при вычислении производных высших

---

© Терентьев А. Г., Казакова А. О., 2016

*Терентьев Алексей Григорьевич*

**e-mail:** agterent@gambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

*Казакова Анастасия Олеговна*

**e-mail:** kazakova\_anastasia@bk.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 28.01.2016

порядков. Более точные результаты можно получить методами граничных элементов, поскольку дифференциальное уравнение сводится к интегральным уравнениям на границе области, получаемым с помощью взвешенных невязок и фундаментальных сингулярных решений. Для этого вводят вспомогательные весовые функции (в случае плоской задачи таких функций шесть), которые также подлежат определению. Достаточно полный исторический обзор по методам граничных элементов дан А. М. Линьковым в [4].

В настоящей работе разработанный авторами (см. [5]) численный алгоритм решения краевых задач для полигармонического уравнения применяется к решению плоской задачи теории упругости в напряжениях для произвольной области. Искомой здесь является одна бигармоническая функция напряжений Эри, через которую выражаются напряжения. Особое внимание уделено краевым условиям, которые в случае многосвязной области содержат дополнительные константы. Для их определения используются условия однозначности перемещений. Сравнение с известными аналитическими решениями подтверждает высокую точность предложенного численного метода.

**1. Постановка плоской задачи теории упругости в напряжениях для многосвязной области.** Пусть задана  $M$ -связная плоская область  $D$ , и пусть граница этой области  $\partial D = \bigcup_{k=1}^M \partial D_k$  задана функциями дуговой координаты  $s \in \partial D_k$ ,  $k = \overline{1, M}$ :  $x^{(k)} = x^{(k)}(s)$ ,  $y^{(k)} = y^{(k)}(s)$ . На границе области заданы нормальное и касательное внешние напряжения  $p_n^{(k)}(s)$  и  $p_\tau^{(k)}(s)$ . Требуется определить компоненты тензора напряжений в каждой точке области  $D$ . В дальнейшем верхний индекс  $(k)$  без ущерба общности можно опустить.

Если обозначить  $\tau_x = x'_s$ ,  $\tau_y = y'_s$  как компоненты касательного единичного вектора, то граничными условиями для определения тензора напряжений являются равенства

$$\sigma_{xx}\tau_y - \sigma_{xy}\tau_x = p_x, \quad \sigma_{xy}\tau_y - \sigma_{yy}\tau_x = p_y, \quad (1.1)$$

где  $p_x(s) = p_n(s)\tau_y + p_\tau(s)\tau_x$ ,  $p_y(s) = p_\tau(s)\tau_y - p_n(s)\tau_x$ .

**2. Переход к граничным условиям для бигармонической функции напряжений.** Как известно из теории упругости, в плоской задаче все три напряжения, возникающие внутри области  $D$ , могут быть выражены через одну бигармоническую функцию Эри  $\varphi$ :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (2.1)$$

Граничные условия (1.1) с учетом (2.1) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \tau_y + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \tau_x &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = p_x(s), \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \tau_x - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \tau_y &= -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = p_y(s), \end{aligned} \quad s \in \partial D_k, \quad k = \overline{1, M}.$$

Отсюда

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\partial D_k} = -\int_0^s p_y(s) ds + C_1, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{\partial D_k} = \int_0^s p_x(s) ds + C_2.$$

Нормальная и касательная производные функции напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\partial D_k} &= -y'_s \int_0^s p_y(s) ds - x'_s \int_0^s p_x(s) ds + C_1 y'_s - C_2 x'_s, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} \Big|_{\partial D_k} &= -x'_s \int_0^s p_y(s) ds + y'_s \int_0^s p_x(s) ds + C_1 x'_s + C_2 y'_s. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из последнего равенства определяется функция напряжений

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \int_0^s (x(s)p_y(s) - y(s)p_x(s)) ds + x(s) \left( C_1 - \int_0^s p_y(s) ds \right) + \\ &+ y(s) \left( C_2 + \int_0^s p_x(s) ds \right) + C_3, \quad s \in \partial D_k, \quad k = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Таким образом, рассматриваемая задача эквивалентна краевой задаче для бигармонической функции  $\varphi$  с граничными условиями (2.2) и (2.3), которые будут содержать  $3M$  неизвестных постоянных.

**3. Определение неизвестных постоянных, входящих в граничные условия.** Если область  $D$  является односвязной, то константы  $C_1, C_2, C_3$ , входящие в граничные условия (2.2), (2.3), можно задать произвольно (например, принять их равными нулю), т. к. они входят в несущественную для напряжений линейную часть функции  $\varphi$ . В случае же многосвязной области граничные условия на каждом контуре содержат по три константы. На одном контуре (например, на наружном контуре  $\partial D_M$ ) их по-прежнему можно положить равными нулю, постоянные на других (внутренних) контурах не могут быть произвольными (см. [6]).

Для определения неизвестных констант, входящих в (2.2), (2.3), в случае двусвязной области в [7] были получены три уравнения из условий однозначности компонент перемещения при обходе внутренней границы области. В случае многосвязной области аналогично можно записать недостающие уравнения для определения всех дополнительных констант. Опуская вывод, приведем эти уравнения:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D_k} \frac{\partial q}{\partial n} ds &= \frac{1}{K} \oint_{\partial D_k} p_y^{(k)}(s) ds, \quad \oint_{\partial D_k} \frac{\partial p}{\partial n} ds = -\frac{1}{K} \oint_{\partial D_k} p_x^{(k)}(s) ds, \\ \oint_{\partial D_k} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n} ds &= 0, \quad k = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $K = 1/(1 + \nu)$  (в случае плосконапряженного состояния),  $K = 1 - \nu$  (в случае плоской деформации),  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $p$  и  $q$  – сопряженные гармонические функции, такие, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \Delta \varphi, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Таким образом, получены три уравнения (3.1) для определения трех неизвестных констант  $C_1^{(k)}, C_2^{(k)}, C_3^{(k)}$  на каждом из внутренних контуров  $\partial D_k$  многосвязной области  $D$ .

**4. Применение метода граничных элементов.** В работе авторов [5] из интегральной формулы Грина были получены интегральные соотношения для полигармонических функций. В частности, для бигармонической функции эти соотношения

ИМЕЮТ ВИД

$$\begin{aligned}\varepsilon \hat{u}(P) &= \int (\hat{v}G_0 - \hat{u}H_0) ds, \\ \varepsilon u(P) &= \int_{\partial D} (vG_0 - uH_0 + \hat{v}G_1 - \hat{u}H_1) ds,\end{aligned}\quad (4.1)$$

где  $u$  — бигармоническая функция,  $\hat{u} = \Delta u$  — гармоническая функция,

$$\begin{aligned}v &= \frac{\partial u}{\partial n}, \quad \hat{v} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial n}, \\ G_0 &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad G_1 = \frac{r^2}{8\pi} \left(1 + \ln \frac{1}{r}\right), \quad H_0 = \frac{\partial G_0}{\partial n}, \quad H_1 = \frac{\partial G_1}{\partial n},\end{aligned}\quad (4.2)$$

$r$  — расстояние между точкой  $P$  и переменной точкой интегрирования, множитель  $\varepsilon = 0.5$  для точки  $P$  на гладкой границе и  $\varepsilon = 1$  для внутренней точки.

С помощью метода граничных элементов система интегральных уравнений для полигармонических функций сводится к системе линейных алгебраических уравнений (см. [5]). Каждый из контуров  $\partial D_k$  многосвязной области  $D$  аппроксимируется многоугольником, состоящим из  $N_k$  линейных граничных элементов ( $k = \overline{1, M}$ ), внутри каждого из которых выбрана контрольная точка  $P_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ ,  $N = \sum_{k=1}^M N_k$ . Тогда уравнения (4.1) могут быть представлены в виде системы двух матричных уравнений

$$\begin{aligned}(\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}) \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{B} \hat{\mathbf{V}} &= 0, \\ (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}) \mathbf{U} - \mathbf{B} \mathbf{V} + \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{V}} &= 0,\end{aligned}\quad (4.3)$$

где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица,  $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{V}}$  — вектор-столбцы, компонентами которых являются значения вспомогательных функций в контрольных точках:

$$U_j = u(P_j), \quad V_j = v(P_j), \quad \hat{U}_j = \hat{u}(P_j), \quad \hat{V}_j = \hat{v}(P_j), \quad j = \overline{1, N},$$

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$  — матрицы, элементы которых вычисляются интегрированием соответствующих функций по прямолинейным граничным элементам  $\Gamma_j$ :

$$\begin{aligned}A_{i,j} &= \int_{\Gamma_j} H_0(r_{i,j}) ds, \quad B_{i,j} = \int_{\Gamma_j} G_0(r_{i,j}) ds, \\ \hat{A}_{i,j} &= \int_{\Gamma_j} H_1(r_{i,j}) ds, \quad \hat{B}_{i,j} = \int_{\Gamma_j} G_1(r_{i,j}) ds, \quad i, j = \overline{1, N},\end{aligned}$$

где  $r_{i,j}$  — расстояние между фиксированной контрольной точкой  $P_i$  и переменной точкой интегрирования граничного элемента  $\Gamma_j$ .

Элементы матриц  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$  могут быть выражены аналитически (см. [8]). Для этого целесообразно перейти к локальной системе координат с началом в центре хорды и действительной осью, направленной по  $j$ -му элементу. Если ввести обозначения

$$\xi_{i,j} = \frac{2}{h_j^2} [x_i^* (x_j - x_{j-1}) + y_i^* (y_j - y_{j-1})], \quad \eta_{i,j} = \frac{2}{h_j^2} [y_i^* (x_j - x_{j-1}) - x_i^* (y_j - y_{j-1})],$$

$$p_{i,j} = \ln \frac{h_j^2}{4} [(1 - \xi_{i,j})^2 + \eta_{i,j}^2], \quad q_{i,j} = \ln \frac{h_j^2}{4} [(1 + \xi_{i,j})^2 + \eta_{i,j}^2],$$

где  $h_j$  — длина  $j$ -го элемента,  $(x_i^*, y_i^*)$  — средняя точка  $i$ -го элемента, то элементы матриц вычисляются по следующим формулам:

$$A_{i,j} = -\frac{1}{2\pi} \left( \arctan \frac{1 - \xi_{i,j}}{\eta_{i,j}} + \arctan \frac{1 + \xi_{i,j}}{\eta_{i,j}} \right), \quad \hat{A}_{i,j} = -\frac{h_j \eta_{i,j}}{4} \left( B_{i,j} + \frac{h_j}{4\pi} \right),$$

$$B_{i,j} = \frac{h_j}{2\pi} \left( \eta_{i,j} A_{i,j} - \frac{1}{4\pi} [(1 - \xi_{i,j}) p_{i,j} + (1 + \xi_{i,j}) q_{i,j} - 4] \right),$$

$$\widehat{B}_{i,j} = -\frac{h_j^3}{32\pi} \left( \frac{4(1+3\xi_{i,j}^2)}{9} + \frac{5\eta_{i,j}^2}{3} + \frac{2\pi}{3} \eta_{i,j}^3 A_{i,j} \right) +$$

$$+ \frac{h_j^3(1-\xi_{i,j})}{128\pi} \left( \frac{(1-\xi_{i,j})^2}{3} + \eta_{i,j}^2 \right) p_{i,j} + \frac{h_j^3(1+\xi_{i,j})}{128\pi} \left( \frac{(1+\xi_{i,j})^2}{3} + \eta_{i,j}^2 \right) q_{i,j}.$$

Система уравнений (4.3) представляет собой систему  $2N$  линейных алгебраических уравнений относительно  $2N$  неизвестных компонент векторов  $\widehat{\mathbf{U}}$  и  $\widehat{\mathbf{V}}$ . Элементы векторов  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  известны из постановки задачи и определяются условиями (2.2), (2.3). Для односвязной области все дополнительные постоянные полагаются равными нулю, и оба уравнения (4.3) объединяются в одно матричное уравнение, которое решается численно с помощью обратной матрицы.

В случае многосвязной области к уравнениям (4.3) нужно добавить условия (3.1). Для этого целесообразно привести их к линейным уравнениям, содержащим только неизвестные значения функций  $\hat{u}$  и  $\hat{v}$ . В [7] были получены такие уравнения для внутренней границы двусвязной области, аналогично можно записать соответствующие уравнения в случае многосвязной области в предположении, что результирующая внешних сил, действующих на каждый внутренний контур, равна нулю. Тогда условия (3.1) на внутренних контурах границы принимают вид

$$\oint_{\partial D_k} \frac{\partial p}{\partial n} ds = 0, \quad \oint_{\partial D_k} \frac{\partial q}{\partial n} ds = 0, \quad \oint_{\partial D_k} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n} ds = 0, \quad k = \overline{1, M-1}. \quad (4.4)$$

После некоторых преобразований получим

$$\sum_{j=N_{k-1}+1}^{N_k} \left( h_j (x_{N_{k-1}+1} - x_j) \widehat{V}_j + (y_{j+1} - y_j) \widehat{U}_j \right) = 0,$$

$$\sum_{j=N_{k-1}+1}^{N_k} \left( h_j (y_{N_{k-1}+1} - y_j) \widehat{V}_j + (x_{j+1} - x_j) \widehat{U}_j \right) = 0, \quad \sum_{j=N_{k-1}+1}^{N_k} h_j \widehat{V}_j = 0. \quad (4.5)$$

Три линейных уравнения (4.5) совместно с (4.3) образуют полную систему  $2N+3(M-1)$  уравнений для нахождения значений функций  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  и неизвестных констант интегрирования на внутренних контурах границы многосвязной области  $D$ .

**5. Определение напряжений.** Решение полученной системы линейных уравнений определяет значения вспомогательных функций  $\hat{u}$  и  $\hat{v}$  на границе области в контрольных точках. Значение функции напряжений во внутренней точке  $P$  ( $\varepsilon = 1$ ) вычисляется из второго уравнения (4.1), на основании которого

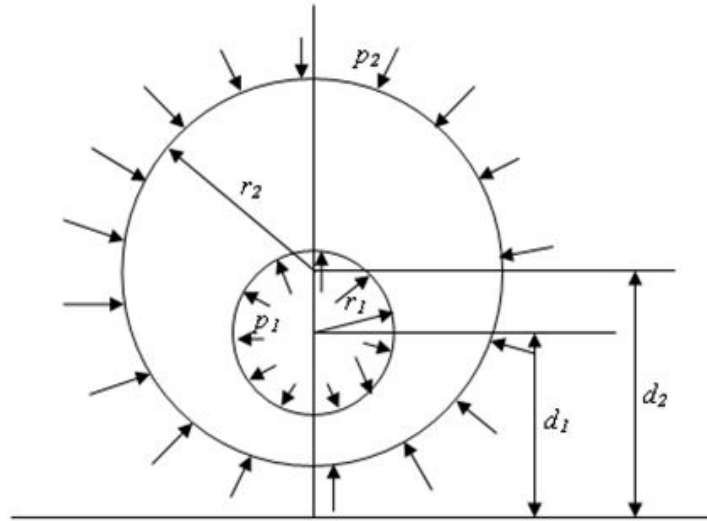
$$\varphi(P) = \sum_{j=1}^N \left[ V_j \int_{\Gamma_j} G_0 ds - U_j \int_{\Gamma_j} H_0 ds + \widehat{V}_j \int_{\Gamma_j} G_1 ds - \widehat{U}_j \int_{\Gamma_j} H_1 ds \right]. \quad (5.1)$$

Однако для решения задачи необходимо определить напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  по формулам (2.1), т. е. следует найти вторые частные производные от функции напряжений. Как видно из (4.2), функции  $G_0$ ,  $G_1$ ,  $H_0$  и  $H_1$  в (5.1) зависят от координат  $(x, y)$  внутренней точки  $P$  и от координат точки интегрирования, поэтому интегралы, входящие в (5.1), можно вычислить и получить их аналитические выражения как функций от  $x$  и  $y$ . Эти выражения, очевидно, будут иметь вид такой же, как элементы матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\widehat{\mathbf{A}}$ ,  $\widehat{\mathbf{B}}$ , если в них  $(x_i^*, y_i^*)$  заменить на  $(x, y)$ .

Таким образом, правая часть (5.1) сводится к выражению, зависящему только от  $x$  и  $y$  и не содержащему интегралы. Тогда несложно вычислить производные функции  $\varphi$ , а значит в любой точке области  $D$  могут быть определены как функция Эри  $\varphi$ , так и сами напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$ .

## 6. Тестовые примеры и задача

**Пример 1. Эксцентрическая труба под равномерным давлением.** В качестве тестового примера для двусвязной области для сравнения результатов численного расчета с точным решением можно рассмотреть задачу об эксцентрической трубе, находящейся под равномерным давлением. Точное решение этой задачи получено Я. С. Уфляндом в [9] с использованием биполярных координат. На фиг. 1 представлено эксцентрическое кольцо с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ ;  $d_1$  и  $d_2$  — расстояния от начала координат до центров окружностей,  $p_1$  и  $p_2$  — давления, действующие на внутренний и внешний контуры. Пусть для определенности  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 1.25$ . В биполярных координатах этим значениям будут соответствовать эксцентрические окружности, центры которых находятся на расстояниях  $d_1 = \sqrt{2}$  и  $d_2 = \sqrt{41}/4$  от начала координат. Далее следует задать граничные условия: пусть, например,  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 3$ . После перехода от этих граничных условий механической задачи к граничным условиям для бигармонической функции напряжений  $\varphi$  на границах области известны значения функции напряжений  $u$  и её нормальной производной  $v$  с точностью до слагаемых, содержащих три неизвестные постоянные. Методом граничных элементов ( $N_1 = N_2 = 60$ ) находятся значения на границе области двух вспомогательных функций  $\hat{u}$  и  $\hat{v}$ , а также значения трех неизвестных постоянных. Так как сумма внешних сил, действующих на тело, равна нулю, то к системе уравнений (4.3) необходимо присоединить еще уравнения (4.5).

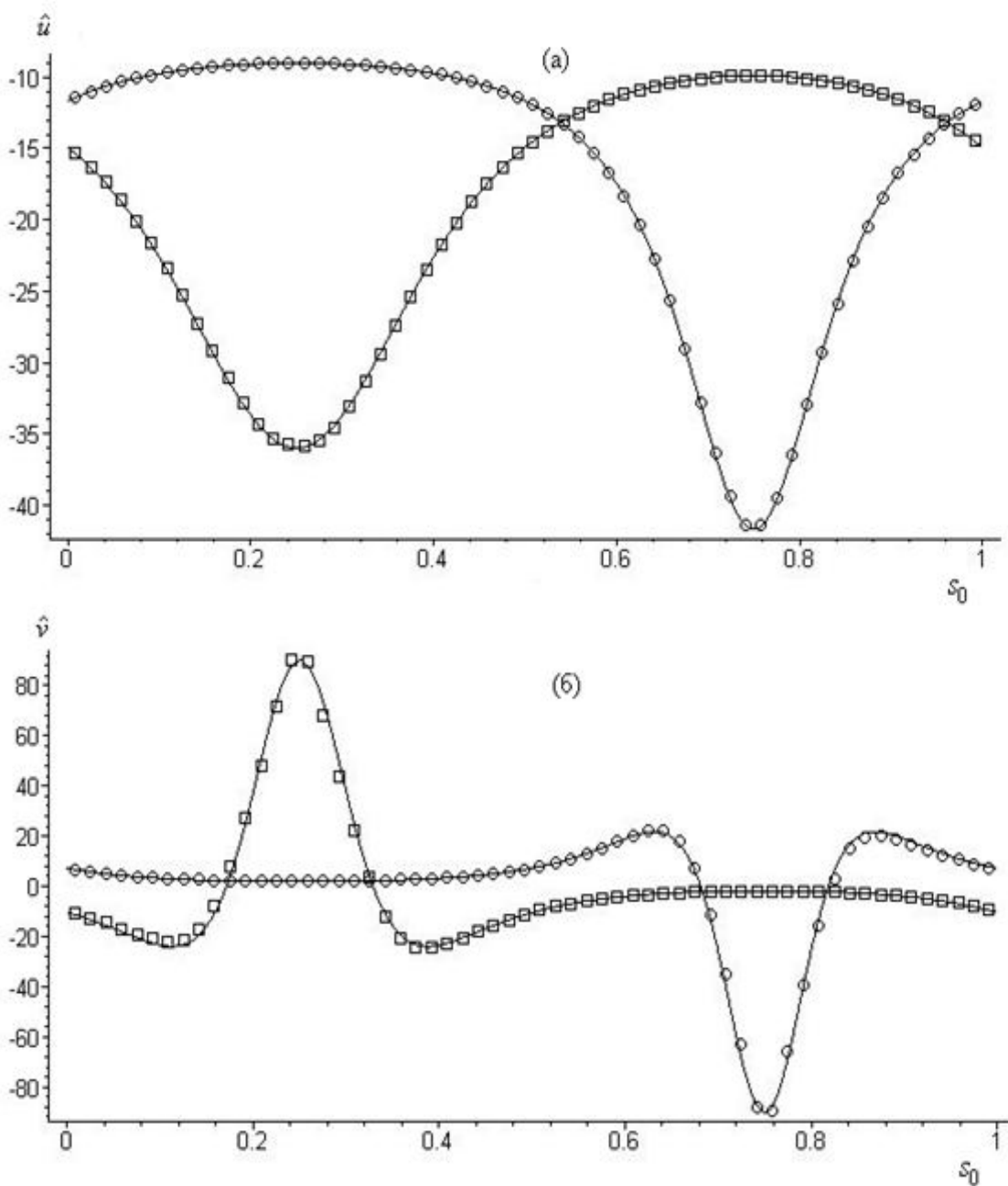


Фиг. 1

На фиг. 2 (а, б) представлены графики зависимости функций  $\hat{u}$  и  $\hat{v}$  на границе области от нормированной дуговой координаты  $s_0$ . Здесь точки соответствуют значениям,



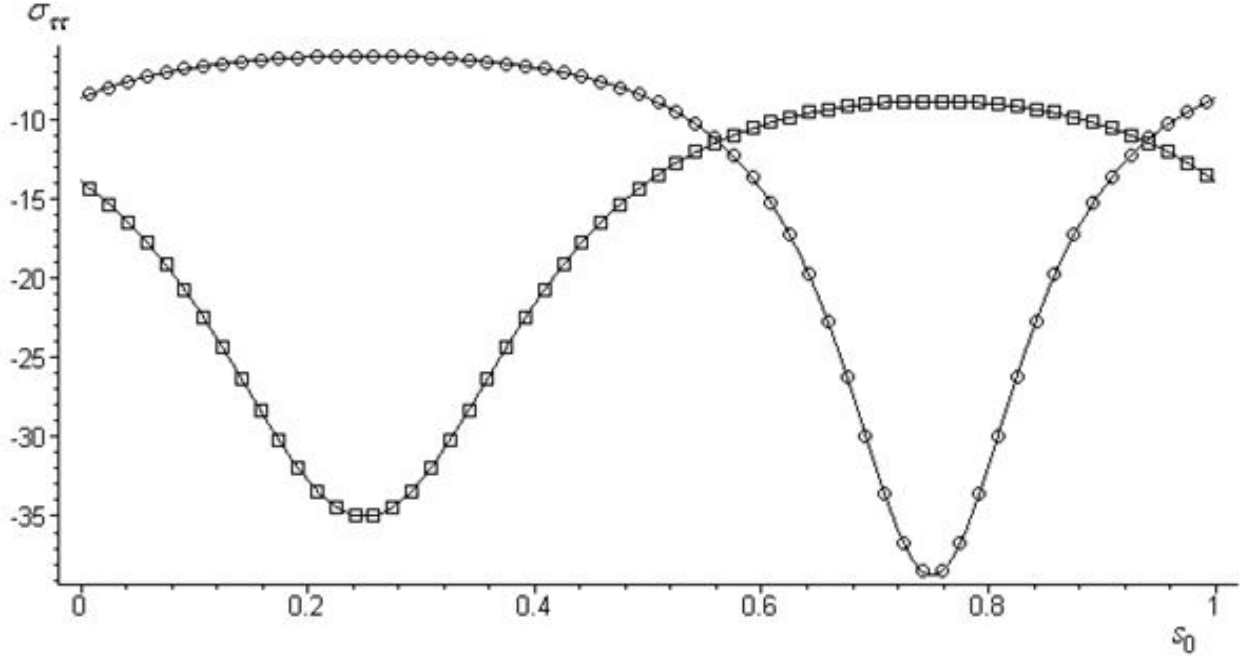
найденным методом граничных элементов, а линиями изображены графики функций, соответствующих точному аналитическому решению. Квадратными точками изображены значения на внутренней границе, круглыми – на внешней границе.



Фиг. 2

На фиг. 3 изображены графики зависимости окружного напряжения  $\sigma_{\tau\tau}$  на границе области от нормированной дуговой координаты  $s_0$ . Точечно изображены значения,

найденные методом граничных элементов, а сплошными линиями – графики точного аналитического решения. Квадратными точками изображены значения на внутренней границе, круглыми – на внешней границе. Единица измерения напряжения  $\sigma_{rr}$  совпадает с единицей измерения величин  $p_1$  и  $p_2$ .



Фиг. 3

Из графиков видно, что предложенный метод обладает высокой степенью точности, причем уже при небольшом числе граничных элементов. Расчеты, проведенные для различных значений  $N$ , показывают, что с увеличением числа граничных элементов точность метода возрастает. На фиг. 4 (а, б) приведены графики зависимости от числа  $N$  средней относительной погрешности для вспомогательных функций, графики которых изображены на фиг. 3:

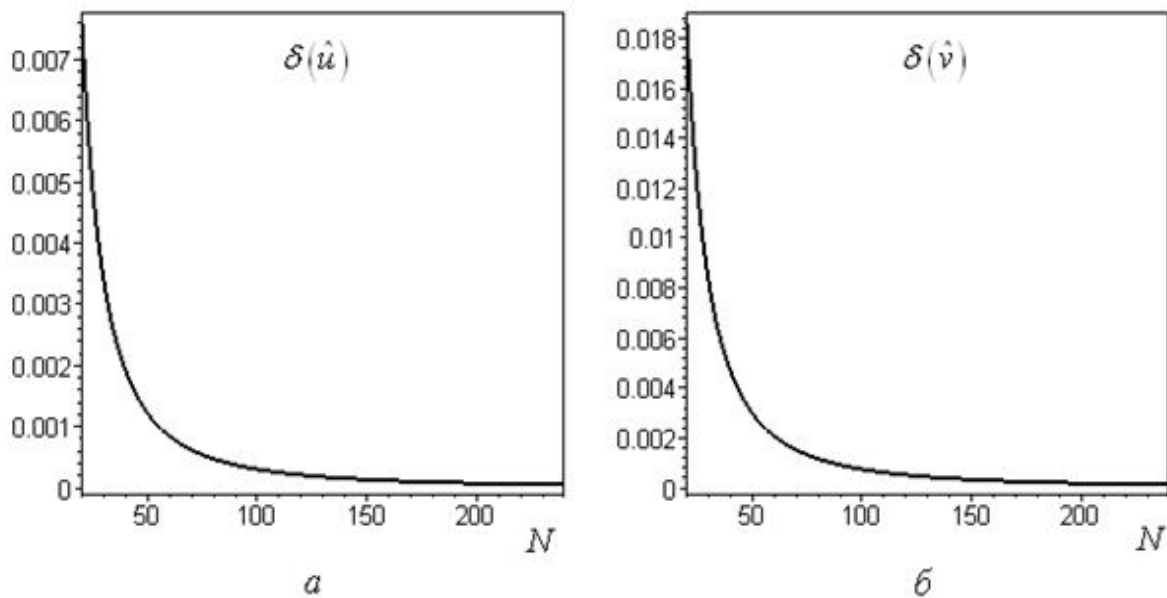
$$\delta(\hat{u}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left| \frac{\hat{U}_j - \hat{u}(P_j)}{\hat{u}(P_j)} \right|, \quad \delta(\hat{v}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left| \frac{\hat{V}_j - \hat{v}(P_j)}{\hat{v}(P_j)} \right|,$$

где  $\hat{u}(P_j)$ ,  $\hat{v}(P_j)$  – точные значения функций в  $j$ -той узловой точке,  $\hat{U}_j$ ,  $\hat{V}_j$  – соответствующие значения, найденные численно с помощью данного метода.

**Пример 2. Плоская задача в трехсвязной области.** Рассмотрим плоскую задачу теории упругости в напряжениях для трехсвязной области. Пусть  $\partial D_3$  – внешняя граница области, представляющая собой эллипс с полуосями  $a$  и  $b$ . Внутренние границы  $\partial D_1$  и  $\partial D_2$  – окружности, центры которых лежат на оси  $x$ .

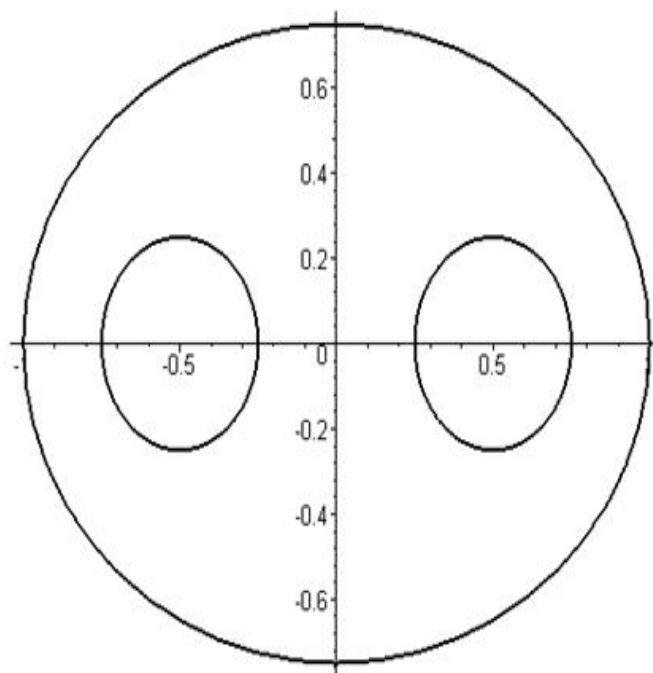
$$\partial D_1 : \begin{cases} x_1 = r_1 \cos \theta + d_1, \\ y_1 = -r_1 \sin \theta, \end{cases} \quad \partial D_2 : \begin{cases} x_2 = r_2 \cos \theta + d_2, \\ y_2 = -r_2 \sin \theta, \end{cases} \quad \partial D_3 : \begin{cases} x_3 = a \cos \theta, \\ y_3 = b \sin \theta, \end{cases}$$

$$\theta \in [0, 2\pi).$$



Фиг. 4

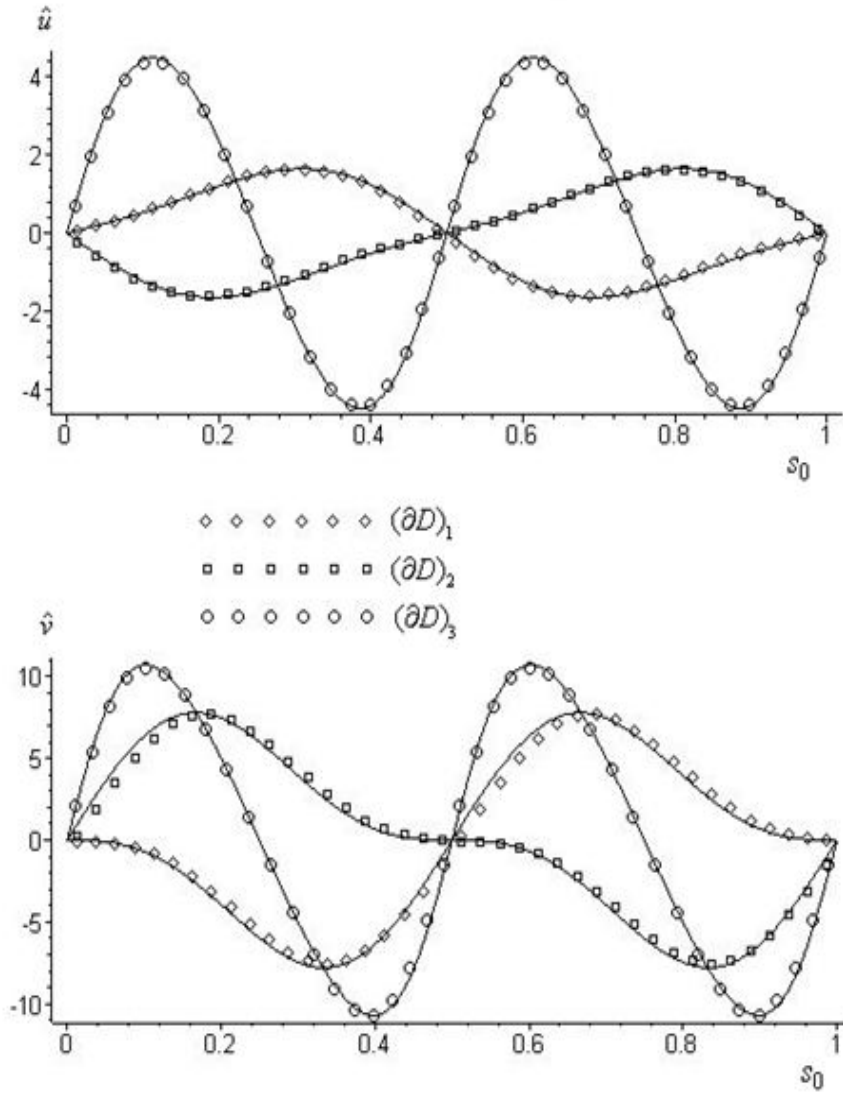
На фиг. 5 изображена такая область при  $a = 1, b = 0.75, r_1 = r_2 = 0.25, d_1 = -d_2 = -0.5$ .



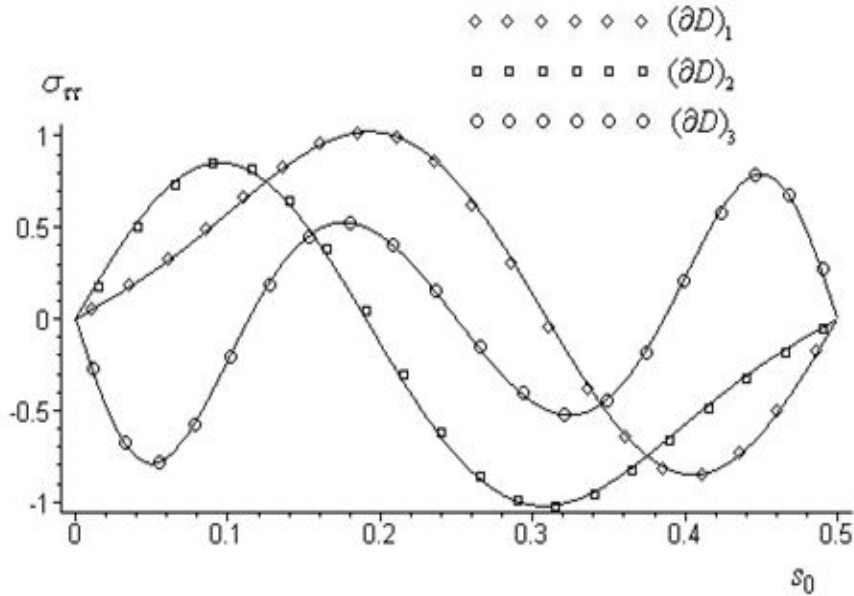
Фиг. 5

Для сравнения результатов численных расчетов с точными значениями функций задается бигармоническая функция напряжений (назовем ее эталонной). Пусть, например,  $\varphi = (x^2 + y^2)xy$ . По ней можно построить граничные условия плоской задачи теории упругости в напряжениях:

$$\begin{aligned}\sigma_{nn}|_{\partial D_k} &= p_n^{(k)} = -6(r_k + d_k \cos \theta)(r_k \sin 2\theta + d_k \sin \theta), \quad k = 1, 2, \\ \sigma_{n\tau}|_{\partial D_k} &= p_\tau^{(k)} = -3(r_k^2 + 2r_k d_k \cos \theta + d_k^2) \cos 2\theta, \quad k = 1, 2, \\ \sigma_{nn}|_{\partial D_3} &= p_n^{(3)} = \frac{3ab(a^2 + b^2) \sin 2\theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}, \\ \sigma_{n\tau}|_{\partial D_3} &= p_\tau^{(3)} = -3(b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta) \frac{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}.\end{aligned}$$



Фиг. 6



Фиг. 7

Интегрируя их, как описано в разделе 2, получим граничные условия для бигармонического уравнения с точностью до слагаемых, содержащих шесть неизвестных постоянных (по три на каждом внутреннем контуре). Далее с помощью МГЭ (каждый контур разбивается на  $N_k = 40$  граничных элементов) находятся эти константы и неизвестные значения функций  $\hat{u}$  и  $\hat{v}$ . Результаты представлены на фиг. 6: точками показаны значения, полученные численно, сплошными линиями – точные графики функций. На фиг. 7 представлены графики точных и найденных численно значений окружного напряжения  $\sigma_{\tau\tau}$  на границах области. Графики симметричны относительно точки  $s_0 = 0.5$ .

Из всех представленных в тестовых примерах графиков видно, что наблюдается хорошее совпадение численных и аналитических результатов, что свидетельствует об эффективности численного алгоритма. Обоснование предложенного метода и оценка его сходимости изложены в [5].

**Задача 3. Эллиптическая труба под равномерным давлением.** Из рассмотренных выше примеров видно, что метод дает высокую точность. С его помощью можно рассчитывать задачи, решение которых не может быть получено аналитически. Пусть, например, область ограничена двумя конфокальными эллипсами с полуосями  $(a_1, b_1)$  и  $(a_2, b_2)$ , причем  $a_1 < a_2$ ,  $b_1 < b_2$ . Пусть заданы следующие граничные условия:

$$p_n|_{\partial D_1} = -p_1, \quad p_n|_{\partial D_2} = -p_2, \quad p_\tau|_{\partial D_1} = p_\tau|_{\partial D_2} = 0, \tag{6.1}$$

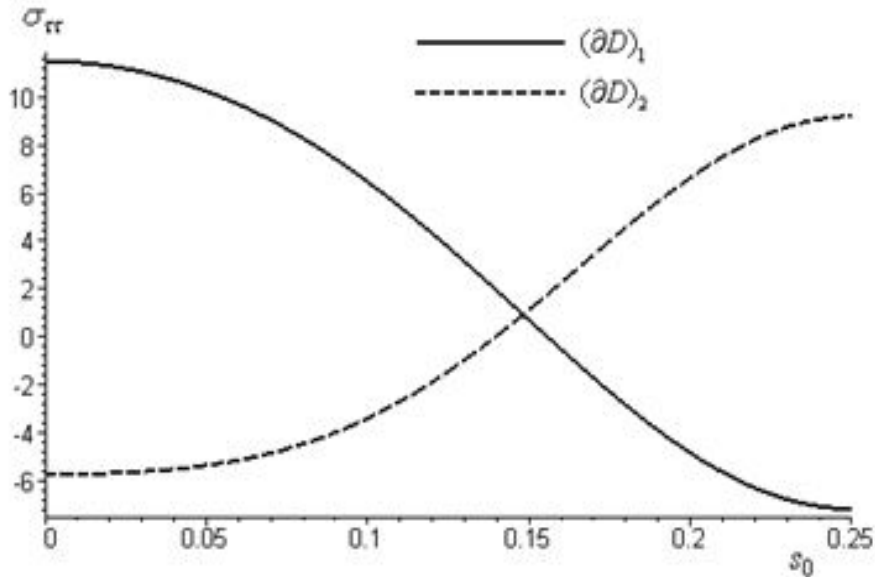
где  $\partial D_1 : \begin{cases} x_1 = a_1 \cos \theta \\ y_1 = -b_1 \sin \theta \end{cases}, \quad \partial D_2 : \begin{cases} x_2 = a_2 \cos \theta \\ y_2 = b_2 \sin \theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$

Переход от граничных условий (6.1) к граничным условиям для бигармонической функции напряжений осуществляется по формулам (2.2) и (2.3) (константы интегрирования на внешней границе равны нулю):

$$\varphi|_{\partial D_1} = \frac{p_1}{4} (b_1^2 - a_1^2) \cos 2\theta + C_1 a_1 \cos \theta + C_2 b_1 \sin \theta + C_3, \quad \varphi|_{\partial D_2} = \frac{p_2}{4} (b_2^2 - a_2^2) \cos 2\theta,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\partial D_1} = \frac{p_1 a_1 b_1 - C_1 b_1 \cos \theta - C_2 a_1 \sin \theta}{\sqrt{b_1^2 \cos^2 \theta + a_1^2 \sin^2 \theta}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\partial D_2} = \frac{-p_2 a_2 b_2}{\sqrt{b_1^2 \cos^2 \theta + a_1^2 \sin^2 \theta}}.$$

Решение системы уравнений (4.3) совместно с уравнениями (4.5) осуществлялось при  $N_1 = N_2 = 60$ . На фиг. 8 представлены графики окружного напряжения  $\sigma_{\tau\tau}$  на границах области  $D$  для случая, когда  $a_2 = 1$ ,  $b_2 = 0.75$ ,  $a_1 = 0.8$ ,  $b_1 = 0.6$ ,  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 0.5$ . Так как в рассматриваемой задаче эллиптическая труба находится под равномерным нормальным давлением, то достаточно привести графики для  $\theta \in [0, \pi/2]$ . График  $\sigma_{\tau\tau}$  на внешней границе изображен штриховой линией, на внутренней границе – сплошной линией. Единица измерения  $\sigma_{\tau\tau}$  совпадает с единицей измерения  $p_1$  и  $p_2$ .



Фиг. 8

**Заключение.** Предложенный численный алгоритм позволяет найти решение краевой задачи плоской теории упругости в напряжениях для произвольной области. Особое внимание уделено переходу от плоской задачи теории упругости к основной краевой задаче для бигармонического уравнения, что позволяет применить численный алгоритм, разработанный авторами для решения краевых задач для полигармонического уравнения. Показано, что граничные условия для многосвязных областей содержат по три неизвестные постоянные на каждом внутреннем контуре. Получены условия для определения этих констант в удобном для реализации численного алгоритма виде. На тестовых примерах показано, что наблюдается хорошее совпадение численных и аналитических результатов, что свидетельствует об эффективности предложенного алгоритма. С его помощью решена задача об эллиптической трубе, находящейся под равномерным давлением.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Колосов Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. М.: ОНТИ, 1935.
- [2] Мухелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1935.
- [3] Бреббия К., Вроубелл Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
- [4] Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987.
- [5] Казакова А. О., Терентьев А. Г. Численное решение краевых задач для полигармонического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 11. С. 2050–2059.
- [6] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975.
- [7] Казакова А. О., Терентьев А. Г. Численное моделирование плоской задачи о напряженном состоянии трубы, погруженной в жидкость // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78. № 5. С. 721–727.
- [8] Terentiev A. G., Kirschner I. N., Uhlman J. S. The Hydrodynamics of Cavitating Flows. USA: Backbone Publishing Company, 2011.
- [9] Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М.;Л.: Гостехиздат, 1950.

*G. Terentiev, A. O. Kazakova*

NUMERICAL SOLUTION OF A PLANE PROBLEM OF ELASTICITY THEORY  
IN MULTIPLY-CONNECTED DOMAIN

*Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** A numerical method for solving the fundamental boundary value problem of the plane theory of elasticity in a multiply-connected domain is suggested. Special attention is given to the transition from the boundary conditions for the elasticity problem to the boundary conditions for the biharmonic stress function. Such transition allows applying algorithm of solving boundary value problems for polyharmonic functions previously developed by the authors to the solution of the plane problem of elasticity theory. In the test examples a sufficiently high accuracy of the proposed method is shown using computer simulation.

**Keywords:** elasticity theory, boundary value problems, boundary element method, multiply-connected domain, computer simulation.

## REFERENCES

- [1] Kolosov G. V. Primenenie kompleksnoy peremennoy k teorii uprugosti. – М.: ONTI, 1935. (in Russian).

---

*Terentiev Alexey Grigorievich*

e-mail: agterent@rambler.ru, Honored Scientist of Russian Federation, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

*Kazakova Anastasiya Olegovna*

e-mail: kazakova\_anastasia@bk.ru, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

- [2] Muskhelishvili N. I. *Nekotorye zadachi teorii uprugosti*. – M.: AS USSR, 1935. (in Russian).
- [3] Brebbia K., Vrobell L. *Metody granichnykh elementov*. – M.: Mir, 1987. (in Russian).
- [4] Krauch S., Starfield A. *Metody granichnykh elementov v mekhanike tverdogo tela*. – M.: Mir, 1987. (in Russian).
- [5] Kazakova A. O., Terentiev A. G. Chislennoe reshenie kraevykh zadach dlya poligarmonicheskogo uravneniya // *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*. T. 52, № 11, 2012. P. 2050–2059. (in Russian).
- [6] Timoshenko S. P., Gudier G. *Teoriya uprugosti*. – M.: Nauka, 1975. (in Russian).
- [7] Kazakova A. O., Terentiev A. G. Numerical modelling of the plane problem of the stress state of a tube immersed in a liquid // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2014. T. 78. № 5. P. 518– 523.
- [8] Terentiev A.G., Kirschner I.N., Uhlman J.S. *The Hydrodynamics of Cavitating Flows*. Backbone Publishing Company, USA, 2011.
- [9] Uflyand Ya. S. *Bipolyarnye koordinaty v teorii uprugosti*. M.–L.: Gostekhizdat, 1950. (in Russian).



А. Д. Чернышов

## НАХОЖДЕНИЕ МАЛЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ПРОСТЫХ КОРНЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия*

**Аннотация.** Предложен способ нахождения малых областей для простых корней нелинейной системы алгебраических уравнений, в котором не используются градиенты. Вводятся новые понятия: стартовых точек, точек изменения знака и корневых точек, корневых областей, специальных операторов, упрощающих составление программы при применении ЭВМ. После реализации данного способа нахождения малых корневых областей и их количества в дальнейшем при помощи какого-либо стандартного метода корни находятся быстро и с высокой точностью.

**Ключевые слова:** нелинейная система алгебраических уравнений, корневая область, простые корни.

УДК: 512.36; 512.37

Проблема решения нелинейной алгебраической системы возникает при рассмотрении различных задач теории пластичности [1], упругости с конечными деформациями [2], вязкой жидкости [3] и многих других нелинейных моделей как промежуточный этап решения нелинейных краевых задач математической физики. Известны различные методы решения замкнутой системы нелинейных алгебраических уравнений [4]–[9]. При применении каждого из них точность вычислений зависит от размеров области, где ищется решение. Если область мала, то поиск корней системы существенно облегчается и многие стандартные методы – Ньютона–Рафсона, метод секущих, метод итераций, метод Вольфа, Maple, Mathematica, Mathcad и др. – позволяют быстро найти решение с заданной точностью. Поэтому имеет смысл вначале определить области малых размеров, где находятся решения, их количество и затем применять стандартный метод для нахождения корней.

Подобные малые области будем называть корневыми (КО – корневая область). Число КО определяет множество решений данной нелинейной системы. В случае одного уравнения с одним неизвестным задача решается просто по нахождению отрезка малой длины, на концах которого знаки левой части рассматриваемого уравнения

---

© Чернышов А. Д., 2016

*Чернышов Александр Данилович*

e-mail: chernyshovad@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Поступила 28.01.2016

противоположны. Для множества нелинейных уравнений найти КО и их количество гораздо сложнее.

Рассмотрим замкнутую нелинейную систему алгебраических уравнений, имеющую в некоторой прямоугольной области  $\Omega$  только простые корни:

$$f_i(x_1, \dots, x_m) = 0, \quad i = 1 \div m, \quad \Omega = \{a_j < x_j < b_j\}, \quad j = 1 \div m, \quad f_i \in C^{(1)}(\Omega). \quad (1)$$

В прямоугольной системе координат  $\{x_j\}$  область  $\Omega$  имеет форму  $m$ -мерного параллелепипеда, уравнения  $2m$  его граней определяются крайними значениями переменных  $x_j$ , т.е.  $x_j = a_j$ ,  $x_j = b_j$ .

Решения системы (1) будем называть корневыми точками  $C_q \in \Omega$ ,  $q = 1 \div q_0$ , где  $q_0$  – количество решений. В области  $\Omega$  построим равномерную сетку с шагами  $h_j$  вдоль координатной оси  $x_j$  и равномерно нанесем  $N_j$  узлов с координатами

$$x_{j,k_j} = a_j + k_j h_j, \quad h_j = (b_j - a_j)/N_j, \quad k_j = 0 \div N_j. \quad (2)$$

Можно использовать также и неравномерную сетку.

*Поставим задачу:* найти малые корневые области КО  $\Omega_q^*$ ,  $q = 1 \div q_0$  в форме  $m$ -мерных параллелепипедов с размером ребер вдоль координатных осей  $h_1 \times h_2 \times \dots \times h_m$ , в которых находятся корневые точки.

Для получения алгоритма решения сделаем следующие предположения.

1. Пусть все корни системы (1) простые и поверхности  $f_i = 0$  в корневой точке пересекаются между собой под некоторым углом, не равным нулю.

2. Без ограничения общности рассмотрений можно считать, что все корни системы (1) расположены внутри  $\Omega$  на расстоянии от её границы больше, чем на один шаг  $h_j$  вдоль соответствующей оси.

3. Положим, что простые корни системы (1) расположены друг от друга дальше, чем на расстоянии  $h_j$  по соответствующей переменной  $x_j$ .

4. Шаги  $h_j$  малы и в пределах одной ячейки каждая функция  $f_i$  при изменении любой переменной  $x_j$  имеет или постоянный знак, или изменяет свой знак на противоположный не более одного раза.

5. В пределах одной или нескольких соседних ячеек каждую поверхность  $f_i = 0$  можно аппроксимировать плоскостью.

6. Проведем через корневую точку  $C_q$  плоскость  $S_j^*$  параллельно  $j$ -й грани  $S_j$  данной ячейки, где находится  $C_q$ . Положим, что в пересечениях каждой поверхности  $f_i = 0$ ,  $\forall i = 1 \div m$  с плоскостями  $S_j^*$  и  $S_j$  будем иметь кривые, которые заменим отрезками прямых в пределах данной ячейки.

Сделанные предположения могут выполняться, если шаги  $h_j$  достаточно малы, а поверхности  $f_i = 0$  являются гладкими в окрестности ячейки с корневой точкой  $C_q$ .

После нанесения равномерной сетки на нижней грани  $\Omega$  при  $x_1 = a_1$  будем иметь множество узлов – стартовые точки, откуда и начинается вычислительный процесс. Из некоторого стартового узла с координатами

$$\{x_1 = a_1, x_2, k_2, x_3, k_3, \dots, x_m, k_m\} \quad (3)$$

будем двигаться параллельно координатной оси  $x_1$  и в каждом узле вычислять знак  $f_i(x_1, \dots, x_m)$ . При этом выбранные в (3) величины  $x_2, k_2, x_3, k_3, \dots, x_m, k_m$  будут оставаться постоянными, изменяться будет только одна координата  $x_1 = x_{1,k_1} \in [a_1, b_1]$  при изменении номера  $k_1 = 0 \div N_1$ . В результате на прямой, проведенной из точки (3)

параллельно оси  $x_1$ , можно найти такие две соседние точки

$$A_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, i, +}, A_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, i, -} \quad (4)$$

в которых данная функция  $f_i$  изменяет свой знак на противоположный, т. е.

$$f_i \left( A_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, i, +} \right) \cdot f_i \left( A_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, i, -} \right) < 0. \quad (5)$$

Две точки (4) находятся друг от друга на расстоянии одного шага  $h_1$ . В дальнейшем их будем называть точками изменения знака (точками ИЗН). В обозначении этих точек верхние индексы имеют следующий смысл:

- первый верхний индекс (в данном случае 1) означает движение из стартовой точки (3) параллельно оси  $x_1$ ;
- второй индекс (здесь  $p$ ) для данной стартовой точки равен номеру найденной пары точек ИЗН, которых может быть несколько;
- третий индекс (здесь  $i$ ) соответствует номеру рассматриваемой функции  $f_i$ ;
- на четвертом месте плюс сверху после индекса  $i$  означает, что точка  $A_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, i, +}$  расположена выше на один шаг  $h_1$  вдоль оси  $x_1$  по отношению к точке с минусом сверху  $A_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, i, -}$ .

Нижние индексы в обозначении точек (4) взяты идентичными обозначениям координат стартовой точки (3). Количество нижних индексов равно количеству неизвестных, т. е.  $m$ . Место расположения индекса 0 внизу (здесь – первое место) совпадает с номером координатной оси, вдоль которой происходит движение для получения точек ИЗН. Этот индекс равен нулю, так как для стартовой точки  $k_1 = 0$ . Если, например, точки ИЗН получены движением вдоль координатной оси  $x_2$  из плоскости  $x_2 = a_2$ , то по аналогии с (4) они будут иметь вид  $A_{k_1, 0, k_3, \dots, k_m}^{2, p, i, +}$ ,  $A_{k_1, 0, k_3, \dots, k_m}^{2, p, i, -}$ , т. е. ноль в нижних индексах здесь будет находиться на второй позиции, и т. д.

Для точек (4) введем обозначения координат  $x_1$  такими же верхними и нижними индексами, как и у соответствующих точек ИЗН:

$$A_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, i, +} \sim x_1 = x_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, i, +}, \quad A_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, i, -} \sim x_1 = x_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, i, -}. \quad (6)$$

Для нахождения КО  $\Omega_q^*$  необходимо рассматривать сразу две стартовые точки. Вторую стартовую точку получим смещением из точки (3) в направлении оси  $x_j$ ,  $j \neq 1$  на расстояние одного шага  $h_j$ . Эти две стартовые точки обозначим через  $O_1$ ,  $O_j$ , а их координаты запишем в виде

$$O_1 \sim \{x_1 = a_1, x_2, k_2, \dots, x_j, k_j, \dots, x_m, k_m\}, \quad (7)$$

$$O_j \sim \{x_1 = a_1, x_2, k_2, \dots, (x_j, k_j + h_j), \dots, x_m, k_m\}$$

Через две точки (7) проведем параллельно оси  $x_1$  в  $\Omega$  прямые  $O_1B_1$ ,  $O_jB_j$ . Множество функций  $\{f_i\}$  системы (1) сгруппируем парами:

$$\begin{aligned} & (f_1, f_2), (f_3, f_4), \dots, (f_{2k-1}, f_{2k}), \text{ если } m = 2k, \\ & (f_1, f_2), (f_3, f_4), \dots, (f_{2k-1}, f_1), \text{ если } m = 2k - 1. \end{aligned} \quad (8)$$

В узлах каждой прямой  $O_1B_1$ ,  $O_jB_j$  будем исследовать знаки вначале только одной пары функций  $(f_i, f_k)$ .

Пусть  $f_i$ ,  $f_k$  изменяют свои знаки на прямой  $O_1B_1$  в некоторых точках

$$A_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, i, +}, A_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, i, -}, A_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, k, +}, A_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, k, -}, \quad (9)$$

а на прямой  $O_j B_j$  в точках

$$A_{0, k_2, \dots, k_j+1, \dots, k_m}^{1,p,i,+}, A_{0, k_2, \dots, k_j+1, \dots, k_m}^{1,p,i,-}, A_{0, k_2, \dots, k_j+1, \dots, k_m}^{1,p,k,+}, A_{0, k_2, \dots, k_j+1, \dots, k_m}^{1,p,k,-}. \quad (10)$$

Точки ИЗН в (9) по построению получены при движении параллельно оси  $x_1$  из стартовой точки  $O_1$  в (7), а точки (10) получены движением параллельно оси  $x_1$  из стартовой точки  $O_j$ . Используя обозначения (6), запишем  $x_1$ -координаты точек ИЗН (9), (10):

$$x_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1,p,i,+}, x_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1,p,i,-}, x_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1,p,k,+}, x_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1,p,k,-}, \quad (11)$$

$$x_{0, k_2, \dots, k_j+1, \dots, k_m}^{1,p,i,+}, x_{0, k_2, \dots, k_j+1, \dots, k_m}^{1,p,i,-}, x_{0, k_2, \dots, k_j+1, \dots, k_m}^{1,p,k,+}, x_{0, k_2, \dots, k_j+1, \dots, k_m}^{1,p,k,-}$$

По построению между координатами (11) имеет место связь

$$x_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1,p,i,+} - x_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1,p,i,-} = x_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1,p,k,+} - x_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1,p,k,-} = \pm h_1, \quad (12)$$

$$x_{0, k_2, \dots, k_j+1, \dots, k_m}^{1,p,i,+} - x_{0, k_2, \dots, k_j+1, \dots, k_m}^{1,p,i,-} = x_{0, k_2, \dots, k_j+1, \dots, k_m}^{1,p,k,+} - x_{0, k_2, \dots, k_j+1, \dots, k_m}^{1,p,k,-} = \pm h_1.$$

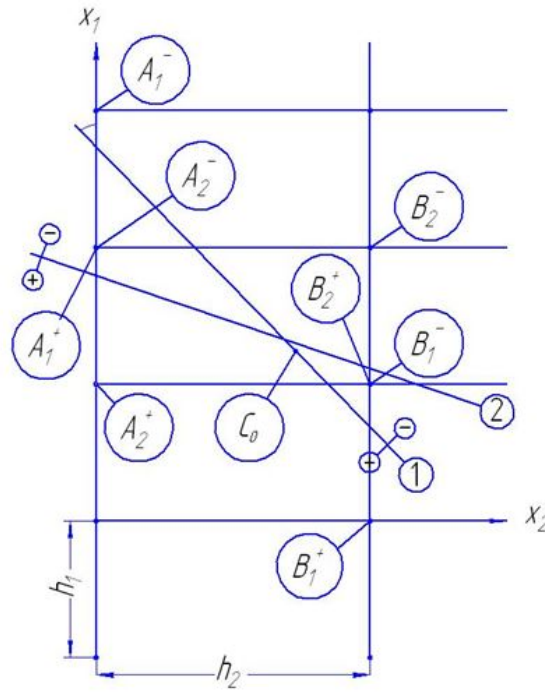


Рис. 1

Рассмотрим простейший случай, когда система (1) состоит из двух уравнений  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 0$  с двумя неизвестными  $x_1$ ,  $x_2$ . Пусть кривые  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 0$  пересекаются в некоторой точке  $C_0$  (рис. 1). В точках  $A_1^+$ ,  $A_1^-$  на прямой  $x_2 = 0$  вдоль оси  $x_1$  функция  $f_1$  меняет знак в точках  $A_2^+$ ,  $A_2^-$ . На этой же прямой  $x_2 = 0$  вдоль оси  $x_1$  функция  $f_2$  меняет знак. На параллельной прямой  $x_2 = h_2$ , сдвинутой вдоль  $x_2$  на

один шаг  $h_2$ , функция  $f_1$  меняет знак в точках  $B_1^+$ ,  $B_1^-$ , на этой же прямой функция  $f_2$  меняет знак в точках  $B_2^+$ ,  $B_2^-$ . Из рисунка видно, что при любом расположении двух прямых, пересекающихся в  $C_0$  и аппроксимирующих кривые  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 0$ , наблюдается закономерность: если точка  $A_2^+$  расположена выше точки  $A_1^+$ , то точка  $B_2^+$  всегда будет расположена ниже точки  $B_1^+$ ; если же точка  $A_2^+$  расположена ниже точки  $A_1^+$ , то точка  $B_2^+$  будет расположена выше точки  $B_1^+$ . Это означает, что в обоих случаях  $x_1$ -координаты точек ИЗН (11) при  $m = 2$  удовлетворяют неравенству

$$\left(x_{0,k_2}^{1,p,1,+} - x_{0,k_2}^{1,p,2,+}\right) \left(x_{0,k_2+1}^{1,p,1,+} - x_{0,k_2+1}^{1,p,2,+}\right) \leq 0. \quad (13)$$

Равенство нулю в (13) означает, что точки  $A_1^+$  и  $A_2^+$  совпадают либо совпадают точки  $B_1^+$  и  $B_2^+$ . Свойство (13) можно обосновать геометрическими рассуждениями. Если у двух пересекающихся отрезков  $A_1 B_1 \sim 1$  и  $A_2 B_2 \sim 2$  слева от точки их пересечения конец  $A_1$  отрезка 1 расположен выше конца  $A_2$  отрезка 2 по отношению к положительному направлению оси  $x_1$ , то правый конец  $B_1$  отрезка 1 будет расположен ниже конца  $B_2$  отрезка 2. Этот результат можно обобщить на случай нелинейной системы  $m$ -уравнений.

Пусть для данной стартовой точки (3) и данной пары функций  $f_i, f_k$  найдены некоторые точки ИЗН (9), (10). Если соответствующая для  $f_i$  точка  $A_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,p,i,+}$  расположена выше (ниже) точки  $A_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,p,k,+}$ , соответствующей  $f_k$ , и при этом точка  $A_{0,k_2+1,k_3,\dots,k_m}^{1,p,i,+}$  расположена ниже (выше) точки  $A_{0,k_2+1,k_3,\dots,k_m}^{1,p,k,+}$ , то для  $x_1$ -координат данных четырех точек ИЗН по аналогии с (13) выполняется неравенство

$$\left(x_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,p,i,+} - x_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,p,k,+}\right) \left(x_{0,k_2,\dots,k_j+1,\dots,k_m}^{1,p,i,+} - x_{0,k_2,\dots,k_j+1,\dots,k_m}^{1,p,k,+}\right) \leq 0. \quad (14)$$

Отметим, что условие (14) можно аналогично записать и через координаты точек с индексами минус вверху, но в силу свойства

$$x_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,p,i,+} - x_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,p,i,-} = h_1$$

это приведет к эквивалентному выражению.

Предположим, что для двух функций  $f_i, f_k$  найдены две пары точек ИЗН

$$A_{+0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,p,i,+}, A_{+0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,p,k,+}, A_{+0,k_2,\dots,k_j+1,\dots,k_m}^{1,p,i,+}, A_{+0,k_2,\dots,k_j+1,\dots,k_m}^{1,p,k,+} \quad (15)$$

координаты которых удовлетворяют неравенству (14). Из восьми точек ИЗН (9), (10) выберем наибольшую и наименьшую  $x_1$ -координату:

$$\begin{aligned} \max \left\{ \left[ x_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,p,i,+}, x_{0,k_2,\dots,k_j+1,\dots,k_m}^{1,p,i,+} \right], \left[ x_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,p,k,+}, x_{0,k_2,\dots,k_j+1,\dots,k_m}^{1,p,k,+} \right] \right\} &= x_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,j,p,(i,k),+} \\ \min \left\{ \left[ x_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,p,i,-}, x_{0,k_2,\dots,k_j+1,\dots,k_m}^{1,p,i,-} \right], \left[ x_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,p,k,-}, x_{0,k_2,\dots,k_j+1,\dots,k_m}^{1,p,k,-} \right] \right\} &= x_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,j,p,(i,k),-}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для дальнейшего понадобится определение отрезка псевдокорневой области (ОТПКО)  $L_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,j,p,(i,k)}$  на оси  $x_1$  с помощью координат, полученных в (16):

$$L_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,j,p,(i,k)} \sim x_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,j,p,(i,k),-} \leq x_1 \leq x_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,j,p,(i,k),+}. \quad (17)$$

Смысл индексов в обозначении ОТПКО следующий: первый верхний индекс 1 соответствует движению параллельно оси  $x_1$ , второй индекс  $j$  соответствует смещению

вдоль оси  $x_j$  на один шаг  $h_j$  для получения точки  $O_j$  с последующим движением параллельно оси  $x_1$ , третий индекс  $p$ —порядковый номер отрезка. Подобных отрезков ОТПКО может быть несколько или вообще ни одного. Индексы  $i, k$  в скобках соответствуют номерам пары функций  $f_i, f_k$ . Нижние индексы имеют такой же смысл, как и у точек ИЗН, они обозначают координаты стартовой точки  $O_1$ .

### Алгоритм нахождения малых областей

Начинать составление программы для ЭВМ нужно со следующих подготовительных действий:

1. Записать систему (1) в явном виде.
2. Определить нижние  $a_j$  и верхние  $b_j$  возможные значения переменных  $x_j$ , исходя из постановки задачи.
3. Выбрать шаги  $h_j$  и построить равномерную координатную сетку так, чтобы выполнялись предположения 2–6.

4. Множество функций  $\{f_i\}$  из (1) представить парами в виде (8).

Совокупность рассмотрений, приводящих к построению ОТПКО  $L_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, j, p, (i, k)}$ , обозначим через оператор  $P_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, j, p, (i, k)}$  ( $i \neq k$ ). Этот оператор определим следующими действиями (5–13):

5. Выбрать пару функций  $f_i, f_k, i \neq k$  из множества (8).
6. Выбрать стартовую точку  $O_1$  (3) на плоскости  $x_1 = a_1$ .
7. Из стартовой точки  $O_1$  сдвинуться вдоль оси  $x_j$  на один шаг  $h_j$  для получения второй точки  $O_j$  (7).
8. Из двух точек  $O_1$  и  $O_j$  (7) двигаться вдоль прямых  $O_1B_1, O_jB_j$  параллельно оси  $x_1$  и при этом определять знаки функций  $f_i, f_k$  в каждом узле на данных прямых. Следует учесть, что для точек  $O_1$  и  $O_j$  координата  $x_1 = a_1$ , для точек  $B_1$  и  $B_j$  координата  $x_1 = b_1$ . Все остальные координаты для точек прямой  $O_1B_1$ , как и для  $O_jB_j$  соответственно, остаются постоянными.

9. Присвоить порядковые номера  $p$  точкам множества ИЗН.

10. Вычислить координаты  $x_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, i, +}, x_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, i, -}$  множества точек ИЗН (6), отмеченных индексом  $p$  вверху, для которых выполняется неравенство (14).

11. Из множества точек ИЗН (9), (10) найти такие точки,  $x_1$  – координаты которых удовлетворяют неравенству (14).

12. По формулам (16) вычислить  $x_1$  – координаты для точек ИЗН пары функций  $f_i, f_k$ , т. е.  $x_1 = x_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, j, p, (i, k), -}, x_1 = x_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, j, p, (i, k), +}$ .

13. Неравенствами (17) определить отрезок ОТПКО  $L_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, j, p, (i, k)}$ .

14. Возможен случай, когда внутри некоторого интервала  $\delta = h_1$  вдоль оси  $x_1$  знакопеременность функций  $f_i, f_k$  происходит одновременно. Для таких точек на прямых  $O_1B_1, O_jB_j$  вместо неравенства (14) будет выполняться равенство

$$\left( x_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, i, +} - x_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, p, j, +} \right) \left( x_{0, k_2+1, k_3, \dots, k_m}^{1, p, i, +} - x_{0, k_2+1, k_3, \dots, k_m}^{1, p, j, +} \right) = 0. \quad (18)$$

В этом случае подобный интервал  $\delta$  следует разделить на более мелкие шаги  $h_{1,1} = h_1/N_{1,1}$ , где  $N_{1,1}$ —число дополнительных мелких интервалов внутри рассматриваемого интервала  $\delta$ . После этого внутри интервала  $\delta$  следует заново применить оператор  $P_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, j, p, (i, k)}$  ( $i \neq k$ ) для построения соответствующего ОТПКО  $L_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, j, p, (i, k)}$ .

Конец описания оператора  $P_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, j, p, (i, k)}$  ( $i \neq k$ ).

15. После этого следует применить оператор  $P_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,j,p(i,k)}$  при  $i = 1$ ,  $k = 2$ ,  $j = 2$ ,  $k_2 = k_3 = \dots = k_m = 0$  и определить координаты для соответствующего ОТПКО из (17)

$$x_{0,0,\dots,0}^{1,2,p(1,2),-} \leq x_1 \leq x_{0,0,\dots,0}^{1,2,p(1,2),+} \quad (19)$$

16. Затем этот оператор применить при  $i = 1$ ,  $k = 2$ ,  $j = 3$ ,  $k_2 = k_3 = \dots = k_m = 0$  и определить координаты для соответствующего ОТПКО

$$x_{0,0,\dots,0}^{1,3,p(1,2),-} \leq x_1 \leq x_{0,0,\dots,0}^{1,3,p(1,2),+} \quad (20)$$

17. Полученные координаты отрезков (19) и (20) надо сравнить между собой – имеют ли они общую часть. Возможны два случая:

$$\text{а) либо } x_{0,0,\dots,0}^{1,3,p(1,2),-} < x_{0,0,\dots,0}^{1,2,p(1,2),+} < x_{0,0,\dots,0}^{1,3,p(1,2),+}, \quad (21)$$

тогда общая часть имеет вид

$$x_{0,0,\dots,0}^{1,3,p(1,2),-} < x_1 < x_{0,0,\dots,0}^{1,2,p(1,2),+} \quad (22)$$

$$\text{б) либо } x_{0,0,\dots,0}^{1,2,p(1,2),-} \leq x_{0,0,\dots,0}^{1,3,p(1,2),+} \leq x_{0,0,\dots,0}^{1,2,p(1,2),+}, \quad (23)$$

$$\text{тогда общая часть имеет вид } x_{0,0,\dots,0}^{1,2,p(1,2),-} < x_1 < x_{0,0,\dots,0}^{1,3,p(1,2),+} \quad (24)$$

18. Если оба неравенства (21) и (23) не выполняются, то отрезки (19) и (20) не рассматривать, так как они не имеют общей части и относятся к КО областям  $\Omega_q^*$  при данном значении номера  $p$ .

19. Если же выполняется одно из неравенств (21) или (23), то отрезок (22) или (24) на оси  $x_1$  может относиться к КО  $\Omega_q^*$ . В этом случае надо последовательно для различных  $j = 4, 5, \dots, m$  применить оператор  $P_{0,k_2,k_3,\dots,k_m}^{1,j,p(i,k)}$  при фиксированных  $i = 1$ ,  $k = 2$ ,  $k_2 = k_3 = \dots = k_m = 0$  и при каждом  $j$  в отдельности определить координаты соответствующих ОТПКО подобно (22), (24), сделать вывод, указанный в предыдущих пунктах 8, 9 и определить предельный отрезок ОТПКО на оси  $x_1$  по формулам

$$\begin{aligned} x_{0,0,\dots,0}^{1,p(1,2),-} &< x_1 < x_{0,0,\dots,0}^{1,p(1,2),+}, \\ x_{0,0,\dots,0}^{1,p(1,2),-} &= \max x_{0,0,\dots,0}^{1,j,p(1,2),-} \quad \text{при } \forall j = 2 \div m, \\ x_{0,0,\dots,0}^{1,p(1,2),+} &= \min x_{0,0,\dots,0}^{1,j,p(1,2),+} \quad \text{при } \forall j = 2 \div m. \end{aligned} \quad (25)$$

Отметим важное свойство предельного отрезка ОТПКО (25). Он получен для стартовой точки  $O_1$  с координатами  $x_j = a_j$  при  $k_j = 0$ ,  $j = 1 \div m$ , поэтому нижние индексы в обозначениях (25) равны нулям. При этом семейство вторых точек  $O_j$  получаем смещением из  $O_1$  на один шаг  $h_j$  вдоль координаты  $x_j$ ,  $j = 2 \div m$ . Пара функций  $f_1, f_2$ , на что указывают верхние индексы в скобках (1, 2), на концах отрезка (25) изменяют свои знаки на противоположные по построению так, что при  $\forall j = 2 \div m$  координаты отрезка (25) удовлетворяют неравенству (14).

Для произвольной стартовой точки  $O_1$  с координатами, указанными в (3), предельный отрезок ОТПКО на прямой  $O_1B_1$  для пары функций  $f_i, f_k$  будет определяться координатами

$$\begin{aligned} x_{0, k_2, \dots, k_m}^{1,p,(i,k),-} &< x_1 < x_{0, k_2, \dots, k_m}^{1,p,(i,k),+}, \\ x_{0, k_2, \dots, k_m}^{1,p,(i,k),-} &= \max x_{0, k_2, \dots, k_m}^{1,j,p,(i,k_2),-} \quad \text{при } \forall j = 2 \div m, \\ x_{0, k_2, \dots, k_m}^{1,p,(i,k_2),+} &= \min x_{0, k_2, \dots, k_m}^{1,j,p,(i,k_2),+} \quad \text{при } \forall j = 2 \div m \end{aligned} \quad (26)$$

С помощью предельного отрезка ОТПКО (26) определим псевдокорневую область  $\Omega_{0, k_2, \dots, k_m}^{1,p,(i,k)}$  (в дальнейшем ПКО) следующими неравенствами

$$x_{0, k_2, \dots, k_m}^{1,p,(i,k),-} < x_1 < x_{0, k_2, \dots, k_m}^{1,p,(i,k),+}, \quad x_{j, k_j} < x_j < x_{j, k_j} + h_j, \quad j = 2 \div m \quad (27)$$

Эта область по построению имеет размер вдоль оси  $x_1$ , равный нескольким шагам  $h_1$ , вдоль других осей  $x_j$  размер равен одному шагу  $h_j$ ,  $j = 2 \div m$ . Подобные области имеют важное значение в алгоритме нахождения неизвестных малых корневых областей  $\Omega_q^*$ ,  $q = 1 \div q_0$ . В этой связи сформулируем следующие две леммы.

**Лемма 1.** Некоторые области ПКО  $\Omega_{0, k_2, \dots, k_m}^{1,p,(i,k)}$  могут не содержать корневые точки  $C_q$  системы (1).

Доказательство. Действительно, если две поверхности  $f_i = 0, f_k = 0$  пересекаются в некоторой точке и для них построена ПКО  $\Omega_{0, k_2, \dots, k_m}^{1,p,(i,k)}$ , то третья поверхность  $f_n = 0$  может не проходить через эту точку.

**Лемма 2.** Каждая корневая точка  $C_q$  системы (1) принадлежит одной из областей ПКО  $\Omega_{0, k_2, \dots, k_m}^{1,p,(i,k)}$ .

Доказательство. Пусть корневая точка  $C_0$  находится внутри рассматриваемой ячейки. Тогда по предположению 1 поверхности  $f_k = 0, f_l = 0$  в этой точке пересекаются под некоторым углом и координаты корневых точек (11) будут удовлетворять неравенству (14), т. е. данная ячейка принадлежит корневой области.

Остается рассмотреть случай, когда корневая точка находится на грани, ребре или узле некоторой ячейки. Для этого достаточно координатную сетку с теми же равномерными шагами  $h_j$  сместить вдоль каждой оси в положительном направлении на некоторую малую величину (например, на  $h_j/3$ ) и повторить с самого начала поиск областей  $\Omega_q^*$ . При этом следует роль оси  $x_1$  заменить на ось  $x_2$ , т. е. из стартовых точек на плоскости  $x_2 = a_2$  двигаться параллельно оси  $x_2$  до плоскости  $x_2 = b_2$ . Пересечение областей  $\Omega_{0, k_2, \dots, k_m}^{1,p,(i,k)} \cap \Omega_{k_1, 0, k_3, \dots, k_m}^{2,p,(i,k)}$  позволит получить искомые области  $\Omega_q^*$  размером  $h_1 \times h_2 \times \dots \times h_m$ .

После применения оператора  $P_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1,j,p,(i,k)}$  ко всем стартовым точкам  $O_1$  с координатами

$$x_1 = a_1, \quad x_j = a_j + h_j k_j, \quad j = 2 \div m, \quad k_j = 0 \div N_j, \quad h_j = (b_j - a_j)/N_j$$

и оператора  $P_{k_1, 0, k_3, \dots, k_m}^{2,j,p,(i,k)}$  ко всем стартовым точкам  $O_1$  с координатами

$$x_1 = a_1 + h_1 k_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_j = a_j + h_j k_j, \quad j = 3 \div m$$

найдем все корневые области  $\Omega_q^*$  в рассматриваемой  $\Omega$ .

Следствие 1. После нахождения  $\Omega_q^*$  в качестве приближенного решения системы (1) можно взять центральные точки областей  $\Omega_q^*$ .



Следствие 2. По построению известно, что каждая КО  $\Omega_q^*$  содержит только по одной корневой точке  $C_q$ . Если теперь в качестве исследуемой области  $\Omega$  взять найденную  $\Omega_q^*$  с размерами  $h_1 \times h_2 \times \dots \times h_m$  и повторно применить все рассуждения с оператором  $P_{0, k_2, k_3, \dots, k_m}^{1, j, p, (i, k)}$ , используя разбиение каждого шага  $h_j$  на более мелкие части, то найдем корневую область  $\Omega_q^{**}$  с ещё меньшими размерами. Применяя какой-либо стандартный метод, можно быстро вычислить все решения системы (1) в  $\Omega$  с достаточно высокой точностью.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А. и др. Предельное состояние деформированных тел и горных пород. М.: Физматлит, 2008. С. 832.
- [2] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
- [3] Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964. 216 с.
- [4] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
- [5] Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.
- [6] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Начала теории вычислительных методов. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. Минск: Наука и техника, 1985.
- [7] Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1997. 234 с.
- [8] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
- [9] Вержбицкий В. М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. М.: Высш. Школа, 2000. 266 с.

A. D. Chernyshov

### FINDING SMALL AREAS FOR SIMPLE ROOTS NON-LINEAR SYSTEM OF ALGEBRAIC EQUATIONS

*Azerbaijan Technical University, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*

**Abstract.** A method for finding small areas for simple roots non-linear system of algebraic equations, which does not use gradients. Introduce new concepts: starting points, points of reversal and root points of the root areas of special operators, simplifying the preparation of the programming the application of computers. After the implementation of the given method of finding the root of small areas and their number in the distance, follows, using any standard method roots are would-tup and with high accuracy.

**Keywords:** nonlinear system of algebraic equations, Korean-nevaya region, the simple roots.

### REFERENCES

- [1] Ivlev D. D., Maximova L. A. Limit state of deformable bodies and rocks. М.: Физматлит, 2008. 832 p. (in Russian).
- [2] Lur'e A. I. Theory of elasticity. М.: Nauka, 1970. 940 p. (in Russian).

*Chernyshov Александр Данилович*

e-mail: chernyshovad@mail.ru, Professor, Department of Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technology, Doctor of Physical and Mathematical Sciences.

- [3] Uilkinson U. L. Non-Newtonian fluid. M.: Mir, 1964. 216 p. (in Russian).
- [4] Bahvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. Numerical methods. M.: Nauka, 1987. 600 p. (in Russian).
- [5] Vasil'ev F. P. Methods for solving extreme problems. M.: Nauka, 1988. 552 p. (in Russian).
- [6] Krylov V. I., Bobkov V. V., Monastyrynj P. I. Start computing theory methods. Linear algebra and nonlinear equations. Minsk: Science and Technology, 1985. (in Russian).
- [7] Samarskij A. A. Introduction to Numerical Methods. M.: Nauka, 1997. 234 p. (in Russian).
- [8] Marchuk G. I. Methods of Computational Mathematics. M.: Nauka, 1989. 608 p. (in Russian).
- [9] Verzhbickij V. M. Numerical methods. Linear algebra and nonlinear equation. M.: High school, 2000. 266 p. (in Russian).

И. В. Меньшова

## БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И РАЗЛОЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА ПО ФУНКЦИЯМ ФАДЛЯ–ПАПКОВИЧА В ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

*Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва,  
Россия*

**Аннотация.** Рассматриваются разложения Лагранжа по функциям Фадля–Папковича, возникающим при решении первой основной краевой задачи теории упругости в полуполосе  $\{P^+ : x \geq 0, |y| \leq h\}$ . Независимо от вида однородных граничных условий на длинных сторонах полуполосы всегда имеются 2 представления для функций Фадля–Папковича. Оба представления рассмотрены в работе. Показана их эквивалентность на определенных физически естественных классах раскладываемых функций. Построены функции, биортогональные к функциям Фадля–Папковича, а с их помощью – разложения Лагранжа. Разложениями Лагранжа, в отличие от разложений, возникающих при решении краевой задачи, называются разложения только одной функции по какой-либо одной системе функций Фадля–Папковича. Разложения Лагранжа являются аналогами разложений по тригонометрическим системам функций и играют такую же роль при решении краевых задач, какую тригонометрические ряды играют в разложениях Файлона–Рибьера [1]. Разложения Лагранжа рассматривались и раньше, например, в работах [2]–[15], но лишь в той степени, в какой это требовалось для решения конкретной краевой задачи. Предлагаемая статья имеет целью детальное изучение этих разложений.

Функции Фадля–Папковича точно удовлетворяют нулевым граничным условиям на продольных сторонах полуполосы, но устроены они сложнее: комплекснозначны, не ортогональны и не образуют классического базиса на отрезке (торце полуполосы), на котором задаются раскладываемые функции. Но к ним все же можно построить определенные на римановой поверхности логарифма биортогональные системы функций, а затем получить явные выражения (в виде простых интегралов Фурье от граничных функций) для искомым коэффициентов разложений по той же схеме, что и в классических решениях Файлона–Рибьера [16]. Сутью подхода является новое представление о базисе функций на отрезке, являющееся обобщением классического понимания базиса на отрезке. Опираясь на работы [17], [18], классический базис можно трактовать как базис в комплексной плоскости. Тогда как функции Фадля–Папковича образуют базис на римановой поверхности логарифма. Причем в частном случае, когда функции Фадля–Папковича вырождаются в обычные тригонометрические системы

---

© Меньшова И. В., 2016

*Меньшова Ирина Владимировна*

e-mail: menshovairina@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02-644).

Поступила 28.01.2016

функций, базис на римановой поверхности становится классическим базисом на отрезке. В основе соответствующей теории лежит преобразование Бореля в классе квазицелых функций экспоненциального типа (классический базис основан на теории целых функций экспоненциального типа и теореме Пэли–Винера [19]). Класс квазицелых функций экспоненциального типа и преобразование Бореля в этом классе были впервые введены в 1935 году в работе [20]. В статье [21] изучались свойства этого преобразования в той степени, насколько это необходимо при решении краевых задач теории упругости в полуполосе.

**Ключевые слова:** теория упругости, полуполоса, функции Фадля–Папковича, биортогональные функции, разложения Лагранжа, точные решения.

УДК: 539.3

**Введение.** Разложения по функциям Фадля–Папковича (однородным решениям) составляют суть бигармонической проблемы, ее ядро. Ей почти 200 лет, и все эти годы она была предметом пристального внимания как математиков, так и механиков.

В наше время ее решением интересовались М. В. Келдыш, О. А. Олейник, В. А. Кондратьев, П. Ф. Папкович, А. Ю. Ишлинский, И. И. Ворович, Н. Х. Арутюнян, А. И. Лурье, Г. А. Гринберг и многие другие. В. К. Прокоповым в 60–70 годы было опубликовано 2 обзора по однородным решениям [22],[ 23]. Особый интерес к проблеме проявился в 1940–1980 гг., после публикации П. Ф. Папковичем [24] его известного соотношения “обобщенной ортогональности”, которому удовлетворяют однородные решения. В эти годы в СССР вышло не менее 2000 работ по бигармонической проблеме. На Западе публикаций было заметно меньше, они были разрозненны и слабее отечественных. После восьмидесятих годов количество публикаций резко снизилось. Это связано с известными изменениями в российской науке и крушением Московской (М. И. Гусейн-Заде), Ленинградской (А. И. Лурье), Ростовской-на-Дону (И. И. Ворович) и Украинской (В. Т. Гринченко) школ, занимавшихся проблемой разложений по функциям Фадля–Папковича. Ведущие представители этих школ (указаны в скобках) хорошо осознавали фундаментальное значение точного решения бигармонической проблемы и для механики, и для математики. А также то, что точное решение краевой задачи для бигармонического уравнения может быть представлено только в виде разложений по собственным функциям краевой задачи, т. е. по функциям Фадля–Папковича. Поэтому их изучению уделялось самое пристальное внимание. Западные ученые, как правило, шли по пути приближенного решения проблемы. Лишь немногие западные работы достигали уровня тех, что публиковались в СССР [25]–[27]. Однако точного решения проблемы получено не было. Главная причина этого заключается, по-видимому, в том, что ее решение искалось в рамках классических представлений теории базиса функции, тогда как функции Фадля–Папковича не образуют классического базиса. Они представляют собой обобщение систем экспонент с комплексными показателями [17], [18] и с вырожденной в отрезок (торец полуполосы) областью аналитичности. Трудно указать работу (учитывая западные публикации), которая оказала бы существенное влияние на изменение положения дел по бигармонической проблеме. Фундаментальный обзор (более 700 ссылок на наиболее существенные исследования за почти 200 лет) одного из ярчайших специалистов по бигармонической проблеме В. В. Мелешко, написанный в 2003 г., еще раз свидетельствует об этом [28].

Опираясь на статью А. Пфлогера [20] и дополнительные исследования по теории квазицелых функций [21], в 1997 г. удалось впервые построить точное решение би-гармонической проблемы в классической постановке: полуполоса со свободными продольными сторонами, нагруженная на торце сосредоточенной силой. Решение задачи получено в виде рядов по функциям Фадля–Папковича, коэффициенты которых найдены в явном виде с помощью функций, биортогональных к функциям Фадля–Папковича [29].

**1. Постановка краевой задачи (основные положения).** При решении первой основной краевой задачи теории упругости в полуполосе  $\{\Pi^+ : x \geq 0, |y| \leq h\}$ , когда ее длинные стороны  $y = \pm h$  свободны, т. е.

$$\sigma_y(x, \pm h) = \tau_{xy}(x, \pm h) = 0, \quad (1.1)$$

а на торце  $x = 0$  заданы нормальное и касательное напряжения

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y), \quad (1.2)$$

решение краевой задачи может быть представлено в виде разложений по собственным функциям краевой задачи, которые в теории упругости принято называть функциями Фадля–Папковича. Эти разложения имеют вид:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= C_0 + C_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} \xi(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}, \\ V(x, y) &= -\nu y C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} \chi(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}, \\ \sigma_x(x, y) &= 2(1 + \nu) C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} s_x(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} s_y(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} t_{xy}(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Стоящие под знаком суммирования функции  $\xi(\lambda_k, y)$ ,  $\xi(\overline{\lambda_k}, y)$  и т. д. и есть функции Фадля–Папковича. В формулах (1.3) введены такие обозначения:  $U(x, y) = Gu(x, y)$ ;  $V(x, y) = Gv(x, y)$ ,  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  – соответственно перемещения по  $x$  (продольное) и по  $y$  (поперечное),  $G$  – модуль упругости при сдвиге,  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Числа  $\lambda_k$  – множество  $\{\pm \lambda_k; \pm \overline{\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$  всех комплексных нулей целой функции экспоненциального типа

$$L(\lambda) = \lambda^2 \left( 1 + \frac{\sin 2\lambda h}{2\lambda h} \right). \quad (1.4)$$

$C_0$ ,  $C_1$ ,  $a_k$  – неизвестные коэффициенты разложений, причем  $C_0$  и  $C_1$  отвечают нулевым корням характеристического уравнения  $L(\lambda) = 0$  и соответствуют элементарному решению сопротивления материалов, а  $a_k$ ,  $\overline{a_k}$  – его комплексным корням  $\lambda_k$  и  $\overline{\lambda_k}$  соответственно.

Следуя методу начальных функций [30], удовлетворим граничным условиям (1.1)

$$\begin{cases} L_{YU}(\alpha, h)U_0(x) + L_{YY}(\alpha, h)Y_0(x) = 0; \\ L_{XU}(\alpha, h)U_0(x) + L_{XY}(\alpha, h)Y_0(x) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь  $L_{YU}(\alpha, h)$  и т.д. – операторы метода начальных функций.  $U_0(x) = Gu(x, 0)$ ,  $Y_0(x) = \sigma_y(x, 0)$  – начальные функции, определенные при  $y = 0$ ,  $\alpha = d/dx$  – оператор дифференцирования. Выражения для операторов приведены в книге [30]. Вводя разрешающую функцию  $F(x)$  по формулам

$$U_0(x) = L_{XY}(\alpha, h)F(x), \quad Y_0(x) = -L_{XU}(\alpha, h)F(x), \quad (1.6)$$

тождественно удовлетворим первому уравнению системы (1.5), а второе примет вид

$$[L_{YU}(\alpha, h)L_{XY}(\alpha, h) - L_{YY}(\alpha, h)L_{XU}(\alpha, h)]F(x) = 0. \quad (1.7)$$

Раскрывая выражения для дифференциальных операторов, получим обыкновенное дифференциальное уравнение бесконечного порядка

$$\alpha^2 \left( 1 + \frac{\sin 2\alpha h}{2\alpha h} \right) F(x) = 0. \quad (1.8)$$

Его решение, не возрастающее на бесконечности, имеет вид

$$F(x) = C_0 + C_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k e^{\bar{\lambda}_k x} \right) \quad (\lambda_k \in \Lambda, \operatorname{Re} \lambda_k < 0). \quad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в формулы (1.6), найдем начальные функции, а затем, в соответствии с зависимостями метода начальных функций, формулы (1.3) для перемещений и напряжений в полуполосе. Функции Фадля–Папковича принимают вид:

$$\xi^s(\lambda_k, y) = - \left[ \left( \frac{1+\nu}{2} \lambda_k h \cos \lambda_k h - \frac{1-\nu}{2} \sin \lambda_k h \right) \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y \right],$$

$$\chi^s(\lambda_k, y) = \left( \frac{1+\nu}{2} \lambda_k h \cos \lambda_k h + \sin \lambda_k h \right) \sin \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y,$$

$$s_x^s(\lambda_k, y) = (1+\nu) \lambda_k [(\sin \lambda_k h - \lambda_k h \cos \lambda_k h) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y], \quad (1.10)$$

$$s_y^s(\lambda_k, y) = (1+\nu) \lambda_k [(\sin \lambda_k h + \lambda_k h \cos \lambda_k h) \cos \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y],$$

$$t_{xy}^s(\lambda_k, y) = (1+\nu) \lambda_k^2 (h \cos \lambda_k h \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y).$$

Назовем их  $s$ -представлением функций Фадля–Папковича.

Если же функцию  $F(x)$  вводить по формулам:

$$U_0(x) = L_{YY}(\alpha, h)F(x), \quad Y_0(x) = -L_{YU}(\alpha, h)F(x), \quad (1.11)$$

то получим другие выражения для функций Фадля–Папковича:

$$\xi^c(\lambda_k, y) = \left( \cos \lambda_k h + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k h \sin \lambda_k h \right) \cos \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k h \sin \lambda_k y,$$

$$\chi^c(\lambda_k, y) = \left( \frac{1-\nu}{2} \cos \lambda_k h - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k h \sin \lambda_k h \right) \sin \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k h \cos \lambda_k y,$$

$$s_x^c(\lambda_k, y) = (1+\nu) \lambda_k [(2 \cos \lambda_k h + \lambda_k h \sin \lambda_k h) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \cos \lambda_k h \sin \lambda_k y], \quad (1.12)$$

$$s_y^c(\lambda_k, y) = -(1+\nu) \lambda_k^2 (h \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y - y \cos \lambda_k h \sin \lambda_k y),$$

$$t_{xy}^c(\lambda_k, y) = -(1 + \nu) \lambda_k [(\cos \lambda_k h + \lambda_k h \sin \lambda_k h) \sin \lambda_k y + \lambda_k y \cos \lambda_k h \cos \lambda_k y],$$

которые назовем  $s$ -представлением. Между этими представлениями имеется связь, являющаяся следствием равенства  $\lambda_k h + \sin \lambda_k h \cos \lambda_k h = 0$ ,  $k=1, 2, \dots$

Таким образом, функции Фадля–Папковича, стоящие в формулах (1.3), могут быть представлены в двух видах: (1.10) или (1.12).

Поскольку  $t_{xy}(\lambda_k, \pm h) = s_y(\lambda_k, \pm h) = 0$ , то граничные условия при  $y = \pm h$  удовлетворяются точно. Удовлетворяя с помощью формул (1.3) граничным условиям (1.2), приходим к задаче определения коэффициентов  $a_k$  из разложений

$$\begin{cases} \sigma(y) = 2(1 + \nu)C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) + \overline{a_k} s_x(\overline{\lambda_k}, y); \\ \tau(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) + \overline{a_k} t_{xy}(\overline{\lambda_k}, y). \end{cases} \quad (1.13)$$

Они находятся отсюда с помощью функций, биортогональных к функциям Фадля–Папковича.

**2. Биортогональные функции ( $s$ -представление).** Построим функции  $U_k^s(y)$ ,  $V_k^s(y)$ ,  $X_k^s(y)$ ,  $Y_k^s(y)$  и  $T_k^s(y)$ , биортогональные к функциям Фадля–Папковича (1.10). Через  $\xi^s(\lambda, y)$ ,  $\chi^s(\lambda, y)$  и т. д. обозначим функции (1.10), заменив в них  $\lambda_k$  вещественным параметром  $\lambda$ . Следуя [31], назовем их порождающими функциями. Как и в статьях [6], [32], биортогональные функции будем искать как решения уравнений:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^s(\lambda, y) U_k^s(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^s(\lambda, y) V_k^s(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} s_x^s(\lambda, y) X_k^s(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & \int_{-\infty}^{+\infty} s_y^s(\lambda, y) Y_k^s(y) dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} t_{xy}^s(\lambda, y) T_k^s(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для комплексных значений  $\lambda$ , в частности при  $\lambda = \lambda_k \in \Lambda$ , прямую интегрирования в формулах (2.1) надо заменить  $T$ -образным контуром  $T$ , лежащим в плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  и составленным из отрезка мнимой оси  $y \in [-h, h]$  и луча  $x \in (-\infty, 0]$  [6], [21].

При  $\lambda \rightarrow \lambda_k$ , в соответствии с асимптотическим равенством [33]

$$f(\lambda) - f(\lambda_k) = f'(\lambda_k) (\lambda - \lambda_k),$$

из формул (2.1) получаются следующие соотношения биортогональности:

$$\begin{aligned} \int_T \xi^s(\lambda_m, y) U_k^s(y) dy &= \begin{cases} \lambda_k M_k^s & \text{при } \lambda_m = \lambda_k; \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \\ \int_T \chi^s(\lambda_m, y) V_k^s(y) dy &= \begin{cases} M_k^s & \text{при } \lambda_m = \lambda_k; \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\int_T s_x^s(\lambda_m, y) X_k^s(y) dy = \begin{cases} M_k^s & \text{при } \lambda_m = \lambda_k; \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\int_T s_y^s(\lambda_m, y) Y_k^s(y) dy = \begin{cases} \lambda_k^2 M_k^s & \text{при } \lambda_m = \lambda_k; \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

$$\int_T t_{xy}^s(\lambda_m, y) T_k^s(y) dy = \begin{cases} \lambda_k M_k^s & \text{при } \lambda_m = \lambda_k; \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

где  $M_k^s = \frac{L'(\lambda_k)}{2\lambda_k} = \cos^2 \lambda_k h$ , а  $L'(\lambda_k)$  – производная функции  $L(\lambda)$  при  $\lambda = \lambda_k$ .

Понятие биортогональности включает в себя также равенства вида ( $k, m$  – любые)

$$\int_T \xi^s(\bar{\lambda}_m, y) \overline{U_k^s(y)} dy = \begin{cases} \bar{\lambda}_k M_k^s & \text{при } \bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_m; \\ 0 & \text{при } \bar{\lambda}_k \neq \bar{\lambda}_m \end{cases} \quad (2.3)$$

и

$$\int_T \xi^s(\bar{\lambda}_m, y) U_k^s(y) dy = \int_T \xi^s(\lambda_m, y) \overline{U_k^s(y)} dy = 0, \dots \quad (2.4)$$

Они сразу следуют из формул (2.1) и (2.2).

Ниже будут полезными разложения порождающих функций и функции  $L(\lambda)$  в ряды по степеням параметра  $\lambda$ :

$$\xi^s(\lambda, y) = -\nu h \lambda + \dots; \quad \chi^s(\lambda, y) = h y \lambda^2 - \dots; \quad s_x^s(\lambda, y) = (1 + \nu) h \frac{h^2 - 3y^2}{3} \lambda^4 - \dots;$$

$$s_y^s(\lambda, y) = 2(1 + \nu) h \lambda^2 - \dots; \quad t_{xy}^s(\lambda, y) = -(1 + \nu) h y \frac{h^2 - y^2}{3} \lambda^5 + \dots; \quad (2.5)$$

$$L(\lambda) = 2\lambda^2 - \dots$$

Биортогональные функции  $U_k^s(y)$ ,  $V_k^s(y)$ ,  $X_k^s(y)$ ,  $Y_k^s(y)$  и  $T_k^s(y)$  можно представить в виде суммы финитных, равных нулю вне отрезка  $|y| \leq h$ , и не финитных частей [6], [32]. Финитные части имеют вид ( $|y| \leq h$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ):

$$u_k^s(y) = \frac{1}{(1 + \nu) h} \left[ \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k h} - (\delta(y - h) + \delta(y + h)) \right],$$

$$v_k^s(y) = -\frac{\sin \lambda_k y}{(1 + \nu) h \sin \lambda_k h}, \quad x_k^s(y) = \frac{\cos \lambda_k y}{2(1 + \nu) \lambda_k h \sin \lambda_k h}, \quad (2.6)$$

$$y_k^s(y) = -\frac{1}{2(1 + \nu) h} \left( \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k h} - (\delta(y - h) + \delta(y + h)) \right), \quad t_k^s(y) = -\frac{\sin \lambda_k y}{2(1 + \nu) h \sin \lambda_k h}$$

(через  $\delta$  обозначены  $\delta$ -функции). Простой способ их построения указан в статье [32].

Получим, например, функцию  $u_k^s(y)$ . Примем в первой формуле (2.1)  $\lambda = m\pi/h = q_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). Воспользовавшись равенствами

$$\int_{-h}^h \cos(q_m y) \cos(\lambda_k y) dy = \frac{2\lambda_k (-1)^{m+1} \sin(\lambda_k h)}{q_m^2 - \lambda_k^2}, \quad \frac{q_m^2}{q_m^2 - \lambda_k^2} = 1 + \frac{\lambda_k^2}{q_m^2 - \lambda_k^2},$$

получим  $u_k^s(y)$  (2.6).



Если в формулах (2.1) перейти к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$  и учесть (2.5), то можно получить ( $k \geq 1$ ):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\nu h U_k^s(y) dy = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} 2(1 + \nu) h Y_k^s(y) dy = 0. \quad (2.7)$$

В силу ортогональности (2.7) разложения Лагранжа по функциям Фадля–Папковича  $\xi^s(\lambda_k, y)$ ,  $s_y^s(\lambda_k, y)$  могут отличаться от раскладываемых функций на некоторые постоянные. Чтобы этого не произошло, необходимо дополнительно построить функции с нулевым индексом  $U_0^s(y)$  и  $Y_0^s(y)$ , ортогональные к соответствующим функциям Фадля–Папковича  $\xi^s(\lambda_k, y)$ ,  $s_y^s(\lambda_k, y)$  и не ортогональные к 1. Эти функции будем искать как решения уравнений:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^s(\lambda, y) U_0^s(y) dy = -\frac{\nu h L(\lambda)}{2\lambda}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} s_y^s(\lambda, y) Y_0^s(y) dy = (1 + \nu) h L(\lambda). \quad (2.8)$$

Правые части равенств (2.8) выбираются так, чтобы искомые биортогональные функции были ортогональны к функциям Фадля–Папковича, т. е.

$$\int_T \xi^s(\lambda_k, y) U_0^s(y) dy = 0, \quad \int_T s_y^s(\lambda_k, y) Y_0^s(y) dy = 0, \quad (2.9)$$

и так, что если в (2.8) перейти к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$ , то получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_0^s(y) dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} Y_0^s(y) dy = 1. \quad (2.10)$$

Финитные части функций  $U_0^s(y)$  и  $Y_0^s(y)$  имеют вид:

$$u_0^s(y) = \frac{\nu}{2(1 + \nu)} [\delta(y - h) + \delta(y + h)], \quad y_0^s(y) = \frac{1}{2} [\delta(y - h) + \delta(y + h)]. \quad (2.11)$$

**3. Разложения Лагранжа по функциям Фадля–Папковича (s-представление).** Построим разложения Лагранжа по функциям Фадля–Папковича (1.10), представив их в виде:

$$\begin{aligned} U(y) &= U_0^s + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^s \frac{\xi^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} + \overline{U}_k^s \frac{\xi^s(\overline{\lambda}_k, y)}{\overline{\lambda}_k M_k^s}, & V(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} V_k^s \frac{\chi^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} + \overline{V}_k^s \frac{\chi^s(\overline{\lambda}_k, y)}{\overline{M}_k^s}, \\ \sigma_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} X_k^s \frac{s_x^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} + \overline{X}_k^s \frac{s_x^s(\overline{\lambda}_k, y)}{\overline{M}_k^s}, & \sigma_y(y) &= Y_0^s + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^s \frac{s_y^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^s} + \overline{Y}_k^s \frac{s_y^s(\overline{\lambda}_k, y)}{\overline{\lambda}_k^2 M_k^s}, \\ \tau_{xy}(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} T_k^s \frac{t_{xy}^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} + \overline{T}_k^s \frac{t_{xy}^s(\overline{\lambda}_k, y)}{\overline{\lambda}_k M_k^s}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Числа  $U_0^s$ ,  $U_k^s$ ,  $V_k^s$  и т. д. – коэффициенты Лагранжа раскладываемых функций. В знаменателях выражений (3.1) стоят нормирующие множители  $M_k^s$ ,  $\lambda_k M_k^s$ ,  $\lambda_k^2 M_k^s$  – значения правых частей соответствующих выражений (2.1), определенных при  $\lambda = \lambda_k$ .

Найдем коэффициенты  $U_0^s, U_k^s$  первого разложения (3.1) некоторой четной функции  $U(y)$ . Умножим обе части этого равенства на функцию с нулевым индексом  $U_0^s(y)$  и проинтегрируем от  $-\infty$  до  $+\infty$ . На основании (2.9) и (2.10)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(y)U_0^s(y)dy = U_0^s. \quad (3.2)$$

Далее умножим первое равенство (3.1) на функцию  $U_m^s(y)$  ( $m=1,2,\dots$ ) и проинтегрируем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(y)U_m^s(y)dy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^s}{\lambda_k M_k^s} \int_T \xi^s(\lambda_k, y)U_m^s(y)dy + \frac{\overline{U_k^s}}{\lambda_k M_k^s} \int_T \xi^s(\overline{\lambda_k}, y)U_m^s(y)dy. \quad (3.3)$$

На основании (2.2)–(2.4)

$$U_k^s = \int_{-\infty}^{+\infty} U(y)U_k^s(y)dy. \quad (3.4)$$

Аналогично находятся числа:

$$\begin{aligned} V_k^s &= \int_{-\infty}^{+\infty} V(y)V_k^s(y)dy, & X_k^s &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x(y)X_k^s(y)dy, \\ Y_0^s &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y(y)Y_0^s(y)dy, & Y_k^s &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y(y)Y_k^s(y)dy, & T_k^s &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{xy}(y)T_k^s(y)dy. \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.1. *Разложения порождающих функций.* Пусть раскладываемой функцией  $U(y)$  является порождающая функция  $\xi^s(\lambda, y)$ , где  $\lambda$  – вещественный параметр. Тогда, в соответствии с формулами (2.1), (2.8), (3.2) и (3.4),

$$U_k^s = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad U_0^s = -\nu h \frac{L(\lambda)}{2\lambda}. \quad (3.6)$$

Подставляя числа (3.6) в соответствующую формулу (3.1), получим

$$\xi^s(\lambda, y) = -\nu h \frac{L(\lambda)}{2\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\xi^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}. \quad (3.7)$$

Ряд (3.7) равномерно сходится к своей функции на всем отрезке  $|y| \leq h$ . Аналогично получают разложения других порождающих функций:

$$\begin{aligned} \chi^s(\lambda, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\chi^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} \right\}, \\ s_x^s(\lambda, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{s_x^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} \right\}, \\ s_y^s(\lambda, y) &= (1 + \nu)hL(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{s_y^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^s} \right\}, \\ t_{xy}^s(\lambda, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{t_{xy}^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Сходимость трех последних разложений (3.8) можно улучшить, воспользовавшись представлениями нуля рядами (проверяется с помощью теоремы о вычетах [34]):

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{1}{\lambda_k^2} \frac{s_x^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} \right\}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \frac{s_y^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^s} \right\}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda}{\lambda_k^2} \frac{t_{xy}^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}. \quad (3.9)$$

Тогда получим ( $|y| \leq h$ ):

$$\begin{aligned} s_x^s(\lambda, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda_k^2 (\lambda^2 - \lambda_k^2)} \frac{s_x^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} \right\}, \\ s_y^s(\lambda, y) &= (1 + \nu)hL(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda^4 L(\lambda)}{\lambda_k^2 (\lambda^2 - \lambda_k^2)} \frac{s_y^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^s} \right\}, \\ t_{xy}^s(\lambda, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda^3 L(\lambda)}{\lambda_k^2 (\lambda^2 - \lambda_k^2)} \frac{t_{xy}^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Простые разложения полиномиальных функций можно строить, раскладывая равенства (3.10) в ряды по степеням  $\lambda$ . Например,

$$\begin{aligned} (1 + \nu)h \frac{h^2 - 3y^2}{3} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ -\frac{2}{\lambda_k^4} \frac{s_x^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} \right\}, \\ -(1 + \nu)h \frac{h^4 - 5y^4}{30} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2(h^2 \lambda_k^2 - 3)}{3\lambda_k^6} \frac{s_x^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} \right\}. \end{aligned}$$

**3.2. Разложения на основе финитных биортогональных функций.** Если в формулах (3.2), (3.4), (3.5) воспользоваться финитными частями биортогональных функций, то получим:

$$\begin{aligned} u_0^s &= \int_{-h}^h U(y)u_0^s(y)dy, \quad u_k^s = \int_{-h}^h U(y)u_k^s(y)dy, \quad v_k^s = \int_{-h}^h V(y)v_k^s(y)dy, \\ x_k^s &= \int_{-h}^h \sigma_x(y)x_k^s(y)dy, \\ y_0^s &= \int_{-h}^h \sigma_y(y)y_0^s(y)dy, \quad y_k^s = \int_{-h}^h \sigma_y(y)y_k^s(y)dy, \quad t_k^s = \int_{-h}^h \tau_{xy}(y)t_k^s(y)dy. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Приведем примеры разложений (3.1) с коэффициентами Лагранжа (3.11). Назовем некоторую четную функцию самоуравновешенной на отрезке  $[-h, h]$ , если интеграл от нее на этом отрезке равен нулю.

*Пример 1.* Пусть  $U(y) = y^2$ . Вначале заметим, что четные финитные биортогональные функции, включая биортогональные функции с нулевым индексом, определяются с точностью до произвольных постоянных. Поэтому нужно раскладывать в ряд Лагранжа только самоуравновешенные функции, ортогональные к постоянной. Однако, т. к. функции  $u_k^s(y)$ , в свою очередь, ортогональны к постоянной, к функции  $y^2$  можно добавить любую постоянную. В частности, удобно взять функцию, равную

нулю на концах отрезка  $[-h, h]$ , т. е.  $y^2 - h^2$ . В этом случае

$$\begin{aligned} u_k^s &= \int_{-h}^h (y^2 - h^2) \frac{1}{(1+\nu)h} \left[ \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k h} - (\delta(y-h) + \delta(y+h)) \right] dy = \\ &= \int_{-h}^h (y^2 - h^2) \frac{1}{(1+\nu)h} \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k h} dy = -\frac{4(\sin \lambda_k h - \lambda_k h \cos \lambda_k h)}{h(1+\nu)\lambda_k^2 \sin \lambda_k h}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Чтобы определить коэффициент Лагранжа  $u_0^s$  (3.11), вместо функции  $y^2$  нужно взять самоуравновешенную функцию  $y^2 - h^2/3$ . Тогда найдем

$$u_0^s = \int_{-h}^h \left( y^2 - \frac{h^2}{3} \right) \frac{\nu}{2(1+\nu)} [\delta(y-h) + \delta(y+h)] dy = \frac{2\nu h^2}{3(1+\nu)}. \quad (3.13)$$

Окончательно получим такое разложение:

$$y^2 = \frac{h^2}{3} + u_0^s + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ u_k^s \frac{\xi^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}. \quad (3.14)$$

*Пример 2.*  $U(y) = \cos(\pi y/h)$ . Тогда

$$u_0^s = -\frac{\nu}{1+\nu}, \quad u_k^s = -\frac{2\pi^2}{(1+\nu)h(\lambda_k^2 h^2 - \pi^2)}. \quad (3.15)$$

Соответствующее разложение Лагранжа имеет вид:

$$\cos(\pi y/h) = u_0^s + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ u_k^s \frac{\xi^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}. \quad (3.16)$$

*Примеры 3–5.*

$$y(y^2 - h^2) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ v_k^s \frac{\chi^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} \right\}, \quad (3.17)$$

$$y^2 = y_0^s + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ y_k^s \frac{s_y^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^s} \right\}, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ t_k^s \frac{t_{xy}^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}.$$

Числа  $v_k^s$ ,  $y_0^s$ ,  $y_k^s$ ,  $t_k^s$  находятся по формулам (3.11):

$$\begin{aligned} v_k^s &= -4 \frac{(h^2 \lambda_k^2 - 3) \sin \lambda_k h + 3 \lambda_k h \cos \lambda_k h}{(1+\nu) \lambda_k^4 h \sin \lambda_k h}, \\ y_0^s &= h^2, \quad y_k^s = 2 \frac{\sin \lambda_k h - \lambda_k h \cos \lambda_k h}{(1+\nu) \lambda_k^2 h \sin \lambda_k h}, \quad t_k^s = -\frac{\sin \lambda_k h - \lambda_k h \cos \lambda_k h}{(1+\nu) \lambda_k^2 h \sin \lambda_k h}. \end{aligned}$$

**4. Биортогональные функции (с-представление).** Аналогичные (2.1) уравнения для определения биортогональных функций  $U_k^c(y)$ ,  $V_k^c(y)$ ,  $X_k^c(y)$ ,  $Y_k^c(y)$ ,  $T_k^c(y)$  имеют вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^c(\lambda, y) U_k^c(y) dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^c(\lambda, y) V_k^c(y) dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_k^2)};$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_x^c(\lambda, y) X_k^c(y) dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_k^2)}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} s_y^c(\lambda, y) Y_k^c(y) dy = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; \quad (4.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t_{xy}^c(\lambda, y) T_k^c(y) dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}.$$

Отсюда получаются соотношения биортогональности вида

$$\int_T \xi^c(\lambda_m, y) U_k^c(y) dy = \begin{cases} \lambda_k M_k^c & \text{при } \lambda_m = \lambda_k; \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \quad M_k^c = \frac{M_k^s}{\lambda_k} = \frac{\cos^2 \lambda_k h}{\lambda_k}, \quad (4.2)$$

и

$$\int_T \xi^c(\overline{\lambda}_m, y) U_k^c(y) dy = \int_T \xi^c(\lambda_m, y) \overline{U_k^c(y)} dy = 0. \quad (4.3)$$

Финитные части биортогональных функций равны:

$$u_k^c(y) = \frac{\cos \lambda_k y}{(1 + \nu) h \cos \lambda_k h}, \quad u_0^c(y) = \frac{1}{2(1 + \nu) h},$$

$$v_k^c(y) = -\frac{\sin \lambda_k y}{(1 + \nu) \lambda_k h \cos \lambda_k h}, \quad x_k^c(y) = \frac{1}{2(1 + \nu) \lambda_k^2 h} \left[ \frac{\cos \lambda_k y}{\cos \lambda_k h} - 1 \right], \quad (4.4)$$

$$y_k^c(y) = -\frac{\cos \lambda_k y}{2(1 + \nu) h \cos \lambda_k h}, \quad t_k^c(y) = -\frac{\sin \lambda_k y}{2(1 + \nu) \lambda_k h \cos \lambda_k h}.$$

Сравнивая первые члены разложений в ряды Тейлора по степеням  $\lambda$ -порождающих функций:

$$\xi^c(\lambda, y) = 1 - \frac{(2 + \nu) y^2 - h^2 \nu}{2} \lambda^2 + \dots; \quad \chi^c(\lambda, y) = -\nu y \lambda + \dots; \quad s_x^c(\lambda, y) = 2(1 + \nu) \lambda - \dots; \quad (4.5)$$

$$s_y^c(\lambda, y) = -(1 + \nu)(h^2 - y^2) \lambda^3 + \dots; \quad t_{xy}^c(\lambda, y) = -2(1 + \nu) y \lambda^2 + \dots$$

и первые члены разложений правых частей равенств (4.1), заметим, что биортогональные функции  $U_k^c(y)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) ортогональны константе, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_k^c(y) dy = 0. \quad (4.6)$$

Биортогональную функцию с нулевым индексом, не ортогональную к постоянной и ортогональную ко всем функциям Фадля–Папковича  $\xi^c(\lambda_k, y)$ , определим из уравнения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^c(\lambda, y) U_0^c(y) dy = \frac{L(\lambda)}{2\lambda^2}. \quad (4.7)$$

Тогда

$$\int_T \xi^c(\lambda_k, y) U_0^c(y) dy = 0. \quad (4.8)$$

Финитная часть биортогональной функции  $U_0^c(y)$  равна

$$u_0^c(y) = \frac{1}{2h(1+\nu)}. \quad (4.9)$$

**5. Разложения Лагранжа по функциям Фадля–Папковича (с-представление).** Дадим примеры разложений Лагранжа по функциям (1.12):

$$\begin{aligned} U(y) &= U_0^c + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^c \frac{\xi^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} + \overline{U}_k^c \frac{\xi^c(\overline{\lambda}_k, y)}{\lambda_k M_k^c}, \\ V(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} V_k^c \frac{\chi^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} + \overline{V}_k^c \frac{\chi^c(\overline{\lambda}_k, y)}{M_k^c}, \\ \sigma_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} X_k^c \frac{s_x^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} + \overline{X}_k^c \frac{s_x^c(\overline{\lambda}_k, y)}{M_k^c}, \\ \sigma_y(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^c \frac{s_y^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c} + \overline{Y}_k^c \frac{s_y^c(\overline{\lambda}_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c}, \\ \tau_{xy}(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} T_k^c \frac{t_{xy}^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} + \overline{T}_k^c \frac{t_{xy}^c(\overline{\lambda}_k, y)}{\lambda_k M_k^c}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Коэффициенты Лагранжа  $U_0^c, U_k^c, V_k^c$  и т. д. находятся по формулам, аналогичным (3.5):

$$\begin{aligned} U_0^c &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(y) U_0^c(y) dy, \quad U_k^c = \int_{-\infty}^{+\infty} U(y) U_k^c(y) dy, \quad V_k^c = \int_{-\infty}^{+\infty} V(y) V_k^c(y) dy, \\ X_k^c &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x(y) X_k^c(y) dy, \quad Y_k^c = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y(y) Y_k^c(y) dy, \quad T_k^c = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{xy}(y) T_k^c(y) dy. \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.1. *Разложения порождающих функций.* Разложения в ряды Лагранжа порождающих функций получаются сразу на основании (4.1) и (4.7):

$$\begin{aligned} \xi^c(\lambda, y) &= \frac{L(\lambda)}{2\lambda^2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\xi^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} \right\}, \\ \chi^c(\lambda, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_k^2)} \frac{\chi^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} \right\}, \\ s_x^c(\lambda, y) &= (1+\nu) \frac{L(\lambda)}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda_k^2 (\lambda^2 - \lambda_k^2)} \frac{s_x^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} \right\}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$s_y^c(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{s_y^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c} \right\}, \quad t_{xy}^c(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{t_{xy}^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} \right\}.$$

Рассмотрим подробнее разложение Лагранжа порождающей функции  $s_x^c(\lambda, y)$ . В силу того что

$$\int_{-h}^h s_x^c(\lambda, y) dy = (1+\nu) \frac{2hL(\lambda)}{\lambda} \neq 0, \quad (5.4)$$

порождающая функция  $s_x^c(\lambda, y)$  не является самоуравновешенной, а функции Фадля–Папковича  $s_x^c(\lambda_k, y)$ , как это следует опять же из (5.4) при  $\lambda = \lambda_k$ , самоуравновешены, то раскладывать будем самоуравновешенную функцию

$$s_x^c(\lambda, y) - (1 + \nu) \frac{L(\lambda)}{\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ X_k^c \frac{s_x^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} \right\}. \quad (5.5)$$

Умножая обе части равенства (5.5) на  $X_k^c(y)$ , интегрируя от  $-\infty$  до  $+\infty$  и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X_k^c(y) dy = -\frac{1}{(1 + \nu)\lambda_k^2}, \quad (5.6)$$

(равенство (5.6) получается предельным переходом при  $\lambda \rightarrow 0$  из соответствующего равенства (4.1), если учесть третье разложение (4.5)), имеем

$$\frac{L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_k^2)} + \frac{L(\lambda)}{\lambda\lambda_k^2} = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda_k^2(\lambda^2 - \lambda_k^2)} = X_k^c. \quad (5.7)$$

Подставляя (5.7) в (5.5), получим нужное разложение (5.3).

*Замечание.* Как правило, сходимость разложений Лагранжа можно улучшить, воспользовавшись разложениями полиномов, в частности, функций:  $0, 1$  и  $y$ . Эти разложения получаются так, как было описано выше. Например, последний ряд (5.3) сходится к функции, терпящей разрыв на концах отрезка  $[-h, h]$ , поскольку функции  $t_{xy}^c(\lambda_k, \pm h) = 0$ , а раскладываемая функция – нет. Сходимость ряда можно улучшить, выделив из него разложение функции  $Cy$ , где  $C$  – некоторая константа.

5.2. *Разложения на основе финитных биортогональных функций.* В формулах (5.2) воспользуемся финитными частями биортогональных функций. Тогда получим:

$$\begin{aligned} u_0^c &= \int_{-h}^h U(y)u_0^c(y)dy, & u_k^c &= \int_{-h}^h U(y)u_k^c(y)dy, & v_k^c &= \int_{-h}^h V(y)v_k^c(y)dy, \\ x_k^c &= \int_{-h}^h \sigma_x(y)x_k^c(y)dy, & y_k^c &= \int_{-h}^h \sigma_y(y)y_k^c(y)dy, & t_k^c &= \int_{-h}^h \tau_{xy}(y)t_k^c(y)dy. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Приведем примеры разложений с числами (5.8):

$$\begin{aligned} y^2 - h^2 &= u_0^c + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{u_k^c}{\lambda_k M_k^c} \xi^c(\lambda_k, y) \right\}, & u_0^c &= -\frac{2}{3} \frac{h^2}{(1 + \nu)}, \\ u_k^c &= -\frac{4(\sin \lambda_k h - \lambda_k h \cos \lambda_k h)}{h(1 + \nu)\lambda_k^3 \cos \lambda_k h}; \\ y(y^2 - h^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ v_k^c \frac{\chi^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} \right\}, & v_k^c &= -4 \frac{(h^2 \lambda_k^2 - 3) \sin \lambda_k h + 3 \lambda_k h \cos \lambda_k h}{(1 + \nu) \lambda_k^5 h \cos \lambda_k h}; \\ \left(\frac{y}{h}\right)^2 - \frac{1}{3} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ x_k^c \frac{s_x^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} \right\}, & x_k^c &= \frac{2(\lambda_k^2 h^2 - 3) \sin \lambda_k h + 3 \lambda_k h \cos \lambda_k h}{3(1 + \nu) \lambda_k^5 h^3 \cos \lambda_k h}; \\ y^2 - h^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ y_k^c \frac{s_y^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c} \right\}, & y_k^c &= 2 \frac{\sin \lambda_k h - \lambda_k h \cos \lambda_k h}{(1 + \nu) \lambda_k^3 h \cos \lambda_k h}; \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ t_k^c \frac{t_{xy}^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} \right\}, \quad t_k^c = -\frac{\sin \lambda_k h - \lambda_k h \cos \lambda_k h}{(1 + \nu) \lambda_k^3 h \cos \lambda_k h}.$$

**6. Разложения Лагранжа по функциям  $\Phi^s(\lambda_k, y)$ ,  $\Psi^s(\lambda_k, y)$  и  $F^s(\lambda_k, y)$  (s-представление).** При решении краевых задач с заданными разрывами перемещений или напряжений используются функции<sup>1</sup>, являющиеся линейными комбинациями соответствующих функций Фадля–Папковича. Поэтому для них также можно дать два представления. Рассмотрим s-представление этих функций:

$$\begin{aligned} \Phi^s(\lambda_k, y) &= \Phi R^s(\lambda_k, y) + i\Phi I^s(\lambda_k, y), & \Psi^s(\lambda_k, y) &= \Psi R^s(\lambda_k, y) + i\Psi I^s(\lambda_k, y), \\ F^s(\lambda_k, y) &= 2\Phi^s(\lambda_k, y) - \Psi^s(\lambda_k, y) = FR^s(\lambda_k, y) + iFI^s(\lambda_k, y). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi R^s(\lambda_k, y) &= -t_{xy}^s(\lambda_k, y), & \Phi I^s(\lambda_k, y) &= \frac{1}{2}[s_y^s(\lambda_k, y) - s_x^s(\lambda_k, y)], \\ \Psi R^s(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \frac{d\xi^s(\lambda_k, y)}{dy} - \frac{3 + \nu}{2} t_{xy}^s(\lambda_k, y), & \Psi I^s(\lambda_k, y) &= s_y^s(\lambda_k, y), \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$FR^s(\lambda_k, y) = -\left[ (1 + \nu) \frac{d\xi^s(\lambda_k, y)}{dy} + \frac{1 - \nu}{2} t_{xy}^s(\lambda_k, y) \right], \quad FI^s(\lambda_k, y) = -s_x^s(\lambda_k, y)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \Phi R^s(\lambda_k, y) &= -(1 + \nu) \lambda_k^2 (h \cos \lambda_k h \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y), \\ \Phi I^s(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \lambda_k^2 [h \cos \lambda_k h \cos \lambda_k y + y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y], \\ \Psi R^s(\lambda_k, y) &= -(1 + \nu) \lambda_k [(\sin \lambda_k h + \lambda_k h \cos \lambda_k h) \sin \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y], \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \Psi I^s(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \lambda_k [(\sin \lambda_k h + \lambda_k h \cos \lambda_k h) \cos \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y], \\ FR^s(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \lambda_k [(\sin \lambda_k h - \lambda_k h \cos \lambda_k h) \sin \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y], \\ FI^s(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \lambda_k [(\lambda_k h \cos \lambda_k h - \sin \lambda_k h) \cos \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y]. \end{aligned}$$

Еще одно представление выглядит так:

$$\begin{aligned} \Phi^s(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \lambda_k^2 (i \cos \lambda_k h + y \sin \lambda_k h) e^{i\lambda_k y}, \\ \Psi^s(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \lambda_k [i (\sin \lambda_k h + \lambda_k h \cos \lambda_k h) + \lambda_k y \sin \lambda_k h] e^{i\lambda_k y}, \\ F^s(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \lambda_k [i (\lambda_k h \cos \lambda_k h - \sin \lambda_k h) + \lambda_k y \sin \lambda_k h] e^{i\lambda_k y}. \end{aligned}$$

Справедливы такие равенства [6]:

$$\frac{d\Psi^s(\lambda_k, y)}{dy} = i\lambda_k \Phi^s(\lambda_k, y), \quad \frac{d\Phi^s(\lambda_k, y)}{dy} = i\lambda_k F^s(\lambda_k, y). \quad (6.4)$$

<sup>1</sup>Функции (6.1) были введены в статье [29] при решении симметричной краевой задачи о стыке правой и левой полуполос с различными граничными условиями на продольных сторонах справа и слева.



Биортогональные функции будем искать как решения уравнений:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^s(\lambda, y) \Phi_k^s(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^s(\lambda, y) \Psi_k^s(y) dy = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} F^s(\lambda, y) F_k^s(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda(\lambda - \lambda_k)}, \quad \lambda_k \in \Lambda. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Примем

$$\begin{aligned} \Phi_k^s(y) &= \Phi R_k^s(y) - i \Phi I_k^s(y), \quad \Psi_k^s(y) = \Psi R_k^s(y) - i \Psi I_k^s(y), \\ F_k^s(y) &= F R_k^s(y) - i F I_k^s(y). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Тогда вместо уравнений (6.5) получим следующие:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi R^s(\lambda, y) \Phi R_k^s(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi I^s(\lambda, y) \Phi I_k^s(y) dy = \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi R^s(\lambda, y) \Psi R_k^s(y) dy &= \frac{\lambda \lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi I^s(\lambda, y) \Psi I_k^s(y) dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} F R^s(\lambda, y) F R_k^s(y) dy &= \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F I^s(\lambda, y) F I_k^s(y) dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Приведем формулы для финитных частей, входящих в (6.7) биортогональных функций:

$$\begin{aligned} \varphi R_k^s(y) = -t_k^s(y) &= \frac{\sin \lambda_k y}{2(1 + \nu) h \sin \lambda_k h}, \quad \varphi I_k^s(y) = -\frac{\cos \lambda_k y}{2(1 + \nu) h \sin \lambda_k h}, \\ \psi R_k^s(y) &= \frac{\lambda_k \sin \lambda_k y}{2(1 + \nu) h \sin \lambda_k h}, \\ \psi I_k^s(y) = y_k^s(y) &= -\frac{1}{2(1 + \nu) h} \left( \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k h} - (\delta(y - h) + \delta(y + h)) \right), \\ f R_k^s(y) &= \frac{1}{2(1 + \nu) \lambda_k h \sin \lambda_k h}, \quad f I_k^s(y) = -x_k^s(y) = -\frac{\cos \lambda_k y}{2(1 + \nu) \lambda_k h \sin \lambda_k h}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Функции  $\Phi R^s(\lambda_k, y) = -t_{xy}^s(\lambda_k, y)$ ,  $\Psi I^s(\lambda_k, y) = s_y^s(\lambda_k, y)$ ,  $F I^s(\lambda_k, y) = -s_x^s(\lambda_k, y)$ .  
Дадим примеры разложений Лагранжа трех других функций:

$$\begin{aligned} \Phi I(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \Phi I_k^s \frac{\Phi I^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} + \overline{\Phi I_k^s} \frac{\Phi I^s(\overline{\lambda_k}, y)}{\lambda_k M_k^s}, \\ \Psi R(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \Psi R_k^s \frac{\Psi R^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^s} + \overline{\Psi R_k^s} \frac{\Psi R^s(\overline{\lambda_k}, y)}{\lambda_k^2 M_k^s}, \\ F R(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} F R_k^s \frac{F R^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} + \overline{F R_k^s} \frac{F R^s(\overline{\lambda_k}, y)}{M_k^s}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где

$$\Phi I_k^s = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi I(y) \Phi I_k^s(y) dy, \quad \Psi R_k^s = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi R(y) \Psi R_k^s(y) dy, \quad FR_k^s = \int_{-\infty}^{+\infty} FR(y) FR_k^s(y) dy. \quad (6.10)$$

Разложения порождающих функций в ряды по степеням параметра  $\lambda$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi I^s(\lambda, y) &= (1 + \nu)h\lambda^2 - \dots, \quad \Psi R^s(\lambda, y) = -(1 + \nu)hy\lambda^3 + \dots, \\ FR^s(\lambda_k, y) &= (1 + \nu)hy\lambda^3 - \dots \end{aligned} \quad (6.11)$$

6.1. *Разложения порождающих функций:*

а) рассмотрим разложение в ряд Лагранжа порождающей функции  $\Phi I^s(\lambda, y)$ . Учитывая (6.7), сразу получим

$$\Phi I^s(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\Phi I^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}. \quad (6.12)$$

Ряд (6.12) равномерно сходится к своей функции на всем отрезке  $[-h, h]$  (проверяется по теореме о вычетах). Из второй формулы (6.7) при  $\lambda \rightarrow 0$  вытекает равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi I_k^s(y) dy = -\frac{2}{(1 + \nu)h\lambda_k}. \quad (6.13)$$

Тогда

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ -\frac{2}{(1 + \nu)h\lambda_k} \frac{\Phi I^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}.$$

Отсюда

$$-\frac{(1 + \nu)h}{2} L(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda_k} \frac{\Phi I^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}.$$

Добавляя этот ряд к ряду (6.12) и вычитая его свернутое выражение, получим

$$\Phi I^s(\lambda, y) = \frac{(1 + \nu)h}{2} L(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2) \lambda_k} \frac{\Phi I^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\};$$

б) разложение порождающей функции

$$\Psi R^s(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi R_k^s \frac{\Psi R^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^s} + \overline{\Psi R_k^s} \frac{\Psi R^s(\overline{\lambda}_k, y)}{\overline{\lambda}_k^2 M_k^s}. \quad (6.14)$$

Очевидно

$$\Psi R_k^s = \frac{\lambda \lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}. \quad (6.15)$$

Ряд (6.14) с коэффициентами (6.15) равномерно сходится на всем отрезке  $[-h, h]$ . Учитывая (6.7) и соответствующее разложение (6.11), найдем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \Psi R_k^s(y) dy = \frac{2}{(1 + \nu)h\lambda_k^2}. \quad (6.16)$$

Следовательно,

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2}{(1+\nu)h\lambda_k} \frac{\Psi R^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^s} \right\} \quad (|y| \leq h);$$

в) рассмотрим разложение порождающей функции

$$FR^s(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} FR_k^s \frac{FR^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} + \overline{FR_k^s} \frac{FR^s(\overline{\lambda_k}, y)}{\overline{M_k^s}}. \quad (6.17)$$

Если в соответствующем равенстве (6.7) обе части разделить на  $\lambda$  и перейти к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$ , то слева получим нуль, а справа – конечную величину  $-2/\lambda_k$ . Поэтому ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ -\frac{2}{\lambda_k} \frac{FR^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} \right\}$$

можно рассматривать как представление нуля. Пользуясь этим наблюдением, можно улучшить сходимость ряда (6.17), в котором

$$FR_k^s = \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_k^2)}. \quad (6.18)$$

Добавим к коэффициенту (6.18) величину  $C/\lambda_k$ , где константа  $C$  такова, что в результате скорость убывания по  $\lambda_k$  при  $\lambda_k \rightarrow \infty$  выражения

$$\frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_k^2)} + \frac{C}{\lambda_k}$$

возрастает. Очевидно, что

$$C = \frac{L(\lambda)}{\lambda}.$$

Тогда

$$\frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_k^2)} + \frac{L(\lambda)}{\lambda \lambda_k} = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda_k(\lambda^2 - \lambda_k^2)}. \quad (6.19)$$

Ряд (6.17) с коэффициентами Лагранжа (6.19) равномерно сходится к  $FR^s(\lambda, y)$  на всем отрезке  $[-h, h]$  при всех вещественных значениях параметра  $\lambda$ .

Ряды Лагранжа

$$\begin{aligned} \Psi R^s(\lambda, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\Psi R^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^s} \right\}, \\ FR^s(\lambda, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda_k(\lambda^2 - \lambda_k^2)} \frac{FR^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} \right\} \end{aligned} \quad (6.20)$$

равномерно сходятся на всем отрезке  $[-h, h]$  при всех вещественных значениях  $\lambda$ .

6.2. *Разложения на основе финитных биортогональных функций.* В этом случае

$$\varphi I_k^s = \int_{-h}^h \Phi I(y) \varphi I_k^s(y) dy, \quad \psi R_k^s = \int_{-h}^h \Psi R(y) \psi R_k^s(y) dy, \quad f R_k^s = \int_{-h}^h FR(y) f R_k^s(y) dy. \quad (6.21)$$

Приведем примеры разложений с коэффициентами Лагранжа (6.21):

$$\begin{aligned}
y^2 - \frac{h^2}{3} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ -\frac{2(\lambda_k^2 h^2 - 3) \sin \lambda_k h + 3\lambda_k h \cos \lambda_k h}{3(1+\nu)\lambda_k^3 h \sin \lambda_k h} \frac{\Phi I^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}, \\
y &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\sin \lambda_k h - \lambda_k h \cos \lambda_k h}{(1+\nu)\lambda_k h \sin \lambda_k h} \frac{\Psi R^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^s} \right\}, \\
\sin \pi y &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\pi \cos \pi h}{(1+\nu)\lambda_k h (\lambda_k^2 - \pi^2)} \frac{F R^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} \right\}.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Ряды (6.22) равномерно сходятся к раскладываемым функциям на всем отрезке  $[-h, h]$ .

**7. Разложения Лагранжа по функциям  $\Phi^c(\lambda_k, y)$ ,  $\Psi^c(\lambda_k, y)$  и  $F^c(\lambda_k, y)$  (с-представление).** Рассмотрим функции

$$\begin{aligned}
\Phi^c(\lambda_k, y) &= \Phi R^c(\lambda_k, y) + i\Phi I^c(\lambda_k, y), \quad \Psi^c(\lambda_k, y) = \Psi R^c(\lambda_k, y) + i\Psi I^c(\lambda_k, y), \\
F^c(\lambda_k, y) &= 2\Phi^c(\lambda_k, y) - \Psi^c(\lambda_k, y) = F R^c(\lambda_k, y) + iF I^c(\lambda_k, y),
\end{aligned} \tag{7.1}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi R^c(\lambda_k, y) &= -t_{xy}^c(\lambda_k, y), \quad \Phi I^c(\lambda_k, y) = \frac{1}{2}[s_y^c(\lambda_k, y) - s_x^c(\lambda_k, y)], \\
\Psi R^c(\lambda_k, y) &= (1+\nu) \frac{d\xi^c(\lambda_k, y)}{dy} - \frac{3+\nu}{2} t_{xy}^c(\lambda_k, y), \quad \Psi I^c(\lambda_k, y) = s_y^c(\lambda_k, y), \\
F R^c(\lambda_k, y) &= - \left[ (1+\nu) \frac{d\xi^c(\lambda_k, y)}{dy} + \frac{1-\nu}{2} t_{xy}^c(\lambda_k, y) \right], \quad F I^c(\lambda_k, y) = -s_x^c(\lambda_k, y)
\end{aligned} \tag{7.2}$$

или

$$\begin{aligned}
\Phi I^c(\lambda_k, y) &= -(1+\nu)\lambda_k [(\lambda_k h \sin \lambda_k h + \cos \lambda_k h) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \cos \lambda_k h \sin \lambda_k y], \\
\Psi R^c(\lambda_k, y) &= (1+\nu)\lambda_k^2 [h \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y + y \cos \lambda_k h \cos \lambda_k y], \\
F R^c(\lambda_k, y) &= (1+\nu)\lambda_k [(\lambda_k h \sin \lambda_k h + 2 \cos \lambda_k h) \sin \lambda_k y + \lambda_k y \cos \lambda_k h \cos \lambda_k y].
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Между функциями (7.1) имеется связь, аналогичная (6.4).

Уравнения для определения биортогональных систем функций:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^c(\lambda, y) \Phi_k^c(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda(\lambda - \lambda_k)}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^c(\lambda, y) \Psi_k^c(y) dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} F^c(\lambda, y) F_k^c(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2(\lambda - \lambda_k)}, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi I^c(\lambda, y) \Phi_k^c(y) dy &= \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi R^c(\lambda, y) \Psi R_k^c(y) dy = \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} F R^c(\lambda, y) F R_k^c(y) dy &= \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, \quad \lambda_k \in \Lambda.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Финитные части биортогональных функций, входящих в равенства (7.4), равны:

$$\begin{aligned}\varphi I_k^c(y) &= \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_k h} \left( 1 - \frac{\cos \lambda_k y}{\cos \lambda_k h} \right), & \psi R_k^c(y) &= \frac{\sin \lambda_k y}{2(1+\nu)h \cos \lambda_k h}, \\ fR_k^c(y) &= \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_k^2 h} \frac{\sin \lambda_k y}{\cos \lambda_k h}.\end{aligned}\quad (7.5)$$

Разложения порождающих функций в ряды по степеням параметра  $\lambda$  таковы:

$$\begin{aligned}\Phi I^c(\lambda, y) &= -(1+\nu)\lambda + \dots; & \Psi R^c(\lambda, y) &= (1+\nu)y\lambda^2 - \dots; \\ FR^c(\lambda_k, y) &= 3(1+\nu)y\lambda^2 - \dots\end{aligned}\quad (7.6)$$

Приведем примеры разложений Лагранжа:

$$\begin{aligned}\Phi I(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \Phi I_k^c \frac{\Phi I^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} + \overline{\Phi I_k^c} \frac{\Phi I^c(\overline{\lambda_k}, y)}{\lambda_k M_k^c}, \\ \Psi R(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \Psi R_k^c \frac{\Psi R^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c} + \overline{\Psi R_k^c} \frac{\Psi R^c(\overline{\lambda_k}, y)}{\lambda_k^2 M_k^c}, \\ FR(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} FR_k^c \frac{FR^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} + \overline{FR_k^c} \frac{FR^c(\overline{\lambda_k}, y)}{M_k^c},\end{aligned}\quad (7.7)$$

в которых коэффициенты находятся по формулам:

$$\Phi I_k^c = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi I(y) \Phi I_k^c(y) dy, \quad \Psi R_k^c = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi R(y) \Psi R_k^c(y) dy, \quad FR_k^c = \int_{-\infty}^{+\infty} FR(y) FR_k^c(y) dy.\quad (7.8)$$

7.1. Разложения порождающих функций:

а) разложение порождающей функции

$$\Phi I^c(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi I_k^c \frac{\Phi I^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} + \overline{\Phi I_k^c} \frac{\Phi I^c(\overline{\lambda_k}, y)}{\lambda_k M_k^c}.\quad (7.9)$$

При  $\lambda \rightarrow 0$  из (7.4) следует равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi I_k^c(y) dy = \frac{2}{(1+\nu)\lambda_k}.\quad (7.10)$$

На основании равенств (7.4) и (7.10) получим такие два разложения:

$$\Phi I^c(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\Phi I^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} \right\}, \quad 1 = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2}{(1+\nu)\lambda_k} \frac{\Phi I^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} \right\}.\quad (7.11)$$

Умножая второй ряд (7.11) на  $(1+\nu)L(\lambda)/2\lambda$  и комбинируя его с первым, получим ряд, равномерно сходящийся на всем отрезке  $[-h, h]$ :

$$\Phi I^c(\lambda, y) = -\frac{(1+\nu)L(\lambda)}{2\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\Phi I^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} \right\};$$

б) разложение порождающей функции

$$\Psi R^c(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi R_k^c \frac{\Psi R^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c} + \overline{\Psi R_k^c} \frac{\Psi R^c(\overline{\lambda}_k, y)}{\overline{\lambda}_k^2 M_k^c}. \quad (7.12)$$

Из (7.4) и (7.6) можно получить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \Psi R_k^c(y) dy = -\frac{2}{(1+\nu)\lambda_k}. \quad (7.13)$$

Следовательно,

$$\Psi R^c(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\Psi R^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c} \right\}, y = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ -\frac{2}{(1+\nu)\lambda_k} \frac{\Psi R^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c} \right\}. \quad (7.14)$$

Сходимость первого ряда (7.14) можно улучшить, воспользовавшись вторым рядом так, как это было проделано выше;

в) разложение Лагранжа порождающей функции

$$FR^c(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} FR_k^c \frac{FR^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} + \overline{FR_k^c} \frac{FR^c(\overline{\lambda}_k, y)}{\overline{M}_k^c}. \quad (7.15)$$

С помощью теоремы о вычетах можно проверить, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 \lambda_k} \frac{FR^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} \right\}$$

сходится к нулю. Пользуясь им, улучшим сходимость ряда

$$FR^c(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 (\lambda^2 - \lambda_k^2)} \frac{FR^c(\lambda_k, y)}{M_k^s} \right\}.$$

В результате получим ряд, равномерно сходящийся внутри отрезка  $[-h, h]$ :

$$FR^c(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda_k (\lambda^2 - \lambda_k^2)} \frac{FR^c(\lambda_k, y)}{M_k^s} \right\}.$$

*7.2. Разложения на основе финитных биортогональных функций.* Приведем примеры разложений в ряды Лагранжа по функциям  $\Phi I^c(\lambda_k, y)$ ,  $\Psi R^c(\lambda_k, y)$  и  $FR^c(\lambda_k, y)$ , когда раскладываемые функции продолжаются периодически вне отрезка  $[-h, h]$ , а коэффициенты разложений при этом определяются по формулам:

$$\varphi I_k^c = \int_{-h}^h \Phi I(y) \varphi I_k^c(y) dy, \quad \psi R_k^c = \int_{-h}^h \Psi R(y) \psi R_k^c(y) dy, \quad f R_k^c = \int_{-h}^h FR(y) f R_k^c(y) dy. \quad (7.16)$$

Имеем:

$$y^2 - \frac{h^2}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ -\frac{2}{3} \frac{3\lambda_k h \cos \lambda_k h + (\lambda_k^2 h^2 - 3) \sin \lambda_k h}{(1+\nu)\lambda_k^4 h \cos \lambda_k h} \frac{\Phi I^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} \right\},$$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\sin \lambda_k h - \lambda_k h \cos \lambda_k h}{(1 + \nu) \lambda_k^2 h \cos \lambda_k h} \frac{\Psi R^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c} \right\}, \quad (7.17)$$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\sin \lambda_k h - \lambda_k h \cos \lambda_k h}{(1 + \nu) \lambda_k^4 h \cos \lambda_k h} \frac{FR^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} \right\}.$$

**8. Связь s- и c-представлений.** Рассмотрим элементы рядов Лагранжа по s- и c-представлениям, сравнивая

$u_k^c \frac{\xi^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c}$  с  $u_k^s \frac{\xi^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s}$ ,  $v_k^c \frac{\chi^c(\lambda_k, y)}{M_k^c}$  с  $v_k^s \frac{\chi^s(\lambda_k, y)}{M_k^s}$  и т. д. Порождающие функции s- и c-представлений связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi^s(\lambda, y) ctg \lambda h - \xi^c(\lambda, y) &= -\frac{(1 + \nu) h L(\lambda) \cos \lambda y}{2 \lambda \sin \lambda h}, \\ \chi^s(\lambda, y) ctg \lambda h - \chi^c(\lambda, y) &= \frac{(1 + \nu) h L(\lambda) \sin \lambda y}{2 \lambda \sin \lambda h} \end{aligned} \quad (7.18)$$

и т. д. Полагая здесь  $\lambda = \lambda_k$ , получим:

$$\xi^s(\lambda_k, y) ctg \lambda_k h = \xi^c(\lambda_k, y), \quad \chi^s(\lambda_k, y) ctg \lambda_k h = \chi^c(\lambda_k, y), \quad \sigma_x^s(\lambda_k, y) ctg \lambda_k h = \sigma_x^c(\lambda_k, y) \quad (7.19)$$

и т. д.

Финитные биортогональные функции также связаны, в частности,

$$\begin{aligned} v_k^c(y) &= v_k^s(y) \frac{1}{\lambda_k ctg \lambda_k h}, \quad t_k^c(y) = t_k^s(y) \frac{1}{\lambda_k ctg \lambda_k h}, \\ \psi R_k^c(y) &= \psi R_k^s(y) \frac{1}{\lambda_k ctg \lambda_k h}, \quad f R_k^c(y) = f R_k^s(y) \frac{1}{\lambda_k ctg \lambda_k h}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Следовательно,

$$v_k^c \frac{\chi^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} = \int_{-h}^h V(y) v_k^c(y) dy \frac{\chi^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} = \int_{-h}^h V(y) v_k^s(y) dy \frac{\chi^s(\lambda_k, y) ctg \lambda_k h}{M_k^s ctg \lambda_k h} = v_k^s \frac{\chi^s(\lambda_k, y)}{M_k^s}. \quad (7.21)$$

А также

$$\begin{aligned} t_k^c \frac{t_{xy}^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} &= t_k^s \frac{t_{xy}^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s}, \\ \psi R_k^c \frac{\Psi R^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c} &= \psi R_k^s \frac{\Psi R^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^s}, \quad f R_k^c \frac{FR^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} = f R_k^s \frac{FR^s(\lambda_k, y)}{M_k^s}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Для функций

$$x_k^s(y) = \frac{\cos \lambda_k y}{2(1 + \nu) \lambda_k h \sin \lambda_k h} \text{ и } x_k^c(y) = \frac{1}{2(1 + \nu) \lambda_k^2 h} \left[ \frac{\cos \lambda_k y}{\cos \lambda_k h} - 1 \right] \quad (7.23)$$

связь типа (7.20) неочевидна, поскольку этому “мешает” единица в формуле для  $x_k^c(y)$ . Но класс допустимых раскладываемых функций в ряды по функциям Фадля–Папковича  $s_x^c(\lambda_k, y)$  ограничен самоуравновешенными функциями, ортогональными к единице. Поэтому для таких раскладываемых функций можно считать, что

$$x_k^c(y) = \frac{\cos \lambda_k y}{2(1 + \nu) \lambda_k^2 h \cos \lambda_k h}. \quad (7.24)$$

Тогда и в этом случае

$$x_k^c(y) = x_k^s(y) \frac{1}{\lambda_k ctg \lambda_k h} \text{ и } x_k^c \frac{s_x^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} = x_k^s \frac{s_x^s(\lambda_k, y)}{M_k^s}. \quad (7.25)$$

Сравним финитные части биортогональных функций  $s$ - и  $c$ -представлений:

$$u_k^s(y) = \frac{1}{(1+\nu)h} \left[ \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k h} - (\delta(y-h) + \delta(y+h)) \right]$$

$$u_k^c(y) = \frac{\cos \lambda_k y}{(1+\nu)h \cos \lambda_k h}. \quad (7.26)$$

Для их связи типа (7.20) “мешают” дельта-функции в формуле (7.26) для  $u_k^s(y)$ . Поэтому будем рассматривать только такие раскладываемые функции  $U(y)$ , которые равны нулю при  $y = \pm h$ .

Пусть раскладываемая функция  $U(y)$  в общем не является самоуравновешенной. Перейдем к самоуравновешенной функции

$$u(y) = U(y) - D, \quad (7.27)$$

где

$$D = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h U(y) dy. \quad (7.28)$$

Тогда, учитывая, что  $U(\pm h) = 0$ , получим

$$u_0^s = \int_{-h}^h (U(y) - D) \frac{\nu}{2(1+\nu)} [\delta(y-h) + \delta(y+h)] dy = -\frac{\nu D}{1+\nu}. \quad (7.29)$$

Так как финитные функции  $u_k^s(y)$  ортогональны к любой постоянной, то

$$u_k^s = \int_{-h}^h U(y) u_k^s(y) dy.$$

Обозначив

$$\omega_k^s = \int_{-h}^h U(y) \frac{1}{(1+\nu)h} \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k h} dy, \quad (7.30)$$

разложение Лагранжа функции  $U(y)$ , обращаемой в ноль на концах отрезка  $[-h, h]$ , можно представить так:

$$U(y) = \frac{D}{1+\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \omega_k^s \frac{\xi^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}. \quad (7.31)$$

Построим разложение  $U(y)$  по функциям  $\xi^c(\lambda_k, y)$ . Имеем:

$$u_k^c = \int_{-h}^h U(y) u_k^c(y) dy = \int_{-h}^h U(y) \frac{1}{(1+\nu)h \cos \lambda_k h} \cos \lambda_k y dy, \quad (7.32)$$

$$u_0^c = \int_{-h}^h U(y) u_0^c(y) dy = \int_{-h}^h U(y) \frac{1}{2h(1+\nu)} dy = \frac{D}{1+\nu}. \quad (7.33)$$



Следовательно,

$$U(y) = \frac{D}{1 + \nu} + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ u_k^c \frac{\xi^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} \right\}. \quad (7.34)$$

Сравнивая разложение (7.31) с разложением (7.34), нетрудно понять, что одно разложение может быть получено из другого заменой индексов:  $s$  на  $s$  или наоборот. Напомним, что это касается только тех раскладываемых функций  $U(y)$ , которые удовлетворяют условию  $U(\pm h) = 0$ .

Сравнивая финитные биортогональные функции  $y_k^s(y)$  и  $y_k^c(y)$ , можно сделать вывод: в классе раскладываемых функций, обращающихся в нуль на концах отрезка  $[-h, h]$ , разложения Лагранжа по функциям  $s_y^s(\lambda_k, y)$  и  $s_y^c(\lambda_k, y)$  получают одно из другого простой заменой верхних индексов.

Такая же связь имеется между разложениями по функциям  $\Phi I_k^s(\lambda_k, y)$  и  $\Phi I_k^c(\lambda_k, y)$  в том случае, когда раскладываемые функции самоуравновешены.

**Заключение.** В работе подробно исследованы свойства разложений Лагранжа по системам функций Фадля–Папковича, возникающим при решении четносимметричной краевой задачи теории упругости в полуполосе (прямоугольнике) со свободными горизонтальными сторонами. Показано, что имеются два вида функций Фадля–Папковича, названных в работе  $s$ - и  $c$ - представлениями. Между разложениями Лагранжа по этим представлениям имеется связь. Указаны классы раскладываемых функций, для которых эти представления полностью совпадают. Рассмотрены различные примеры, в частности, примеры разложений порождающих функций и разложений с использованием финитных биортогональных функций.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко С. П. Теория упругости. М., Л.: ОНТИ, 1937. Главная редакция технико-теоретической литературы. 453 с.
- [2] Коваленко М. Д. Биортогональные разложения в первой основной задаче теории упругости // Доклады РАН. Прикладная математика и механика. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 956–963.
- [3] Коваленко М. Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям // Доклады Академии наук. 1997. Т. 352, № 4. С. 480–482.
- [4] Коваленко М. Д., Себряков Г. Г., Цыбин Н. Н. О некоторых свойствах системы однородных решений теории упругости // Доклады Академии наук. 2003. Т. 388, № 2. С. 193–196.
- [5] Коваленко М. Д., Себряков Г. Г., Цыбин Н. Н., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в задаче для полосы с разрезом // Доклады Академии наук. 2008. Т. 419, № 6. С. 763–766.
- [6] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 5. С. 78–98.
- [7] Коваленко М. Д., Клейн Н. В. Однородные решения теории упругости. Биортогональные разложения // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. Т. 11, № 2. С. 209–225.
- [8] Коваленко М. Д., Попов С. Н., Цыбин Н. Н., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в смешанных краевых задачах теории упругости // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т. 13, № 4. С. 493–518.

- [9] Коваленко М. Д., Себряков Г. Г., Шуляковская Т. Д. Особенности разложений по функциям Фадля–Папковича в полуполосе // Доклады Академии наук. 2012. Т. 445, № 5. С. 525–528.
- [10] Коваленко М. Д., Меньшова И. В. Разложения Лагранжа по функциям Фадля–Папковича в обратно-симметричной задаче теории упругости для прямоугольной полуполосы // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 81–89.
- [11] Лапикова Е. С., Юринкина М. Н., Кержаев А. П., Никитин А. В. Полуполоса с продольными ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие. Разложения Лагранжа // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 4 (18). С. 86–103.
- [12] Лапикова Е. С., Юринкина М. Н., Кержаев А. П., Никитин А. В. Разложения Лагранжа в периодической задаче для полуполосы с продольными ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 4 (18). С. 68–85.
- [13] Лапикова Е. С., Юринкина М. Н. Полуполоса с продольными ребрами жесткости, работающими на изгиб. Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2014. № 1 (19). С. 95–107 .
- [14] Лапикова Е. С., Юринкина М. Н. Периодическая задача для полуполосы с продольными ребрами жесткости, работающими на изгиб. Разложения Лагранжа // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2014. № 1 (19). С. 108–120.
- [15] Меньшова И. В., Семенова И. А. Биортогональные системы функций и разложения Лагранжа по функциям Фадля–Папковича в задаче изгиба полуполосы с продольными ребрами жесткости // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015. Т. 21, № 24. С. 579–598.
- [16] Меньшова И. В. О периодических решениях Файлона-Рибьера в двумерной задаче теории упругости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1(23). С. 105–131.
- [17] Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // УМН. 1981. Т. 36. Вып. 1. С. 73–126.
- [18] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. 536 с.
- [19] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
- [20] Pflüger A. Über eine Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reihen // Commentarii Mathem. Helv. 1935/36. V. 8. p. 89–129.
- [21] Коваленко М. Д. О преобразовании Бореля в классе  $W$  квазицелых функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2001. № 3. С. 761–774.
- [22] Прокопов В. К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям // Труды ЛПИ. 1967. № 279. С. 31–46.

- [23] Прокопов В. К. Однородные решения теории упругости и их приложения к теории тонких пластинок // Труды 2-го Всесоюзного съезда по теоретич. и прикл. механ. М.: Наука. 1966. С. 253–259.
- [24] Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // Доклады АН СССР. 1940. Т. 27, № 4. С. 335–339.
- [25] Flugge W., Kelkar V.S. The problem of an elastic circular cylinder // J. Solids Structures. 1968. V. 4, № 4. P. 397–420.
- [26] Little R. W., Childs. S. B. Elastostatic boundary region problem in solid cylinders // Quart. Appl. Math/ 1967. V. 25, № 3. P. 71–84.
- [27] Little R. W. Semi-infinite strip problem with built in edges // Trans. ASME. ser. E. 1969. V. 91. № 2. P. 320–323
- [28] Meleshko V. V. Selected Topics in the History of Two-Dimensional Biharmonic Problem // ASME report No AMR 341 / Appl. Mech. Rev. 2003. № 1. P. 33-85.
- [29] Коваленко М. Д., Шибилин С. В. Полуполоса под действием сосредоточенной силы. Точное решение. Доклады Академии наук. 1997. Т. 356, № 6. С. 763–765.
- [30] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М.: Стройиздат, 1975. 224 с.
- [31] Ибрагимов И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971. 518 с.
- [32] Коваленко М. Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича. Примеры решений в полуполосе // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 136–158
- [33] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. I. М.: ФМЛ, 1962. 608 с.
- [34] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: ГИФМЛ, 1958, 678 с.

I. V. Menshova

**BIORTHOGONAL FUNCTIONS AND EXPANSIONS OF THE LAGRANGE  
FUNCTION OF THE FADLE-PAPKOVICH IN THE FIRST MAIN TASK OF  
THE THEORY OF ELASTICITY***Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of  
Sciences, Moscow, Russia*

**Abstract.** We consider the Lagrange expansions on the Fadle-Papkovich functions. The functions arise from solution of the first fundamental boundary value problem of elasticity theory in a half-strip  $\{\Pi^+ : x \geq 0, |y| \leq h\}$ . Independently of a homogeneous boundary conditions type on the long sides of a half-strip, there are always two representations for Fadle-Papkovich functions. Both of representations are considered in this article. Their equivalence for given, physically natural classes of expended functions are shown. Functions that are The biorthogonal system functions are constructed, and then the Lagrange expansions on the Fadle-Papkovich functions are given. The Lagrange expansions are called the expansions of only one function for any one system of Fadle-Papkovich functions, unlike expansions that arise in solving of the boundary value problem. The Lagrange expansions are the analogues of expansions into series on trigonometric systems of functions, and their role in solving of boundary value problems is the same as the role of trigonometric series in Filon-Ribiere [1] expansions. The Lagrange expansions was considered earlier, e.g., in [2-15], as much as it is required to solve a boundary value problem. The aim of this article is detailed study of the Lagrange expansions.

The Fadle-Papkovich functions exactly satisfy to zero boundary conditions on the longitudinal sides of the half-strip, but they are more complicated: a complex-valued, not orthogonal and do not form classical basis in the segment (end face of the half-strip), where expanding functions are given. But it is possible to construct (defined on the Riemannian surface of logarithm) the biorthogonal systems of functions, and then get explicit expressions (in the form of a simple Fourier integrals of the boundary functions) for the required expansion coefficients in the same scheme as in the classical solutions of Filon-Ribiere [16]. The essence of the approach is a new concept of functions basis on an interval, which is a generalization of the classical understanding of the basis on the segment. In terms of work [17, 18], a classical basis can be interpreted as a basis in the complex plane. While the Fadle-Papkovich functions form the basis on the Riemannian surface of logarithm. Moreover, in the particular case when the Fadle-Papkovich functions degenerate into trigonometric systems of functions, the basis on the Riemannian surface becomes to classical basis on a segment. The basis of the corresponding theory is the Borel transform in the class of quasi-entire functions of exponential type (classical basis is based on the theory of entire functions of exponential type and Paley-Wiener theorem [19]). The class of quasi-entire functions of exponential type and the Borel transform in this class were first introduce in 1935 [20]. In article [21] the properties of this transform were studied, as much as this is necessary for solving boundary value problems of elasticity theory in a half-strip.

**Keywords:** theory of elasticity, half-strip, Fadle-Papkovich functions, biorthogonal systems of functions, Lagrange expansions, analytical solutions.

---

*Menshova Irina Vladimirovna*

e-mail: menshovairina@yandex.ru, Candidate of Phys. & Math., Senior Researcher, Laboratory of Geodynamics, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

## REFERENCES

- [1] Timoshenko S.P. Theory of elasticity. Moscow, Leningrad: ONTI. Main edition of technical and theoretical literature, 1937. 453 p. (in Russian).
- [2] Kovalenko M.D. Biorthogonal expansions in the first fundamental problem of elasticity theory // J. Appl. Math. Mechs. 1991. Vol. 55, No. 6. P. 836-843 (in Russian).
- [3] Kovalenko M.D. The Lagrange expansions and nontrivial representations in terms of homogeneous solutions // Physics – Doklady. 1997. Vol. 42, No. 2. P. 212-216.
- [4] Kovalenko M.D., Sebryakov G.G., Tsybin N.N. Expansions in terms of the Fadde-Papkovich functions in the problem for a strip with a cat // Physics-Doklady. 2008. Vol. 53, No. 4. P. 237-240.
- [5] Kovalenko M.D., Sebryakov G.G., Tsybin N.N., Shulyakovskaya T.D. Expansions in terms of the Fadde-Papkovich functions in the problem for a strip with a cat // Physics-Doklady. 2008. Vol. 53, No. 4. P. 237-240.
- [6] Kovalenko M.D., Shulyakovskaya T.D. Expansion in Fadde-Papkovich functions in a strip. Theory Foundations // Mechanics of Solids. 2011. Vol. 46, No. 5. P. 721-738.
- [7] Kovalenko M.D., Klein N.V. Homogeneous solutions of the theory of elasticity. Biorthogonal decomposition // Mechanics of composite materials and structures. 2005. T. 11, No. 2. P. 209-225 (in Russian).
- [8] Kovalenko M. D., Popov S.N., Tsybin N.N., Shulyakovskaya T.D. Expansion by function, Fadde-Papkovich in mixed boundary value problems of elasticity theory // Mechanics of composite materials and structures. 2007. Vol. 13, No. 4. P. 493-518 (in Russian).
- [9] Kovalenko M.D., Sebryakov G.G., Shulyakovskaya T.D. Features of expansions in Fadde-Papkovich functions in a semistrip // Physics - Doklady. 2012. Vol. 57, No. 8. P. 327-330.
- [10] Kovalenko M.D., Menshova I.V. Expansion of the Lagrange function of the Fadde-Papkovich an inverse-symmetric problem of the elasticity theory for a rectangular semistrip // Bulletin of the Chelyabinsk state pedagogical University named. I. Y. Yakovlev. Mechanics limit state. 2013. №1 (15). P. 81-89 (in Russian).
- [11] Lapikova E. S., Yurinkina M. N., Kergaev A. P., Nikitin A.V. The Strip with longitudinal ribs, working in tension-compression. Expansion of Lagrange function // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University. I. Y. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2013. № 4 (18). P. 86-103 (in Russian).
- [12] Lapikova E.S., Yurinkina M.N., Kergaev A.P., Nikitin A.V. Expansion of the Lagrange function in the periodic task to semi-strip with longitudinal ribs, working in tension-compression // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Y. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2013. № 4 (18). P. 68-85 (in Russian).
- [13] Lapikova E.S., Yurinkina M.N. The strip with longitudinal ribs, working on the curve. Expansion of the Lagrange function of the Fadde – Papkovich // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Y. Yakovlev. Ser.: Mechanics limit state. 2014. № 1 (19). P. 95 – 107 (in Russian).
- [14] Lapikova E.S., Yurinkina M. N. The periodic problem for semi-strip with longitudinal ribs, working on the curve. Expansion of Lagrange // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Y. Yakovlev. Ser.: Mechanics limit state. 2014. № 1 (19). P. 108-120 (in Russian).
- [15] Menshova I.V., Semenova I. A. Biorthogonal systems of functions and expansion of the Lagrange function of the Fadde-Papkovich in the problem of bending of semi-strip with

- longitudinal ribs // Mechanics of composite materials and structures. 2015. Vol. 21, No. 24. P. 579-598 (in Russian).
- [16] Menshova I.V. On periodic solutions Filon-Ribera in the two-dimensional problem of the elasticity theory // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University. I. Y. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2015. № 1(23). P. 105-131 (in Russian).
- [17] Korobeinik Yu. F. Representing systems // Russian Math. Surveys. 1981. T.36, №1. P. 75–137 (in Russian).
- [18] Leont'ev A.F. Exponential Series. Moscow: Nauka, 1976. 536 p. (in Russian).
- [19] Levin B. Ya. Expansion of roots of entire functions. — M.: GITTL, 1956. 632 p. (in Russian).
- [20] Pflüger A. Über eine Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reihen // Commentarii Mathem. Helv. 1935/36. V. 8. P. 89 - 129.
- [21] Kovalenko M.D. On the Borel transformation in the class W of functions quisitely // Fundamental and applied mathematics. 2001. No. 3. P. 761-774 (in Russian).
- [22] Prokopov V.K. An overview of work on the uniform solutions of elasticity theory and their applications // Trudy LPI. 1967. No. 279. P. 31-46 (in Russian).
- [23] Prokopov V.K. Uniform solutions of elasticity theory and their applications to the theory of thin plates // Proceedings of 2nd all-Union Congress on Theor. and applied. the mehana. Moscow: Nauka. 1966. P. 253-259 (in Russian).
- [24] Papkovich P.F. About one form of solution of the plane problem of elasticity for a rectangular strip // Doklady as USSR. 1940. T. 27, No. 4. P. 335-339 (in Russian).
- [25] Flugge W., Kelkar V.S. The problem of an elastic circular cylinder // J. Solids Structures. 1968. V. 4, № 4. P. 397-420.
- [26] Little R.W., Childs. S.B. Elastostatie boundary region problem in solid cylinders // Quart. Appl. Math. 1967. V. 25, № 3. P. 71-84.
- [27] Little R.W. Semi-infinite strip problem with built in edges // Trans. ASME. ser. E. 1969. V. 91. № 2. P. 320-323.
- [28] Meleshko V.V. Selected Topics in the History of Two-Dimensional Biharmonic Problem // ASME report No AMR 341/ Appl. Mech. Rev. 2003. №1. P. 33-85.
- [29] Kovalenko M.D., Shibirin S.V. A half-strip under the action of concentrated force: an exact solution to the problem // Physics-Doklady. 1997. Vol. 42, No.10. P. 289-294.
- [30] Vlasov V. V. Method of initial functions in problems of theory of elasticity and structural mechanics. — M.: Stroiizdat, 1975. 224 p. (in Russian).
- [31] Ibragimov I. I. Methods of interpolation of functions and some their applications. Moscow: Nauka, 1971. 518 p. (in Russian).
- [32] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Shulyakovskaya T. D. Expansions in Fadde-Papkovich functions: Examples of solutions in a half-strip // Mechanics of Solids. 2013. Vol. 48, No. 5. Pp. 584-602.
- [33] Fichtenholz G. M. Differential and integral calculus. - M.: FML, 1962. Vol. I. 608 p. (in Russian).
- [34] Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. Methods of theory of functions of a complex variable. - M.: FML, 1958, 678 p. (in Russian).

В. Д. Кулиев<sup>1</sup>, Е. М. Морозов<sup>2</sup>

## ГРАДИЕНТНЫЙ ДЕФОРМАЦИОННЫЙ КРИТЕРИЙ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЕ

<sup>1</sup>Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ), г. Москва, Россия

**Аннотация.** В работе [1] нами предложен новый критерий разрушения, исходящий из предположения, что хрупкое разрушение наступает, когда модуль градиента деформации достигает предельного значения. В данной работе более подробно показано, что модуль градиента температуры, а следовательно, и деформации становится значительным в тонком пограничном слое, где происходит резкое изменение температур. Дано решение новой термоупругой задачи о резком изменении температуры в круговой области. Причём оказалось, что в случае криволинейной границы охлажденной области  $E_2$ , где  $E_2$  – евклидова плоскость, критерий разрушения усложняется и приобретает вид предельного значения модуля градиента суммы главных деформаций или просто суммы главных напряжений. Разрушение будет определяться тем критерием, время наступления которого меньше. Показано также: в случае нагретой круговой области в  $E_2$  критерием хрупкого разрушения континуальной среды будет предельное значение модуля градиента суммы главных деформаций. Представлены результаты предварительного эксперимента с образцами при резком изменении температуры.

**Ключевые слова:** хрупкое разрушение, градиентный деформационный критерий разрушения, задача Коши, функции Хевисайда, регуляризация начального распределения температуры, логарифмический потенциал круга.

УДК: 539.375

**1. Новый критерий хрупкого разрушения.** Один из видов нарушения прочности твёрдого деформируемого тела – это хрупкое разрушение. Оно происходит внезапно, на фоне макроупругой деформации, опасность его очевидна, и разработка новых и развитие существующих критериев хрупкого разрушения весьма актуальны.

---

© Кулиев В. Д., Морозов Е. М., 2016

Кулиев Валех Джафарович

e-mail: pmdekanat@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва, Россия.

Морозов Евгений Михайлович

e-mail: evgeny.morozof@gmail.com, доктор технических наук, профессор, Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ), г. Москва, Россия.

Поступила 28.01.2016

Среди существующих критериев можно назвать классические первую (наибольших растягивающих напряжений, Г. Галилей) и вторую (наибольших растягивающих деформаций, Е. Мариотт) гипотезы прочности. Несмотря на архаичность в некоторых случаях они находят применение. Существуют критерии, исходящие из предположения, что в местах концентрации напряжений, в самой опасной точке, напряжение превышает предельное на определенный процент [2]. Имеются родственные критерии, в которых введены ограничения на область с высоким градиентом напряжений. Для моделей материалов с разномасштабной иерархической структурой также используют градиенты напряжений в качестве критериев разрушения (ссылки на работы, где можно найти примеры подобных критериев, приведены в [1]). Современная модель хрупкого разрушения, созданная и развиваемая школой Н. Ф. Морозова и Ю. В. Петрова [3], представлена структурно-временным критерием. Для тел с трещинами используют методы линейной механики разрушения [4].

Нами предлагается критерий возникновения хрупкого разрушения в континуальной среде в виде равенства

$$|\text{grad } \varepsilon| = \theta, \quad (1.1)$$

в котором  $\varepsilon$  – компонента растягивающей деформации в направлении нормали к фронту разрушения (трещины), а  $\theta$  – эмпирическая величина предельного градиента деформации как характеристики материала.

Поясним сделанное предложение следующим примером. Пусть в трёхмерном теле выделена конечная область, граница которой – замкнутая кусочно гладкая поверхность. Эта область в момент времени  $t = 0$  оказывается внезапно нагретой (или охлажденной) на постоянную температуру  $T_0$ . Попытка сформулировать начальные условия задачи наталкивается на противоречие, состоящее в том, что с одной стороны от границы температура и деформация равны, допустим, нулю, а по другую сторону температура, а следовательно, и деформация не равны нулю. Налицо нарушение условия неразрывности деформаций. Выход мы видим в предположении существования тонкого приграничного слоя, в пределах которого имеет место перепад и температуры и деформации от нуля до заданного значения. Поэтому возникает необходимость регуляризации (усреднения) начального распределения температуры по С. Л. Соболеву [5] и ставить задачу Коши по регуляризованному начальному распределению температуры. В этом случае задача Коши становится корректной.

**2. Градиент деформации.** Дадим одно решение для иллюстрации предложенного критерия разрушения.

Рассмотрим следующую задачу Коши. Пусть теплопроводящая среда заполняет всю евклидову плоскость  $E_2$ . Далее, пусть

$$T(x, y, t)|_{t=0} = \begin{cases} T_0 \equiv \text{const}, (x, y) \in S^- (S^- : x \leq 0, |y| < \infty); \\ T_1 \equiv \text{const}, (x, y) \in S^+ (S^+ : x \geq 0, |y| < \infty). \end{cases} \quad (2.1)$$

Будем считать: а) термомеханические свойства теплопроводящей среды  $S^-$  и  $S^+$  не зависят от температуры и одинаковы; б) выполняются гипотезы Дюамеля и Неймана.

При этих условиях решение задачи Коши (2.1) для однородного уравнения теплопроводности Фурье определяется так:

$$T(x, t) = \frac{T_0}{2} \left[ 1 + \text{erf} \left( -\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \right] + \frac{T_1}{2} \left[ 1 + \text{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \right], \text{erf}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-\xi^2} d\xi. \quad (2.2)$$



Здесь  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $\operatorname{erf}(-\tau) = -\operatorname{erf}(\tau)$  – функция вероятности ошибок, причем  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ .

Из (2.2) в пределе  $t \rightarrow 0$  приходим к следующему представлению начального распределения температуры для любого  $y \in (-\infty; \infty)$  (ср. с формулой (2.1)):

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(x, y, t) = T_0 H^-(x) + T_1 H^+(x), \quad (2.3)$$

$$H^-(x) = \begin{cases} 1, & x < 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad H^+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$H^-(0-0) = 1, \quad H^-(0+0) = 0, \quad H^+(0+0) = 1, \quad H^+(0-0) = 0.$$

Здесь  $H^\pm(x)$  – симметричные единичные функции (функции Хевисайда). Эти функции аппроксимированы следующими непрерывными функциями:

$$H^\pm(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(\pm \alpha x)] \quad \left( \alpha = \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}, t \rightarrow 0 \right).$$

Функции  $H^\pm(x)$  имеют разрывы 1-го рода в точке  $x=0$ . Поэтому они не имеют конечной производной при  $x=0$  в обычном смысле, но функции  $H^\pm(x)$ , будучи локально интегрируемыми (т. е. функции  $H^\pm(x)$ , заданные на всей числовой оси, абсолютно интегрируемы на любом конечном отрезке), могут рассматриваться как обобщенные функции и потому имеют производные любого порядка в обобщенном смысле.

Заметим, что, поскольку точка  $x=0$  является точкой множеством меры нуль, нет необходимости определять значения функции  $H^\pm(x)$  при  $x=0$ .

Из (2.3) и (2.4) видно, что возникает необходимость произвести регуляризацию (усреднение) начального распределения температуры по С. Л. Соболеву:

$$H_h(x) = \int_{r < h} \omega_h(r) [T_0 H^-(\xi) + T_1 H^+(\xi)] d\xi \quad (r = |x - \xi|). \quad (2.5)$$

Здесь  $h$  – радиус усреднения,  $\omega_h(r)$  – какое-нибудь усредняющее ядро, например,

$$\omega_h(r) = \begin{cases} C_h e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}}, & r < h; \\ 0, & r \geq h, \end{cases} \quad C_h \int_{r < h} e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}} d\xi = 1, \quad C_h = \frac{1}{2h} \left\{ \int_0^1 e^{-\frac{1}{1-t^2}} dt \right\}^{-1}. \quad (2.6)$$

Учитывая (2.6) в (2.5), функцию  $H_\varepsilon(x)$  можно представить в виде:

$$H_\varepsilon(x) = C_\varepsilon \int_{-\varepsilon+0}^{\varepsilon-0} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-u^2}} [T_0 H^-(x+u) + T_1 H^+(x+u)] du. \quad (2.7)$$

Отсюда следует, что функция  $H_\varepsilon(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка, причем:

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} T_0, & x \leq -\varepsilon; \\ T_1, & x \geq \varepsilon, \end{cases} \quad \frac{dH_\varepsilon}{dx} = C_\varepsilon (T_1 - T_0) \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-x^2}}, & |x| < \varepsilon; \\ 0, & |x| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (2.8)$$

Теперь можно корректно ставить задачу Коши  $\tilde{T}(x, y, t) \Big|_{t=0} = H_\varepsilon(x), |y| < \infty$ . Решение этой задачи определяется формулой Пуассона и не зависит от  $y \in (-\infty; \infty)$ :

$$\tilde{T}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} H_\varepsilon(\xi) d\xi. \quad (2.9)$$

Из (2.9) в силу (2.5)–(2.8) находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}(x, t)}{\partial x} &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} H_\varepsilon(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} d\xi = \\ &= \frac{(T_1 - T_0)}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4at}} \omega_h(r) d\xi \quad (r = |x - \xi|, |x| < \infty). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для данной задачи система уравнений Дюамеля–Неймана при плоском напряженном состоянии и при отсутствии массовых сил принимает вид:

$$\frac{\partial \varepsilon_x(x, t)}{\partial x} = (1 + \nu) \alpha \frac{\partial \tilde{T}(x, t)}{\partial x}. \quad (2.11)$$

Здесь  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения.

Из формулы (2.11) с учетом (2.10) получаем:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial \varepsilon_x(x, t)}{\partial x} = (1 + \nu) \alpha C_\varepsilon (T_1 - T_0) \begin{cases} 0, |x| \geq \varepsilon; \\ e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, |x| < \varepsilon - 0. \end{cases}$$

Таким образом, критерий возникновения хрупкого разрушения (1.1) для данной задачи в силу (2.10) и (2.11) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} |grad(\varepsilon)| &= \left| \frac{\partial \varepsilon_x(x, t)}{\partial x} \right| = \frac{(1 + \nu) \alpha |T_1 - T_0|}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4at}} \omega_h(r) d\xi = \\ &= \frac{(1 + \nu) \alpha |T_1 - T_0|}{2\sqrt{\pi at}} \int_{r < h} e^{-\frac{\xi^2}{4at}} \omega_h(r) d\xi = \theta(r = |x - \xi|, |x| < \infty). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Трещина образуется вдоль оси  $x = 0$  при малом значении времени  $t > 0$ , что следует из применения в (2.12) теоремы о сходимости средних функций [5]. Температурные напряжения с учетом (1.7)–(1.9) равны [6]:

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0; \quad \sigma_y = -\alpha E \tilde{T}(x, t). \quad (2.13)$$

**Замечание 1.** Чтобы аналитически обосновать результаты эксперимента, приводимые ниже, рассмотрим задачу Коши:

$$T(x, y, t)|_{t=0} = \begin{cases} T_0, -b < x \leq 0, |y| < \infty; \\ 0, x < -b, |y| < \infty; \\ T_1, x \geq 0, |y| < \infty. \end{cases} \quad (2.14)$$

Решение данной задачи Коши дается формулой:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{T_0}{2} \left\{ \left[ 1 + erf\left(-\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \right] - \left[ 1 - erf\left(\frac{x+b}{2\sqrt{at}}\right) \right] \right\} + \\ &+ \frac{T_1}{2} \left[ 1 + erf\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

откуда

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(x, t) = T_0 [H^-(x) - H_0^-(x+b)] + T_1 H^+(x),$$

$$H_0^-(x+b) = \begin{cases} 0, & x > -b; \\ \frac{1}{2}, & x = -b; \\ 1, & x < -b. \end{cases} \quad (2.16)$$

Далее:

1. Следует провести регуляризацию начального распределения температуры по С. Л. Соболеву. 2. Сформулировать задачу Коши по регуляризованному начальному распределению температуры.

После этих операций нетрудно показать, что для любого  $t > 0$

$$|\text{grad}(\varepsilon)| = \frac{(1+\nu)\alpha}{2\sqrt{\pi at}} \left| \left[ (T_1 - T_0) e^{-\frac{x^2}{4at}} + T_0 e^{-\frac{(x+b)^2}{4at}} \right] \right|. \quad (2.17)$$

Поскольку трещина образуется вдоль оси  $x = 0$  при малом значении времени  $t > 0$ , то вторым слагаемым внутри квадратной скобки в (2.17) можно пренебречь. В этом случае приходим к формуле (2.12).

Имеют место:

**Утверждение 1.** Пусть

1) начальная температура распределена в  $E_2$  по закону

$$\tilde{T}(x, y, t) \Big|_{t=0} = H_\varepsilon(x) \quad (-\infty < x, y < \infty), \quad (2.18)$$

где функция  $H_\varepsilon(x)$  определяется по формуле (2.7);

2) термомеханические свойства теплопроводящей среды  $S^-(x \leq 0, |y| < \infty)$  и  $S^+(x \geq 0, |y| < \infty)$  не зависят от температуры и одинаковы;

3) выполняются гипотезы Дюамеля и Неймана;

4) имеет место равенство (2.12).

Тогда трещина образуется вдоль оси  $x = 0$  при малом значении времени  $t > 0$ .

Из утверждения 1 приходим к важному следствию.

**Следствие 1.** Критерием хрупкого разрушения континуальной среды вдоль оси  $x = 0$  является предельное значение модуля градиента деформации (2.12).

Пусть теперь в утверждении 1 условия 2) и 3) остаются в силе. Далее, не нарушая общности, предположим, что  $T_1 \equiv 0$  в формулах (2.1)–(2.12).

Заменим только условие (1) в утверждении 1 на условие: нагретая область  $D^+$  в  $E_2$  имеет ненулевую кривизну границы, например,  $D^+$  есть круг с радиусом  $R$ . Возникает вопрос: для такого класса термоупругих задач можно ли однозначно указать критерий хрупкого разрушения континуальной среды?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим следующую задачу термоупругости.

**3. Температурные напряжения и деформации в круге.**

**3.1. Задача Коши.**

Пусть

$$T(x, y, t) \Big|_{t=0} = \begin{cases} T_0, & (x, y) \in \bar{D}^+, \\ 0, & (x, y) \in E_2 \setminus \bar{D}^+. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь  $T_0 \equiv \text{const}$ ,  $\bar{D}^+$  – замкнутый круг с радиусом  $R$ ,  $E_2$  – евклидова плоскость.

Решением задачи Коши (3.1) для однородного уравнения теплопроводности Фурье в силу формулы Пуассона будет:

$$T(x, y, t) = \frac{T_0}{4\pi at} \iint_{\bar{D}^+} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4at}} d\xi d\eta. \quad (3.2)$$

Пусть

$$\begin{cases} \xi = r \cos \varphi, \\ \eta = r \sin \varphi \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad (3.3)$$

$$(0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

Тогда из (3.2) с учетом (3.3) имеем:

$$\begin{aligned} T(\rho, \theta, t) &= \frac{T_0}{4\pi at} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-\frac{(\rho \cos \theta - r \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \theta - r \sin \varphi)^2}{4at}} r d\varphi dr = \\ &= \frac{T_0}{4\pi at} e^{-\frac{\rho^2}{4at}} \int_0^R e^{-\frac{r^2}{4at}} r \left[ \int_0^{2\pi} e^{\frac{\rho r \cos(\varphi - \theta)}{2at}} d\varphi \right] dr. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Внутренний интеграл в (3.4) можно вычислить в замкнутой форме. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{\frac{\rho r \cos(\varphi - \theta)}{2at}} d\varphi &= \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \varphi - \theta, \\ d\alpha = d\varphi \end{array} \right\} = \int_{-\theta}^{2\pi - \theta} e^{\frac{\rho r \cos \alpha}{2at}} d\alpha = \\ &= \int_{-\theta}^0 e^{\frac{\rho r \cos \alpha}{2at}} d\alpha + \int_0^{2\pi} e^{\frac{\rho r \cos \alpha}{2at}} d\alpha - \int_{2\pi - \theta}^{2\pi} e^{\frac{\rho r \cos \alpha}{2at}} d\alpha = \\ &= 2 \int_0^{\pi} e^{\frac{\rho r \cos \alpha}{2at}} d\alpha = 2\pi I_0 \left( \frac{\rho r}{2at} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь  $I_0(u)$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка (см., например, [6], с. 116–118).

Следует заметить, что [6]

$$\frac{dI_0(u)}{du} = I_1(u), \quad \frac{dI_1(u)}{du} = I_0(u) - \frac{1}{u} I_1(u). \quad (3.6)$$

Учитывая (3.5) в (3.4), имеем:

$$T(\rho, t) = \frac{T_0}{2at} e^{-\frac{\rho^2}{4at}} \int_0^R e^{-\frac{r^2}{4at}} r I_0 \left( \frac{\rho r}{2at} \right) dr. \quad (3.7)$$

Отсюда следует, что температура  $T(\rho, t)$  не зависит от полярного угла  $\theta$ .

Из (3.7) следует также, что если  $R \rightarrow \infty$ , то  $T(\rho, t) = T_0$ .

Теперь определим начальное распределение температуры  $T(\rho, t)$ .

Интеграл в (3.7) можно рассматривать как некоторое обобщение интеграла Лапласа (см. [6], с. 166–172). Для получения асимптотической формулы для функции, представленной интегралом Лапласа, обычно применяют один из подходящих методов Лапласа – метод типа Ватсона. Однако авторам этой работы не удалось найти в литературе такой метод для данного интеграла (3.7) по следующим причинам: во-первых, в интеграле (3.7) имеется еще один параметр  $\rho$ ; во-вторых, при  $\rho = R$  главный член асимптотики интеграла (3.7) может иметь разрыв первого рода. Поэтому мы здесь, опираясь на теорию обобщенных функций, предложили способ, позволяющий найти главный член асимптотики интеграла (3.7). Для этого воспользуемся асимптотическим представлением функции  $I_0 \left( \frac{\rho r}{2at} \right)$  (см. [6], с. 223):

$$I_0(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(m + 1/2)}{\pi \cdot m! (2\lambda)^m} \quad (3.8)$$

$$\left(0! = 1, t \rightarrow +0, \lambda = \frac{\rho r}{2at} \rightarrow +\infty\right),$$

$$\Gamma(m + 1/2) = \frac{\sqrt{\pi} (2m)!}{m! 4^m}.$$

Из (3.7) с учетом (3.8) имеем:

$$\lim_{t \rightarrow +0} T(\rho, t) = T_0 \lim_{t \rightarrow +0} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\Gamma^2(m+1/2)}{\pi \cdot m! \rho^m} (at)^m \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_{\delta > 0}^R e^{-\frac{(r-\rho)^2}{4at}} r^{\frac{1}{2}-m} dr \right] \right\}. \quad (3.9)$$

Из (3.9), воспользовавшись аппроксимацией функции Дирака  $\delta(x)$  непрерывно дифференцируемой функцией

$$\delta(x, \alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2} \quad \left(\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}, t \rightarrow 0\right),$$

находим главный член асимптотики интеграла (3.7):

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(\rho, t) = \frac{T_0}{\sqrt{\rho}} \int_0^R \delta(r - \rho) \sqrt{r} dr = T_0 H(R - \rho), \\ H(R - \rho) = T_0 \begin{cases} 1, R > \rho; \\ \frac{1}{2}, R = \rho; \\ 0, R < \rho. \end{cases} \quad (3.10)$$

Здесь  $H(R - \rho)$  – симметричная единичная функция Хевисайда.

Из (3.10) видно, что функция  $H(R - \rho)$  и тем самым функция  $\lim_{t \rightarrow 0} T(\rho, t)$  имеет разрыв первого рода в точке  $\rho = R$ , что и следовало ожидать [7].

Поэтому следует произвести регуляризацию начального распределения температуры по С. Л. Соболеву

$$H_h(\rho) = \int_{\rho_2 < h} \omega_h(\rho_2) H(R - \rho_1) d\rho_1 \quad (\rho_2 = |\rho - \rho_1|). \quad (3.11)$$

Функцию  $H_h(\rho)$  при  $h = \varepsilon$  можно представить в виде:

$$H_\varepsilon(\rho) = C_\varepsilon \int_{-\varepsilon+0}^{\varepsilon-0} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \rho_3^2}} H(R - \rho + \rho_3) d\rho_3. \quad (3.12)$$

Из (3.11) и (3.12) следует, что функция  $H_h(\rho)$ , в том числе и функция  $H_\varepsilon(\rho)$ , непрерывна и непрерывно дифференцируема любого порядка в  $E_2$ . Кроме того,

$$H_\varepsilon(\rho) = \begin{cases} 1, 0 \leq \rho \leq R - \varepsilon; \\ 0, \rho \geq R + \varepsilon. \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\frac{dH_\varepsilon(\rho)}{d\rho} = \begin{cases} -C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - (R-\rho)^2}}, R - \varepsilon < \rho < R + \varepsilon; \\ 0, |R - \rho| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (3.14)$$

Теперь имеем возможность корректно сформулировать задачу Коши для регуляризованного начального распределения температуры

$$\tilde{T}(\rho, \theta, t) \Big|_{t=0} = T_0 H_\varepsilon(\rho), \theta \in [0, 2\pi]. \quad (3.15)$$

Решение данной задачи имеет вид:

$$\tilde{T}(\rho, t) = \frac{T_0}{2at} e^{-\frac{\rho^2}{4at}} \int_0^{R+\varepsilon} e^{-\frac{r^2}{4at}} r H_\varepsilon(r) I_0\left(\frac{\rho r}{2at}\right) dr. \quad (3.16)$$

Поскольку функция  $H_\varepsilon(r)$  непрерывна и непрерывно дифференцируема любого порядка в  $E_2$ , то из (3.16) при  $t \rightarrow 0$  с помощью метода Лапласа (при этом поступаая точно так же, как в [8]) приходим к формуле (3.15).

**3.2. Вывод уравнения Дюамеля – Неймана.** Поскольку в рассматриваемой задаче имеет место осевая симметрия, деформации, напряжения и перемещения не зависят от полярного угла  $\theta$ . Поэтому для плоского напряженного состояния имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} = \frac{1}{E} (\sigma_\rho - \nu \sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_\rho}{\rho} = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_\rho), \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_\rho + \sigma_\theta), \quad \gamma_{\rho\theta} = 0, \quad u_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_z = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь  $\sigma_\rho$  – радиальное напряжение,  $\sigma_\theta$  – тангенциальное напряжение,  $\tau_{r\theta}$  – касательное напряжение, а  $u_\rho$  и  $u_\theta$  – перемещения в полярных координатах соответственно по направлению радиуса и перпендикулярно ему,  $\varepsilon_\rho$ ,  $\varepsilon_\theta$  и  $\gamma_{\rho\theta}$  – деформации,  $E$  – модуль Юнга.

Из системы эллиптического типа уравнений равновесия теории упругости получаем:

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0. \quad (3.18)$$

На основании закона, установленного Дюамелем и Нейманом, между компонентами деформации и напряжения существует следующая связь:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho(\rho, t) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u_\rho(\rho, t)}{\partial \rho} + \nu \frac{u_\rho(\rho, t)}{\rho} - (1+\nu) \alpha \tilde{T}(\rho, t) \right], \\ \sigma_\theta(\rho, t) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{u_\rho(\rho, t)}{\rho} + \nu \frac{\partial u_\rho(\rho, t)}{\partial \rho} - (1+\nu) \alpha \tilde{T}(\rho, t) \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Учитывая (3.19) в (3.18), приходим к уравнению Дюамеля – Неймана:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial u_\rho(\rho, t)}{\partial \rho} + \frac{u_\rho(\rho, t)}{\rho} \right) = (1+\nu) \alpha \frac{\partial \tilde{T}(\rho, t)}{\partial \rho}, \quad (3.20)$$

откуда после интегрирования по  $\rho$ ,

$$\frac{\partial u_\rho(\rho, t)}{\partial \rho} + \frac{u_\rho(\rho, t)}{\rho} = (1+\nu) \alpha \tilde{T}(\rho, t). \quad (3.21)$$

**3.3. Термоупругий потенциал  $\Psi(\rho, \tau)$  Папковича – Гудьера.** Пусть

$$u_\rho(\rho, t) = \frac{\partial \Psi(\rho, t)}{\partial \rho}. \quad (3.22)$$

Учитывая (3.22) в (3.21), получаем:

$$\Delta \Psi(\rho, t) = (1+\nu) \alpha \tilde{T}(\rho, t) \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right). \quad (3.23)$$

С другой стороны, температура  $\tilde{T}(\rho, t)$ , определяемая по формуле (3.16), является решением однородного уравнения теплопроводности Фурье

$$\frac{\partial \tilde{T}(\rho, t)}{\partial t} = a \Delta \tilde{T}(\rho, t). \quad (3.24)$$

Из (3.23) в силу (3.24) получаем:

$$\Delta \left[ \frac{\partial \Psi(\rho, t)}{\partial t} - (1 + \nu) \alpha a \tilde{T}(\rho, t) \right] = 0. \quad (3.25)$$

Интегрирование этого уравнения приводит к зависимости

$$\Psi(\rho, t) = (1 + \nu) \alpha a \int_0^t \tilde{T}(\rho, \tau) d\tau + \Psi_0(\rho) + t\Psi_1(\rho). \quad (3.26)$$

Здесь:

$$1) \Psi_0(\rho) = \Psi(\rho, t)|_{t=0},$$

причем

$$\Delta \Psi_0(\rho) = T_0(1 + \nu) \alpha H_\varepsilon(\rho) \left( \Delta = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right); \quad (3.27)$$

2) функция  $\Psi_1(\rho)$  – произвольная гармоническая функция.

Очевидно, функция  $\Psi_1(\rho) \equiv 0$ . Действительно, в противном случае в силу (3.26) и (3.22) имело бы место:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_\rho(\rho, t) = \infty,$$

что физически недопустимо.

Прежде чем перейти к решению уравнения (3.27), заметим следующее.

Если  $\mu(\zeta) \in C(\bar{G})$ , где  $\zeta = \xi + i\eta$ ,  $\bar{G}$  – замкнутая двумерная область, то логарифмический потенциал

$$V(z) = \int_G \mu(\zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} d\xi d\eta, \quad z = x + iy,$$

регулярен и гармоничен в любой конечной области, принадлежащей  $G_1 = E_2 \setminus \bar{G}$ , и имеет место асимптотическое равенство [9]:

$$V(z) = \ln \frac{1}{|z|} \int_G \mu(\zeta) d\xi d\eta + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (A)$$

Если, кроме того,  $\mu(\zeta) \in C^1(G)$ , то  $V \in C^2(G)$ , причем

$$\Delta V = -2\pi\mu.$$

Из (A) следует, что логарифмический потенциал площади  $V(z)$  не регулярен при  $|z| \rightarrow \infty$ .

Теперь построим решение уравнения (3.27).

Из (3.27) в силу (3.13) имеем:

1<sup>0</sup>. Если  $\rho \geq R + \varepsilon$ , то

$$\Delta \Psi_0(\rho) = 0. \quad (3.28)$$

2<sup>0</sup>. Если же  $0 < \rho \leq R + \varepsilon$ , то

$$\Delta \Psi_0(\rho) = T_0(1 + \nu) \alpha H_\varepsilon(\rho).$$

Следовательно, потенциал  $\Psi_0(\rho)$  есть логарифмический потенциал круга в точке  $(\rho, \theta)$ :

$$\Psi_0(\rho) = \frac{T_0(1 + \nu) \alpha}{4\pi} \int_0^{R+\varepsilon} r H_\varepsilon(r) \int_0^{2\pi} \ln [\rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta) + r^2] d\varphi dr =$$

$$= \frac{T_0(1+\nu)\alpha}{2\pi} \int_0^{R+\varepsilon} r H_\varepsilon(r) \int_0^\pi \ln[\rho^2 - 2r\rho \cos \alpha + r^2] d\alpha dr. \quad (3.29)$$

Интеграл

$$\int_0^\pi \ln[\rho^2 - 2r\rho \cos \alpha + r^2] d\alpha$$

можно вычислить разными способами. Покажем это.

**Первый способ** – способ Г. М. Фихтенгольца. В [10] доказано, что

$$\int_0^{n\pi} \ln[1 - 2b \cos \alpha + b^2] d\alpha = \begin{cases} 0, & b^2 < 1; \\ n\pi \ln b^2, & b^2 > 1. \end{cases} \quad (3.30)$$

Рассмотрим два возможных случая.

**Случай 1.** Пусть  $\rho \geq R + \varepsilon$ . Тогда из (3.29) в силу (3.30) имеем:

$$\Psi_0(\rho) = T_0(1+\nu)\alpha \ln \rho \int_0^{R+\varepsilon} r H_\varepsilon(r) dr. \quad (3.31)$$

Отсюда видно, что логарифмический потенциал круга  $\Psi_0(\rho)$  регулярен и гармоничен в любой конечной области вне круга, (т. е. при  $\rho \geq R + \varepsilon$ ), а при  $\rho \rightarrow \infty$  потенциал  $\Psi_0(\rho)$  не регулярен.

Важно отметить: второе слагаемое формулы (А) не входит в (3.31).

**Случай 2.** Пусть  $0 < \rho < R + \varepsilon$ . Тогда из (3.29) в силу (3.30) имеем:

$$\begin{aligned} \Psi_0(\rho) &= T_0(1+\nu)\alpha \lim_{\delta \rightarrow +0} \left[ \ln \rho \int_0^{\rho-\delta} r H_\varepsilon(r) dr + \int_{\rho+\delta}^{R+\varepsilon} r H_\varepsilon(r) \ln r dr \right] = \\ &= T_0(1+\nu)\alpha \left[ \ln \rho \int_0^\rho r H_\varepsilon(r) dr + \int_\rho^{R+\varepsilon} r H_\varepsilon(r) \ln r dr \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Отсюда следует, что:

$$\Delta \Psi_0(\rho) = T_0(1+\nu)\alpha H_\varepsilon(\rho).$$

Из (3.31) и (3.32) следует также: логарифмический потенциал круга  $\Psi_0(\rho)$  непрерывен и имеет непрерывные производные любого порядка при переходе границы  $\gamma_{R+\varepsilon}$  области  $\bar{D}_{R+\varepsilon}$ , где  $\gamma_{R+\varepsilon}$  – окружность замкнутого круга  $\bar{D}_{R+\varepsilon}$  с радиусом  $\rho = R + \varepsilon$ . Очевидно, что все производные  $\Psi_0(\rho)$  являются нормальными производными.

Следовательно, функция  $\Psi_0(\rho)$ , определяемая по формуле (3.29), является решением уравнения Пуассона внутри круга и решением уравнения Лапласа вне круга.

**Второй способ.** Суть этого способа состоит в разложении функции

$$\ln \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 2r\rho \cos \varphi + r^2}}$$

в тригонометрические ряды при  $\rho > r$  и при  $r > \rho$ , что легко достигается, если опираться на два тождества:

первое тождество:

$$\frac{2b \sin t}{1 - 2b \cos t + b^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin nt \quad (|b| < 1);$$

второе тождество:

$$\ln(1-b) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n} \quad (|b| < 1).$$



Второе тождество достаточно просто доказывается с помощью  $K_\alpha$  ( $\alpha = \pi/2$ ) – формулы суммирования [11].

Первое тождество также доказывается с помощью  $K_\alpha$  ( $\alpha = \pi/2$ ) – формулы суммирования, но, пожалуй, несколько проще следующее доказательство. Ряд в первой части первого тождества абсолютно сходится. Умножим обе его части на знаменатель левой части. В правой части получим:

$$\begin{aligned}
& 2(1 - 2b \cos t + b^2) \sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin(nt) = \\
& = 2(1 + b^2) \sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin(nt) - 4b \sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin(nt) \cos t = \\
& = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin(nt) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b^{n+2} \sin(nt) - \\
& \quad - 2b \sum_{n=1}^{\infty} b^n [\sin(n+1)t + \sin(n-1)t] = \\
& = 2 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin(nt) - \sum_{n=1}^{\infty} b^{n+1} \sin(n+1)t \right] + \\
& \quad + 2 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} b^{n+2} \sin(nt) - \sum_{n=1}^{\infty} b^{n+1} \sin(n-1)t \right] = \\
& = 2 [\sum_{m=1}^{\infty} b^m \sin(mt) - \sum_{m=2}^{\infty} b^m \sin(mt)] + 2 [\sum_{m=1}^{\infty} b^{m+2} \sin(mt) - \sum_{m=0}^{\infty} b^{m+2} \sin(mt)] \\
& = 2b \sin t.
\end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Теперь, интегрируя обе части первого тождества по  $t$  от нуля до некоторого угла  $\varphi$  с учетом второго тождества, имеем:

$$\ln(1 - 2b \cos \varphi + b^2)^{-1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} b^n \cos n\varphi \quad (|b| < 1).$$

С помощью этой формулы нетрудно получить следующие равенства:

$$\ln \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 2r\rho \cos \varphi + r^2}} = \begin{cases} \ln \frac{1}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos n\varphi, \rho > R + \varepsilon; \\ \ln \frac{1}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos n\varphi, r < \rho < R + \varepsilon; \\ \ln \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cos n\varphi, \rho < r < R + \varepsilon. \end{cases} \quad (\text{B})$$

Учитывая (B) в (3.29), приходим к формулам (3.31) и (3.32).

Следует заметить, что уравнение (3.27) есть линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. В теории дифференциальных уравнений разработаны методы решения таких типов уравнений (см., например, [12], с. 108–122). Построим решение (3.27) с помощью одного из них [12]. С этой целью уравнение (3.27) представим в виде:

$$\frac{d}{d\rho} \left[ \rho \frac{d\Psi_0(\rho)}{d\rho} \right] = T_0 (1 + \nu) \alpha \rho H_\varepsilon(\rho). \quad (3.33)$$

Решение (3.33) построим при следующих условиях:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \Psi_0(\rho) &= T_0(1+ \\ &+ \nu) \alpha \int_0^{R+\varepsilon} r H_\varepsilon(r) \ln r dr = T_0(1+\nu) \alpha C \equiv const, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{d\Psi_0(\rho)}{d\rho} = T_0(1+\nu) \alpha. \quad (3.35)$$

Кроме того, при построении решения (3.33) следует учесть:

Функция  $H_\varepsilon(\rho)$  непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка в  $E_2$ , причем

$$H_\varepsilon(\rho) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \rho \leq R - \varepsilon; \\ 0, & \rho \geq R + \varepsilon. \end{cases} \quad (3.36)$$

Имеют место соотношения:

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \left[ \ln \rho \int_0^\rho r H_\varepsilon(r) dr \right] = 0, \quad (3.37)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{1}{\rho} \int_0^\rho r H_\varepsilon(r) dr = 1. \quad (3.38)$$

Эти предельные равенства легко доказываются методом Лопиталья.

Из (3.33) в силу (3.35) и (3.38) имеем:

$$\frac{d\Psi_0(\rho)}{d\rho} = T_0(1+\nu) \alpha \frac{1}{\rho} \int_0^\rho r H_\varepsilon(r) dr,$$

откуда, с учетом (3.34) и (3.37), находим

$$\Psi_0(\rho) = T_0(1+\nu) \alpha \left[ \ln \rho \int_0^\rho r H_\varepsilon(r) dr - \int_0^\rho r H_\varepsilon(r) \ln r dr + C \right]. \quad (3.39)$$

Рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть  $0 \leq \rho \leq R + \varepsilon$ . Тогда из (3.39) с учетом (3.34) приходим к формуле (3.32)
2. Пусть  $\rho \geq R + \varepsilon$ . Тогда из (3.39) с учетом (3.36) и (3.34) приходим к формуле (3.31).

Продолжим исследования. Пусть  $0 < \rho < R$ . Тогда с помощью (3.17), (3.22), (3.26) и (3.32) получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho(\rho, t) &= \frac{\partial u_\rho(\rho, t)}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 \Psi(\rho, t)}{\partial \rho^2} = \\ &= (1+\nu) \alpha a \int_0^t \frac{\partial^2 \tilde{T}(\rho, \tau)}{\partial \rho^2} d\tau + T_0(1+\nu) \alpha \left[ H_\varepsilon(\rho) - \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho r H_\varepsilon(r) dr \right], \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta(\rho, t) &= \frac{u_\rho(\rho, t)}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi(\rho, t)}{\partial \rho} = \\ &= (1+\nu) \alpha a \int_0^t \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{T}(\rho, \tau)}{\partial \rho} d\tau + \frac{T_0(1+\nu) \alpha}{\rho^2} \int_0^\rho r H_\varepsilon(r) dr, \end{aligned}$$

откуда находим:

$$\varepsilon_\rho(\rho, t) + \varepsilon_\theta(\rho, t) = (1+\nu) \alpha \tilde{T}(\rho, t). \quad (3.41)$$

Пусть теперь  $\rho \geq R + \varepsilon$ . В этом случае с помощью (3.17), (3.22), (3.26) и (3.31) имеем:

$$\varepsilon_\rho(\rho, t) = (1 + \nu) \alpha a \int_0^t \frac{\partial^2 \tilde{T}(\rho, \tau)}{\partial \rho^2} d\tau - T_0 (1 + \nu) \alpha \frac{1}{\rho^2} \int_0^{R+\varepsilon} r H_\varepsilon(r) dr, \quad (3.42)$$

$$\varepsilon_\theta(\rho, t) = (1 + \nu) \alpha a \int_0^t \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{T}(\rho, \tau)}{\partial \rho} d\tau + \frac{T_0 (1 + \nu) \alpha}{\rho^2} \int_0^{R+\varepsilon} r H_\varepsilon(r) dr.$$

Отсюда, с учетом (3.24), (3.15) и (3.13), получаем:

$$\varepsilon_\rho(\rho, t) + \varepsilon_\theta(\rho, t) = (1 + \nu) \alpha \tilde{T}(\rho, t). \quad (3.43)$$

Из (3.40), (3.42) следует, что деформации  $\varepsilon_\rho(\rho, t)$  и  $\varepsilon_\theta(\rho, t)$  непрерывны и имеют непрерывные производные любого порядка по  $\rho$  в  $E_2$ . Кроме того, функции  $\varepsilon_\rho(\rho, t)$  и  $\varepsilon_\theta(\rho, t)$  имеют нуль второго порядка в бесконечности (т. е. при  $\rho \rightarrow \infty$ ) для любого  $t \in (0, \infty)$ .

С помощью (3.17), (3.19), (3.22), (3.31) и (3.32) можно показать, что:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho(\rho, t) &= -2G \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi(\rho, t)}{\partial \rho}, \\ \sigma_\theta(\rho, t) &= -2G \frac{\partial^2 \Psi(\rho, t)}{\partial \rho^2}, \tau_{r\theta}(\rho, t) \equiv 0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

причем

$$\sigma_\rho(\rho, t) + \sigma_\theta(\rho, t) = -E \alpha \tilde{T}(\rho, t). \quad (3.45)$$

Из (3.17) и (3.44) следует, что напряжения  $\sigma_\rho(\rho, t)$  и  $\sigma_\theta(\rho, t)$  непрерывны и имеют непрерывные производные любого порядка по  $\rho$  в  $E_2$ . Кроме того, функции  $\sigma_\rho(\rho, t)$  и  $\sigma_\theta(\rho, t)$  также, как деформации  $\varepsilon_\rho(\rho, t)$  и  $\varepsilon_\theta(\rho, t)$ , имеют нуль второго порядка в бесконечности (т. е. при  $\rho \rightarrow \infty$ ) для любого  $t \in (0, \infty)$ , что и следовало ожидать. Из (3.22), (3.31) и (3.32) следует также: смещение  $u_\rho(\rho, t)$  непрерывно и имеет непрерывные производные любого порядка по  $\rho$  в  $E_2$ . Кроме того, функция  $u_\rho(\rho, t)$  имеет нуль первого порядка в бесконечности (т. е. при  $\rho \rightarrow \infty$ ).

**4. Основные выводы.** Анализируя результаты, полученные нами в данной работе приходим к следующим выводам:

1. В §2 нами показано (см. Утверждение 1), что критерием возникновения хрупкого разрушения в континуальной среде вдоль оси  $x = 0$  является предельное значение модуля градиента деформации (2.12). Данный критерий нашел свое экспериментальное подтверждение (см. ниже, §5).

2. В §3 полученные нами формулы (3.34) и (3.38), справедливые в  $E_2$ , позволяют однозначно утверждать: критерием возникновения хрупкого разрушения при  $T_0 > 0$  является предельное значение модуля градиента суммы главных деформаций

$$|\text{grad} [\varepsilon_\rho(\rho, t) + \varepsilon_\theta(\rho, t)]| \Big|_{\substack{\rho = R, \\ t = t_*}} = (1 + \nu) \alpha \left| \frac{\partial \tilde{T}(\rho, t)}{\partial \rho} \right| \Big|_{\substack{\rho = R, \\ t = t_*}} = \theta \equiv \text{const}, \quad (3.46)$$

так как в этом случае для любого  $\rho \in (0, \infty)$  и для любого  $t \in (0, \infty)$

$$\sigma_\rho(\rho, t) + \sigma_\theta(\rho, t) = -E \alpha \tilde{T}(\rho, t) < 0. \quad (3.47)$$

3. Если  $T_0 < 0$ , то формулы (3.41) и (3.45) не позволяют однозначно указать критерий хрупкого разрушения. Здесь возможен один из двух случаев.

3.1. Либо при  $\rho = R$  и при  $t = t_1$  имеет место предельное значение модуля градиента суммы главных деформаций.

$$|\text{grad} [\varepsilon_\rho(\rho, t) + \varepsilon_\theta(\rho, t)]| \Big|_{\substack{\rho = R, \\ t = t_1}} = (1 + \nu) \alpha \left| \frac{\partial \tilde{T}(\rho, t)}{\partial \rho} \right| \Big|_{\substack{\rho = R, \\ t = t_1}} = \theta \equiv \text{const.} \quad (3.48)$$

3.2. Либо при  $\rho = R$  и при  $t = t_2$  имеет место предельное значение суммы главных напряжений

$$[\sigma_\theta(\rho, t) + \sigma_\rho(\rho, t)] \Big|_{\substack{\rho = R, \\ t = t_2}} = -E\alpha\tilde{T}(R, t_2) = \sigma \equiv \text{const} > 0. \quad (3.49)$$

Очевидно, хрупкое разрушение будет определяться тем критерием, время наступления которого меньше.

Возникшая неопределенность в критерии разрушения при  $T_0 < 0$  связана, по нашему мнению, с конечностью охлажденной области (предполагается, что остальная часть  $E_2$  в начальный момент времени имеет нулевую температуру). Если известны эмпирические константы материала  $\theta$  и  $\sigma$  и результаты аналитического решения, то взаимное соотношение четырех величин определяет причину разрушения.

**5. Результаты эксперимента.** Остроумные математические приемы успешно преодолевают разрывность функций, в отличие от среды, для которой эти функции материальны, и чрезмерно высокие градиенты нельзя выдержать чисто физически, что заканчивается разрывом материала. Нельзя выдержать именно при хрупком (упругом) разрушении, поскольку пластичность сглаживает градиенты. На основе наших наблюдений за трещинами на графите, силикатных и органических стеклах, можно предположить, что градиентный критерий не далек от реальной достоверности.

На приводимой фотографии показаны части разрушенных плоских образцов из силикатного стекла шириной 15–20 мм, толщиной 2 мм. Полоски стекла в свободном состоянии погружались в жидкий азот на глубину 3–4 мм. Полоски погружали в ванну с азотом вручную, и практически сразу раздавался лёгкий треск, и отколовшаяся нижняя часть полоски оказывалась на дне ванны. Никаких видимых внешних усилий на этой части полоски нет, как нет и запрещенных перемещений. Но в вертикальном направлении (т. е. вдоль оси  $Ox$ ) создавался значительный градиент температуры, а следовательно, и градиент деформации на уровне поверхности азота (вдоль оси  $x = 0$ ). В этом месте происходило хрупкое разрушение стекла, хотя, как показано в задаче 1 (§2), напряжение поперек трещины отсутствовало.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Кулиев В. Д., Морозов Е. М. Градиентный деформационный критерий хрупкого разрушения // Доклады АН, 2016. Т. 470. № 5. С. 1–3.

[2] Левин В. А., Морозов Е. М. Нелокальный критерий разрушения. Конечные деформации // Доклады АН. 2002. Т. 386. № 1. С. 46–47.

[3] Морозов Н. Ф., Петров Ю. В. Проблемы динамики разрушения твердых тел. СПб.: Изд. СПбГУ, 1997. 132 с.

[4] Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.

[5] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 333 с.

[6] Кулиев В. Д. Сингулярные краевые задачи. М.: Физматлит, 2005. 720 с.

[7] Кулиев В. Д. В-метод К-класса задач термоупругости // Материалы Всероссийской научной школы-конференции "Механика предельного состояния и смежные вопросы", посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева (Чебоксары, 15–18 сентября 2015 г.): в 2 ч. Ч. 2 / под ред. Н. Ф. Морозова, Б. Г. Миронова, А. В. Манжирова, Ю. Н. Радаева. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2015. С. 208–215.

[8] Кулиев В.Д. К теории теплопроводности в конечном стержне // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 3 (17). С. 21–45.

[9] Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. 400 с.

[10] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. II. М.: Физматлит, 2001. 864 с.

[11] Кулиев В. Д. Новая формула суммирования функциональных рядов и некоторые ее приложения (ч. I) // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 107–119.

[12] Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 1980, 232 с.

V. D. Kuliev, E. M. Morozov

**GRADIENT DEFORMATION CRITERION OF BRITTLE FRACTURE.  
ANALYTICAL AND EXPERIMENTAL RATIONALE FOR CONFIRMATION**

*Azerbaijan Technical University, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan,  
Baku, Azerbaijan*

**Abstract.** In [1], we propose a new criterion of destruction coming from the assumption that brittle fracture occurs when the deformation modulus of the gradient reaches the limit. In this study, shown in more detail that the module temperature gradient, and hence the deformation becomes significant in a thin boundary layer, where there is a sharp change in temperature. The solution of the new thermoelastic problem of a sharp change in temperature in a circular area. And it turned out that in the case of chilled curved border region E2, where E2 - Euclidean plane failure criterion is complicated and takes the form of a limit value of the sum of the gradient module main strains, or simply the sum of the principal stresses. The destruction will be determined by the criterion, which is less than the advance. It is also shown: in the case of a heated circular area in E2 criterion of brittle fracture continuum medium will limit the amount of principal strain gradient module. Presented preliminary results of an experiment with samples of the sudden change in temperature.

**Keywords:** Brittle fracture, fracture gradient deformation criterion, Cauchy problem, the Heaviside function, regularization of the initial temperature distribution, the logarithmic potential range.

---

*Mirsalimov Vagif*

e-mail: mir-vagif@mail.ru, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Azerbaijan Technical University, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan.

**REFERENCES**

- [1] Kuliev V. D., Morozov E. M. Gradient deformation criterion of brittle fracture. Reports of the Academy of Sciences, 2016. Vol. 470. № 5. P. 1–3. (in Russian).
- [2] Levin V.A., Morozov E. M. Non-local failure criterion. Finite deformation. Reports of the Academy of Sciences. 2002. Vol. 386. № 1. S. 46–47. (in Russian).
- [3] Morozov N. F., Petrov Y. Problems of dynamics fracture of solids. SPb.: Publishing. St. Petersburg State University, 1997, 132 p. (in Russian).
- [4] Morozov N. F. Mathematical problems in the theory of cracks. M.: Nauka, 1984. 256 p. (in Russian).
- [5] Sobolev S. L. Some applications of functional analysis in mathematical physics. M.: Nauka, 1988. 333 p. (in Russian).
- [6] Kuliev V. D. Singular boundary value problems. M.: FIZMATLIT, 2005. 720 p. (in Russian).
- [7] Kuliev V. D. The method of K-class thermoelasticity problems // Proceedings of the All-Russian Scientific School-Conference "Mechanics limit state and Related Topics" dedicated to 85th anniversary of Professor D. Ivlev (Cheboksary, 15-18 September 2015). 2 hours, Part 2 / ed. NF Morozov, BG Mironov, AV Manzhurov, N. Radaeva. Cheboksary: Chuvashia. state. ped. Univ, 2015. S. 208-215. (in Russian).
- [8] Kuliev V. D. By the theory of heat conduction in the long rod // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovlev. Series: Mechanics limit state. 2013. № 3 (17). S. 21–45. (in Russian).
- [9] VS Vladimirov, VV Zharinov equations of mathematical physics. M.: FIZMATLIT, 2004. 400 p. (in Russian).
- [10] Fikhtengol'ts G. M. Course of differential and integral calculus: V 3 t T.II. M.: FIZMATLIT, 2001. 864 p. (in Russian).
- [11] Kuliev V. D. new formula of summation of series of functions and some of its applications (ch. I) // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovlev. Series: mechanical limit state. Number 1, 2013. (15). P. 107–119. (in Russian).
- [12] Tikhonov A. N., Vasil'eva A. B., Sveshnikov A. G. Differential equations. M.: Science, FIZMATLIT, 1980. 232 p. (in Russian).

А. В. Никитин, А. В. Балашникова, С. В. Тихонов

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** Рассматривается неоднородная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления. Предполагается, что она сохраняет значение предела текучести постоянным вдоль концентрических окружностей. Определено напряженное состояние для трубы. Трансляционная анизотропия впервые введена в работах [2]–[6]. Предельное состояние слоистой трубы при наличии трансляционной анизотропии исследовалось в [7], [10]. Упруго-пластическое состояние неоднородной трубы рассмотрено в работах [8], [9].

**Ключевые слова:** пластичность, неоднородность, труба, анизотропия, давление.

УДК: 539.375

Рассмотрим толстостенную трубу с радиусами  $\alpha, \beta$ ;  $\alpha < \beta$  (рис. 1). Условие пластичности примем в виде [5]:

$$A \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + B (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_{xy}^2, \quad k_1, k_2, k_3 = const, \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — компоненты напряжения в декартовой системе координат,  $k_{xy} = k_{xy}(x, y)$ .

При  $A = B = 1$  и  $k_{xy} = const$  имеет место трансляционная анизотропия, при  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ ,  $k_{xy} = const$  — анизотропия Мизеса – Хилла.

---

© Никитин А. В., Балашникова А. В., Тихонов С. В., 2016

*Никитин Андрей Витальевич*

e-mail: ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

*Балашникова Анжелика Вениаминовна*

e-mail: info3006@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

*Тихонов Сергей Владимирович*

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 16-31-00511 мол\_а, 15-41-02453 р\_поволжье\_а).

Поступила 21.03.2016

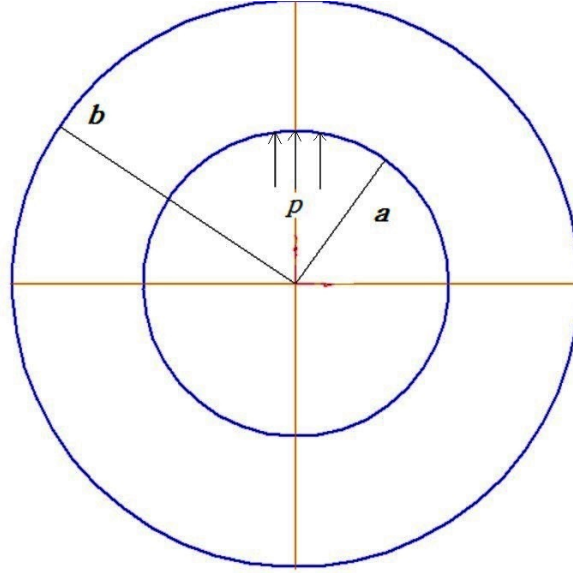


Рис. 1

Положим,

$$\delta = \frac{A - B}{2}, \quad k_1 = k^0 + \delta k'_1, \quad k_2 = k^0 + \delta k'_2, \quad k_3 = \delta k'_3,$$

$$k_{xy} = k_0 + \delta c(x^2 + y^2), \quad k_0, c - const, \quad (2)$$

где  $\delta$  — малый безразмерный параметр.

Тогда

$$A = t + \delta, \quad B = t - \delta, \quad t = \frac{A + B}{2}. \quad (3)$$

В последующем все величины, которые имеют размерность напряжения, предполагаются безразмерными, отнесенными к величине предела текучести  $k_0$ .

Обозначим

$$\frac{k_{xy}}{k_0} = \chi, \quad \frac{p}{k_0} = q. \quad (4)$$

Все величины, имеющие размерность длины, отнесем к некоторой характерной величине  $r_0$  и обозначим:

$$\frac{a}{r_0} = \alpha, \quad \frac{r}{r_0} = \rho. \quad (5)$$

Связь между напряжениями в декартовой системе координат  $x, y$  и напряжениями в полярной системе координат  $\rho, \theta$  имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} = -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{cases} \quad (6)$$



Перейдем к полярным координатам:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (7)$$

Из (1), (2), (6), (7) имеем условие пластичности в полярных координатах:

$$\begin{aligned} & (\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 [A \cos^2 2\theta + B \sin^2 2\theta] + 4\tau_{\rho\theta}^2 [A \sin^2 2\theta + B \cos^2 2\theta] + \\ & + A(k_1 - k_2)^2 + 4Bk_3^2 + 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta)\tau_{\rho\theta}(A - B)\sin 4\theta - \\ & - 4\tau_{\rho\theta}[\sin 2\theta(k_1 - k_2) + 2k_3 \cos 2\theta] - 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta)(\cos 2\theta(k_1 - k_2) - 2k_3 \cos 2\theta) = \\ & = 4(1 + \delta\rho^2 c (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta))^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Решение будем искать в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)}. \quad (10)$$

Предположим, что нулевое, исходное напряженное состояние трубы является осесимметричным, т. е.

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (11)$$

Компоненты напряжений в нулевом приближении определены в [1].

В первом приближении (8) преобразуется к виду:

$$\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_\rho^{(1)} = 2\rho^2 c - 1 + (k'_2 - k'_1) \cos 2\theta + 2k'_3 \sin 2\theta, \quad (12)$$

а (9) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}^{(1)}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Удовлетворим (13), полагая

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \rho^2}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Из (12), (14) найдем

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \theta^2} = 2c\rho^4 - \rho^2 + \rho^2 \cos 2\theta (k'_2 - k'_1) + 2\rho^2 k'_3 \sin 2\theta. \quad (15)$$

Решение уравнения (15) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$\Phi^{(1)} = \Phi_{odn}^{(1)} + \Phi_{chastn}^{(1)}. \quad (16)$$

Однородное уравнение (15) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{odn}^{(1)}}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_{odn}^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_{odn}^{(1)}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (17)$$

Положим,

$$\Phi_{odn}^{(1)} = R_1 \cos(m\theta) + R_2 \sin(m\theta) = R \cos(m\theta + \theta_0), \quad (18)$$

где

$$R_i = R_i(\rho), \quad \cos(\theta_0) = \frac{R_1}{R}, \quad \sin(\theta_0) = \frac{R_2}{R}, \quad R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$

Согласно [1] имеем при  $m = 0$ :

$$R = C_{00}, \quad \text{где } C_{00} - const, \quad (19)$$

при  $m = 1$ :

$$R = \rho(C_{11} + C_{12} \ln \rho), \quad \text{где } C_{11}, C_{12} - const, \quad (20)$$

при  $m \geq 2$ :

$$R = \rho \left[ C_{m1} \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) + C_{m2} \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right], \quad (21)$$

где  $C_{m1}, C_{m2} - const$ .

Согласно (15) при  $m = 0, 2$

$$R = C_{00} + \rho \left[ C_{m1} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{m2} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right]. \quad (22)$$

Частное решение неоднородного уравнения (15) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{chastn}^{(1)} = & -\frac{1}{2} \left( \rho^2 \ln \rho - \frac{\rho^2}{2} \right) + \frac{c\rho^4}{4} + \\ & + \rho^2 \left( \frac{k'_2 - k'_1}{4} \right) \cos 2\theta + \frac{k'_3}{2} \rho^2 \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (14), (16), (21), (22) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)} = & C_{00} + \\ & + \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left\{ C_{m1} \left[ (1 - m^2) \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) - (\sqrt{m^2 - 1}) \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ C_{m2} \left[ \sqrt{m^2 - 1} \cos \left( \sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) + (1 - m^2) \sin \left( \sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) \right] \cos (m\theta + \theta_0) + \\
 &\quad + c\rho^2 - \ln \rho + \left( \frac{k'_1 - k'_2}{2} \right) \cos 2\theta - k'_3 \sin 2\theta,
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 &\sigma_\theta^{(1)} = C_{00} + \\
 &+ \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left\{ C_{m1} \left[ (1 - m^2) \cos \left( \sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) - \left( \sqrt{m^2 - 1} \right) \sin \left( \sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) \right] + \right. \\
 &+ C_{m2} \left[ \sqrt{m^2 - 1} \cos \left( \sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) + (1 - m^2) \sin \left( \sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) \right] \left. \right\} \cos (m\theta + \theta_0) + \\
 &\quad + 3c\rho^2 - (1 + \ln \rho) + \left( \frac{k'_2 - k'_1}{2} \right) \cos 2\theta + k'_3 \sin 2\theta,
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 &\tau_{\rho\theta}^{(1)} = \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left( m\sqrt{m^2 - 1} \right) \times \\
 &\times \left[ -C_{m1} \sin \left( \sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) + C_{m2} \cos \left( \sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) \right] \sin (m\theta + \theta_0) + \\
 &\quad + \frac{(k'_2 - k'_1)}{2} \sin 2\theta - k'_3 \cos 2\theta,
 \end{aligned} \tag{26}$$

где  $C_{00}$ ,  $C_{m1}$ ,  $C_{m2} - const$  при  $m \geq 1$ . Граничные условия на внутреннем контуре трубы согласно [1]

$$\begin{aligned}
 &\sigma_\rho^{(1)p} |_{\rho=\alpha} = 0, \\
 &\tau_{\rho\theta}^{(1)p} |_{\rho=\alpha} = 0.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Из (23), (25), (26) имеем

$$\begin{aligned}
 &C_{00} + \frac{1}{\alpha} C_{21} \left[ -3 \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right] + \\
 &+ C_{22} \left[ \sqrt{3} \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) - 3 \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right] \cos 2\theta = \\
 &= -c\alpha^2 + \ln \alpha - \left( \frac{k'_1 - k'_2}{2} \right) \cos 2\theta + k'_3 \sin 2\theta,
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{2\sqrt{3}}{\alpha} \left[ -C_{21} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) + C_{22} \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right] \sin 2\theta = \\
 &= -\frac{(k'_2 - k'_1)}{2} \sin 2\theta + k'_3 \cos 2\theta.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Из (27), (28) вытекает:

$$\begin{aligned}
 &C_{21} = \frac{\sqrt{3}}{12} \alpha \left( \sqrt{3} \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) - \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right) (k_1 - k_2), \\
 &C_{22} = \frac{\sqrt{3}}{12} \alpha \left( \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) + \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right) (k_1 - k_2), \\
 &C_{00} = \ln \alpha - c\alpha^2.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Подставив (29) в (23)–(25), получим:

$$\sigma_\rho^{(1)} = -\ln\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) + c(\rho^2 - \alpha^2) - \alpha \cos 2\theta \left(\frac{k'_1 - k'_2}{2\rho}\right) \\ \left(-\rho + \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right)\right) - \\ - k'_3 \sin 2\theta$$

$$\sigma_\theta^{(1)} = -\ln\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) - 1 + c(3\rho^2 - \alpha^2) - \alpha \cos 2\theta \left(\frac{k'_1 - k'_2}{2\rho}\right) \\ \left(\rho + \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right)\right) + \\ + k'_3 \sin 2\theta$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(1)} = -\sin 2\theta \left(\frac{k'_1 - k'_2}{2\rho}\right) \left(\rho - \alpha \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right) + \alpha \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right)\right) - k'_3 \cos 2\theta.$$

### ЛИТЕРАТУРА

[1] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.

[2] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г. О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1 (11). С. 63–65.

[3] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Тихонов С. В. О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1 (11). С. 66–69.

[4] Ивлев Д. Д. Вопросы теории идеальнопластической трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1 (9). С. 101–106.

[5] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г. К теории идеальной трансляционной пластической анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1 (9). С. 107–110.

[6] Максимова Л. А. Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 2. С. 91–95.

[7] Никитин А. В., Тихонов С. В. Предельное состояние слоистой трансляционно-анизотропной трубы // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. 2014. № 2 (16). С. 101–104.

[8] Никитин А. В., Тихонов С. В. Упругопластическое состояние трансляционно-анизотропной линейно-неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2013. № 4 (80). С. 148–155.

[9] Никитин А. В., Тихонов С. В. Влияние нелинейной неоднородности материала на упругопластическое состояние толстостенной трубы под воздействием внутреннего давления при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2013. № 4 (80). С. 137–147.

[10] Никитин А. В., Миронов Б. Г. Пределное состояние многослойной анизотропной толстостенной трубы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 58–67.

[11] Тихонов С. В. О двусном растяжении плоскости из упругопластического неоднородного материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 2. С. 161–168.

*A. V. Nikitin, A. V. Balashnikova, S. V. Tikhonov*

## ABOUT THE DEFINITION OF THE LIMIT STATE OF THE INHOMOGENEOUS PIPES UNDER THE ACTION OF INTERNAL PRESSURE

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** The nonhomogeneous thick-walled tube under internal pressure. It is assumed that it retains the yield strength value is constant along parallel lines. Defined stress condition for the pipe. Translational anisotropy introduced in [2]–[6]. Limit state of laminated tubes in the presence of the translational anisotropy was studied in [7], [10]. The elastoplastic state of the inhomogeneous pipe is considered in [8], [9].

**Keywords:** plasticity, heterogeneity, pipe, anisotropy, pressure.

## REFERENCES

[1] Ivlev D. D., Ershov L. V. perturbation Method in the theory of elastic-plastic body. M.: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian).

[2] Ivlev D. D., Maksimov L. A., Mironov B. G. On the dissipative function in the theory of translational idealisations anisotropy in the case of plane deformation // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2012. № 1(11). P. 63–65. (in Russian).

[3] Ivlev D. D., Maksimov L. A., Tikhonov S. V. About the dissipative function in the theory of translational idealisations anisotropy in the generalization of the conditions Mises plasticity // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2012. № 1 (11). P. 66–69. (in Russian).

---

*Nikitin Andrey Vitalevich*, Candidate of physico-mathematical Sciences, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

*Balashnikova Angelika Veniaminovna*, Candidate of physico-mathematical Sciences, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

*Tikhonov Sergey Vladimirovich*, Candidate of physico-mathematical Sciences, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

- [4] Ivlev D. D. theory idealisations translational anisotropy // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2011. № 1 (9). P. 101–106. (in Russian).
- [5] Ivlev D. D., Maksimov L. A., Mironov B. G. The theory of ideal translational plastic anisotropy // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2011. № 1 (9). P. 107–110. (in Russian).
- [6] Maksimova L. A. On the elastoplastic state of the inhomogeneous pipe under internal pressure // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2007. № 2. P. 91–95. (in Russian).
- [7] Nikitin A. V., Tikhonov S. V. Limiting condition layered translational anisotropic pipe // proceedings of VIII all-Russian conference on mechanics of deformable solids. 2014. № 2 (16). P. 101–104. (in Russian).
- [8] Nikitin A. V., Tikhonov S. V. Elastoplastic state of PA - linearly anisotropic inhomogeneous pipe under internal pressure // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2013. № 4 (80). P. 148–155. (in Russian).
- [9] Nikitin A. V., Tikhonov S. V. The influence of nonlinear inhomogeneity of the material on the elastoplastic state of thick-walled pipes under the influence of internal pressure in translational anisotropy // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2013. № 4 (80). P. 137–147. (in Russian).
- [10] Nikitin A. V. Limiting condition multilayer anisotropic thick-walled pipes / A. V. Nikitin, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2014. № 4 (22). P. 58–67. (in Russian).
- [11] Tikhonov S. V. On the biaxial stretching of the plane of heterogeneous elastic-plastic material // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2007. № 2. P. 161–168. (in Russian).

А. Д. Москалик, В. П. Радченко

## ОЦЕНКА КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО И ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЙ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННОЙ ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЕЙ

*Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия*

**Аннотация.** Рассматривается толстостенная труба с эллиптически возмущенным внешним контуром под действием внутреннего давления в условиях установившейся ползучести. Построено приближенное аналитическое решение задачи, методом малого параметра до второго приближения включительно. Рассмотрен случай плоского деформированного состояния. Для оценки погрешности приближенного решения задача решена и численно, методом конечных элементов. Выполнен сравнительный анализ напряжений, полученных методом малого параметра и численным методом. Показано, что для труб со значениями показателя установившейся ползучести от 3 до 11 погрешность отклонения приближенного аналитического решения для напряжений во втором приближении от численного решения составляет не более 10 % вплоть до величины сжатия эллипса (отношение разности полуосей к большей полуоси) 6 %.

**Ключевые слова:** толстостенная труба, эллиптический внешний контур, установившаяся ползучесть, метод малого параметра, приближенное аналитическое решение, второе приближение, конечно-элементная модель, численное решение, погрешность.

УДК: 539.376:517.958

**Введение.** Один из подходов в решении краевых задач ползучести для элементов конструкций с возмущенными границами состоит в линеаризации граничных условий и реологических соотношений на основе метода малого параметра. Детально метод малого параметра для упругопластических тел изложен в монографии [1] и систематически развивался в научной школе Д. Д. Ивлева, в работах его коллег и учеников на случай различных условий пластичности, составных упругопластических тел, различных типов концентраторов и т. д. Так, предельное состояние многослойной анизотропной толстостенной трубы рассмотрено в работе [2]; решение задачи об

---

© Москалик А. Д., Радченко В. П., 2016

*Москалик Анна Давидовна*

**e-mail:** annmoskalik1@gmail.com, аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

*Радченко Владимир Павлович*

**e-mail:** radch@samgtu.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Поступила 28.01.2016

упругопластическом состоянии двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии приведено в работе [3]; эллиптическая форма отверстия в тонкой пластине рассмотрена в работе [4]; упругопластическое состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, при двусосном растяжении – в работе [5]. Для эллиптической упругопластической трубы построено первое приближение методом малого параметра в монографии [6]. Следует отметить, что все подобные задачи решались в основном в упругопластической области, однако во всех работах отсутствуют численные оценки погрешности построенных приближенных решений для любого приближения. Имеются единичные попытки решения задачи с возмущенными границами и в условиях ползучести [7–9].

Целью данной работы является сравнение приближенного аналитического решения задачи об установившейся ползучести толстостенной трубы с эллиптическим внешним контуром, находящейся под внутренним давлением, полученного с помощью метода малого параметра, с численным решением этой же задачи на основе метода конечных элементов, реализованным с помощью программного комплекса ANSYS.

**Постановка задачи.** Рассматривается толстостенная труба под действием внутреннего давления  $q$  с внутренним контуром в виде окружности радиусом  $r = h$ , внешним эллиптическим контуром с большой полуосью  $r = a$  и малой полуосью  $r = b$  (см. рис. 1).

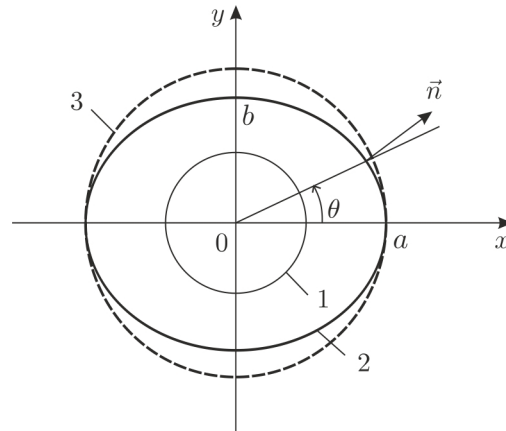


Рис. 1. Схема трубы с возмущенной внешней границей: 1 — внутренний контур трубы  $r = h$ ; 2 — внешний эллиптический контур трубы; 3 — внешний контур цилиндрической трубы  $r = a$  для осесимметричного случая

В качестве малого параметра принимается величина сжатия эллипса

$$\delta = (a - b)/a = 1 - \sqrt{1 - e^2}, \quad (1)$$

где  $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$  — эксцентриситет эллипса. При получении приближенного аналитического решения предполагается, что упругие деформации малы по сравнению с деформациями ползучести и ими можно пренебречь. Таким образом, рассматриваются установившиеся поля скоростей деформаций ползучести и напряжений. Задача решается для случая плоского деформированного состояния в пределах разложения до второго порядка по малому параметру.



Разложение тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , тензора скоростей деформаций ползучести  $\dot{\epsilon}_{ij}$  и вектора скоростей перемещений  $\dot{u}_i$  по малому параметру до членов второго порядка имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)} + \delta^2\sigma_{ij}^{(2)} + O(\delta^3), \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \dot{\epsilon}_{ij}^{(0)} + \delta\dot{\epsilon}_{ij}^{(1)} + \delta^2\dot{\epsilon}_{ij}^{(2)} + O(\delta^3), \\ \dot{u}_i &= \dot{u}_i^{(0)} + \delta\dot{u}_i^{(1)} + \delta^2\dot{u}_i^{(2)} + O(\delta^3),\end{aligned}$$

где индексы 0, 1 и 2 соответствуют нулевому, первому и второму приближениям.

Принимая центр эллипса за полюс, уравнение эллиптического внешнего контура трубы в полярных координатах имеет вид:

$$r = b/\sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}.$$

Выражая эксцентриситет в последнем соотношении через сжатие  $\delta$  с использованием формулы (1), имеем

$$r = a(1 - \delta)/\sqrt{1 + (\delta^2 - 2\delta)\cos^2\theta}.$$

Раскладываем полученное соотношение в степенной ряд по параметру  $\delta$  и, ограничиваясь членами второго порядка включительно, получаем

$$r = a + \frac{a}{2}(\cos 2\theta - 1)\delta + \frac{3a}{16}(\cos 4\theta - 1)\delta^2. \quad (2)$$

Поскольку задача решается в условиях плоского деформированного состояния, то

$$\dot{\epsilon}_{zz} = 0. \quad (3)$$

Предполагается несжимаемость материала для скоростей деформаций на стадии установившейся ползучести, что находит экспериментальное подтверждение [10]:

$$\dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = 0. \quad (4)$$

Постановка задачи включает в себя уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} = -r\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} - 2\sigma_{r\theta}, \quad (6)$$

которые линейны относительно компонент напряжений и, следовательно, выполняются для каждого приближения.

Аналогично для каждого приближения выполняются уравнения совместности деформаций:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{\partial\dot{u}_r}{\partial r}, \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial\dot{u}_\theta}{\partial\theta} + \frac{\dot{u}_r}{r}, \\ \dot{\epsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{u}_r}{\partial\theta} + \frac{\partial\dot{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\dot{u}_\theta}{r}\right).\end{aligned} \quad (7)$$

В качестве определяющих используются квазилинейные уравнения установившейся ползучести со степенным законом [10]

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2}A\sigma_e^{n-1}S_{ij}, \quad (8)$$

где  $n, A$  — постоянные характеристики материала,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}$  — девиатор напряжений,  $\sigma_e$  — интенсивность напряжений для случая плоской деформации:

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (4\sigma_{r\theta})^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

**Приближенное аналитическое решение задачи.** Согласно [10] решение для нулевого приближения имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)}(r) &= Q[1 - (a/r)^p], \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r) &= Q[1 - (1-p)(a/r)^p], \\ \sigma_{zz}^{(0)}(r) &= Q[1 - (1+p)(a/r)^p]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь введено обозначение

$$Q = \frac{q}{(a/h)^p - 1}, \quad p = 2/n. \quad (10)$$

При этом  $\sigma_{r\theta}^{(0)} = 0$  ввиду симметричности задачи для нулевого приближения.

Поскольку граница при  $r = h$  не возмущена и задано давление  $q$ , линеаризованное граничное условие на внутреннем радиусе трубы для последующих (после нулевого) приближений представимо в виде

$$\sigma_{rr}^{(k)} \Big|_{r=h} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(k)} \Big|_{r=h} = 0, \quad (11)$$

$k = 1, 2$  — номера приближений.

Линеаризованное граничное условие для первого приближения при  $r = a$ , согласно [1], зависит от нулевого приближения (9):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=a} &= -\frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} \cdot \frac{a}{2} (\cos 2\theta - 1) = \frac{Qp}{2} - \frac{Qp}{2} \cos 2\theta, \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=a} &= \Delta\sigma^{(0)} \sin 2\theta = -Qp \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (12)$$

где для удобства записи вводится обозначение

$$\Delta\sigma^{(0)} = \sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)}.$$

Уравнения (4)–(8) с граничными условиями (11), (12) образуют краевую задачу для нахождения первого приближения в напряжениях и дальнейшего полного построения решения поставленной краевой задачи с учетом первого приближения.

Решение для первого приближения поставленной задачи в напряжениях, согласно [10], определяется с использованием функции

$$\begin{aligned} R(r) &= C_{11}r^{(p+l)/2} \cos(y \ln r) + C_{12}r^{(p+l)/2} \sin(y \ln r) + \\ &+ C_{13}r^{(p-l)/2} \cos(y \ln r) + C_{14}r^{(p-l)/2} \sin(y \ln r), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $C_{11} \div C_{14}$  — константы интегрирования, коэффициенты  $l$  и  $y$  находятся при определении функции  $R(r)$  для конкретного материала согласно [9]. Так, при  $n = 3, 03$

коэффициенты  $l = 3, 69$ ,  $y = 0, 82$ ; при  $n = 10, 96$  соответственно  $l = 2, 61$ ,  $y = 1, 56$ . Тогда напряжения для первого приближения определяются в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta}^{(1)} &= \frac{1}{2L} \left[ R'' r^{-p+2} - R' r^{-p+1} + 4Rr^{-p} \right] \sin 2\theta = \sigma_{r\theta}^R \sin 2\theta, \\ \sigma_{rr}^{(1)} &= \frac{1}{L} \int \left[ -R'' r^{-p+1} + (4p+1)R' r^{-p} - (4p+4)Rr^{-p-1} \right] dr \cos 2\theta - \frac{2C}{L} r^{-p} + K^\psi = \\ &= \sigma_{rr}^R \cos 2\theta + \sigma_{rr}^\Psi, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} &= \frac{1}{2L} \left[ R''' r^{-p+3} - (p-3)R'' r^{-p+2} + (p+5)R' r^{-p+1} + (8-4p)Rr^{-p} \right] \cos 2\theta + \\ &+ \frac{2C}{L} (p-1)r^{-p} + K^\psi = \sigma_{\theta\theta}^R \cos 2\theta + \sigma_{\theta\theta}^\Psi. \quad (14)\end{aligned}$$

Здесь введено обозначение  $L = 3A(\sqrt{3}Qa^p/n)^{n-1}$ ; знак  $(\prime)$  используется для обозначения дифференцирования по  $r$ . Константы интегрирования  $C$ ,  $K^\psi$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{14}$  определяются путем подстановки в граничные условия (11), (12) для первого приближения.

Линеаризованное граничное условие для второго приближения при  $r = a$  зависит от нулевого и первого приближений:

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=a} &= \left[ \frac{1}{2} \Delta\sigma^{(0)} + \frac{1}{2} \Delta\sigma^R + \frac{a}{4} \frac{d}{dr} (\Delta\sigma^{(0)} - \sigma_{r\theta}^R) \right]_{r=a} \sin 4\theta + \\ &+ \left[ \frac{1}{2} \Delta\sigma^{(0)} + \Delta\sigma^\Psi - \frac{a}{2} \frac{d}{dr} (\Delta\sigma^{(0)} - \sigma_{r\theta}^R) \right]_{r=a} \sin 2\theta, \\ \sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=a} &= \left[ \sigma_{r\theta}^R - \frac{a}{4} \frac{d\sigma_{rr}^R}{dr} - \frac{a^2}{16} \frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2} - \frac{3a}{16} \frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} - \frac{1}{2} \Delta\sigma^{(0)} \right]_{r=a} \cos 4\theta + \\ &+ \left[ \frac{a}{2} \frac{d\sigma_{rr}^R}{dr} + \frac{a^2}{4} \frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2} - \frac{a}{2} \frac{d\sigma_{rr}^\Psi}{dr} \right]_{r=a} \cos 2\theta + \\ &+ \left[ \frac{a}{2} \frac{d\sigma_{rr}^\Psi}{dr} + \frac{3a}{16} \frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} + \frac{1}{2} \Delta\sigma^{(0)} - \frac{a}{4} \frac{d\sigma_{rr}^R}{dr} - \frac{3a^2}{16} \frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2} \right]_{r=a}. \quad (15)\end{aligned}$$

В решении краевой задачи для второго приближения используются функции, зависящие от нулевого и первого приближений:

$$\begin{aligned}A_4(r) &= \frac{s}{2\Delta\sigma^{(0)}} \left( \frac{[\Delta\sigma^R]^2}{2p} + [\sigma_{r\theta}^R]^2 \right), \quad A_2(r) = \frac{s}{p\Delta\sigma^{(0)}} \Delta\sigma^R \Delta\sigma^\Psi, \\ A_0(r) &= \frac{s}{2\Delta\sigma^{(0)}} \left( \frac{[\Delta\sigma^R]^2}{2p} + \frac{[\Delta\sigma^\Psi]^2}{p} - [\sigma_{r\theta}^R]^2 \right), \quad B_4(r) = \frac{s}{2p\Delta\sigma^{(0)}} \Delta\sigma^R \sigma_{r\theta}^R, \\ B_2(r) &= \frac{s}{p\Delta\sigma^{(0)}} \Delta\sigma^R \Delta\sigma^\Psi,\end{aligned}$$

где  $\Delta\sigma^R = \sigma_{rr}^R - \sigma_{\theta\theta}^R$ ,  $\Delta\sigma^\Psi = \sigma_{rr}^\Psi - \sigma_{\theta\theta}^\Psi$ .

Решение задачи по нахождению второго приближения в напряжениях представимо в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(2)} = & \left( \frac{2}{L} \int \left[ -V'' r^{-p+1} + (4p+1)V' r^{-p} - (4p+16)V r^{-p-1} \right] dr + \right. \\ & + \frac{4B_4 + A_4}{r} + K^V \left. \right) \cos 4\theta + \left( \frac{1}{L} \int \left[ -W'' r^{-p+1} + (4p+1)W' r^{-p} - (4p+4)W r^{-p-1} \right] dr + \right. \\ & \left. + \frac{2B_2 + A_2}{r} + K^W \right) \cos 2\theta - \frac{2C}{L} r^{-p} + K^U = \sigma_{rr}^V \cos 4\theta + \sigma_{rr}^W \cos 2\theta + \sigma_{rr}^U, \quad (16) \end{aligned}$$

где  $K^V$ ,  $K^W$  и  $K^U$  – константы интегрирования.

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(2)} = & \left[ \frac{1}{2L} (V'' r^{-p+2} - V' r^{-p+1} + 16V r^{-p}) + B_4(r) \right] \sin 4\theta + \\ & + \left[ \frac{1}{2L} (W'' r^{-p+2} - W' r^{-p+1} + 4W r^{-p}) + B_2(r) \right] \sin 2\theta = \sigma_{r\theta}^V \sin 4\theta + \sigma_{r\theta}^W \sin 2\theta. \quad (17) \end{aligned}$$

Функции  $V(r)$ ,  $W(r)$  зависят от характеристик нелинейности материала:

$$\begin{aligned} V(r) = & [V_1(r) + v_1] r^{(p+m)/2} \cos(t \ln r) + [V_2(r) + v_2] r^{(p+m)/2} \sin(t \ln r) + \\ & + [V_3(r) + v_3] r^{(p-m)/2} \cos(t \ln r) + [V_4(r) + v_4] r^{(p-m)/2} \sin(t \ln r), \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(r) = & [W_1(r) + w_1] r^{(p+l)/2} \cos(y \ln r) + [W_2(r) + w_2] r^{(p+l)/2} \sin(y \ln r) + \\ & + [W_3(r) + w_3] r^{(p-l)/2} \cos(y \ln r) + [W_4(r) + w_4] r^{(p-l)/2} \sin(y \ln r), \quad (19) \end{aligned}$$

где  $v_1 \div v_4$ ,  $w_1 \div w_4$  – константы интегрирования;  $l = l(p)$  и  $y = y(p)$  идентичны первому приближению,  $m = m(p)$ ,  $t = t(p)$  – известные значения для конкретного материала, определяемые согласно [9] при нахождении функции  $V(r)$ . Так, при  $n = 3,03$  коэффициенты  $m = 6,73$ ,  $t = 2,18$ ; при  $n = 10,96$  соответственно  $m = 3,95$ ,  $t = 3,50$ . Использование первого и второго приближений метода малого параметра позволяет определить напряжения и скорости деформаций ползучести в трубе с внешним эллиптическим контуром в зависимости от сжатия  $\delta = (a - b)/a$ , принимаемой в качестве малого параметра.

**Анализ приближенного аналитического решения задачи.** В качестве модельного примера рассмотрена труба с внутренним радиусом  $h = 0,115$  м, внешней большой полуосью эллипса  $a = 0,15$  м под действием внутреннего давления  $q = 22,07$  МПа. В качестве модельных материалов рассмотрены углеродистая сталь [11] и жаропрочный сплав ХН73МБТЮ(ЭИ698) [12], реологические характеристики которых в уравнениях состояния (8) следующие:

$$\begin{aligned} \text{углеродистая сталь:} \quad & n = 3,03, \quad A = 9,04 \cdot 10^{-9} \quad T = 649^\circ \text{C}; \\ \text{ХН73МБТЮ (ЭИ698):} \quad & n = 10,96, \quad A = 4,57 \cdot 10^{-33} \quad T = 775^\circ \text{C}. \end{aligned}$$

В таблице 1 приведены значения:  $\sigma_{\theta\theta}^* = \sigma_{\theta\theta}^{(0+1)}/\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$  – при учете первого приближения на внешней границе трубы при  $\tilde{r} = a/h + \delta \cdot a(\cos 2\theta - 1)/2h$ ;  $\sigma_{\theta\theta}^{**} = \sigma_{\theta\theta}^{(0+1+2)}/\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$  – при учете второго приближения на внешней границе трубы при  $\tilde{r} = a/h + \delta \cdot a(\cos 2\theta - 1)/2h + \delta^2 \cdot 3a(\cos 4\theta - 1)/16h$ , вычисленные с шагом 0,01 для различных величин сжатия  $\delta$  при  $\theta = \pi/2$  для углеродистой стали и жаропрочного сплава ХН73МБТЮ(ЭИ698).

Таблица 1. Значения тангенциального напряжения для трубы с эллиптическим внешним контуром

$\delta, \%$	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
Углеродистая сталь											
$\sigma_{\theta\theta}^*$	1,0	1,06	1,12	1,18	1,24	1,30	1,35	1,41	1,46	1,51	1,56
$\sigma_{\theta\theta}^{**}$	1,0	1,07	1,13	1,21	1,29	1,37	1,45	1,54	1,63	1,72	1,82
ХН73МБТЮ (ЭИ698)											
$\sigma_{\theta\theta}^*$	1,0	1,06	1,12	1,18	1,24	1,30	1,36	1,42	1,48	1,54	1,60
$\sigma_{\theta\theta}^{**}$	1,0	1,06	1,13	1,20	1,27	1,34	1,42	1,49	1,56	1,63	1,70

Из данных, приведенных в таблице, можно сделать вывод, что при возрастании величины сжатия эллипса до  $\delta = 0,1$  тангенциальные напряжения в опасном сечении при  $\theta = \pi/2$  возрастают в 1,7–1,8 раза.

**Конечно-элементная модель задачи.** Для построения численного решения разработана конечно-элементная модель толстостенной трубы с эллиптическим внешним контуром, которая реализована с помощью программного комплекса ANSYS. Решение выполняется двумя шагами:

- 1) упругое решение;
- 2) решение с учётом свойств ползучести материала за время  $1 \cdot 10^3$  ч, поскольку за это время напряженное состояние выходит на стационарный режим, соответствующий стадии установившейся ползучести.

Модуль упругости  $E$  и плотность рассматриваемых модельных материалов принимаются постоянными для выбранного материала и температуры:

углеродистая сталь:  $E = 1.56 \cdot 10^5$  МПа,  $\rho = 7630$  кг/м<sup>3</sup>,  $T = 649$  °C;

ХН73МБТЮ (ЭИ698):  $E = 1.44 \cdot 10^5$  МПа,  $\rho = 7900$  кг/м<sup>3</sup>,  $T = 775$  °C.

При расчетах используется плоский восьмиузловой элемент PLANE183, пригодный для моделирования плоского деформированного состояния и позволяющий учитывать большие деформации при установившейся ползучести.

Принимая во внимание симметрию задачи, в ANSYS была построена конечно-элементная дискретная модель для одной четвертой трубы. Количество элементов для 1/4 трубы составляет порядка 15000. Отсутствующая часть трубы заменена условиями симметричности по оси  $x$  и по оси  $y$  (см. рис. 1).

Для оценки адекватности конечно-элементной модели на предварительном этапе решается задача об осесимметричной трубе, находящейся в условиях установившейся ползучести под внутренним давлением  $q$ , что соответствует нулевому приближению (9) поставленной задачи.

При значениях времени  $t = 10$  часов изменения напряжений становятся пренебрежимо малы, а деформации ползучести изменяются линейно, что позволяет говорить о состоянии установившейся ползучести материала при  $t \geq 10$  часов. При анализе результата решения задачи в условиях установившейся ползучести в качестве конечного было выбрано время  $t = 10^3$  часов.

**Оценка погрешности приближенного аналитического решения от численного.** Была проведена оценка погрешности приближенного аналитического и конечно-элементного решений задачи для осесимметричной трубы и трубы с эллиптическим

внешним контуром с учетом второго приближения включительно на основе значений радиальных  $\sigma_{rr}$  и тангенциальных  $\sigma_{\theta\theta}$  напряжений в 15 равноотстоящих точках по координате  $r_i$ :  $h \leq r_i \leq a + \delta \cdot a(\cos 2\theta - 1)/2 + \delta^2 \cdot 3a(\cos 4\theta - 1)/16$  ( $i = \overline{1, 15}$ ) при  $\theta = \pi/2$ . Вычисление погрешности проведено по двум нормам:

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{15} |\sigma_{\omega\omega_i}^{(0+1+2)} - \sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}|}{\sum_{i=1}^{15} |\sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}|} \quad \text{и} \quad \sigma = \left( \frac{\sum_{i=1}^{15} [\sigma_{\omega\omega_i}^{(0+1+2)} - \sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}]^2}{\sum_{i=1}^{15} [\sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}]^2} \right)^{1/2}, \quad \omega = r, \theta,$$

где  $\sigma_{\omega\omega_i}^{(0+1+2)} = \sigma_{\omega\omega}^{(0+1+2)}(r_i)$ ,  $\sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}} = \sigma_{\omega\omega}^{\text{ANS}}(r_i)$  ( $\omega = r, \theta$ ) – расчетные значения для аналитического (два приближения) и численного решений соответственно.

В таблице 2 приведены оценки погрешности между приближенным аналитическим и конечно-элементным расчетами в процентах для труб из малоуглеродистой стали и сплава ЭИ698, используемых в качестве модельных примеров. Через дробную черту приведены погрешности по двум нормам:  $s/\sigma$ .

Таблица 2. Погрешность приближенного аналитического решения от численного для трубы с эллиптическим внешним контуром при  $\theta = \pi/2$

$\delta$	0	0,02	0,04	0,06
Углеродистая сталь				
$\sigma_{rr}$	0,14/0,32	2,01/1,94	2,61/2,55	2,98/2,91
$\sigma_{\theta\theta}$	0,03/0,07	3,47/4,04	6,21/7,36	9,72/10,03
ХН73МБТЮ (ЭИ698)				
$\sigma_{rr}$	0,09/0,20	1,67/1,61	1,87/1,79	2,23/2,24
$\sigma_{\theta\theta}$	0,01/0,02	2,55/3,24	5,11/6,11	8,98/9,04

Графики на рис. 2 и 3 построены для радиальной и тангенциальной компонент тензора напряжений при  $\delta = 0,04$  и значении угла  $\theta = \pi/2$ , соответствующего максимальным значениям тангенциального напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$ . Верхний индекс означает количество приближений, используемых для оценки напряжения, индекс (ANS) означает конечно-элементное решение.

**Заключение.** В работе проведен сравнительный анализ приближенного аналитического и конечно-элементного решений задачи о толстостенной трубе с эллиптическим внешним контуром в условиях установившейся ползучести. Анализ данных, представленных в работе, показывает, что приближенное аналитическое решение задачи имеет тенденцию к сходимости. Величина сжатия  $\delta = 6\%$  для рассмотренной модельной задачи для трубы в абсолютных величинах составляет 9 мм, что при толщине данной трубы 35 мм составляет 26% толщины. Тем не менее при  $\delta = 6\%$  погрешность аналитического решения от численного не превышает 10%. Таким образом, можно утверждать, что приближенное аналитическое решение применимо в прикладных задачах при величине сжатия эллиптического внешнего контура до  $\delta = 6\%$ .

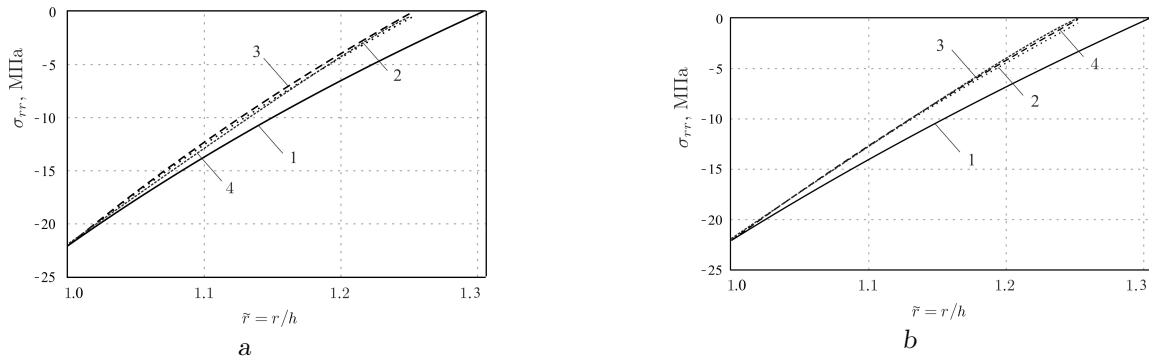


Рис. 2. Радиальные напряжения для трубы с внешним эллиптическим контуром из углеродистой стали (а) и сплава ХН73МБТЮ(ЭИ698) (b) при  $\theta = \pi/2$ ,  $\delta = 0,04$ : 1 -  $\sigma_{rr}^{(0)}$ , 2 -  $\sigma_{rr}^{(0+1)}$ , 3 -  $\sigma_{rr}^{(0+1+2)}$ , 4 -  $\sigma_{rr}^{ANS}$

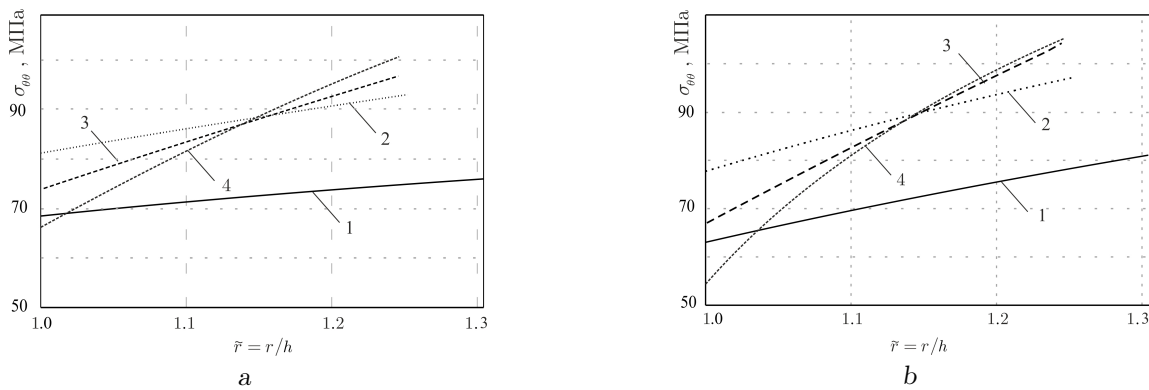


Рис. 3. Тангенциальные напряжения для трубы с внешним эллиптическим контуром из углеродистой стали (а) и сплава ХН73МБТЮ(ЭИ698) (b) при  $\theta = \pi/2$ ,  $\delta = 0,04$ : 1 -  $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ , 2 -  $\sigma_{\theta\theta}^{(0+1)}$ , 3 -  $\sigma_{\theta\theta}^{(0+1+2)}$ , 4 -  $\sigma_{\theta\theta}^{ANS}$

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М. : Наука, 1978. 208 с.

[2] Никитин А. В., Миронов Б. Г. Предельное состояние многослойной анизотропной толстостенной трубы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 58–67.

[3] Кержаев А. П. Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2 (16). С. 71–81.

[4] Павлова Т. Н. Об определении перемещений в задаче напряженно-деформированного состояния тонкой пластины с эллиптическим отверстием // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 1 (65). С. 64–69.

[5] Тихонов С. В., Рыбакова Т. И. Упругопластическое состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двусосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3 (25). С. 138–146.

[6] Мирсалимов В. И. Неоднородные упругопластические задачи. М. : Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 256 с.

[7] Радченко В. П., Башкинова Е. В. Решение краевых задач установившейся ползучести в полярных координатах методом возмущений // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 1998. № 5. С. 86–91.

[8] Москалик А. Д. Применение метода возмущений к задаче о несоосной трубе в условиях установившейся ползучести // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2013. № 4 (33). С. 76–85.

[9] Радченко В. П., Москалик А. Д. Приближенное аналитическое решение задачи для трубы с эллиптическим внешним контуром в условиях установившейся ползучести // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2014. № 4 (37). С. 65–84.

[10] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М. : Наука, 1979. 744 с.

[11] Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М. : Машиностроение, 1975. 400 с.

[12] Радченко В. П., Саушкин М. Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. М.: Машиностроение-1, 2005. 226 с.



A. D. Moskalik, V. P. Radchenko

**THE EVALUATION OF FINITE ELEMENT AND APPROXIMATE SOLUTIONS  
OF THE STEADY-STATE CREEP FOR THICK-WALLED TUBE WITH  
ELLIPTICALLY PERTURBED OUTER BORDER**

*Samara State Technical University, Samara, Russia*

*Samara State Technical University, Samara, Russia*

**Abstract.** The thick-walled tube with elliptically perturbed outer contour under the impact of internal pressure in a steady-state creep is considered. The approximate analytical solution of the problem by small parameter method to the second approximation inclusive was constructed. The case of plane strain was considered. For the error estimation of the approximate solution the problem was solved also numerically by the finite element method. A comparative analysis of the stresses, obtained by the small parameter method and numerical method is executed. It was shown that the error of deviation of the approximate analytical solution for stresses in the second approximation from numerical solution for the tubes with exponent of the steady-state creep from 3 to 11 is not more than 10 % till flattening factor of ellipse (that is ratio of the difference of semi-axes to the semi-major axis) 6 %.

**Keywords:** thick-walled tube, elliptic outer contour, steady-state creep, small parameter method, approximate analytical solution, second approximation, finite element model, numerical solution, solution error.

**REFERENCES**

- [1] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elasto-plastic solids. M.: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian).
- [2] Nikitin A. V., Mironov B. G. Limit condition of a multilayered anisotropic thick-walled pipe // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2014. No 4 (22). P. 58–67. (in Russian).
- [3] Kerzhayev A. P. An elasto-plastic condition of the two-layer thick-walled pipe which is under the influence of internal pressure, at transmitting anisotropy // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2013. № 2 (16). P. 71–81. (in Russian).
- [4] Pavlova T. N. On the determination of displacements in the problem of the stress-strain state of a thin plate with an elliptic hole. // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2010. № 1 (65). P. 64–69. (in Russian).
- [5] Tikhonov S. V., Rybakova T. I. Biaxial stretching of elastoplastic plain with eccentric, circular and anisotropic inclusion // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2015. № 3 (25). P. 138–146. (in Russian).

---

*Radchenko Vladimir Pavlovich*

e-mail: radch@samgtu.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science, Samara State Technical University, Samara, Russia.

*Moskalik Anna Davidovna*

e-mail: annmoskalik1@gmail.com, Postgraduate student, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Samara State Technical University, Samara, Russia.

- [6] Mirsalimov V. M. Non-one-dimensional elastoplastic problems. M.: Nauka, 1987. 256 p. (in Russian).
- [7] Radchenko V. P., Bashkinova E. V. Solution of the value boundary problems for steady creep in polar coordinates by the perturbation method // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Tekhnicheskie Nauki, 1998. № 5. P. 86–91. (in Russian).
- [8] Moskalik A. D. The application of perturbation method to problem of misaligned tube in conditions of steady-state creep // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2013. № 4 (33). P. 76–85. (in Russian).
- [9] Radchenko V. P., Moskalik A. D. Approximate analytical solution of the problem for the tube with elliptic outer contour under steady-state creep condition // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2014. № 4 (37). P. 65–84. (in Russian).
- [10] Rabotnov Yu. N. Mechanics of Deformable Solids. M.: Nauka, 1979. 744 p. (in Russian)
- [11] Malinin N. N. Applied Theory of Plasticity and Creep. M.: Mashinostroenie, 1975. 400 p. (in Russian).
- [12] Radchenko V. P., Saushkin M. N. Creep and Relaxation of Residual Stresses in Hardened Structures. M. : Mashinostroenie-1, 2005. 226 p. (in Russian).

В. И. Штука

## О РАСЧЕТАХ ДОБАВОЧНОГО ВСЕСТОРОННЕГО ДАВЛЕНИЯ В ДИНАМИКЕ УДАРНОГО НАГРУЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО УПРУГОГО СЛОЯ

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия*

**Аннотация.** На примере ударного нагружения несжимаемого цилиндрического упругого слоя, содержащего в себе предварительные деформации, указаны особенности построения лучевых разложений для приближенного вычисления добавочного всестороннего давления и последующих численных расчетов.

**Ключевые слова:** динамика твердого тела, нелинейная упругость, ударные волны, несжимаемость, численные методы, лучевые ряды, функция добавочного всестороннего давления

УДК: 539.3

**Введение.** Свойства ударных волн (поверхностей разрывов деформаций) в несжимаемой упругой среде изучались неоднократно [1], [2], [3], [4], [5] дано решение авторской задачи, в [3] предложен вариант метода возмущений, связанный со сращиванием внешнего квазистатического разложения решения с прифронтальной асимптотикой за ударной волной. Здесь будет рассмотрен иной метод построения приближенного решения, который предложившими его авторами [6], [7] назван лучевым. Он состоит в представлении решения за поверхностями разрывов ускорений в форме степенных рядов по времени или по лучевой координате. Для коэффициентов таких рядов, называемых лучевыми, из дифференциальных уравнений движения и условий совместности разрывов рекуррентно следуют обыкновенные дифференциальные уравнения (уравнения затухания). Такое положение нарушается только в случае ударных волн. Являясь принципиально нелинейным явлением, ударная волна имеет скорость своего движения, несовпадающую со скоростью распространения возмущений по среде и от того рекуррентность в получении уравнений затухания не следует. Это вызвало иное предложение для обобщения метода построения лучевых рядов [8], [9], связанное с разложением интенсивности ударной волны в ряд, коэффициенты которого включают в себя  $\delta$ -производные от функции, определенной на движущейся поверхности сильных

---

© Штука В. И., 2016  
*Штука Виктор Игоревич*  
e-mail: onslice@mail.ru, аспирант, инженер-математик, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00292).

Поступила 02.04.2016

разрывов. Рекуррентная форма геометрических и кинематических условий совместности разрывов [10], [11] позволила последовательно вычислять коэффициенты такого степенного ряда. Таким способом были приближенно решены одномерные задачи об ударном нагружении предварительно деформированного полупространства [9], об антиплоском и скручивающем ударе по свободному несжимаемому полупространству [12], о таком же ударе по деформированному несжимаемому упругому цилиндрическому слою [13]. В рассмотренных задачах [9], [12], [13] вычислению добавочного давления, как обычно, внимания не уделяется. Считается, что по полученным перемещениям вычислить его не составляет труда. Однако это не всегда просто. Здесь укажем особенности.

**Модельные соотношения.** Рассматривается математическая модель несжимаемого упругого материала в адиабатическом приближении, которая в декартовой системе координат имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), & \sigma_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}) - p\delta_{ij}, \\ 2\alpha_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}, & v_i &= \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \\ \dot{u}_i &= \frac{\partial u_i}{\partial t}, & u_{i,j} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j},\end{aligned}\quad (1)$$

где  $u_i$  и  $v_i$  – компоненты векторов перемещений и скоростей,  $\alpha_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  – тензоры деформаций Альманзи и напряжений Коши – Эйлера,  $p$  – функция добавочного всестороннего давления,  $\rho = const$  – плотность среды,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Индексом после запятой обозначена производная по соответствующей пространственной координате, точкой сверху – по времени. Упругий потенциал изотропной несжимаемой упругой среды  $W(A_1, A_2)$  – плотность распределения внутренней энергии, представлен своим разложением в ряд Тейлора относительно свободного состояния:

$$\begin{aligned}W(A_1, A_2) &= -2\mu A_1 - \mu A_2 + bA_1^2 - (\mu - b)A_1A_2 - aA_1^3 + \dots, \\ A_1 &= \alpha_{ii}, & A_2 &= \alpha_{ij}\alpha_{ji},\end{aligned}\quad (2)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига,  $a$  и  $b$  – модули упругости третьего порядка. Сокращение числа постоянных материала вызвано характером дальнейшего винтового деформирования [14], что заставляет их быть связанными между собой. В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , компоненты вектора перемещений зададим в следующей форме:

$$u_r = r(1 - \cos \psi(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin \psi(r, t), \quad u_z = u(r, t), \quad (3)$$

где  $\psi(r, t)$  – угловое смещение,  $u(r, t)$  – осевое смещение точек среды.

Так, компоненты тензора напряжений согласно формуле Мурнагана (1) с учетом (2) и (3) имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p - 2\mu - \theta_1 m - \theta_2 m^2 + \dots, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{rr} + \mu r^2 \psi_{,r}^2 - \theta_3 u_{,r}^2 m + \dots, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{rr} + \mu u_{,r}^2 - \theta_3 r^2 \psi_{,r}^2 m + \dots, & \sigma_{\varphi z} &= u_{,r} r \psi_{,r} (\mu + \theta_3 m + \dots), \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu r \psi_{,r} (1 + \chi_1 m^2 + \dots), & \sigma_{rz} &= \mu u_{,r} (1 + \chi_1 m^2 + \dots), \\ \theta_1 &= \frac{\mu + b}{2}, & \theta_2 &= \frac{3(a - b + \mu)}{4}, & \theta_3 &= -\frac{\mu - b}{2}, & \chi_1 &= \frac{\theta_2}{\mu},\end{aligned}\quad (4)$$

поэтому уравнение движения (1) в одномерном случае записываются в форме

$$\begin{cases} \sigma_{rr,r} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = -r^{-1}\rho v_{\varphi}^2, \\ \sigma_{r\varphi,r} + 2r^{-1}\sigma_{r\varphi} = \rho v_{\varphi,t}, \\ \sigma_{rz,r} + r^{-1}\sigma_{rz} = \rho v_{z,t}. \end{cases} \quad (5)$$

Первая компонента системы (1.5) отвечает за эволюцию функции  $p$ . Выделим именно ее, поскольку две другие компоненты определяют поведение функций  $\psi$  и  $u$ .

$$p, r + r^{-1}(\mu r^2 \psi_{,r}^2 - \theta_3 u_{,r}^2) + 2(\theta_1 + 2\theta_2 m)(u_{,rr} u_{,r} + r^2 \psi_{,rr} \psi_{,r} + r \psi_{,r}^2) = r \rho \psi_{,t}^2. \quad (6)$$

**Ударные волны.** В телах, испытывающих существенные нестационарные нагрузки, могут распространяться поверхности разрывов деформаций. Такие процессы не учитываются в дифференциальных формулировках и модельных соотношениях (1). Интегральные формулировки законов сохранения позволяют определить соотношения на разрывы искомых величин и использовать их наряду с дифференциальными. Одним из таких соотношений является динамическое условие совместности

$$[\sigma_{ij}]n_j = \rho^+(v_j^+ n_j - G)[v_i],$$

где  $[f] = f^+ - f^-$  – разрыв функции, индексами "плюс" (далее опускается при отсутствии индекса у разрывной функции) и "минус" обозначены ее значения перед и за поверхностью разрывов,  $n_j$  – компоненты вектора внешней к поверхности разрывов нормали. Если записать данное условие покомпонентно

$$\begin{cases} [\sigma_{rr}] = 0, \\ [\sigma_{r\varphi}] = -\rho G[v_{\varphi}], \\ [\sigma_{rz}] = -\rho G[v_z], \end{cases} \quad (7)$$

то из него следует условие существования и распространения поверхностей разрывов деформаций (ударных волн) в цилиндрическом слое. Для этого в формулах (7) употребляются выражения (4). Первое уравнение системы (7) позволяет выделить разрыв функции добавочного давления, выразив его относительно интенсивности и предварительного сдвига:

$$[p] = -[m](\theta_1 + \theta_2(2 + 3m)m - \theta_2(1 + 3m)[m] + \theta_2[m]^2). \quad (8)$$

На волне нагрузки  $\Sigma_1$  выполняется соотношение на интенсивности  $r\psi_{,r}/u_{,r} = r[\psi_{,r}]/[u_{,r}]$  [13], поэтому направленность предварительного сдвига сохраняется, а его величина возрастает (это следует из термодинамического условия совместности [5]). Поэтому при отсутствии предварительных скручивающих деформации (8) может быть переписано в виде

$$[p] = -(\theta_1 + \theta_2(2 + 3u_{,r}^2)u_{,r}^2 - \theta_2(1 + 3u_{,r}^2)[u_{,r}](2u_{,r} - [u_{,r}]) + \theta_2[u_{,r}]^2(2u_{,r} - [u_{,r}])^2)[u_{,r}](2u_{,r} - [u_{,r}]).$$

На волне круговой поляризации  $\Sigma_2$  величина предварительного сдвига сохраняется ( $[m] = 0$  [13]) в отличие от его направленности. Поэтому функция на данной поверхности разрывов согласно (5) является непрерывной,  $[p] = 0$ . Более того, волна круговой поляризации является изоэнтропийной и в несжимаемой среде распространяется за волной нагрузки [5]. Поскольку за волной нагрузки функция добавочного

всестороннего давления непрерывна, то в этой области действует уравнение движения, в частности его компонента (6), описывающая поведение непосредственно.

**Лучевой метод.** Краевые условия для функций задачи при  $t > 0$  такие, что на внутренней стенке ( $r = r_0$ ) происходит скручивающее воздействие, а на внешней стенке ( $r = R$ ) выполняется условие жесткого закрепления

$$\begin{aligned} p(r_0, t) &= p_0 + p_1 t, \\ \psi(r_0, t) &= \psi_1 t + \psi_2 t^2, \quad \psi(R, t) = 0, \\ u(r_0, t) &= u_0, \quad u(R, t) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Следующие далее обозначения соответствуют принятым в работе [13]. Поскольку на волне круговой поляризации разрыв функция не терпит, понадобятся лишь определенные величины на волне нагрузки, а решение за ней запишется в форме ряда

$$\begin{aligned} u^-(r, t) &= u(r) - \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \frac{(t-t_1)^j}{j!}, \quad t_1 = \int_0^r G_1^{-1}(\xi) d\xi, \\ \kappa_j &= \left[ \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{t=t_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{jk} \frac{t_1^k}{k!}, \quad \kappa_{jk} = \left[ \frac{\delta^k \kappa_j}{\delta t^k} \right]_{t_1=0}; \end{aligned} \quad (10)$$

для разрыва самой функции  $p$  и ее градиента

$$\begin{aligned} p^-(r, t) &= p(r) - \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \frac{(t-t_1)^j}{j!}, \\ \lambda_j &= \left[ \frac{\partial^j p}{\partial t^j} \right]_{t=t_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{jk} \frac{t_1^k}{k!}, \quad \lambda_{jk} = \left[ \frac{\delta^k \lambda_j}{\delta t^k} \right]_{t_1=0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Основным уравнением, которое описывает динамику изменения разрыва функции, будет являться выражение для  $\delta$ -производной [10] на волне нагрузки

$$\begin{aligned} \frac{\delta \lambda_0}{\delta t} &= \lambda_1 + 2\kappa_1 \left( (\theta_1 + 6\theta_2 u_{,r}^2) (u_{,rr} - C^{-2} \kappa_2) - r^{-1} u_{,r} (\theta_1 + 2(\theta_2 + \theta_3) u_{,r}^2) \right) - \\ &- 2\kappa_2 C^{-1} u_{,r} (\theta_1 + 2\theta_2 u_{,r}^2) + \dots, \quad C = \sqrt{\mu/\rho}. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку решение для компонент осевого и скручивающего воздействия было получено в [13], возможно записать приближенное решение и для функции  $p$ . Таким образом, исходя из совокупности уравнений (9), (10), (11) и (12), считаем возможным явное представление искомых коэффициентов, а именно

$$\lambda_{00} = 0, \quad \lambda_{01} = -p_1 - 2r^2 \psi_1 \psi_2 C^{-2} \frac{\theta_1 + 2\theta_2 u_{,r}^2(r_0)}{1 + 5\chi_1 u_{,r}^4(r_0)}, \quad \lambda_{10} = -p_1. \quad (13)$$

Запись решения для функции добавочного давления предполагает знание закона движения волны нагрузки  $t_1(r)$  (или  $r_1(t)$ ). Данные выражения, также как и выражения для  $t_2(r)$  (или  $r_2(t)$ ), были представлены ранее в [13].

**Численное моделирование и результаты расчетов.** Считаем, что приближенное решение является удовлетворительным в некоторый промежуток времени  $t \in (0; t_0]$  с начала воздействия на слой. При этом функция  $p$  определена своими

коэффициентами (13) и разложением (11). После чего область  $t > t_0$  и  $r \in [r_0; r_2)$  разбивается сеткой с шагом  $\Delta t$  по времени и  $\Delta r$  по координате, чтобы записать в ее узлах уравнение движения (5), а конкретно для функции добавочного всестороннего давления его компоненту (6). Непосредственно за поверхностью разрывов считаем справедливыми лучевые разложения (10) и (11), но с неизвестными коэффициентами. Эти коэффициенты определяются путем минимизации квадрата невязки системы. В качестве вычислительного шаблона использовалась схема с центральными разностями и дискретизированная система разрешается методом простых итераций. Осуществляется планомерный переход от одного временного слоя к другому, с обязательным отслеживанием области, где возможна запись конечно-разностного представления уравнения движения.

Следует заметить, что инициализация расчетной схемы является не менее важным мероприятием. Если использовать приближенное решение (13), то необходимо иметь в виду, что при точном решении интенсивность стремится к нулю асимптотически. Этот эффект можно предварительно оценить. Так, при наличии предварительных деформаций антиплоского типа, время смены знака для лучевого приближения интенсивности определится неравенством  $t_0 < 2r_0/3C$ .

Анатолий Исакович Лурье, выдающийся отечественный ученый-механик, отмечал [14], что несжимаемая теория упругости во многом предназначена для изучения деформационных свойств эластомеров. Выберем материал с параметрами, близкими к параметрам резины 6Ж ТУ 38-005-1166-98:  $\rho = 1050$  кг/м<sup>3</sup>,  $C = 50$  м/с,  $\chi_1 = 100$ . Геометрические размеры слоя:  $r_0 = 10^{-2}$  м,  $R = 2 \cdot 10^{-2}$  м. Условия на внутренней границе следующие:  $u_0 = 10^{-3}$  м,  $\psi_1 = 20\pi$ ,  $\psi_2 = 300\pi$ ,  $p_0 = \mu$  Па,  $p_1 = 10^4 \mu$  Па. Такие большие значения  $\psi_1$  и  $\psi_2$  приведут в момент достижения волной нагрузки внешней границы слоя к повороту внутренних точек всего лишь на 0.3 градуса (при этом следует учитывать малость времени достижения волной нагрузки внешней границы слоя  $T$ ). На рисунке ниже представлены эпюры (всего 10, с указанием моментов времени, для которых они показаны) радиальной компоненты тензора напряжений и функции добавочного всестороннего давления, нормированных по отношению к величине  $\mu$ . Для  $\sigma_{rr}$  влияние волны круговой поляризации мало заметно, поскольку величина  $[p]$  является более существенной и проявляет себя на волне нагрузки.

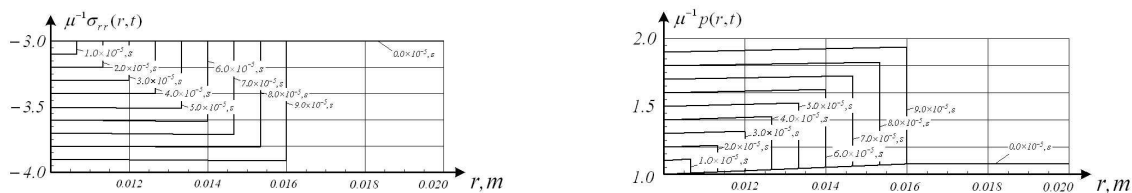


Рис. 1. Эпюры радиальных напряжений и компоненты добавочного всестороннего давления

Приближенное решение и результаты численных расчетов подтверждают, что чем больше скорость и ускорение граничного воздействия, тем больших значений достигнет функция добавочного всестороннего давления. Помимо этого заметно снижение роста  $p$  по мере приближения к внешней границе слоя. Частота сетки, начиная с определенного значения, влияет лишь на время расчета, качественно не улучшая полученных результатов.

**Заключение.** Отметим еще раз, что в большинстве работ вопрос определения функции добавочного всестороннего давления опускался и зачастую оставался за кадром, а здесь именно ему было посвящено основное внимание. Рассмотрим определенный случай, хотя и не самый простой: с наличием кривизны у поверхностей разрывов, предварительных деформаций, которые обуславливают распространение двух ударных волн. На волне круговой поляризации функция является непрерывной. Такой факт позволяет сделать утвердительное заключение о том, что функция не может выступать в качестве маркера или индикатора волны круговой поляризации. Однако в качестве индикатора волны нагрузки она может выступать в полной мере. Исходя из сравнения результатов приближенного и численного решения, необходимо заметить следующее: примененная численная схема позволила улучшить и уточнить приближенное решение для достаточно больших времен, нежели это было возможно при использовании только аналитических выражений. Также положительную роль сыграли первоначальные оценки решений, которые и были использованы в качестве начальных приближений при построении уже численного решения. Данные методики дополнили друг друга синергетически, устранив слабые места приближенного и численного счета.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Boa-The Chu. Transverse shock waves in incompressible elastic solids // *J. Mech. Phys. Solids*. 1967. Vol. 15. P. 1–14.
- [2] Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М. : Мир, 1972. 183 с.
- [3] Буренин А. А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства // *Прикл. Механика*. 1985. Т. 21, № 5. С. 3–8.
- [4] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М. : Московский лицей, 1998. 412 с.
- [5] Буренин А. А., Дудко О. В., Лаптева А. А. К закономерностям распространения деформаций изменения формы // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2011. Т. 14, № 4. С. 14–23.
- [6] Achenbach J. D., Reddy D. R. Note on wave propagation in linear viscoelastic media // *Zeitschr. fur angew. Math. und Phys.* 1967. Vol. 18, № 1. P. 141–144.
- [7] Бабичева Л. А., Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д. Лучевой метод решения задач в упруго-вязкопластических средах // *Прикладная математика и механика*. 1973. Т. 37, № 1. С. 145–155.
- [8] Буренин А. А., Россихин Ю. А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями разрывов // *Прикладные задачи механики деформируемых сред*. Владивосток : ДВО АН СССР, 1991. С. 129–137.
- [9] Burenin A. A., Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. A Ray method for solving boundary value problems connected with the propagations of finite amplitude shock waves // *Proc. 1993 Gnt. Symp. of Nonlinear Theory and its Applications*. Hawaii. 1993. Vol. 3. P. 1085–1088.
- [10] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М. : Мир, 1964. 528 с.



[11] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток : Дальнаука, 1998. 528 с.

[12] Герасименко Е. А., Завертан А. В. Расчеты динамики несжимаемой упругой среды при антиплоском и скручивающем ударе // Вычислительная механика сплошных сред. 2008. Т. 1, № 3. С. 46–56.

[13] Севастьянов Г. М., Штука В. И., Буренин А. А. Лучевой метод в приближенном решении задачи об ударном нагружении несжимаемого цилиндрического слоя // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4 (26). С. 50–62.

[14] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М. : Наука, 1980. 512 с.

V. I. Shtuka

**ABOUT THE CALCULATIONS OF ADDITIONAL PRESSURE IN THE  
PROBLEM OF DYNAMIC IMPACT LOADING OF AN INCOMPRESSIBLE  
CYLINDRICAL ELASTIC LAYER**

*Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok*

**Abstract.** The paper is based on the problem of shock loading of an incompressible cylindrical elastic layer with preliminary deformations and devoted to constructions of ray series to approximate computation the additional hydrostatic pressure and subsequent numerical calculations.

**Keywords:** solid dynamics, nonlinear elasticity, shock waves, incompressibility, numerical methods, ray series, additional pressure function

**REFERENCES**

- [1] Boa-The Chu. Transverse shock waves in incompressible elastic solids // J. Mech. Phys. Solids. 1967. Vol. 15. P. 1–14.
- [2] Blend D. Nonlinear dynamic elasticity. Moscow : Mir, 1972. 183 p. (in Russian).
- [3] Burenin A. A. Shock deformation of incompressible elastic half-space // Applied Mechanics. 1985. Vol. 21, № 5. P. 3–8. (in Russian).
- [4] Kulikovskii A. G., Sveshnikova E. I. Nonlinear waves in elastic media. Moscow : Moscow High School, 1998. 412 p. (in Russian).
- [5] Burenin A. A., Dudko O. V., Lapteva A. A. By the patterns of distribution change of shape deformations // Siberian Journal of Industrial Mathematics. 2011. Vol. 14, № 4. P. 14–23. (in Russian).
- [6] Achenbach J. D., Reddy D. R. Note on wave propagation in lineary viscoelastic media // Zeitschr. fur angew. Match. und Phus. 1967. Vol. 18, № 1. P. 141–144.
- [7] Babicheva L. A., Bykovtsev G. I., Vervevko N. D. The ray method for solving problems in visco-elastic-plastic media // Applied Mathematics and Mechanics. 1973. Vol. 37, № 1. P. 145–155. (in Russian).
- [8] Burenin A. A., Rossikhin Yu. A. Ray method for solving one-dimensional problems of nonlinear dynamic theory of elasticity with flat surfaces breaks Applied problems of mechanics of deformable media. Vladivostok: FEB AS USSR, 1991. P. 129–137. (in Russian).
- [9] Burenin A. A., Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. A Ray method for solving boundary value problems connected with the propagations of finite amplitude shock waves // Proc. 1993 Gnt. Symp. of Nonlinear Theory and its Applications. Hawaii. 1993. Vol. 3. P. 1085–1088.
- [10] Tomas T. Plastic flow and fracture in solids. M.: Mir, 1964. 528 p. (in Russian).
- [11] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. Vladivostok : Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).

---

*Shtuka Victor Igorevich*

e-mail: onslice@mail.ru, Post-Graduate Student, Mathematician Engineer, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok.

[12] Gerasimenko E. A., Zavertan A. V. The calculations of the dynamics of an incompressible elastic medium and twisting at impact antiplane // Computational Continuum Mechanics. 2008. Vol. 1, № 3. P. 46–56. (in Russian).

[13] Sevastyanov G. M., Shtuka V. I., Burenin A. A. The ray method in approximate solve of shock loading of noncompressible cylindrical layer problem // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 4 (26). P. 50–62. (in Russian).

[14] Lurie A. I. Nonlinear theory of elasticity. M.: Nauka, 1980. 512 p. (in Russian).

М. В. Егоров

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ИЗ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ВБЛИЗИ УДАРНЫХ ВОЛН

*Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия*

**Аннотация.** Построены динамические уравнения упруговязкопластического деформирования оболочки вращения с учетом вязкопластических слагаемых в уравнениях динамического деформирования типа С. П. Тимошенко путем введения скорости вязкопластического деформирования на фронте возмущения и перехода к локальной производной по пройденному расстоянию вместо частной производной по времени. Построено динамическое поле перемещений осесимметричной оболочки вращения из упруговязкопластического материала вблизи ударных волн лучевым методом. Определены скорости движения фронтов возмущения, показаны 2 изолированные поверхности, каждая из которых за собой оставляет собственный набор продольных и поперечных компонент возмущений. Получены 2 системы уравнений переноса слабых разрывов, построенных на подвижных поверхностях. В каждой из этих систем имеются алгебраические и дифференциальные уравнения. За первой поверхностью разрыва продольной скорости имеют место алгебраические и линейные, неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами при искомым функциях. За второй поверхностью разрыва поперечной скорости – обобщенное уравнение Риккати с переменными коэффициентами, линейные, неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка. Представлено решение для продольного и поперечного перемещений, угла поворота срединного сечения в виде степенных рядов Тейлора в окрестности поверхностей возмущения третьего порядка точности с учетом пластического деформирования материала за волнами нагрузки. Построено распределение остаточных необратимых вязкопластических деформаций после прохождения ударных волн в виде степенных рядов Тейлора с точностью до третьего порядка.

**Ключевые слова:** упруговязкопластическое деформирование, оболочка вращения, ударные волны.

УДК: 519.633+531.295

**Введение.** Уравнения, описывающие динамическое упруговязкопластическое деформирование оболочки вращения представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, записанных для продольного перемещения  $u$ , поперечного перемещения  $v$  и угла поворота срединного сечения  $\psi$ , могут

---

© Егоров М. В., 2016

*Егоров Михаил Валерьевич*

e-mail: egorovmv89@mail.ru, аспирант, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 12.04.2016

быть получены путем добавления вязкопластических слагаемых в уравнения типа С. П. Тимошенко.

Уравнения типа С. П. Тимошенко представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих динамическое поведение тонкой осесимметричной оболочки вращения в пределах упругости[1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c_1^2 \frac{\nu}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{c_1^2 \nu}{R^2} v \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2} \psi - \frac{2c_1^2 \nu}{R^3} v \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_2^2 k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + c_2^2 k^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{c_1^2}{R^2} v - \frac{c_1^2 \nu}{R} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{c_1^2 \nu}{2R} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{c_1^2 \nu}{R} v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{3c_2^2}{2R^3} v^2; \end{cases} \quad (1)$$

где  $u$  – продольное перемещение,  $v$  – поперечное перемещение,  $\psi$  – угол поворота срединного сечения,  $R$  – средний радиус оболочки,  $h$  – толщина оболочки,  $c_1$  – скорость распространения продольного возмущения в неограниченной среде,  $c_2$  – скорость распространения сдвигового возмущения в неограниченной среде,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $k$  – параметр, характеризующий форму поперечного сечения оболочки (площадь, статический момент, момент инерции, ширину нейтрального слоя).

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu)}; \quad c_2^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность материала,  $E$  – модуль продольной упругости.

Учет пластических деформаций в уравнениях (1) проведем исходя из уравнений движения сплошной среды в напряжениях (2).

Рассмотрим динамические уравнения осесимметричного движения в скоростях и напряжениях EVP материала [2]:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}); \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda e + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} - 2\mu e_{rr}^p; \\ \sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - 2\mu e_{zz}^p; \\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda e + 2\mu \frac{1}{r} v_r - 2\mu e_{\theta\theta}^p; \\ \sigma_{rz} = \mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - 2\mu e_{rz}^p; \\ e = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r}; \end{cases} \quad (4)$$

В уравнениях (4)  $\lambda, \mu$  – упругие параметры Ламэ, компоненты скоростей пластической деформации  $e_{ij}^p$  за фронтом возмущений определяются согласно выражению [2]:

$$\frac{de_{ij}^p}{dt} = \epsilon_{ij}^p = \frac{1}{\eta} \frac{I_2(\sigma') - k\sqrt{(2)}}{I_2(\sigma')} \sigma'_{ij}, \quad (5)$$

где  $I_2(\sigma') > K\sqrt{2}$ .

В (5) введены следующие обозначения:  $\epsilon_{ij}^p$  – тензор скорости пластической деформации,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости,  $k$  – предел текучести,  $I_2(\sigma') = \sqrt{\sigma'_{ij} \cdot \sigma'_{ij}}$

– второй инвариант девиатора тензора напряжений,  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{kk}\delta_{ij}$  – девиатор тензора напряжений.

Для того, чтобы системы уравнений (3)–(4) описывали поведение тонкой оболочки, необходимо провести процедуру осреднения согласно следующему выражению:

$$\int_{R_-}^{R_+} v dr = \tilde{v} h. \quad (6)$$

Система уравнений (3) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\mu (\frac{\partial v_r}{\partial z}) + \frac{\partial v_z}{\partial r}) - \frac{2\mu}{\rho c} \epsilon_{rz}^p; \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\lambda e + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}) - \frac{2\mu}{\rho c} \epsilon_{zz}^p. \end{cases} \quad (7)$$

С учетом вязкопластических слагаемых уравнения типа С. П. Тимошенко представляются в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c_1^2 \frac{\nu}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{c_1^2 \nu}{R^2} \nu \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{2\mu}{\rho c} \epsilon_{zz}^p; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2} \psi - \frac{2c_1^2 \nu}{R^3} v \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_2^2 k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + c_2^2 k^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{c_1^2}{R^2} v - \frac{c_1^2 \nu}{R} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{c_1^2 \nu}{2R} (\frac{\partial v}{\partial z})^2 + \frac{c_1^2 \nu}{R} v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{3c_2^2}{2R^3} v^2 - \frac{2\mu}{\rho c} \epsilon_{rz}^p. \end{cases} \quad (8)$$

**Лучевое представление перемещений оболочки в окрестности волновых фронтов.** В системе уравнений (8) перейдем к подвижной системе координат, перемещающейся со скоростью  $c$  по оси  $z$ , вводя пройденное фронтом расстояние  $n$  и используя соотношения

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta t} - c \frac{\partial}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\delta^2}{\delta t^2} - 2c \frac{\delta}{\delta t} \frac{\partial}{\partial z} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{cases} \quad (9)$$

Учитывая непрерывность перемещений  $u, v$  на подвижных поверхностях  $\Sigma_1, \Sigma_2$  и разрывность скоростей, деформаций и их градиентов по  $z$ , представим решение для перемещений в виде ряда Тейлора кусочно непрерывной функции за  $\Sigma$ , начиная с самой  $\Sigma$ , где  $u^- = u^+$ :

$$\begin{aligned} f(n, t) = \Sigma_{k=0}^{\infty} (f_{,k}^+(t)|_{\Sigma_1} - [f, k]|_{\Sigma_1}) n^k \theta(n - c_1 t) + \\ \Sigma_{k=0}^{\infty} (f_{,k}^+(t)|_{\Sigma_1} - [f, k]|_{\Sigma_1}) (n - (c_1 - c_2)t)^k \theta(c_2 t - n). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\theta$  – единичная функция,  $f^+$  – значение функции перед фронтом  $\Sigma$ ,  $[f]$  – скачок функции на фронте.

Для получения соотношений для скачков  $[u, n], [\psi, n], [v, n]$  проинтегрируем систему уравнений (1) по нормали к распространению возмущений, устремив радиус средней поверхности к бесконечности:

Рассмотрим разрывное поведение искомых функций  $u, v, \psi$  как предельное, быстро меняющееся в малой окрестности  $2\epsilon$  волнового фронта  $\Sigma$  и введем понятие скачка функции[2]:

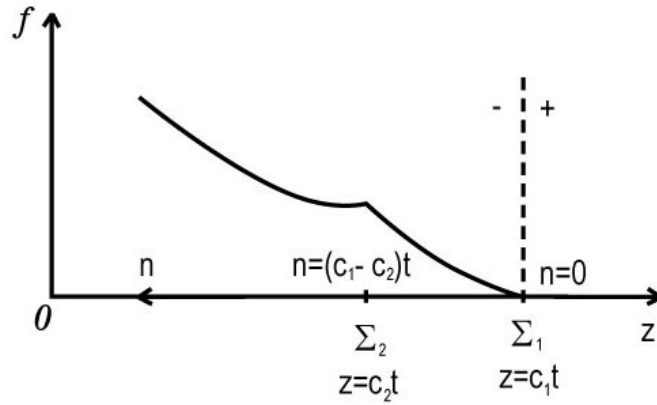


Рис. 1. Кусочно-непрерывное представление перемещения  $f$  за волновыми фронтами  $\Sigma_1, \Sigma_2$

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial f}{\partial n} dn = f_{-}^{+} = [f]. \quad (11)$$

Тогда система уравнений (1) примет вид

$$\begin{cases} c^2[u, n] = c_1^2[u, n]; \\ c^2[\psi, n] = c_1^2[\psi, n]; \\ c^2[v, n] = c_1^2 k^2[v, n]. \end{cases} \quad (12)$$

Из выполнения системы уравнений (11) следует существование изолированных волн: разрыва продольной деформации и изгиба формы срединной поверхности  $[u, n], [\psi, n]$  на волне  $\Sigma_1$ , перемещающейся со скоростью  $c_I = c_1$ , и разрыва деформации сдвига на волне  $\Sigma_2$ , перемещающейся со скоростью  $c_{II} = c_2 k$ .

**Построение системы уравнений для скачков градиентов перемещений на поверхностях  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ .** Проведем разложение полной производной по времени пластических деформаций на локальную и конвективную:

$$\frac{de_{ij}^p}{dt} = \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial t} + c \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial x}, \quad (13)$$

где  $c$  – скорость движения фронта возмущений (пластическая деформация перед фронтом отсутствует), локальная производная от пластических деформаций на фронте равна 0:  $\frac{\partial e_{ij}^p}{\partial t} = 0$ .

$$\frac{\partial e_{ij}^p}{\partial x} = \frac{1}{c} \epsilon_{ij}^p. \quad (14)$$

Согласно выражениям (15)-(16), система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\delta^2[u]}{\delta t^2} - 2c \frac{\delta[u,n]}{\delta t} + c^2[u,nn] = c_1^2[u,nn] + \frac{c_1^2 \nu}{R}[v,n] - \frac{8\mu^2}{3\rho c_1 \eta}[u,n] \left(1 - \frac{K}{\mu \sqrt{4/3[u,n]^2 + [v,n]^2}}\right); \\ \frac{\delta^2[\psi]}{\delta t^2} - 2c \frac{\delta[\psi,n]}{\delta t} + c^2[\psi,nn] = c_1^2[\psi,nn] - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2}[v,n]; \\ \frac{\delta^2[v]}{\delta t^2} - 2c \frac{\delta[v,n]}{\delta t} + c^2[v,nn] = c_2^2 k^2[v,nn] + c_2^2 k^2[\psi,n] - \frac{c_1^2 \nu}{R}[u,n] + \frac{c_1^2 \nu}{2R}[v,n]^2 - \\ - \frac{2\mu}{\rho c_1 \eta} (1/3\mu[v,n] - \lambda[u,n]) \left(1 - \frac{K}{\mu \sqrt{4/3[u,n]^2 + [v,n]^2}}\right). \end{cases} \quad (15)$$

Исходя из представления решения для  $u$ ,  $v$  и  $\psi$  в виде ряда Тейлора, построим выражения для деформаций, градиентов и вторых градиентов путем последовательного дифференцирования системы уравнений (17) по пройденному расстоянию за поверхностью  $\Sigma_1$ , где пройденное расстояние поверхность вводится путем замены  $n = ct$ . Запишем системы уравнений на поверхности  $\Sigma_1$  и один, два раза продифференцированные по пройденному расстоянию  $n$ :

$$\begin{cases} \frac{\delta[u,n]}{\delta n} - \frac{4\mu^2}{3\rho c_1^3 \eta}[u,n] + \frac{2\sqrt{3}\mu K}{3\rho c_1^3 \eta} = 0; \\ [\psi,n] = [\psi,n]_0; \\ [v,n] = 0; \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} [v,nn] = \frac{c_2^2 k^2}{c_1^2 - c_2^2 k^2} [\psi,n] + [u,n] \left( \frac{2\mu\lambda}{c_1 \rho \eta (c_1^2 - c_2^2 k^2)} - \frac{c_1^2 \nu}{R(c_1^2 - c_2^2 k^2)} \right) - \frac{\lambda K \sqrt{3}}{\rho c_1 \eta (c_1^2 - c_2^2 k^2)}; \\ \frac{\delta[u,nn]}{\delta n} - \frac{4\mu^2}{3\rho c_1^3 \eta}[u,nn] - 0.5 \frac{\delta^2[u,n]}{\delta n^2} + \frac{\nu}{R}[v,nn] = 0; \\ \frac{\delta[\psi,nn]}{\delta n} - 0.5 \frac{\delta^2[\psi,n]}{\delta n^2} - \frac{6c_2^2 k^2}{c_1^2 h^2}[v,nn] = 0; \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} [v,nnn] = \frac{2c_1^2}{c_1^2 - c_2^2 k^2} \frac{\delta[v,nn]}{\delta n} + \frac{c_2^2 k^2}{c_1^2 - c_2^2 k^2} [\psi,nn] + \frac{c_1^2 \nu R'[u,n]}{R^2(c_1^2 - c_2^2 k^2)} - \frac{c_1^2 \nu [u,nn]}{R(c_1^2 - c_2^2 k^2)} - \\ - \frac{2\mu^2 [v,nn]}{3\rho c_1 \eta (c_1^2 - c_2^2 k^2)} + \frac{2\mu\lambda [u,nn]}{\rho c_1 \eta (c_1^2 - c_2^2 k^2)} + \frac{\sqrt{3}\mu K [v,nn]}{3\rho c_1 \eta (c_1^2 - c_2^2 k^2) [u,n]}; \\ \frac{\delta[u,nnn]}{\delta n} - [u,nnn] \frac{4\mu^2}{3\rho c_1^3 \eta} - 0.5 \frac{\delta^2[u,nn]}{\delta n^2} - \frac{\nu}{R^2} R'[v,nn] + \frac{\nu}{2R} [v,nnn] - \\ - \frac{\sqrt{3}\mu K [v,nn]^2}{6\rho c_1^3 \eta [u,n]^2} + \frac{2\sqrt{3}\mu K [u,nn]^2}{3\rho c_1^3 \eta [u,n]^2} = 0; \\ \frac{\delta[\psi,nnn]}{\delta n} - 0.5 \frac{\delta^2[\psi,nn]}{\delta n^2} - \frac{6c_2^2 k^2}{c_1^2 h^2} [v,nn] = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Следует отметить, в системе уравнений (16-18) уравнения для  $[u,n]$ ,  $[u,nn]$ ,  $[u,nnn]$  являются линейными неоднородными дифференциальными первого порядка с одним и тем же постоянным коэффициентом при искомой функции:  $\frac{4\mu^2}{3\rho c_1^3 \eta}$ . Уравнения для  $[v,nn]$ ,  $[v,nnn]$  являются алгебраическими. Уравнения для  $[\psi,n]$ ,  $[\psi,nn]$ ,  $[\psi,nnn]$  являются также линейными неоднородными дифференциальными уравнениями первого порядка.

Запишем решения дифференциальных уравнений для  $[u,n]$ ,  $[u,nn]$ ,  $[u,nnn]$ ,  $[\psi,nn]$ ,  $[\psi,nnn]$  на поверхности  $\Sigma_1$ :



$$\left\{ \begin{array}{l}
[u, n] = \frac{\sqrt{3}K}{2\mu} + e^{\frac{4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} ([u, n]_0 - \frac{\sqrt{3}K}{2\mu}); \\
[u, nn] = e^{\frac{4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} (C_{12}(n) - C_{120}); \\
C_{120} = [u, nn]_0 - C_{12}(0); \\
C_{12}(n) = \frac{8\mu^4 n^3 ([u, n]_0 - \frac{\sqrt{3}K}{2\mu})}{27\rho^2 c_1^6 \eta^2} - \int_0^{n_1} e^{\frac{-4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} \frac{dn}{R(n)} \frac{c_2^2 k^2 \nu [\psi, n]_0}{c_1^2 - c_2^2 k^2} + \\
+ \frac{\arctg(\frac{0.5b+an}{ac-0.25b^2})}{ac-0.25b^2} \left( \frac{\sqrt{3}K\lambda\nu}{c_1 \rho \eta (c_1^2 - c_2^2 k^2)} - \frac{2\mu\lambda\nu[u, n]_0}{c_1 \rho \eta (c_1^2 - c_2^2 k^2)} \right) + \frac{c_1^2 \nu \sqrt{3}K}{2\mu(c_1^2 - c_2^2 k^2)} \int_0^{n_1} e^{\frac{-4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} \frac{dn}{R(n)} + \\
+ \left( \frac{c_1^2 \nu^2 [u, n]_0}{c_1^2 - c_2^2 k^2} - \frac{\sqrt{3}c_1^2 \nu^2 K}{2\mu(c_1^2 - c_2^2 k^2)} \right) \frac{4a \arctg(\frac{b+2an}{\sqrt{4ac-b^2}})}{(4ac-b^2)^{1.5}} - \frac{2(0.5b+2an)}{(b^2-4ac)(an^2+bn+c)}; \\
[u, nnn] = e^{\frac{4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} (C_{13}(n) - C_{130}); \\
C_{130} = [u, nnn]_0 - C_{13}(0); \\
C_{13}(n) = \int_0^{n_1} e^{\frac{-4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} 0.5 \frac{d^2}{dn^2} [u, nn] dn + \int_0^{n_1} e^{\frac{-4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} \frac{\nu R'(n) [v, nn]}{R(n)} dn - \\
- \int_0^{n_1} e^{\frac{-4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} \frac{\nu [v, nnn]}{2R(n)} dn + \int_0^{n_1} e^{\frac{-4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} \frac{\sqrt{3}\mu K [v, nn]^2}{6\rho c_1^3 \eta [u, n]^2} dn - \int_0^{n_1} e^{\frac{-4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} \frac{2\sqrt{3}\mu K [u, nn]^2}{3\rho c_1^3 \eta [u, n]^2} dn; \\
[\psi, nn] = C_{14}(n) + C_{140}; \\
C_{140} = [\psi, nn]_0 - C_{14}(0); \\
C_{14}(n) = \frac{6c_2^4 k^4 n \rho \eta + 6\sqrt{3}c_2^2 k^2 \lambda K n}{c_1^4 h^2 \rho \eta (c_1^2 - c_2^2 k^2)} - \frac{3\sqrt{3}c_2^2 k^2 K c_1 \nu \arctg(\frac{0.5b+an}{\sqrt{ac-0.25b^2}})}{h^2 \mu (c_1^2 - c_2^2 k^2) \sqrt{ac-0.25b^2}} + \\
+ \frac{6c_2^2 k^2 e^{\frac{4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} \left( \frac{3c_1^3 \lambda [u, n]_0}{2\mu(c_1^2 - c_2^2 k^2)} - \frac{3\sqrt{3}c_1^2 K \lambda}{4\mu^2 (c_1^2 - c_2^2 k^2)} \right)}{c_1^2 h^2} + \int_0^{n_1} e^{\frac{4\mu^2 n}{3\rho c_1^3 \eta}} \frac{dn}{R(n)} \frac{6c_2^2 k^2}{c_1^2 h^2} \frac{[u, n]_0 \sqrt{3}}{2\mu(c_1^2 - c_2^2 k^2)} - \frac{[u, n]_0 c_1^2 \nu}{c_1^2 - c_2^2 k^2}; \\
[\psi, nnn] = C_{15}(n) + C_{150}; \\
C_{150} = [\psi, nnn]_0 - C_{15}(0); \\
C_{15}(n) = -0.5 \frac{d[\psi, nn]}{dn} - \int_0^{n_1} \frac{6c_2^2 k^2 [v, nnn]}{c_1^2 h^2} dn.
\end{array} \right. \quad (19)$$

По аналогии с предыдущим построением приведем систему уравнений для градиентов скачков перемещений на  $\Sigma_2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\delta[v, n]}{\delta n} + \frac{c_1^2 \nu}{4Rc_2^2 k^2} [v, n]^2 - \frac{\mu^2}{3\rho c_2^3 k^3 \eta} [v, n] + \frac{2\mu K}{\rho c_2^3 k^3 \eta} = 0; \\
[u, n] = 0; \\
[\psi, n] = 0;
\end{array} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
[\psi, nn] = -\frac{12c_2^2 k^2}{h^2 (c_2^2 k^2 - c_1^2)} [v, n]; \\
[u, nn] = \frac{c_1^2 \nu}{R(c_2^2 k^2 - c_1^2)} [v, n]; \\
\frac{\delta[v, nn]}{\delta n} + [v, nn] \left( \frac{c_1^2 \nu}{2Rc_2^2 k^2} [v, n] - \frac{\mu^2}{3\rho c_2^3 k^3 \eta} \right) - 0.5 \frac{\delta^2[v, n]}{\delta n^2} + 0.5 [\psi, nn] = 0;
\end{array} \right. \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
-\frac{c_1^2 \nu}{R c_2^2 k^2} [u, nn] - \frac{c_1^2 \nu}{4 R^2 c_2^2 k^2} R' [v, n]^2 + \frac{\mu \lambda}{\rho c_2^3 k^3 \eta} [u, nnn] - \frac{K \lambda [u, nn]}{\rho c_2^3 k^3 \eta [v, n]} = 0; \\
[\psi, nnn] = \frac{2 c_2^2 k^2}{c_2^2 k^2 - c_1^2} \frac{\delta [\psi, nn]}{\delta n} - \frac{12 c_2^2 k^2}{h^2 (c_2^2 k^2 - c_1^2)} [v, nn]; \\
[u, nnn] = \frac{2 c_2^2 k^2}{c_2^2 k^2 - c_1^2} \frac{\delta [u, nn]}{\delta n} + \frac{c_1^2 \nu}{R (c_2^2 k^2 - c_1^2)} [v, nn] - \frac{c_1^2 \nu R' [v, n]}{R^2 (c_2^2 k^2 - c_1^2)} - \\
- \frac{8 \mu^2 [u, nn]}{3 \rho c_2 k \eta (c_2^2 k^2 - c_1^2)} + \frac{8 \mu K [u, nn]}{3 \rho c_2 k \eta (c_2^2 k^2 - c_1^2)} [v, n]; \\
\frac{\delta [v, nnn]}{\delta n} + [v, nnn] \left( \frac{c_1^2 \nu}{2 c_2^2 k^2 R} [v, n] - \frac{\mu^2}{3 \rho c_2^3 k^3 \eta} \right) - 0.5 \frac{\delta^2 [v, nn]}{\delta n^2} + 0.5 [\psi, nnn] + \\
+ \frac{c_1^2 \nu}{c_2^2 k^2 R^2} R' [u, nn] - \frac{c_1^2 \nu}{2 c_2^2 k^2 R} [u, nnn] - \frac{c_1^2 \nu}{2 c_2^2 k^2 R^3} R'^2 [v, n]^2 - \frac{c_1^2 \nu}{4 c_2^2 k^2 R^2} R'' [v, n]^2 - \\
- \frac{c_1^2 \nu}{c_2^2 k^2 R^2} R' [v, n] [v, nn] + \frac{c_1^2 \nu}{2 c_2^2 k^2 R} [v, nn]^2 + \frac{\mu \lambda}{2 \rho c_2^3 k^3 \eta} [u, nnn] - \frac{\mu K [v, nn]^2}{2 \rho c_2^3 k^3 \eta [v, n]^2} - \\
- \frac{K \lambda [u, nnn]}{\rho c_2^3 k^3 \eta [v, n]} + \frac{2 K \lambda [u, nn] [v, nn]}{\rho c_2^3 k^3 \eta [v, n]^2} = 0.
\end{array} \right. \quad (22)$$

В системе уравнений (19)–(21) уравнения для  $[v, nn]$ ,  $[v, nnn]$  являются линейными дифференциальными неоднородными уравнениями первого порядка. Уравнение для  $[v, n]$  – обобщенное уравнение Риккати с постоянными коэффициентами вида  $y' + ay^2 + by + c = 0$ , допускающее решение при помощи разделения переменных. Решение для скачков градиентов перемещений представимо в виде

$$\left\{ \begin{array}{l}
[u, n] = 0; [v, n] = 0; [v, n] = \frac{\sqrt{a21c21-0.25b21^2}tg((n+C21(0))\sqrt{a21c21-0.25b21^2})-0.5b21}{a21}; \\
a21 = \frac{-c1^2\nu}{4R(0)c2^2k^2}; b21 = \frac{\mu^2}{3\rho c2^3k^3\eta}; c21 = \frac{-2\mu K}{\rho c2^3k^3\eta}; \\
C21(n) = \frac{\arctg(\frac{a21[v,n]_0+0.5b21}{\sqrt{a21c21-0.25b2^2}})}{\sqrt{a21c21-0.25b^2}}; \\
[v, nn] = e^{-\int_0^{n^2} P22(n)dn} (C22(0) + \int_0^{n^2} e^{\int_0^{n^2} P22(n)dn} Q22(n)dn); \\
C22(n) = [v, nn]_0 e^{\int_0^{n^2} P22(0)dn} - \int_0^{n^2} e^{\int_0^{n^2} P22(0)dn} Q22(0)dn; \\
P2(n) = \frac{c1^2\nu[v,n]}{2R(n)c2^2k^2} - \frac{\mu^2}{3\rho c2^3k^3\eta}; \\
Q22(n) = 0.5[v, n]'' - 0.5[\psi, nn] + \frac{c1^2\nu[u, nn]}{R(n)c2^2k^2} + \frac{c1^2\nu R(n)' [v, n]^2}{4R(n)^2 c_2^2 k^2} - \frac{\mu \lambda [u, nn]}{\rho c_2^3 k^3 \eta} + \\
+ \frac{K \lambda [u, nn]}{\rho c_2^3 k^3 \eta [v, n]}; \\
[v, nnn] = e^{-\int_0^{n^2} P22(n)dn} (C23(0) + \int_0^{n^2} e^{\int_0^{n^2} P22(n)dn} Q23(n)dn); \\
C23(n) = [v, nnn]_0 e^{\int_0^{n^2} P22(n)dn} - \int_0^{n^2} e^{\int_0^{n^2} P22(n)dn} Q23(n)dn; \\
Q23(n) = 0.5[v, nnn]'' - 0.5[\psi, nnn] - \frac{c1^2\nu R(n)' [u, nn]}{c2^2k^2 R(n)^2} + \frac{c1^2\nu [u, nnn]}{2c2^2k^2 R(n)} + \frac{c1^2\nu R(n)'^2 [v, n]^2}{2c2^2k^2 R(n)^2} + \\
+ \frac{c1^2\nu [v, n]^2 R(n)''}{4c2^2k^2 R(n)^2} + \frac{c1^2\nu [v, n] [v, nn] R(n)'}{c2^2k^2 R(n)^2} + \frac{c1^2\nu [v, nn]^2}{2c2^2k^2 R(n)} - \frac{\mu \lambda [u, nnn]}{2\rho c2^3k^3\eta} + \frac{\mu K [v, nn]^2}{2\rho c2^3k^3\eta [v, n]^2} + \\
+ \frac{K \lambda [u, nnn]}{\rho c2^3k^3\eta [v, n]} - \frac{2K \lambda [u, nn] [v, nn]}{\rho c2^3k^3\eta [v, n]^2}.
\end{array} \right. \quad (23)$$

**Численные примеры.** Решение систем уравнений (18), (23) позволяет найти члены рядов Тейлора для функций  $u(n)$ ,  $\psi(n)$ ,  $v(n)$ , а также для скоростей пластической продольной и поперечной деформации за поверхностями  $\Sigma_1, \Sigma_2$ :

$$y(n) = \sum_{k=1}^3 \frac{y^{(k)}(c_1 t)}{k!} n^k + \sum_{k=1}^3 \frac{y^{(k)}(c_2 kt)}{k!} n^k \theta(n - c_2 kt), \quad (24)$$

где  $\theta(n) = 0, n < 0; 1, n \geq 0$  – функция Хевисайда.

Ниже приведены графики продольного, сдвигового перемещения, а также угла поворота срединного сечения для следующих параметров:  $E = 210\text{ГПа}$ ,  $\rho = 7850\text{кг/м}^3$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $k = 0.85$ ,  $K = 500\text{МПа}$ ,  $\eta = 10^{15}\text{Пас}$ ,  $h = 1\text{м}$ ,  $R(n) = n^2 - 1.8n + 1$ ,  $[u,n]_0 = [u,nn]_0 = [u,nnn]_0 = [\psi,n]_0 = [\psi,nn]_0 = [\psi,nnn]_0 = [v,n]_0 = [v,nn]_0 = [v,nnn]_0 = 0.0001$

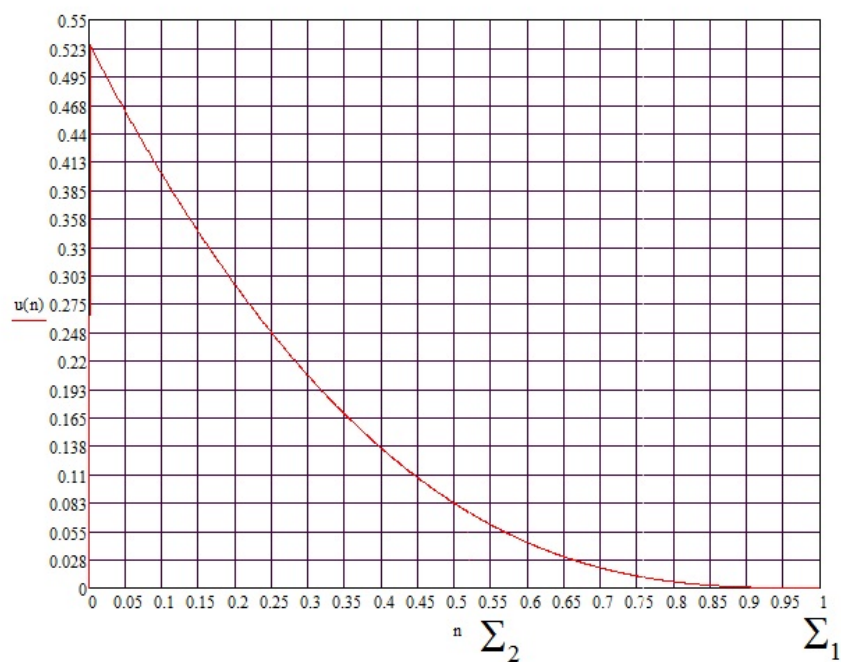


Рис. 2. График продольного перемещения

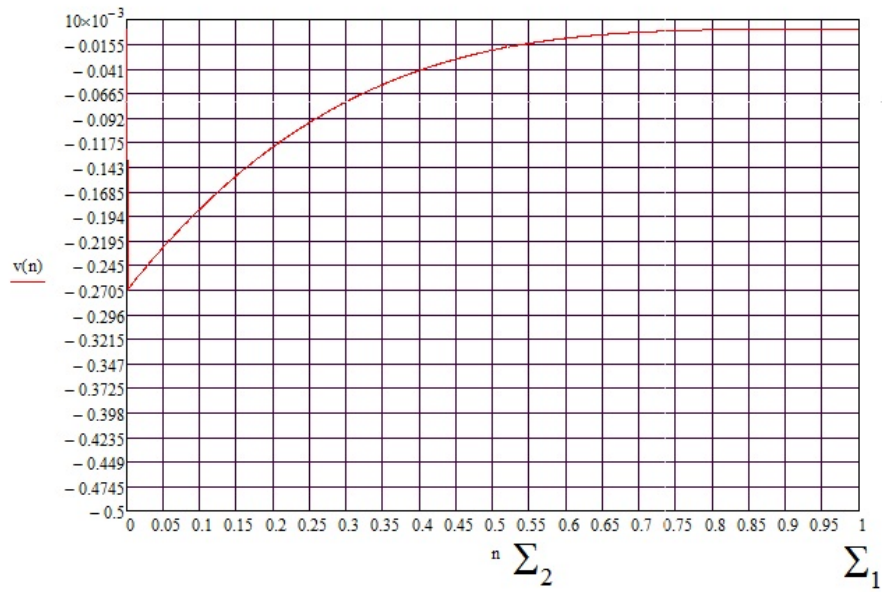


Рис. 3. График сдвигового перемещения

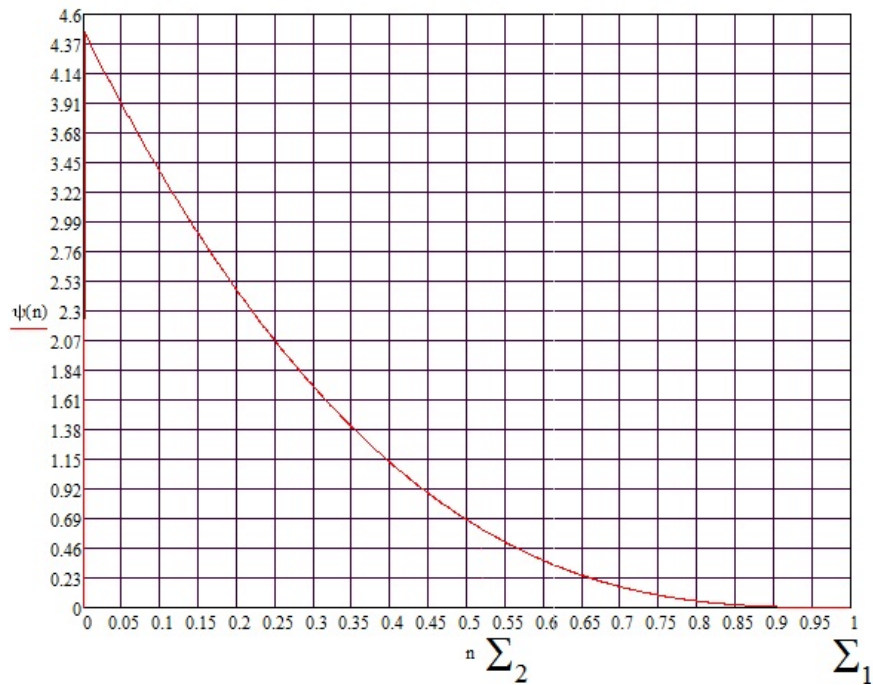


Рис. 4. График угла поворота срединного сечения

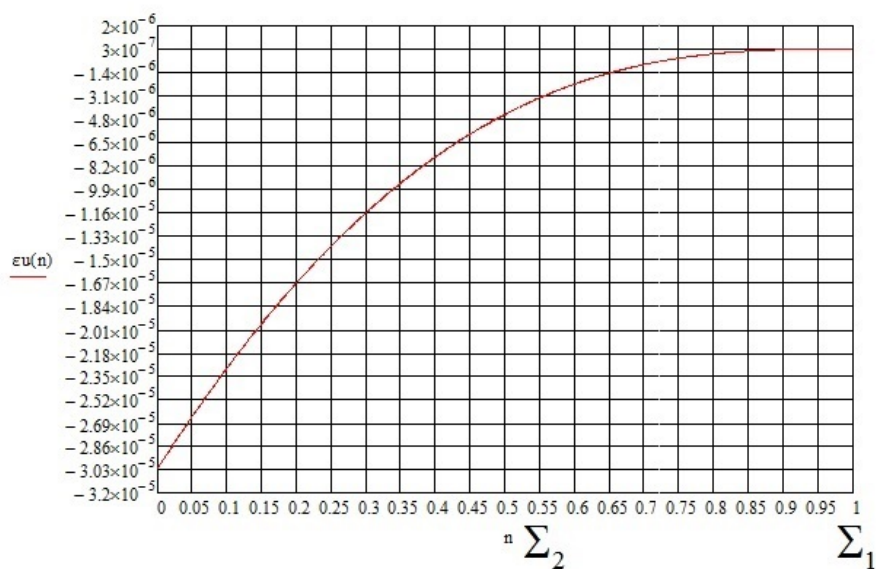


Рис. 5. График изменения скорости остаточных пластических продольных деформаций после прохождения ударного импульса

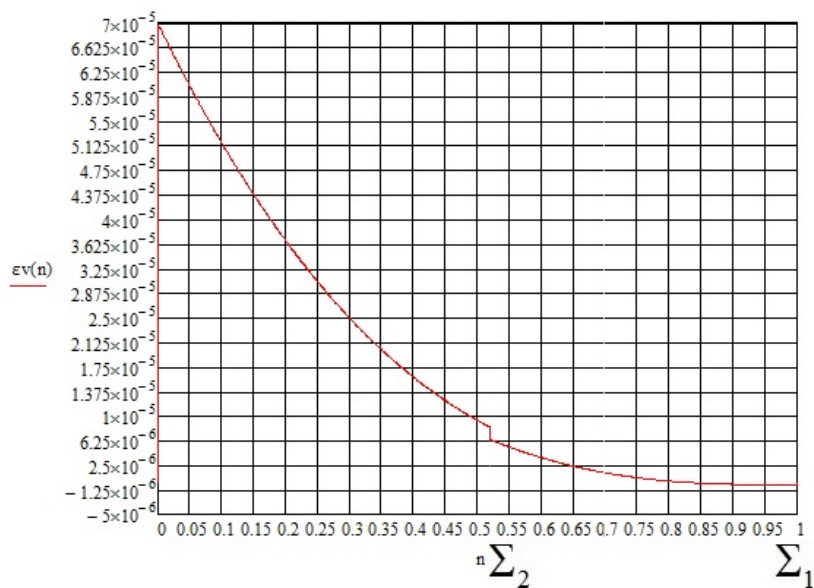


Рис. 6. График изменения скорости остаточных пластических поперечных деформаций после прохождения ударного импульса

**Заключение.** Применение лучевого метода к уравнениям в частных производных упруговязкопластического деформирования оболочки вращения позволило построить

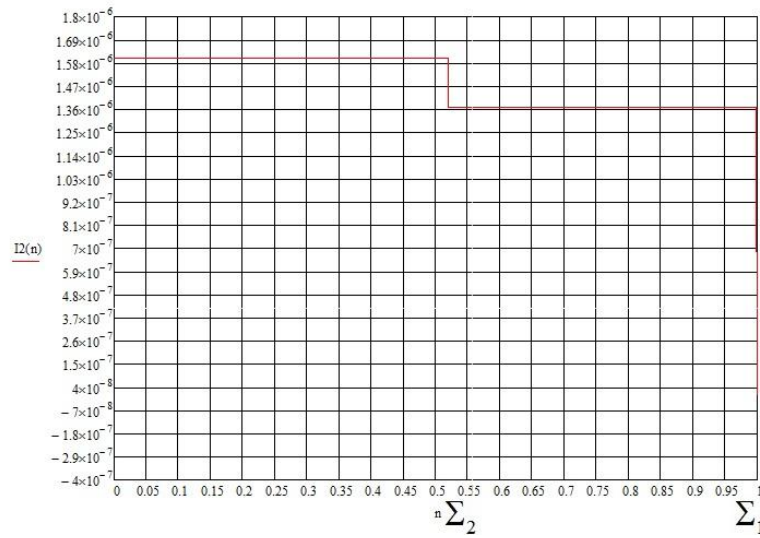


Рис. 7. График изменения второго инварианта скорости пластической деформации

решения для продольного, сдвигового перемещения, а также угла поворота за поверхностями распространения возмущений с точностью до третьего порядка по пройденному расстоянию за фронтами  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Следует отметить особенность скорости пластической деформации, состоящую в том, что она претерпевает скачок на фронте сдвиговой волны  $\Sigma_2$  вследствие разрывности напряжений.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д. О распространении волн в упруговязкопластической среде // *Механика деформируемого тела*. 1965. № 4. С. 111–123.
- [2] Сагомоян А. Я. Волны напряжения в сплошных средах. М.: Наука, 1985. 416 с.
- [3] Вервейко Н. Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара // *Вестник ВГУ. Серия: Математика*. 1997. 204 с.
- [4] Вервейко Н. Д., Егоров М. В. Метод последовательных нагружений расчета динамического деформирования осесимметричной оболочки распространяющимся внутренним давлением // *Вестник ВГУ. Серия: Математика*. 2015. С. 111–120.

M. V. Yegorov

**EPV MATERIAL AXISYMMETRIC ROTATING SHELL DISPLACEMENT  
CALCULATION RAY METHOD NEAR SHOCK WAVES**

*Voronezh state university, Voronezh, Russia*

**Abstract.** Rotating shell dynamic EVP deformation equations with viscoplastic terms considering dynamic deformation equations S. P. Timoshenko's type are built by introducing of viscoplastic deformation speed on perturbation front and transition to local derivative according to the traveled distance instead partial derivative with respect on time. EVP material rotating axisymmetric shell dynamic displacement field near shock waves is built by ray method. Perturbation fronts velocity movement are identified, two isolated surfaces are shown, each of which reserves their own set of longitudinal and transverse components of perturbation. Weak discontinuity transition two equation systems are obtained, which built on moving surfaces. There are algebraic and differential equations in each of this systems. There are for the longitudinal velocity discontinuity surface algebraic and first order linear heterogeneous differential equations with constant coefficients of the unknown functions. There are for the second transverse velocity discontinuity surface generalized Rikkati equation with variable coefficients, linear heterogeneous differential equations. Longitudinal, transverse and rotation angle mindsection as Taylor's power row in the surrounding of perturbation surfaces with third order accuracy with material plastic deformation for downloading waves considering solution is presented. Residual irreversible viscoplastic deformation distribution is built after shock waves passing as Taylor's power row with third order accuracy.

**Keywords:** EVP deformation, rotating shell, shock waves.

**REFERENCES**

- [1] Bykovtsev G. I., Verveyko N. D. Wave propagation in the elasticviscousplastic media // *Mechanics of Solid*. 1965. № 4. P. 111–123. (in Russian).
- [2] Sagomonyan A. Y. *Stress waves in continuous environments*. M.: Science, 1985. 416 p. (in Russian).
- [3] Verveyko N. D. EVP and water hammer waves ray theory // *VSU*. 1997. 204 p. (in Russian).
- [4] Verveyko N. D., Yegorov M. V. Consecutive loading method of axisymmetric shell dynamic deformation calculation distributed internal pressure // *VSU messenger. Math. series*. 2015. P. 111-120. (in Russian).

---

*Yegorov Mikhail Valerievich*

e-mail: egoeovmv89@mail.ru., Post graduate student., Voronezh state university, Voronezh, Russia.

А. В. Балашникова, Б. Г. Миронов

## О КРУЧЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** В работе рассмотрено кручение неоднородных идеальнопластических стержней при произвольном условии пластичности. Определены характеристики исследуемых уравнений и соотношения вдоль характеристик, а также при некоторых частных случаях условия предельного состояния получены интегралы основных соотношений.

**Ключевые слова:** напряжение, пластичность, неоднородность, кручение.

УДК: 539.375

Рассмотрим цилиндрический или призматический стержень, ориентированный в прямоугольной системе координат  $x y z$ . Образующие стержня параллельны оси  $z$ . Предположим, что стержень состоит из неоднородного идеальнопластического материала. Стержень закручивается вокруг своей оси, боковая поверхность стержня свободна от нагрузок.

Положим, что напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется следующими значениями компонент:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y). \quad (1)$$

Условие пластичности запишем в виде

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = \kappa(x, y), \quad (2)$$

а единственное уравнение равновесия примет вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

---

© Балашникова А. В., Миронов Б. Г., 2016

*Балашникова Анжелика Вениаминовна*

e-mail: info3006@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

*Миронов Борис Гурьевич*, доктор физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 16-31-00511 мол\_а).

Поступила 21.03.2016



Из наших предположений следует, что на контуре поперечного сечения стержня выполняется равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}. \quad (4)$$

Дифференцируя уравнение (2) по  $x$ , получим

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial \kappa}{\partial x}. \quad (5)$$

Согласно (5) из уравнения равновесия (3) следует

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial \kappa}{\partial x}. \quad (6)$$

Характеристики уравнения (6) удовлетворяют соотношениям

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{d\tau_{yz}}{\frac{\partial \kappa}{\partial x}}. \quad (7)$$

Из (7) и (2) следует, что вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz} - \frac{\partial \kappa}{\partial x} dx = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{xz} - \frac{\partial \kappa}{\partial y} dy = 0. \quad (9)$$

В общем случае соотношения (8), (9) могут быть проинтегрированы только численно. Рассмотрим некоторые частные случаи условия пластичности (2), для которых можно получить интегралы системы уравнений (8), (9).

Анизотропные стержни, т. е. условие пластичности (2) не зависит от  $x$  и  $y$ :

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = \kappa_{01}, \quad (10)$$

где  $\kappa_{01} = const$ .

Известно [2], что уравнения (8), (9) в этом случае легко интегрируются. Характеристики есть прямые линии, уравнения которых имеют вид

$$a_1 x + b_1 y = c_1, \quad (11)$$

а вдоль характеристик

$$\tau_{xz} = c_{11} = const, \quad \tau_{yz} = c_{12} = const, \quad (12)$$

где  $a_1 = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}(c_{11}, c_{12})$ ,  $b_1 = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}(c_{11}, c_{12})$ ,  $f(c_{11}, c_{12}) = 0$ ,  $c_1 = const$ .

Рассмотрим вектор градиента к кривой текучести (2)

$$\text{grad } f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \bar{j},$$

где  $\bar{i}, \bar{j}$  – единичные орты осей  $x$  и  $y$ .

Из (11) следует, что характеристики соотношения (6) ортогональны вектору градиента к кривой текучести.

Рассмотрим случай, когда условие пластичности (2) не зависит от  $x$ :

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = \kappa(y). \quad (13)$$

В этом случае вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\tau_{xz} = c_{21}(y), \quad \tau_{yz} = c_{22} = \text{const}, \quad (14)$$

где  $f(c_{21}(y), c_{22}) = \kappa(y)$ .

Уравнения характеристик имеют вид

$$x = - \int \frac{b_2(y)}{a_2(y)} dy + c_2, \quad (15)$$

где  $a_2(y) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}(c_{21}(y), c_{22}, y)$ ,  $b_2(y) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}(c_{21}(y), c_{22}, y)$ ,  $c_2 = \text{const}$ .

Рассмотрим случай, когда условие пластичности (2) имеет вид

$$f(\varphi(y) \tau_{xz}, \psi(x) \tau_{yz}) = \kappa_{02}, \quad (16)$$

где  $\kappa_{02} = \text{const}$ .

В этом случае, вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\tau_{xz} = \frac{c_{31}}{\varphi(y)}, \quad \tau_{yz} = \frac{c_{32}}{\psi(x)}, \quad (17)$$

где  $c_{31} = \text{const}$ ,  $c_{32} = \text{const}$ ,  $f(c_{31}, c_{32}) = \kappa_{02}$ .

Уравнения характеристик определяются из соотношений

$$\int \frac{a_3}{\psi(x)} dx + \int \frac{b_3}{\varphi(y)} dy = c_3, \quad (18)$$

где  $a_3 = \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(c_{31}, c_{32})$ ,  $b_3 = \frac{\partial f}{\partial \xi_2}(c_{31}, c_{32})$ ,  $c_3 = \text{const}$ ,  $\xi_1 = \varphi(y) \tau_{xz}$ ,  $\xi_2 = \psi(x) \tau_{yz}$ .

В случае, когда условие пластичности (2) имеет вид

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = \kappa_0 + \kappa_1(x) + \kappa_2(y), \quad (19)$$

где  $f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = f_1(\tau_{xz}) + f_2(\tau_{yz})$ ,  $\kappa_0 = \text{const}$ ,  $\kappa_1, \kappa_2$  — некоторые функции соответственно от  $x$  и  $y$ , вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\tau_{xz} = c_{41}(y), \quad \tau_{yz} = c_{42}(x), \quad (20)$$

где  $f_1(c_{41}(y)) + f_2(c_{42}(x)) = \kappa_0 + \kappa_1(x) + \kappa_2(y)$ .

Характеристики определяются из уравнения

$$\int \frac{dx}{m(x)} + \int \frac{dy}{n(y)} = c_4, \quad (21)$$

где  $c_4 = \text{const}$ ,  $m(x) = \frac{df_2}{d\tau_{yz}}(c_{42}(x))$ ,  $n(y) = \frac{df_1}{d\tau_{xz}}(c_{41}(y))$ ,

В случае, когда условие пластичности (2) имеет вид

$$g_2(y) f_1(\tau_{xz}) + g_1(x) f_2(\tau_{yz}) = \kappa_{03}, \quad (22)$$

где  $\kappa_{03} = \text{const}$ ,  $f_1, f_2, g_1, g_2$  — некоторые функции, вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\tau_{yz} = c_{52}(x), \quad \tau_{xz} = c_{51}(y), \quad (23)$$

где  $g_2(y) c_{51}(y) + g_1(x) c_{52}(x) = \kappa_{03}$ .

Характеристики определяются из уравнения

$$\int \frac{dx}{c_{53}(x) \cdot g_1(x)} + \int \frac{dy}{c_{54}(y) \cdot g_2(y)} = c_5, \quad (24)$$

где  $c_5 = \text{const}$ ,  $c_{53} = \frac{df_2}{d\tau_{yz}}(c_{52}(x))$ ,  $c_{54} = \frac{df_1}{d\tau_{xz}}(c_{51}(y))$ .

В случаях, когда через данную точку сечения стержня проходят две и более характеристики, возникает неопределенность в определении напряжений и невозможно построить непрерывные решения. Эта неопределенность устраняется введением линии разрыва напряжений. На линии разрыва напряжений нормальная к ней составляющая вектора касательного напряжения  $\bar{\tau} = \tau_{xz}\bar{i} + \tau_{yz}\bar{j}$  непрерывна. Из этого условия получим соотношение для определения линии разрыва напряжений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}^+ - \tau_{yz}^-}{\tau_{xz}^+ - \tau_{xz}^-}, \quad (25)$$

где индексы “плюс” и “минус” наверху определяют соответственно компоненты напряжения слева и справа от линии разрыва напряжений.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быковцев Г. И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: сб. статей. Владивосток: Дальнаука, 2002. 566 с.
- [2] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2012. № 4 (76). С. 108–112.
- [3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [4] Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 576–579.

*A. V. Balashnikova, B. G. Mironov*

### TORSION OF NON-UNIFORM CYLINDRICAL AND PRISMATIC BARS

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** The paper considers the torsion inhomogeneous idealnoplasticheskikh rods at an arbitrary condition plasticity. The characteristics of the studied equations and relations along characteristics, as well as some special cases the limiting conditions state obtained integrals of basic relations.

**Keywords:** power, flexibility, heterogeneity, torsion.

### REFERENCES

- [1] Bykovtsev G. I. Selected problematic issues of the mechanics of deformable media: Sat. articles. Vladivosok: Dal'nauka, 2002. 566 p. (in Russian).

---

*Balashnikova Angelika Veniaminovna*, Candidate of physico-mathematical Sciences, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

*Mironov Boris Gurevich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

[2] Derevjannyh E. A., Mironov B. G. On the general relations of anisotropic torsion rod theory // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2012. № 4 (76). P. 108–112. (in Russian).

[3] Ivlev D. D. The theory of ideal plasticity. M.: Nauka, 1966. 232 p. (in Russian).

[4] Ivlev D. D., Mironov B. G. On relations translational perfectly plastic anisotropy torsional // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 576–579. (in Russian).

П. Н. Кузнецов

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, ПОДКРЕПЛЕННЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ, СМЕЩЕННЫМ ПО ДВУМ НАПРАВЛЕНИЯМ ПРИ ДВУОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** Различные варианты включений были изучены в работах [5]–[8]. Упругопластическое и деформированное состояния анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленным эксцентрическим круговым включением, рассмотрены в работах [2], [3]. Двuosное растяжение упругопластической пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии исследовано в работе [4]. В работе [5] было рассмотрено упругопластическое состояние плоскости с круговым отверстием, подкрепленным эллиптическим включением, смещенным только в одном направлении относительно центра отверстия. В настоящей статье обобщается работа [5]. Предполагается, что круговое отверстие усилено эллиптическим включением, смещенным по двум направлениям относительно центра отверстия. Рассматривается случай плоской деформации. Определяется граница упругопластической зоны, рассматривается влияние неоднородного включения на напряженное состояние плоскости.

**Ключевые слова:** упругость, пластичность, напряжение, неоднородность, двuosное растяжение.

УДК: 539.375

**Постановка задачи.** Рассмотрим плоскость с эллиптическим включением. Эллиптическое включение ослаблено круговым отверстием радиуса  $R$ . Начало координат  $x$ ,  $y$  совпадает с центром окружности. Центр окружности и эллипса смещены на величину  $c_1$  вдоль оси  $Ox$  и величину  $c_2$  вдоль оси  $Oy$  (рис. 1). Предел текучести материала включения равен  $k_1$ , предел текучести материала плоскости –  $k_2$ . Пластина находится в состоянии двuosного растяжения под действием усилий на бесконечности  $p_1$ ,  $p_2$  (рис. 1).

Уравнение эллиптического контура отверстия запишем в виде

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} + \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

---

© Кузнецов П. Н., 2016

Кузнецов Павел Николаевич

e-mail: kuznetsov\_pn@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.04.2016

где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса,  $c_1$  – величина расстояния между центром окружности и центром эллипса по оси  $Ox$ ,  $c_2$  – величина расстояния между центром окружности и центром эллипса по оси  $Oy$ .

Решение будем искать в приближенном виде аналогично [1]–[6]. Уравнение упруго-пластической границы запишем в виде

$$r = r_s^{(0)} + \delta r_{s1}, \quad (2)$$

где  $\delta$  – малый безразмерный параметр.

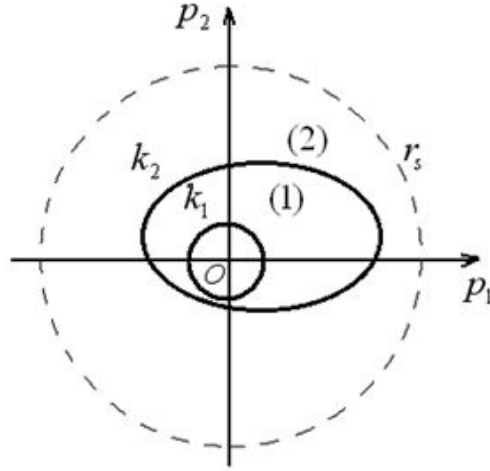


Рис. 1

В дальнейшем все величины, имеющие размерность длины, отнесем к величине  $r_s^{(0)}$ . Все величины, имеющие размерность напряжения, отнесем к пределу текучести  $k_1$ , обозначим  $k_2/k_1 = \chi$ . Примем  $\rho = r/r_s^{(0)}$ ,  $\rho' = r_{s1}/r_s^{(0)}$ . Величины  $c_1/r_s^{(0)}$ ,  $c_2/r_s^{(0)}$ ,  $(a-b)/2r_s^{(0)}$ ,  $(p_1 - p_2)/2k_1$  будем считать достаточно малыми, порядка  $\delta$  и обозначим

$$\frac{c_1}{r_s^{(0)}} = \delta_1, \quad \frac{c_2}{r_s^{(0)}} = \delta_2, \quad \frac{(a-b)}{2r_s^{(0)}} = \delta_3, \quad \frac{(p_1 - p_2)}{2k_1} = \delta_4. \quad (3)$$

Далее примем

$$\delta_1 = d_1\delta, \quad \delta_2 = d_2\delta, \quad \delta_3 = d_3\delta, \quad \delta_4 = d_4\delta, \quad d_i - const, \quad 0 \leq d_i \leq 1. \quad (4)$$

**Нулевое приближение.** В исходном нулевом приближении при  $\delta = 0$  имеем плоскость с круговым включением, ослабленным отверстием, равномерно растягиваемым на бесконечности усилиями  $p = (p_1 + p_2)/2k_1$  (рис. 2).

Радиус отверстия в безразмерном виде обозначим  $\alpha = R/r_s^{(0)}$ , радиус включения –  $\beta = (a+b)/2r_s^{(0)}$ . Будем считать, что  $\beta < 1$ .

Компоненты напряжения запишем в полярной системе координат  $\rho, \theta$  :  $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$ . Решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma'_{ij}. \quad (5)$$

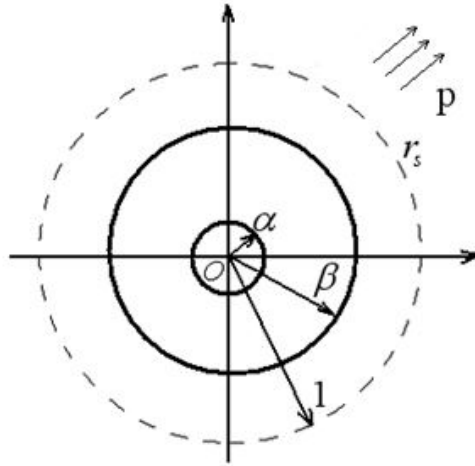


Рис. 2

Припишем компонентам напряжения в зоне включения индекс "1" внизу, компонентам напряжения вне включения – индекс "2" внизу. Компонентам напряжения в пластической зоне припишем индекс "p" наверху, в упругой зоне – индекс "e" наверху.

Рассмотрим напряженное состояние в исходном нулевом приближении.

Исходное напряженное состояние является осесимметричным:

$$\tau_{p\theta_1}^{(0)} = 0, \quad \tau_{p\theta_2}^{(0)} = 0. \quad (6)$$

В зоне 1, в зоне включения, условие пластичности примет вид

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p} - \sigma_{\theta_1}^{(0)p} = -2, \quad \sigma_{\theta_1}^{(0)p} > \sigma_{\rho_1}^{(0)p}. \quad (7)$$

Вне зоны включения, в зоне 2, условие пластичности запишем в виде

$$\sigma_{\rho_2}^{(0)} - \sigma_{\theta_2}^{(0)} = -2\chi. \quad (8)$$

Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{d\sigma_{\rho}^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho}^{(0)} - \sigma_{\theta}^{(0)}}{\rho} = 0. \quad (9)$$

Из (7)–(9) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_1}^{(0)p} &= 2 \ln \rho + C_1, & \sigma_{\theta_1}^{(0)p} &= 2 + 2 \ln \rho + C_1, \\ \sigma_{\rho_2}^{(0)p} &= 2\chi \ln \rho + C_2, & \sigma_{\theta_2}^{(0)p} &= 2\chi + 2\chi \ln \rho + C_2, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные.

Из условия  $\sigma_{\rho_1}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha} = 0$  определим постоянную  $C_1$

$$C_1 = -2 \ln \alpha.$$

Получим

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p} = 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_{\theta_1}^{(0)p} = 2 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}. \quad (11)$$

Условие сопряжения компонент напряжений на границе эллиптического включения запишется в виде

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p} \Big|_{\rho=\beta} = \sigma_{\rho_2}^{(0)p} \Big|_{\rho=\beta}. \quad (12)$$

Согласно (10–12) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_2}^{(0)p} &= 2\chi \ln \frac{\rho}{\beta} + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha}, \\ \sigma_{\theta_2}^{(0)p} &= 2\chi \ln \frac{\rho}{\beta} + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\chi. \end{aligned} \quad (13)$$

На границе  $\rho = \beta$  имеет место разрыв напряжений  $\sigma_{\theta}^{(0)p}$ :

$$\sigma_{\theta_2}^{(0)p} - \sigma_{\theta_1}^{(0)p} = 2(\chi - 1). \quad (14)$$

При  $\rho \rightarrow \infty$  имеет место  $\sigma_{\rho}^{(0)e} = \sigma_{\theta}^{(0)e} = p$ .

Решение в упругой области будем искать в виде

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = p - \frac{B}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = p + \frac{B}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (15)$$

Из условия сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе будем иметь

$$\sigma_{\rho_2}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho}^{(0)e} \Big|_{\rho=1}, \quad \sigma_{\theta_2}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\theta}^{(0)e} \Big|_{\rho=1}. \quad (16)$$

Из (13), (15), (16) имеем

$$\begin{aligned} p - \frac{B}{1} &= 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} - 2\chi \ln \beta, \\ p + \frac{B}{1} &= 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} - 2\chi \ln \beta + 2\chi. \end{aligned} \quad (17)$$

Откуда

$$B = \chi, \quad p = 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} - 2\chi \ln \beta + 2\chi. \quad (18)$$

Учитывая, что  $\alpha = R/r_s^{(0)}$  и  $\beta = (a+b)/2r_s^{(0)}$ , из (18) получим

$$r_s^{(0)} = \exp \left( \frac{p}{2\chi} + \left(1 - \frac{1}{\chi}\right) \ln \left( \frac{a+b}{2} \right) + \frac{1}{\chi} \ln R - \frac{1}{2} \right). \quad (19)$$

**Первое приближение.** Уравнение эллипса (1) перепишем в виде

$$\frac{(x - \delta_1)^2}{(\beta + \delta_3)^2} + \frac{(y - \delta_2)^2}{(\beta - \delta_3)^2} = 1 \quad (20)$$

или

$$(x - \delta_1)^2 (\beta + \delta_3)^{-2} + (y - \delta_2)^2 (\beta - \delta_3)^{-2} - 1 = 0.$$

Пренебрегая малыми высшего порядка, уравнение (20) запишем в виде

$$(x - \delta_1)^2 \left( \frac{1}{\beta^2} - 2 \frac{\delta_3}{\beta^3} \right) + (y - \delta_2)^2 \left( \frac{1}{\beta^2} + 2 \frac{\delta_3}{\beta^3} \right) - 1 = 0. \quad (21)$$

Перейдем к полярным координатам по формулам

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

в первом приближении будем иметь

$$\rho^2 \left( 1 - 2 \frac{\delta_3}{\beta} \cos 2\theta \right) - 2\rho (\delta_1 \cos \theta + \delta_2 \sin \theta) - \beta^2 = 0. \quad (22)$$



Откуда

$$\rho = \beta + \delta_1 \cos \theta + \delta_2 \sin \theta + \delta_3 \cos 2\theta. \quad (23)$$

Контур кругового отверстия фиксирован, поэтому в зоне 1 величины  $\sigma'_{ij1} = 0$ .

Граничные условия на контуре  $L_1$  (рис. 1) запишутся в виде [1]

$$\begin{aligned} \left( \sigma'_{\rho_1^p} + \frac{d\sigma_{\rho_1^{(0)p}}}{d\rho} \rho' \right) \Big|_{\rho=\beta} &= \left( \sigma'_{\rho_2^p} + \frac{d\sigma_{\rho_2^{(0)p}}}{d\rho} \rho' \right) \Big|_{\rho=\beta}, \\ \left( \tau'_{\rho\theta_1^p} - \left( \sigma_{\theta_1^{(0)p}} - \sigma_{\rho_1^{(0)p}} \right) \frac{\rho'}{\beta} \right) \Big|_{\rho=\beta} &= \left( \tau'_{\rho\theta_2^p} - \left( \sigma_{\theta_2^{(0)p}} - \sigma_{\rho_2^{(0)p}} \right) \frac{\rho'}{\beta} \right) \Big|_{\rho=\beta}, \end{aligned} \quad (24)$$

где точка наверху означает дифференцирование по  $\theta$ .

Из (24) следует

$$\begin{aligned} \sigma'_{\rho_2^p} \Big|_{\rho=\beta} &= \frac{2}{\beta} (1 - \chi) (d_1 \cos \theta + d_2 \sin \theta + d_3 \cos 2\theta), \\ \tau'_{\rho\theta_2^p} \Big|_{\rho=\beta} &= \frac{2}{\beta} (1 - \chi) (d_1 \sin \theta - d_2 \cos \theta + 2d_3 \sin 2\theta). \end{aligned} \quad (25)$$

Согласно [1] из (25) получаем

$$\begin{aligned} \sigma'_{\rho_2^p} &= \frac{2}{\rho} (1 - \chi) d_1 \cos \theta + \frac{2}{\rho} (1 - \chi) d_2 \sin \theta + \\ &+ 2 \frac{(1-\chi)}{\rho} d_3 \left( [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta)] \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \right. \\ &+ \left. [\sin(\sqrt{3} \ln \beta) - \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \beta)] \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \cos 2\theta, \\ \sigma'_{\theta_2^p} &= \sigma'_{\rho_2^p}, \\ \tau'_{\rho\theta_2^p} &= \frac{2}{\rho} (1 - \chi) d_1 \sin \theta - \frac{2}{\rho} (1 - \chi) d_2 \cos \theta + 4 \frac{(1-\chi)}{\rho} d_3 \left( \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \right. \\ &+ \left. \sin(\sqrt{3} \ln \beta) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (26)$$

Условия сопряжения напряжений в пластической и упругой областях при  $\rho = 1$  имеют вид

$$\sigma'_{\rho_2^p} \Big|_{\rho=1} = \sigma'_{\rho^e} \Big|_{\rho=1}, \quad \tau'_{\rho\theta_2^p} \Big|_{\rho=1} = \tau'_{\rho\theta^e} \Big|_{\rho=1}. \quad (27)$$

Согласно (26), (27) компоненты напряжений при  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  в упругой области имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho^e} &= \frac{2(1-\chi)}{\rho^3} d_1 \cos \theta + \frac{2(1-\chi)}{\rho^3} d_2 \sin \theta, & \sigma_{\theta^e} &= -\frac{2(1-\chi)}{\rho^3} d_1 \cos \theta - \frac{2(1-\chi)}{\rho^3} d_2 \sin \theta, \\ \tau'_{\rho\theta^e} &= \frac{2(1-\chi)}{\rho^3} d_1 \sin \theta - \frac{2(1-\chi)}{\rho^3} d_2 \cos \theta. \end{aligned} \quad (28)$$

Компоненты напряжений при  $\cos 2\theta$ ,  $\sin 2\theta$  на границе пластической зоны при  $\rho = 1$ , согласно (26), имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma'_{\rho_2^p} &= 2(1 - \chi) d_3 [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta)] \cos 2\theta, \\ \sigma'_{\theta_2^p} &= \sigma'_{\rho_2^p}, \\ \tau'_{\rho\theta_2^p} &= 4(1 - \chi) d_3 \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (29)$$

Соответствующее решение в упругой области следует искать в виде [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho^e} &= \left( -\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2} \right) a_2'' \cos 2\theta + \left( \frac{2}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) b_2''' \cos 2\theta + \left( 1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) d_4 \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta^e} &= \frac{1}{\rho^4} a_2'' \cos 2\theta - \frac{2}{\rho^4} b_2''' \cos 2\theta + \left( 1 + \frac{3}{\rho^4} \right) d_4 \cos 2\theta, \\ \tau'_{\rho\theta^e} &= \left( -\frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2} \right) a_2'' \sin 2\theta + \left( \frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) b_2''' \sin 2\theta + \left( 1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) d_4 \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (30)$$

Из (29), (30) получим

$$\begin{aligned} a_2'' &= 2(1-\chi) d_3 (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta)), \\ b_2''' &= 4(1-\chi) d_3 \cos(\sqrt{3} \ln \beta). \end{aligned} \quad (31)$$

Из (28), (30) следует

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{'e} &= \frac{2(1-\chi)}{\rho^3} d_1 \cos \theta + \frac{2(1-\chi)}{\rho^3} d_2 \sin \theta + \\ &+ \frac{2(1-\chi)}{\rho^2} d_3 \left\{ \left(2 - \frac{1}{\rho^2}\right) (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta)) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{2}{\rho^2} - 2\right) 2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \right\} \cos 2\theta + \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right) d_4 \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta e}' &= -\frac{2(1-\chi)}{\rho^3} d_1 \cos \theta - \frac{2(1-\chi)}{\rho^3} d_2 \sin \theta + \\ &+ \frac{2(1-\chi)}{\rho^4} d_3 \left\{ \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) - 3 \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \right\} \cos 2\theta + \left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right) d_4 \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta e}' &= \frac{2(1-\chi)}{\rho^3} d_1 \sin \theta - \frac{2(1-\chi)}{\rho^3} d_2 \cos \theta + \\ &+ \frac{2(1-\chi)}{\rho^2} d_3 \left\{ \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta)) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{2}{\rho^2} - 1\right) 2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \right\} \sin 2\theta + \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right) d_4 \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (32)$$

Величину  $\rho_s'$  определим из условия сопряжения

$$\left( \sigma_{\theta_2}^{'p} + \frac{d\sigma_{\theta_2}^{(0)p}}{d\rho} \rho_s' \right) \Big|_{\rho=1} = \left( \sigma_{\theta}^{'e} + \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} \rho_s' \right) \Big|_{\rho=1}. \quad (33)$$

Из (13), (15), (26), (32), (33) следует

$$\rho_s' = \frac{(\chi-1)}{\chi} d_1 \cos \theta + \frac{(\chi-1)}{\chi} d_2 \sin \theta + \left( 2 \frac{(\chi-1)}{\chi} d_3 \cos(\sqrt{3} \ln \beta) + \frac{d_4}{\chi} \right) \cos 2\theta. \quad (34)$$

Таким образом, уравнение упругопластической границы имеет вид

$$\rho = 1 + \delta \left\{ \frac{(\chi-1)}{\chi} d_1 \cos \theta + \frac{(\chi-1)}{\chi} d_2 \sin \theta + \left( 2 \frac{(\chi-1)}{\chi} d_3 \cos(\sqrt{3} \ln \beta) + \frac{d_4}{\chi} \right) \cos 2\theta \right\}. \quad (35)$$

В случае равномерного растяжения пластины в (35) следует положить  $d_4 = 0$ . В случае отсутствия эксцентриситета у эллипса включения – положить  $d_3 = 0$ . В случае совпадения центров отверстия и эллипса включения – положить  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = 0$ . При  $d_3 = d_4 = 0$  имеет место включение в виде круга, смещенного относительно центра отверстия. При  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = d_3 = d_4 = 0$  из (35) следует

$$\rho = 1 + \delta \frac{(\chi-1)}{\chi} d_1 \cos \theta.$$

**Заключение.** Рассмотрено двусное упругопластическое напряженное состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленным смещенным эллиптическим включением. Определена граница упругопластической зоны, изучено влияние неоднородного включения на напряженное состояние плоскости.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 238 с.
- [2] Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Тихонов С. В. Деформированное состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двусосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 1(27). С. 105–114.
- [3] Тихонов С. В., Рыбакова Т. И. Упругопластическое состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двусосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3(25). С. 138–146.
- [4] Фоминых С. О. Двусосное растяжение упругопластической пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 610–622.
- [5] Кузнецов П. Н. Упругопластическое состояние неоднородной плоскости с круговым отверстием, подкрепленным эксцентрическим эллиптическим включением, при двусосном растяжении // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2009. № 2 (68). С. 103–110.
- [6] Кузнецов П. Н. Упругопластическое состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленной включениями, ограниченными эксцентрическими окружностями, при двусосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. 2009. № 1 (6). С. 134–141.
- [7] Кузнецов П. Н. Упругопластическое состояние плоскости, подкрепленной эксцентрическими включениями, при двусосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2009. № 2 (62). С. 13–18.
- [8] Кузнецов П. Н. Упругопластическое состояние неоднородной плоскости с круговым отверстием, подкрепленным включением, ограниченными эллипсами, при двусосном растяжении // Известия ТулГУ, Естественные науки. 2009. Вып. 2. С. 118–126.

*P. N. Kuznetsov*

**ELASTO-PLASTIC CONDITION OF THE NON-UNIFORM PLANE WITH THE CIRCULAR OPENING SUPPORTED WITH THE ELLIPTIC INCLUSION DISPLACED IN TWO DIRECTIONS AT BIAXIAL STRETCHING**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** Various options of inclusions have been studied in works [5–8]. The elasto-plastic and deformed conditions of the anisotropic plane weakened by the opening supported with eccentric circular inclusion are considered in works [2,3]. Biaxial stretching of an elasto-plastic plate with a circular opening in case of transmitting anisotropy is investigated in work [4]. In work [5] the elasto-plastic condition of the plane with the circular opening supported with the elliptic inclusion displaced only in one direction concerning the center of an opening has been considered. In the present article work is generalized [5]. It is supposed that the circular opening is strengthened by the elliptic inclusion displaced in two directions concerning the center of an opening. The case of flat deformation is considered. The border of an elasto-plastic zone is defined, influence of non-uniform inclusion on a plane tension is considered.

**Keywords:** elasticity, plasticity, tension, heterogeneity, biaxial stretching.

**REFERENCES**

- [1] Ivlev D. D., Yershov L.V. A method of indignations in the theory of an elasto-plastic body. M.: Science, 1978. 238 p. (in Russian).
- [2] Matveev S. V., Matveeva A. N., Tikhonov S. V. The deformed condition of the anisotropic plane weakened by an opening, supported with inclusion, a limited eccentric circle at biaxial stretching // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2016. No. 1(27). S. 105–114. (in Russian).
- [3] Tikhonov S. V., Rybakova T. I. An elasto-plastic condition of the anisotropic plane weakened by an opening, supported with inclusion, a limited eccentric circle at biaxial stretching // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2015. № 3(25). S. 138–146. (in Russian).
- [4] Fominykh S. O. Biaxial stretching of an elasto-plastic plate with a circular opening in case of transmitting anisotropy // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 610–622. (in Russian).
- [5] Kuznetsov P. N. An elasto-plastic condition of the non-uniform plane with the circular opening supported with eccentric elliptic inclusion at biaxial stretching // the Messenger of SAMGU. Natural-science series. 2009. № 2 (68). P. 103–110. (in Russian).
- [6] Kuznetsov P. N. An elasto-plastic condition of the non-uniform plane weakened by a circular opening, supported with inclusions, limited eccentric circles at biaxial stretching // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2009. № 1 (6). P. 134–141. (in Russian).

---

*Kuznetsov Pavel Nikolaevich*, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor of the Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

[7] Kuznetsov P. N. An elasto-plastic condition of the plane supported with eccentric inclusions at biaxial stretching // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2009. № 2 (62). P. 13–18. (in Russian).

[8] Kuznetsov P. N. An elasto-plastic condition of the non-uniform plane with the circular opening supported with the inclusion limited to ellipses at biaxial stretching // Izvestiya TULGU, Natural sciences. 2009. Issue 2, S. 118–126. (in Russian).

К. И. Быкова, М. И. Быкова, С. Е. Крупенко

**ОСТАТОЧНЫЕ ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ЗА  
ДИФРАГИРОВАННОЙ ВОЛНОЙ, ПОРОЖДЕННОЙ ПАДЕНИЕМ  
ПРЕДЕЛЬНОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ВЕРШИНУ  
КЛИНОВИДНОГО ВЫРЕЗА**

*Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия*

**Аннотация.** В работе рассмотрено напряженно-деформированное состояние упруговязко-пластического материала в окрестности вершины клиновидного выреза за дифрагированной волной, возникающей в результате прямого падения предельной упругой волны на вырез. Поведение перемещений и деформаций за дифрагированной поверхностью обладает особенностью, приводящей к сингулярности их значений в вершине клиновидного выреза и за дифрагированной поверхностью. Для устранения такой особенности вершина выреза аппроксимирована окружностью малого радиуса  $\delta$ . Поведение напряжений и деформаций за фронтом дифрагированной волны, которые на фронте принимают значения, равные нулю, а производные по направлению нормали неограниченные, аппроксимировано линейным образом по значениям градиентов напряжений и деформаций на малом расстоянии  $\varepsilon$  от дифрагированного фронта. Градиенты напряжений и деформаций на расстоянии  $\varepsilon$  от дифрагированной волны приняты за интенсивность волны. В работе получено значение интенсивности дифрагированной волны в процессе ее распространения, а также распределение остаточных деформаций и значение динамических коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности вершины клиновидного выреза.

**Ключевые слова:** упругие волны, дифракция, клин, интенсивность напряжений, остаточные деформации.

УДК: 539.3,796.012.236

---

© Быкова К. И., Быкова М. И., Крупенко С. Е., 2016

*Быкова Ксения Игоревна*

**e-mail:** ksynichka\_b@mail.ru, кандидат физико-математических наук, Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина" г. Воронеж, Россия.

*Быкова Мария Игоревна*

**e-mail:** 477838@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

*Крупенко Светлана Евгеньевна*

**e-mail:** anit\_of@mail.ru, инженер, Воронежский опытный завод программного продукта, Воронеж, Россия.

Поступила 19.04.2016

**Введение.** Исследование статического предельного упругого состояния материала в окрестности вершины трещины опирается на определение  $J$ -интегралов и коэффициентов интенсивности напряжений  $K_1$  и  $K_2$  [8], [9], [10]. Динамическое напряженное состояние требует решения нестационарных волновых задач в окрестности вершины трещины, которые связаны с распространением, отражением и дифрагированием упругих волн.

В работах [2], [4], [5], [7], [8] проведен анализ напряженно – деформированного состояния за упругими дифрагированными волнами на клине в случае отражения гармонических волн [5], [7], [8] и волн слабого разрыва. В них показано, что по направлению оси симметрии клина интенсивность дифрагированных волн является максимальной и может достигать таких больших значений, что второй инвариант девиатора тензора напряжений за дифрагированной волной может превышать величину предела пластичности. Это заставляет для анализа такой ситуации использовать модель упруговязкопластического материала (EVP) в области за дифрагированной волной и исследовать остаточные пластические деформации в окрестности выреза, аппроксимируемого клином.

**Приближенное представление деформирования материала за дифрагированной волной.** Поведение перемещений и деформаций вблизи дифрагированной поверхности обладает особенностью на острие клина, а на фронте дифрагированной волнных градиент неограничен. Поэтому в качестве интенсивности дифрагированной волны выбирается ее значение  $w$  на некотором малом расстоянии  $\varepsilon$  за фронтом волны. На рис. 1 представлено схематическое изображение поведения скоростей перемещений вблизи дифрагированного фронта, из которого видно, что в качестве интенсивности можно выбирать скорости перемещения и градиенты скоростей перемещений в точке А ( $w = u(\varepsilon)$ ,  $w_1 = \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{n=\varepsilon} = tg\alpha$ ).

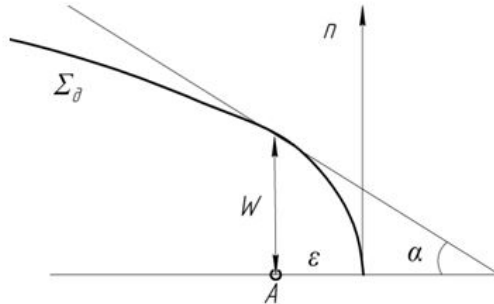


Рис. 1 Схематическое изображение поведения скоростей перемещений  $u(n)$  за фронтом дифрагированной волны  $\Sigma_d$

Построение решения уравнения “переноса” интенсивности упругих волн, дифрагированных от вершины клиновидного выреза. При использовании лучевого метода интенсивность волны на фронте в процессе его перемещения описывается дифференциальным уравнением “переноса”:

$$\delta W / \tilde{c} \delta t - \Omega W = F, \quad (1)$$

где  $W$  – интенсивность (скачок скорости) на переднем фронте волны,

$\Omega = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$  – средняя кривизна переднего фронта,  $\chi_1, \chi_2$  – главные кривизны переднего фронта,  $\tilde{c}$  – скорость переднего фронта волны,  $t$  – время,  $\delta/\delta t$  – производная по времени, примененная к функции, заданной на переднем фронте бегущей волны. Для решения уравнения “переноса” (1) необходимо задание начальной интенсивности в момент зарождения фронта. Будем полагать, что дифрагированный фронт порождается отраженными волнами от цилиндра малого радиуса  $\delta$ , заменяющего особую точку клина.

Для построения уравнения фронта отраженной волны в параметрическом виде возьмем точку  $M$  отраженной от цилиндра волны, радиус-вектор которой определяется суммой вектора  $\vec{OM}_0$  точки зарождения этой волны и вектора  $\vec{MM}_0$  как расстояния  $\tilde{c}t$ , пройденного фронтом волны по нормали к фронту волны в момент ее зарождения (рис. 2).

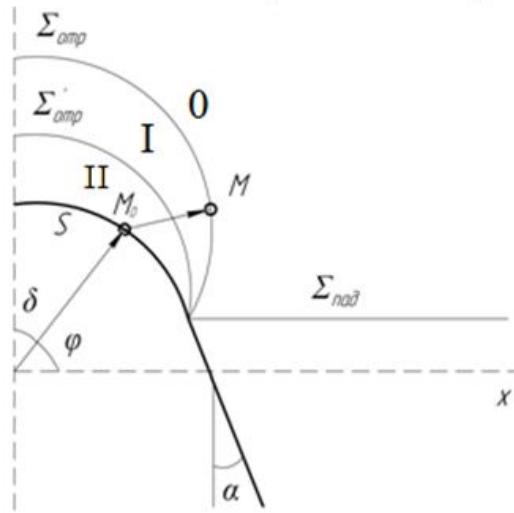


Рис. 2. Геометрия отражения продольной волны  $\Sigma_{\text{пад}}$  от цилиндра

Имея это в виду, уравнение продольной отраженной волны запишем в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \delta \cos \varphi + \tilde{c}t \cos 2\varphi, \\ y = \delta \sin \varphi + \tilde{c}t \sin 2\varphi. \end{cases} \quad (2)$$

Проведем вычисление главных кривизн дифрагированного фронта:

$$\chi_1 = \frac{\sqrt{(\tilde{r}'' \times \tilde{r}'')^2}}{\sqrt{(\tilde{r}')^2}^3} \text{ и } \chi_2 = \frac{1}{\rho}. \text{ Так как } \rho \rightarrow \infty, \text{ то } \chi_2 = 0.$$

Дифференциальное уравнение “переноса” с учетом полученной кривизны примет вид

$$\frac{\delta W}{\tilde{c}\delta t} = \frac{W(\delta^2 + 6\tilde{c}t\delta \cos \psi + 8\tilde{c}^2t^2)}{2(\delta^2 + 4\tilde{c}t\delta \cos \psi + 4\tilde{c}^2t^2)^{3/2}}. \quad (3)$$



Уравнение “переноса” является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, имеющим точное решение с учетом начальных условий:

$$\ln \frac{W}{W_0} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{\delta^2 + 6\tilde{c}t\delta \cos \psi + 8\tilde{c}^2 t^2}{(\delta^2 + 4\tilde{c}t\delta \cos \psi + 4\tilde{c}^2 t^2)^{3/2}} \tilde{c} \delta \tau. \quad (4)$$

Кривизна как величина, обратная расстоянию от поверхности до центра кривизны, есть скаляр, но поскольку мы рассматриваем развертывающиеся отраженные волны, то расстояние  $\delta n = \tilde{c} \delta t$  откладывается в сторону, противоположную нормали, и поэтому в уравнении “переноса”  $\tilde{c} \delta t$  берется со знаком “–”, или при положительном  $\tilde{c} \delta t$  главная кривизна  $\chi_1$  будет отрицательной.

Для случая малых  $\delta$  уравнение “переноса” легко интегрируется:

$$\ln \frac{W}{W_0} = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{8\tilde{c}^2 t^2}{(4\tilde{c}^2 t^2)^{3/2}} \tilde{c} \delta \tau = \frac{1}{2} \ln \frac{t_0}{t}, \quad (5)$$

отсюда

$$\frac{W}{W_0} = \sqrt{\frac{\tilde{c} t_0}{\tilde{c} t}} = \sqrt{\frac{n_0}{n}}, \quad (6)$$

где  $n$  – расстояние, пройденное волной за время  $t$ .

**Расчет второго инварианта девятиатора тензора напряжений в окрестности вершины клина в момент отражения падающей волны.** Начальная интенсивность отраженных продольной и сдвиговой волн для регулярного случая определяется из условий совместности на фронтах падающей и двух отраженных волн в момент их зарождения и граничных условий отсутствия нормальных и касательных напряжений на внутренней поверхности окружности радиуса  $\delta$  для случая свободной поверхности клиновидного выреза в упругом пространстве. Заметим, что коэффициенты отражения продольной и сдвиговой волн зависят только от упругих параметров материала и угла  $\varphi$ , являющегося угловым параметром, не зависящим от времени распространения отраженных волн, поэтому коэффициенты отражения не входят под знак интеграла в выражении для интенсивности волны в процессе ее распространения.

Далее рассмотрим закономерности отражения падающей на окружность продольной волны, воспользовавшись материалом работы [4].

Рассмотрим случай отражения плоской продольной волны  $\Sigma$  от границы свободного от напряжения полупространства в системе координат, движущейся вдоль границы вправо со скоростью  $\frac{c_1}{\sin \varphi}$ , где  $\varphi$  – угол между поверхностью падающей волны и границей полупространства. Как следует из закона Снелла,  $\sin \varphi = \frac{c_2 \sin \varphi'}{c_1}$ , где  $\varphi'$  – угол между сдвиговой волной и границей отраженной поверхности.

Предположим, что материал перед волной  $\Sigma$  находится в покое и не напряжен. Тогда упругое напряженное состояние за падающей волной  $\Sigma$  определяется условиями совместности для напряжений и скоростей на фронте сильной волны [3], [6]:

$$-c_1 [\sigma_{ij}] = (\lambda \delta_{ij} + 2\mu N_i N_j) \omega_n, \quad [v_i] N_i = \omega_n, \quad [v_i] = \omega_n N_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где  $\mu = \rho c_2^2$ ,  $\lambda + 2\mu = \rho c_1^2$ ,  $\lambda = \rho c_1^2 - 2\rho c_2^2 \geq 0$ , откуда  $\frac{c_2^2}{c_1^2} \leq \frac{1}{2}$ .

В случае покоя материала перед фронтом дифрагированной волны  $[\sigma_{ij}] = -\sigma_{ij}^0$ .

Скачки скоростей и напряжений на отраженных волнах  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  в окрестности точки  $M$  связаны соотношениями

$$-c_1 [\sigma_{ij}]_I = (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i^I n_j^I) \omega^I, [v_i]_I = \omega^I n_i^I, n_i^I n_i^I = 1, \quad (8)$$

$$-c_2 [\sigma_{ij}]_{II} = \mu (\tau_i^{II} n_j^{II} + \tau_j^{II} n_i^{II}) \omega^{II}, [v_i]_{II} = \omega^{II} \tau_i^{II}, \tau_i^{II} \tau_i^{II} = 1, \tau_i^{II} n_i^{II} = 0. \quad (9)$$

При этом

$$[\sigma_{ij}^I] = \sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}^I, [\sigma_{ij}^{II}] = \sigma_{ij}^I - \sigma_{ij}^{II}. \quad (10)$$

Дополним систему полученных уравнений (7)–(9) граничными условиями:

$$\sigma_{ij}^S n_j = 0, \text{ то есть } \sigma_{ij}^{II} n_j = 0. \quad (11)$$

Заметим, что  $\vec{N} = (0, -1, 0)$ ,  $\vec{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ ,  $\vec{n}^I = (\sin 2\varphi, -\cos 2\varphi, 0)$ ,  $\vec{n}^{II} = (\sin(\varphi + \varphi'), -\cos(\varphi + \varphi'), 0)$ ,  $\vec{\tau}^{II} = (\cos(\varphi + \varphi'), \sin(\varphi + \varphi'), 0)$ .

Система линейных уравнений для интенсивностей  $\omega^I$ ,  $\omega^{II}$  сводится к двум линейным алгебраическим уравнениям:

$$\begin{cases} \lambda \cos \varphi + (\lambda \cos \varphi + 2\mu \sin 2\varphi \sin \varphi) k_1 + \frac{c_1}{c_2} \mu \sin(\varphi + 2\varphi') k_2 = 0, \\ \lambda \sin \varphi + 2\mu \sin \varphi + (\lambda \sin \varphi - 2\mu \cos 2\varphi \sin \varphi) k_1 + \frac{c_1}{c_2} \mu (-\cos(\varphi + 2\varphi')) k_2 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь  $k_1 = \frac{\omega^I}{\omega_n^0}$ ,  $k_2 = \frac{\omega^{II}}{\omega_n^0}$ .

Решение системы примет вид

$$k_1 = \frac{\left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi - 1\right)^2 - 2 \frac{c_2^3}{c_1^3} \sin 2\varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi}}{\left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi - 1\right)^2 + 2 \frac{c_2^3}{c_1^3} \sin 2\varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi}}, \quad (13)$$

$$k_2 = \frac{-2 \frac{c_2}{c_1} \sin 2\varphi \left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi - 1\right)}{\left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi - 1\right)^2 + 2 \frac{c_2^3}{c_1^3} \sin 2\varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi}}. \quad (14)$$

На рис. 3 представлены графики относительной интенсивности  $\frac{\omega^I}{\omega_n^0}$  продольной дифрагированной волны на острие клина в зависимости от направления  $\varphi$ ,  $\varphi \in (0, \pi)$ . Значение  $\frac{\omega^I}{\omega_n^0}$  рассчитано на поверхности цилиндра малого радиуса  $\delta$  при  $\delta \rightarrow 0$ , и это значение  $\frac{\omega^I}{\omega_n^0}$  является ее начальным значением. При распространении продольной дифрагированной волны с увеличением  $\frac{c_2}{c_1}$  от значений  $\frac{c_2}{c_1} = 0, 4$  до  $\frac{c_2}{c_1} = 0, 5$  дифрагированное излучение  $\frac{\omega^I}{\omega_n^0}$  становится более направленным по фронту в направлении  $\varphi = \pi/2$ .

Как и следовало ожидать, максимальное значение, равное 1, коэффициент  $k_1$  принимает при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , минимальное  $k_1 \neq 0$  – при  $\varphi \neq 0$ , что не противоречит результатам [1], [5], [7], полученным для случая падения и отражения гармонических волн.

На рис. 4 представлен график значений коэффициента относительной интенсивности  $k_2 = \frac{\omega^{II}}{\omega_n^0}$  отраженной сдвиговой волны, который отражает симметрию интенсивности отраженной волны  $\Sigma_2$  при  $\varphi \in [\pi/2, \pi]$ , из которого также следует, что максимальное значение интенсивности сдвиговой волны  $k_2$  достигается при  $\varphi \approx \frac{\pi}{6}$  и мало зависит от  $\frac{c_2}{c_1}$ , но само максимальное значение  $k_2$  увеличивается от 0,3 до 0,8 с увеличением  $\frac{c_2}{c_1}$  от 0,4 до 0,5.

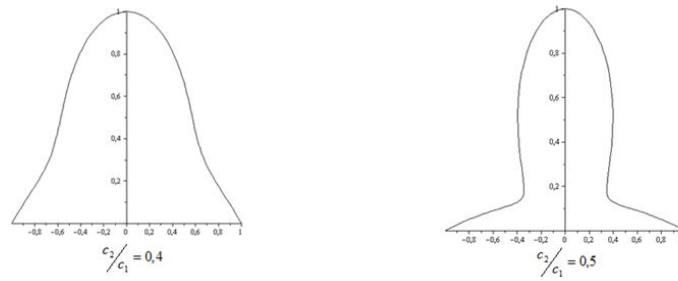


Рис. 3. График значений коэффициента  $k_1 = \omega^I / \omega_n^0$  в полярных координатах

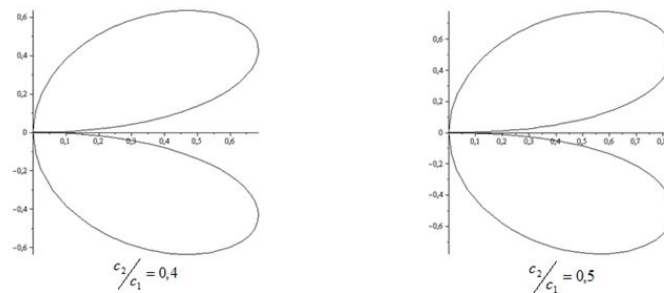


Рис. 4. График значений коэффициента относительной интенсивности  $k_2 = \omega^{II} / \omega_n^0$  отраженной сдвиговой волны в полярных координатах

Второй инвариант девиатора тензора напряжений определяется выражением для зоны I:

$$I_2^I = \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = (\sigma_{ij}^0 - [\sigma'_{ij}]) (\sigma_{ij}^0 - [\sigma'_{ij}]) = \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 - 2\sigma_{ij}^0 [\sigma'_{ij}] + [\sigma'_{ij}] [\sigma'_{ij}]. \quad (15)$$

Подставив значения скалярных произведений в (13), получим:

$$I_2^I = \frac{8\mu^2}{3c_1^2} \left( (\omega_n^0)^2 + 3 \left( -\frac{1}{3} + \cos^2 2\varphi \right) \omega_n^0 \omega^I + (\omega^I)^2 \right), \quad (16)$$

$$K_1 = \frac{I_2^I}{I_2^0} = 1 + 3 \left( -\frac{1}{3} + \cos^2 2\varphi \right) k_1 + k_1^2. \quad (17)$$

На рис. 5, 6 представлены графики интенсивности напряженного состояния за отраженными продольной и сдвиговой волнами вблизи вершины. Наибольшее значение интенсивности напряженного состояния достигается в вершине клина при  $\varphi = \pi/2$  за отраженной продольной и отраженной сдвиговой волнами, что в случае падения предельной пластической волны ведет к увеличению максимального касательного напряжения и к необходимости учета пластической деформации вблизи вершины клина. Заметим, что  $K_1(\pi/2) = 4$  и  $K_2(\pi/2) = 4$ .

Интенсивность падающей предельной продольной волны определим из условия пластичности Мизеса:  $I_2^{II} = \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 = 2k_0^2$ , подставив в него значения  $\sigma_{ij}^I$ , получим:  $\omega_n^0 = \frac{\sqrt{3}k_0}{2\mu}$ .

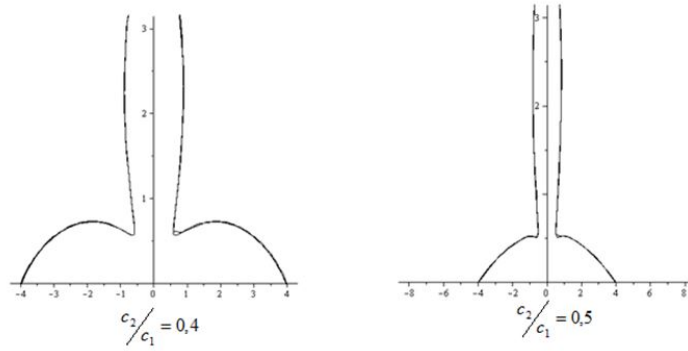


Рис. 5. График относительной интенсивности  $K_1 = I_2^I/I_2^0$ , напряженного состояния за отраженной продольной волной в полярной системе координат

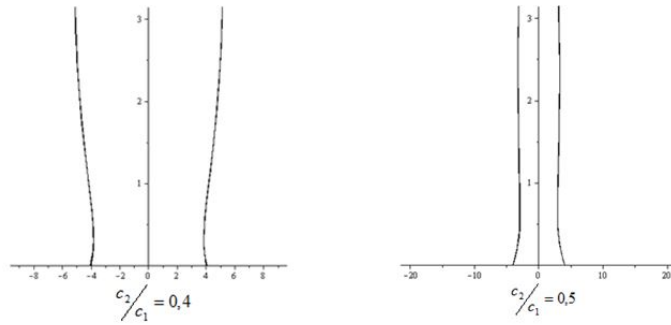


Рис. 6. График относительной интенсивности  $K_2 = I_2^{II}/I_2^0$ , напряженного состояния за отраженной сдвиговой волной в полярной системе координат

**Распределение остаточных пластических деформаций за дифрагированной волной при падении на клиновидный вырез.** Рассмотрим далее распределение остаточных пластических деформаций за дифрагированной волной на клине, используя полученные в работе [2] значения кривизны дифрагированной волны в зависимости от выбранного направления  $\varphi$  (рис.7) в предположении падения на клин продольной упругой волны заданной интенсивности.

В работе [2] значения  $I_2^0(\varphi)$  вычислены за продольной сдвиговой волной так, что имеет место возможность рассчитать остаточные деформации в областях I, II (рис. 2).

Для определения остаточных продольных деформаций  $e_{nn}$  за продольной дифрагированной волной на клине для случая коротких волн воспользуемся приближенным выражением, приведенным в [4]:

$$e_{nn} = -I_2^0(\varphi) \frac{\alpha}{\mu} \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot e^{-\frac{\alpha n}{c_1}}, \quad (18)$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  – упругие параметры Ламе,  $\eta$  – коэффициент вязкости,  $\alpha = 4\mu^2/3\eta\rho c_1^2$ ,  $\rho c_1^2 = \lambda + 2\mu$ ,  $n = c_1 t$  – расстояние, пройденное волной от вершины

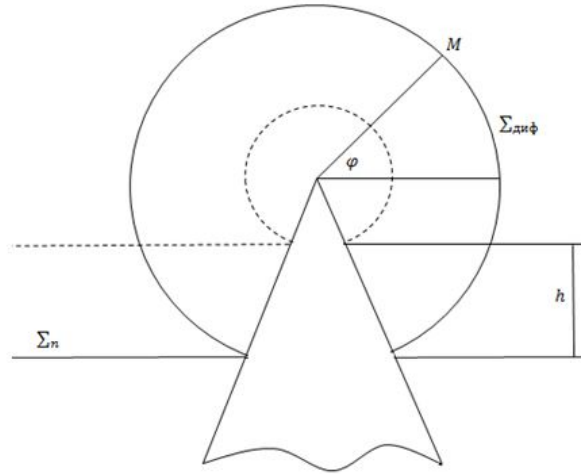


Рис. 7. Схематическое изображение падающей на клиновидный вырез волны и дифрагированной волны

клина,  $I_2^0$  – предельное граничное значение второго инварианта девиатора тензора напряжений за дифрагированной волной вблизи ее отражения от свободной поверхности в виде окружности малого радиуса, заменяющей особую точку клина.

Представление остаточных деформаций за продольной волной  $\Sigma^{II}$  с учетом знания второго инварианта девиатора тензора напряжений в начальный момент отражения в зависимости от направления  $\varphi$  позволяет записать выражение для  $e_{nn}$  в виде

$$e_{nn} = -\frac{8}{3}\mu^2 \frac{(\omega_n^0)^2}{c_1^2} \left( 1 + 3 \left( -\frac{1}{3} + \cos^2 2\varphi \right) k_1 + k_1^2 \right) \frac{\alpha}{\mu} \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot e^{-\frac{\alpha n}{c_1}},$$

где  $\omega_n^0$  – начальная интенсивность падающей продольной предельной волны, а  $k_1$  – коэффициент отражения продольной волны от вершины клина в форме цилиндра малого радиуса (11).

На рис. 8 представлены графики распределения остаточных деформаций  $e_{nn}$  за дифрагированной продольной волной в зависимости от направления  $\varphi$  и расстояния, отсчитываемого от вершины клина.

Визуально наблюдается одно направление  $\varphi = 0$  наибольшей пластической деформации, а при  $c_2/c_1 > 0,6$  возможно и второе направление локального минимума по  $\varphi$  пластической деформации.

Анализ значений второго динамического коэффициента интенсивности напряжений за дифрагированной волной показывает, что его значение значительно меньше первого коэффициента, то есть можно сделать вывод, что при падении плоской волны на клин за дифрагированной волной реализуется трещина пластического сдвига ( $K_1 > K_2$ ).

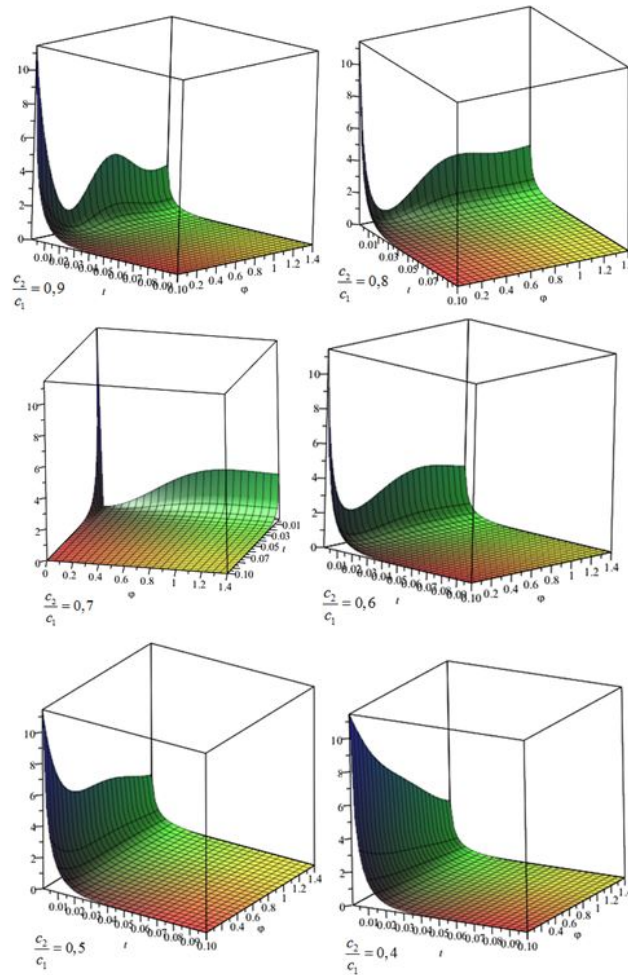


Рис. 8. Графики распределения остаточных деформаций за дифрагированной продольной волной в зависимости от направления  $\varphi$  и расстояния, отсчитываемого от вершины клина

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабич В. М., Лялинов М. А., Грикуров В. Э. Метод Зоммерфельда–Малюжинца в теории дифракции. СПб. ВВМ, 2004. 103 с.
- [2] Быкова К. И., Вервейко Н. Д., Просветов В. И. Дифракция плоской продольной упругой волны на клине и конусе // Всероссийская научная школа-конференция “Механика предельного состояния и смежные вопросы”, посвященная 85-летию профессора Д. Д. Ивлева. Чебоксары, 2015. Ч. 2. С. 239–244.
- [3] Быковцев Г. И., Калужин Л. Д., Кретова А. А. О распространении волн в трехмерных упругопластических телах при условии полной пластичности // Инж. журнал МТТ. 1967. № 3.
- [4] Вервейко Н. Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидродара. Воронеж: Изд-во Воронежского госуниверситета, 1997. 204 с.
- [5] Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 308с.

- [6] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 448 с.
- [7] Исраилов М. Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн. М.: Издательство МГУ, 1999. 208 с.
- [8] Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
- [9] Патрон В. З., Морозов Е. М. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
- [10] Rice J. R. Some remarks on elastic crack tip stress fields // Int. J. Solids and structure. Vol. 8. 1972. P. 751–758.

K. I. BYKOVA, M. I. BYKOVA, S. E. KRUPENKO

**RESIDUAL PLASTIC DEFORMATION BEHIND A DIFFRACTED WAVE  
GENERATED BY THE FALL OF THE LIMIT ELASTIC WAVE TO THE TOP  
OF THE WEDGE-SHAPED CUT**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** The work is devoted to the investigation of the deformed state of an elastoviscoplastic material in a neighborhood of the top of the wedge-shaped cut behind diffracted wave arising as a result of directed fall of the limit elastic wave on the wedge-shaped cut. The behavior of displacements and strains has features for a diffracted surface. It leads to a singularity of their values at the top of the wedge-shaped cut and behind the diffracted surface. To resolve this features the top of the wedge-shaped cut is approximated by a circle of small radius. The behavior of the stresses and strains is approximated by a linear way on the values of the gradients of stresses and strains at a small distance from the diffracted front behind the front of the diffracted wave.

Stresses and strains take values equal to zero at the front, but derivatives are unlimited along the normal. The gradients of stresses and strains are taken as the intensity of the wave on a small distance from the diffracted wave.

In this paper we obtained a value of intensity of a diffracted wave in the process of its distribution and the distribution of residual strains and value of dynamic stress intensity factors in the neighborhood of the top of the wedge-shaped cut.

**Keywords:** elastic waves, diffraction, wedge, intensity of stress, residual deformation.

**REFERENCES**

- [1] Babich V. M., Ljalinov M. A., Grikurov V. Je. Metod Zommerfel'da-Maljuzhinca v teorii difrakcii. SPb. VVM, 2004. 103 s. (in Russian).
- [2] Bykova K. I., Vervejko N. D., Prosvetov V. I. Difrakcija ploskoj prodol'noj uprugoj volny na kline i konuse // Vserossijskaja nauchnaja shkola-konferencija "Mehanika

---

*Bykova Ksenya Igorevna*, Candidate of physico-mathematical Sciences, Military educational scientific center of air forces "Air force Academy named after Professor A. E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin", Voronezh, Russia.

*Bykova Mariya Igorevna*, Candidate of physico-mathematical Sciences, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

*Krupenko Svetlana Evgenevna*, experienced engineer of plant software product, Voronezh, Russia.

predel'nogo sostojanija i smezhnye voprosy", posvjashhennaja 85-letiju professora D. D. Ivleva. Cheboksary. 2015. Ch. 2. S. 239–244. (in Russian).

[3] Bykovcev G. I., Kaluzhin L. D., Kretova A. A. O rasprostranении voln v trehmernyh uprugoplasticheskikh telah pri uslovii polnoj plastichnosti // Inzh. zhurnal MTT. 1967. № 3. (in Russian).

[4] Vervejko N. D. Luchevaja teorija uprugovjazkoplasticheskikh voln i voln gidroudara. Voronezh: Izd-vo Voronezhskogo gosuniversiteta, 1997. 204 s. (in Russian).

[5] Guz' A. N., Kubenko V. D., Cherevko M. A. Difrakcija uprugih voln. Kiev: Naukova dumka, 1978. 308 s. (in Russian).

[6] Ivlev D. D. Mehanika plasticheskikh sred. T. 1. M.: Fizmatlit, 2001. 448 s. (in Russian).

[7] Israilov M. Sh. Dinamicheskaja teorija uprugosti i difrakcija voln. M.: Izdatel'stvo MGU, 1999g. 208 s. (in Russian).

[8] Parton V. Z., Boriskovskij V. G. Dinamika hrupkogo razrushenija. M.: Mashinostroenie, 1988. 240 s. (in Russian).

[9] Patron V.Z, Morozov E. M. Mehanika uprugo-plasticheskogo razrushenija. M.: Nauka; glavnaia redakcija fiz.-mat. lit-ry, 1974. 416 s. (in Russian).

[10] Rice J. R. Some remarks on elastic crack tip stress fields // Int. J. Solids and structure. Vol. 8. 1972. P. 751–758. (in Russian).



Т. Г. Долгова, Б. Г. Миронов

## К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** Работа посвящена исследованию кручения неоднородного призматического стержня с прямоугольным сечением в случае, когда предел текучести обратно пропорционален координате  $y$ .

**Ключевые слова:** напряжение, пластичность, неоднородность, кручение.

УДК: 539.375

1. Рассмотрим цилиндрический или призматический стержень, ориентированный в прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$ . Образующие стержня параллельны оси  $z$ . Предположим, что стержень состоит из неоднородного идеальнопластического материала. Стержень закручивается вокруг своей оси, боковая поверхность стержня свободна от нагрузок.

Предположим, что напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется следующими значениями компонент:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Условия пластичности в общем случае запишем в виде

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = k^2(x, y), \quad (2)$$

где  $k(x, y) \geq 0$ ,

а единственное уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Дифференцируя уравнение (2) по  $x$ , получим

---

© Долгова Т. Г., Миронов Б. Г., 2016  
Долгова Татьяна Геральдовна  
e-mail: info3006@yandex.ru, аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Миронов Борис Гурьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.04.2016

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial k^2}{\partial x}, \quad (4)$$

где

$$\frac{\partial k^2}{\partial x} = 2k \frac{\partial k}{\partial x}. \quad (5)$$

Согласно (4) из уравнения равновесия (3) следует

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial k^2}{\partial x}, \quad (6)$$

Характеристики уравнения (6) определяются соотношениями

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = -\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{d\tau_{yz}}{\frac{\partial k^2}{\partial x}}. \quad (7)$$

Из соотношений (7) имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}}. \quad (8)$$

Вдоль характеристик (8) справедливо соотношение

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz} - \frac{\partial k^2}{\partial x} dx = 0. \quad (9)$$

Тогда из (2) и (9) следует, что справедливо следующее соотношение:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{xz} - \frac{\partial k^2}{\partial y} dy = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим случай, когда условие пластичности не зависит от  $x$ , т. е.

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = k^2(y). \quad (11)$$

Согласно (11) из (9), (10) получим

$$\tau_{yz} = c_{22} - const, \quad (12)$$

$$\tau_{xz} = c_{21}(y), \quad (13)$$

где  $c_{21}(y)$ ,  $c_{22}$  удовлетворяет условию

$$f(c_{21}(y), c_{22}) = k^2(y). \quad (14)$$

Пусть

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2. \quad (15)$$

Тогда условие пластичности (14) запишем в виде

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2, \quad (16)$$

а характеристики определяются из соотношения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что характеристики ортогональны вектору касательного напряжения  $\vec{i} = \tau_{xz}\vec{i} + \tau_{yz}\vec{j}$ .

Из наших предположений следует также, что вектор  $\vec{i}$  на контуре поперечного сечения направлен по касательной к ней.

Пусть

$$k = \frac{1}{k_0 + ay}. \quad (18)$$

Согласно (18) из (16) получим:

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \frac{1}{(k_0 + ay)^2}. \quad (19)$$

Учитывая (18) из (12),(13),(14) получим:

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= c_{22}, \\ \tau_{xz} &= \pm \sqrt{\frac{1}{(k_0 + ay)^2} - c_{22}^2} = c_{21}(y). \end{aligned} \quad (20)$$

Характеристики уравнения (6) определяются из соотношения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = -\frac{c_{21}(y)}{c_{22}} = \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{(k_0 + ay)^2} - c_{22}^2}}{c_{22}} \quad (21)$$

и имеют вид

$$x = \pm \int \frac{c_{22}}{\sqrt{\frac{1}{(k_0 + ay)^2} - c_{22}^2}} dy \quad (22)$$

или

$$\begin{aligned} x &= -\int_b^y \frac{2c_{22}}{\pm 2\sqrt{\frac{1}{(k_0 + ay)^2} - c_{22}^2}} dy = x_0 - c_{22} \int_b^y \frac{dy}{\pm \sqrt{\frac{1 - c_{22}^2(k_0 + ay)^2}{(k_0 + ay)^2}}} = \\ &= x_0 - c_{22} \int_b^y \frac{(k_0 + ay)dy}{\pm \sqrt{1 - c_{22}^2(k_0 + ay)^2}} = x_0 \pm \frac{1}{ac_{22}} \left( \sqrt{1 - c_{22}^2(k_0 + ay)^2} \right) \\ &\quad - \sqrt{1 - c_{22}^2(k_0 + ay)^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

2. Рассмотрим кручение призматического стержня, контур поперечного сечения которого представляет собой прямоугольник (рис. 1).

$$\begin{cases} -c \leq x \leq c \\ -d \leq y \leq d. \end{cases} \quad (24)$$

В силу наших предположений вектор касательного напряжения  $\vec{i}$  направлен по касательной к контуру поперечного сечения стержня.

На границе АВ  $y = -d$ :

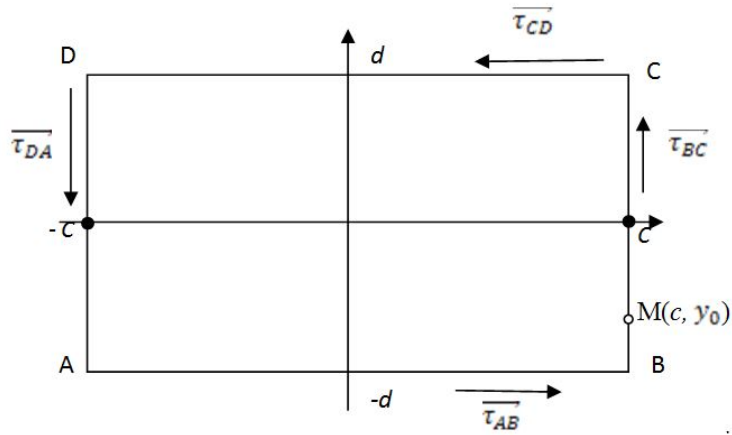


Рис. 1

$$\tau_{yz} = 0, \tau_{xz} = \frac{1}{k_0 - ad}. \quad (25)$$

Характеристики (22) примут вид (рис. 2)

$$x = \text{const}, \quad (26)$$

а вдоль характеристик справедливы соотношения

$$\tau_{yz} = 0, \tau_{xz} = \frac{1}{k_0 + ay}. \quad (27)$$

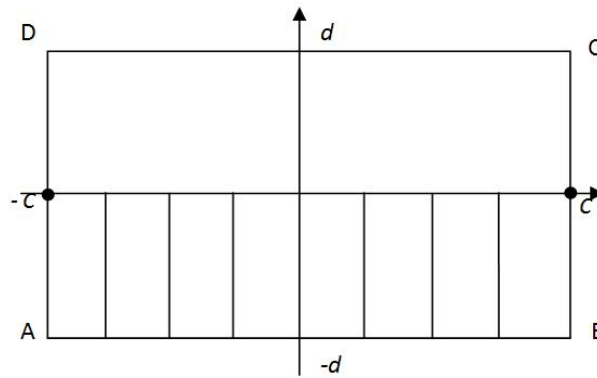


Рис. 2

На границе BC  $x = c$ :

$$\tau_{xz} = 0, \quad (28)$$

$$\tau_{yz} = k_0 + ay_0, \quad (29)$$

где  $M(c, y_0) \in BC$ .

Отсюда следует, что вдоль характеристик

$$\tau_{xz} = -\sqrt{\frac{1}{(k_0 + ay)^2} - \frac{1}{(k_0 + ay_0)^2}} = 0, \quad (30)$$

Характеристика определяется в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{\frac{1}{(k_0 + ay)^2} - \frac{1}{(k_0 + ay_0)^2}}}{\frac{1}{k_0 + ay_0}}. \quad (31)$$

Отсюда следует (рис. 3)

$$(x - c)^2 + \left(y + \frac{k_0}{a}\right)^2 = \left(y_0 + \frac{k_0}{a}\right)^2. \quad (32)$$

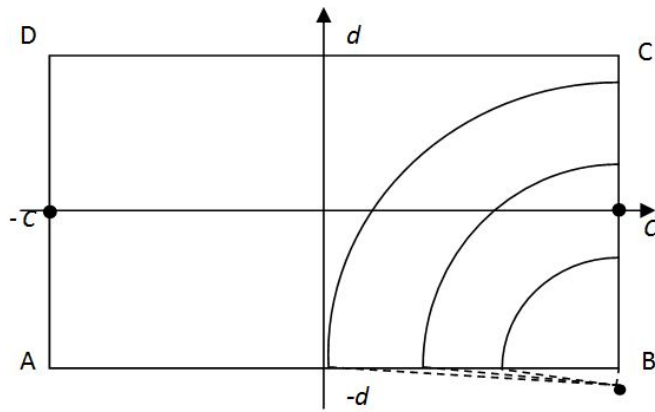


Рис. 3

На границе CD  $y = d$ :

$$\tau_{yz} = 0, \tau_{xz} = -\frac{1}{k_0 + ad}. \quad (33)$$

Характеристики (22) имеют вид (рис. 4)

$$x = const, \quad (34)$$

а вдоль характеристик справедливы соотношения

$$\tau_{yz} = 0, \tau_{xz} = -\frac{1}{k_0 + ay}. \quad (35)$$

На границе DA  $x = -c$ :

$$\tau_{yz} = -\frac{1}{k_0 + ay_0}, \tau_{xz} = 0. \quad (36)$$

Следовательно, вдоль характеристик

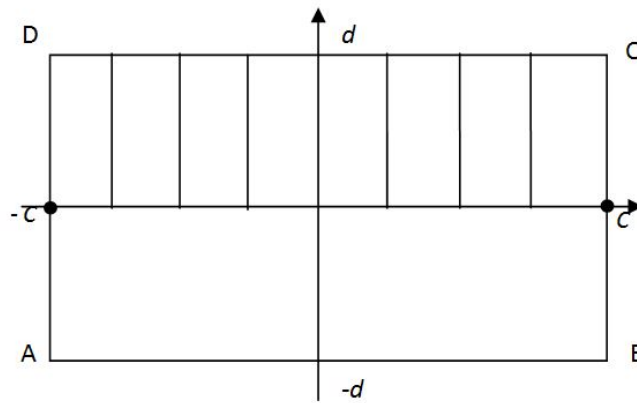


Рис. 4

$$\tau_{xz} = \sqrt{\frac{1}{(k_0 + ay)^2} - \frac{1}{(k_0 + ay_0)^2}}, \tau_{yz} = -\frac{1}{k_0 + ay_0}. \quad (37)$$

Уравнение характеристик имеет вид (рис. 5)

$$(x + c)^2 + \left(y + \frac{k_0}{a}\right)^2 = \left(y_0 + \frac{k_0}{a}\right)^2. \quad (38)$$

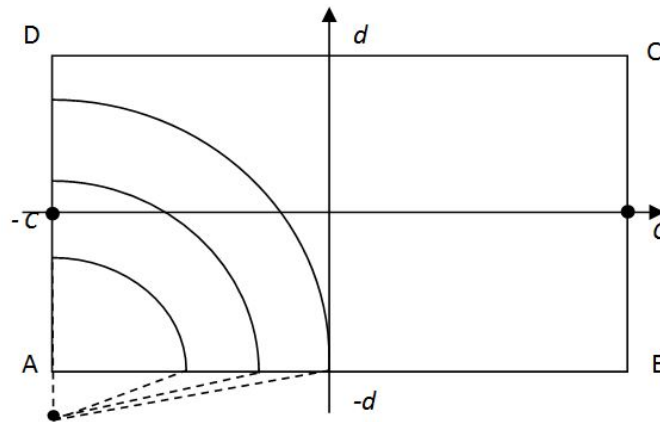


Рис. 5

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Миронов Б. Г. К теории кручения неоднородных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2014. № 4 (22). С. 236–240.

[2] Быковцев Г. И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: сб. статей. Владивосток: Дальнаука, 2002. 566 с.

[3] Миронов Б. Г., Деревянных Е. А. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2012. № 4 (76). С. 108–112.

[4] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.

[5] Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 576–579.

*T. G. Dolgova, B. G. Mironov*

### ON THE ISSUE OF NON-UNIFORM TORSION BARS

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** Work is devoted to research of inhomogeneous torsion prismatic rod with a rectangular cross section in the case where the limit the yield is inversely proportional to the coordinate  $y$ .

**Keywords:** power, flexibility, heterogeneity, torsion.

### REFERENCES

[1] Mironov B. G. On the theory of nonuniform torsion bars // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2014. № 4 (22). P. 236–240. (in Russian).

[2] Bykovtsev G. I. Selected problematic issues of the mechanics of deformable media: Sat. articles. Vladivostok: Dal'nauka, 2002. 566 p. (in Russian).

[3] Mironov B. G., Derevjannyh E. A. On the general relations of anisotropic torsion rod theory // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2012. № 4 (76). P. 108–112. (in Russian).

[4] Ivlev D. D. The theory of ideal plasticity. M.: Nauka, 1966. 232 p. (in Russian).

[5] Ivlev D. D., Mironov B. G. On relations translational perfectly plastic anisotropy torsional // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 576–579. (in Russian).

---

*Dolgova Tatyana Geraldovna*, Graduate Student of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

*Mironov Boris Gurevich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области, Россия.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

**Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ковалев Владимир Александрович (vlad\_koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

**Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

**Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@gmail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва, Россия.

**Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su)** – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.



**Максимова Людмила Анатольевна (maximova\_ng@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

**Манжиров Александр Владимирович (manzh@inbox.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Матченко Николай Михайлович (eks\_05@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

**Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

**Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com)** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Непершин Ростислав Иванович (nepershin\_ri@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

**Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

**Редкозубов Сергей Алексеевич (marycbka434@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва, Россия.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

**Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv)** – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига, Латвия.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

**Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru)). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

**и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля `predel.sty`. Стил `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Жилин С. Г., Сапченко И. Г., Комаров О. Н.</i> Формирование пресовок из порошков полимерных изотропных материалов .....	3
<i>Максимова Л. А., Юденков А. В., Римская Л. П.</i> Обобщенные системы сингулярных интегральных уравнений шермана со сдвигом в плоской теории упругости .....	15
<i>Мирсалимов В. М.</i> Контактная задача о взаимодействии берегов щели переменной ширины с концевыми зонами пластических деформаций .....	24
<i>Терентьев А. Г., Казакова А. О.</i> Численное решение плоской задачи теории упругости в многосвязной области .....	35
<i>Чернышов А. Д.</i> Нахождение малых областей для простых корней нелинейной системы алгебраических уравнений .....	49
<i>Меньшова И. В.</i> Биортогональные функции и разложения лагранжа по функциям Фадля–Папковича в первой основной задаче теории упругости .....	59
<i>Кулиев В. Д., Морозов Е. М.</i> Градиентный деформационный критерий хрупкого разрушения. Аналитическое обоснование и экспериментальное подтверждение .....	87
<i>Никитин А. В., Балашникова А. В., Тихонов С. В.</i> Об определении предельного состояния неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления .....	103
<i>Москалик А. Д., Радченко В. П.</i> Оценка конечно-элементного и приближенного решений установившейся ползучести для толстостенной трубы с эллиптически возмущенной внешней границей .....	111
<i>Штука В. И.</i> О расчетах добавочного всестороннего давления в динамике ударного нагружения несжимаемого цилиндрического упругого слоя .....	123
<i>Егоров М. В.</i> Динамическое деформирование осесимметричной оболочки вращения из упруговязкопластического материала вблизи ударных волн .....	132
<i>Балашникова А. В., Миронов Б. Г.</i> О кручении неоднородных цилиндрических и призматических стержней .....	144
<i>Кузнецов П. Н.</i> Уругопластическое состояние неоднородной плоскости с круговым отверстием, подкрепленным эллиптическим включением, смещенным по двум направлениям при двусосном растяжении .....	149
<i>Быкова К. И., Быкова М. И., Крупенко С. Е.</i> Остаточные пластические деформации за дифрагированной волной, порожденной падением предельной упругой волны на вершину клиновидного выреза .....	158

<i>Долгова Т. Г., Миронов Б. Г.</i> К вопросу о кручении неоднородных стержней. 169	169
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	176
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ.....	179
СОДЕРЖАНИЕ .....	181

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2016. № 2 (28)**

**Отв. за выпуск:** А. В. Балашникова

**Технические редакторы:** А. В. Балашникова, Е. В. Мурашкин, С. В. Тихонов

**Компьютерная верстка:** А. В. Балашникова

**Макет:** А. В. Балашникова

---

Подписано в печать 24.06.2016. Выход в свет 30.06.2016.  
Формат 70х100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 22,75.  
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

---

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический университет  
им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВО «Чувашский государственный  
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38