

**ВЕСТНИК**  
**ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО**  
**ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**  
**им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**  
**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**  
**№ 3 • 2007**

ББК 95.4; 22.251  
Ч-823

Учредитель

ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Главный редактор Г. Н. Григорьев

Учредители серии

Г. Н. Григорьев, Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Г. П. Черепанов, Е. И. Шемякин,  
А. А. Шуканов.

Редакционная коллегия:

Ивлев Д. Д. – ответственный редактор,  
Максимова Л. А., Матченко Н. М., Миронов Б. Г. – зам. ответственного редактора,  
Тихонов С. В. – и.о. ученого секретаря,  
Баженов В. Г., Буренин А. А., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Каюмов Р. А., Климов Д. М.,  
Ломакин Е. В., Маркин А. А., Манжиров А. В., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р.  
И., Победря Б. Е., Радаев Ю. Н., Редкозубов С. А., Сенашов С. И., Спорыхин А. Н., Трещев А. А.,  
Хромов А. И., Шашкин А. И., Шемякин Е. И.

Международный совет

Амензаде Р. Ю. (Азербайджан), Варданян С. В. (Армения), Мирсалимов В. М. (Азербайджан),  
Тамуж В. П. (Латвия), Черепанов Г. П. (США), Чигарев А. В. (Белоруссия).

ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19

© ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2007

## ЧЕМ ОТЛИЧАЕТСЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ОТ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

(Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева)

Теория идеальной пластичности посвящена обширная литература [1–12] и др. Механика твердого деформируемого тела имеет дело с тремя уравнениями равновесия

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (xyz) \quad (1)$$

относительно шести компонент напряжений  $s_x, t_{yz}$ . (xyz).

Три уравнения равновесия (1) определяются из условия равенства нулю суммарных действующих усилий на элемент тела, равенство нулю суммарного главного момента учтено за счет симметрии тензора напряжений

$$t_{ij} = t_{ji}. \quad (2)$$

Система трех уравнений (1) относительно шести компонент напряжений, естественно, незамкнута, является статически неопределимой.

Для определения напряженно-деформируемого состояния тел и конструкций в МДГТ используются различные виды связи между напряжениями и деформациями  $s_{ij} - e_{ij}$ , определяющие свойства сплошной среды: упругость, пластичность, вязкость, вязко-упругость и т. п.

Теория идеальной пластичности исходит из предположения о существовании некоторого предельного, конечного соотношения для напряжений

$$f(s_{ij}) = 0. \quad (3)$$

Соотношения (3) называется условием пластичности или условием текучести.

Достижение напряженным состоянием условия пластичности или текучести (3) приводит к появлению пластических деформаций, согласно ассоциированному закону течения

$$de_{ij}^p = dI \frac{df}{ds_{ij}}, \quad dI \geq 0 \quad (4)$$

или

$$e_{ij}^p = m \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}, \quad e_{ij}^p = \frac{de_{ij}^p}{dt}, \quad m = \frac{dI}{dt}, \quad m \geq 0. \quad (5)$$

Изменение напряженного состояния приводит к изменению упругого или какого-либо другого состояния материала, полные деформации получаются путем суммирования, например, для упругопластического тела имеет место

$$de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p, \quad (6)$$

где приращение упругих деформаций  $de_{ij}^e$  – определяется согласно закону Гука, приращение пластических деформаций  $de_{ij}^p$  – согласно (4).

В общем случае наличие одного условия текучести (3) вместе с уравнениями равновесия (1) приводит к четырем уравнениям относительно шести компонент напряжений, и система уравнений остается статически неопределимой. Система уравнений в общем случае принадлежит к эллиптическому типу [3]. Однако, уже в случае одной поверхности текучести (3) в частных случаях проявляются соотношения теории предельного состояния.

Для простоты рассмотрим случай изотропного материала. Примем предположение о независимости предельных и пластических свойств от среднего давления. Отметим, что учет анизотропии и среднего давления не вносит никаких принципиальных изменений.

В случае изотропии условие текучести зависит от инвариантов девиатора напряжений

$$f(\Sigma'_2, \Sigma'_3) = 0, \quad (7)$$

где

$$\Sigma'_2 = s'_{ij} s'_{ij}, \quad \Sigma'_3 = s'_{ij} s'_{jk} s'_{ki}, \quad s'_{ij} = s_{ij} - d_{ij} s, \quad s = \frac{1}{3} s_{ii}. \quad (8)$$

В случае кручения или антиплоской деформации при соответствующем выборе системы координат имеет место

$$t_{xz}, t_{yz} \neq 0, \quad s_x = s_y = s_z = t_{xy} = 0. \quad (9)$$

Согласно (8), (11), условие текучести (7) сводится к виду

$$t_{xz}^2 + t_{yz}^2 = k^2, \quad k - const. \quad (10)$$

Согласно (1), (9) имеет место одно уравнение равновесия

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (11)$$

Система двух уравнений (10), (11) является статически определимой, что является основным характерным признаком теории предельного состояния.

Система уравнений (10), (11) решается двумя способами: путем замены переменных

$$t_{xz} = k \cos j, \quad t_{yz} = k \sin j, \quad (12)$$

и путем введения функции напряжения

$$t_{xz} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad t_{yz} = \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (13)$$

Согласно ассоциированному закону течения из (10) следует

$$e_{xz} = I t_{xz}, \quad e_{yz} = I t_{yz}, \quad I \geq 0. \quad (14)$$

Система уравнений (10), (11) определяют предельные усилия сдвига, уравнение (14) при известных из уравнений статики (10), (11) компонент напряжений  $t_{xz}, t_{yz}$ , определяют кинематику деформирования [2, 8].

В случае плоской деформации

$$s_x, s_y, s_z, t_{xz} \neq 0, \quad t_{xz} = t_{yz} = 0. \quad (15)$$

Для изотропного тела условие текучести (7) сводится к условию

$$(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2 = 4k^2, \quad k - const. \quad (16)$$

Согласно (1), (15) имеет место два уравнения равновесия

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} = 0. \quad (17)$$

Система трех уравнений является статически определимой, что, повторяем, является основным характерным признаком теории предельного состояния.

Согласно ассоциированному закону течения из (16) следует

$$e_x = I(s_x - s_y), \quad e_y = I(s_y - s_x), \quad e_{xy} = 2I t_{xy}, \quad I \geq 0. \quad (18)$$

Система уравнений (16), (17) решается, обычно, при помощи замены переменных

$$s_x = s + k \cos 2q, \quad s_y = s - k \cos 2q, \quad t_{xy} = k \sin 2q. \quad (19)$$

Согласно (17), (19) имеет место система квазилинейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} - 2k \sin 2q \frac{\partial q}{\partial x} + 2k \cos 2q \frac{\partial q}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial y} + 2k \cos 2q \frac{\partial q}{\partial x} + 2k \sin 2q \frac{\partial q}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Система уравнений (21) принадлежит к гиперболическому типу, и определяет предельные нагрузки.

Соотношения (18) приводят к двум квазилинейным уравнениям гиперболического типа относительно компонент скоростей перемещений  $u, v$ , характеристики уравнений для определения напряжений и компонент скорости перемещения совпадают между собой [2].

Примером определения предельного состояния может служить задача о толстостенной трубе радиусов  $a, b$  ( $a < b$ ), нагруженной внутренним давлением и свободной внешней поверхностью

$$s_r|_{r=a} = -p, \quad s_r|_{r=b} = 0, \quad s_r(r), s_q(r), t_{rq} = 0. \quad (21)$$

где  $s_r, s_q, t_{rq}$  – компоненты напряжения в полярной системе координат  $r, q$ .

Уравнения равновесия имеет вид

$$\frac{ds_r}{dr} + \frac{s_r - s_q}{r} = 0. \quad (22)$$

Условие пластичности принимает вид

$$s_q - s_r = 2k, \quad k - const, \quad s_q > s_r. \quad (23)$$

Из (21), (22), (23) следует

$$s_r = 2k \ln r + C, \quad s_q = 2k(1 + \ln r) + C. \quad (24)$$

Из второго граничного условия (21) и (24) следует

$$s_r = 2k \ln \frac{r}{b}, \quad s_q = 2k(1 + \ln \frac{r}{b}). \quad (25)$$

Из первого граничного условия (21) и (25) определяется предельное давление

$$-p^* = 2k \ln \frac{a}{b}, \quad p^* > 0. \quad (26)$$

Разумеется, может быть решена задача об упруго идеальнопластическом состоянии трубы, можно проследить зарождение и распространение пластической зоны вплоть до ее выхода на внешнюю поверхность трубы и получить значение предельной нагрузки (26). Но никакого отношения решение упруго идеальнопластической задачи к определению предельной нагрузки, к теории предельного состояния, до выхода пластической зоны на внешнюю поверхность трубы, не имеет.

Определенные вопросы возникают при рассмотрении осесимметричного состояния.

Два уравнения равновесия

$$\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{\partial t_{rz}}{\partial z} + \frac{s_r - s_q}{r} = 0, \quad \frac{\partial t_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{t_{rz}}{r} = 0. \quad (27)$$

относительно четырех компонент напряжений  $s_r, s_q, s_z, t_{rz}$  не могут быть замкнутыми одним условием пластичности

$$f(s_r, s_q, s_z, t_{rz}) = 0. \quad (28)$$

Система уравнений теории идеальной пластичности (27), (28) может быть замкнута за счет использования соотношений ассоциированного закона пластического течения

$$e_r = \frac{\partial f}{\partial s_r}, \quad e_q = \frac{\partial f}{\partial s_q}, \quad e_z = \frac{\partial f}{\partial s_z}, \quad e = 2 \frac{\partial f}{\partial t_{rz}}. \quad (29)$$

Система уравнений (27), (28), (29) рассматривается совместно, она является статически неопределимой, принадлежит к эллиптическому типу [3] и лишена признаков теории предельного состояния. Другими словами, решение системы уравнений (27), (28), (29) определяет связь между напряженным и деформированным состоянием и предельные нагрузки определены быть не могут.

Итак, соотношения (27), (28), (29) являются соотношениями теории идеальной пластичности и не являются соотношениями теории предельного состояния.

Определение предельного состояния в осесимметричном случае возможно при двух предельных условиях

$$\begin{aligned} f_1(s_r, s_q, s_z, t_{rz}) &= 0, \\ f_2(s_r, s_q, s_z, t_{rz}) &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Исследование предельного состояния при условиях (30) проведено в работе [7].

В случае изотропии материала имеют место соотношения полной пластичности Генки [10]

$$\begin{aligned} (s_r - s_z)^2 + 4t_{rz}^2 &= 4k^2, \quad k - const, \\ s_q &= \frac{1}{2}(s_r + s_z) \pm k. \end{aligned} \quad (31)$$

Статически определяемая система уравнений (27), (31) подробно исследована в литературе [5], уравнения принадлежат к гиперболическому типу и определяют предельные нагрузки. Кинематика течения также полностью исследована [5].

В пространственном случае теория идеальной пластичности может исходить из одного условия текучести

$$f(\mathbf{s}_{ij})=0, \quad (32)$$

или двух условий текучести

$$f_1(\mathbf{s}_{ij})=0, \quad f_2(\mathbf{s}_{ij})=0. \quad (33)$$

В обоих случаях (1), (32); (1), (33) система уравнений является статически неопределимой и при использовании законов связи  $\mathbf{s}_{ij} - e_{ij}$ , приводит к уравнениям эллиптического типа [3], определяет зависимость  $\mathbf{s}_{ij} - e_{ij}$  и не приводит к определению предельных нагрузок, предельного состояния.

Достижение предельного состояния в пространственном случае возможно при выполнении трех предельных условий

$$f_1(\mathbf{s}_{ij})=0, \quad f_2(\mathbf{s}_{ij})=0, \quad f_3(\mathbf{s}_{ij})=0. \quad (34)$$

В изотропном случае условия (34) могут быть записаны в виде трех соотношений

$$f_1(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)=0, \quad f_2(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)=0, \quad f_3(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)=0. \quad (35)$$

Из трех конечных соотношений (35) следует

$$\mathbf{s}_1 = k_1, \quad \mathbf{s}_2 = k_2, \quad \mathbf{s}_3 = k_3, \quad k_i - const. \quad (36)$$

Случай (36) исследован в [7] и не имеет сколь-либо практического значения.

В изотропном случае пространственное предельное состояние достигается при условии полной пластичности [2].

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2, \quad \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3 = 2k, \quad \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 > \mathbf{s}_3, \quad (37)$$

$$\mathbf{s}_3 = \mathbf{s}_2, \quad \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3 = 2k, \quad \mathbf{s}_1 > \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_3, \quad k - const. \quad (38)$$

В случае (37) имеет место

$$\mathbf{s}_x = \mathbf{s} + \frac{2}{3}k - 2kn_1^2, \quad t_{xy} = -2kn_1n_2, \quad (xyz, 123) \quad (39)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$$

где  $n_1, n_2, n_3$  – направляющие косинусы, определяющие ориентацию третьего главного напряжения  $\mathbf{s}_3$  в декартовой системе координат  $xyz$ .

Обозначим  $n_1 = \cos q_1$ ,  $n_2 = \cos q_2$ ,  $n_3 = \cos q_3$ . Из (1), (39) получим

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} + 2k\Theta_1 \sin q_1 + 2k\Theta_2 \cos q_1, \quad (xyz) \quad (40)$$

$$\cos^2 q_1 + \cos^2 q_2 + \cos^2 q_3 = 1,$$

где

$$\Theta_1 = \cos q_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} + \cos q_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} + \cos q_3 \frac{\partial q_3}{\partial z},$$

$$\Theta_2 = \sin q_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} + \sin q_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} + \sin q_3 \frac{\partial q_3}{\partial z}.$$

Условие полной пластичности (37), (38) приводит к статически определимой системе уравнений гиперболического типа [2], из которой следует определение предельных нагрузок.

Кинематика предельного состояния определяется согласно обобщенному ассоциированному закону течения [2].

Случай (38) рассматривается аналогично.

Итак, в чем же отличие теории идеальной пластичности от теории предельного состояния?

Теория идеальной пластичности основана на представлении о существовании в различных средах условий пластичности или текучести, которые могут приводить либо к статически неопределимым, либо к статически определимым состояниям.

Теория предельного состояния имеет дело только со статически определимыми состояниями, приводящими к определению предельных нагрузок. Для статически неопределимых состояний в теории идеальной пластичности предельные нагрузки не определяются.

Можно сказать, что в определенной степени теория предельного состояния вписывается в теорию идеальной пластичности как предельный случай, хотя существуют задачи теории идеальной пластичности, которые не приводят к предельным нагрузкам.

Еще Хаар и Карман [10] отметили, что теория идеальной пластичности и теория предельного состояния имеют общие основы. В определенной степени это действительно так. Но представляется, что теория предельного состояния – замкнутая наука, самостоятельный раздел механики, занимающийся определением именно предельного состояния в отличие от теории идеальной пластичности, занимающийся, в том числе, определением и развитием пластических деформаций в различных средах. Модель идеального жестко-пластического тела Прандтля пренебрегает всеми свойствами материала, кроме пластических, по духу эта модель соответствует теории предельного состояния, но модель Прандтля не предполагает необходимость статической определимости состояния, что имеет место в теории предельного состояния.

Можно представить себе следующую схему соответствия теории идеальной пластичности и теории предельного состояния (рис. 1).

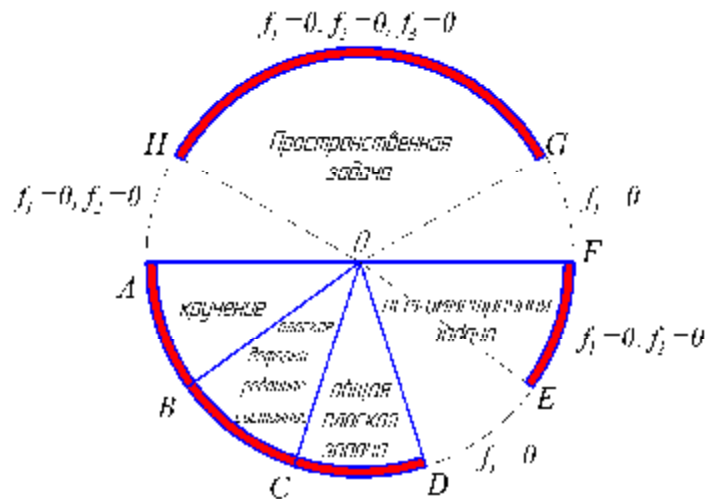


Рис. 1.

На рис. 1 представлена окружность, ограничивающая условно область статически неопределимых задач теории идеальной пластичности. Среда может обладать различными свойствами – упругими, вязкими, упруговязкими и т. п., возможно, что имеет место условие текучести  $f = 0$ , или несколько условий  $f_i = 0$ .

При возрастании нагрузки может быть достигнуто предельное состояние, при котором «предыдущие» свойства материала не играют никакой роли. Предельное состояние определяется из замкнутой системы статически определимых соотношений, не имеющей ничего общего с допредельными свойствами материала.

Предельному состоянию на рис. 1 соответствуют жирные дуги, ограничивающие область статически неопределимых задач. Например, кручению соответствует сектор  $AOB$ , дуга  $AB$  – предельному состоянию при кручении и т.д.

В случае осесимметричной задачи – сектор  $DOF$  делится на две части: сектор  $DOE$  ограничивает совокупность задач, для которых предельное состояние не может быть достигнуто и сектор  $EOF$  для совокупности задач, для которых предельная нагрузка может быть определена, предельному состоянию соответствует дуга  $EF$ .

Аналогично в секторе  $AOFGH$ , соответствующем пространственным задачам, предельному состоянию соответствует дуга  $GH$ .

Повторяю, как мне представляется, теория предельного состояния должна рассматриваться как самостоятельный раздел МДТТ, разумеется, связанный с теорией идеальной пластичности.

В результате решения статически определимых уравнений теории предельного состояния определяются предельные фиксированные нагрузки, не связанные с предыдущей историей деформирования. По известным предельным значениям напряжений определяется «запредельное» деформирование [2].

Если «живое» статически неопределимое состояние связано со свойствами материала, и уравнения принадлежат к эллиптическому типу, то статически определимые уравнения теории предельного состояния принадлежат к гиперболическому типу. При использовании соотношений ассоциированного закона течения «запредельная» кинематика течения также определяется из уравнений гиперболического типа, причем уравнения для определения напряжений и скоростей перемещений имеют совпадающие характеристические поверхности.

Сделаем несколько замечаний.

Несколько слов о теории плоского напряженного состояния.

Уравнение теории плоского напряженного состояния не следуют из общих уравнений теории. Этим объясняется ряд особенностей теории предельного состояния при плоском напряженном состоянии, уклоняющихся от общей схемы.

В самом деле, в теории плоского напряженного состояния предполагается, что имеет место

$$\begin{aligned} s_x(x, y), s_y(x, y), s_z = 0, t_{xy}(x, y), t_{xz} = t_{yz} = 0, \\ u(x, y), v(x, y), e_{xz} = e_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Предположения (41), строго говоря, не выполняются. В самом деле, из уравнения несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (42)$$



следует

$$w = w_1(x, y)z + w_2(x, y). \quad (43)$$

Из (41), (43) следует

$$\begin{aligned} e_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial w_1}{\partial x} z + \frac{\partial w_2}{\partial x} \neq 0, \\ e_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial w_1}{\partial y} z + \frac{\partial w_2}{\partial y} \neq 0. \end{aligned} \quad (44)$$

что противоречит предположениям (41).

Другое замечание относится к решению статически неопределимых идеально жесткопластических задач. В частных случаях удается получить решения статически неопределимых задач: течение материала сквозь коническую матрицу, обобщенное решение Прандтля в цилиндрической системе координат при условии пластичности Мизеса [2]. Можно получить решение статически неопределимых задач о сжатии пластического слоя шероховатыми плитами. Но эти решения являются исключением. Представим вдавливание жесткого осесимметричного штампа в жестко идеальнопластическое полупространство (задача А. Ю. Ишлинского), при одном условии пластичности, сектор *DOE* на рис. 1. Исходные уравнения принадлежат к эллиптическому типу, следовательно, надо поставить краевые условия на неизвестной границе жесткопластического материала. Задача представляется практически неразрешимой. Аналогичные трудности возникают при решении статически неопределимых задач теории идеальной пластичности с неизвестной границей пластической зоны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д. Д.* Статически определимые соотношения теории пластичности и предельное состояние и разрушение тел / Д. Д. Ивлев, А. Ю. Ишлинский // Изв. РАН МТТ. – 2003. – №3.
2. *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966.
3. *Ивлев, Д. Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – М. : Наука, 1971.
4. *Ивлев, Д. Д.* О предельных статически определимых состояниях деформируемых тел / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова // Изв. РАН МТТ. – 2005. – №5.
5. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. М. : Физматлит, 2001.
6. *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969.
7. *Максимова, Л. А.* О статически определимых соотношениях в осесимметричной задаче теории идеальной пластичности / Л. А. Максимова. Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сб. статей к 75-летию Е. И. Шемякина. – М. : Физматлит, 2006.
8. *Прагер, В.* Теория идеально-пластических тел / В. Прагер, Ф. Ходж. – М. : ИЛ, 1956.
9. *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969.
10. Теория пластичности. Сб. статей. – М. : ИИЛ, 1948.
11. *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехтеоретиздат, 1956.
12. *Христианович, С. А.* Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре / С. А. Христианович // Матем. сб., новая серия. – 1936. – Т.1. – Вып. 4.

## УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ИСКРИВЛЕННОЙ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ

(Бакинский государственный университет)

В данной работе, в рамках линейной теории упругости, на основе модели кусочно-неоднородного трехслойного композита с искривленной внутренней структурой, исследована потеря несущей способности шарнирно опертого по торцам стержня с разными по толщине слоями из различных материалов. Принято, что слои стержня жестко сцеплены между собой, то есть выполняются условия контакта слоев без учета трения. Поставленная задача решается посредством вариационного метода смешанного типа в сочетании с методом Релея-Ритца. Получена формула для определения критической силы. Численно выявлено влияние искривления на критическую силу устойчивости.

**Введение.** Ни одна проблема в области изучения сопротивления материалов не имеет такую многообразную историю, как теория устойчивости сжатых тонкостенных стержней. Классическая теория, созданная Эйлером, до настоящего времени является основой для всех исследований в области устойчивости. Даже теперь, несмотря на многочисленные исследования [2, 7, 10], изыскания в этой специфической области отнюдь не завершены. Причины затруднений, встречающихся при решении задач устойчивости, обусловлены, например, особенностями материала, из которого изготовлены стержни.

Особый интерес для многих областей современной техники и главным образом авиастроения, представляет изучение устойчивости сжатых многослойных стержней, использование которых представляется благоприятным с точки зрения практических приложений. Решения ряда задач теории устойчивости таких стержней, приведены в работах [1, 3, 4].

За время, прошедшее с момента их опубликования, появился новый взгляд на эту проблему, связанный с применением слоистых армированных материалов. Здесь необходимо учитывать влияние искривления волокон на критическую силу устойчивости стержней, изготовленных из таких композитов. Известно, что искривления в структуре таких сред возникают в результате различных факторов [6]. Отклонение волокон или слоев от прямолинейности – один из наиболее часто встречающихся дефектов макроструктуры материалов. При этом, как правило, имеют место небольшие искривления волокон (мелкомасштабные) [8], когда размеры искривлений значительно меньше минимальных размеров рассматриваемого элемента конструкции. Однако наличие искривления слоев может быть вызвано технологической необходимостью, в частности намоткой.

**1. Математическая модель стержня.** Введем в рассмотрение прямоугольный в плане стержень длиной  $l$  и толщиной  $2h$ . Предположим, что он составлен из трех

различных по толщине слоев, причем модули упругости крайних слоев одинаковы, т.е.  $E_1 = E_3 = E$ , а  $E_2$  – модуль упругости среднего слоя. Толщину первого слоя обозначим через  $d_1(x)$ , а толщину искривленного волокна – через  $\Delta = const$ . Тогда, очевидно, что толщина правого крайнего слоя определяется следующим равенством:  
 $d_2(x) = 2h - \Delta - d_1(x)$ .

Условия контакта между слоями пакета заключаются в их жестком сцеплении. Из этого следует равенства на них перемещений, напряжений и отсутствие взаимного давления слоев. В дальнейших рассуждениях будем использовать гипотезу плоских сечений Кирхгофа-Лява, при которой сформулированные выше условия выполняются автоматически. При сделанных предположениях стержень является монолитным и может рассматриваться как обычный. Зададим декартовую систему координат с началом в точке  $z = 0$  и направим ось  $x$  вдоль длины стержня. Тогда уравнение состояния для пакета в целом запишем в виде одного равенства:

$$e^v = \frac{s}{E_{k+1}}, \quad a_k \leq z \leq a_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2), \quad (1.2)$$

где  $s$  – напряжение. В (1.2), для краткости записи, введены следующие обозначения

$$a_0 = -h, \quad a_1 = -h + d_1(x), \quad a_2 = -h + d_1(x) + \Delta, \quad a_3 = h.$$

Значение  $a_3$  непосредственно следует из равенства (1.1).

**2. Вариационная постановка задачи и аналитическое решение.** Рассмотрим теперь устойчивость описанного выше стержня, шарнирно опертого по торцам и центрально сжатого силой  $T$ . Решение соответствующей задачи осуществим посредством вариационного метода смешанного типа [4], в котором независимыми варьируемыми величинами являются скорости напряжений и перемещений.

Учитывая гипотезу плоских сечений, принимая, что ширина стержня равна единице и задавая нелинейность только прогиба  $w$ , применяемый функционал запишем в форме [4]:

$$R = - \int_0^l w_{,xx} w_{,xx} dx + \int_0^l M w_{,xx} dx - \frac{T}{2} \int_0^l w_{,x}^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{k=0}^2 \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathcal{E}^2 dx dz. \quad (2.1)$$

Здесь  $M$  – момент, а запятая означает частное дифференцирование по координате  $x$ . Под точкой следуя [4], понимается дифференцирование по  $T$ , т.е.  $T_{,x} = 1$ . Отметим, что вариационный подход для решения рассматриваемой задачи имеет то преимущество, что позволяет обойти математические трудности, возникающие при использовании классических методов математической физики.

Тогда в развернутом виде последний интеграл в (2.1) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{k=0}^2 \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathcal{E}^2 dx dz &= - \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{E} \int_{-h}^{-h+d_1(x)} \mathcal{E}^2 dz + \frac{1}{E_2} \int_{-h+d_1(x)}^{-h+d_1(x)+\Delta} \mathcal{E}^2 dz + \frac{1}{E} \int_{-h+d_1(x)+\Delta}^h \mathcal{E}^2 dz \right\} dx = \\ &= - \frac{1}{2E} \int_0^l \int_{-h}^{-h+d_1(x)} \mathcal{E}^2 dz dx - \frac{1}{2E_2} \int_0^l \int_{-h+d_1(x)}^{-h+d_1(x)+\Delta} \mathcal{E}^2 dz dx - \frac{1}{2E} \int_0^l \int_{-h+d_1(x)+\Delta}^h \mathcal{E}^2 dz dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

При использовании вариационного метода для решения задач устойчивости и выпучивания тонкостенных элементов конструкций одним из центральных вопросов

является выбор аппроксимирующих функций для закона распределения напряжений по толщине. Примем, что напряжение  $s$  по толщине стержня изменяется по линейному закону

$$s = s_* + z s_{**}. \quad (2.3)$$

Обоснованность такого подхода и оценка его точности для неоднородных по толщине стержней даны в работе [5]. Учитывая, что величина  $z$  меняется в пределах всей толщины стержня, усилие  $N$  и момент  $M$  определяются через  $s$  посредством известных формул теории тонких стержней

$$N = \int_{-h}^h s dz; \quad M = \int_{-h}^h s z dz. \quad (2.4)$$

Подставляя значение (2.3) в равенстве (2.4), находим:

$$N = \int_{-h}^h \{s_* + z s_{**}\} dz = s_* \int_{-h}^h dz = 2hs_*.$$

Аналогично

$$M = \frac{2}{3} h^3 s_{**}.$$

В силу последних соотношений, из (2.3) имеем:

$$s = \frac{N}{2h} + \frac{3z}{2h^3} M.$$

При решении задачи устойчивости будем считать  $N = -T \equiv const$  и поэтому предыдущее выражение запишем как

$$s = -\frac{T}{2h} + \frac{3z}{2h^3} M,$$

или в скоростях по  $T$

$$\mathfrak{s} = -\frac{1}{2h} + \frac{3z}{2h^3} M^*. \quad (2.5)$$

Согласно выражению (2.5), равенство (2.2), после соответствующего интегрирования по  $z$  и ряда довольно громоздких преобразований, можно переписать следующим образом:

$$-\frac{1}{2} \int_0^l \sum_{k=0}^2 \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathfrak{s}^2 dx dz = -\frac{1}{8h^2} \int_0^l \Phi_0 dx + \frac{3}{8h^4} \int_0^l \Phi_1 M^* dx - \frac{3}{8h^6} \int_0^l \Phi_2 M^{*2} dx. \quad (2.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{2h}{E} + \frac{\Delta}{E} + \frac{\Delta}{E_2}, \\ \Phi_1 &= -\frac{\Delta^2}{E_2} + \frac{2h\Delta}{E_2} - \frac{2d_1(x)\Delta}{E_2} + \frac{\Delta^2}{E} - \frac{2h\Delta}{E} + \frac{2d_1(x)\Delta}{E}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\Phi_2 = \frac{3h^2\Delta}{E_2} - \frac{6hd_1(x)\Delta}{E_2} + \frac{3d_1^2(x)\Delta}{E_2} - \frac{3h\Delta^2}{E_2} + \frac{3d_1(x)\Delta^2}{E_2} + \frac{\Delta^3}{E_2} + \frac{2h^3}{E} -$$

$$- \frac{3h^2\Delta}{E} + \frac{6hd_1(x)\Delta}{E} - \frac{3d_1^2(x)\Delta}{E} + \frac{3h\Delta^2}{E} - \frac{3d_1(x)\Delta^2}{E} - \frac{\Delta^3}{E}.$$

Отметим, что  $\Phi_0$  является функцией  $x$ . Этот факт легко усматривается наличием связи (1.1). Теперь остается только ввести выражение (2.6) в (2.1). Отсюда получаем

$$R = - \int_0^l w_{,xx} \bar{w} dx + \int_0^l M_{,xx} \bar{M} dx - \frac{T}{2} \int_0^l \bar{w}^2 dx -$$

$$- \frac{1}{8h^2} \int_0^l \Phi_0 dx + \frac{3}{8h^4} \int_0^l \Phi_1 \bar{M} dx - \frac{3}{8h^6} \int_0^l \Phi_2 \bar{M}^2 dx. \quad (2.8)$$

Для дальнейшего использования метода Релея-Ритца необходимо задать аппроксимирующие функции, описывающие формы изгиба и момента. Здесь, в качестве первых собственных функций, удовлетворяющих краевым условиям шарнирного опирания,

$$w(0) = w(l) = 0; \quad M(0) = M(l) = 0,$$

примем

$$w(x, T) = a(T) \sin \frac{px}{l}, \quad M(x, T) = m(T) \sin \frac{px}{l} \quad (2.9)$$

или в скоростях по  $T$

$$\bar{w} = \bar{a} \sin \frac{px}{l}, \quad \bar{M} = \bar{m} \sin \frac{px}{l}, \quad (2.10)$$

где  $\bar{a}$  и  $\bar{m}$  независимые варьируемые функциональные аргументы. Учитывая (2.9) и (2.10) в (2.8), получим:

$$R = - \frac{p^2}{2l} a \bar{a} - \frac{p^2}{2l} \bar{a} \bar{a} - \frac{p^2 T}{4l} \bar{a}^2 - \frac{1}{8h^2} \int_0^l \Phi_0 dx + \frac{3}{8h^4} \bar{m} \int_0^l \Phi_1 \sin \frac{px}{l} dx - \frac{3}{8h^6} \bar{m}^2 \int_0^l \Phi_2 \sin^2 \frac{px}{l} dx.$$

Равенства нулю

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{a}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial \bar{m}} = 0$$

приводят к следующей системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\bar{m} = -a - T\bar{a} \quad \text{или} \quad m = -aT$$

$$- \frac{p^2}{2l} \bar{a} + \frac{3}{8h^4} \int_0^l \Phi_1 \sin \frac{px}{l} dx - \frac{3}{4h^6} \bar{m} \int_0^l \Phi_2 \sin^2 \frac{px}{l} dx = 0.$$

Путем подстановки, полученную систему удастся свести к одному уравнению

$$\frac{dT}{da} = \left[ -\frac{p^2}{2l} + \frac{3}{4h^6} T \int_0^l \Phi_2 \sin^2 \frac{px}{l} dx \right] \times \left[ -\frac{3}{8h^4} \int_0^l \Phi_1 \sin \frac{px}{l} dx - \frac{3}{4h^6} a \int_0^l \Phi_2 \sin^2 \frac{px}{l} dx \right]^{-1}. \quad (2.11)$$

Введя следующие безразмерные величины

$$t = \frac{T}{Eh}, \quad y = \frac{a}{h}, \quad x = \frac{h}{l}, \quad b_1(x) = \frac{d_1(x)}{\Delta}, \quad b_2(x) = \frac{d_2(x)}{\Delta}$$

$$j_1 = \frac{3EF_1}{8h^3}, \quad j_2 = \frac{3EF_2}{4h^4}, \quad a = \frac{E}{E_2},$$

в которых, в свою очередь

$$F_1 = \int_0^l \Phi_1 \sin \frac{px}{l} dx = \frac{4h^2}{E} \int_0^l \frac{-b_1(x) + b_2(x) + ab_1(x) - ab_2(x)}{(1 + b_1(x) + b_2(x))^2} \sin \frac{px}{l} dx,$$

$$F_2 = \int_0^l \Phi_2 \sin^2 \frac{px}{l} dx = \frac{8h^3}{E} \int_0^l \left[ \frac{1}{4} b_1^3(x) + \frac{1}{4} b_2^3(x) + \frac{3}{4} b_1(x) + \frac{3}{4} b_2(x) + 3b_1(x)b_2(x) + \frac{3}{4} b_1(x)b_2^2(x) + \frac{3}{4} b_1^2(x)b_2(x) + \frac{1}{4} a + \frac{3}{4} b_1^2(x)a + \frac{3}{4} b_2^2(x)a - \frac{3}{2} b_1(x)b_2(x)a \right] \times$$

$$\times [1 + b_1(x) + b_2(x)]^{-3} \cdot \sin^2 \frac{px}{l} dx,$$

(2.11) можно переписать в виде

$$\frac{dt}{dy} = \frac{-\frac{p^2}{2}x + j_2 t}{j_1 - j_2 y}. \quad (2.12)$$

В уравнении (2.12) переход к безразмерному дифференцированию осуществлялся по правилу

$$\frac{d}{dT} = \frac{1}{hE} \frac{d}{dt}.$$

Из (2.12) величина критической силы устойчивости, определяемая из условия  $dt/dy = 0$ , запишется посредством формулы

$$t_{кр} = \frac{p^2}{2} x j_2^{-1}. \quad (2.13)$$

**3. Численный пример.** Для дальнейших целей необходимо конкретизировать функцию  $d_1(x)$ . Примем её в виде (рис.1)

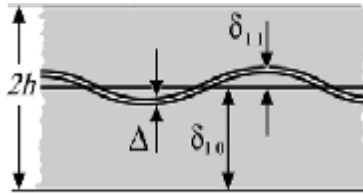


Рис. 1. Модель рассматриваемого стержня

$$d_1(x) = d_{10} + d_{11} \sin \frac{kpx}{l},$$

тогда

$$b_1(x) = \frac{d_{10}}{\Delta} + \frac{d_{11}}{\Delta} \sin \frac{kpx}{l},$$

а

$$b_2(x) = \frac{2h}{\Delta} - \frac{d_{10}}{\Delta} - \frac{d_{11}}{\Delta} \sin \frac{kpx}{l} - 1,$$

где  $k$  – параметр искривления, характеризующий форму волокна, а  $\frac{d_{11}}{\Delta}$  – её безразмерная амплитуда.

На рисунках 2, 3, 4, согласно формуле (2.13), представлены результаты вычислений критической силы устойчивости при различных геометрических и физических параметрах стержня для  $\chi = 10^{-1}$ .

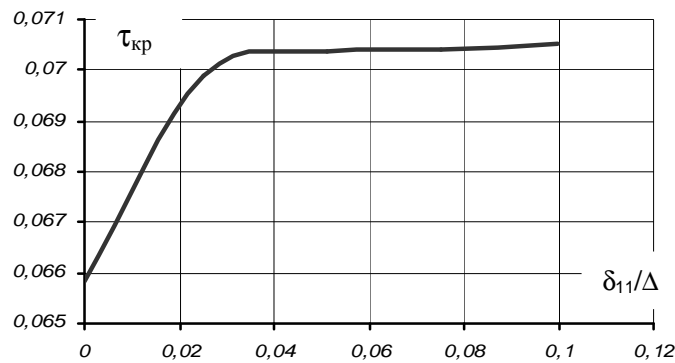


Рис. 2. Зависимость критической силы устойчивости  $t_{кр}$  от амплитуды искривления  $d_{11}/\Delta$  ( $k=1$ ;  $\alpha=0,01$ ).

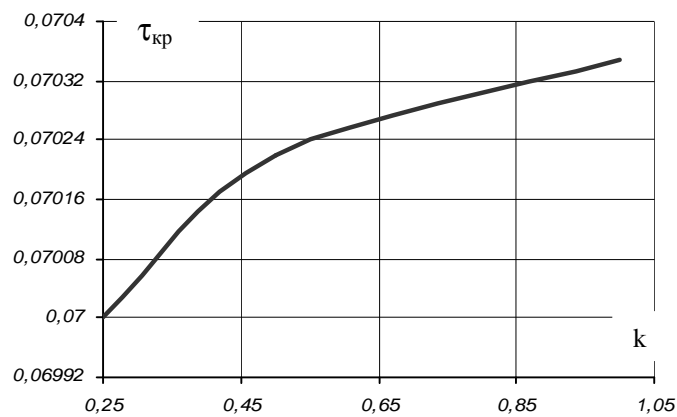


Рис. 3. Зависимость критической силы устойчивости  $t_{кр}$  от параметра  $k$  ( $\alpha=0,01$ ;  $\delta_{11}/\Delta=0,1$ ).

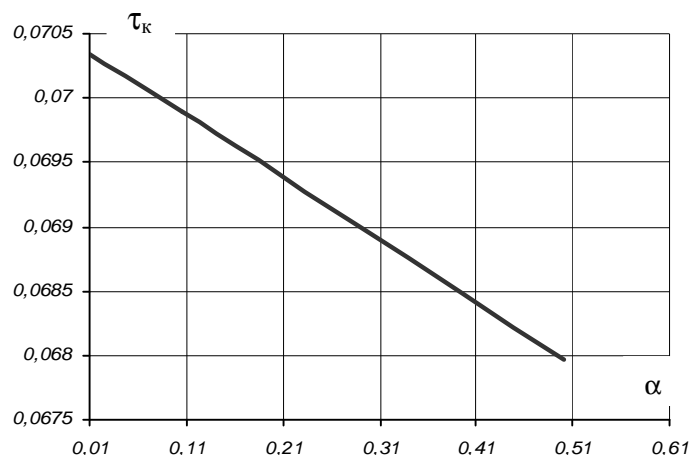


Рис. 4. Зависимость критической силы устойчивости  $t_{кр}$  от параметра  $a$  ( $\delta_{11}/\Delta=0,1$ ;  $k=1$ ).

При этом фигурируемые в выражении  $j_2$  интегралы вычислялись либо аналитически, либо численно методом прямоугольников. В случае, когда раздел слоев осуществляется параллельно боковым граням стержня, т.е.  $d_{11}/\Delta = 0$ , получаем результат работы [9, 38]. В принятых здесь обозначениях, соответствующая формула принимает вид:

$$t_{кр} = \frac{2}{3} p^2 x^2 \frac{(b + 0,5)^3}{b^3 + 1,5b^2 + 0,75b + 0,125a}.$$

Наконец, отсюда, для однородного стержня, когда  $a = 1$ , автоматически получаем значение критической силы Эйлера

$$t_{кр} = \frac{2}{3} p^2 x^2.$$

При этом её численное значение следующее:  $t_{кр} \approx 0,065$ .

Важно заметить, что указанный выбор параметра искривления  $k$  обусловлен возможностью использования одномерной теории, а величина  $a$  может принимать значения разных порядков, что следует из анализа опытных данных для таких широко встречающихся на практике материалов как алюминий, вольфрам, стали, конструкционные пластики и композиты.

Таким образом, при выбранных значениях параметров можно сделать следующие выводы:

- при фиксированных  $k$  и  $a$  (рис. 2) увеличение амплитуды искривления  $d_{11}/\Delta$  увеличивает значение  $t_{кр}$ ;
- из данных рисунка 3 следует, что при заданных  $d_{11}/\Delta$  и  $a$  увеличение параметра  $k$  приводит к увеличению критической силы  $t_{кр}$ ;
- при заданных  $k$  и  $d_{11}/\Delta$  наблюдается снижение значения  $t_{кр}$  при возрастании



$a$  (рис. 4), что вполне объяснимо фиксированностью величины  $E$ , ибо рост  $a$  связан с уменьшением модуля упругости искривленного слоя  $E_2$ , которое приводит к снижению общей жесткости стержня, что представляется не рациональным с точки зрения устойчивости, т.к. уже при  $a = 5 \cdot 10^{-1}$  значение  $t_{кр}$  меньше силы Эйлера.

В заключение отметим, что достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью постановки задачи, применением обоснованных математических методов, сравнением в частных случаях с известными решениями и физически обоснованными выводами.

г. Баку

Поступила: 25 октября 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Абдуллаев, Ф. А.* Устойчивость многослойных стержней при различных видах закреплений / Ф. А. Абдуллаев, Р. Ю. Амензаде, Е. Т. Киясбейли // Вестник Бакинского Университета. – 2001. – № 1. – С. 131-141.
2. *Алфутов, Н. А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н. А. Алфутов. – М.: Машиностроение, 1978. – 310 с.
3. *Амензаде, Р. Ю.* Устойчивость неоднородных по толщине стержня из композитного материала / Р. Ю. Амензаде, С. А. Шестериков // МКМ. – 1992. – № 1. – С. 115-121.
4. *Амензаде, Р. Ю.* Предельное состояние жестко защемленного нелинейно-упругого многослойного стержня / Р. Ю. Амензаде., Э. Т. Киясбейли, Л. Ф. Фатуллаева // Механика композитных материалов. – 2006. – № 3. – С. 347-360.
5. *Амензаде, Р. Ю.* О точности линейного распределения напряжения в задачах выпучивания многослойных стержней / Р. Ю. Амензаде, Э. Т. Киясбейли // Доклады Академии Наук Азербайджана. – 2000. – № 4-6. – С. 72-77.
6. *Болотин, В. В.*, Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
7. *Вольмир, А. С.* Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М.: Машиностроение, 1967. – 484 с.
8. *Гузь, А. Н.* О континуальной теории композитных материалов с мелкомасштабными искривлениями в структуре / А. Н. Гузь // Докл. АН СССР. – 1983. – т. 268. – № 2. – С. 307-313.
9. *Киясбейли, Е. Т.* Об устойчивости многослойных стержней / Е. Т. Киясбейли // Тезисы научн. конф. «Проблемы прикладной математики». – Баку. – 3-4 май 2002. – С. 37-39.
10. *Хофф, Н.* Продольный изгиб и устойчивость / Н. Хофф. – М.: Машиностроение, 1955. – 154 с.

## ОБ УЧЕТЕ НЕОБРАТИМОЙ СЖИМАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА ПРИ ВОЛОЧЕНИИ ПОЛОСЫ СКВОЗЬ КОРОТКУЮ МАТРИЦУ

(Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет)

Задача о волочении полосы сквозь короткую матрицу рассматривалась в работах Р. Хилла [4], В. В. Соколовского [2] и других авторов при условиях текучести Мизеса и Треска-Сен-Венана. В этом случае идеальное жесткопластическое тело является несжимаемым. При условии текучести Кулона-Мора происходит необратимое изменение объема материала в пластической области. Целью работы являлось исследование полей деформаций в окрестности особенностей поля линий скольжения (линии разрыва скоростей перемещений и в центре веера характеристик) в задаче о волочении полосы с учетом необратимой сжимаемости.

### 1. Основные соотношения теории пластического течения.

В теории пластического течения предполагается [4], что компоненты девиатора скорости деформации пропорциональны частным производным от условия текучести по компонентам девиатора напряжения:

$$\mathcal{E}_{ij} = a \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}, \quad a \geq 0, \quad (1)$$

средняя скорость деформации пропорциональна частной производной от условия текучести по среднему напряжению

$$\mathcal{E} = a \frac{\partial f}{\partial s}. \quad (2)$$

Так как  $\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij} + \mathcal{E}d_{ij}$ , то компоненты тензора скорости деформации пропорциональны частным производным от условия текучести по компонентам тензора напряжения

$$\mathcal{E}_{ij} = a \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}. \quad (3)$$

Производные  $\frac{\partial f}{\partial s_{ij}}$  могут быть выражены следующим образом

$$\frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = \frac{1}{2t} \frac{\partial f}{\partial t} s_{ij}$$

где  $t^2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$  – интенсивность девиатора напряжения. Поэтому соотношения (1) устанавливают, что компоненты девиатора скорости деформации пропорциональны компонентам девиатора напряжения:

$$\mathfrak{E}_{ij} = I s_{ij}, \quad h = I t, \quad (4)$$

где  $h^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_{ij} \mathfrak{E}_{ij}$  – интенсивность девиатора скорости пластической деформации.

В данной работе в качестве условия текучести для сжимаемого материала, принимается условие текучести Кулона-Мора :

$$\max \frac{1}{2} |s_i - s_j| = c_1 - \frac{1}{3} c_2 (s_1 + s_2 + s_3), \quad (5)$$

где  $c_1, c_2$  – некоторые постоянные рассматриваемой среды.

При плоском деформированном состоянии из соотношений (3), (4) и (5) получим

$$s_z = (1 + \frac{2}{9} c_2^2) s - \frac{2}{9} c_1 c_2,$$

$$s = (1 - \frac{c_2^2}{9}) s + \frac{1}{9} c_1 c_2,$$

$$t = \frac{9}{9 - c_2^2} c_1 - \frac{9}{9 - c_2^2} c_2 s,$$

где  $s = \frac{1}{2} (s_x + s_y)$ ,  $t = \frac{1}{2} \sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4s_{xy}^2}$ .

Введя новые постоянные  $k = \frac{9}{9 - c_2^2} c_1$ ,  $\sin r = -\cos 2j = -\frac{dt}{ds}$ ,  $2j = \frac{p}{2} + r$ , условие

текучести (5) можно записать в виде

$$t = k - \sin r \cdot s. \quad (6)$$

Подставляя компоненты напряжения  $s_x = s + t \cos 2y$ ,  $s_y = s + t \cos 2y$ ,  $s_{xy} = t \sin 2y$ , где  $y$  – угол наклона наибольшей главной компоненты  $s_1$  к оси  $x$ , в уравнения равновесия, получим систему уравнений для определения напряженного состояния в среде:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \sin r \cos 2y) \frac{\partial s}{\partial x} - \sin r \sin 2y \frac{\partial s}{\partial y} - 2(k - \sin r \cdot s) \cdot \\ (\sin 2y \frac{\partial y}{\partial x} - \cos 2y \frac{\partial y}{\partial y}) = 0, \\ - \sin r \sin 2y \frac{\partial s}{\partial x} + (1 + \sin r \cos 2y) \frac{\partial s}{\partial y} + 2(k - \sin r \cdot s) \cdot \\ (\cos 2y \frac{\partial y}{\partial x} + \sin 2y \frac{\partial y}{\partial y}) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

а подставляя выражения  $\mathfrak{E}_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\mathfrak{E}_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $2\mathfrak{E}_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$  в соотношения (3), получим систему уравнений для скоростей

$$\left. \begin{aligned} 2 \sin 2y \frac{\partial u}{\partial x} - (\sin r + \cos 2y) \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0, \\ 2 \sin 2y \frac{\partial v}{\partial y} - (\sin r - \cos 2y) \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Основная система уравнений принадлежит к гиперболическому типу, при условии

$$\left| \frac{9}{9 - c_2^2} c_2 \right| < 1.$$

Характеристики систем уравнений (7) и (8) образуют два семейства и определяются уравнениями:

$$h = y - l = \text{const}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{du}{dv} = \text{tg}(y - j), \quad (9)$$

$$x = y + l = \text{const}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{du}{dv} = \text{tg}(y + j), \quad (10)$$

где  $l = -\frac{1}{2} \text{ctg} r \ln(k - \sin r \cdot s)$ .

Введя новые переменные

$$\bar{x} = \frac{1}{\cos r} (x \cdot \sin(y + j) - y \cdot \cos(y + j)),$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\cos r} (y \cdot \cos(y - j) - x \cdot \sin(y - j)),$$

и

$$\bar{u} = \frac{1}{\cos r} (u \cdot \cos(y - j) + v \cdot \sin(y - j)),$$

$$\bar{v} = \frac{1}{\cos r} (v \cdot \sin(y + j) + u \cdot \cos(y + j)),$$

а также  $\frac{Y}{\bar{y}} = \frac{X}{\bar{x}} = \sqrt{\frac{t}{k}} \cos r$ ,  $\frac{U}{\bar{u}} = \frac{V}{\bar{v}} = \sqrt{\frac{t}{k}} \cos r$ , уравнения характеристик могут быть преобразованы к виду

$$h = y - l = \text{const}, \quad dY = -\frac{X}{\cos r} dy, \quad dU = \frac{V}{\cos r} dy, \quad (11)$$

$$x = y + l = \text{const}, \quad dX = \frac{Y}{\cos r} dy, \quad dV = -\frac{U}{\cos r} dy. \quad (12)$$

Для изотропного тела диссипативная функция имеет вид [1]:

$$D = s_1 e_1 + s_2 e_2.$$

Согласно ассоциированному закону течения (3) имеем выражения для скоростей деформации

$$e_1 + e_2 = (e_1 - e_2) \sin r$$

и диссипативную функцию

$$D = 2kg_{\max} \geq 0, \quad g = \frac{1}{2}(e_1 - e_2),$$

где  $g_{\max}$  – максимальная скорость сдвига, которая связана с полями линий скольжения и скоростей соотношением

$$g_{\max} = \frac{1}{\cos r} \left( \frac{1}{R_x} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \sin r + \frac{\bar{u}}{2} \cos r \right) + \frac{1}{R_h} \left( -\frac{\partial \bar{v}}{\partial h} \sin r + \frac{\bar{v}}{2} \cos r - \frac{\partial \bar{u}}{\partial h} \right) \right).$$

## 2. Определение полей деформации.

### А. Соотношения на поверхности разрыва скоростей перемещения

Будем описывать движение среды в форме Эйлера  $x_i^0 = x_i^0(x_1, x_2, x_3)$ , где  $x_i^0$ ,  $x_i$ , соответственно, лагранжевы и эйлеровы координаты частиц среды.

Выберем в качестве меры деформации тензор конечных деформаций Альманси:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{d}_{ij} - x_{k,i}^0 x_{k,j}^0). \quad (13)$$

Деформирование материала в окрестности разрыва поля скоростей перемещений рассматривались в работах [5,6], при этом предполагалось, что материал пластически несжимаемый. Ниже данный подход обобщается на случай сжимаемого пластического тела.

Пусть поверхность  $\Sigma$  является поверхностью разрыва поля скоростей перемещений, которая распространяется с нормальной скоростью  $G$ .

Функции  $x_i^0 = x_i^0(x_1, x_2, x_3)$ , предполагаются непрерывными, производные на поверхности  $\Sigma$  должны удовлетворять согласно [3], следующим геометрическим и кинематическим условиям совместности:

$$[x_{i,j}^0] = I_i n_j, \quad \left[ \frac{\partial x_i^0}{\partial t} \right] = I_i G, \quad (14)$$

где  $[x_{i,j}^0] = x_{i,j}^{0+} - x_{i,j}^{0-}$ ,  $n_i$  – компоненты вектора нормали к поверхности  $\Sigma$ ,  $I_i$  – некоторые функции, определенные на поверхности разрыва. Индексы «+» и «-» обозначают определенную сторону поверхности  $\Sigma$ .

Вдоль каждой траектории материальной частицы лагранжевы координаты постоянны, поэтому

$$\frac{dx_j^0}{dt} = \frac{\partial x_j^0}{\partial t} + V_k \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k} = 0.$$

Отсюда  $\left[ \frac{\partial x_j^0}{\partial t} \right] = - \left[ V_k \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k} \right]$ , или учитывая первое соотношение (14) получим:

$$\left[ \frac{\partial x_j^0}{\partial t} \right] = -[V_j] - I_j V^{n+}. \quad (15)$$

Представим вектор разрыва скорости перемещений в виде:  $[V_j] = [V_t] t_j + [V_n] n_j$ , где  $t_j$  – компоненты вектора касательной к поверхности разрыва,  $[V_t]$  – модуль разрыва ка-

сательной компоненты скорости,  $[V_n]$  – модуль разрыва нормальной компоненты скорости.

Сравнивая правые части (14) и (15), получим

$$I_i = -\left(\frac{[V_t]k_i}{G+V^{n+}} + \frac{[V_n]n_i}{G+V^{n+}}\right),$$

$$[x_{i,j}] = -\left(\frac{[V_t]k_i}{G+V^{n+}} + \frac{[V_n]n_i}{G+V^{n+}}\right)n_j.$$

Здесь принято  $G_i = -Gn_i$ , т.е. вектор  $G_i$  направлен против вектора  $n_i$ .

Рассмотрим выражение

$$[x_{i,j}]S_{ij} = -\left(\frac{[V_t]k_i n_j S_{ij} dt}{(G+V^{n+})dt} + \frac{[V_n]n_i n_j S_{ij} dt}{(G+V^{n+})dt}\right),$$

где  $dt$  – бесконечно малый интервал времени. Здесь первое слагаемое представляет работу касательных к поверхности  $\Sigma$  сил, затраченных на сдвиговые деформации объема  $(G+V^{n+})dt$  проходящего через поверхность разрыва. Второе слагаемое – работа нормальных к поверхности  $\Sigma$  сил затраченных на изменение объема среды.

Введем локальную систему координат связанную с ортами  $n_i, t_i$ . Введем обозначение

$$W_1 = \frac{[V_t]}{G+V^{n+}}, W_2 = \frac{[V_n]}{G+V^{n+}}, \quad (16)$$

соответственно, объемные плотности энергии сдвиговых и объемных деформаций.

Тензор градиентов деформаций можно представить в виде

$$[x_{i,j}^0] = \begin{bmatrix} 0 & -W_1 \\ 0 & -W_2 \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что ниже поверхности  $\Sigma$  материал недеформирован т.е.  $x_{i,j}^0 = d_{ij}$ , тогда компоненты тензора конечных деформаций Альманси (13) могут быть представлены в виде:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ W_1 & 1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2 \end{bmatrix}.$$

Угол  $q$  между первым главным направлением тензора Альманси и касательной к поверхности разрыва скоростей, его основные инварианты вычисляются через  $W_1$  и  $W_2$  по формулам

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2q &= \frac{2E_{12}}{E_{11} - E_{22}} = \frac{-2W_1}{1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2}, \\ I_E &= \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22}) = \frac{1}{4}(1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2), \\ II_E &= (E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2 = \frac{1}{4}(1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2)^2 + W_1^2, \\ E_{1,2} &= \frac{1}{4}(1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4}(1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2)^2 + W_1^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Если материал до пересечения поверхности  $\Sigma$  деформировался, то общие деформации будут определены следующим образом:

$$\frac{\partial x_i^{0+}}{\partial x_j} = (d_{ik} - (W_1 t_i + W_2 n_i) n_k) \frac{\partial \bar{x}_k^{0-}}{\partial x_j}. \quad (18)$$

**Б) Деформации в окрестности центра веера характеристик**

Для исследования поля деформаций в окрестности центра веера характеристик используется равенство производной Коттер-Ривина по времени от тензора конечных деформаций Альманси и тензора скоростей деформации

$$\frac{DE_{ij}}{Dt} = \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} v_k + E_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = e_{ij}. \quad (19)$$

Рассматривается случай веера характеристик  $h$ . Тогда при стремлении к нулю радиуса кривизны  $R_x$  характеристики  $x$ , система уравнений (19) перейдет в систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial x} + A(e - \frac{1}{2}) + Bg \cos 2(q - y) &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial x} + B(e - \frac{1}{2}) \cos 2(q - y) + Ag &= 0, \\ 2g \frac{\partial q}{\partial x} - B(e - \frac{1}{2}) \sin 2(q - y) - Cg &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Здесь

$$e = \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22}), \quad g = \frac{1}{2}\sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2},$$

$$A = \frac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \sin r - \frac{\bar{v}}{2} \cos r}{(\bar{u} + \bar{v} \sin r - a' \sin(y + j) + b' \cos(y + j))},$$

$$B = \frac{\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \sin r + \frac{\bar{u}}{2} \cos r}{\cos r (\bar{u} + \bar{v} \sin r - a' \sin(y + j) + b' \cos(y + j))},$$

$$C = \frac{\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \cos r + \frac{\bar{v}}{2} \sin r + \frac{\bar{u}}{2}}{\cos r (\bar{u} + \bar{v} \sin r - a' \sin(y + j) + b' \cos(y + j))},$$

где  $y = \frac{1}{2}(x + h_0)$  – угол наклона первого главного направления тензора скоростей деформаций к оси  $x$ ,  $x = a(t)$ ,  $y = b(t)$  – уравнения движения центра веера характеристик.

Величины, описывающие изменение деформаций определяются следующим образом:

$$E_1 = e + g, \quad q = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{-2W_1}{1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2} \right) \quad (21)$$

Кратность изменения объема частиц в результате деформации выражается в виде

$$\frac{V_0}{V} = \sqrt{(1 - 2E_1)(1 - 2E_2)}.$$

### 3. Волочение полосы сквозь короткую матрицу.

Рассмотрим волочение полосы сквозь жесткую матрицу в предположении, что матрица имеет небольшую длину, а пластическая область показана на рис. 1.

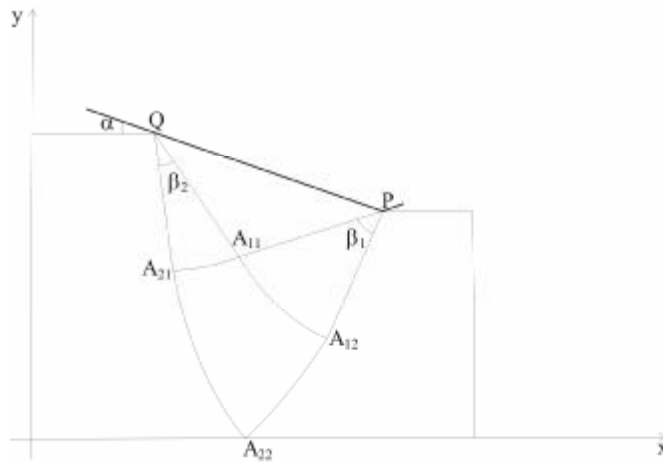


Рис. 1.

Запишем граничные условия рассматриваемой задачи [2], для верхней полосы, считая, что вдоль контактной прямой действует равномерно распределенное давление  $q$ .

Вдоль оси  $x$  компоненты  $t_{xy} = 0$ ,  $v = 0$  и  $y = 0$ ,  $Y = X$ ,  $V = U$ , а вдоль контактной прямой, компоненты  $s_n = -q$ ,  $t_{nt} = 0$  и  $v_n = 0$ , так что

$$y = -a, \quad s = \frac{k - q}{1 + \sin r}, \quad U = V.$$

Обозначим координаты точки  $P$  через  $x_1$  и  $y_1$ , а координаты точки  $Q$  через  $x_2$  и  $y_2$ .

Относительное обжатие полосы  $r$  определяется следующим соотношением:

$$r = 1 - \frac{y_1}{y_2}.$$



В области  $PA_{11}Q$  возникает простейшее поля напряжений, так что  $s = \frac{k-q}{1+\sin r}$ ,  $y = -a$ , а сетка линий скольжения образована двумя изогональными семействами параллельных прямых.

В областях  $A_{11}PA_{12}$  и  $A_{11}QA_{21}$  плоскости течения имеют место соотношения:

$$s = \frac{1}{\sin r} \left( k - \frac{k+q \sin r}{1+\sin r} e^{-2igr(y+a)} \right)$$

в области  $A_{11}PA_{12}$ ,

$$s = \frac{1}{\sin r} \left( k - \frac{k+q \sin r}{1+\sin r} e^{2igr(y+a)} \right)$$

в области  $A_{11}QA_{21}$ , а сетка линий скольжений состоят из пучков прямых, проходящих через точки  $P$  и  $Q$ , а также из семейств логарифмических спиралей, параметрические уравнения которых имеет вид

$$\begin{cases} x = x_1 + Ce^{igr(y+a)} \cos(y+j), \\ y = y_1 + Ce^{igr(y+a)} \sin(y+j), \end{cases} \quad (22)$$

для области  $A_{11}PA_{12}$  и

$$\begin{cases} x = x_2 + De^{-igr(y+a)} \cos(y-j), \\ y = y_2 + De^{-igr(y+a)} \sin(y-j), \end{cases} \quad (23)$$

для области  $A_{11}QA_{21}$ . Для  $A_{11}A_{12}$  и  $A_{11}A_{21}$  константы  $D = -C = \frac{y_2 - y_1}{2 \sin a \cos j}$ .

По данным (22) и (23) вдоль характеристик  $A_{11}A_{12}$  и  $A_{11}A_{21}$ , может быть построено решение второй краевой задачи в области  $A_{11}A_{12}A_{22}A_{21}$  для уравнений координат (11) и (12).

Вдоль линий характеристик  $A_{11}A_{12}$  и  $A_{11}A_{21}$  имеют место соотношения между  $s$  и  $y$

$$s = \frac{1}{\sin r} (k - e^{2igr y} (k - \sin r \cdot s_0))$$

и

$$s = \frac{1}{\sin r} (k - e^{-2igr y} (k - \sin r \cdot s_0)),$$

где  $s_0$  – давление в точке  $A_{22}$ .

Так как в точках  $A_{12}$  и  $A_{21}$  углы  $y = -a + b_1$  и  $y = -a - b_2$ , то параметры  $s_0$ ,  $b_1$  и  $b_2$  связаны следующим образом:

$$q = \frac{1}{2 \sin r} ((1 + \sin r)(k - \sin r \cdot s_0)(e^{2igr(a+2b_2)} + e^{-2igr(a-2b_1)}) - 2k)$$

и  $a = b_1 - b_2$ .

Сила натяжения  $py_1$  и один из углов  $b_1$  и  $b_2$  определяется из двух условий: равенства нулю суммы проекций на горизонтальную ось всех сил, действующих вдоль линии  $QA_{21}A_{22}$  и нахождения точки  $A_{22}$  на оси симметрии.

Для определения поля скоростей будем считать, что части полосы справа от линии скольжения  $PA_{12}A_{22}$  и слева от линии скольжения  $QA_{21}A_{22}$  остаются жесткими и движутся со скоростями  $u_1$  и  $u_2$ .

Вдоль линии скольжения имеют место проекции скорости

$$\bar{u} = \frac{u_1 \cos(\gamma - j)}{\cos r}, \quad \bar{v} = \frac{u_1}{\cos r} \cos(\gamma + j) + \frac{\cos j}{\cos r} (u_2 - u_1) e^{-tg r \gamma}, \quad (24)$$

а вдоль линии скольжения

$$\bar{v} = \frac{u_2 \cos(\gamma + j)}{\cos r}, \quad \bar{u} = \frac{u_2}{\cos r} \cos(\gamma - j) + \frac{\cos j}{\cos r} (u_1 - u_2) e^{tg r \gamma}. \quad (25)$$

В области  $A_{11}A_{12}A_{22}A_{21}$  может быть найдено решение уравнений (11) и (12) для скоростей по данным (24) и (25), а затем определить скорости в центрированных полях и в области  $PA_{11}Q$ .

Так как с течением времени площадь пластической области не изменяется, то имеет место равенство

$$\oint (v_n + G) ds + \iint \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (26)$$

Здесь  $G = 0$  – нормальная скорость распространения линий разрыва,  $v_n$  – нормальная компонента скорости, причем

$$v_n = -u_2 \sin(\gamma - j) + \cos j \operatorname{tg} r (u_1 - u_2) e^{tg r \gamma}$$

вдоль линии  $QA_{21}A_{22}$ ,

$$v_n = -u_1 \sin(\gamma + j) - \cos j \operatorname{tg} r (u_2 - u_1) e^{-tg r \gamma}$$

вдоль линии  $PA_{12}A_{22}$  и  $v_n = 0$  вдоль контактной прямой  $PQ$ .

Соотношение (26) устанавливает связь между горизонтальными скоростями  $u_1$  и  $u_2$  правой и левой жестких частей полосы.

Построенное решение справедливо пока  $b_1 \geq 0$  и  $b_2 \geq 0$ .

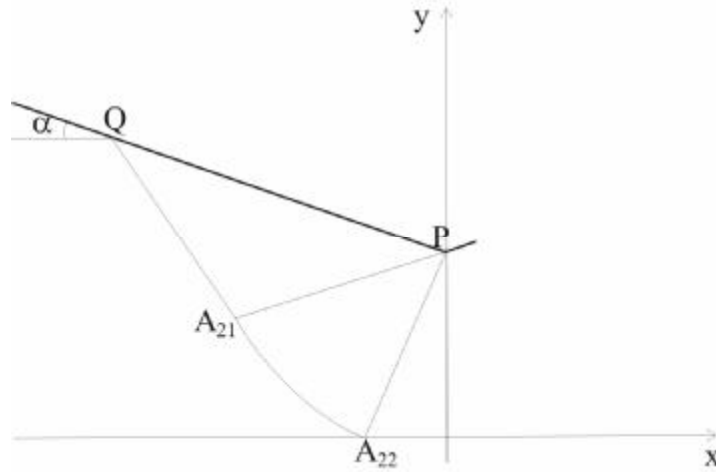


Рис. 2.

В частном случае, когда  $b_2 = 0$  (рис. 2), можно получить решение в замкнутой форме:

$$q = \frac{1}{\sin r} ((1 + \sin r)(k - \sin r \cdot s_0)e^{2tgra} - k),$$

$$p = \frac{2k \sin a ((1 + \sin r) \sin j e^{2tgra} - \cos j \cos r)}{\sin r \sin j e^{tgra} (\cos r + 2 \sin a (1 + \sin r) e^{tgra})}$$
(27)

Между углом  $a$  и обжатием  $r$  выполняется соотношение

$$r = \frac{2 \sin a}{2 \sin a + tgj e^{tgra}}.$$
(28)

Соотношение (28) определяет максимальное обжатие  $r$  полосы, допустимое при решении поставленной задачи. Графики для максимального обжатия  $r$  при  $r = 0^\circ$  (сплошная линия) и  $r = -10^\circ$  (пунктирная линия) в зависимости от угла наклона матрицы  $a$  представлены на рис. 3.

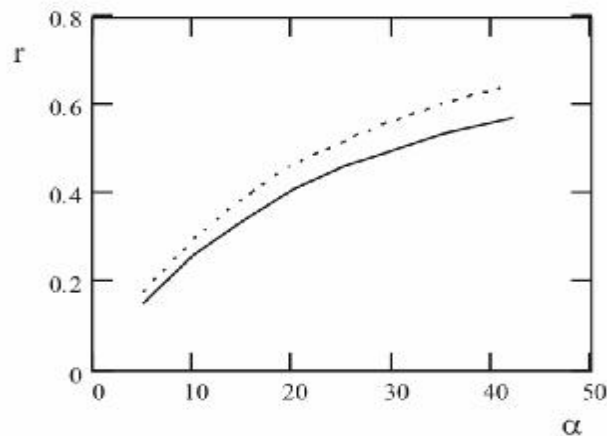


Рис.3.

Скорости  $u_1$  и  $u_2$ , будут связаны следующим образом

$$u_2 = \frac{u_1 e^{-tgr a}}{2 \sin \text{atg} j + e^{-tgr a}}. \quad (29)$$

Исследуем распределение деформаций в различных точках пластической области: на линии разрыва скоростей перемещений  $QA_{21}A_{22}$ ,  $PA_{22}$  и в окрестности центра веера характеристик  $A_{21}PA_{22}$  для случая  $b_2 = 0$ . Учитывая соотношения (24) и (25), разрыв касательной и нормальной компонент скорости будут следующие:

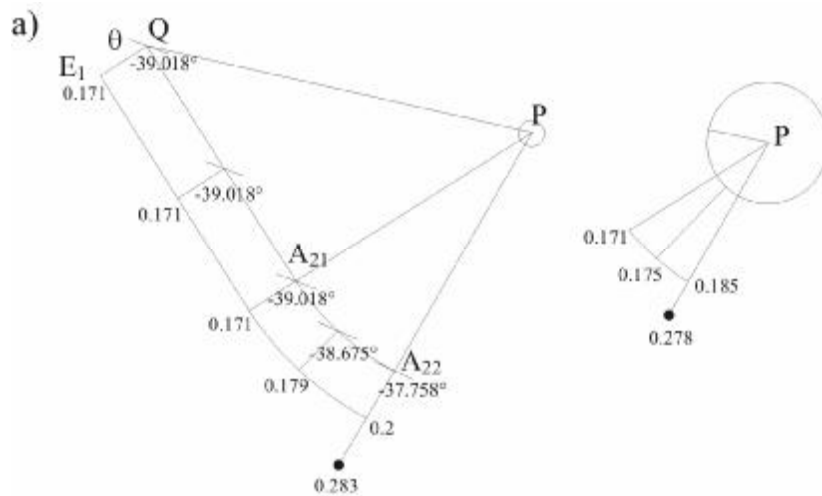
$$\begin{aligned} [v_t] &= \cos j (u_1 - u_2) e^{tgr y}, \\ [v_n] &= \cos j tgr r (u_1 - u_2) e^{tgr y}, \end{aligned} \quad (30)$$

на линии  $QA_{21}A_{22}$ ,

$$\begin{aligned} [v_t] &= \cos j (u_1 - u_2), \\ [v_n] &= \cos j tgr r (u_2 - u_1), \end{aligned} \quad (31)$$

на линии  $PA_{22}$ .

Соотношения (17), (30) и (31) позволяют определить распределение деформаций на линиях разрыва скоростей перемещений. Распределение деформаций в окрестности центра веера характеристик определяются из системы уравнений (20), с начальными условиями полученными на линии  $QA_{21}$ . Отметим, что частица попадающая в пластическую область деформируется два раза. Первый раз деформируется при переходе линии разрыва  $QA_{21}A_{22}$ , второй раз через линию разрыва  $PA_{22}$ . В этом случаи общие деформации подсчитываются с использованием соотношений (18) и (20).



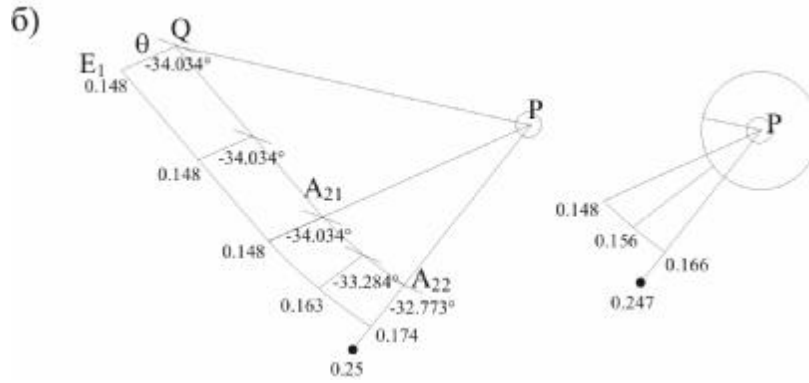


Рис. 4.

Ниже получено решение задачи для  $k=1$ ,  $r=0^\circ$  (несжимаемый материал) и  $r=-10^\circ$ . На рис.4 ( $r=0^\circ$  соответствует рис.4(а),  $r=-10^\circ$  соответствует рис.4(б)) показано распределение деформаций на линиях  $QA_{21}A_{22}$ ,  $PA_{22}$  и в окрестности центра веера характеристик для угла наклона матрицы  $\alpha = 15^\circ$ .

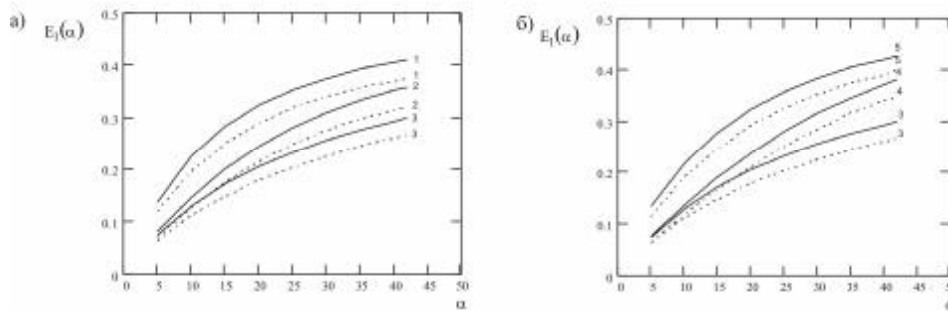


Рис 5.

На рис.5 представлены графики  $E_1(\alpha)$  изменения деформаций в окрестности особенностей поля линий характеристик для  $r=0^\circ$  (сплошная линия) и  $r=-10^\circ$  (пунктирная линия). На рис. 5(а) представлено распределение деформаций на линиях разрыва  $PA_{22}$  и  $QA_{21}A_{22}$ : при переходе через точку  $A_{22}$  происходит скачок деформаций (линия 1). Деформации на линии  $QA_{21}A_{22}$  изменяются от значений на линии 3 до значений на линии 2. Таким образом, деформации при движении частиц вдоль линии жесткопластической границы от точки  $Q$  увеличиваются. При увеличении угла  $\alpha$  наклона матрицы деформации также увеличиваются.

На рис. 5(б) представлено распределение деформаций в окрестности центра веера характеристик  $A_{21}PA_{22}$ : до попадания в веер частица получает начальные значения на линии 3 ( $QA_{21}$ ), при движении в веере частица деформируется до линии 4. Линия 5 отображает скачок деформаций при переходе через линию разрыва  $PA_{22}$ .

Сравнивая графики рис.5(а) и рис.5(б), можно сделать вывод: для  $r = 0^\circ$ , до угла  $a \approx 21^\circ$  наибольшие деформации наблюдаются в окрестности точки  $A_{22}$ , при  $21^\circ < a \leq 42^\circ$  в окрестности центра веера характеристик (с учетом перехода линии разрыва  $PA_{22}$ ); для  $r = -10^\circ$ , до угла  $a \approx 18^\circ$  наибольшие деформации наблюдаются в окрестности точки  $A_{22}$ , при  $18^\circ < a \leq 42^\circ$  в окрестности центра веера характеристик.

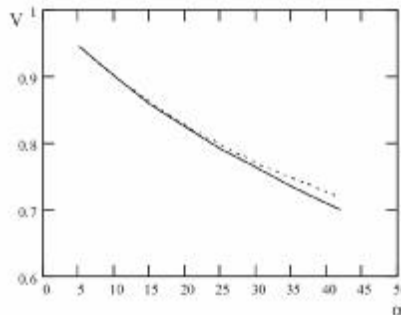


Рис. 6.

На рис. 6 представлен график изменения объема  $V$  частицы ( $V_0 = 1$  - объем частицы до попадания в пластическую область) на выходе из пластической области в окрестности точки  $A_{22}$  (сплошная линия) и в окрестности центра веера характеристик (пунктирная линия), для  $r = -10^\circ$  в зависимости от угла наклона матрицы  $a$ .

Диссипативная функция

$$D = \frac{2k}{R_x \cos r^2} \cos j (u_1 - u_2) e^{tgr} > 0.$$

В задаче о волочении полосы сквозь короткую матрицу при  $r = -10^\circ$  происходит уплотнение материала.

г. Комсомольск-на-Амуре

Поступила: 18 июля 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности. / Д. Д. Ивлев // М.: Наука, 1966. – 232 с.
2. Соколовский, В. В. Теория пластичности. / В. В. Соколовский // М.: Высш. Школа, 1969. – 608 с.
3. Томас, Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. / Т. Томас // М.: Мир, 1964. – 308 с.
4. Хилл, Р. Математическая теория пластичности. / Р. Хилл // М.: Изд-во. иностр. лит., 1956. – 529 с.
5. Хромов, А. И. Деформация и разрушение жесткопластических тел. / А. И. Хромов // Владивосток: Дальнаука, 1996. – 181 с.
6. Хромов А.И. Локализация пластических деформаций и разрушение идеальных жесткопластических тел / А. И. Хромов // Докл. РАН. – 1998. – Т 362.– №2. – С. 202-205.

**СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ И  
МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ**

*(Институт механики НАН Армении)*

Определение фундаментального решения для линейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами в окрестности характеристического коноида или по терминологии механиков, одномерного по нормали к волне линейного лучевого решения дано в [1-4]. Ничего другого в этой теории математиками не исследовалось. Для сплошных сред механиками даются более простые соотношения для лучевого решения [5-9]. Двумерное решение в окрестности точки касания распространяющейся волны с точечной волной, характерное в задачах дифракции акустических и оптических волн на клине и конусе в однородной среде [10-13], дано для произвольной гиперболической линейной системы уравнений с переменными коэффициентами в [14]. Однако, все эти линейные решения в окрестности точечной волны имеют особенность и непригодны. Для ее устранения Лайтхиллом и Уиземом [15,16] в одномерных задачах о цилиндрических и сферических нелинейных волнах был развит метод построения равномерно точного решения в окрестности волны с устранением особенности линейного решения, который в [17] был назван методом Пуанкаре-Лайтхилла-Го.

В [18] были выведены для указанных выше двумерных волновых задач уравнения коротких волн и даны их частные решения, выбором постоянных в которых с какой-то точностью удается удовлетворить условиям на слабых ударных волнах. Все эти решения относились к однородной сжимаемой жидкости. В [19,14] была дана для указанной задачи газовой динамики связь метода ПЛГ [17] и метода коротких волн [18], а затем и для общего случая квазилинейной гиперболической системы с переменными коэффициентами и построено нелинейное решение дифракционных задач в окрестности точек касания волн, сращиваемое с линейным решением, т.е. равномерно точное двумерное нелинейное решение. При этом оказалось, что это решение удовлетворяет с большой точностью условиям на ударных волнах [19,20]. Эти решения имеют приложения к газовой динамике, магнитной газодинамике, магнитоупругости. Уравнения коротких волн в газовой динамике [8], в физике именовались эволюционными уравнениями [21], разумеется, без взаимных ссылок. В [6,22] выведены для общего случая нелинейной вязкотермомагнитоупругой среды уравнения коротких волн. В [23] получены для осесимметричных квазимонохроматических гауссовских пучков решения уравнений модуляций, выведенные из указанных уравнений коротких волн или, иначе, эволюционных уравнений, причем эти решения обобщают известное решение нелинейной оптики, полученное в [24] для случая действительности коэффициента кубической нелинейности на случай его комплексности. В [25,26] выведены эволюционные уравнения в случае двух нелинейных квазимонохроматических волн и, обобщая идеи работ [27,28], показано, что можно складывать решения для отдельных волн и получать для них отдельные эволюционные уравнения. Эти

уравнения в случае магнитной газодинамики применены в [30] для излучения волн в магнитных звездах. Следует отметить, что, в отличие от земных условий, в пульсарах [30] имеют место большие магнитные поля, при этом скорость Альфвена соизмерима со скоростью света и вряд ли стандартные уравнения Максвелла применимы. В связи с этим, в [31] дан пример обобщения уравнений магнитной газодинамики на случай учета видоизмененного тока смещения, таким образом, что окончательные уравнения, также как и применяемые обычно уравнения магнитной газодинамики и магнитоупругости [6,30], были бы инвариантны относительно преобразования Галилея, что является естественным свойством нелинейных уравнений, по крайней мере, механики. В настоящей статье выводятся эти уравнения для аналогичной нелинейной задачи магнитоупругости. Далее они применяются к задачам об двух гауссовых пучках, распространяющихся в пульсарах, причем, в отличие от [30], для очень больших частот учтен также указанным образом ток смещения, Следует отметить, что для упругой нелинейной среды одномерные цилиндрические и сферические задачи с ударной волной изучены в [29,32].

1. Основным аргументом создания специальной теории относительности было положение о том, что линейные уравнения Максвелла инвариантны относительно более общих преобразований Лоренца в противоположность нелинейным уравнениям механики, которые инвариантны относительно более частных преобразований Галилея, и поэтому нужно приспособить уравнения механики к этим более общим преобразованиям, Следуя этой логике, нужно предпочитать общим нелинейным уравнениям гидромеханики, инвариантным относительно преобразований Галилея, полученное из них после линейризации для малых возмущений волновое уравнение, инвариантное относительно более общего преобразования Лоренца. Конечно же, никто не станет настаивать на это.м. Тогда возникает вопрос, не лучше ли вывести такие обобщения уравнений Максвелла, выведенных им для земных условий для относительно небольших электромагнитных полей по сравнению с огромной скоростью света, и написать нелинейные уравнения Максвелла, которые по аналогии с указанным примерам, удовлетворяют более частным, но более естественным преобразованиям Галилея. Между прочим, уравнениями такого типа являются уравнения магнитной гидродинамики или магнитоупругости [6], состоящие из уравнений Максвелла для движущейся среды [35,36]

$$\bar{D} = e\bar{E}, \text{rot}\bar{H} = \frac{4p}{c}\bar{j} + \frac{e}{c}\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}, \text{rot}\bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}, \bar{B} = \bar{H}, \quad (1.1)$$

где плотность тока связана с законом Ома

$$\bar{j} = s\bar{E}' = s\left(\bar{E} + \frac{\bar{v}\times\bar{B}}{c}\right) \quad (1.2)$$

совместно с уравнениями движения плазмы

$$r\frac{d\bar{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{\bar{j}\times\bar{B}}{c} \quad (1.3)$$

или магнитоупругой среды

$$r\frac{d\bar{v}}{dt} = \text{div}\Sigma + \frac{\bar{j}\times\bar{B}}{c}, \quad (1.4)$$

записанных в эйлеровых координатах,  $\Sigma$  есть эйлеров тензор напряжений. Для не очень быстро меняющихся во времени процессов или (что то же самое) не очень больших час-



тот,  $w \ll S$ , слагаемыми с током смещения в (1.1) можно пренебрегать и в результате исключения  $\bar{E}$  получится из (1.1), (1.2) уравнение индукции

$$\frac{d\bar{B}}{dt} = (\bar{B}\nabla)\bar{v} - \bar{B}div\bar{v} + \frac{c^2}{4ps}\Delta\bar{H}, \quad (1.5)$$

а вместо (1.4)

$$r\frac{d\bar{v}}{dt} = div\Sigma + \frac{rot\bar{H} \times \bar{B}}{4p}, \quad (1.6)$$

и соответственное уравнение из (1.3) при этом уравнения (1.8), (1.6) инвариантны относительно преобразования Галилея, где с той же степенью точности  $\bar{H}$  можно считать инвариантом. Эти уравнения, как магнитной гидродинамики, так и магнитоупругости успешно применялись во многих исследованиях волновых движений для случая плазмы в [30], а для магнитоупругой среды в [6], в первом случае, в применении к нелинейным волнам в пульсарах, где имеются большие частоты  $w$ , большие электропроводности  $S$  и большие магнитные поля, причем в [30] считалось  $w \ll S$  и пренебрегалось током смещения. В указанных условиях скорость Альфвена имеет порядок скорости света.

В случае  $w - S$ , например для магнитных звезд [30], где  $w \sim 10^{14} \frac{1}{сек}$ , мы имеем необходимость также учесть токи смещения в уравнениях магнитной гидродинамики и магнитоупругости, учесть нелинейность для рассматриваемых больших магнитных полей, т.е. написать нелинейные уравнения Максвелла. В качестве примера учета тока смещения в нелинейных уравнениях (1.1)-(1.4), которые должны быть видоизменены так, чтобы удовлетворять условию инвариантности относительно преобразований Галилея,

подобно (1.5), (1.6), мы можем заменить ток смещения в (1.1) на  $\frac{1}{c} \frac{d\bar{D}}{dt}$ ,  $\bar{D} = e\bar{E}'$ , где про-

изводная по времени берется для движущейся частицы. Тогда системы (1.1)-(1.4) снова будут инвариантны относительно преобразований Галилея, где  $\bar{E}'$  является параметром, который может быть исключен, подобно (1.5). С учетом исправленного тока смещения мы имеем уравнения движущейся электропроводящей среды в форме, исправленной указанным образом, системы (1.1)-(1.4), где  $\bar{D} = e\bar{E}'$ ,  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)$ . Чтобы упростить систему уравнений, можно сделать итерацию в первом уравнении

$$s\bar{E}' = \frac{c}{4p} rot\bar{H} - \frac{e}{4ps} \frac{d}{dt} \frac{c}{4p} rot\bar{H}. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в (1.2), получим уравнение индукции с учетом тока смещения

$$\frac{d\bar{B}}{dt} = (\bar{B}\nabla)\bar{v} - \bar{B}div\bar{v} + \frac{c^2}{4ps} \left(1 - \frac{e}{4ps} \frac{d}{dt}\right) \Delta\bar{H}, \quad (1.8)$$

где учтено, что  $div\bar{H} = 0$ ,  $rotrot\bar{H} = -\Delta\bar{H}$ .

Учитывая, что в распространяющихся волнах  $\frac{d}{dt} \sim w$ ,  $\nabla \sim \frac{w}{c_n}$ , где  $c_n$  есть скорость волны, из (1.8) можно получить порядки

$$w \sim S, v \sim c_n, c_n \sim c, E \sim H, a_1 \sim c, \quad (1.9)$$

где  $a_1 = \frac{H}{\sqrt{4\pi r}}$  есть скорость Альфвена. Очевидно, что те же порядки (1.9) будут иметь

место и для упрощенной системы уравнений

$$\text{rot}\bar{H} = \frac{4p}{c}\bar{s}\bar{E}' + \frac{e}{c}\frac{d\bar{E}'}{dt}, \quad \bar{E}' = \bar{E} + \frac{\bar{v}x\bar{B}}{c}, \quad (1.10)$$

$$\text{rot}\bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\bar{B}}{dt}, \quad \bar{j} = \bar{s}\bar{E}', \quad \bar{B} = \bar{H}, \quad (1.11)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{1}{r}\text{div}\bar{\Sigma} + \frac{1}{rc}\bar{j}x\bar{B}. \quad (1.12)$$

Система (1.10)-(1.12) описывает движение магнитоупругой среды в больших магнитных полях и с большими скоростями и упругими напряжениями, и инвариантна относительно преобразований Галилея. Такая же система для плазмы была выведена в [31]. Разумеется, ее следует рассматривать как пример возможного изменения уравнений Максвелла для движущихся сред при больших полях с учетом нелинейности, и эти уравнения инвариантны относительно преобразований Галилея.

1. Применим теперь полученные обобщенные уравнения магнитоупругой среды (1.10)-(1.12) к нелинейным волнам в магнитных звездах [5,6]. Для этого следует вывести нелинейные эволюционные уравнения магнитоупругой среды. Это можно сделать при произвольных ориентациях невозмущенного магнитного поля  $\bar{H}_0$  [30]. Выберем ось  $x$  по направлению распространения квазилинейной волны в слое  $0 < x < l$ , оси  $y, z$  перпендикулярны ей, причем для простоты считается для невозмущенного поля  $H_{0x} = 0, H_{0z} = 0, H_{0y} = H_0$ . Компоненты частиц по осям  $x, y, z$  будут обозначаться  $u_x, u_y, u_z$ . Записывая нелинейные уравнения движения термомагнитоупругой среды, считая возмущения параметров малыми, можно для нормальной скорости линейной волны получить уравнение подобно [6].

$$c_n^4 - c_n^2(\bar{a}^2 + b^2 + a_1^2) + (\bar{a}^2 - b^2)\frac{H_n^2}{4\pi\rho_0} + b^2(\bar{a}^2 + a_1^2) = 0, \quad (2.1)$$

где  $\bar{a}^2 = a^2 + \frac{g_0^2 T}{r_0^2 c_0}$ ,  $a, b$  – скорости упругих волн,  $T$  – температура,  $c_0$  – теплоемкость,

$g_0$  – термический коэффициент,  $\bar{a}_1^2 = \frac{H_0^2}{4\pi r_0}$ ,  $H_n = \frac{H_0 b}{a}$ ,

где  $(a, b, g)$  есть волновой вектор, причем

$$b \approx 0, \quad g \approx 0, \quad a \approx \frac{1}{c_{n_0}}, \quad c_{n_0} = \sqrt{\bar{a}^2 + a_1^2}.$$

Из (2.1) можно, учитывая, что  $a^2 + b^2 + g^2 = \frac{1}{c_{n_0}^2}$ , получить

$$\frac{\partial^2 a}{\partial b \partial g} = 0, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial g^2} = -c_{n_0}, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial b^2} = -c_{k_0} \left( 1 - \frac{a_1^2}{c_{n_0}^2} \frac{\bar{a}^2 - b^2}{\bar{a}^2 + a_1^2 - b^2} \right). \quad (2.2)$$

(2.2) представляют коэффициенты поперечного оператора [2] эволюционного уравнения

$$\bar{L} = c_{n_0} \left( \frac{\partial^2 a}{\partial b^2} \frac{\partial^2}{\partial g^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial g^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 a}{\partial b \partial g} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right). \quad (2.3)$$

Для квазимонохроматических волн в слое [25] можно и для нелинейного случая для высокочастотной асимптотики провести осреднение по фазам прямой и обратной волны [26], при этом получаются раздельные для них эволюционные уравнения [30]. Можно ввести быстрые переменные для волн

$$t_{1,2} = t'_{1,2} - t, \quad t'_{1,2} = \frac{l \pm x}{c_k}, \quad (2.4)$$

где  $t_{1,2}$  есть эйконалы волн,  $x=l$  есть граница слоя, на которой задано падающее возмущение в форме, нормальной к волне скорости частицы, в виде осесимметричного гауссового пучка с осью  $x$ . При  $x=0$  на правой границе звезды, свободной от напряжений, в основном порядке имеет место

$$u = v_x, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = u_1(t_1, y, z, t) + u_2(t_2, y, z, t). \quad (2.5)$$

Эволюционные уравнения будут для  $u_{1,2}$  раздельными [5,6,7]

$$\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t \partial t_{1,2}} - \frac{1}{2} \bar{L}(u_{1,2}) - \frac{\partial u_{1,2}}{\partial t_{1,2}} \frac{d \ln f}{dt} = - \frac{1}{c_k} \frac{\partial}{\partial t_{1,2}} \left( \Gamma u_{1,2} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial t_{1,2}} + D \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t_{1,2}^2} + E \frac{\partial^3 u_{1,2}}{\partial t_{1,2}^3} \right). \quad (2.6)$$

Для случая магнитоупругой среды в указанном начальном поле  $(0, H_0, 0)$  из уравнений движения и индукции в нелинейном случае можно получить [6] коэффициенты нелинейности, диссипации и дисперсии в (2.6)

$$\Gamma = \frac{3}{2} (c_{n_0}^2 - b^2) a_1^2 - \frac{1}{r_0} \left( A + 3B + C + \frac{3}{2} I + 3m \right) (c_{n_0}^2 - b^2) + \frac{c g_0 c_{n_0}^2}{2 r_0} (c_{n_0}^2 - b^2) - \frac{x'_0 c_{n_0}}{2} (c_{n_0}^2 - b^2), \quad (2.7)$$

$$\frac{c}{T} = - \frac{1}{c_0 c_{n_0}^2} \left( 2g_0 - n_1 + \frac{2n_3 T g_0}{c_0} + \frac{g_0^2}{c_0} \right) \quad (2.8)$$

$$x'_0 = 2 \left( \frac{g_0 - n_1}{c_{n_0}^2} \frac{g_0 T}{c_0} + n_3 \frac{g_0^2 T^2}{c_0 c_{n_0}^2} \right) c_{n_0} r_0.$$

$$2DD_1 = c_{n_0}^2 (c_{n_0}^2 - b^2) \frac{I^{(1)} + 2I^{(0)}}{r_0} + a_1^2 (c_{n_0}^2 - b^2) x_0 - k_1 \frac{T g_0^2}{r_0^2 c_0^2} (c_{n_0}^2 - b^2), \quad (2.9)$$

$$2ED_1 = \frac{T g_0^2}{c_n r_0^2 c_0^2} (c_{n_0}^2 - b^2) k_1 t_0 + a_1^2 x_0, \quad (2.10)$$

$$D_1 = c_{n_0}^2 (2c_{n_0}^2 - \bar{a}^2 - b^2 - a_1^2),$$

где скорости волн  $c_{n_0}, \bar{a}$  даны выше,  $I^{(1)}, I^{(0)}$  – коэффициенты вязкости,  $n_{1,3}, x'_0$  – термические коэффициенты,  $k_1$  – теплопроводность,  $t_0$  – термическая релаксация,  $c_0$  – тепло-

емкость,  $r_0$  – плотность,  $x_0 = \frac{c^2}{4\pi s}$  есть магнитная вязкость,  $c$  – скорость света,  $s$  – электропроводность, причем в (1.8) в главных порядках

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \frac{d}{dt} \right) \Delta \approx v_m \left( 1 + \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial t_{1,2}} \right) \frac{1}{c_{n_0}^2} \frac{\partial^2}{\partial t_{1,2}^2},$$

и тогда вклад от  $n_m$ , соответствующий учету тока смещения, отличается лишь множителем  $\frac{\partial}{\partial t_{1,2}}$  от вклада  $n_m$  в  $D$ , что учтено в (2.10).

1. Из соотношений на волне в основных порядках для возмущенных параметров имеет место [30] из (2.6)

$$v_y = 0, h_x = 0, v_z = 0, h_z = 0, h_y = \mathbf{m} \frac{H_y}{c_k} v_x, r' = \mathbf{m} \frac{r}{c_k} v_x, P' = c_s^2 r' \quad (3.1)$$

Согласно (3.1), все возмущенные величины выражаются через  $v_x = u$ , а последняя определяется из эволюционного уравнения (2.6), при этом коэффициенты  $\Gamma, D, E$  задаются формулами (2.7), (2.8). Согласно формулам (2.2), уравнения (2.6) не допускают простых осесимметричных решений в плоскости  $YZ$ , однако, если ввести новые переменные

$$y = \sqrt{-\frac{\partial^2 a}{\partial b^2} c_k} y', z = \sqrt{-\frac{\partial^2 a}{\partial g^2} c_k} z',$$

то по координатам  $y', z'$  уравнения (2.6) допускают осесимметричные решения по “радиальной” координате, эллиптические по форме поперечного сечения в координатах  $y, z$ , причем  $r^2 = y'^2 + z'^2$ . В этом случае уравнения (2.6) запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t \partial t_{1,2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial r} \right) - \frac{\partial u_{1,2}}{\partial t_{1,2}} \frac{d \ln \Phi}{dt} = \\ & = -\frac{1}{c_k} \frac{\partial}{\partial t_{1,2}} \left[ \Gamma u_{1,2} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial t} + D \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t_{1,2}^2} + E \frac{\partial^3 u_{1,2}}{\partial t_{1,2}^3} \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Всюду  $\Phi$  означает линейное одномерное по координатам  $t_{1,2}$  лучевое решение, которое для задачи магнитоупругости можно получить из закона сохранения энергии возмущений в волне [2].

Ищем решение уравнений (3.2) в виде квазимонохроматических и квазиплоских волн:

$$u_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ U_{1,2} e^{iJ_{1,2} - n\omega^2 t'_{1,2}} + V_{1,2} e^{2iJ_{1,2} - 2n\omega^2 t'_{1,2}} + k.c. \right], \quad (3.3)$$

где  $U_{1,2}$  и  $V_{1,2}$  – амплитуды первой и второй гармоники соответственно,  $J_{1,2} = \omega t_{1,2} - \omega' t$ ,  $\omega$  – основная частота волн,  $\omega'$  – модулированная частота,  $n$  – затухание. Подставляя (3.2) в (3.2), можно получить:

$$\omega' = -\frac{1}{c_n} E \omega^3, n = -\frac{1}{c_n} D. \quad (3.4)$$

Уравнение для амплитуд второй гармоники, при предположении  $\frac{wl}{c_k} \gg 1$ , дает выражение, связывающее  $V_{1,2}$  с  $U_{1,2}$ . Исключив  $V_{1,2}$  из уравнения для первой гармоники, получим нелинейное уравнение Шредингера для определения амплитуд  $U_{1,2}$  первой гармоники:

$$i\omega \left( \frac{\partial U_{1,2}}{\partial t} + c_n \frac{\partial U_{1,2}}{\partial t'_{1,2}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U_{1,2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{1,2}}{\partial r} \right) - U_{1,2} i\omega c_n \frac{d \ln \Phi}{dt'_{1,2}} = (k_1 + ik_2) |U_{1,2}|^2 U_{1,2}, \quad (3.5)$$

где

$$k_1 = 3Ew^2 x, \quad k_2 = wDx, \quad x = \frac{1}{8c_n} \frac{\Gamma^2 e^{-2nw^2 t'_{1,2}}}{9E^2 w^2 + D^2}. \quad (3.6)$$

Для уравнений (3.6) стационарные решения, удовлетворяющие условию  $\frac{\partial U_{1,2}}{\partial t} = 0$ , устанавливаются тогда, когда энергия возмущений, подаваемая на левой границе  $x=l$ , слоя, затрачивается на диссипацию и излучение электромагнитных волн с правого конца этого слоя. При поиске стационарных решений для простоты также предположим, что  $\frac{\partial \ln \Phi}{\partial t} = 0$ . Как граничное условие для искомого решения на левой границе  $x=l$  выберем функцию  $v_{x_1} = U_1$  для идущей направо волны в виде гауссовского пучка:

$$U_1 = K_0 e^{-\frac{r^2}{r_0^2}} e^{-i\omega t} e^{i\frac{r^2}{2R_1(0)}}, \quad (3.7)$$

осесимметричного по  $r$  и эллиптического по  $y, z$ . Здесь  $R_1(0)w c_n$  - есть радиус кривизны поверхности левого торца слоя. Тогда решения можно написать в виде:

$$U_{1,2} = A_{1,2} e^{ij_{1,2}},$$

где

$$A_{1,2} = \frac{b_{1,2}}{f_{1,2}(t'_{1,2})} e^{-\frac{r^2}{2r_0^2 f_{1,2}^2(t'_{1,2})}}, \quad j_{1,2} = s(t'_{1,2}) + \frac{r^2}{2R_{1,2}(t'_{1,2})}. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в (3.5), приравняв члены с  $r^0, r^2$  и действительные и мнимые части, можно получить уравнения для безразмерных радиусов пучков  $f_{1,2}$ , радиуса кривизны волн, и фаз  $s_{1,2}$ :

$$\frac{d^2 f_{1,2}}{dt_{1,2}'^2} = \frac{x_1}{f_{1,2}^3} + \frac{2nb_{1,2}^2 k_2 w}{f_{1,2}} c_n, \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{f_{1,2}} \frac{df_{1,2}}{dt_{1,2}'} = -\frac{1}{w} \left( -\frac{1}{R_{1,2}} + k_2 \frac{b_{1,2}^2}{f_{1,2}^2} \right) \quad (3.10)$$

$$\frac{dS}{dt'_{1,2}} = -\frac{c_n}{w} \left( \frac{2}{r_0^2 f_{1,2}^2 c_n} + k_1 \frac{b_{1,2}^2}{f_{1,2}^2} \right) \quad (3.11)$$

где

$$x_1 = \frac{1}{r_0^4 w^2} + \frac{2b_{1,2}^2 k_1}{r_0^2 w^2} - \frac{b_{1,2}^4 k_2^2}{w^2}. \quad (3.12)$$

Граничные условия (3.7) при  $x=l$  и  $t'_1=0$  дают начальные условия для уравнения (3.9) написанное для функции  $f_1$ :

$$f_1(0)=1, \quad \frac{df_1(0)}{dt'_1} = F = -\frac{1}{w} \left( -\frac{1}{R_1(0)} + k_2 b_1^2 \right),$$

где можно считать  $b_1 = K_0$ . Считая далее диссипацию малой, можно в уравнении (3.9) отбросить второе слагаемое в правой части и считать  $k_1$  и  $k_2$  постоянными. Тогда уравнение (3.9) интегрируется и получаем:

$$f_1^2 = \frac{x_1}{K} + K \left( t'_1 + \frac{F}{K} \right)^2, \quad (3.13)$$

где  $K = x_1 + F^2$ . Для нахождения окончательных решений необходимо задать граничное условие на правом торце слоя. Естественным условием будет требование свободной границы на поверхности звезды, т.е. при  $x=0$ ,  $p'=0$ ,  $s \approx x=0$ . Это условие в силу уравнений в основном порядке [2] при  $x=0$  дает

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \text{ и } U_1 = -U_2. \quad (3.14)$$

Согласно (3.8)–(3.11), условие (3.14) выполняется при требовании:

$$b_1 = -b_2, \quad f_2 \left( \frac{l}{c_k} \right) = f_1 \left( \frac{l}{c_k} \right) \frac{df_2}{dt'_2} = \frac{df_1}{dt'_1}, \quad j_1 = j_2. \quad (3.15)$$

Здесь  $l$  – продольная длина рассматриваемого слоя. Можно решить уравнение для  $f_2$  (3.9) при условиях (3.15). Решение (3.13) для  $f_{1,2}$  имеет место и для импульсных пучков, для которых

$$\frac{\partial U_{1,2}}{\partial t} + \frac{\partial U_{1,2}}{\partial t'_{1,2}} = \frac{\partial U_{1,2}}{\partial t'_{1,2}} \Big|_{t_{1,2}}$$

т.е. стационарное решение в системе движущейся с волной. При этом  $K_0$  есть функция времени  $t$ .

Полученные нами решения позволяют определить интересующие нас физические параметры на правой границе слоя, т.е. при  $x=0$  или  $t' = \frac{l}{c_n}$ . Легко видеть, что в основ-

ных порядках  $s_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = h_y = 0$ , откуда следует:

$$v_x = \operatorname{Re} V_x, \quad j_z = -\frac{c}{4p} \frac{\partial h_y}{\partial x} = \operatorname{Re} J_z, \quad (3.16)$$

где

$$|V_x| = \frac{2b_1 c_n}{f\left(\frac{l}{c_n}\right)} \exp\left\{-\frac{wn^2 l}{c_n} - \frac{r^2}{2r_0^2 f^2\left(\frac{l}{c_n}\right)}\right\}, \quad (3.17)$$

$$|J_x| = \frac{c}{4p} \frac{2b_1 w H_y}{c_n^2 f\left(\frac{l}{c_n}\right)} \exp\left\{-\frac{wn^2 l}{c_n} - \frac{r^2}{2r_0^2 f^2\left(\frac{l}{c_n}\right)}\right\}. \quad (3.18)$$

Отметим, что для  $\frac{w}{S} \sim 1$  в (3.6) члены  $E^2 w^2$  и  $D^2$  одного порядка и учет тока смешения существеннее в (3.3), (3.4) и далее. Как видно из (3.17), (3.18), полученные выражения для  $|V_x|$  и  $|J_x|$  зависят от значения амплитуды возбуждения магнитного поля на внутренней границе нейтронной звезды  $h_y$ , выражаемой через  $b_1$  по (3.1), где  $b_1 = K_0$ .

Приведенные здесь эволюционные уравнения, а также и соответствующие уравнения для нелинейных волн [6], можно распространить и на волновые задачи в экономике многомерных случайных марковских диффузионных процессов [34], где в линейных уравнениях для переходной плотности вероятности  $P$  можно в коэффициенте сноса  $\mathcal{A}$  добавить слагаемое  $P$ , что проделано в §5. Дадим вывод уравнения диффузии для функции распределения частиц разного сорта в сплошной среде при слабых взаимодействиях [37] с добавлением в линейное уравнение по аналогии с нелинейными уравнениями сплошной среды §2 дисперсионного члена и нелинейности.

1. Уравнения диффузии для функции распределения играют важную роль при изучении движения плазмы [37], магнитоупругой среды, смесей газа в облаке или двухфазных пористых сред в грунтах.

В системах с большим числом частиц разного сорта в физической кинетике рассматривается случай непрерывного взаимодействия, т.е. взаимодействие данного сорта частиц не между собой, а с дальними частицами другого сорта, или, в плазме, взаимодействие между заряженными частицами [37,38] посредством далекодействующих кулоновых сил. Направление движения частиц меняется в основном непрерывно, тесные сближения играют лишь второстепенную роль. Поведение функции распределения в приближении непрерывного взаимодействия выводится вначале в линейном приближении Фоккера-Планка с добавлением членов с третьей производной, где аргументы  $f$  есть компоненты координат и скорости частиц  $\{x_a\}$ . Пусть функция распределения  $f$  зависит от набора величин  $x_a$ , совокупность которых будем обозначать символом  $x$ , и от времени  $t$ , и пусть  $v(x', x, \Delta t)$  есть вероятность перехода системы из состояния  $x'$  в состояние  $x$  за время  $\Delta t$ . Тогда  $f$  удовлетворяет интегральному уравнению [37]:

$$f(x, t + \Delta t) = \int f(x', t) v(x', x, \Delta t) dx'. \quad (4.1)$$

Это уравнение можно преобразовать в дифференциальное уравнение, считая

$$\Delta x = x' - x \quad (4.2)$$

малым, причем  $v$  достаточно быстро спадает с возрастанием  $\Delta x$ . Рассматривается простейший случай, когда  $v$  зависит от  $x', x$  посредством  $\Delta x$ . При этом после разложения (4.1) в ряд получится:

$$\begin{aligned} f(x, t + \Delta t) = & f(x, t) + \sum_a \frac{\partial f}{\partial x_a} \overline{\Delta x_a} + \frac{1}{2} \sum_{a,b} \frac{\partial^2 f}{\partial x_a \partial x_b} \overline{\Delta x_a \Delta x_b} + \\ & + \frac{1}{6} \sum_{a,b,z} \frac{\partial^3 f}{\partial x_a \partial x_b \partial x_z} \overline{\Delta x_a \Delta x_b \Delta x_z}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\int v(\Delta x, \Delta t) d\Delta x = 1, \quad (4.4)$$

$$\int v(\Delta x, \Delta t) \Delta x_a d\Delta x = \overline{\Delta x_a},$$

$$\int v(\Delta x, \Delta t) \Delta x_a \Delta x_b d\Delta x = \overline{\Delta x_a \Delta x_b}, \quad (4.5)$$

$$\int v(\Delta x, \Delta t) \Delta x_a \Delta x_b \Delta x_z d\Delta x = \overline{\Delta x_a \Delta x_b \Delta x_z}. \quad (4.6)$$

В этих интегралах под  $d\Delta x$  подразумевается интервал изменения всего набора  $\Delta x$ , т.е. произведение их дифференциалов (4.4), (4.5), (4.6) есть обычные определения средних значений. Из (4.3), после замены  $f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t$  получится

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & \sum_a \frac{\partial f}{\partial x_a} \frac{\overline{\Delta x_a}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sum_{a,b} \frac{\partial^2 f}{\partial x_a \partial x_b} \frac{\overline{\Delta x_a \Delta x_b}}{\Delta t} + \\ & + \frac{1}{6} \sum_{a,b,z} \frac{\partial^3 f}{\partial x_a \partial x_b \partial x_z} \frac{\overline{\Delta x_a \Delta x_b \Delta x_z}}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Отношения

$$A_a = -\frac{\overline{\Delta x_a}}{\Delta t}, \quad B_{ab} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\Delta x_a \Delta x_b}}{\Delta t}, \quad (4.8)$$

$$C_{abz} = \frac{1}{6} \frac{\overline{\Delta x_a \Delta x_b \Delta x_z}}{\Delta t}, \quad (4.9)$$

являются коэффициентами сноса, диффузии и дисперсии. В выбранном приближении относительно  $v$  они независимы от  $x$ . Удобно (4.7) записать в форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_a \frac{\partial A_a f}{\partial x_a} - \sum_a \sum_b B_{ab} \frac{\partial^2 f}{\partial x_a \partial x_b} - \sum_a \sum_b \sum_z C_{abz} \frac{\partial^3 f}{\partial x_a \partial x_b \partial x_z} = 0. \quad (4.7a)$$

Можно такое же уравнение получить [37] и для общего случая зависимости  $v(x, \Delta x, \Delta t)$ . Коэффициенты  $A_a, B_{ab}, C_{abz}$  являются детерминированными и постоянными



ми. Коэффициенты  $A_a$  соответствуют скорости волнового движения [37]. Рассмотрим случай, когда  $f$  зависит только от цилиндрических координат  $x, r$  и времени, т.е. уравнение диффузии в пространстве при наличии осевой симметрии. При этом можно рассматривать в основном одномерное движение по  $x$  со слабой зависимостью от  $r$ , или пучок [23]. Тогда можно в (4.7а) считать  $A_1 = -a_0, A_2 = 0, A_3 \approx 0$ , где  $a_0$  есть скорость волны для функции  $f$ , равная средней скорости частицы [37,38], и, вводя, как в §2, эйконал  $t = t - \frac{x}{a_0}$ , причем  $t$  мало,  $\left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \gg \left| \frac{\partial}{\partial x} \right|_t$ , можно получить упрощенное уравнение вблизи волн:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a_0 \frac{\partial f}{\partial x} + B \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) + C \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} = 0, \quad (4.10)$$

где учтено, что  $B_{11} = B_{22} = B_{33} = -B$ ,  $\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_t = -\frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $-\frac{C_{111}}{a_0^3} = C$ . В линейном уравнении (4.10) можно ввести малые возмущения  $f' = f - f_0$ , где в качестве  $f_0(t, x)$  берется решение упрощенного уравнения линейной диффузии без члена  $C$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + a_0 \frac{\partial f_0}{\partial x} + B \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} = 0 \quad (4.11)$$

которое удовлетворяется гауссовским распределением в виде

$$f_0(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2pBt}} \exp \left\{ -\frac{(x - a_0 t)^2}{2Bt} \right\}, \quad (4.12)$$

причем из (4.4), (4.9) записанных в одномерном виде [34]

$$\frac{1}{\Delta t} \int v(\Delta x, \Delta t) \Delta x d\Delta x = -A_1$$

можно, полагая для вероятности  $v$  гауссовского распределения

$$v(\Delta x, \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2pB\Delta t}} \exp \left\{ -\frac{(\Delta x - a_0 \Delta t)^2}{2B\Delta t} \right\}, \quad (4.13)$$

получить [34]  $A_1 = -a_0$ , т.е.  $a_0$  есть скорость волны или коэффициент сноса для  $f$ .

Для малых возмущений  $f'$  приближенно снова выполнено (4.10). Можно в процессах взаимодействия частиц считать, что в основном непрерывные рассматриваемые взаимодействия могут возмущаться и малыми близкими взаимодействиями, влияние которых, по аналогии с эволюционными уравнениями газовой динамики и теории упругости [6] в волновой области можно учесть зависимостью коэффициента сноса  $A_a$  от  $f'$  и записать после дифференцирования (4.10) по  $t$ ,

$$a_0 \left. \frac{\partial^2 f'}{\partial t \partial x} \right|_t - \frac{B}{a_0^2} \left. \frac{\partial^3 f'}{\partial t^3} \right|_t + B \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 f'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f'}{\partial r} \right) + C \frac{\partial^4 f'}{\partial t^4} - \frac{g}{a_0} \frac{\partial}{\partial t} f' \left. \frac{\partial f'}{\partial t} \right|_t = 0, \quad (4.14)$$

где, аналогично нелинейным уравнениям §2, добавлено последнее слагаемое, постоянная  $g$  должна определиться экспериментами. Уравнение (4.14) есть в точности эволюционное уравнение работ [6,23] и §2 с заменой, нормальной к волне скорости частиц в [6], на

$a_0 + \gamma f'$  и с другими обозначениями коэффициентов. Оно может решаться для одной или двух нелинейных квазимонохроматических волн с определением узких пучков, как в §2. Подобные же рассуждения можно провести для взаимодействующих частиц твердых двух фаз в том числе и для упругопластических смесей [40].

1. Рассматриваются с помощью аналогии из соответствующих волновых задач нелинейной механики сплошной среды [6,39,29] различные нестационарные задачи о движении объектов, моделируемых сплошными средами. Вначале проводится исследование этих задач применением метода [39], где изучается движение транспорта, рассматриваемое как детерминистический поток частиц, с образованием ударной волны или затора. Методами [29] дается расчет ударных волн. Затем эти результаты распространяются на задачи о случайных процессах методами дифференциальных уравнений для плотности вероятности перехода, как функции времени и искомого параметра процесса, для марковских диффузионных процессов, причем указанные линейные уравнения, введенные Релем, Фоккером-Эйнштейном-Планком и А. Н. Колмогоровым обобщены с учетом нелинейного слагаемого, как и в соответствующих волновых задачах [39,6] с коэффициентом, характеризующем среднюю скорость эволюции искомой случайной величины. Введенные нелинейные нестационарные уравнения решаются методами [29,19] с расчетом ударных волн или скачков функции распределения вероятности перехода процесса.

В настоящем параграфе рассматриваются модельные задачи:

1) Имеется некоторый ряд дискретных объектов, на которых имеется сосредоточение продуктов. Как и в [39], где рассматривается движение машин на шоссе, заменим дискретное распределение непрерывным, причем в дальнейшем будет рассматриваться одномерная по  $x$  задача, зависящая от времени, где в качестве оси  $x$  бралось шоссе, предполагается, что имеется некоторая, в общем случае кривая линия, отождествляемая с осью  $x$ , на которой непрерывно распределен указанный продукт с плотностью  $r(x,t)$ , представляющей количество продукта на единицу длины. Причем имеет место его передвижение по  $x$  зависящее от времени  $t$ . Можно ввести помимо плотности, также поток  $j(x,t)$  продукта, выражаемый количеством продукта, проходящим через точку  $x$  в единицу времени, при этом  $j = rv$ , где  $v$  – есть скорость движения продуктов. Принимается, что  $j = j(r)$ , которая должна определяться экспериментально, причем измерение  $r$  достаточно для двух, а  $j$  для одного магазина в течении выбранного временного интервала. Считается, что каждая частица, или в непрерывном подходе, их плотность, влияет на скорость движения потока транспорта, причем чем больше плотность  $r$ , тем, вообще говоря, должна быть меньше скорость, но плотность потока продуктов  $rv$  может при этом быть больше. Таким образом, считается  $j'(r) > 0$ , а знак  $j''(r)$  должен быть выяснен из опыта. Этот опыт можно проводить для одного или двух базовых помещений, т.е. при  $x=0$ , наблюдая, как от количества продукта в нем, т.е. от плотности  $r$  зависит их поток.

2) Помимо первого примера, можно рассмотреть подобную же задачу о движении продуктов в рамках еврынка, где изучается движение некоторого продукта из базовой в отношении его количества страны, причем берется непрерывное распределение продукта вдоль линии, а между остальными странами также имеется движение продукта.

3) Те же детерминированные процессы движения ценных бумаг от некоторой базовой организации с их наибольшим количеством в другие центры, и движение этих частиц

между ними самими. Далее рассмотрена эта задача также и в рамках теории случайных процессов.

В качестве характерного примера можно привести задачи теории массового обслуживания, в том числе компьютерные сети и системы передачи информации. Можно рассматривать [41] открытые сети и однопоточковые случаи, обозначая через  $j$  поток или в задачах о массовом обслуживании интенсивность обслуживания заявок в данном месте. При этом в детерминированном подходе можно в качестве оси  $x$  брать линию вдоль распределенных систем обслуживания или линию для передачи информации. Во всех случаях функция  $j = j(r)$ , как и в [1], считается известной. Кроме того более важными для информатики [41] считаются стохастические задачи о движении информации в сети и соответствующие задачи массового обслуживания. Вводятся случайная функция  $x$  от времени в данной системе, представляющая количество заявок или информации, а также вероятность перехода от начальных значений параметра времени  $s$  и  $x$  к конечным  $t$  и  $y$ , обозначаемая  $p(s, x, t, y)$ , для которой в случае марковских диффузионных процессов выводятся уравнения §3.

В задаче о движении продуктов на линии, можно сделать те же предположения, что и в [39] и считать функцию  $j(r)$  для данной области известной из опыта.

Тогда можно записать уравнение сохранения

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \quad (5.1)$$

отсюда для  $r$  получится нелинейное уравнение

$$\frac{\partial r}{\partial t} + j'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = 0. \quad (5.2)$$

Решение уравнения (5.2) известно, и имеет вид уравнений характеристик, вдоль которых  $r$  постоянно

$$\frac{dx}{dt} = j'(r), \quad r = const. \quad (5.3)$$

Интегрируя (5.3), можно получить

$$x = x_0 + j'(r)t, \quad (5.4)$$

причем эти прямые характеристики, несущие постоянные значения  $r$ , могут пересекаться, приводя к многозначности и образованию ударной волны.

В общем случае произвольных по величине изменений  $r$  можно изучить решение (5.3), (5.4) и показать, при каких условиях характеристики пересекаются, т.е. образуется неоднозначность решения (в точке их пересечения имеется несколько значений  $r$  несомых каждой прямой), что как известно из газовой динамики приводит к образованию разрыва, отсекающего область неоднозначности. В [39] это явление называется пробкой.

Аналогичные исследования можно перенести на задачи экономики, в частности на задачу образования затора движения продуктов.

Ограничиваясь для конкретности случаем  $r_0(x_0) = r_1$ ,  $r_1 = const$ , и малых возмущений, можно для них полагать  $r' = r - r_1$ . Тогда уравнение (5.2), с учетом малых порядка  $r'^2$ , запишется в виде

$$\begin{aligned}
j'(r) &= j'(r_1) + j''(r_1)r', \\
\frac{\partial r'}{\partial t} + a_0 \frac{\partial r'}{\partial x} + gr' \frac{\partial r'}{\partial x} &= 0, \\
a_0 &= j'(r_1), \quad g = j''(r_1)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

где  $a_0$  есть постоянная линейная скорость возмущений,  $g$  – постоянный нелинейный коэффициент.

Вводя переменную, связанную с волной

$$t = t - \frac{x}{a_0}, \tag{5.6}$$

можно (5.5) записать в стандартном виде

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_x &= \frac{\partial}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_t = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_t - \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial t}, \\
\frac{\partial r'}{\partial x} - \frac{g}{a_0^2} r' \frac{\partial r'}{\partial t} &= 0,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

где производная по  $x$  берется уже при постоянном  $t$ , и в последнем нелинейной члене оставлено основное по порядку слагаемое с учетом того, что  $t$  в окрестности волны мало,  $x$  не мало, тогда  $\frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial t} \gg \frac{\partial}{\partial x}$ . Решение (5.7) аналогично (5.4) имеет вид [29]

$$-dt = \frac{g}{a_0^2} r' dx, \quad r' = const \tag{5.8}$$

или, после интегрирования

$$t + \frac{g}{a_0^2} r' x = f(r'), \tag{5.9}$$

где  $f$  есть произвольная функция.

Решение (5.9) можно, обозначая  $f(r') = y_1$ ,  $r' = F(y_1)$ , записать

$$t - \frac{x}{a_0} + \frac{gx}{a_0^2} F(y_1) = y_1, \tag{5.10}$$

где  $y_1$  есть уравнение нелинейных характеристик. После пересечения характеристик в точке А образуется ударная волна АВ. Условие на ударной волне, впереди которой  $r' = 0$ , а позади имеется некоторое значение  $r'$ , получается из (5.9), если искать стационарное решение (5.5) в виде  $r' = r'(x)$ ,  $x = x - Vt$ , где  $V = \frac{dx}{dt}$  есть скорость ударной волны.

Проводя выкладки работы [29], можно получить

$$V = a_0 + \frac{g}{2} r'. \tag{5.11}$$

Подставляя (5.10) в (5.11), можно на ударной волне [29] получить

$$F^2(y_1) = \frac{2a_0^2}{gx} \int_0^{y_1} F(y'_1) dy'_1. \tag{5.12}$$

При 1).  $F(y_1)j''(r_1) < 0$  решение (5.12) будет лишь при  $F(y_1) = 0$ , т.е. имеется отсутствие ударной волны с самого начала, а при 2)  $F(y_1)j''(r_1) > 0$  ударная волна.

Случай 1) будет при  $j''(r_1) < 0$ ,  $F(y_1) > 0$ , т.е. когда плотность товаров растет вдоль линии, точнее при  $x > 0$ , больше, чем в первом пункте  $x = 0$ , характеристики, начинаются на оси  $t$ , расходятся, и ударной волны нет.

При 2).  $F(y_1) < 0$ ,  $j''(r_1) < 0$  будет уменьшение плотности по сравнению с ее значением  $r_1$  при  $x = 0$  и образуется ударная волна, т.е. затор товаров, начиная с первого объекта. Полагая, что начальная плотность  $r = r_1$  при  $t = 0$  постоянна, а на первом объекте плотность меняется по формуле  $x = 0$ ,  $F(t) = r_2 - r_1 + A\sqrt{t}$ ,  $r_2 > r_1$ ,  $A < 0$  можно из (5.12) на ударной волне получить, интегрируя,

$$(r_2 - r_1 + A\sqrt{y_1})^2 = \frac{2a_0^2}{gx} \left\{ (r_2 - r_1)y_1 + \frac{2}{3}Ay_1^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (5.13)$$

откуда, задавая числа  $r_{1,2}$ ,  $A$ ,  $g$ ,  $a_0$ , можно решением кубического уравнения для  $y_1^{\frac{1}{2}}$ , численно найти  $y_1$  в функции  $x$ , затем определить  $r' = F(y_1)$ , а по (5.10) найти ударную волну.

В частном случае  $r_2 = r_1$ , из (5.13) получится

$$y_1^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4a_0^2} Agx, \quad r' = \frac{3A^2gx}{4a_0^2},$$

а уравнение ударной волны по (5.10) будет

$$t - \frac{x}{a_0} + \frac{3A^2g^2x^2}{16a_0^4} = 0, \quad g < 0.$$

Численный расчет корня  $\sqrt{y_1}$  по (5.13) для значений  $r_1 = 100$ ,  $r_2 = 110$ ,  $A = -15$ ,  $a_0 = 10$ ,  $g = 1$ , а также  $r = A\sqrt{y_1}$  и  $t$  согласно (5.10) дает таблицу 1. Ударная волна, как и в случае  $r_1 = r_2$ , образуется в начальной точке  $x = 0$ ,  $t = 0$  и расположена впереди характеристики  $x = a_0t$ .

Таблица 1

$x$	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
$\sqrt{y_1}$	0.0487377	0.0662364	0.0788699	0.0890548	0.0977097
$v'$	0.191877	0.188961	0.186855	0.185158	0.183715
$t$	0.022619	0.0450496	0.0674035	0.0897119	0.11199

Приведем исследование той же нелинейной задачи для случайных марковских диффузионных процессов.

Рассматривается случайная функция  $x = x(t)$ , представляющая марковский процесс, т.е. переход системы в  $x(t)$  из состояния  $x(s)$ ,  $t > s$  при фиксированном  $x(s) = x$ , процесс не зависит от  $x(u)$ ,  $u \leq s$ .

Плотность вероятности перехода от состояния  $(s, x)$  к текущему  $(t, y)$  называется переходной вероятностью по  $y$   $p(s, x, t, y)$ .

Для нее имеет место нелинейное уравнение Колмогорова-Чемпена [34] или Смолюховского [36]

$$p(s, x, t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s, x, u, z) p(u, z, t, y) dz. \quad (5.14)$$

Вначале рассмотрим простейший диффузионный процесс. Пусть частица в момент времени  $N\Delta t$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) скачет на шаг  $\Delta x = a$  вправо или влево с вероятностями  $p$  и  $1 - p$ . В момент  $t = N\Delta t$  или  $x = ma$ , считая, что при  $t = 0$ ,  $x = 0$ , введем вероятность перехода за  $N$  шагов  $p(N\Delta t, ma | 0, 0) \equiv p_{N,m}$ . Частица может попасть при  $N$  шаге в точку  $x = ma$ , при условии, что на  $N - 1$  шаге она оказалась в  $(m - 1)a$  или в  $(m + 1)a$ , из первого положения с вероятностью  $p$ , из второго с вероятностью  $q = 1 - p$ . По формуле полной вероятности  $p_{N,m} = pp_{N-1,m-1} + qp_{N-1,m+1}$ . Получим уравнение марковского перехода для данной задачи, причем можно обозначить  $v(t, x)a = p_{N,m}$ , тогда  $v(t, x)a = pv(t - \Delta t, x - a) + qv(t - \Delta t, x + a)$ . Разложим теперь  $v$  по  $\Delta t$  и  $a = \Delta x$  и учтем  $p + q = 1$

$$-\frac{\partial v}{\partial t} \Delta t - (p - q) \frac{\partial v}{\partial x} a + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{a^2}{2} + (p - q) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} a \Delta t + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2} = 0. \quad (A_1)$$

Разделим на  $\Delta t$ , устремим  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $p - q \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow 0$  и обозначим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(p - q)a}{\Delta t} = A, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a^2}{\Delta t} = B, \quad (B_1)$$

$a \sim (\Delta t)^{\frac{1}{2}}$ ,  $p - q \sim (\Delta t)^{\frac{1}{2}}$ , тогда из (A<sub>1</sub>) в основном порядке следует уравнение для плотности вероятности перехода  $v(t, x)$  в  $(t, x)$  [36]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -A \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (C_1)$$

полученное Релеем. Начальное условие, что при  $t = 0$  должно быть достоверно  $x = 0$ , дает

$$v(0, x) = d(x), \quad (D_1)$$

где  $d(x)$  есть дельта-функция. Этим условием определено решение уравнения (C<sub>1</sub>) в виде гауссовской функции

$$v_0(t, x(0, 0)) = \frac{1}{\sqrt{2pBt}} \exp \left\{ -\frac{(x - At)^2}{2Bt} \right\} \quad (E_1)$$

Соотношения (B<sub>1</sub>) дают для  $A$  в (C<sub>1</sub>) среднюю скорость блуждания частицы влево и вправо, которую можно, как и в задаче для волн в сплошной среде [29], обобщать на учет

нелинейности, т.е. добавления в  $A$  малого слагаемого  $cv'$ , причем заменяется  $A$  на  $A'$ ,  $v'(t, x|0,0) = v(t, x|0,0) - v_0(t, x|0,0)$ ,  $v_0$  удовлетворяет  $(C_1)$ , а  $v'$  удовлетворяет обобщенному на учет, по аналогии с [29] нелинейности, уравнению

$$A' = A + cv', \quad \frac{\partial v'}{\partial t} = -A \frac{\partial v'}{\partial x} - cv' \frac{\partial v'}{\partial x} - cv' \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} \quad (F_1)$$

Здесь  $c$  – постоянная, определяемая из опыта,  $\frac{\partial v_0}{\partial x}$  дается  $(E_1)$  и при определенных предположениях его можно отбросить, тогда обобщение уравнения  $(C_1)$  Релея на нелинейный случай будет

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -A \frac{\partial v'}{\partial x} - cv' \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} \quad (G_1)$$

Кстати, это уравнение можно постулировать и без  $(F_1)$ , как обобщение  $(C_1)$  на нелинейной случай.

Рассмотрим общий случай диффузионного процесса.

В [34,36] получены из (5.14) линеаризованные уравнения для  $p$  в предположении малости возмущения во времени, т.е.  $u - s$ , кроме того предположено, что и  $z - x$  мало. Вводится для  $x(t)$  малое приращение

$$x(s + \Delta t) = x(s) + a\{s, x(s)\}\Delta t + s\{s, x(s)\}\Delta h, \quad (5.15)$$

где  $\Delta h$  есть белый шум. Величина  $a(s, x)$  характеризует среднюю тенденцию к эволюции случайного процесса  $x(s)$  за малый промежуток времени от  $s$  до  $s + \Delta t$  при условии, что  $x(s) = x$  и называется коэффициентом сноса [34].

В уравнении (3.1) можно считать произвольный момент времени  $u$  близким к  $t$  или  $s$ , и кроме того предполагать соответственно  $z \approx x$  или  $z \approx y$ . Вводя во втором случае некоторые коэффициенты сноса  $a$  и диффузии в [34]

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x|<\epsilon} (z-x)p(s, x, s + \Delta t, z) dz = a(s, x), \quad (5.16)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x|<\epsilon} (z-x)^2 p(s, x, s + \Delta t, z) dz = b(s, x),$$

и проводя линеаризацию в (3.1) относительно начального состояния  $s, x$ , можно получить обратное уравнение Коломогорова для  $p(s, x, t, y)$

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = a \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (5.17)$$

и, проводя, ту же процедуру вблизи  $t, y$ , – прямое уравнение Колмогорова или уравнение Фоккера-Эйнштейна

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \{a(t, y)p(s, x, t, y)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{b(t, y)p(s, x, t, y)\}. \quad (5.18)$$

Следует отметить, что, хотя и коэффициент  $a(x, t)$ , согласно определению (5.16) является осреднением от плотности  $p$ , и в этом смысле детерминистический, но, можно

в ряде процессов вводить в него слагаемое, связанное с вероятностью процесса, однако с нулевым средним.

Уравнение (5.18), после умножения на  $y$  и интегрирования по  $y$  от  $-\infty$  по  $\infty$  дает для условной средней величины [36] уравнения

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} yp(s, x, t, y) dy, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = a(t, y).$$

Считая  $a(t, y) = a_0 = const$ , можно получить

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = a_0, \quad \bar{y} = a_0 t,$$

т.е.  $a_0$  есть скорость распространения условной средней функции. Можно, конечно, подобно ( $F_1$ ), добавить нелинейный член в  $a_0$ .

В случае гауссовского процесса для разности  $y - x$ , можно считать

$$p_0(s, x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{2ps^2(t-s)}} e^{-\frac{(y-x-a_0\Delta t)^2}{2s^2(t-s)}}, \quad \Delta t = t - s, \quad (5.19)$$

и из (5.16) следует

$$b = s^2, \quad a = a_0, \quad (5.20)$$

при этом коэффициенты (5.17), (5.18) постоянные, причем  $a_0$ , как и в механике есть скорость волнового движения по  $x, t$ . Вообще говоря, можно считать, что уравнения (5.17), (5.18) нелинейны, в том смысле, как было сказано выше,  $a = x'(s)$  в (3.2) могут считаться зависящими от вероятности процесса  $p$ , пусть даже в виде соотношения, взятого из (3.3) в узком интервале  $(s, x)$ ,  $(u, z)$ . Кроме того эти коэффициенты, как и в соответствующих уравнениях для волн в газовой динамике и теории упругости, можно определять из опыта и аналогично указанным работам в слабонелинейном случае полагать, что в (5.17)

$$a(s, x) \rightarrow a_0 + cp', \quad (5.21)$$

где выбрано  $p' = p - p_0$ , постоянная  $c$  может быть определена из непосредственно опыта над  $x(t)$ , даваемой (5.15) или путем сравнения окончательных формул решения §2 с опытными данными. Первое слагаемое в (5.21) непосредственно следует из (5.16), (5.19) а второе соответствует замене интеграла по малой области неким средним значением, хотя как было сказано, более естественно его просто вводить согласно (5.21). Тогда из (5.17), (5.21) для избыточной по сравнению с гауссовским распределением плотности вероятности  $p'$  получится

$$-\frac{\partial p'}{\partial s} = a_0 \frac{\partial p'}{\partial x} + cp' \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}, \quad (5.22)$$

где  $a_0, c$  можно, в частности, считать постоянными. Заменяя обозначение  $s$  на  $t$  и отбрасывая последний диффузионный член, можно видеть, что (5.22) совпадает с точностью до обозначений с уравнением (5.5) для волнового движения и полученные там решения можно использовать для задачи настоящего параграфа по определению вероятности  $p(s, x, t, y)$  от исходного состояния  $(s, x)$  в конечном  $(t, y)$ , по аналогии с волновыми уравнениями сплошной среды §2 дополняются нелинейным слагаемым в скорости дви-



жения волны вероятности, пропорциональным возмущенной величине плотности переходной вероятности  $p'$ , коэффициент  $c$  при которой должен определяться экспериментально. Тогда решения §5, включая более общие решения диффузионной задачи, могут быть использованы для решения практически важных экономических задач. В частности, задачи динамики ценных бумаг, в которых ранее решалась для частного, по сравнению с линейными уравнениями §5, линейного уравнения задачи блэк-шок при заданных начальных и граничных условиях, для которой нелинейный аналог, развитый в данной статье, позволяет решить задачу определения времени разрыва плотности вероятности  $p$  распределения количества бумаг, как функции их характерного параметра  $x$  или определения ударной волны вероятности. Возможно, более практичными будут задачи о колебательных движениях экономики, которые могут рассматриваться методами нелинейных квазимонохроматических волн §3.

Можно также учесть и диффузионное слагаемое с коэффициентом  $b$ , и помимо решения (5.9) найти также методами газовой динамики и нелинейной теории упругости [25] решения уравнения (5.22).

Для этого вводится переменная  $t = t - \frac{x}{a_0}$ ,  $s = t$ , и как и в (5.7) получается

$$\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{c}{a_0^2} p' \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{b}{a_0^3} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (5.23)$$

Как было сказано, при  $b=0$  (5.23) аналогично (5.7) с решением ударных волн. В общем случае в (5.23) можно заменить

$$p' = -\frac{b}{a_0 c} \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (5.24)$$

и (5.23) примет известный вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} = d_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad d_1 = -\frac{b}{2a_0^3}. \quad (5.25)$$

Задавая начальные условия для  $p'(x, t)$  в виде  $p'(x, 0) = 0$ , а граничное условие:  $t > 0$ ,  $p' = v(0, t)$ , можно из (5.24) получить

$$U(x, 0) = 1, \quad U(0, t) = e^{-\int_0^t \frac{a_0 c}{b} v(0, t) dt}$$

и решение уравнения для  $U$  при указанных условиях будет [19,29]

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{pd_1 x}} \int_0^t e^{-\frac{(x-t)^2}{4d_1 x}} U(0, x) dx + \frac{2}{\sqrt{p}} \int_{\frac{t}{2\sqrt{d_1 x}}}^{\infty} e^{-u^2} du. \quad (5.26)$$

Тогда можно, формулируя указанную задачу для данного состояния найти  $p'(t, y)$  при фиксированных  $s, x$ . При  $d_1 \rightarrow 0$  из (5.24), (5.25) методом стационарной фазы получится

$$p'(x, t) = v(x), \quad x = t + \frac{c}{a_0^2} v(x)x,$$

которое совпадает с решением (5.9) для ударных волн.

г. Ереван

Поступила: 17 октября 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Hadamard J.* Le probleme de Cauchy / Hadamard J.- Paris, 1932.
2. *Курант Ф.* Уравнения с частными производными / Ф. Курант. – М.: Мир, 1965.
3. *Лере Ж.* Задача Коши / Ж. Лере, Л. Гординг, Т. Котаке. – М.: Мир, 1967.
4. *Бабич В.М.* Фундаментальные решения гиперболических уравнений с переменными коэффициентами / В.М. Бабич // *Мат. Сб.* Т. 52 (94) N2, 1969.
5. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн / В. М. Бабич. – Л. 1961. т. V стр. 36-46.
6. *Багдоев А. Г.* Распространение волн в сплошных средах / А. Г. Багдоев. – Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1981, 303с.
7. *Bretherton F. P.* Wavetrains in inhomogeneous moving media / F. P. Bretherton, C.I. Garret // *Proceed. Roy. Soc. A.*02.1968. p. 529-554.
8. *Шефтер Г. М.* О влиянии вязкости и теплопроводности на распространение звуковых импульсов в неоднородной движущейся среде / Г. М. Шефтер // *ПММ.* т. 21.11.N1, 1969.
9. *Минасян М. М.* О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике / М. М. Минасян // *ДАН Арм. ССР,* т. IV N5, 1972.
10. *Sommerfeld A.* Mathematische Theorie der diffraction / A. Sommerfeld // *Math Ann.* 47. 1896. p. 317-374.
11. *Фридлиндер Ф.* Звуковые импульсы / Ф. Фридлиндер. – М.: Издательство ИЛ, 1962.
12. *Боровиков В. А.* Дифракция на многоугольниках и многогранниках / В.А. Боровиков. – М.: Наука, 1966.
13. *Сагомонян А. Я.* Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости / А.Я. Сагомонян, В.Б. Поручиков. – Издательство Московского Университета, 1970.
14. *Багдоев А. Г.* Исследование движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке / А.Г. Багдоев, З.Н. Даноян // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* Т. 12. N6, 1972.
15. *Lighthill M. J.* Shok's strength in supersonic conical fields / M. J. Lighthill // *Phylosophical magazine* V40. 1949.
16. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны / Дж. Б. Уизем // М. "Мир", 1977.
17. *Цзянь Сюэ-Сень* Метод Пуанкаре-Лайтхилла-Го / Цзянь Сюэ-Сень // *Проблемы механики.* М. 1959. вып.2, с. 7-62
18. *Гриб А. А.* Теория коротких волн / А. А. Гриб, О. С. Рыжов, С. А. Христианович // *ПМТФ.* N1 1960.
19. *Багдоев А. Г.* Некоторые нелинейные задачи движения сжимаемой жидкости / А.Г. Багдоев // *Изд. АН Арм. ССР, Ереван,* 1967.
20. *Zahalak G. I.* Conical flow near singular rays / G. I. Zahalak, M. K. Myers // *Journal of Fluid mechanics* v 64, N3, 1974.
21. *Заболотская Е. А.* Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков / Е. А. Заболотская, Р.В.Хохлов // *Акустический журнал* т. 15, N1, 1969.
22. *Багдоев А. Г.* Уравнения нелинейной вязкотермомагнитоупругой среды вблизи фронтов волн / А. Г. Багдоев // *Изв. АН Арм ССР Механика* т. XXVII, N1, 1974.
23. *Багдоев А. В.* Трехмерные нелинейные волны в пьезоэлектриках и пьезополупроводниках / А. В. Багдоев, А. В. Шекоян // *Изв. АН Арм ССР, Механика* т. 34. N4, 1981. с. 3-15.
24. *Ахманов С. А.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде / С. А. Ахманов, А. П. Сухо-руков, Р. В. Хохлов // *УФН* 1967 т. 93. N1.
25. *Bagdоеv A. G.* The derivation of evolutions equations in the presence of two waves in continuous media / A. G. Bagdоеv, S. G. Sahakyan // *Information Technologies and management,* 2001, N4, p. 122-131.
26. *Bagdоеv A. G.* Wave beams in viscoelastic dispersive nonlinear initiality deformed medium with free surface / A.G. Bagdоеv, A.V. Shekoyan // *Int J. Nonlinear Mechanics,* v. 32, N2, 1997, p. 385-392.
27. *Hunter J. K.* Weakly nonlinear high frequency waves / J. K. Hunter, J. B. Keller // *Commun on Pure Appl. Math,* 36, 1983, p. 547.

28. *Carbonaro P.* High frequency waves in quasylinear invisid gasodynamics / P. Carbonaro // ZAMP, 1986, 37, p 43.
29. *Багдоев А. Г.* К вопросу определения ударной волны в нелинейных задачах теории упругости / А.Г. Багдоев, Л.А. Мовсисян // Изв. АН Арм. ССР Механика 1968, т. XXI, N3, с. 19-24.
30. *Багдоев А. Г.* Волновые пучки в плазме в поперечном магнитном поле / А. Г.Багдоев, Д. М. Седракян // астрофизика, 2001, т. 44, с. 139-147.
31. *Bagdоеv A. G.* Generalized nonlinear equations of magnetohydrodynamics / A. G. Bagdоеv, A. V. Shekoyan // Доклады НАН РА, т. 106, 2006, N4, с.27-33
32. *Герасименко Е. А.* Лучевые разложения в изучении закономерностей распространения неплоских ударных волн / Е.А. Герасименко, В.Е. Рагозина // Вестник СамГУ Механика, 2006. N6, с. 94-113.
33. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества / И. Е. Тамм. – М.: Наука, 1966. – 624с.
34. *Розанов Ю. А.* Случайные процессы / Ю. А. Розанов. – М.: Наука, 1979. – 184с.
35. *Прохоров Ю. В.* Теория вероятностей / Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. – М.: Наука. 1967. – 496с.
36. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику / С. М. Рытов. – Ч. I М.: Наука. 1976. – 494с.
37. *Франк-Каменецкий* Лекции по физике плазмы / Франк-Каменецкий. – п М.: Атоиздат. 1964. – 283с.
38. *Саттон Дж.* Основы технической магнитной газодинамики / Дж. Саттон, А. Шерман. – Изд. М.: Мир, 1968. – 492с.
39. *Lighthill M. J.* On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads. / M. J. Lighthill, G. B. Whitham // Proc. Roy. Soc. A. 1955. V. 229. N1178, P. 281-345.
40. *Ивлев Д. Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – М.:Наука, 1971. – 231с.
41. *Жоржикашвили В. А.* Сети массового обслуживания, теория и применения к сетям / В. А. Жоржикашвили, В.М. Вишневецкий. – ЭВМ. М.: Радио и связь. 1988. – 251с.

*Бажин А. А., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Мурашкин Е. В.*

**О ВОЗМОЖНОМ РЕОЛОГИЧЕСКОМ МЕХАНИЗМЕ ПОВЫШЕНИЯ  
ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ МЕТАЛЛОИЗДЕЛИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ  
ИНТЕНСИВНЫХ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ НАГРУЗОК ПО ТИПУ «НАГРУЗКА-  
РАЗГРУЗКА»**

*(Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН)*

В реальном металлоизделии всегда содержатся микронеоднородности, в том числе и дефекты сплошности (микропоры и микротрещины). Наличие таких микронеоднородностей в материале во многом определяет длительную прочность изделий, так как подобные дефекты сплошности при эксплуатационных нагрузках по типу «нагрузка-разгрузка» могут развиваться. В этом случае говорят о росте поврежденности материала. С другой стороны, возможен и обратный эффект [1], когда за счет интенсивных внешних воздействий дефекты сплошности «залечиваются». В данном случае речь идет о повышении усталостной прочности изделий.

Малые размеры дефектов уже при умеренных внешних нагрузках приводят к пластическому течению материала в их окрестностях и к возникновению внутренних остаточных напряжений, которые также существенно влияют на длительную прочность изделий. При этом хотя бы необратимые деформации в окрестностях дефектов сплошности считать малыми нельзя.

В рамках математической модели больших упругопластических деформаций [2] ранее [3] был установлен эффект «приспособляемости» идеального упругопластического материала с одиночным дефектом сплошности к циклическим нагрузкам по типу «нагрузка-разгрузка». Этот эффект заключается в том, что при достижении нагружающим усилием одной и той же величины при нагрузке, в условиях разгрузки геометрия дефекта, уровень и распределение в его окрестности остаточных напряжений остаются неизменными по завершении каждого цикла. Очевидно, что выход из такой парадоксальной ситуации связан с учетом вязких свойств материала. При этом такой учет в условиях пластического течения материала в окрестности дефекта сплошности с необходимостью приведет к его развитию (росту повреждаемости). Когда же вязкие свойства проявляются на стадиях, предваряющих пластическое течение или при разгрузке, может, как будет показано ниже, происходить обратный эффект, то есть дефект сплошности может «залечиваться». Интересным может оказаться и предельный случай, когда все необратимые деформации связываются с проявлением вязких свойств материалов; иначе, относятся к деформациям ползучести. Настоящая статья посвящена именно случаю, когда учет вязких свойств материала может приводить к «залечиванию» микродефектов сплошности.

Рассмотрение проведем в рамках модели больших упругопластических деформаций [2], основные кинематические соотношения которой в прямоугольной декартовой системе пространственных (эйлеровых) координат  $x_i$  могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned}
\frac{De_{ij}}{Dt} &= e_{ij} - e_{ij}^p - \frac{1}{2} \left( (e_{ik} - e_{ik}^p + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(e_{kj} - e_{kj}^p - z_{kj}) \right), \\
\frac{Dp_{ij}}{Dt} &= e_{ij}^p - p_{ik}e_{kj}^p - e_{ik}^p p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\
e_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_m u_{i,m}, \\
r_{ij} &= w_{ij} + z_{ij}(e_{ij}, e_{ij}), \quad w_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}), \\
d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}.
\end{aligned} \tag{1}$$

В соотношениях (1)  $u_i, v_i$  – компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды;  $e_{ij}$  и  $p_{ij}$  – обратимая (упругая) и необратимая (пластическая) составляющие тензора полных деформаций Альманси  $d_{ij}$ ;  $D/Dt$  – объективная производная тензоров по времени; источник  $e_{ij}^p$  в уравнении изменения тензора  $p_{ij}$  – тензор скоростей пластических деформаций,  $z_{ij} = -z_{ji}$  – нелинейная часть тензора вращений  $r_{ij}$ , полностью выписанная в [2], определяющая его отличие от тензора жесткого вращения  $w_{ij}$ . Согласно уравнениям (1), при разгрузке ( $e_{ij}^p = 0$ ) компоненты тензора необратимых деформаций  $p_{ij}$  изменяются как при жестком перемещении тела.

Следуя формализму неравновесной термодинамики, напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями, и для рассматриваемого случая несжимаемой среды данные зависимости записываются в виде

$$\begin{aligned}
s_{ij} &= -pd_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(d_{kj} - 2d_{kj}), \quad p_{ij} \equiv 0, \\
s_{ij} &= -p_1 d_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(d_{kj} - e_{kj}), \quad p_{ij} \neq 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

В соотношениях (2)  $p, p_1$  – добавочные гидростатические давления,  $W$  – упругий потенциал, который для изотропной среды принимается в форме

$$\begin{aligned}
W &= (a - m)J_1 + aJ_2 + bJ_1^2 - kJ_1J_2 - qJ_1^3 + \dots, \\
J_k &= \begin{cases} L_k, & p_{ij} = 0 \\ I_k, & p_{ij} \neq 0 \end{cases}, \quad L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki},
\end{aligned} \tag{3}$$

$$I_1 = e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \quad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns}.$$

Здесь  $a, m, b, k, q$  – упругие модули среды.

Принимаем, что необратимые деформации в материале начинают накапливаться с выходом напряженного состояния на поверхность нагружения  $f(s_{ij}) = 0$ , которая в условиях принимаемого принципа максимума Мизеса является пластическим потенциалом.

Напряжения в этом случае связаны со скоростями необратимых деформаций ассоциированным законом пластического течения.

В рамках описанной выше модели больших упругопластических деформаций были решены задачи о поведении границ микродефектов (микротрещин и микропор) в идеальной упругопластической среде в условиях эксплуатационных нагрузок по типу «нагрузка-разгрузка» [3]. Приведем полученные результаты на примере микротрещины. (Для микропоры качественных отличий нет).

Так как воздействие создается на поверхности, значительно по сравнению с размерами микротрещины удаленной от нее, то по всей длине микротрещины, исключая малые окрестности ее концов, деформирование считаем одномерным. Тогда границу дефекта сплошности полагаем круговой цилиндрической поверхностью начального радиуса  $r_0$ , а процесс деформирования связан с краевыми условиями

$$s_{rr}|_{r=R(t)} = -p(t), \quad s_{rr}|_{r=s(t)} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $R(t) \gg r_0$  – радиус цилиндрической поверхности, на которой задается внешнее давление  $p(t)$ ,  $s(t)$  – текущий радиус границы микротрещины,  $s_{rr}$  – компонента тензора напряжений в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ .

Кинематика среды, согласно принятому условию несжимаемости, определяется с точностью до неизвестной функции  $j(t)$ :

$$u_r = r - (r^2 + j(t))^{1/2}, \quad j(t) = R_0^2 - R^2(t) = r_0^2 - s^2(t), \quad (5)$$

где  $u = u_r$  – единственная не равная нулю компонента вектора перемещений.

Вначале решается задача упругого равновесия в качестве начального условия для последующего процесса пластического течения. Из условия выхода напряженного состояния на границе дефекта на поверхность нагружения (условие пластичности Треска)

$$s_{rr} - s_{\varphi\varphi} = 2k \quad (6)$$

определяются необходимый уровень нагружающего давления  $p = p_0$  и соответствующий ему размер дефекта  $r = s_0$ . При этом в условиях такого предельного равновесия  $j(t) = R_0^2 - R^2 = r_0^2 - s_0^2 = const$ .

Последующий процесс пластического течения протекает при  $t \geq 0$  и связан с возрастанием нагружающего давления. Компоненты тензора напряжений находятся интегрированием уравнения движения в двух областях:  $s(t) \leq r \leq m(t)$ , где осуществляется пластическое течение и  $m(t) \leq r \leq R(t)$ , где деформирование обратимо. Граница пластической области  $m(t)$ , как и функция  $j(t)$ , определяется из условия равенства компонент напряжений на упругопластической границе. При этом для  $j(t)$  следует обыкновенное дифференциальное уравнение. Распределение компонент напряжений (здесь и далее

$s_{rr} \rightarrow \frac{s_{rr}}{m}$  – сплошная,  $s_{\varphi\varphi} \rightarrow \frac{s_{\varphi\varphi}}{m}$  – штриховая линия) в зависимости от радиуса  $r \rightarrow \frac{r}{R_0}$

в некоторый момент нагружения  $t = t_1$  приведено на рис. 1.

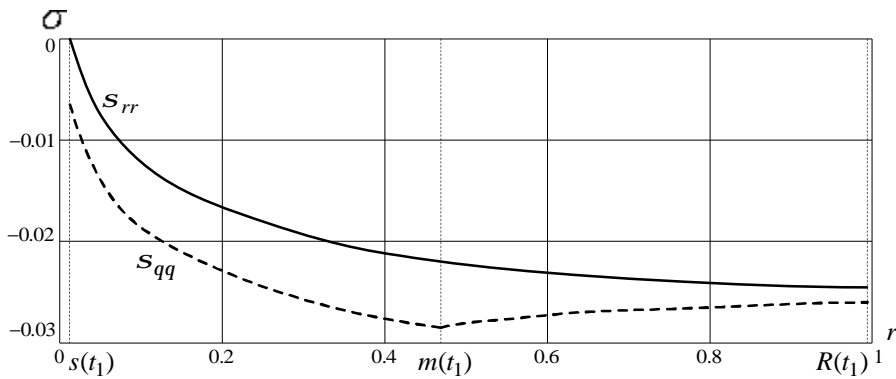


Рис. 1. Распределение напряжений в конечный момент нагрузки.

Задачи разгрузки связаны с уменьшением достигнутого со временем уровня давления  $p = p_1$  до нуля и решены в двух случаях:  $p_1 < p_1^*$ ,  $p_1 \geq p_1^*$ . Наличие порогового значения  $p = p_1^*$  связано с различием в постановке задач. Оказывается, что при  $p_1 \geq p_1^*$  напряженное состояние на границе дефекта в процессе разгрузки выходит на поверхность нагружения  $s_{rr} - s_{jj} = -2k$  и возникает новая область пластического течения. Поэтому, если в первом случае для нахождения компонент напряжений уравнение равновесия необходимо проинтегрировать в двух областях:  $s(t) \leq r \leq m(t)$  и  $m(t) \leq r \leq R(t)$ , то во втором случае – в трех:  $s(t) \leq r \leq q(t)$ ,  $q(t) \leq r \leq m(t)$  и  $m(t) \leq r \leq R(t)$ , где  $q(t)$  – граница области пластического течения при разгрузке (области повторного пластического течения [4]). Распределения компонент остаточных напряжений приведены на рис. 2 и 3 при  $p_1 < p_1^*$  и  $p_1 \geq p_1^*$  соответственно. Остаточные напряжения на рис. 3 соответствуют моменту нагружения, приведенному на рис. 1.

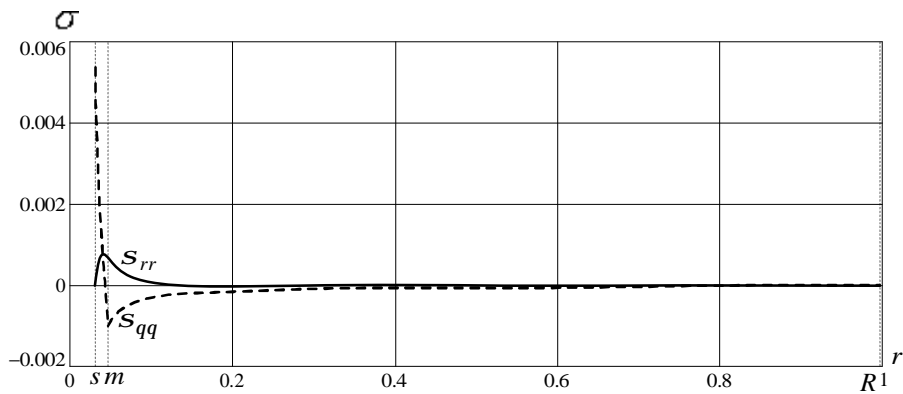


Рис. 2. Распределение остаточных напряжений при  $p_1 < p_1^*$ .

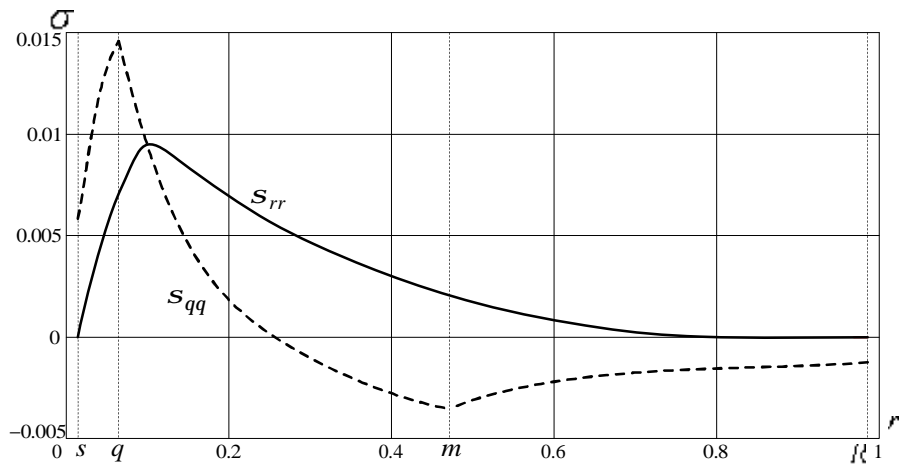


Рис. 3. Распределение остаточных напряжений при  $p_1 \geq p_1^*$ .

Далее была решена о повторном нагружении упругопластического материала с дефектом сплошности с заданным уровнем и распределении остаточных напряжений (приведенных на рис. 3) и деформаций. Этапы решения такой задачи те же, что и ранее, когда среда полагалась недеформированной, учитывается лишь присутствие накопленных необратимых и обратимых деформаций и остаточных напряжений. Если, начиная с некоторого значения нагружающего давления, при котором осуществляется новое упругое равновесие, продолжать его увеличивать со временем, то от границы дефекта развивается новая область пластического течения. Однако, при достижении нагружающим давлением значения  $p = p_1$ , распределение напряжений в теле оказывается точно равным распределению, приведенному на рис. 1. То же касается размера дефекта и деформаций. Очевидно, что разгрузка из данного состояния приводит к распределению остаточных напряжений, представленных на рис. 3 (или на рис. 2 при  $p_1 < p_1^*$ ). Не изменяется и размер дефекта. Такой эффект был назван эффектом приспособляемости идеального упругопластического материала к эксплуатационным нагрузкам по типу «нагрузка - разгрузка» [3]. Для того, чтобы увеличить уровень необратимых деформаций или, что то же, уменьшить радиус дефекта сплошности, следует увеличить внешнее давление по сравнению с первоначально достигнутому значению  $p_1$ .

Очевидно, что для выявления механизма, ответственного за «залечивание» или развитие дефекта, необходимо учитывать реологические свойства материалов. Для этой цели задача о поведении границы микротрещины была решена при учете вязких свойств среды на стадии деформирования, предваряющей пластическое течение, или на стадии разгрузки [5]. В качестве основных модельных соотношений использовались зависимости

$$t_{ij} + x_1 \frac{Dt_{ij}}{Dt} = 2m_{ij} + 2x_2 e_{ij}, \quad (7)$$

$$t_{ij} = s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} d_{ij}, \quad q_{ij} = d_{ij} - \frac{1}{3} d_{kk} d_{ij},$$



$$\frac{Dt_{ij}}{Dt} = \frac{dt_{ij}}{dt} - w_{ik}t_{kj} + t_{ik}w_{kj}$$

на стадии когда пластические свойства еще не проявляются. Для областей с накопленными необратимыми деформациями зависимости (7) переписываются в виде

$$t_{ij} + x_1 \frac{Dt_{ij}}{Dt} = 2ml_{ij} + 2x_2 e_{ij}, \quad (8)$$

$$l_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2} e_{is} e_{sj} - \frac{1}{3} e_{kk} d_{ij} + \frac{1}{6} e_{sk} e_{ks} d_{ij}.$$

В соотношениях (7) и (8)  $x_1, x_2$  – постоянные материала. Постановка задачи и ее кинематика (5) остается такой же, как для идеальной упругопластической среды. Для определения компонент напряжений во всем процессе деформирования необходимо нахождение функции  $j(t)$  в задачах вязкоупругого деформирования до достижения функцией  $p(t)$  значения  $p_0 = p(t_0)$ , о пластическом течении в окрестности дефекта при увеличении внешнего давления и о разгрузке. Рассмотрен общий случай, когда при разгрузке возникает повторное пластическое течение.

Определяющие соотношения в областях обратимого деформирования (7) и в области с накопленными необратимыми деформациями (8) представляют собой системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент девиатора напряжений  $t_{rr}(r, t)$ ,  $t_{qq}(r, t)$  и функции  $j(t)$ . Для преобразования таких систем были введены новые переменные

$$t_{rr} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(t)}{n! r^{2n}}, \quad t_{qq} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(t)}{n! r^{2n}} \quad \text{при } p_{ij} = 0, \quad (9)$$

$$t_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n(t)}{n! r^{2n}}, \quad t_{qq} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_n(t)}{n! r^{2n}} \quad \text{при } p_{ij} \neq 0. \quad (10)$$

В рядах (9), (10)  $a_n(t)$ ,  $b_n(t)$ ,  $z_n(t)$ ,  $w_n(t)$  – неизвестные функции. Введение новых переменных в виде (9), (10) связано с тем, что величину  $(1+jr^{-2})^{-1}$  в правых частях зависимостей (7) и (8) можно рассматривать в качестве суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$(1+jr^{-2})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-j r^{-2})^n.$$

Подстановка переменных (9), (10) в определяющие законы (5), (6) и равенство коэффициентов при одинаковых степенях  $r$  приводят к бесконечным рекуррентным системам обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций времени  $a_n(t)$ ,  $b_n(t)$ ,  $z_n(t)$ ,  $w_n(t)$  и  $j(t)$ . На каждом этапе решения задачи дифференциальное уравнение, следующее из уравнения движения среды и условий равенства компонент напряжений на упругопластической границе  $m(t)$  и границе области повторного пластического течения  $q(t)$ , дополняется системой для коэффициентов  $a_n(t)$ ,  $b_n(t)$  в области обратимого деформирования и  $z_n(t)$ ,  $w_n(t)$  в области с накопленными необратимыми деформациями. Численные расчеты показывают, что разность между пятыми и шестыми членами рассматриваемых рядов составляет  $10^{-7}$ . Поэтому в рядах при расчетах достаточно брать

шесть слагаемых.

Остановимся на некоторых результатах проведенных вычислений. В сравнении со случаем идеальной пластичности при нагрузке значительных отличий в размерах дефекта и в распределении напряжений не наблюдается. Однако, в конечный момент разгрузки при одинаковых параметрах начала процесса разгрузки размер дефекта оказывается почти в два раза меньше для рассмотренного случая вязкоупругопластической среды. На рис.

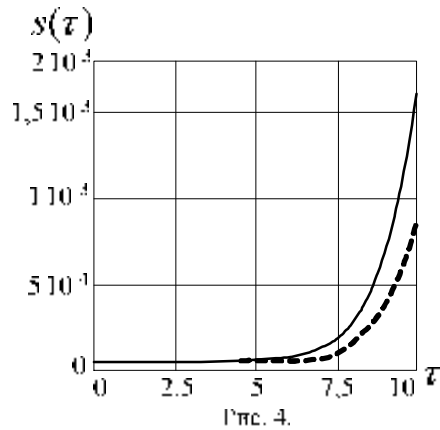


Рис. 4.

4 показаны закономерности изменения радиуса  $s(t) \rightarrow s(t)/R_0$  дефекта в зависимости от безразмерного времени  $t$ . Моменту окончания процесса разгрузки ( $s_{rr}(R) = 0$ ) соответствует  $t = 10$ . Сплошная линия соответствует случаю идеальной упругопластической среды, штриховая – вязкоупругопластической.

Отличие в уровне и распределении остаточных напряжений показано на рис. 5. Заметим, что при выборе определяющих законов в форме простейших тензорно-линейных соотношений (7) и (8) релаксации напряжений не происходит ни в процессе разгрузки, ни после его завершения. Выбор таких соотношений был обусловлен возможностью

сравнения со случаем идеальной пластичности.

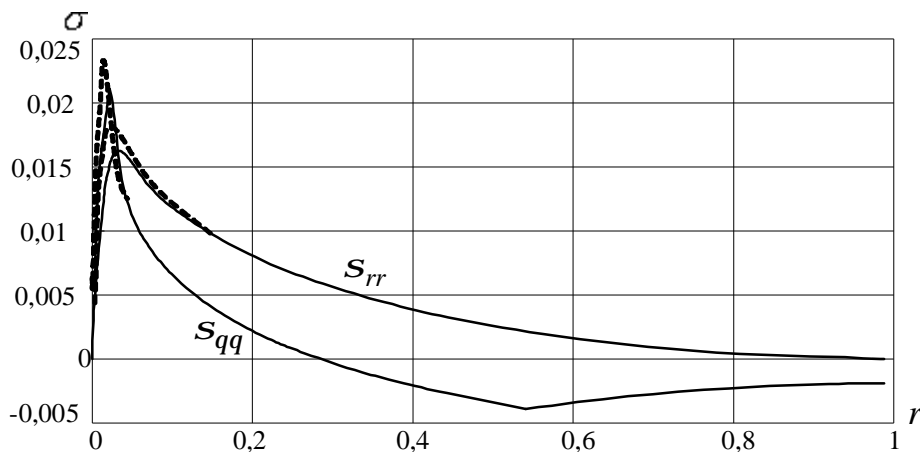


Рис. 5. Распределение остаточных напряжений.

Для изучения релаксации напряжений возникает необходимость использования более сильного степенного закона ползучести. Отнесем все необратимые деформации в модели больших упругопластических деформаций, основные кинематические соотношения которой заданы зависимостями (1), к деформациям ползучести:

$$e_{ij}^v = p_{ij}.$$

Тогда во всем процессе деформирования напряжения связаны с обратимыми деформациями соотношениями (2) (вторая зависимость) и (3). Принимаем, что с тензором

скоростей необратимых деформаций компоненты тензора напряжений связаны законом ползучести Нортона

$$\mathbf{e}_{ij}^p = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{s}_{ij}}, \quad V(\Sigma) = B\Sigma^n, \\ \Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s})^2 + (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s})^2 + (\mathbf{s}_3 - \mathbf{s})^2 \right)^{1/2}, \quad \mathbf{s} = \frac{1}{3} \mathbf{s}_{ii} \quad (11)$$

Здесь  $B$  и  $n$  – заданные постоянные,  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$  – главные значения тензора напряжений.

Исследуем изменение границы одиночного сферического дефекта сплошности в условиях гидростатического сжатия и процесс релаксации напряжений при разгрузке в рамках предложенной модели процесса неустановившейся ползучести.

Рассмотрим шар начального радиуса  $R_0$  с одиночным сферическим дефектом сплошности (микропора) начального радиуса  $r_0$  в центре шара. Процесс деформирования задается краевыми условиями (4), в которых  $\mathbf{s}_{rr}$  – компонента тензора напряжений в сферической системе координат  $r, j, q$ .

Как и ранее, кинематика несжимаемой среды определяется с точностью до неизвестной функции  $j(t)$ :

$$u_r = r - \sqrt[3]{r^3 + j(t)}, \quad j(t) = R_0^3 - R^3(t) = r_0^3 - s^3(t). \quad (12)$$

Согласно формулам (2) и (3), компоненты напряжений с точностью до неизвестной функции добавочного гидростатического давления вычисляются зависимостями

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{rr} = & -P + g_1 e_{rr} - g_2 e_{rr}^2 - g_3 e_{rr} e_{qq} + g_4 e_{rr}^3 + g_5 e_{rr} e_{qq}^2 + g_6 e_{rr}^2 e_{qq} - g_7 e_{rr}^4 + \\ & + g_8 \left( e_{rr} e_{qq}^4 - 4e_{rr} e_{qq}^3 + 2e_{rr}^2 e_{qq}^3 - \frac{1}{2} e_{rr}^2 e_{qq}^4 \right) - g_9 e_{rr}^2 e_{qq}^2 + g_{10} \left( 3e_{rr}^5 - \frac{1}{2} e_{rr}^6 \right) + \\ & + 2g_{11} \left( e_{rr}^4 e_{qq} + 2e_{rr}^3 e_{qq}^2 - 4e_{rr}^3 e_{qq} - \frac{1}{2} e_{rr}^4 e_{qq}^2 \right) \\ \mathbf{s}_{qq} = & -P + g_1 e_{qq} - g_{12} e_{qq}^2 - \frac{1}{2} g_3 e_{rr} e_{qq} + g_{13} e_{qq}^3 + g_{18} \left( e_{qq}^5 - \frac{1}{6} e_{qq}^6 \right) + \\ & + g_{11} \left( \frac{1}{4} e_{rr}^4 e_{qq}^2 - 2e_{rr}^3 e_{qq} + \frac{1}{2} e_{rr}^4 e_{qq} - e_{rr}^3 e_{qq}^2 \right) + g_{15} e_{rr} e_{qq}^2 - g_{16} e_{qq}^4 + \\ & + g_{14} e_{rr}^2 e_{qq} - g_{17} e_{rr}^2 e_{qq}^2 + g_8 \left( 2e_{rr}^2 e_{qq}^3 + e_{rr} e_{qq}^4 - \frac{1}{2} e_{rr}^2 e_{qq}^4 - 4e_{rr} e_{qq}^3 \right) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= 2m, & g_2 &= m + 4a + 4b + 2k, & g_3 &= 4(2b + k), \\
g_4 &= 4\left(a + b + 2k + \frac{3}{2}z\right), & g_5 &= 2(2b + 3k + 12z), & g_6 &= g_5 + 4k, \\
g_7 &= a + b + \frac{19}{2}k + 9z, & g_8 &= k + 6z, & g_9 &= 2b + 7k + 24z, \\
g_{10} &= \frac{3}{2}(k + z), & g_{11} &= k + 3z, & g_{12} &= m + 4a + 8b + 4k, & g_{18} &= 9(k + 2z), \\
g_{13} &= 4(a + 2b + 4k + 6z), & g_{14} &= \frac{1}{2}g_5 - 6z, & g_{15} &= \frac{1}{2}g_6 + 12z, \\
g_{16} &= a + 2b + 19k + 36z, & g_{17} &= b + \frac{7}{2}k + 15z, & P &= p - \partial W / \partial I_1.
\end{aligned}$$

Компоненты полных деформаций по известному полю перемещений (12) находятся соотношениями

$$\begin{aligned}
d_{rr} &= \frac{1}{2}(1 - H^{-4/3}), & d_{qq} &= d_{jj} = \frac{1}{2}(1 - H^{2/3}), & H &= 1 + \frac{j(t)}{r^3}, \\
d_{qq} &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 2d_{rr}}}\right).
\end{aligned} \tag{14}$$

Согласно кинематическим зависимостям (1) имеем

$$\begin{aligned}
e_{rr}^v &= \frac{dp_{rr}}{dt}(1 - 2p_{rr})^{-1}, & e_{qq}^v &= \frac{dp_{qq}}{dt}(1 - 2p_{qq})^{-1}, \\
e_{rr} &= 1 - x^{-\frac{2}{3}}, & e_{qq} &= 1 - x^{\frac{1}{3}}, & x &= \left(\frac{1 - 2p_{rr}}{1 - 2d_{rr}}\right)^3 = H^4(1 - 2p_{rr})^3.
\end{aligned} \tag{15}$$

Подстановка (13) и (15) в определяющие соотношения (11) приводит к уравнению

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{rr}}{dt}(1 - 2p_{rr})^{-1} &= BnN^{n-1}\left(1 - H^{-\frac{8}{3}}(1 - 2p_{rr})^{-2}, 1 - H^{\frac{1}{3}}(1 - 2p_{rr})\right), \\
N(a, b) &= g_1(a - b) - g_2a^2 + g_{12}b^2 + g_4a^3 - g_{13}b^3 + \frac{1}{2}g_3\left(\frac{1}{2}ab^2 - ab\right) + \\
&+ g_{19}\left(a^2b - \frac{1}{2}a^2b^2\right) + g_{10}\left(3b^5 - \frac{1}{2}a^6\right) + \frac{1}{3}g_{18}\left(\frac{1}{2}a^6 - 3b^5\right) - g_7a^4 + \\
&+ \frac{3}{4}g_{11}\left(a^4b + 2a^3b^2 - \frac{1}{2}a^4b^2 - 4a^3b\right) + g_{16}b^4, \\
g_{19} &= 2b + 7k + 18z.
\end{aligned} \tag{16}$$

Если задать поле перемещений (функцию  $j(t)$ ), то уравнение (16) в каждой точке среды  $s(t) \leq r \leq R(t)$  является обыкновенным дифференциальным уравнением для вычисления компоненты необратимых деформаций  $p_{rr}$  (или  $p_{qq}$ ). По найденным необратимым деформациям и известным полным (14) согласно (15) вычисляются упругие деформации. А по известным упругим деформациям напряжения определяются зависимостями (13) с

точностью до неизвестной функции  $P$ . С другой стороны, компоненты напряжений находятся интегрированием уравнения движения

$$s_{rr,r} + 2 \frac{s_{rr} - s_{\theta\theta}}{r} = -r_0 \left( \frac{j(t)}{3r^2} + \frac{2j'(t)}{9r^5} \right),$$

используя второе граничное условие (4). Тогда нагружающее давление  $P(t)$  определяется из первого граничного условия (4).

Приведем численные результаты расчетов для функции  $j(t) = \left( \frac{r_0}{R_0} \right)^3 \left( 1 - e^{-\frac{t^2-t}{a}} \right)$ ,

причем до момента времени  $t_k = \sqrt{\frac{m}{r_0}} \frac{1}{R_0} t$  радиус дефекта изменялся (рис. 6), а с момента

времени  $t_k = 40$  оставался постоянным. Изменение нагружающего давления иллюстрирует рис. 7, а релаксацию напряжений в процессе разгрузки (с момента времени  $t_0 = 10$ ) рис. 8 и 9.

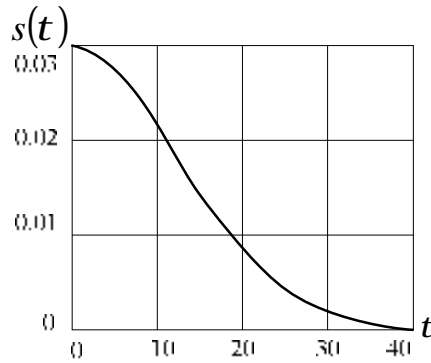


Рис. 6. Изменение границы дефекта.

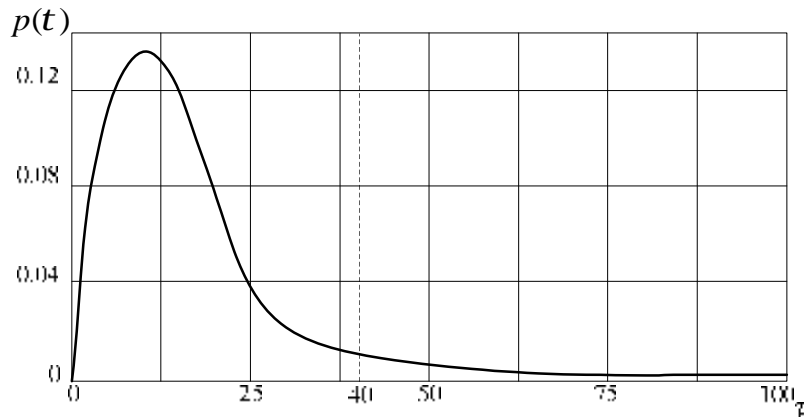


Рис. 7. Изменение нагружающего усилия.

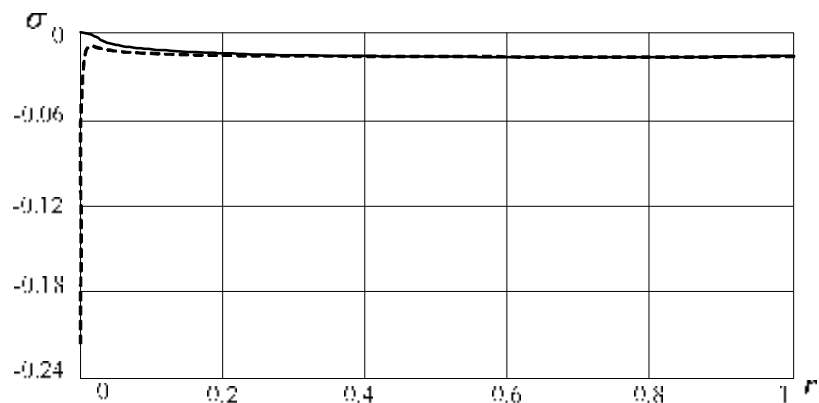


Рис. 8. Распределение напряжений в момент времени ( $t_k = 40$ ).

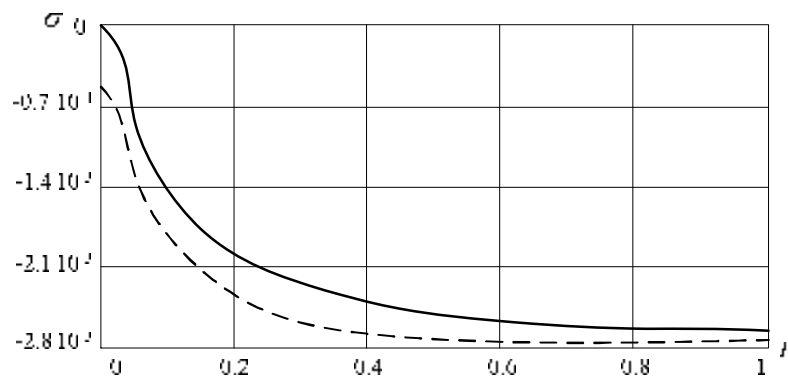


Рис. 9. Распределение напряжений в момент времени ( $t = 100$ ).

г. Владивосток

Поступила: 11 октября 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Горелов, В. И. Исследование влияния высоких давлений на механические характеристики алюминиевых сплавов / В. И. Горелов // Прикл. механика и техн. физика. – 1984. – № 5. – С. 157 – 158.
2. Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Докл. АН СССР. – 1996. – Т. 347. – № 2. – С. 199 – 201.
3. Буренин, А. А. Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, М. В. Полоник // Прикл. математика и механика. – 2003. – Т. 67. – Вып. 2. С. 316 – 325.
4. Буренин, А. А. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, М. В. Полоник // ДАН. 2000. – Т. 375. – № 6. – С. 767 – 769.
5. Буренин, А. А. Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругопластического материала / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Е. В. Мурашкин // Прикл. механика и техн. физика. 2006. Т. 47, № 2. С. 110 – 119.

## ОБ УСЛОВИЯХ ИЗОТРОПИИ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

(Институт механики НАН РА)

Исследуются поля напряжений и скоростей деформаций при больших деформациях. Рассматриваются различные варианты определения отмеченных полей.

**1. Постановка задачи.** Условия изотропии сплошной среды, утверждающие совпадение главных направлений тензоров напряжений  $\mathbf{s}_{ik}^*$  и скорости деформаций  $\mathbf{e}_{ik}$ , при больших деформациях можно формулировать следующим образом [2]:

$$\mathbf{s}_{ik}^* \mathbf{e}_{kj} = \mathbf{e}_{ik} \mathbf{s}_{kj}^*, \quad (1.1)$$

которые в компонентах декартовой системы координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_x^* \mathbf{e}_{xy} + \mathbf{s}_{xy}^* \mathbf{e}_y + \mathbf{s}_{xz}^* \mathbf{e}_{yz} &= \mathbf{e}_x \mathbf{s}_{xy}^* + \mathbf{e}_{xy} \mathbf{s}_y^* + \mathbf{e}_{xz} \mathbf{s}_{yz}^*, \\ \mathbf{s}_{xy}^* \mathbf{e}_{xz} + \mathbf{s}_y^* \mathbf{e}_{yz} + \mathbf{s}_{yz}^* \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_{xy} \mathbf{s}_{xz}^* + \mathbf{e}_y \mathbf{s}_{yz}^* + \mathbf{e}_z \mathbf{s}_z^*, \\ \mathbf{s}_{xz}^* \mathbf{e}_x + \mathbf{s}_{yz}^* \mathbf{e}_{xy} + \mathbf{s}_z^* \mathbf{e}_{xz} &= \mathbf{e}_{xz} \mathbf{s}_x^* + \mathbf{e}_{yz} \mathbf{s}_{xy}^* + \mathbf{e}_z \mathbf{s}_{xz}^*. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Следует отметить, что  $\mathbf{s}_{ij}^*$  являются напряжениями, отнесенными к размерам объемного элемента не после, а до деформации, причем  $\mathbf{s}_{ij}^* = \mathbf{s}_{ji}^*$ . Напряжения  $\mathbf{s}_{ij}^*$  выражаются с помощью истинных напряжений  $\mathbf{s}_{ij}$  следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{xx}^* &= \frac{S_x^*}{S_x} \frac{\mathbf{s}_{xx}}{1+E_x}, & \mathbf{s}_{xy}^* &= \frac{S_x^*}{S_x} \frac{\mathbf{s}_{xy}}{1+E_y}, & \mathbf{s}_{xz}^* &= \frac{S_x^*}{S_x} \frac{\mathbf{s}_{xz}}{1+E_z}, \\ \mathbf{s}_{yy}^* &= \frac{S_y^*}{S_y} \frac{\mathbf{s}_{yy}}{1+E_y}, & \mathbf{s}_{yz}^* &= \frac{S_y^*}{S_y} \frac{\mathbf{s}_{yz}}{1+E_z}, & \mathbf{s}_{yx}^* &= \frac{S_y^*}{S_y} \frac{\mathbf{s}_{yx}}{1+E_x}, \\ \mathbf{s}_{zx}^* &= \frac{S_z^*}{S_z} \frac{\mathbf{s}_{zx}}{1+E_x}, & \mathbf{s}_{zy}^* &= \frac{S_z^*}{S_z} \frac{\mathbf{s}_{zy}}{1+E_y}, & \mathbf{s}_{zz}^* &= \frac{S_z^*}{S_z} \frac{\mathbf{s}_{zz}}{1+E_z}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{S_x^*}{S_x} &= \sqrt{(1+2e_{yy})(1+2e_{zz})-e_{yz}^2}, \quad E_x = \sqrt{1+2e_{xx}}-1, \\
\frac{S_y^*}{S_y} &= \sqrt{(1+2e_{xx})(1+2e_{zz})-e_{xz}^2}, \quad E_y = \sqrt{1+2e_{yy}}-1, \\
\frac{S_z^*}{S_z} &= \sqrt{(1+2e_{xx})(1+2e_{yy})-e_{xy}^2}, \quad E_z = \sqrt{1+2e_{zz}}-1.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Из формул (1.3) видно, что тензор истинных напряжений  $\mathbf{s}_{ij}$  при больших деформациях несимметричен. При малых деформациях  $\frac{S_i^*}{S_i} \frac{1}{1+E_i} \approx 1$  следует, что величины  $\mathbf{s}_{ij}^*$  и  $\mathbf{s}_{ij}$  совпадают.

Таким образом, условия изотропии при больших деформациях имеют место не после, а до деформации.

Уравнения равновесия при больших деформациях выражаются в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{12}}{\partial y} + \frac{\partial S_{13}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial S_{21}}{\partial x} + \frac{\partial S_{22}}{\partial y} + \frac{\partial S_{23}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial S_{31}}{\partial x} + \frac{\partial S_{32}}{\partial y} + \frac{\partial S_{33}}{\partial z} &= 0,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$\begin{aligned}
S_{11} &= (1+e_{xx})\mathbf{s}_{xx}^* + \left(\frac{1}{2}e_{xy} - w_z\right)\mathbf{s}_{xy}^* + \left(\frac{1}{2}e_{xz} + w_y\right)\mathbf{s}_{xz}^*, \\
S_{12} &= (1+e_{xx})\mathbf{s}_{yx}^* + \left(\frac{1}{2}e_{xy} - w_z\right)\mathbf{s}_{yy}^* + \left(\frac{1}{2}e_{xz} + w_y\right)\mathbf{s}_{yz}^*, \\
S_{13} &= (1+e_{xx})\mathbf{s}_{zx}^* + \left(\frac{1}{2}e_{xy} - w_z\right)\mathbf{s}_{zy}^* + \left(\frac{1}{2}e_{xz} + w_y\right)\mathbf{s}_{zz}^*, \\
S_{21} &= \left(\frac{1}{2}e_{xy} + w_z\right)\mathbf{s}_{xx}^* + (1+e_{yy})\mathbf{s}_{xy}^* + \left(\frac{1}{2}e_{yz} - w_x\right)\mathbf{s}_{xz}^*, \\
S_{22} &= \left(\frac{1}{2}e_{xy} + w_z\right)\mathbf{s}_{yx}^* + (1+e_{yy})\mathbf{s}_{yy}^* + \left(\frac{1}{2}e_{yz} - w_x\right)\mathbf{s}_{yz}^*, \\
S_{23} &= \left(\frac{1}{2}e_{xy} + w_z\right)\mathbf{s}_{zx}^* + (1+e_{yy})\mathbf{s}_{zy}^* + \left(\frac{1}{2}e_{yz} - w_x\right)\mathbf{s}_{zz}^*,
\end{aligned} \tag{1.6}$$



$$\begin{aligned}
S_{31} &= \left( \frac{1}{2} e_{xz} - w_y \right) \mathbf{s}_{xx}^* + \left( \frac{1}{2} e_{yz} + w_x \right) \mathbf{s}_{xy}^* + (1 + e_{zz}) \mathbf{s}_{xz}^*, \\
S_{32} &= \left( \frac{1}{2} e_{xz} - w_y \right) \mathbf{s}_{yx}^* + \left( \frac{1}{2} e_{yz} + w_x \right) \mathbf{s}_{yy}^* + (1 + e_{zz}) \mathbf{s}_{yz}^*, \\
S_{33} &= \left( \frac{1}{2} e_{xz} - w_y \right) \mathbf{s}_{zx}^* + \left( \frac{1}{2} e_{yz} + w_x \right) \mathbf{s}_{zy}^* + (1 + e_{zz}) \mathbf{s}_{zz}^*,
\end{aligned}$$

причем:

$$\begin{aligned}
2w_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
2w_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
2w_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Введя следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1 + e_{xx}, & a_{12} &= \frac{1}{2} e_{xy} - w_z, & a_{13} &= \frac{1}{2} e_{xz} + w_y \\
a_{21} &= \frac{1}{2} e_{xy} + w_z, & a_{22} &= 1 + e_{yy}, & a_{23} &= \frac{1}{2} e_{yz} - w_x \\
a_{31} &= \frac{1}{2} e_{xz} - w_y, & a_{32} &= \frac{1}{2} e_{yz} + w_x, & a_{33} &= 1 + e_{zz}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

для (1.4) имеем:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= a_{11} \mathbf{s}_{xx}^* + a_{12} \mathbf{s}_{xy}^* + a_{13} \mathbf{s}_{xz}^*, & S_{21} &= a_{21} \mathbf{s}_{xx}^* + a_{22} \mathbf{s}_{xy}^* + a_{23} \mathbf{s}_{xz}^*, \\
S_{12} &= a_{11} \mathbf{s}_{yx}^* + a_{12} \mathbf{s}_{yy}^* + a_{13} \mathbf{s}_{yz}^*, & S_{22} &= a_{21} \mathbf{s}_{yx}^* + a_{22} \mathbf{s}_{yy}^* + a_{23} \mathbf{s}_{yz}^*, \\
S_{13} &= a_{11} \mathbf{s}_{zx}^* + a_{12} \mathbf{s}_{zy}^* + a_{13} \mathbf{s}_{zz}^*, & S_{23} &= a_{21} \mathbf{s}_{zx}^* + a_{22} \mathbf{s}_{zy}^* + a_{23} \mathbf{s}_{zz}^*, \\
S_{31} &= a_{31} \mathbf{s}_{xx}^* + a_{32} \mathbf{s}_{xy}^* + a_{33} \mathbf{s}_{xz}^*, \\
S_{32} &= a_{31} \mathbf{s}_{yx}^* + a_{32} \mathbf{s}_{yy}^* + a_{33} \mathbf{s}_{yz}^*, \\
S_{33} &= a_{31} \mathbf{s}_{zx}^* + a_{32} \mathbf{s}_{zy}^* + a_{33} \mathbf{s}_{zz}^*.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Используя обозначения (1.6), компоненты тензора больших деформаций можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned}
2e_{xx} &= a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 - 1, \\
2e_{yy} &= a_{22}^2 + a_{12}^2 + a_{32}^2 - 1, \\
2e_{zz} &= a_{33}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 - 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{xy} &= a_{11}a_{12} + a_{22}a_{21} + a_{31}a_{32}, \\
e_{xz} &= a_{11}a_{13} + a_{33}a_{31} + a_{21}a_{23}, \\
e_{yz} &= a_{22}a_{23} + a_{33}a_{32} + a_{12}a_{13}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Компоненты  $S_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), удовлетворяющие уравнениям равновесия (1.3), могут быть выражены через три произвольных функций  $X, Y, Z$  по формулам:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z}, \quad S_{12} = -2 \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial z}, \quad S_{13} = \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}, \\
S_{21} &= \frac{\partial^2 Y}{\partial y \partial z}, \quad S_{22} = -2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial z}, \quad S_{23} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y}, \\
S_{31} &= \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial z}, \quad S_{32} = -2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z}, \quad S_{33} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Предположим, что поле скоростей перемещений  $u, v, w$  и поле скоростей деформаций согласно (1.10), определены. Тогда из системы уравнений (1.9) можно определить тензор напряжений  $\mathbf{s}_{ij}^*$ . Учитывая условия изотропии и симметричность тензора напряжений, будем иметь шесть уравнений в частных производных относительно трех неизвестных функций  $X, Y, Z$ . Определяя функции  $X, Y, Z$ , определяется поле напряжений.

Если известно поле напряжений, то, подставляя выражения (1.10) в условиях изотропии (1.2), имеем три уравнения в частных производных относительно функций скорости перемещений  $u, v, w$ . Полученная система трех уравнений определяет совокупность компонентов скоростей перемещения.

Общая плоская задача в данной постановке была рассмотрена в [1].

## 2. Плоская задача.

а. При плоской задаче условия изотропии (1.2) можно написать в форме:

$$\frac{2\mathbf{s}_{xy}^*}{\mathbf{s}_{xx}^* - \mathbf{s}_{yy}^*} = \frac{2e_{xy}}{e_{xx} - e_{yy}} = tg 2j, \tag{2a.1}$$

причем:

$$\begin{aligned}
2w_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\
w_x &= 0, \quad w_y = 0, \quad e_{zz} = 0, \quad e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = 0, \\
a_{11} &= 1 + \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a_{12} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad a_{21} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad a_{22} = 1 + \frac{\partial v}{\partial y}, \\
S_{11} &= a_{11}\mathbf{s}_{xx}^* + a_{12}\mathbf{s}_{xy}^*, \quad S_{21} = a_{21}\mathbf{s}_{xx}^* + a_{22}\mathbf{s}_{xy}^*, \\
S_{12} &= a_{11}\mathbf{s}_{yx}^* + a_{12}\mathbf{s}_{yy}^*, \quad S_{22} = a_{21}\mathbf{s}_{yx}^* + a_{22}\mathbf{s}_{yy}^*.
\end{aligned} \tag{2a.2}$$

Уравнения равновесия будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial S_{21}}{\partial x} + \frac{\partial S_{22}}{\partial y} = 0, \\ S_{11} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad S_{12} = -\frac{\partial X}{\partial x}, \quad S_{21} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad S_{22} = -\frac{\partial Y}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2a.3)$$

Из (2a.2) для тензора напряжений  $s_{ij}^*$  будем иметь:

$$\begin{aligned} s_{xx}^* = \frac{a_{12}S_{21} - a_{22}S_{11}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}, \quad s_{xy}^* = \frac{a_{21}S_{11} - a_{11}S_{21}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}, \\ s_{yx}^* = \frac{a_{12}S_{22} - a_{22}S_{12}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}, \quad s_{yy}^* = \frac{a_{21}S_{12} - a_{11}S_{22}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}, \end{aligned} \quad (2a.4)$$

или

$$\begin{aligned} s_{xx}^* = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial X}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}, \quad s_{xy}^* = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial Y}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}, \\ s_{yx}^* = \frac{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}, \quad s_{yy}^* = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}. \end{aligned} \quad (2a.5)$$

Предположим, что поле скоростей перемещений известно, тогда соотношение (2a.1) примет вид:

$$s_{xx}^* - s_{yy}^* - 2ctg 2j s_{xy}^* = 0. \quad (2a.6)$$

Подставляя (2a.5) в (2a.6) и учитывая условие симметричности напряжений, будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial X}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial x} - 2ctg 2j \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial Y}{\partial y} = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned} \quad (2a.7)$$

Предположим, что поле напряжений определено, тогда соотношение (2a.1) примет вид:

$$\left( \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) tg 2j = 4 \left( \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2a.8)$$

Для условия несжимаемости имеем:

$$e_x + e_y + 2e_x e_y - 2e_{xy}^2 = 0$$

или

$$\left( \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \left( \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) - 4 \left( \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 1 = 0. \quad (2a.9)$$

Система уравнений (2a.8) и (2a.9) будет определять поле скоростей перемещений.

б. Пусть условие изотропии имеет вид:

$$\mathbf{s}_{xy}^* (\mathbf{e}_{xx} - \mathbf{e}_{yy}) - \mathbf{e}_{xy} (\mathbf{s}_{xx}^* - \mathbf{s}_{yy}^*) = 0, \quad (2b.1)$$

тогда из уравнений равновесия будем иметь:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathbf{s}_x^* + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \mathbf{s}_{xy}^* + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \mathbf{s}_y^* + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{s}_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{s}_{xy}^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial \mathbf{s}_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{s}_y^*}{\partial y} \right) = 0 \quad (2b.2)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \mathbf{s}_x^* + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \mathbf{s}_{xy}^* + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \mathbf{s}_y^* + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{s}_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{s}_{xy}^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathbf{s}_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{s}_y^*}{\partial y} \right) = 0$$

Введем функцию напряжений Эри:

$$\mathbf{s}_x^* = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \mathbf{s}_y^* = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \mathbf{s}_{xy}^* = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2b.3)$$

следовательно, из уравнений равновесия (2b.2) и соотношений изотропии (2b.1) будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) - \\ & - \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2b.4) \\ & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \\ & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \end{aligned}$$

Полученная система уравнений замкнута относительно  $u$ ,  $v$ ,  $\Phi$ .

Для существования нетривиального решения системы уравнений (2b.4) относи-

тельно  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$  необходимое и достаточное условие:

$$\begin{vmatrix} A & B & -A \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & -2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 0, \quad (2b.5)$$

где

$$A = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$2B = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2. \quad (2b.6)$$

Решение системы (2b.4) будем искать в виде:

$$\Phi = \Phi(x), \quad u = u(h), \quad v = v(z), \quad x = mx + ny, \quad h = ax + by, \quad z = cx + dy, \quad m, n, a, b, c, d - const,$$

тогда из (2b.4) получим:

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} [mnB - (m^2 - n^2)A] = 0,$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} \frac{d^2 u}{dh^2} (an - bm)^2 = 0, \quad (2b.7)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} \frac{d^2 v}{dz^2} (cn - dm)^2 = 0,$$

где

$$A = b \frac{du}{dh} + c \frac{dv}{dz} + ab \left(\frac{du}{dh}\right)^2 + cd \left(\frac{dv}{dz}\right)^2, \quad (2b.8)$$

$$2B = a^2 \left(\frac{du}{dh}\right)^2 + c^2 \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + 2 \left(a \frac{du}{dh} - d \frac{dv}{dz}\right) - b^2 \left(\frac{du}{dh}\right)^2 - d^2 \left(\frac{dv}{dz}\right)^2.$$

Уравнение (2b.9) можно написать в виде:

$$\frac{d^2 u}{dh^2} \frac{d^2 v}{dz^2} \begin{vmatrix} A & B & -A \\ a^2 & -2ab & b^2 \\ c^2 & -2cd & d^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2b.9)$$

Из системы уравнений (2b.7) и уравнения (2b.9) можно получить поле скоростей деформаций, определяющие нетривиальное напряженное состояние. Таким образом,

приходим к следующей системы уравнений относительно  $\frac{du}{dh}$ ,  $\frac{dv}{dz}$ :

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{2} mn(a^2 - b^2) - ab(m^2 - n^2) \right) \left( \frac{du}{dh} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} mn(c^2 - d^2) - cd(m^2 - n^2) \right) \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 + \\
& + (amn - b(m^2 - n^2)) \frac{du}{dh} - (dmn + c(m^2 - n^2)) \frac{dv}{dz} = 0 \\
& (4abcd(a^2 + b^2) - 3a^2b^2(c^2 + d^2) - a^4d^2 - b^4c^2) \left( \frac{du}{dh} \right)^2 + \\
& + (3c^2d^2(a^2 + b^2) - 4abcd(c^2 + d^2) + c^4b^2 - d^4a^2) \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 + \\
& (4a^2bcd - 2ab^2c^2 - 4ab^2d^2 + 4b^3cd - 2a^3d^2) \frac{du}{dh} + \\
& + (4a^2c^2d - 4abc^3 - 4abcd^2 + 2b^2c^2d + 2a^2d^3) \frac{dv}{dz} = 0
\end{aligned} \tag{2b.10}$$

**3. Антиплоская задача.** Предположим, что  $u(x, y) = v(x, y) = 0$ ,  $w = w(x, y)$ , тогда имеем:

$$\mathbf{e}_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \mathbf{e}_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \mathbf{e}_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \mathbf{e}_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \mathbf{e}_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \mathbf{e}_z = 0, \tag{3.1}$$

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 1, \quad a_{23} = 0, \quad a_{31} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad a_{32} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad a_{33} = 1.$$

Условия изотропии будут:

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_x^* \mathbf{e}_{xy} + \mathbf{s}_{xy}^* \mathbf{e}_y + \mathbf{s}_{xz}^* \mathbf{e}_{yz} &= \mathbf{e}_x \mathbf{s}_{xy}^* + \mathbf{e}_{xy} \mathbf{s}_y^* + \mathbf{e}_{xz} \mathbf{s}_{yz}^* \\
\mathbf{s}_{xy}^* \mathbf{e}_{xz} + \mathbf{s}_y^* \mathbf{e}_{yz} &= \mathbf{e}_{xy} \mathbf{s}_{xz}^* + \mathbf{e}_y \mathbf{s}_{yz}^* + \mathbf{e}_{yz} \mathbf{s}_z^* \\
\mathbf{s}_{xz}^* \mathbf{e}_x + \mathbf{s}_{yz}^* \mathbf{e}_{xy} + \mathbf{s}_z^* \mathbf{e}_{xz} &= \mathbf{e}_{xz} \mathbf{s}_x^* + \mathbf{e}_{yz} \mathbf{s}_{xy}^*
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Из (3.1) можем написать:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \mathbf{s}_{xx}^*, \quad S_{21} = \mathbf{s}_{xy}^* \\
S_{12} &= \mathbf{s}_{yx}^*, \quad S_{22} = \mathbf{s}_{yy}^* \\
S_{13} &= \mathbf{s}_{zx}^*, \quad S_{23} = \mathbf{s}_{zy}^* \\
S_{31} &= \mathbf{e}_{xz} \mathbf{s}_{xx}^* + \mathbf{e}_{yz} \mathbf{s}_{xy}^* + \mathbf{s}_{xz}^* \\
S_{32} &= \mathbf{e}_{xz} \mathbf{s}_{yx}^* + \mathbf{e}_{yz} \mathbf{s}_{yy}^* + \mathbf{s}_{yz}^* \\
S_{33} &= \mathbf{e}_{xz} \mathbf{s}_{zx}^* + \mathbf{e}_{yz} \mathbf{s}_{zy}^* + \mathbf{s}_{zz}^*
\end{aligned} \tag{3.3}$$

отметим, что условие несжимаемости

$$\begin{vmatrix} 1 + 2\mathbf{e}_{xx} & \mathbf{e}_{xy} & \mathbf{e}_{xz} \\ \mathbf{e}_{xy} & 1 + 2\mathbf{e}_{yy} & \mathbf{e}_{yz} \\ \mathbf{e}_{xz} & \mathbf{e}_{yz} & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{3.4}$$

удовлетворяется автоматически.

Уравнения равновесия будут:

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_x^*}{\partial x} + \frac{\partial s_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial s_{xz}^*}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial s_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial s_y^*}{\partial y} + \frac{\partial s_{yz}^*}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} s_x^* + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} s_{xy}^* + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} s_y^* + \frac{\partial s_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial s_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial s_z^*}{\partial z} = 0$$

Компоненты напряжений выразим через три произвольных функции  $X, Y, Z$  по формулам Максвелла:

$$\begin{aligned}s_x^* &= \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}, \quad s_y^* = \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, \quad s_z^* = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \\ s_{xy}^* &= -\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}, \quad s_{yz}^* = -\frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z}, \quad s_{xz}^* = -\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial z},\end{aligned}\quad (3.6)$$

учитывая (3.5) из (3.4), получим:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (3.7)$$

Из условий изотропии имеем:

$$\begin{aligned}\left( \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\ -\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \left( \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 &= 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Система уравнений (3.7) и (3.8) замкнута относительно  $X, Y, Z$  и  $w$ . Решение этой системы будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned}X &= X(x), \quad Y = Y(x), \quad Z = Z(x), \quad w = w(z), \\ x &= mx + ny + kz, \quad z = px + qy, \quad m, n, k, p, q - const.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Из (3.7) и (3.8) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dz^2} \left[ (pn - qm)^2 \frac{d^2 Z}{dx^2} + p^2 k^2 \frac{d^2 Y}{dx^2} + q^2 k^2 \frac{d^2 X}{dx^2} \right] &= 0, \\ \frac{dw}{dz} \left[ qn \left( pn - \frac{qm}{2} \right) - pm \left( qm - \frac{pn}{2} \right) \right] \frac{d^2 Z}{dx^2} + qk \left( pk \frac{\partial w}{\partial z} - m \right) \frac{d^2 Y}{dx^2} + pk \left( n - qk \frac{dw}{dz} \right) \frac{d^2 X}{dx^2} &= 0, \\ m(qm - np) \frac{d^2 Z}{dx^2} + qmw \frac{d^2 Y}{dx^2} + q \left( k^2 - n^2 + \frac{dw}{dz} \frac{qnk}{2} \right) \frac{d^2 X}{dx^2} &= 0, \\ n(qm - pn) \frac{d^2 Z}{dx^2} + p \left( m^2 - k^2 - \frac{dw}{dz} \frac{pmk}{2} \right) \frac{d^2 Y}{dx^2} + pn \left( n - qk \frac{dw}{dz} \right) \frac{d^2 X}{dx^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Естественно предположить, что

$$\frac{dw}{dz} \neq 0.$$

Пусть  $\frac{d^2 w}{dz^2} = 0$  т.е.  $\frac{dw}{dz} = C = const$ , тогда из (3.10) можем написать:

$$\begin{aligned} C \left[ qn \left( pn - \frac{qm}{2} \right) - pm \left( qm - \frac{pn}{2} \right) \right] \frac{d^2 Z}{dx^2} + qk(pkC - m) \frac{d^2 Y}{dx^2} + pk(n - qkC) \frac{d^2 X}{dx^2} &= 0 \\ m(qm - np) \frac{d^2 Z}{dx^2} + qm(pkC - m) \frac{d^2 Y}{dx^2} + q \left( k^2 - n^2 + C \frac{qnk}{2} \right) \frac{d^2 X}{dx^2} &= 0 \\ n(qm - pn) \frac{d^2 Z}{dx^2} + p \left( m^2 - k^2 - C \frac{pmk}{2} \right) \frac{d^2 Y}{dx^2} + pn(n - qkC) \frac{d^2 X}{dx^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Условие существования нетривиального решения системы (3.11) будет следующим:

$$\begin{vmatrix} C \left[ qn \left( pn - \frac{qm}{2} \right) - pm \left( qm - \frac{pn}{2} \right) \right] & qk(pkC - m) & pk(n - qkC) \\ m(qm - np) & qm(pkC - m) & q \left( k^2 - n^2 + C \frac{qnk}{2} \right) \\ n(qm - pn) & p \left( m^2 - k^2 - C \frac{pmk}{2} \right) & pn(n - qkC) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.12)$$

Решая (3.12) относительно  $C$  можем получить поле скоростей перемещений. Система уравнений (3.11) напомним в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^2} \left( C \left[ qn \left( pn - \frac{qm}{2} \right) - pm \left( qm - \frac{pn}{2} \right) \right] Z + qk(pkC - m)Y + pk(n - qkC)X \right) &= 0, \\ \frac{d}{dx^2} \left( m(qm - np)Z + qm(pkC - m)Y + q \left( k^2 - n^2 + C \frac{qnk}{2} \right) X \right) &= 0, \\ \frac{d}{dx^2} \left( n(qm - pn)Z + p \left( m^2 - k^2 - C \frac{pmk}{2} \right) Y + pn(n - qkC)X \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$



или

$$\begin{aligned}
C \left[ qn \left( pn - \frac{qm}{2} \right) - pm \left( qm - \frac{pn}{2} \right) \right] Z + qk(pkC - m)Y + pk(n - qkC)X &= A_1 X + A_2, \\
m(qm - np)Z + qm(pkC - m)Y + q \left( k^2 - n^2 + C \frac{qnk}{2} \right) X &= B_1 X + B_2, \\
n(qm - pn)Z + p \left( m^2 - k^2 - C \frac{pmk}{2} \right) Y + pn(n - qkC)X &= C_1 X + C_2,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

где  $A_i, B_i, C_i, i=1,2$  интегральные постоянные.

Когда

$$(pn - qm)^2 \frac{d^2 Z}{dx^2} + p^2 k^2 \frac{d^2 Y}{dx^2} + q^2 k^2 \frac{d^2 X}{dx^2} = 0,$$

следует решить следующую систему алгебраических уравнений относительно

$$\frac{d^2 Z}{dx^2}, \frac{d^2 Y}{dx^2}, \frac{d^2 X}{dx^2}, \frac{dw}{dz}:$$

$$\begin{aligned}
(pn - qm)^2 \frac{d^2 Z}{dx^2} + p^2 k^2 \frac{d^2 Y}{dx^2} + q^2 k^2 \frac{d^2 X}{dx^2} &= 0, \\
\frac{dw}{dz} \left[ qn \left( pn - \frac{qm}{2} \right) - pm \left( qm - \frac{pn}{2} \right) \right] \frac{d^2 Z}{dx^2} + qk \left( pk \frac{dw}{dz} - m \right) \frac{d^2 Y}{dx^2} + pk \left( n - qk \frac{dw}{dz} \right) \frac{d^2 X}{dx^2} &= 0, \\
m(qm - np) \frac{d^2 Z}{dx^2} + qm \left( pk \frac{dw}{dz} - m \right) \frac{d^2 Y}{dx^2} + q \left( k^2 - n^2 + \frac{dw}{dz} \frac{qnk}{2} \right) \frac{d^2 X}{dx^2} &= 0, \\
n(qm - pn) \frac{d^2 Z}{dx^2} + p \left( m^2 - k^2 - \frac{dw}{dz} \frac{pmk}{2} \right) \frac{d^2 Y}{dx^2} + pn \left( n - qk \frac{dw}{dz} \right) \frac{d^2 X}{dx^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние полностью определяется.

**4.** Предположим, что  $s_x^* = s_y^* = s_z^* = s_{xy}^* = s_{yx}^* = 0$ , тогда имеем:

$$\begin{aligned}
S_{11} = 0, S_{12} = 0, S_{13} = s_{xz}^*, S_{21} = 0, S_{22} = 0, S_{23} = s_{yz}^*, \\
S_{31} = s_{xz}^*, S_{32} = s_{yz}^*, S_{33} = e_{xz} s_{xz}^* + e_{yz} s_{yz}^*.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Из уравнений равновесия имеем:

$$\frac{\partial s_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial s_{yz}^*}{\partial y} = 0, s_{xz}^* = \frac{\partial F}{\partial y}, s_{yz}^* = -\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Условия изотропии будет:

$$\frac{s_{xz}^*}{s_{yz}^*} = \frac{e_{xz}}{e_{yz}} = \operatorname{tg} 2j.$$

Если скорость перемещения  $w(x, y)$  известна, то поле напряжений будет определяться из следующего уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial x} \operatorname{tg} 2j . \quad (4.4)$$

В противном случае (т.е. при наличии поля напряженного состояния), функция скорости перемещений определяется из уравнения:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} \operatorname{tg} 2j . \quad (4.5)$$

Уравнению (4.3) можно удовлетворять, принимая:

$$\begin{aligned} s_{xz}^* &= x \sin 2j , \quad s_{yz}^* = x \cos 2j , \quad x = \sqrt{s_{xz}^{*2} + s_{yz}^{*2}} , \\ e_{xz} &= 2h \sin 2j , \quad e_{yz} = 2h \cos 2j , \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$e_x = 2h^2 \sin^2 2j , \quad e_y = 2h^2 \cos^2 2j , \quad e_{xy} = 2h \sin 4j , \quad h = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{e_x + e_y} .$$

Допустим:

$$\frac{s_{xz}^*}{e_{xz}} = \frac{s_{yz}^*}{e_{yz}} = m = \operatorname{const} . \quad (4.7)$$

Тогда  $x = mh$ . Из уравнения равновесия (4.2) и (4.6) следует:

$$\frac{\partial x}{\partial x} \sin 2j + \frac{\partial x}{\partial y} \cos 2j + 2x \frac{\partial j}{\partial x} \cos 2j - 2x \frac{\partial j}{\partial y} \sin 2j = 0 . \quad (4.8)$$

Условие совместимости скоростей деформаций имеет вид:

$$\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} = 0 . \quad (4.9)$$

Из (4.9) следует:

$$-\frac{\partial h}{\partial x} \cos 2j + \frac{\partial h}{\partial y} \sin 2j + 2h \frac{\partial j}{\partial x} \sin 2j + 2h \frac{\partial j}{\partial y} \cos 2j = 0 . \quad (4.10)$$

Таким образом, соотношение  $x = mh$  и система уравнений (4.8), (4.10) замкнута относительно функций  $x, h, j$ .

г. Ереван.

Поступила: 25 октября 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Варданян, С. В. Об условиях изотропии в общей плоской задаче изотропных сред при больших деформациях. / С. В. Варданян // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред : V Международная конференция 1-7 октября, Горис. – 2005. – С.131-135.
2. Ишлинский, А. Ю. К теории изотропных сред. / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова // Проблемы механики деформируемых тел, сб. статей посвященной 90-летию академика НАН Армении Н. Х. Арутюняна, г. Ереван. – 2003. – С 190-198.
3. Новожилов, В. В. Основы нелинейной теории упругости. / В. В. Новожилов – ОГИЗ. – 1948, 212 с.

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ  
ДЛЯ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕГО ПЕРФОРИРОВАННОГО МАССИВА  
ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИН С ПЛАСТИЧЕСКИМИ КОНЦЕВЫМИ ЗОНАМИ**

*(Азербайджанский технический университет)*

Рассматривается задача механики разрушения для тепловыделяющего изотропного массива, ослабленного двоякопериодической системой цилиндрических каналов круглого поперечного сечения. Считается, что по мере повышения интенсивности тепловыделения в массиве происходит разрушение материала. Принято, что с поверхности отверстий исходят прямолинейные трещины с концевыми зонами. Определение неизвестных параметров, характеризующих развитие трещин, сводится к решению сингулярного интегрального уравнения.

**Постановка задачи**

При проектировании некоторых типов тепловыделяющих элементов (ТВЭЛ) приходится рассчитывать термические напряжения в среде, пронизанной цилиндрическими каналами, оси которых параллельны друг другу. Задача о термоупругом равновесии плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых отверстий, рассматривалась в [3, 11, 12]. По мере повышения интенсивности тепловыделения  $q$  в такой плоскости вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых носит двоякопериодический характер. Зоны повышенных напряжений способствуют развитию образовавшихся на поверхности отверстий трещин, что в свою очередь может привести к полному разрушению тепловыделяющего массива.

В [5, 10] были рассмотрены задачи механики хрупкого разрушения для тепловыделяющего массива с прямолинейными трещинами Гриффитса. Высокая концентрация напряжений вблизи вершин трещин в некоторых случаях приводит к разупрочнению материала, окружающего трещину. Это может проявляться в образовании зон пластического течения. Анализ экспериментальных данных, а также условий равновесия и развития трещин с учетом взаимодействия ее берегов и зон разупрочнения приводит к модели трещины с концевой зоной (зоной предразрушения), в которой имеет место пластическое течение при постоянном напряжении. В ряде работ рассматривались модели трещин, в которых принимается, что в концевых зонах, размер которых соизмерим с длиной трещины, имеет место пластическое течение при постоянном напряжении (см. обзор [2]).

Выделим участки трещин  $\Gamma_0$  (концевые зоны), примыкающие к ее вершинам, в которых для данного материала массива имеет место пластическое течение при постоянном напряжении. Взаимодействие берегов трещины в концевых зонах моделируется путем введения между ее берегами линий пластического скольжения (вырожденных полос пластичности). Размеры концевых зон зависят от вида материала массива. Так как концевые зоны и толщина зоны пластического течения малы по сравнению с остальной (упругой)

частью массива, их можно мысленно заменить разрезами, поверхности которых взаимодействуют по некоторому закону и препятствуют раскрытию трещины.

При действии термических напряжений в массиве в концевых зонах, соединяющих берега трещины, возникают нормальные  $s_y = s_s$  и касательные  $t_{xy} = 0$  усилия. Размеры концевых зон заранее неизвестны и подлежат определению при решении рассматриваемой задачи механики разрушения. Вне концевых зон берега трещин свободны от нагрузки. Будем считать, что: а) по всему объему тела интенсивность тепловыделения неравномерна и тело может свободно расширяться во всех направлениях; б) теплосъем осуществляется только через поверхности каналов; в) максимальный температурный перепад в массиве невелик и свойства материала среды постоянны в пределах этого перепада; г) на тело не действуют внешние силы и оно находится только под действием внутренних термических напряжений; д) массив находится в стационарном состоянии.

Итак, пусть имеется тепловыделяющий массив с двоякопериодической системой одинаковых круговых отверстий, имеющих радиус  $l$  ( $l < 1$ ) и центры в точках  $P_{mn} = mw_1 + nw_2$ , где  $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $w_1 = 2$ ,  $w_2 = 2he^{ia}$ ,  $h > 0$ ,  $\text{Im } w_2 > 0$ . Из контуров отверстий исходят симметричные прямолинейные трещины с концевыми зонами. Контуров круговых отверстий свободны от внешних нагрузок. Перенос тепла в твэлах осуществляется главным образом теплопроводностью. Поэтому расчет температурных полей в твэлах состоит в решении задач теории теплопроводности при наличии внутренних источников тепла [3, 12].

В силу симметрии граничных условий и симметрии области  $D$ , занятой материалом массива, температура и напряжения являются двоякопериодическими функциями с основными периодами  $w_1$  и  $w_2$ . Температура  $T(x, y)$  в области  $D$  является решением уравнения теории теплопроводности

$$\Delta T + \frac{q(T)}{d} = 0 \quad (1)$$

при граничном условии

$$T = T_0. \quad (2)$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $d$  – коэффициент теплопроводности материала,  $q(T)$  – удельная мощность внутренних источников тепла;  $T_0$  – температура охлаждающей среды (теплоносителя).

Граничные условия задачи имеют следующий вид

$$s_r - it_{rq} = 0, \quad \text{на контурах отверстий} \quad (3)$$

$$s_y - it_{xy} = 0, \quad \text{на берегах вне концевых зон трещин}$$

$$s_y - it_{xy} = s_s, \quad \text{на берегах концевых зон трещин} \quad (4)$$

где  $s_s$  – предел текучести материала на растяжение.

Для определения значений предельной величины интенсивности тепловыделения, при которой происходит развитие трещины, постановку задачи нужно дополнить условием (критерием) роста трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимаем критерий критического раскрытия берегов трещины у основания пластических зон

$$u^+ - u^- = d_c, \quad (5)$$

где  $u^+$  и  $u^-$  – граничные значения перемещения на верхнем и нижнем берегах трещины соответственно;  $d_c$  – характеристика трещиностойкости материала массива.

Это дополнительное условие позволяет определить параметры тепловыделяющей среды, при которых происходит развитие трещины.

Рассмотрим два случая расположения охлаждающих каналов:

а) каналы в вершинах квадратной сетки;

б) каналы в вершинах треугольной сетки.

Из-за двоякопериодичности системы определение температурного поля можно свести к решению краевой задачи для одного трансляционного элемента (область  $D_0$ ). На рис. 1 показаны расчетные элементарные ячейки тела для обоих случаев.

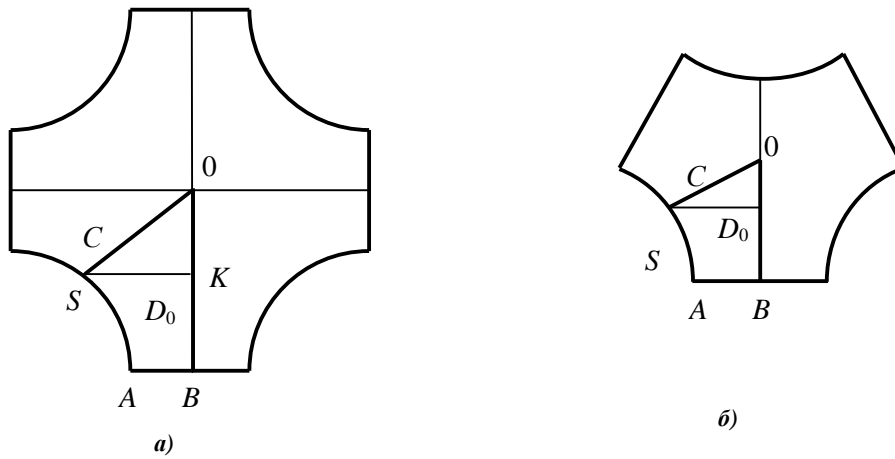


Рис. 1. Расчетная схема задачи термоупругости;

На прямолинейных границах области  $D_0$  выполняется условие симметрии

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0,$$

где  $n$  – обозначает направление нормали к контуру тела.

Удельная мощность внутренних источников тепла принималась в виде

$$1) \frac{q}{l} = A \exp(-B(x^2 + y^2)),$$

$$2) \frac{q}{l} = A \exp(-BT).$$

Здесь  $A$  и  $B$  – положительные эмпирические постоянные.

#### Решение нелинейной краевой задачи теории теплопроводности

После квазилинейной аппроксимации [1] уравнение (1) заменяется (если  $q = Al \exp(-BT)$ ) последовательностью линейных уравнений

$$\Delta T^{(i+1)} + A \exp(-BT^{(i)}) - AB(T^{(i+1)} - T^{(i)}) \exp(-BT^{(i)}) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, решение нелинейной краевой задачи сводится к решению последовательности линейных задач. Эти задачи решаются при помощи вариационного метода Ритца. Для применения этого метода нужно иметь систему базисных функций  $\{j_k(x, y)\}$ , обращающихся в нуль на дуге  $S$  (условие (2) заменяется однородным граничным условием) и полную в области  $D_0$ , т. е. такую, что с помощью их линейных комбинаций можно приблизить любую функцию  $T(x, y)$ , непрерывную вместе с частными производными, удовлетворяющую граничному условию.

Приближенное решение задачи ищется в виде

$$T = \sum_{k=1}^N a_k j_k(x, y), \quad (7)$$

где  $j_k$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $j_k(x, y) = 0$  на дуге  $S$ ;
- 2)  $j_k(x, y)$  симметричны относительно прямолинейных границ элементарной ячейки.

Построение такой системы базисных функций показано в [11]. Для определения коэффициентов  $a_k$  в каждом приближении получаем систему линейных алгебраических уравнений. При этом на каждой итерации предыдущее решение используется как начальное приближение. В качестве критерия остановки итерационного процесса используется неравенство

$$\|T^{(i+1)} - T^{(i)}\| \leq \epsilon.$$

Здесь функциональная норма определяется следующим образом

$$\|T^{(i)}\| = \left[ \iint_{D_0} (T^{(i)})^2 dx dy \right]^{1/2}.$$

Вычислительная устойчивость обеспечивается, если

$$\sum_{k=1}^n |a_k^{(i+1)} - a_k^{(i)}| \leq \frac{\epsilon}{M},$$

где  $M = \max_k \|j_k\|$

### Решение задачи термоупругости

Введением функции напряжений Эри уравнение совместности деформаций приводится к виду

$$\Delta \Delta U = \frac{\alpha E}{l} q(T), \quad (8)$$

где  $E$  – модуль упругости материала массива.

Искомое напряженное состояние представим в виде

$$s_x = s_x^0 + s_x^1, \quad s_y = s_y^0 + s_y^1, \quad t_{xy} = t_{xy}^0 + t_{xy}^1, \quad (9)$$

где  $s_x^0, s_y^0, t_{xy}^0$  – компоненты тензора напряжений в тепловыделяющем перфорированном массиве при отсутствии трещин;  $s_x^1, s_y^1, t_{xy}^1$  – соответственно, вызванные наличием трещин в массиве.

Из-за двоякопериодичности системы определение напряжений  $s_x^0, s_y^0, t_{xy}^0$  сводится к решению краевой задачи для одного трансляционного элемента (область  $D_0$ ). Двоякая периодичность функции Эри позволяет сформулировать граничные условия для каждой элементарной ячейки.

$$U = \frac{\partial U}{\partial n} = 0, \quad \text{на дуге } S \text{ окружности} \quad (10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial^3 U}{\partial n^3} = 0, \quad \text{на } AB, BO, OC.$$

Для решения краевой задачи (8), (10) для массива без трещин применяется вариационный метод Ритца. Этой задаче отвечает вариационная задача о минимуме интеграла

$$I = \iint_{D_0} \left[ (\Delta U)^2 - 2 \frac{aEq}{I} U \right] dx dy \quad (11)$$

при тех же условиях. Приближенное решение задачи ищется в виде

$$U_n = \sum_{k=1}^n a_k j_k(x, y), \quad (12)$$

где система базисных функций  $\{j_k(x, y)\}$  удовлетворяет условиям:

- 1)  $j_k = \frac{\partial j_k}{\partial n} = 0$ , на дуге  $S$
- 2)  $j_k$  симметричны относительно прямолинейных границ элементарной ячейки, т. е.

$$\frac{\partial j_k}{\partial n} = \frac{\partial^3 j_k}{\partial n^3} = 0. \quad \text{на } AB, BO, OC$$

Построение такой системы базисных функций имеется в [11]. Для определения постоянных  $a_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_k \iint_D [\Delta j_k \Delta j_s] dx dy = \frac{aE}{I} \iint_D q j_s dx dy. \quad (13)$$

После нахождения неизвестной функции Эри, напряжения могут быть выражены через эту функцию следующими формулами

$$s_x^0 = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial^2 j_k}{\partial y^2}, \quad s_y^0 = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial^2 j_k}{\partial x^2}, \quad t_{xy}^0 = - \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial^2 j_k}{\partial x \partial y}. \quad (14)$$

Для определения введенных напряжений  $s_x^1, s_y^1, t_{xy}^1$  имеем однородное бигармоническое уравнение относительно функции Эри.

Граничные условия задачи на этом этапе имеют следующий вид

$$s_r^1 - it_{rq}^1 = -(s_r^0 - it_{rq}^0), \quad \text{на контурах отверстий} \quad (15)$$

$$s_y^1 - it_{xy}^1 = -(s_y^0 - it_{xy}^0), \quad \text{на берегах трещин вне концевых зон} \quad (16)$$

$$s_y^1 - it_{xy}^1 = s_s - (s_y^0 - it_{xy}^0). \quad \text{на берегах концевых зон трещин}$$

На основании формул Колосова-Мухелишвили [7] и граничных условий на контурах круговых отверстий (15) и берегах трещин с концевыми зонами (16) задача сводится к определению двух аналитических в области  $D$  функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  из краевых условий

$$\Phi_*(t) + \overline{\Phi_*(t)} - [t\Phi'_*(t) + \Psi(t)]e^{2iq} = 0, \quad (17)$$

$$\Phi_*(t) + \overline{\Phi_*(t)} + t\overline{\Phi'_*(t)} + \overline{\Psi(t)} = c - s_y^0(t). \quad (18)$$

Здесь  $t = l e^{iq} + m w_1 + n w_2$  ( $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );  $t$  – аффикс точек берегов трещин с концевыми зонами;  $c = 0$  на свободных берегах трещин и  $c = s_y$  на берегах концевых зон трещин.

Решение краевой задачи (17),(18) ищем в виде

$$\Phi_*(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z); \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z); \quad (19)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2p} \int_L g(x) z(x-z) dx + A; \quad (20)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2p} \int_L [z(x-z) + Q(x-z) - xg(x-z)] g(x) dx + B;$$

$$\Phi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2} \frac{R^{2k+2} g^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}; \quad (21)$$

$$\Psi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+2} \frac{R^{2k+2} g^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2} \frac{R^{2k+2} Q^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}.$$

Интегралы в (20) берутся по отрезку  $L = \{[-1, -1] + [1, 1]\}$ ;  $g(z)$  – эллиптическая функция Вейерштрасса;  $z(z)$  – дзета-функция Вейерштрасса,  $Q(z)$  – специальная мероморфная функция [4];  $g(x) = \frac{2G}{1 + \kappa_0} \frac{\partial}{\partial x} [u^+(x, 0) - u^-(x, 0)]$  – искомая функция;  $G$  – модуль сдвига материала среды;  $\kappa_0 = 3 - 4m$ ;  $m$  – коэффициент Пуассона материала;  $A$  и  $B$  – постоянные.

Приведем зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты представлений (19) – (21). Условие симметрии относительно координатных осей приводит к равенствам:  $\text{Im} a_{2k} = 0$ ;  $\text{Im} b_{2k} = 0$  при  $k = 1, 2, \dots$

Из условий двоякопериодичности поля температур и напряжений, а также в силу самоуравновешенности задачи и периодичности главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в  $D$ , следует

$$(A + \bar{A})w_k + \bar{B}w_k = d_k a + \bar{g}_k a + d_k(a + \bar{a}) + b_2 I^2 d_k + a_2 I^2 (d_k + g_k), \quad (k = 1, 2) \quad (22)$$

$$a = -\frac{1}{2p} \int_L t \cdot g(t) dt; \quad d_k = 2z \left( \frac{w_k}{2} \right); \quad g_k = 2Q \left( \frac{w_k}{2} \right) - \bar{w}_k g \left( \frac{w_k}{2} \right).$$

Обозначение постоянных двоякопериодической решетки соответствует употребляемому в [4]. Из системы (22) определяются постоянные  $A$  и  $B$ , причем эти величины вещественны. Каждую из постоянных  $A$  и  $B$  в дальнейшем удобно представить в виде



суммы двух постоянных:  $A = A_* + A_{**}$ ;  $B = B_* + B_{**}$ , где  $A_{**}$  и  $B_{**}$  зависят только от коэффициентов  $a_2$  и  $b_2$ , т.е. они находятся из системы (22) в предположении, что  $a = 0$ .

Нетрудно убедиться, что общие представления (19)-(21) определяют класс симметричных задач с двоякопериодическим распределением напряжений. Незвестная функция  $g(x)$  и постоянные  $a_{2k}$  и  $b_{2k}$  должны быть определены из краевых условий (17)-(18). В силу выполнения условий двоякопериодичности система граничных условий (17) заменяется одним функциональным уравнением, например на контуре  $t = l \exp(iq)$ , а система условий (18) краевым условием на  $L$ .

Для составления уравнений относительно коэффициентов  $a_{2k}$  и  $b_{2k}$  функций  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  представим граничное условие (17) в виде

$$\Phi_2(t) + \overline{\Phi_2(t)} - [\overline{\Phi_2'(t)} + \Psi_2(t)] e^{2iq} = f_1(q) + if_2(q), \quad (23)$$

где 
$$f_1(q) + if_2(q) = -\Phi_1(t) - \overline{\Phi_1(t)} + [\overline{\Phi_1'(t)} + \Psi_1(t)] e^{2iq}. \quad (24)$$

Относительно функции  $f_1(q) + if_2(q)$  будем считать, что она разлагается на  $|t| = l$  в ряд Фурье. В силу симметрии этот ряд имеет вид

$$f_1(q) + if_2(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2kiq}, \quad \text{Im } A_{2k} = 0; \quad (25)$$

$$A_{2k} = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} (f_1(q) + if_2(q)) e^{-2kiq} dq. \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Подставив в (25) выражение (24) с учетом (20) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью теории вычетов, найдем

$$A_0 = -A - \bar{A} - \frac{1}{2p} \int_L g(t) f_0(t) dt; \quad A_2 = B - \frac{1}{2p} \int_L g(t) f_2(t) dt;$$

$$A_{2k} = -\frac{1}{2p} \int_L g(t) f_{2k}(t) dt; \quad k = -1, \pm 2, \dots$$

$$f_0(t) = 2z(t); \quad f_2(t) = \frac{R^2}{2} g'(t) + tg(t) - z(t) - Q(t);$$

$$f_{2k}(t) = \frac{(2k-1)R^{2k}}{(2k)!} g^{(2k-1)}(t) + \frac{R^{2k-2}}{(2k-2)!} [g^{(2k-3)}(t) - Q^{(2k-2)}(t) + tg^{(2k-2)}(t)]; \quad k = 2, 3, \dots;$$

$$f_{-2k}(t) = -\frac{R^{2k}}{(2k)!} g^{(2k-1)}(t). \quad k = 1, 2, \dots$$

Подставляя в левую часть краевого условия (23) вместо функций  $\Phi_2(t)$ ,  $\overline{\Phi_2(t)}$ ,  $\Phi_2'(t)$  и  $\Psi_2(t)$  их разложения в ряды Лорана в окрестности точки  $z = 0$ , а в правую часть (23) ряд Фурье (25), и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\exp(iq)$ , получим две бесконечные линейные системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_{2k}$  и  $b_{2k}$  [4, 5]

$$a_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} a_{2k+2} + b_j; \quad (j = 0, 1, \dots) \quad (26)$$

$$b_0 = A_2 - \frac{A_0 R^2 K_3}{1 - 2I^2 K_1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2} R^{2k+4}}{2^{2k+4}} A_{-2k-2};$$

$$b_j = A_{2j+2} - \frac{(2j+1)A_0 \cdot g_{j+1} R^{2j+2}}{(1 - 2I^2 K_1) \cdot 2^{2j+2}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} R^{2k+2j+4}}{(2j)!(2k+3)! 2^{2j+2k+4}} A_{-2k-2};$$

$$(j = 1, 2, \dots)$$

$$b_2 = \frac{1}{1 - 2R^2 K_1} \left[ 2R^2 K_0 - A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{k+1} \cdot R^{2k+2}}{2^{2k+2}} a_{2k+2} \right]; \quad (27)$$

$$b_{2j+4} = (2j+3)a_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} R^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)! 2^{2j+2k+4}} a_{2k+2} - A_{-2j-2}. \quad (j = 0, 1, \dots)$$

Здесь коэффициенты  $a_{j,k}$  определяются по формулам (3.5), приведенным в [4, гл. 1].

Полагая, что функции (19) – (21) удовлетворяют краевому условию на берегах трещин  $L$ , получаем сингулярное интегральное уравнение относительно  $g(x)$

$$\frac{1}{2p} \int_L g(t) K(t-x) dt + H(x) = c - S_y^0(x); \quad \text{на } L \quad (28)$$

$$K(x) = 3z(x) + Q(x) - xg(x); \quad H(x) = 2A + B + 2\Phi_2(x) + x\Phi_2'(x) + \Psi_2(x);$$

$$2A + B = \frac{1}{w_1} [(a + a_2 I^2)(d_1 + g_1) + (2a + b_2 I^2)d_1].$$

Сингулярное интегральное уравнение (28) совместно с системами (26), (27) являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить функцию  $g(x)$  и коэффициенты  $a_{2k}$ ,  $b_{2k}$ . Зная функции  $\Phi_2(z)$ ,  $\Psi_2(z)$  и  $g(x)$  можно определить напряженно-деформированное состояние тепловыделяющего массива при наличии трещин с полосами пластического течения.

#### Методика численного решения и анализ

Используя в основном параллелограмме периодов следующие разложения:

$$z(z) = \frac{1}{z} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{j+1} z^{2j+1}}{2^{2j+2}}, \quad g(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+1)g_{j+1} z^{2j}}{2^{2j+2}}, \quad Q(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+2)r_{j+1}}{2^{2j+2}} z^{2j+1},$$

уравнение можно привести к обычной форме

$$\frac{1}{p} \int_L \frac{g(t) dt}{t-x} + \frac{1}{p} \int_L g(t) K_0(t-x) dt + H(x) = c - S_y^0(x). \quad (29)$$

Сделаем замену переменных  $t = x\mathbf{1}$ ,  $x = x_0\mathbf{1}$  и после некоторых простых преобразований уравнение (29) приведем к виду

$$\frac{1}{p} \int_{L_0} \frac{g_*(x)}{x-x_0} dx + \frac{1}{p} \int_{L_0} g_*(x) K_0(x-x_0) dx + H_*(x_0) = f_*(x_0); \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
g_*(x) &= g(t); & L_0 &= \{[-1, -I_1] + [I_1, 1]\}; & I_1 &= \frac{R}{\mathbf{1}}; \\
K(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} K_j \left(\frac{\mathbf{1}}{2}\right)^{2j+2} x^{2j+1}; & K_0 &= w_1 \text{Red}_1; & K_j &= g_{j+1}; \\
K_0^* &= -\frac{w_1}{2}(\bar{g}_1 + \bar{d}_1); & K_*(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} K_j^* \left(\frac{\mathbf{1}}{2}\right)^{2j+2} x^{2j+1}; \\
K_j^* &= (j+1)(r_{j+1} - g_{j+1}); & & & j &= 1, 2, \dots \\
K_0(x) &= K_*(x) - K(x); & K_*(x_0) &= H(x_0 \mathbf{1}); & f_*(x_0) &= c(x_0 \mathbf{1}) - s_y^0(x_0 \mathbf{1}).
\end{aligned}$$

Учитывая, что  $g_*(x) = -g_*(-x)$ , запишем уравнение (30) как

$$\frac{2}{p} \int_{I_1}^1 \frac{x g_*(x) dx}{x^2 - x_0^2} + \frac{1}{p} \int_{I_1}^1 K_0^*(x, x_0) g_*(x) dx + H_*(x_0) = f_*(x_0); \quad (31)$$

$$K_0^*(x, x_0) = K_0(x - x_0) + K_0(x + x_0); \quad I_1 \leq x_0 \leq 1.$$

Преобразуем уравнение (31) к виду, более удобному для нахождения его приближенного решения. Для этого сделаем замену переменных

$$x^2 = u = \frac{1 - I_1^2}{2}(t + 1) + I_1^2, \quad x_0^2 = u_0 = \frac{1 - I_1^2}{2}(h + 1) + I_1^2.$$

При этом отрезок интегрирования  $[I_1, 1]$  переходит в отрезок  $[-1, 1]$ , а преобразованное уравнение (31) принимает стандартную форму

$$\frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{g_*(t) dt}{t - h} + \frac{1}{p} \int_{-1}^1 g_*(t) B(h, t) dt + H_*(h) = f_*(h). \quad (32)$$

$$\text{Здесь } g_*(t) = g_*(x); \quad B(h, t) = \frac{1 - I_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (K_j^* - K_j) \left(\frac{\mathbf{1}}{2}\right)^{2j+2} \cdot u_0^j A_j;$$

$$A_j = \left\{ (2j+1) + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{u}{u_0}\right) + \mathbf{K} + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)\mathbf{K}\mathbf{1}}{1 \cdot 2 \cdot 3\mathbf{K}(2j+1)} \cdot \left(\frac{u}{u_0}\right)^j \right\};$$

$$H_*(h) = H_*(x_0); \quad f_*(h) = c(x_0) - s_y^0(x_0 \mathbf{1}).$$

Для построения решения сингулярного интегрального уравнения воспользуемся методом [6, 9] прямого решения сингулярных интегральных уравнений. Так как напряжения в тепловыделяющем массиве ограничены, то решение интегрального уравнения (32) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Представим решение в виде

$$g_*(h) = g_0(h) \sqrt{1 - h^2},$$

где  $g_0(h)$  – новая неизвестная ограниченная функция.

Использование квадратурных формул [6, 9] позволяет интегральное уравнение (32) свести к системе  $M + 1$  алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^M \frac{g_0(t_m)}{M+1} \sin^2 \frac{pm}{M+1} \left[ \frac{1}{t_m - h_r} + B(t_m, h_r) \right] = p[c(h_r) - H_*(h_r)], \quad (33)$$

$$(r = 1, 2, \dots, M + 1)$$

$$\text{где } t_m = \cos \frac{pm}{M+1} \quad (m = 1, 2, \dots, M), \quad h_r = \cos \frac{2r-1}{2(M+1)} p. \quad (r = 1, 2, \dots, M + 1)$$

Полученная алгебраическая система из  $M + 1$  уравнений (33), служащая для определения неизвестных  $g_0(t_1), g_0(t_2), \dots, g_0(t_M)$  и  $\mathbf{l}_0$ , обеспечивает удовлетворение дополнительного условия, при котором существует единственное решение в классе всюду ограниченных функций (см. Н. И. Мухелишвили [8] с. 326).

Из-за неизвестного размера концевой зоны пластического течения объединенная алгебраическая система, состоящая из разрешающей системы уравнений задачи (26), (27), (33) является нелинейной. Чтобы избежать решения нелинейной системы уравнений, применяем обратный способ. Считаем заданным размер концевой зоны трещины, а в процессе решения определяем параметр нагружения  $q_*$ . При таком способе решения алгебраическая система (26), (27), (33) оказывается линейной. Для численных расчетов полагалось  $M = 30$ , что отвечает разбиению интервала интегрирования на 30 чебышевских узлов соответственно. Расчеты были выполнены методом Гаусса с выбором главного элемента. Расчеты проводились для правильных нормированных сеток центров отверстий. Исследовались случаи расположения центров отверстий в вершинах квадратной  $h = 1$ ;  $a = p/2$  и треугольной сеток  $h = 1$ ;  $a = p/3$ . В результате численного расчета найдена зависимость длины концевой зоны трещины, раскрытие противоположенных берегов трещин с концевыми зонами от величины параметра нагружения  $q_*$ .

Для определения предельно-равновесного состояния тепловыделяющего массива, при котором происходит рост трещины, используем критерий (5). Используя полученное решение, вычислим раскрытие  $u(x,0)$  на берегах полосы предразрушения трещины

$$u(x,0) = -\frac{1+\kappa_0}{2G} \int_{-1}^x g(x) dx.$$

Раскрытие берегов полосы предразрушения при  $x = -\mathbf{l}_1$  (у основания пластической зоны) будет

$$u(-\mathbf{l}_1,0) = -\frac{1+\kappa_0}{2G} \int_{-1}^{-\mathbf{l}_1} g(x) dx.$$

Следовательно, условием, определяющим предельную интенсивность внутренних источников тепла массива (параметр нагружения  $q_*$ ), при которой происходит рост трещины в точке  $x = \pm \mathbf{l}_1$ , будет

$$-\frac{1+\kappa_0}{2G} \int_{-1}^{-\mathbf{l}_1} g(x) dx = d_c.$$

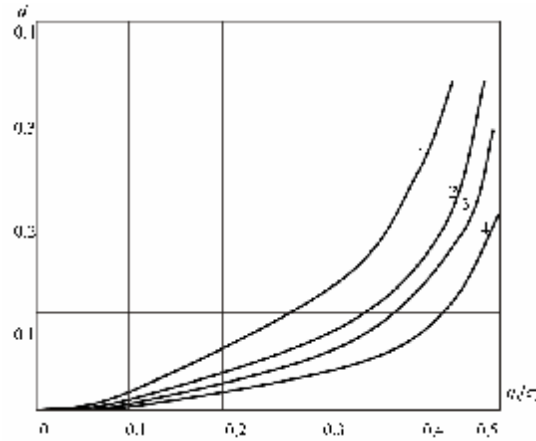
Используя замену переменной, заменяя интеграл суммой, получим

$$-\frac{1+\kappa_0}{2G} \frac{p(1-l)}{M} \sum_{m=1}^{M_1} g_0(t_m) = d_c. \quad (34)$$

Здесь  $M_1$  – количество узловых точек в интервале  $(-\mathbf{l}, -\mathbf{l}_1)$ .

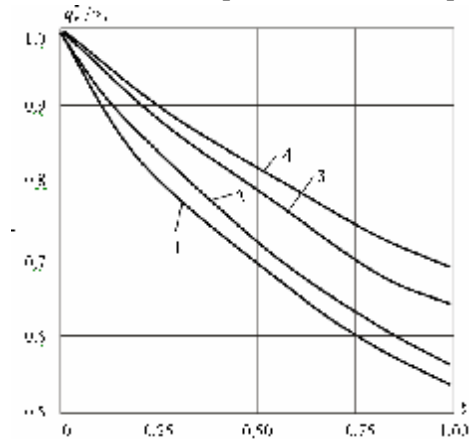
Совместное решение объединенной алгебраической системы (26), (27), (33) и (34) дает возможность определить критическую величину интенсивности внутренних источников тепла и размер полосы предразрушения для состояния предельного равновесия, при котором происходит рост трещин в массиве.

На рис. 2 представлены графики зависимости относительной длины зоны пластического течения  $d = \mathbf{l}_0/l$  от безразмерного значения интенсивности тепловыделения  $q_*/s_s$  для некоторых значений радиуса отверстия  $l = 0,2 \div 0,5$  (кривые 1 – 4) для треугольной сетки отверстий.



**Рис. 2.** Зависимости относительной длины зоны пластического течения  $d = \mathbf{l}_0/l$  от безразмерного значения интенсивности тепловыделения  $q_*/s_s$  для некоторых значений радиуса отверстия  $l = 0,2 \div 0,5$  (кривые 1 – 4 соответственно) для треугольной сетки отверстий

На рис. 3 приведен график зависимости интенсивности тепловыделения в массиве  $q_*^c/s_s$  от относительной длины трещины  $\mathbf{l}_* = \frac{8s_s \mathbf{l}}{\rho E d_c}$  для некоторых значений радиуса отверстия  $l = 0,2 \div 0,5$  (кривые 1 – 4) для квадратной сетки отверстий.



**Рис. 3.** Зависимости безразмерной критической интенсивности тепловыделения  $q_*^c/s_s$  в массиве от относительной длины трещины  $I_* = \frac{8s_s I}{\rho E d_c}$  для некоторых значений радиуса отверстия  $I = 0,2 \div 0,5$  (кривые 1 – 4 соответственно) для квадратной сетки отверстий

### Заключение

Модель трещины с концевыми зонами пластического течения при постоянном напряжении позволяет провести анализ предельного равновесия трещин в перфорированном тепловыделяющем массиве с помощью деформационного критерия. Анализ предельно-равновесного состояния тепловыделяющего перфорированного массива при котором происходит рост трещин сводится к параметрическому исследованию разрешающей алгебраической системы (13), (26), (27), (33) и критерия развития трещины (34) при различных теплофизических и механических характеристиках материала, а также геометрических параметрах массива. Такой анализ позволил определить предельный размер концевой зоны трещины, допустимую величину параметра нагружения  $q_*$ .

г. Баку

Поступила: 24 мая 2007 г.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман, Р. Динамическое программирование и уравнения в частных производных / Р. Беллман, Э. М. Энджел : Мир, 1974. – 208 с.
2. Витвицкий, П. М. Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения: Обзор / П. М. Витвицкий, В. В. Панасюк, С. Я. Ярема // Проблемы прочности. – 1973. – №2. – С. 3–19.
3. Гольденблат, И. И. Расчеты температурных напряжений в ядерных реакторах / И. И. Гольденблат, Н. А. Николаенко. – М. : Госатомиздат, 1962. – 147 с.
4. Григолюк, Э. И. Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. – М. : Наука, 1970. – 556 с.
5. Мирсалимов, В. М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов – Баку : ЭЛМ, 1984. – 124 с.
6. Мирсалимов, В. М. Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
7. Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
8. Мухелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили – М. : Наука, 1968. – 512 с.
9. Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – Киев : Наукова думка, 1976. – 443 с.
10. Салманов, Э. В. Решение задачи механики разрушения для тепловыделяющего перфорированного массива при нестационарном температурном поле / Э. В. Салманов // Механика : Машиностроение. – 2006. – №3. – С. 3 – 7.
11. Соболев, С. Л. Определение термических напряжений в среде с пустотами / С. Л. Соболев, Г. В. Мухина // Атомная энергия. – Т. 5. – 1958. – Вып. 2. – С. 178 – 181.
12. Фильштинский, Л. А. Задачи теплопроводности и термоупругости для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий / Л. А. Фильштинский // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – Киев : Наукова думка. – 1964. – Вып.4. – С. 103 – 112.

## ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О РАЗВИТИИ ПОЛОСТЕЙ В ВЯЗКИХ ТЕЛАХ

(Азербайджанский технический университет, институт математики и механики  
НАН Азербайджана)

Рассматривается плоская задача с неизвестной границей о развитии периодической системы полостей в вязких телах при конечных деформациях. Получено решение периодической задачи о развитии системы одинаковых полостей в условиях стационарного медленного течения ньютоновской вязкой жидкости.

**1. Постановка задачи.** Известно, что если к вязкоупругому телу с некоторыми начальными полостями мгновенно приложены нагрузки, которые затем не изменяются, то хрупкое разрушение возможно лишь в стадии приложения нагрузок, при пренебрежении старением материала. Если хрупкого разрушения не произошло, начинается течение материала, которое со временем существенно изменяет форму начальных полостей. Возникающие при этом эффекты лучше исследовать на предельном случае вязкой жидкости.

Рассмотрим вязкое тело, подчиняющееся закону Ньютона и занимающее неограниченную область во внешности бесконечного ряда полостей. Внутренность каждого контура  $L_m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) представляет собой некоторую полость, форма которой известна лишь в начальный момент приложения нагрузок. Задача считается плоской. Итак, пусть имеется неограниченная область (плоскость) с одинаковыми полостями, имеющими центры в точках  $P_m = mw$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $w = 2$ .

Предполагается, что: а) стенки каждой полости подвержены одинаковому постоянному давлению  $p(t)$ ; б) на бесконечности имеет место однородное напряженное состояние  $s_x = s_x^\infty(t)$ ;  $s_y = s_y^\infty(t)$ ;  $t_{xy} = 0$  ( $t$  – время); в) контур  $L_m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) каждой полости в любой момент времени имеет две оси симметрии, совпадающие с осями неподвижной декартовой системы координат; г) течение вязкой жидкости медленное и квазистационарное, так что в уравнениях Навье-Стокса можно пренебречь инерционными членами.

Для простоты изложения в дальнейшем ограничимся рассмотрением случая несжимаемого тела.

В рассматриваемом случае [2] составляющие компонент тензора напряжений  $s_x$ ,  $s_y$ ,  $t_{xy}$  и компоненты вектора скорости  $u$ ,  $v$  в системе координат  $Oxy$  могут быть представлены при помощи формул, аналогичных соотношениям Колосова-Мусхелишвили в плоской задаче теории упругости

$$s_x + s_y = 4\operatorname{Re}\Phi(z, t), \quad (z = x + iy) \quad (1.1)$$

$$s_y - s_x + 2it_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z,t) + \Psi(z,t)], \quad 2m(i\mathfrak{k} + i\mathfrak{k}) = j(z,t) - \overline{zj'(z,t)} - \overline{y(z,t)}.$$

Здесь  $\Phi(z,t) = j'(z,t)$ ,  $\Psi(z,t) = y'(z,t)$ ,  $2m$  – коэффициент сдвиговой вязкости;  $j(z,t)$  и  $y(z,t)$  однозначные аналитические функции  $z$  в области, занятой вязким телом; штрихом в дальнейшем будем обозначать производную по соответствующей комплексной переменной.

На контуре полости  $L_m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) граничные условия имеют вид

$$s_n = -p(t), \quad t_{nt} = 0. \quad (1.2)$$

Обозначим уравнение неизвестной границы полости  $L_m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) через  $F(x, y, t)$ . Функция  $F(x, y, 0)$  – считается заданной.

На неизвестной границе полости  $L_m$  должно выполняться условие кинематической совместности

$$\frac{\partial F}{\partial t} + i\mathfrak{k} \frac{\partial F}{\partial x} + i\mathfrak{k} \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (1.3)$$

Используя соотношения (1.1), граничные условия на контуре  $L_m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) запишем в виде

$$\Phi(z,t) + \overline{\Phi(\bar{z},t)} - [\bar{z}\Phi'(z,t) + \Psi(z,t)] e^{2ia} = -p(t) \quad (z \in L_m) \quad (1.4)$$

где  $a$  – угол, составляемый нормалью к контуру полости с осью  $x$ .

В бесконечно удаленной точке аналитические функции  $\Phi(z,t)$  и  $\Psi(z,t)$  ведут себя следующим образом

$$\begin{aligned} \text{При } z \rightarrow \infty \quad \Phi(z,t) &= \frac{1}{4} [s_x^\infty(t) + s_y^\infty(t)] + O(z^{-2}); \\ \Psi(z,t) &= \frac{1}{2} [s_y^\infty(t) - s_x^\infty(t)] + O(z^{-2}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Следовательно, поставленная задача свелась к решению краевой задаче (1.3) – (1.5) с неизвестной границей от одной комплексной и одной действительной переменных.

**2. Решение краевой задачи.** Перейдем на параметрическую плоскость  $z$  с помощью преобразования  $z = w(z,t)$ . Аналитическая функция  $z = w(z,t)$  осуществляет конформное отображение физической области  $D_z$  на область  $D_z$  в параметрической плоскости  $z$ , являющуюся внешностью окружностей  $\Gamma_m$  радиуса  $l$ , с центрами в точках  $P_m$  со взаимно однозначным соответствием бесконечно удаленных точек, а также соответствующих участков действительных и мнимых осей.

Краевые условия (1.4) – (1.5) на параметрической плоскости  $z$  примут следующий вид

$$\Phi_*(z,t) + \overline{\Phi_*(z,t)} - \frac{z^2}{l^2 \overline{w'(z,t)}} \{ \overline{w(z,t)} \Phi'_*(z,t) + w'(z,t) \Psi_*(z,t) \} = -p(t) \quad (2.1)$$

при  $t = 0$   $w(z,0) = w_0(z)$  – заданная функция

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad \Phi_*(z,t) = \frac{1}{4} [s_x^\infty(t) + s_y^\infty(t)] + O(z^{-2}); \quad (2.2)$$



$$\Psi_*(z, t) = \frac{1}{2} [s_y^\infty(t) - s_x^\infty(t)] + O(z^{-2}).$$

Здесь были приняты обозначения  $\Phi_*(z, t) = \Phi[w(z, t), t]$ ;  $\Psi_*(z, t) = \Psi[w(z, t), t]$ .

Таким образом, задача сводится к определению трех неизвестных функций  $\Phi_*(z, t)$ ,  $\Psi_*(z, t)$  и  $w(z, t)$ .

Условие кинематической совместности удобно записать в следующем виде [3]:

$$2m \operatorname{Re} \left[ z \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \overline{w'(z, t)} \right] = \\ = \operatorname{Re} \left\{ z w'(z, t) \left[ \overline{j_*(z, t)} - \frac{\overline{w(z, t)}}{w'(z, t)} j'_*(z, t) - y_*(z, t) \right] \right\} \text{ на } \Gamma_m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.3)$$

Здесь принято  $j_*(z, t) = j[w(z, t), t]$ ,  $y_*(z, t) = y[w(z, t), t]$ .

Рассмотрим класс решений краевой задачи (2.1) – (2.3), для которого выполняется условие

$$2m \frac{\partial w}{\partial t} = j_*(z, t) - \frac{w(z, t)}{w'(z, t)} \overline{j'_*(z, t)} - \overline{y_*(z, t)} \text{ на } \Gamma_m, \quad (2.4)$$

выражающее векторное равенство кинематической скорости и скорости материальной частицы на границе полости  $L_m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). При выполнении условия (2.4) условие (2.3) выполняется тождественно.

Складывая выражение (2.4) со следующим условием на  $\Gamma_m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

$$j_*(z, t) + \frac{w(z, t)}{w'(z, t)} \overline{j'_*(z, t)} + \overline{y_*(z, t)} = -p(t)w(z, t)$$

получим

$$2m \frac{\partial w}{\partial t} - p(t)w(z, t) = 2j_*(z, t) \text{ на } \Gamma_m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.5)$$

Для определения трех аналитических функций  $\Phi_*(z, t)$ ,  $\Psi_*(z, t)$  и  $w(z, t)$  получаем нелинейную краевую задачу (2.1), (2.5) на  $\Gamma_m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Искомые функции  $\Phi_*(z, t)$ ,  $\Psi_*(z, t)$  и  $w(z, t)$  ищем [1] в виде рядов

$$\Phi_*(z, t) = a_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2}(t) \frac{I^{2k+2} r^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} + \frac{1}{4} [s_x^\infty(t) + s_y^\infty(t)]; \quad (2.6) \\ \Psi_*(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+2}(t) \frac{I^{2k+2} r^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2}(t) \frac{I^{2k+2} S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!} + \frac{1}{2} [s_y^\infty(t) - s_x^\infty(t)]; \\ w(z, t) = z + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2}(t) \frac{I^{2k+2} r^{(2k-1)}(z)}{(2k+1)!};$$

$$\text{где } r(z) = \left( \frac{p}{w} \right)^2 \frac{1}{\sin^2(pz/w)} - \frac{1}{3} \left( \frac{p}{w} \right)^2; \quad S(z) = \sum_m \left[ \frac{P_m}{(z - P_m)^2} - \frac{2z}{P_m^2} - \frac{1}{P_m} \right].$$

Знак штрих у суммы означает, что при суммировании исключается индекс  $m=0$ .

Приведем зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты соотношений (2.6), (2.7).

Из условий симметрии относительно координатных осей находим, что

$$\operatorname{Im} a_{2k+2}(t) = 0, \quad \operatorname{Im} b_{2k+2}(t) = 0, \quad \operatorname{Im} A_{2k+2}(t) = 0 \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Нетрудно убедиться, что соотношения (2.6) – (2.7) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений.

Из условия равенства нулю главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющие две конгруэнтные точки в  $D_z$ , следует, что

$$a_0(t) = \frac{P^2}{24} b_2(t) I^2.$$

В силу выполнения условий периодичности система граничных условий (2.1) и (2.5) на  $\Gamma_m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) заменяется функциональными уравнениями, например, на контуре  $\Gamma_0$ .

Для составления уравнений относительно остальных коэффициентов соотношений (2.6), (2.7) функций  $\Phi_*(z, t)$ ,  $\Psi_*(z, t)$ ,  $w(z, t)$ , разложим эти функции в ряды Лорана в окрестности нулевой точки  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \Phi_*(z, t) = & \frac{1}{4} [s_x^\infty(t) + s_y^\infty(t)] + a_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2}(t) \left( \frac{I}{z} \right)^{2k+2} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2}(t) I^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} r_{j,k} z^{2j}; \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \Psi_*(z, t) = & \frac{1}{2} [s_y^\infty(t) - s_x^\infty(t)] + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+2}(t) \left( \frac{I}{z} \right)^{2k+2} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+2}(t) I^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} r_{j,k} z^{2j} - \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) a_{2k+2}(t) I^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} (2j+2k+2) r_{j,k} z^{2j}; \end{aligned}$$

$$w(z, t) = z - \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2}(t) \frac{I^{2k+2}}{(2k+1)z^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2}(t) I^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k} z^{2j+1}}{2j+1}; \quad (2.10)$$

$$\text{Здесь} \quad r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)! g_{j+k+1}}{(2j)!(2k+1)! 2^{2j+2k+1}}; \quad g_{j+k+1} = 2 \sum_m' \frac{1}{m^{2j+2k+2}}.$$

Подставляя в граничное условие (2.1) на контуре  $\Gamma_0$  ( $z = I e^{iq}$ ) вместо  $\Phi_*(z, t)$ ,  $\Psi_*(z, t)$  и  $w(z, t)$  их разложения (2.8) – (2.10) и сравнивая коэффициенты при  $\exp(2ikq)$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), получим бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_{2k}(t)$ ,  $b_{2k+2}(t)$ ,  $A_{2k}(t)$ . Ниже приводятся уравнения второго приближения:

$$\begin{aligned} a_1 F + A_2 F_1 + A_4(t) F_2 + b_1 I^2 F_3 + b_2 I^4 F_4 - m_0 - f_0 &= -p(t); \\ a_1 F_1 + b_1 I^2 F + b_2 I^4 F_3 + A_2(t) F_2 - m_1 - f_0 &= 0; \\ a_1 F_2 + b_1 I^2 F_1 + b_2 I^4 F - m_2 - f_2 &= 0; \\ a_1 F_3 + A_2(t) F + A_4(t) F_1 + b_1 I^2 F_4 - m_3 - f_3 &= 0; \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$a_1 F_4 + A_4(t)F + A_2(t)F_3 - m_4 - f_4 = 0.$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$a_1 = 1 + A_2(t)I^2 r_{0,0} + A_4(t)I^4 r_{0,1};$$

$$b_1 = A_2(t)I^2 r_{1,0} + A_4(t)I^4 r_{1,1}; b_2 = A_2(t)I^2 r_{2,0} + A_4(t)I^4 r_{2,1};$$

$$F = 2 \left[ \frac{s_x^\infty(t) + s_y^\infty(t)}{4} + a_0(t) + a_2(t)I^2 r_{0,0} + a_4(t)I^4 r_{0,1} \right];$$

$$F_1 = a_2(t) + a_2(t)I^2 r_{1,0} + a_4(t)I^6 r_{1,1}; \quad F_2 = a_4(t) + a_4(t)I^8 r_{2,1} + a_2(t)I^6 r_{2,0};$$

$$F_3 = a_2(t) + a_2(t)I^4 r_{1,0} + a_4(t)I^6 r_{1,1}; \quad F_4 = a_4(t) + a_2(t)I^6 r_{2,0} + a_4(t)I^8 r_{2,1};$$

$$m_0 = 2a_2(t)A_2(t) + \frac{4}{3}A_4(t)a_4(t) + \frac{2}{3}b_1 I^2 [a_2(t)I^4 r_{1,0} + a_4(t)I^6 r_{1,1}] + \\ + \frac{4}{5}b_2 I^4 [a_2(t)I^6 r_{2,0} + a_4(t)I^8 r_{2,1}];$$

$$m_1 = -2a_2(t)a_1 + 4A_2(t)a_4(t) + \frac{2}{5}b_2 I^4 [a_2(t)I^4 r_{1,0} + a_4(t)I^6 r_{1,1}];$$

$$m_2 = -4a_4(t)a_1 - \frac{2}{3}a_2(t)b_2 I^2;$$

$$m_3 = \frac{2}{3}a_2(t)A_4(t) + 2a_1 [a_2(t)I^4 r_{1,0} + a_4(t)I^6 r_{1,1}] +$$

$$+ \frac{4}{5}b_1 I^4 [a_2(t)I^6 r_{2,0} + a_4(t)I^8 r_{2,1}];$$

$$m_4 = -2A_2(t)[a_2(t)I^4 r_{1,0} + a_4(t)I^6 r_{1,1}] + 4a_1 [a_2(t)I^6 r_{2,0} + a_4(t)I^8 r_{2,1}];$$

$$f_0 = a_1 b_2(t) + A_2(t)g_0 + A_4(t)g_1 + b_2(t)b_1 I^2 + b_6(t)b_2 I^4;$$

$$f_1 = a_1 b_4(t) + A_2(t)b_2(t) + A_4(t)g_0 + b_6(t)b_1 I^6;$$

$$f_2 = a_1 b_6(t) + A_2(t)b_4(t) + A_4(t)b_6(t);$$

$$f_3 = a_1 g_0 + A_2(t)g_1 + b_2(t)b_1 I^2 + b_4(t)b_2 I^4;$$

$$f_4 = a_1 g_1 + b_1 g_0 I^2 + b_2(t)b_2 I^4;$$

$$g_0 = \frac{1}{2} [s_y^\infty(t) - s_x^\infty(t)] + b_2(t)I^2 r_{0,0} + b_4(t)I^4 r_{0,1} + b_6(t)I^6 r_{0,2} -$$

$$- 4a_2(t)I^2 r_{0,0} - 16a_4(t)I^4 r_{0,1}$$

$$g_1 = b_2(t)I^2 r_{1,0} + b_4(t)I^6 r_{1,1} + b_6(t)I^8 r_{1,2} - 8a_2(t)I^4 r_{1,0} - 24a_4(t)I^6 r_{1,1}.$$

Система уравнений не является замкнутой. Для замкнутости этой системы уравнений необходимо использовать граничное условие (2.5). Подставляя в граничное условие (2.5) на контуре  $\Gamma_0$  вместо  $j_*(z, t)$ ,  $y_*(z, t)$  и  $w(z, t)$  их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки  $z=0$  и сравнивая коэффициенты при  $\exp(2ikq)$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), получим недостающую бесконечную систему дифференциальных уравнений первого порядка по времени  $t$  относительно коэффициентов  $A_{2k}(t)$ .

$$\frac{1}{4} [s_x^\infty(t) + s_y^\infty(t)] + a_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2}(t) I^{2k+2} r_{0,k} = \quad (2.12)$$

$$= m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{dA_{2k+2}}{dt} I^{2k+2} \cdot r_{0,k} - \frac{p(t)}{2} \left[ 1 + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2}(t) I^{2k+2} \cdot r_{0,k} \right],$$

$$\frac{dA_{2k+2}}{dt} - \frac{p(t)}{2m} A_{2k+2} = \frac{a_{2k+2}(t)}{m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.13)$$

Соотношение (2.12), связывает параметр  $I$  с приложенной нагрузкой.

Если в системе (2.13) взять  $k = 0, 1$ , то получим совместно с (2.11) замкнутую систему уравнений во втором приближении относительно восьми неизвестных  $a_2(t)$ ,  $a_4(t)$ ,  $b_2(t)$ ,  $b_4(t)$ ,  $b_6(t)$ ,  $A_2(t)$ ,  $A_4(t)$  и  $I$ .

Решаем систему уравнений (2.11) относительно  $a_2(t)$ ,  $a_4(t)$ ,  $b_2(t)$ ,  $b_4(t)$ ,  $b_6(t)$  методом последовательного исключения неизвестных. В результате находим

$$b_4(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad b_6(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad b_2(t) = \frac{1}{A_{11}^*} \left[ b_2^* - \frac{c_{21}}{c_{11}} b_1^* - A_{12}^* b_4 - A_{13}^* b_6 \right]; \quad (2.14)$$

$$a_4(t) = \frac{1}{c_{11}} \left[ B_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} B_1 - c_{12} b_2 - c_{13} b_4 - c_{14} b_6 \right];$$

$$a_2(t) = \frac{1}{a_{11}} [B_1 - a_{12} a_4 - a_{13} b_2 - a_{14} b_4 - a_{15} b_6].$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$\Delta = \left( A_{22} - A_{12} \frac{A_{21}}{A_{11}} \right) \left( A_{33} - A_{13} \frac{A_{31}}{A_{11}} \right) - \left( A_{23} - A_{13} \frac{A_{21}}{A_{11}} \right) \left( A_{32} - A_{12} \frac{A_{31}}{A_{11}} \right);$$

$$\Delta_1 = M_1 \left( A_{33} - A_{13} \frac{A_{31}}{A_{11}} \right) - M_2 \left( A_{23} - A_{13} \frac{A_{21}}{A_{11}} \right);$$

$$\Delta_2 = M_2 \left( A_{22} - A_{12} \frac{A_{21}}{A_{11}} \right) - M_1 \left( A_{32} - A_{12} \frac{A_{31}}{A_{11}} \right);$$

$$M_1 = b_3^* - \frac{c_{31}}{c_{11}} b_1^* - \left( b_2^* - \frac{c_{21}}{c_{11}} b_1^* \right) \frac{A_{21}}{A_{11}}; \quad M_2 = b_4^* - \frac{c_{41}}{c_{11}} b_1^* - \left( b_2^* - \frac{c_{21}}{c_{11}} b_1^* \right) \frac{A_{31}}{A_{11}};$$

$$c_{11} = a_{22} - a_{12} \frac{a_{21}}{a_{11}}; \quad c_{12} = a_{23} - a_{13} \frac{a_{21}}{a_{11}}; \quad c_{13} = a_{24} - a_{14} \frac{a_{21}}{a_{11}}; \quad c_{14} = a_{25} - a_{15} \frac{a_{21}}{a_{11}};$$

$$c_{21} = a_{32} - a_{12} \frac{a_{31}}{a_{11}}; \quad c_{22} = a_{33} - a_{13} \frac{a_{31}}{a_{11}}; \quad c_{23} = a_{34} - a_{14} \frac{a_{31}}{a_{11}}; \quad c_{24} = a_{35} - a_{15} \frac{a_{31}}{a_{11}};$$

$$c_{31} = a_{42} - a_{12} \frac{a_{41}}{a_{11}}; \quad c_{32} = a_{43} - a_{13} \frac{a_{41}}{a_{11}}; \quad c_{33} = a_{44} - a_{14} \frac{a_{41}}{a_{11}}; \quad c_{34} = a_{45} - a_{15} \frac{a_{41}}{a_{11}};$$

$$c_{41} = a_{52} - a_{12} \frac{a_{51}}{a_{11}}; \quad c_{42} = a_{53} - a_{13} \frac{a_{51}}{a_{11}}; \quad c_{43} = a_{54} - a_{14} \frac{a_{51}}{a_{11}}; \quad c_{44} = a_{55} - a_{15} \frac{a_{51}}{a_{11}};$$

$$\begin{aligned}
A_{11} &= c_{22} - c_{12} \frac{c_{21}}{c_{11}}; & A_{12} &= c_{23} - c_{13} \frac{c_{21}}{c_{11}}; & A_{13} &= c_{24} - c_{14} \frac{c_{21}}{c_{11}}; \\
A_{21} &= c_{32} - c_{12} \frac{c_{31}}{c_{11}}; & A_{22} &= c_{33} - c_{13} \frac{c_{31}}{c_{11}}; & A_{23} &= c_{34} - c_{14} \frac{c_{31}}{c_{11}}; \\
A_{31} &= c_{42} - c_{12} \frac{c_{41}}{c_{11}}; & A_{32} &= c_{43} - c_{13} \frac{c_{41}}{c_{11}}; & A_{33} &= c_{44} - c_{14} \frac{c_{41}}{c_{11}}; \\
b_1^* &= B_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} B_1; & b_2^* &= B_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} B_1; & b_3^* &= B_4 - \frac{a_{41}}{a_{11}} B_1; & b_4^* &= B_5 - \frac{a_{51}}{a_{11}} B_1; \\
a_{11} &= 2a_1 I^2 r_{0,0} + A_2 (I^2 r_{0,0} - 1 + 4I^2 r_{0,0}) + A_4 (I^6 r_{2,0} + 8I^4 r_{1,0}) + b_1 I^2 \left( 1 + \frac{1}{3} I^4 r_{1,0} \right) + \\
&+ \frac{1}{5} b_2 I^{10} r_{2,0}; & a_{12} &= 2a_1 I^4 r_{0,1} + A_2 (I^6 r_{1,1} + 16I^4 r_{0,1}) + A_4 \left( -\frac{1}{3} + I^8 r_{2,1} + 24I^6 r_{1,1} \right) + \\
&+ \frac{1}{3} b_1 I^8 r_{1,1} + b_2 I^4 \left( 1 + \frac{1}{5} I^8 r_{1,2} \right); & a_{13} &= b_1 I^2 - a_1 - A_2 I^2 r_{0,0} - A_4 I^2 r_{1,0} + \frac{p^2}{12} a_1 I^2; \\
a_{14} &= -A_2 r_{0,1} I^4 - A_4 r_{1,1} I^6; & a_{15} &= -A_2 r_{0,2} I^6 - A_4 r_{1,2} I^8 - b_2 I^4; \\
a_{21} &= a_1 \left( 3 + I^2 r_{1,0} \right) + 2b_1 I^4 r_{0,0} + b_2 I^4 \left( 1 + \frac{3}{5} I^4 r_{1,0} \right) + A_2 I^6 r_{2,0} + 4A_4 I^2 r_{0,0}; \\
a_{22} &= a_1 I^6 r_{1,1} + 2b_1 I^6 r_{0,1} + \frac{3}{5} b_2 I^{10} r_{1,1} + A_2 (I^8 r_{2,1} - 3) + 16A_4 I^4 r_{0,1}; \\
a_{23} &= \frac{p^2}{12} I^4 b_1 - A_2 - A_4 I^2 r_{0,0}; & a_{24} &= -A_4 r_{0,1} I^4 - a_1; & a_{25} &= -b_2 I^6 + A_4 r_{0,2} I^6; \\
B_1 &= -p(t) - \frac{a_1}{2} (\mathbf{s}_x^\infty + \mathbf{s}_y^\infty) + \frac{A_2}{2} (\mathbf{s}_y^\infty - \mathbf{s}_x^\infty); & B_2 &= \frac{A_4}{2} (\mathbf{s}_y^\infty - \mathbf{s}_x^\infty) - \frac{b_1 I^2}{2} (\mathbf{s}_x^\infty + \mathbf{s}_y^\infty); \\
a_{31} &= a_1 I^6 r_{2,0} + b_1 I^2 (1 + I^2 r_{1,0}) + 2b_2 I^6 r_{0,0} + \frac{2}{3} b_1 I^2; \\
a_{32} &= a_1 (5 + I^8 r_{2,1}) + b_1 I^8 r_{1,1} + 2b_2 I^8 r_{0,1}; & a_{33} &= \frac{p^2}{12} I^6 b_2; \\
a_{34} &= -A_2; & a_{35} &= -a_1 - A_4; & B_3 &= -\frac{b_2 I^4}{2} (\mathbf{s}_x^\infty + \mathbf{s}_y^\infty); \\
a_{41} &= a_1 (1 - I^4 r_{1,0} + 4I^2 r_{0,0}) + A_2 (2I^2 r_{0,0} + 8I^4 r_{1,0}) + A_4 \left( \frac{1}{3} + I^2 r_{1,0} \right) - \frac{1}{3} b_1 I^8 r_{2,0}; \\
a_{42} &= b_1 I^2 \left( 1 - \frac{1}{3} I^8 r_{2,1} \right) - a_1 (I^6 r_{1,1} - 16I^4 r_{0,1}) + A_2 (2I^4 r_{0,1} + 24I^6 r_{1,1}) + A_4 I^6 r_{1,1}; \\
a_{43} &= \frac{p^2}{12} A_2 I^2 - a_1 I^2 r_{0,0} - A_2 I^2 r_{1,0} - b_1 I^2; & a_{44} &= -(a_1 r_{0,1} I^4 + A_2 r_{1,1} I^6 + b_2 I^4); \\
a_{45} &= -(a_1 r_{0,2} I^6 + A_2 r_{1,2} I^8); & B_4 &= \frac{a_1}{2} (\mathbf{s}_y^\infty - \mathbf{s}_x^\infty) - \frac{A_2}{2} (\mathbf{s}_x^\infty + \mathbf{s}_y^\infty);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{51} &= A_2(1 + 3I^4 r_{1,0}) - 3a_1 I^6 r_{2,0} + 8a_1 I^4 r_{1,0} + 2A_4 I^2 r_{0,0} + 4b_1 I^4 r_{0,0}; \\
a_{52} &= a_1(1 - 3I^8 r_{2,1} + 24I^6 r_{1,1}) + 2A_2 I^4 r_{0,1} + 3A_2 I^6 r_{1,1} + 16b_1 I^6 r_{0,1}; \\
a_{53} &= \frac{p^2}{12} A_4 I^2 - a_1 I^2 r_{1,0} - b_1 I^4 r_{0,0} - b_2 I^4; \quad a_{54} = -a_1 r_{1,1} I^6 - b_1 r_{0,1} I^6; \\
a_{55} &= -a_1 r_{1,2} I^8 - b_1 r_{0,2} I^8; \quad B_5 = \frac{b_1 I^2}{2} (\mathbf{s}_y^\infty - \mathbf{s}_x^\infty) - \frac{A_4}{2} (\mathbf{s}_x^\infty + \mathbf{s}_y^\infty).
\end{aligned}$$

Подставляя найденные величины  $a_2(t)$  и  $a_4(t)$  во втором приближении в дифференциальные уравнения (2.13), находим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dA_2}{dt} &= f_2(A_2, A_4, p(t), \mathbf{s}_x^\infty(t), \mathbf{s}_y^\infty(t)); \\
\frac{dA_4}{dt} &= f_4(A_2, A_4, p(t), \mathbf{s}_x^\infty(t), \mathbf{s}_y^\infty(t));
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Для нахождения неизвестных функций  $A_2(t)$  и  $A_4(t)$  имеем задачу Коши при следующих начальных условиях:

при  $t = 0$   $A_2(0) = A_2^0$ ;  $A_4(0) = A_4^0$ , где  $A_2^0$ ,  $A_4^0$  заданные величины, определяющие форму полости в начальный момент нагружения.

Задачу Коши для системы дифференциальных уравнений (2.15) решаем методом Рунге-Кутты.

Положив в (2.10)  $V = I e^{iq}$ , получим уравнение контура полости

$$r = |w(I e^{iq})| = f(q, t) \tag{2.16}$$

Во втором приближении имеем

$$\begin{aligned}
r^2 &= I^2(d + d_1 \cos 2q + d_2 \cos 4q) \\
d &= a_1^2 + A_2^2 + \frac{1}{9} A_4^2 + \frac{1}{9} (b_1 I^2)^2 + \frac{1}{25} (b_2 I^4)^2; \\
d_1 &= 2 \left( \frac{1}{3} a_1 b_1 I^2 - a_1 A_2 + \frac{1}{3} A_2 A_4 + \frac{1}{15} b_1 b_2 I^6 \right); \\
d_2 &= 2 \left( \frac{1}{5} a_1 b_2 I^4 - \frac{1}{3} a_1 A_4 - \frac{1}{3} A_2 b_1 I^2 \right).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Соотношение (2.16) при  $r_{\max} \leq 1$  позволяет найти наибольшую нагрузку, при которой полости касаются одна другой.

Анализ модели о развитии полостей в вязком теле сводится к параметрическому исследованию задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка при различных законах нагружения и начальной формы полостей.

Рассмотрим в качестве примера частный случай.

Пусть в любой момент времени выполняется равенство  $\mathbf{s}_x^\infty = \frac{1}{2} \mathbf{s}_y^\infty$ . В начальный момент полость принята в виде круга.

Ниже приводятся результаты расчетов для двух моментов времени

$I$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
	$t = 100 \text{ с}$						
$A_2$	-0,00232	-0,00257	-0,03421	-0,06921	-0,08932	-0,12944	-0,14726
$A_4$	0	0	0,00002	0,00012	0,00024	0,00068	0,00307
	$t = 1000 \text{ с}$						
$A_2$	-0,00822	-0,01069	-0,03217	0,099623	-0,11726	-0,13529	-0,16332
$A_4$	0,00005	0,00009	0,00014	0,00047	0,00072	0,00913	0,01281

В расчетах функции  $s_x^\infty(t) = \frac{1}{2}s_y^\infty(t)$  и  $p(t)$  считались линейными функциями от времени.

На рисунке представлена форма полости при  $t = 1000 \text{ с}$ ;  $I = 0,5$ . Контур полости сужается в направлении оси абсцисс и расширяется в направлении наибольшего растягивающего напряжения.

В заключение отметим, что аналогично можно рассмотреть и случай развития двоякопериодической системы полостей в вязком теле.

Полученные соотношения позволяют решать обратную задачу, т.е. определить начальную форму полости и напряженное состояние, при которых достигается равнопрочная форма полости в условиях нестационарного медленного течения ньютоновской вязкой жидкости.

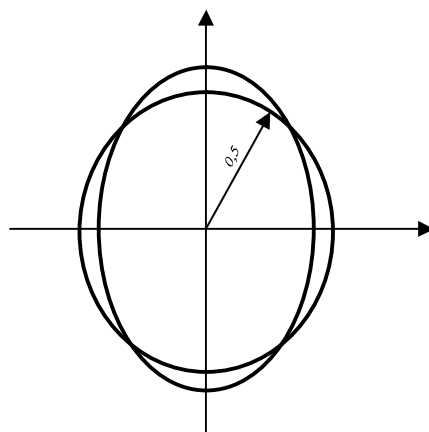


Рис. 1. Форма полости при  $t = 1000 \text{ с}$ ;  $I = 0,5$  для указанных нагрузок.

г. Баку

Поступила: 22 октября 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мирсалимов, В. М. Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М.: Наука, 1987.
2. Слезкин, Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н. А. Слезкин. – М.: Гостехиздат, 1955.
3. Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1974.

## ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

(Институт теоретической и прикладной механики СО РАН  
им. С. А. Христиановича)

Динамическая жесткопластическая теория, позволяющая предсказать деформирование конструкций, находит широкое практическое применение при изучении реакции на кратковременное ударное нагружение очень высокой интенсивности или при нагружении взрывом [1]. На основе этой модели рассмотрен динамический изгиб следующих двухсвязных пластических плоских конструкций: кольцевых пластин [2], полигональных пластин [3, 4], криволинейных пластин частного вида [5 – 8]. В предлагаемой работе рассмотрено динамическое поведение круглых пластин с закрепленным внутренним эксцентрическим круглым отверстием на основе общего подхода, изложенного в работе [9]. Но в отличие от работы [9] здесь предлагается несколько другая схема предельного квазистатического разрушения, которая дает, как показывают расчеты, меньшее значение предельной нагрузки. В работе получено аналитическое выражение для предельной нагрузки, вычислены прогибы пластины в разные моменты времени и остаточный прогиб (остаточная повреждаемость).

1. Рассмотрим тонкую идеальную жесткопластическую круглую пластину радиуса  $R_1$  с круглым отверстием радиуса  $R_2$  с центром, расположенным на расстоянии  $a$  от центра пластины  $O_1$  ( $a \geq 0$ ,  $a + R_2 < R_1$ , рис. 1). Для определенности считаем, что  $a < R_2$ , т. е. отверстие охватывает центр пластины – точку  $O_1$ . Внешний и внутренний контуры пластины шарнирно оперты или защемлены. Пластина нагружена равномерно распределенной по поверхности взрывной нагрузкой интенсивности  $P(t)$ , которая характеризуется мгновенным достижением своего максимального значения  $P_{\max} = P(0)$  в начальный момент времени с последующим быстрым его уменьшением.

В динамике рассматриваемой пластины из жесткопластического материала, в зависимости от значения  $P_{\max}$ , возможно деформирование по трем схемам [9]. При нагрузках, не превышающих предельные значения, движение отсутствует, и пластина остается в покое (“низкие” нагрузки). При нагрузках, незначительно превышающих предельные нагрузки (“средних” нагрузках), во внутренней области образуется гладкий криволинейный пластический шарнир  $l$  с предельным изгибающим моментом  $M_0$ . При этом области пластины  $Z_{i1}$ , прилегающие к внутреннему контуру  $L_1$  ( $i=1$ ) и внешнему контуру  $L_2$  ( $i=2$ ), деформируются конусообразно (схема 1 на рис. 1). При достаточно высоком уровне действующей нагрузки поведение пластины может сопровождаться возникновением во внутренней части пластины области  $Z_p$ , движущейся поступательно. При этом



возможны две ситуации, когда существуют одновременно область  $Z_p$  и часть шарнира  $l$  (“высокие” нагрузки; схема 2 на рис. 2), и когда шарнира  $l$  нет, а область  $Z_p$  становится двусвязной (“сверхвысокие” нагрузки; схема 3 на рис. 3).

По аналогии с результатом, полученным в работе [10] считаем, что угол  $\alpha_i(t)$  отклонения области  $Z_{i1}$  ( $i=1,2$ ) от горизонта на опорном контуре не зависит от координат. Обозначим через  $l_1$  и  $l_2$  внешний и внутренний контуры области  $Z_p$  соответственно, а через  $Z_{i2}$  – часть пластины кроме области  $Z_p$ , из любой точки которой продолжение нормали к контуру  $L_i$  попадает на контур  $l_i$  (рис. 2, 3). Тогда кривые  $l_1$  и  $l_2$  являются дугами окружностей радиусов  $R_1 - D_1(t)$  и  $R_2 + D_2(t)$  соответственно, где  $D_i(t)$  – неизвестная функция, определяющая расстояние между  $L_i$  и  $l_i$  ( $i=1,2$ ), а область  $Z_{i2}$  вращается вокруг опорной окружности  $L_i$  со скоростью, одинаковой для всех точек контура  $L_i$  (см. [9]). Вследствие непрерывности скоростей на границах областей  $Z_{i1}$  и  $Z_{i2}$  ( $i=1,2$ ), скорость поворота области  $Z_{i2}$  вокруг  $L_i$  равна  $\mathfrak{Q}_i(t)$ , где точка обозначает производную по времени.

Пусть  $(r_1, \psi)$  – точка в полярной системе координат  $\Omega_1$  с полюсом в точке  $O_1$ , а  $(r_2, \xi)$  – точка в полярной системе координат  $\Omega_2$  с полюсом в центре окружности внутреннего контура  $L_2$ . Пусть уравнение шарнира  $l$  в системе координат  $\Omega_1$  имеет вид  $r_1 = \bar{l}(\psi, t)$ , в системе координат  $\Omega_2$  записывается как  $r_2 = \bar{l}_\xi(\xi, t)$ . Считаем, что координата  $\psi$  и соответствующая ей координата  $\xi$  таковы, что  $\bar{l}(\psi, t)$  и  $\bar{l}_\xi(\xi, t)$  – одна и та же точка на кривой  $l$ . Обозначим через  $d_l(\psi, t)$  расстояние от точки  $(r_1, \psi) \in l$  до контура  $L_2$  по нормали к  $L_2$  (рис. 1). Из условия непрерывности скоростей на границах областей  $Z_{11}$  и  $Z_{21}$  следует, что

$$\mathfrak{Q}_1(t)(R_1 - \bar{l}(\psi, t)) = \mathfrak{Q}_2(t)d_l(\psi, t),$$

откуда получим

$$\mathfrak{Q}_1(t) = k(t)\mathfrak{Q}_2(t), \quad (1)$$

$$k(t) = d_l(\psi, t) / [R_1 - \bar{l}(\psi, t)], \quad (2)$$

где  $k(t) > 0$  – неизвестная функция от времени. Для эксцентричного круглого контура  $L_2$  имеем:

$$d_l(\psi, t) = \sqrt{\bar{l}^2 - 2\bar{l}a \cos \psi + a^2} - R_2.$$

Тогда из равенства (2) следует, что функция  $\bar{l}(\psi, t)$  имеет вид:

$$\bar{l}(\psi, t) = \begin{cases} \frac{a \cos \psi - kb + \sqrt{(a \cos \psi - kb)^2 + (1 - k^2)(b^2 - a^2)}}{1 - k^2} & \text{при } k(t) \neq 1, \\ (b^2 - a^2) / [2(b - a \cos \psi)] & \text{при } k(t) = 1, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$b = k(t)R_1 + R_2.$$

Из равенств (см. рис. 1)

$$x = \bar{l}(\psi, t) \cos \psi = \bar{l}_\xi(\xi, t) \cos \xi + a, \quad y = \bar{l}(\psi, t) \sin \psi = \bar{l}_\xi(\xi, t) \sin \xi$$

следует, что функция  $\bar{l}_\xi(\xi, t)$  имеет вид:

$$\bar{l}_\xi(\xi, t) = \begin{cases} \frac{b + ak^2 \cos \xi - \sqrt{(b + ak^2 \cos \xi)^2 - (1 - k^2)(b^2 - k^2 a^2)}}{1 - k^2} & \text{при } k(t) \neq 1, \\ (b^2 - a^2) / [2(b + a \cos \xi)] & \text{при } k(t) = 1, \end{cases} \quad (4)$$

а также справедливо равенство

$$\bar{l}_\xi(\xi, t) = \begin{cases} \bar{l}(\psi(\xi), t) \sin \psi(\xi) / \sin \xi, & \xi \neq 0; \pi, \\ [\bar{l}(\psi(\xi), t) \cos \psi(\xi) - a] / \cos \psi(\xi); & \xi = 0; \pi, \end{cases} \quad (5)$$

где значение  $\psi = \psi(\xi)$  определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \xi = \bar{l}(\psi, t) \sin \psi / [\bar{l}(\psi, t) \cos \psi - a]. \quad (6)$$

Схема 2 соответствует общему виду деформирования пластины. Когда областей  $Z_p$  и  $Z_{i2}$  ( $i=1, 2$ ) нет, она соответствует схеме 1. Когда отсутствуют шарнир  $l$  и области  $Z_{i1}$ , схема 2 преобразуется в схему 3. Рассмотрим подробно схему 2.

Уравнение движения пластины получим из принципа виртуальных мощностей в сочетании с принципом Даламбера [11]:

$$\iint_S \rho \mathbf{u}^* ds = \iint_S P(t) \mathbf{u}^* ds - N. \quad (7)$$

Здесь  $S$  – площадь пластины;  $\rho$  – поверхностная плотность материала пластины;  $u$  – прогиб;  $ds$  – элемент площади;  $N$  – мощность внутренних сил пластины. Величины с верхним индексом \* – кинематически допустимые скорости. Вычисляя мощность внутренних сил как в [12], получим

$$N = \sum_m \int_{l_m} M_m [\mathcal{G}^*]_m dl_m + M_0 \iint_S (|\mathcal{K}_1^*| + |\mathcal{K}_2^*|) ds = M_0 \sum_{i=1}^2 (2 - \eta_i) \int_{L_i} \left( \frac{\partial \mathcal{K}_i^*}{\partial n} \right)_i dL_i. \quad (8)$$

Здесь  $l_m$  – линии разрыва угловых скоростей;  $m$  – количество линий  $l_m$ ;  $M_m$  – изгибающий момент на  $l_m$ ;  $[\mathcal{G}^*]_m$  – разрыв угловой скорости на  $l_m$ ;  $\mathcal{K}_1^*$ ,  $\mathcal{K}_2^*$  – главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины;  $\eta_i = 0$  для заземленного контура  $L_i$  ( $i=1, 2$ ) и  $\eta_i = 1$  для шарнирно опертого;  $\left( \frac{\partial \mathcal{K}_i^*}{\partial n} \right)_i$  – производная от скорости прогиба по

нормали к контуру  $L_i$  или скорость угла отклонения поверхности пластины от горизонта на контуре  $L_i$ , которая равна  $\mathcal{K}_i(t)$  для рассматриваемой схемы деформирования;  $dL_i$  – элемент контура  $L_i$ . Обозначим через  $\mathcal{V}_\xi(t)$  скорость поступательного движения области  $Z_p$ , тогда поле скоростей прогибов пластины имеет вид:

$$\begin{aligned} (r_1, \psi) \in Z_p : \quad \mathcal{V}_\xi(r_1, \psi, t) &= \mathcal{V}_\xi(t), \\ (r_1, \psi) \in Z_{i1} : \quad \mathcal{V}_\xi(r_1, \psi, t) &= \mathcal{K}_i(t)(R_1 - r_1) \quad (i=1, 2), \\ (r_2, \xi) \in Z_{2i} : \quad \mathcal{V}_\xi(r_2, \xi, t) &= \mathcal{K}_2(t)(-R_2 + r_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя введенные обозначения в (8) и (7) и учитывая, что  $\mathcal{C}_i^*$  ( $i=1,2$ ) и  $\mathcal{W}_\xi^*$  независимы, получим уравнения движения пластины для схемы деформирования 2:

$$\rho \mathcal{C}_i^* (\Sigma_{i1} + \Sigma_{i2}) = P(t) (\Sigma_{i3} + \Sigma_{i4}) - M_0 (2 - \eta_i) \Sigma_{i5} \quad (i=1,2), \quad (10)$$

$$\rho \mathcal{W}_\xi^* = P(t). \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}(\Psi_D, k) &= 2 \int_0^{\Psi_D} \left[ \int_{\bar{l}(\Psi, t)}^{R_1} (R_1 - r_1)^2 r_1 dr_1 \right] d\Psi = \\ &= \frac{1}{6} \left\{ R_1^4 \Psi_D - \int_0^{\Psi_D} [6R_1^2 \bar{l}^2(\Psi, t) - 8R_1 \bar{l}^3(\Psi, t) + 3\bar{l}^4(\Psi, t)] d\Psi \right\}, \\ \Sigma_{12}(\Psi_D, k) &= 2 \int_{\Psi_D}^{\pi} \left[ \int_{R_1 - D_1}^{R_1} (R_1 - r_1)^2 r_1 dr_1 \right] d\Psi = \frac{(\pi - \Psi_D)}{6} D_1^3 (4R_1 - 3D_1), \\ \Sigma_{13}(\Psi_D, k) &= 2 \int_0^{\Psi_D} \left[ \int_{\bar{l}(\Psi, t)}^{R_1} (R_1 - r_1) r_1 dr_1 \right] d\Psi = \\ &= \frac{1}{3} \left\{ R_1^3 \Psi_D - \int_0^{\Psi_D} [3R_1 \bar{l}^2(\Psi, t) - 2\bar{l}^3(\Psi, t)] d\Psi \right\}, \\ \Sigma_{14}(\Psi_D, k) &= 2 \int_{\Psi_D}^{\pi} \left[ \int_{R_1 - D_1}^{R_1} (R_1 - r_1) r_1 dr_1 \right] d\Psi = \frac{(\pi - \Psi_D)}{3} D_1^2 (3R_1 - 2D_1), \\ \Sigma_{15} &= \int_{L_1} dL_1 = 2\pi R_1, \quad \Sigma_{25} = \int_{L_2} dL_2 = 2\pi R_2, \\ \Sigma_{21}(\xi_D, k) &= 2 \int_0^{\xi_D} \left[ \int_{R_2}^{\bar{l}_\xi(\xi, t)} (r_2 - R_2)^2 r_2 dr_2 \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \int_0^{\xi_D} [6R_2^2 \bar{l}_\xi^2(\xi, t) - 8R_2 \bar{l}_\xi^3(\xi, t) + 3\bar{l}_\xi^4(\xi, t)] d\xi - R_2^4 \xi_D \right\}, \\ \Sigma_{22}(\xi_D, k) &= 2 \int_{\xi_D}^{\pi} \left[ \int_{R_2}^{R_2 + D_2} (r_2 - R_2)^2 r_2 dr_2 \right] d\xi = \frac{(\pi - \xi_D)}{6} D_2^3 (4R_2 + 3D_2), \\ \Sigma_{23}(\xi_D, k) &= 2 \int_0^{\xi_D} \left[ \int_{R_2}^{\bar{l}_\xi(\xi, t)} (r_2 - R_2) r_2 dr_2 \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{3} \left\{ R_2^3 \xi_D - \int_0^{\xi_D} [3R_2 \bar{l}_\xi^2(\xi, t) - 2\bar{l}_\xi^3(\xi, t)] d\xi \right\}, \\ \Sigma_{24}(\xi_D, k) &= 2 \int_{\xi_D}^{\pi} \left[ \int_{R_2}^{R_2 + D_2} (r_2 - R_2) r_2 dr_2 \right] d\xi = \frac{(\pi - \xi_D)}{6} D_2^2 (3R_2 + 2D_2), \end{aligned}$$

где  $\bar{l}(\Psi, t)$ ,  $\bar{l}_\xi(\xi, t)$  определены в (3), (4);  $D_1 = D_1(\Psi_D(t), k(t))$ ,  $D_2 = D_2(\xi_D(t), k(t))$ ;  $\Psi = \Psi_D$ ,  $\xi = \xi_D$  – параметры границ областей  $Z_{11}$  и  $Z_{12}$ ,  $Z_{21}$  и  $Z_{22}$  соответственно.

Из условия непрерывности скоростей на границах областей  $Z_p$  и  $Z_{i2}$  получим

$$\mathfrak{A}_i D_i = \mathfrak{A}_i \xi \quad (i=1,2). \quad (12)$$

На границах областей  $Z_{11}$  и  $Z_{12}$  (при  $\psi = \psi_D$ ),  $Z_{21}$  и  $Z_{22}$  (при  $\xi = \xi_D$ ) выполняются соотношения

$$D_1 = R_1 - \bar{l}(\psi_D, t), \quad D_2 = -R_2 + \bar{l}_\xi(\xi_D, t),$$

откуда, учитывая (5), получаем

$$\begin{aligned} (R_1 - D_1) \sin \psi_D &= (R_2 + D_2) \sin \xi_D, \quad \xi \neq 0; \pi, \\ (R_1 - D_1) \cos \psi_D &= (R_2 + D_2) \cos \xi_D + a, \quad \xi = 0; \pi. \end{aligned} \quad (13)$$

На границах областей  $Z_{21}$  и  $Z_{22}$  при  $\xi = \xi_D$  справедливо равенство  $d_l(\psi_D, t) = D_2(t)$ , тогда из (2) имеем

$$D_2 = kD_1. \quad (14)$$

Система уравнений (6), (10) – (14) описывает движение пластины в случае деформирования по схеме 2. В случае схемы 1 областей  $Z_p$  и  $Z_{i2}$  ( $i=1,2$ ) нет, а движение определяется уравнениями (1), (10) при  $\psi_D = \xi_D = \pi$ . В случае схемы 3 областей  $Z_{i1}$  ( $i=1,2$ ) и шарнира  $l$  нет, движение описывается уравнениями (10) – (12) при  $\psi_D = \xi_D = 0$  и замене  $\Sigma_{ij}$  на  $\bar{\Sigma}_{ij}$  ( $i=1,2; j=2,4$ ), считая  $D_i = D_i(t)$ :

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{12}(D_1) &= \pi D_1^3 (4R_1 - 3D_1) / 6, & \bar{\Sigma}_{14}(D_1) &= \pi D_1^2 (3R_1 - 2D_1) / 3, \\ \bar{\Sigma}_{22}(D_2) &= \pi D_2^3 (4R_2 + 3D_2) / 6, & \bar{\Sigma}_{24}(D_2) &= \pi D_2^2 (3R_2 + 2D_2) / 3. \end{aligned}$$

В начальный момент пластина покоится:

$$\alpha_i(0) = \mathfrak{A}_i(0) = w_c(0) = \mathfrak{A}_i(0) = 0 \quad (i=1,2). \quad (15)$$

Начальные значения для функций  $k(t)$ ,  $\psi_D(t)$ ,  $\xi_D(t)$ ,  $D_i(t)$  ( $i=1,2$ ) связаны с неизвестными размерами областей  $Z_p$ ,  $Z_{ij}$  ( $i, j=1,2$ ) в момент времени  $t=0$  и определяются значением  $P_{\max}$  (см. ниже).

Предельную нагрузку  $P_0$  и величину  $k_0$  (где  $k_0$  – значение  $k(0)$  при  $P_{\max} = P_0$ ) определим из уравнений (10) при  $\psi_D = \xi_D = \pi$ , считая  $\mathfrak{A}_i = 0$  ( $i=1,2$ ). Тогда

$$P_0 = M_0 (2 - \eta_1) \Sigma_{15} / \Sigma_{13}(\pi, k_0); \quad (16)$$

значение  $k_0$  определяется из уравнения

$$(2 - \eta_1) \Sigma_{15} / \Sigma_{13}(\pi, k_0) = (2 - \eta_2) \Sigma_{25} / \Sigma_{23}(\pi, k_0). \quad (17)$$

Сравнение предельной нагрузки (16) с предельной нагрузкой, определенной по формулам из [9] показало, что предельная нагрузка в [9] больше.

На рис. 4 приведена зависимость безразмерной предельной нагрузки  $p_0 = P_0 R_1^2 / M_0$  от параметров отверстия. Кривые 1 – 3 изображают случаи шарнирного опирания обоих контуров при  $a = 0,3R_1$ ,  $a = 0,2R_1$  и  $a = 0$  соответственно. Видно, что при одинаковом радиусе отверстия с увеличением значения  $a$  предельная нагрузка уменьшается.

2. Проанализируем движение рассматриваемой пластины при разных уровнях взрывной нагрузки. При  $0 < P_{\max} \leq P_0$  (“низкие” нагрузки) пластина не деформируется и остается в покое.

Если  $P_0 < P_{\max} \leq P_1$  (“средние” нагрузки), где  $P_1$  – нагрузка, соответствующая появлению областей  $Z_p$  и  $Z_{i2}$  ( $i=1,2$ ), то движение происходит по схеме 1. Нагрузку  $P_1$  определим следующим образом. Поскольку при  $P_{\max} > P_1$  реализуется схема 2, то для нахождения  $P_1$  рассматриваем уравнения для схемы 2. Дифференцируя (12) по времени и исключая из полученного соотношения функции  $\mathfrak{A}_i$  ( $i=1,2$ ),  $\mathfrak{B}_i$  с помощью (10), (11), получим равенства

$$-\rho \mathfrak{A}_i \frac{D_i}{D_i} (\Sigma_{i1} + \Sigma_{i2}) = P(t)(\Sigma_{i3} + \Sigma_{i4} - \frac{\Sigma_{i1} + \Sigma_{i2}}{D_i}) - M_0(2 - \eta_i)\Sigma_{i5} \quad (i=1,2). \quad (18)$$

При образовании областей  $Z_p$  и  $Z_{i2}$  ( $i=1,2$ ) в начальный момент выполняются соотношения:  $P_{\max} = P_1$ ,  $\mathfrak{A}_i(0) = 0$  ( $i=1,2$ ),  $\psi_D = \xi_D = \pi$ . Тогда из (18) следует, что нагрузка  $P_1$  равна:

$$P_1 = M_0(2 - \eta_1)\Sigma_{15} / \left[ \Sigma_{13}(\pi, k_1) - \Sigma_{11}(\pi, k_1) / D_1^* \right], \quad (19)$$

где  $k_1$ ,  $D_i^*$  – значения  $k(0)$ ,  $D_i(0)$  ( $i=1,2$ ) при  $P_{\max} = P_1$ . Из системы (18) при  $P = P_{\max} = P_1$  следует, что  $k_1$  определяется из уравнения

$$(2 - \eta_1) \frac{\Sigma_{15}}{\Sigma_{13}(\pi, k_1) - \Sigma_{11}(\pi, k_1) / D_1^*} = (2 - \eta_2) \frac{\Sigma_{25}}{\Sigma_{23}(\pi, k_1) - \Sigma_{21}(\pi, k_1) / D_2^*}, \quad (20)$$

с учетом равенств (14), (13) при  $\psi_D = \xi_D = \pi$ ,  $k = k_1$ , которые определяют  $D_i^*$ :

$$D_1^* = (R_1 - R_2 + a) / (1 + k_1), \quad D_2^* = k_1(R_1 - R_2 + a) / (1 + k_1).$$

Зависимость безразмерной нагрузки  $p_1$  ( $p_1 = P_1 R_1^2 / M_0$ ) от параметров отверстия приведена на рис. 4. Кривые 4 – 6 изображают случаи шарнирного опирания обоих контуров при  $a = 0,3R_1$ ,  $a = 0,2R_1$  и  $a = 0$  соответственно. Из графиков видно, что при одинаковом радиусе отверстия с увеличением значения  $a$  нагрузка  $P_1$  уменьшается.

Определим начальные значения  $k(0)$  при движении пластины под действием “средней” нагрузки. Интегрируя (10) по времени и учитывая (15), получим

$$\rho \mathfrak{A}_i(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)\Sigma_{i3} - M_0(2 - \eta_i)\Sigma_{i5}}{\Sigma_{i1}} d\tau \quad (i=1,2).$$

Из последних равенств и (1) имеем

$$k(t) = \left[ \int_0^t \frac{P(\tau)\Sigma_{13} - M_0(2 - \eta_1)\Sigma_{15}}{\Sigma_{11}} d\tau \right] \left[ \int_0^t \frac{P(\tau)\Sigma_{23} - M_0(2 - \eta_2)\Sigma_{25}}{\Sigma_{21}} d\tau \right]^{-1}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу  $t \rightarrow 0$  и введя обозначения  $\Sigma_{ij}^a = \Sigma_{ij}(\pi, k(0))$  ( $i=1,2$ ;  $j=1,3$ ), при учете равенств (14), (13) при  $\psi_D = \xi_D = \pi$ , получим уравнение для определения  $k(0)$ :

$$k(0) = \frac{\left[ P_{\max} \Sigma_{13}^a - M_0(2 - \eta_1)\Sigma_{15} \right] \Sigma_{21}^a}{\left[ P_{\max} \Sigma_{23}^a - M_0(2 - \eta_2)\Sigma_{25} \right] \Sigma_{11}^a} \quad (k_0 < k(0) \leq k_1). \quad (21)$$

Уравнения (1), (10) при  $\psi_D = \xi_D = \pi$  с начальными условиями (15), (21) определяют неизвестные функции  $\mathfrak{G}_i(t)$  ( $i=1,2$ ) и  $k(t)$ , описывающие поведение пластины при “средних” нагрузках. Из (1) следует, что

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2 k + \mathfrak{G}_2 k^2.$$

Подставляя в последнее равенство функции  $\mathfrak{G}_i(t)$  ( $i=1,2$ ), вычисленные из (10) при  $\psi_D = \xi_D = \pi$ , получим дифференциальное уравнение:

$$-\rho \mathfrak{G}_2 k^2 = k \frac{P(t)\Sigma_{23}(\pi, k) - M_0(2 - \eta_2)\Sigma_{25}}{\Sigma_{21}(\pi, k)} - \frac{P(t)\Sigma_{13}(\pi, k) - M_0(2 - \eta_1)\Sigma_{15}}{\Sigma_{11}(\pi, k)}. \quad (22)$$

Система уравнений (1), (22), (10) при  $i=1$ ,  $\psi_D = \pi$  решается численно методом Рунге-Кутты. Момент остановки пластины  $t_f$  определяется из условия

$$\mathfrak{G}_i(t_f) = 0 \quad (i=1,2). \quad (23)$$

Все прогибы в пластине вычисляются из соотношений (9).

Если  $P_1 < P_{\max} \leq P_2$  (“высокие нагрузки”), где  $P_2$  – нагрузка, при которой области  $Z_{i1}$  ( $i=1,2$ ) и шарнир  $l$  перестают существовать, то движение пластины начнется с развитой областью  $Z_p$ . В динамике пластины сначала реализуется схема 2, затем схема 1. Нагрузку  $P_2$  определим так. Из (18), учитывая, при отсутствии областей  $Z_{i1}$  ( $i=1,2$ ) и шарнира  $l$ , в начальный момент выполняются соотношения:  $P_{\max} = P_2$ ,  $\mathfrak{G}_i(0) = 0$  ( $i=1,2$ ),  $\psi_D = \xi_D = 0$ , получим, что нагрузка  $P_2$  равна

$$P_2 = M_0(2 - \eta_1)\Sigma_{15} / \left[ \Sigma_{14}(0, k_2) - \Sigma_{12}(0, k_2) / D_1^{**} \right], \quad (24)$$

где  $k_2$ ,  $D_i^{**}$  – значения  $k(0)$ ,  $D_i(0)$  ( $i=1,2$ ) при  $P_{\max} = P_2$ . Из системы (18) при  $P = P_{\max} = P_2$  следует, что  $k_2$  определяется из уравнения

$$\frac{(2 - \eta_1)\Sigma_{15}}{\Sigma_{14}(0, k_2) - \Sigma_{12}(0, k_2) / D_1^{**}} = \frac{(2 - \eta_2)\Sigma_{25}}{\Sigma_{24}(0, k_2) - \Sigma_{22}(0, k_2) / D_2^{**}}, \quad (25)$$

с учетом равенств (14), (13) при  $\psi_D = \xi_D = 0$ ,  $k = k_2$ , которые определяют величины  $D_i^{**}$ :

$$D_1^{**} = (R_1 - R_2 - a) / (1 + k), \quad D_2^{**} = k_1(R_1 - R_2 - a) / (1 + k).$$

Зависимость безразмерной нагрузки  $p_2$  ( $p_2 = P_2 R_1^2 / M_0$ ) от параметров отверстия приведена на рис. 4. Кривые 7, 8 изображают случаи шарнирного опирания обоих контуров при  $a = 0,3R_1$  и  $a = 0,2R_1$  соответственно. Из графиков видно, что при одинаковом радиусе отверстия с увеличением значения  $a$  нагрузка  $P_2$  сильно увеличивается. В случае  $a = 0$  нагрузки  $P_1$  и  $P_2$  совпадают.

Определим начальные значения  $D_{i0} = D_i(0)$  ( $i=1,2$ ),  $k(0)$ ,  $\psi_D(0)$ ,  $\xi_D(0)$  при движении пластины под действием “высокой” нагрузки. Из (18) при  $t = 0$ ,  $P = P_{\max}$ , введя обозначения  $\Sigma_{1j}^b = \Sigma_{1j}(\psi_D(0), k(0))$ ,  $\Sigma_{2j}^b = \Sigma_{2j}(\xi_D(0), k(0))$  ( $j=1, \dots, 4$ ), получим уравнения:

$$P_{\max} [\Sigma_{13}^b + \Sigma_{14}^b - (\Sigma_{11}^b + \Sigma_{12}^b) / D_{10}] = M_0(2 - \eta_i)\Sigma_{i5} \quad (i=1,2), \quad (26)$$

которые вместе с (6), (13), (14) определяют величины  $D_{i0}$  ( $i=1,2$ ),  $k(0)$  ( $k_1 < k(0) \leq k_2$ ),  $\psi_D(0)$ ,  $\xi_D(0)$ .

В первой фазе деформирования пластины под действием “высокой” нагрузки ( $0 < t \leq t_1$ ) движение происходит по схеме 2 и описывается уравнениями (6), (10) – (14) с начальными условиями (15), (26) и (6), (13), (14) при  $D = D_{i0}$  ( $i=1,2$ ),  $k = k(0)$ ,  $\psi = \psi_D = \psi_D(0)$ ,  $\xi = \xi_D = \xi_D(0)$ . В этой фазе происходит уменьшение области  $Z_p$  ( $\mathcal{B}_i > 0$ ,  $i=1,2$ ) по закону (18). Система определяющих уравнений решается численно методом Рунге – Кутты. Время  $t_1$ , соответствующее исчезновению областей  $Z_p$ , определяется из условия  $\psi_D(t_1) = \xi_D(t_1) = \pi$ . В момент времени  $t_1$  вычисляются значения  $\mathcal{B}_i(t_1)$ ,  $w_c(t_1)$ ,  $\mathcal{A}_i(t_1)$ ,  $\alpha_i(t_1)$ ,  $k(t_1)$ ,  $D_i(t_1)$  ( $i=1,2$ ).

Вторая фаза ( $t_1 < t \leq t_f$ ) движения пластины происходит по схеме 1 до остановки в момент времени  $t_f$ . Деформирование описывается уравнениями (1), (10) при  $\psi_D = \xi_D = \pi$  с начальными условиями, определенными в конце первой фазы движения. Время остановки определяется условием (24). Все прогибы в пластине вычисляются из соотношений (9) с учетом всех фаз движения.

Если  $P_{\max} > P_2$  (“сверхвысокие” нагрузки), то в движении пластины сначала реализуется схема 3, затем последовательно схемы 2 и 1. Уравнение (18) при  $\psi_D = \xi_D = 0$  и замене  $\Sigma_{ij}$  на  $\bar{\Sigma}_{ij}$  ( $i=1,2$ ;  $j=2,4$ ) примет вид:

$$-\rho \mathcal{B}_i \bar{\Sigma}_{i2} / D_i = P(t)(\bar{\Sigma}_{i4} - \bar{\Sigma}_{i2} / D_i) - M_0(2 - \eta_i) \Sigma_{i5} \quad (i=1,2). \quad (27)$$

Начальные значения  $D_{i0}$  ( $i=1,2$ ) определим из (27), считая  $t=0$ ,  $P = P_{\max}$ :

$$P_{\max} [\bar{\Sigma}_{i4}(D_{i0}) - \bar{\Sigma}_{i2}(D_{i0}) / D_{i0}] = M_0(2 - \eta_i) \Sigma_{i5} \quad (i=1,2). \quad (28)$$

В первой фазе деформирования пластины под действием “сверхвысокой” нагрузки ( $0 < t \leq t_1$ ) движение происходит по схеме 3 и описывается уравнениями (10) – (12) при  $\psi_D = \xi_D = 0$  и замене  $\Sigma_{ij}$  на  $\bar{\Sigma}_{ij}$  ( $i=1,2$ ;  $j=2,4$ ) с начальными условиями (15), (28). В этой фазе происходит уменьшение области  $Z_p$  ( $\mathcal{B}_i > 0$ ,  $i=1,2$ ) по закону (27). Система определяющих уравнений решается численно методом Рунге – Кутты. Время  $t_1$ , соответствующее появлению областей  $Z_{11}$  и шарнира  $l$ , определяется из условия (13) при  $\psi_D = \xi_D = 0$ :  $R_1 - D_1(t_1) = R_2 + D_2(t_1) + a$ . В момент времени  $t_1$  вычисляются значения  $\mathcal{B}_i(t_1)$ ,  $w_c(t_1)$ ,  $\mathcal{A}_i(t_1)$ ,  $\alpha_i(t_1)$ ,  $D_i(t_1)$  ( $i=1,2$ ).

Вторая фаза ( $t_1 < t \leq t_2$ ) движения пластины происходит по схеме 2 и описывается уравнениями (6), (10) – (14) с начальными условиями, определенными в конце первой фазы движения и  $\psi_D = \xi_D = 0$ . Кроме этого, из (14) следует, что  $k(t_1) = D_2(t_1) / D_1(t_1)$ . Вторая ( $t_1 < t \leq t_2$ ) и третья  $t_2 < t \leq t_f$  фазы движения происходят так же, как и первая и вторая фазы деформирования при “высоких” нагрузках при соответствующих начальных значениях. Время остановки определяется условием (23). Все прогибы в пластине вычисляются из соотношений (9) с учетом всех фаз движения.

На рис. 5 приведены безразмерные прогибы  $w(x/R_1)$  в сечении  $y=0$  для круглой пластины с круглым отверстием радиуса  $R_2=0,4R_1$ , расположенным на расстоянии  $a=0,2R_1$  от центра (здесь  $w = uR_1^2\rho/(M_0T^2)$ ,  $T$  – время действия нагрузки). Оба контура шарнирно оперты. Для такой пластины  $P_0 = 20,65M_0/R_1^2$  ( $k_0 = 0,75$ ),  $P_1 = 45,39M_0/R_1^2$  ( $D_1^* = 0,45R_1$ ,  $D_2^* = 0,35R_1$ ,  $k_1 = 0,78$ ),  $P_2 = 144,64M_0/R_1^2$  ( $D_1^{**} = 0,22R_1$ ,  $D_2^{**} = 0,18R_1$ ,  $k_2 = 0,86$ ). На пластину действует “высокая” нагрузка, представленная прямоугольным импульсом:  $P(t) = 60M_0/R_1^2$  при  $0 \leq t \leq T$  и  $P(t) = 0$  при  $t > T$  (при этом  $D_{10} = 0,36R_1$ ,  $D_{20} = 0,29R_1$ ,  $k(0) = 0,8$ ). Кривые 1 – 3 соответствуют прогибам в моменты времени  $t = T$ ,  $t = t_1 = 1,16T$ ,  $t = t_f = 2,07T$  соответственно.

3. При выполнении условия  $a \geq R_2$  для различных отношений  $R_2/R_1$  возможно деформирование по другим схемам квазистатического разрушения. При этом возможны случаи образования новых краевых пластических шарниров  $l_3$  не по внешнему или внутреннему контурам опирания, а внутри пластины. Тогда область пластины  $Z_3$ , обозначенная на рис. 6, остается жесткой и не деформируется, а внутренний пластический шарнир  $l$  касается контура  $L_1$ . Выбор схемы деформирования осуществляется путем сравнения предельных нагрузок. Динамическое поведение полученной односвязной пластины с контуром, состоящим из зашпеленного контура  $l_3$  и части контура  $L_1$ , подробно рассмотрено в [13].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-08-08035-офи).

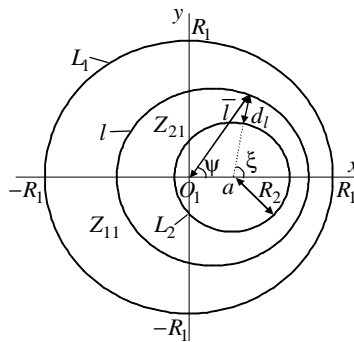


Рис. 1



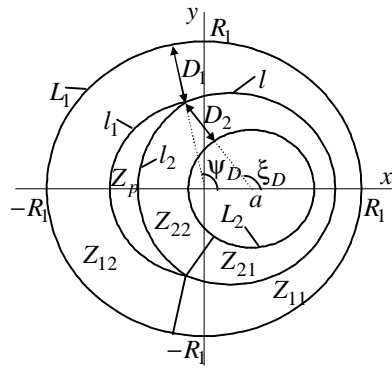


Рис. 2

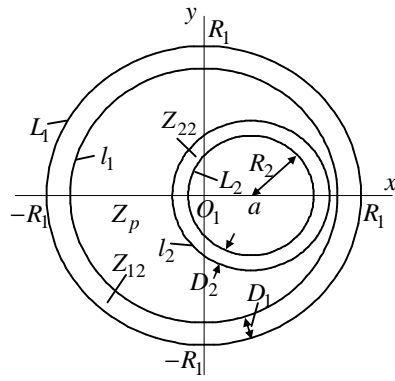


Рис. 3

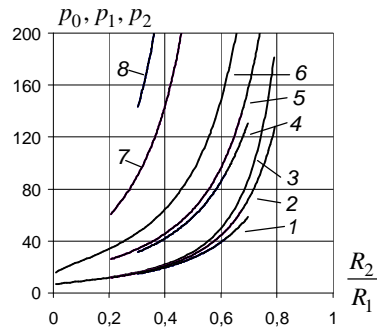


Рис. 4

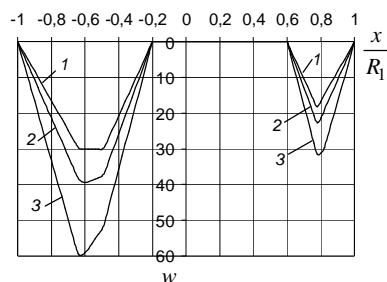


Рис. 5

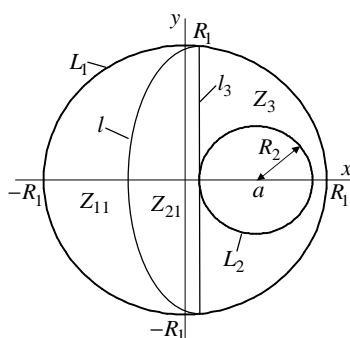


Рис. 6

г. Новосибирск

Поступила: 5 октября 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Комаров, К. Л.* Динамика жесткопластических элементов конструкций / К. Л. Комаров, Ю. В. Немировский – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984. – 234 с.
2. *Мазалов, В. Н.* Динамика тонкостенных пластических конструкций / В. Н. Мазалов, Ю. В. Немировский // Проблемы динамики упругопластических сред. Сер. Механика. Новое в зарубежной науке, 1975. – вып. 5. – С. 155–247.
3. *Немировский, Ю. В.* Динамическое поведение двусвязных полигональных пластических плит / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Прикл. Механика. – 1987. – Т. 23. – № 5. – С. 52–59.
4. *Немировский, Ю. В.* Динамика двусвязных пластин в пластическом состоянии с кусочно-гладкими опорными контурами / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Прикл. Механика – 1992. – Т. 28. – № 4. – С. 24–31.
5. *Немировский, Ю. В.* Динамическая пластическая повреждаемость одно- и двусвязных эллиптических пластин / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // ПМТФ. – 2002. – Т. 43. – № 2. – С. 142–154.
6. *Немировский, Ю. В.* Повреждаемость жесткопластических двусвязных криволинейных пластин в вязкой среде под действием взрывных нагрузок / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Труды 7-й Всероссийской научно-технической конференции “Наука. Промышленность. Оборона” 19-21 апреля 2006, Новосибирск: НГТУ, 2006. – С. 317–323.
7. *Немировский, Ю. В.* Динамика жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины со свободным внутренним отверстием или жесткой шайбой / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова //

- Международный научно-технический сборник “Теоретическая и прикладная механика”, Минск: БНТУ, 2006, – № 21. – С. 60–66.
8. *Немировский, Ю. В.* Динамика жесткопластических двусвязных криволинейных пластин переменной толщины / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та. Серия: Механика предельного состояния. 2007. – № 2. – С. 3–15.
  9. *Немировский, Ю. В.* Пластическое деформирование двусвязных пластин с криволинейным контуром при динамических нагрузках / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. Минск: Технопринт, 2001. – С. 515–525.
  10. *Немировский, Ю. В.* Динамическое поведение жесткопластических пластин в форме сектора / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40. – № 4. – С. 93–101.
  11. *Ерхов, М.И.* Теория идеально пластических тел и конструкций. / М.И. Ерхов – М.: Наука, 1978. – 352 с.
  12. *Немировский, Ю. В.* Динамическое деформирование жесткопластических криволинейных пластин переменной толщины / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // ПМТФ. – 2007. – Т. 48. – № 5. – С. 108–120.
  13. *Немировский, Ю. В.* Повреждаемость плоских преград с невогнутыми контурами при воздействии взрывных нагрузок / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Научный вестник НГТУ. – 2002. – № 2. – С. 77–85.

**О ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ ТЕНЗОРНОМ СООТНОШЕНИИ СИММЕТРИИ В  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ**

*(Самарский государственный университет)*

В работе излагаются основные положения математической теории пластичности для пространственных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона–Треска, когда течение тела подчиняется обобщенному ассоциированному закону течения. Подробно исследуются соотношения, следующие из обобщенного ассоциированного с условием пластичности Треска закона течения изотропного тела и в минимальной возможной степени ограничивающие свободу пластического течения для указанных состояний. Показано, что пространственные соотношения теории пластичности, сформулированные А. Ю. Ишлинским в 1946 г., следуют из указанного варианта теории течения. Установлено, что определяющие соотношения Ишлинского для состояний на ребре призмы Кулона–Треска выражают перестановочность тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций. С помощью соотношения перестановочности получено дополнительное тензорное соотношение симметрии.

Соотношения пространственной задачи теории пластичности, когда, аналогично условию полной пластичности Хаара–Кармана, имеется два соотношения между главными напряжениями, были предложены и проанализированы А.Ю. Ишлинским [4], который использовал определяющие зависимости в форме соотношений перестановочности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций<sup>1</sup>, следующие из обобщенного ассоциированного закона пластического течения в случае течения на ребре призмы Кулона–Треска и не предполагающие столь жестких ограничений на скорости пластических деформаций, устанавливаемые традиционным для того времени требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений. Впервые, в явной форме он указал на необходимость при построении теории пространственной задачи двух условий пластичности, уравнения несжимаемости и условий соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, которые он принял в форме трех уравнений, следующих из перестановочности этих тензоров. В своей работе А.Ю. Ишлинский пишет: “Согласно предлагаемой теории идеальной пластичности два главных

---

<sup>1</sup> А.Ю. Ишлинский называл эти зависимости условиями соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций.

напряжения должны быть непременно равны друг другу, а третье отличаться от них на удвоенное критическое значение  $2k$ . Таким образом, для пространственной задачи пластичности имеют место два соотношения между главными напряжениями, подобно гипотезе полной пластичности Хаара и Кармана. Этим предлагаемая теория отличается от теорий Леви и Мизеса, в которых принимается единственное соотношение.” Таким образом, А.Ю. Ишлинский отказался от “неассоциированного” определяющего закона Леви [6] и дал корректное обобщение теории течения Сен-Венана [8], [9] на трехмерный случай.

Результаты А.Ю. Ишлинского предвосхитили более поздние исследования Д.Д. Ивлева [1], [2], в которых было показано фундаментальное значение условия полной пластичности Хаара–Кармана для всей теории пластичности и был развит соответствующий вариант теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Кулона–Треска) и обобщенный ассоциированный закон пластического течения.

1. Ассоциированный закон течения является фундаментальным принципом математической теории пластичности и устанавливает [3], [5], [7], что в пространстве напряжений<sup>2</sup> вектор, представляющий тензор приращений пластических деформаций  $de^p$ , ортогонален регулярной поверхности текучести  $f(\sigma) = 0$  в данном напряженном состоянии  $\sigma$ :

$$de^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma} dI. \quad (1)$$

Величина  $dI$ , называемая неопределенным множителем, положительна при активном пластическом нагружении, признаком которого является одновременное выполнение условий  $f = 0$ ,  $df = 0$ . Следует отметить, что множитель  $dI$  не может быть вычислен через определяющие функции, и его значение должно вычисляться в процессе решения краевой задачи: множитель  $dI$  произволен в той степени, в какой это допускается уравнениями совместности полных деформаций, краевыми условиями и условиями сопряжения на границе раздела жесткой (упругой, если рассматривается упругопластическая задача) и пластической зон.

В формулировке ассоциированного закона течения участвует производная от скалярной функции текучести  $f$  по тензорному аргументу  $\sigma$ , которая представляет собой тензор второго ранга и определяется согласно (см., например: Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. С. 448, 449)

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial s^{ij}} \mathbf{i}^i \otimes \mathbf{i}^j,$$

где  $\mathbf{i}^j$  – контравариантные локальные базисные векторы криволинейной координатной системы. При дифференцировании по симметричному тензору второго ранга имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial s^{ij}} \text{sym}(\mathbf{i}^i \otimes \mathbf{i}^j),$$

---

<sup>2</sup> Речь идет о шестимерном пространстве напряжений. Ясно, что геометрические образы в таком пространстве довольно трудно себе представить. Однако в случае изотропного тела, как известно, можно получить геометрические образы основных соотношений математической теории пластичности в трехмерном пространстве главных напряжений.

т.е. тензор

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

симметричен.

Для изотропного тела критерий текучести  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  связывает некоторой зависимостью главные нормальные напряжения

$$f(s_1, s_2, s_3) = 0, \quad (2)$$

причем функция текучести  $f$  на самом деле зависит от трех независимых симметрических комбинаций главных нормальных напряжений; в качестве таковых могут быть выбраны линейная, квадратичная и кубическая симметрические формы главных нормальных напряжений

$$J_1 = s_1 + s_2 + s_3, \quad J_2 = -(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3), \quad J_3 = s_1 s_2 s_3, \quad (3)$$

называемые главными инвариантами тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ .

В теории идеальной пластичности обычно предполагается, что гидростатическое напряжение никак не влияет на текучесть, а поэтому функция текучести  $f$  в действительности зависит лишь от разностей главных нормальных напряжений, т.е. от главных касательных напряжений

$$t_1 = \frac{s_2 - s_3}{2}, \quad t_2 = \frac{s_3 - s_1}{2}, \quad t_3 = \frac{s_1 - s_2}{2}$$

или от двух независимых инвариантов девиатора тензора напряжений ( $s_1, s_2, s_3$  – собственные значения девиатора тензора напряжений)

$$J'_2 = -(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3) = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2), \quad J'_3 = s_1 s_2 s_3 = \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3),$$

которые также могут быть выражены через разности собственных значений тензора напряжений

$$J'_2 = \frac{1}{6}((s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2),$$

$$J'_3 = \frac{1}{27}(2s_1 - s_2 - s_3)(2s_2 - s_3 - s_1)(2s_3 - s_1 - s_2).$$

В итоге наиболее общими формами критерия текучести изотропного тела являются: форма в главных касательных напряжениях

$$f(t_1, t_2, t_3) = 0 \quad (t_1 + t_2 + t_3 = 0) \quad (4)$$

и форма в главных инвариантах девиатора тензора напряжений

$$f(J'_2, J'_3) = 0. \quad (5)$$

Ассоциированный закон течения (1) для изотропного тела устанавливает соосность тензоров  $de^p$  и  $\boldsymbol{\sigma}$ . Действительно, если  $f = f(s_1, s_2, s_3)$  – регулярная изотропная функция тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ , то

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial s_1} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \frac{\partial f}{\partial s_2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{\partial f}{\partial s_3} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$  – ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений.

Доказательство формулы (6) базируется на фундаментальных соотношениях дифференцирования собственных значений  $s_1, s_2, s_3$  симметричного тензора второго ранга по самому тензору  $\sigma$

$$\frac{\partial s_1}{\partial \sigma} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad \frac{\partial s_2}{\partial \sigma} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \quad \frac{\partial s_3}{\partial \sigma} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (7)$$

Для доказательства этих соотношений зафиксируем в пространстве декартову систему координат и продифференцируем спектральное разложение тензора напряжений

$$s_{ij} = s_1 l_i l_j + s_2 m_i m_j + s_3 n_i n_j$$

по  $s_{ks}$  и в результате получим равенство (при дифференцировании не должна учитываться симметрия тензора напряжений, иначе необходимые частные производные будут вычислены неправильно)

$$d_{ik} d_{js} = \frac{\partial s_1}{\partial s_{ks}} l_i l_j + s_1 l_j \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}} + s_1 l_i \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}} + \dots,$$

сворачивая обе части которого сначала с  $l_i$ , а затем с  $l_j$ , приходим (невыписанные слагаемые при этом дают нулевой вклад в силу взаимной ортогональности собственных векторов) к

$$l_k l_s = \frac{\partial s_1}{\partial s_{ks}} + s_1 l_i \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}} + s_1 l_j \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}}.$$

Учитывая, что  $l_i l_i = 1$  и поэтому

$$l_j \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}} = 0,$$

сразу же получаем

$$\frac{\partial s_1}{\partial s_{ks}} = l_k l_s,$$

и аналогично

$$\frac{\partial s_2}{\partial s_{ks}} = m_k m_s, \quad \frac{\partial s_3}{\partial s_{ks}} = n_k n_s,$$

что и доказывает (7).

Если два собственных значения равны (скажем,  $s_1 = s_2$ ), а третье с ними не совпадает, то частные производные

$$\frac{\partial s_1}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial s_2}{\partial \sigma}$$

становятся неопределенными. Однако в силу

$$\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{I}$$

их сумма будет вполне определенной, т.к. выполняется равенство

$$\frac{\partial s_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial s_2}{\partial \sigma} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}.$$

Формулы дифференцирования единичных взаимно ортогональных собственных векторов тензора напряжений по самому тензору напряжений приводятся в приложении к статье.

В главных осях тензора напряжений ассоциированный закон течения изотропного тела (1) имеет следующий вид:

$$de_j^P = \frac{\partial f}{\partial s_j} dI, \quad (8)$$

где здесь и в дальнейшем  $de_j^P$  – собственные значения тензора приращений пластических деформаций  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ <sup>3</sup>, которые, вообще говоря, отличаются от приращений собственных значений  $e_j^P$  тензора пластических деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}^P$ . С учетом этого замечания, спектральное разложение тензора  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  представляется как

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{l} \otimes l de_1^P + \mathbf{m} \otimes m de_2^P + \mathbf{n} \otimes n de_3^P.$$

Для изотропного тела в силу указанной выше формы критерия текучести (2) и ассоциированного закона течения (8) наиболее удобно геометрическое представление основных соотношений в трехмерном пространстве главных напряжений Хэя–Вестергарда (В.Р. Haigh, 1920 г.; Н.М. Westergaard, 1920 г.).

В пространстве главных напряжений тензор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  представляется связанным вектором с компонентами  $(s_1, s_2, s_3)$ , а тензор приращений пластических деформаций  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  – свободным вектором, компоненты которого есть  $(de_1^P, de_2^P, de_3^P)$ . Длины этих векторов мы будем обозначать соответственно через  $|\boldsymbol{\sigma}|$ ,  $|d\boldsymbol{\varepsilon}^P|$ :

$$|\boldsymbol{\sigma}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}, \quad |d\boldsymbol{\varepsilon}^P| = \sqrt{(de_1^P)^2 + (de_2^P)^2 + (de_3^P)^2}.$$

В пространстве главных напряжений критерий текучести (2) определяет некоторую поверхность – поверхность текучести. Плоскость в пространстве главных напряжений, равнонаклоненная к декартовым осям этого пространства (синоптическая плоскость), называется девиаторной плоскостью. Она задается уравнением  $s_1 + s_2 + s_3 = 0$ . Поверхность текучести представляет собой цилиндр с образующей, перпендикулярной девиаторной плоскости. Кривая пересечения поверхности текучести и девиаторной плоскости называется кривой текучести. Ясно, что начало координат пространства главных напряжений располагается внутри кривой текучести и любой радиус может пересекать кривую текучести только один раз. Кривая текучести изотропного тела имеет шесть осей симметрии: она симметрична относительно прямых, являющихся проекциями (проектирование осуществляется параллельно оси  $s_1 = s_2 = s_3$ ) декартовых осей  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  на девиаторную плоскость, и прямых, расположенных в девиаторной плоскости ортогонально указанным проекциям<sup>4</sup>.

Ассоциированный закон течения изотропного тела, в случае, когда функция текучести зависит лишь от разностей главных нормальных напряжений, позволяет заключить, что пластическое течение несжимаемо, т.е.

$$de_1^P + de_2^P + de_3^P = 0.$$

<sup>3</sup> Или главные приращения пластических деформаций.

<sup>4</sup> Прямые, расположенные в девиаторной плоскости ортогонально проекциям декартовых осей пространства главных напряжений, называются линиями чистого сдвига и представляют собой траектории нагружения, соответствующие деформациям чистого сдвига.



Следовательно, вектор, представляющий в пространстве главных напряжений тензор  $d\varepsilon^P$ , всегда параллелен девиаторной плоскости, и поэтому всегда ортогонален кривой текучести. Длина этого вектора  $|d\varepsilon^P|$  ассоциированным законом течения никак не ограничивается.

2. Сен-Венаном, на основании опытных данных Треска, было предложено условие пластичности, состоящее в том, что текучесть тела наступает как только максимальное касательное напряжение  $t_{\max}$  достигает некоторого критического значения  $k$ :

$$t_{\max} = k.$$

Здесь постоянная  $k$  представляет собой предел текучести при чистом сдвиге. В период 1864–1872 гг. Треска провел большую серию экспериментов по выдавливанию металлов через матрицы различных форм, указав на постоянство максимального касательного напряжения в пластическом состоянии. Сен-Венан одним из первых признал важность открытия Треска и использовал критерий максимального касательного напряжения для построения математической теории пластичности.

Условие текучести Треска<sup>5</sup> или условие максимального касательного напряжения выражается в терминах главных нормальных напряжений в форме

$$\max \{ |s_1 - s_2|, |s_1 - s_3|, |s_2 - s_3| \} = 2k, \quad (9)$$

$k$  – предел текучести при чистом сдвиге.

Величины

$$t_1 = \frac{s_2 - s_3}{2}, \quad t_2 = \frac{s_3 - s_1}{2}, \quad t_3 = \frac{s_1 - s_2}{2} \quad (10)$$

называются главными касательными напряжениями и представляют собой, как известно, экстремальные значения касательных напряжений для всех возможных площадок, проходящих через заданную точку<sup>6</sup>.

В пространстве главных напряжений поверхность текучести, определяемая уравнением (9), представляет собой правильную шестигранную призму (призма Кулона–Треска), ось которой равнонаклонена к декартовым осям этого пространства. Кривая текучести (сечение призмы Кулона–Треска девиаторной плоскостью  $s_1 + s_2 + s_3 = 0$ ) представляет собой правильный шестиугольник с центром в начале координат и стороной, равной  $2\sqrt{2/3}k$ .

Используя главные касательные напряжения, уравнение призмы может быть представлено в форме

$$[t_1^2 - k^2][t_2^2 - k^2][t_3^2 - k^2] = 0. \quad (11)$$

Равенство  $\operatorname{sgn}(t_g)t_g = k$  ( $g = 1, 2, 3$ ) может достигаться лишь для одного из трех главных касательных напряжений, если ни одно из них не равно нулю, или для двух, если третье главное касательное напряжение при этом равно нулю (тогда какие-либо два из главных напряжений равны друг другу).

<sup>5</sup> В научной литературе разных стран иногда это условие текучести связывают (с различной степенью обоснованности) с именами Кулона (С.А. Coulomb, 1773 г.), Геста (J. Guest, 1900 г.) и Мора (O. Mohr, 1900 г.).

<sup>6</sup> Индексы в обозначениях для главных касательных напряжений выбраны, исходя из правила циклической перестановки.

Это же уравнение, выраженное через главные инварианты девиатора тензора напряжений  $J'_2, J'_3$ , будет иметь следующий вид:

$$4J_2'^3 - 27J_3'^2 - 36k^2J_2'^2 + 96k^4J_2' = 64k^6 \quad (12)$$

или

$$8(2k^2 - J_2')^3 - 4J_2'^2(3k^2 - J_2') + 27J_3'^2 = 0. \quad (13)$$

Уравнение призмы в такой сложной форме (найденное впервые М. Леви) практически бесполезно, никогда не применяется и представляет главным образом исторический интерес<sup>7</sup>.

3. Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращение пластических деформаций в пространстве главных напряжений, только в регулярных точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или конической особенности на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой предложено Койтером в 1953 г. Это обобщение (см. [10]) основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа  $p$  гладких поверхностей текучести  $f_g(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ , каждая из гладких поверхностей текучести дает аддитивный вклад (с соответствующим неопределенным множителем) в величину приращения пластической деформации.

Активное нагружение, сопровождающееся изменением пластических деформаций, определяется условиями

$$f_w = 0, \quad df_w = 0, \quad f_k = 0, \quad df_k < 0 \text{ или } f_k < 0,$$

где индексы  $w$  и  $k$  различны, и их значения в совокупности исчерпывают все значения индекса  $g = 1, 2, \dots, p$ , причем индекс  $w$  пробегает непустое множество значений.

Полное приращение  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  есть сумма соответствующих всем индексам  $w$  приращений  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{P(w)}$ :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \sum_w d\boldsymbol{\varepsilon}^{P(w)},$$

где каждое приращение  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{P(w)}$  вычисляется согласно ассоциированному закону течения с регулярной функцией текучести  $f_w$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{P(w)} = \frac{\partial f_w}{\partial \boldsymbol{\sigma}} dI_w,$$

а величины  $dI_w$  должны быть положительными. Множители  $dI_w$  неопределенны в том смысле, что они не могут быть вычислены через определяющие функции и произвольны до такой степени, в какой это допускается условиями совместности полных деформаций, краевыми условиями и условиями сопряжения на поверхностях, ограничивающих пластическую зону.

<sup>7</sup> Как указывалось В.В. Соколовским, в оригинальной работе М. Леви цифры 3 и 4 во втором члене уравнения (13) ошибочно переменены местами, что было обнаружено И.Я. Штаерманом. См. по этому поводу: Соколовский В.В. Теория пластичности. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. С. 67, 68.

Окончательно обобщенный ассоциированный закон течения принимает следующий вид:

$$d\varepsilon^P = \sum_{g=1}^p \frac{\partial f_g}{\partial \sigma} dI_g,$$

$$dI_g > 0 \quad (f_g = 0, df_g = 0),$$

$$dI_g = 0 \quad (f_g = 0, df_g < 0 \text{ или } f_g < 0).$$
(14)

Геометрически обобщенный ассоциированный закон течения устанавливает, что в угловой точке поверхности текучести вектор, представляющий приращения пластических деформаций в пространстве напряжений, является линейной комбинацией нормальных к поверхностям  $f_w = 0$  в указанной точке векторов, причем ни абсолютная величина, ни направление указанного вектора в угловой точке поверхности нагружения обобщенным ассоциированным законом течения не фиксируются, а остаются неопределенными. Так, в угловой точке шестиугольника Треска вектор, представляющий приращения пластических деформаций, может иметь любое абсолютное значение и занимать любое положение между нормальными к сторонам шестиугольника, сходящимся в угловую точку.

4. Рассмотрим уравнения обобщенного ассоциированного закона течения применительно к условию текучести Треска. Обозначая, как обычно, через  $t_1, t_2, t_3$  экстремальные (главные) касательные напряжения

$$t_1 = \frac{s_2 - s_3}{2}, \quad t_2 = \frac{s_3 - s_1}{2}, \quad t_3 = \frac{s_1 - s_2}{2},$$

имеем

$$de_{ij}^P = \sum_g \operatorname{sgn}(t_g) \frac{\partial t_g}{\partial s_{ij}} dI_g \quad (g = 1, 2, 3),$$

$$dI_g > 0, \text{ или } \operatorname{sgn}(t_g)t_g = k \text{ и } dt_g = 0,$$

$$dI_g = 0, \text{ или } \operatorname{sgn}(t_g)t_g = k \text{ и } \operatorname{sgn}(t_g)dt_g < 0 \text{ или } \operatorname{sgn}(t_g)t_g < k,$$
(15)

где индекс  $g$  пробегает значения 1, 2, 3 однако суммирование в правой части (15) распространяется лишь на те значения  $g$ , для которых  $\operatorname{sgn}(t_g)t_g = k$  и  $dt_g = 0$ , т.е. в правой части содержится не более двух слагаемых. При записи выражения для главного касательного напряжения  $t_g$  не должна учитываться симметрия тензора напряжений, иначе значения частных производных

$$\frac{\partial t_g}{\partial s_{ij}}$$

в правой части (15) будут вычислены неправильно.

Обобщенный ассоциированный с условием пластичности Треска закон течения (15) устанавливает, что пластические деформации появляются в результате сдвига (скольжения) на тех площадках, где касательные напряжения по абсолютной величине достигают предельно возможного значения, причем скольжение происходит в направлении действия максимального касательного напряжения так, что оно совершает положительную работу.

Частные производные в правой части (15) в координатной системе, ориентированной вдоль главных осей тензора напряжений, в том случае, когда указанная координатная система однозначно определена (т.е. когда ни одно из главных касательных напряжений  $t_g$  не равно нулю), без труда вычисляются, если заметить, что тогда

$$\sigma = \text{diag}(s_1, s_2, s_3)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial s_l}{\partial s_{ij}} = d_{il} d_{ij} \quad (i, j, l = 1, 2, 3; \text{ по } i \text{ не суммировать}) \quad (16)$$

Эта формула – координатное представление основных тензорных соотношений для дифференцирования собственных значений  $s_1, s_2, s_3$  симметричного тензора второго ранга по самому тензору  $\sigma$

$$\frac{\partial s_1}{\partial \sigma} = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}, \quad \frac{\partial s_2}{\partial \sigma} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \quad \frac{\partial s_3}{\partial \sigma} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (17)$$

В результате в указанной координатной системе находим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial t_1}{\partial s_{33}} &= \frac{\partial t_1}{\partial s_{22}} = \frac{1}{2}, \\ -\frac{\partial t_2}{\partial s_{11}} &= \frac{\partial t_2}{\partial s_{33}} = \frac{1}{2}, \\ -\frac{\partial t_3}{\partial s_{22}} &= \frac{\partial t_3}{\partial s_{11}} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Остальные частные производные равны нулю.

Непосредственный подсчет с помощью (15), (18) показывает, что в главных осях напряжений матрица тензора  $d\epsilon^P$  диагональна

$$d\epsilon^P = \text{diag}(de_1, de_2, de_3),$$

т.е. ориентации главных осей напряжений и главных осей приращений деформаций одинаковы.

В случае течения на ребре призмы Кулона–Треска  $s_3 - s_1 = 2k$ ,  $s_3 - s_2 = 2k$ , когда имеет место равенство двух главных нормальных напряжений  $s_1 = s_2$ , равенства (16), (18) в координатной системе, связанной с главными направлениями тензора напряжений, остаются справедливыми, правда, неопределенной будет сама координатная система, ибо неопределены ориентации векторов  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ , с помощью которой эти равенства формулируются<sup>8</sup>.

<sup>8</sup> Именно по этой причине координатная форма записи обобщенного ассоциированного закона течения (15), в отличие от прямой тензорной записи, не вполне отражает существо ситуации, соответствующей течению на ребре призмы Кулона–Треска. Частные производные

$$\frac{\partial t_g}{\partial s_{ij}},$$

вычисляются в главных осях напряжений, согласно (18) в координатной системе, которая не вполне определена.

Подсчет суммы главных приращений  $de_j^P$  на основании (15), (18) позволяет заключить, что выполняется условие несжимаемости.

Обратимся к более детальному исследованию уравнений обобщенного ассоциированного закона течения, предполагая, что напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона–Треска, а третье главное напряжение является максимальным:  $s_3 - s_1 = 2k$ ,  $s_3 - s_2 = 2k$ . Ясно, что при этом имеет место равенство двух главных напряжений  $s_1 = s_2$ . В терминах главных касательных напряжений этот случай характеризуется выполнением условий  $t_1 = -k$ ,  $t_2 = k$ ,  $t_3 = 0$ .

Равенство двух главных напряжений  $s_1 = s_2$  означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору  $\mathbf{n}$ , является главным. Ясно поэтому, что при соответствии напряженного состояния ребру призмы Кулона–Треска, т.е. в состоянии полной пластичности, имеется известная доля произвола при выборе собственных векторов  $\mathbf{l}$  и  $\mathbf{m}$  (они определены с точностью до поворота в плоскости, ортогональной вектору  $\mathbf{n}$ ). Их преимущественное положение в упомянутой плоскости указывается ориентацией собственных векторов тензора приращений пластических деформаций  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ , который в силу обобщенного ассоциированного закона течения должен быть соосен тензору напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и обладает, вообще говоря,  $de_1 \neq de_2$ , уникальным триэдром главных направлений. Следовательно, обобщенный ассоциированный закон течения, сформулированный для ребра призмы Кулона–Треска, устанавливает совпадение только одной из трех главных осей тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, накладывая тем самым минимум кинематических ограничений. Это обстоятельство мы будем характеризовать термином “1/3-соосность” тензоров  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  и  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Для течения на ребре призмы Кулона–Треска “1/3-соосность” тензоров  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  достаточна для их соосности в том смысле, что существует хотя бы одна тройка взаимно ортогональных направлений, которая будет главной как для тензора  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ , так и для тензора  $\boldsymbol{\sigma}$ . Действительно, тензор  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ , будучи симметричным тензором второго ранга, обладает, по меньшей мере, одной тройкой ортогональных друг другу главных осей. Одна из главных осей имеет направление вектора  $\mathbf{n}$ , поэтому две другие располагаются в плоскости, ортогональной вектору  $\mathbf{n}$ . Поскольку в этой плоскости любое направление будет главным для тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ , то остается только причислить те две оси к главным осям напряжений, чтобы указать общую (для тензоров  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  и  $\boldsymbol{\sigma}$ ) тройку главных осей. Итак, при исследовании течения на ребре призмы Кулона–Треска никогда не следует забывать об указанном обстоятельстве: триэдр главных направлений тензора приращений пластических деформаций  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  всегда будет и триэдром главных направлений тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ , но не всякий триэдр главных направлений тензора напряжений будет триэдром главных направлений тензора приращений пластических деформаций.

Обозначая, как было оговорено выше, через  $de_j^P$  собственные значения тензора приращений пластических деформаций, соотношения обобщенного ассоциированного

закона течения для ребра призмы Кулона–Треска  $t_1 = -k$ ,  $t_2 = k$ ,  $t_3 = 0$  представим в общих главных осях напряжений и приращений пластических деформаций в виде

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_1^P &= -dI_2, \\ d\mathbf{e}_2^P &= -dI_1, \\ d\mathbf{e}_3^P &= dI_1 + dI_2, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $dI_g$  – неопределенные множители теории идеальной пластичности. Следовательно, обобщенный ассоциированный закон течения, сформулированный для ребра призмы Кулона–Треска, эквивалентен двум условиям: условию “1/3-соосности” тензоров  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  и условию

$$d\mathbf{e}_1^P + d\mathbf{e}_2^P + d\mathbf{e}_3^P = 0,$$

характеризующему несжимаемость пластического деформирования.

Заметим также, что в случае течения на ребре призмы Кулона–Треска  $t_1 = -k$ ,  $t_2 = k$ ,  $t_3 = 0$  обобщенный ассоциированный закон течения накладывает следующие ограничения на знаки главных приращений пластических деформаций:

$$d\mathbf{e}_1^P < 0, \quad d\mathbf{e}_2^P < 0, \quad d\mathbf{e}_3^P > 0. \quad (20)$$

Таким образом, становится ясным, что формулировка пространственных уравнений теории пластичности на основе условия полной пластичности и обобщенного ассоциированного закона течения на ребре призмы Кулона–Треска является непосредственным обобщением уравнений Сен-Венана для плоской задачи [8], [9] со всеми особенностями, присущими теории плоской задачи: формальная статическая определимость и гиперболичность уравнений.

5. В точности такие же уравнения пространственной задачи математической теории пластичности были установлены А.Ю. Ишлинским [4] в 1946 г. (См. также: Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. С. 62-83. Здесь на с. 80 приводится полная система уравнений для пространственной задачи математической теории пластичности в рамках гипотезы полной пластичности Хаара–Кармана.) В этой работе А.Ю. Ишлинский отказался от “неассоциированного” определяющего закона Леви [6] и дал корректное обобщение теории течения Сен-Венана [8], [9] на трехмерный случай. В явной форме он указал на необходимость при построении теории пространственной задачи двух условий пластичности

$$f_1(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) = 0, \quad f_2(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) = 0,$$

в качестве которых он принял уравнения двух пересекающихся граней призмы Кулона–Треска, уравнения несжимаемости и условий соосности тензоров  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  и  $\boldsymbol{\sigma}$ , которые он принял в следующем виде:

$$\begin{aligned} s_{11}d\mathbf{e}_{12} + s_{12}d\mathbf{e}_{22} + s_{13}d\mathbf{e}_{23} &= s_{21}d\mathbf{e}_{11} + s_{22}d\mathbf{e}_{12} + s_{23}d\mathbf{e}_{13}, \\ s_{21}d\mathbf{e}_{31} + s_{22}d\mathbf{e}_{32} + s_{23}d\mathbf{e}_{33} &= s_{31}d\mathbf{e}_{21} + s_{32}d\mathbf{e}_{22} + s_{33}d\mathbf{e}_{23}, \\ s_{31}d\mathbf{e}_{11} + s_{32}d\mathbf{e}_{12} + s_{33}d\mathbf{e}_{13} &= s_{11}d\mathbf{e}_{31} + s_{12}d\mathbf{e}_{32} + s_{13}d\mathbf{e}_{33}. \end{aligned} \quad (21)$$

Три последних уравнения, по существу, выражают перестановочность тензоров  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  и  $\boldsymbol{\sigma}$ , т.е.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}^P) = (d\boldsymbol{\varepsilon}^P) \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Обосновать перестановочность двух тензоров второго ранга, если они соосны, довольно просто: поскольку тензоры  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  имеют, по крайней мере, одну общую ортонормированную тройку собственных векторов, то ее можно принять в качестве базиса, а в этом базисе матрицы рассматриваемых тензоров диагональны

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{diag}(s_1, s_2, s_3), \quad d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \text{diag}(de_1^P, de_2^P, de_3^P)$$

и, следовательно, перестановочны.

Справедливо и обратное утверждение: если два симметричных тензора второго ранга  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  перестановочны, то они соосны, т.е. имеют, по крайней мере, одну общую тройку взаимно ортогональных главных осей. Доказательство разобьем на три случая.

Сначала предположим, что все собственные значения симметричного тензора  $\mathbf{A}$  различны, и то же самое предположим относительно тензора  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если  $\mathbf{k}$  – собственный вектор тензора  $\mathbf{A}$ , то  $\mathbf{A}\mathbf{k} = I\mathbf{k}$ , и поскольку

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}\mathbf{k} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\mathbf{k} = I\mathbf{B}\mathbf{k},$$

$\mathbf{B}\mathbf{k}$  – собственный вектор тензора  $\mathbf{A}$  с тем же самым собственным значением  $I$ . В силу одномерности собственных подпространств тензора  $\mathbf{A}$  имеем  $\mathbf{B}\mathbf{k} = m\mathbf{k}$ , следовательно,  $\mathbf{k}$  – собственный вектор тензора  $\mathbf{B}$ . Аналогичные рассуждения приводят к заключению о том, что если  $\mathbf{s}$  – собственный вектор тензора  $\mathbf{B}$ , то  $\mathbf{s}$  – собственный вектор тензора  $\mathbf{A}$ . Но это означает, что тензоры  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  соосны. Остается рассмотреть случаи, когда один из тензоров  $\mathbf{A}$  или  $\mathbf{B}$  (или они оба) имеет (имеют) кратные собственные значения.

Предположим, что один из тензоров  $\mathbf{A}$  или  $\mathbf{B}$  имеет три одинаковых собственных значения. Тогда он пропорционален единичному тензору  $\mathbf{I}$ , а для него любой триэдр взаимно ортогональных направлений будет главным. И в этом случае тензоры  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  оказываются соосными.

Наконец предположим, что один из тензоров (скажем, тензор  $\mathbf{A}$ ) имеет ровно два одинаковых собственных значения  $a_1 = a_2 \neq a_3$ . Наличие или отсутствие кратных собственных значений у тензора  $\mathbf{B}$  в дальнейших рассуждениях несущественно. Тройку взаимно ортогональных собственных векторов тензора  $\mathbf{A}$  обозначим через  $\mathbf{k}_j$ . Вектор  $\mathbf{k}_3$  будет также и собственным вектором тензора  $\mathbf{B}$  (см. первый случай). Два других собственных вектора тензора  $\mathbf{B}$  будут располагаться в плоскости, ортогональной вектору  $\mathbf{k}_3$ . В плоскости, ортогональной вектору  $\mathbf{k}_3$ , любое направление будет главным для тензора  $\mathbf{A}$ , поэтому вектор  $\mathbf{k}_1$  всегда можно повернуть в указанной плоскости так, чтобы он стал также и собственным вектором тензора  $\mathbf{B}$ . Остается построить вектор  $\mathbf{k}_2$ , ортогонально векторам  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_3$ , чтобы указать общую тройку взаимно ортогональных главных осей тензоров  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . Доказательство, тем самым, завершается.

В декартовой системе координат перестановочность тензоров  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  приводит к соотношениям

$$s_{ij}d\mathbf{e}_{ij}^P = s_{ij}d\mathbf{e}_{il}^P, \quad (22)$$

которые при  $i = 1, j = 2; i = 2, j = 3; i = 3, j = 1$  дают соотношения соосности Ишлинского.

По причинам, рассмотренным выше, соотношения соосности Ишлинского можно назвать также соотношениями перестановочности.

Соотношения перестановочности Ишлинского в качестве следствия приводят к симметрии тензора  $\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ . Действительно, из симметрии каждого из тензоров  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  и их перестановочности следует

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P)^T = (d\boldsymbol{\varepsilon}^P)^T \cdot \boldsymbol{\sigma}^T = d\boldsymbol{\varepsilon}^P \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P,$$

т.е.

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P)^T = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P. \quad (23)$$

Итак, в случае течения на ребре призмы Кулона–Треска “1/3-соосность” тензоров  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  достаточна для их соосности, понимаемой в том смысле, что существует хотя бы одна тройка взаимно ортогональных направлений, которая будет главной как для тензора  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ , так и для тензора  $\boldsymbol{\sigma}$ . Поэтому “1/3-соосность” тензоров  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  влечет перестановочность тензоров  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  и  $\boldsymbol{\sigma}$ , фиксируемую посредством соотношений перестановочности А.Ю. Ишлинского (21) и соотношения симметрии (23). В итоге приходим к заключению: пространственные соотношения Ишлинского полностью сохраняют свое значение в современной математической теории пластичности и их можно использовать при постановке и решении задач теории идеальной пластичности, поскольку они являются следствиями обобщенного ассоциированного закона течения в случае течения на ребре призмы Кулона–Треска.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д.Д.* О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях / Д.Д. Ивлев // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 124. – 3. – С. 546-549.<sup>9</sup>
2. *Ивлев, Д.Д.* Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред / Д.Д. Ивлев // Прикл. матем. и механика. – 1958. – Т. 22. – Вып. 1. – С. 90-96.<sup>10</sup>
3. *Ивлев, Д.Д.* Теория идеальной пластичности / Д.Д. Ивлев. – М.: Наука, 1966. – 232 с.
4. *Ишлинский, А.Ю.* Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости / А.Ю. Ишлинский // Уч. зап. МГУ. Механика. – 1946. – Вып. 117. – С. 90-108. (Статья воспроизводится также в книге: Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. С. 62-83. В заключительном подстрочном замечании А.Ю. Ишлинский указывает на то, что статья была написана и представлена в редакцию в начале 1941 г.)
5. *Качанов, Л.М.* Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
6. *Леви, М.* К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости: Сб. ст. /М. Леви // Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 20-23<sup>11</sup>.

<sup>9</sup> См. также: Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. С. 15-20.

<sup>10</sup> См. также: Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. С. 5-14.



7. Радаев, Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. 2-е изд. / Ю.Н. Радаев Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с.
8. *De Saint-Venant, B.* Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / B. De Saint-Venant // Liouville J. d. Math. Pures et Appl. Ser. II. – 1871. – t. 16. – pp. 308-316, 373-382.<sup>12</sup>
9. *De Saint-Venant, B.* Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / B. De Saint-Venant // Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences. – 1870. – t. 70. – pp. 473-480.
10. *Koiter, W.T.* Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic material with a singular yield surface / W.T. Koiter // Quart. Appl. Math. V. 11. 3. 1953. P. 350-354.

г. Самара

Поступила: 2 марта 2007 г.

## ПРИЛОЖЕНИЕ:

### ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ СИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРА ВТОРОГО РАНГА ПО САМОМУ ТЕНЗОРУ

Вычислим производные от единичных взаимно ортогональных собственных векторов  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  по самому тензору напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ . Полученные формулы будут справедливы для любого симметричного тензора второго ранга<sup>13</sup>.

Для этого зафиксируем в пространстве декартову систему координат и продифференцируем спектральное разложение тензора напряжений

$$s_{ij} = s_1 l_i l_j + s_2 m_i m_j + s_3 n_i n_j$$

<sup>11</sup> Оригинальная работа: Levy M. Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état// Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, 1870, t. 71, pp. 1323-1325.

<sup>12</sup> Имеется перевод на русский язык: Сен-Венан Б. Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости: Сб. ст.// Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 11-19.

<sup>13</sup> По поводу определения производной вектора по тензорному аргументу см., например: Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. С. 451-453. Если  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{A})$  есть векторная функция от тензорного аргумента, то частную производную  $\partial \mathbf{a} / \partial \mathbf{A}$  – мы определяем как тензор третьего ранга

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{i}^l \otimes \mathbf{i}^j \otimes \mathbf{i}^s \frac{\partial a_l}{\partial A^{js}},$$

где  $\mathbf{i}^j$  – контравариантные локальные базисные векторы криволинейной системы координат в пространстве.

Такое определение позволяет представить вариацию вектора  $\mathbf{a}$ , отвечающую вариации тензора  $\mathbf{A}$ , в форме

$$d\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{A}} \cdot d\mathbf{A}^T.$$

по  $s_{ks}$  (при дифференцировании *не должна* учитываться симметрия тензора напряжений, иначе необходимые частные производные будут вычислены неправильно) и в результате получим равенство

$$d_{ik} d_{js} = \frac{\partial s_1}{\partial s_{ks}} l_i l_j + s_1 l_j \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}} + s_1 l_i \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}} + \dots,$$

которое преобразуем, используя

$$\frac{\partial s_1}{\partial s_{ks}} = l_k l_s,$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial s_{ks}} = m_k m_s,$$

$$\frac{\partial s_3}{\partial s_{ks}} = n_k n_s.$$

В результате имеем

$$d_{ik} d_{js} = l_k l_s l_i l_j + s_1 l_j \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}} + s_1 l_i \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}} + m_k m_s m_i m_j + s_2 m_j \frac{\partial m_i}{\partial s_{ks}} + s_2 m_i \frac{\partial m_j}{\partial s_{ks}} + n_k n_s n_i n_j + s_3 n_j \frac{\partial n_i}{\partial s_{ks}} + s_3 n_i \frac{\partial n_j}{\partial s_{ks}}.$$

Сворачивая обе части этого равенства с  $l_j$ , приходим к

$$l_s d_{ik} = l_k l_s l_i + s_1 \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}} + s_2 m_i l_j \frac{\partial m_j}{\partial s_{ks}} + s_3 n_i l_j \frac{\partial n_j}{\partial s_{ks}},$$

откуда на основании<sup>14</sup>

$$l_j \frac{\partial m_j}{\partial s_{ks}} = -m_j \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}}, \quad l_j \frac{\partial n_j}{\partial s_{ks}} = -n_j \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}}$$

получаем

$$l_s d_{ik} = l_k l_s l_i + s_1 \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}} - s_2 m_i m_j \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}} - s_3 n_i n_j \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}}.$$

Сворачивая обе части последнего равенства с  $m_i$ , находим

$$l_s m_k = s_1 m_i \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}} - s_2 m_j \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}} = (s_1 - s_2) m_i \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}}$$

и аналогично (сворачивая с  $n_i$ )

$$l_s n_k = (s_1 - s_3) n_i \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}}.$$

Учитывая еще, что в силу  $l_i l_i = 1$

<sup>14</sup> Приводимые далее соотношения следуют из условий ортогональности  $l_j m_j = 0$ ,  $l_j n_j = 0$ .

$$l_i \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}} = 0,$$

имеем

$$\frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}} = \frac{l_s m_k}{s_1 - s_2} m_j + \frac{l_s n_k}{s_1 - s_3} n_j$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial s_{ks}} = \frac{l_s m_k}{s_1 - s_2} \mathbf{m} + \frac{l_s n_k}{s_1 - s_3} \mathbf{n},$$

что в прямой тензорной записи (после тензорного умножения справа на базисную диаду  $\mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_s$ , суммирования по повторяющимся индексам и симметризации) дает

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{s_1 - s_2} \mathbf{m} \otimes \text{sym}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{l}) + \frac{1}{s_1 - s_3} \mathbf{n} \otimes \text{sym}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{l}).$$

Не представляет труда получить формулы для частных производных от оставшихся собственных векторов. Приведем окончательный результат

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{s_1 - s_2} \mathbf{m} \otimes \text{sym}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{l}) + \frac{1}{s_1 - s_3} \mathbf{n} \otimes \text{sym}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{l}), \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{s_2 - s_1} \mathbf{l} \otimes \text{sym}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{m}) + \frac{1}{s_2 - s_3} \mathbf{n} \otimes \text{sym}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}), \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{s_3 - s_2} \mathbf{m} \otimes \text{sym}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) + \frac{1}{s_3 - s_1} \mathbf{l} \otimes \text{sym}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}). \end{aligned}$$

Для состояний на ребре призмы Кулона–Треска  $s_1 = s_2 = s_3 - 2k$  имеем

$$2k \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{m} \otimes \text{sym}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) + \mathbf{l} \otimes \text{sym}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{n})$$

или, учитывая

$$\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{I},$$

$$2k \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{2} \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{l},$$

а также

$$4k \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{l}.$$

Последнее уравнение в координатной записи имеет вид

$$4k \frac{\partial n_i}{\partial s_{sj}} = d_{is} n_j - n_j n_s n_i + m_i n_s m_j + l_i n_s l_j.$$

Сворачивая обе части этого равенства с  $n_j$ , находим

$$4kn_j \frac{\partial n_i}{\partial \mathbf{s}_{sj}} = \mathbf{d}_{is} - n_i n_s,$$

а сворачивая еще раз с  $n_s$  –

$$n_s n_j \frac{\partial n_i}{\partial \mathbf{s}_{sj}} = 0.$$

Последнее равенство в прямой тензорной записи приобретает форму

$$\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = 0.$$

## ПОВЕРХНОСТИ РАЗРЫВОВ ДЕФОРМАЦИЙ В НЕОБРАТИМО СЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛАХ

(ИАПУ ДВО РАН)

Поверхности разрывов деформаций в упругопластических средах рассматривались неоднократно [1, 2, 6, 7]. Основным качественным результатом [2, 7] явилась невозможность изменения главных направлений тензора напряжений в переходном слое накопления необратимых деформаций. В [1] этот же результат трактуется в качестве следствия обобщения принципа максимума Мизеса на разрывы необратимых деформаций и напряжений на ударной волне. На основании данного вывода в [1, 2, 7] выводились условия возникновения поверхностей разрывов необратимых деформаций и вычислялись скорости их распространения. В качестве условия пластичности в [1] была выбрана пирамида Кулона-Мора. В настоящей заметке в качестве поверхности нагружения используется аналог условия Кулона-Мора, когда основанием пирамиды текучести является не шестиугольник Треска, а шестиугольник максимального приведенного напряжения.

### 1. Определяющие соотношения упруго-пластической среды

Полагаем деформации, допускаемые упругопластической средой, малыми, тогда

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = e_{ij}^e + e_{ij}^p. \quad (1.1)$$

В (1.1)  $u_i$  – компоненты вектора перемещений,  $e_{ij}^e$  и  $e_{ij}^p$  – составляющие полных деформаций  $e_{ij}$ , обратимая (упругая) и необратимая (пластическая), соответственно. Обратимые деформации  $e_{ij}^e$  задают напряженное состояние  $s_{ij}$  в точках среды, подчиняющееся закону Гука для изотропного случая

$$s_{ij} = l e_{kk}^e d_{ij} + 2m e_{ij}^e. \quad (1.2)$$

Необратимые деформации  $e_{ij}^p$  накапливаются в среде при ее деформировании в условиях, когда

$$f^s(s_{ij}, t) = k. \quad (1.3)$$

В условиях принимаемого принципа максимума Мизеса (1.3) выступает в качестве пластического потенциала так, что выполняются соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$e_{ij}^p = \mathcal{E}_{ij}^p = \sum_{s=1}^n \Psi_s \frac{\partial f^{(s)}}{\partial s_{ij}}. \quad (1.4)$$

В качестве параметра истории  $\tau$  принимаем [5] полную объемную деформацию  $e = \frac{1}{3} e_{ij}$ . Заметим, что в [4] в качестве такого параметра выступала плотность среды. Точкой в (1.4) и всюду в дальнейшем обозначается производная по времени. Конкретизируем соотношения (1.3)

$$\max |s_i - s| + qs = \frac{2}{3} k, \quad s + j(e) = 0. \quad (1.5)$$

В (1.5)  $s = \frac{1}{3} s_{ij}$ ;  $j(e)$  – задаваемая функция, ответственная за закономерность необратимого сжатия материала. В пространстве главных напряжений (1.5) изображаются пирамидой, опирающейся на основание в форме шестиугольника максимального приведенного напряжения. При этом основание может сдвигаться согласно закону, соответствующему второму соотношению из (1.5). Если добавить к написанным выше равенствам уравнение движения

$$s_{ij,j} = r\dot{\epsilon}. \quad (1.6)$$

и кинематическую зависимость  $u_i = \dot{\epsilon}_i$ , то на каждом участке поверхности текучести (1.5) можно будет записать замкнутую систему уравнений.

В результате динамического воздействия на упругопластическую среду в ней могут распространяться поверхности разрывов деформаций  $\Sigma(t)$  с постоянной скоростью  $c$ . Следствием законов сохранения на  $\Sigma(t)$  являются динамические условия совместности разрывов:

$$[s_{ij} h_j + rc[u_i] = 0; \quad [s_{ij} u_i h_j + \frac{1}{2} rc[u_i u_i + 2E] = 0. \quad (1.7)$$

Здесь квадратными скобками обозначен разрыв величины на  $\Sigma(t)$ , так что  $[v_j] = v_j^+ - v_j^-$ , то есть разность значений разрывной функции, вычисленных непосредственно перед  $\Sigma(t)$  и сразу за  $\Sigma(t)$ ;  $n_j$  – компонента вектора единичной нормали к  $\Sigma(t)$ , направленной в сторону ее движения. Для разрывов деформаций из (1.1) и кинематического условия совместности Адамара следует

$$[e_{ij}] = -\frac{1}{2c} ([u_i h_j + [u_j h_i]). \quad (1.8)$$

Когда на поверхности разрывов скачкообразно изменяются необратимые деформации, следствие закона сохранения энергии (второе равенство из (1.7)) сводиться [1] к зависимости

$$-\frac{1}{2} (s_{ij}^+ + s_{ij}^-) [e_{ij}^p] = \int_{e_{ij}^{p+}}^{e_{ij}^{p-}} s_{ij} de_{ij}^p. \quad (1.9)$$

С другой стороны для любого деформируемого объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ , и, разделенного одной поверхностью разрывов  $\Sigma(t)$ , возможно записать уравнение скоростей работы в форме

$$\int_S \mathbf{s}_{ij} \mathbf{u}_i n_j dS + \int_V r c_i \mathbf{u}_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \left( r \frac{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i}{2} + \frac{\mathbf{s}_{ij} e_{ij}^e}{2} \right) dV + \int_V \mathbf{s}_{ij} e_{ij}^p dV - \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{s}_{ij}^+ + \mathbf{s}_{ij}^-}{2} [e_{ij}^p] dS. \quad (1.10)$$

Равенство (1.9) подчеркивает термодинамический смысл последнего слагаемого в (1.10). Согласно (1.10) мощность внешних усилий (левая часть) расходуется на изменение кинетической и потенциальной энергии в объеме (первое слагаемое правой части) и на рост внутренней энергии в нем за счет диссипации работы в объеме и на поверхности разрывов  $\Sigma(t)$ . Заметим, что данный вывод не связан с конкретизацией модели необратимого деформирования. Соотношения (1.9) и (1.10) не зависят от выбора модели пластического течения.

Если принять положение принципа максимума Мизеса, что изначально предполагалось, то согласно (1.9) и (1.10) для необратимого процесса деформирования на поверхности разрывов  $\Sigma(t)$  вытекает следующее предложение:

*Когда на поверхности разрывов пластические деформации меняются от значения  $e_{ij}^{p+}$  до значения  $e_{ij}^{p-}$ , напряжения изменяются таким образом, что величина  $(\mathbf{s}_{ij}^+ + \mathbf{s}_{ij}^-)[e_{ij}^p]$  принимает максимальное значение для всех возможных  $\mathbf{s}_{ij}^+$  и  $\mathbf{s}_{ij}^-$ , удовлетворяющих условиям*

$$f^s(\mathbf{s}_{ij}^+, t^+) \leq k, \quad f^s(\mathbf{s}_{ij}^-, t^-) = k.$$

Выделенное предложение является естественным обобщением принципа максимума Мизеса на случай процессов в ударной волне ( $[e_{ij}^p] \neq 0$ ). Оно непосредственно переходит в классический принцип максимума, когда  $\mathbf{s}_{ij}^+$  стремится к значению  $\mathbf{s}_{ij}^-$ , а  $[e_{ij}^p]$  переходит в  $e_{ij}^p = e_{ij}^p$ . Именно принятие данного положения приводит к тому, что главные направления тензора напряжений не могут изменяться скачкообразно на  $\Sigma(t)$ .

## **2. Ударные волны при выполнении условия пластичности, соответствующего грани пирамиды условия текучести максимального приведенного напряжения**

Будем предполагать, что единственным диссипативным процессом, допускаемым средой, включая также процессы на ударной волне, является пластическое течение. С целью записи соотношений на поверхности разрывов принимаем ее в качестве тонкого переходного слоя шириной  $2h$ .

Пусть напряженное состояние во всем переходном слое соответствует грани пирамиды максимального приведенного напряжения (1.5). При этом возможны следующие соотношения

$$(2+q)s_1 + (q-1)(s_2 + s_3) = 2k. \quad (2.1)$$

$$(q-2)s_1 + (q+1)(s_2 + s_3) = 2k. \quad (2.2)$$

Выбор (2.1) или (2.2) конкретизирует грань, но на других гранях результаты будут аналогичными с точностью до переобозначения главных напряжений.

**2.1** Пусть напряженное состояние задается соотношением (2.1), тогда, следуя ассоциированному закону пластического течения, получим

$$\mathbf{e}_1^p = \left(1 + \frac{q}{2}\right) \mathbf{y}, \quad \mathbf{e}_2^p = \mathbf{e}_3^p = \frac{q-1}{2} \mathbf{y}. \quad (2.3)$$

Замкнутая система дифференциальных соотношений получается, если к (2.1) и (2.3) добавить соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{ij} &= \mathbf{e}_{ij}^e + \mathbf{e}_{ij}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}), & \mathbf{e}_{ij}^p &= \mathbf{e}_1^p l_i l_j + \mathbf{e}_2^p m_i m_j + \mathbf{e}_3^p n_i n_j, \\ \mathbf{s}_{ij} &= l e_{kk}^e d_{ij} + 2m e_{ij}^e, & \mathbf{s}_{ij,j} - r \mathbf{u}_i &= 0, \\ \mathbf{s}_{ij} &= s_1 l_i l_j + s_2 m_i m_j + s_3 n_i n_j. \end{aligned} \quad (2.4)$$

$l_{ij}$ ,  $m_{ij}$  и  $n_{ij}$  – направляющие косинусы главных осей тензора напряжений. Для них справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} l_i l_i &= m_i m_i = n_i n_i = 1, \\ l_i m_i &= l_s n_s = m_k n_k = 0, \\ l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j &= d_{ij}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $d_{ij}$  – символ Кронекера.

Соотношения (2.1), (2.3) и (2.4) составляют замкнутую систему уравнений, описывающую необратимое деформирование, когда напряжения соответствуют выбранной грани пирамиды текучести. Положим, что в среде при выбранных условиях распространяется поверхность разрывов, тогда из уравнений (2.1), (2.3) и (2.4) вместе с динамическими и кинематическими условиями совместности разрывов можно окончательно получить следующие соотношения

$$\begin{aligned} [s_1] l_i l_j + [s_2] m_i m_j + [s_3] n_i n_j &= l d_{ij} [u_3] - h \Phi d_{ij} + m [u_i] h_j + m [u_j] h_i - 3m l_i l_j \Phi, \\ (m - rc^2) [u_i] - (h n_i + 3m l_i l_3) \Phi + (l + m) [u_3] h_i &= 0, \\ (2 + q) [s_1] + (q - 1) ([s_2] + [s_3]) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Выражения (2.6) представляют собой систему уравнений в разрывах, где

$$\Phi = \int_{-h}^h y dx_3, \quad h = \frac{3}{2} l q + m(q-1), \quad [s_i] = -c(s_i^+ - s_i^-).$$

Выберем систему координат так, чтобы ось  $x_3$  совпадала с нормалью к  $\Sigma(t)$ . Поворотом плоскости  $XoY$  вокруг оси  $x_3$  всегда можно добиться того, чтобы  $l_2 = 0$ , при этом из второго соотношения системы уравнений (2.6), при  $i = 2$ , получим

$$(m - rc^2) [u_2] = 0. \quad (2.7)$$

Положим, что  $m \neq rc^2$  (случай  $m = rc^2$  будет рассмотрен далее), тогда из (2.9) следует, что  $[u_2] = 0$ . Тогда из первого соотношения системы уравнений (2.6) при  $i = 1, j = 2$  и, при  $i = 2, j = 3$  получим

$$\begin{cases} ([s_2] - [s_3]) m_1 m_2 = 0, \\ ([s_2] - [s_3]) m_3 m_2 = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

С учетом системы уравнений (2.8) из соотношений (2.6) можно получить следующие решения



Решение 1.

$$\bar{l} = (\pm 1; 0; 0), \quad \bar{m} = (0; \pm 1; 0), \quad \bar{n} = (0; 0; \pm 1) \text{ или}$$

$$\bar{l} = (\pm 1; 0; 0), \quad \bar{m} = (0; 0; \pm 1), \quad \bar{n} = (0; \pm 1; 0).$$

$$[u_1] = [u_2] = 0,$$

$$\Phi = \frac{1}{3} [u_3] \frac{q(3l + 2m) - 2m}{q(h + m) + 2m},$$

$$c^2 = \frac{m}{3r} \cdot \frac{q(4h + 6m + 3l) + 12m + 2h + 6l}{q(h + m) + 2m}.$$

Следовательно, разрыв является продольным и приводит к расширению среды  $[u_3] > 0$ . Нормаль к поверхности разрывов коллинеарна либо второму, либо третьему главному направлению тензора напряжения. Если для скорости продвижения поверхности разрывов исключить пластическую сжимаемость ( $q = 0$ ), то получим

$$c^2 = \frac{3l + 5m}{3r}.$$

Решение 2.

$$\bar{l} = (0; 0; \pm 1), \quad \bar{m} = (0; \pm 1; 0), \quad \bar{n} = (\pm 1; 0; 0) \text{ или}$$

$$\bar{l} = (0; 0; \pm 1), \quad \bar{m} = (\pm 1; 0; 0), \quad \bar{n} = (0; \pm 1; 0).$$

$$[u_1] = [u_2] = 0,$$

$$\Phi = \frac{1}{3} [u_3] \frac{q(3l + 2m) + 4m}{q(h + m) + 2m},$$

$$c^2 = \frac{2m}{3r} \cdot \frac{(1 - q)(3l - 2h)}{q(h + m) + 2m}.$$

Разрыв является продольным и приводит к расширению среды  $[u_3] > 0$ . Нормаль к поверхности разрывов, при этом, коллинеарна первому главному направлению тензора напряжения. При исключении для скорости продвижения поверхности разрывов пластической сжимаемости, получим известное [2; 7] значение

$$c^2 = \frac{3l + 2m}{3r}.$$

Решение 3.

Наиболее интересным здесь является случай, когда нормаль к поверхности разрывов ортогональна либо второму, либо третьему главному направлению тензора напряжений. Разрыв в этом случае оказывается комбинированным ( $[u_3] \neq 0$  и  $[u_1] \neq 0$ ) и движется со скоростью, меньшей скорости движения бездиссипативного сдвигового разрыва. Полное решение в этом случае записывается в форме:

$$\bar{l} = (l_1; 0; l_3), \quad \bar{m} = (0; \pm 1; 0), \quad \bar{n} = (n_1; 0; n_3) \text{ или}$$

$$\bar{l} = (l_1; 0; l_3), \quad \bar{m} = (m_1; 0; m_3), \quad \bar{n} = (0; \pm 1; 0).$$

$$[u_2] = 0, \quad [u_3] = \frac{1}{2}[u_1] \cdot \frac{1-2l_1^2}{l_1 l_3},$$

$$\Phi = 2[u_3] \frac{l+m}{3m+2h},$$

$$c^2 = \frac{m}{r} \cdot \frac{(1-q)(3l-2h)}{q(2h-3l)+12l-2h+9m}.$$

Существование подобных разрывов в пластически несжимаемых материалах ранее не отмечалось. При стремлении  $q$  к нулю (переход к пластической несжимаемости) получаем

$$c^2 = \frac{m}{r} \cdot \frac{3l+2m}{12l+11m}.$$

В зависимости от предварительного напряженного состояния данный разрыв может увеличивать деформации изменения формы или, наоборот, уменьшать их, но всегда объемные деформации в нем приводят только к расширению среды.

Наконец, возможен случай  $m = rc^2$ , приводящий к бездиссипативному ( $\Phi = 0$ ) разрыву.

**2.2** Пусть напряженное состояние задается соотношением (2.2), тогда, следуя ассоциированному закону пластического течения, получим

$$e_1^p = \frac{q-2}{2}y; \quad e_2^p = e_3^p = \frac{q+1}{2}y. \quad (2.9)$$

Замкнутая система дифференциальных соотношений получается, если к (2.2) и (2.9) добавить соотношения (2.4).

Соотношения (2.2), (2.4) и (2.9) составляют замкнутую систему уравнений, описывающую необратимое деформирование, когда напряжения соответствуют выбранной грани пирамиды текучести. Положим, что в среде при выбранных условиях распространяется поверхность разрывов, тогда из соотношений (2.2), (2.4) и (2.9) вместе с динамическими и кинематическими условиями совместности разрывов можно окончательно получить следующие соотношения

$$[s_1]l_i l_j + [s_2]m_i m_j + [s_3]n_i n_j = l d_{ij}[u_3] - z \Phi d_{ij} + m[u_i]h_j + m[u_j]h_i + 3m l_i l_j \Phi,$$

$$(m - rc^2)[u_i] + (l+m)[u_3]h_i - \Phi z n_i + 3m l_i l_3 \Phi = 0, \quad (2.10)$$

$$(q-2)[s_1] + (q+1)([s_2] + [s_3]) = 0.$$

Соотношения (2.10) представляют собой систему уравнений в разрывах, где

$$\Phi = \int_{-h}^h y dx_3, \quad z = \frac{3}{2}lq + m(q+1), \quad [s_i] = -c(s_i^+ - s_i^-).$$

Выберем систему координат так, чтобы ось  $x_3$  совпадала с нормалью к  $\Sigma(t)$ . Поворотом плоскости  $XOY$  вокруг оси  $x_3$  всегда можно добиться того, чтобы  $l_2 = 0$ , при этом из второго соотношения системы уравнений (2.10), при  $i = 2$ , получим соотношение (2.7).

Положим, что  $m \neq rc^2$  (случай  $m = rc^2$  будет рассмотрен далее), тогда из (2.9) следует, что  $[u_2] = 0$ . Тогда из первого соотношения системы уравнений (2.6) при  $i = 1, j = 2$  и, при  $i = 2, j = 3$  получим

$$\begin{cases} ([s_2] - [s_3])m_1m_2 = 0, \\ ([s_2] - [s_3])m_3m_2 = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

С учетом системы уравнений (2.11) из соотношений (2.10) можно получить следующие решения.

Решение 1.

$$\begin{aligned} \bar{l} &= (\pm 1; 0; 0), & \bar{m} &= (0; \pm 1; 0), & \bar{n} &= (0; 0; \pm 1) \text{ или} \\ \bar{l} &= (\pm 1; 0; 0), & \bar{m} &= (0; 0; \pm 1), & \bar{n} &= (0; \pm 1; 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [u_1] &= [u_2] = 0, \\ \Phi &= \frac{1}{3}[u_3] \frac{q(3l + 2m) + 2m}{q(z - m) + 2m}, \\ c^2 &= \frac{m}{3r} \cdot \frac{q(4z - 6m - 3l) + 12m - 2z + 6l}{q(z - m) + 2m}. \end{aligned}$$

Разрыв является продольным и приводит к расширению среды  $[u_3] > 0$ . Нормаль к поверхности разрывов, как и в предыдущем случае, коллинеарна либо второму, либо третьему главному направлению тензора напряжения. Если для скорости продвижения поверхности разрывов исключить пластическую сжимаемость ( $q = 0$ ), то получим

$$c^2 = \frac{3l + 5m}{3r}.$$

Решение 2.

$$\begin{aligned} \bar{l} &= (0; 0; \pm 1), & \bar{m} &= (0; \pm 1; 0), & \bar{n} &= (\pm 1; 0; 0) \text{ или} \\ \bar{l} &= (0; 0; \pm 1), & \bar{m} &= (\pm 1; 0; 0), & \bar{n} &= (0; \pm 1; 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [u_1] &= [u_2] = 0, \\ \Phi &= \frac{1}{3}[u_3] \frac{q(3l + 2m) - 4m}{q(z - m) + 2m}, \\ c^2 &= \frac{2m}{3r} \cdot \frac{(1 + q)(3l + 2z)}{q(z - m) + 2m}. \end{aligned}$$

Здесь, как и выше разрыв является продольным и приводит к расширению среды  $[u_3] > 0$ . Нормаль к поверхности разрывов коллинеарна первому главному направлению тензора напряжения. При исключении пластической сжимаемости ( $q = 0$ ) получим

$$c^2 = \frac{3l + 2m}{3r}.$$

Решение 3.

В данном случае нормаль к поверхности разрывов, как и ранее, ортогональна либо второму, либо третьему главному направлению тензора напряжений. Разрыв в этом случае оказывается комбинированным ( $[u_3] \neq 0$  и  $[u_1] \neq 0$ ) и движется со скоростью, меньшей скорости движения бездиссипативного сдвигового разрыва. Полное решение в этом случае записывается в форме

$$\bar{l} = (l_1; 0; l_3), \quad \bar{m} = (0; \pm 1; 0), \quad \bar{n} = (n_1; 0; n_3) \text{ или}$$

$$\bar{l} = (l_1; 0; l_3), \quad \bar{m} = (m_1; 0; m_3), \quad \bar{n} = (0; \pm 1; 0).$$

$$[u_2] = 0, \quad [u_3] = \frac{1}{2}[u_1] \cdot \frac{1-2l_1^2}{l_1 l_3},$$

$$\Phi = 2[u_3] \frac{l+m}{-3m+2z},$$

$$c^2 = \frac{m}{r} \cdot \frac{(1+q)(3l+2z)}{q(2z+3l)+12l+2z+9m}.$$

При исключении пластической сжимаемости ( $q=0$ ) получим

$$c^2 = \frac{m}{r} \cdot \frac{3l+2m}{12l+11m}.$$

В зависимости от предварительного напряженного состояния данный разрыв может увеличивать деформации изменения формы или, наоборот, уменьшать их, но всегда объемные деформации в нем приводят только к расширению среды.

Наконец, возможный случай  $m=rc^2$  приводит к бездиссипативному ( $\Phi=0$ ) разрыву.

### 3. Ударные волны при выполнении условия пластичности, соответствующего ребру пирамиды условия текучести максимального приведенного напряжения

Пусть напряженное состояние во всем переходном слое соответствует ребру пирамиды Ивлева (1.5). При этом возможны следующие соотношения

$$\begin{cases} s_1 - s + qs = \frac{2}{3}k, \\ s - s_3 + qs = \frac{2}{3}k. \end{cases} \quad (3.1)$$

Выбор соотношения (3.1) конкретизирует ребро, но на других ребрах результаты будут аналогичными с точностью до переобозначения главных напряжений.

Следуя ассоциированному закону пластического течения, получим

$$e_1^p = \frac{q+2}{2}y_1 + \frac{q+1}{2}y_2,$$

$$e_2^p = \frac{q-1}{2}y_1 + \frac{q+1}{2}y_2, \quad (3.2)$$

$$e_3^p = \frac{q-1}{2}y_1 + \frac{q-2}{2}y_2.$$

Соотношения (3.1), (3.2) и (2.4) составляют замкнутую систему уравнений, описывающую необратимое деформирование, когда напряжения соответствуют

выбранной ребру пирамиды текучести. Положим, что в среде при выбранных условиях распространяется поверхность разрывов, тогда из уравнений (3.1), (3.2) и (2.4) вместе с динамическими и кинематическими условиями совместности разрывов можно получить следующие соотношения

$$\begin{aligned} [\mathbf{s}_1] \left( l_i l_j + \frac{1}{2} m_i m_j \right) + [\mathbf{s}_3] \left( n_i n_j + \frac{1}{2} m_i m_j \right) &= l d_{ij} [\mathbf{u}_3] + m [\mathbf{u}_i] \mathbf{h}_j + m [\mathbf{u}_j] \mathbf{h}_i + b_{ij}, \\ (m - rc^2) [\mathbf{u}_i] + (l + m) [\mathbf{u}_3] \mathbf{h}_i + b_{i3} &= 0, \\ (q + 1) [\mathbf{s}_1] + (q - 1) [\mathbf{s}_3] &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Выражения (3.3) представляют собой систему уравнений в разрывах, где

$$\begin{aligned} b_{ij} &= -\frac{3}{2} l q d_{ij} (\Phi_1 + \Phi_2) - m d_{ij} ((q - 1) \Phi_1 + (q + 1) \Phi_2) - 3m \Phi_1 l_i l_j + 3m \Phi_2 n_i n_j, \\ \Phi_1 &= \int_{-h}^h y_1 dx_3, \quad \Phi_2 = \int_{-h}^h y_2 dx_3, \quad [\mathbf{s}_i] = -c (\mathbf{s}_i^+ - \mathbf{s}_i^-). \end{aligned}$$

Выберем систему координат так, чтобы ось  $x_3$  совпадала с нормалью к  $\Sigma(t)$ . Поворотом плоскости  $XOY$  вокруг оси  $x_3$  всегда можно добиться того, чтобы  $l_2 = 0$ , при этом из второго соотношения системы уравнений (3.3) при  $i = 1$  и  $j = 2$  получим:

$$m_1 m_2 ([\mathbf{s}_1] - [\mathbf{s}_3] + 6m \Phi_2) = 0. \quad (3.4)$$

С учетом соотношения (3.4) из уравнений (3.3) можно получить следующие решения.

Решение 1.

$$\bar{l} = (\pm 1; 0; 0), \quad \bar{m} = (0; 0; \pm 1), \quad \bar{n} = (0; \pm 1; 0).$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_1] &= [\mathbf{u}_2] = 0, \\ \Phi_1 &= -\frac{1}{3} [\mathbf{u}_3] \frac{q(2q-1)(3l+2m)+6m}{q^2(3l+2m)+3m}, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{3} [\mathbf{u}_3] \frac{q(2q+1)(3l+2m)+6m}{q^2(3l+2m)+3m}, \\ c^2 &= \frac{m}{r} \cdot \frac{3l+2m}{q^2(3l+2m)+3m}. \end{aligned}$$

Если для скорости продвижения поверхности разрывов исключить пластическую сжимаемость ( $q = 0$ ), то получим

$$c^2 = \frac{3l+2m}{3r}.$$

Решение 2.

$$\bar{l} = (0; 0; \pm 1), \quad \bar{m} = (m_1; m_2; 0), \quad \bar{n} = (n_1; n_2; 0).$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_1] &= [\mathbf{u}_2] = 0, \\ \Phi_1 &= \frac{1}{3} [\mathbf{u}_3] \frac{q(q+1)(3l+2m)+6m}{q^2(3l+2m)+3m}, \end{aligned}$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{3}[u_3] \frac{q(q-1)(3l+2m)}{q^2(3l+2m)+3m},$$

$$c^2 = \frac{m}{r} \cdot \frac{(3l+2m)(q-1)^2}{q^2(3l+2m)+3m}.$$

При исключении пластической сжимаемости ( $q=0$ ) получим

$$c^2 = \frac{3l+2m}{3r}.$$

Решение 3.

$$\bar{l} = (\pm 1; 0; 0), \quad \bar{m} = (0; \pm 1; 0), \quad \bar{n} = (0; 0; \pm 1).$$

$$[u_1] = [u_2] = 0,$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{3}[u_3] \frac{q(q+1)(3l+2m)}{q^2(3l+2m)+3m},$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{3}[u_3] \frac{q(q-1)(3l+2m)+6m}{q^2(3l+2m)+3m},$$

$$c^2 = \frac{m}{r} \cdot \frac{(3l+2m)(q+1)^2}{q^2(3l+2m)+3m}.$$

Если для скорости продвижения поверхности разрывов исключить пластическую сжимаемость ( $q=0$ ), то получим

$$c^2 = \frac{3l+2m}{3r}.$$

Таким образом, при соответствии напряженного состояния ребру пирамиды Ивлева, являющейся поверхностью нагружения необратимо сжимаемой упругопластической среды, возможны только продольные диссипативные разрывы. В зависимости от постоянной материала  $q$  такие поверхности разрывов могут приводить как к сжатию среды, так и к ее расширению.

#### 4. Ударные волны при выполнении условия пластичности, соответствующего ребру, образованному пересечением дна и грани пирамиды условия текучести максимального приведенного напряжения

При заданном условии пластичности, с учетом (1.5), возможны следующие соотношения:

$$\begin{cases} (2+q)s_1 + (q-1)(s_2 + s_3) = 2k, \\ -s = j(c), \end{cases} \quad (4.1)$$

или

$$\begin{cases} (q-2)s_1 + (q+1)(s_2 + s_3) = 2k, \\ -s = j(c). \end{cases} \quad (4.2)$$

Выбор (4.1) или (4.2) конкретизирует ребро, но на других ребрах результаты будут аналогичными с точностью до переобозначения главных напряжений.

**4.1** Пусть напряженное состояние задается соотношением (4.1), тогда, следуя ассоциированному закону пластического течения, получим

$$e_1^p = \left(1 + \frac{q}{2}\right) y_1 - \frac{1}{3} y_2, \quad e_2^p = e_3^p = \frac{q-1}{2} y_1 - \frac{1}{3} y_2. \quad (4.3)$$

Замкнутая система дифференциальных соотношений получается, если к (4.1) и (4.3) добавить соотношения (2.4).

Соотношения (4.1), (4.3) и (2.4) составляют замкнутую систему уравнений, описывающую необратимое деформирование, когда напряжения соответствуют выбранному ребру пирамиды текучести. Положим, что в среде при выбранных условиях распространяется поверхность разрывов, тогда из уравнений (4.1), (4.3) и (2.4) вместе с динамическими и кинематическими условиями совместности разрывов можно окончательно получить следующие соотношения

$$\begin{aligned} & -Aj'(c)\Phi_2 \left( (l_i l_j - m_i m_j) q - l_i l_j - 2m_i m_j \right) + [s_3] (n_i n_j - m_i m_j) = \\ & = l d_{ij} [u_3] + g_{ij} + m [u_i] n_j + m [u_j] n_i, \\ & (m - rc^2) [u_i] + (l + m) [u_3] n_i + g_{i3} = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Соотношения (4.4) представляют собой систему уравнений в разрывах, где

$$g_{ij} = - \left( l + \frac{2}{3} m \right) \left( \frac{3}{2} (q-1) \Phi_1 - \Phi_2 \right) d_{ij} - 3m l_i l_j \Phi_1 - \frac{3}{2} l d_{ij} \Phi_1,$$

$$\Phi_1 = \int_{-h}^h y_1 dx_3, \quad \Phi_2 = \int_{-h}^h y_2 dx_3, \quad [s_i] = -c (s_i^+ - s_i^-).$$

При этом  $A$  – это константа, связанная с историей деформирования материала [3].

Выберем систему координат так, чтобы ось  $x_3$  совпадала с нормалью к  $\Sigma(t)$ .

Поворотом плоскости  $XoY$  вокруг оси  $x_3$  всегда можно добиться того, чтобы  $l_2 = 0$ , при этом из второго соотношения системы уравнений (4.4), при  $i = 2$ , получим

$$(m - rc^2) [u_2] = 0. \quad (4.5)$$

Положим, что  $m \neq rc^2$  (случай  $m = rc^2$  будет рассмотрен далее), тогда из (4.5) следует, что  $[u_2] = 0$ . Тогда из первого соотношения системы уравнений (4.4), при  $i = 1, j = 2$ , и при  $i = 2, j = 3$  получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} n_1 n_2 ([s_3] - [s_2]) = 0, \\ n_3 n_2 ([s_3] - [s_2]) = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

С учетом уравнений (4.4) и (4.6) можно получить следующие решения.

Решение 1.

$$\bar{l} = (l_1; 0; l_3), \quad \bar{m} = (m_1; 0; m_3), \quad \bar{n} = (0; \pm 1; 0) \text{ или}$$

$$\bar{l} = (l_1; 0; l_3), \quad \bar{m} = (0; \pm 1; 0), \quad \bar{n} = (n_1; 0; n_3).$$

$$\begin{aligned}
[u_2] &= 0, \quad [u_3] = \frac{1}{2}[u_1] \cdot \frac{1-2l_1^2}{l_1 l_3}, \\
\Phi_1 &= \frac{2}{3}[u_3] \frac{9Aj'(l+m) - m(3l+2m)}{(3qAj' - m)(3l+2m) + 3mAj'}, \\
\Phi_2 &= -[u_3] \frac{m(q-1)(3l+2m)}{(3qAj' - m)(3l+2m) + 3mAj'}, \\
c^2 &= \frac{m}{r} Aj' \frac{(3l+2m)(q-1)^2}{(3l+2m)(q^2 Aj' - 2qAj' - m) + Aj'(12l+11m)}.
\end{aligned}$$

Решение 2.

$$\bar{l} = (0; 0; \pm 1), \quad \bar{m} = (0; \pm 1; 0), \quad \bar{n} = (\pm 1; 0; 0) \text{ или}$$

$$\bar{l} = (0; 0; \pm 1), \quad \bar{m} = (\pm 1; 0; 0), \quad \bar{n} = (0; \pm 1; 0).$$

$$[u_1] = [u_2] = 0,$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{2}{3}[u_3] \frac{3qAj'(3l+2m) - 8m^2 - 12m(l - Aj')}{3q^2 Aj'(3l+2m) - 8m^2 - 12m(l - Aj')}, \\
\Phi_2 &= -4m[u_3] \frac{(q-1)(3l+2m)}{3q^2 Aj'(3l+2m) - 8m^2 - 12m(l - Aj')}, \\
c^2 &= \frac{4m}{r} Aj' \frac{(q-1)^2(3l+2m)}{3q^2 Aj'(3l+2m) - 8m^2 - 12m(l - Aj')}.
\end{aligned}$$

Решение 3.

$$\bar{l} = (\pm 1; 0; 0), \quad \bar{m} = (0; 0; \pm 1), \quad \bar{n} = (0; \pm 1; 0).$$

$$[u_1] = [u_2] = 0,$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{2}{3}[u_3] \frac{3qAj'(3l+2m) + 4m^2 + 6m(l - Aj')}{3q^2 Aj'(3l+2m) - 8m^2 - 12m(l - Aj')}, \\
\Phi_2 &= 2m[u_3] \frac{(q+2)(3l+2m)}{3q^2 Aj'(3l+2m) - 8m^2 - 12m(l - Aj')}, \\
c^2 &= \frac{4m}{r} \frac{(3l+2m)(q^2 Aj' + qAj' - m) + Aj'(3l+5m)}{3q^2 Aj'(3l+2m) - 8m^2 - 12m(l - Aj')}.
\end{aligned}$$

Наконец, возможный случай  $m = rc^2$  приводит к бездиссипативному ( $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ) разрыву.

**4.2** Пусть напряженное состояние задается соотношением (4.2), тогда, следуя ассоциированному закону пластического течения, получим

$$e_1^p = \frac{q-2}{2}y_1 - \frac{1}{3}y_2, \quad e_2^p = e_3^p = \frac{q+1}{2}y_1 - \frac{1}{3}y_2. \quad (4.7)$$

Аналогично пункту 4.1, получим следующие соотношения



$$\begin{aligned}
& -Aj'(c)\Phi_2(-l_1l_j - m_i m_j)q - l_1l_j - 2m_i m_j) + [s_3](n_i n_j - m_i m_j) = \\
& = Id_{ij}[u_3] + t_{ij} + m[u_i]n_j + m[u_j]n_i, \\
& (m - rc^2)[u_i] + (I + m)[u_3]n_i + t_{i3} = 0.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Выражения (4.7) и (4.8) представляют собой систему уравнений в разрывах, где

$$t_{ij} = -\left(I + \frac{2}{3}m\right)\left(\frac{3}{2}(q+1)\Phi_1 - \Phi_2\right)d_{ij} + 3ml_j\Phi_1 + \frac{3}{2}Id_{ij}\Phi_1,$$

$$\Phi_1 = \int_{-h}^h y_1 dx_3, \quad \Phi_2 = \int_{-h}^h y_2 dx_3, \quad [s_i] = -c(s_i^+ - s_i^-).$$

Так же получим систему уравнений (4.6). С учетом условий (4.6) из (4.8) можно получить следующие решения

Решение 1.

$$\bar{l} = (l_1; 0; l_3), \quad \bar{m} = (m_1; 0; m_3), \quad \bar{n} = (0; \pm 1; 0) \text{ или}$$

$$\bar{l} = (l_1; 0; l_3), \quad \bar{m} = (0; \pm 1; 0), \quad \bar{n} = (n_1; 0; n_3).$$

$$\begin{aligned}
[u_2] &= 0, \quad [u_3] = \frac{1}{2}[u_1] \cdot \frac{1 - 2l_1^2}{l_1 l_3}, \\
\Phi_1 &= \frac{2}{3}[u_3] \frac{9Aj'(I + m) - m(3I + 2m)}{(3qAj' + m)(3I + 2m) - 3mAj'}, \\
\Phi_2 &= -[u_3] \frac{m(q+1)(3I + 2m)}{(3qAj' + m)(3I + 2m) - 3mAj'}, \\
c^2 &= \frac{m}{r} Aj' \frac{(3I + 2m)(q+1)^2}{(3I + 2m)(q^2 Aj' + 2qAj' - m) + Aj'(12I + 11m)}.
\end{aligned}$$

Решение 2.

$$\bar{l} = (0; 0; \pm 1), \quad \bar{m} = (\pm 1; 0; 0), \quad \bar{n} = (0; \pm 1; 0) \text{ или}$$

$$\bar{l} = (0; 0; \pm 1), \quad \bar{m} = (0; \pm 1; 0), \quad \bar{n} = (\pm 1; 0; 0).$$

$$\begin{aligned}
[u_1] &= [u_2] = 0, \\
\Phi_1 &= \frac{2}{3}[u_3] \frac{3qAj'(3I + 2m) + 8m^2 + 12m(I - Aj')}{3q^2 Aj'(3I + 2m) - 8m^2 - 12m(I - Aj')}, \\
\Phi_2 &= 4m[u_3] \frac{(q+1)(3I + 2m)}{3q^2 Aj'(3I + 2m) - 8m^2 - 12m(I - Aj')}, \\
c^2 &= \frac{4m}{r} Aj' \frac{(q+1)^2(3I + 2m)}{3q^2 Aj'(3I + 2m) - 8m^2 - 12m(I - Aj')}.
\end{aligned}$$

Решение 3.

$$\bar{l} = (\pm 1; 0; 0), \quad \bar{m} = (0; \pm 1; 0), \quad \bar{n} = (0; 0; \pm 1) \text{ или}$$

$$\bar{l} = (\pm 1; 0; 0), \quad \bar{m} = (0; 0; \pm 1), \quad \bar{n} = (0; \pm 1; 0).$$

$$[u_1] = [u_2] = 0,$$

$$\Phi_1 = \frac{2}{3}[u_3] \frac{3qAj'(3l+2m)-4m^2-6m(l-Aj')}{3q^2Aj'(3l+2m)-8m^2-12m(l-Aj')},$$

$$\Phi_2 = -2m[u_3] \frac{(q-2)(3l+2m)}{3q^2Aj'(3l+2m)-8m^2-12m(l-Aj')},$$

$$c^2 = \frac{4m}{r} \frac{(3l+2m)(q^2Aj'-qAj'-m)+Aj'(3l+5m)}{3q^2Aj'(3l+2m)-8m^2-12m(l-Aj')}.$$

Наконец, возможный случай  $m = rc^2$  приводит к бездиссипативному ( $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ) разрыву.

### 5. Ударные волны при выполнении условия пластичности, соответствующего сингулярной точке пирамиды условия текучести максимального приведенного напряжения

Из выбранного условия пластичности вытекают следующие соотношения

$$\begin{cases} s_1 - s + qs = \frac{2}{3}k, \\ -s = j(c), \\ s - s_3 + qs = \frac{2}{3}k. \end{cases} \quad (5.1)$$

Выбор соотношения (5.1) конкретизирует сингулярную точку, но в других случаях результаты будут аналогичными с точностью до переобозначения главных напряжений.

Следуя ассоциированному закону пластического течения, получим

$$\begin{aligned} e_1^p &= \frac{q+2}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{q+1}{2}y_3, \\ e_2^p &= \frac{q-1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{q+1}{2}y_3, \\ e_3^p &= \frac{q-1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{q-2}{2}y_3. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Соотношения (5.1), (5.2) и (2.4) составляют замкнутую систему уравнений, описывающую необратимое деформирование, когда напряжения соответствуют выбранной сингулярной точке пирамиды текучести. Положим, что в среде при выбранных условиях распространяется поверхность разрывов, тогда из уравнений (5.1), (5.2) и (2.4) вместе с динамическими и кинематическими условиями совместности разрывов можно окончательно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} Aj'\Phi_2(d_{ij} + q(n_i n_j - l_i l_j)) &= l d_{ij}[u_3] + m[u_i]h_j + m[u_j]h_i + a_{ij}, \\ (m - rc^2)[u_i] + (l + m)[u_3]h_i + a_{i3} &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Уравнения (5.3) представляют собой систему уравнений в разрывах, где

$$a_{ij} = -l d_{ij} \left( \frac{3}{2} q(\Phi_1 + \Phi_3) - \Phi_2 \right) - m d_{ij} \left( (q-1)\Phi_1 - \frac{2}{3}\Phi_2 + (q+1)\Phi_3 \right) - 3m\Phi_1 l_i l_j + 3m\Phi_3 n_i n_j,$$

$$\Phi_1 = \int_{-h}^h y_1 dx_3, \quad \Phi_2 = \int_{-h}^h y_2 dx_3, \quad \Phi_3 = \int_{-h}^h y_3 dx_3, \quad [s_i] = -c(s_i^+ - s_i^-).$$

При этом  $A$  – это константа, связанная с историей деформирования материала [3].

Выберем систему координат так, чтобы ось  $x_3$  совпадала с нормалью к  $\Sigma(t)$ . Поворотом плоскости  $XOY$  вокруг оси  $x_3$  всегда можно добиться того, чтобы  $l_2 = 0$ , при этом из второго соотношения системы уравнений (5.3), при  $i = 1, j = 2$ , получим

$$n_1 n_2 (qA_j' \Phi_2 - 3m\Phi_3) = 0. \quad (5.4)$$

С учетом соотношения (5.4) из уравнений (5.3) можно получить следующие решения

Решение 1.

$$\bar{l} = (\pm 1; 0; 0), \quad \bar{m} = (0; 0; \pm 1), \quad \bar{n} = (0; \pm 1; 0).$$

$$[u_1] = [u_2] = 0,$$

$$\Phi_1 = -\frac{1}{3}[u_3] \frac{(3l + 2m)(2q^2 A_j' - qA_j' - 2m) + 6mA_j'}{(3l + 2m)(q^2 A_j' - m) + 3mA_j'},$$

$$\Phi_2 = m[u_3] \frac{3l + 2m}{(3l + 2m)(q^2 A_j' - m) + 3mA_j'},$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{3}[u_3] \frac{(3l + 2m)(2q^2 A_j' + qA_j' - 2m) + 6mA_j'}{(3l + 2m)(q^2 A_j' - m) + 3mA_j'},$$

$$c^2 = \frac{m}{r} \cdot \frac{A_j'(3l + 2m)}{(3l + 2m)(q^2 A_j' - m) + 3mA_j'}.$$

Решение 2.

$$\bar{l} = (0; 0; \pm 1), \quad \bar{m} = (0; \pm 1; 0), \quad \bar{n} = (\pm 1; 0; 0) \text{ или}$$

$$\bar{l} = (0; 0; \pm 1), \quad \bar{m} = (\pm 1; 0; 0), \quad \bar{n} = (0; \pm 1; 0).$$

$$[u_1] = [u_2] = 0,$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{3}[u_3] \frac{(3l + 2m)(q^2 A_j' + qA_j' - 2m) + 6mA_j'}{(3l + 2m)(q^2 A_j' - m) + 3mA_j'},$$

$$\Phi_2 = -m[u_3] \frac{(3l + 2m)(q - 1)}{(3l + 2m)(q^2 A_j' - m) + 3mA_j'},$$

$$\Phi_3 = -\frac{1}{3}qA_j'[u_3] \frac{(3l + 2m)(q - 1)}{(3l + 2m)(q^2 A_j' - m) + 3mA_j'},$$

$$c^2 = \frac{m}{r} \cdot \frac{A_j'(3l + 2m)(q - 1)^2}{(3l + 2m)(q^2 A_j' - m) + 3mA_j'}.$$

Решение 3.

$$\bar{l} = (\pm 1; 0; 0), \quad \bar{m} = (0; \pm 1; 0), \quad \bar{n} = (0; 0; \pm 1).$$

$$[u_1] = [u_2] = 0,$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{3}qA_j'[u_3] \frac{(3l + 2m)(q + 1)}{(3l + 2m)(q^2 A_j' - m) + 3mA_j'},$$

$$\Phi_2 = m[u_3] \frac{(3l + 2m)(q + 1)}{(3l + 2m)(q^2 A_j' - m) + 3mA_j'},$$

$$\Phi_3 = -\frac{1}{3}[u_3] \frac{(3l+2m)(q^2 Aj' - qAj' - 2m) + 6mAj'}{(3l+2m)(q^2 Aj' - m) + 3mAj'}$$

$$c^2 = \frac{m}{r} \cdot \frac{Aj'(3l+2m)}{(3l+2m)(q^2 Aj' - m) + 3mAj'}$$

Отметим, что комбинированные диссипативные разрывы возможны только при напряженных состояниях, соответствующих граням пирамиды текучести, включая ребро при ее основании. При соответствии напряженных состояний ребрам пирамиды текучести Ивлева угловым точкам dna диссипативные разрывы оказываются исключительно продольными.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-ДВО № 06-01-96005.

г. Владивосток

Поступила: 18 июля 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Буренин, А. А. Поверхности разрывов скоростей в динамике необратимо сжимаемых сред / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, В. А. Рычков // Проблемы механики сплошных сред: Сборник научных работ. – Владивосток : ИАПУ ДВО РАН – 1996. – С. 116–128.
2. Быковцев, Г. И. О распространении ударных волн в упругопластических средах / Г. И. Быковцев, Л. Д. Кретьева // ППМ. – 1972. – Том 36, вып. 1. – С. 106–116.
3. Быковцев, Г. И. Определяющие уравнения пластически сжимаемых сред / Г. И. Быковцев, В. А. Рычков // Прикладные задачи механики деформируемых сред. Сборник научных трудов. – Владивосток : ДВО АН СССР – 1991. – С. 49–56.
4. Григорян, С. С. Об основных представлениях динамики грунтов / С. С. Григорян // ППМ. – 1960. – Том 24, вып. 6. – С. 1052–1072.
5. Ивлев, Д. Д. К теории сжимаемых идеально пластических сред / Д. Д. Ивлев, Т. Н. Мартынова // ППМ. – 1963. – Том 27, вып. 3. – С. 589–592.
6. Лимарев, А. Е. О распространении ударных волн в упруго-пластической среде с упрочнением / А. Е. Лимарев, А. Д. Чернышев // ПММ. – 1971. – Том 35, вып. 6. – С. 1083–1088.
7. Садовский, В. М. К теории распространения упругопластических волн в упрочняющихся средах / В. М. Садовский // ЖПМТФ. – 1994. – №5. – С. 166–172.

## ВЫПУЧИВАНИЕ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА

(НИИ Прикладной математики Бакинского государственного университета)

В различных конструкциях в качестве несущих элементов используются тонкостенные кольца, материал которых обладает свойство нелинейных упругостей. В этой связи представляет интерес анализ выпучивания таких элементов. Актуальность и важность подобных задач связаны с изысканием резервов экономии материала с одновременным повышением несущей способности конструкции. Сложность этого исследования состоит в том, что для ряда важных приложений кольца нужно представлять как разностенные оболочки с начальным несовершенством. При этом, последнее имеет тенденцию расти под действием нагрузки и, начиная с некоторого ее значения, рост прогибов может стать катастрофически большим. Это обстоятельство приводит к необходимости учета геометрической нелинейности.

Целью настоящей статьи является исследование устойчивости эксцентричного кольца радиуса  $R$  и толщины  $2h(q)$ , изготовленного из нелинейно-упругого материала и подверженного равномерному внешнему давлению  $q$ . Наличие разностенности можно объяснить, например, неточностью изготовления изделия. Это обстоятельство присуще, практически, всем эксплуатируемым трубам. Для дальнейшего решения задачи воспользуемся вариационным методом смешанного типа, в котором независимо варьируются скорости напряжений и перемещений.

В связи с большим распространением в технике и строительстве кольцевых конструкций, особое значение приобретает развитие методов расчета таких конструкций на устойчивость и прочность. Здесь, для описания свойств материала кольца будем использовать уравнение нелинейной теории упругости, которое запишем в виде [4]:

$$e^{\Phi} = \frac{s}{E} \left\{ 1 + \left( \frac{s}{s_0} \right)^n \right\}, \quad (1)$$

где  $s$  – напряжение,  $E$  и  $s_0$  соответственно модуль упругости и предел пропорциональности материала, а  $n$  – показатель нелинейности, принимающий четные значения (2, 4, 6, ...). Отметим, что при  $n = 2$  уравнение (1) является достаточно хорошей аппроксимацией закона упругости для армированных пластиков, некоторых алюминиевых сплавов, дюрала и т.д. Значение  $n = 4$  соответствует диаграмме линейного упрочнения. При достаточно больших  $n$  соотношение (1) приближенно описывает закон идеальной пластичности (схема Прандтля) [3].

Обозначим теперь через  $v$  и  $w$  соответственно перемещение в азимутальном направлении и прогиб. В основу предлагаемой здесь теории тонких колец ставятся следующие предположения:

а) в процессе деформирования учитывается одновременно геометрическая нелинейность по  $v$  и  $w$ . Необходимо заметить, что при прочих равных условиях учет полной нелинейности позволяет наиболее рационально использовать несущую способность конструкций [1];

в) деформация происходит в плоскости кольца;

с) в силу тонкостенности напряжение  $S$  по толщине меняется по линейному закону.

Отметим, что применимость и точность последнего допущения обоснована в [2]. Решение задачи осуществим посредством вариационного метода смешанного типа [1]. Преимущество этого подхода состоит в возможности предсказания таких явлений, которые невозможно описать с помощью обычных методов математической физики.

Учитывая гипотезу а), используемый функционал [1, 88] в полярных координатах  $(q, z)$  имеет вид

$$K = R \int_{-h(q)}^{h(q)} \int_0^{2p} \left\{ \frac{S}{2R^2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial q} - w \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial q} + v \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{S^2}{E} \right\} dz dq + R \int_0^{2p} v^2 dq, \quad (2)$$

где  $e$  – тензор деформации. Под точкой здесь и в дальнейшем понимается дифференцирование по  $q$  ( $\dot{\phantom{x}} = 1$ ) [1]. Учитывая выражение (1), функционал (2) принимает следующий вид

$$K = R \int_{-h(q)}^{h(q)} \int_0^{2p} \left\{ \frac{S}{2R^2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial q} - w \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial q} + v \right)^2 \right] - \frac{R}{2} \int_0^{2p} \int_{-h(q)}^{h(q)} \frac{S^2}{E} \left[ 1 + (n+1) \left( \frac{S}{S_0} \right)^n \right] \right\} dz dq + R \int_0^{2p} v^2 dq. \quad (3)$$

Разностенность кольца будем аппроксимировать выражением

$$h(q) = h_0(1 + I \sin q).$$

Из физических соображений следует, что  $I \in [0, 1)$ . Вследствие гипотезы плоских сечений имеем

$$e = e_0 - kz.$$

Здесь  $\epsilon_0$  и изменение кривизны  $K$  определяются по формулам

$$e_0 = \frac{1}{R} \left( w + \frac{\partial v}{\partial q} \right) + \frac{1}{2R^2} \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial q} + w \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial q} - v \right)^2 \right\}, \quad (4)$$

$$k = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial q^2} - \frac{\partial v}{\partial q} \right), \quad (5)$$

как это следует из уравнений теории тонких оболочек. Следуя предположению с), распределение напряжений по толщине примем линейным

$$s = -\frac{qR}{2h_0} + c(q) \frac{z}{h_0} \cos lq, \quad (6)$$

где  $l$  принимает четные значения и характеризует число волн в азимутальном направлении.

Заметим, что аппроксимация (6) нуждается в уточнении с целью определения таких  $l$ , при которых она удовлетворительна или существует необходимость ее представления в форме

$$s = -\frac{qR}{2h(q)} + c(q) \frac{z}{h(q)} \cos lq. \quad (7)$$

Далее, следуя [1], положим

$$w = w_0(q) + w_1(q) \cos lq, \quad v = v_0(q) \sin lq. \quad (8)$$

После дифференцирования соотношений (4), (5), (7) и (8), запишем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = & \frac{1}{R} \left( \mathfrak{w} + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial q} \right) + \frac{1}{R^2} \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial q} + w \right) \left( \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial q} + \mathfrak{w} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial q} - v \right) \left( \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial q} - \mathfrak{w} \right) \right\} - \\ & - \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{w}}{\partial q^2} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial q} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathfrak{E} = -\frac{R}{2h(q)} + \mathfrak{E}(q) \frac{z}{h(q)} \cos lq, \quad (10)$$

где

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_0(q) + \mathfrak{w}_1(q) \cos lq, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0(q) \sin lq. \quad (11)$$

Здесь  $\mathfrak{w}_0$ ,  $\mathfrak{w}_1$ ,  $\mathfrak{v}_0$  и  $\mathfrak{E}$  – независимые варьируемые величины.

Последующий ход вычислений состоит в том, что соотношения (7) и (9)–(11) подставляются в (3) и функционал  $K$  находится как функция  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $v_0$ ,  $c$  и производных этих величин по  $q$ . В результате, после ряда вычислений, запишем:

$$\begin{aligned} K = & -2pw_0 \mathfrak{w}_0 - (l^2 + 1)pv_0 \mathfrak{v}_0 - (l^2 + 1)pw_1 \mathfrak{w}_1 - 2plv_0 \mathfrak{v}_1 - 2pl \mathfrak{w}_0 w_1 + \\ & + \frac{2ph_0^2 l^2}{3R} \mathfrak{E} \mathfrak{w}_1 \left( 1 + \frac{1}{2} l^2 \right) + \frac{2ph_0^2 l}{3R} \mathfrak{E} \mathfrak{v}_0 \left( 1 + \frac{1}{2} l^2 \right) - \frac{pq}{2} (l^2 + 1) \mathfrak{w}_1^2 - \frac{pq}{2} (l^2 + 1) \mathfrak{v}_0^2 - \\ & - 2pql \mathfrak{w}_1 \mathfrak{v}_0 - pq \mathfrak{w}_0^2 - \frac{R^3}{Eh_0} - \frac{pR \mathfrak{E} h_0}{3E} - \frac{1}{ES_0^n} \sum_{p=0}^n \left( \frac{R^3}{8} \frac{h_0^{p+1}}{p+1} M_{p-n-1} - R^2 \frac{h_0^{p+2}}{2(p+2)} M_{p-n} \mathfrak{E} + \right. \\ & \left. + R \frac{h_0^{p+3}}{2(p+3)} M_{p-n+1} \mathfrak{E} \right) \cdot \frac{C_n^p (n+1) q^{n-p} R^{n-p} (-1)^{n-p}}{2^{n-p} h_0^{n+2}} c^p, \end{aligned}$$

где для краткости записи введены следующие обозначения

$$M_{p-n+j} = \left[ 1 - (-1)^{p+j+2} \right] \int_0^p (1 + l \sin q)^{p-n+j} \cos^{p+j+1} lq dq, \quad j = -1, 0, 1;$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Далее, приравняв

$$\frac{\partial K}{\partial v_0} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial w_1} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \mathfrak{E}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial K}{\partial c} = 0,$$

получим систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, которую приведем в виде, удобном для последующего интегрирования. Опуская элементарные выкладки, будем иметь

$$\begin{aligned} & -2pw_0 - 2pqv_0 = 0, \\ & -(l^2 + 1)pw_1 - 2plv_0 + \frac{2ph_0^2 l^2}{3R} \mathfrak{E} \left(1 + \frac{1}{2} I^2\right) - pq(l^2 + 1)\mathfrak{E}_1 - 2pql\mathfrak{E}_0 = 0, \\ & -(l^2 + 1)pv_0 - 2plw_1 + \frac{2ph_0^2 l}{3R} \mathfrak{E} \left(1 + \frac{1}{2} I^2\right) - pq(l^2 + 1)\mathfrak{E}_0 - 2pql\mathfrak{E}_1 = 0, \\ & \frac{2ph_0^2 l^2}{3R} \mathfrak{E}_1 \left(1 + \frac{1}{2} I^2\right) + \frac{2ph_0^2 l}{3R} \mathfrak{E}_0 \left(1 + \frac{1}{2} I^2\right) - \frac{2pR\mathfrak{E}_0}{3E} - \\ & - \frac{1}{E\mathcal{S}_0^n} \sum_{p=0}^n \left( -R^2 \frac{h_0^{p+2}}{2(p+2)} M_{p-n} + R \frac{h_0^{p+3}}{p+3} M_{p-n+1} \mathfrak{E} \right) \times \\ & \times \frac{C_n^p (n+1) q^{n-p} R^{n-p} (-1)^{n-p}}{2^{n-p} h_0^{n+2}} c^p = 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение последней системы выполняется тождественно, и поэтому естественно, в дальнейшем не используется. Итак, нашим последующим этапом будет вычисление неизвестных функциональных аргументов. Для этого систему уравнений необходимо дополнить начальными условиями, которые, исходя из физики явления, заключаются в отсутствии момента, азимутального смещения и наличии начального несовершенства, то есть

$$c(0) = 0, \quad v_0(0) = 0, \quad \text{а} \quad w_1(0) = w_1^0 \cos lj, \quad (12)$$

где  $w_1^0$  – задаваемая амплитуда начального несовершенства. Для дальнейших вычислений оказывается целесообразным выразить  $w_1$  через  $q$ . Комбинируя второе и третье уравнения системы, запишем:

$$\mathfrak{E} = \frac{3R(l^2 - 1)}{2h_0^2 l^2 \left(1 + \frac{1}{2} I^2\right)} (w_1 q)', \quad \mathfrak{E}_0 = -\frac{1}{2} \mathfrak{E}_1. \quad (13)$$

Выполнив интегрирование первого выражения (13) при условиях (12), получим

$$c = \frac{3R(l^2 - 1)}{2h_0^2 l^2 \left(1 + \frac{1}{2} I^2\right)} w_1 q. \quad (14)$$

Используя формулы (13), (14) и исключая из последнего уравнения вышеуказанной системы  $v_0$  и  $c$ , приходим к нелинейному дифференциальному уравнению относительно  $\mathfrak{E}_1$



$$\begin{aligned}
& \frac{2h_0^2(l^2-1)}{3R} \left(1 + \frac{1}{2}I^2\right) w_1 - \frac{(l^2-1)R^2q}{l^2 E h_0 \left(1 + \frac{1}{2}I^2\right)} w_1 - \frac{(l^2-1)R^2}{l^2 E h_0 \left(1 + \frac{1}{2}I^2\right)} w_1 - \\
& - \frac{1}{E S_0^n} \sum_{p=0}^n \left( -R^2 \frac{h_0^{p+2}}{2(p+2)} M_{p-n} + 1,5R^2 \frac{h_0^{p+3}}{p+3} \frac{(l^2-1)q}{h_0^2 l^2 \left(1 + \frac{1}{2}I^2\right)} M_{p-n+1} \right) + \\
& + 1,5R^2 \frac{h_0^{p+3}}{p+3} \frac{(l^2-1)}{h_0^2 l^2 \left(1 + \frac{1}{2}I^2\right)} M_{p-n+1} w_1 \left. \right) \frac{C_n^p (n+1) q^n R^n (-1)^{n-p} 3^p (l^2-1)^p}{2^n h_0^{n+2p+2} l^{2p} \left(1 + \frac{1}{2}I^2\right)^p} w_1^p = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Введем безразмерные величины

$$x = \frac{h}{R}, \quad g = \frac{w_1}{R}, \quad h = \frac{E}{S_0}, \quad t = \frac{q}{E}.$$

Опуская элементарные выкладки, приведем сразу уравнение (15) для различных значений показателя нелинейности

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dg} = \frac{1}{g} & \left[ 0,67(l^2-1)x^3 - \frac{l^2-1}{l^2(1+0,5I^2)^2} t - 0,75 \frac{l^2-1}{l^2(1+0,5I^2)^2} x^{-2} h^2 t^3 - \right. \\
& - 3,04 \frac{(l^2-1)^3}{l^6(1+0,5I^2)^4} x^{-4} h^2 g^2 t^3 \left. \right] \cdot \left[ \frac{l^2-1}{l^2(1+0,5I^2)^2} + 2,25 \frac{l^2-1}{l^2(1+0,5I^2)^2} x^{-2} h^2 t^2 + \right. \\
& \left. + 3,04 \frac{(l^2-1)^3}{l^6(1+0,5I^2)^4} x^{-4} h^2 g^2 t^2 \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{16}$$

при  $n = 2$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dg} = \frac{1}{g} & \left[ 0,67(l^2-1)x^3 - \frac{l^2-1}{l^2(1+0,5I^2)^2} t - 0,32 \frac{l^2-1}{l^2(1+0,5I^2)^2} x^{-4} h^4 t^5 - \right. \\
& - 7,6 \frac{(l^2-1)^3}{l^6(1+0,5I^2)^4} x^{-6} h^4 g^2 t^5 - 6,78 \frac{(l^2-1)^5}{l^{10}(1+0,5I^2)^6} x^{-8} h^4 g^4 t^5 \left. \right] \times \\
& \times \left[ \frac{l^2-1}{l^2(1+0,5I^2)^2} + 1,57 \frac{l^2-1}{l^2(1+0,5I^2)^2} x^{-4} h^4 t^4 + 12,66 \frac{(l^2-1)^3}{l^6(1+0,5I^2)^4} x^{-6} h^4 g^2 t^4 + \right. \\
& \left. + 6,78 \frac{(l^2-1)^5}{l^{10}(1+0,5I^2)^6} x^{-8} h^4 g^4 t^4 \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{17}$$

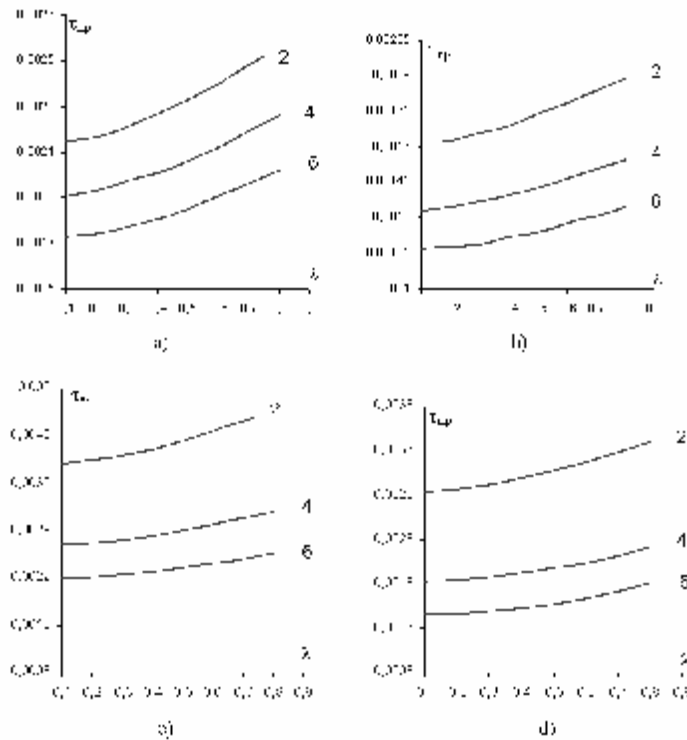
при  $n = 4$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dg} = \frac{1}{g} & \left[ 0,67(l^2 - 1)x^3 - \frac{l^2 - 1}{l^2(1 + 0,5l^2)^2}t - 0,11 \frac{l^2 - 1}{l^2(1 + 0,5l^2)^2}x^{-6}h^6t^7 - \right. \\
& - 6,65 \frac{(l^2 - 1)^3}{l^6(1 + 0,5l^2)^4}x^{-8}h^6g^2t^7 - 35,6 \frac{(l^2 - 1)^5}{l^{10}(1 + 0,5l^2)^6}x^{-10}h^6g^4t^7 - \\
& \left. - 14,54 \frac{(l^2 - 1)^7}{l^{14}(1 + 0,5l^2)^8}x^{-12}h^6g^6t^7 \right] \cdot \left[ \frac{l^2 - 1}{l^2(1 + 0,5l^2)^2} + 0,77 \frac{l^2 - 1}{l^2(1 + 0,5l^2)^2}x^{-6}h^6t^6 + \right. \\
& + 15,51 \frac{(l^2 - 1)^3}{l^6(1 + 0,5l^2)^4}x^{-8}h^6g^2t^6 + 49,84 \frac{(l^2 - 1)^5}{l^{10}(1 + 0,5l^2)^6}x^{-10}h^6g^4t^6 + \\
& \left. + 14,54 \frac{(l^2 - 1)^7}{l^{14}(1 + 0,5l^2)^8}x^{-12}h^6g^6t^6 \right]^{-1} \quad (18)
\end{aligned}$$

при  $n = 6$ .

Здесь переход к безразмерному дифференцированию осуществлялся по правилу

$$\frac{d}{dq} = \frac{1}{E} \frac{d}{dt}.$$



**Рис. 1.** Зависимость критической силы выпучивания  $t_{кр}$  от параметра  $l$  (а,  $l = 2; h = 300$ ), (б,  $l = 2; h = 500$ ), (с,  $l = 4; h = 300$ ), (д,  $l = 4; h = 500$ ). Цифры у кривых – значения  $n$

Уравнения (16)–(18) следует проинтегрировать при начальном условии

$$g(0) = \frac{w_1^0}{R} = g_0.$$

Таким образом, решение исходной задачи сведено к решению задачи Коши при дополнительном условии, характеризующем предельное состояние кольца:

$$\frac{dt}{dg} = 0.$$

Последующая задача состоит в численном интегрировании полученных уравнений методом Рунге-Кутты.

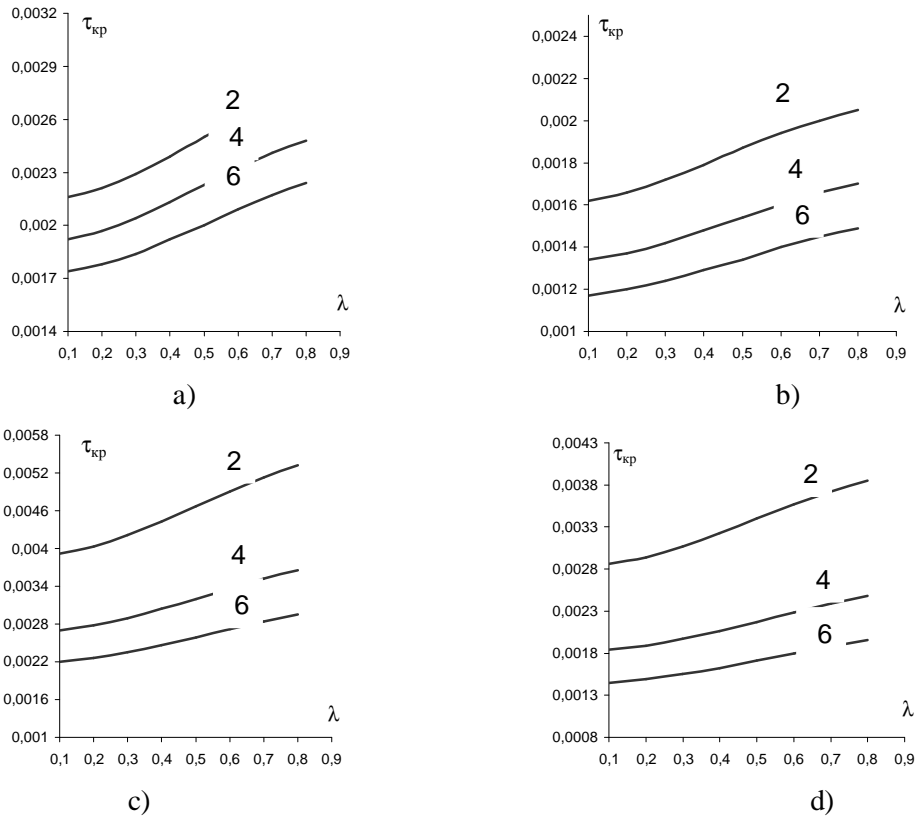
Чтобы количественно дать представление о характере изменения критических сил, получаемых для разных значений показателя нелинейности, приведем следующий пример.

При принятых расчетных данных

$$g_0 = 10^{-1}, \quad x = 10^{-1}, \quad h = 3 \cdot 10^2; 5 \cdot 10^2$$

на рис. 1 приведена зависимость  $t_{кр}$  от  $l$ , когда  $S$  представлено зависимостью (7).

На рисунке 2 дана аналогичная зависимость при  $S$ , определяемой зависимостью (6).



**Рис. 2.** Зависимость критической силы выпучивания  $t_{кр}$  от параметра  $l$  (а,  $l = 2; h = 300$ ), (б,  $l = 2; h = 500$ ), (с,  $l = 4; h = 300$ ), (д,  $l = 4; h = 500$ ). Цифры у кривых – значения  $n$

В таблицах 1 и 2 приведены числовые результаты для случая линейной упругости ( $s_0 \rightarrow \infty$ ).

**Таблица 1. Зависимость критической силы выпучивания  $t_{кр}$  от параметра  $l$  для линейной упругости ( $s$  представлено зависимостью (7)).**

$l$	$l = 2$	$l = 4$
0,1	0,002437	0,009747
0,2	0,002510	0,010041
0,3	0,002635	0,010539
0,4	0,002814	0,011257
0,5	0,003054	0,012214
0,6	0,003359	0,013438
0,7	0,003740	0,014959
0,8	0,004204	0,016815

**Таблица 2. Зависимость критической силы выпучивания  $t_{кр}$  от параметра  $l$  для линейной упругости ( $s$  представлено зависимостью (6)).**

$l$	$l = 2$	$l = 4$
0,1	0,002449	0,009795
0,2	0,002557	0,010230
0,3	0,002738	0,010954
0,4	0,002992	0,011967
0,5	0,003317	0,013270
0,6	0,003716	0,014862
0,7	0,004186	0,016744
0,8	0,004729	0,018915

На основе числового эксперимента можно сделать следующие выводы:

- 1) при  $l > 0,4$  необходимо учитывать уточненную аппроксимацию для  $s$  ;
- 2) с увеличением показателя нелинейности критическая сила уменьшается;
- 3) с увеличением числа волнообразования критическая сила возрастает;
- 4) с увеличением отношения модуля упругости на предел пропорциональности критическая сила уменьшается.

Таким образом, конструированием неоднородности можно увеличить (или уменьшить) критическую силу устойчивости и тем самым, в определенном смысле, оптимизировать процесс.

Автор выражает благодарность профессору Р. Ю.Амензаде за постановку задачи и полезные советы.

г. Баку

Поступила: 23 октября 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Амензаде, Р. Ю.* Выпучивание длинной цилиндрической оболочки из нелинейно-упругого материала / Р. Ю.Амензаде, Э. Т.Киясбейли, Л. Ф.Фатуллаева // Механика оболочек и пластин. – Нижний Новгород. – 2002. – С. 87–93.

2. *Амензаде, Р.Ю.* О точности линейного распределения напряжения в задачах выпучивания многослойных стержней / Р. Ю.Амензаде, Э. Т.Киясбейли // Доклады Академии Наук Азербайджана. – 2000. – № 4–6. – С. 72–77.
3. *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред / Д.Д. Ивлев. – М. : Физмат. Лит, 2001. – Т. 1. – 445 с.
4. *Amenzadeh, R. Yu.* The limiting state of a rigidly fixed nonlinearly elastic multilayer rod / R. Yu.Amenzadeh, E. T. Kiyasbeyli, L. F. Fatullaeva // Mechanics of Composite Materials. New-York. – 2006.– V. 42.– № 3.– P. 243–252.

## МЕТОДИКА РАСЧЕТА МОМЕНТА НАСТУПЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ СИЛОВОЙ УСТАНОВКИ

*(Белорусский национальный технический университет)*

Из-за сложности конструкции и требования повышенной безотказности авиационному двигателю на всех этапах “жизни” уделяют особое внимание. При его создании необходимо учитывать высокую температуру и давление, повышенную вибрацию и большие центробежные силы.

Для сохранения репутации, получения дополнительных материальных средств за продление ресурса и отсутствия конкуренции являются основными причинами по которым завод-изготовитель существенно занижает срок эксплуатации двигателей.

Совершенствование параметров и непрерывный рост требований к каждому последующему поколению двигателей оказали существенное влияние на развитие методов и моделей расчета и экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния, определения ресурса и надежности конструкции газотурбинных двигателей. Более того, с течением времени существующие методики морально устаревают. Поэтому все большую актуальность приобретает проблема создания современных вероятностно-статистических методов управления надежностью двигателей, при развитии и совершенствования методов прогнозирования и подтверждения ресурса силовых установок.

Предлагается методика оценки ресурса авиационного двигателя на всех этапах его “жизни” по параметрам рабочего процесса и геометрическим характеристикам. Ее сущность заключается в следующем. Первоначально производится сбор статистических параметров авиационных двигателей отечественного и зарубежного производства. После анализа и обработки собранных данных определяются коэффициенты  $b$  эмпирической зависимости, с помощью одного из современных математических методов – метода множественной линейной регрессии, и подставляются в выражение (1).

$$\text{Re } s = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n, \quad (1)$$

где  $\text{Re } s$  – ресурс авиационного двигателя;

$x_1 \dots x_n$  – параметры рабочего процесса и геометрические характеристики авиационного двигателя.

Согласно методу множественной линейной регрессии набору фиксированных значений независимых переменных  $X = \{X_0, X_1, X_2, \dots, X_k\}$  ставится в соответствие значение переменной  $\text{Re } s_i$ .

При составлении алгоритма вычисления коэффициентов уравнения регрессии, используется матричная форма записи системы уравнений и ее решения

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_k \end{bmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T \text{Res}, \quad (2)$$

где  $b_0, b_1, \dots, b_k$  и есть определяемые в процессе численного эксперимента коэффициенты уравнения регрессии;

$X$  – матрица параметров и геометрических характеристик двигателей;

$\text{Res}$  – матрица-столбец значения ресурса двигателей.

В численном эксперименте использовалось порядка двадцати одного авиационных двигателей отечественного и зарубежного производства (Табл. 1).

Таблица 1

№ п/п	Двигатель	$N_e$ [л.с.]	$M$ [кг]	$T_e^*$ [К]	God	$l$ [мм]	$b$ [мм]	$p_k$	Res [час]
1.	ТВЗ-117ВМА	2200	293	1263	1987	2055	660	9.4	1500
2.	ТВЗ-117ВМ-02	2000	293	1263	1993	2055	660	9.4	1500
3.	ТВЗ-117ВМ	2200	293	1263	1983	2055	660	9.4	1500
4.	ТВЗ-117ВМА-03	2200	293	1263	1998	2055	660	9.4	1500
5.	ТВЗ-117КМ	2200	285	1263	1977	2055	650	9.4	1500
6.	ТВЗ-117ВМА-Ф	2500	310	1288	1999	2055	660	9.43	1500
7.	ТВ7-117В	2500	380	1530	2000	1780	635	17	1500
8.	ТВ3-117В	2100	285	1263	1981	2055	660	9.4	1500
9.	ARRIEL 2S1	856	130	1410	1996	1080	500	6	3000
10.	ARRIUS 2K1	670	115	1410	1993	968	470	6	3000
11.	ТВЗ-117ВК	2200	285	1263	1985	2055	660	9.4	1500
12.	ARRIEL 2C2	944	145	1430	1997	1015	498	8	3000
13.	ARRIEL 2B	848	130	1410	1994	1080	500	8	3000
14.	ARRIEL 1K1	738	120	1380	1987	1090	430	6.5	4000
15.	ARRIEL 2C1	839	145	1410	1996	1015	498	8	3000
16.	ARRIEL 1D1	732	120	1380	1989	1090	430	7	4000
17.	ARRIEL 1E2	738	120	1380	1991	1090	430	7	4000
18.	ARRIEL 1C2	738	120	1380	1993	1090	430	7	3000
19.	PT6T-3TWIN- PAC	900,5	294	1430	1968	1702	1118	6	6500
20.	PT6T-6	1025,3	317	1430	1990	1702	1118	7	6500
21.	ARRIUS 2B1	670	111	1270	1996	947	404	5.1	2500

Для уменьшения погрешности уравнения регрессии и приведения их к одному порядку, принято решение о переводе всех параметров в относительный вид таким образом, чтобы они принадлежали интервалу от 0 до 1:

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \frac{M}{M_{\max}}; & \overline{N_e} &= \frac{N_e}{N_{e\max}}; & \overline{p_k} &= \frac{p_k}{p_{k\max}}; & \overline{T_e^*} &= \frac{T_e^*}{T_{e\max}^*}; \\ \overline{God} &= \frac{God}{God_{\max}}; & \overline{l} &= \frac{l}{l_{\max}}; & \overline{b} &= \frac{b}{b_{\max}}. \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\overline{M}$ ,  $\overline{p_k}$ ,  $\overline{God}$ ,  $\overline{Ne}$ ,  $\overline{l}$ ,  $\overline{T_2^*}$ ,  $\overline{b}$  – соответственно относительные величины массы, степени повышения давления воздуха в компрессоре, года создания, мощности, длины, температуры газа перед турбиной и ширины, а  $M_{\max}$ ,  $p_{k\max}$ ,  $God_{\max}$ ,  $Ne_{\max}$ ,  $l_{\max}$ ,  $T_2^*$ ,  $b_{\max}$  – базовое значение этих же величин.

Максимальное значение базовых параметров выбираются таким образом, чтобы их величины были больше максимального значения соответствующих величин представленных в таблице 1. Значение базовых величин выбрано следующим образом:

$$M_{\max} = 600 \text{ кг}; \quad p_{k\max} = 20; \quad God_{\max} = 2008; \quad Ne_{\max} = 5000 \text{ л.с.}; \quad (4)$$

$$l_{\max} = 4100 \text{ мм}; \quad T_2^*_{\max} = 1900 \text{ К}; \quad b_{\max} = 2000 \text{ мм}.$$

Для наиболее тщательного изучения ресурса авиационного двигателя было предложено рассматривать силовую установку как совокупность модулей: компрессор, камера сгорания, турбина. Из всего многообразия параметров модулей выбраны лишь те, которые наиболее полно описывают конструкцию и газодинамические процессы, а также не имеют математической связи между собой. К таким параметрам относятся:

- компрессор ( $Ne$  – максимальная мощность,  $M$  – масса двигателя,  $God$  – год создания двигателя,  $l$  – длина двигателя,  $b$  – ширина двигателя,  $p_k$  – степень повышения давления воздуха в компрессоре);
- камера сгорания ( $Ne$ ,  $T_2^*$  – максимальная температура газов перед турбиной,  $God$ ,  $l$ ,  $b$ );
- турбина ( $Ne$ ,  $M$ ,  $T_2^*$ ,  $God$ ,  $l$ ,  $b$ ).

После выполнения преобразований и вычислений, используя данные таблицы 1, эмпирическая зависимость для расчета ресурса компрессора примет вид

$$\overline{Res_K} = 4.208 - 0.736\overline{Ne} - 0.268\overline{M} - 4.082\overline{God} - 0.119\overline{l} + 1.27\overline{b} + 0.222\overline{p_k}, \quad (5)$$

где  $\overline{Res_K}$  – относительный ресурс компрессора авиационного двигателя.

Для камеры сгорания эмпирическая зависимость расчета ресурса примет вид

$$\overline{Res_{KC}} = 19.039 + 0.502\overline{T_2^*} - 19.205\overline{God} - 0.926\overline{l} + 0.965\overline{b}, \quad (6)$$

где  $\overline{Res_{KC}}$  – относительное значение ресурса камеры сгорания.

Аналогично для турбины имеем

$$\overline{Res_T} = -0.268 - 1.293\overline{Ne} + 0.04\overline{M} + 0.888\overline{T_2^*} - 0.192\overline{God} + 0.737\overline{l} + 0.626\overline{b}, \quad (7)$$

где  $\overline{Res_T}$  – относительное значение ресурса турбины.

Определить точность эмпирической зависимостей (5), (6) и (7) не представляется возможным из-за незнания реального значения ресурса авиационного двигателя, то есть времени по истечении которого один из модулей двигателя будет непригоден к дальнейшей эксплуатации из-за факта износа или разрушения, а не ресурса представленного заводами изготовителями, который сильно занижен из-за боязни потерять авторитет или из-за отсутствия достоверных методик.

Принято решение, для проверки точности метода множественной линейной регрессии, об определении не менее важного параметра – массы авиационного двигателя. Масса



двигателя может быть измерена в любой момент времени и тем самым может быть использована для определения точности эмпирической зависимости. Полученное уравнение для нахождения массы авиационного двигателя, при проверке на адекватность показало погрешность 4 и 5% соответственно для двигателей участвующих и не участвующих в численном эксперименте. Что с определенной степенью достоверности говорит о достаточно высокой точности метода множественной линейной регрессии и полученной эмпирической зависимости для определения ресурса двигателя.

Проводя сравнительный анализ с существующими способами и методами оценки ресурса, хочется отметить, что самыми точными являются практические испытания, но они являются довольно дорогостоящими и невозможны для их проведения на каждом двигателе. Для наиболее полной оценки надежности авиационного двигателя необходимо проводить испытания до его полного разрушения. И поэтому на практике до разрушения доводят только первые из двигателей нового типа, а первоначальный ресурс назначается небольшим. И лишь после ряда начальных испытаний на заводах изготовителях, доработок и тщательного исследования эксплуатирующих частях устанавливается окончательный ресурс. Хотя и он чаще продлевается или изменяется по другим причинам.

В целом используемые при производстве практические испытания, на которые опирается предполагаемое значение ресурса, в целом верны и четко отработаны. Но и имеет ряд недостатков:

– Двигатели не вырабатывают ресурс заложенный при изготовлении и заблаговременно по “бумажному ресурсу” становятся грудой металлолома либо преждевременно отправляются на ремонт, что влечет к дополнительным затратам для государства. Проводя сравнительный анализ ресурса двигателей отечественного и зарубежного производства, видим, что ресурс зарубежных двигателей значительно превосходит ресурс отечественных. И объясняется это в первую очередь эксплуатацией двигателей по техническому состоянию, а также отработанной грамотной эксплуатационной диагностики и контроля силовой установки.

И поэтому необходимо иметь на вооружении такую методику, которая может определять ресурс как на момент создания так и во время всей эксплуатации вплоть до разрушения.

– Ресурс должен быть индивидуальной величиной для каждого авиационного двигателя. Ведь в мире нет ни одного одинакового двигателя, даже в одной серии. Поэтому необходимо, в зависимости от качества изготовления, сборки и функционирования определять ресурс для каждого двигателя в отдельности.

Это позволит в полном объеме эксплуатировать авиационные двигатели, а не решать судьбу всех двигателей одной серии по исследованиям их родоначальников. Ведь у каждой детали двигателя могут быть свои дефекты заложенные еще при изготовлении (пустоты, эмиссии). И поэтому при определении окончательного ресурса нельзя это не учитывать и не допускать “стадное” представление обо всех двигателях одной серии и модели.

– Двигатель должен характеризоваться не одним, а несколькими ресурсами, каждый из которых характеризует определенный модуль двигателя. И по достижению предельного состояния одного из модулей проводить замену лишь его, а не прерывать дальнейшую эксплуатацию двигателя.

Варьируя модулями двигателей можно из несколько двигателей вышедших из строя собрать один и более двигателей пригодных к дальнейшей эксплуатации. Это и бу-

дет являться грамотной эксплуатацией, позволяющей вырабатывать весь ресурс модулей, заложенный при его создании.

– Узконаправленность. Исследования и испытания в основном проводятся для наиболее уязвимых элементов, а не для двигателя в целом. Такой “ахиллесовой пятой” являются лопатки турбины. К ним предъявляются жесткие требования и в основном для них разрабатываются методики и проводятся испытания, что в корне не верно. На значение ресурса должны влиять испытываться и диагностика всего двигателя вплоть до винтика, а не только наиболее уязвимые места. Ведь авиация ошибок не прощает.

г. Минск

Поступила: 05 ноября 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Беляев, Н. М.* Методы теории теплопроводности. Ч. 1. / Н. М. Беляев, А. А.Рядно. – М. : Высшая школа, 1982. – 198 с.
2. *Бойко, В. И.* Введение в физику взаимодействия сильнооточных пучков заряженных частиц с веществом / В. И. Бойко, В. В. Евстигнеев. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 206 с.
3. *Зуев, В. В.* Об ударном нагружении мишени из композиционных материалов / В. В. Зуев // Расчеты на прочность. – М. : Машиностроение, 1989. – № 30. – С. 148 – 155.
4. *Майборода, В. П.* Скоростное деформирование конструкционных материалов / В. П. Майборода, А. С. Кравчук, Н. С. Холин. – М. : Машиностроение, 1986. – 308 с.
5. *Самарский, А. А.* Разностные методы решения задач газовой динамики / А. А. Самарский, Ю. П. Попов. – М. : Наука, 1980. – 178 с.
6. *Мейдер, Ч.* Численное моделирование детонации / Ч. Мейдер. – М. : Мир, 1985. – 98 с.
7. *Рыкалин, Н. Н.* Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов: Справочник. / Н. Н. Рыкалин, А. А. Углов, И. В. Зуев, А. Н. Кокора. – М. : Машиностроение, 1985. – 190 с.
8. *Новожилов, В. В.* Вопросы механики сплошной среды / В. В. Новожилов. – Л. : Судостроение, 1989. – 97 с.
9. *Пелех, Б. Л.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжения / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. – Киев : Наукова думка, 1982. – 306 с.
10. *Бакулин, В. Н.* Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек: Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии / В. Н. Бакулин, И. Ф. Образцов, В. А. Потопахин. – М. : Наука. Физматлит, 1998. – 464 с.
11. *Акимов, В. М.* Основы надежности газотурбинных двигателей / В. М. Акимов. – М. : Машиностроение, 1981. – 207 с.
12. *Гнеденко, Б. В.* Математические методы в теории надежности / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. – М. : Наука, 1965. – 524 с.
13. *Orowan, E.* Reports on Progress in Physics / E. Orowan, 1949. – 185 p.
14. *Parkins, R. N.* Stress Corrosion Cracking and Embrittlement / R. Parkins, Wiley, New York, 1956. – 140 p.
15. *Engel, H. J.* Physical Metallurgy of Stress Corrosion Fracture / H. J. Engel // A. Baumel Interscience, 1959. – 341 p.
16. *Tetelman, A. S.* Trans. AIME / A. S. Tetelman, W. D Robertson, 1962. – 224 p.



**МОРОЗОВ НИКИТА ФЕДОРОВИЧ**

Выдающемуся ученому-механику Никите Федоровичу Морозову исполнилось 75 лет.

Основные научные интересы Никиты Федоровича находятся в области применения строгих математических методов к решению задач механики деформирования и разрушения твердых тел.

Основные математические интересы связаны с сингулярными интегральными уравнениями, конформными отображениями, теорией бифуркаций, интегральными преобразованиями и др.

Никите Федоровичу принадлежат результаты в области динамических проблем разрушения и распространения трещин, установлению и изучению взаимосвязи между деформированием, диффузией, процессами фазовых превращений и разрушения, проблемам нанотехнологий и др.

Никите Федоровичу принадлежит более 200 научных работ, ряд монографий.

Никита Федорович – академик РАН, заслуженный деятель науки РФ, лауреат Государственной Премии РФ. Он – вице председатель Национального комитета России по теоретической и прикладной механике, председатель научного совета РАН по МДТТ, член редколлегии ряда российских и зарубежных журналов и т.д. Перечисление обязанностей Никиты Федоровича – дело длительное, так как этих обязанностей у него очень много.

Никита Федорович награжден правительственными наградами, среди которых особое место занимает медаль «За оборону Ленинграда» (1943г.). В 11 лет получить такую

награду – это свидетельство необычайной энергии, смелости, патриотизма и других замечательных качеств, которыми Н.Ф. наделен сполна.

Никиту Федоровича отличает простота и доступность в общении, высокая внутренняя культура, внимание и доброжелательность к окружающим. Когда Санкт-Петербургский госуниверситет курировал научные гранты, ученые ЧГПУ им. И. Я. Яковлева всегда ощущали внимание и поддержку Никиты Федоровича Морозова.

Редколлегия и редакция журнала от души поздравляют Никиту Федоровича Морозова с семидесятипятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих новых творческих успехов.



### **БУРЕНИН АНАТОЛИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ**

Исполнилось 60 лет со дня рождения Анатолия Александровича Буренина – крупного ученого в области механики сплошных сред. А.А. родился на Тамбовщине 20.08.1947 г. в селе Подгорное. Окончил математико-механический факультет Воронежского университета, отслужил положенный срок в рядах Советской армии, вернулся в ВГУ, защитил кандидатскую диссертацию под руководством Александра Даниловича Чернышева. Двенадцать лет А.А. проработал в Воронежском инженерно-строительном институте, где прошел путь от старшего преподавателя до заведующего кафедрой теоретической механики.

В 1987 году вместе с Г.И. Быковцевым переехал во Владивосток, где через три года защитил докторскую диссертацию. В настоящее время А.А. Буренин является заведующим лаборатории МДГТ института автоматики и процессов управления ДО РАН, заведующим кафедрой математического моделирования и информатики ДТГУ.

А.А. Буренин член Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике, почетный работник высшей школы РФ.

Область научных результатов А.А. обширна: нелинейные эффекты при распространении граничных возмущений, в частности, ударных, развитие аналитических и численных методов решения нестационарных задач динамики деформируемых сред, математическое моделирование развития больших необратимых деформаций и т.п. По всем этим направлениям А.А. получил замечательные результаты.

В лучших традициях воронежской школы механиков, А.А. Буренин много внимания уделяет научной молодежи. Вокруг него вырос научный коллектив, состоящий из его учеников – докторов и кандидатов наук.

Множество ученых и множество порядочных людей безусловно имеют пересечение, большую общую часть, но эти множества не тождественны. Я давно знаю А.А. и считаю его исключительно порядочным человеком, и для меня это очень важно.

За Дальний Восток я говорить не могу, там я не был. Но знаю, что все воронежские механики, и не только воронежские, глубоко уважают Анатолия Александровича Буренина, желают ему крепкого здоровья и многих новых больших успехов.

Д. Ивлев



**МАКСИМОВА ЛЮДМИЛА АНАТОЛЬЕВНА**

Исполнилось 45 лет со дня рождения доктора физико-математических наук Максимовой Людмилы Анатольевны. Л. А. родилась 23 августа 1962 года в г. Шумерля Чувашской Республики. После окончания в 1985 г. факультета ВМиК Московского университета, ряд лет проработала на кафедре высшей математики Чувашского Госуниверситета в Чебоксарах. В начале 90-х годов определились ее научные интересы: Л. А. начинает активно заниматься механикой деформируемого твердого тела. В 1998 году защищает на совете Воронежского госуниверситета кандидатскую диссертацию, посвященную линеаризации общих нелинейных статически определимых и статически неопределимых соотношений теории идеальной пластичности. Ей удалось исследовать характер уравнений в ряде случаев и решить задачи, представляющие несомненный интерес.

С 2001 г. Л.А. Максимова находилась в трехлетней очной докторантуре при кафедре волновой и газовой динамики мехмата МГУ, ее научный консультант по докторантуре – академик Евгений Иванович Шемякин.

В 2004 году Л. А. Максимова успешно защитила докторскую диссертацию, посвященную ряду вопросов пространственной задачи теории идеальной пластичности и предельного состояния.

Из результатов Л. А. Максимовой отметим установление эффекта падения сдвигующих усилий в зависимости от направлений касательных усилий на шероховатых плитах в пространственной задаче Прандтля, определение и исследование соотношений общей плоской задачи теории идеальной пластичности (совместно с Д. Д. Ивлевым), исследование статически определимых соотношений теории предельного состояния в общем случае осесимметричной задачи и др.

Ряд результатов Л. А. Максимовой опубликован в соавторстве с А. Ю. Ишлинским. Л. А. Максимова имеет более 50 опубликованных работ, более половины, которых опубликованы в центральной печати.

Л. А. Максимова является лауреатом Премии журнала ПММ за лучшую публикацию года (2000г.), лауреатом Премии журнала Известия РАН МТТ за лучшую публикацию года (2001г.), она является лауреатом Государственной премии Чувашской Республики в области науки и техники за 2005г., членом редколлегии журнала Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева серии «Механика предельного состояния», членом Российского Национального комитета по прикладной и теоретической механике.

Людмила Анатольевна Максимова находится в расцвете творческих сил, желаем ей крепкого здоровья, многих новых творческих успехов.

Д.Д. Ивлев, Е.И. Шемякин





**Амензаде Рафаель Юсиф-оглы** ([mexanika.bsu.az@mail.ru](mailto:mexanika.bsu.az@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.



**Баженов Валентин Георгиевич** ([bazhenov@dk.mech.unn.ru](mailto:bazhenov@dk.mech.unn.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.



**Буренин Анатолий Александрович** ([burenin@iacp.dvo.ru](mailto:burenin@iacp.dvo.ru), [burenin@dvo.ru](mailto:burenin@dvo.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, ИА-ПУ ДВО РАН, г. Владивосток.



**Варданын Седрак Ваникович** ([vardanyan\\_s@yahoo.com](mailto:vardanyan_s@yahoo.com)) – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.



**Демьянов Юрий Андреевич** – доктор технических наук, профессор, Московский Лесотехнический институт, г. Королев Московской области



**Зубчанинов Владимир Георгиевич** ([vgz@rambler.ru](mailto:vgz@rambler.ru), [kafsm@yandex.ru](mailto:kafsm@yandex.ru)) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.



**Ивлев Дюис Данилович** ([Ivlev21@mail.ru](mailto:Ivlev21@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.



**Каюмов Рашит Абдулхакович** ([kayumov@rambler.ru](mailto:kayumov@rambler.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.



**Климов Дмитрий Михайлович** ([klimov@ipmnet.ru](mailto:klimov@ipmnet.ru)) – Академик РАН, Институт проблем механики РАН, г. Москва.



**Ломакин Евгений Викторович** ([lomakin@nw.math.msu.su](mailto:lomakin@nw.math.msu.su)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.



**Максимова Людмила Анатольевна** ([strangcheb@mail.ru](mailto:strangcheb@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.



**Манжиров Александр Владимирович** ([manzh@ipmnet.ru](mailto:manzh@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики РАН, г. Москва.



**Маркин Алексей Александрович** ([markin@uic.tula.ru](mailto:markin@uic.tula.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.



**Матченко Николай Михайлович** ([ekc@tula.ru](mailto:ekc@tula.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.



**Миронов Борис Гурьевич** ([prorektor@chdpu.edu.ru](mailto:prorektor@chdpu.edu.ru)) – доктор физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.



**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович** ([irakon63@hotmail.com](mailto:irakon63@hotmail.com)) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.



**Михайлов Глеб Константинович** ([gkmikh@proc.ru](mailto:gkmikh@proc.ru), [gkmikh@mail.ru](mailto:gkmikh@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.



**Немировский Юрий Владимирович** ([nemirov@itam.nsc.ru](mailto:nemirov@itam.nsc.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.



**Непершин Ростислав Иванович** ([Nepershin\\_r@pop.mtu.ru](mailto:Nepershin_r@pop.mtu.ru)) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технический университет «СТАНКИН», г. Москва.



**Победря Борис Ефимович** ([rob@mail.ru](mailto:rob@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.



**Радаев Юрий Николаевич** ([radayev@ssu.samara.ru](mailto:radayev@ssu.samara.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный университет, г. Самара.



**Редкозубов Сергей Алексеевич** ([nike109@yandex.ru](mailto:nike109@yandex.ru), [marusbka434@yandex.ru](mailto:marusbka434@yandex.ru)) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.



**Сенашов Сергей Иванович** ([sen@sibsau.ru](mailto:sen@sibsau.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.



**Спорыхин Анатолий Николаевич** ([pmmdeans@main.vsu.ru](mailto:pmmdeans@main.vsu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.



**Тамуж Витаутас Петрович** ([tamuzs@pmi.lv](mailto:tamuzs@pmi.lv)) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.



**Тихонов Сергей Владимирович** ([strangcheb@mail.ru](mailto:strangcheb@mail.ru)) – и.о. ученого секретаря редакции журнала, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.



**Трещев Александр Анатольевич** ([taa@uic.tula.ru](mailto:taa@uic.tula.ru)) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет; г. Тула.



**Хромов Александр Игоревич** ([khromovai@list.ru](mailto:khromovai@list.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.



**Черепанов Геннадий Петрович** ([genadyc@netscape.net](mailto:genadyc@netscape.net), [genacherpanov@hotmail.com](mailto:genacherpanov@hotmail.com)) – доктор физико-математических наук, профессор, пожизненный член Нью-йоркской академии наук, Флорида, США.



**Чигарев Анатолий Власович** ([chigarev@rambler.ru](mailto:chigarev@rambler.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.



**Шашкин Александр Иванович** ([pmmdeans@main.vsu.ru](mailto:pmmdeans@main.vsu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.



**Шемякин Евгений Иванович** ([esh@msu.ru](mailto:esh@msu.ru), [eshem@mech.math.msu.su](mailto:eshem@mech.math.msu.su)) – Академик РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

1. **«Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния».** Статья должна быть подписана автором и представлена вместе с дискетой или выслана на электронные адреса редакции: [ivlev21@mail.ru](mailto:ivlev21@mail.ru), [strangcheb@mail.ru](mailto:strangcheb@mail.ru).

2. Авторы представляют статьи, набранные на компьютере в текстовом редакторе Microsoft Word (7.0, 6.0 версии). Формат бумаги – А4, поля: справа, слева и сверху 3 см, снизу 6 см.

3. Размер шрифта – 11. Абзацный отступ – 1 см. Интервал – одинарный. Текст статьи набирается шрифтом Times New Roman с выравниванием по ширине и автоматическим переносом слов. Страницы не нумеруются. Заголовок пишется жирным шрифтом заглавными буквами. Фамилия и инициалы автора даются курсивом в правом верхнем углу над заголовком.

4. **Иллюстрации:**

должны быть пронумерованы и упомянуты в тексте;  
подрисовочные подписи выполняются шрифтом размера 9.

5. **Формулы** и буквенные обозначения по тексту должны быть набраны в среде редактора формул Microsoft Equation 3.0. Шрифт для греческих букв – Symbol, для всех остальных – Times New Roman, основной размер – 11, крупный индекс – 7, мелкий – 5.

В формулах следует избегать громоздких обозначений. Формулы располагаются по центру страницы. В случае необходимости формулы нумеруются.

6. **Таблицы** выполняются шрифтом 9. Они могут быть с заголовками и без них. Заголовок набирается полужирным шрифтом 9. Таблицы необходимо пронумеровать и упомянуть в тексте.

7. **Список литературы** набирается по алфавиту шрифтом Times New Roman размера 9. Фамилия и инициалы автора или первое слово в названии издания (если нет автора) выделяются курсивом.

Ссылки на используемую литературу даются внутри текста в квадратных скобках. Например: [1, 23], где 1 – порядковый номер в списке использованной литературы, 23 – номер страницы.

8. **Сведения об авторах «Вестника ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния»** включают фамилию, имя и отчество автора, данные об ученой степени и занимаемой должности. Например, *Ивлев Дюис Данилович* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева.

## ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ

*Ивлев Д. Д., Матченко Н. М.*

### ОБ ЭВОЛЮЦИИ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

*Чувашский государственный педагогический университет  
им. И. Я. Яковлева,  
Тульский государственный университет*

В работе [1] определены три состояния идеально пластического материала. Пластическое состояние, при котором напряжения удовлетворяют условию пластичности в виде одной гладкой функции текучести

$$f(s_{ij})=0. \quad (1)$$

Развитое пластическое состояние, при котором напряжения удовлетворяют условию пластичности в виде пересечения двух гладких функций текучести

$$f_1(s_{ij})=0, f_2(s_{ij})=0, \quad (2)$$

## ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ СПИСКА ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Быковцев, Г. И.* О вязкопластическом течении круглых пластин и оболочек / Г. И. Быковцев, Т. Д. Семькина // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – № 4. – С. 68–76.
2. *Киряков, П. П.*, Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. – 190 с.
3. *Кроха, В. А.* Упрочнение металлов при холодной пластической деформации : справочник / В. А. Кроха. – М. : Машиностроение, 1980. – 157 с.
4. *Одинокоев, В. И.* Разрушение льда под действием гидростатического давления на подвешенном плавающем контейнере с учетом его заполнения водой / В. И. Одинокоев, А. М. Сергеева // Механика микронеоднородных материалов и разрушение : тезисы докладов IV Всероссийского семинара (Екатеринбург, 23–24 марта 2006 г.). – Екатеринбург : Изд-во УГТУ-УПИ, 2006. – С. 43.
5. *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 396 с.
6. *Maugin, G. A.* The Thermomechanics of Plasticity and Fracture / G. A. Maugin. – Cambridge : Cambridge University Press, 1992. – 350 p.
7. *Radayev, Y. N.* On directional average of the local anisotropic damage / Y. N. Radayev // Int. J. Fracture. – 2004. – V. 128. – P. 293–307.

*Амензаде Рафаэль Юсиф оглы* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «теоретической механики и механики сплошной среды» Бакинского государственного университета, г. Баку

*Анисимов Антон Николаевич* – старший преподаватель кафедры информатики Амурского гуманитарно-педагогического государственного университета, г. Комсомольск-на-Амуре.

*Ахундов Мамед Багир оглы* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «теоретической механики и механики сплошной среды» Бакинского государственного университета, г. Баку

*Багдоев Александр Георгиевич* – член-корреспондент Национальной Академии наук Армении, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА, г. Ереван

*Бажин Александр Александрович* – студент 5-го курса Дальневосточного государственного технического университета, г. Владивосток

*Буренин Анатолий Александрович* – доктор физико-математических наук, заведующий лаб. «Механики деформируемого твердого тела» Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

*Варданян Анна Ваниковна* – аспирант Института механики НАН РА, г. Ереван

*Варданян Седрак Ваникович* – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института механики НАН РА, г. Ереван

*Ковтанюк Лариса Валентиновна* – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаб. «Механики деформируемого твердого тела» Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

*Миронов Дмитрий Николаевич* – аспирант кафедры теоретической механики Белорусского национально-технического университета, г. Минск

*Мирсалимов Вагиф Мирахмедович* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Соппротивление материалов» Азербайджанского технического университета, г. Баку

*Мурашкин Евгений Валерьевич* – кандидат физико-математических наук, инженер-программист лаб. «Механики деформируемого твердого тела» Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

*Немировский Юрий Владимирович* – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича, г. Новосибирск

*Радаев Юрий Николаевич* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики сплошных сред Самарского государственного университета, г. Самара

*Романова Татьяна Павловна* – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича, г. Новосибирск

*Салманов Эльшан Вагиф оглы* – аспирант кафедры «Сопротивление материалов» Азербайджанского технического университета, г. Баку

*Сафарян Юрий Сергеевич* – доктор физико-математических наук, ректор Горийского государственного университета, г. Баку

*Семенов Кирилл Тихонович* – аспирант Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

*Фараджев Рамил Гасанбала оглы* – аспирант Института математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

*Фатуллаева Лаура Фаик кызы* – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института прикладной математики бакинского государственного университета, г. Баку

*Чигарев Анатолий Власович* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Белорусского национально-технического университета, г. Минск



<i>Ивлев Д. Д.</i>	Чем отличается теория идеальной пластичности от теории предельного состояния.....	3
<i>Амензаде Р. Ю., Ахундов М. Б., Фатуллаева Л. Ф.</i>	Устойчивость трехслойного упругого стержня с искривленной внутренней структурой.....	11
<i>Анисимов А. Н.</i>	Об учете необратимой сжимаемости материала при волочении полосы сквозь короткую матрицу.....	19
<i>Багдоев А. Г., Варданян А. В., Варданян С. В., Сафарян Ю. С.</i>	Слабонелинейные волны в механике сплошной среды и модельных задачах.....	32
<i>Бажин А. А., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Мурашкин Е. В.</i>	О возможном реологическом механизме повышения длительной прочности металлоизделий под действием интенсивных эксплуатационных нагрузок по типу «нагрузка-разгрузка».....	53
<i>Варданян С. В.</i>	Об условиях изотропии при больших деформациях.....	64
<i>Мирсалимов В. М., Салманов Э. В.</i>	Решение задачи механики разрушения для тепловыделяющего перфорированного массива при наличии трещин с пластическими концевыми зонами.....	76
<i>Мирсалимов В. М., Фараджев Р. Г.</i>	Периодическая задача о развитии полостей в вязких телах.....	88
<i>Немировский Ю. В., Романова Т. П.</i>	Оценка динамической повреждаемости пластических эксцентрических кольцевых пластин.....	97

<i>Радаев Ю.Н.</i>	О дополнительном тензорном соотношении симметрии в математической теории пластичности.....	109
<i>Семенов К. Т.</i>	Поверхности разрывов деформаций в необратимо сжимаемых материалах.....	126
<i>Фатуллаева Л.Ф.</i>	Выпучивание нелинейно-упругого эксцентрического кольца..	142
<i>Чигарев А. В., Миронов Д. Н.</i>	Методика расчета момента наступления предельного состояния силовой установки.....	151

### **Юбилей**

МОРОЗОВ НИКИТА ФЕДОРОВИЧ (к 75-летию со дня рождения).....	156
БУРЕНИН АНАТОЛИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ (к 60-летию со дня рождения).....	158
МАКСИМОВА ЛЮДМИЛА АНАТОЛЬЕВНА (к 45-летию со дня рождения).....	160
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	162
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ.....	166
АВТОРЫ ЖУРНАЛА.....	168

**Вестник**  
Чувашского государственного педагогического университета  
им. И. Я. Яковлева

Серия: Механика предельного состояния

№ 3 • 2007

Отв. за выпуск	А. Н. Роштова С. В. Матвеев С. В. Тихонов Т. А. Кульпина
----------------	---

Технические редакторы	А. В. Митрасова Н. А. Немилова Л. А. Судленкова
-----------------------	---

Компьютерная верстка, макет А. В. Митрасовой

---

Подписано в печать 30.11.07. Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Гарнитура Times New Roman.  
Усл. печ. л. 21,5. Тираж 300 экз. Цена свободная. Заказ №

---

Отпечатано на участке оперативной полиграфии  
ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет  
им. И. Я. Яковлева»

428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38