

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

**ВЕСТНИК**  
**ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**  
**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**

**Научный журнал**  
**№ 3(29)**  
**Июль – сентябрь 2016 г.**

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»  
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.  
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в  
которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на  
соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 13109

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Ответственный редактор:** Ю. Н. Радаев

**Заместитель ответственного редактора:** Н. М. Матченко

**Ответственные секретари:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

**Редакционная коллегия:** В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,  
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,  
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,  
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов,  
Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, Б. Е. Победря, В. П. Радченко,  
А. Ф. Ревуженко, С. А. Редкозубов, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин,  
А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

**Международный совет:** В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж  
(Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

**Адрес редакции и издательства:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

**Тел.:** (8352) 62-16-19

**E-mail:** predel21@mail.ru

**WWW:** <http://predel.chgpu.edu.ru>

© ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический  
университет им. И. Я. Яковлева», 2016



Ю. В. Немировский

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ИЗ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия*

**Аннотация.** Для полиметаллических круглых и кольцевых пластин из пластических материалов с линейным упрочнением разработан метод решения задач о динамическом деформировании при воздействии интенсивных нагрузках взрывного типа. В качестве физических законов деформирования использована модель В. Прагера для линейно упрочняющихся материалов с кусочно-линейным потенциалом Треска. В качестве примеров рассмотрены задачи о деформировании кольцевой свободной на внутреннем контуре и сплошной пластины в случае шарнирного опирания на внешнем контуре.

**Ключевые слова:** круглые и кольцевые пластины, жестко-пластические материалы, нагрузки взрывного типа, модель В. Прагера, линейное упрочнение, полиметаллические конструкции.

УДК: 536.21

**1. Введение.** В последние десятилетия проводятся интенсивные исследования по созданию для различных отраслей промышленности и строительной индустрии эффективных полиметаллических и других гибридных слоистых конструкций. Наиболее простыми и распространенными с технологической точки зрения являются приемы изготовления плоских полиметаллических пластин любых геометрических форм и размеров без серьезных ограничений по выбору материалов. Существующие технологические приемы (склеивание, сварка взрывом и диффузионная сварка, холодное газодинамическое или плазменное напыление, плазменная или механическая резка) позволяют создавать плоские симметричные (рис. 1) и несимметричные (рис. 2) пакетные конструкции из практически любых наборов материалов и сплавов [1]–[3].

В любой такой конструкции сохраняются основные индивидуальные (в частности, пластические) свойства отдельных слоев, но ее несущая способность и деформационная податливость могут существенно изменяться в зависимости от выбора количества материалов, их расположения и относительных параметров толщин слоев. В

---

© Немировский Ю. В., 2016  
*Немировский Юрий Николаевич*  
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00102).

Поступила 12.01.2016

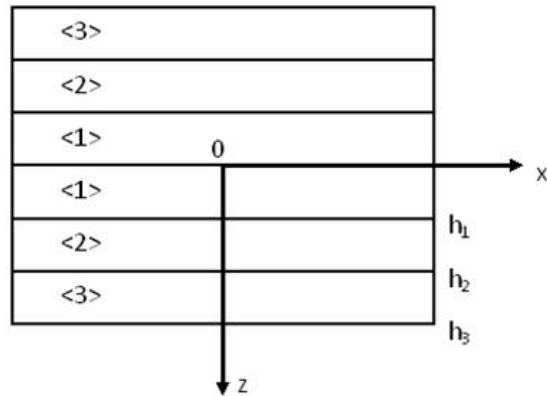


Рис. 1



Рис. 2

рамках модели идеальных жестко-пластических материалов задача рационального подбора материалов была рассмотрена в работе [4]. Однако, многие металлические материалы и сплавы обладают свойством существенного упрочнения и предельные нагрузки полиметаллической конструкции могут оказаться в реальности слишком заниженными. В связи с этим для таких конструкций было предложено ввести второе предельное состояние [5], [6], при котором в соответствии с концепцией слабейшего звена какой-либо из материалов достигнет предельной деформации предразрушения. При квазистатическом нагружении соответствующие решения рассматривались для полиметаллических балок, круглых и кольцевых пластин. В данной работе предлагается рассмотреть динамическое деформирование круглых и кольцевых пластин при воздействии динамических нагрузок взрывного типа.

**2. Формулировка основных уравнений.** Будем рассматривать слоистые пластины симметричной структуры (рис. 1) и считать все материалы жестко-пластическими и линейно-упрочняющимися. Тогда в соответствии с концепцией В. Прагера [7] закон пластического деформирования для круглых и кольцевых пластин при использовании кусочно-линейного потенциала Треска может быть представлен в форме [6], [7]:

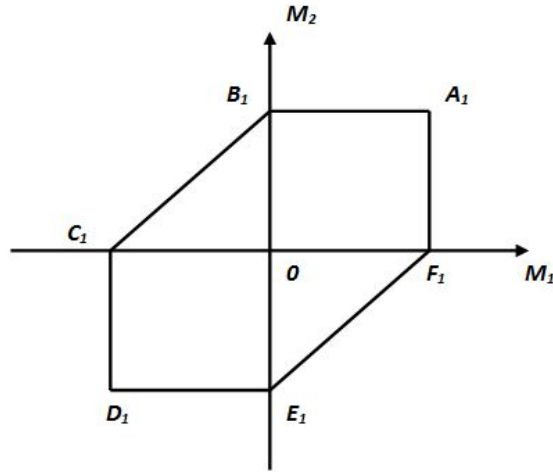


Рис. 3

$$\begin{aligned}
 A_1 : \quad & M_1 = M_0 + D_0\chi_1, \quad M_2 = M_0 + D_0\chi_2, \\
 & \chi_1 \geq 0, \quad \chi_2 \geq 0, \\
 A_1B_1 : \quad & M_2 = M_0 + D_0\chi_2, \quad 0 \leq M_1 < M_0 + D_0\chi_1, \\
 & \chi_1 = 0, \quad \chi_2 \geq 0, \\
 B_1 : \quad & M_1 = 0, \quad M_2 = M_0 + D_0\chi_2, \\
 & \chi_1 \leq 0, \quad \chi_2 \geq 0, \\
 B_1C_1 : \quad & M_2 - M_1 = M_0 + D_0\chi_2, \\
 & -M_0 - D_0\chi_1 \leq M_1 \leq 0, \\
 & \chi_1 + \chi_2 = 0, \quad \chi_1 \leq 0, \quad \chi_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

В этих выражениях

$$M_0 = \sum_{i=1}^n \sigma_{0i} (h_i^2 - h_{i-1}^2), \quad D_0 = \sum_{i=1}^n d_i (h_i^2 - h_{i-1}^2)$$

$M_1, M_2, \chi_1, \chi_2$  – безразмерные изгибающие моменты, и кривизны пластин в радиальном и окружном направлениях,  $h_i$  – безразмерные координаты раздела слоистого пакета,  $\sigma_{0i}, d_i$  – безразмерные пределы текучести и модули упрочнения материалов, составляющих слоистый пакет.

Безразмерные кривизны  $\chi_1, \chi_2$  связаны с безразмерным прогибом  $w$  выражениями

$$\chi_1 = -w'', \quad \chi_2 = -\frac{1}{x}w'.$$

Здесь штрих обозначают производную по безразмерной координате  $x$

$$x = \frac{r}{R}; \quad w = \frac{\bar{w}\bar{H}_0}{R^2}; \quad M_i = \frac{\bar{M}_i}{\sigma_0\bar{H}_0^2},$$

где  $\bar{w}$ ,  $r$ ,  $R$  – прогиб, текущий и внешний радиус пластинки,  $\bar{H}_0$  – безразмеривающий параметр толщины пластинки.

Уравнения динамического движения пластины имеют вид:

$$\begin{aligned} (xM_1)' - M_1 &= xQ, \\ (Qx)' + x(p - m\ddot{w}) &= 0 \\ Q &= \frac{\bar{Q}R}{\bar{M}_0}, \quad M_1 = \frac{\bar{M}_r}{\bar{M}_0}, \quad M_2 = \frac{\bar{M}_\varphi}{\bar{M}_0}, \\ \bar{M}_0 &= \bar{\sigma}_0 \bar{H}_0^2, \quad t = \frac{t}{T}, \quad m = \frac{\bar{m}}{m_0}. \\ m &= 2 \sum_{i=1}^n \rho_i (h_i - h_{i-1}), \quad \rho_i = \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_0}. \end{aligned}$$

Точка обозначает частную производную по безразмерному времени  $t$ ,  $p$  и  $m$  – безразмерные распределенная нагрузка и поверхностная масса,  $Q$  – безразмерная перерезывающая сила.

При решении конкретных задач должны быть заданы граничные условия, соответствующие условиям закрепления пластинки и начальные условия движения

$$\dot{w}(x, 0) = w(x, 0) = 0.$$

**3. Кольцевая шарнирно-опертая по наружному контуру пластинка со свободным внутренним контуром  $x_0$ .** Рассмотрим в качестве примера задачу о равномерно нагруженной по поверхности кольцевой пластинке  $x_0 \leq x \leq 1$ , шарнирно опертой на наружном контуре  $x = 1$ . В этом случае граничные условия будут иметь вид:

$$Q(x_0, t) = 0, \quad M_1(x_0, t) = 0, \quad M_1(1, t) = 0, \quad w(1, t) = 0.$$

Решение задачи в области  $x_0 \leq x \leq 1$  будет соответствовать режиму  $A_1B_1$ , для которого

$$w''(x, t) = 0, \quad M_2(x, t) = M_0 + D_0\chi_2, \quad \chi_2(x, t) = -\frac{1}{x}w'(x, t).$$

Тогда, учитывая выражения (5) для пластинки со слоями постоянной толщины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой

$$p(t) = p_0\psi(t)$$

получим выражения:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \frac{1-x}{(1-x_0)}w_0(t), \quad \chi_2(x, t) = \frac{w_0(t)}{(1-x_0)x}, \\ M_2(x, t) &= M_0 + D_0\frac{w_0(t)}{(1-x_0)x}, \\ Q(x, t) &= -\frac{p_0\psi(t)}{2}(x^2 - x_0^2) + \frac{m\ddot{w}_0(t)}{6(1-x_0)}[3(x^2 - x_0^2) - 2(x^3 - x_0^3)]. \\ (xM_1)' &= M_0 + \frac{D_0w_0(t)}{(1-x_0)x} - \frac{p_0\psi(t)}{2}(x^2 - x_0^2) + \frac{m\ddot{w}_0(t)}{6(1-x_0)}[3(x^2 - x_0^2) - 2(x^3 - x_0^3)], \\ xM_1(x, t) &= M_0(x-1) + \frac{D_0w_0(t)}{(1-x_0)}\ln x - \frac{p_0\psi(t)}{6}[x^3 - 1 - 3x_0^2(x-1)] + \\ &+ \frac{m\ddot{w}_0(t)}{6(1-x_0)}\left\{x^3 - 1 - 3x_0^2(x-1) - \left[\frac{x^4-1}{2} - 2x_0^3(x-1)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Пользуясь условием  $M_1(x_0, t) = 0$ , получим уравнение для  $w_0(t)$ :

$$\ddot{w}_0 - \frac{12D_0}{m}f_1(x_0) \cdot w_0 = \frac{2p_0\psi(t)}{m}f_2(x_0) - \frac{12M_0}{m}f_3(x_0), \quad (1)$$

где

$$f_1(x_0) = \frac{\ln x_0}{(1-x_0)(3x_0^4 - 10x_0^3 + 6x_0^2 - 1)},$$

$$f_2(x_0) = \frac{(1 + 2x_0^3 - 3x_0^2)(1 - x_0)}{(3x_0^4 - 10x_0^3 + 6x_0^2 - 1)}, \quad (2)$$

$$f_3(x_0) = \frac{(1 - x_0)^2}{(3x_0^4 - 16x_0^3 + 6x_0^2 - 1)}.$$

Начальные условия для этого уравнения имеют вид:

$$\dot{w}_0(0) = w_0(0) = 0. \quad (3)$$

Функция  $\psi(t)$  для нагрузок взрывного типа чаще всего используется в форме

$$\psi(t) = e^{-\alpha t}, \quad (4)$$

где  $\alpha$  – заданный параметр для конкретного взрывного вещества.

Время окончания движения  $t_f$  определяется из условия

$$\dot{w}_0(t_f) = 0 \quad (5)$$

и остаточный прогиб  $w^*$  будет равен

$$w^* = \dot{w}_0(t_f). \quad (6)$$

**4. Шарнирно-опертая пластинка без отверстия** ( $x_0 = 0$ ). Поскольку для сплошной пластинки без отверстия в центре  $x = 0$  имеем

$$w'(0, t) = 0, \quad (7)$$

то в окрестности центра  $0 \leq x \leq x_1$  должно реализоваться состояние, соответствующее вершине  $A_1$  на рисунке 3, а в окрестности опоры  $x_1 \leq x \leq 1$  – состояние, соответствующее стороне  $A_1B_1$ .

Таким образом в области  $0 \leq x \leq x_1$  будем иметь

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0 + D_0\chi_1, \quad M_2 = M_0 + D_0\chi_2 \\ \chi_1 &= -w'', \quad \chi_2 = -\frac{1}{x}w'. \end{aligned} \quad (8)$$

Исключая  $Q$  из уравнений (8), (9), получим уравнение

$$(xM_1)'' - M_2' = -x(p_0\psi(t) - m\ddot{w}). \quad (9)$$

Подставляя в него значения (8) получим уравнение для прогиба  $w(x, t)$  в области  $0 \leq x \leq x_1$ :

$$D_0 \left( w^{IV} + 2\frac{w'''}{x} - \frac{w''}{x^2} + \frac{w'}{x^3} \right) = p_0\psi(t) - m\ddot{w}. \quad (10)$$

Если все материалы являются идеально пластическими (неупрочняющимися), то  $D_0 = 0$  и уравнение (10) будет иметь вид:

$$\ddot{w} = \frac{p_0}{m}\psi(t). \quad (11)$$

Если хотя бы один из материалов будет упрочняющимся, то  $D_0 \neq 0$  и уравнение (10) в области  $0 \leq x \leq x_1$  будет иметь вид:

$$w^{IV} + 2\frac{w'''}{x} - \frac{w''}{x^2} + \frac{w'}{x^3} + \frac{m}{D_0}\ddot{w} = p_0\psi(t). \quad (12)$$

Представим решение этого уравнения в форме

$$w(x, t) = w_1(x, t) + w_2(x, t), \quad (13)$$

где  $w_2(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$m\ddot{w}_2 = p_0\psi(t). \quad (14)$$

Тогда для  $w_1(x, t)$  получим уравнение

$$w_1^{IV} + 2\frac{w_1'''}{x} - \frac{w_1''}{x^2} + \frac{w_1'}{x^3} + \frac{m}{D_0}\ddot{w} = 0. \quad (15)$$

В области  $x_1 \leq x \leq 1$  реализуется состояние, соответствующее отрезку  $A_1B_1$  на рис. 3 и должны выполняться условия

$$\begin{aligned} M_1(x_1, t) &= M_0, & M_1(1, t) &= 0 \\ w(1, t) &= 0, & w(x_1, t) &= v_1(t). \end{aligned} \quad (16)$$

В соответствии с этим будем иметь

$$w = \frac{(1-x)}{(1-x_1)}v_1(t), \quad \chi_2 = \frac{v_1(t)}{(1-x_1)x},$$

$$M_2(x, t) = M_0 + D_0 \frac{\nu_1(t)}{(1-x_1)x}$$

$$\begin{aligned} M_1(x, t) &= M_0 + Q_1 \frac{x_1(x-x_1)}{x} - \frac{p_0\psi(t)}{12} \frac{[2(x^3-x_1^3)-3x_1^2(x-x_1)]}{x} + \\ &+ \frac{m\dot{v}_1}{6(1-x_1)x} [3(x^2-x_1^2) - 6(x-x_1) - (x^3-x_1^3) + 3x_1^2(x-x_1)] + \frac{D_0v_1}{x(1-x_1)} \ln \frac{x}{x_1}. \end{aligned}$$

Из условия  $M(1, t)$  получим равенство

$$\begin{aligned} M_0 + Q_1x_1(1-x_1) - \frac{P_0\psi(t)}{12} [2(1-x_1^3) - 3x_1^2(1-x_1)] + \\ + \frac{m\dot{v}_1}{6(1-x_1)} [3(1-x_1^2) - 6x_1(1-x_1) - (1-x_1^3) + 3x_1^2(1-x_1)] + \frac{D_0v_1}{2(1-x_1)} \ln \frac{1}{x_1} = 0. \end{aligned}$$

Граничные условия для уравнения (10) имеют вид:

$$\begin{aligned} w(0, t) &= w_0(t)_1, & w'(0, t) &= 0, \\ w''(x_1, t) &= 0, & \kappa_1(0, t) &= \kappa_2(0, t). \end{aligned} \quad (17)$$

Кроме того, на границе  $x = x_1$  должны выполняться условия

$$[w(x_1, t)] = 0, \quad [w'(x_1, t)] = 0, \quad [Q(x_1, t)] = 0. \quad (18)$$

Получающаяся в итоге система нелинейных дифференциальных уравнений требует разработки специальных алгоритмов численного счета, которые здесь обсуждаться не могут.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Fleck J., Laber A., Leonard R. Explosive Welding of composite materials // J. Compos. Mater. 1969. Vol. 3. № 4. P. 669–701.

[2] Король В. К., Гилдергорг М. С. Основы производства многослойных материалов. М.: Металлургия, 1978. 277 с.

[3] Дерibas А. А. Физика прочности и сварки взрывом. Новосибирск: Наука, 1977. 188 с.

[4] Немировский Ю. В. Рациональное проектирование плоских преград при воздействии взрывных нагрузок // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф: Труды VII Всероссийской научной конференции (Красноярск, 13–17 октября 2003 г.). Красноярск, 2003. Т. 1. С. 191–194.



[5] Немировский Ю. В. Второе предельное состояние однородных и композитных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 150–159.

[6] Немировский Ю. В. Второе предельное состояние полиметаллических круглых и кольцевых пластин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1(9). С. 189–195.

[7] Прагер В. Новый метод анализа напряжений и деформаций в пластических телах, обладающих упрочнением // Механика. 1957. № 5. С. 124–129.

*Yu. V. Nemirovskii*

### DYNAMIC BEHAVIOR POLYMETALLIC CIRCULAR PLATE OF REINFORCING MATERIALS

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

**Abstract.** For polymetallic circular and annular plates of plastic material with linear hardening developed a method for solving problems of dynamic deformation when subjected to intensive loads explosive. As the physical laws of deformation model is used for the linear B. Prager hardening materials with piecewise linear potential Cod. As examples, the problem of the deformation of the ring free on the domestic circuit and solid plate in the case of hinged support on the external circuit.

**Keywords:** circular and annular plates, rigid-plastic materials, explosive load, W. Prager model, a linear hardening, metallurgy designs.

### REFERENCES

[1] Fleck J., Laber A., Leonard R. Explosive Welding of composite materials // J. Compos. Mater. 1969. Vol. 3. № 4. P. 669–701.

[2] Korol' V. K., Gildergorg M. S. Osnovy proizvodstva mnogoslojnyh materialov. M.: Metallurgija, 1978. 277 s. (in Russian).

[3] Deribas A. A. Fizika prochnosti i svarki vzryvom. Novosibirsk: Nauka, 1977. 188 s. (in Russian).

[4] Nemirovskij Ju. V. Racional'noe proektirovanie ploskih pregrad pri vozdeystvii vzryvnyh nagruzok // Sovremennye metody matematicheskogo modelirovaniya prirodnyh i antropogennyh katastrof: Trudy VII Vserossijskoj nauchnoj konferencii (Krasnojarsk, 13–17 oktjabrja 2003 g.). Krasnojarsk, 2003. Vol. 1. P. 191–194. (in Russian).

[5] Nemirovskij Ju. V. Vtoroe predel'noe sostojanie odnorodnyh i kompozitnyh balok // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojaniya. 2009. № 1. P. 150–159. (in Russian).

---

*Nemirovsky Yuri Vladimirovich*

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.

[6] Nemirovskij Ju. V. Vtoroe predel'noe sostojanie polimetallicheskih kruglyh i kol'cevych plastin // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2015. № 1(9). P. 189–195. (in Russian).

[7] Prager V. Novyj metod analiza naprjazhenij i deformacij v plasticheskikh telah, obladajushhих uprochneniem // Mehanika. 1957. № 5. P. 124–129. (in Russian).

В. А. Ковалев<sup>1</sup>, Ю. Н. Радаев<sup>2</sup>

## КАНОНИЧЕСКАЯ ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ ТЕРМОУПРУГОГО КОНТИНУУМА С ТРЕМЯ ПОЛЯРНЫМИ ДИРЕКТОРАМИ

<sup>1</sup>Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

**Аннотация.** Рассматривается каноническая теоретико-полевая модель нелинейного термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой, определяемой, в частности, тремя векторными полярными директорами. Построение модели осуществляется в терминах 4-ковариантного полевого лагранжева формализма. «Тонкая» микроструктура континуума задается микроструктурными  $d$ -векторами и  $d$ -тензорами произвольно высоких рангов.  $d$ -тензоры вводятся в теоретико-полевую схему как экстра-полевые переменные ( $d$ -переменные). Микроструктурные векторные и тензорные экстра-полевые переменные могут быть подчинены уравнениям связей (ограничениям), конечным или дифференциальным. Указывается плотность вариационного интегрального функционала термоупругого действия и сформулирован соответствующий вариационный принцип наименьшего действия. При этом выполнен учет инерционности микроструктурной «составляющей» поля. Ковариантные уравнения термоупругого поля в континууме с микроструктурой получаются в канонической форме Эйлера – Лагранжа. Возможные связи между микроструктурными переменными учтены с помощью правила множителей Лагранжа. Вариационные симметрии интегрального функционала термоупругого действия применяются для построения ковариантных канонических тензоров термомеханики и 4-токов. Даны канонические формы дивергентных законов сохранения термоупругого поля в плоском 4-пространстве-времени. Рассматриваются вопросы, касающиеся инвариантности интегрального функционала действия относительно сдвигов эйлеровых полевых переменных, времени и температурного смещения, а также трехмерных вращений эйлеровой координатной системы. Исследуется проблема ротационной инвариантности «естественной» плотности микрополярного термоупругого действия. Сформулированы дифференциальные и функциональные условия ротационной инвариантности лагранжиана.

УДК: 533.374

---

© Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., 2016

Ковалев Владимир Александрович

e-mail: vlad\_koval@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Поступила 12.01.2016

Последние затем используются с целью поиска ротационно-инвариантных функциональных аргументов лагранжиана. Найдена система независимых ротационно-инвариантных функциональных аргументов лагранжиана. Дается формальное доказательство ее полноты. Получена удовлетворяющая принципу объективности форма свободной энергии Гельмгольца. Указанная форма содержит явные вхождения ротационно-инвариантных векторов и тензоров экстра-деформации. Построены удовлетворяющие принципу объективности формы определяющих уравнений гиперболического микрополярного термоупругого континуума, соответствующие ротационно-инвариантному лагранжиану. Рассматривается альтернативная возможность построения полной системы независимых ротационно-инвариантных аргументов.

**Ключевые слова:** термоупругость, микроструктура, поле, экстра-поле, действие, ковариантность, закон сохранения,  $d$ -тензор, 4-ток, тензор энергии-импульса, связь, множитель Лагранжа, ротационная инвариантность, принцип объективности, тензор экстра-деформации.

**Вводные замечания.** Последние годы отмечены весьма интенсивным развитием механики метаматериалов, обладающих весьма необычной микроструктурой и аномальным механическим поведением. Под микроструктурой континуума обычно понимается существование нескольких различных физических масштабов (структурных уровней), определяющих состояние континуума, их самосогласованное взаимодействие и возможность передачи энергии с одного структурного уровня на другой. Теория таких континуумов основывается на необходимости допустить существование дополнительных (экстра) степеней свободы и возможности исследовать физически бесконечно малый объем не как материальную точку, а как существенно более сложный объект, с присущими ему дополнительными степенями свободы (ротационными, осцилляционными), как своего рода микроконтинуум, обладающий возможностью дополнительной (экстра) микродеформации. Поиск нелинейных представлений для лагранжианов, гамильтонианов, экстра-напряжений и экстра-деформаций, справедливых в самом общем случае конечных деформаций и поворотов, для континуумов с микроструктурой выступает в настоящее время как одна из важнейших задач теории и механики сплошных сред.

Вопросы, связанные с изучением континуума с микроструктурой, находятся в русле тех течений в механике деформируемого твердого тела, которые отдают приоритет структурному моделированию. При этом необходимо учитывать, что существенной особенностью современного состояния естественных наук является явно просматриваемая тенденция решения нелинейных проблем (в том числе и проблем механики деформируемого твердого тела) вне рамок имеющегося физически надежно обоснованного набора математических моделей. Конечной целью математического моделирования обычно ставится формулировка замкнутых систем уравнений, без чего в принципе невозможны постановка и решение прикладных задач. Корректное построение новых математических моделей континуума, в свою очередь, должно опираться на проверенные временем принципы и методы. Не последняя роль здесь принадлежит методам теории поля. Часто эти методы выступают как единственный инструмент вывода физически приемлемых уравнений.

Для решения проблем анализа и синтеза материалов с заданными свойствами существенна развитая иерархия математических моделей. Именно в связи с этим обстоятельством по-прежнему актуальны методы построения и исследования математических моделей сред с микроструктурой. Один из них состоит в обобщении континуальной модели, выражающемся в расширении понятия представительного объема среды (RVE) и учета дополнительных (экстра) внутренних степеней свободы — микроповоротов и аффинных деформаций мезообъема (континуум Коссера, микроморфная среда).<sup>1</sup>

Нелинейные термомеханические модели сложных континуумов с микроструктурой, в частности, микрополярные среды и метаматериалы, в решающей степени определяются термодинамическими параметрами состояния, которые формируются из независимых объективных (т. е. выдерживающих повороты эйлеровой пространственной координатной системы в трехмерном пространстве) скалярных, векторных и тензорных переменных, определяющих термодинамическое состояние микроэлемента. Подобные системы термодинамических параметров состояния мы будем называть также термодинамическими базисами. Термодинамический базис должен обладать необходимыми свойствами полноты относительно тензорных мер состояния континуума.

Целью настоящей работы является построение нелинейной теоретико-полевой модели термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой, представляемой конечным набором тензоров, ранг которых может быть сколь угодно высоким. Значительный прогресс в этой области связан прежде всего с тем, что в качестве базисных переменных допускаются не только термодинамические переменные состояния (так называемые «медленные переменные»), ассоциированные с термическими и микроструктурными свойствами континуума, но и их референциальные градиенты («быстрые переменные»). При этом переменные состояния и их градиенты считаются функционально-независимыми. Именно следуя по этому пути, удастся создать новую термомеханику континуума с гиперболическими уравнениями транспорта тепла. Последнее обстоятельство вполне соответствует новой гиперболической парадигме развития теории и механики континуума [1], [2].

Современная механика и физика сплошных деформируемых сред в целом ряде важных прикладных направлений должна развиваться только на основе теоретико-полевого подхода, только в этом случае обеспечиваются физически приемлемые уравнения. Это обстоятельство характерно прежде всего для сложных континуумов с экстрастепенями свободы, приписываемыми микроэлементам; в частности, для микрополярных сред, когда допустимы дополнительные повороты и аффинные деформации микроэлементов. Теории поля обладают одним неоспоримым аналитическим преимуществом — возможностью их систематического вывода из одного вариационного функционала. Указанный вариационный функционал называется действием. Принцип наименьшего действия отделяет действительные процессы и состояния от всех

---

<sup>1</sup>Необходимо заметить, что континуум Коссера с «нежестким» репером микрополярных директоров, по существу, предполагает возможной произвольную аффинную деформацию микроэлемента и поэтому может трактоваться и как микроморфный континуум. Такие среды мы будем также называть микрополярными.

других, кинематически и термодинамически допустимых. Преимущества теоретико-полевого подхода в механике микрополярных континуумов убедительно продемонстрированы в статье [3]. Важными элементами теоретико-полевого подхода являются также ковариантность дифференциальных уравнений поля и вариационные симметрии поля. Последние позволяют находить законы сохранения, которые выступают в роли «первых интегралов» дифференциальных уравнений поля и выполняются в силу уравнений поля, т. е. на решениях дифференциальных уравнений поля.

Последовательное применение теоретико-полевого подхода в механике континуума приводит к естественным формулировкам определяющих уравнений. Задание плотности действия позволяет однозначно сформулировать определяющие уравнения континуума, причем сразу же в ковариантной форме, без всякого дополнительного конструирования. То же самое касается соотношений совместности сильных разрывов на волновых поверхностях. Однако дополнительные рассмотрения все же необходимы, если вести речь об объективизации независимых функциональных аргументов плотности действия. Переход к ротационно-инвариантным функциональным аргументам лагранжиана, наряду с требованием галилеевой трансляционной инвариантности, окончательно определяет его «общую» форму и соответствующие общие формы объективных определяющих уравнений.

Теоретико-полевые формулировки всегда подразумевают существенное и интенсивное использование понятий и формализма вариационного исчисления [4]. С формальной точки зрения принцип наименьшего действия принадлежит к классу основных (и простейших) задач вариационного исчисления. Однако по существу это не в полной мере соответствует действительности, поскольку в механике символ вариации традиционно обозначает виртуальную вариацию, т. е. не произвольное сколь угодно малое изменение, а изменение, совместимое со связями, ограничивающими геометрические положения, кинематические и термодинамические состояния. Виртуальные вариации определяющих переменных являются произвольными, только если они независимы друг от друга. В противном случае принцип наименьшего действия следует отнести к классу *связанных* задач вариационного исчисления. Такая постановка вариационных задач впервые была предложена Лагранжем и называется задачей Лагранжа [4]. Итак, наличие ограничений (связей), накладываемых, в частности, на микроструктурные параметры, предполагает формулировку проблемы как связанной задачи вариационного исчисления (calculus of variations with constraints). Ограничения при этом могут накладываться в форме конечных, либо дифференциальных уравнений и неравенств. Решение подобного рода задач обычно выполняется с помощью правила множителей Лагранжа (см., например, [5, с. 114–129]). Рассмотрение вариационных задач для интегрального функционала с ограничениями типа равенств и неравенств на уровне необходимых условий сводится к проблеме безусловного экстремума с помощью правила Лагранжа. Оказывается, что этот принцип распространяется на задачи весьма сложной природы.

Структуру настоящей работы можно охарактеризовать следующим образом. После данных выше вводных замечаний, во втором разделе, излагаются основы теоретико-полевого подхода, пригодного, как хорошо известно, для описания механических и физических полей различной природы. Здесь же формулируется принцип наименьшего действия и следующие из него дифференциальные уравнения поля, дается понятие об инвариантности интегрального функционала действия, основы теории вариационных симметрий действия и дивергентных законов сохранения, выполняющихся

в силу уравнений поля. В третьем разделе обсуждается одна теоретико-полевая модель термоупругого континуума второго типа с «тонкой» микроструктурой, которая представляется конечным набором тензоров, выступающих как экстра-полевые переменные. Указанным экстра-полевым переменным соответствуют экстра-деформации и экстра-напряжения. В самом простом, но в то же время весьма интересном случае, микроструктура континуума задается системой трех «нежестких» векторных директоров. В этом же разделе получены дифференциальные уравнения поля и определяющие уравнения. Четвертый раздел посвящен построению тензора энергии-импульса термоупругого континуума второго типа с «тонкой» микроструктурой, с помощью которого получены канонические полевые величины (энергия, канонический импульс, вектор Умова – Пойнтинга и тензор напряжений Эшелби) и канонические законы сохранения. В пятом разделе правило множителей Лагранжа применяется для вывода уравнений поля при наличии связей между микроструктурными переменными. Связи могут быть конечными и дифференциальными. В каждом из этих случаев получены уравнения поля. В качестве примера рассматривается микрополярный континуум с жестким репером директоров, определяющих его микроструктуру. Шестой раздел включает вопросы, связанные с построением ротационно-инвариантных лагранжианов связанного микрополярного термоупругого поля. Здесь получены функциональные условия ротационной инвариантности действия и плотности действия, независимые ротационно-инвариантные аргументы образующие полную систему (при этом особое внимание уделяется формальному доказательству ее полноты), и удовлетворяющая принципу объективности наиболее общая функциональная форма свободной энергии Гельмгольца. Кроме того, рассматривается альтернативная возможность построения полной системы независимых ротационно-инвариантных аргументов, основанная на полярном разложении градиента деформации. Наконец, заключительный седьмой раздел работы посвящен выводу объективных форм определяющих уравнений микрополярного термоупругого континуума.

Целью настоящей работы является обобщение результатов полученных в области связанной микрополярной термоупругости, которые частично также представлены в публикациях Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Ротационная инвариантность и объективные формы лагранжианов нелинейного микрополярного термоупругого континуума второго типа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 1. С. 96–102; и Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Объективные ротационно-инвариантные формы термоупругих лагранжианов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 10, № 2. С. 325–340.

**Теоретико-полевой подход в механике континуума, вариационные симметрии действия и дивергентные законы сохранения.** Ключевое положение классической теории поля (см., например, монографии [6], [7]) заключается в том, что непрерывное физическое поле математически представляется некоторым интегральным функционалом  $\mathfrak{S}$ , который по историческим причинам называется действием (action):

$$\mathfrak{S} = \int \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X. \quad (1)$$

Здесь характерная для теории поля символика, развитая в [6], [7], имеет следующий смысл:

- $\mathcal{L}$  — «естественная» плотность лагранжиана (плотность действия);
- $\varphi^k$  — упорядоченный массив физических полевых переменных;

$X^\beta$  ( $\beta = 1, 2, 3, 4$ ) — четыре пространственно-временные координаты;

$d^4X$  — «естественный» элемент объема четырехмерного пространства-времени.

Заметим, что в традиционных текстах, посвященных классической теории поля, действие и функционал действия обычно обозначаются через  $S$ .

Символ  $d^4X$  в (1) указывает на «естественный» пространственно-временной элемент объема и представляет собой обычное произведение дифференциалов пространственно-временных координат:

$$d^4X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4. \quad (2)$$

Через  $\partial_\beta$  в математическом оформлении действия, данном (1) и далее, обозначается оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате  $X^\beta$ ; в соответствии с цепным правилом дифференциального исчисления находим:

$$\partial_\beta = \partial_\beta^{\text{expl}} + \sum_{s \geq 0} \left( \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_\beta \varphi^l \right) \frac{\partial}{\partial (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)}, \quad (3)$$

где символом  $\partial_\beta^{\text{expl}}$  указывается оператор *частного* дифференцирования по *явному* вхождению переменной  $X^\beta$ .

Четвертую по счету координату в дальнейшем будем ассоциировать со временем, которое, возможно, будет трансформироваться с помощью размерной постоянной так, чтобы уравнивать физические размерности всех четырех пространственно-временных координат. Полное дифференцирование по времени будет обозначаться как символом  $\partial_4$ , так и традиционной точкой.

В теориях поля лагранжиан  $\mathcal{L}$  всегда приходится рассматривать как функцию следующего набора переменных:

$$\varphi^s, \partial_{\alpha_1} \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \varphi^s, \dots, X^\gamma. \quad (4)$$

Обычно лагранжиан подбирают так, чтобы получить известные уравнения поля, или конструируют, обеспечивая заданную симметрию и выполнение некоторых дополнительных требований, например, чтобы получались линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Построение принципиально новых лагранжианов, описывающих нелинейные физические процессы, является, в известном смысле, достаточно сложным видом искусства.

Вариационное описание поля не может быть осуществлено без предварительного указания пространственно-временного многообразия с возможностью измерения в нем элементарных длин и объемов. Пространство-время обладает рядом фундаментальных особенностей: пространство и время однородны (отсутствуют привилегированные места в пространстве и избранные точки отсчета времени); пространство изотропно (нет избранных преимущественных направлений); четырехмерное пространство-время изотропно; пространство, возможно, обладает некоторыми скрытыми симметриями; направление хода времени не регламентировано. Перечисленные свойства пространства-времени могут быть сформулированы на языке групп преобразований пространственно-временных координат.

Преобразование пространственно-временных координат и физических полевых переменных

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon) \quad (5)$$



порождает, очевидно, преобразование всего комплекса переменных (4)

$$\begin{aligned} X^\gamma, \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \varphi^s, \dots \\ \downarrow \\ \tilde{X}^\gamma, \tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\partial}_{\alpha_2} \tilde{\varphi}^s, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Чаще всего предполагается, что преобразования (5) образуют однопараметрическую группу преобразований (группу Ли преобразований).

Полные вариации полевых переменных и пространственно-временных координат, отвечающие их преобразованию в соответствии с (5), вычисляются согласно

$$\delta X^\beta = \varepsilon \left( \frac{\partial \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \quad \delta \varphi^k = \varepsilon \left( \frac{\partial \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}.$$

Для теории поля числовая величина действия не столь важна, как его форма, задаваемая лагранжианом  $\mathcal{L}$ , который определяется (помимо всего прочего) выбором тех или иных координатных систем в пространственно-временном многообразии и математического представления полевых переменных. В новых переменных, вообще говоря, изменяется форма лагранжиана  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}},$$

где  $\tilde{\mathcal{L}}$  — "естественная" плотность лагранжиана, выраженная с помощью новых пространственно-временных координат  $\tilde{X}^\beta$  и физических полей  $\tilde{\varphi}^k$ . Однако величина действия должна оставаться неизменной (так называемая эквивалентность действия относительно группы преобразований (5)). Таким образом, функционалы

$$\mathfrak{S} = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X, \quad (7)$$

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) d^4 \tilde{X} \quad (8)$$

называются эквивалентными при их преобразовании группой (5) тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}.$$

Математическое описание поля представляет собой вариационный принцип, который по соображениям исторического характера, называется вариационным принципом Гамильтона – Остроградского (или принципом наименьшего действия). Действительное поле реализуется в пространстве-времени таким образом, что действие оказывается экстремальным, т. е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей  $\varphi^k$  при неварьируемых пространственно-временных координатах и четырехмерной области, выступающей в качестве носителя поля:

$$\delta \mathfrak{S} = 0. \quad (9)$$

В аналитической механике такому способу варьирования отвечают так называемые изохронные вариации.

Из принципа наименьшего действия получают ковариантные дифференциальные уравнения поля в форме уравнений Эйлера – Лагранжа

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = 0, \quad (10)$$

где

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \dots \quad (11)$$

есть один из важнейших дифференциальных операторов математической физики — оператор Эйлера.

Действительные физические поля (при условии их гладкости) обязаны удовлетворять системе дифференциальных уравнений Эйлера – Лагранжа (10).

Структура дифференцирований в операторе Эйлера становится более понятной и обозримой, если ввести обозначения (см. [8])

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^l} = \partial_l, \quad \frac{\partial}{\partial (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)} = \partial_s^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \quad (12)$$

и записать его символически в форме

$$\mathcal{E}_l = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_s^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}. \quad (13)$$

Здесь в сумме при  $s = 0$  подразумевается слагаемое  $\partial_l$ , обозначающее частное дифференцирование по полевой переменной  $\varphi^l$ .

Заметим, что принцип наименьшего действия ограничивает физически допустимые лагранжианы. Так, недопустимы лагранжианы, для которых соответствующие интегральные функционалы не имеют экстремалей ни при каких вещественных полевых переменных или для которых дифференциальные уравнения поля (10) противоречивы.

В современной научной литературе часто говорится об инвариантности уравнений Эйлера – Лагранжа. Однако это противоречит действительному положению дел. Математически строгое определение инвариантности системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно группы преобразований известно из группового анализа и означает сохранение формы уравнений при их преобразовании к новым переменным согласно (5). Относительно произвольной однопараметрической геометрической группы преобразований (5) уравнения Эйлера – Лагранжа, вообще говоря, не инвариантны, но они ковариантны (при условии, что действие удовлетворяет принципу эквивалентности, гарантирующему при, возможно, изменяющейся «естественной» плотности лагранжиана постоянство величины действия относительно произвольных геометрических преобразований пространственно-временных координат и полевых переменных), поскольку в новых переменных правило их составления остается прежним.

Исключительный интерес в теории вариационных симметрий представляют однопараметрические геометрические группы преобразований, которые при неизменности формы функционала действия сохраняют его величину при преобразовании координат и полей согласно (5) и соответствии пространственно-временных 4-областей интегрирования в переменных  $X^\beta$  и  $\tilde{X}^\beta$ . Указанные группы обычно называют геометрическими группами абсолютной инвариантности функционала действия, а также абсолютными геометрическими симметриями действия по Гамильтону (или просто

вариационными симметриями действия). Таким образом, в том случае, когда преобразование (5) является вариационной симметрией действия, выполняется равенство

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) d^4 \tilde{X}. \quad (14)$$

Инвариантность интегрального функционала действия (вариационная симметрия действия) относительно однопараметрической геометрической группы преобразований (5) порождает, как известно, некоторый дивергентный закон сохранения. Общая теория законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных, которые получаются как уравнения Эйлера – Лагранжа некоторой вариационной задачи, следующих из существования геометрических вариационных симметрий действия, излагается, например, в [8, с. 377–386]. Дивергентный закон сохранения является обобщением известного из теории обыкновенных дифференциальных уравнений понятия первого интеграла и всегда имеет форму дивергентного дифференциального уравнения

$$\partial_\beta J^\beta = 0, \quad (15)$$

где

$$J^\beta(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\mu)$$

— 1-контравариантный пространственно-временной 4-вектор, которое должно удовлетворяться для любого решения уравнений поля. Вектор  $J^\beta$  — дифференциальная функция, зависящая от градиентов полевых переменных, наивысший порядок которых на единицу меньше порядка уравнений поля; этот вектор называется вектором тока (или 4-током).

Классический метод поиска законов сохранения с помощью вариационных симметрий действия кратко может быть описан следующим образом.

Критерий инвариантности интегрального функционала действия (1) относительно геометрической группы преобразований (5) имеет вид:

$$\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = 0, \quad (16)$$

где вариация лагранжиана  $\delta \mathcal{L}$  — линейная по  $\varepsilon$  часть приращения

$$\mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) - \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta). \quad (17)$$

Если лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого, вариация лагранжиана, очевидно, равна

$$\delta \mathcal{L} = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \delta X^\gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \delta \varphi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \delta (\partial_\beta \varphi^k).$$

Учитывая затем формулу для полной вариации первых градиентов поля

$$\delta (\partial_\beta \varphi^k) = \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^k) + (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) \delta X^\gamma,$$

где вариации  $\delta \varphi^k$  (полная) и  $\bar{\delta} \varphi^k$  (частичная) связаны уравнением

$$\delta \varphi^k = \bar{\delta} \varphi^k + (\partial_\gamma \varphi^k) \delta X^\gamma,$$

получаем

$$\delta \mathcal{L} = (\partial_\gamma \mathcal{L}) \delta X^\gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \bar{\delta} \varphi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^k) \quad (18)$$

или

$$\delta\mathcal{L} = \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \right) \bar{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma\mathcal{L})\delta X^\gamma + \partial_\beta \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \bar{\delta}\varphi^k \right). \quad (19)$$

В результате, когда вариационная симметрия действия известна и лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого, уравнение (16) преобразуется к

$$\mathcal{E}_j(\mathcal{L})\bar{\delta}\varphi^j + \partial_\beta \left( \mathcal{L}\delta X^\beta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \bar{\delta}\varphi^k \right) = 0. \quad (20)$$

Разделив затем левые и правые части (20) на параметр  $\varepsilon$  и обозначая

$$Q^j = \frac{\bar{\delta}\varphi^j}{\varepsilon}, \quad J^\beta = \mathcal{L} \frac{\delta X^\beta}{\varepsilon} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \frac{\bar{\delta}\varphi^k}{\varepsilon},$$

приходим к равенству

$$Q^j \mathcal{E}_j(\mathcal{L}) = \partial_\beta(-J^\beta). \quad (21)$$

Таким образом, при выполнении уравнений поля (10) будет справедлив дивергентный закон сохранения (15).

**Физическая полевая теория термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой.** Одним из самых распространенных подходов к изучению деформации континуума является концепция сравнения пространственных положений составляющих его точек. В этом плане необходимы инструменты, позволяющие однозначно идентифицировать все точки, совокупность которых образует континуум. В качестве одного из способов индивидуализации, широко используемых в механике деформируемого твердого тела, обычно выступают метки, частным вариантом которых являются лагранжевы координаты-метки. Однако в некоторых случаях механизм идентификации заранее может быть не вполне ясным, как это видно на примере перемещения тени, отбрасываемой некоторым движущимся от системы источников света телом.

Сделаем одно важное замечание. Индивидуальные точки континуума в механике континуума представляются специальной переменной  $\xi$ , которая, в свою очередь, идентифицируется с помощью координат  $\xi^\alpha$  (так называемые материальные координаты). Референциальная координата  $\mathbf{X}$  всегда взаимно-однозначно связана с материальной переменной  $\xi$ , поэтому референциальную переменную  $\mathbf{X}$  можно рассматривать как материальную и попросту отождествить переменные  $\mathbf{X}$  и  $\xi$ . То же самое относится к координатам  $X^\alpha$  и  $\xi^\alpha$ .

Ясно, что в наиболее общей форме деформацию континуума можно выразить отображением

$$\xi \rightarrow \mathbf{x}, \quad (22)$$

которое в каждый данный момент времени  $t$  указывает пространственное положение  $\mathbf{x}$  индивидуальной точки континуума  $\xi$ . В силу сказанного выше, отображение (22) может быть заменено

$$\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}. \quad (23)$$

В теориях континуума с микроструктурой (см., например, [3]) произвольная «конечная» деформация континуума, представляемая чисто геометрическим преобразованием позиционных переменных, т. е. преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (24)$$

положения  $\mathbf{X}$  отсчетной (референциальной) конфигурации в соответствующее актуальное место  $\mathbf{x}$  пространства, сопровождается экстра-деформацией, проявляющейся в

форме нарушений взаимной ориентации и метрических характеристик системы трех некопланарных полярных  $d$ -векторов  $\mathbf{d}_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ), связанных с микроэлементом:

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{d}_a(\mathbf{X}, t). \quad (25)$$

Деформация и экстра-деформация в координатах  $X^\alpha$ ,  $x^j$  имеют следующий вид:

$$x^j = x^j(X^\alpha, t), \quad (26)$$

$$d_a^j = d_a^j(X^\alpha, t). \quad (27)$$

Система трех пространственных полярных  $d$ -векторов, ассоциированных с каждой точкой континуума, задает микрополярную структуру континуума. Эта система в самом общем случае предполагается «нежесткой».

Переменные  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{x}$  (и позиционные координаты  $X^\alpha$ ,  $x^j$ ) выступают как соответственно лагранжева (отсчетная, референциальная) и эйлерова (пространственная) переменные, если воспользоваться стандартной терминологией механики континуума [9], [10]. С этими переменными связаны метрики: отсчетная (лагранжева) метрика  $\backslash g_{\alpha\beta}$  и пространственная (эйлерова) метрика  $g_{ij}$ . Конвективная (сопутствующая) метрика характеризуется метрическим тензором  $g_{\alpha\beta}$  и, в отличие от метрик  $\backslash g_{\alpha\beta}$  и  $g_{ij}$ , определяется деформацией (24).

Как ясно из предложенных обозначений эйлеровы пространственные индексы всегда будут обозначаться латинскими буквами, греческие буквы всегда будут указывать на отсчетные или сопутствующие индексы. Индексы, имеющие начертания  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , ... , применяются для идентификации  $d$ -вектора. Обратным штрихом (backprime) слева от символа будут снабжаться величины, ассоциированные с референциальным состоянием. Так, например, в силу принятого выше соглашения о референциальном и актуальном положениях точек континуума должно выполняться равенство

$$\backslash \mathbf{x} = \mathbf{X}.$$

В такого рода равенствах латинский индекс у координаты  $x^j$  может трансформироваться в греческий. Кроме того, референциальное положение  $d$ -векторов часто удобнее вместо  $\backslash d_a^j$  указывать компонентами с греческим индексом

$$\backslash d_a^\alpha, \quad \backslash d_a^j = \frac{\partial \backslash x^j}{\partial X^\alpha} \backslash d_a^\alpha \quad (a = 1, 2, 3; j, \alpha = 1, 2, 3).$$

Следуя известным схемам построения математических теорий континуумов, введем градиент «конечной» деформации (градиент места, position gradient) или «дисторсию» [5], [11]

$$\partial_\alpha x^j \quad (j, \alpha = 1, 2, 3) \quad (28)$$

и соответствующий якобиан

$$J = \det(\partial_\alpha x^j). \quad (29)$$

Дисторсия, как хорошо известно, характеризует аффинную деформацию элемента континуума. Она никогда не вырождается, поэтому якобиан деформации  $J$  сохраняет свой знак.

Конвективная метрика вычисляется с помощью градиента деформации согласно следующей формуле:

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j) \quad (30)$$

и в силу своего определения ротационно-инвариантна при произвольных поворотах эйлеровой координатной системы  $x^j$ . Последнее справедливо и для отсчетной метрики  $g_{\alpha\beta}$ , поскольку

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j). \quad (31)$$

Заметим, что лагранжевы переменные  $X^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), дополненные четвертой временной координатой, выступают в развиваемой ниже теории как пространственно-временные координаты. Эйлеровы переменные  $x^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) представляют собой физические поля. То же самое относится и к «нежесткой» системе  $d$ -векторов  $\mathbf{d}_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ). Но они классифицируются нами как экстра-полевые (сверх переменных  $x^j$ ) переменные и вводятся в формализм теории поля с помощью контравариантных пространственных компонент  $d_a^j$  ( $a = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ). Таким образом, полевыми переменными в данной модели будут выступать переменные

$$x^j \quad (j = 1, 2, 3); \quad d_a^k \quad (k = 1, 2, 3; a = 1, 2, 3). \quad (32)$$

Как указывалось выше, система трех  $d$ -векторов, ассоциированных с каждой точкой континуума, собственно и задает микроструктуру континуума. С теоретико-полевой точки зрения наличие микроструктуры приводит лишь к увеличению числа полевых переменных и, возможно, повышению максимального порядка дифференцирований в списке функциональных аргументов «естественной» плотности лагранжиана. Более «тонкая» (fine) микроструктура континуума представляется экстра-полями контравариантных тензоров ( $d$ -тензоров) сколь угодно высоких рангов

$$d_c^{j_1 j_2 \dots} \quad (c = 1, 2, 3, \dots). \quad (33)$$

Экстра-деформация, обусловленная наличием «тонкой» микроструктуры, математически описывается отображениями, подобными (25), т. е.

$$\mathbf{d}_c = \mathbf{d}_c(\mathbf{X}, t) \quad (c = 1, 2, 3, \dots) \quad (34)$$

или в координатном представлении —

$$d_c^{j_1 j_2 \dots} = d_c^{j_1 j_2 \dots}(X^\alpha, t) \quad (c = 1, 2, 3, \dots). \quad (35)$$

Поведение репера  $\mathbf{d}_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) характеризуется как его возможной «чистой» деформацией (сдвигами трехгранника и удлинениями его ребер), так и поворотом, поэтому становится ясно, что каждый элемент континуума с микроструктурой обладает большим числом степеней свободы, чем классический континуум, деформация которого сводится лишь к трансформации позиционных координат (24). С дополнительными степенями свободы, которыми обладает микроэлемент, связаны естественно и дополнительные (экстра) инерция, импульс, кинетическое и деформационное действие (кинетическая энергия и свободная энергия). Трансформация репера  $\mathbf{d}_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) может сводиться только к его «жестким» поворотам в пространстве; в этом случае [12] помимо трех трансляционных степеней свободы микроэлемент будет обладать лишь тремя дополнительными ротационными степенями свободы.

Полевые переменные (32) в любой термомеханической модели должны дополняться термическими переменными. В дальнейшем будет развиваться термомеханика с единственной термической переменной. В качестве основной термической полевой

переменной примем температурное смещение  $\vartheta$ , которое определяется как первообразная по времени (при фиксированных лагранжевых переменных) от абсолютной температуры  $\theta$ :

$$\vartheta = \int \theta dt. \quad (36)$$

Именно такой подход характерен для теоретико-полевых формулировок термомеханики континуума [13]–[20].

Перечислим далее все определяющие переменные термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой. Помимо переменных  $x^j$  и  $\vartheta$  и их скоростей  $\partial_4 x^j = \dot{x}^j$ ,  $\partial_4 \vartheta = \dot{\vartheta}$ , к ним относятся:

- градиент деформации  $\partial_\alpha x^j$  ( $j, \alpha = 1, 2, 3$ );
- $d$ -векторы  $d_\alpha^j$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, 3$ );
- $d$ -тензоры  $d_\alpha^{j_1 j_2 \dots}$  ( $\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \dots$ ;  $j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$ );
- референциальные градиенты  $d$ -векторов  $\partial_\alpha d_\alpha^j$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, 3$ ;  $\alpha = 1, 2, 3$ );
- референциальные градиенты  $d$ -тензоров  $\partial_\alpha d_\alpha^{j_1 j_2 \dots}$  ( $\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\alpha = 1, 2, 3$ ;  $j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$ );
- референциальный градиент температурного смещения  $\partial_\alpha \vartheta$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ).

Для связанного термомеханического поля в терминах отсчетных переменных  $X^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), эйлеровых переменных  $x^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), экстра-полевых  $d$ -переменных и температурного смещения  $\vartheta$  «естественная» плотность действия (лагранжиан) в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии принимается в следующей форме:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d_\alpha^j, d_\alpha^{j_1 j_2 \dots}, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_\alpha^j, \dot{d}_\alpha^{j_1 j_2 \dots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_\alpha^j, \partial_\alpha d_\alpha^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\alpha \vartheta). \quad (37)$$

Данная выше форма термомеханического лагранжиана  $\mathcal{L}$  по необходимости является весьма общей. Более специальная форма получается, если рассматривать плотность действия как разность плотности кинетической энергии и плотности свободной энергии Гельмгольца

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \rho_R g_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j + \frac{1}{2} \rho_R g_{ij} \overset{ab}{\mathfrak{J}} d_\alpha^i d_\alpha^j + \frac{1}{2} \rho_R \sum_{\kappa} g_{j_1 k_1} g_{j_2 k_2} \dots \overset{cd}{\mathfrak{J}} d_\alpha^{j_1 j_2 \dots} d_\alpha^{k_1 k_2 \dots} \dots - \\ & - \psi(X^\beta, x^j, d_\alpha^j, d_\alpha^{j_1 j_2 \dots}, \vartheta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_\alpha^j, \partial_\alpha d_\alpha^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\alpha \vartheta). \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь точкой в верхней позиции обозначается частное дифференцирование по времени при постоянных лагранжевых координатах  $X^\alpha$ , которое мы будем обозначать также с помощью оператора  $\partial_4$ ;  $\rho_R$  — референциальная плотность;  $\overset{ab}{\mathfrak{J}}$ ,  $\overset{cd}{\mathfrak{J}}$  — тензоры инерции микроэлемента. Первые три слагаемых в (38) составляют кинетическую часть плотности действия.

Вариационный интеграл термомеханического действия в силу указанной формулой (37) плотности действия будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} = & \int \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d_\alpha^j, d_\alpha^{j_1 j_2 \dots}, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_\alpha^j, \dot{d}_\alpha^{j_1 j_2 \dots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_\alpha^j, \partial_\alpha d_\alpha^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\alpha \vartheta) d^4 X. \\ & (\alpha = 1, 2, 3; \mathfrak{c} = 1, 2, 3, \dots; \alpha, \beta = 1, 2, 3; j, j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (39)$$

Соответствующие вариационному интегралу (39) и принципу наименьшего действия связанные уравнения поля получаются в ковариантной форме и распадаются на следующие четыре группы:

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha S_{\cdot j}^{\alpha\cdot} - \dot{P}_j &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\
\partial_\alpha \overset{a}{M}_{\cdot j}^{\alpha\cdot} + \overset{a}{A}_j - \partial_4 \overset{a}{Q}_j &= 0 \quad (a = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\
\partial_\alpha \overset{c}{M}_{\cdot j_1 j_2 \dots}^{\alpha \dots} + \overset{c}{A}_{j_1 j_2 \dots} - \partial_4 \overset{c}{Q}_{j_1 j_2 \dots} &= 0, \\
(c = 1, 2, 3, \dots; \alpha = 1, 2, 3; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3) \\
\partial_\alpha j_{\mathbb{R}}^\alpha + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{40}$$

Лагранжев полевой формализм исключительно удобен тем, что *определяющие* уравнения континуума выступают просто как обозначения для полевых частных производных, которые вводятся для записи дифференциальных уравнений поля (40):

$$\begin{aligned}
P_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j}, \quad \overset{a}{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{a}{d}^j}, \quad \overset{c}{Q}_{j_1 j_2 \dots} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{c}{d}^{j_1 j_2 \dots}}, \\
S_{\cdot j}^{\alpha\cdot} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha x^j)}, \quad \overset{a}{M}_{\cdot j}^{\alpha\cdot} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \overset{a}{d}^j)}, \quad \overset{c}{M}_{\cdot j_1 j_2 \dots}^{\alpha \dots} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \overset{c}{d}^{j_1 j_2 \dots})}, \\
\overset{a}{A}_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{a}{d}^j}, \quad \overset{c}{A}_{j_1 j_2 \dots} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{c}{d}^{j_1 j_2 \dots}}, \\
s &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}}, \quad j_{\mathbb{R}}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \vartheta)}.
\end{aligned} \tag{41}$$

В приведенных выше определяющих уравнениях (41) приняты следующие обозначения:

- $P_j$  — обобщенный импульс, соответствующий трансляционным степеням свободы;
- $\overset{a}{Q}_j, \overset{c}{Q}_{j_1 j_2 \dots}$  — обобщенные экстраимпульсы, соответствующие дополнительным степеням свободы;
- $S_{\cdot j}^{\alpha\cdot}$  — первый тензор напряжений Пиола – Кирхгофа;
- $\overset{a}{M}_{\cdot j}^{\alpha\cdot}, \overset{c}{M}_{\cdot j_1 j_2 \dots}^{\alpha \dots}$  — «первые» тензоры экстранапряжений;
- $\overset{a}{A}_j, \overset{c}{A}_{j_1 j_2 \dots}$  — обобщенные силы, сопряженные экстра-полевым переменным  $\overset{a}{d}^j$  ( $a = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ),  $\overset{c}{d}^{j_1 j_2 \dots}$  ( $c = 1, 2, 3, \dots; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$ );
- $s$  — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии);
- $j_{\mathbb{R}}^\alpha$  — референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии).

Скалярное полевое уравнение в последней строке системы (40) выражает баланс энтропии. Если плотность действия  $\mathcal{L}$  не содержит явных вхождений температурного смещения  $\vartheta$ , то производство энтропии будет равно нулю. Таким образом, уравнение транспорта тепла будет иметь гиперболический аналитический тип так же, как это имеет место в гиперболической термоупругости [7].



Рассмотрим важный и сравнительно простой случай, когда параметрами микро-структуры являются только  $d$ -векторы  $d^j$  ( $\mathfrak{a} = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ), не подчиняющиеся никаким дополнительным кинематическим ограничениям. В этом случае система дифференциальных уравнений поля (40) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha S_j^\alpha - \dot{P}_j &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}_j^\alpha + \overset{\mathfrak{a}}{A}_j - \partial_4 \overset{\mathfrak{a}}{Q}_j &= 0 \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (42)$$

Уравнения поля (42) несколько упрощаются, если считать, что лагранжиан  $\mathcal{L}$  обладает свойством трансляционной инвариантности относительно произвольных сдвигов эйлеровых переменных  $x^j$  и температурного смещения  $\vartheta$ . В этом случае явная зависимость лагранжиана от переменных  $x^j$  и  $\vartheta$  исключается и вместо (42) приходим к системе уравнений поля

$$\begin{aligned} \partial_\alpha S_j^\alpha - \dot{P}_j &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}_j^\alpha + \overset{\mathfrak{a}}{A}_j - \partial_4 \overset{\mathfrak{a}}{Q}_j &= 0 \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (43)$$

**Плоское пространство-время. Трансляции пространственно-временных координат. Законы сохранения.** В дальнейшем будем считать пространство-время плоским. В этом случае выполняется условие трансляционной инвариантности действия. Поэтому можно ввести 4-ковариантный тензор энергии-импульса и сформулировать с его помощью законы сохранения, соответствующие независимым сдвигами всех четырех пространственно-временных координат [7]. Следуя [7], определим компоненты канонического тензора энергии-импульса термоупругого поля  $T_{\lambda}^{\mu}$  ( $\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4$ ) в континнуме с микроструктурой. Всего имеется следующие четыре группы соотношений:

$$\begin{aligned} T_{\lambda}^{\mu} &= \mathcal{L} \delta_{\lambda}^{\mu} + S_{\cdot l}^{\mu} (\partial_{\lambda} x^l) + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}_{\cdot l}^{\mu} (\partial_{\lambda} d^l) + \overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{M}}_{j_1 j_2 \dots}^{\mu \dots} (\partial_{\lambda} d^{j_1 j_2 \dots}) - j_R^{\mu} (\partial_{\lambda} \vartheta); \\ & \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} T_{\cdot 4}^{\mu} &= S_{\cdot l}^{\mu} \dot{x}^l + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}_{\cdot l}^{\mu} \dot{d}^l + \overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{M}}_{j_1 j_2 \dots}^{\mu \dots} \dot{d}^{j_1 j_2 \dots} - j_R^{\mu} \dot{\vartheta}; \\ & \quad (\lambda = 4; \mu = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} T_{\lambda}^4 &= -(\partial_{\lambda} x^l) P_l - (\partial_{\lambda} d^l) \overset{\mathfrak{a}}{Q}_l - (\partial_{\lambda} d^{j_1 j_2 \dots}) \overset{\mathfrak{c}}{Q}_{j_1 j_2 \dots} - s (\partial_{\lambda} \vartheta); \\ & \quad (\lambda = 1, 2, 3; \mu = 4) \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} T_{\cdot 4}^4 &= \mathcal{L} - \dot{x}^l P_l - \dot{d}^l \overset{\mathfrak{a}}{Q}_l - \dot{d}^{j_1 j_2 \dots} \overset{\mathfrak{c}}{Q}_{j_1 j_2 \dots} - s \dot{\vartheta}. \\ & \quad (\lambda = 4; \mu = 4) \end{aligned} \quad (47)$$

Приведенные выше компоненты тензора энергии-импульса термоупругого поля позволяют быстро найти полный гамильтониан поля  $\mathcal{H}$ , вектор псевдоимпульса поля  $\mathcal{P}_{\lambda}$ , вектор Умова – Пойнтинга  $\Gamma^{\mu}$  и тензор напряжений Эшелби  $P_{\lambda}^{\mu}$ .

Так, компонента (47) тензора энергии-импульса представляет собой взятую с отрицательным знаком плотность гамильтониана:

$$\mathcal{H} = \dot{x}^l P_l + \dot{d}^l \overset{a}{Q}_l + \dot{d}^{j_1 j_2 \dots} \overset{c}{Q}_{j_1 j_2 \dots} + \dot{\vartheta} s - \mathcal{L}. \quad (48)$$

Компоненты (46) определяют ковариантный вектор псевдоимпульса поля согласно формуле:

$$\mathcal{P}_\lambda = -(\partial_\lambda x^l) P_l - (\partial_\lambda d^l) \overset{a}{Q}_l - (\partial_\lambda d^{j_1 j_2 \dots}) \overset{c}{Q}_{j_1 j_2 \dots} - s(\partial_\lambda \vartheta). \quad (49)$$

(\lambda = 1, 2, 3)

Из компонент (45) формируется контравариантный вектор Умова – Пойнтинга:

$$\Gamma^\mu = S_l^{\mu} \dot{x}^l + \overset{a}{M}_l^{\mu} \dot{d}^l + \overset{c}{M}_{j_1 j_2 \dots}^{\mu} \dot{d}^{j_1 j_2 \dots} - j_R^\mu \dot{\vartheta}. \quad (50)$$

(\mu = 1, 2, 3)

Компоненты (44) тензора энергии-импульса, взятые с противоположным знаком, дают возможность вычислить тензор напряжений Эшелби:

$$-P_{\cdot\lambda}^{\mu} = \mathcal{L} \delta_\lambda^\mu + S_{\cdot l}^{\mu} (\partial_\lambda x^l) + \overset{a}{M}_{\cdot l}^{\mu} (\partial_\lambda d^l) + \overset{c}{M}_{j_1 j_2 \dots}^{\mu} (\partial_\lambda d^{j_1 j_2 \dots}) - j_R^\mu (\partial_\lambda \vartheta). \quad (51)$$

(\lambda, \mu = 1, 2, 3)

4-ковариантный закон сохранения, соответствующий вариационным симметриям действия в форме трансляций пространственно-временных координат

$$\partial_\mu T_{\cdot\lambda}^{\mu} = 0 \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4), \quad (52)$$

естественным образом распадается на два симметричных канонических уравнения баланса энергии и псевдоимпульса термоупругого поля:

$$-\dot{\mathcal{H}} + \partial_\mu \Gamma^\mu = 0, \quad (53)$$

$$-\dot{\mathcal{P}}_\lambda + \partial_\mu P_{\cdot\lambda}^{\mu} = 0. \quad (54)$$

Теоретико-полевой подход (и лагранжев формализм) применим только к тем полям, в которых сохраняется постоянной полная энергия. Он не отражает того обстоятельства, что в реальном эволюционирующем поле полная энергия убывает, трансформируясь в другие виды энергии, например, в тепловую энергию, т. е. происходит рассеяние энергии, сопровождающееся возрастанием энтропии. Однако не стоит и сужать возможности такого подхода. Возможность освобождения (стока) энергии может быть учтена не столько в уравнениях поля, сколько сингулярностями поля.

**Уравнения поля при наличии связей между микроструктурными переменными.** Как уже упоминалось, с формальной точки зрения принцип наименьшего действия принадлежит к классу простейших основных задач вариационного исчисления о поиске безусловного экстремума интегрального функционала. Однако по существу это не в полной мере соответствует действительности, поскольку в аналитической механике и термомеханике символ вариации  $\delta$  согласно исторически сложившейся традиции обозначает *виртуальную вариацию*, т. е. не произвольное сколь угодно малое изменение, а изменение, совместимое со связями, ограничивающими геометрические положения, кинематические и термодинамические состояния механической или термомеханической системы. Виртуальные вариации определяющих состояние континуума переменных являются произвольными, только если они независимы друг

от друга. В противном случае принцип наименьшего действия следует отнести к классу так называемых *связанных* задач вариационного исчисления (см., например, [4]). Такая постановка вариационных задач впервые была предложена Лагранжем и называется задачей Лагранжа. Итак, наличие ограничений (связей), накладываемых, в частности, на микроструктурные параметры, предполагает формулировку проблемы как связанной задачи вариационного исчисления. Ограничения при этом могут накладываться в форме конечных, либо дифференциальных уравнений и неравенств.

Связанные задачи вариационного исчисления весьма часто встречаются в механике. Их решение чаще всего опирается на правило множителей Лагранжа (см., например, [4], [5]).

Мы будем рассматривать только двусторонние связи, которые могут быть заданы либо конечными уравнениями (голономные связи), либо уравнениями, которые содержат явные вхождения первых производных от полевых переменных (дифференциальные, неголономные связи). Ограничимся пока только связями между экстра-полевыми  $d$ -переменными и, возможно, эйлеровыми координатами  $x^j$ .

В наиболее общей форме голономные связи между микроструктурными  $d$ -переменными  $d_{\mathfrak{a}}^j$  ( $\mathfrak{a} = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ),  $d_{\mathfrak{c}}^{j_1 j_2 \dots}$  ( $\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \dots; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$ ) и переменными  $x^j$  задаются конечными уравнениями

$$\mathcal{F}(x^j, d_{\mathfrak{h}}^j, d_{\mathfrak{1}}^j, d_{\mathfrak{2}}^j, d_{\mathfrak{3}}^j, d_{\mathfrak{1}}^{j_1 j_2 \dots}, d_{\mathfrak{2}}^{j_1 j_2 \dots}, \dots) = 0. \quad (55)$$

Число таких уравнений должно быть меньше, чем число независимых контравариантных полевых  $d$ -переменных и эйлеровых координат  $x^j$

$$x^j, \quad d_{\mathfrak{a}}^j \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \quad d_{\mathfrak{c}}^{j_1 j_2 \dots} \quad (\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \dots; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3).$$

Далее рассмотрим вывод дифференциальных уравнений поля в том случае, когда  $d$ -векторы подчинены конечным (голономным) ограничениям

$$\mathcal{F}(x^j, d_{\mathfrak{1}}^j, d_{\mathfrak{2}}^j, d_{\mathfrak{3}}^j) = 0. \quad (56)$$

Воспользуемся правилом множителей Лагранжа. С этой целью введем множители Лагранжа  $\lambda$  и новый лагранжиан  $\mathcal{L}^*$  согласно

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} - \lambda \mathcal{F}. \quad (57)$$

Заметим, что множители Лагранжа  $\lambda$  представляют собой функции только пространственно-временных координат  $X^\alpha$ .

В уравнениях поля (42) лагранжиан  $\mathcal{L}$  подлежит замене на новый лагранжиан  $\mathcal{L}^*$ . Выполняя замену, в результате приходим к уравнениям поля

$$\begin{aligned} \partial_\alpha S_{\cdot j}^\alpha - \dot{P}_j &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + \lambda \frac{\partial}{\partial x^j} \mathcal{F} \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha \mathcal{M}_{\cdot j}^\alpha + \mathcal{A}_j - \partial_4 \mathcal{Q}_j &= \lambda \frac{\partial}{\partial d_{\mathfrak{h}}^j} \mathcal{F} \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (58)$$

Дифференциальные связи между микроструктурными  $d$ -переменными  $d_{\mathbf{a}}^j$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ),  $d^{j_1 j_2 \dots}$  ( $\mathbf{c} = 1, 2, 3, \dots; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$ ) и переменными  $x^j$  задаются неинтегрируемыми уравнениями следующего вида:

$$\mathcal{F}_{\mathbf{n}}(x^j, d_{\mathbf{1}}^j, d_{\mathbf{2}}^j, d_{\mathbf{3}}^j, d_{\mathbf{1}}^{j_1 j_2 \dots}, d_{\mathbf{2}}^{j_1 j_2 \dots}, \dots, \partial_{\alpha} x^j, \partial_{\alpha} d_{\mathbf{1}}^j, \partial_{\beta} d_{\mathbf{2}}^j, \partial_{\gamma} d_{\mathbf{3}}^j, \partial_{\alpha} d_{\mathbf{1}}^{j_1 j_2 \dots}, \partial_{\beta} d_{\mathbf{2}}^{j_1 j_2 \dots}, \dots) = 0. \quad (59)$$

Дифференциальные связи также могут быть учтены в уравнениях поля с помощью правила множителей. Вводя множители Лагранжа  $\lambda_{\mathbf{n}}$  и новый лагранжиан  $\mathcal{L}^*$  согласно

$$\mathcal{L}^{**} = \mathcal{L} - \lambda_{\mathbf{n}}^{\mathbf{n}} \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \quad (60)$$

заменяем в уравнениях поля (42) лагранжиан  $\mathcal{L}$  на  $\mathcal{L}^*$ ; в итоге после ряда преобразований можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha} S_{\cdot j}^{\alpha} - \dot{P}_j &= -(\partial_4 \lambda) \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \mathcal{F}_{\mathbf{n}} - \lambda \partial_4 \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \mathcal{F}_{\mathbf{n}} - \\ &- (\partial_{\alpha} \lambda) \frac{\partial}{\partial (\partial_{\alpha} x^j)} \mathcal{F}_{\mathbf{n}} - \lambda \partial_{\alpha} \frac{\partial}{\partial (\partial_{\alpha} x^j)} \mathcal{F}_{\mathbf{n}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + \lambda \frac{\partial}{\partial x^j} \mathcal{F}_{\mathbf{n}} \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_{\alpha} M_{\cdot j}^{\alpha} + \dot{A}_j - \partial_4 \dot{Q}_j &= -(\partial_4 \lambda) \frac{\partial}{\partial (\partial_4 d_{\mathbf{a}}^j)} \mathcal{F}_{\mathbf{n}} - \lambda \partial_4 \frac{\partial}{\partial (\partial_4 d_{\mathbf{a}}^j)} \mathcal{F}_{\mathbf{n}} - \\ &- (\partial_{\alpha} \lambda) \frac{\partial}{\partial (\partial_{\alpha} d_{\mathbf{a}}^j)} \mathcal{F}_{\mathbf{n}} - \lambda \partial_{\alpha} \frac{\partial}{\partial (\partial_{\alpha} d_{\mathbf{a}}^j)} \mathcal{F}_{\mathbf{n}} + \lambda \frac{\partial}{\partial d_{\mathbf{a}}^j} \mathcal{F}_{\mathbf{n}} \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_{\alpha} j_{\mathbf{R}}^{\alpha} + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (61)$$

Полученные уравнения принципиально отличаются от (58), поскольку множители Лагранжа входят в них также в форме частных производных первого порядка.

Оставшуюся часть этого раздела работы посвятим уравнениям поля для жесткого репера  $d$ -векторов. В случае простейшей голономной связи, когда трансформация репера  $\mathbf{d}$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3$ ) сводится только к его «жестким» поворотам в пространстве, имеем следующие конечные ограничения:

$$g_{ij} d_{\mathbf{a}}^i d_{\mathbf{b}}^j = \delta_{\mathbf{ab}} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} = 1, 2, 3), \quad (62)$$

где  $g_{ij}$  — компоненты эйлеровой пространственной метрики,  $\delta_{\mathbf{ab}}$  — символ Кронекера.

В том важном и сравнительно простом случае, когда параметрами микроструктуры являются только  $d$ -векторы  $d_{\mathbf{a}}^j$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ), а кинематические связи задаются уравнениями (62), система дифференциальных уравнений поля (42) подлежит некоторой модификации, поскольку согласно правилу множителей лагранжиан  $\mathcal{L}$  подлежит замене на новый лагранжиан  $\mathcal{L}^*$ :

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^* = \mathcal{L} - \frac{1}{2} \lambda^{\mathbf{cb}} \left( g_{kl} d_{\mathbf{c}}^k d_{\mathbf{b}}^l - \delta_{\mathbf{cb}} \right) \quad (\mathbf{c}, \mathbf{b} = 1, 2, 3).$$

Здесь  $\lambda^{\mathbf{cb}}$  — множители Лагранжа, которые представляют собой функции пространственно-временных координат. Их можно считать симметричными при

перестановке индексов:

$$\overset{bc}{\lambda} = \overset{cb}{\lambda} \quad (c, b = 1, 2, 3).$$

Вычислим сначала требуемые для модификации уравнений поля (42) полевые производные.

Прежде всего нас интересует производная лагранжиана  $\mathcal{L}^*$  по полевой переменной  $x^j$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \overset{cb}{\lambda} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} d_c^k d_b^l.$$

Полученное выражение преобразуем, принимая во внимание ( $\Gamma_{kj}^s$  — символы Кристоффеля второго рода пространственной метрики)

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} = \Gamma_{kj}^s g_{sl} + \Gamma_{lj}^s g_{ks},$$

а также симметрию множителей  $\overset{cb}{\lambda}$ . В итоге приходим к следующему выражению:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} - \overset{cb}{\lambda} \Gamma_{kj}^s d_c^k d_b^s.$$

Интерес представляет также производная лагранжиана  $\mathcal{L}^*$  по экстраполевой переменной  $d_a^j$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial d_a^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_a^j} - \frac{1}{2} \overset{cb}{\lambda} (g_{kl} \delta_j^k d_b^l \delta_a^c + g_{kl} \delta_j^l d_c^k \delta_a^b).$$

Привлекая затем соглашение о симметрии множителей  $\overset{cb}{\lambda}$ , получаем

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial d_a^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_a^j} - \frac{1}{2} \overset{cb}{\lambda} (g_{jl} d_b^l \delta_a^c + g_{jk} d_c^k \delta_a^b)$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial d_a^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_a^j} - \overset{ab}{\lambda} d_b^j.$$

В результате вместо (42) дифференциальные уравнения поля получаются в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha S_{.j}^\alpha - \dot{P}_j &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^s \overset{bc}{\lambda} d_s d_c^k \quad (\alpha = 1, 2, 3; j, s, k = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha \overset{a}{\mathcal{M}}_{.j}^\alpha + \overset{a}{\mathcal{A}}_j^\alpha - \partial_4 \overset{a}{\mathcal{Q}}_j &= 0 \quad (a = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (63)$$

где

$$\overset{a}{\mathcal{A}}_j^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_a^j} - \overset{ab}{\lambda} d_b^j.$$

Сворачивая обе левую и правую части последнего равенства с вектором  $d_a^j$ , на основании уравнений связей

$$g_{kl} d_c^k d_b^l - \delta_{cb} = 0$$

находим

$$(\overset{a}{A}_j^* - \overset{a}{A}_j) d_{\overset{a}{a}}^j = -\lambda_{\overset{ab}{ab}} \delta.$$

**Ротационная инвариантность действия и плотности действия относительно поворотов эйлеровой координатной системы. Объективные ротационно-инвариантные формы лагранжиана.** «Естественная» плотность действия в форме (37) пока еще не позволяет вести речь о ее объективности в том смысле, что в разных эйлеровых координатных системах эта форма будет сохраняться. Ясно, что вывод объективных форм лагранжиана представляет собой первый и весьма важный шаг на пути построения объективных форм определяющих уравнений, первоначально задаваемых уравнениями (41). Ограничимся случаем, когда параметрами микроструктуры являются только  $d$ -векторы  $d_{\overset{a}{a}}^j$  ( $\overset{a}{a} = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, 3$ ). При этом «естественная» плотность действия микрополярного термоупругого континуума второго типа может быть представлена в виде следующей функции с явно перечисленными вхождениями определяющих переменных:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d_{\overset{a}{a}}^j, \vartheta, \dot{x}_{\overset{a}{a}}^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_{\overset{a}{a}}^j, \partial_\alpha \vartheta). \quad (64)$$

В теориях континуумов лагранжиан имеет несколько более специальную форму, чем (64), разности плотности кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \rho_{\text{R}} g_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j + \frac{1}{2} \rho_{\text{R}} g_{ij} \overset{ab}{\mathfrak{J}} d_{\overset{a}{a}}^i \dot{d}_{\overset{b}{b}}^j - \\ & - \psi(X^\beta, x^j, d_{\overset{a}{a}}^j, \vartheta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_{\overset{a}{a}}^j, \partial_\alpha \vartheta). \end{aligned} \quad (65)$$

Для изображения состояний и процессов в механике континуума используется трехмерное плоское пространство-время и независимое время. Поскольку выбор эйлеровых координат произволен и не должен никак сказываться на физических следствиях дифференциальных уравнений поля, то действие и лагранжиан обязаны обладать определенными свойствами инвариантности по отношению к выбору эйлеровой координатной системы и начала отсчета времени, т. е. по отношению к так называемым «движениям» эйлера пространства. Существуют два принципиально различных вида «движений»: трансляционные и спинорные. Первые определяются заданием векторов положений и описывают перемещения (трансляции) тел в эйлеровом пространстве. Спинорные «движения» определяются заданием тензорных функций времени, значениями которых являются собственно ортогональные тензоры размерности три (тензоры поворота).

Вводя в пространстве прямоугольные декартовы координаты  $x^j$ , заметим, что одно из таких свойств инвариантности проявляется в форме трансляционной инвариантности интегрального функционала действия относительно произвольных сдвигов переменных  $x^j$  и времени  $t$ . Другое, как хорошо известно, — ротационной инвариантности относительно произвольных поворотов эйлеровой координатной системы  $x^j$ .

Инвариантность действия относительно поворотов эйлера координатного репера является проявлением изотропии эйлера координатного пространства, т.е. отсутствия предпочтительных направлений в этом пространстве.

Инвариантность действия относительно преобразований лагранжевых переменных связана с симметрией физических свойств континуума. Так, трансляционная инвариантность действия относительно произвольных сдвигов координат  $X^\alpha$  означает, что

континуум однороден. Ротационная инвариантность относительно произвольных поворотов лагранжевой координатной системы указывает на изотропность континуума.

Таким образом, действие, в частности, должно быть инвариантно относительно преобразований сдвигов и поворотов координатной системы наблюдателя (принцип объективности) и сдвигов времени:

$$\begin{aligned}\tilde{x}^i &= R_j^i x^j + C^i, \\ \tilde{d}_a^i &= R_j^i d_a^j, \\ \tilde{t} &= t + C.\end{aligned}\tag{66}$$

В приведенных выше формулах преобразования  $C^i$ ,  $C$  есть произвольные постоянные;  $R_j^i$  — произвольная постоянная собственно ортогональная матрица.

Действие и плотность действия  $\mathcal{L}$  инвариантны относительно преобразований (66) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} &= 0, \\ \partial_4^{\text{expl}} \mathcal{L} &= 0, \\ \mathcal{K}_{[ij]} &= 0,\end{aligned}\tag{67}$$

где тензор  $\mathcal{K}_{ij}$  определяется согласно

$$\mathcal{K}_{ij} = x_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + d_i^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_a^j} + \dot{x}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j} + \dot{d}_i^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{d}_a^j} + (\partial_\alpha x_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha x^j)} + (\partial_\alpha d_i^a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha d_a^j)}\tag{68}$$

и в (67) по индексам, заключенным в квадратные скобки, выполняется антисимметризация.

Заметим, что в силу (67) и в обозначениях (41) тензор  $\mathcal{K}_{ij}$  сводится к

$$\mathcal{K}_{ij} = d_i^a \dot{A}_j^a + \dot{x}_i P_j + \dot{d}_i^a \dot{Q}_j^a - (\partial_\alpha x_i) S_j^\alpha - (\partial_\alpha d_i^a) \dot{M}_j^{\alpha a}.\tag{69}$$

Ясно, что в том случае, когда плотность действия не зависит явно от директоров  $d_a^j$ , их производных по времени  $\dot{d}_a^j$  и референциальных градиентов  $\partial_\alpha d_a^j$ , последнее в группе условий (67) позволяет сразу же установить *симметрию* тензора напряжений Коши

$$T_{.k}^l = -J^{-1} (\partial_\beta x^l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta x^k)} \quad (\beta = 1, 2, 3).\tag{70}$$

Инвариантность действия относительно трансляций эйлеровых координат, известная как принцип галилеевой инвариантности действия (принцип относительности Галилея), мы *дополним* требованием инвариантности действия относительно сдвигов температурного смещения ( $C'$  — произвольная постоянная):

$$\tilde{\vartheta} = \vartheta + C',\tag{71}$$

что обеспечивается выполнением следующего условия:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = 0.\tag{72}$$

Поскольку кинетическая составляющая плотности действия инвариантна относительно преобразований (66), (71), то плотность свободной энергии Гельмгольца ( $\alpha, \beta=1,2,3$ )

$$\psi = \psi(X^\beta, d_a^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha \vartheta),$$

в свою очередь, обязана выдерживать преобразования вида (66), (71), т. е.

$$\psi(X^\beta, R_j^i d_a^j, \dot{\vartheta}, R_j^i \partial_\alpha x^j, R_j^i \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha \vartheta) = \psi(X^\beta, d_a^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha \vartheta). \quad (73)$$

Последнее обстоятельство означает, что свободная энергия Гельмгольца является некоторой функцией от переменных

$$X^\beta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha \vartheta, \quad (74)$$

в запись которых не входят эйлеровы индексы, а также следующих независимых инвариантных относительно вращений эйлеровой координатной системы аргументов:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j), \\ \mathcal{R}_\alpha &= g_{ij}(\partial_\alpha x^i)d_a^j, \\ \mathcal{T}_{\alpha\beta} &= g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta d_a^j). \end{aligned} \quad (75)$$

Каждая из величин, перечисленных в (75), действительно инвариантна относительно произвольных вращений эйлеровой координатной системы, поскольку по всем эйлеровым индексам производится сворачивание с помощью эйлеровых метрических коэффициентов  $g_{ij}$ .

Заметим, что в списке инвариантных аргументов (75) отсутствуют тензоры

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ab} &= g_{ij}d_a^i d_b^j, \\ \mathcal{R}_{\alpha b} &= g_{ij}(\partial_\alpha d_a^i)d_b^j, \\ \mathcal{T}_{\alpha\beta} &= g_{ij}(\partial_\alpha d_a^i)(\partial_\beta d_b^j). \end{aligned} \quad (76)$$

Рациональной основой для этого выступает требование того, чтобы экстрадеформация континуума была невозможна, если отсутствует деформация ( $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ ).

Полноту системы ротационно-инвариантных аргументов (75) с учетом данного выше замечания (т. е. с исключенными внутренними произведениями (76)) можно доказать, опираясь на известные результаты теории алгебраических инвариантов<sup>2</sup> системы (эйлеровых векторов)

$$\partial_\alpha x^i, d_a^j, \partial_\beta d_a^j. \quad (77)$$

Во-первых, полная система инвариантов векторов (77) включает их попарные внутренние произведения, что приводит к эйлеровым инвариантам (75), (76).

Во-вторых, указанная система инвариантов содержит также всевозможные  $3 \times 3$ -определители, в столбцах которых расположены эйлеровы компоненты всевозможных троек векторов системы (77). А priori ясно, что интересующие нас определители

<sup>2</sup>См., например: Гуревич Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 408 с.



должны содержать по меньшей мере один столбец из эйлеровых компонент градиента деформации  $\partial_\alpha x^i$ . Такие определители, размещая эйлеровы компоненты градиента деформации  $\partial_\alpha x^j$  в первом столбце, можно разбить на следующие шесть групп:

$$[(\partial_\alpha x^j) d_a^j d_b^j] = \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & d_a^1 & d_b^1 \\ \partial_\alpha x^2 & d_a^2 & d_b^2 \\ \partial_\alpha x^3 & d_a^3 & d_b^3 \end{vmatrix} \quad (\mathbf{a} \neq \mathbf{b}), \quad (\text{I})$$

$$[(\partial_\alpha x^j) (\partial_\beta d_a^j) d_b^j] = \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta d_a^1 & d_b^1 \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta d_a^2 & d_b^2 \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta d_a^3 & d_b^3 \end{vmatrix}, \quad (\text{II})$$

$$[(\partial_\alpha x^j) (\partial_\beta d_a^j) (\partial_\gamma d_b^j)] = \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta d_a^1 & \partial_\gamma d_b^1 \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta d_a^2 & \partial_\gamma d_b^2 \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta d_a^3 & \partial_\gamma d_b^3 \end{vmatrix} \quad (\beta \neq \gamma \text{ и } \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \text{ одновременно}), \quad (\text{III})$$

$$[(\partial_\alpha x^j) (\partial_\beta x^j) d_a^j] = \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta x^1 & d_a^1 \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta x^2 & d_a^2 \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta x^3 & d_a^3 \end{vmatrix} \quad (\beta \neq \alpha), \quad (\text{IV})$$

$$[(\partial_\alpha x^j) (\partial_\beta x^j) (\partial_\gamma d_a^j)] = \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta x^1 & \partial_\gamma d_a^1 \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta x^2 & \partial_\gamma d_a^2 \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta x^3 & \partial_\gamma d_a^3 \end{vmatrix} \quad (\beta \neq \alpha), \quad (\text{V})$$

$$[(\partial_\alpha x^j) (\partial_\beta x^j) (\partial_\gamma x^j)] = \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta x^1 & \partial_\gamma x^1 \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta x^2 & \partial_\gamma x^2 \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta x^3 & \partial_\gamma x^3 \end{vmatrix}. \quad (\text{VI})$$

Вычисление всех шести определителей можно осуществить с помощью правила Грама – Шмидта, т. е. через определители, элементы которых представляют собой всевозможные внутренние произведения эйлеровых векторов, расположенных в столбцах исходных определителей, и метрические коэффициенты  $g_{\alpha\beta}$ . Таким образом, каждый из приведенных выше определителей вычисляется через внутренние произведения в соответствии с данной ниже схемой:

$$(I) \quad g_{ij}(\partial_\alpha x^i) d_\epsilon^j, g_{ij} d_a^i d_b^j;$$

$$(II) \quad g_{ij}(\partial_\alpha x^i) (\partial_\beta d_a^j), g_{ij}(\partial_\alpha x^i) d_b^j, g_{ij}(\partial_\beta d_a^i) d_b^j;$$

$$(III) \quad g_{ij}(\partial_\alpha x^i) (\partial_\omega d_\epsilon^j), g_{ij}(\partial_\beta d_a^i) (\partial_\gamma d_b^j);$$

$$(IV) \quad g_{ij}(\partial_\alpha x^i) (\partial_\beta x^j), g_{ij}(\partial_\alpha x^i) d_a^j;$$

$$(V) \quad g_{ij}(\partial_\alpha x^i) (\partial_\beta x^j), g_{ij}(\partial_\alpha x^i) (\partial_\gamma d_a^j);$$

(VI)  $g_{\alpha\beta}$ .

Хорошо видно, что определители (I)–(VI) вычисляются только через тензорные и векторные величины, перечисленные в (75) и (76), что и доказывает полноту ротационно-инвариантных аргументов (75) с учетом исключения аргументов (76).

Заметим также, что кинематическое ограничение

$$\mathcal{R}_{ab} = \delta_{ab}$$

устанавливает, что  $d$ -векторы составляют «жесткий» репер, поэтому экстра-деформация континуума сводится лишь к вращениям составляющих его элементов.

В итоге, считая, что континуум однороден, т. е.

$$\partial_{\beta}^{\text{expl}} \mathcal{L} = 0 \quad (\beta = 1, 2, 3), \quad (78)$$

и, следовательно, все лагранжевы переменные  $X^{\beta}$  являются циклическими (игнорируемыми), получаем следующую, удовлетворяющую принципу объективности, ротационно-инвариантную форму свободной энергии Гельмгольца: ( $\mathbf{a}=1,2,3$ ;  $\alpha, \beta=1,2,3$ )

$$\psi = \psi(g_{\alpha\beta}, \mathcal{R}_{\alpha}, \mathcal{T}_{\alpha}, \dot{\vartheta}, \partial_{\alpha}\vartheta). \quad (79)$$

Мы неявно подразумеваем, что приведенная форма (79) должна зависеть также от отсчетной метрики  $\backslash g_{\alpha\beta}$  и референциального положения  $d$ -векторов  $\backslash d_{\alpha}^j$  ( $\mathbf{a}=1,2,3$ ).

В форме (79) ротационно-инвариантный аргумент  $g_{\alpha\beta}$  без ограничения общности может быть заменен на

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - \backslash g_{\alpha\beta}). \quad (80)$$

Компоненты  $\epsilon_{\alpha\beta}$  преобразуются по тензорному закону при заменах лагранжевых координат. Тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  называется тензором деформации Грина. Использование тензора деформации Грина в качестве ротационно-инвариантного аргумента лагранжиана исключительно удобно, т. к. он в силу своего определения учитывает только ту часть деформации континуума (24), которая наблюдается относительно некоторой фиксированной референциальной конфигурации.

По аналогичным соображениям вместо векторной меры экстра-деформации  $\mathcal{R}_{\alpha}$  следует использовать относительный вектор экстра-деформации

$$-\gamma_{\alpha} = \mathcal{R}_{\alpha} - g_{\alpha\beta} \backslash d_{\alpha}^{\beta}. \quad (81)$$

Здесь векторы  $\backslash d_{\alpha}^{\beta}$  указывают референциальное состояние системы  $d$ -векторов. Отметим следующее равенство:

$$\backslash d_{\alpha}^i = \frac{\partial \backslash x^i}{\partial X^{\alpha}} \backslash d_{\alpha}^{\alpha}.$$

Вектор  $\gamma_{\alpha}$  оказывается нулевым, только если каждый из  $d$ -векторов поворачивается и удлиняется так, как это в точности предписывается деформацией континуума (24). Если последнее обстоятельство действительно имеет место, то  $\backslash d$ -векторы и  $d$ -векторы будут связаны зависимостями

$$\backslash d_{\alpha}^i - (\partial_{\alpha} \backslash x^i) \backslash d_{\alpha}^{\alpha} = 0;$$

умножая обе части полученного равенства на компоненты дисторсии  $\partial_\beta x^j$  и сворачивая с  $g_{ij}$ , находим

$$\mathcal{R}_\beta - g_{\beta\alpha} \mathop{d}_\alpha^\alpha = 0,$$

т. е. относительный вектор экстра-деформации становится равным нулю:

$$\gamma_\beta = 0.$$

Таким образом, окончательно ротационно-инвариантная форма свободной энергии Гельмгольца получается в виде

$$\psi = \psi(\epsilon_{\alpha\beta}, \gamma_\alpha, \mathcal{T}_{\alpha\beta}, \vartheta, \partial_\alpha \vartheta) \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (82)$$

Полученная форма указывает на явную зависимость свободной энергии Гельмгольца от одного скалярного аргумента  $\vartheta$ ; четырех отсчетных векторных аргументов  $\partial_\alpha \vartheta$ ,  $\gamma_\alpha$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3$ ); и четырех отсчетных тензорных аргументов  $\epsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2, 3$ ), три из которых являются несимметричными тензорами второго ранга.

В принципе, существует еще только один способ построения системы независимых ротационно-инвариантных аргументов, отличный от изложенного выше. Он связан с полярным разложением градиента деформации ( $\partial_\alpha x^i$ ) ( $i, \alpha = 1, 2, 3$ ) и градиентов микрополярных директоров ( $\partial_\alpha d^i$ ) ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3; i, \alpha = 1, 2, 3$ ).

Известно, что градиент деформации всегда может быть представлен как произведение симметричного положительно определенного тензора  $|x|_{\alpha\beta}$  ( $|x|_{\alpha\beta} > 0$ ) и ортогонального тензора  $\lambda^{i\beta}$ :

$$\partial_\alpha x^i = |x|_{\alpha\beta} \lambda^{i\beta}. \quad (83)$$

Тензор  $|x|_{\alpha\beta}$  называется модулем градиента деформации, тензор  $\lambda^{i\beta}$  — тензором поворота. Симметрия модуля градиента деформации и ортогональность тензора  $\lambda^{i\beta}$  выражаются следующими соотношениями:

$$|x|_{\alpha\beta} = |x|_{\beta\alpha}; \quad (84)$$

$$g_{ij} \lambda^{i\beta} \lambda^{j\gamma} = \mathop{g}^{\beta\gamma}, \quad \mathop{g}_{\beta\gamma} \lambda^{i\beta} \lambda^{j\gamma} = g^{ij}. \quad (85)$$

То же самое относится и к градиентам микрополярных директоров ( $\partial_\alpha d^i$ ) ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3; i, \alpha = 1, 2, 3$ ). Полярные разложения градиентов директоров  $d^i$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3$ ) имеют вид

$$\partial_\alpha d^i = |d|_{\alpha\beta} \lambda^{i\beta}, \quad (86)$$

где тензоры  $|d|_{\alpha\beta}$  симметричны и положительны, а тензоры  $\lambda^{i\beta}$  ортогональны.

Тензоры  $|x|_{\alpha\beta}$  и  $|d|_{\alpha\beta}$ , очевидно, ротационно-инвариантны. С тем, чтобы получить полную систему независимых ротационно-инвариантных аргументов, к ним следует добавить следующие ротационно-инвариантные внутренние произведения (обязательно содержащие множитель  $\lambda^{i\beta}$ ):

$$g_{ij} d^i \lambda^{j\beta}, \quad g_{ij} \lambda^{i\beta} \lambda^{j\gamma} = \mathop{g}^{\beta\gamma}, \quad g_{ij} \lambda^{i\beta} \lambda^{j\gamma}.$$

Таким образом, еще одна ротационно-инвариантная форма свободной энергии Гельмгольца получается в виде

$$\psi = \psi(|x|_{\alpha\beta}, |d|_{\alpha\beta}, \mathop{g}_{\alpha\beta}, g_{ij} d^i \lambda^{j\alpha}, g_{ij} \lambda^{i\alpha} \lambda^{j\beta}) \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (87)$$

Наконец, установим связь между двумя системами ротационно-инвариантных аргументов. Она становится понятной, если принять во внимание следующие соотношения:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{ij}|x|_{\alpha\sigma}|x|_{\beta\kappa}\lambda^{i\sigma}\lambda^{j\kappa} = \backslash g^{\sigma\kappa}|x|_{\alpha\sigma}|x|_{\beta\kappa}, \\ \mathcal{R}_{\alpha} &= g_{ij}|x|_{\alpha\beta}\lambda^{i\beta}d_{\alpha}^j = |x|_{\alpha\beta}d_{\alpha}^j\lambda^{j\beta}, \\ \mathcal{T}_{\alpha\beta} &= g_{ij}|x|_{\alpha\sigma}\lambda^{i\sigma}|d|_{\beta\gamma}\lambda^{j\gamma} = |x|_{\alpha\sigma}|d|_{\beta\gamma}g_{ij}\lambda^{i\sigma}\lambda^{j\gamma}. \end{aligned} \quad (88)$$

Отметим еще одно интересное соотношение. Вычисляя длины векторов  $d_{\alpha}^j\lambda^{j\beta}$  в отсчетной метрике  $\backslash g_{\beta\gamma}$ , имеем:

$$\backslash g_{\beta\gamma}d_{\alpha}^i\lambda^{i\beta}d_{\alpha}^j\lambda^{j\gamma} = g^{ij}d_{\alpha}^id_{\alpha}^jd_j,$$

где величина справа есть длина  $d$ -директора с указателем  $\mathbf{a}$ .

**Определяющие уравнения в терминах объективного термодинамического базиса.** Как показано в предыдущем разделе работы, объективный термодинамический базис для микрополярного термоупругого континуума, распространение тепла в котором не сопровождается производством энтропии, состоит из следующего набора функционально-независимых переменных

$$\epsilon_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha}, \mathcal{T}_{\alpha\beta}, \dot{\vartheta}, \partial_{\alpha}\vartheta \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (89)$$

Определяющие уравнения микрополярного термоупругого континуума (41) были получены в термодинамическом базисе, который не удовлетворяет принципу ротационной инвариантности. Поэтому естественно поставить задачу о преобразовании определяющих уравнений (41) к объективным формам, диктуемым ротационно-инвариантными аргументами лагранжиана. Далее рассмотрим вывод объективных форм определяющих уравнений, исходя из ротационно-инвариантной формы свободной энергии (82). На основании

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial(\partial_{\alpha}x^j)} &= g_{jk}(\partial_{\beta}x^k\delta_{\sigma}^{\alpha} + \partial_{\sigma}x^k\delta_{\beta}^{\alpha}), \\ \frac{\partial \epsilon_{\mu\nu}}{\partial(\partial_{\alpha}x^j)} &= \frac{1}{2}g_{jk}(\partial_{\mu}x^k\delta_{\nu}^{\alpha} + \partial_{\nu}x^k\delta_{\mu}^{\alpha}), \\ \frac{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}}{\partial(\partial_{\alpha}d_{\epsilon}^j)} &= g_{jk}\partial_{\mu}x^k\delta_{\nu}^{\alpha}\delta_{\epsilon}^{\alpha}, \\ \frac{\partial \mathcal{R}_{\beta}}{\partial(\partial_{\alpha}x^j)} &= g_{jk}\delta_{\beta}^{\alpha}d_{\alpha}^k, \\ \frac{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}}{\partial(\partial_{\alpha}x^j)} &= g_{jk}\delta_{\mu}^{\alpha}\partial_{\nu}d_{\alpha}^k, \\ \frac{\partial \mathcal{R}_{\beta}}{\partial d_{\epsilon}^j} &= g_{ij}\partial_{\beta}x^i\delta_{\epsilon}^{\alpha} \end{aligned}$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}x^j)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon_{\mu\nu}} \frac{\partial \epsilon_{\mu\nu}}{\partial(\partial_{\alpha}x^j)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_{\beta}} \frac{\partial \mathcal{R}_{\beta}}{\partial(\partial_{\alpha}x^j)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_{\beta}} \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial(\partial_{\alpha}x^j)} \backslash d_{\alpha}^{\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}} \frac{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}}{\partial(\partial_{\alpha}x^j)},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha d_\epsilon^j)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}^a} \frac{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}^a}{\partial(\partial_\alpha d_\epsilon^j)},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_\epsilon^j} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\beta^a} \frac{\partial \mathcal{R}_a^\beta}{\partial d_\epsilon^j}$$

можно получить следующие объективные формы определяющих уравнений (41):

$$-S_{\cdot j}^{\alpha\cdot} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon_{\mu\alpha}} g_{jk} \partial_\mu x^k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\beta^a} g_{jk} d_\alpha^k \delta_\beta^\alpha +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\beta^a} g_{jk} (\partial_\beta x^{k\lambda} d_\alpha^\lambda + \partial_\sigma x^k \delta_\beta^{\alpha\lambda} d_\alpha^\sigma) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}^a} g_{jk} \partial_\nu d_\alpha^k, \quad (90)$$

$$-M_{\cdot j}^{\alpha\cdot} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha d_\epsilon^j)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}^a} g_{jk} \partial_\mu x^k \delta_\nu^\alpha, \quad (91)$$

$$A_j^\epsilon = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_\epsilon^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\beta^a} g_{jk} \partial_\beta x^k. \quad (92)$$

Определяющее уравнение (90) после очевидных преобразований представляется в следующем виде:

$$-S_{\cdot j}^{\alpha\cdot} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon_{\mu\alpha}} g_{jk} \partial_\mu x^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\alpha^a} g_{jk} (\partial_\sigma x^{k\lambda} d_\alpha^\lambda - d_\alpha^k) +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\beta^a} g_{jk} \partial_\beta x^{k\lambda} d_\alpha^\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}^a} g_{jk} \partial_\nu d_\alpha^k. \quad (93)$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Радаев Ю. Н. Гиперболические теории и задачи механики деформируемого твердого тела / Международная конференция «Современные проблемы механики», посв. 100-летию Л. А. Галина, 20-21 сентября 2012 г., г. Москва. Тезисы докл. М., 2012. С. 75–76.
- [2] Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Гиперболические теории и задачи механики континуума / Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения», 25 августа – 1 сентября, 2014 г., г. Самара: Материалы межд. конференции (под ред. чл.-корр. РАН И.В. Воловича и д.ф.-м.н., проф. В.П. Радченко). Самара: СамГТУ, 2014. С. 289–290.
- [3] Toupin R. A. Theories of Elasticity with Couple-stress // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. Vol. 17. № 5. P. 85–112.
- [4] Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1941. 308 с.
- [5] Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
- [6] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: Физматлит, 2009. 156 с.
- [7] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.

- [8] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
- [9] Седов Л. И. Введение в механику сплошных сред. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
- [10] Ильюшин А. А. Механика сплошных сред. М.: Изд-во Московского университета, 1978. 287 с.
- [11] Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
- [12] Cosserat E. et F. Théorie des corps déformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 pp.
- [13] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Вывод тензоров энергии-импульса в теориях микрополярной гиперболической термоупругости // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2011. № 5. С. 58–77.
- [14] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Точно сохраняющиеся инварианты связанного микрополярного термоупругого поля // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 4. С. 71–79.
- [15] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Полевые уравнения и  $d$ -тензоры термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. Вып. 2. Ч. 1. С. 60–68.
- [16] Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Ротационная инвариантность и объективные формы лагранжианов нелинейного микрополярного континуума второго типа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. Вып. 4. Ч. 1. С. 96–102.
- [17] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Об одной форме первой вариации интегрального функционала действия по растущей области // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. Вып. 2. С. 199–209.
- [18] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. О нелинейных тензорах и векторах экстрадеформации в теории и механике континуума // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 1(34). С. 66–85.
- [19] Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Гиперболическая термомеханика континуума // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов (Казань, 20–24 августа 2015 г.) Казань: Изд-во Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. С. 3173–3174.
- [20] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Объективные ротационно-инвариантные формы термоупругих лагранжианов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2015. Т. 19, № 2. С. 325–340.

V. A. Kovalev<sup>1</sup>, Y. N. Radayev<sup>2</sup>**CANONICAL FIELD THEORY OF THERMOELASTIC CONTINUUM WITH THREE POLAR DIRECTORS**<sup>1</sup>*Moscow City University of Management of Moscow Government, Moscow, Russia*<sup>2</sup>*Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** A canonical non-linear mathematical model of type-II (GN II) thermoelastic (TE) continuum with fine microstructure is discussed. The model is presented in terms of the canonical 4-covariant field theoretical formalism. The fine microstructure of the thermoelastic continuum is determined by  $d$ -vectors and  $d$ -tensors thus playing role of extra field variables. By virtue of proposed action density for type-II TE continuum with fine microstructure the least action principle is formulated. Virtual microstructural inertia is added to the action density. Corresponding 4-covariant field equations of type-II thermoelasticity are obtained. Constitutive equations of type-II microstructural thermoelasticity are discussed. Variational symmetries of the thermoelastic action are used to formulate covariant conservation laws. Following the usual procedure for type-II micropolar TE Lagrangians functionally independent rotationally invariant arguments are obtained. A formal proof of the completeness of the system of rotationally invariant arguments is given. An alternative approach of constructing a complete system of independent rotationally invariant arguments is discussed. Objective forms of the Lagrangians satisfying the frame indifference principle are given. Those are derived by using extra strain vectors and tensors.

**Keywords:** thermoelasticity, microstructure, field, extra field, action, covariance, conservation law,  $d$ -tensor, 4-current, energy–momentum tensor, constraint, Lagrange multiplier, rotation, frame indifference principle, extrastrain tensor.

**REFERENCES**

- [1] Radaev Ju. N. Giperbolicheskie teorii i zadachi mehaniki deformiruемого tverdogo tela / Mezhdunarodnaja konferencija «Sovremennye problemy mehaniki», posv. 100-letiju L. A. Galina, 20-21 sentjabrja 2012 g., g. Moskva. Tezisy dokl. M., 2012. S. 75–76. (in Russian).
- [2] Radaev Ju. N., Kovalev V. A. Giperbolicheskie teorii i zadachi mehaniki kontinuum/ Chetvertaja mezhdunarodnaja konferencija «Matematicheskaja fizika i ee prilozhenija», 25 avgusta – 1 sentjabrja, 2014 g., g. Samara: Materialy mezhd. konferencii (pod red. chl.-korr. RAN I.V. Volovicha i d.f.-m.n., prof. V.P. Radchenko). Samara: SamGTU, 2014. S. 289–290. (in Russian).
- [3] Toupin R. A. Theories of Elasticity with Couple-stress // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. Vol. 17. № 5. P. 85–112.
- [4] Gjunter N. M. Kurs variacionnogo ischislenija. M., L.: Gostehteorizdat, 1941. 308 s. (in Russian).

---

*Kovalev Vladimir Alexandrovich*

e-mail: vlad\_koval@mail.ru, DSc. (Phys.&Math.), Prof., Moscow City University of Management of Moscow Government, Moscow, Russia.

*Radayev Yuri Nikolayevich*

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Leading Researcher, DSc., Prof., Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

- [5] Berdichevskij V. L. Variacionnye principy mehaniki sploshnoj sredy. M.: Nauka, 1983. 448 s. (in Russian).
- [6] Kovalev V. A., Radaev Ju. N. Jelementy teorii polja: variacionnye simmetrii i geometricheskie invarianty. M.: FIZMATLIT, 2009. 156 s. (in Russian).
- [7] Kovalev V. A., Radaev Ju. N. Volnovye zadachi teorii polja i termomehanika. Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 2010. 328 s. (in Russian).
- [8] Ovsjannikov L. V. Gruppovoj analiz differencial'nyh uravnenij. M.: Nauka, 1978. 400 s. (in Russian).
- [9] Sedov L. I. Vvedenie v mehaniku sploshnyh sred. M.: Fizmatgiz, 1962. 284 s. (in Russian).
- [10] Il'jushin A. A. Mehanika sploshnyh sred. M.: Izd-vo Moskovskogo universiteta, 1978. 287 s. (in Russian).
- [11] Grin A., Adkins Dzh. Bol'shie uprugie deformacii i nelinejnaja mehanika sploshnoj sredy. M.: Mir, 1965. 456 s. (in Russian).
- [12] Cosserat E. et F. Théorie des corps déformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
- [13] Kovalev V. A., Radaev Ju. N. Vyvod tenzorov jenergii—impul'sa v teorijah mikropoljarnoj giperbolicheskoj termouprugosti // Izv. RAN. Meh. tverd. tela. 2011. № 5. S. 58–77. (in Russian).
- [14] Kovalev V. A., Radaev Ju. N. Točno sohranjajushhiesja invarianty svjazannogo mikropoljarnogo termouprugogo polja // Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. 2012. Vol. 12. Ser. Matematika. Mehanika. Informatika. Vyp. 4. S. 71–79. (in Russian).
- [15] Kovalev V. A., Radaev Ju. N. Polevye uravnenija i  $d$ -tenzory termouprugogo kontinuumu s «tonkoj» mikrostrukturoj // Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mehanika. Informatika. 2013. Vol. 13. Vyp. 2. Ch. 1. S. 60–68. (in Russian).
- [16] Radaev Ju. N., Kovalev V. A. Rotacionnaja invariantnost' i obektivnye formy lagranzhianov nelinejnogo mikropoljarnogo kontinuumu vtorogo tipa // Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mehanika. Informatika. 2013. Vol. 13. Vyp. 4. Ch. 1. S. 96–102. (in Russian).
- [17] Kovalev V. A., Radaev Ju. N. Ob odnoj forme pervoj variacii integral'nogo funkcionala dejstvija po rastushhej oblasti // Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mehanika. Informatika. 2014. Vol. 14. Vyp. 2. S. 199–209. (in Russian).
- [18] Kovalev V. A., Radaev Ju. N. O nelinejnyh tenzorah i vektorah jekstradeformacii v teorii i mehanike kontinuumu // Vestnik Sam. gos. tehn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2014. №1(34). S. 66–85. (in Russian).
- [19] Radaev Ju. N., Kovalev V. A. Giperbolicheskaja termomehanika kontinuumu / XI Vserossijskij sezid po fundamental'nyh problemam teoreticheskoi i prikladnoj mehaniki. Sbornik trudov. (Kazan', 20–24 avgusta 2015 g.) Kazan': Izd-vo Kazanskogo (Privolzhsckogo) federal'nogo universiteta, 2015. S. 3173–3174. (in Russian).
- [20] Kovalev V. A., Radaev Ju. N. Obektivnye rotacionno-invariantnye formy termouprugih lagranzhianov // Vestn. Sam. gos. tehn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki, 2015. Vol. 19, № 2. S. 325–340. (in Russian).



И. В. Меньшова<sup>1</sup>, А. П. Кержаев<sup>1</sup>, А. В. Никитин<sup>2</sup>

## МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ЗАДАЧЕ ДЛЯ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ПОЛОСЫ

*Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН,  
г. Москва, Россия*

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
г. Чебоксары, Россия*

**Аннотация.** В статьях [1], [2] на различных примерах была продемонстрирована эффективность применения метода начальных функций [3], записанного в пространстве преобразований Фурье, к решению краевых задач теории упругости в бесконечной полосе. Благодаря представимости операторов бесконечного дифференцирования метода начальных функций в свернутом виде, решение краевой задачи для полосы очень просто выписывается в виде несобственных интегралов от компактных выражений – обратных преобразований Фурье мероморфных функций. Числители и знаменатели этих функций представляют собой линейные комбинации произведений операторов. Как правило, интегралы хорошо сходятся, а их численная реализация, например, средствами MATHCAD не представляет труда. Решение можно представить и в виде рядов по функциям Фадля – Папковича (собственным функциям рассматриваемой краевой задачи), воспользовавшись теоремой о вычетах.

---

© Меньшова И. В., Кержаев А. П., Никитин А. В., 2016

*Меньшова Ирина Владимировна*

**e-mail:** menshovairina@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия.

*Кержаев Александр Петрович*

**e-mail:** alex\_kerg@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия.

*Никитин Андрей Витальевич*

**e-mail:** Ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры информатики и вычислительной техники, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-41-02-644 р\_поволжье\_а.

Поступила 12.03.2016

В этой работе тот же подход применяется к решению задачи для бесконечной полосы, склеенной из полос с разными модулями упругости. Принципиальных трудностей при решении этой задачи нет. Однако, даже в случае двух полос с разными модулями упругости, промежуточные выкладки оказываются очень громоздкими, а для большего числа полос – практически нереализуемыми. То обстоятельство, что операторы метода начальных функций представляются в замкнутой форме, дает возможность воспользоваться символьной математикой MATHECAD, не особенно беспокоясь о числе склеиваемых полос и не задумываясь о промежуточных преобразованиях. Независимо от числа слоев тип целой функции, стоящей в знаменателе мероморфной функции, входящей под знак интеграла в обратном преобразовании Фурье, будет всегда выше типа целой функции в числителе. Поэтому интегралы сходятся. Они могут расходиться только в нуле. В этом случае особенность в нуле нужно выделять так, как это было показано в статьях [1], [2].

**Ключевые слова:** составная разномодульная полоса, метод начальных функций, интегральное преобразование Фурье.

УДК: 539.3+517.95

**1. Постановка краевой задачи (основные положения).** Рассмотрим симметричную деформацию бесконечной полосы  $\{\Pi : |y| \leq 1, |x| < \infty\}$ , показанной на рис. 1. Параметры внутренней полосы  $\{\Pi^a : |y| \leq a, |x| < \infty, a < 1\}$  будем обозначать индексом “ $a$ ”, а внешней – “1”. Модули упругости полос различны:  $G^a$  и  $G$ . Полосы непрерывно склеены так, что вдоль линий склеивания,  $y = \pm a$ , выполняются равенства:

$$u^a(x) = u(x), \quad v^a(x) = v(x), \quad \sigma_y^a(x) = \sigma_y(x), \quad \tau_{xy}^a(x) = \tau_{xy}(x), \quad (1)$$

где  $u, v$  – соответственно продольное (вдоль полосы) и поперечное перемещения.

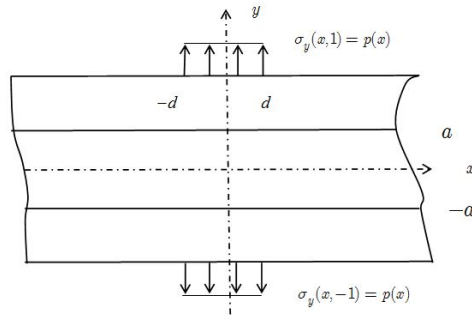


Рис 1. Схема задачи

Перейдем к обозначениям, принятым в методе начальных функций [3]:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= Gu(x, y), \quad V(x, y) = Gv(x, y), \\ Y(x, y) &= \sigma_y(x, y), \quad X(x, y) = \tau_{xy}(x, y), \\ U^a(x, y) &= G^a u^a(x, y), \quad V^a(x, y) = G^a v^a(x, y), \\ Y^a(x, y) &= \sigma_y^a(x, y), \quad X^a(x, y) = \tau_{xy}^a(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда, обозначив  $K = G/G^a$ , равенства (1) можно записать так:

$$U^a(x) = KU(x), \quad V^a(x) = KV(x), \quad Y^a(x) = Y(x), \quad X^a(x) = X(x). \quad (3)$$

Пусть на сторонах  $y = \pm 1$  нормальные напряжения представлены показанной на рисунке ступенчатой функцией, а касательные напряжения равны нулю:

$$\sigma_y(x, \pm 1) = p(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq d; \\ 0, & |x| > d \quad (d > 0), \end{cases} \quad \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0. \quad (4)$$

**2. Решение краевой задачи.** Удовлетворим граничным условиям (4) с помощью зависимостей метода начальных функций. В силу симметрии задачи начальные функции

$$V_0(x) = X_0(x) = 0,$$

поэтому

$$U(x, a) = L_{UU}(\alpha, a)U_0(x) + L_{UY}(\alpha, a)Y_0(x), \quad V(x, a) = L_{VU}(\alpha, a)U_0(x) + L_{VY}(\alpha, a)Y_0(x), \quad (5)$$

$$Y(x, a) = L_{YU}(\alpha, a)U_0(x) + L_{YY}(\alpha, a)Y_0(x), \quad X(x, a) = L_{XU}(\alpha, a)U_0(x) + L_{XY}(\alpha, a)Y_0(x).$$

Здесь  $L_{UU}(\alpha, a)$  и т. д. – дифференциальные операторы метода начальных функций, в которых  $\alpha = d/dx$  – операция дифференцирования. Используя формулы (5) как начальные для внешней полосы, выполним граничные условия (4). Тогда получим систему из двух дифференциальных уравнений бесконечного порядка относительно начальных функций  $U_0(x)$  и  $Y_0(x)$ :

$$L_{YU}^1(\alpha)U_0(x) + L_{YY}^1(\alpha)Y_0(x) = p(x), \quad L_{XU}^1(\alpha)U_0(x) + L_{XY}^1(\alpha)Y_0(x) = 0. \quad (6)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} L_{YU}^1(\alpha) &= K [L_{YU}(\alpha, 1-a)L_{UU}(\alpha, a) + L_{YV}(\alpha, 1-a)L_{VU}(\alpha, a)] + \\ &\quad + L_{YY}(\alpha, 1-a)L_{YU}(\alpha, a) + L_{YX}(\alpha, 1-a)L_{XU}(\alpha, a), \\ L_{YY}^1(\alpha) &= K [L_{YU}(\alpha, 1-a)L_{UY}(\alpha, a) + L_{YV}(\alpha, 1-a)L_{VY}(\alpha, a)] + \\ &\quad + L_{YY}(\alpha, 1-a)L_{YY}(\alpha, a) + L_{YX}(\alpha, 1-a)L_{XY}(\alpha, a), \\ L_{XU}^1(\alpha) &= K [L_{XU}(\alpha, 1-a)L_{UU}(\alpha, a) + L_{XV}(\alpha, 1-a)L_{VU}(\alpha, a)] + \\ &\quad + L_{XY}(\alpha, 1-a)L_{YU}(\alpha, a) + L_{XX}(\alpha, 1-a)L_{XU}(\alpha, a), \\ L_{XY}^1(\alpha) &= K [L_{XU}(\alpha, 1-a)L_{UY}(\alpha, a) + L_{XV}(\alpha, 1-a)L_{VY}(\alpha, a)] + \\ &\quad + (L_{XY}(\alpha, 1-a)L_{YY}(\alpha, a) + L_{XX}(\alpha, 1-a)L_{XY}(\alpha, a)). \end{aligned} \quad (7)$$

Дифференциальные уравнения бесконечного порядка (6) в пространстве преобразований Фурье будут иметь вид

$$L_{YU}^1(\lambda)\widetilde{U}_0(\lambda) + L_{YY}^1(\lambda)\widetilde{Y}_0(\lambda) = \tilde{p}(\lambda), \quad L_{XU}^1(\lambda)\widetilde{U}_0(\lambda) + L_{XY}^1(\lambda)\widetilde{Y}_0(\lambda) = 0, \quad (8)$$

где  $\tilde{p}(\lambda)$  – преобразование Фурье функции  $p(x)$ :

$$\tilde{p}(\lambda) = \frac{2 \sin d\lambda}{\lambda}, \quad (9)$$

$\lambda$  – параметр преобразования Фурье,  $\widetilde{U}_0(\lambda)$  и  $\widetilde{Y}_0(\lambda)$  – преобразования Фурье соответствующих начальных функций. Формулы для операторов  $L$  получаются из соответствующих формул для операторов метода начальных функций заменой  $\alpha$  на  $-i\lambda$ .

Решая систему (8), найдем

$$\widetilde{U}_0(\lambda) = \frac{L_{XY}^1(\lambda)\tilde{p}(\lambda)}{L(\lambda)}, \quad \widetilde{Y}_0(\lambda) = -\frac{L_{XU}^1(\lambda)\tilde{p}(\lambda)}{L(\lambda)}. \quad (10)$$

Функция

$$L(\lambda) = L_{YU}^1(\lambda) L_{XY}^1(\lambda) - L_{YY}^1(\lambda) L_{XU}^1(\lambda). \quad (11)$$

Теперь для преобразований Фурье перемещений и напряжений во внутренней полосе получим:

$$\begin{aligned} \widetilde{U}^a(\lambda, y) &= L_{UU}(\lambda, y) \widetilde{U}_0(\lambda) + L_{UY}(\lambda, y) \widetilde{Y}_0(\lambda), \\ \widetilde{V}^a(\lambda, y) &= L_{VU}(\lambda, y) \widetilde{U}_0(\lambda) + L_{VY}(\lambda, y) \widetilde{Y}_0(\lambda), \\ \widetilde{\sigma}_x^a(\lambda, y) &= A_U(\lambda, y) \widetilde{U}_0(\lambda) + A_Y(\lambda, y) \widetilde{Y}_0(\lambda), \\ \widetilde{Y}^a(\lambda, y) &= L_{YU}(\lambda, y) \widetilde{U}_0(\lambda) + L_{YY}(\lambda, y) \widetilde{Y}_0(\lambda), \\ \widetilde{X}^a(\lambda, y) &= L_{XU}(\lambda, y) \widetilde{U}_0(\lambda) + L_{XY}(\lambda, y) \widetilde{Y}_0(\lambda). \end{aligned} \quad (12)$$

Функции  $\widetilde{U}^a(\lambda, a)$ ,  $\widetilde{V}^a(\lambda, a)$ ,  $\widetilde{Y}^a(\lambda, a)$ ,  $\widetilde{X}^a(\lambda, a)$  в пространстве преобразований Фурье являются начальными для внешней полосы. Поэтому преобразования Фурье перемещений и напряжений для внешней полосы будут иметь вид

$$\begin{aligned} \widetilde{U}^1(\lambda, y) &= L_{UU}(\lambda, y) \widetilde{U}^a(\lambda, a) + L_{UV}(\lambda, y) \widetilde{V}^a(\lambda, a) + \\ &+ L_{UY}(\lambda, y) \widetilde{Y}^a(\lambda, a) + L_{UX}(\lambda, y) \widetilde{X}^a(\lambda, a), \\ \widetilde{V}^1(\lambda, y) &= L_{VU}(\lambda, y) \widetilde{U}^a(\lambda, a) + L_{VV}(\lambda, y) \widetilde{V}^a(\lambda, a) + \\ &+ L_{VY}(\lambda, y) \widetilde{Y}^a(\lambda, a) + L_{VX}(\lambda, y) \widetilde{X}^a(\lambda, a), \\ \widetilde{\sigma}_x^1(\lambda, y) &= A_U(\lambda, y) \widetilde{U}^a(\lambda, a) + A_V(\lambda, y) \widetilde{V}^a(\lambda, a) + \\ &+ A_Y(\lambda, y) \widetilde{Y}^a(\lambda, a) + A_X(\lambda, y) \widetilde{X}^a(\lambda, a), \\ \widetilde{Y}^1(\lambda, y) &= L_{YU}(\lambda, y) \widetilde{U}^a(\lambda, a) + L_{YV}(\lambda, y) \widetilde{V}^a(\lambda, a) + \\ &+ L_{YY}(\lambda, y) \widetilde{Y}^a(\lambda, a) + L_{YX}(\lambda, y) \widetilde{X}^a(\lambda, a), \\ \widetilde{X}^1(\lambda, y) &= L_{XU}(\lambda, y) \widetilde{U}^a(\lambda, a) + L_{XV}(\lambda, y) \widetilde{V}^a(\lambda, a) + \\ &+ L_{XY}(\lambda, y) \widetilde{Y}^a(\lambda, a) + L_{XX}(\lambda, y) \widetilde{X}^a(\lambda, a). \end{aligned} \quad (13)$$

Вводя новые обозначения, их можно представить в форме (10)

$$\begin{aligned} \widetilde{U}^1(\lambda, y) &= L_{UU}^1(\lambda, y) \widetilde{U}_0(\lambda) + L_{UY}^1(\lambda, y) \widetilde{Y}_0(\lambda), \quad \widetilde{V}^1(\lambda, y) = L_{VU}^1(\lambda, y) \widetilde{U}_0(\lambda) + L_{VY}^1(\lambda, y) \widetilde{Y}_0(\lambda), \\ \widetilde{\sigma}_x^1(\lambda, y) &= A_U^1(\lambda, y) \widetilde{U}_0(\lambda) + A_Y^1(\lambda, y) \widetilde{Y}_0(\lambda), \quad \widetilde{Y}^1(\lambda, y) = L_{YU}^1(\lambda, y) \widetilde{U}_0(\lambda) + L_{YY}^1(\lambda, y) \widetilde{Y}_0(\lambda), \\ \widetilde{X}^1(\lambda, y) &= L_{XU}^1(\lambda, y) \widetilde{U}_0(\lambda) + L_{XY}^1(\lambda, y) \widetilde{Y}_0(\lambda), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} L_{UU}^1(\lambda, y) &= K[L_{UU}(\lambda, y) L_{UU}(\lambda, a) + L_{UV}(\lambda, y) L_{VU}(\lambda, a)] + \\ &+ L_{UY}(\lambda, y) L_{YU}(\lambda, a) + L_{UX}(\lambda, y) L_{XU}(\lambda, a), \\ L_{UY}^1(\lambda, y) &= K[L_{UU}(\lambda, y) L_{UY}(\lambda, a) + L_{UV}(\lambda, y) L_{VY}(\lambda, a)] + \\ &+ L_{UY}(\lambda, y) L_{YY}(\lambda, a) + L_{UX}(\lambda, y) L_{XY}(\lambda, a), \\ L_{VU}^1(\lambda, y) &= K[L_{VU}(\lambda, y) L_{UU}(\lambda, a) + L_{VV}(\lambda, y) L_{VU}(\lambda, a)] + \\ &+ L_{VY}(\lambda, y) L_{YU}(\lambda, a) + L_{VX}(\lambda, y) L_{XU}(\lambda, a), \\ A_U^1(\lambda, y) &= K[A_U(\lambda, y) L_{UU}(\lambda, a) + A_V(\lambda, y) L_{VU}(\lambda, a)] + \\ &+ A_Y(\lambda, y) L_{YU}(\lambda, a) + A_X(\lambda, y) L_{XU}(\lambda, a), \\ A_Y^1(\lambda, y) &= K[A_U(\lambda, y) L_{UY}(\lambda, a) + A_V(\lambda, y) L_{VY}(\lambda, a)] + \\ &+ A_Y(\lambda, y) L_{YY}(\lambda, a) + A_X(\lambda, y) L_{XY}(\lambda, a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{YU}^1(\lambda, y) &= K[L_{YU}(\lambda, y)L_{UU}(\lambda, a) + L_{YV}(\lambda, y)L_{VU}(\lambda, a)] + \\
&\quad + L_{YY}(\lambda, y)L_{YU}(\lambda, a) + L_{YX}(\lambda, y)L_{XU}(\lambda, a), \\
L_{YV}^1(\lambda, y) &= K[L_{YU}(\lambda, y)L_{UV}(\lambda, a) + L_{YV}(\lambda, y)L_{VV}(\lambda, a)] + \\
&\quad + L_{YY}(\lambda, y)L_{YV}(\lambda, a) + L_{YX}(\lambda, y)L_{XV}(\lambda, a), \\
L_{XU}^1(\lambda, y) &= K[L_{XU}(\lambda, y)L_{UU}(\lambda, a) + L_{XV}(\lambda, y)L_{VU}(\lambda, a)] + \\
&\quad + L_{XY}(\lambda, y)L_{YU}(\lambda, a) + L_{XX}(\lambda, y)L_{XU}(\lambda, a), \\
L_{XV}^1(\lambda, y) &= K[L_{XU}(\lambda, y)L_{UV}(\lambda, a) + L_{XV}(\lambda, y)L_{VV}(\lambda, a)] + \\
&\quad + L_{XY}(\lambda, y)L_{YV}(\lambda, a) + L_{XX}(\lambda, y)L_{XV}(\lambda, a).
\end{aligned}$$

Выражениями (10), (12) дается полное решение задачи в пространстве преобразований Фурье. Применяя к ним обратное преобразование Фурье [4], найдем искомые выражения для напряжений и перемещений во внутренней и внешней полосе соответственно:

$$\begin{aligned}
U^a(x, y) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \widetilde{U}^a(\lambda, y) \sin(\lambda x) d\lambda, \quad V^a(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \widetilde{V}^a(\lambda, y) \cos(\lambda x) d\lambda, \\
\sigma_x^a(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \widetilde{\sigma}_x^a(\lambda, y) \cos(\lambda x) d\lambda, \quad \sigma_y^a(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \widetilde{\sigma}_y^a(\lambda, y) \cos(\lambda x) d\lambda, \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\tau_{xy}^a(x, y) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \widetilde{\tau}_{xy}^a(\lambda, y) \sin(\lambda x) d\lambda,$$

$$\begin{aligned}
U^1(x, y) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \widetilde{U}^1(\lambda, y) \sin(\lambda x) d\lambda, \quad V^1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \widetilde{V}^1(\lambda, y) \cos(\lambda x) d\lambda, \\
\sigma_x^1(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \widetilde{\sigma}_x^1(\lambda, y) \cos(\lambda x) d\lambda, \quad \sigma_y^1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \widetilde{\sigma}_y^1(\lambda, y) \cos(\lambda x) d\lambda, \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\tau_{xy}^1(x, y) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \widetilde{\tau}_{xy}^1(\lambda, y) \sin(\lambda x) d\lambda.$$

На рис. 2 показаны графики распределения поперечных перемещений  $V^a(x, a)$  (сплошная кривая) и  $V^1(x, 0)/K$  (пунктир) на линии склеивания полос. Считалось, что  $a = 0.6$ ,  $d = 0.2$ ,  $\nu = 1/3$ ,  $K = 2$ . Можно видеть, что кривые практически неразличимы.

Значения продольных нормальных напряжений для внешней и для внутренней полос в месте стыка сильно отличаются, даже при  $K = 2$  (рис. 3), и эта разница растет с ростом  $K$ , поскольку внешняя полоса воспринимает все большую долю нагрузки.

На рис. 4 показаны (совпадающие для внутренней и внешней полос) распределения поперечных нормальных и касательных напряжений на линии склеивания.

На рис. 5, 6 показаны распределения поперечных перемещений

$$V(x, y) = \begin{cases} V^a(x, y), & |y| < a; \\ V^1(x, y), & a < |y| \leq 1 \end{cases}$$

и нормальных продольных напряжений поперек полосы при  $0 \leq y \leq 1$

$$\sigma_x(x, y) = \begin{cases} \sigma_x^a(x, y), & |y| < a; \\ \sigma_x^1(x, y), & a < |y| \leq 1 \end{cases}$$

в сечениях  $x = 0$  (сплошные кривые) и  $x = 0.3$  (пунктир).

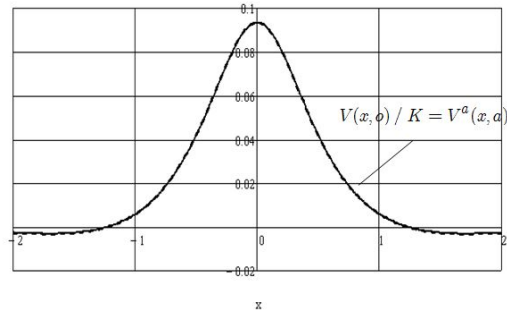


Рис. 2. Распределения поперечных перемещений на стыке полос

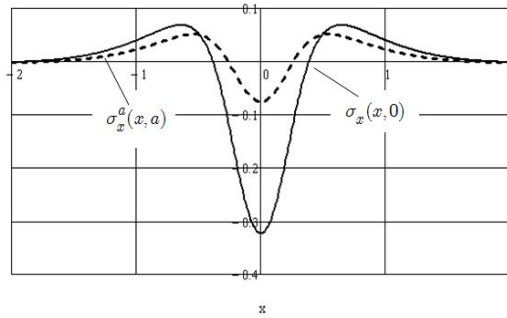


Рис. 3. Распределения продольных нормальных напряжений на стыке

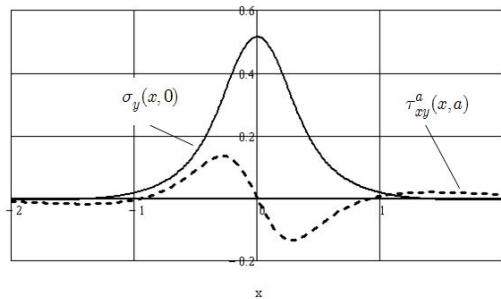


Рис. 4. Распределения поперечных нормальных и касательных напряжений на стыке

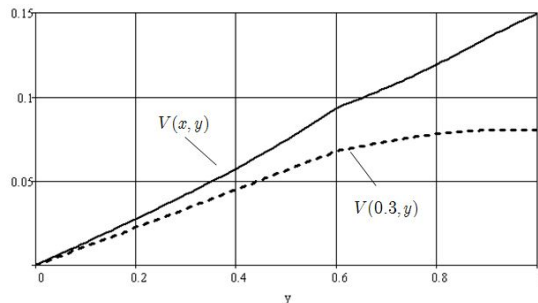


Рис. 5. Распределения поперечных перемещений  $V(x, y)$  в сечениях  $x = 0$  и  $x = 0.3$

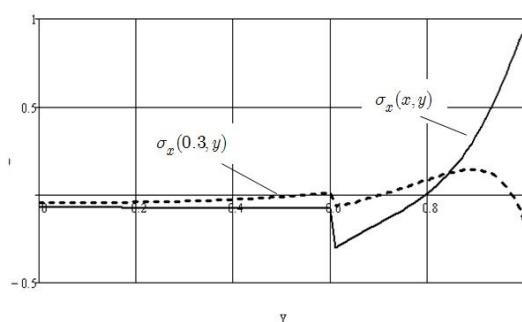


Рис. 6. Распределения напряжений  $\sigma_x(x, y)$  в сечениях  $x = 0$  и  $x = 0.3$

**Выводы.** Основываясь на полученных результатах, можно достаточно просто рассмотреть задачи с межслойными разрывами, имеющими важные инженерные приложения.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Кержаев А. П. Метод начальных функций и интегральное преобразование Фурье в краевой задаче теории упругости для бесконечной полосы (I) // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015. Т. 21 (1). С. 47–64.

[2] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Кержаев А. П. Метод начальных функций и интегральное преобразование Фурье в краевой задаче теории упругости для бесконечной полосы (II) // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015. Т. 21 (2). С. 237–250.

[3] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М.: Стройиздат, 1975. 224 с.

[4] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.

I. V. Menshova<sup>1</sup>, A. P. Kerzhaev<sup>1</sup>, A. V. Nikitin<sup>2</sup>

**METHOD OF INITIAL FUNCTIONS AND THE FOURIER TRANSFORM  
IN THE PROBLEM FOR HETEROGENEOUS STRIP**

<sup>1</sup>*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*I. Yakovlev Chuvash state pedagogical University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** In articles [1], [2] for the various examples the effectiveness of applying the method of initial functions [3] recorded in the space of Fourier transforms to solve boundary value problems of the theory of elasticity in an infinite strip was demonstrated. Thanks to the representability of operators of infinite differentiation of the method of initial functions in minimized form, the solution of the boundary value problem for strip is very simple written in the form of improper integrals of compact expressions which is the inverse Fourier transforms of meromorphic functions. The numerators and denominators of these functions are linear combinations of compositions of operators. As a rule, the integrals converge well, and their numerical implementation, for example, by means of MATHCAD is not difficult. The solution can also be represented in the form of series in the functions of Faddeev – Papkovich (eigenfunctions of the considered boundary value problem) using the theorem of residues.

In this work, the same approach is applied to the solution of the problem for an infinite strip, glued together from strips with different modulus of elasticity. Fundamental difficulties in solving this task does not exist. However, even in the case of two strips with different modulus of elasticity, the intermediate calculations appear to be very cumbersome, and for a larger number of strips is practically not feasible. The fact that operators of the method of initial functions are represented in closed form, enables the use of symbolic mathematics of MATHCAD, not particularly worrying about the number of bonded strips and without worrying about intermediate transformations. Regardless of the number of plies, type of an entire function, standing in the denominator meromorphic function included under the sign of the integral in inverse Fourier transformation, will always be higher the type of an entire function in the numerator. Therefore, the integrals converge. They can diverge only at zero. In this case, the singularity at zero is necessary to select, as it was shown in articles [1], [2].

**Keywords:** heterogeneous composite strip, the method of initial functions, integral transform of Fourier.

---

*Menshova Irina Vladimirovna*

e-mail: menshovairina@yandex.ru, Candidate of Phys. & Math., Senior Researcher, Laboratory of Geodynamics, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

*Kerzhaev Alexandr Petrovich*

e-mail: alex\_kerg@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Senior Researcher, Laboratory of Geodynamics, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

*Nikitin Andrey Vital'evich*

e-mail: Ligalas5@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., lecturer of Informatics and Computer Engineering Department, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.



**REFERENCES**

[1] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P. Method of initial functions and the integral Fourier transform in the boundary value problem of elasticity theory for an infinite strip (I) // Mechanics of composite materials and structures. 2015. Vol. 21(1). P. 47–64. (in Russian).

[2] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P. Method of initial functions and the integral Fourier transform in the boundary value problem of elasticity theory for an infinite strip (II) // Mechanics of composite materials and structures. 2015. Vol. 21 (2). P. 237–250. (in Russian).

[3] Vlasov V. V. Method of initial functions in problems of theory of elasticity and structural mechanics. M.: Stroiizdat, 1975. 224 p. (in Russian).

[4] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of theory of functions and functional analysis. M.: Nauka, 1976. 542 p. (in Russian).

А. А. Алексеев, Е. Г. Алексеева, В. Н. Ведерников, В. И. Гультияев

## К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ МЕТОДОМ МОРА И ВВЕДЕНИИ УТОЧНЯЮЩИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ ПЕРЕМНОЖЕНИИ ЭПЮР

*Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия*

**Аннотация.** Приводится критический анализ результатов, получаемых при вычислении интегралов Мора по способу Верещагина с использованием «метода уточненных коэффициентов», предложенного в [1]. Показано, что данный метод является ошибочным и не рекомендуется к использованию в инженерной практике.

**Ключевые слова:** сопротивление материалов, метод Мора, графоаналитический способ Верещагина, перемножение эпюр, перемещения.

УДК: 539.384.2

Вычисление интегралов в формуле Мора графоаналитическим способом Верещагина является, пожалуй, самым удобным способом определения перемещений точек стержневых систем, состоящих из прямолинейных стержней постоянной жесткости, в пределах силовых участков. Этот способ часто называют способом перемножения эпюр, так как в нем площади одной из эпюр умножаются на ординаты другой под центрами тяжести первой. Та эпюра, с которой берется ордината, в пределах силового участка должна быть линейной и не иметь излома, что выполняется для эпюр от единичных факторов. В большинстве случаев при определении перемещений в балках и плоских рамах учитывают и определяют только перемещения, вызванные изгибающим моментом.

---

© Алексеев А. А., Алексеева Е. Г., Ведерников В. Н., Гультияев В. И., 2016

*Алексеев Андрей Алексеевич*

**e-mail:** alexeew@bk.ru, кандидат технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

*Алексеева Елена Геннадьевна*

**e-mail:** super\_aeg@bk.ru, кандидат технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

*Ведерников Владимир Николаевич*

**e-mail:** kafsm@yandex.ru, кандидат технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

*Гультияев Вадим Иванович*

**e-mail:** vig0@mail.ru, доктор технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 10.07.2016

Сам метод и рекомендации по его применению приводятся в различных учебниках и справочниках по сопротивлению материалов, например в [2], [3], однако до сих пор появляются работы [1], предлагающие его «уточнение». Перед тем как перейти к анализу этого «уточнения», также хочется заметить, что авторы в [1] метод Мора и способ Верещагина называют «методом сил». Это, мягко говоря, странно, так как метод сил является одним из методов получения дополнительных уравнений для раскрытия статической неопределимости стержневых систем и не используется для определения перемещений. В методе сил способ перемножения эпюр используется для определения коэффициентов канонических уравнений, он также позволяет находить перемещения в системах, в которых уже раскрыта статическая неопределимость и построена эпюра изгибающих моментов. Поэтому такое отождествление метода сил и способа перемножения эпюр нам кажется некорректным.

Далее в [1] говорится, что при определении «линейных и угловых перемещений методом сил возникают некоторые трудности в виде ошибок расчетов, превышающих 5%» и это иллюстрируется при определении прогиба (вертикального перемещения) в балке постоянной изгибной жесткости ( $EI_x = \text{const}$ ) с тремя силовыми участками. Для определения прогиба используются два метода: метод начальных параметров и метод Мора по способу Верещагина. Разница в полученных результатах составила 126%, при этом прогиб методом начальных параметров был определен верно, а по способу Верещагина – ошибочно, и полученное его значение было завышенным. И тут дело вовсе не в арифметических ошибках, а в непонимании того, что при использовании способа Верещагина сложные эпюры нужно разбивать или расслаивать на элементарные фигуры, для которых известны величина площади и положение центра тяжести.

В работе [1] рассматриваются фигуры, ограниченные квадратичной зависимостью (рис. 1).

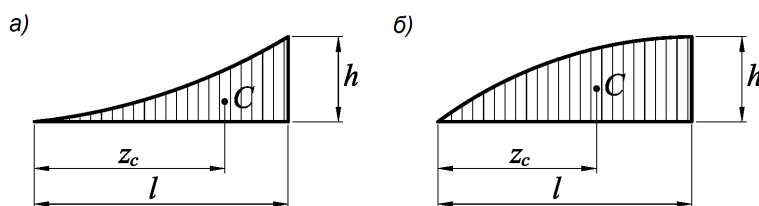


Рис. 1

Табличные значения [2], [3] для квадратичной параболы (рис. 1а)

$$A = \frac{1}{3}hl, \quad z_c = \frac{3}{4}hl, \quad (1)$$

а для половины квадратичной параболы (рис. 1б)

$$A = \frac{2}{3}hl, \quad z_c = \frac{5}{8}hl. \quad (2)$$

Авторы в [1] ошибочно используют эти значения площадей и координат центров тяжести для элементарных квадратичных парабол, получаемых от действия только распределенной нагрузки, применительно к сложным эпюрам, получаемым при

совместном действии распределенной нагрузки и сосредоточенных сил или моментов. Такой подход, несомненно, приведет к ошибочным результатам.

Для примера рассмотрим консоль (рис. 2а) длиной  $a$  постоянной изгибной жесткости  $EI_x = \text{const}$  под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q$  и сосредоточенной силы  $F = kqa$ , где  $k \geq 0$ . Изгибающий момент в поперечных сечениях

$$M_x = \frac{1}{2}qz^2 + kqaz, \quad (3)$$

тогда площадь эюры  $M_x$  (рис. 2б) будет равна

$$A = \int_A dA = \int_0^a M_x dz = \int_0^a \left( \frac{1}{2}qz^2 + kqaz \right) dz = \frac{qa^3}{6}(3k + 1). \quad (4)$$

Определив статический момент площади сечения

$$S_y = \int_0^a z M_x dz = \int_0^a \left( \frac{1}{2}qz^3 + kqaz^2 \right) dz = \frac{qa^4}{24}(8k + 3),$$

найдем координату центра тяжести эюры

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{a(8k + 3)}{4(3k + 1)}. \quad (5)$$

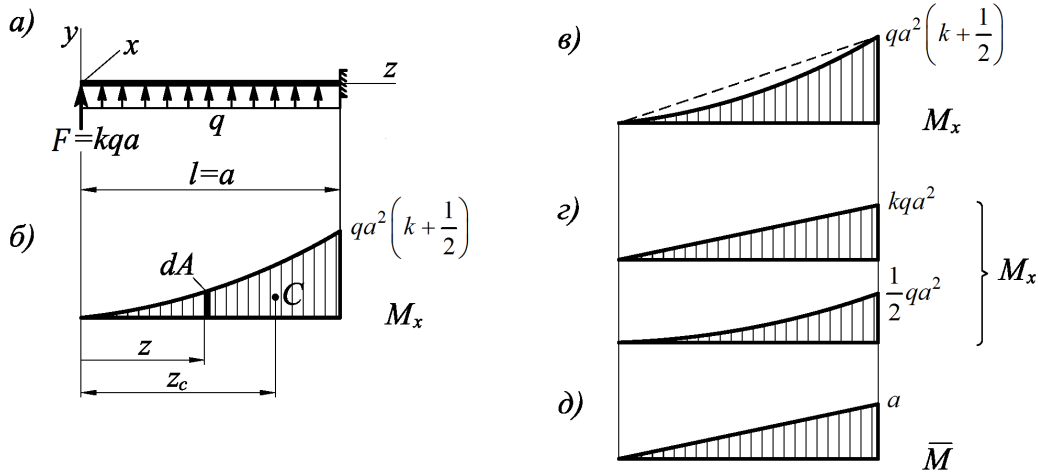


Рис. 2

Как видно, площадь по (4) и положение центра тяжести по (5) зависят от коэффициента  $k$ . При  $k = 0$  с учетом  $l = a$  и максимальной ординаты на эюре  $h = \frac{qa^2}{2}$  имеем

$$A = \frac{1}{6}qa^3 = \frac{1}{3}hl, \quad z_c = \frac{3}{4}l,$$

что совпадает с табличными значениями (1). При  $k = 1$  с учетом значения ординаты  $h = \frac{3}{2}qa^2$  получаем

$$A = \frac{2}{3}qa^3 = \frac{4}{9}hl, \quad z_c = \frac{11}{16}l,$$

что не совпадает с табличными значениями (1), как и при любом другом значении  $k > 0$ .

Для перемножения эпюры  $M_x$  можно разбить на простые составные части (элементарные фигуры), как показано на рис. 2в, либо расслоить, т. е. вместо суммарной эпюры построить эпюры от каждого силового фактора по отдельности (рис. 2з). Рассмотрим перемножение эпюры  $M_x$  на единичную  $\bar{M}$  (рис. 2д), построенную для определения прогиба свободного торца консоли. В первом варианте перемножения, разбив эпюру на треугольник и квадратичную параболу – «горбушку», с табличным значением площади  $\frac{2}{3}hl = \frac{qa^3}{12}$ , получим

$$v = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{1}{2} \cdot qa^2 \left( k + \frac{1}{2} \right) \cdot a \cdot \frac{2}{3}a - \frac{qa^3}{12} \cdot \frac{1}{2}a \right] = \frac{qa^4}{24EI_x} (8k + 3).$$

Для второго варианта перемножения, пользуясь табличным значением для треугольной квадратичной параболы (1), получаем аналогичный результат

$$v = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{1}{2} \cdot kqa^2 \cdot a \cdot \frac{2}{3}a + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}qa^2 \cdot a \cdot \frac{3}{4}a \right] = \frac{qa^4}{24EI_x} (8k + 3).$$

При ошибочном перемножении эпюр, отождествляя площади элементарных и сложных фигур, как это сделано в [1], получим

$$v_{\text{ош}} = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{3} \cdot qa^2 \left( k + \frac{1}{2} \right) \cdot a \cdot \frac{3}{4}a = \frac{qa^4}{4EI_x} \left( k + \frac{1}{2} \right).$$

В дальнейшем такое перемножение будем рассматривать как приближенное решение. Абсолютное отношение результатов

$$\frac{v}{v_{\text{ош}}} = \frac{8k + 3}{6k + 3}. \quad (6)$$

При  $k = 0$  имеем  $v = v_{\text{ош}} = \frac{qa^4}{8EI_x}$ , то есть результаты совпадают и отношение (6) равно 1; при  $k > 0$  отношение (6) увеличивается, таким образом, приближенное решение в данном примере даст завышенные значения перемещений по сравнению с точным. Относительная погрешность

$$\Delta = \left| \frac{v - v_{\text{ош}}}{v} \right| = \frac{1}{4} - \frac{3}{4(8k + 3)}$$

и при  $k \rightarrow \infty$  она составит 25 %.

Для уточнения приближенного решения при перемножении эпюр от квадратичных функций в [1] вводится некоторый поправочный коэффициент на основе эвристического выражения

$$K = \frac{4}{6} \frac{M_{\text{mid}}}{M_{\text{max}}} + \frac{1}{6}, \quad (7)$$

где  $M_{mid}$  — ордината  $M_x$  в середине эпюры при  $z = l/2$ ;  $M_{max}$  — максимальная ордината на эпюре  $M_x$ . В нашем примере при  $z = a/2$  из (3) имеем

$$M_{mid} = \frac{1}{8}qa^2 + \frac{1}{2}kqa^2 = \frac{qa^2}{8}(4k + 1),$$

тогда

$$\frac{M_{mid}}{M_{max}} = \frac{k + 1/4}{2k + 1}$$

и поправочный коэффициент из (7)

$$K = \frac{4}{6} \left( \frac{k + 1/4}{2k + 1} \right) + \frac{1}{6} = \frac{k + 1/3}{2k + 1}.$$

Уточненное значение прогиба составит

$$v_{yt} = Kv_{ош} = \frac{qa^4}{24EI_x}(3k + 1).$$

Относительная погрешность по сравнению с точным решением будет равна

$$\Delta = \left| \frac{v - v_{yt}}{v} \right| = \frac{1}{64k + 24} + \frac{5}{8}.$$

Получается удивительный результат, что при  $k = 0$  правильное значение перемещения умножается на коэффициент  $K = 1/3$ , в результате уточненное значение перемещения становится еще меньше  $v_{yt} = \frac{qa^4}{24EI_x}$  и отличается от точного уже на 66,6 %. При  $k \rightarrow \infty$ ,  $K = 0,5$  и  $\Delta = 62,5$  % графики зависимости прогиба  $v$  и относительных погрешностей  $\Delta$  от коэффициента  $k$  при малых его значениях представлены на рис. 3.

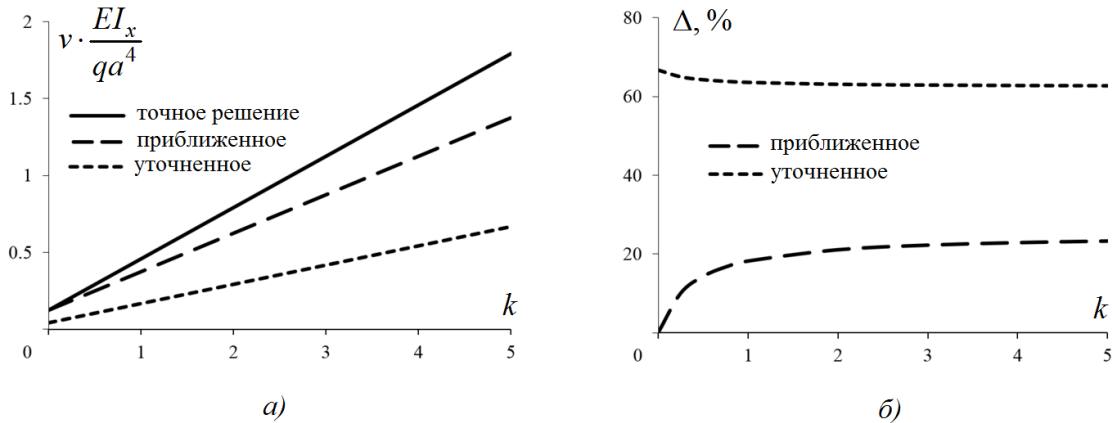


Рис. 3

Теперь рассмотрим однопролетную балку (рис. 4а) постоянной изгибной жесткости  $EI_x = \text{const}$  длиной  $a$  под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q$  и сосредоточенной силы  $F = kqa$  в центре.

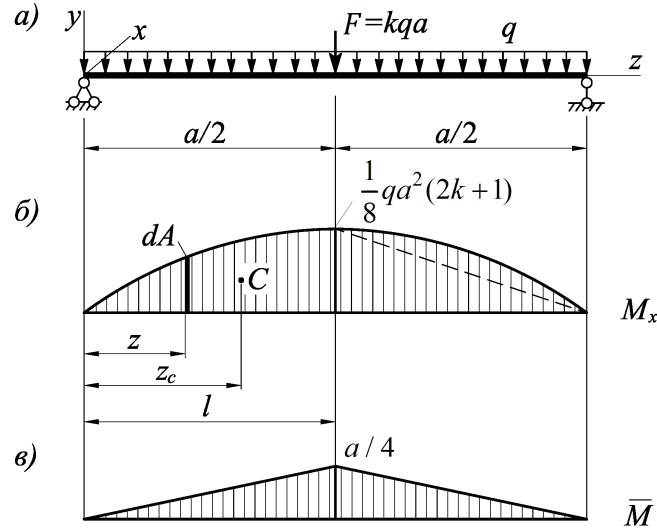


Рис. 4

Изгибающий момент в поперечных сечениях

$$M_x = \frac{1}{2}qa(k+1)z - \frac{1}{2}qz^2, \quad (8)$$

при  $z = a/2$  имеем  $M_{\max} = \frac{1}{8}qa^2(2k+1)$ .

Площадь половины параболы длиной  $l = a/2$  составит (рис. 4 б)

$$A = \int_A dA = \int_0^{a/2} M_x dz = \int_0^{a/2} \left( \frac{1}{2}qa(k+1)z - \frac{1}{2}qz^2 \right) dz = \frac{qa^3}{48}(3k+2). \quad (9)$$

С учетом значения статического момента площади

$$S_y = \int_A z dA = \int_0^{a/2} z M_x dz = \frac{qa^4}{384}(8k+5)$$

координата центра тяжести половины параболы будет равна

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{a(8k+5)}{8(3k+2)}. \quad (10)$$

При  $k = 0$  с учетом  $l = a/2$  и максимальной ординаты на эюре  $h = \frac{qa^2}{8}$  из (9), (10) имеем

$$A = \frac{qa^3}{24} = \frac{2}{3}hl, \quad z_c = \frac{5}{16}a = \frac{5}{8}l,$$

что соответствует табличным значениям (2). Очевидно, что при  $k > 0$  площадь и координата центра тяжести будут иметь другие значения.

Определим прогиб в середине пролета балки, перемножив эшюру  $M_x$  с единичной эшюрой  $\bar{M}$  (рис. 4б). Для этого разобьем эшюру на элементарные фигуры: срезаем «горбушку» и выделяем треугольник. Перемножение ввиду симметрии ведем только для половины балки

$$v = \frac{2}{EI_x} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} qa^2 (2k+1) \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3 \cdot 4} + \frac{q(a/2)^3}{12} \cdot \frac{a}{8} \right] = \frac{qa^4}{384EI_x} (8k+5).$$

Приближенное решение дает результат

$$v_{\text{ош}} = \frac{2}{EI_x} \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} qa^2 (2k+1) \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{5a}{8 \cdot 4} \right) = \frac{5qa^4}{384EI_x} (2k+1).$$

Отношение

$$\frac{v}{v_{\text{ош}}} = \frac{8k+5}{10k+5}, \quad (11)$$

а относительная погрешность составит

$$\left| \frac{v - v_{\text{ош}}}{v} \right| = \frac{2k}{8k+5}.$$

При  $k = 0$  имеем  $v = v_{\text{ош}} = \frac{5qa^4}{384EI_x}$ , что совпадает с известным табличным решением [2]. С ростом  $k$  отношение (10) уменьшается, то есть в данном случае приближенное решение дает завышенное значение прогиба по сравнению с точным. При  $k \rightarrow \infty$  погрешность составляет 25 %.

Уточнение приближенного решения с учетом

$$M_{\text{mid}} = \frac{qa^2}{32} (4k+3), \quad \frac{M_{\text{mid}}}{M_{\text{max}}} = \frac{k+3/4}{2k+1}$$

дает значение поправочного коэффициента (7)

$$K = \frac{4}{6} \cdot \left( \frac{k+3/4}{2k+1} \right) + \frac{1}{6} = \frac{k+2/3}{2k+1},$$

тогда уточненное значение прогиба

$$v_{\text{ур}} = K v_{\text{ош}} = \frac{5qa^4}{384EI_x} \left( k + \frac{2}{3} \right).$$

Относительная погрешность

$$\Delta = \left| \frac{v - v_{\text{ур}}}{v} \right| = \frac{9k+5}{3(8k+5)}.$$

Значение  $k = 0$  дает  $K = 2/3$ , при  $k \rightarrow \infty$  имеем  $K = 0,5$ . В результате коэффициент  $K$  понижает завышенное значение приближенного решения настолько, что оно оказывается меньше точного значения, при этом погрешность, как и в первом примере, только увеличивается. При  $k = 0$  имеем  $\Delta = 33,33$  %, а при  $k \rightarrow \infty$   $\Delta = 37,5$  %. Графики зависимостей  $v - k$  и  $\Delta - k$  представлены на рис. 5.

Как видно из рассмотрения простейших примеров, предложенный в [1] «метод использования уточняющих коэффициентов» при определении перемещений не только не уточняет приближенное решение, а наоборот, увеличивает его погрешность. Хорошее совпадение результатов расчета для рассмотренной расчетной схемы балки [1] с использованием этого метода с точным решением можно трактовать только лишь



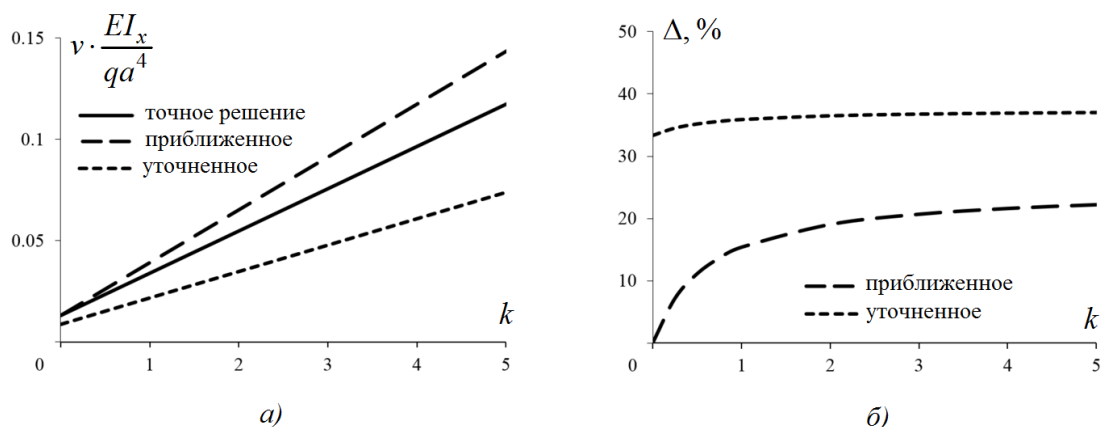


Рис. 5

как удачное стечение обстоятельств, при котором сумма ошибочно вычисленных слагаемых дала близкий к правильному результат. Применение этого метода к другим расчетным схемам даст недостоверные результаты, таким образом, мы не рекомендуем использовать этот метод в инженерной практике.

В завершение статьи приведем правильное решение при определении прогиба торца балки, рассмотренной в [1]. Расчетная схема, грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов представлены на рис. 6.

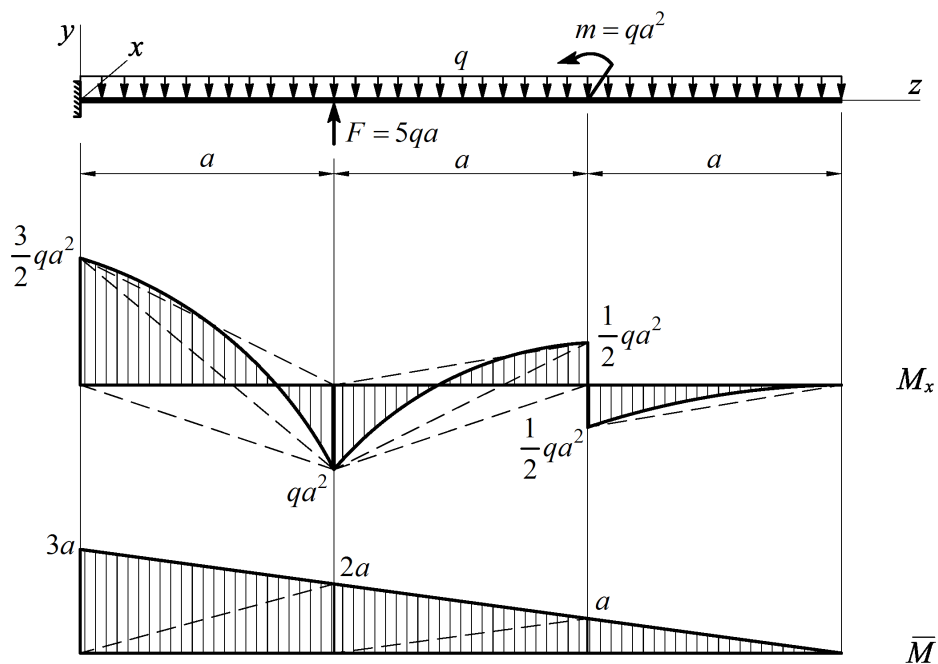


Рис. 6

Тогда

$$v = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} qa^2 \cdot a \cdot \left( \frac{2}{3} 3a + \frac{1}{3} 2a \right) - \frac{1}{2} \cdot qa^2 \cdot a \cdot \left( \frac{2}{3} 2a + \frac{1}{3} 3a \right) + \right. \\ \left. + \frac{qa^3}{12} \cdot 2, 5a - \frac{1}{2} \cdot qa^2 \cdot a \cdot \left( \frac{2}{3} 2a + \frac{1}{3} a \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} qa^2 \cdot a \cdot \left( \frac{1}{3} 2a + \frac{2}{3} a \right) + \right. \\ \left. + \frac{qa^3}{12} \cdot 1, 5a - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} qa^2 \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + \frac{qa^3}{12} \cdot 0, 5a \right] = \frac{13qa^4}{24EI_x},$$

что совпадает с решением, полученным в [1] методом начальных параметров. Поэтому можно констатировать, что умозаключения авторов [1] о том, что при определении перемещений способом перемножения эпюр «необходимо использовать уточненные коэффициенты», является заблуждением.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Михайлов Б. В., Михайлов С. Б. К обоснованию некоторых коэффициентов при расчете элементов конструкций методом сил // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. №. 1(27). С. 150–156.
- [2] Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. 2-е изд., перераб. и доп. Киев: Наукова думка, 1988. 736 с.
- [3] Степин П. А. Сопротивление материалов: учебник. 13-е изд. СПб.: Издательство «Лань», 2014. 320 с.

*A. A. Alekseev, E. G. Alekseeva, V. N. Vedernikov, V. I. Gulyaev*

**TO THE QUESTION ABOUT THE DETERMINATION OF DISPLACEMENTS  
BY MOHR'S METHOD AND INTRODUCTION OF REFINEMENT  
COEFFICIENTS AT MULTIPLICATION OF THE DIAGRAMS**

*Tver State Technical University, Tver, Russia*

**Abstract.** The critical analysis of the results received at calculation of Mohr's integrals by Vereshchagin's grapho-analytical technique with use of the "method of the refinement coefficients" offered in [1] is provided. It is shown that this method is incorrect and is not recommended for use in engineering practice.

**Keywords:** strength of materials, Mohr's Method, Vereshagin grapho-analytical technique, multiplication diagrams, displacements

**REFERENCES**

[1] Mihajlov B. V., Mihajlov S. B. K obosnovaniju nekotoryh koeficientov pri raschete jelementov konstrukcij metodom sil // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2016. №. 1(27). S. 150–156. (in Russian).

[2] Pisarenko G. S., Jakovlev A. P., Matveev V. V.: spravochnik po soprotivleniju materialov. 2-e izd., pererab. i dop. Kiev: Naukova dumka, 1988. 736 s. (in Russian).

[3] Stepin P. A. Soprotivlenie materialov: uchebnik. 13-e izd. SPb.: Izdatel'stvo «Lan'», 2014. 320 s. (in Russian).

---

*Alekseev Andrey Alekseevich*

e-mail: alexew@bk.ru, Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

*Alekseeva Elena Gennadievna*

e-mail: super\_aeg@bk.ru, Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

*Vedernikov Vladimir Nikolaevich*

e-mail: kafsm@yandex.ru, Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

*Gulyaev Vadim Ivanovich*

e-mail: vig0@mail.ru, Doctor of Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

Н. В. Минаева, А. Н. Шевалдин

## ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ УПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

**Аннотация.** Рассмотрен продольно-поперечный изгиб прямоугольной пластины на упругом основании. Получено условие, определяющее границу области непрерывной зависимости решения, описывающего прогиб пластины, от параметров поперечной нагрузки и жесткости постели.

**Ключевые слова:** линейная упругость, прямоугольная пластина на упругом основании, непрерывная зависимость, адекватность линейной модели.

УДК: 539.3

Прямоугольные пластины на упругом основании широко используются в технике и строительстве в качестве конструктивных элементов покрытий автомобильных дорог, мостов, взлетно-посадочных полос [1], [2]. Исследование их прочности и несущей способности требует знания напряженно-деформированного состояния (НДС). Проблема изгиба пластин на упругом основании представляет собой одну из актуальных задач математической теории упругости. Анализ НДС посвящено множество работ, например [3]–[5].

В настоящей работе рассмотрено поведение защемленной по одной паре кромок и шарнирно опертой по другой паре прямоугольной упругой пластины толщиной  $h$ . Она находится под действием поперечной нагрузки интенсивности  $\tilde{r}(x, y)$ , а по краям – под действием продольных распределенных усилий  $\tilde{p}$  и  $\tilde{q}$ . Пластина лежит на упругом основании с коэффициентом жесткости  $\tilde{\lambda}$ .

---

© Минаева Н. В., Шевалдин А. Н., 2016

Минаева Надежда Витальевна

e-mail: minaeva@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Шевалдин Андрей Николаевич, магистрант факультета ПММ, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 11.07.2016

Функция  $w(x, y)$ , описывающая форму изогнутой пластины, является решением следующей краевой задачи (по линейной теории) [6]:

$$\begin{aligned} \nabla^4 w(x, y) + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= r - \lambda w, \\ w(0, y) = w(1, y) = w(x, 0) = w(x, \alpha) &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=\alpha} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $q = \frac{\tilde{q}h}{D}$ ,  $p = \frac{\tilde{p}h}{D}$ ,  $r = \frac{\tilde{r}}{D}$ ,  $\lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{D}$ .

Пусть при  $r(x, y) = r^0(x, y)$  и  $\lambda = \lambda_0$  задача (1) имеет решение

$$w(x, y) = w^0(x, y). \quad (2)$$

Как известно, (2) будет физически осуществимо, если решение  $w$  задачи (1) непрерывно зависит от  $r(x, y)$  и  $\lambda$  при  $r(x, y) = r^0(x, y)$ ,  $\lambda = \lambda_0$ . Для анализа этой непрерывности, согласно [7], получена вспомогательная линеаризованная задача относительно  $\zeta(x, y)$  ( $w = w^0 + \zeta$ )

$$\begin{aligned} \nabla^4 \zeta(x, y) + q \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} &= -\lambda \zeta \\ \zeta(0, y) = \zeta(1, y) = \zeta(x, 0) = \zeta(x, \alpha) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} \Big|_{y=\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение задачи (1) будет непрерывно зависеть от  $r$  и  $\lambda$  при  $r = r^0$ ,  $\lambda = \lambda_0$ , если (3) имеет только тривиальное решение.

Удовлетворяя части граничных условий, ищем решение в виде [6]:

$$\zeta = Y(y) \sin m\pi x. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), для частного случая области значений параметров внешних воздействий ( $p < 2m^2\pi^2$ ,  $\lambda > (\pi m)^2(q - (\pi m)^2)$ ) найдено:

$$\zeta = (C_1 e^{\gamma_1 y} + C_2 e^{\gamma_2 y} + C_3 e^{-\gamma_1 y} + C_4 e^{-\gamma_2 y}) \sin m\pi x, \quad (5)$$

где  $\gamma_1 = \sqrt{-\frac{k_2}{2} + \sqrt{\frac{k_2^2}{4} - k_0}}$ ,  $\gamma_2 = \sqrt{-\frac{k_2}{2} - \sqrt{\frac{k_2^2}{4} - k_0}}$ ,  $k_0 = m^4\pi^4 - qm^2\pi^2 + \lambda$ ,  $k_2 = p - 2m^2\pi^2$ .

Константы  $C_i$  из (5) определяются из системы:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= 0 \\ C_1 e^{\gamma_1 \alpha} + C_2 e^{\gamma_2 \alpha} + C_3 e^{-\gamma_1 \alpha} + C_4 e^{-\gamma_2 \alpha} &= 0 \\ C_1 \gamma_1 + C_2 \gamma_2 - C_3 \gamma_1 - C_4 \gamma_2 &= 0 \\ C_1 \gamma_1 e^{\gamma_1 \alpha} + C_2 \gamma_2 e^{\gamma_2 \alpha} - C_3 \gamma_1 e^{-\gamma_1 \alpha} - C_4 \gamma_2 e^{-\gamma_2 \alpha} &= 0. \end{aligned}$$

В результате было получено условие нетривиальности решения (5) задачи (3):

$$4\gamma_1\gamma_2 - (\gamma_1 + \gamma_2)^2 \cosh((\gamma_2 - \gamma_1)\alpha) + (\gamma_1 - \gamma_2)^2 \cosh((\gamma_2 + \gamma_1)\alpha) = 0. \quad (6)$$

Если внешние усилия такие, что их соответствующие параметры принадлежат кривой (6), то  $w$  не будет непрерывно зависеть от  $r$  и  $\lambda$  при  $r = r^0$ ,  $\lambda = \lambda_0$ . Таким образом, оно определяет границу непрерывной зависимости решения задачи (1) от параметров

поперечной нагрузки и жесткости постели. На рис. 1 представлен качественный вид кривой (6) для различных  $m$  на плоскости параметров сжимающих воздействий.

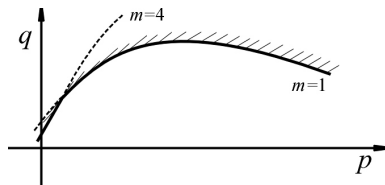


Рис. 1

Соотношение (6) задает также одну из верхних границ адекватности математической модели (1). Если внешние нагрузки  $p$  и  $q$  таковы, что точка, соответствующая им, находится вне области, ограниченной линией (6), то решение  $w$  уже не будет адекватно описывать состояние рассматриваемой пластины.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гусев А. М., Иванов В. А. Устойчивость пластин на упругом основании при комбинированном нагружении // Труды семинара по теории оболочек. 1974. Вып. 5.
- [2] Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984. 679 с.
- [3] Малышев М. В. Прочность грунтов и устойчивость оснований сооружений. М.: Стройиздат, 1994. 228 с.
- [4] Товстик П. Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Известия РАН МТТ. 2005. Вып. 1. С. 147–160.
- [5] Морозов Н. Ф., Товстик П. Е. О формах потери устойчивости пластины на упругом основании // Изв. РАН МТТ. 2010. № 4. С. 30–42.
- [6] Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
- [7] Минаева Н. В. Адекватность математических моделей деформируемых тел. М.: Научная книга, 2006. 235 с.

N. V. Minaeva, A. N. Shevaldin

## THE INVESTIGATION OF STATE OF AN ELASTIC RECTANGULAR PLATE ON AN ELASTIC SUBSTRUCTURE

*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

**Abstract.** Considered longitudinal-transverse bending of a rectangular plate on an elastic substructure. Derived a condition that determines the boundary continuous dependence of solutions describing the deflection of the plate, from the parameters of normal load and stiffness of the substructure.

**Keywords:** the linear elastic, rectangular plate on an elastic substructure, continuous dependence, adequacy of the linear model.

### REFERENCES

- [1] Gusev A. M., Ivanov V. A. Ustojchivost' plastin na uprugom osnovanii pri kombinirovannom nagruzhении // Trudy seminar po teorii obolochek. 1974. Vyp. 5. (in Russian).
- [2] Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. Raschet konstrukcij na uprugom osnovanii. M.: Strojizdat, 1984. 679 s. (in Russian).
- [3] Malyshev M. V. Prochnost' gruntov i ustojchivost' osnovanij sooruzhenij. M.: Strojizdat, 1994. 228 s. (in Russian).
- [4] Tovstik P. E. Lokal'naja ustojchivost' plastin i plogih obolochek na uprugom osnovanii // Izvestija RAN MTT. 2005. Vyp. 1. S. 147–160. (in Russian).
- [5] Morozov N. F., Tovstik P. E. O formah poteri ustojchivosti plastiny na uprugom osnovanii // Izv. RAN MTT. 2010. № 4. S. 30–42. (in Russian).
- [6] Vol'mir A. S. Ustojchivost' uprugih sistem. M.: Fizmatgiz, 1963. 880 s. (in Russian).
- [7] Minaeva N. V. Adekvatnost' matematicheskikh modelej deformiruemyh tel. M.: Nauchnaja kniga, 2006. 235 s. (in Russian).

---

*Minaeva Nadezhda Vitalyevna*

e-mail: alexeew@bk.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

*Shevaldin Andrey Nikolaevich*, Graduate, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Ю. В. Астапов, А. А. Маркин

## КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ЖЕСТКОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

*Тульский государственный университет, г. Тула, Россия*

**Аннотация.** Приведена постановка задачи о конечных деформациях гипоупругих тел с использованием вариационного условия равновесного протекания процесса деформирования. Учитывалось контактное трение в форме закона Амонтона – Кулона. Предложен вариант итерационного алгоритма для учета касательных напряжений в зоне контакта. Приведены результаты численного решения задач об определении напряженно-деформированного состояния цилиндрических тел при взаимодействии с жесткой плоскостью. Результаты решения качественно согласуются с известными данными, приведенными в литературе.

**Ключевые слова:** конечные деформации, плоские задачи, условие равновесности, упругость, обобщенная производная Яуманна, закон Амонтона – Кулона.

УДК: 539.3

**Введение.** Механическое взаимодействие упругих тел имеет место в различных областях практической деятельности, начиная от технологических процессов и прецизионного описания работы узлов механизмов до приложений в сфере геологии и биотехнологии. Как правило, в подобных задачах основной проблемой является учет граничных условий смешанного типа на неизвестной поверхности контакта. В большинстве макромоделей ограничения, накладываемые на величины допустимых нормальных и касательных нагрузок, принимают в виде некоторых эмпирических законов. Вариации этих зависимостей могут учитывать адгезионные свойства поверхностей, взаимный износ, тепловыделение на границе раздела и различные фрикционные эффекты [3], [4], [17]. Одним из наиболее широко используемых при контакте однородных вблизи границы сред является закон Амонтона – Кулона [17], [18].

---

© Астапов Ю. В., Маркин А. А., 2016

*Астапов Юрий Владимирович*

e-mail: ast3x3@gmail.com, магистрант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

*Маркин Алексей Александрович*

e-mail: markin-nikram@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-01875\_а) и Минобрнауки России (госзадание № 467).

Поступила 15.06.2016



Применение аналитических и численно-аналитических методов решения контактных задач [3], [9], как правило, ограничено рассмотрением канонических форм расчетных областей и сложностями в применении аппарата интегральных уравнений, к которым приводит общее решение простейшей контактной задачи с использованием соотношений Папковича – Нейбера. Исчерпывающий обзор по аналитическим методам приведен в работе [2].

Теория Герца применительно к задаче о контакте без трения широко используется для отладки вычислительных алгоритмов. Во многих работах [12], [15] обязательным критерием адекватности модели является ее асимптотическая сходимость к решению Герца. В работе [20] для задачи о взаимодействии упругого шара и жесткой плоскости определяется предел, когда учет трения является обоснованным с точки зрения расхождения результатов. Экспериментальные подтверждения достоверности предположений о характере контактного взаимодействия могут быть получены путем измерения неких макрохарактеристик деформированного состояния для простой задачи. Более современная техника исследований заключается в непосредственном фиксировании всех характеристик напряженно-деформированного состояния с использованием методов спекл-интерферометрии [14].

Для решения реальных прикладных задач обычно используется сеточная дискретизация расчетной области в рамках методов конечных элементов, граничных элементов и конечных разностей. Распространены подходы, основанные на концепции «передающей среды» [11], [15] и использующие особый тип граничных элементов. Это позволяет избежать некоторых трудностей, связанных с определением пар взаимодействующих ячеек сеток. В обзорах классических работ [19] показано, что общая вариационная постановка контактной задачи, относящаяся к классу задач с ограничениями в виде неравенств, может быть представлена в форме квазивариационных неравенств. В работах А. С. Кравчука [5] приведены необходимые выкладки, обосновывающие численное решение упругих и упругопластических задач в квазивариационной постановке с использованием модификации итерационного алгоритма Удзавы для поиска седловой точки соответствующего функционала. Другой подход к учету кинематических ограничений заключается в использовании аппарата методов математического программирования [19]. Наиболее распространенными методами являются метод штрафных функций, основной идеей которого является введение дополнительной переменной — зазора между контактирующими телами, и различные вариации метода множителей Лагранжа, приводящие к проблеме минимизации функционала. Ни один из приведенных методов не лишен недостатков. Метод штрафных функций [15] требует определения подгоночных параметров, которые могут повлиять на устойчивость численного счета, в то время как метод множителей Лагранжа с добавками [13], [17] может приводить к плохо обусловленным системам разрешающих уравнений. В статье [8] задача теории пластичности решалась с использованием альтернирующего метода Шварца, основанного на раздельном и поочередном рассмотрении краевой задачи для каждого из контактирующих тел. Широкий обзор по подходам к численному решению контактных задач приведен в [1].

Во многих случаях вышеперечисленные подходы комбинируются и подвергаются изменениям, обусловленным спецификой конкретных постановок. Необходимость решения задач, описываемых моделями, не представленными в коммерческом ПО,

требует включения в существующие постановки моделей контактного взаимодействия [16]. В связи с этим актуальным является вопрос о выборе метода учета контактных граничных условий в конкретной краевой задаче. В данной работе он решился в пользу итерационных алгоритмов, обеспечивающих прозрачность вычислений, адекватность затрат ресурсов и требуемый уровень достоверности.

**Постановка задачи.** Решение задач конечного упругого деформирования анизотропных тел является актуальным в связи с распространенностью в современном производстве материалов по типу эластомеров. Для гипотупругих тел определяющие соотношения могут быть записаны в следующем виде:

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{W}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{C}$  — тензор упругих постоянных четвертого ранга,  $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla)$  — тензор деформации скоростей,  $\mathbf{S}^*$  — скорость изменения тензора истинных напряжений Коши,  $\nabla = \mathbf{r}_i \frac{\partial}{\partial x^i} = \mathbf{R}^i \frac{\partial}{\partial X^i}$ ,  $i = 1..3$  — оператор Гамильтона в текущей конфигурации.

В процессах конечного деформирования главные оси анизотропии  $\mathbf{a}'_i$ ,  $i = 1..3$  изменяют свою ориентацию относительно неподвижного базиса. Принято считать [7], [10], что их вращение описывается ортогональным тензором  $\mathbf{R}$ , входящим в полярное разложение аффинора деформаций:  $\mathbf{a}'_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{a}_i$ , где  $\mathbf{a}_i$ ,  $i = 1..3$  — начальная ориентация главных осей анизотропии. Определяющие соотношения удобно записывать в базисе главных осей таким образом, чтобы компоненты производной тензора напряжений относились к полярному базису  $\mathbf{n}_i$ ,  $i = 1..3$ , изменяющемуся по такому же закону, что и  $\mathbf{a}'_i$ ,  $i = 1..3$ . Исходя из вышесказанного, в качестве объективной производной тензора напряжений выбрана обобщенная коротационная производная Яуманна:

$$\mathbf{S}^\Delta = \dot{\mathbf{S}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\Omega}$  — антисимметричный тензор угловой скорости вращения полярного базиса [6], [7], определяемый выражением

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}. \quad (3)$$

В работе [7] приведено вариационное соотношение равновесного протекания процессов конечного деформирования в текущей конфигурации. Для обеспечения квазистационарности движения сплошной среды необходимо потребовать равенство нулю главного вектора сил, действующих на материальный объем, а также нулевой скорости изменения этого вектора. Исходя из вариационного принципа Журдена, условия равновесности принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{v} dV = 0, \\ \left( \int_V \frac{d}{dt} (\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{v} + \dot{\theta} (\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{v} \right) dV = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

После преобразований [7] условие равновесности (4) примет вид:

$$\begin{aligned} & \int_V \left( \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{S} \dot{\theta} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \cdot \delta (\mathbf{v} \nabla) dV = \\ & = \int_\Sigma \left( \dot{\mathbf{P}}^{(n)} + \mathbf{P}^{(n)} \left( \dot{\theta} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \right) \right) \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma + \int_V \left( (\rho \mathbf{F})^\bullet + \dot{\theta} \rho \mathbf{F} \right) \cdot \delta \mathbf{v} dV_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathbf{P}^{(n)}$  и  $\mathbf{F}$  — внешние поля соответственно поверхностных и массовых сил,  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{v}$  — поле скоростей точек среды,  $\dot{\theta} = I_1(\mathbf{W})$  — скорость изменения элементарного объема.

Соотношение (5) после подстановки в него (1) и (2) с учетом отсутствия внешних массовых воздействий принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \int_V \left( \mathbf{C} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{\Omega} + \mathbf{S} \dot{\theta} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \delta(\mathbf{v} \nabla) dV = \\ = \int_{\Sigma} \left( \dot{\mathbf{P}}^{(n)} + \mathbf{P}^{(n)} \left( \dot{\theta} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \right) \right) \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (6) дополняется эволюционными соотношениями, определяющими связь поля перемещений и аффинора деформаций с полем скоростей:

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \\ \dot{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi} \cdot \nabla \mathbf{v}. \end{cases} \quad (7)$$

Начальные условия для системы (6), (8) имеют вид:

$$\mathbf{u}|_{t=t_0} = 0, \quad \mathbf{\Phi}|_{t=t_0} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{S}|_{t=t_0} = \mathbf{S}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}|_{t=t_0} = \mathbf{X}. \quad (8)$$

Граничные условия статического типа предусматривают задание в каждой точке поверхности  $\Sigma_P$  закона изменения внешних нагрузок как функции времени и эйлеровых координат

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Sigma_P \quad \forall t > t_0. \quad (9)$$

При задании граничных условий кинематического типа в каждой точке поверхности  $\Sigma_u$  определяется закон изменения перемещений материальных точек

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Sigma_u \quad \forall t > t_0. \quad (10)$$

Для решения начально-краевой задачи (2), (5), (6)—(10) использовались метод конечных элементов и метод пошагового нагружения. Для дискретизации поля скоростей точек среды был построен плоский треугольный симплекс-элемент с шестью степенями свободы. Процесс нагружения разбивался по времени на конечные отрезки, на каждом из которых из решения системы линейных алгебраических уравнений определяются узловые величины  $\mathbf{v}$  с учетом граничных условий (9) и (10). Затем производилось интегрирование системы (6), (8) и определялись величины перемещений точек среды  $\mathbf{u}$ , а также меры деформаций и напряжений.

Опыт решения тестовых задач показал, что на качество получаемого решения в наибольшей мере влияет точность определения величины компонент тензора спина  $\mathbf{\Omega}$  для конкретного состояния системы. При построении матрицы жесткости конечного элемента и при интегрировании поля напряжений использовалось определение (3), дающее наиболее достоверный с вычислительной точки зрения результат.

**Алгоритм учета контактного трения.** В рамках данной работы рассмотрен частный случай взаимодействия упругого тела с плоскостью  $x_2 = 0$ . Обобщение на случай штампа произвольной формы может быть получено путем поворота локальной системы координат каждого из граничных конечных элементов. Использование линейных функций форм в виде  $v_i(x_1, x_2) = N_{ij}(x_1, x_2)V_j$ ,  $i = 1..3$ ,  $j = [I III III]$ ,

$N_{ij}(x_1, x_2) \in L^2$  позволяет естественным образом принять равенства напряжений  $S_{12}$ ,  $S_{22}$  в граничных элементах соответствующим контактным усилиям  $\sigma_\tau$  и  $\sigma_n$ :

$$\begin{cases} \sigma_\tau = S_{12} \\ \sigma_n = S_{22} \end{cases} \Big| = const, \quad t = [t_i, t_{i+1}] \quad \forall i \in 1..N. \quad (11)$$

Закон Амонтона – Кулона в принятых обозначениях имеет следующий вид:

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| < \mu |\sigma_n| & \Rightarrow |\mathbf{v}_\tau| = 0, \\ |\sigma_\tau| = \mu |\sigma_n| & \Rightarrow \mathbf{v}_\tau |\sigma_\tau| + \sigma_\tau |\mathbf{v}_\tau| = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\mathbf{v}_\tau$  – скорость точек тела в направлении общей касательной с жестким штампом.

Для обеспечения выполнения условий закона (12) используется алгоритм, который в пределах каждого шага нагружения  $[t^k, t^{k+1}]$  итерационно корректирует абсолютные величины и скорости контактных напряжений. В качестве нулевого приближения  $v_{(i)}^{(0)}$ ,  $S_{12(i)}^{(0)}$ ,  $S_{22(i)}^{(0)}$  берется решение задачи теории упругости с принятым условием сцепления  $\mathbf{v} = 0|_{x \in \Sigma_c}$  контактирующих точек поверхностей в зоне контакта. Процедура интегрирования напряжений  $\mathbf{S}_{(i+1)}^{(k)} = \mathbf{S}_{(i)}^{(k)} + \dot{\mathbf{S}}_{(i)}^{(k)} \Delta t$ , где  $k$  – номер итерации,  $i$  – номер шага нагружения, сопровождается проверкой значений напряжений в контактных элементах по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \left| S_{12(i)}^{(k+1)} \right| \geq \mu \left| S_{22(i)}^{(k+1)} \right| & \Rightarrow \begin{cases} \dot{\sigma}_{\tau(i)}^{(k+1)} = \frac{\alpha |S_{12(i)}^{(k+1)} - S_{12(i)}^{(k)}| + (1-\alpha)\mu |S_{22(i)}^{(k+1)} - S_{22(i)}^{(k)}|}{\Delta t} \left( -\frac{S_{12(i)}^{(k+1)}}{|S_{12(i)}^{(k+1)}|} \right), \\ \sigma_{\tau(i)}^{(k+1)} = -\frac{S_{12(i)}^{(k+1)}}{|S_{12(i)}^{(k+1)}|} \mu \left| S_{22(i)}^{(k+1)} \right|, \end{cases} \\ \left| S_{12(i)}^{(k+1)} \right| < \mu \left| S_{22(i)}^{(k+1)} \right| & \Rightarrow v_\tau^{(I)} = v_\tau^{(III)} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В зависимости от знака неравенства в каждом граничном элементе на следующей итерации могут приниматься кинематические условия сцепления или статические условия. Параметр  $\alpha \in [0, 1]$  влияет на скорость сходимости численного решения и подбирается опытным путем. При проведенных вычислениях его значение было принято равным  $1/2$ .

**Решение задач.** В общем случае зона контакта деформируемого тела с жесткой поверхностью переменна и подлежит определению. Однако существует класс задач, в которых без существенных ограничений на корректность постановки можно считать зону контакта априори известной и условно постоянной в смысле проведенной дискретизации. Предложенный выше алгоритм отработан на задаче, моделирующей сдвиг упругого бруса по шероховатой плоскости при действии давления на боковую поверхность бруса.

Покоящийся на шероховатой плоскости изотропный прямоугольный брусок сначала осаживается равномерно распределенной нагрузкой  $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}}t$ , где  $\dot{\mathbf{q}} = -\dot{q}\mathbf{e}_2$ ,  $t \in [0, t_P]$ , а затем при постоянной ее величине на боковую поверхность начинает действовать давление  $\mathbf{P} = \dot{\mathbf{P}}(t - t_P)$ , где  $\dot{\mathbf{P}} = \dot{p}\mathbf{e}_1$ ,  $t \in [t_P, t_H]$ . Причем при достижении давлением некоторого критического значения может иметь место скольжение всех контактных точек бруса по плоскости как жесткого тела. Поэтому численное решение имеет смысл лишь при ограниченных величинах действующего давления  $|\mathbf{P}| < \mu |\mathbf{q}|$ , определенных

из классических условий равновесия. На грани  $AB$  действуют смешанные граничные условия в форме (12).

Решение задачи на первом этапе нагружения позволяет продемонстрировать работу алгоритма в наиболее наглядной форме. На рисунке 1 пунктиром показаны эпюры касательных напряжений в зоне контакта, а сплошными линиями — нормальные напряжения, умноженные на коэффициент трения.

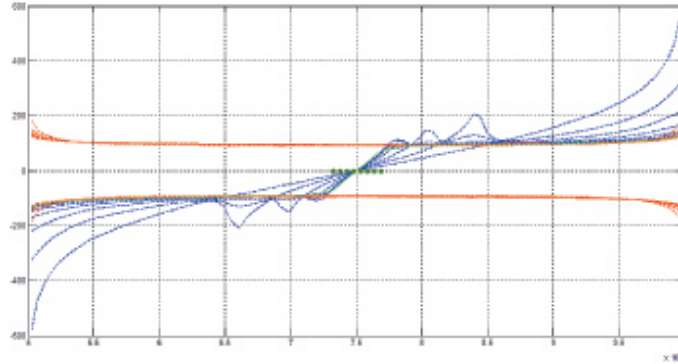


Рис. 1. Работа итерационного алгоритма на первом этапе нагружения

Каждой итерации соответствует кривая для напряжений  $S_{12}$  и  $\mu S_{22}$ . Как видно из графика, эпюры нормальных напряжений практически не изменяются по сравнению с нулевым приближением, в то время как сдвиговые напряжения существенно перераспределяются, сходясь к некоторой конечной кривой.

Интерес в этой задаче также представляют эпюры давлений в зоне контакта при нагрузке, близкой к критической, для обеспечения страгивания. На рисунке 2 приведены эпюры касательных и нормальных напряжений в зоне контакта для различных величин действующего давления.

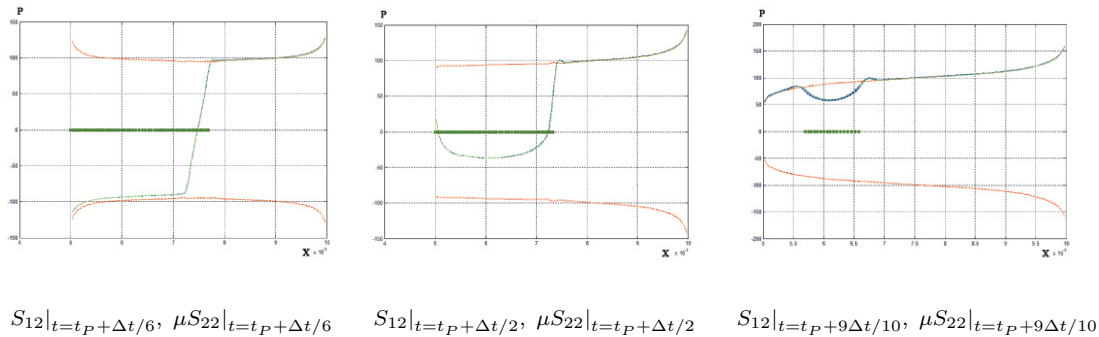


Рис. 2. Результаты численного решения на втором этапе нагружения

По приведенным графикам можно проследить также за изменением относительной величины ширины полосы сцепления, показанной жирной линией на оси абсцисс.

Общий случай взаимодействия цилиндрического тела с шероховатой плоскостью предполагает наличие изменяющейся зоны контакта. Рассматривается задача об осаживании половины бесконечно-протяженного цилиндра на абсолютно жесткой плоскости.

Верхняя грань тела нагружена равномерно распределенным давлением  $\mathbf{q} = -\dot{q}t\mathbf{e}_2$ ,  $t \in [0, t_H]$ . В начальном состоянии в изотропном теле отсутствуют напряжения  $\mathbf{S}|_{t=0} = 0$ . На изменяющейся в процессе деформирования полосе контакта принимаются смешанные граничные условия (12), а также условия взаимного непроникновения контактирующих тел  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{AB}|_{x_2=0} = 0$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{n}_{AB}|_{x_2=0} \geq 0$ , где  $\mathbf{n}_{AB} = \mathbf{e}_2$ . Для учета данного условия на каждом шаге нагружения предусмотрена возможность дробления отрезка интегрирования. Для этого вводится малый по сравнению с характерным размером контактирующих конечных элементов допуск  $\varepsilon$ , определяющий «коридор», попав в который, узел сетки может считаться «прилипшим».

Было осуществлено численное решение поставленной задачи для различных значений упругих констант и коэффициента трения. В отсутствие трения возможно сравнить получаемое решение с известным аналитическим решением Герца. На рисунке 3 приведены распределения компоненты  $S_{22}$  тензора напряжений в зоне контакта для различных значений действующей нагрузки  $\mathbf{q}$ .

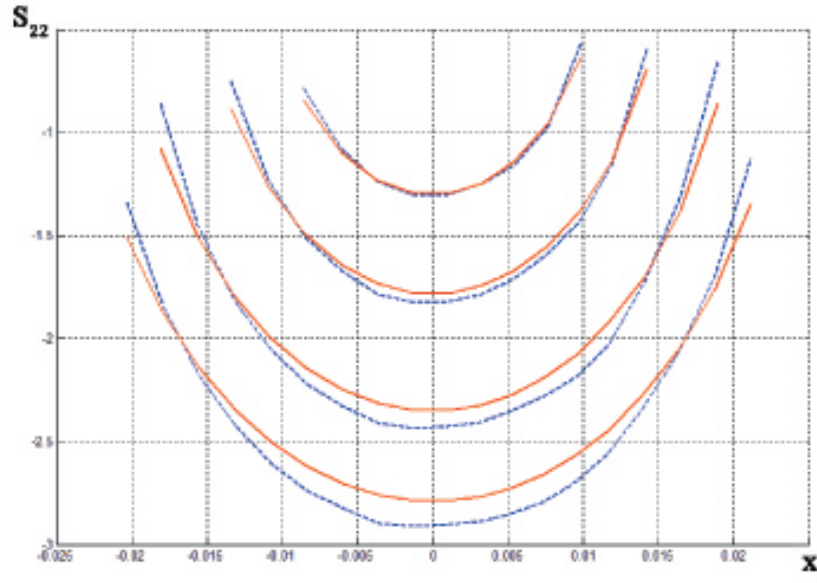


Рис. 3. Эпюра  $S_{22}$  в зоне контакта при  $\mu = 0$

При малых значениях давления  $\mathbf{q}$  наблюдается удовлетворительное совпадение численного и аналитического решений. Дальнейший рост нагрузки неизбежно приводит к развитию геометрической нелинейности, учитываемой численным решением. При больших деформациях теория Герца дает существенно заниженные абсолютные значения напряжений.

На рисунке 4 приведены результаты расчетов для трех различных значений коэффициента трения.

Решение представлено в виде зависимости радиуса полосы контакта  $b$ , отнесенного к начальному радиусу цилиндра  $R$ , от относительной величины действующей нагрузки. Кривая, соответствующая расчету с ненулевым коэффициентом трения, лежит соответственно между кривыми для условий отсутствия трения ( $\mu = 0$ ) и полного прилипания ( $\mu = \infty$ ). Вычисления производились до достижения соотношением  $b/R$  величины порядка 0.65, что подразумевает конечность деформаций в зоне контакта. Тем не менее даже при таком уровне деформаций решение с учетом трения мало отличается от решений с другими граничными условиями в зоне контакта.

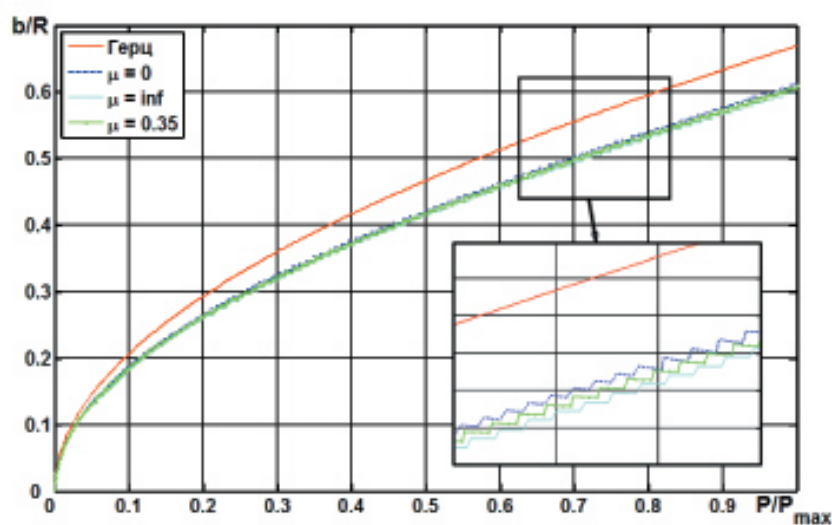


Рис. 4. Величины радиуса полосы контакта для различных значений коэффициента трения

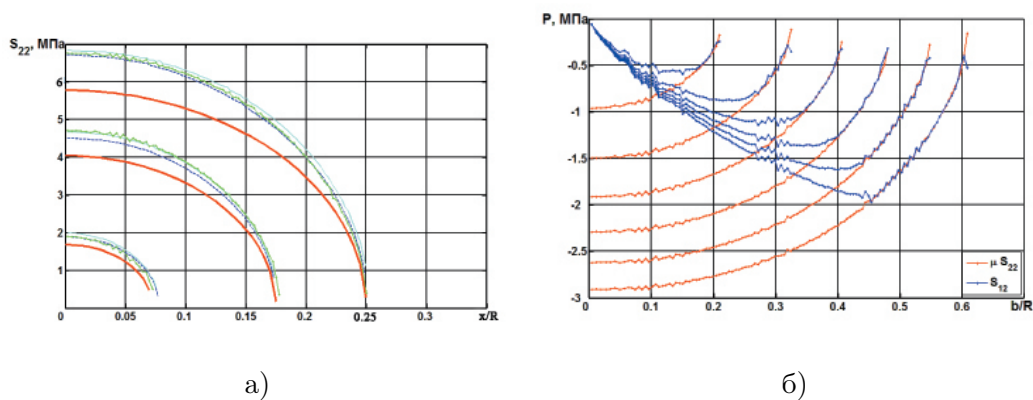


Рис. 5. Распределения контактных напряжений

На рисунке 5а приведены распределения нормальных давлений в зоне контакта, а на рисунке 5б – эпюры касательных и нормальных напряжений, умноженных на коэффициент трения.

Рисунок 5б демонстрирует перераспределение сдвиговых напряжений в зоне контакта с ростом нагрузки, а также изменение относительной величины полосы полного прилипания.

**Выводы.** Применение предложенного алгоритма для решения задач конечного упругого деформирования дает хорошие результаты при использовании неоднородной конечно-элементной дискретизации. В силу использования линейной аппроксимации поля скоростей необходимо сильно измельчать сетку в предполагаемой зоне контакта. Приведенные результаты решения задач в виде эпюр распределения компонент тензора истинных напряжений Коши качественно согласуются с данными, представленными в периодической литературе и полученными при решении аналогичных задач [12], [18]. При достижении сходимости итерационного процесса наблюдается выполнение с заданной точностью требований закона Амонтона – Кулона об ограниченности сдвиговых напряжений в зоне контакта. Решение задачи о взаимодействии цилиндра с жесткой плоскостью показало, что учет трения мало сказывается на величине определяемых радиуса полосы контакта и контактного давления.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бураго Н. Г., Кукуджанов Н. Г. Обзор контактных алгоритмов // Известия Российской Академии наук. Механика твердого тела. 2005. № 1. С. 45–87.
- [2] Ворович И. И., Александров В. М. Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. 672 с.
- [3] Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
- [4] Давыдов В. С., Чумаченко Е. Н. Метод реализации модели контактного взаимодействия в МКЭ при решении задач о формоизменении сплошных сред // Механика твердого тела. 2000. № 4. С. 53–63.
- [5] Кравчук А. С. О решении трехмерных контактных задач с трением // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 3. С. 485–496.
- [6] Маркин А. А., Толоконников Л. А. Меры и определяющие соотношения конечного упругопластического деформирования // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Всесоюзн. межвуз. сб. Горький, 1987. С. 32–37.
- [7] Маркин А. А., Соколова М. Ю., Христич Д. В. Процессы упругопластического конечного деформирования. Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. 374 с.
- [8] Станкевич И. В., Яковлев М. Е., Си Ту Хтет. Разработка алгоритма контактного взаимодействия на основе альтернирующего метода Шварца // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2011. Спец. вып.: Прикладная математика. С. 134–141.
- [9] Черепанов Г. П. Контактная задача математической теории упругости с зонами сцепления и скольжения. Теория качения и трибология // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 1. С. 112–143.
- [10] Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.
- [11] Chandrasekaran N., Haisler W. E., Goforth R. E. A finite element solution method for contact problems with friction // International journal for numerical methods in engineering. 1987. Vol. 24. P. 477–495.



- [12] Dintwa E., Tifskens E., Ramon H. On the accuracy of the Hertz model to describe the normal contact of soft elastic spheres // *Granular matter*. 2008. Vol. 10. P. 209–221.
- [13] Guo H., Shah M., Spilker R. L. A finite element implementation for biphasic contact of hydrated porous media under finite deformation and sliding // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*. 2014. Vol. 228(3). P. 225–236.
- [14] Jang Jae-Won, Hyung-Kyu Kim, Soon-Bok Lee Numerical and experimental investigation of a complete contact problem by comparing with an asymptotic analysis // *International Journal of Solids and Structures*. 2016. Vol. 82. P. 39–46.
- [15] McDevitt T. W., Laursen T. A. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000. Vol. 48. P. 1525–1547.
- [16] Morev P. G. A variational statement of quasistatic «rigid-deformable» contact problems at large strain involving generalized forces and friction // *Acta Mechanica*. 2011. № 222. P. 115–130.
- [17] Pantuso D., Bathe Klaus-Jurgen, Bouzinov P. A. A finite element procedure for the analysis of thermomechanical solids in contact // *Computers and Structures*. 2000. Vol. 75. P. 551–573.
- [18] Wriggers P., Vu Van T., Stein E. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction // *Computers & Structures*. 1990. Vol. 37. № 3. P. 319–331.
- [19] Xiaoming G., Roulei Z., Yingle S. On the mathematical modeling for elastoplastic contact problem and its solution by quadratic programming // *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Vol. 38. P. 8133–8150.
- [20] Xydas N., Kao I. Modeling of contact mechanics and friction limit for soft fingers in robotics, with experimental results // *The International Journal of Robotics Research*. 1999. Vol. 18. № 9. P. 941–950.

*Y. V. Astapov, A. A. Markin*

**FINITE DEFORMATIONS OF THE ELASTIC BODIES  
UNDER THE INTERACTION WITH THE RIGID ROUGH PLANE**

*Tula State University, Tula, Russia*

**Abstract.** The finite deformations problem of hypoeleastic bodies has been presented using variational condition of the equilibrium course of the process of deformation. Contact friction was considered in a form of the Amontons – Coulomb’s law. The variant of an iterative algorithm to take into account tangential stresses in contact zone is proposed. Current work contains the results of numerical solution of a problem about the calculation of the stress-strained state of the cylindrical bodies under the interaction with the rigid plane. The results of solution are in qualitatively agreement with the common data from literature.

**Keywords:** finite deformations, plane problems, equilibrium course of the process, elasticity, generalized Yaumann derivative, Amontons – Coulomb’s law.

**REFERENCES**

- [1] Bourago N. G., Kukudzhyanov V. N. A review of contact algorithms // Russian Academy of Sciences tidings. Mechanics of Solids. 2005. № 1. P. 45–87. (in Russian).
- [2] Vorovich I. I., Aleksandrov V. M. Mechanics of contact interactions. Moscow.: FizMatLit, 2001. 672 p. (in Russian).
- [3] Goryacheva I. G. Mechanics of friction interaction. M.: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian).
- [4] Davidov V. S., Chumachenko E. N. The method of realization of contact interaction model for FEM during solving the problem of media forming // Mechanics of Solids. 2000. № 4. P. 53–63. (in Russian).
- [5] Kravchuk A. S. Solution of the three-dimensional friction contact problems // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2008. Vol. 72. № 3. P. 485–496. (in Russian).
- [6] Markin A. A., Tolokonnikov L. A. Measures and constitutive equations for finite elastoplastic deformations // Applied problems of strength and plasticity. Methods for solving: All-union interuniversity digest. Gorky, 1987. P. 32–37. (in Russian).
- [7] Markin A. A., Sokolova M. Yu., Khristich D. V. Processes of elastoplastic finite deformations. Tula: TSU publishing office, 2011. 374 p. (in Russian).
- [8] Stankevich I. V., Yakovlev M. Ye., Si Tu Khet. Development of Contact Interaction Algorithm on the Basis of Schwarz Alternating Method // The Bauman Moscow State Technical University tildings. Natural sciences series. 2011. Special issue. Applied mathematics. P. 134–141. (in Russian).

---

*Astapov Yuri Vladimirovich*

e-mail: ast3x3@gmail.com, undergraduate of the Mathematical Modeling department, Tula State University, Tula, Russia.

*Markin Alexey Alexandrovich*

e-mail: markin-nikram@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, head of the Mathematical Modeling department, Tula State University, Tula, Russia.

[9] Cherepanov G. P. The contact problem of the mathematical theory of elasticity with stick and slip zones. The theory of rolling. Tribology // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2015. Vol. 79. № 1. P. 112–143. (in Russian).

[10] Chernykh K. F. Introduction to anisotropic elasticity. Moscow: Nauka, 1988. 192 p. (in Russian).

[11] Chandrasekaran N., Haisler W. E., Goforth R. E. A finite element solution method for contact problems with friction // International journal for numerical methods in engineering. 1987. Vol. 24. P. 477–495.

[12] Dintwa E., Tifskens E., Ramon H. On the accuracy of the Hertz model to describe the normal contact of soft elastic spheres // Granular matter. 2008. Vol. 10. P. 209–221.

[13] Guo H., Shah M., Spilker R. L. A finite element implementation for biphasic contact of hydrated porous media under finite deformation and sliding // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine. 2014. Vol. 228(3). P. 225–236.

[14] Jang Jae-Won, Hyung-Kyu Kim, Soon-Bok Lee Numerical and experimental investigation of a complete contact problem by comparing with an asymptotic analysis // International Journal of Solids and Structures. 2016. Vol. 82. P. 39–46.

[15] McDevitt T. W., Laursen T. A. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2000. Vol. 48. P. 1525–1547.

[16] Morev P.G. A variational statement of quasistatic «rigid-deformable» contact problems at large strain involving generalized forces and friction // Acta Mechanica. 2011. № 222. P. 115–130.

[17] Pantuso D., Bathe Klaus-Jurgen, Bouzinov P. A. A finite element procedure for the analysis of thermomechanical solids in contact // Computers and Structures. 2000. Vol. 75. P. 551–573.

[18] Wriggers P., Vu Van T., Stein E. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction // Computers&Structures. 1990. Vol. 37. № 3. P. 319–331.

[19] Xiaoming G., Roulei Z., Yingle S. On the mathematical modeling for elastoplastic contact problem and its solution by quadratic programming // International Journal of Solids and Structures. 2001. Vol. 38. P. 8133–8150.

[20] Xydas N., Kao I. Modeling of contact mechanics and friction limit for soft fingers in robotics, with experimental results // The International Journal of Robotics Research. 1999. Vol. 18. № 9. P. 941–950.

Ю. В. Немировский

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ ТАВРОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПО ПРЕДЕЛЬНО ДОПУСТИМЫМ ДЕФОРМАЦИЯМ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия*

**Аннотация.** Сформулированы и решены задачи оптимального проектирования гибридных тавровых композитных балок по требованию достижения предельно допустимых упругих или пластических деформаций. Рассмотрены слоистые композитные конструкции. В качестве критерия эквивалентности сравнимых проектов используется требование равенства весов. В качестве предельно допустимых условий эксплуатации упругих конструкций рассматриваются уровни амплитуд нагрузок, при которых впервые достигается предел упругости соответствующего материала. В качестве предельно допустимых пластических деформаций используются деформации соответствующие пределу прочности данного материала. Для решения пластической задачи используется модель жестко-пластического тела.

**Ключевые слова:** гибридные, слоистые, тавровые балки, вес конструкции, предельные нагрузки, упругие и пластические материалы, предел упругости, предельно допустимые деформации, оптимальное проектирование.

УДК: 536.21

Однотавровые и двутавровые конструктивные элементы широко используются в качестве несущих элементов в изделиях авиационной, судостроительной, машиностроительной техники и в строительной индустрии. В последние годы с целью улучшения эксплуатационных качеств создаются слоистые и слоисто-волокнистые (гибридные) конструкции при использовании разнообразных технологий склейки, сварки, напылений [1], [2]. Конечной целью реализации всех этих процессов является создание конструкции с максимально улучшенными эксплуатационными качествами. Для решения этой задачи будем рассматривать в сравнении традиционные двутавровые (фиг. 1) и однотавровые (фиг. 2) конструкции из однородных материалов и проектируемые гибридные конструкции (фиг. 3, фиг. 4), составленные из различных материалов.

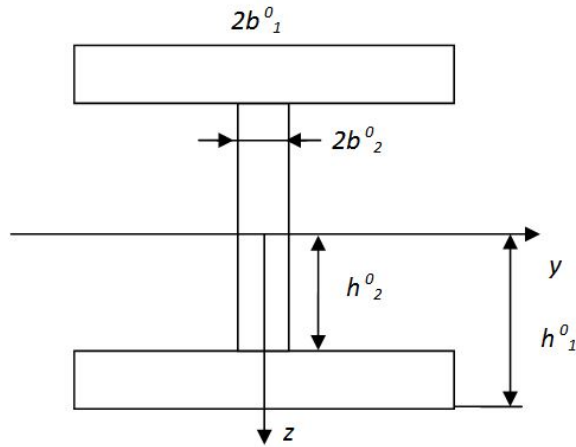
---

© Немировский Ю. В., 2016  
*Немировский Юрий Николаевич*

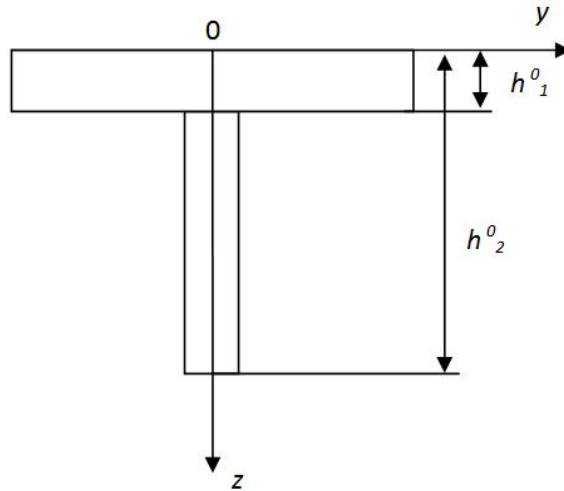
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00102).

Поступила 12.01.2016



Фиг. 1



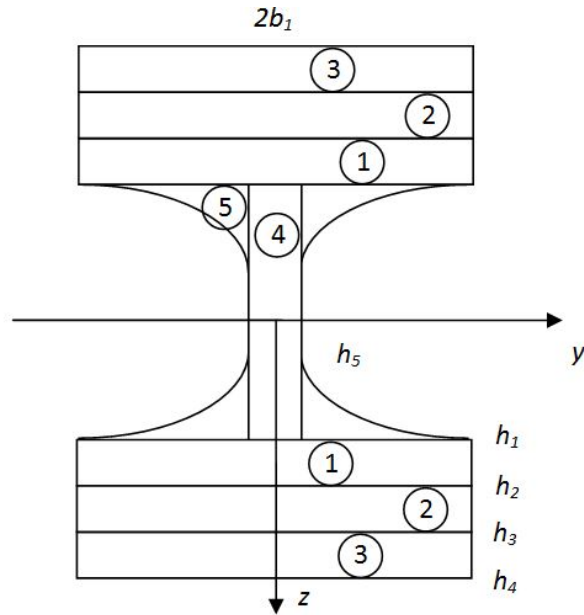
Фиг. 2

В качестве критерия эквивалентности сравниваемых проектов будем использовать равенство весов. Тогда для двутавровых проектов будем иметь равенство:

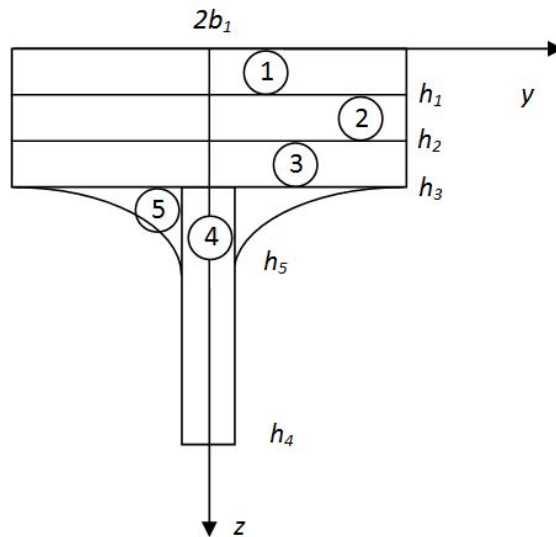
$$b_1 \cdot \sum_{i=1}^3 \rho_i \cdot (h_{i+1} - h_i) + b_2 \cdot \rho_4 \cdot h_1 + \rho_5 \cdot \left[ \frac{(h_1^{\alpha_5+1} - h_5^{\alpha_5+1})}{\alpha_5 + 1} + (h_1 - h_5) \cdot h_1^{\alpha_5} \right] = b_1^0 \cdot (h_1^0 - h_2^0) + b_2^0 \cdot h_2^0 \quad (1)$$

и для однотоутовых проектов:

$$b_1 \cdot \sum \rho_i \cdot (h_{i+1} - h_i) + b_2 \cdot \rho_4 \cdot (h_4 - h_3) + \rho_5 \cdot \left[ \frac{(h_5^{\alpha_5+1} - h_3^{\alpha_5+1})}{\alpha_5 + 1} + (h_5 - h_1) \cdot h_5^{\alpha_5} \right] = \\ = \rho^0 \cdot [b_1^0 \cdot h_1^0 + b_2^0 \cdot (h_2^0 - h_1^0)] \quad (2)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Здесь  $\rho^0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_5$  – удельные веса материалов,  $\alpha_5 \geq 0$ .

В качестве предельно допустимых условий эксплуатации упругих конструкций рассматриваются уровни амплитуд, нагрузок, при которых впервые достигается предел текучести соответствующего материала. В качестве предельно допустимых пластических деформаций используются деформации возникающие при достижении предела прочности соответствующего материала. Для решения пластической задачи используется модель жестко-пластического тела с двумя аппроксимациями пластической части диаграммы деформирования [3], [4].

1. Линейное упрочнение

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \text{sign}(\varepsilon) + K \cdot \varepsilon, \quad K = \frac{\sigma_* - \sigma_0}{\varepsilon_*}. \quad (3)$$

2. Параболическое упрочнение

$$\sigma = (\sigma_0 + K_2 \cdot \varepsilon^2) \cdot \text{sign}(\varepsilon) + K_1 \cdot \varepsilon \quad (4)$$

$$K_1 = \frac{2(\sigma_* - \sigma_0)}{\varepsilon_*}, \quad K_2 = -\frac{\sigma_* - \sigma_0}{\varepsilon_*}. \quad (5)$$

Здесь  $\sigma_0$ ,  $\sigma_*$  – предел текучести и предел прочности материала,  $\varepsilon_*$  – предельная пластическая деформация.

Использование аппроксимаций (3), (4) позволят в рамках единого подхода построить балки оптимальных пластических проектов из различных наборов материалов.

Рассмотрим сначала упругие двутавровые балки. Изгибающий момент эталонной балки связан с кривизной  $\chi$  следующей зависимостью:

$$M^0 = A_0 \cdot \chi, \quad A_0 = 2 \cdot E^0 \cdot [b_1 \cdot (h_1^0)^2 - (b_1 - b_2) \cdot (h_2^0)^2]$$

и предельный упругий момент для эталонной балки будет равен:

$$M_0^0 = \frac{A_0 \cdot \varepsilon_0^0}{h_1^0}, \quad \varepsilon_0^0 = \frac{\sigma_0^0}{E^0},$$

$\sigma_0^0$ ,  $E^0$  – предел текучести и модуль упругости эталонного материала.

Изгибающий момент гибридной упругой двутавровой балки будет равен

$$M = A \cdot \chi$$

$$A = 2 \cdot \left\{ b_1 \cdot \sum_{i=1}^3 E_i \cdot (h_{i+1}^2 - h_i^2) + E_4 \cdot b_2 \cdot h_1^2 + 2 \cdot E_5 \cdot \left[ \frac{(h_1^{\alpha_5+2} - h_5^{\alpha_5+2})}{\alpha_5+2} - \frac{(h_1^2 - h_5^2) \cdot h_1^{\alpha_5}}{2} \right] \right\} \quad (6)$$

и предельный упругий момент гибридной двутавровой балки будет равен

$$M_0 = \frac{A \cdot \varepsilon_3^0}{h_4}, \quad (7)$$

при этом выполняются равенства:

$$h_3 = \frac{\varepsilon_2^0}{\varepsilon_3^0} \cdot h_4, \quad h_2 = \frac{\varepsilon_1^0}{\varepsilon_3^0} \cdot h_4, \quad h_1 = \frac{\varepsilon_4^0}{\varepsilon_3^0} \cdot h_4, \quad h_5 = \beta_5 \cdot h_1, \quad (\beta_5 < 1). \quad (8)$$

В упругом состоянии изгибающие моменты пропорциональны амплитудам действующих нагрузок. Поэтому отношение предельных упругих нагрузок гибридной и эталонной конструкции при одинаковом характере нагружения будет равно отношению предельных упругих моментов. Таким образом, задача сводится к отысканию максимума отношения

$$F_1 = \frac{M_0}{M_0^0} = \frac{A \cdot \varepsilon_3^0 \cdot h_1^0}{A_0 \cdot \varepsilon_0^0 \cdot h_4} \quad (9)$$

при условии, что варьируемые параметры сечения гибридной конструкции подчиняются дополнительным условиям (1) и (3).

При поперечном изгибе изображенной на фиг. 2 эталонной одноставровой упругой балки связь изгибающего момента с кривизной будет иметь вид:

$$M = C^0 \cdot \chi, \quad C^0 = a_{22}^0 - \frac{(a_{12}^0)^2}{a_{11}^0}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}^0 &= 2 \cdot E^0 \cdot [b_1^0 \cdot h_1^0 + b_2^0 \cdot (h_2^0 - h_1^0)], \\ a_{12}^0 &= E^0 \cdot [b_1^0 \cdot (h_1^0)^2 + b_2^0 \cdot ((h_2^0)^2 - (h_1^0)^2)], \\ a_{22}^0 &= \frac{2 \cdot E^0}{3} \cdot [b_1^0 \cdot (h_1^0)^3 + b_2^0 \cdot ((h_2^0)^3 - (h_1^0)^3)]. \end{aligned}$$

А деформация  $e_0$  на отсчетной линии  $z = 0$  вследствие отсутствия продольного усилия ( $N = 0$ ) будет равна:

$$e_0(x) = -\frac{a_{12}^0}{a_{11}^0} \cdot \chi(x). \quad (11)$$

На линии  $z = h_2^0$  деформация будет равна:

$$\varepsilon(h_2) = \left( h_2^0 - \frac{a_{12}^0}{a_{11}^0} \right) \cdot \chi. \quad (12)$$

Следовательно,

$$\frac{|\varepsilon(0)|}{\varepsilon(h_2^0)} = \left[ 1 + \left( \frac{b_1^0}{b_2^0} - 1 \right) \cdot \left( \frac{h_1^0}{h_2^0} \right)^2 \right] \cdot \left[ 2 \cdot \left( \frac{b_1^0}{b_2^0} - 1 \right) \cdot \frac{h_1^0}{h_2^0} + \left( \frac{b_1^0}{b_2^0} - 1 \right) \cdot \left( \frac{h_1^0}{h_2^0} \right)^2 - 1 \right]^{-1}.$$

Из этого выражения видно, что если параметры эталонного сечения удовлетворяют неравенству (чаще всего реализуемому на практике):

$$\frac{b_1^0}{b_2^0} \geq 1 + \frac{h_2^0}{h_1^0}, \quad (13)$$

то наибольшая в сечении упругая деформация достигается при  $z = h_2^0$ . В этом случае:

$$\chi = \chi_0 = \frac{\varepsilon_0^0 \cdot a_{11}^0}{(a_{11}^0 h_2^0 - a_{12}^0)},$$

и тогда предельный упругий момент для эталонной балки будет равен

$$M_0^0 = C^0 \frac{a_{11}^0 \varepsilon_0^0}{(a_{11}^0 h_2^0 - a_{12}^0)}. \quad (14)$$

Для гибридной одноставровой балки (фиг. 4) выражение для продольного усилия  $N$  и изгибающего момента  $M$ , при упругом деформировании имеет вид:

$$N = a_{11} e_0 + a_{12} \chi, \quad M = a_{12} e_0 + a_{22} \chi, \quad (15)$$

где



$$\begin{aligned}
a_{11} &= 2 \left\{ b_1 \sum_{i=1}^3 E_i (h_i - h_{i-1}) + b_4 E_4 (h_4 - h_3) - \right. \\
&\quad \left. - E_5 \frac{(b_1 - b_4)}{(b_5^{\alpha_5} - h_3^{\alpha_5})} \left[ \frac{(h_5^{\alpha_5+1} - h_3^{\alpha_5+1})}{(\alpha_5+1)} - h_3^{\alpha_5} (h_5 - h_3) \right] \right\} \\
a_{12} &= \left\{ b_1 \sum_{i=1}^3 (h_i^2 - h_{i-1}^2) + b_4 E_4 (h_4^2 - h_3^2) - E_5 \frac{(b_1 - b_4)}{h_5^{\alpha_5} - h_3^{\alpha_5}} \left[ \frac{(h_5^{\alpha_5+2} - h_3^{\alpha_5+2})}{\alpha_5+2} - \frac{h_3^{\alpha_5} (h_5^2 - h_3^2)}{2} \right] \right\} \\
a_{22} &= \frac{2}{3} \left\{ \sum_{i=1}^3 E_i (h_i^3 - h_{i-1}^3) + b_4 E_4 (h_4^3 - h_3^3) - E_5 \frac{(b_1 - b_4)}{(h_5^{\alpha_5} - h_3^{\alpha_5})} \left[ \frac{h_5^{\alpha_5+3} - h_3^{\alpha_5+3}}{(\alpha_5+3)} - \frac{h_3^{\alpha_5} (h_5^3 - h_3^3)}{3} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{16}$$

При поперечном изгибе  $N = 0$  будем иметь:

$$M = C\chi, \quad C = \alpha_{22} - \frac{a_{11}^2}{a_{12}} \tag{17}$$

$$e_0 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\chi. \tag{18}$$

Предельное упругое состояние будет достигнуто при выполнении равенств:

$$\chi_0 = \frac{a_{12}}{a_{11}}\varepsilon_{01}, \quad h_1\chi_0 = \varepsilon_{01} - \varepsilon_{02},$$

$$h_2\chi_0 = \varepsilon_{01} - \varepsilon_{03}, \quad h_3\chi_0 = \varepsilon_{01} - \varepsilon_{05} \tag{19}$$

$$h_4\chi_0 = \varepsilon_{01} + \varepsilon_{01} - \varepsilon_{04}.$$

Предельный упругий изгибающий момент для гибридной однотоавровой балки будет равен:

$$M_0 = C \frac{a_{11}}{a_{12}} \varepsilon_{01}, \tag{20}$$

и вследствие равенств (19) будем иметь:

$$h_4 = \left( 1 + \frac{\varepsilon_{04}}{\varepsilon_{01}} \right) \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad h_3 = \frac{(\varepsilon_{01} - \varepsilon_{05})}{(\varepsilon_{01} + \varepsilon_{04})} h_4, \quad h_2 = \frac{(\varepsilon_{01} - \varepsilon_{03})}{(\varepsilon_{01} - \varepsilon_{04})} h_4, \quad h_1 = \frac{(\varepsilon_{01} - \varepsilon_{02})}{(\varepsilon_{01} - \varepsilon_{04})} h_4. \tag{21}$$

Таким образом, в этом случае задача сводится к отысканию максимума функции:

$$F_2 = \frac{M_0}{M_0^0} = \frac{C a_{11} \varepsilon_{01} (a_{12}^0 h_2^0 - a_{12}^0)}{a_{12} C^0 a_{11}^0 \varepsilon_0^0} \tag{22}$$

при условии, что параметры проектируемых сечений связаны дополнительными соотношениями (2) и (21).

Если в качестве предельно допустимых условий эксплуатации используются требования достижения предельных деформаций (возможно с некоторым коэффициентом

запаса) для соответствующих пластических материалов, то при решении рассматриваемых задач оптимизации упругими деформациями можно пренебречь и воспользоваться моделью жесткопластического материала с единой аппроксимацией пластической части пластической диаграммы деформирования материалов в виде зависимостей (4) с различными коэффициентами  $\sigma_0$ ,  $K_{1i}$ ,  $K_{2i}$  ( $i=1,2,\dots$ ) для разных материалов. При этом, если  $m$ -й материал будет идеально пластическим, то для него в последующих формулах следует принять  $K_{1m} = K_{2m} = 0$ . Если  $m$ -й материал будет линейно-упрочняющимся, то следует принять  $K_{1m} = K_m$ ,  $K_2 = 0$  и для  $K_m$  использовать выражение из (3).

В таком случае предельный изгибающий момент  $M^*$  для двутавровой эталонной балки будет равен:

$$M_0^* = d_{11}^0 + d_{12}^0 \chi_0^* + d_{13}^0 (\chi_0^*)^2, \quad \chi_0^* = \frac{\varepsilon_0^*}{h_1^0}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} d_{11}^0 &= 2 \left[ b_1^0 (h_1^{02} - h_2^{02}) + b_2^0 h_2^{02} \right] \sigma_0^0, \\ d_{12}^0 &= \frac{2}{3} \left[ b_1^0 (h_1^{03} - h_2^{03}) + b_2^0 h_2^{03} \right] K_1^0, \\ d_{13}^0 &= \left[ b_1^0 (h_1^{04} - h_2^{04}) + b_2^0 h_2^{04} \right] K_2^0 \end{aligned} \quad (24)$$

и для гибридной двутавровой балки

$$M^* = d_{11} + d_{12} \chi^* + d_{13} (\chi^*)^2, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} d_{11} &= 2 \left\{ b_1 \sum_{i=1}^3 \sigma_{0i} (h_{i+1}^2 - h_i^2) + b \sigma_{04} h_1^2 + 2 \sigma_{05} \frac{(b_1 - b_2)}{(h_1^{\alpha_5} - h_5^{\alpha_5})} \left[ \frac{h_1^{\alpha_5+2} - h_5^{\alpha_5+2}}{(\alpha_5+2)} - h_5^{\alpha_5} \frac{(h_1^2 - h_5^2)}{2} \right] \right\}, \\ d_{12} &= \frac{1}{3} \left\{ \left[ b_1 \sum_{i=1}^3 K_{1i} (h_{i+1}^3 - h_i^3) \right] + b_2 K_{14} h_1^3 + \right. \\ &\quad \left. 3 K_{15} \frac{(b_1 - b_2)}{(h_1^{\alpha_5} - h_5^{\alpha_5})} \left[ \frac{(h_1^{\alpha_5+3} - h_5^{\alpha_5+3})}{(\alpha_5+3)} - h_5^{\alpha_5} \frac{(h_1^3 - h_5^3)}{3} \right] \right\}, \\ d_{13} &= b_1 \left[ \sum_{i=1}^3 K_{2i} (h_{i+1}^4 - h_i^4) \right] + b_2 K_{24} h_1^4 + 4 K_{15} \frac{(b_1 - b_2)}{(h_1^{\alpha_5} - h_5^{\alpha_5})} \left[ \frac{(h_1^{\alpha_5+4} - h_5^{\alpha_5+4})}{(\alpha_5+4)} - h_5^{\alpha_5} \frac{(h_1^4 - h_5^4)}{4} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

В предельном по деформациям пластическом состоянии предельный изгибающий момент  $M^* = M(\chi^*)$  и параметры  $\chi^*$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $h_4$  связаны с  $\chi^*$  зависимостями:

$$\chi^* h_4 = \varepsilon_3^*, \quad \chi^* h_3 = \varepsilon_2^*, \quad \chi^* h_2 = \varepsilon_1^*, \quad \chi^* h_1 = \varepsilon_4^*. \quad (27)$$

Задача оптимизации сводится в этом случае к поиску максимума параметрической функции  $F_3 = \frac{M^*}{M_0^*}$  при условии, что параметры проектируемого сечения подчиняются соотношениям (1) и (27). Аналогичным образом, вычисляя соответствующие значения предельных моментов для эталонных и проектируемых однитавровых балок можно получить для них решение оптимизационной задачи. Мы не станем здесь выписывать соответствующие выражения для предельных моментов из-за их громоздкости.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Король В. К., Гильденгорн М. С.. Основы производства многослойных металлов. М.: Металлургия, 1978. 237 с.
- [2] Дерибас А. А. Физика упрочнения и сварки взрывом. Новосибирск: Наука, 1972. 188 с.
- [3] Немировский Ю. В. Динамический изгиб армированных пластических стержней. – Динамика сплошной среды. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1979. Вып. 41. С. 37–44.
- [4] Немировский Ю. В. Второе предельное состояние однородных и композитных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 150–159.

Yu. V. Nemirovskii

OPTIMUM DESIGN OF HYBRID STRUCTURES TEE ON MAXIMUM PERMISSIBLE DEFORMATION

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

**Abstract.** Formulated and solved the problem of optimal design of hybrid composite T-beam as required to achieve the maximum allowable elastic and plastic deformations. Considered layered composite structures. As a criterion for the equivalence of comparable projects and used the demand for equality of weights. As the maximum permissible operating conditions of elastic structures are considered stress levels amplitudes at which the limit of elasticity of the respective material is achieved for the first time. As the maximum allowable plastic deformation using the strain corresponding to the ultimate strength of the material. To solve the problem, a plastic model of a rigid-plastic body.

**Keywords:** hybrid, layered, T-bars, structural weight, load limits, elastic and plastic materials, elastic limit, the maximum allowable strain, optimal design.

## REFERENCES

- [1] Korol' V. K., Gil'dengorn M. S. Osnovy proizvodstva mnogoslujnyh metallov. M.: Metallurgija, 1978. 237 s. (in Russian).
- [2] Deribas A. A. Fizika uprochnenija i svarki vzryvom. Novosibirsk: Nauka, 1972. 188 s. (in Russian).
- [3] Nemirovskij Ju. V. Dinamicheskij izgib armirovannyh plasticheskikh sterzhnej. – Dinamika sploshnoj sredy. Novosibirsk: Institut gidrodinamiki SO AN SSSR, 1979. Vyp. 41. S. 37–44. (in Russian).

---

*Nemirovsky Yuri Vladimirovich*

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.

- [4] Nemirovskij Ju. V. Vtoroe predel'noe sostojanie odnorodnyh i kompozitnyh balok // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2009. № 1. S. 150–159. (in Russian).

В. Г. Баженов, М. С. Баранова, Д. Л. Осетров

## ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ НА УСИЛИЯ УДАРНОГО СЖАТИЯ И ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ-ТАБЛЕТОК

*Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского  
Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского,  
г. Нижний Новгород, Россия*

**Аннотация.** Приводятся обзор состояния проблемы построения динамических диаграмм деформирования с учетом трения и радиальной инерции методом прямого удара и результаты численного исследования влияния трения на напряженно-деформированное состояние образцов-таблеток и их формоизменения в процессе нагружения при больших деформациях. Оцениваются погрешности неучета сил трения в зависимости от величины коэффициента трения, степени деформации, упрочнения и чувствительности к скорости деформации материалов (сталей 12Х18Н10Т, 09Г2С и свинца С1).

**Ключевые слова:** численное моделирование, ударное сжатие, образцы-таблетки, упруговязкопластические материалы, динамические диаграммы деформирования, метод прямого удара, трение по Кулону.

УДК: 539.3

**Введение.** Для моделирования динамических процессов в конструкциях необходимо знание динамических диаграмм деформирования, которое можно получить экспериментально методом прямого удара или разрезного стержня Гопкинсона [1]. При

---

© Баженов В. Г., Баранова М. С., Осетров Д. Л., 2016

*Баженов Валентин Георгиевич*, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией, Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

*Баранова Мария Сергеевна*, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

*Осетров Дмитрий Львович*, младший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (16-38-60107 мол\_а\_дк, 16-38-00462 мол\_а, 14-08-01129-а).

Поступила 20.06.2016

этом необходимо правильно оценивать роль трения на контактных поверхностях, испытываемый образец – ударник (мерный стержень). Трение играет важную роль в процессах высокоскоростного деформирования. Чтобы достаточно полно охарактеризовать явление трения, необходимо проведение многочисленных экспериментов, в которых исследовалось бы влияние различных факторов: давления, скорости относительного движения и шероховатости поверхностей, температуры.

В статических условиях разработано достаточно много эффективных методов определения характеристик трения. Динамические характеристики трения мало изучены в силу сложности методик их определения.

В настоящее время экспериментальные методы достаточно развиты, чтобы испытывать материалы при скоростях деформаций до  $10^7$  1/с. Поскольку с помощью стандартного разрезного стержня Гопкинсона невозможно достичь скоростей деформаций выше  $10^4$  1/с, был разработан ряд методов испытаний по принципу прямого удара, где имеется только один стержень Гопкинсона или труба, применяемые для передачи информации о деформациях с помощью измерения продольных упругих волн, что позволяет расшифровать поведение материала. Концепция прямого удара очень полезна в различных приложениях, при сжатии, сдвиге и при растяжении [1]. В работах [2], [3], [4] эффекты инерции были исследованы в испытаниях на ударное сжатие. Анализ данных для алюминия, представленный в работах [5], [6], показал, что инерционные поправки являются наиболее важными при высоких скоростях деформации (более  $10^4$  с<sup>-1</sup>). Хорошо известно, что эффекты трения могут внести существенные ошибки при интерпретации результатов эксперимента. По результатам теоретических и экспериментальных исследований [4] для четырех материалов (свинец, алюминий, сталь и титан) сделаны выводы, что оптимальное отношение высоты к радиусу таблетки –  $S_{opt}$  может существенно меняться в зависимости от условий эксперимента и испытанного материала. Рабочий диапазон определяется неравенством  $0,3 < S_{opt} < 1,5$ . Отметим, что в отмеченных выше работах численно-аналитические методики учета сил трения и радиальной инерции предполагают однородность напряженно-деформированного состояния образцов таблеток.

При наличии в образце хорошо смазанных контактных поверхностей коэффициент трения может быть снижен значительно ниже уровня 0,1. Так называемое сухое трение быстро уменьшается в зависимости от тангенциальной скорости и давления [7].

При высоких скоростях деформации (более  $10^4$  1/сек) тепловое размягчение оказывает существенное влияние на чувствительность к скорости деформации и усиление вязкостных эффектов [8].

В перечисленных выше работах отсутствуют методики оценки сил трения в каждом конкретном эксперименте на ударное сжатие методом Гопкинсона или прямого удара, поэтому невозможно учесть вклад сил трения при построении динамических диаграмм деформирования испытываемых материалов.

**Численное моделирование процесса деформирования в системе ударник – образец – мерный стержень в осесимметричной постановке.** Осуществим численное моделирование процесса деформирования в системе ударник – образец – мерный стержень в осесимметричной постановке. Поскольку в методике Кольского и методе прямого удара предполагается однородность процесса деформирования после стационарирования переходного волнового процесса, вызванного ударным нагружением,

будем рассматривать установившуюся стадию процесса деформирования при заданной скорости сжатия образца-таблетки.

Геометрические размеры таблетки: диаметр – 2 см, высота – 2 см.

Ударник и мерный стержень заменялись круглыми дисками. Вертикальная скорость прикладывалась на верхней границе диска-ударника.

Размеры дисков: диаметр –  $3.64 \cdot 10^{-2}$  м, высота –  $0,125 \cdot 10^{-2}$  м. Материал дисков – сталь 20, механические характеристики:  $K = 1,7667 \cdot 10^5$  МПа,  $G = 8,15385 \cdot 10^4$  МПа,  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Диски полагались идеально-упругими. Рассматривалось деформирование двух материалов – 12Х18Н10Т и 09Г2С.

Между контактными границами дисков и образцов-таблеток задавались условия контактного одностороннего взаимодействия с учетом сухого трения по закону Кулона с коэффициентами трения 0, 0.1, 0.2, 0.3. На нижней границе опорного диска (мерного стержня) задавались нулевые граничные условия во времени – жесткая заделка. На верхней границе диска-ударника задавались нулевые тангенциальные перемещения и нормальная скорость, которая определяется из экспериментов на ударное сжатие по методике, описанной в [9], [10]. Эта методика предполагает известную из эксперимента сжимающую осевую силу в мерном стержне. Для простоты анализа результатов исследований будем предполагать скорость удара постоянной в процессе нагружения и равной 20 м/с. Заменим физический эксперимент математическим, т. е. будем предполагать известной динамическую диаграмму деформирования материала. Сначала зависимость диаграммы деформирования от скорости деформации не будем учитывать. Для математического моделирования процесса деформирования образцов-таблеток при больших деформациях воспользуемся средствами вычислительной системы LS-DYNA. Как показали вычислительные эксперименты, при осевых деформациях более 0.3 конечно-элементная сетка при учете трения с коэффициентом 0.3 сильно искажается и аппроксимация нарушается. Поэтому пришлось применить процедуру коррекции лагранжевой сетки в процессе деформирования, причем многократно. В противном случае искомые сжимающие силы и напряжения сильно осциллировали, что недопустимо при решении контактных задач. В результате ряда численных экспериментов была подобрана конечно-элементная сетка: по образцу – 9x10 ячеек, по дискам – 1x128 ячеек. Эта сетка обеспечила приемлемую точность расчетов при всех коэффициентах трения (0.1–0.3) и степенях деформации до 0.6.

Сначала проводились исследования роли коэффициента трения и степени деформации на напряженно-деформированное состояние образцов-таблеток из сталей 12Х18Н10Т и 09Г2С без учета зависимости от скорости деформации, а затем из свинца С1 с учетом зависимости от скорости деформации.

Механические характеристики сталей:  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Истинные диаграммы деформирования приведены на рис. 1 для материалов 12Х18Н10Т (обозначено цифрой 1) и 09Г2С (обозначено цифрой 2). Истинные динамические диаграммы деформирования свинца задавались в виде

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \sigma_T(\dot{\varepsilon}) + \sigma(\varepsilon), \sigma_T(\dot{\varepsilon}) = 4 \cdot 10^{-6} \dot{\varepsilon}^2 - 0,0004 \dot{\varepsilon}, \quad \sigma(\varepsilon) = 5,5849\varepsilon + 2,063.$$

Скорость перемещений на ударяемой поверхности образца-таблетки принималась в виде

$$\dot{u} = H_0 C_0 e^{-C_0 t}, \text{ где } C_0 = \dot{\varepsilon}_0 = 10^3 \text{1/сек, } H_0 = 2 \text{ см,}$$

что обеспечивало постоянную скорость деформирования  $10^3$  1/сек.

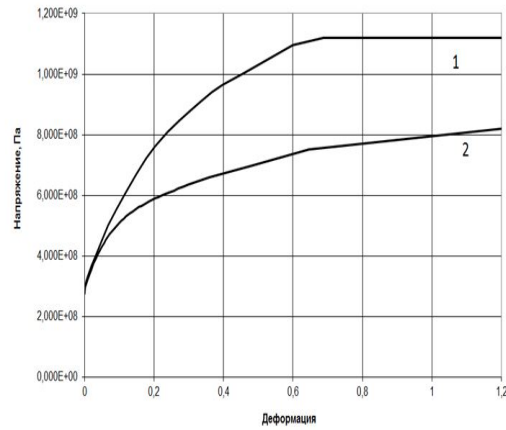


Рис. 1

На рис. 2 графиками 1, 2 представлены зависимости осевых сил на контактной поверхности ударника-образца от времени для сталей 12Х18Н10Т(1а, 2а) и 09Г2С(1б, 2б) при коэффициентах трения 0, 0.3 соответственно.

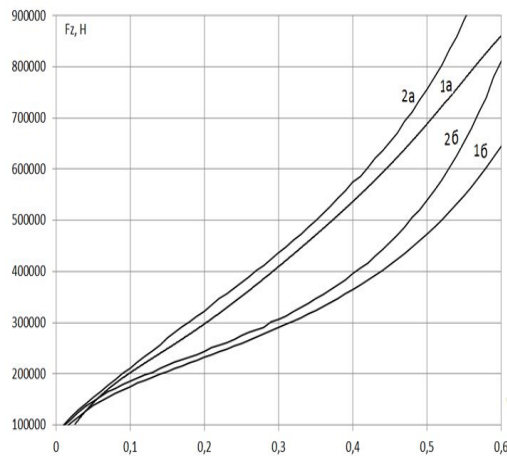


Рис. 2

На рис. 3 представлены графики 1, 2, 3, характеризующие относительные различия осевых сил  $\Delta F_z / F_z$ , рассчитанных с учетом и без учета трения при коэффициентах трения 0.1, 0.2, 0.3 соответственно.

Пунктиром обозначен материал 12Х18Н10Т, сплошной линией – свинец.

На рис. 4 (а, б, в) представлены распределения интенсивностей истинных пластических деформаций при условных деформациях осадки образцов 30 %, 50 %, 70 % при коэффициенте трения 0.3 для материала 12Х18Н10Т. Для остальных материалов имеет место подобное распределение пластических деформаций.

**Анализ результатов.** При учете трения НДС таблеток неоднородно, и неоднородность существенно возрастает при увеличении силы трения и степени деформации. Максимальные пластические деформации и осевые напряжения имеют место в



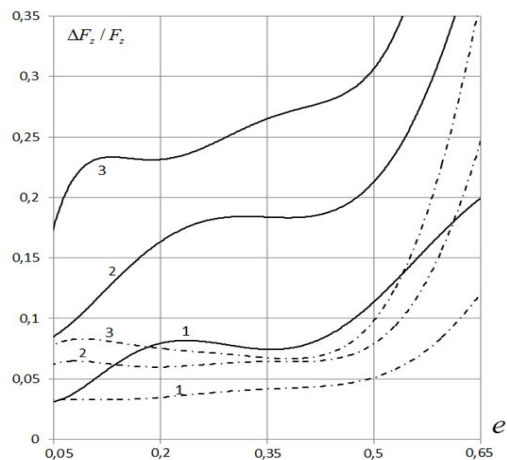


Рис. 3

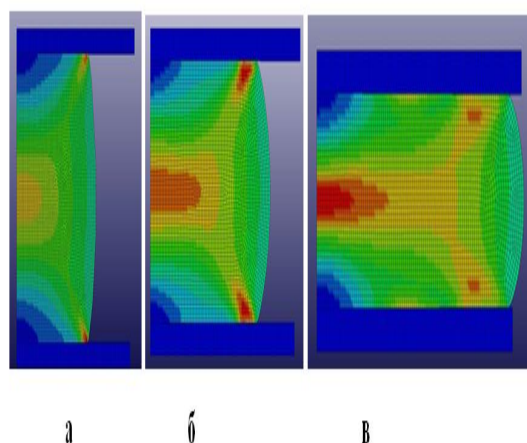


Рис. 4

области, примыкающей к центру таблетки. По мере деформации эти области расширяются. Уровень осевых напряжений здесь в разы больше, чем вблизи границ таблетки. Максимальные сдвиговые напряжения и деформации возникают в области обрыва границ контакта “образец – ударник” и “образец – опорный стержень”. Их уровень значительно меньше максимальных осевых деформаций и напряжений. Максимальные радиальные напряжения развиваются вблизи оси таблетки и достигают значений одного порядка с осевыми напряжениями. Истинные пластические деформации в таблетке при коэффициенте трения 0,3 достигают 100 % при осадке 50 %. Осевые силы при учете сил трения достигают больших значений, чем без их учета. Относительные различия увеличиваются при увеличении коэффициента трения, степени деформации, упрочнения и чувствительности материала к скорости деформации. Формоизменение образцов зависит от величины коэффициента трения и степени сжатия. Бочкообразование становится заметным при коэффициенте трения и степени осадки более 0,1. Этот параметр может быть использован для оценки величины коэффициента трения.

Для вязкопластических материалов, чувствительных к скорости деформации, например свинца, с увеличением скорости удара и, соответственно, скорости деформаций роль трения и радиальных сил инерции существенно возрастает.

#### **Заключение.**

1. Изложен обзор состояния проблемы построения динамических диаграмм деформирования упруговязкопластических материалов с учетом сил трения и радиальной инерции методом прямого удара.

2. Приведены результаты численного исследования влияния трения на напряженно-деформированное состояние упруговязкопластических образцов-таблеток и их формоизменения в процессе нагружения при больших деформациях.

3. Известные численно-аналитические методики учета сил трения по Кулону и радиальной инерции предполагают однородность напряженно-деформированного состояния образцов таблеток, что обосновано только при деформациях и коэффициентах трения менее 0.1.

4. Отсутствуют методики оценки сил трения в конкретных экспериментах на ударное сжатие методом прямого удара.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

[1] Nowacki W. K., Klepaczko J. R. New experimental methods in material dynamics and impact // INB ZTUREK. 2001. P. 223–266.

[2] Klepaczko J. R. Lateral inertia corrections in impact experiments // Technical Report № 17, Institute of Fundamental Technological Research, 1969. Warsaw.

[3] Klepaczko J. R., Hauser F. E. Radial inertia in compression testing of materials // Division of inorganic materials, Technical Report (Internal) UC-Berkeley, California, 1970.

[4] Malinowski J. Z., Klepaczko J. R. A unified analytic and numerical approach to specimen behaviour in split-Hopkinson pressure bar // International Journal of Mechanical Sciences. 1986. 28. P. 381.

[5] Malatynski M. Tests on plasticity of lad within wide range of strain rates and study of inertia effects // Ph. D. Thesis, Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Sciences. 1980.

[6] Dharan C. K. H., Hauser F. E. Determination of stress-strain characteristics at very high strain rates // Experimental Mechanics. 1970. № 10. P. 370.

[7] Montgomery R. S. Friction and wear at high sliding speeds // Wear. 1976. 36. P. 275.

[8] Ostwaldt D., Klepaczko J. R., Klimanek P. Compression tests of polycrystalline iron up to large strains over a large range of strain rates // Proceedings of International Conference DYMAT 97. Les editions de physique. 1997. P. 3–385.

[9] Баженов В. Г., Баранова М. С., Павленкова Е. В. Развитие и верификация метода прямого удара для идентификации вязкопластических характеристик материалов в экспериментах на газодинамической копровой установке // Проблемы прочности и пластичности. 2009. Вып. 71. С. 184–192.

[10] Баженов В. Г., Баранова М. С., Павленкова Е. В. Методика исследования упругопластических характеристик материалов на газодинамической копровой установке по показаниям двух датчиков деформаций // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 6 (1). С. 154–157.

V. G. Bazhenov, M. S. Baranova, D. L. Osetrov

## INFLUENCE OF FRICTION ON THE SHOCK COMPRESSION FORCES AND FORMING OF VISCOELASTICPLASTIC TABLETS-SPECIMENS

*National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russia*

**Abstract.** Overview of the problem of constructing of dynamic stress-deformation diagrams considering friction and radial inertia by the direct impact method and results of a numerical study of friction influence on the strain – stress state of tablets-specimens and forming in the process of loading for large deformations are presented. The inaccuracies of neglect frictional forces depending on the friction coefficient, the degree of strain, hardening and sensitivity to rate of material deformation (12X18H10T steels, 09G2S and C1 lead) are estimated.

**Keywords:** numerical simulation, shock compression, tablets-specimens, elastoviscoplastic materials, the dynamic stress-strain diagram, direct impact method, friction.

### REFERENCES

- [1] Nowacki W. K., Klepaczko J. R. New experimental methods in material dynamics and impact // INB ZTUREK. 2001. P. 223–266.
- [2] Klepaczko J. R. Lateral inertia corrections in impact experiments. Technical Report № 17, Institute of Fundamental Technological Research, 1969. Warsaw.
- [3] Klepaczko J. R., Hauser, F. E. Radial inertia in compression testing of materials // Division of inorganic materials, Technical Report (Internal) UC- Berkeley, California, 1970.
- [4] Malinowski J. Z., Klepaczko J. R. A unified analytic and numerical approach to specimen behaviour in split-Hopkinson pressure bar // International Journal of Mechanical Sciences. 1986. 28. P. 381.
- [5] Malatynski M. Tests on plasticity of lad within wide range of strain rates and study of inertia effects // Ph. D. Thesis, Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Sciences. 1980.
- [6] Dharan C. K. H., Hauser F. E. Determination of stress-strain characteristics at very high strain rates // Experimental Mechanics. 1970. № 10. P. 370.
- [7] Montgomery R. S. Friction and wear at high sliding speeds // Wear. 1976. 36. P. 275.
- [8] Ostwaldt D., Klepaczko J. R., Klimanek P. Compression tests of polycrystalline a-iron up to large strains over a large range of strain rates // Proceedings of International Conference DYMAT 97. Les editions de physique. 1997. P. 3–385.
- [9] Bazhenov V. G., Baranova M. S., Pavlenkova E. V. Razvitie i verifikacija metoda prjamogo udara dlja identifikacii vjzokoplasticheskikh harakteristik materialov

---

*Bazhenov Valentin Georgievich*, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Senior Researcher, Head of Laboratory, Research Institute of Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russia.

*Baranova Maria Sergeevna*, PhD in Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Research Institute of Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russia.

*Osetrov Dmitry Lvovich*, Junior Researcher, Research Institute of Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russia.

v jeksperimentah na gazodinamicheskoj koprovoj ustanovke // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2009. Vyp. 71. С. 184–192. (in Russian).

[10] Bazhenov V. G., Baranova M. S., Pavlenkova E. V. Metodika issledovanija uprugoplasticheskikh harakteristik materialov na gazodinamicheskoj koprovoj ustanovke po pokazanijam dvuh datchikov deformacij // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo. 2011. № 6 (1). P. 154–157. (in Russian).

М. Д. Коваленко<sup>1</sup>, Д. А. Аbruков<sup>2</sup>

## ИЗГИБ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО ДЛИННЫМ СТОРОНАМ ПОЛУПОЛОСЫ, НА ТОРЦЕ КОТОРОЙ ЗАДАН ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

<sup>1</sup> *Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики  
Российской академии наук, г. Москва, Россия*

<sup>2</sup> *Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
г. Чебоксары, Россия*

**Аннотация.** Построено точное аналитическое решение краевой задачи изгиба полуполосы с защемленными длинными сторонами, на торце задан изгибающий момент. Решение представляется в рядах по функциям Фадля – Папковича. Искомые коэффициенты ряда находятся с помощью систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича.

**Ключевые слова:** изгиб пластины, изгиб полуполосы, функции Фадля – Папковича, аналитические решения.

УДК: 539.3+624.073

**Введение.** В работах [1]–[3] изучались свойства систем функций Фадля – Папковича, возникающих при решении двумерной краевой задачи теории упругости в прямоугольнике (полуполосе) с однородными граничными условиями по двум противоположным сторонам. Функции Фадля – Папковича комплекснозначны и не образуют базиса на отрезке в обычном смысле [1]. Поэтому разложения по ним невозможно построить, опираясь на классический аппарат теории базиса функций [4]. Решению краевой задачи предшествует изучение так называемых разложений Лагранжа [1]. Разложения Лагранжа являются аналогами разложений по тригонометрическим системам функций и играют такую же роль при решении краевых задач, какую тригонометрические ряды играют в решениях Файлона – Рибьера. Аналогичная ситуация

---

© Коваленко М. Д., Аbruков Д. А., 2016

*Коваленко Михаил Денисович*

e-mail: kov08@inbox.ru, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия.

*Аbruков Денис Александрович*

e-mail: AbrukovDA@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-41-02-644 р\_поволжье\_а.

Поступила 12.03.2016

имеет место и в задаче изгиба тонких прямоугольных пластин, а также ее частного случая – изгиба полуполосы.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим пластину, отнесенную к декартовым координатам  $x, y$ . Дифференциальные уравнения равновесия можно записать в виде [5]

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -P(x, y), \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x(x, y), \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $P(x, y)$  – произвольная поперечная нагрузка,  $Q_x, Q_y$  – перерезывающие силы,  $M_x, M_y, M_{xy}$  – изгибающие и крутящий моменты.

Моменты и углы поворота  $\Phi_x, \Phi_y$  можно выразить через прогиб  $w = w(x, y)$ :

$$\begin{aligned} M_x(x, y) &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad M_y(x, y) = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \\ M_{xy}(x, y) &= -M_{yx}(x, y) = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \Phi_x(x, y) = D \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Phi_y(x, y) = D \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона, а

$$D = \frac{E \rho^3}{12(1 - \nu^2)}$$

– цилиндрическая жесткость пластины ( $E$  – модуль упругости,  $\rho$  – толщина пластины).

Кроме того,

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \quad (1.3)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа на плоскости.

Подставляя выражения (1.3) в первое из уравнений (1.1), получим основное дифференциальное уравнение теории изгиба пластин

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = P(x, y). \quad (1.4)$$

Помимо обычных сил  $Q_x, Q_y$  вводятся также обобщенные в смысле Кирхгоффа перерезывающие силы

$$\begin{aligned} K_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \\ K_y &= Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Будем строить решение, пользуясь методом начальных функций [6], позволяющим эффективно получать выражения для функций Фадля – Папковича. Основные соотношения метода имеют вид

$$\begin{aligned} W(x, y) &= L_{WW}(y)W_0(x) + L_{W\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{WM}(y)M_0(x) + L_{WQ}(y)Q_0(x), \\ \Phi_y(x, y) &= L_{\Phi W}(y)W_0(x) + L_{\Phi\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{\Phi M}(y)M_0(x) + L_{\Phi Q}(y)Q_0(x), \\ M_y(x, y) &= L_{MW}(y)W_0(x) + L_{M\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{MM}(y)M_0(x) + L_{MQ}(y)Q_0(x), \\ K_y(x, y) &= L_{QW}(y)W_0(x) + L_{Q\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{QM}(y)M_0(x) + L_{QQ}(y)Q_0(x), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $L_{WW}(h)$ ,  $L_{WM}(h)$  и т. д. – операторы метода начальных функций (см. [6]). Функции  $W(x, y)$ ,  $\Phi_y(x, y)$ ,  $M_y(x, y)$ ,  $K_y(x, y)$ , определенные при  $y = 0$ ,

$$\begin{aligned} W_0(x) &= Dw(x, 0), & \Phi_0(x) &= \frac{\partial W(x, 0)}{\partial y}, \\ M_0(x) &= M_y(x, 0), & Q_0(x) &= K_y(x, 0), \end{aligned} \quad (1.7)$$

называются начальными. Зная начальные функции, по формулам (1.6), (1.7) можно найти основные факторы.

Рассмотрим полуполосу  $\{ \Pi : |x| \geq 0, |y| \leq h \}$  шириной  $2h$  с заземленными краями  $y = \pm h$ :

$$W(x, \pm h) = \Phi_y(x, \pm h) = 0 \quad (1.8)$$

и с некоторыми граничными условиями на торце  $x = 0$ .

С помощью формул (1.6) удовлетворим граничным условиям (1.8), которые примут вид:

$$\begin{aligned} L_{\Phi W}(\alpha, h)W_0(x) + L_{\Phi M}(\alpha, h)M_0(x) &= 0, \\ L_{WW}(\alpha, h)W_0(x) + L_{WM}(\alpha, h)M_0(x) &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь  $W_0(x) = Dw(x, 0)$ ,  $M_0(x) = M_y(x, 0)$  – начальные функции, определенные при  $y = 0$ ,  $\alpha = d/dx$  – оператор дифференцирования.

Введем разрешающую функцию  $F(x)$  по формулам

$$W_0(x) = -L_{\Phi M}(\alpha, h)F(x), \quad M_0(x) = L_{\Phi W}(\alpha, h)F(x). \quad (1.10)$$

При этом первое из уравнений (1.9) будет тождественно удовлетворено, а второе примет вид

$$[L_{WM}(\alpha, h)L_{\Phi W}(\alpha, h) - L_{WW}(\alpha, h)L_{\Phi M}(\alpha, h)] F(x) = 0. \quad (1.11)$$

Раскрывая выражения для дифференциальных операторов, получим обыкновенное дифференциальное уравнение бесконечного порядка

$$\left( \frac{2\alpha h + \sin 2\alpha h}{4\alpha} \right) F(x) = 0. \quad (1.12)$$

Будем искать его решение в виде

$$F(x) = e^{\lambda x}. \quad (1.13)$$

Подставляя (1.13) в (1.11), получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$\frac{L(\lambda, h)}{\lambda} = 0, \quad (1.14)$$

$$L(\lambda, h) = \frac{1}{4} (2\lambda h + \sin 2\lambda h). \quad (1.15)$$

Уравнение (1.15) имеет бесконечное множество комплексных корней  $\{ \pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k \} = \Lambda$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Ниже для иллюстрации приведены значения пяти корней уравнения (1.15) при  $h = 1$ ,  $\nu = \frac{1}{3}$ , принадлежащих первой координатной четверти (табл. 1).

Для определения точных значений  $\lambda_k$  можно воспользоваться асимптотической формулой

$$\lambda_k \approx \frac{1}{h} \left[ k\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(4k\pi - \pi)}{4k\pi} \right] + i \frac{1}{h} \left[ \frac{\ln(4k\pi)}{2} - \frac{\ln(4k\pi - \pi)}{4k\pi} \right].$$

Таблица 1

№ корня $\lambda_k$	$Re\lambda_k$	$Im\lambda_k$
1	2.10619611524533	1.12536430580093
2	5.356268698639631	1.551574372912625
3	8.536682426575915	1.77554367351104
4	11.69917761282565	1.929404496552787
5	14.85405991263802	2.046852462382667

Итак, решение уравнения (1.11) имеет вид

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k e^{\bar{\lambda}_k x} \right) \quad (\lambda_k \in \Lambda). \quad (1.16)$$

Подставляя (1.16) в формулы (1.9), найдем начальные функции, а затем по формулам (1.6) – прогиб, углы поворота и моменты ( $Re\lambda_k < 0$ ,  $W(x, y) = Dw(x, y)$ ):

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \omega(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \Phi_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k \omega(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \bar{\lambda}_k \omega(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \Phi_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_y(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \varphi_y(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ M_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ M_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_y(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k m_y(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ M_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_{xy}(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k m_{xy}(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned} \omega(\lambda_k, y, h) &= \frac{1}{2} [\lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y + (\sin \lambda_k h + \lambda_k h \cos \lambda_k h) \cos \lambda_k y]; \\ \varphi_x(\lambda_k, y, h) &= \frac{\lambda_k}{2} \{ \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y + (\sin \lambda_k h + \lambda_k h \cos \lambda_k h) \cos \lambda_k y \}; \\ \varphi_y(\lambda_k, y, h) &= -\frac{\lambda_k^2}{2} [h \cos \lambda_k h \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y]; \\ m_x(\lambda_k, y, h) &= \frac{\lambda_k^2}{2} \{ (\nu - 1) \lambda_k \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y - \\ &- [(\nu + 1) \sin \lambda_k h - (\nu - 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h] \cos \lambda_k y \}; \\ m_y(\lambda_k, y, h) &= -\frac{\lambda_k^2}{2} \{ (\nu - 1) \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y + \\ &+ [(\nu + 1) \sin \lambda_k h + (\nu - 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h] \cos \lambda_k y \}; \\ m_{xy}(\lambda_k, y, h) &= -\frac{\lambda_k^3}{2} (\nu - 1) \{ h \cos \lambda_k h \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y \} \end{aligned} \quad (1.18)$$

– функции Фадля – Папковича.



Функции (1.18) назовем  $s$ -представлением функций Фадля – Папковича. Если же разрешающую функцию  $F(x)$  вводить по формулам:

$$W_0(x) = -L_{WM}(\alpha, h)F(x), \quad M_0(x) = L_{WW}(\alpha, h)F(x), \quad (1.19)$$

то получим другие выражения для функций Фадля – Папковича, которые назовем  $s$ -представлением функций Фадля – Папковича.

На продольных границах  $y = \pm h$  полуполосы граничные условия (1.8) удовлетворяются автоматически. Удовлетворяя с помощью выражений (1.17) граничным условиям, заданным на торце полуполосы  $x = 0$ , приходим к задаче определения коэффициентов  $A_k, \bar{A}_k$  из двух разложений по двум системам функций Фадля-Папковича, например:

$$\begin{aligned} M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y, h) + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y, h), \\ M_{xy}(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_{xy}(\lambda_k, y, h) + \bar{A}_k m_{xy}(\bar{\lambda}_k, y, h), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где  $M_x(y) = M_x(0, y)$ ,  $M_{xy}(y) = M_{xy}(0, y)$  – заданные при  $x = 0$  изгибающий и крутящий моменты. Коэффициенты  $A_k$  находятся из системы (1.20), как и в работах [7]–[9], с помощью функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича.

**2. Биортогональные функции.** Построим функции  $M_{xk}(y)$ ,  $M_{xyk}(y)$ , биортогональные к функциям Фадля – Папковича (1.18). Функции, получающиеся из функций Фадля – Папковича путем замены  $\lambda_k$  комплексным параметром  $\lambda$ , называются порождающими [7], [10].

Как и в статьях [7], [10], биортогональные функции будем искать как решения уравнений, полагая в них  $\lambda$  вещественным:

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_x(\lambda, y, h) M_{xk}(y) dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda, h)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} m_{xy}(\lambda, y, h) M_{xyk}(y) dy = \frac{\lambda^3 L(\lambda, h)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}. \quad (2.1)$$

Для комплексных значений  $\lambda$ , в частности при  $\lambda = \lambda_k \in \Lambda$ , прямую интегрирования в формулах (2.1) надо заменить  $T$ -образным контуром  $T$ , лежащим в плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  и составленным из отрезка мнимой оси  $y \in [-h, h]$  и луча  $x \in (-\infty, 0]$  [7], [10].

При  $\lambda \rightarrow \lambda_k$ , в соответствии с асимптотическим равенством [11]

$$f(\lambda) - f(\lambda_k) = f'(\lambda_k) (\lambda - \lambda_k),$$

из формул (2.1) получаются следующие соотношения биортогональности:

$$\begin{aligned} \int_T m_x(\lambda_m, y, h) M_{xk}(y) dy &= \begin{cases} \lambda_k^2 M_k & \text{при } \lambda_m = \lambda_k; \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \\ \int_T m_{xy}(\lambda_m, y, h) M_{xyk}(y) dy &= \begin{cases} \lambda_k^3 M_k & \text{при } \lambda_m = \lambda_k; \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$M_k = \frac{\lambda_k L'(\lambda_k, h)}{2} = \frac{\lambda_k h \cos^2(\lambda_k h)}{2}, \quad (0.1)$$

а  $L'(\lambda_k, h)$  – производная функции  $L(\lambda, h)$  при  $\lambda = \lambda_k$ .

Понятие биортогональности включает в себя также равенства вида ( $k, m$  – любые)

$$\int_T m_x(\bar{\lambda}_m, y, h) \bar{M}_{xk}(y) dy = \begin{cases} \bar{\lambda}_k^2 \bar{M}_k & \text{при } \bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_m; \\ 0 & \text{при } \bar{\lambda}_k \neq \bar{\lambda}_m \end{cases} \quad (2.4)$$

и

$$\int_T m_x(\bar{\lambda}_m, y, h) M_{xk}(y) dy = \int_T m_x(\lambda_m, y, h) \bar{M}_{xk}(y) dy = 0. \quad (2.5)$$

Они сразу следуют из формул (2.1), (2.2).

Ниже понадобятся разложения порождающих функций и функции  $L(\lambda, h)$  в ряды по степеням параметра  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} L(\lambda, h) &= h\lambda - \frac{h^3}{3}\lambda^3 + \dots; \\ m_x(\lambda, y, h) &= -h\lambda^3 + \frac{h(2h^2 + 3\nu y^2 - \nu h^2)^2}{6}\lambda^5 + \dots \\ m_{xy}(\lambda, y, h) &= \frac{hy(h^2 - y^2)(\nu - 1)}{6}\lambda^6 + \frac{hy(h^4 - y^4)(\nu - 1)}{60}\lambda^8 + \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Биортогональные функции  $M_{xk}(y)$ ,  $M_{xyk}(y)$  можно представить в виде суммы финитных, равных нулю вне отрезка  $|y| \leq h$ , и не финитных частей [7], [10]. Финитные части имеют вид ( $|y| \leq h$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ):

$$m_{xk}(y) = -\frac{\cos(\lambda_k y)}{2(\nu - 1)\lambda_k \sin(\lambda_k h)}, \quad m_{xyk}(y) = \frac{\sin(\lambda_k y)}{2(\nu - 1)\sin(\lambda_k h)}. \quad (2.7)$$

Простой способ их построения указан в статье [10].

**3. Решение краевой задачи.** Пусть на торце  $x = 0$  полуполосы  $\{\Pi : |x| \geq 0, |y| \leq h\}$  задан изгибающий момент  $M_x(y) = M_x(0, y)$ , а крутящий момент  $M_{xy}(y) = M_{xy}(0, y) = 0$ . Тогда система уравнений (1.20) примет вид

$$\begin{aligned} M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y, h) + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y, h), \\ 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_{xy}(\lambda_k, y, h) + \bar{A}_k m_{xy}(\bar{\lambda}_k, y, h). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Умножая равенства (3.1) соответственно на  $M_{xk}(y) + \bar{M}_{xk}(y)$  и  $M_{xyk}(y) + \bar{M}_{xyk}(y)$  и интегрируя обе части полученных равенств по контуру  $T$ , с учетом соотношений (2.2), (2.4), (2.5) для каждого номера  $k = 1, 2, \dots$ , получим систему алгебраических уравнений (см. (2.3), (2.7))

$$\begin{aligned} w_k^* &= A_k M_k + \bar{A}_k \bar{M}_k, \\ 0 &= \lambda_k A_k M_k + \bar{\lambda}_k \bar{A}_k \bar{M}_k, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$w_k^* = w_k + \bar{w}_k, \quad (3.3)$$

$$w_k = \int_{-h}^h M_x(y) m_{xk}(y) dy, \quad \bar{w}_k = \int_{-h}^h M_x(y) \bar{m}_{xk}(y) dy. \quad (3.4)$$

Поочередно умножая первое уравнение системы (3.2) на  $\bar{\lambda}_k$  и  $\lambda_k$  и вычитая второе уравнение, для каждого номера  $k = 1, 2, \dots$  получим решение системы (3.2)

$$A_k = -\frac{w_k^* \bar{\lambda}_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) M_k}, \quad \bar{A}_k = \frac{w_k^* \lambda_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) M_k}. \quad (3.5)$$

Дальнейшее построение решений состоит в подстановке выражений (3.5) в равенства (1.17) и последующем выделении по аналогии с работами [12], [13] нуль-рядов. В результате получим выражения для прогиба, углов поворота и моментов в полуполосе ( $a_k = \text{Re}\lambda_k$ ,  $b_k = \text{Im}\lambda_k$ ,  $a_k < 0$ ):

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{\omega(\lambda_k, y, h)}{M_k} w_k C(x) \right\}; \quad \Phi_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{\varphi_x(\lambda_k, y, h)}{\lambda_k M_k} w_k S(x) \right\}; \\ \Phi_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{\varphi_y(\lambda_k, y, h)}{M_k} w_k C(x) \right\}; \\ M_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{m_x(\lambda_k, y, h)}{M_k} w_k C(x) \right\}; \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{m_y(\lambda_k, y, h)}{\lambda_k^2 M_k} w_k T(x) \right\}; \quad M_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{m_{xy}(\lambda_k, y, h)}{\lambda_k M_k} w_k S(x) \right\},$$

где

$$\begin{aligned} C(x) &= \left\{ \cos(b_k x) - \frac{a_k \sin(b_k x)}{b_k} \right\} e^{a_k x}; \quad S(x) = -(a_k^2 + b_k^2) \frac{\sin(b_k x)}{b_k} e^{a_k x}; \\ T(x) &= -(a_k^2 + b_k^2) \left\{ \cos(b_k x) + \frac{a_k \sin(b_k x)}{b_k} \right\} e^{a_k x}. \end{aligned}$$

На основании зависимостей (1.1) и (1.5) получим:

$$Q_x(x, y) = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y(x, y) = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} K_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \\ K_y &= Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подставляя выражения (3.6) в равенства (3.7), (3.8), получим формулы для перерезывающих сил  $Q_x(x, y)$ ,  $Q_y(x, y)$  и  $K_x(x, y)$ ,  $K_y(x, y)$ :

$$\begin{aligned} Q_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{\lambda_k m_x(\lambda_k, y, h) \cdot dC(x)/dx + S(x) \cdot dm_{xy}(\lambda_k, y, h)/dy}{\lambda_k M_k} w_k \right\}, \\ Q_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{T(\lambda_k, x, l) \cdot dm_y(\lambda_k, y, h)/dy + \lambda_k m_{xy}(\lambda_k, y, h) \cdot dS(x)/dx}{\lambda_k^2 M_k} w_k \right\}, \\ K_x(x, y) &= Q_x(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{dm_{xy}(\lambda_k, y, h)/dy}{\lambda_k M_k} w_k S(x) \right\}, \\ K_y(x, y) &= Q_y(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{m_{xy}(\lambda_k, y, h)}{\lambda_k M_k} w_k \cdot dS(x)/dx \right\}. \end{aligned}$$

**Пример.** Пусть  $h = 1$ ,  $M_x(y) = y^4 - 1, 2y^2h^2 + 0, 2h^4$ . На рис. 1–4 показаны кривые распределения прогиба, моментов и перерезывающих сил на торце полуполосы.

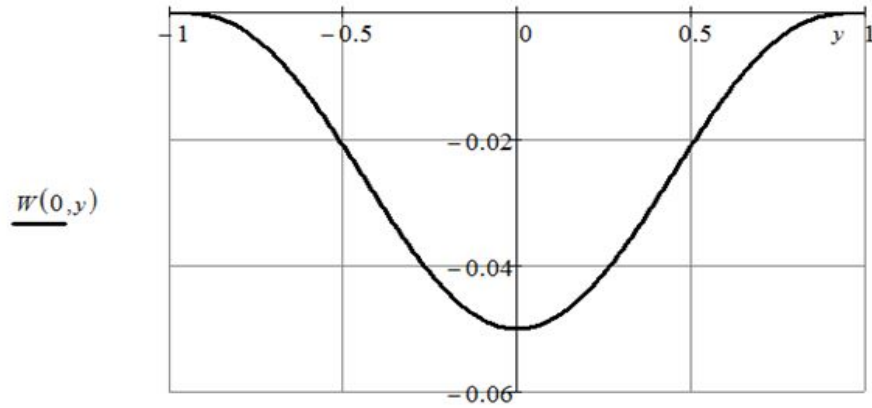


Рис. 1

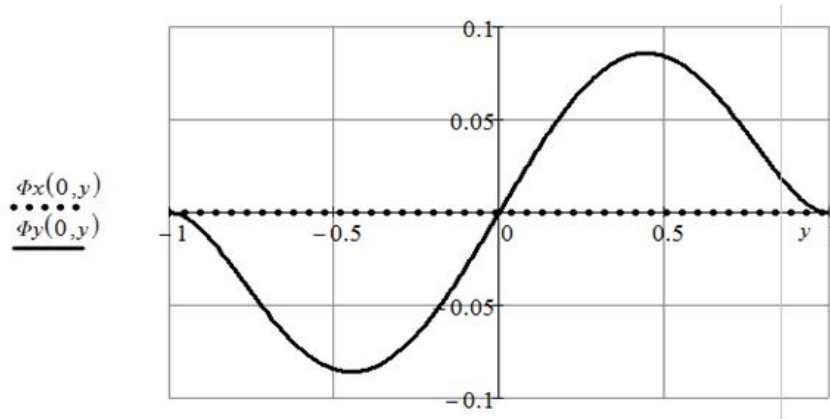


Рис. 2

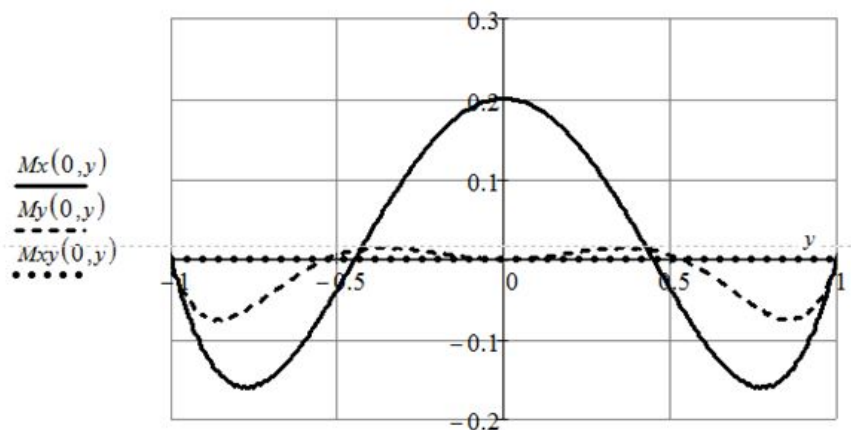


Рис. 3

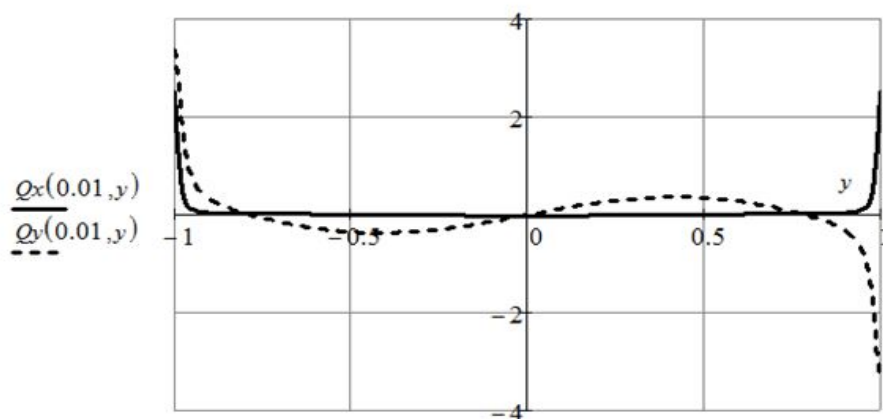


Рис. 4

**Заключение.** Впервые дано точное аналитическое решение краевой задачи изгиба полуполосы, продольные стороны которой зацемлены, а на торце задан изгибающий момент. Как и в случае плоской задачи теории упругости [7]–[9], решение строится в виде разложений по функциям Фадля – Папковича (однородным решениям), по существу, по той же схеме, что и решение в тригонометрических рядах. Искомые коэффициенты разложений находятся с помощью систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коваленко М. Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям // Доклады РАН. 1997. Т. 352. № 4. С. 480–482.
- [2] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 5. С. 78–98.

- [3] Коваленко М. Д., Меньшова И. В. Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича в обратно-симметрической задаче теории упругости для прямоугольной полуполосы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1(15). С. 81–90.
- [4] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999. 560 с.
- [5] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
- [6] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М.: Стройиздат, 1975. 224 с.
- [7] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 5. С. 78–98.
- [8] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Шуляковская Т. Д. // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 136–158.
- [9] Коваленко М. Д., Меньшова И. В. Аналитические решения двумерных краевых задач теории упругости в конечных областях с угловыми точками границы. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. 123 с.
- [10] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 136–158.
- [11] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. М.: ФМЛ, 1962. 608 с.
- [12] Аbruков Д. А. Изгиб полуполосы со свободными продольными краями, на торце которой заданы изгибающий момент и обобщенная поперечная сила. Точное решение краевой задачи // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 94–114.
- [13] Коваленко М. Д., Клейн Н. В. Однородные решения теории упругости. Биортогональные разложения // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. Т. 11. № 3. С. 393–408.

M. D. Kovalenko<sup>1</sup>, D. A. Abrukov<sup>2</sup>

**BEND CLAMPED ON THE LONG SIDES SEMI-STRIP,  
AT WHICH END-WALL A BENDING MOMENT IS GIVEN.  
THE EXACT SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM**

<sup>1</sup>*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** The exact analytical solution of a boundary value problem of a bend of a semi-strip which long sides are clamped, and at an end-wall the bending moment is set. The solution is submitted in series on Fadde – Papkovich functions. Required coefficients of series are by means of systems of functions, biorthogonal to Fadde – Papkovich functions.

**Keywords:** plate bending, semi-strip bending, Fadde – Papkovich functions, analytical solutions.

### REFERENCES

- [1] Kovalenko M. D. Razlozhenija Lagranzha i netrivial'nye predstavlenija nulja po odnorodnym reshenijam // Doklady RAN. 1997. T. 352. № 4. S. 480–482. (in Russian).
- [2] Kovalenko M. D., Shuljakovskaja T. D. Razlozhenija po funkcijam Fadlja – Papkovicha v polose. Osnovy teorii // Izvestija RAN. Mehanika tverdogo tela. 2011. № 5. S. 78–98. (in Russian).
- [3] Kovalenko M. D., Men'shova I. V. Razlozhenija Lagranzha po funkcijam Fadlja – Papkovicha v obratno-simmetricheskoj zadache teorii uprugosti dlja prjamougol'noj polupolosy // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2013. № 1(15). S. 81–90. (in Russian).
- [4] Kashin B. S., Saakjan A. A. Ortogonal'nye rjady. M.: AFC, 1999. 560 s. (in Russian).
- [5] Timoshenko S. P., Vojnovskij-Kruger S. Plastiny i obolochki. M.: Nauka, 1966. 636 s. (in Russian).
- [6] Vlasov V. V. Metod nachal'nyh funkcij v zadachah teorii uprugosti i stroitel'noj mehaniki. M.: Strojizdat, 1975. 224 s. (in Russian).
- [7] Kovalenko M. D., Shuljakovskaja T. D. // Izvestija RAN. Mehanika tverdogo tela. 2011. № 5. S. 78–98. (in Russian).
- [8] Kovalenko M. D., Men'shova I. V., Shuljakovskaja T. D. // Izvestija RAN. Mehanika tverdogo tela. 2013. № 5. S. 136–158. (in Russian).
- [9] Kovalenko M. D., Men'shova I. V. Analiticheskie reshenija dvumernyh kraevyh zadach teorii uprugosti v konechnyh oblastjakh s uglovymi tochkami granicy. Cheboksary: Chuvash. gos. ped. un-t, 2014. 123 s. (in Russian).

---

*Kovalenko Mikhail Denisovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.  
*Abrukov Denis Alexandrovich*, Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

[10] Kovalenko M. D., Men'shova I. V., Shuljakovskaja T. D. Razlozhenija po funkcijam Fadlja – Papkovicha. Primery reshenij v polupolose // Izvestija RAN. Mehanika tverdogo tela. 2013. № 5. S. 136–158. (in Russian).

[11] Fihtengol'c G. M. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija. T. I. M.: FML, 1962. 608 s. (in Russian).

[12] Abrukov D. A. Izgib polupolosy so svobodnymi prodol'nymi krajami, na torce kotoroj zadany izgibajushhij moment i obobshhennaja poperechnaja sila. Tochnoe reshenie kraevoj zadachi // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2014. № 4(22). S. 94–114. (in Russian).

[13] Kovalenko M. D., Klejn N. V. Odnorodnye reshenija teorii uprugosti. Biortogonal'nye razlozhenija // Mehanika kompozicionnyh materialov i konstrukcij. 2005. T. 11. № 3. С. 393–408. (in Russian).



В. М. Мирсалимов<sup>1,2</sup>, В. А. Аскаргов<sup>2</sup>

## МИНИМИЗАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ КОМПОЗИТА, АРМИРОВАННОГО ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ ВОЛОКНАМИ ПРИ ИЗГИБЕ

<sup>1</sup> Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджан

<sup>2</sup> Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан

**Аннотация.** Рассмотрена тонкая пластина из упругой изотропной среды (матрицы) и распределенных в ней одинаковых волокон (включений) из другого упругого материала при изгибе. Считается, что материал связующей среды ослаблен двоякопериодической системой сквозных трещин неравной длины коллинеарных осей абсцисс и ординат. Берега трещины свободны от внешних нагрузок. Принято, что пластина подвергается изгибу средними моментами (изгиб на бесконечности). Ресурс работы изгибаемой пластины из композитного материала, армированного однонаправленными волокнами, зависит от распределения напряжений в зонах взаимодействия ее элементов. Несущую способность композита можно повысить с помощью изменения геометрии соединения связующего и волокна. Решена обратная задача механики разрушения по определению оптимальной формы волокна, обеспечивающей минимизацию коэффициентов интенсивности напряжений (моментов) в окрестности вершин трещин. Предложены критерий и метод решения задачи по предотвращению разрушения композита при действии заданной системы внешних изгибающих нагрузок. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение задачи оптимального проектирования композита в зависимости от геометрических и механических характеристик связующего и волокна. Найденная форма поперечного сечения однонаправленных волокон обеспечивает повышение несущей способности композита.

**Ключевые слова:** связующее, волокна, изгиб, пластина из композитного материала, трещины, коэффициенты интенсивности напряжений, минимизация параметров разрушения.

УДК: 539.375

---

© Мирсалимов В. М., Аскаргов В. А., 2016

*Мирсалимов Вагиф Мирзахмедович*

**e-mail:** vagif.mirsalimov@imm.az, доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет; Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан.

*Аскаргов Вусал Али оглы*

**e-mail:** vaskarogov@yahoo.com, аспирант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан.

Поступила 12.06.2016

**Введение.** Как показывает практика, многокомпонентные среды (композиты) более надежны и долговечны, чем однородные [1], [2]. Кроме того, известно, что прочность зависит также от ее формы.

Процесс разрушения волокнистых композитных материалов определяется взаимодействием волокон с матрицей (связующим). Рассматривается составная упругая пластина, состоящая из упругой среды (матрицы) и распределенных в ней волокон из другого упругого материала. Подкрепляющие элементы (волокна) сравнительно небольшие по объему, существенно влияют на прочность составной пластины [1]. Ресурс работы составной пластины зависит от распределения напряжений в зонах взаимодействия ее элементов, поэтому оптимальное проектирование (определение оптимальных характеристик) таких материалов имеет важное значение. Оптимальное проектирование материалов и конструкций представляет собой обратную задачу механики деформируемого твердого тела. Работоспособность составной пластины (композита) можно повысить с помощью конструкторско-технологических приемов, в частности путем изменения геометрии соединения ее элементов.

Армированные волокна проектируют в основном круглого поперечного сечения. Как показывает опыт, от идеальной конструкторской геометрии реальные поверхности сечений подкрепляющих волокон отличаются наличием неровностей, являющихся неизбежным следствием процесса их изготовления. Несмотря на малые размеры неровностей, они могут оказывать существенное влияние на несущую способность композита. Поэтому исследование влияния параметров геометрии соединения связующего с волокнами на несущую способность крайне актуально.

**Постановка задачи.** Пусть неограниченная пластина из композитного материала подвергается изгибу средними моментами (изгиб на бесконечности)  $M_x = M_x^\infty$ ,  $M_y = M_y^\infty$ ,  $H_{xy} = 0$ . Рассмотрим составную упругую пластину, состоящую из матрицы (области  $D_*$ ) и распределенных в ней одинаковых волокон с поперечным сечением, близким к круговому (рис. 1). Считается, что материал связующей среды ослаблен двоякопериодической системой сквозных прямолинейных трещин коллинеарных осей абсцисс и ординат неравной длины. Обозначим границу раздела различных упругих сред через  $L'_{m,n}$  ( $m, n = 0, \pm 1, \dots$ ). Полагаем, что неизвестную границу  $L'_{m,n}$  соединения волокна со связующим можно представить в виде

$$r = \rho(\theta) = \lambda + \varepsilon H(\theta), \quad (1)$$

а центры двоякопериодической системы волокон расположены в точках

$$P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2, \quad \omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 2\ell_* \exp(i\alpha), \quad \ell_* > 0, \quad \text{Im}\omega_2 > 0,$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр, равный  $R_{\max}/\lambda$ ;  $R_{\max}$  – наибольшая высота неровности профиля контура  $L'_{m,n}$  от окружности радиусом  $r = \lambda$ .

Считается, что всюду на границе соединения  $L'_{m,n}$  имеет место жесткое сцепление материалов. Берега трещин свободны от внешних нагрузок и в процессе деформации композита не входят в контакт. Начало системы координат совмещаем с геометрическим центром круга  $L_{0,0}$  ( $r = \lambda$ ) в плоскости композита. Для оптимизации несущей способности составной пластины предлагается метод, заключающийся в выборе формы поверхности поперечного сечения волокна, обеспечивающей повышение несущей способности композита. Таким образом, требуется определить такую геометрию поверхности соединения волокна и связующего, чтобы созданное им упругое напряженное поле препятствовало бы росту трещин в композите. Очевидно, что чем ниже

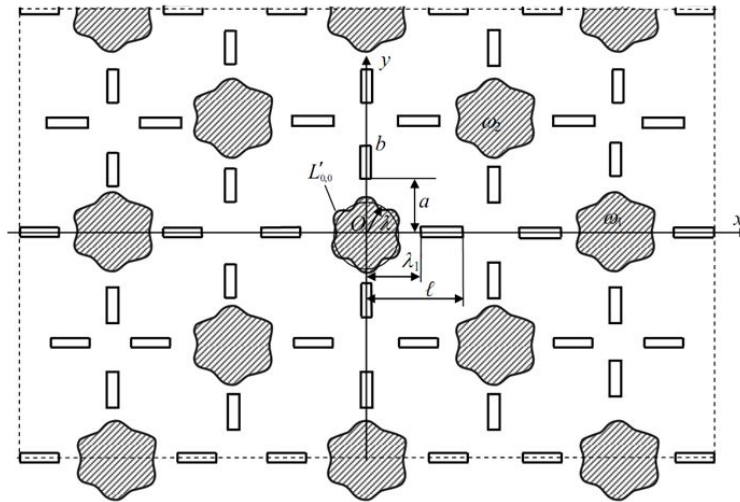


Рис. 1. Расчетная схема задачи минимизации

коэффициенты интенсивности напряжений (параметры разрушения) в окрестности вершин трещин в составной пластине, тем выше ее несущая способность. Решению подобных задач механики посвящены работы [3]–[9].

Управляющими переменными принимаем параметры границы соединения волокон и связующего. Представим границу неизвестного контура  $L'_{m,n}$  в виде (1), где функция  $H(\theta)$  подлежит определению в процессе решения задачи оптимизации. Без потери общности поставленной задачи оптимизации принимаем, что искомая функция  $H(\theta)$  симметрична относительно координатных осей и может быть представлена виде отрезка тригонометрического ряда Фурье. Таким образом, задача оптимизации сводится к определению коэффициентов  $d_{2k}$  (параметров управления) этого ряда Фурье.

Согласно теории квазихрупкого разрушения Ирвина – Орована параметром, характеризующим напряженное состояние в окрестности кончика трещины, является коэффициент интенсивности напряжений. Следовательно, ответственной за разрушение материала композита можно считать величину максимального коэффициента интенсивности напряжений в окрестности кончика трещины. Для нахождения геометрии соединения материалов введем в рассматриваемую задачу в качестве критерия определения геометрии соединения (функции  $H(\theta)$ ) минимизацию коэффициентов интенсивности напряжений (моментов). Для предотвращения роста трещин достаточно, чтобы в окрестности вершин трещин все коэффициенты интенсивности напряжений были равны нулю. Требуется найти такую функцию  $H(\theta)$ , чтобы созданное в процессе нагружения композита изгибающими моментами напряженно-деформированное поле препятствовало росту трещин. Это дополнительное условие позволяет определить искомую функцию  $H(\theta)$  геометрии соединения материалов.

На основании симметрии граничных условий и геометрии области  $D_*$ , занятой упругой средой, напряжения в связующем являются двоякопериодическими функциями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Отделим мысленно волокно от связующего. При деформации композита смежные точки контуров волокон и связующего будут иметь одинаковые перемещения, а усилия, действующие со стороны связующего на любое волокно, будут равны по величине и противоположны по знаку усилиям, действующим на связующее со

стороны волокна. Так как решение задачи для связующего обладает свойством двоякопериодичности, достаточно рассмотреть условия сопряжения связующего и волокна лишь вдоль контура  $L'_{0,0}$ .

**Метод решения задачи.** Введем обозначения:  $w_0$  – прогиб (волокна) области  $S'_{0,0}$ , ограниченной контуром  $L'_{0,0}$ , а  $w$  – прогиб пластины вне областей  $S'_{m,n}$  ( $m, n = 0, \pm 1, \dots$ ) соприкосновения волокон поперечного сечения, близкого к круговому. Представим эти прогибы через бигармонические функции.

Комплексные потенциалы, относящиеся к связующему, обозначим через  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , а относящиеся к волокну – через  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$ . Искомые функции (напряжения, моменты, прогиб, коэффициенты интенсивности напряжений) ищем в виде разложений по малому параметру, в которых пренебрегаем членами, содержащими  $\varepsilon$  в степени выше первой. Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений технической теории изгиба пластин. Значения компонент тензора напряжений (моментов) при  $r = \rho(\theta)$  найдем, разлагая в ряд выражения для моментов в окрестности  $r = \lambda$ .

Используя процедуру метода возмущений, на основании граничных условий рассматриваемой задачи получим граничные условия задачи на контуре  $L_{0,0}$  ( $\tau = \lambda \exp(i\theta)$ ) для комплексных потенциалов:

для нулевого приближения

$$\begin{aligned} & \Phi^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\tau} \Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau) \right] = \\ & = \Phi_0^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi_0^{(0)}(\tau)} - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\tau} \Phi_0^{(0)'}(\tau) + \Psi_0^{(0)}(\tau) \right] \text{ на } L_{0,0}, \\ & \kappa \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} + \Phi^{(0)}(\tau) - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\tau} \Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau) \right] = \\ & = \frac{D_0(1-v_0)}{D(1-v)} \left\{ \kappa_0 \overline{\Phi_0^{(0)}(\tau)} + \Phi_0^{(0)}(\tau) - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\tau} \Phi_0^{(0)'}(\tau) + \Psi_0^{(0)}(\tau) \right] \right\}, \\ & \kappa \Phi^{(0)}(t) + \overline{\Phi^{(0)}(t)} + t \overline{\Phi^{(0)'}(t)} + \overline{\Psi^{(0)}(t)} = iC^{(0)}, \\ & \kappa \Phi^{(0)}(t_1) + \overline{\Phi^{(0)}(t_1)} + t_1 \overline{\Phi^{(0)'}(t_1)} + \overline{\Psi^{(0)}(t_1)} = iC_1^{(0)}; \end{aligned} \quad (2)$$

для первого приближения

$$\begin{aligned} & \Phi^{(1)}(\tau) + \overline{\Phi^{(1)}(\tau)} - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\tau} \Phi^{(1)'}(\tau) + \Psi^{(1)}(\tau) \right] = \\ & = \Phi_0^{(1)}(\tau) + \overline{\Phi_0^{(1)}(\tau)} - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\tau} \Phi_0^{(1)'}(\tau) + \Psi_0^{(1)}(\tau) \right] + f_1 + if_2 \text{ на } L_{0,0}, \\ & \kappa \overline{\Phi^{(1)}(\tau)} + \Phi^{(1)}(\tau) - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\tau} \Phi^{(1)'}(\tau) + \Psi^{(1)}(\tau) \right] = \\ & = \frac{D_0(1-v_0)}{D(1-v)} \left\{ \kappa_0 \overline{\Phi_0^{(1)}(\tau)} + \Phi_0^{(1)}(\tau) - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\tau} \Phi_0^{(1)'}(\tau) + \Psi_0^{(1)}(\tau) \right] \right\} + g_1^* + ig_2^*, \\ & \kappa \Phi^{(1)}(t) + \overline{\Phi^{(1)}(t)} + t \overline{\Phi^{(1)'}(t)} + \overline{\Psi^{(1)}(t)} = iC^{(1)}, \\ & \kappa \Phi^{(1)}(t_1) + \overline{\Phi^{(1)}(t_1)} + t_1 \overline{\Phi^{(1)'}(t_1)} + \overline{\Psi^{(1)}(t_1)} = iC_1^{(1)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2$  ( $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );  $v$  и  $v_0$  – коэффициенты Пуассона связующего и волокна соответственно;  $\kappa = -(3+v)/(1-v)$ ;  $\kappa_0 = -(3+v_0)/(1-v_0)$ ;

функция  $f_1 + if_2$  выражается через функцию  $H(\theta)$  и компоненты перемещений на контуре  $L_{0,0}$  нулевого приближения; аналогично функция  $g_1^* + ig_2^*$  зависит от функции  $H(\theta)$  и компонент напряжений при  $\tau = \lambda e^{i\theta}$  нулевого приближения;  $D$  и  $D_0$  – цилиндрическая жесткость связующего и волокна;  $t$  и  $t_1$  – аффиксы берегов трещин, коллинеарных осей абсцисс и ординат соответственно;  $C$  и  $C_1$  – действительные постоянные, определяемые в ходе решения задачи из условия равенства нулю скачка прогиба в вершинах трещин.

Рассматриваемая задача определения напряженно-деформированного состояния составной пластины сводится в каждом приближении к отысканию двух функций  $\Phi_0(z)$ ,  $\Psi_0(z)$  и  $\Phi(z)$ ,  $\Psi(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$ , аналитических в соответствующих областях и удовлетворяющих соответствующим граничным условиям (2), (3) и (4), (5).

Комплексные потенциалы  $\Phi_0^{(0)}(z)$  и  $\Psi_0^{(0)}(z)$  регулярны в области  $S_{0,0}$ , ограниченной контуром  $L_{0,0}$ , и, следовательно, могут быть представлены в виде [10]

$$\Phi_0^{(0)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}^{(0)} z^{2k}, \quad \Psi_0^{(0)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}^{(0)} z^{2k}. \quad (6)$$

Комплексные потенциалы  $\Phi^{(0)}(z)$  и  $\Psi^{(0)}(z)$  в рассматриваемом случае (изгиб на бесконечности) ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(z) &= \Phi_1^{(0)}(z) + \Phi_2^{(0)}(z) + \Phi_3^{(0)}(z), \\ \Psi^{(0)}(z) &= \Psi_1^{(0)}(z) + \Psi_2^{(0)}(z) + \Psi_3^{(0)}(z), \\ \Phi^{(0)}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^0 \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}, \\ \Psi^{(0)}(z) &= \frac{1}{2} \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{D(1-\nu)} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2}^0 \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^0 \frac{\lambda^{2k+2} Q^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}, \\ \Phi_2(z) &= \frac{1}{\pi i(1+\kappa_*)} \int_L g^{(0)}(t) \zeta(t-z) dt + A, \\ \Psi_2(z) &= \frac{1}{\pi i(1+\kappa_*)} \int_L g^{(0)}(t) [\kappa \zeta(t-z) + Q(t-z) - t\gamma(t-z)] dt + B, \\ \Phi_3(z) &= \frac{1}{\pi i(1+\kappa_*)} \int_{L_1} g_1^{(0)}(t_1) \zeta(t_1-z) dt_1, \\ \Psi_3(z) &= -\frac{1}{\pi(1+\kappa_*)} \int_{L_1} \left\{ \overline{g_1^{(0)}(t_1) \kappa_* \zeta(it_1-z)} - g_1^{(0)}(t_1) [Q(it_1-z) + it_1 \gamma(it_1-z)] \right\} dt_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\gamma(z)$  – эллиптическая функция Вейерштрасса,  $Q(z)$  – специальная мероморфная функция [11].

Интегралы в (8) берутся по линии  $L = (-\ell, \lambda_1) \cup (\lambda_1, \ell)$  и  $L_1 = (-b, a) \cup (a, b)$ ,  $g^{(0)}(x)$  и  $g_1^{(0)}(y)$  – искомые функции, характеризующие раскрытие берегов трещин в нулевом приближении;  $\kappa_* = (3-\nu)/(1-\nu)$ .

Из условий равенства нулю главного вектора и главного момента сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области  $D_*$ , занятой материалом связующего, следует

$$(kA - \bar{A})\omega_k - \bar{B}\omega_k = -(\bar{\delta}_k + \delta_k)a_*^0 + (\bar{\gamma}_k + \bar{\delta}_k)\bar{a}_*^0 + (\bar{\delta}_k - \delta_k)b_*^0 + (\bar{\delta}_k - \bar{\gamma}_k)\bar{b}_*^0 + \beta_2^0\lambda^2\delta_k - \alpha_2^0\lambda^2(k\delta_k - \gamma_k) \quad (k=1,2),$$

$$a_*^0 = \frac{\kappa_*}{\pi i(1 + \kappa_*)} \int_L tg^{(0)}(t)dt, \quad b_*^0 = -\frac{\kappa_*}{\pi i(1 + \kappa_*)} \int_{L_1} t_1g_1^{(0)}(t_1)dt_1.$$

Из условия симметрии относительно координатных осей находим, что

$$Im\alpha_{2k}^0 = 0, \quad Im\beta_{2k}^0 = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

К основным представлениям (6), (8) следует добавить дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи

$$\int_{-\ell}^{-\lambda_1} g^{(0)}(t)dt = 0, \quad \int_{\lambda_1}^{\ell} g^{(0)}(t)dt = 0, \quad (9)$$

$$\int_{-b}^{-a} g_1^{(0)}(t_1)dt_1 = 0, \quad \int_a^b g_1^{(0)}(t_1)dt_1 = 0.$$

Обозначим левую часть краевого условия (2) через  $f_1^0 - if_2^0$ . Считаем, что на контуре  $L_{0,0}$  ( $\tau = \lambda \exp(i\theta)$ ) функция  $f_1^0 - if_2^0$  разлагается в ряд Фурье, который на основании симметрии задачи имеет вид

$$f_1^0 - if_2^0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}^0 e^{2ik\theta}, \quad ImA_{2k}^0 = 0.$$

Для определения потенциалов  $\Phi_0^{(0)}(z)$  и  $\Psi_0^{(0)}(z)$  на контуре  $L_{0,0}$  будем иметь граничное условие

$$\Phi_0^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi_0^{(0)}(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi_0^{(0)'}(\tau) + \Psi_0^{(0)}(\tau)] e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}^0 e^{2ik\theta}. \quad (10)$$

Подставив комплексные потенциалы (6) в граничное условие (10) и приравнявая коэффициенты рядов Фурье в левой и правой частях, получим

$$\Phi_0^{(0)}(z) = \frac{A_0^0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k}^0 \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{2k}, \quad (11)$$

$$\Psi_0^{(0)}(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} [(2k+1)A_{-2k-2}^0 + A_{2k+2}^0] \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{2k}.$$

С помощью потенциалов (11) после некоторых преобразований запишем краевые условия на контуре  $L_{0,0}$  для комплексных потенциалов  $\Phi^{(0)}(z)$  и  $\Psi^{(0)}(z)$  в виде

$$\Phi^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} - \bar{\tau} [\Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau)] e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}^0 e^{2ik\theta},$$

$$\begin{aligned} & \kappa \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} + \Phi^{(0)}(\tau) - \left[ \tau \Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau) \right] e^{2i\theta} = \\ & = \frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)} \left\{ A_0^0 \frac{1+\kappa_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k}^0 e^{2ik\theta} + \kappa_0 \sum_{k=1}^{\infty} A_{-2k}^0 e^{-2ik\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Используя методы решения, изложенные в [11], [12] и удовлетворяя (12), получим три бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно  $\alpha_{2k}^0$ ,  $\beta_{2k}^0$  и  $A_{2k}^0$ . Эти системы имеют громоздкий вид. Однако в большинстве практически важных случаев их можно урезать до двух-трех уравнений и получить весьма точные результаты [11] для рабочих диапазонов изменения радиуса  $\lambda$ .

В полученные системы алгебраических уравнений входят посредством интегральных членов искомые функции  $g^{(0)}(x)$  и  $g_1^{(0)}(y)$ . Для их определения используем граничное условие на берегах трещин. Требуя, чтобы комплексные потенциалы (8) удовлетворяли граничному условию (3), получим два сингулярных интегральных уравнения относительно искомых функций  $g^{(0)}(x)$  и  $g_1^{(0)}(y)$  нулевого приближения:

$$\begin{aligned} & \frac{1+\kappa}{\pi i(1+\kappa)} \int_L g^{(0)}(t) \zeta(t-x) dt + \frac{1}{\pi i(1+\kappa_*)} \\ & \int_L g^{(0)}(t) [\kappa_* \zeta(t-x) + Q(t-x) - (t-x)\gamma(t-x)] dt - \\ & -\kappa_* A + \bar{A} + \bar{B} + (1+\kappa)\Phi_*(x) + x\overline{\Phi'_*(x)} + \overline{\Psi_*(x)} = iC^{(0)}, \\ & \Phi_*(x) = \Phi_1^{(0)}(x) + \Phi_3^{(0)}(x), \quad \Psi_*(x) = \Psi_1^{(0)}(x) + \Psi_3^{(0)}(x), \\ & -\frac{1+\kappa}{\pi i(1+\kappa_*)} \int_{L_1} g_1^{(0)}(t_1) \left[ i\zeta(it-iy) - i\overline{\zeta(it-iy)} \right] dt_1 + \\ & + \frac{1+\kappa}{\pi i(1+\kappa_*)} \int_L \overline{g_1^{(0)}(t_1)} \left[ -i\overline{\zeta(it-iy)} + iQ(it-iy) + (it-iy)\overline{\gamma(it-iy)} \right] dt_1 + N(y) = iC_1^{(0)}, \\ & N(y) = \kappa\Phi_s(iy) + \overline{\Phi_s(iy)} + iy\overline{\Phi'_s(iy)} + \overline{\Psi_s(iy)}, \\ & \Phi_s(x) = \Phi_1^{(0)}(x) + \Phi_3^{(0)}(x), \quad \Psi_s(x) = \Psi_1^{(0)}(x) + \Psi_3^{(0)}(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Для определения постоянной  $C^{(0)}$  (в общем случае кусочно-постоянной функции) имеем [13] следующие соотношения:

$$\operatorname{Re} \int_{-\ell}^{-\lambda_1} \bar{t} g^{(0)}(t) dt = 0, \quad \operatorname{Re} \int_{\lambda_1}^{\ell} \bar{t} g^{(0)}(t) dt = 0,$$

обеспечивающие равенство нулю скачка прогиба в вершинах трещин  $L$ . Аналогично для определения постоянной  $C_1^{(0)}$  имеем соотношения

$$\operatorname{Re} \int_{-b}^{-a} t_1 g_1^{(0)}(t_1) dt_1 = 0, \quad \operatorname{Re} \int_a^b t_1 g_1^{(0)}(t_1) dt_1 = 0,$$

обеспечивающие равенство нулю скачка прогиба в вершинах трещин  $L_1$ .

Сингулярные интегральные уравнения (13) и алгебраические системы уравнений являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить  $g^{(0)}(x)$ ,  $g_1^{(0)}(y)$  и коэффициенты  $\alpha_{2k}^0$ ,  $\beta_{2k}^0$ ,  $A_{2k}^0$ ,  $a_{2k}^0$  и  $b_{2k}^0$ .

Изгибающие и крутящие моменты при  $\lambda_1 > \lambda$   $a > \lambda$  независимо от условий на границе соединения материалов имеют в окрестности обоих концов трещин корневую особенность.

Используя процедуру алгебраизации [14], [15] интегральных уравнений, получим две конечные системы алгебраических уравнений для определения приближенных значений искомых функций  $g^{(0)}(x)$  и  $g_1^{(0)}(y)$  в узловых точках разбиения интервала интегрирования. После определения значений  $g^{(0)}(x)$  и  $g_1^{(0)}(y)$  в узловых точках находятся коэффициенты интенсивности напряжений у вершин трещин  $x = \ell$ ,  $x = \lambda_1$ ,  $y = b$ ,  $y = a$  в нулевом приближении.

После нахождения решения в нулевом приближении можно перейти к решению задачи в первом приближении. При формально заданном  $H(\theta)$  на основании решения в нулевом приближении находятся функции  $f_1 + if_2$  и  $g_1^* + ig_2^*$ . Комплексные потенциалы  $\Phi_0^{(1)}(z)$ ,  $\Psi_0^{(1)}(z)$  и  $\Phi^{(1)}(z)$ ,  $\Psi^{(1)}(z)$  ищутся в виде, аналогичном (6), (8), с очевидными изменениями. Дальнейший ход решения краевой задачи (4), (5) такой же, как в нулевом приближении.

При заданной функции  $H(\theta)$  полученные алгебраические уравнения являются замкнутыми и позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние композита, найти коэффициенты интенсивности напряжений (моментов) в окрестности кончиков трещин для каждого профиля поперечного сечения волокна.

Для решения обратной задачи используем условие равенства нулю (минимизации) коэффициентов интенсивности напряжений (моментов) в окрестности кончиков трещин, т. е. коэффициентами  $d_{2k}$  искомой функции  $H(\theta)$  надо так распорядиться, чтобы обеспечивалось равенство нулю коэффициентов интенсивности напряжений (моментов) в кончиках трещин.

Требуем, чтобы коэффициенты интенсивности напряжений  $K_I^\ell$ ,  $K_I^{\lambda_1}$ ,  $K_I^b$ ,  $K_I^a$  в вершинах трещин были равны нулю

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} \left[ g^{(0)}(t_m) + \varepsilon g^{(1)}(t_m) \right] tg \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad (14)$$

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m \left[ g^{(0)}(t_m) + \varepsilon g^{(1)}(t_m) \right] ctg \frac{2m-1}{4M} \pi = 0,$$

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} \left[ g_1^{(0)}(t_m) + \varepsilon g_1^{(1)}(t_m) \right] tg \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad (15)$$

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m \left[ g_1^{(0)}(t_m) + \varepsilon g_1^{(1)}(t_m) \right] ctg \frac{2m-1}{4M} \pi = 0.$$

Добавляя эти четыре линейных уравнения (14), (15) к объединенной системе, о которой говорилось выше, получим замкнутую алгебраическую систему для определения всех неизвестных, в том числе и коэффициентов  $d_k$ .

**Анализ результатов моделирования.** Система уравнений (14), (15) совместно с алгебраическими системами для  $\alpha_{2k}^0$ ,  $\beta_{2k}^0$ ,  $A_{2k}^0$ ,  $a_{2k}^0$ ,  $b_{2k}^0$ ,  $g_k^{(0)} = g^{(0)}(t_k)$ ,  $g_{1k}^{(0)} = g_1^{(0)}(t_k)$  и



их аналогами в первом приближении позволяет определить оптимальную форму границы раздела сред, напряженно-деформированное состояние композита. Бесконечные алгебраические системы относительно  $\alpha_k, \beta_k, A_k$  в каждом приближении имеют весьма громоздкий вид. Так как  $0 < \lambda < 1$ , а параметр  $\lambda$  входит в высоких степенях в данные системы, то это упрощает расчеты. В большинстве практически важных задач каждую из этих систем можно урезать до нескольких уравнений и, несмотря на это, получить достаточно точные результаты для рабочих диапазонов радиуса  $\lambda$  сечения волокна.

Для численной реализации изложенного способа решались упомянутые выше алгебраические системы. Использовался метод редукции алгебраических систем. Исследовался односторонний изгиб пластины постоянными моментами  $M_y^\infty$  ( $M_x^\infty = 0$ ), всесторонний изгиб моментами  $M_x^\infty = M_y^\infty = M_0$ . Урезанные системы решались методом Гаусса с выбором главного элемента в зависимости от радиуса армированного волокна.

В расчетах было принято для связующего  $\nu = 0,28$ ;  $\mu = 2,5 \cdot 10^5$  МПа; для волокна  $\nu_0 = 0,32$ ;  $\mu_0 = 4,5 \cdot 10^5$  МПа.

В таблицах 1 и 2 приведены результаты расчетов коэффициентов  $d_k$  искомой функции  $H(\theta)$  для различных значений параметра  $\lambda$ . Коэффициенты разложения даются в безразмерном виде  $d_k^* = d_k/\lambda$ . Таблица 1 соответствует различным значениям радиуса отверстий для квадратной сетки отверстий ( $\omega_1 = 2, \omega_2 = 2i$ ), таблица 2 – для треугольной сетки отверстий ( $\omega_1 = 2; \omega_2 = 2 \exp(i\pi/3)$ ).

Таблица 1

#### Результаты расчета коэффициентов $d_{2k}$ для квадратной сетки отверстий

$\lambda$	$d_0$		$d_4$		$d_8$		$d_{12}$	
	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ
0,2	0,098	0,086	0,059	0,052	0,032	0,028	0,012	0,009
0,3	0,125	0,113	0,083	0,076	0,038	0,031	0,016	0,010
0,4	0,154	0,131	0,105	0,093	0,062	0,036	0,019	0,015
0,5	0,172	0,157	0,123	0,097	0,072	0,039	0,022	0,017
0,6	0,196	0,178	0,134	0,102	0,081	0,042	0,027	0,021
0,7	0,209	0,197	0,141	0,116	0,093	0,056	0,031	0,029

Таблица 2

#### Результаты расчета коэффициентов $d_{2k}$ для треугольной сетки отверстий

$\lambda$	$d_0$		$d_6$		$d_{12}$		$d_{18}$	
	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ
0,2	0,081	0,067	0,049	0,042	0,031	0,023	0,008	0,005
0,3	0,099	0,086	0,072	0,059	0,036	0,026	0,013	0,007
0,4	0,131	0,118	0,087	0,082	0,042	0,032	0,019	0,013
0,5	0,156	0,132	0,092	0,093	0,049	0,045	0,021	0,016
0,6	0,169	0,147	0,113	0,098	0,057	0,047	0,025	0,021
0,7	0,181	0,165	0,128	0,115	0,079	0,063	0,034	0,028

Здесь ОИ – односторонний изгиб, ВИ – всесторонний изгиб.

Найденное оптимальное решение способствует повышению несущей способности композита.

**Заключение.** Предложено решение задачи по предотвращению разрушения композита, армированного однонаправленными волокнами при действии заданной системы внешних изгибающих нагрузок. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение оптимального проектирования композита в зависимости от геометрических и механических характеристик связующего и подкрепляющих волокон. Найденная форма соединения материалов обеспечивает минимизацию параметров разрушения (коэффициентов интенсивности напряжений) и повышает несущую способность композита.

Результаты рассмотренной теоретической работы дают новые возможности оптимального проектирования линейно-армированных композитов за счет выбора формы соединения связующего и волокна.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982. 232 с.
- [2] Решетов Д. Н. Состояние и тенденции развития деталей машин // Вестник машиностроения. 2000. № 10. С. 11–15.
- [3] Mirsalimov V. M., Allahyarov E. A. The breaking crack build-up in perforated planes by uniform ring switching // Int. J. Fracture. 1996. Vol. 79, № 1. P. 17–21.
- [4] Гаджиев Г. Х., Мирсалимов В. М. Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра контактной пары // Проблемы механики: сб. ст. к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского / под ред. Д. М. Климова. М.: Физматлит, 2003. С. 196–207.
- [5] Мирсалимов В. М. Обратная периодическая задача теории изгиба пластины с упругими включениями // Известия РАН. Механика твердого тела. 2006. № 3. С. 171–179.
- [6] Мирсалимов В. М. Оптимальное проектирование составной пластины, ослабленной периодической системой трещин // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 2. С. 75–86.
- [7] Мирсалимов В. М. Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра // Известия РАН. Механика твердого тела. 2009. № 1. С. 115–173.
- [8] Мирсалимов В. М., Аскарлов В. А. Обратная двоякопериодическая задача теории изгиба пластин для композита, армированного однонаправленными волокнами // Механика машин, механизмов и материалов. 2014. № 2. С. 51–55.
- [9] Мирсалимов В. М., Аскарлов В. А. Минимизация параметров разрушения в композите при изгибе // Механика композитных материалов. 2015. Т. 51, № 6. С. 1049–1060.
- [10] Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [11] Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
- [12] Мирсалимов В. М. Взаимодействие периодической системы упругих включений и прямолинейных трещин в изотропной среде // Прикладная механика и техническая физика. 1978. № 1. С. 164–174.

[13] Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1981. 324 с.

[14] Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.

[15] Ladopoulos E. G. Singular integral equations: Linear and non-linear theory and its Applications in Science and Engineering. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2000. 436 p.

V. M. Mirsalimov<sup>1,2</sup>, V. A. Askarov<sup>2</sup>

## MINIMIZATION OF STRESS INTENSITY FACTORS FOR COMPOSITE REINFORCED BY UNIDIRECTIONAL FIBERS AT BENDING

<sup>1</sup>*Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan*

<sup>2</sup>*Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*

**Abstract.** A thin elastic plate of an isotropic elastic medium (matrix) and allocated in it fibers (inclusions) of another elastic material at bending is considered. It is assumed that the material of the binder medium is weakened by doubly periodic system of through unequal length cracks collinear to axis and ordinate axes. The crack faces are free from external loads. Work resource of bending plate of composite material reinforced by unidirectional fibers depends on the stress distribution in the zones of interaction of its elements. Serviceability of the composite can be improved by changing the geometry of binder and fibers joint. The inverse problem of fracture mechanics to determine the optimal fibers shape providing the minimization of the stress intensity factors (moments) in the vicinity of crack tips, is solved. The criterion and solving method of the problem of fracture preventing for the composite under action of the given system of external bending loads are proposed. A closed system of equations, allowing to obtain the solution of optimal design problem for the composite depending on the geometrical and mechanical characteristics of the binder and fibers, is constructed. The obtained cross-section shape of the unidirectional fibers provides the increase of composite serviceability.

**Keywords:** binder, fibers, bending, plate of composite material, cracks, stress intensity factors, minimization of fracture parameters.

## REFERENCES

[1] Fujii T., Zako M. Fracture Mechanics of Composite Materials. Moscow: Mir, 1982. (in Russian).

[2] Reshetov D. N. State-of-the-art and tendencies in the development of machine parts // Vestnik Mashinostroeniya. 2000. № 10. P. 11–15.

[3] Mirsalimov V. M., Allahyarov E. A The breaking crack build-up in perforated planes by uniform ring switching // Int. J. Fracture. 1996. Vol. 79, № 1. P. 17–21.

[4] Gadzhiev G. Kh., Mirsalimov V. M. Inverse problem of fracture mechanics for the compound cylinder of a contact pair // in: D. M. Klimov (ed.), Probl. Mekh. Coll. Works to 90th anniversary of A. Yu. Ishlinskii. Moscow: Fizmatlit, 2003. P. 196–207.

---

*Mirsalimov Vagif*, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Azerbaijan Technical University; Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan.

*Askarov Vusal*, Postgraduate student, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan.

- [5] Mirsalimov V. M. Inverse periodic problem of bending for a plate with elastic inclusions // Изв Mechanics of Solids. 2006. № 3. P. 171–179.
- [6] Mirsalimov V. M. Optimal design of a compound plate weakened by a periodic crack system // Mechanics of Solids. 2007. Vol. 42, Issue 2. P. 231–240.
- [7] Mirsalimov V. M. Inverse problem of fracture mechanics for a compound cylinder // Mechanics of Solids. 2009. Vol. 44, Issue 1. P. 141–148.
- [8] Mirsalimov V. M., Askarov V. A. Inverse doubly periodic problem of the theory bending of plates for the composite reinforced with unidirectional fibers // Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials. 2014. № 2. C. 51–55.
- [9] Mirsalimov V. M. and Askarov V. A. Minimization of fracture parameters of a composite at bending // Mechanics of Composite Materials, 2016. Vol. 51, № 6. P. 737–744.
- [10] Muskhelishvili N. I. Some basic problems of mathematical theory of elasticity. Amsterdam: Kluwer. 1977.
- [11] Grigoljuk Je. I., Fil'shtinskij L. A. Perforated plates and shells. Moscow: Nauka, 1970. (in Russian).
- [12] Mirsalimov V. M. Interaction between a periodic system of elastic inclusions and rectilinear cracks in an isotropic medium // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 1978. Vol. 19, Issue 1. P. 136–145.
- [13] Savruk M. P. Two-dimensional elasticity problems for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka, 1981. (in Russian).
- [14] Panasyuk V. V., Savruk M. P., Datsyshyn A. P. The stress distribution around cracks in plates and shells. Kiev: Naukova Dumka, 1976. (in Russian).
- [15] Ladopoulos E. G. Singular integral equations: Linear and non-linear theory and its Applications in Science and Engineering. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2000.

А. Н. Максимов, Н. Н. Пушкаренко

## К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО СОСТОЯНИЯ ИДЕЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СЖИМАЕМОГО МАССИВА, ОСЛАБЛЕННОГО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

*Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия*

**Аннотация.** Методом малого параметра определены нулевые и первые приближения напряжений в упругой и пластической областях, а также нулевое приближение границы упруго-пластической зоны для сжимаемого пространства, ослабленного сферической полостью.

**Ключевые слова:** напряжения, деформации, сферическая полость.

УДК: 539.3+624.073

В практике горного дела, строительной механике и других смежных областях важное место имеет определение напряженного и деформированного состояния массива вокруг полостей и выемок.

В данной работе исследуется напряженное состояние идеальнопластического сжимаемого массива вблизи сферической полости. В постановке задачи внутри полости давление отсутствует, а на бесконечности приложены взаимно-перпендикулярные усилия. Задача решена методом малого параметра, в сферической системе координат, в безразмерных единицах длины (все величины, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу сферической полости  $\rho_0$ ).

Рассматривается массив из сыпучей среды, обладающей свойствами внутреннего трения и сцепления. Условие предельного состояния сыпучей среды определено в виде [1]:

$$f(\sigma'_{ij}) = k_0 + a\sigma, \quad (1)$$

где  $\sigma'_{ij}$  – компоненты дивергента напряжения,  $k_0$  – коэффициент сцепления,  $a = tg\alpha$  – коэффициент внутреннего трения,  $\alpha$  – угол внутреннего трения.

---

© Максимов А. Н., Пушкаренко Н. Н., 2016

*Максимов Алексей Николаевич*

**e-mail:** alexei.maksimow@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

*Пушкаренко Николай Николаевич*

**e-mail:** stl\_mstu@mail.ru, кандидат технических наук, декан инженерного факультета, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.07.2016

Для решения задачи в сферической системе координат используем уравнения равновесия [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_\rho - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{\rho\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} ((\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\rho\theta}) &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} (3\tau_{\rho\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Условия пластичности Треска – Сен-Венана [3] с учетом (1):

$$\begin{aligned} \left( \sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \left( \sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) - \tau_{\rho\theta}^2 &= 0, \\ \left( \sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \left( \sigma_\varphi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) - \tau_{\theta\varphi}^2 &= 0, \\ \left( \sigma_\varphi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \left( \sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) - \tau_{\rho\varphi}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а также

$$\begin{aligned} \left( \sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \tau_{\theta\varphi} &= \tau_{\rho\theta} \cdot \tau_{\rho\varphi}, \\ \left( \sigma_\varphi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \tau_{\rho\theta} &= \tau_{\rho\varphi} \cdot \tau_{\theta\varphi}, \\ \left( \sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\rho\theta} \cdot \tau_{\theta\varphi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho l + \tau_{\rho\theta} m + \tau_{\rho\varphi} n &= P_\rho, \\ \tau_{\rho\theta} l + \sigma_\theta m + \tau_{\theta\varphi} n &= P_\theta, \\ \tau_{\rho\varphi} l + \tau_{\theta\varphi} m + \sigma_\varphi n &= P_\varphi, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\sigma_\rho, \tau_{\rho\theta} \dots$  – компоненты девиатора напряжения,  $l, m, n$  – направляющие косинусы нормали,  $P_\rho, P_\theta, P_\varphi$  – проекции усилий на оси  $\rho, \theta, \varphi$ ,  $\sigma = (\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_\varphi)/3$  – среднее давление.

Компоненты напряжения представим в виде рядов по малому параметру  $\delta$  ( $\delta \ll 1$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \sigma_\rho^0 + \delta \sigma'_\rho, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \delta \sigma'_\theta, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^0 + \delta \sigma'_\varphi, \\ \tau_{\rho\theta} &= \tau_{\rho\theta}^0 + \delta \tau'_{\rho\theta}, \quad \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\rho\varphi}^0 + \delta \tau'_{\rho\varphi}, \quad \tau_{\theta\varphi} = \tau_{\theta\varphi}^0 + \delta \tau'_{\theta\varphi}. \end{aligned} \quad (6)$$

Условия пластичности (3) и (4) могут быть удовлетворены в трех случаях, один из которых:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) &= 0, \\ \sigma_\varphi^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) &= 0, \\ \sigma_\rho^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) &\neq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

соответствует сферической полости.

Решая совместно (8) и (3), получим:

$$\sigma_\theta^0 = \sigma_\varphi^0, \quad \tau_{\rho\theta}^0 = \tau_{\rho\varphi}^0 = \tau_{\theta\varphi}^0. \quad (8)$$

Тогда (6) с учетом (8) примет вид:

$$\sigma^0 = (\sigma_\rho^0 + 2\sigma_\theta^0)/3. \quad (9)$$

Решая совместно (8) и (9), получим:

$$\sigma_{\theta}^0 = \sigma_{\rho}^0/A + D, \quad (10)$$

где  $A = (3 + 4a)/(3 - 2a)$ ,  $D = -6k_0/(3 + 4a)$ .

Уравнения равновесия (2) с учетом (8) примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}^0}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho}(\sigma_{\rho}^0 - \sigma_{\theta}^0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\theta}^0}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{\varphi}^0}{\partial \varphi} = 0. \quad (11)$$

Подставляя (10) в первое уравнение (11) и принимая во внимание, что внутри сферической полости давление отсутствует, получим для компонент нормального напряжения в нулевом приближении в пластической области:

$$\sigma_{\rho}^{0p} = k_0(\rho^{-\frac{12a}{3+4a}} - 1)/a, \quad \sigma_{\theta}^{0p} = \sigma_{\varphi}^{0p} = k_0(\rho^{-\frac{12a}{3+4a}} - 1)/a \cdot A + D. \quad (12)$$

Для определения компонент напряжения в нулевом приближении в упругой области используем: уравнения равновесия (11), уравнение несжимаемости:

$$\varepsilon_{\rho}^{oe} + \varepsilon_{\theta}^{oe} + \varepsilon_{\varphi}^{oe} = 0, \quad (13)$$

где  $\varepsilon_{\rho}^{oe}$ ,  $\varepsilon_{\theta}^{oe}$ ,  $\varepsilon_{\varphi}^{oe}$  – деформации вдоль осей  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  в упругой области, геометрические уравнения:

$$\varepsilon_{\rho}^{0e} = \partial U / \partial \rho, \quad \varepsilon_{\theta}^{0e} = \varepsilon_{\varphi}^{0e} = U / \rho, \quad (14)$$

где  $U$  – перемещение вдоль оси  $\rho$ , физические уравнения (закон Гука), принимая во внимание, что коэффициент Пуассона для несжимаемого материала  $\mu = 1/2$ :

$$\varepsilon_{\rho}^{oe} = (\sigma_{\rho}^{oe} - \sigma_{\theta}^{oe})/E, \quad \varepsilon_{\theta}^{oe} = \varepsilon_{\varphi}^{oe} = (\sigma_{\theta}^{oe} - \sigma_{\rho}^{oe})/2E, \quad (15)$$

где  $E$  – модуль упругости.

Решая совместно (13), (14), (15) и принимая во внимание условие сопряжения на границе  $\beta_0$  упругопластической зоны:  $\sigma_{\rho}^{0e} |_{\rho=\beta_0} = \sigma_{\rho}^{0p} |_{\rho=\beta_0}$ ,  $\sigma_{\theta}^{0e} |_{\rho=\beta_0} = \sigma_{\theta}^{0p} |_{\rho=\beta_0}$  и что на бесконечности приложены усилия  $\sigma_{\rho}^{0e} |_{\rho=\infty} = -p_0$ , получим:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \left( \frac{D}{2(p_0 a - k_0)} \right)^{\frac{3+4a}{12a}}, \\ \sigma_{\rho}^{0e} &= -\frac{2D}{3\rho^3} \beta_0^{\frac{9}{3+4a}} - p_0, \\ \sigma_{\theta}^{0e} = \sigma_{\varphi}^{0e} &= \frac{D}{3\rho^3} \beta_0^{\frac{9}{3+4a}} - p_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Найдем компоненты возмущенных напряжений в пластической области.

Линеаризуя условия пластичности (3), (4) и принимая во внимание (8), (8), получим:

$$\sigma'_{\rho} = A\tilde{\sigma}'_{\rho}, \quad (17)$$

где  $\tilde{\sigma}'_{\rho} = \sigma'_{\theta} = \sigma'_{\varphi}$ .

$$\tau'_{\theta\varphi} = 0. \quad (18)$$

Уравнения равновесия (2) с учетом (17), (18) примут вид:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial \tilde{\sigma}'}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau'_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \left( 2\tilde{\sigma}'(A-1) + \tau'_{\rho\theta} \operatorname{ctg} \theta \right) &= 0, \\ \frac{\partial \tau'_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\sigma}'}{\partial \theta} + \frac{3}{\rho} \tau'_{\rho\theta} &= 0, \\ \frac{\partial \tau'_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\sigma}'}{\partial \varphi} + \frac{3}{\rho} \tau'_{\rho\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Для решения (19) вводится функция  $U(\rho, \theta, \varphi)$  таким образом, чтобы выполнялись равенства:

$$\tilde{\sigma}' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad \tau'_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad \tau'_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho^3 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \quad (20)$$

Тогда последние два уравнения (20) тождественно удовлетворяются, а первое примет вид:

$$-A\rho^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + 2\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0. \quad (21)$$

Решение (21) найдено методом разделения переменных:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 \rho^{\chi_1} + C_2 \rho^{\chi_2}) (a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \quad (22)$$

где первый множитель (22) представляет решение уравнения Эйлера, в котором:

$$\chi_{21} = \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{1}{A} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{\lambda}{A}}, \quad (23)$$

$C_1, C_2$  – константы, которые необходимо найти, второй множитель представляет решение уравнения Фурье, в котором  $a_{mn}, b_{mn}$  – коэффициенты Фурье, определяемые:

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{1}{N_{mn}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho_1(\theta, \varphi) \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot \cos m\varphi \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi, \\ b_{mn} &= \frac{1}{N_{mn}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho_1(\theta, \varphi) \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot \sin m\varphi \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi, \\ N_{mn} &= \frac{2\pi \varepsilon_m (n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}, \quad \varepsilon_m = 2(m=0), 1(m>0), \end{aligned} \quad (24)$$

$P_n^m(\cos \theta)$  – присоединенная функция Лежандра;  $\rho_1(\theta, \varphi)$  задает уравнение полости в первом приближении,  $n(n+1) = \lambda$ .

Подставляя (22) в (20), получим для первого приближения компонент напряжения в пластической области:

$$\begin{aligned} \sigma'_{\theta} = \sigma'_{\varphi} = \tilde{\sigma}' &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 \chi_1 \rho^{\chi_1-3} + C_2 \chi_2 \rho^{\chi_2-3}) (a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \\ \sigma'_{\rho} &= -A \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 \chi_1 \rho^{\chi_1-3} + C_2 \chi_2 \rho^{\chi_2-3}) (a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \\ \tau'_{\rho\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 \rho^{\chi_1-3} + C_2 \rho^{\chi_2-3}) (a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta}, \\ \tau'_{\rho\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{m}{\sin \theta} (C_1 \rho^{\chi_1-3} + C_2 \rho^{\chi_2-3}) (b_{mn} \cos m\varphi - a_{mn} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \\ \tau'_{\theta\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$



Постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  найдены при решении совместно (26) и линеаризированных граничных условий (5):

$$C_1 = \frac{D(A\chi_2 - 2)}{A(\chi_2 - \chi_1)}, C_2 = \frac{D(A\chi_1 - 2)}{A(\chi_1 - \chi_2)}. \quad (26)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М.: ГИТТЛ, 1954. 121 с.
- [2] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
- [3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.

*A. N. Maksimov, N. N. Pushkarenko*

#### THE DETERMINATION OF A PERTURBED STATE OF IDEAL PLASTIC COMPRESSIBLE ARRAY, WEAKENED BY A SPHERICAL CAVITY

*Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** The method of small parameter defined zero and first approximations stresses in the elastic and plastic regions, as well as the zero approximation border elastic-plastic zone for a compressible space weakened by a spherical cavity.

**Keywords:** stress, strain, spherical cavity.

#### REFERENCES

- [1] Sokolovskij V. V. Statika sypuchej sredy. M.: GITTL, 1954. 121 s. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D., Ershov L. V. Metod vozmushhenij v teorii uprugoplasticheskogo tela. M.: Nauka, 1978. 208 s. (in Russian).
- [3] Ivlev D. D. Teorija ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka, 1966. 231 s. (in Russian).

---

*Maksimov Alexey Nikolaevich*, PhD in Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

*Pushkarenko Nikolaj Nikolaevich*, PhD, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

С. М. Шляхов, Д. Ю. Гаврилов

## МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ РАЦИОНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОРИСТОСТИ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ БРУСА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина,  
г. Саратов, Россия

**Аннотация.** Рассмотрим чистый изгиб бруса, выполненного из материала (стали) пористой структуры с переменной по сечению пористостью. Ограничимся случаем упругого деформирования, полагая, что максимальные напряжения в бруске  $\sigma_{\max}$  не превышают предела текучести материала  $\sigma_T$ .

**Ключевые слова:** изгибающий момент, закон распределения модуля Юнга, приближенный подход.

УДК: 539.3

Рассмотрим чистый изгиб бруса, выполненного из материала (стали) пористой структуры с переменной по сечению пористостью. Интерес к рассмотрению задачи с постановкой именно такого вопроса обуславливается предположением о теоретической возможности варьирования механических свойств нагружаемой конструкции, исходя из возникающих в сечениях напряжений. Известно, что механические характеристики материала (модуль Юнга  $E$  и предел текучести  $\sigma_T$ ) являются функциями пористости материала [1], [2]. Практические результаты показывают, что при повышении уровня пористости  $p$  значение модуля Юнга  $E$  снижается, а при снижении уровня пористости – повышается. Аналогичная зависимость просматривается и при анализе пары предел текучести  $\sigma_T$  – пористость  $p$ .

Ограничимся случаем упругого деформирования, полагая, что максимальные напряжения в бруске  $\sigma_{\max}$  не превышают предела текучести материала  $\sigma_T$ . На основе экспериментальных данных для пористой стали, приведенных в таблице 1, зависимости  $E(p)$  и  $\sigma_T(p)$  могут быть представлены полиномами (табл. 1).

Сглаживая заданную функцию методом наименьших квадратов (МНК), получим полиномы:

$$E = a_1 + a_2p + a_3p^2 \quad (1)$$

$$\sigma_T = b_1 + b_2p + b_3p^2. \quad (2)$$

---

© Шляхов С. М., Гаврилов Д. Ю., 2016

Шляхов Станислав Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина, г. Саратов, Россия.

Гаврилов Данила Юрьевич, аспирант, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина, г. Саратов, Россия.

Поступила 02.07.2016

Конечным результатом МНК будут являться значения соответствия  $\sigma_T$ ,  $E$  пористости в границах от 0 до 0,4.

Таблица 1

Пористость	$\sigma_T$ , МПа	Пористость	$E$ , МПа
0	200	0	210000
0,12	116	0,1	160000
0,21	95	0,2	110000
0,31	59	0,3	80000
0,37	43	0,4	50000
0,43	32	0,5	20000

На рис. 1 (а, б) приведены графики функций (1) и (2) соответственно, при значениях коэффициентов (МПа), приведенных в табл. 2 в интервале  $0 \leq p \leq 0,4$ .

Таблица 2

$a_1$	209285,7143	$b_1$	196,0368975
$a_2$	-535000	$b_2$	-645,9644653
$a_3$	321428,5714	$b_3$	627,5555095

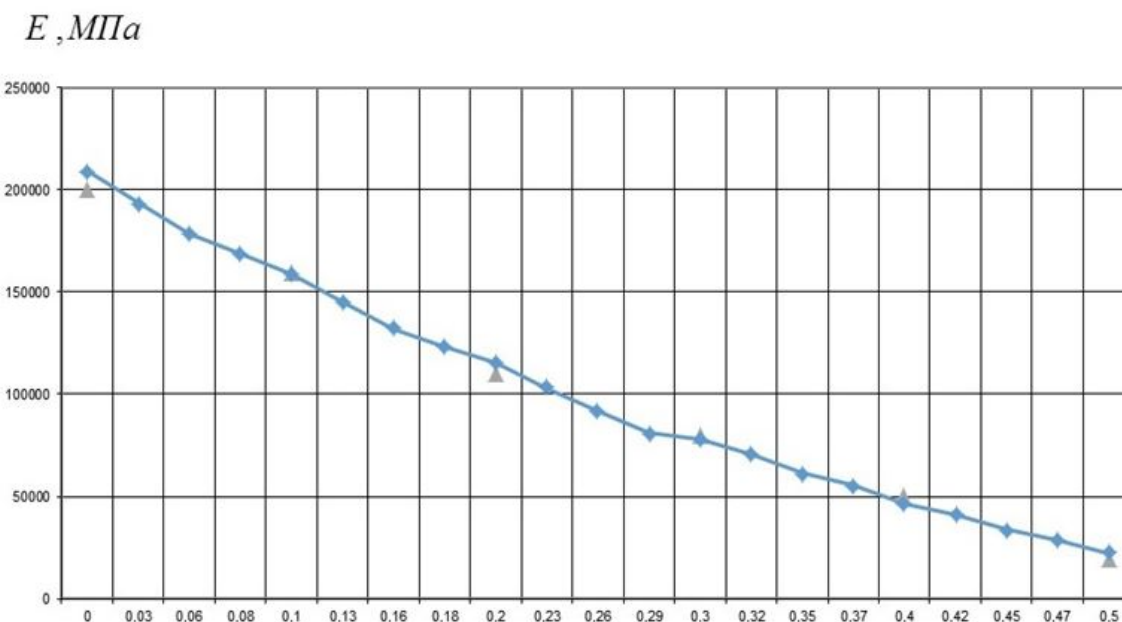


Рис. 1а

Положим теперь, что пористость  $P$  переменна по высоте бруса.

$$P = P(y), 0 \leq y \leq h/2.$$

Тогда  $E = E(y)$  т. е. модуль Юнга есть функция координаты  $y$  (рис. 2).

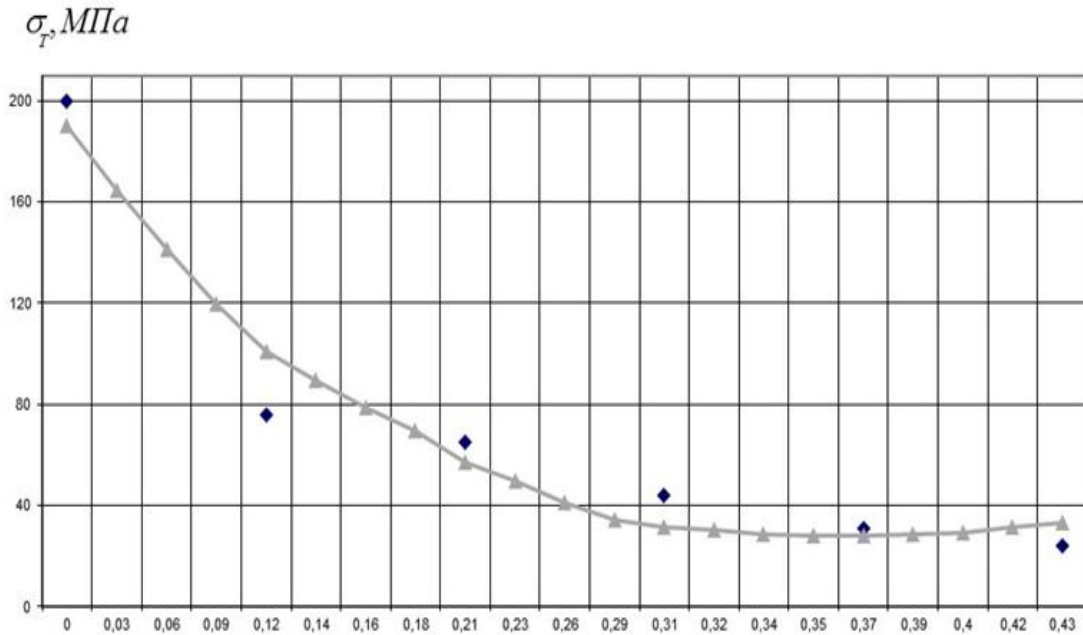


Рис. 16

Задача изгиба, таким образом, сводится к изгибу бруса, выполненного из неоднородного материала, с переменной по сечению упругой характеристикой  $E = E(y)$  и переменным пределом текучести  $\sigma_T = \sigma_T(y)$ .

Обозначим изгибающий момент на бруске через  $M$ , а высоту сечения –  $h$ . При чистом изгибе бруса работает гипотеза плоских сечений, т. е. сечения после деформаций остаются плоскими и нормальными к оси бруса.

Соответственно закону Гука при изгибе определим закон изменения напряжений по высоте сечения:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (3)$$

Величина максимальных деформаций  $\varepsilon$  постоянна для данного сечения, а значение  $E = E(y_i)$  зависит от расстояния от оси сечения  $y_j$ , при этом имеем ограничение:

$$\sigma \leq \sigma_T(y). \quad (4)$$

Величина изгибающего момента в сечении определится по формуле:

$$M \approx 2 \cdot \sum_{j=1}^n \sigma_j b_j \delta y_j = 2 \sum_{j=1}^n E_j \varepsilon_j b_j \delta y_j. \quad (5)$$

Целью исследования является подобрать такой закон распределения модуля Юнга  $E$  и, следовательно, пористости  $p$  по сечению бруса, чтобы получить максимально возможный изгибающий момент при ограничениях на напряжение  $\sigma \leq \sigma_T$  и на пористость

$$p_{\min} \leq p \leq p_{\max}, \quad (6)$$

задаваемых техническими возможностями производства.

Данная постановка является сложной задачей линейного программирования, для решения которой используем приближенный подход. Суть приближенного решения заключается в следующем.

Разбиваем все сечение бруса по высоте сечения на "n" элементов с наружными высотами  $y_j, j=1,2,\dots,n$  с шагом  $\delta = \frac{h}{2n}$ , где  $h$  – высота бруса (рис. 2).

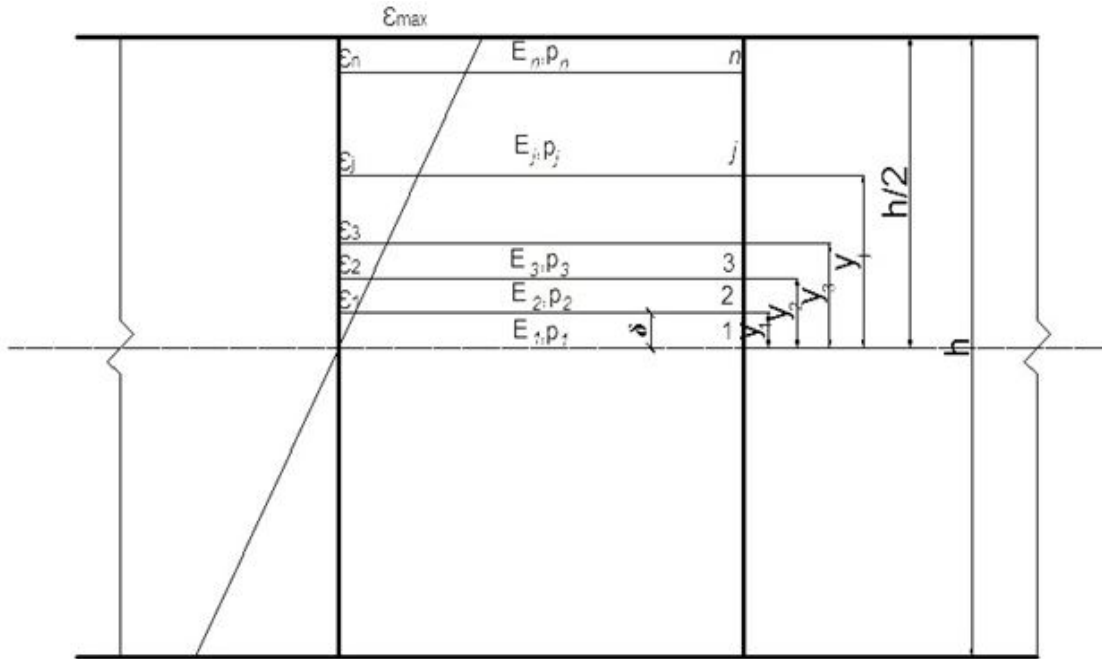


Рис. 2

Соответственно получим:

$$y_1 = \Delta h, \quad y_j = y_{j-1} + \delta, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Максимальные напряжения в слоях будут равны

$$\sigma_j = E_j \varepsilon_j \leq \sigma_{Tj}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Для решения задачи применим метод последовательных приближений.

Зададимся вначале нулевой пористостью и максимальной деформацией  $\varepsilon_{\max}$ . По формуле (7) найдем значение нормальных напряжений для каждого элемента поперечного сечения. По диаграмме (рис. 1б) находим предельное значение пористости, соответствующее полученному значению нормальных напряжений, полагая  $\sigma_j = \sigma_T$ . Найденное значение пористости следует согласовать с условием (6). Примем в нашем случае  $p_{\min} = 0, p_{\max} = 0,4$ .

Т. е. в случае выхода искомого значения  $p$  за пределы наложенных ограничений следует принять граничное его значение.

Определяем величину изгибающего момента по формуле:

$$M = 2 \cdot \sum_{j=1}^n \sigma_j h_j b_j y_j. \quad (8)$$

По полученному значению пористости на каждом слое сечения по формуле (1) найдем  $E = E_j$  и повторяем расчет.

Будем циклично продолжать описанные выше действия до тех пор, пока не выполнится условие

$$\left| \frac{M_{i+1} - M_i}{M_{i+1}} \right| \cdot 100\% < 1\%.$$

В качестве примера примем  $h = 20$  см,  $n = 20$ ,  $\varepsilon_{\max} = 0,000952381$ ,  $b = 10$  см. Получим значение пористости для каждого элементарного слоя и определяем момент.

Результаты всех приближений сведем в табл. 3

Таблица 3

№ приближения	Значение изгибающего момента, кНм	Значение $\left  \frac{M_{i+1} - M_i}{M_{i+1}} \right  \cdot 100, \%$
	5,7205	
1	4,6802	18,19
2	4,1285	11,79
3	3,8071	7,79
4	3,5668	6,31
5	3,4283	3,88
6	3,3410	2,54
7	3,2339	3,20
8	3,2201	0,43

При оценке полученных результатов мы видим, что достигли необходимого результата на 8-м приближении.

Окончательно функции рационального распределения  $p(y)$  и  $\sigma(y)$  отражены на эпюрах (рис. 3а и 3б соответственно).

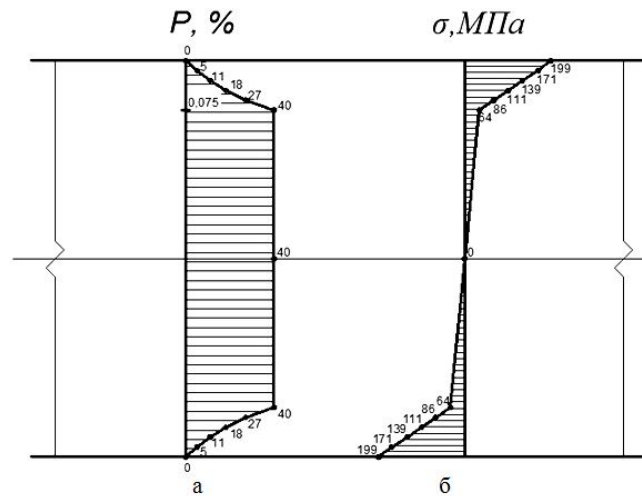


Рис. 3

Таким образом, описанный метод решения является достаточно точным и объективным методом решения задачи. Варьируя значение  $\varepsilon_{\max}$ , получим функциональную зависимость  $M_{\text{изг}}(\varepsilon_{\max}, p)$ , из которой найдем расчетное значение  $\varepsilon_{\max}$ , соответствующее требуемому изгибающему моменту.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кашталян Ю. А. Характеристики упругих материалов при высоких температурах. Киев: Наукова думка, 1970. 112 с.
- [2] Белов С. В. Пористые металлы в машиностроении. М.: Машиностроение, 1981. 247 с.

*S. M. Shljahov, D. Yu. Gavrilov*

THE METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS IN THE PROBLEM  
MANAGEMENT DISTRIBUTION OF POROSITY IN PURE BENDING  
RECTANGULAR TIMBER

*Yu. Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia*

**Abstract.** Consider a pure bending of beams made of a material (steel), a porous structure with variable cross-section porosity. Restrict ourselves to the case of elastic deformation, assuming that the maximum stress in the beam  $\sigma_{\max}$  does not exceed the yield strength of the material  $\sigma_T$ .

**Keywords:** the bending moment, the distribution of the young's modulus, the approximate approach.

## REFERENCES

- [1] Kashtaljan Ju. A. Harakteristiki uprugih materialov pri vysokih temperaturah. Kiev: Naukova dumka, 1970. 112 s. (in Russian).
- [2] Belov S. V. Poristye metally v mashinostroenii. M.: Mashinostroenie, 1981. 247 s. (in Russian).

---

*Shljahov Stanislav Mihajlovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Yu. Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia.

*Gavrilov Danila Jur'evich*, Graduate, Yu. Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia.

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

## УПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЫ С ОТВЕРСТИЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

*Сибирский государственный аэрокосмический университет имени  
академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия*

**Аннотация.** Рассмотрено упругое состояние прямоугольной пластины с отверстиями произвольной формы, находящейся под действием нагрузок, направленных по нормали к сторонам. На контурах отверстий поддерживаются нулевые значения компонент тензора напряжений. При таких граничных условиях построено точное решение задачи в виде квадратур по внешней границе и границам контуров отверстий. Для этой цели найдена и использована бесконечная система законов сохранения уравнений теории упругости, линейно зависящая от компонент тензора напряжений. В статье для простоты подробно рассмотрен случай только одного отверстия. Для произвольного количества отверстий задача решается аналогично.

**Ключевые слова:** плоская упругая задача, упругая пластина с отверстиями, законы сохранения, точные решения теории упругости.

УДК: 539.371

**Введение.** Уравнения классической теории упругости – наиболее исследованные уравнения механики сплошной среды. В первую очередь это объясняется линейностью основных уравнений, что позволяет использовать при их решении весь спектр математических методов. При этом белым пятном остается обширная область – решение задач теории упругости для тел конечных размеров. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно посмотреть классические руководства по теории упругости, например [1], [2].

Одним из авторов этой работы, начатой по инициативе академика Б. Д. Аннина, систематически использованы инструменты теории симметрий и законов сохранения для решения краевых задач теории идеальной пластичности [3]–[5]. Нарботанная методика показала, что эти методы могут быть успешно применены и к решению некоторых задач теории упругости. Первые обнадеживающие результаты приводятся в этой работе.

---

© Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., 2016

*Сенашов Сергей Иванович*

**e-mail:** sen@sibsau.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

*Савостьянова Ирина Леонидовна*

**e-mail:** savostyanova@sibsau.ru, кандидат педагогических наук, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Поступила 29.05.2016



**Постановка задачи.** Рассмотрим конечную пластину размером  $a \times b$  с отверстиями произвольной формы, ограниченной контурами  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$  с кусочно-гладкими границами (см. рис. 1). Предположим, что пластина испытывает различные напряжения в направлении осей  $x, y$ , а отверстия свободны от напряжений. На границе  $\Gamma_0$  получаем следующие условия:

$$\sigma_x|_{x=a} = \sigma_x|_{x=0} = p, \quad \sigma_y|_{y=b} = \sigma_y|_{y=0} = q. \quad (1)$$

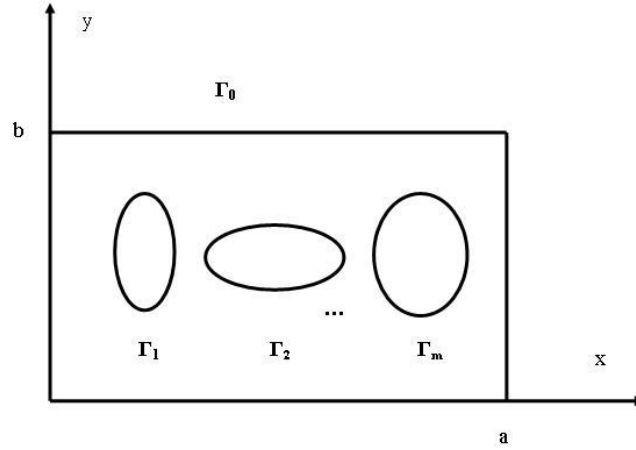


Рис. 1. Пластина с отверстиями произвольной формы

Остальные компоненты тензора напряжений на этих границах равны нулю.

Пусть  $\bar{n}^i = (n_1^i, n_2^i)$  – вектор внешней нормали к  $i$  контуру, тогда на  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$  имеем

$$\sigma_x n_1^i + \tau n_2^i = 0, \quad \tau n_1^i + \sigma_y n_2^i = 0. \quad (2)$$

Одно из возможных решений этой системы

$$\sigma_x|_{\Gamma_i} = \sigma_y|_{\Gamma_i} = \tau|_{\Gamma_i} = 0. \quad (3)$$

В дальнейшем будем считать, что на границе контуров выполнено условие (3). Уравнения теории упругости в стационарном случае имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} = 0. \quad (5)$$

Из уравнения (5) получаем  $\sigma_y$

$$\sigma_y = F(x, y) - \sigma_x, \quad (6)$$

где  $F(x, y)$  – некоторое решение уравнения Лапласа (5).

Из (1) и (3) следует, что для нахождения  $F(x, y)$  следует решить уравнение Лапласа со следующими граничными условиями:

$$F|_{x=a} = F|_{x=0} = p, \quad F|_{y=b} = F|_{y=0} = q, \quad F|_{\Gamma_i} = 0. \quad (7)$$

Решение такой задачи будем считать известным. В этом случае для определения  $\sigma_x, \tau$  получим систему уравнений

$$\Phi_1 = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \Phi_2 = \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

**Законы сохранения.** Напишем для системы (8) законы сохранения.

Определение. Законом сохранения для системы (8) назовем соотношение вида

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = \Pi_1 \Phi_1 + \Pi_2 \Phi_2 = 0, \quad (9)$$

где  $\Pi_i$  – некоторые линейные дифференциальные операторы, по крайней мере, один из которых не тривиален;  $A, B$  – сохраняющийся ток.

Ищем сохраняющийся ток в виде:

$$A = \alpha_1(x, y) \sigma_x + \beta_1(x, y) \tau + \gamma_1(x, y), \quad (10)$$

$$B = \alpha_2(x, y) \sigma_x + \beta_2(x, y) \tau + \gamma_2(x, y),$$

где  $a_i, b_i, \gamma_i$  – искомые функции.

Подставляя (10) в (9), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \sigma_x + \alpha_1 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \tau + \beta_1 \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \sigma_x + \alpha_2 \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_2}{\partial y} \tau + \\ & + \beta_2 \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} = \omega_1(x, y) \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) + \omega_2(x, y) \left( \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) получаем

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial x} + \frac{\partial \beta_2}{\partial y} = 0, \quad \alpha_1 = \beta_2 = \omega_1,$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} = \omega_2 \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \beta_1 = -\alpha_2 = \omega_2.$$

В результате имеем

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - \frac{\partial \beta_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} = \beta_1 \frac{\partial F}{\partial y}. \quad (12)$$

Окончательно сохраняющийся ток принимает вид

$$A = \alpha_1(x, y) \sigma_x + \beta_1(x, y) \tau + \gamma_1(x, y), \quad (13)$$

$$B = -\beta_1(x, y) \sigma_x + \alpha_1(x, y) \tau + \gamma_2(x, y),$$

коэффициенты которого связаны соотношением (12).

Для простоты дальнейших выкладок будем считать, что у нас есть только одно отверстие, ограниченное контуром  $\Gamma_1$ , тогда из (9) по формуле Грина получаем

$$\oint_{\Gamma_0} A dy - B dx + \oint_{\Gamma_1} A dy - B dx = 0. \quad (14)$$

**Решение задачи.** Рассмотрим два сингулярных решения первых двух уравнений (12)

$$\alpha_1^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta_1^1 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned}\gamma_1^1 &= \int \frac{\partial F}{\partial y} \beta_1 dx, \quad \gamma_2^1 = 0. \\ \alpha_1^2 &= \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta_1^2 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma_1^2 &= \int \frac{\partial F}{\partial y} \beta_1 dx, \quad \gamma_2^2 = 0.\end{aligned}\tag{16}$$

Оба эти решения имеют особенность в точке  $x_0, y_0$ , поэтому, чтобы использовать формулу (13), окружим точку окружностью радиусом  $\varepsilon$

$$\Gamma_\varepsilon : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2.$$

Имеем (см. рис. 2):

$$\int_{\Gamma_0} + \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_\varepsilon} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} + \int_{\Gamma_5} = 0.$$

Поскольку

$$\int_{\Gamma_4} + \int_{\Gamma_5} = 0, \quad \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} = 0,$$

получаем

$$\int_{\Gamma_0} + \int_{\Gamma_1} = - \int_{\Gamma_\varepsilon}.\tag{17}$$

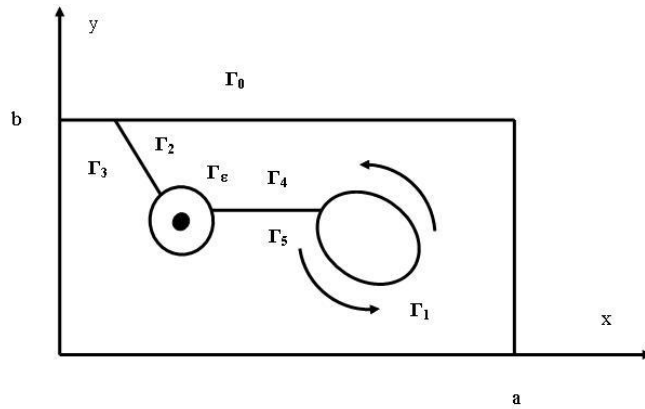


Рис. 2. Вычисление напряженного состояния в точке  $x_0, y_0$

Подставив в (17) решение (15), получаем

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_\varepsilon} &= \int_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\varepsilon^2} \left( \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \sigma_x - \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tau + \gamma_1^1 \right) dy - \\ &- \left( - \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \sigma_x + \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tau \right) dx.\end{aligned}$$

В этой формуле сделаем замену переменных  $x - x_0 = \varepsilon \cos \varphi$ ,  $y - y_0 = \varepsilon \sin \varphi$ ,  $0 < \varphi \leq 2\pi$ , имеем

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} = \int_0^{2\pi} ((\sigma_x \cos \varphi - \tau \sin \varphi) \cos \varphi + (\sigma_x \sin \varphi - \tau \cos \varphi + \varepsilon \gamma_1^2) \sin \varphi) d\varphi.$$

В последнем интеграле устремляем  $\varepsilon \rightarrow 0$  и, используя теорему о среднем, получаем

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} = 2\pi \sigma(x_0, y_0).$$

Аналогично, используя решение (13), получаем

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} = 2\pi \tau(x_0, y_0).$$

Из (17) и приведенных выше формул окончательно имеем

$$2\pi \sigma_x(x_0, y_0) = - \int_{\Gamma_0} \left( \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \sigma_x - \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \tau \right) dy -$$

$$- \left( \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \sigma_x + \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \tau + \gamma_1^1 \right) dx + \int_{\Gamma_1} \gamma_1^1 dy,$$

$$2\pi \tau(x_0, y_0) = - \int_{\Gamma_0} \left( \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \sigma_x + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \tau \right) dy -$$

$$- \left( - \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \sigma_x + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \tau + \gamma_1^2 \right) dx - \int_{\Gamma_1} \gamma_1^2 dy,$$

$$\sigma_y(x_0, y_0) = F(x_0, y_0) - \sigma_x(x_0, y_0).$$

**Замечание.** Если отверстие одно и оно круглое, полученные формулы позволяют построить решение задачи в виде рядов Фурье.

**Заключение.** Задача о вычислении напряжений в упругой прямоугольной пластинке сведена к вычислению нескольких квадратур по внешнему контуру и контурам отверстий. Приведенная методика без труда переносится на случай пластинки, находящейся в условиях плоского напряженного состояния, а также когда в пластинке появляются пластические области вокруг отверстий. Эти результаты будут изложены в следующих работах.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
- [2] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 870 с.
- [3] Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. Elastoplastic Bending of Beam // J. Siberian Federal Univ., Math. and Physics. 2014. № 7 (2). P. 203–208.
- [4] Senashov S. I., Yakhno A. N. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system // J. Phys. A: Math. Theor. 2013. № 46.

[5] Senashov S. I., Yakhno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity SIGMA 8 (2012), 071, 16 pages, <http://dx.doi.org/10.3842//SIGMA.2012.071>. Special Issue «Geometrical Methods in Mathematical Physics».

*S. I. Senashov, I. L. Savostyanova*

## ELASTIC STATE OF A PLATE WITH FREE-FORM HOLES

*M. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, Russia*

**Abstract.** Elastic state of a rectangular plate with free-form holes was studied; the plate was exposed to loads directed to the sides along the normal lines. On the outlines of the holes zero values of the stress component are maintained. With such boundary conditions an exact solution of the problem was built in the form of quadratures on the outer boundary and the boundaries of the holes' outlines. For this purpose an infinite system of laws of equation conservation of the theory of elasticity was found and used that is dependant on the stress component in a linear fashion. For simplicity the case of just one hole was studied in detail in the article. For a certain number of holes the problem shall be solved in much the same way.

**Keywords:** plane elasticity problems, the elastic plate with holes, conservation laws, exact solutions of the theory of elasticity.

## REFERENCES

- [1] Timoshenko S. P., Goodier J. Theory of elasticity. M.: Nauka, 1975. 576 c. (in Russian)
- [2] Novatsky V. Theory of elasticity. M.: Mir, 1975. 870 c. (in Russian)
- [3] Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. Elastoplastic Bending of Beam //J. Siberian Federal Univ., Math. and Physics., 2014. № 7(2). P. 203-208.
- [4] Senashov S. I., Yakhno A. N. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system //J. Phys. A: Math. Theor. 2013. № 46.
- [5] Senashov S. I., Yakhno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity SIGMA 8 (2012), 071, 16 pages, <http://dx.doi.org/10.3842//SIGMA.2012.071>. Special Issue «Geometrical Methods in Mathematical Physics».

---

*Senashov Sergei Ivanovich*

e-mail: sen@sibsau.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, M. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, Russia.

*Savostyanova Irina Leonidovna*

e-mail: savostyanova@sibsau.ru, Ph.D. in Pedagogy, M. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, Russia.

Ю. В. Немировский<sup>1</sup>, С. В. Тихонов<sup>2</sup>

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК

<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** Начало исследования железобетонных конструкций было положено А. А. Гвоздевым [4], который ввел в расчетную практику широко известную модель идеального жесткопластического материала и провел на ее основе большое количество расчетов несущей способности разнообразных строительных конструкций [2], [5]. Модель оказалась достаточно простой и удобной в расчетной инженерной практике и получила широкое развитие как в нашей стране [9], [6], так и за рубежом [3], [7], [8]. Следует, однако, отметить, что, хотя в упомянутых работах часто отмечается, что расчеты проведены в том числе для строительных конструкций из железобетона, при проведении конкретных расчетов в рамках указанной модели фактически не учитывается важнейшее свойство бетонных и железобетонных конструкций, связанное с их существенной разносопротивляемостью при растяжении и сжатии [2], [10], [11].

---

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В., 2016

*Немировский Юрий Владимирович*

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

*Тихонов Сергей Владимирович*

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 14-01-00102, 16-31-00511 мол\_а).

Поступила 05.09.2016

Расчеты в связи с этим ограничиваются случаем простейших форм сечений стержней и простейших условий нагружения и закрепления. Не учитываются современные технологические возможности создания гибких множеств гибридных слоистых армированных конструкций, в которых в сечении послойно могут быть реализованы разные марки бетонов, армирующих элементов и структур армирования. В данной работе на основе идей модели идеально-пластических и упрочняющихся жесткопластических материалов будет рассмотрен подход построения обобщенной модели пластического деформирования и предельного состояния, соответствующего начальному разрушению произвольных армированных стержней на основе бетонов.

**Ключевые слова:** пластичность, балки, предельное состояние, статическая определимость, изгибающий момент, композиты.

УДК: 539.374

### 1. Предельные состояния железобетонных балок.

При исследовании первого предельного состояния используем классическую модель идеального жесткопластического тела для всех материалов (бетона, арматуры) в соответствии с диаграммой на рис. 1.

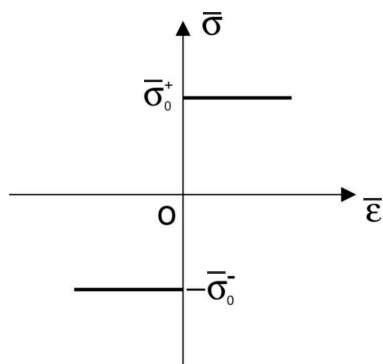


Рис. 1

При анализе второго предельного состояния [1] для всех материалов будем считать, что все материалы являются жесткопластическими с линейным упрочнением, диаграмма которых имеет вид, изображенный на рис. 2.

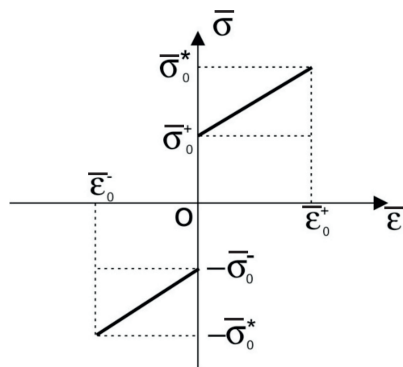


Рис. 2

Будем рассматривать балки постоянного вдоль оси сечения наподобие изображенного на рис. 3.

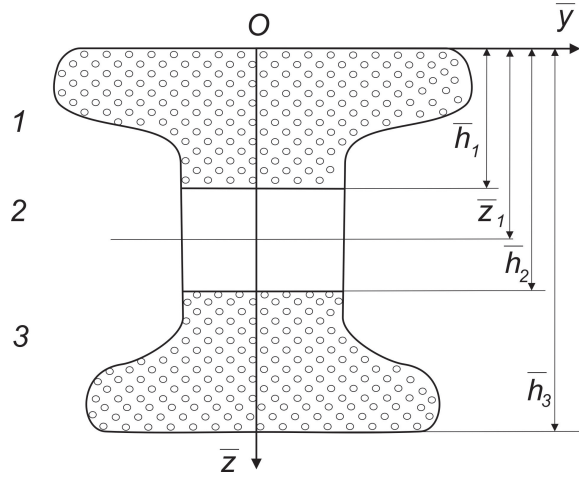


Рис. 3

В общем случае будем считать, что все материалы подчиняются разным законам деформирования при растяжении и сжатии и что структура армирования в слоях 1 и 3 поперечного сечения балки различна как по интенсивности, так и по свойствам фазовых материалов. Для всех рассматриваемых сечений будем считать справедливыми классические кинематические гипотезы Кирхгофа – Лява:

1. Отсутствие поперечного сдвига. Откуда

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} = 0,$$

тогда получим

$$\bar{u} = - \int \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} d\bar{z} + \varphi(\bar{x}).$$

2. В процессе деформирования балка не испытывает обжатия, то есть ее толщина не изменяется. Откуда

$$\bar{w} = \bar{w}(\bar{x}),$$

тогда

$$\bar{u} = -\bar{z} \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \varphi(\bar{x}).$$

Для слоя  $\bar{z} = 0$  обозначим

$$\bar{z} = 0, \quad \bar{u} = \bar{u}_0(\bar{x}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -\bar{z} \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \bar{u}_0, \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{d\bar{u}_0}{d\bar{x}} - \bar{z} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2}, \end{aligned}$$

в соответствии с которыми деформации  $\bar{\varepsilon}(\bar{x}, \bar{z})$  будут иметь выражение

$$\bar{\varepsilon}(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{\varepsilon}_0(\bar{x}) + \bar{z}\bar{\kappa}(\bar{x}), \quad \bar{\varepsilon}_0(\bar{x}) = \frac{d\bar{u}_0}{d\bar{x}}, \quad \bar{\kappa}(\bar{x}) = -\frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2}, \quad (0)$$

где  $\bar{u}_0(x)$  – перемещение вдоль отчетной оси  $\bar{x}$  балки,  $\bar{w}(\bar{x})$  – прогиб.



**I. Первое предельное состояние.**

Рассмотрим идеально-пластический участок балки, для которого

$$\bar{e}_0(\bar{x}) < 0, \quad \bar{e}_0 + \bar{h}_3 \bar{\kappa}(\bar{x}) > 0. \quad (1)$$

Оба неравенства будут выполнены при

$$\bar{e}_0(\bar{x}) < 0, \quad \bar{\kappa}(\bar{x}) > 0. \quad (2)$$

Тогда для рассматриваемого участка балки продольное усилие  $\bar{N}$  определяется равенством

$$\begin{aligned} \bar{N} = & -2\bar{\sigma}_{01}^- \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) d\bar{z} - 2\bar{\sigma}_{02}^- \int_{\bar{h}_1}^{\bar{z}_1} \bar{b}_2(\bar{z}) d\bar{z} + 2\bar{\sigma}_{02}^+ \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_2} \bar{b}_2(\bar{z}) d\bar{z} + \\ & + 2\bar{\sigma}_{03}^+ \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) d\bar{z} = \bar{A}_1 - (\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+) \varphi_2(\bar{z}_1), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 = & \bar{\sigma}_{01}^- (\varphi_1(0) - \varphi_1(\bar{h}_1)) + \bar{\sigma}_{02}^- \varphi_2(\bar{h}_1) + \bar{\sigma}_{02}^+ \varphi_2(\bar{h}_2) + \bar{\sigma}_{03}^+ (\varphi_3(\bar{h}_3) - \varphi_3(\bar{h}_2)), \\ \varphi_k(\bar{z}) = & 2 \int \bar{b}_k(\bar{z}) d\bar{z}, \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

где  $\bar{\sigma}_{01}^{-a}$ ,  $\bar{\sigma}_{03}^{+a}$ ,  $\bar{\sigma}_{02}^\pm$  – пределы текучести арматуры и бетона,  $\mu_1, \mu_3$  – коэффициенты армирования.

Выражение для изгибающего момента  $\bar{M}(\bar{x})$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{M} = & -2\bar{\sigma}_{01}^- \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} - 2\bar{\sigma}_{02}^- \int_{\bar{h}_1}^{\bar{z}_1} \bar{b}_2(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + 2\bar{\sigma}_{02}^+ \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_2} \bar{b}_2(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \\ & + 2\bar{\sigma}_{03}^+ \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} = \bar{B}_1 - (\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+) \psi_2(\bar{z}_1), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 = & \bar{\sigma}_{01}^- (\psi_1(0) - \psi_1(\bar{h}_1)) + \bar{\sigma}_{02}^- \psi_2(\bar{h}_1) + \bar{\sigma}_{02}^+ \psi_2(\bar{h}_2) + \bar{\sigma}_{03}^+ (\psi_3(\bar{h}_3) - \psi_3(\bar{h}_2)), \\ \psi_k(\bar{z}) = & 2 \int \bar{b}_k(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z}, \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Исключая из (3), (4) величину  $\bar{z}_1$  при учете, что  $\bar{N} = \bar{N}_0 = const$ , получим кривую предельных состояний  $\bar{M}^+ \sim \bar{N}_0$

$$\bar{M}^+ = \bar{B}_1 - (\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+) \psi_2(\bar{z}_1),$$

$$\bar{z}_1 = \varphi_2^{-1} \left( \frac{\bar{A}_1 - \bar{N}_0}{\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+} \right),$$

где  $\varphi_2^{-1}$  – обратная к  $\varphi_2$  функция.

В случае поперечного изгиба  $\bar{N}_0 = 0$  и в результате получаем для рассматриваемого случая значение первого предельного момента  $\bar{M}_0^+$

$$\bar{M}_0^+ = \bar{B}_1 - (\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+) \psi_2(\bar{z}_1), \quad \bar{z}_1 = \varphi_2^{-1} \left( \frac{\bar{A}_1}{\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+} \right).$$

Совершенно аналогично для пластических сечений, соответствующих неравенствам

$$\bar{\epsilon}_0 > 0, \quad \bar{\kappa} < 0, \quad (5)$$

для усилия  $\bar{N}$  и изгибающего момента  $\bar{M}$  получим выражения

$$\bar{N} = \bar{A}_2 + (\bar{\sigma}_{02}^+ + \bar{\sigma}_{02}^-) \varphi_2(\bar{z}_1), \quad (6)$$

$$\bar{M} = \bar{B}_2 + (\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+) \psi_2(\bar{z}_1), \quad (7)$$

где

$$\bar{A}_2 = \bar{\sigma}_{01}^+ (\varphi_1(\bar{h}_1) - \varphi_1(0)) - \bar{\sigma}_{02}^- \varphi_2(\bar{h}_1) - \bar{\sigma}_{02}^+ \varphi_2(\bar{h}_2) - \bar{\sigma}_{03}^- (\varphi_3(\bar{h}_3) - \varphi_3(\bar{h}_2)),$$

$$\bar{B}_2 = \bar{\sigma}_{01}^+ (\psi_1(\bar{h}_1) - \psi_1(0)) - \bar{\sigma}_{02}^- \psi_2(\bar{h}_2) - \bar{\sigma}_{02}^+ \psi_2(\bar{h}_1) - \bar{\sigma}_{03}^- (\psi_3(\bar{h}_3) - \psi_3(\bar{h}_2)).$$

Таким образом, для первого предельного состояния локализованные предельные режимы в общем случае разделяют между собой жесткие участки балки, для которых

$$\bar{\epsilon}_0 = 0, \quad \bar{\kappa} = 0. \quad (8)$$

Подставляя найденные из (6) значения  $\bar{z}_1$  в (7), получим для этого случая предельный изгибающий момент

$$\bar{M}_0^- = \bar{B}_2 + (\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+) \psi_2(\bar{z}_1), \quad \bar{z}_1 = \varphi_2^{-1} \left( \frac{-\bar{A}_2}{\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+} \right). \quad (9)$$

В выражения (2), (7)

$$\bar{\sigma}_{01}^\pm = (1 - \mu_1) \bar{\sigma}_{02}^\pm + \mu_1 \bar{\sigma}_{a1}^\pm, \quad \bar{\sigma}_{03}^\pm = (1 - \mu_3) \bar{\sigma}_{02}^\pm + \mu_3 \bar{\sigma}_{a3}^\pm, \quad (10)$$

где  $\bar{\sigma}_{02}^\pm, \bar{\sigma}_{a1}^\pm, \bar{\sigma}_{a3}^\pm$  – пределы текучести бетона и арматуры в первом и третьих слоях при растяжении (+) и сжатии (-),  $\mu_1, \mu_3$  – коэффициенты армирования в первом и третьем слоях.

## II. Второе предельное состояние.

При наличии упрочнения связь напряжений с деформациями можно аппроксимировать линейной

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + \bar{K}_1 \bar{\epsilon} \quad (11)$$

или параболической зависимостью

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + \bar{K}_2 \bar{\epsilon} + \bar{K}_3 \bar{\epsilon}^2. \quad (12)$$

Если  $\bar{\sigma}_*$  – предел прочности и  $\bar{\epsilon}_*$  – предельная деформация упрочнения, то коэффициенты  $\bar{K}_1, \bar{K}_2$  определяются следующим образом при аппроксимации (11):

$$\bar{K}_1 = \frac{\bar{\sigma}_* - \bar{\sigma}_0}{\bar{\epsilon}_*}, \quad \bar{K}_2 = 0,$$

при аппроксимации (12):

$$\bar{K}_2 = \frac{2(\bar{\sigma}_* - \bar{\sigma}_0)}{\bar{\epsilon}_*}, \quad \bar{K}_3 = -\frac{\bar{\sigma}_* - \bar{\sigma}_0}{\bar{\epsilon}_*^2}.$$

Для разносопротивляющихся материалов будем иметь вместо (11)

$$\bar{\sigma}^+ = \bar{\sigma}_0^+ + \bar{K}_1^+ \bar{\epsilon}, \quad \bar{\epsilon} > 0,$$

$$\bar{\sigma}^- = -\bar{\sigma}_0^- + \bar{K}_1^- \bar{\epsilon}, \quad \bar{\epsilon} < 0, \quad (13)$$

$$\bar{K}_1^\pm = \frac{\bar{\sigma}_*^\pm - \bar{\sigma}_0^\pm}{\bar{\epsilon}_*^\pm}$$

и вместо (12) – зависимости

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^+ &= \bar{\sigma}_0^+ + \bar{K}_2^+ \bar{\varepsilon} + \bar{K}_3^+ \bar{\varepsilon}^2, & \bar{\varepsilon} > 0, \\ \bar{\sigma}^- &= \bar{\sigma}_0^- + \bar{K}_2^- \bar{\varepsilon} + \bar{K}_3^- \bar{\varepsilon}^2, & \bar{\varepsilon} < 0.\end{aligned}$$

Для простоты и определенности ограничимся далее линейными аппроксимациями (13). Как обычно, будем использовать кинематические гипотезы Кирхгофа – Лява (0).

Рассмотрим пластически деформируемый участок балки, для которого выполняются неравенства

$$\bar{e}_0(\bar{x}) < 0, \quad \bar{e}_0(\bar{x}) + \bar{h}_3 \bar{\kappa}(\bar{x}) > 0. \quad (14)$$

Оба неравенства будут справедливы при

$$\bar{\kappa}(\bar{x}) > 0 \quad \text{и} \quad \bar{e}_0(\bar{x}) < 0. \quad (15)$$

Аналогично может существовать пластический участок, для которого

$$\bar{e}_0(\bar{x}) > 0, \quad \bar{e}_0(\bar{x}) + \bar{h}_4 \bar{\kappa}(\bar{x}) < 0 \quad (16)$$

или

$$\bar{\kappa}(\bar{x}) < 0, \quad \bar{e}_0(\bar{x}) > 0, \quad (17)$$

и, наконец, в соответствии с (0) в балке могут существовать жесткие участки, для которых

$$\bar{e}_0(\bar{x}) = 0, \quad \bar{\kappa}(\bar{x}) = 0. \quad (18)$$

Рассмотрим пластический участок балки, соответствующий неравенствам (15).

Для него продольное усилие  $\bar{N}$  определяется выражением

$$\begin{aligned}\bar{N} &= 2 \int_0^{\bar{h}_1} \left[ -\bar{\sigma}_{01}^- + \bar{K}_{11}^- (\bar{e}_0(\bar{x}) + \bar{z} \bar{\kappa}(\bar{x})) \right] \bar{b}_1(\bar{z}) d\bar{z} + \\ &+ 2 \int_{\bar{h}_1}^{\bar{z}_1} \left[ -\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{K}_{12}^- (\bar{e}_0(\bar{x}) + \bar{z} \bar{\kappa}(\bar{x})) \right] \bar{b}_2(\bar{z}) d\bar{z} + \\ &+ 2 \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_2} \left[ \bar{\sigma}_{02}^+ + \bar{K}_{12}^+ (\bar{e}_0(\bar{x}) + \bar{z} \bar{\kappa}(\bar{x})) \right] \bar{b}_2(\bar{z}) d\bar{z} + \\ &+ 2 \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \left[ \bar{\sigma}_{03}^+ + \bar{K}_{13}^+ (\bar{e}_0(\bar{x}) + \bar{z} \bar{\kappa}(\bar{x})) \right] \bar{b}_3(\bar{z}) d\bar{z},\end{aligned} \quad (19)$$

здесь  $\bar{z}_1$  – координаты нейтральной линии

$$\bar{z}_1 = -\frac{\bar{e}_0(\bar{x})}{\bar{\kappa}(\bar{x})}.$$

Тогда

$$\bar{N} = \bar{R}_1(\bar{z}_1) + \bar{R}_2(\bar{z}_1) \bar{\kappa}(\bar{x}), \quad (20)$$

где

$$\varphi_i(\bar{z}) = 2 \int \bar{b}_i(\bar{z}) d\bar{z}, \quad \psi_i(\bar{z}) = 2 \int \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\begin{aligned}
\bar{R}_1(\bar{z}_1) &= -\bar{\sigma}_{01}^-(\varphi_1(\bar{h}_1) - \varphi_1(0)) - \bar{\sigma}_{02}^-(\varphi_2(\bar{z}_1) - \varphi_2(\bar{h}_1)) + \\
&\quad + \bar{\sigma}_{02}^+(\varphi_2(\bar{h}_2) - \varphi_2(\bar{z}_1)) + \bar{\sigma}_{03}^+(\varphi_3(\bar{h}_3) - \varphi_3(\bar{h}_2)), \\
\bar{R}_2(\bar{z}_1) &= \bar{K}_{11}^-(\psi_1(\bar{h}_1) - \psi_1(0) - \bar{z}_1(\varphi_1(\bar{h}_1) - \varphi_1(0))) + \\
&\quad + \bar{K}_{12}^-(\psi_2(\bar{z}_1) - \psi_2(\bar{h}_1) - \bar{z}_1(\varphi_1(\bar{z}_1) - \varphi_1(\bar{h}_1))) + \\
&\quad + \bar{K}_{12}^+(\psi_2(\bar{h}_2) - \psi_2(\bar{z}_1) - \bar{z}_1(\varphi_2(\bar{h}_2) - \varphi_2(\bar{z}_1))) + \\
&\quad + \bar{K}_{13}^+(\psi_3(\bar{h}_3) - \psi_3(\bar{h}_2) - \bar{z}_1(\varphi_3(\bar{h}_3) - \varphi_3(\bar{h}_2))).
\end{aligned}$$

Совершенно аналогично для изгибающего момента  $\bar{M}$  в этой области будем иметь

$$\bar{M} = \bar{R}_3(\bar{z}_1) + \bar{R}_4(\bar{z}_1)\bar{\kappa}(\bar{x}),$$

$$\theta_i(\bar{z}) = 2 \int \bar{b}_i(\bar{z})\bar{z}^2 d\bar{z},$$

$$\begin{aligned}
\bar{R}_3(\bar{z}_1) &= -\bar{\sigma}_{01}^-(\psi_1(\bar{h}_1) - \psi_1(0)) - \bar{\sigma}_{02}^-(\psi_2(\bar{z}_1) - \psi_2(\bar{h}_1)) + \\
&\quad + \bar{\sigma}_{02}^+(\psi_2(\bar{h}_2) - \psi_2(\bar{z}_1)) + \bar{\sigma}_{03}^+(\psi_3(\bar{h}_3) - \psi_3(\bar{h}_2)), \\
\bar{R}_4(\bar{z}_1) &= \bar{K}_{11}^-[\theta_1(\bar{h}_1) - \theta_1(0) - \bar{z}_1(\psi_1(\bar{h}_1) - \psi_1(0))] + \\
&\quad + \bar{K}_{12}^-[\theta_2(\bar{z}_1) - \theta_2(\bar{h}_1) - \bar{z}_1(\psi_2(\bar{z}_1) - \psi_2(\bar{h}_1))] + \\
&\quad + \bar{K}_{12}^+[\theta_2(\bar{h}_2) - \theta_2(\bar{z}_1) - \bar{z}_1(\psi_2(\bar{h}_2) - \psi_2(\bar{z}_1))] + \\
&\quad + \bar{K}_{13}^+[\theta_3(\bar{h}_3) - \theta_3(\bar{h}_2) - \bar{z}_1(\psi_3(\bar{h}_3) - \psi_3(\bar{h}_2))].
\end{aligned} \tag{21}$$

В случае поперечного изгиба имеем  $\bar{N} = 0$ . Тогда

$$\bar{\kappa}(x) = -\frac{\bar{R}_1(\bar{z}_1)}{\bar{R}_2(\bar{z}_1)}.$$

Подставляя это выражение в выражение для  $M$ , получим выражение

$$\bar{M}(\bar{x}) = \bar{R}_3(\bar{z}_1) - \frac{\bar{R}_1(\bar{z}_1)\bar{R}_4(\bar{z}_1)}{\bar{R}_2(\bar{z}_1)}.$$

Для статически определимых балок  $\bar{M}(\bar{x})$  – известная функция. И тогда это уравнение служит для определения  $\bar{z}_1(\bar{x})$ .

Следует иметь в виду, что корень должен быть действительным, положительным и находиться в пределах

$$\bar{h}_1 \leq \bar{z}_1 \leq \bar{h}_2.$$

Определив  $\bar{z}_1(\bar{x})$ , затем находим

$$\bar{\kappa}(\bar{x}) = -\frac{\bar{R}_1(\bar{z}_1)}{\bar{R}_2(\bar{z}_1)}, \quad \bar{e}_0 = -\bar{z}\bar{\kappa}.$$

После чего определяем  $\bar{u}_0(\bar{x})$  и  $\bar{w}(\bar{x})$  путем интегрирования зависимостей (0).

## 2. Вычисление предельных моментов для балок.

Первый предельный момент реализуется, когда все материалы – идеально-пластические.

Тогда

$$\bar{\sigma}_i^- = -\bar{\sigma}_{0i}^-, \quad \bar{\sigma}_k^- = -\bar{\sigma}_{0k}^-, \quad \bar{\sigma}_k^+ = \bar{\sigma}_{0k}^+, \quad \bar{\sigma}_j^+ = \bar{\sigma}_{0j}^+.$$

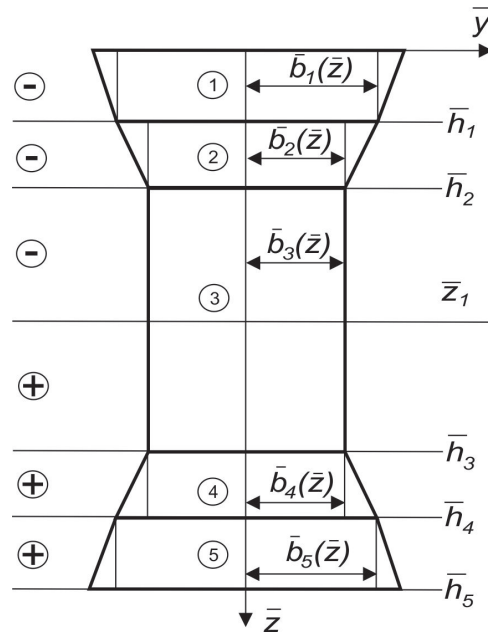


Рис. 4

В случае кусочно-линейной аппроксимации геометрического сечения поперечной формы балок имеем

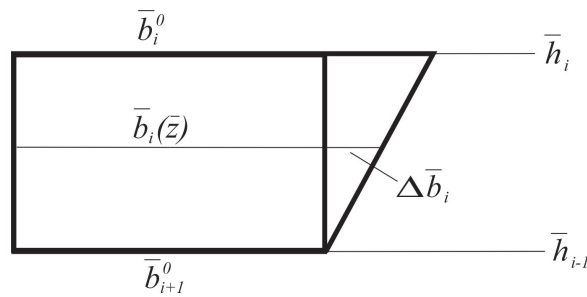


Рис. 5

$$\bar{b}_i(\bar{z}) = d_{1i}\bar{z} + \bar{d}_{2i}, \quad (22)$$

где

$$d_{1i} = \frac{\bar{b}_{i+1}^0 - \bar{b}_i^0}{\bar{h}_i - \bar{h}_{i-1}}, d_{2i} = \frac{\bar{b}_i^0 \bar{h}_i - \bar{b}_{i+1}^0 \bar{h}_{i-1}}{\bar{h}_i - \bar{h}_{i-1}}.$$

$$\bar{b}_i(z) = \bar{b}_{i+1}^0 + \Delta \bar{b}_i, \frac{\Delta \bar{b}_i}{\bar{b}_i^0 - \bar{b}_{i+1}^0} = \frac{(\bar{h}_i - \bar{z})}{\bar{h}_i - \bar{h}_{i+1}^0}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{N} &= -2\bar{\sigma}_{0i}^- \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} (d_{1i}\bar{z} + d_{2i}) d\bar{z} - 2\bar{\sigma}_{0k}^- \int_{\bar{h}_{k-1}}^{\bar{z}_1} (d_{1k}\bar{z} + d_{2k}) d\bar{z} + \\ &+ 2\bar{\sigma}_{0k}^+ \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_k} (d_{1k}\bar{z} + d_{2k}) d\bar{z} + 2 \sum_{j=k+1}^n \bar{\sigma}_{0j}^+ \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} (d_{1j}\bar{z} + d_{2j}) d\bar{z} = \\ &= \bar{A}_{11}\bar{z}_1^2 + \bar{A}_{12}\bar{z}_1 + \bar{A}_{13}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= -d_{1k} (\bar{\sigma}_{0k}^- + \bar{\sigma}_{0k}^+), \\ \bar{A}_{12} &= -2d_{2k} (\bar{\sigma}_{0k}^- + \bar{\sigma}_{0k}^+), \\ \bar{A}_{13} &= -2\bar{\sigma}_{0i}^- \sum_{i=1}^{k-1} \left[ \frac{d_{1i}}{2} (\bar{h}_i^2 - \bar{h}_{i-1}^2) + \bar{d}_{2i} (\bar{h}_i - \bar{h}_{i-1}) \right] + \frac{d_{1k}}{2} [\bar{\sigma}_{0k}^- \bar{h}_{k-1}^2 + \bar{\sigma}_{0k}^+ \bar{h}_k^2] + \\ &+ d_{2k} [\bar{\sigma}_{0k}^- \bar{h}_{k-1} + \bar{\sigma}_{0k}^+ \bar{h}_k] + \\ &+ 2 \sum_{j=k+1}^n \bar{\sigma}_{0j}^+ \left[ \frac{d_{1j}}{2} (\bar{h}_j^2 - \bar{h}_{j-1}^2) + \bar{d}_{2j} (\bar{h}_j - \bar{h}_{j-1}) \right]. \\ \bar{M} &= -2\bar{\sigma}_{0i}^- \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} (d_{1i}\bar{z} + d_{2i}) \bar{z} d\bar{z} - 2\bar{\sigma}_{0k}^- \int_{\bar{h}_{k-1}}^{\bar{z}_1} (d_{1k}\bar{z} + d_{2k}) \bar{z} d\bar{z} + \\ &+ 2\bar{\sigma}_{0k}^+ \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_k} (d_{1k}\bar{z} + d_{2k}) \bar{z} d\bar{z} + 2 \sum_{j=k+1}^n \bar{\sigma}_{0j}^+ \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} (d_{1j}\bar{z} + d_{2j}) \bar{z} d\bar{z} = \\ &= \bar{A}_{21}\bar{z}_1^3 + \bar{A}_{22}\bar{z}_1^2 + \bar{A}_{23}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}_{21} &= -\frac{2}{3}d_{1k} (\bar{\sigma}_{0k}^+ + \bar{\sigma}_{0k}^-), \quad \bar{A}_{22} = -d_{2k} (\bar{\sigma}_{0k}^- + \bar{\sigma}_{0k}^+), \\ \bar{A}_{23} &= -2\bar{\sigma}_{0i}^- \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{d_{1i}}{3} (\bar{h}_i^3 - \bar{h}_{i-1}^3) + \frac{d_{2i}}{2} (\bar{h}_i^2 - \bar{h}_{i-1}^2) \right) + \frac{d_{1k}}{3} \bar{h}_{k-1}^3 (\bar{\sigma}_{0k}^- + \bar{\sigma}_{0k}^+) + \\ &+ \frac{d_{2k}}{2} \bar{h}_{k-1}^2 (\bar{\sigma}_{0k}^- + \bar{\sigma}_{0k}^+) + \sum_{j=k+1}^n \bar{\sigma}_{0j}^+ \left( \frac{d_{1j}}{3} (\bar{h}_j^3 - \bar{h}_{j-1}^3) + \frac{d_{2j}}{2} (\bar{h}_j^2 - \bar{h}_{j-1}^2) \right). \end{aligned}$$

Рассматриваемые соотношения получены при предположении, что

$$\bar{\varepsilon}(\bar{x}, 0) < 0, \quad \bar{\varepsilon}(\bar{x}, \bar{h}_n) > 0.$$

Тогда в соответствии с кинематической гипотезой Кирхгофа – Лява

$$\bar{\varepsilon}(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{e}_0(\bar{x}) + \bar{z}\bar{\kappa}$$

для рассматриваемого случая имеем

$$\bar{e}_0(\bar{x}) < 0, \quad \bar{e}_0(\bar{x}) + \bar{h}_n\bar{\kappa}(x) > 0$$

или

$$\bar{h}_n\bar{\kappa}(\bar{x}) > -\bar{e}_0(\bar{x}) > 0,$$

следовательно,

$$\bar{\kappa}(\bar{x}) > 0.$$

Для простоты рассмотрим сначала класс конструкций, в которых  $k$ -й слой будет иметь прямоугольное поперечное сечение. Тогда  $d_{1k} = 0$ ,  $\bar{A}_{11} = \bar{A}_{21} = 0$  и выражения для  $\bar{N}$  и  $\bar{M}$  примут вид

$$\bar{N} = \bar{A}_{12}\bar{z}_1 + \bar{A}_{13}, \quad \bar{M} = \bar{A}_{22}\bar{z}_1^2 + \bar{A}_{23}.$$

В случае поперечного изгиба ( $\bar{N} = 0$ ) будем иметь

$$\bar{z}_1 = -\frac{\bar{A}_{13}}{\bar{A}_{12}}, \quad (\bar{h}_{k-1} \leq \bar{z}_1 \leq \bar{h}_k).$$

$$\bar{M} = \bar{A}_{22} \left( \frac{\bar{A}_{13}}{\bar{A}_{12}} \right)^2 + \bar{A}_{23} = \bar{M}_0^+,$$

где  $\bar{M}_0^+$  – первый предельный изгибающий момент (для случая  $\bar{\kappa} > 0$ ,  $e_0 < 0$ ).

Совершенно аналогично для случая  $\bar{\kappa} < 0$ ,  $\bar{e}_0 > 0$

$$\begin{aligned} \bar{N} = 2 \left[ \bar{\sigma}_{0i}^+ \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} (d_{1i}\bar{z} + d_{2i}) d\bar{z} + \bar{\sigma}_{0k}^+ \int_{\bar{h}_{k-1}}^{\bar{z}_1} (d_{1k}\bar{z} + d_{2k}) d\bar{z} - \right. \\ \left. - \bar{\sigma}_{0k}^- \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_k} (d_{1k}\bar{z} + d_{2k}) d\bar{z} - \sum_{j=k+1}^n \bar{\sigma}_{0j}^- \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} (d_{1j}\bar{z} + d_{2j}) d\bar{z} \right] = \end{aligned} \quad (25)$$

$$= \bar{B}_{11}\bar{z}_1^2 + \bar{B}_{12}\bar{z}_1 + \bar{B}_{13}, \quad (\bar{h}_{k-1} \leq \bar{z}_1 \leq \bar{h}_k),$$

где

$$\bar{B}_{11} = d_{1k} (\bar{\sigma}_{0k}^- + \bar{\sigma}_{0k}^+),$$

$$\bar{B}_{12} = 2d_{2k} (\bar{\sigma}_{0k}^- + \bar{\sigma}_{0k}^+),$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_{13} = 2 \left[ \bar{\sigma}_{0i}^+ \sum_{i=1}^{k-1} \left[ \frac{d_{1i}}{2} (\bar{h}_i^2 - \bar{h}_{i-1}^2) + d_{2i} (\bar{h}_i - \bar{h}_{i-1}) \right] + \frac{d_{1k}}{2} [\bar{\sigma}_{0k}^- \bar{h}_{k-1}^2 + \bar{\sigma}_{0k}^+ \bar{h}_k^2] + \right. \\ \left. + d_{2k} [\bar{\sigma}_{0k}^- \bar{h}_{k-1} + \bar{\sigma}_{0k}^+ \bar{h}_k] - \sum_{j=k+1}^n \bar{\sigma}_{0j}^- \left[ \frac{d_{1j}}{2} (\bar{h}_j^2 - \bar{h}_{j-1}^2) + d_{2j} (\bar{h}_j - \bar{h}_{j-1}) \right] \right]. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\bar{M} = \bar{B}_{21}\bar{z}_1^3 + \bar{B}_{22}\bar{z}_1^2 + \bar{B}_{23},$$

где

$$\bar{B}_{21} = \frac{2}{3}d_{1k} (\bar{\sigma}_{0k}^+ + \bar{\sigma}_{0k}^-), \quad \bar{B}_{22} = d_{2k} (\bar{\sigma}_{0k}^- + \bar{\sigma}_{0k}^+),$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_{23} = 2\bar{\sigma}_{01}^+ \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{d_{1i}}{3} (\bar{h}_i^3 - \bar{h}_{i-1}^3) + \frac{d_{2i}}{2} (\bar{h}_i^2 - \bar{h}_{i-1}^2) \right) + \frac{d_{1k}}{3} \bar{h}_{k-1}^3 (\bar{\sigma}_{0k}^- + \bar{\sigma}_{0k}^+) + \\ + \frac{d_{2k}}{2} \bar{h}_{k-1}^2 (\bar{\sigma}_{0k}^- + \bar{\sigma}_{0k}^+) - \sum_{j=k+1}^n \bar{\sigma}_{0j}^- \left( \frac{d_{1j}}{3} (\bar{h}_j^3 - \bar{h}_{j-1}^3) + \frac{d_{2j}}{2} (\bar{h}_j^2 - \bar{h}_{j-1}^2) \right). \end{aligned}$$

В случае прямоугольного сечения  $k$ -участка будем иметь

$$\bar{B}_{11} = \bar{B}_{21} = 0$$

и при поперечном изгибе

$$\bar{z}_1 = -\frac{\bar{B}_{13}}{\bar{B}_{12}}, \bar{M} = \bar{B}_{22} \left( \frac{\bar{B}_{13}}{\bar{B}_{12}} \right)^2 + \bar{B}_{23} = -M_0^-,$$

где  $\bar{M}_0^-$  – первый предельный момент при  $\bar{\kappa} < 0$ .

**Второе предельное состояние.**

Если хотя бы один из материалов будет упрочняющимся, то переходим к анализу второго предельного состояния.

Будем считать для удобства записи формул и их анализа, что все материалы будут линейно упрочняющимися.

Тогда в случае  $\bar{\kappa} > 0$ ,  $\bar{e}_0 < 0$  для напряжений в  $i$ -слое будем иметь

$$\bar{\sigma}_i^- = -\bar{\sigma}_{0i}^- + \bar{K}_i^- \bar{\varepsilon}, \quad \bar{\varepsilon} < 0, \quad \bar{K}_i^- = \frac{\bar{\sigma}_*^- + \bar{\sigma}_0^-}{\bar{\varepsilon}_*^-},$$

$$\bar{\sigma}_i^+ = \bar{\sigma}_{0i}^+ + \bar{K}_i^+ \bar{\varepsilon}, \quad \bar{\varepsilon} > 0, \quad \bar{K}_i^+ = \frac{\bar{\sigma}_*^+ - \bar{\sigma}_0^+}{\bar{\varepsilon}_*^+},$$

$$\bar{\varepsilon}(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{e}_0(\bar{x}) + \bar{z}\bar{\kappa}(\bar{x}).$$

В этом случае для усилия  $\bar{N}$  имеем

$$\begin{aligned} \bar{N} = & 2 \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{\sigma}_i^- \bar{b}_i(\bar{z}) d\bar{z} + 2 \int_{\bar{h}_{m-1}}^{\bar{z}_1} \bar{\sigma}_m^- \bar{b}_m(\bar{z}) d\bar{z} + 2 \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_m} \bar{\sigma}_m^+ \bar{b}_m(\bar{z}) d\bar{z} + \\ & + 2 \sum_{j=m+1}^n \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{\sigma}_j^+ \bar{b}_j(\bar{z}) d\bar{z} = 2 \left\{ - \sum_{i=1}^{m-1} \bar{\sigma}_{0i}^- \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) d\bar{z} + \right. \\ & + \bar{e}_0(x) \sum_{i=1}^{m-1} \bar{K}_i^- \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{\kappa}(\bar{x}) \sum_{i=1}^{m-1} \bar{K}_i^- \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} - \\ & - \bar{\sigma}_{0m}^- \int_{\bar{h}_{m-1}}^{\bar{z}_1} \bar{b}_m(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{e}_0(\bar{x}) \bar{K}_m^- \int_{\bar{h}_{m-1}}^{\bar{z}_1} \bar{b}_m(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{\kappa}(\bar{x}) \bar{K}_m^- \int_{\bar{h}_{m-1}}^{\bar{z}_1} \bar{b}_m(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \\ & + \bar{\sigma}_{0m}^+ \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_m} \bar{b}_m(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{e}_0(\bar{x}) \bar{K}_m^+ \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_m} \bar{b}_m(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{\kappa}(\bar{x}) \bar{K}_m^+ \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_m} \bar{b}_m(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \\ & + \sum_{j=m+1}^n \bar{\sigma}_{0j}^+ \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{e}_0(x) \sum_{j=m+1}^n \bar{K}_j^+ \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) d\bar{z} + \\ & \left. + \bar{\kappa}(\bar{x}) \sum_{j=m+1}^n \bar{K}_j^+ \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Т. к.  $\bar{b}_m(\bar{z}) = \bar{b}_m^0 = const$ , данное выражение примет вид

$$\bar{N} = \bar{D}_{11} + \bar{D}_{12} \bar{z}_1 + \bar{D}_{13} \bar{z}_1^2,$$



где

$$\begin{aligned} \bar{D}_{11} = 2 \left\{ - \sum_{i=1}^{m-1} \bar{\sigma}_{0i}^- \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{\kappa}(x) \sum_{i=1}^{m-1} \bar{K}_i^- \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \bar{\sigma}_{0m}^- \bar{b}_m^0 \bar{h}_{m-1} - \right. \\ \left. - \bar{\kappa}(\bar{x}) \bar{K}_m^- \bar{b}_m^0 \frac{\bar{h}_{m-1}^2}{2} + \bar{\sigma}_{0m}^+ \bar{b}_m^0 \bar{h}_m + \bar{\kappa}(x) \bar{K}_m^+ \bar{b}_m^0 \frac{\bar{h}_m^2}{2} + \sum_{j=m+1}^n \bar{\sigma}_{0j}^+ \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) d\bar{z} + \right. \\ \left. + \bar{\kappa}(\bar{x}) \sum_{j=m+1}^n \bar{K}_j^+ \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} \right\}, \\ \bar{D}_{12} = 2 \left\{ - \bar{\kappa}(x) \left( \sum_{i=1}^{m-1} \bar{K}_i^- \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) d\bar{z} + \sum_{j=m+1}^n \bar{K}_j^+ \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) d\bar{z} \right) - \right. \\ \left. - \bar{b}_m^0 (\bar{\sigma}_{0m}^- + \bar{\sigma}_{0m}^+) + \bar{\kappa}(x) \bar{b}_m^0 (\bar{K}_m^- \bar{h}_{m-1} - \bar{K}_m^+ \bar{h}_m) \right\}, \\ \bar{D}_{13} = \bar{\kappa}(\bar{x}) \bar{b}_m^0 (\bar{K}_m^+ - \bar{K}_m^-). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M} = 2 \left\{ - \sum_{i=1}^{m-1} \bar{\sigma}_{0i}^- \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \bar{e}_0(\bar{x}) \sum_{i=1}^{m-1} \bar{K}_i^- \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \right. \\ \left. + \bar{\kappa}(\bar{x}) \sum_{i=1}^{m-1} \bar{K}_i^- \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z}^2 d\bar{z} - \right. \\ - \bar{\sigma}_{0m}^- \int_{\bar{h}_{m-1}}^{\bar{z}_1} \bar{b}_m(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \bar{e}_0(\bar{x}) \bar{K}_m^- \int_{\bar{h}_{m-1}}^{\bar{z}_1} \bar{b}_m(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \bar{\kappa}(\bar{x}) \bar{K}_m^- \int_{\bar{h}_{m-1}}^{\bar{z}_1} \bar{b}_m(\bar{z}) \bar{z}^2 d\bar{z} + \\ \left. + \bar{\sigma}_{0m}^+ \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_m} \bar{b}_m(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \bar{e}_0(\bar{x}) \bar{K}_m^+ \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_m} \bar{b}_m(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \bar{\kappa}(\bar{x}) \bar{K}_m^+ \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_m} \bar{b}_m(\bar{z}) \bar{z}^2 d\bar{z} + \right. \\ \left. + \sum_{j=m+1}^n \bar{\sigma}_{0j}^+ \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \bar{e}_0(\bar{x}) \sum_{j=m+1}^n \bar{K}_j^+ \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \right. \\ \left. + \bar{\kappa}(\bar{x}) \sum_{j=m+1}^n \bar{K}_j^+ \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) \bar{z}^2 d\bar{z} \right\} = \\ = \bar{E}_{11} + \bar{z}_1 \bar{E}_{12} + \bar{z}_1^2 \bar{E}_{13} + \bar{z}_1^3 \bar{E}_{14}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{11} &= -2 \sum_{i=1}^{m-1} \bar{\sigma}_{oi}^- \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + 2 \sum_{j=m+1}^n \bar{\sigma}_{0j}^+ \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \\
&+ \bar{\kappa}(\bar{x}) \left( \sum_{i=1}^{m-1} \bar{K}_i^- \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z}^2 d\bar{z} + \sum_{j=m+1}^n \bar{K}_j^+ \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) \bar{z}^2 d\bar{z} \right) + \\
&+ \bar{b}_m^0 \left( \bar{\sigma}_{0m}^- \bar{h}_{m-1}^2 + \bar{\sigma}_{0m}^+ \bar{h}_m^2 \right) + \frac{2}{3} \bar{b}_m^0 \bar{\kappa}(\bar{x}) \left( \bar{K}_m^+ \bar{h}_m^3 - \bar{K}_m^- \bar{h}_{m-1}^3 \right), \\
\bar{E}_{12} &= \bar{\kappa}(\bar{x}) \left( -2 \sum_{i=1}^{m-1} \bar{K}_i^- \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{z} \bar{b}_i(\bar{z}) d\bar{z} - 2 \sum_{j=m+1}^n \bar{K}_j^+ \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \right. \\
&\quad \left. + \bar{b}_m^0 \left( \bar{K}_m^- \bar{h}_{m-1}^2 - \bar{K}_m^+ \bar{h}_m^2 \right) \right), \\
\bar{E}_{13} &= -\bar{b}_m^0 \left( \bar{\sigma}_{0m}^- + \bar{\sigma}_{0m}^+ \right), \quad \bar{E}_{14} = \frac{2}{3} \bar{\kappa}(\bar{x}) \bar{b}_m^0 \left( \bar{K}_m^- - \bar{K}_m^+ \right).
\end{aligned}$$

В случае  $\bar{\kappa} < 0$ ,  $\bar{e}_0 > 0$  усилия  $\bar{N}$  имеют вид

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= 2 \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{\sigma}_i^+ \bar{b}_i(\bar{z}) d\bar{z} + 2 \int_{\bar{h}_{m-1}}^{\bar{z}_1} \bar{\sigma}_m^+ \bar{b}_m(\bar{z}) d\bar{z} + 2 \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_m} \bar{\sigma}_m^- \bar{b}_m(\bar{z}) d\bar{z} + \\
&+ 2 \sum_{j=m+1}^n \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{\sigma}_j^- \bar{b}_j(\bar{z}) d\bar{z} = 2 \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} \bar{\sigma}_{0i}^+ \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) d\bar{z} + \right. \\
&+ \bar{e}_0(\bar{x}) \sum_{i=1}^{m-1} \bar{K}_i^+ \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{\kappa}(\bar{x}) \sum_{i=1}^{m-1} \bar{K}_i^+ \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \\
&+ \bar{\sigma}_{0m}^+ \int_{\bar{h}_{m-1}}^{\bar{z}_1} \bar{b}_m(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{e}_0(\bar{x}) \bar{K}_m^+ \int_{\bar{h}_{m-1}}^{\bar{z}_1} \bar{b}_m(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{\kappa}(\bar{x}) \bar{K}_m^+ \int_{\bar{h}_{m-1}}^{\bar{z}_1} \bar{b}_m(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} - \\
&- \bar{\sigma}_{0m}^- \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_m} \bar{b}_m(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{e}_0(\bar{x}) \bar{K}_m^- \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_m} \bar{b}_m(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{\kappa}(\bar{x}) \bar{K}_m^- \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_m} \bar{b}_m(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} - \\
&- \sum_{j=m+1}^n \bar{\sigma}_{0j}^- \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{e}_0(\bar{x}) \sum_{j=m+1}^n \bar{K}_j^- \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) d\bar{z} + \\
&\quad \left. + \bar{\kappa}(\bar{x}) \sum_{j=m+1}^n \bar{K}_j^- \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} \right\}. \tag{28}
\end{aligned}$$

Т. к.  $\bar{b}_m(\bar{z}) = \bar{b}_m^0 = const$ , данное выражение примет вид

$$\bar{N} = \bar{F}_{11} + \bar{F}_{12} \bar{z}_1 + \bar{F}_{13} \bar{z}_1^2,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{F}_{11} = 2 & \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} \bar{\sigma}_{0i}^+ \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{\kappa}(\bar{x}) \sum_{i=1}^{m-1} \bar{K}_i^+ \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} - \bar{\sigma}_{0m}^+ \bar{b}_m^0 \bar{h}_{m-1} - \right. \\ & \left. - \bar{\kappa}(\bar{x}) \bar{K}_m^+ \bar{b}_m^0 \frac{\bar{h}_{m-1}^2}{2} - \bar{\sigma}_{0m}^- \bar{b}_m^0 \bar{h}_m + \bar{\kappa}(\bar{x}) \bar{K}_m^- \bar{b}_m^0 \frac{\bar{h}_m^2}{2} - \sum_{j=m+1}^n \bar{\sigma}_{0j}^- \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) d\bar{z} + \right. \\ & \left. + \bar{\kappa}(\bar{x}) \sum_{j=m+1}^n \bar{K}_j^- \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} \right\}, \\ \bar{F}_{12} = 2 & \left\{ -\bar{\kappa}(\bar{x}) \left( \sum_{i=1}^{m-1} \bar{K}_i^+ \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) d\bar{z} + \sum_{j=m+1}^n \bar{K}_j^- \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) d\bar{z} \right) + \right. \\ & \left. + \bar{b}_m^0 (\bar{\sigma}_{0m}^+ + \bar{\sigma}_{0m}^-) + \bar{\kappa}(\bar{x}) \bar{b}_m^0 (\bar{K}_m^+ \bar{h}_{m-1} - \bar{K}_m^- \bar{h}_m) \right\}, \\ \bar{F}_{13} = \bar{\kappa}(\bar{x}) \bar{b}_m^0 & (\bar{K}_m^- - \bar{K}_m^+). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M} = 2 & \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} \bar{\sigma}_{0i}^+ \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \bar{e}_0(\bar{x}) \sum_{i=1}^{m-1} \bar{K}_i^+ \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \right. \\ & \left. + \bar{\kappa}(\bar{x}) \sum_{i=1}^{m-1} \bar{K}_i^+ \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z}^2 d\bar{z} + \right. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & + \bar{\sigma}_{0m}^+ \int_{\bar{h}_{m-1}}^{\bar{z}_1} \bar{b}_m(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \bar{e}_0(\bar{x}) \bar{K}_m^+ \int_{\bar{h}_{m-1}}^{\bar{z}_1} \bar{b}_m(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \bar{\kappa}(\bar{x}) \bar{K}_m^+ \int_{\bar{h}_{m-1}}^{\bar{z}_1} \bar{b}_m(\bar{z}) \bar{z}^2 d\bar{z} - \\ & - \bar{\sigma}_{0m}^- \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_m} \bar{b}_m(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \bar{e}_0(\bar{x}) \bar{K}_m^- \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_m} \bar{b}_m(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \bar{\kappa}(\bar{x}) \bar{K}_m^- \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_m} \bar{b}_m(\bar{z}) \bar{z}^2 d\bar{z} - \\ & - \sum_{j=m+1}^n \bar{\sigma}_{0j}^- \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \bar{e}_0(\bar{x}) \sum_{j=m+1}^n \bar{K}_j^- \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \\ & \left. + \bar{\kappa}(\bar{x}) \sum_{j=m+1}^n \bar{K}_j^- \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) \bar{z}^2 d\bar{z} \right\} = \\ & = \bar{G}_{11} + \bar{z}_1 \bar{G}_{12} + \bar{z}_1^2 \bar{G}_{13} + \bar{z}_1^3 \bar{G}_{14}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{G}_{11} &= 2 \sum_{i=1}^{m-1} \bar{\sigma}_{oi}^+ \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} - 2 \sum_{j=m+1}^n \bar{\sigma}_{0j}^- \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + \\ &+ \bar{\kappa}(\bar{x}) \left( \sum_{i=1}^{m-1} \bar{K}_i^+ \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z}^2 d\bar{z} + \sum_{j=k+1}^n \bar{K}_j^- \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{b}_j(\bar{z}) \bar{z}^2 d\bar{z} \right) - \\ &- \bar{b}_m^0 \left( \bar{\sigma}_{0m}^+ \bar{h}_{m-1}^2 + \bar{\sigma}_{0m}^- \bar{h}_m^2 \right) + \frac{2}{3} \bar{b}_m^0 \bar{\kappa}(\bar{x}) \left( \bar{K}_m^- \bar{h}_m^3 - \bar{K}_m^+ \bar{h}_{m-1}^3 \right), \\ \bar{G}_{12} &= \bar{\kappa}(\bar{x}) \left( -2 \sum_{i=1}^{m-1} \bar{K}_i^+ \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{z} \bar{b}_i(\bar{z}) d\bar{z} - 2 \sum_{j=m+1}^n \bar{K}_j^- \int_{\bar{h}_{j-1}}^{\bar{h}_j} \bar{z} \bar{b}_j(\bar{z}) d\bar{z} + \right. \\ &\quad \left. + \bar{b}_m^0 \left( \bar{K}_m^+ \bar{h}_{m-1}^2 - \bar{K}_m^- \bar{h}_m^2 \right) \right), \\ \bar{G}_{13} &= \bar{b}_m^0 \left( \bar{\sigma}_{0m}^- + \bar{\sigma}_{0m}^+ \right), \quad \bar{G}_{14} = \frac{2}{3} \bar{\kappa}(\bar{x}) \bar{b}_m^0 \left( \bar{K}_m^+ - \bar{K}_m^- \right). \end{aligned}$$

**Уравнения равновесия изгибаемых балок.**

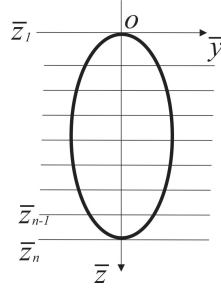


Рис. 6

Рассматриваются конструкции с сечениями, симметричными относительно плоскости  $xz$ .

$$\frac{d\bar{N}}{d\bar{x}} = 0, \quad \frac{d\bar{Q}}{d\bar{x}} = \bar{q}(x) = \bar{q}_0 \varphi(\bar{x}), \quad \frac{d\bar{M}}{d\bar{x}} = \bar{Q}.$$

$\bar{N}$  – продольная сила,  $\bar{Q}$  – поперечная сила,  $\bar{M}$  – изгибающий момент,  $\bar{x}$  – продольная координата,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  – координаты в осевом сечении.

Усилия  $\bar{N}$  и момент  $\bar{M}$  связаны с размерным продольным напряжением  $\bar{\sigma}$  – зависимостями

$$\begin{aligned} \bar{N} &= 2 \iint_F \bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{z}) d\bar{y} d\bar{z} = 2 \int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_{n+1}} \bar{\sigma} \bar{b}(z) dz, \\ \bar{M} &= 2 \iint_F \bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{z}) \bar{z} d\bar{y} d\bar{z} = 2 \int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_{n+1}} \bar{\sigma} \bar{b}(z) \bar{z} dz. \end{aligned}$$

Если в сечении балка состоит из  $n$ -слоев, то

$$\bar{N} = 2 \sum_{i=1}^n \int_{\bar{h}_i}^{\bar{h}_{i+1}} \bar{\sigma}_i \bar{b}_i(\bar{z}) d\bar{z}, \quad \bar{M} = 2 \sum_{i=1}^n \int_{\bar{h}_i}^{\bar{h}_{i+1}} \bar{\sigma}_i \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z}.$$

Введем безразмерные величины

$$\sigma_i = \frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{\sigma}_0}, \quad b_i = \frac{\bar{b}_i}{\bar{b}_0}, \quad N = \frac{\bar{N}}{2\bar{\sigma}_0\bar{b}_0\bar{H}_0}, \quad M = \frac{\bar{M}}{2\bar{\sigma}_0\bar{b}_0\bar{H}_0^2}, \quad z = \frac{\bar{z}}{\bar{H}_0},$$

$$z_i = \frac{\bar{z}_i}{\bar{H}_0}, \quad x = \frac{\bar{x}}{\bar{l}_0}, \quad Q = \frac{\bar{Q}}{2\bar{\sigma}_0\bar{b}_0\bar{H}_0},$$

где  $\bar{\sigma}_0, \bar{b}_0, \bar{H}_0, \bar{l}_0$  – обезразмеривающие параметры.

Тогда

$$N = 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_i}^{h_{i+1}} \sigma_i b_i(z) dz, \quad M = 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_i}^{h_{i+1}} \sigma_i b_i(z) z dz.$$

Уравнения равновесия примут вид

$$\frac{dN}{dx} = 0, \quad \frac{dQ}{dx} = q_0 \varphi(\bar{x}), \quad Q = \alpha \frac{dM}{dx}, \quad \left( \alpha = \frac{\bar{H}_0}{\bar{l}_0} \right) \quad (30)$$

или, исключая,  $Q$ , получим

$$\frac{dN}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = q_0 \frac{\varphi(\bar{x})}{\alpha} = q_0 \varphi_1(\bar{x}). \quad (31)$$

Проинтегрируем уравнения (30), (31):

$$N(x) = N_1^0 = const.$$

Для задачи поперечного изгиба  $N_1^0 = 0$ .

Тогда

$$N(x) = 0.$$

Рассмотрим однопролетную шарнирно-опертую балку.

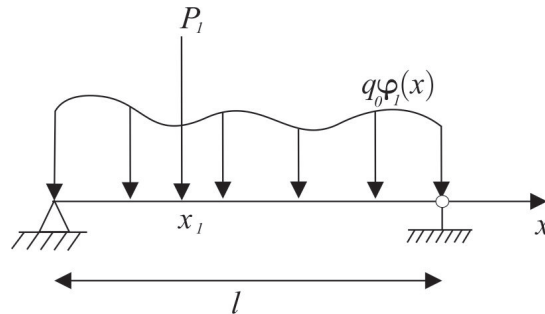


Рис. 7

Интегрируя уравнение (31), получим

1) в области  $0 \leq x \leq x_1$

$$M(x) = \frac{Q_1}{\alpha} x + q_0 \int_0^x \left[ \int_0^x \varphi_1(x) dx \right] dx,$$

$$Q_3^1 = \alpha \frac{dM}{dx} \Big|_{x=x_1} = Q_1 + q_0 \alpha \int_0^{x_1} \varphi_1(x) dx;$$

2) в области  $x_1 \leq x \leq l$

$$M(x) = \frac{Q_2}{\alpha} (x - l) + q_0 \int_l^x \left[ \int_l^x \varphi_1(x) dx \right] dx,$$

$$Q_3^2 = \alpha \frac{dM}{dx} \Big|_{x=x_1} = Q_2 + q_0 \alpha \int_l^{x_1} \varphi_1(x) dx.$$

Для нахождения  $Q_1$  и  $Q_2$  имеем два условия

$$[Q]_{x=x_1} = P$$

и условие непрерывности изгибающего момента

$$\frac{Q_1}{\alpha} x_1 + q_0 \int_0^{x_1} \left[ \int_0^{x_1} \varphi_1(x) dx \right] dx = \frac{Q_2}{\alpha} (x_1 - l) + q_0 \int_l^{x_1} \left[ \int_l^x \varphi_1(x) dx \right] dx.$$

Определив из этих уравнений  $Q_1$ ,  $Q_2$  и подставив их в выражения для  $M(x)$ , получим амплитуду распределения момента  $M(x)$  в областях  $0 \leq x \leq x_1$  и  $x_1 \leq x \leq l$ .

Определив далее  $\max_{0 \leq x \leq l} |M(x)|$  и приравняв его значению предельного момента  $M_0^+$ , получим амплитуду первой предельной нагрузки  $q_0^0$ .

Рассмотрим задачу о консольной балке.

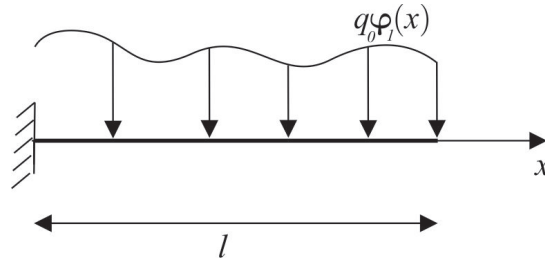


Рис. 8

Граничные условия в этом случае имеют вид

$$Q(l) = 0, \quad M(l) = 0.$$

Интегрируя (31), получим

$$\frac{dM}{dx} = \frac{dM}{dx} \Big|_{x=l} + q_0 \int_l^x \varphi_1(\bar{x}) dx = \frac{Q}{\alpha} \Big|_{x=l} + q_0 \int_l^x \varphi_1(\bar{x}) dx = q_0 \int_l^x \varphi_1(\bar{x}) dx,$$

$$M(x) = q_0 \int_l^x \left[ \int_l^x \varphi_1(\bar{x}) dx \right] dx.$$

Пусть функция  $\varphi_1(x)$  имеет вид

$$\varphi_1(x) = (\alpha_2 - \alpha_1) \left( \frac{x}{l} \right)^\beta + \alpha_1 \quad (\beta \geq 0).$$

В этом случае  $\frac{dM}{dx} < 0$ , т. е. момент убывает, оставаясь положительным ( $M > 0$ ). Значит, наибольшее (по модулю) значение момента достигается в опоре и условие достижения первого предельного состояния отвечает требованию

$$M(0) = q_0 \int_l^0 \left[ \int_l^0 \varphi_1(\bar{x}) dx \right] dx - M_0^+.$$

Если балка нагружена на конце сосредоточенной нагрузкой  $P$ , то граничные условия имеют вид

$$Q(l) = -P, \quad M(l) = 0$$

и амплитуда  $q_0 = 0$ . Тогда, интегрируя (31), получим

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{P}{\alpha} \quad \text{и} \quad M(x) = -\frac{P}{\alpha}(x - l),$$

где  $0 \leq x \leq l$ .

Таким образом,

$$\frac{P}{\alpha}l = M_0^+,$$

это уравнение для определения первой предельной нагрузки.

Если  $P$  и  $q(x)$  направлены в разные стороны, то при интегрировании (31) будем иметь

$$M = \frac{P}{\alpha}(x - l) + q_0 \int_l^x \left[ \int_l^x \varphi_1(\bar{x}) dx \right] dx.$$

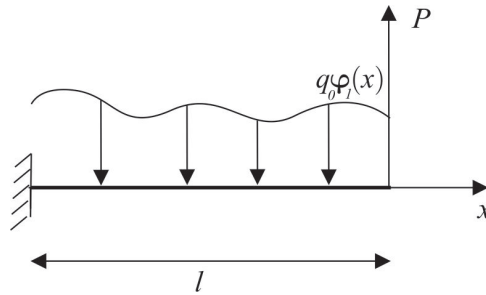


Рис. 9

В этом случае эпюра моментов будет иметь вид

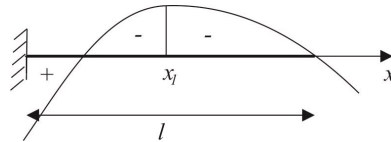


Рис. 10

Здесь будут две экстремальные точки, и в зависимости от длины балки предельные моменты могут реализоваться в сечениях  $x = 0$  ( $M_0^+$ ) или  $x = x_1$  ( $-M_0^-$ ) либо одновременно в сечениях  $x = 0$  ( $M_0^+$ ) и  $x = x_1$  ( $-M_0^-$ ). Сечение  $x = x_1$  определяется из уравнения

$$\left. \frac{dM}{dx} \right|_{x=x_1} = 0.$$

Таким образом, эпюры моментов могут быть получены путем прямого интегрирования и выполнения граничных условий. Эпюры перерезывающих сил нам, вообще говоря, не нужны.

Таким образом, для конкретных сечений ж/б балок нам нужно вычислить предельные моменты  $M_0^+$  и  $M_0^-$ , которые зависят от формы сечения, свойств материалов бетона и арматуры.

При этом следует иметь в виду, что сечение пластической части балки рассматривается как слоистое. Слои выделяются по характеру изменения структуры и свойств материалов, изменения боковой поверхности (функции  $b_i(z)$ ), окрестности нейтрального слоя.

**Распределение изгибающих моментов.**

Шарнирно-опертые балки:

а) нагрузка-треугольник:

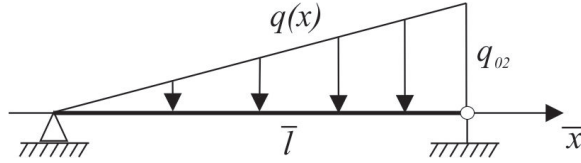


Рис. 11

$$q(x) = q_{02} \frac{x}{l} = q_0 \frac{x}{l}.$$

Граничные условия

$$M(0) = 0, \quad M(l) = 0. \quad (32)$$

Интегрируем (31) при условиях (32), получим

$$Q(x) = \alpha \frac{dM}{dx} = \frac{\alpha q_0}{6l} (3x^2 - l^2), \quad M(x) = \frac{\alpha q_0 x}{6l} (x^2 - l^2).$$

Из условия  $Q(x_1) = 0$  находим точку  $x_1 = \frac{l}{\sqrt{3}}$ , в которой реализуется максимум момента;

б) равномерно распределенная нагрузка  $q_0 = const$ .

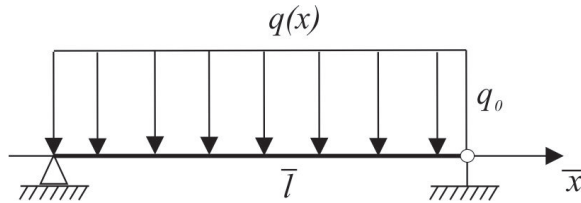


Рис. 12

Интегрируем (31) при граничных условиях (32):

$$Q = \frac{q_0 \alpha}{2} (2x - l), \quad M = \frac{q_0 x}{2} (x - l).$$

Точка максимума момента  $x_1 = \frac{l}{2}$ ;

в) нагрузка распределена по закону трапеции

$$q(x) = q_0 (\alpha_1 + \alpha_2 x).$$

Интегрируем (31) при граничных условиях (32), получим

$$Q = \frac{\alpha q_0}{6} (-3l\alpha_1 - \alpha_2 l^2 + 6\alpha_1 x + 3\alpha_2 x^2), \quad M = q_0 x \left( \frac{\alpha_1 (x - l)}{2} + \frac{\alpha_2 (x^2 - l^2)}{6} \right).$$



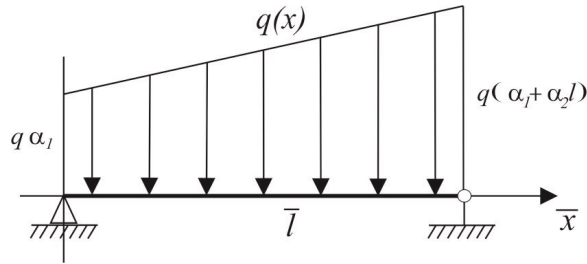


Рис. 13

Из условия  $Q(x_1) = 0$  находим точку  $x_1 = \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + \frac{l^2}{3} + \frac{l\alpha_1}{\alpha_2}} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ , в которой реализуется максимум момента;

г) нагрузка распределена равномерно на части пролета

$$q(x) = \begin{cases} q_0, & \text{где } 0 \leq x \leq a \\ 0, & \text{где } a \leq x \leq l \end{cases}, l = a + b.$$

Область интегрирования разбивается на две части:  $0 \leq x \leq a$  и  $a < x \leq l$ . Выполняются граничные условия

$$M(0) = 0, \quad M(l) = 0, \quad [Q]_{x=a} = 0, \quad [M]_{x=a} = 0,$$

где [...] – скачок соответствующей величины.

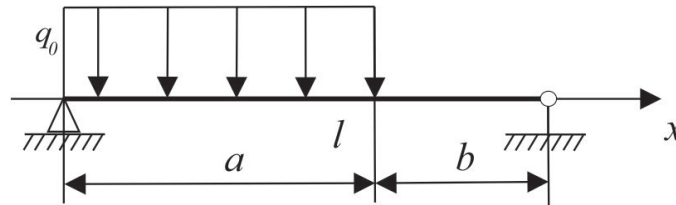


Рис. 14

В результате, после интегрирования (31) и использования граничных условий, получим в области  $0 \leq x \leq a$

$$M(x) = -\frac{q_0 a(l+b)x}{2l} + q_0 \frac{x^2}{2}, \quad Q(x) = -\frac{\alpha q_0 a(l+b)}{2l} + \alpha q_0 x,$$

в области  $a \leq x \leq l$

$$M(x) = \frac{q_0 a^2(x-l)}{2l}, \quad Q(x) = \frac{\alpha q_0 a^2}{2l},$$

максимум  $|M(x)|$

$$M_{\max} = \frac{q_0 a^2(l+b)^2}{8l^2}$$

реализуется при

$$x_1 = \frac{a(l+b)}{2l};$$

д) если балка нагружена сосредоточенной нагрузкой  $P$ , где

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{l},$$

тогда область интегрирования разбивается на две части:

$$0 \leq x \leq a, \quad q_0 = 0,$$

$$a < x \leq l, \quad q_0 = 0.$$

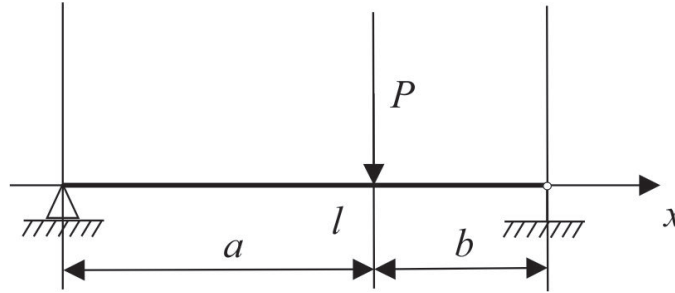


Рис. 15

Граничные условия и условия сопряжения имеют вид

$$[Q]_{x=a} = P, \quad [M]_{x=a} = 0.$$

Интегрируем (31) при указанных граничных условиях, получаем при  $0 \leq x \leq a$

$$Q(x) = -\frac{Pb}{l}, \quad M(x) = -\frac{Pbx}{\alpha l},$$

при  $a < \bar{x} \leq \bar{l}$

$$Q(x) = \frac{Pa}{l}, \quad M(x) = \frac{Pa}{\alpha l} (x - l).$$

Максимум  $M_{\max} = \frac{Pba}{\alpha l}$  реализуется при  $x_1 = a$ ;

е) если балка нагружена двумя сосредоточенными нагрузками  $P$ , то граничные условия и условия сопряжения имеют вид

$$[Q]_{x=a} = P, \quad [Q]_{x=l-a} = P, \quad [M]_{x=a} = 0, \quad [M]_{x=l-a} = 0.$$

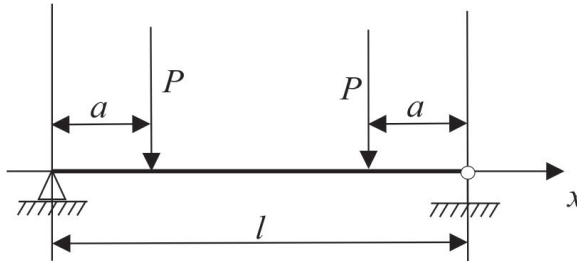


Рис. 16

Интегрируем (31) при указанных граничных условиях, на участке  $0 \leq x < a$  балки имеем

$$Q = -P, \quad M = -\frac{Px}{\alpha},$$

на участке  $a \leq x \leq l - a$  балки имеем

$$Q = 0, \quad M = -\frac{Pa}{\alpha},$$

на участке  $l - a < x \leq l$  балки имеем

$$Q = P, \quad M = -\frac{P(l-x)}{\alpha}.$$

Точка максимума момента  $M_{\max} = \frac{Pa}{P}\alpha$  реализуется на участке  $a \leq x \leq l - a$  балки;  
 ж) консольная балка, нагруженная распределенной нагрузкой  $q_0\varphi(x)$  и сосредоточенной на конце.

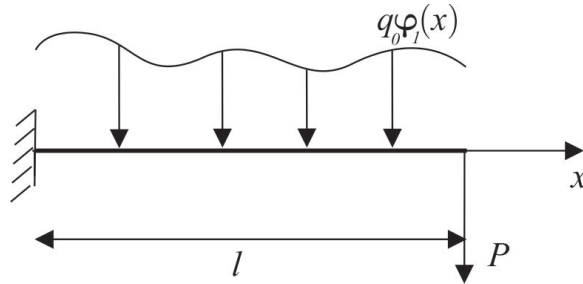


Рис. 17

Граничные условия

$$Q(l) = -P, \quad M(l) = 0.$$

Тогда

$$Q = -P + \alpha q_0 \int_l^x \varphi(x) dx, \quad M(x) = -\frac{P}{\alpha}(x-l) + \alpha q_0 \int_l^x \left( \int_l^x \varphi(x) dx \right) dx.$$

В случае равномерно распределенной нагрузки будем иметь

$$M(x) = -\frac{P}{\alpha}(x-l) + \frac{\alpha q_0(l-x)^2}{2}.$$

з) если сосредоточенная сила направлена на конце в противоположную сторону, то

$$M(x) = \frac{P}{\alpha}(x-l) + \frac{\alpha q_0(l-x)^2}{2};$$

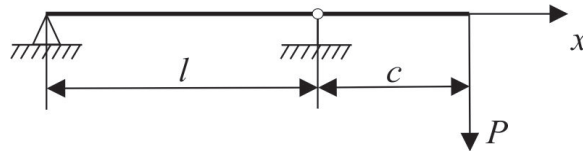


Рис. 18

и) граничные условия

$$M(0) = 0, \quad M(l+c) = 0, \quad Q(l+c) = -P, \quad [M]_{x=l} = 0.$$

Откуда из уравнений равновесия (31) на участке  $0 \leq x < l$  балки имеем

$$Q = \frac{Pc}{l}, \quad M = \frac{Pc}{l\alpha}x,$$

на участке  $l \leq x \leq l+c$  балки имеем

$$Q = -P, \quad M = -\frac{P}{\alpha}(x-l-c);$$

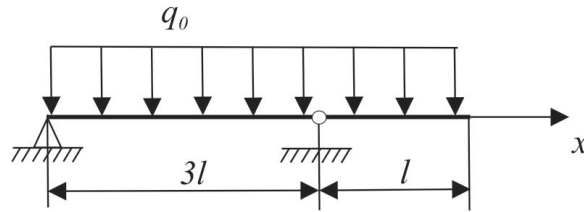


Рис. 19

к) граничные условия и условия сопряжения имеют вид

$$M(0) = 0, \quad M(4l) = 0, \quad Q(4l) = 0 \quad [M]_{x=3l} = 0.$$

Откуда на участке  $0 \leq x < 3l$  балки получим

$$Q = \frac{4\alpha l^2 q_0}{3} + \alpha q_0 x, \quad M = \frac{4l^2 q_0 x}{3},$$

на участке  $3l \leq x < 4l$  балки имеем

$$Q = \alpha q_0 (x - 4l), \quad M = \frac{q_0 (x - 4l)^2}{2}.$$

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В. Второе предельное состояние однородных и композитных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 150–159.
- [2] Гвоздев А. А. О развитии теории расчета железобетонных конструкций в СССР // Теория расчета бетонных и железобетонных конструкций. М., 1949. С. 3–18.
- [3] Беглов А. Д., Санжаровский Р. С., Бондаренко В. М. Теория расчета железобетонных конструкций на прочность и устойчивость. Современные нормы и евростандарты. М.; Л.: Издательство АСВ, 2006. 312 с.
- [4] Гвоздев А. А. К расчету конструкций на действие взрывной волны // Строительная промышленность. 1943. № 1–2. С. 18–21.
- [5] Гвоздев А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. М.: Стройиздат, 1949. 280 с.
- [6] Броуде Б. М. Предельные состояния стальных балок. М.: Стройиздат, 1953. 216 с.
- [7] Cox A. D., Morland W. D. Dynamic plastic deformation simple supported square plates // Journ. Mech. Solids. 1959. Vol. 7. P. 229–241.
- [8] Jones N., Uran T. O., Tekin S. A. The dynamic plastic behaviour of fully clamped rectangular plates // Intern. Journ. Solid Structures. 1970. № 12. Vol. 6. P. 1499–1512.
- [9] Ерхов М. И. Теория идеальнопластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978. 352 с.
- [10] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова. 2015. № 6. С. 125–129.
- [11] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Нелинейное деформирование бетонных элементов при продольно-поперечном изгибе // Известия вузов. Строительство. 2013. № 4. С. 3–12.

Y. V. Nemirovsky<sup>1</sup>, S. V. Tikhonov<sup>2</sup>

## LIMIT CONDITIONS OF REINFORCED CONCRETE BEAMS

<sup>1</sup>*Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

<sup>2</sup>*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** The beginning of the study of reinforced concrete structures was initiated by A. A. Gvozdev [4], who introduced widely known model of ideal rigid plastic material in design practices, and on its basis held a large number of calculations of the load capacity of various building structures [2], [5]. The model was quite simple and comfortable in design engineering practice and has been widely developed in our country [9], [6] and abroad [3], [7], [8]. However, we should note that although in the above-mentioned papers it is often pointed out that the calculations have been carried out for construction structures of reinforced concrete, the most important property of concrete and reinforced concrete structures, associated with their significant varying resilience in tension and compression [2], [10], [11] is not actually considered while carrying out specific calculations for this model. In this case, the calculations are limited to the simplest forms of the rod cross section and the simplest loading and fastening conditions. Modern technological capabilities to create a flexible set of hybrid laminated reinforced structures in which the cross section of the layers can be implemented in various grade concrete, reinforcing elements and reinforcement structures, are not taken into account.

In this paper, on the basis of the ideas of the model of ideal plastic and hardening rigid-plastic materials we will consider an approach of constructing a generalized model of plastic deformation and limit state corresponding to the initial destruction of arbitrary reinforced rods based on concrete.

**Keywords:** beams, a limiting condition, static definability, bending moment, composites.

## REFERENCES

- [1] Nemirovsky Y. V. The second limiting condition of homogeneous and composit beams // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2009. № 1. P. 150–159. (in Russian).
- [2] Gvozdev A. A. About development of the theory of calculation of reinforced concrete structures in the USSR // Theory of calculation of concrete and reinforced concrete structures. M., 1949. P. 3–18 (in Russian).
- [3] Beglov A. D., Sanzharovsky R. S., Bondarenko V. M. The theory of calculation of reinforced concrete structures on durability and stability. Modern norms and European standards. M. ; L. : ASV publishing house, 2006. 312 p. (in Russian).

---

*Nemirovsky Yuri Vladimirovich*

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.

*Tikhonov Sergey Vladimirovich*

e-mail: strangcheb@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

- [4] Gvozdev A. A. To calculation of designs on action of a blast wave // Building industry. 1943. № 1–2. P. 18–21. (in Russian).
- [5] Gvozdev A. A. Calculation of the bearing ability of designs for a method of extreme balance. M. : Stroyizdat, 1949. 280 p. (in Russian).
- [6] Broude B. M. Limit conditions of steel beams. M. : Stroyizdat, 1953. 216 p. (in Russian).
- [7] Cox A. D., Morland W. D. Dynamic plastic deformation simple supported square plates // Journ. Mech. Solids. 1959. Vol. 7. P. 229–241.
- [8] Jones N., Uran T. O., Tekin S. A. The dynamic plastic behaviour of fully clamped rectangular plates // Intern. Journ. Solid Structures. 1970. № 12. Vol. 6. P. 1499–1512.
- [9] Erkhov M. I. Theory of ideally plastic solids and structures. M. : Nauka, 1978. 352 p. (in Russian).
- [10] Nemirovsky Y. V, Boltayev A. I. Charts of deformation of concrete and reinforced concrete // Bulletin of BSTU named after V. G. Shukhov. 2015. № 6. P. 125–129. (in Russian).
- [11] Mishchenko A. V., Nemirovsky Y. V. Nonlinear deformation of concrete elements at a longitudinally cross bend // News of higher educational institutions. Construction. 2013. № 4. P. 3–12. (in Russian).

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области, Россия.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

**Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ковалев Владимир Александрович (vlad\_koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

**Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

**Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@gmail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва, Россия.

**Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su)** – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Максимова Людмила Анатольевна (maximova\_ng@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

**Манжиров Александр Владимирович (manzh@inbox.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Матченко Николай Михайлович (eks\_05@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

**Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

**Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com)** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Непершин Ростислав Иванович (nepershin\_ri@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

**Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

**Редкозубов Сергей Алексеевич (marusbka434@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва, Россия.



**Сенашов Сергей Иванович** ([sen@sibsau.ru](mailto:sen@sibsau.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

**Спори́хин Анатолий Николаевич** ([shashkin@amm.vsu.ru](mailto:shashkin@amm.vsu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Тамуж Витаутас Петрович** ([tamuzs@pmi.lv](mailto:tamuzs@pmi.lv)) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига, Латвия.

**Тихонов Сергей Владимирович** ([strangcheb@mail.ru](mailto:strangcheb@mail.ru)) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

**Трещев Александр Анатольевич** ([taa58@yandex.ru](mailto:taa58@yandex.ru)) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Хромов Александр Игоревич** ([khromovai@list.ru](mailto:khromovai@list.ru), [khromov@ssau.ru](mailto:khromov@ssau.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

**Чернышов Александр Данилович** ([post@vgta.vrn.ru](mailto:post@vgta.vrn.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

**Чигарев Анатолий Власович** ([chigarev@rambler.ru](mailto:chigarev@rambler.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

**Шашкин Александр Иванович** ([shashkin@amm.vsu.ru](mailto:shashkin@amm.vsu.ru), [dean@amm.vsu.ru](mailto:dean@amm.vsu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru)). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

**и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Немировский Ю. В.</i> Динамическое поведение полиметаллических круглых пластин из упрочняющихся материалов .....	3
<i>Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.</i> Каноническая полевая теория термоупругого континуума с тремя полярными директорами .....	11
<i>Меньшова И. В., Кержаев А. П., Никитин А. В.</i> Метод начальных функций и преобразование Фурье в задаче для разномодульной полосы .....	41
<i>Алексеев А. А., Алексеева Е. Г., Ведерников В. Н., Гультияев В. И.</i> К вопросу об определении перемещений методом Мора и введении уточняющих коэффициентов при перемножении эпюр .....	50
<i>Минаева Н. В., Шевалдин А. Н.</i> Исследование состояния упругой прямоугольной пластины на упругом основании .....	60
<i>Астапов Ю. В., Маркин А. А.</i> Конечные деформации упругих тел при взаимодействии с жесткой шероховатой плоскостью .....	64
<i>Немировский Ю. В.</i> Оптимальное проектирование гибридных тавровых конструкций по предельно допустимым деформациям .....	76
<i>Баженов В. Г., Баранова М. С., Осетров Д. Л.</i> Влияние трения на усилия ударного сжатия и формоизменения упруговязкопластических образцов-таблеток .....	85
<i>Коваленко М. Д., Абриков Д. А.</i> Изгиб защемленной по длинным сторонам полуполосы, на торце которой задан изгибающий момент. Точное решение краевой задачи .....	93
<i>Мирсалимов В. М., Аскарров В. А.</i> Минимизация коэффициентов интенсивности напряжений для композита, армированного однонаправленными волокнами при изгибе .....	105
<i>Максимов А. Н., Пушкикаренко Н. Н.</i> К вопросу определения возмущенного состояния идеальнопластического сжимаемого массива, ослабленного сферической полостью .....	117
<i>Шляхов С. М., Гаврилов Д. Ю.</i> Метод последовательных приближений в задаче рационального распределения пористости при чистом изгибе бруса прямоугольного сечения .....	122
<i>Сенашов С. И., Савостьянова И. Л.</i> Упругое состояние пластины с отверстиями произвольной формы .....	128
<i>Немировский Ю. В., Тихонов С. В.</i> Предельные состояния железобетонных балок .....	134
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА .....	159

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	162
СОДЕРЖАНИЕ .....	164

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2016. № 3 (29)**

**Отв. за выпуск:** А. В. Балашникова

**Технические редакторы:** А. В. Балашникова, Е. В. Мурашкин, С. В. Тихонов

**Компьютерная верстка:** А. В. Балашникова

**Макет:** А. В. Балашникова

---

Подписано в печать 23.09.2016. Выход в свет 30.09.2016.  
Формат 70х100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 20,75.  
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

---

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический университет  
им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском отделе ФГБОУ ВО «Чувашский  
государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38