

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал
№ 4(30)
Октябрь – декабрь 2016 г.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов,
Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, Б. Е. Победря, В. П. Радченко,
А. Ф. Ревуженко, С. А. Редкозубов, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин,
А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж
(Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

Адрес редакции и издательства: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-16-19

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://predel.chgpu.edu.ru>

© ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева», 2016

А. С. Бегун¹, Л. В. Ковтанюк¹, А. О. Лемза²

ПОЛЗУЧЕСТЬ И РЕЛАКСАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В МАТЕРИАЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ ЕГО РОТАЦИОННОМ ДВИЖЕНИИ

¹Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

²Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия

Аннотация. В рамках теории больших деформаций рассматривается деформирование материала с нелинейными упругими и вязкими свойствами, находящегося в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями, при повороте внутренней поверхности. Исследуется равноускоренное движение внутреннего цилиндра, последующее его движение с постоянной скоростью и дальнейшее равнозамедленное движение до остановки. Рассчитаны напряжения, обратимые и необратимые деформации, перемещения, исследована релаксация напряжений после полной остановки цилиндра.

Ключевые слова: большие деформации, упругость, ползучесть, остаточные напряжения, необратимые деформации.

УДК: 539.374

Для значительного формоизменения некоторых материалов предпочтительным оказывается способ их холодной формовки в условиях ползучести [1]. Этим вызван интерес к постановкам задач теории больших деформаций, когда при кинематическом воздействии на материалы необратимые деформации накапливаются в условиях

© Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., Лемза А. О., 2016

Бегун Александра Сергеевна

e-mail: asustinova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории механики необратимого деформирования, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Ковтанюк Лариса Валентиновна

e-mail: lk@iаср.dvo.ru, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией механики необратимого деформирования, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Лемза Александр Олегович

e-mail: alsu-24@yandex.ru, аспирант, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований «Дальний Восток» (0262-2015-0064, 0262-2015-0065).

Поступила 19.07.2016

ползучести при низкой температуре. Задача о деформировании материала, расположенного между двумя жесткими коаксиальными цилиндрами, при повороте внутреннего цилиндра за счет приложенного к нему момента закручивания была рассмотрена ранее [2]. Здесь рассмотрен аналогичный случай, но при переменной скорости поворота жесткой поверхности. Выбор кинематического краевого условия позволяет исследовать релаксацию напряжений после полной остановки вращающейся жесткой поверхности.

1. Основные модельные соотношения. Для решения задачи будем использовать математическую модель больших деформаций, в которой обратимая и необратимая составляющие полных деформаций определяются дифференциальными уравнениями изменения [3]–[5]. Основное достоинство этой модели — следование требованиям классической теории упругопластичности, когда пластические деформации в областях упругого деформирования и при разгрузке изменяются так же, как при жестком перемещении среды. В прямоугольной системе пространственных декартовых координат Эйлера x_i кинематика среды задается соотношениями:

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}, \\
\frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2} [(\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \gamma_{kj} - z_{kj})], \\
\frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
r_{ij} &= \omega_{ij} + z_{ij}(e_{ks}, \varepsilon_{ks}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}), \\
z_{ij} &= A^{-1} [(\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj})B^2 + B(\varepsilon_{ik}e_{ks}e_{sj} - e_{ik}e_{ks}\varepsilon_{sj}) + e_{ik}\varepsilon_{ks}e_{st}e_{tj} - e_{ik}e_{ks}\varepsilon_{st}e_{tj}], \\
A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3, \quad B = 2 - E_1, \\
E_1 &= e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}.
\end{aligned} \tag{1}$$

В зависимостях (1) u_i и v_i — компоненты перемещений и скоростей точек среды; d_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси; e_{ij} и p_{ij} — их обратимая и необратимая составляющие; D/Dt — оператор используемой объективной производной тензоров по времени, которая записана для произвольного тензора n_{ij} ; r_{ij} — компоненты тензора вращений. Источники γ_{ij} и $\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij}$ в уравнениях изменения необратимых и обратимых деформаций — скорости их накопления. Когда $\gamma_{ij} = 0$, компоненты тензора необратимых деформаций изменяются так же, как при повороте системы координат, или, что то же, как при движении среды без деформирования ($\frac{Dp_{ij}}{Dt} = 0$). При равенстве нулю нелинейной составляющей z_{ij} тензора вращений r_{ij} производная в (1) переходит в производную Яумана.

Следуя [3]–[5], полагаем, что используемый термодинамический потенциал (плотность распределения свободной энергии ψ) — изотропная функция только обратимых

деформаций. Тогда, согласно закону сохранения энергии, напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями и связаны с ними формулой, аналогичной формуле Мурнагана в нелинейной теории упругости [6]. Запишем данное соотношение для рассматриваемого здесь случая несжимаемой среды:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}). \quad (2)$$

В (2) σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, p — неизвестная функция добавочного гидростатического давления. Для упругого потенциала $W = \rho_0\psi$, где ρ_0 — плотность, принимаем его разложение в ряд Маклорена относительно свободного состояния:

$$\begin{aligned} W &= -2\mu I_1 - \mu I_2 + bI_1^2 + (b - \mu)I_1 I_2 - \chi I_1^3 + \dots, \\ I_1 &= e_{kk} - \frac{1}{2}e_{ks}e_{sk}, \quad I_2 = e_{ks}e_{sk} - e_{ks}e_{st}e_{tk} + \frac{1}{4}e_{ks}e_{st}e_{tn}e_{nk}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь μ — модуль сдвига, b, χ — постоянные материала.

Диссипативный механизм деформирования, определяющий накопление необратимых деформаций, связан с реологическими и пластическими свойствами материала. Далее будем считать, что необратимые деформации накапливаются с начала процесса деформирования и связаны с ползучестью материала.

Для задания соответствующего диссипативного механизма деформирования введем термодинамический потенциал $V(\sigma_{ij})$ в форме степенного закона ползучести Нортонна [7]:

$$V(\sigma_{ij}) = B\Sigma^n (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \max |\sigma_i - \sigma_j|, \quad \gamma_{ij} = \dot{\varepsilon}'_{ij} = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (4)$$

В (4) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений, B, n — параметры ползучести материала, $\dot{\varepsilon}'_{ij}$ — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести.

Так как пластическое течение в материале не возникает, напряженное состояние не должно достигать поверхности текучести. Используя в качестве такой поверхности условие текучести Треска, имеем, что в течение всего процесса деформирования

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| < 2k, \quad (5)$$

где k — предел текучести материала.

2. Постановка и решение задачи. Рассмотрим деформирование несжимаемого материала, расположенного в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями с недеформируемыми стенками, при повороте внутренней поверхности радиуса $r = r_0$ с заданной угловой скоростью ω_0 , в то время как внешняя поверхность радиуса $r = R$ остается неподвижной. В дальнейшем используется цилиндрическая система координат r, φ, z . Считаем, что в рассматриваемом случае все точки среды

движутся по окружностям, тогда, согласно соотношениям (1), кинематика среды задается зависимостями:

$$\begin{aligned} u_r &= r(1 - \cos \theta), & u_\varphi &= r \sin \theta, \\ d_{rr} &= -\frac{1}{2} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2, & d_{r\varphi} &= \frac{1}{2} r \frac{\partial \theta}{\partial r}, & v_\varphi &= r\omega = r \frac{\partial \theta}{\partial t}, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t}, & \omega_{r\varphi} &= -\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t}, & r_{r\varphi} &= -\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{2\varepsilon_{r\varphi}(1 - e_{\varphi\varphi})}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\theta = \theta(r, t)$ — центральный угол закручивания.

На жестких стенках выполняются условия прилипания. Тогда граничные условия запишем в виде:

$$\vec{u}\Big|_{r=R} = \vec{v}\Big|_{r=R} = 0, \quad \omega\Big|_{r=r_0} = \omega_0, \quad \theta\Big|_{r=r_0} = \theta_0 = \int_0^t \omega_0 dt, \quad \sigma_{rr}\Big|_{r=R} = a_0. \quad (7)$$

В (7) ω_0, a_0 — задаваемые функции. Учитывая, что для задач данного класса диагональные компоненты тензоров деформаций являются малыми более высокого порядка по сравнению с недиагональными компонентами [8–11], далее ограничимся слагаемыми первого порядка по диагональным компонентам и второго — по недиагональным. Данное ограничение не является принципиальным для решения задачи, но позволяет значительно упростить вычисления. Из формул (2) и (3) в рассматриваемом случае найдем напряжения в среде:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p - 2\mu + 2(b + \mu)e_{rr} + 2be_{\varphi\varphi} + \mu e_{r\varphi}^2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p - 2\mu + 2(b + \mu)e_{\varphi\varphi} + 2be_{rr} + \mu e_{r\varphi}^2, \\ \sigma_{zz} &= -p - 2\mu + 2b(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}) - 2\mu e_{r\varphi}^2, \\ \sigma_{r\varphi} &= 2\mu e_{r\varphi}, \quad \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma_{r\varphi}} = \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Пренебрегая силами инерции, т.е. находясь в рамках квазистатического приближения, уравнения равновесия запишем в форме

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0. \quad (9)$$

Интегрируя уравнения (9), найдем

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{c(t)}{r^2}, \quad e_{r\varphi} = \frac{c(t)}{2\mu r^2}. \quad (10)$$

Учитывая замечание перед формулами (8), в потенциале $V(\sigma_{ij})$, принимающем в цилиндрической системе координат для рассматриваемого случая форму

$$V(\sigma_{ij}) = B \left[(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + 4\sigma_{r\varphi}\sigma_{\varphi r} \right]^{\frac{n}{2}},$$

ограничимся слагаемыми до порядка n по напряжениям, тогда для скоростей деформаций ползучести, согласно (4) и (8), получим соотношения:

$$\varepsilon_{r\varphi}^\nu = (-1)^n 2^{n-1} B n \sigma_{r\varphi}^{n-1}, \quad \varepsilon_{rr}^\nu = -\varepsilon_{\varphi\varphi}^\nu = \frac{\varepsilon_{r\varphi}^\nu}{2} \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}}. \quad (11)$$

Из соотношений $\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\varphi}^e + \varepsilon_{r\varphi}^\nu$, (6), (10) и (11), используя условия прилипания (7) на стенке $r = R$, получим зависимости для угловой скорости и угла поворота:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\dot{c}}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{(-1)^n 2^{n-1} B n c^{n-1}}{1-n} \left(\frac{1}{r^{2n-2}} - \frac{1}{R^{2n-2}} \right), \\ \theta &= \frac{c(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) + (-1)^n \frac{B n 2^{n-1}}{1-n} c_1(t) \left(\frac{1}{r^{2n-2}} - \frac{1}{R^{2n-2}} \right), \\ c_1(t) &= \int_0^t c^{n-1}(t) dt.\end{aligned}\quad (12)$$

С учетом граничных условий (7) на внутренней поверхности $r = r_0$, из (12) следует дифференциальное уравнение для неизвестной функции $c_1(t)$:

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\dot{c}_1^{\frac{1}{n-1}}(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + (-1)^n \frac{B n 2^{n-1}}{1-n} c_1(t) \left(\frac{1}{r_0^{2n-2}} - \frac{1}{R^{2n-2}} \right), \quad c_1(0) = 0. \quad (13)$$

Используя уравнения изменения компонент деформаций из (1), получим систему уравнений для нахождения компонент тензоров упругих деформаций $e_{rr}, e_{\varphi\varphi}$ и деформаций ползучести $p_{rr}, p_{\varphi\varphi}$ и $p_{r\varphi}$, которая в рассматриваемом приближении имеет вид:

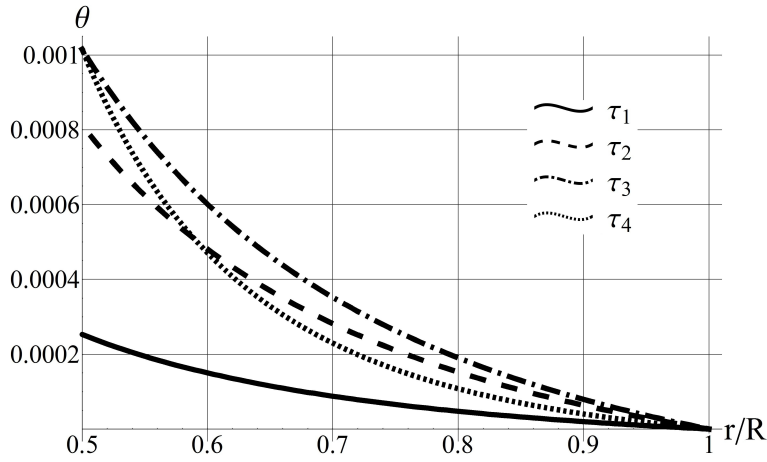
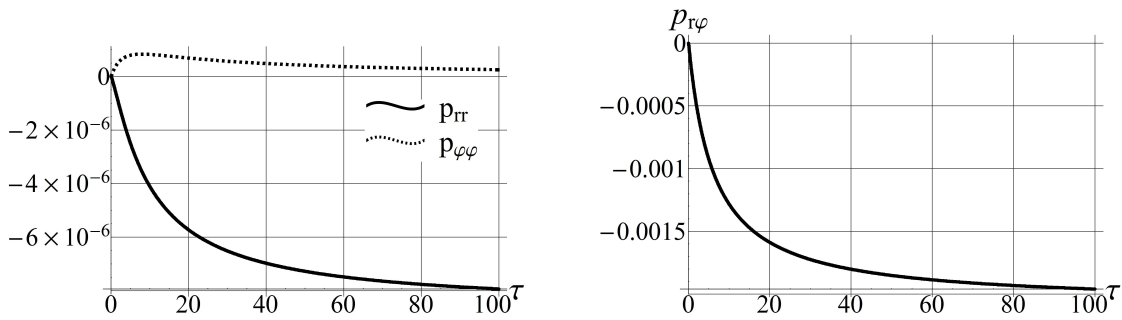
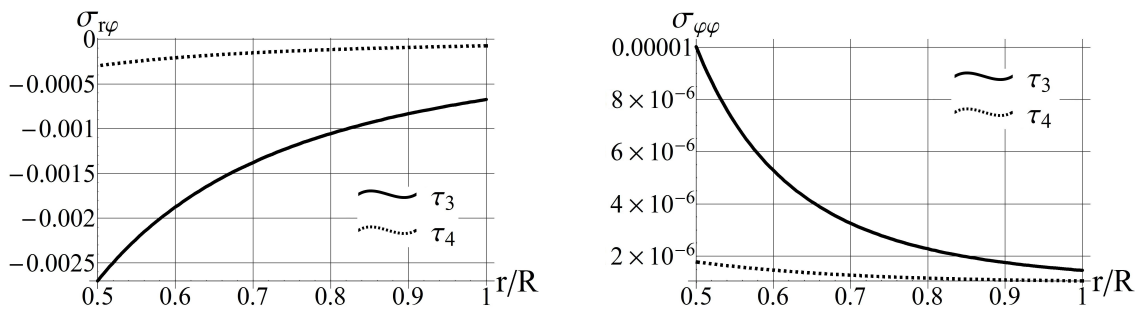
$$\begin{aligned}\frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t} &= \varepsilon_{r\varphi}^\nu, \quad \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} = -\varepsilon_{r\varphi}^\nu \frac{p_{\varphi\varphi} - e_{r\varphi}^2}{e_{r\varphi}} + \frac{4\varepsilon_{r\varphi} p_{r\varphi}}{2 + e_{r\varphi}^2} \left(1 + p_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2} e_{r\varphi}^2 - 2e_{r\varphi} p_{r\varphi} \right), \\ e_{rr} &= p_{\varphi\varphi} - \frac{3}{2} e_{r\varphi}^2 - 2e_{r\varphi} p_{r\varphi}, \quad p_{rr} + p_{\varphi\varphi} = -2p_{r\varphi}^2, \quad e_{rr} + e_{\varphi\varphi} = -e_{r\varphi}^2.\end{aligned}\quad (14)$$

Система (14) интегрируется численно. Компонента напряжений σ_{rr} находится из первого уравнения равновесия (9) с использованием краевого условия из (7). Затем из зависимостей (8) определяются гидростатическое давление p , компоненты напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ и σ_{zz} .

Полагаем, что скорость движения внутренней цилиндрической поверхности сначала увеличивается ($0 \leq t \leq t_1$), затем становится постоянной ($t_1 \leq t \leq t_2$), потом уменьшается до нуля ($t_2 \leq t \leq t_3$) и далее равна нулю ($t \geq t_3$). Тогда значение ω_0 выберем таким:

$$\omega_0 = \begin{cases} \alpha^2 t, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \alpha^2 t_1, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ \alpha^2 t_1 - \beta^2 (t - t_2), & t_2 \leq t \leq t_3, \\ 0, & t \geq t_3. \end{cases}$$

Расчеты проводились в безразмерных переменных $\tilde{r} = r/R, \tau = \alpha t$ при значениях постоянных $k/\mu = 0.003, r_0/R = 0.5, n = 3, B\mu^2/\alpha = 3.5$. На рис. 1 показан угол поворота θ в моменты времени τ_1, τ_2, τ_3 и $\tau_4 \gg \tau_3$. Изменение необратимых деформаций в точках внутренней поверхности $r = r_0$ показано на рис. 2. Релаксация компонент напряжений $\sigma_{r\varphi}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ (наибольшей из диагональных компонент) после остановки внутренней поверхности приведена на рис. 3.

Рис. 1. Угол поворота θ Рис. 2. Изменение необратимых деформаций при $r = r_0$ Рис. 3. Релаксация компонент напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$

Заключение. Таким образом, решена задача о деформировании материала с нелинейными упругими и вязкими свойствами, находящегося в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями, при повороте внутренней поверхности с задаваемой скоростью вращения. Произведен расчет напряжений и деформаций в среде, рассмотрена релаксация напряжений в теле после полной остановки цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Олейников А. И., Пекарш А. И. Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей. М. : Эком, 2009. 109 с.
- [2] Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., Лемза А. О. Необратимое деформирование материала между жесткими коаксиальными цилиндрами в условиях ползучести // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3 (21). С. 14–21.
- [3] Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // ДАН. 1996. Т. 347. № 2. С. 199–201.
- [4] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток : Дальнаука, 2013. 312 с.
- [5] Белых С. В., Бормотин К. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Прокудин А. Н. О больших изотермических деформациях материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 145–157.
- [6] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М. : Наука, 1980. 512 с.
- [7] Norton F. H. The Creep of Steel at High Temperatures. Y. : McGraw Hill Book Company, 1929. 110 p.
- [8] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Устинова А. С. Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 2. С. 143–151.
- [9] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Устинова А. С. Вискозиметрическое течение упруговязкопластической среды, ослабленной слоем более податливого материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 83–99.
- [10] Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Течение упруговязкопластического материала между вращающимися цилиндрическими поверхностями в условиях нежесткого сцепления // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56. № 2. С. 146–158.
- [11] Бегун А. С., Буренин А. А., Жилин С. Г., Ковтанюк Л. В. Об учете упругих свойств вязкопластической смазки между соосными вращающимися цилиндрами // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56. № 3. С. 213–223.

A. S. Begun¹, L. V. Kovtanyuk¹, A. O. Lemza²

CREEP AND STRESS RELAXATION IN THE CYLINDRICAL LAYER OF A MATERIAL AT ITS ROTATIONAL MOTION

¹*Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia*

²*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*

Abstract. This paper considers a deformation process of the material with nonlinear elastic and viscous properties. The material is placed between two rigid coaxial cylindrical surfaces and deformed at the rotation of the internal one. The rotation is considered to be uniformly accelerated, uniform and then uniformly retarded until rotation stopping. Stresses, reversible and irreversible strains, displacements were calculated. Stress relaxation after internal cylinder rotation stopping was investigated.

Keywords: large strains, elasticity, creep, residual stresses, irreversible deformations.

REFERENCES

- [1] Oleinikov A. I., Pekarsh A. I. Integrated design of the manufacturing processes of integral panels. M. : Ekom, 2009. 109 p. (in Russian).
- [2] Begun A. S., Kovtanyuk L. V., Lemza A. O. Irreversible deformations of the material between the rigid coaxial cylinders under creep // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2014. № 3 (21). P. 14–21. (in Russian).
- [3] Burenin A. A., Bykovtsev G. I., Kovtanyuk L. V. A simple model of finite strains in an elastoplastic medium // Doklady Akademii Nauk. 1996. Vol. 347. № 2. P. 199–201. (in Russian).
- [4] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Large irreversible strains and elastic aftereffect. Vladivostok : Dal'nauka, 2013. 312 p. (in Russian).
- [5] Belykh S. V., Bormotin K. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Prokudin A. N. On large isothermal deformation of materials with elastic, viscous and plastic properties // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2014. № 4 (22). P. 145–157. (in Russian).
- [6] Lur'e A. I. Nonlinear theory of elasticity. M. : Nauka, 1980. – 512 p. (in Russian).
- [7] Norton F. H. The Creep of Steel at High Temperatures. Y. : McGraw Hill Book Company, 1929. 110 p.

Begun Alexandra Sergeevna

e-mail: asustinova@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Junior Researcher of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Kovtanyuk Larisa Valentinovna

e-mail: lk@iacp.dvo.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Lemza Alexander Olegovich

e-mail: alsu-24@yandex.ru, Postgraduate Student, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

[8] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Ustinova A. S. Accounting the elastic properties of a non-Newtonian material under its viscosimetric flow // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2008. Vol. 49. № 2. P. 143–151. (in Russian).

[9] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Ustinova A. S. A viscosimetric current of the elastoviscoplastic environment weakened by a layer of more pliable material // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. № 2 (8). P. 83–99. (in Russian).

[10] Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Flow of an elastoviscoplastic material between rotating cylindrical surfaces with nonrigid cohesion // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. Vol. 56. № 2. P. 146–158. (in Russian).

[11] Begun A. S., Burenin A. A., Zhilin S. G., Kovtanyuk L. V. Accounting the elastic properties of viscoplastic lubricant between coaxial rotating cylinders // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. Vol. 56. № 3. P. 213–223. (in Russian).

Г. С. Тлюстангелов

РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В РАСТЕКАЮЩЕМСЯ ВЯЗКОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ С УЧЕТОМ ВРАЩЕНИЯ И ОСЕВОГО ДВИЖЕНИЯ

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Аннотация. Исследуется эволюция во времени трехмерной картины возмущений, наложенных на радиально-вращательное растекание либо сток подверженного осевому течению вязкого цилиндрического слоя, параметры которого зависят от времени и радиальной координаты. Движение границ цилиндрического слоя задано как в основном движении, так и в возмущенном. На основе метода интегральных соотношений [1], [2], примененного к линеаризованной задаче в возмущениях, выводятся достаточные оценки экспоненциальной устойчивости основного движения.

Ключевые слова: вязкая жидкость, растекание, сток, возмущение, осевое течение, метод интегральных соотношений, неравенства Фридрихса, оценки устойчивости.

УДК: 532.517

1. Невозмущенное течение и его параметры.

Рассмотрим течение ньютоновской вязкой жидкости с плотностью ρ и динамической вязкостью μ , реализуемое в цилиндрическом слое

$$\Omega_t = \{a(t) < r < b(t), 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\}, \quad (1)$$

где (r, θ, z) – цилиндрическая система координат. Функции $a(t)$ и $b(t)$ известны и в силу несжимаемости связаны условием $b^2 - a^2 = b_0^2 - a_0^2$; $a_0 = a(t_0)$, $b_0 = b(t_0)$. Движение представляет собой комбинацию радиально-вращательного растекания либо стока и осевого течения и характеризуется нестационарными полями скоростей, скоростей деформаций и девиатора тензора напряжений

$$v_r^\circ = \frac{C(t)}{r}, \quad v_\theta^\circ = v_\theta^\circ(r, t), \quad v_z^\circ = v_z^\circ(r, t) \quad (2)$$

$$v_{rr}^\circ = -v_{\theta\theta}^\circ = -\frac{C(t)}{r^2}, \quad v_{r\theta}^\circ = \frac{1}{2} \left(v_{\theta,r}^\circ - \frac{v_\theta^\circ}{r} \right), \quad v_{rz}^\circ = \frac{1}{2} v_{z,r}^\circ \quad (3)$$

© Тлюстангелов Г. С., 2016

Тлюстангелов Галим Султанович

e-mail: gs_angelov@mail.ru, аспирант механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00848).

Поступила 15.10.2016

$$s_{rr}^{\circ} = -s_{\theta\theta}^{\circ} = -\frac{2\mu C(t)}{r^2}, \quad s_{r\theta}^{\circ} = \mu \left(v_{\theta,r}^{\circ} - \frac{v_{\theta}^{\circ}}{r} \right), \quad s_{rz}^{\circ} = \mu v_{z,r}^{\circ} \quad (4)$$

где $2\pi C(t)$ – заданный расход через окружность любого радиуса от $a(t)$ до $b(t)$, связанный с этими функциями соотношениями

$$a\dot{a} = b\dot{b} = C; \quad a^2 = a_0^2 + 2 \int_{t_0}^t C(\tau) d\tau, \quad b^2 = b_0^2 + 2 \int_{t_0}^t C(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Из уравнения движения в проекции на угловое направление

$$\rho \left(v_{\theta,t}^{\circ} + \frac{C}{r} v_{\theta,r}^{\circ} + \frac{C}{r^2} v_{\theta}^{\circ} \right) = \frac{1}{r^2} (r^2 s_{r\theta}^{\circ})_{,r} \quad (6)$$

и определяющего соотношения вязкой жидкости (4) следует параболическое уравнение для компоненты v_{θ}° :

$$\nu v_{\theta,rr}^{\circ} + \frac{\nu - C}{r} v_{\theta,r}^{\circ} - \frac{\nu + C}{r^2} v_{\theta}^{\circ} = v_{\theta,t}^{\circ}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (7)$$

А из уравнения движения в проекции на осевое направление

$$\rho \left(v_{z,t}^{\circ} + \frac{C}{r} v_{z,r}^{\circ} \right) = -p_{,z}^{\circ} + \frac{1}{r} (r s_{rz}^{\circ})_{,r} \quad (8)$$

и определяющего соотношения вязкой жидкости (4) получаем параболическое уравнение для компоненты v_z° :

$$-\frac{1}{\rho} p_{,z}^{\circ} + \nu v_{z,rr}^{\circ} + \frac{\nu - C}{r} v_{z,r}^{\circ} = v_{z,t}^{\circ}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (9)$$

где $p_{,z}^{\circ} = -k(t)$ – заданная функция времени.

В качестве граничных условий выберем условия прилипания к расширяющимся и одновременно вращающимся стенкам слоя Ω_t :

$$v_{\theta}^{\circ}|_{r=a(t)} = v_{\theta a}^{\circ}(t), \quad v_{\theta}^{\circ}|_{r=b(t)} = v_{\theta b}^{\circ}(t), \quad (10)$$

и условия непротекания:

$$v_z^{\circ}|_{r=a(t)} = v_z^{\circ}|_{r=b(t)} = 0. \quad (11)$$

Требуется также начальное условие при $t = t_0$, согласованное с (10) и (11):

$$v_{\theta}^{\circ}|_{t=t_0} = U(r); \quad U(a_0) = v_{\theta a}^{\circ}(t_0), \quad U(b_0) = v_{\theta b}^{\circ}(t_0), \quad v_z^{\circ}|_{t=t_0} = F(r). \quad (12)$$

В результате интегрирования задачи (7), (10) и (12) и подстановки $v_{\theta}^{\circ}(r, t)$ в спроектированное на радиус уравнение движения

$$\frac{\rho}{r} \left(\dot{C} - v_{\theta}^{\circ 2} - \frac{C^2}{r^2} \right) = -p_{,r}^{\circ} \quad (13)$$

выводится уравнение для нахождения давления $p^{\circ}(r, t)$.

2. Трехмерная картина возмущений.

Помеченные выше верхним индексом \circ величины будем относить к невозмущенному плоскому радиально-вращательному растеканию-стоку цилиндрического слоя Ω_t . Наложим на это течение трехмерную картину возмущений δv_{α} , $\delta v_{\alpha\beta}$, $\delta s_{\alpha\beta}$, δp .

Так как выбранное основное движение не зависит от угловой и осевой координат θ и z , отделим множители с этими переменными

$$\begin{aligned}\delta v_\alpha(r, \theta, z, t) &= V_{\alpha(ns)}(r, t)e^{i(n\theta+sz)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad s > 0 \\ \delta s_{\alpha\beta}(r, \theta, z, t) &= S_{\alpha\beta(ns)}(r, t)e^{i(n\theta+sz)}, \quad (\alpha, \beta) = (r, \theta, z) \\ \delta p(r, \theta, z, t) &= P_{(ns)}(r, t)e^{i(n\theta+sz)},\end{aligned}\quad (14)$$

рассматривая отдельные гармоники неизвестных величин по θ и z . Для краткости будем опускать у комплекснозначных амплитуд $V_{\alpha(ns)}$, $S_{\alpha\beta(ns)}$, $P_{(ns)}$ нижние индексы n и s в скобках.

Подставляя (14) в линеаризованные уравнения движения, условие несжимаемости и определяющие соотношения вязкой жидкости, получим

$$\begin{aligned}\rho\left(V_{r,t} + \frac{C}{r}V_{r,r} - \frac{C}{r^2}V_r + \frac{in}{r}v_\theta^\circ V_r + isv_z^\circ V_r - \frac{2}{r}v_\theta^\circ V_\theta\right) = \\ = -P_{,r} + S_{rr,r} + \frac{in}{r}S_{r\theta} + isS_{rz} + \frac{1}{r}(S_{rr} - S_{\theta\theta})\end{aligned}\quad (15)$$

$$\begin{aligned}\rho\left(V_{\theta,t} + \frac{C}{r}V_{\theta,r} + \frac{C}{r^2}V_\theta + v_{\theta,r}^\circ V_r + \frac{in}{r}v_\theta^\circ V_\theta + \frac{1}{r}v_\theta^\circ V_r + isv_z^\circ V_\theta\right) = \\ = -\frac{in}{r}P + S_{r\theta,r} + \frac{in}{r}S_{\theta\theta} + isS_{\theta z} + \frac{2}{r}S_{r\theta}\end{aligned}\quad (16)$$

$$\rho\left(V_{z,t} + \frac{C}{r}V_{z,r} + v_{z,r}^\circ V_r + \frac{in}{r}v_\theta^\circ V_z + isv_z^\circ V_z\right) = -isP + S_{rz,r} + \frac{in}{r}S_{\theta z} + isS_{zz} + \frac{1}{r}S_{rz}\quad (17)$$

$$V_{r,r} + \frac{1}{r}V_r + \frac{in}{r}V_\theta + isV_z = 0\quad (18)$$

$$S_{rr} = 2\mu V_{r,r}, \quad S_{r\theta} = \mu\left(\frac{in}{r}V_r + V_{\theta,r} - \frac{1}{r}V_\theta\right), \quad S_{\theta\theta} = \frac{2\mu}{r}(V_r + inV_\theta),\quad (19)$$

$$S_{\theta z} = i\mu\left(sV_\theta + \frac{n}{r}V_z\right), \quad S_{zz} = 2i\mu sV_z, \quad S_{rz} = \mu(isV_r + V_{z,r}).$$

Подставим соотношения (19) в (15)–(18). Получим замкнутую систему четырех уравнений относительно четырех комплекснозначных функций V_r , V_θ , V_z и P :

$$\begin{aligned}\rho\left(V_{r,t} + \frac{C}{r}V_{r,r} - \frac{C}{r^2}V_r + \frac{in}{r}v_\theta^\circ V_r + isv_z^\circ V_r - \frac{2}{r}v_\theta^\circ V_\theta\right) = \\ = -P_{,r} + 2\mu V_{r,rr} + \mu\left(-\frac{n^2}{r^2}V_r + \frac{in}{r}V_{\theta,r} - \frac{in}{r^2}V_\theta\right) + \\ + is\mu\left(V_{z,r} + isV_r\right) + \frac{2\mu}{r}\left(V_{r,r} - \frac{in}{r}V_\theta - \frac{1}{r}V_r\right)\end{aligned}\quad (20)$$

$$\begin{aligned}\rho\left(V_{\theta,t} + \frac{C}{r}V_{\theta,r} + \frac{C}{r^2}V_\theta + v_{\theta,r}^\circ V_r + \frac{in}{r}v_\theta^\circ V_\theta + \frac{1}{r}v_\theta^\circ V_r + isv_z^\circ V_\theta\right) = \\ = -\frac{in}{r}P + \mu\left(-\frac{in}{r^2}V_r + \frac{in}{r}V_{r,r} + V_{\theta,rr} + \frac{1}{r^2}V_\theta - \frac{1}{r}V_{\theta,r}\right) + \\ + \frac{2\mu in}{r^2}(inV_\theta + V_r) - s\mu\left(sV_\theta + \frac{n}{r}V_z\right) + \frac{2\mu}{r}\left(\frac{in}{r}V_r + V_{\theta,r} - \frac{1}{r}V_\theta\right)\end{aligned}\quad (21)$$

$$\begin{aligned}\rho\left(V_{z,t} + \frac{C}{r}V_{z,r} + v_{z,r}^\circ V_r + \frac{in}{r}v_\theta^\circ V_z + isv_z^\circ V_z\right) = -isP + \mu\left(V_{z,rr} + isV_{r,r}\right) - \\ - \frac{n\mu}{r}\left(sV_\theta + \frac{n}{r}V_z\right) - 2\mu s^2 V_z + \frac{\mu}{r}\left(V_{z,r} + isV_r\right)\end{aligned}\quad (22)$$

$$V_{r,r} + \frac{1}{r} V_r + \frac{in}{r} V_\theta + isV_z = 0. \quad (23)$$

Положим, что в возмущенном течении границы слоя Ω_t движутся так же, как и в основном, и на них сохраняются условия прилипания

$$r = a(t) \text{ и } r = b(t) : \quad V_r = V_\theta = V_z = 0. \quad (24)$$

3. Применение метода интегральных соотношений.

Умножим обе части уравнений (20) – (22) соответственно на $r\bar{V}_r$, $r\bar{V}_\theta$ и $r\bar{V}_z$ (верхняя черта означает комплексное сопряжение). Сложим эти уравнения и проинтегрируем по r от $a(t)$ до $b(t)$. Рассмотрим действительные части, переходя к одному равенству для квадратичных функционалов, зависящих от t [3].

После умножения уравнений (20) – (22) соответственно на $r\bar{V}_r$, $r\bar{V}_\theta$ и $r\bar{V}_z$ и умножения уравнения (23) на r получим:

$$\begin{aligned} & rV_{r,t}\bar{V}_r + CV_{r,r}\bar{V}_r - \frac{C}{r}V_r\bar{V}_r + inv_\theta^\circ V_r\bar{V}_r - 2v_\theta^\circ V_\theta\bar{V}_r + isrv_z^\circ V_r\bar{V}_r = \\ & = -\frac{r}{\rho}P_{,r}\bar{V}_r + 2\nu rV_{r,rr}\bar{V}_r - \frac{\nu n^2}{r}V_r\bar{V}_r + \nu inV_{\theta,r}\bar{V}_r - \frac{\nu in}{r}V_\theta\bar{V}_r + \\ & + is\nu rV_{z,r}\bar{V}_r - \nu s^2 rV_r\bar{V}_r + 2\nu V_{r,r}\bar{V}_r - \frac{2in\nu}{r}V_\theta\bar{V}_r - \frac{2\nu}{r}V_r\bar{V}_r \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & rV_{\theta,t}\bar{V}_\theta + CV_{\theta,r}\bar{V}_\theta + \frac{C}{r}V_\theta\bar{V}_\theta + rv_{\theta,r}^\circ V_r\bar{V}_\theta + inv_\theta^\circ V_\theta\bar{V}_\theta + v_\theta^\circ V_r\bar{V}_\theta + \\ & + isrv_z^\circ V_\theta\bar{V}_\theta = -\frac{in}{\rho}P\bar{V}_\theta - \frac{\nu in}{r}V_r\bar{V}_\theta + \nu inV_{r,r}\bar{V}_\theta + \nu rV_{\theta,rr}\bar{V}_\theta + \\ & + \frac{\nu}{r}V_\theta\bar{V}_\theta - \nu V_{\theta,r}\bar{V}_\theta - \frac{2\nu n^2}{r}V_\theta\bar{V}_\theta + \frac{2\nu in}{r}V_r\bar{V}_\theta - \nu s^2 rV_\theta\bar{V}_\theta - \nu snV_z\bar{V}_\theta + \\ & + \frac{2\nu in}{r}V_r\bar{V}_\theta + 2\nu V_{\theta,r}\bar{V}_\theta - \frac{2\nu}{r}V_\theta\bar{V}_\theta \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & rV_{z,t}\bar{V}_z + CV_{z,r}\bar{V}_z + inv_\theta^\circ V_z\bar{V}_z + rv_{z,r}^\circ V_r\bar{V}_z + isrv_z^\circ V_z\bar{V}_z = \\ & = -\frac{1}{\rho}isrP\bar{V}_z + \nu rV_{z,rr}\bar{V}_z + \nu isrV_{r,r}\bar{V}_z - \nu nsV_\theta\bar{V}_z - \\ & - \frac{\nu n^2}{r}V_z\bar{V}_z - 2\nu s^2 rV_z\bar{V}_z + \nu V_{z,r}\bar{V}_z + \nu isV_r\bar{V}_z \end{aligned} \quad (27)$$

$$rV_{r,r} + V_r + inV_\theta + isrV_z = 0 \quad (28)$$

Сложим теперь уравнения (25) – (27), проинтегрируем по r от $a(t)$ до $b(t)$ и выделим действительные части.

Запишем сумму (25) – (27), перегруппировав слагаемые:

$$\begin{aligned}
& \left[rV_{r,t}\bar{V}_r + rV_{\theta,t}\bar{V}_\theta + rV_{z,t}\bar{V}_z \right] + \left[i \left(nv_\theta^\circ + sr v_z^\circ \right) \left(V_r\bar{V}_r + V_\theta\bar{V}_\theta + V_z\bar{V}_z \right) \right] + \\
& + \left[CV_{r,r}\bar{V}_r + CV_{\theta,r}\bar{V}_\theta + CV_{z,r}\bar{V}_z \right] = \left[-\frac{1}{\rho} \left(rP_{,r}\bar{V}_r + inP\bar{V}_\theta + isrP\bar{V}_z \right) \right] + \\
& + \left[\left(\frac{C}{r} - \frac{\nu n^2}{r} - \nu s^2 r - \frac{2\nu}{r} \right) V_r\bar{V}_r - \left(\frac{C}{r} + \frac{\nu}{r} + \frac{2\nu n^2}{r} + \nu s^2 r \right) V_\theta\bar{V}_\theta - \right. \\
& - \left. \left(\frac{\nu n^2}{r} + 2\nu s^2 r \right) V_z\bar{V}_z \right] + \left[2\nu r V_{r,rr}\bar{V}_r + 2\nu V_{r,r}\bar{V}_r + \nu r V_{\theta,rr}\bar{V}_\theta + \nu V_{\theta,r}\bar{V}_\theta + \right. \\
& + \left. \nu r V_{z,rr}\bar{V}_z + \nu V_{z,r}\bar{V}_z \right] + \left[2v_\theta^\circ V_\theta\bar{V}_r - rv_{\theta,r}^\circ V_r\bar{V}_\theta - v_\theta^\circ V_r\bar{V}_\theta - rv_{z,r}^\circ V_r\bar{V}_z \right] + \\
& + \left[\nu in V_{\theta,r}\bar{V}_r + \nu in V_{r,r}\bar{V}_\theta \right] + \left[-\frac{3\nu in}{r} V_\theta\bar{V}_r + \frac{3\nu in}{r} V_r\bar{V}_\theta \right] + \\
& + \left[-\nu sn V_z\bar{V}_\theta - \nu sn V_\theta\bar{V}_z \right] + \left[\nu isr V_{z,r}\bar{V}_r + \nu isr V_{r,r}\bar{V}_z + \nu is V_r\bar{V}_z \right].
\end{aligned} \tag{29}$$

Преобразуем теперь каждое слагаемое, заключенное в квадратные скобки, проинтегрировав его по r от $a(t)$ до $b(t)$ и выделив действительную часть [4]. Нижние индексы * и ** обозначают действительную и мнимую части.

$$\begin{aligned}
1^\circ. \left[rV_{r,t}\bar{V}_r + rV_{\theta,t}\bar{V}_\theta + rV_{z,t}\bar{V}_z \right] \\
\left(\int_a^b rV_{r,t}\bar{V}_r dr \right)_* = \frac{1}{2} \int_a^b r(|V_r|^2)_{,t} dr = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a^b r(|V_r|^2) dr - \frac{b\dot{b}}{2} V_r(b(t), t) + \\
+ \frac{a\dot{a}}{2} V_r(a(t), t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a^b r(|V_r|^2) dr.
\end{aligned}$$

Здесь использованы граничные условия (24) и правило дифференцирования по времени интеграла с переменными пределами:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + \dot{b}f(b(t), t) - \dot{a}f(a(t), t). \tag{30}$$

Действуя аналогичным образом получаем, что

$$\left(\int_a^b rV_{\theta,t}\bar{V}_\theta dr \right)_* = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a^b r(|V_\theta|^2) dr, \quad \left(\int_a^b rV_{z,t}\bar{V}_z dr \right)_* = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a^b r(|V_z|^2) dr.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& \left(\int_a^b \left[rV_{r,t}\bar{V}_r + rV_{\theta,t}\bar{V}_\theta + rV_{z,t}\bar{V}_z \right] dr \right)_* = \\
& = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a^b r \left(|V_r|^2 + |V_\theta|^2 + |V_z|^2 \right) dr = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a^b r|V|^2 dr,
\end{aligned} \tag{31}$$

где обозначено $|V|^2 = |V_r|^2 + |V_\theta|^2 + |V_z|^2$.

$$\begin{aligned}
2^\circ. & \left[i \left(n v_\theta^\circ + s r v_z^\circ \right) \left(V_r \bar{V}_r + V_\theta \bar{V}_\theta + V_z \bar{V}_z \right) \right] \\
& \left(\int_a^b \left[i \left(n v_\theta^\circ + s r v_z^\circ \right) \left(V_r \bar{V}_r + V_\theta \bar{V}_\theta + V_z \bar{V}_z \right) \right] dr \right)_* = \\
& = \left(\int_a^b \left[i \left(n v_\theta^\circ + s r v_z^\circ \right) \left(|V_r|^2 + |V_\theta|^2 + |V_z|^2 \right) \right] dr \right)_* = 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
3^\circ. & \left[C V_{r,r} \bar{V}_r + C V_{\theta,r} \bar{V}_\theta + C V_{z,r} \bar{V}_z \right] \\
& \left(C \int_a^b V_{r,r} \bar{V}_r dr \right)_* = \frac{C}{2} \int_a^b (|V_r|^2)_{,r} dr = 0 \text{ в силу граничных условий (24).} \\
& \text{Аналогично } \left(C \int_a^b V_{\theta,r} \bar{V}_\theta dr \right)_* = 0, \left(C \int_a^b V_{z,r} \bar{V}_z dr \right)_* = 0.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\left(\int_a^b \left[C V_{r,r} \bar{V}_r + C V_{\theta,r} \bar{V}_\theta + C V_{z,r} \bar{V}_z \right] dr \right)_* = 0. \tag{33}$$

$$4^\circ. \left[-\frac{1}{\rho} \left(r P_{,r} \bar{V}_r + i n P \bar{V}_\theta + i s r P \bar{V}_z \right) \right]$$

Сумма трех слагаемых, содержащих давление P , в силу сопряжения к условию (28), обнулится:

$$-\int_a^b \left(r P_{,r} \bar{V}_r + i n P \bar{V}_\theta + i s r P \bar{V}_z \right) dr = \int_a^b \left(\bar{V}_r + r \bar{V}_{r,r} - i n \bar{V}_\theta - i s r \bar{V}_z \right) P dr = 0.$$

Тем самым

$$\int_a^b \left[-\frac{1}{\rho} \left(r P_{,r} \bar{V}_r + i n P \bar{V}_\theta + i s r P \bar{V}_z \right) \right] dr = 0. \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
5^\circ. & \left[\left(\frac{C}{r} - \frac{\nu n^2}{r} - \nu s^2 r - \frac{2\nu}{r} \right) V_r \bar{V}_r - \left(\frac{C}{r} + \frac{\nu}{r} + \frac{2\nu n^2}{r} + \nu s^2 r \right) V_\theta \bar{V}_\theta - \left(\frac{\nu n^2}{r} + 2\nu s^2 r \right) V_z \bar{V}_z \right] \\
& \left(\int_a^b \left[\left(\frac{C}{r} - \frac{\nu n^2}{r} - \nu s^2 r - \frac{2\nu}{r} \right) V_r \bar{V}_r - \left(\frac{C}{r} + \frac{\nu}{r} + \frac{2\nu n^2}{r} + \nu s^2 r \right) V_\theta \bar{V}_\theta - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{\nu n^2}{r} + 2\nu s^2 r \right) V_z \bar{V}_z \right] dr \right)_* = \int_a^b \left(\frac{C}{r} - \frac{\nu n^2 + 2}{r} + s^2 r \right) |V_r|^2 dr - \\
& - \int_a^b \left(\frac{C}{r} + \nu \left(\frac{1}{r} + s^2 r + \frac{2n^2}{r} \right) \right) |V_\theta|^2 dr - \int_a^b \nu \left(\frac{n^2}{r} + 2s^2 r \right) |V_z|^2 dr.
\end{aligned} \tag{35}$$

$$6^\circ. \left[2\nu r V_{r,rr} \bar{V}_r + 2\nu V_{r,r} \bar{V}_r + \nu r V_{\theta,rr} \bar{V}_\theta + \nu V_{\theta,r} \bar{V}_\theta + \nu r V_{z,rr} \bar{V}_z + \nu V_{z,r} \bar{V}_z \right]$$

$$\begin{aligned}
2\nu \int_a^b r V_{r,rr} \bar{V}_r dr + 2\nu \int_a^b V_{r,r} \bar{V}_r dr &= 2\nu \int_a^b \left(r V_{r,r} \bar{V}_r \right)_{,r} dr - 2\nu \int_a^b V_{r,r} \bar{V}_r dr - \\
- 2\nu \int_a^b r V_{r,r} \bar{V}_{r,r} dr + 2\nu \int_a^b V_{r,r} \bar{V}_r dr &= -2\nu \int_a^b r |V_{r,r}|^2 dr,
\end{aligned}$$

в силу граничных условий (24). С помощью аналогичных преобразований получаем, что

$$\begin{aligned}
\nu \int_a^b r V_{\theta,rr} \bar{V}_\theta dr + \nu \int_a^b V_{\theta,r} \bar{V}_\theta dr &= -\nu \int_a^b r |V_{\theta,r}|^2 dr, \\
\nu \int_a^b r V_{z,rr} \bar{V}_z dr + \nu \int_a^b V_{z,r} \bar{V}_z dr &= -\nu \int_a^b r |V_{z,r}|^2 dr.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b \left[2\nu r V_{r,rr} \bar{V}_r + 2\nu V_{r,r} \bar{V}_r + \nu r V_{\theta,rr} \bar{V}_\theta + \nu V_{\theta,r} \bar{V}_\theta + \nu r V_{z,rr} \bar{V}_z + \nu V_{z,r} \bar{V}_z \right] dr \right)_* &= \\
= -\nu \int_a^b r \left(2|V_{r,r}|^2 + |V_{\theta,r}|^2 + |V_{z,r}|^2 \right) dr. &
\end{aligned} \tag{36}$$

$$7^\circ. \left[2v_\theta^\circ V_\theta \bar{V}_r - r v_{\theta,r}^\circ V_r \bar{V}_\theta - v_\theta^\circ V_r \bar{V}_\theta - r v_{z,r}^\circ V_r \bar{V}_z \right]$$

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b \left[2v_\theta^\circ V_\theta \bar{V}_r - r v_{\theta,r}^\circ V_r \bar{V}_\theta - v_\theta^\circ V_r \bar{V}_\theta - r v_{z,r}^\circ V_r \bar{V}_z \right] dr \right)_* &= \\
= - \int_a^b \left(r v_{\theta,r}^\circ - v_\theta^\circ \right) \left(V_r \bar{V}_\theta \right)_* dr - \int_a^b r v_{z,r}^\circ \left(V_r \bar{V}_z \right)_* dr. &
\end{aligned} \tag{37}$$

$$8^\circ. \left[\nu in V_{\theta,r} \bar{V}_r + \nu in V_{r,r} \bar{V}_\theta \right]$$

$\int_a^b \nu in V_{\theta,r} \bar{V}_r dr = \int_a^b \nu in \left(V_\theta \bar{V}_r \right)_{,r} dr - \int_a^b \nu in V_\theta \bar{V}_{r,r} dr = -\nu n \int_a^b i V_\theta \bar{V}_{r,r} dr$, в силу граничных условий (24).

Тогда

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b \left[\nu in V_{\theta,r} \bar{V}_r + \nu in V_{r,r} \bar{V}_\theta \right] dr \right)_* &= \int_a^b \nu n \left[i \left(V_{r,r} \bar{V}_\theta - \bar{V}_{r,r} V_\theta \right) \right]_* dr = \\
= - \int_a^b 2\nu n \left(V_{r,r} \bar{V}_\theta \right)_{**} dr. &
\end{aligned} \tag{38}$$

Преобразуем далее интеграл, стоящий в правой части формулы (38).

В силу уравнения несжимаемости (28):

$$-\int_a^b 2\nu n V_{r,r} \bar{V}_\theta dr = \int_a^b 2\nu n \left[\frac{in}{r} V_\theta + \frac{1}{r} V_r + isV_z \right] \bar{V}_\theta dr.$$

Тогда

$$\begin{aligned} -\int_a^b 2\nu n (V_{r,r} \bar{V}_\theta)_{**} dr &= \int_a^b \left[\frac{2\nu n^2}{r} |V_\theta|^2 + \frac{2\nu n}{r} (V_r \bar{V}_\theta)_{**} + 2\nu n s (iV_z \bar{V}_\theta)_{**} \right] dr = \\ &= \int_a^b \frac{2\nu n^2}{r} |V_\theta|^2 dr + \int_a^b \frac{2\nu n}{r} (V_r \bar{V}_\theta)_{**} dr + \int_a^b 2\nu n s (V_\theta \bar{V}_z)_* dr. \end{aligned} \quad (39)$$

$$9^\circ. \left[-\frac{3\nu in}{r} V_\theta \bar{V}_r + \frac{3\nu in}{r} V_r \bar{V}_\theta \right]$$

$$3\nu n \int_a^b \frac{1}{r} (iV_r \bar{V}_\theta - i\bar{V}_r V_\theta)_* dr = -6\nu n \int_a^b \frac{1}{r} (V_r \bar{V}_\theta)_{**} dr. \quad (40)$$

$$10^\circ. \left[-\nu sn V_z \bar{V}_\theta - \nu sn V_\theta \bar{V}_z \right]$$

$$-\int_a^b \nu sn (V_\theta \bar{V}_z + \bar{V}_\theta V_z)_* dr = -\int_a^b 2\nu sn (V_\theta \bar{V}_z)_* dr. \quad (41)$$

$$11^\circ. \left[\nu isr V_{z,r} \bar{V}_r + \nu isr V_{r,r} \bar{V}_z + \nu is V_r \bar{V}_z \right].$$

Воспользуемся граничными условиями (24). Тогда

$$\begin{aligned} \nu is \int_a^b r V_{r,r} \bar{V}_z dr + \nu is \int_a^b V_r \bar{V}_z dr &= \nu is \int_a^b (r V_r \bar{V}_z)_{,r} dr - \nu is \int_a^b r V_r \bar{V}_{z,r} dr - \\ -\nu is \int_a^b V_r \bar{V}_z dr + \nu is \int_a^b V_r \bar{V}_z dr &= -\nu is \int_a^b r V_r \bar{V}_{z,r} dr. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\nu s \int_a^b r i V_{z,r} \bar{V}_r dr - \nu s \int_a^b r i \bar{V}_{z,r} V_r dr \right)_* &= \nu s \int_a^b r \left[i (V_{z,r} \bar{V}_r - \bar{V}_{z,r} V_r) \right]_* dr = \\ &= -2\nu s \int_a^b r (V_{z,r} \bar{V}_r)_{**} dr. \end{aligned} \quad (42)$$

Далее преобразуем интеграл, стоящий в правой части формулы (42), используя условие несжимаемости (28) и граничные условия (24).

$$\begin{aligned}
-\int_a^b 2\nu sr V_{z,r} \bar{V}_r dr &= \int_a^b 2\nu s V_z \bar{V}_r dr + \int_a^b 2\nu sr V_z \bar{V}_{r,r} dr = \int_a^b 2\nu s V_z \bar{V}_r dr + \\
&+ \int_a^b 2\nu sn i V_z \bar{V}_\theta dr - \int_a^b 2\nu s V_z \bar{V}_r dr + \int_a^b 2\nu s^2 r i |V_z|^2 dr = \\
&= \int_a^b 2\nu sn i V_z \bar{V}_\theta dr + \int_a^b 2\nu s^2 r i |V_z|^2 dr.
\end{aligned} \tag{43}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
-\int_a^b 2\nu sr (V_{z,r} \bar{V}_r)_{**} dr &= \int_a^b 2\nu s^2 r |V_z|^2 dr + \int_a^b 2\nu sn (i V_z \bar{V}_\theta)_{**} dr = \\
&= \int_a^b 2\nu s^2 r |V_z|^2 dr + \int_a^b 2\nu sn (V_\theta \bar{V}_z)_* dr.
\end{aligned} \tag{44}$$

С учетом пунктов 1° – 11° получим окончательный вид равенства для действительных частей квадратичных функционалов:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a^b r |V|^2 dr &= -\nu \int_a^b r (2|V_{r,r}|^2 + |V_{\theta,r}|^2 + |V_{z,r}|^2) dr + \\
&+ \int_a^b \left[\frac{C}{r} - \nu \left(\frac{n^2 + 2}{r} + s^2 r \right) \right] |V_r|^2 dr - \int_a^b \left[\frac{C}{r} + \nu \left(\frac{1}{r} + s^2 r \right) \right] |V_\theta|^2 dr - \\
&- \nu n^2 \int_a^b \frac{1}{r} |V_z|^2 dr + \int_a^b \left[2\nu ns (V_\theta \bar{V}_z)_* + \frac{4\nu n}{r} (V_\theta \bar{V}_r)_{**} - \right. \\
&\left. - (rv_{\theta,r}^\circ - v_\theta^\circ) (V_r \bar{V}_\theta)_* - rv_{z,r}^\circ (V_r \bar{V}_z)_* \right] dr,
\end{aligned} \tag{45}$$

где обозначено $|V|^2 = |V_r|^2 + |V_\theta|^2 + |V_z|^2$; нижние индексы * и ** означают действительную и мнимую части.

Для верхней оценки правой части (45) воспользуемся неравенствами Фридрихса [5], [6] для функций с однородными граничными условиями (24)

$$\int_a^b r |V_{\alpha,r}|^2 dr \geq a \int_a^b |V_{\alpha,r}|^2 dr \geq \frac{\pi^2 a}{(b-a)^2} \int_a^b |V_\alpha|^2 dr, \quad \alpha = r, \theta, z, \tag{46}$$

и неравенствами Коши–Буняковского в пространстве $H_2[a; b]$

$$\begin{aligned} \int_a^b (V_\theta \bar{V}_z)_* dr &\leq \int_a^b |V_\theta| |V_z| dr \leq \left(\int_a^b |V_\theta|^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_a^b |V_z|^2 dr \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_a^b |V_\theta|^2 dr + \frac{1}{2} \int_a^b |V_z|^2 dr \end{aligned} \quad (47)$$

$$\int_a^b \frac{1}{r} (V_\theta \bar{V}_r)_{**} dr \leq \frac{1}{2a} \int_a^b |V_\theta|^2 dr + \frac{1}{2a} \int_a^b |V_r|^2 dr \quad (48)$$

$$- \int_a^b (rv_{\theta,r}^\circ - v_\theta^\circ) (V_r \bar{V}_\theta)_* dr \leq \frac{q(t)}{2} \int_a^b |V_r|^2 dr + \frac{q(t)}{2} \int_a^b |V_\theta|^2 dr \quad (49)$$

$$q(t) = \sup_{a < r < b} |rv_{\theta,r}^\circ - v_\theta^\circ|$$

$$- \int_a^b rv_{z,r}^\circ (V_r \bar{V}_z)_* dr \leq \frac{m(t)}{2} \int_a^b |V_r|^2 dr + \frac{m(t)}{2} \int_a^b |V_z|^2 dr \quad (50)$$

$$m(t) = \sup_{a < r < b} |rv_{z,r}^\circ|.$$

С учетом неравенств (46)–(50) из (45) будем иметь

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a^b r |V|^2 dr \leq \int_a^b r (\Phi_r |V_r|^2 + \Phi_\theta |V_\theta|^2 + \Phi_z |V_z|^2) dr \quad (51)$$

$$\Phi_r(r, t) = \frac{1}{r^2} \left(C + \frac{qr}{2} + \frac{mr}{2} - \frac{2\pi^2 avr}{(b-a)^2} - \nu(n^2 + 2) - \nu s^2 r^2 + \frac{2\nu nr}{a} \right) \quad (52)$$

$$\Phi_\theta(r, t) = \frac{1}{r^2} \left(-C + \frac{qr}{2} - \frac{\pi^2 avr}{(b-a)^2} - \nu - \nu s^2 r^2 + \nu snr + \frac{2\nu nr}{a} \right) \quad (53)$$

$$\Phi_z(r, t) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{mr}{2} - \frac{\pi^2 avr}{(b-a)^2} - \nu n^2 + \nu nsr \right). \quad (54)$$

4. Оценки затухания возмущений.

Пусть на интервале времени $t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$ для всех $r \in [a(t); b(t)]$ верны три неравенства

$$\Phi_r(r, t) < 0, \quad \Phi_\theta(r, t) < 0, \quad \Phi_z(r, t) < 0. \quad (55)$$

Продолжим тогда оценку (51):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a^b r |V|^2 dr &\leq \Phi_r^0(t) \int_a^b r |V_r|^2 dr + \Phi_\theta^0(t) \int_a^b r |V_\theta|^2 dr + \\ &+ \Phi_z^0(t) \int_a^b r |V_z|^2 dr \leq Q(t) \int_a^b r |V|^2 dr \end{aligned} \quad (56)$$

$$\Phi_{\alpha}^0(t) = \sup_{a < r < b} \Phi_{\alpha}(r, t) < 0, \quad Q(t) = \max_{\alpha=r, \theta, z} \Phi_{\alpha}^0(t) < 0. \quad (57)$$

На основании (56) несложно получить окончательную верхнюю интегральную оценку экспоненциального затухания функционала $\int_a^b r|V|^2 dr$ на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$:

$$\int_a^b r|V|^2 dr \leq \int_{a_0}^{b_0} r|V|_{t=t_0}^2 dr \cdot \exp\left(2 \int_{t_0}^t Q(\tau) d\tau\right), \quad (58)$$

что говорит об экспоненциальной устойчивости (в интегральном смысле) развития возмущений, накопленных к моменту t_0 .

Подставив условия (52) – (54) в систему неравенств (55) получим достаточные условия ее удовлетворения:

$$\begin{aligned} & \sup_{a < r < b} \left[\frac{qr}{2} - \nu \left(1 + \frac{\pi^2 a}{(b-a)^2} r - nsr - \frac{2n}{a} r + s^2 r^2 \right) \right] < C(t) < \\ & < \inf_{a < r < b} \left[-\frac{r(q+m)}{2} + \nu \left(n^2 + 2 + \frac{2\pi^2 a}{(b-a)^2} r - \frac{2n}{a} r + s^2 r^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (58)$$

$$s < \frac{1}{n} \left(-\frac{m}{2\nu} + \frac{\pi^2 a}{(b-a)^2} + \frac{n^2}{b} \right), \quad (59)$$

предъявляемых к расходу $2\pi C(t)$ и волновым числам n и s возмущений вдоль угловой координаты и оси цилиндрического слоя Ω_t .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Козырев О. Р., Степанянц Ю. А. Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. Серия: Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 25. С. 3-89.
- [2] Георгиевский Д. В. Вариационные оценки и метод интегральных соотношений в задачах устойчивости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 23. С. 96–146.
- [3] Климов Д. М., Петров А. Г., Георгиевский Д. В. Вязкопластические течения: динамический хаос, устойчивость, перемешивание. М.: Наука, 2005. 394 с.
- [4] Георгиевский Д. В. Эволюция трехмерной картины возмущений, наложенных на вращательно-осевое течение в цилиндрическом зазоре // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 3. С. 345–354.
- [5] Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М.: Наука, 1968. 504 с.
- [6] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с.

G. S. Tlyustangelov

EVOLUTION OF PERTURBATIONS IN SPREADING VISCOUS CYLINDRIC LAYER, SUBJECT TO ROTATION AND AXIAL MOTION

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract. An evolution in time of 3D picture of perturbations imposed on a radial-rotational spreading of a viscous cylindrical layer moving axially is investigated. The parameters of the main deformation depend on both time and radial coordinate. A motion of the boundaries of the cylindrical layer is given in the main process as well as in perturbed one. On the basis of the integral relations method [1], [2] applied to the linearized problem in terms of perturbations some sufficient estimates of exponential stability of the main process are derived.

Keywords: spreading, viscous fluid, flow, perturbation, axial motion, integral relations method, Friedrichs inequalities, stability bounds.

REFERENCES

- [1] Kozyrev O. R., Stepanyants Yu. A. Integral relations method in the linear theory of hydrodynamic stability // Itogi Nauki Tekhniki. Ser. Mekh. Zhidkosti Gaza. M.,: VINITI, 1991. Vol. 25. P. 3–89. (in Russian).
- [2] Georgievskii D. V. Variational bounds and integral relations method in problems of stability // Journal of Mathematical Science. 2008. Vol. 154. № 4. P. 549-603.
- [3] Klimov D. M., Petrov A. G., Georgievskii D. V. Viscoelastic flows: dynamic chaos, stability, mixing. M.: Nauka, 2005. 394 p. (in Russian).
- [4] Georgievskii D. V. Evolution of three-dimensional picture of disturbances imposed on a rotational-axial flow in a cylindrical clearance // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2014. Vol. 10. № 3. P. 345–354. (in Russian).
- [5] Collatz L. Eigenvalue problems with engineering applications. M.: Nauka, 1968. 504 p. (in Russian).
- [6] Rectoris K. Variational Methods in Mathematical Physics and Engineering. M.: Mir, 1985. 590 p. (in Russian).

Tlyustangelov Galim Sultanovich

e-mail: gs_angelov@mail.ru, Postgraduate Student, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

Е. Е. Абашкин¹, М. Каинг², А. В. Ткачева¹

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПЛАСТИНЫ

¹Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

²Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,
г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Приводится решение одномерной задачи теории температурных напряжений о локальном прямолинейном нагреве пластины со свободными краями, изготовленной из упругопластического материала. Полагается, что поперечный размер пластины конечен, а продольный размер бесконечен. Зависимость предела текучести материала от температуры предполагается квадратичной, упругих модулей – линейной. Изучается эволюция температурных напряжений при быстром возрастании температуры на продольной прямой и последующем остывании материала вплоть до комнатной температуры. Оценивается уровень распределения по пластине остаточных напряжений.

Ключевые слова: упругость, пластичность, температурные напряжения, плосконапряженное состояние, упругопластическая граница.

УДК: 539.374+ 539.224

Введение. Задача теории температурных напряжений о локальном линейном нагреве пластины является модельной задачей для процесса сварки и поэтому рассматривалась неоднократно [1]–[5] в самых различных постановках. Но уже в одной из первых постановок академика Н. Н. Рыкалина [1] материал свариваемых пластин полагался упругопластическим, то есть отказаться в вычислениях от необратимого деформирования в окрестности сварного шва оказалось принципиально невозможно. Расчеты, учитывающие влияние пластических свойств металлов при сварке, получаются наиболее приближенными к натурным испытаниям процесса сварки. Хотя специалистами по материаловедению скрупулезно были изучены процессы структурных и твердотельных фазовых превращений в зоне термического влияния, но по-прежнему

© Абашкин Е. Е., Каинг М., Ткачева А. В., 2016

Абашкин Евгений Евгеньевич

e-mail: abashike@mail.ru, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Каинг Мюат

e-mail: myatkhaing.51@gmail.com, аспирант, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Ткачева Анастасия Валерьевна

e-mail: 4nansi4@mail.ru, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Поступила 12.10.2016

рассчитать уровень распределения напряжений в зоне термического воздействия является актуальной задачей.

Постановка задачи. Основные уравнения. Пусть пластина шириной $2s$ неограничена по длине. Свяжем ее геометрией систему прямоугольных декартовых координат x_i ($i = 1, 2, 3$) так, чтобы оси абсцисс и ординат располагались в плоскости пластины, а ось опликата x_3 была бы ей ортогональна. Полагаем при этом, что ось ординат совпадает с краем пластины. До момента времени $t = 0$ пластины находятся при комнатной температуре T_0 . Принимаем такое положение в качестве начального условия для температуры T

$$T|_{t=0} = T_0. \quad (1)$$

Считаем, что с момента времени $t = 0$ по центральной линии пластины $x = s$ действует поток тепла

$$\psi T_{,1}|_{x_1=s} = q, \quad (2)$$

где ψ - коэффициент теплопроводности, $q - const$, индексом после запятой обозначена производная по этой пространственной координате. Принимаем, что условие (2) справедливо до некоторого последующего момента времени t_* , после которого источник тепла отводится от пластины и при этом $T(s, t_*) = \tau T_p$, где $\tau - const$ и $0 < \tau \leq 1$, T_p - температура плавления материала пластины. Далее при $t > t_*$ за счет теплоотвода от поверхности пластины

$$\psi T_{,3} = \chi (T_0 - T), \quad (3)$$

где χ - коэффициент теплоотдачи от пластины в окружающую среду, происходит ее остывание. Как при нагреве, так и при остывании распределение температуры по пластине в каждый момент времени удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$T_{,t} = a T_{,11}, \quad (4)$$

где a - коэффициент температуры проводности, теплотворное влияние деформирования не учитывается, то есть механическую задачу далее считаем несвязной. Теорию, построенную на таком допущении, называют теорией температурных напряжений [10], [11]. Теперь следует по рассчитанному согласно (1)–(4) полю температур в каждый момент времени вычислить механические параметры деформирования: деформации и напряжения.

Считаем, что деформации d_{ij} в пластине возможно полагать малыми и состоящими из обратимой (упругой) e_{ij}^e и необратимой (пластической) e_{ij}^p составляющих

$$d_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (5)$$

Здесь u_i - компонент вектора перемещений в используемой прямоугольной декартовой системе координат. Обратимые деформации e_{ij}^e , напряжения σ_{ij} и текущую температуру T связывают зависимости закона Дюамеля - Неймана

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - K\theta) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \quad (6)$$

$$\theta = 3\alpha (T - T_0),$$

где α - коэффициент линейного расширения, модуль всестороннего сжатия K и параметры Ламе λ и μ представляются следующими зависимостями через модуль Юнга

E и коэффициент Пуассона ν :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (7)$$

В условиях значительного изменения температуры упругие модули E и ν нельзя полагать постоянными. Такая зависимость до настоящего времени изучена недостаточно [6]–[9], поэтому не существует общепризнанного закона. Примем ее в простейшей линейной форме.

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \tau(t), \\ \nu(t) &= 0.5 - (0.5 - \nu_0) \tau(t), \\ \tau(T) &= \tau(t) = (T_p - T(t))(T_p - T_0)^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь постоянные E_0 и ν_0 – модуль Юнга и коэффициент Пуассона при комнатной температуре, T_p – температура плавления металла. Необратимые деформации накапливаются в пластине в условиях соответствия напряжений поверхности нагружения $f(\sigma_{ij}) = 0$ в пространстве напряжений. Принимаем таким способом независимость поверхности нагружения от кинематики и истории деформирования. В качестве условия пластичности принимаем условие максимального приведенного касательного напряжения (критерий Ишлинского – Ивлева), тогда поверхность нагружения принимает форму призмы Ивлева в пространстве главных напряжений σ_i [11]

$$\max |\sigma_i - \sigma| = \frac{4}{3}k, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk}. \quad (9)$$

Для предела текучести $k(T)$ полагаем следующую зависимость:

$$k(T) = k_0 \tau^2(T). \quad (10)$$

Принимая условия принципа максимума Мизеса, имеем соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$de_{ij}^p = d\psi \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad d\psi > 0. \quad (11)$$

Теперь для замыкания системы уравнений достаточно записать уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (12)$$

В нашем простейшем случае температурная задача (1)–(4) имеет аналитическое решение [10]. В дальнейшем будем считать распределение температуры известным и укажем зависимости, по которым можно будет рассчитать в каждый момент времени по вычисленной таким способом температуре деформации и напряжения.

Обратимое деформирование и термоупругие напряжения. Первоначально с ростом температуры на линии $x = s$ и ее распространения по пластине за счет процесса теплопроводности материал пластины деформируется упруго. Соотношения (6) в рассматриваемом случае сведутся к зависимостям ($x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu)e_x^e + \lambda e_z^e - 3K\theta, \\ \sigma_y &= \lambda(e_z^e + e_x^e) - 3K\theta, \\ \sigma_z &= (\lambda + 2\mu)e_z^e + \lambda e_x^e - 3K\theta = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Исключая в (13), компоненту e_z^e деформаций будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu)^{-1}(4\mu(\lambda + \mu)e_x^e - 6K\mu\theta), \\ \sigma_y &= (\lambda + 2\mu)^{-1}(2\mu\lambda e_x^e - 6K\mu\theta). \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение равновесия (12) в данном случае имеет вид: $\sigma_{x,x} = 0$, что заставляет σ_x считать не зависящим от x и меняющимся только со временем. Но если учесть, что при $x = 0$ данная компонента напряжений равна нулю, то получаем, что всегда $\sigma_x = 0$ во всей пластине. Следовательно, решение задачи имеем в форме

$$\begin{aligned} e_x^e &= 0.5K(\lambda + \mu)^{-1}\theta, \\ \sigma_y &= -2K\mu^2\theta(\lambda + \mu)^{-1}(\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

В условиях роста температуры решение (15) оказывается справедливым только до некоторого момента времени $t > 0$. Начиная с этого момента времени, в материале пластины возникает и развивается область пластического течения.

Пластическое течение и разгрузка. Итак, в момент времени $t = t_1$ на линии $x = s$ пластины напряженное состояние в ней выходит на поверхность нагружения (на грань призмы Ивлева). В рассматриваемом случае плоского напряженного состояния уравнение данной грани (линии в плоскости (σ_x, σ_y)) имеет вид $\sigma_y = -2k$. При $t > t_1$ от линии $x = s$ перемещается к оси ординат ($x = 0$) упругопластическая граница $x = n_1(t)$ (рис.1). Прямая $x = s$ является осью симметрии задачи, поэтому в области $x > s$ движется аналогичная упругопластическая граница. В области необратимого деформирования для компонент тензора напряжений согласно (6) следует

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu)(d_x - e_x^p) + \lambda(d_z - e_z^p - e_y^p) - 3K\theta, \\ \sigma_y &= (\lambda + 2\mu)(-e_y^p) + \lambda(d_z - e_z^p + d_x - e_x^p) - 3K\theta, \\ \sigma_z &= (\lambda + 2\mu)(d_z - e_z^p) + \lambda(d_x - e_x^p - e_y^p) - 3K\theta = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Если учесть следствие уравнения равновесия и то обстоятельство, что линии $x = 0$ и $x = 2s$ являются свободными гранями плоскости, а также, что $d_y = e_y^e + e_y^p$, то для расчетов напряженно-деформированных состояний в области пластического течения получим зависимости

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0, & \sigma_y &= -2k, \\ e_x^p &= e_z^p = -(\lambda + \mu)(3\mu K)^{-1}k + 1.5K\theta, & e_y^p &= -2e_x^p. \end{aligned} \quad (17)$$

В момент времени $t = t_2$, связанный с отводом источника тепла от пластины $t > t_*$, на линии симметрии скорость роста необратимых деформаций падает, здесь зарождается упругопластическая граница $m_1(t)$, которая отделит пластическую область от области упругого деформирования $m_1(t) \leq x \leq s$. Напряжения в области $m_1(t) \leq x \leq s$ будут определяться соотношениями

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 6\mu K (g)^{-1} e_x - 3K\mu\theta g^{-1}. \quad (18)$$

Повторное пластическое течение и остаточные напряжения. Из-за высокого уровня необратимых деформаций в момент времени $t = t_3$, когда произойдет полная разгрузка, возникает повторное пластическое течение. На линии симметрии выполняется условия Ишпинского – Ивлева вида $\sigma_y = 2k$, здесь образуется упругопластическая граница $n_2(t)$. Закон Дюамеля – Неймана в условиях существования необратимых деформаций (p_x, p_y, p_z) и развивающихся пластических деформаций (e_x^p, e_y^p, e_z^p) примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= w(d_x - e_x^p - p_x) + \lambda(d_z - e_z^p - e_y^p - p_z - p_y) - 3K\theta, \\ \sigma_y &= w(-e_y^p - p_y) + \lambda(d_z - e_z^p - p_z + d_x - e_x^p - p_x) - 3K\theta, \\ \sigma_z &= w(d_z - e_z^p - p_z) + \lambda(d_x - e_x^p - e_y^p - p_z - p_y) - 3K\theta = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

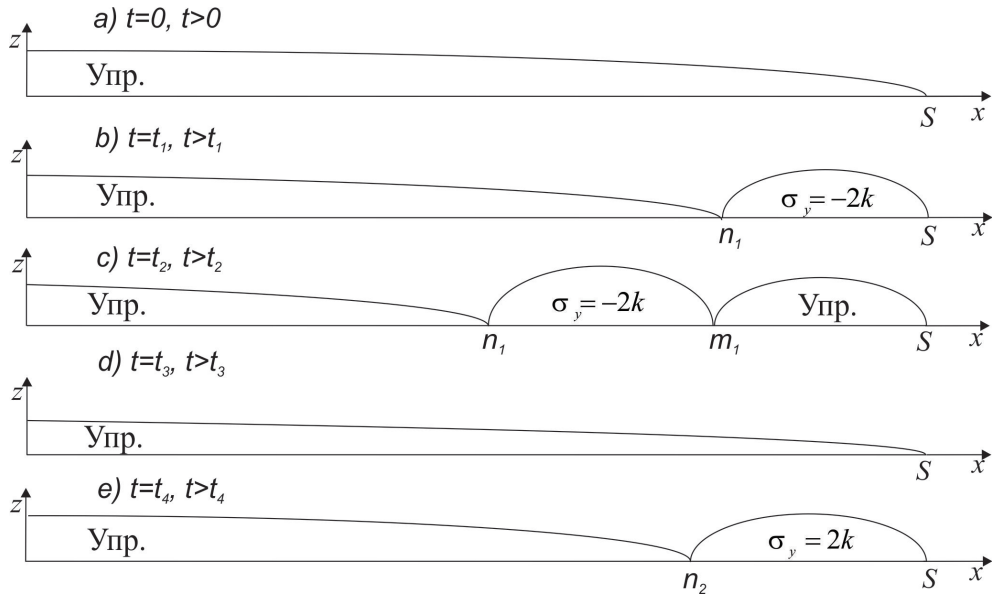


Рис. 1. Схематичное представление возникновения и исчезновения различных областей пластического деформирования: а) термоупругое деформирование, б) развитие первой области пластического течения и т. д.

Используя ассоциированный закон пластического течения (11) и выполняемый условия пластического течения $\sigma_y = 2k$, учитывая, что $\sigma_x = 0$ и $u_x|_{x=S} = 0$ выражаем пластическую деформацию

$$e_x^p = (\lambda + \mu) (3\mu K)^{-1} k + 0.5\theta - p_x, \quad e_y^p = -2e_x^p, \quad e_z^p = e_x^p. \quad (20)$$

Напряжения в области пластического течения $n_2(t) \leq x \leq s$ $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 2k$. В момент времени $t = t_3$ температура во всей пластине становится равной комнатной $T = T_0$. Хотя все процессы активного температурного деформирования замерли и предел текучести принимает свое наибольшее значение, разгрузки не произойдет. Материал пластины, как и прежде, будет разделен на две области: область пластического течения $\sigma_y = 2k$ и область упругого деформирования. Остаточные напряжения приведены на рис. 2. Помимо напряжений особый интерес представляют остаточная полная деформация d_x и перемещение u_x . В области упругого деформирования деформация d_x будут находиться из соотношения

$$d_x = -\lambda p_x g^{-1}, \quad (21)$$

а в области нейтрального нагружения $n_2 \leq x \leq s$ – из соотношения

$$d_x = k_0 (3K)^{-1}. \quad (22)$$

Для определения перемещений в пластине следует проинтегрировать значения (21) и (22) с учетом граничного условия, которое задает равенства нулю перемещения на линии симметрии $u_x|_{x=s} = 0$. Тогда перемещения в области нейтрального нагружения будут находиться из соотношения

$$u_x = xk_0 (3K)^{-1} - sk_0 (3K)^{-1}.$$

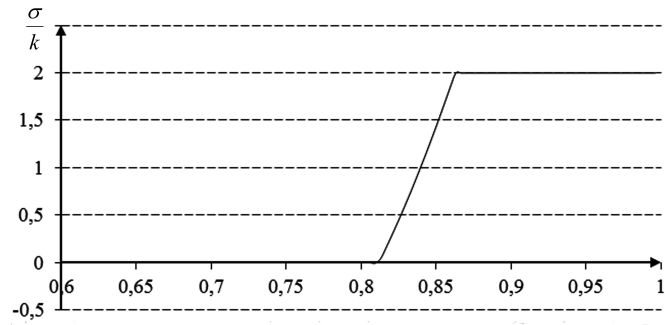


Рис. 2. Распределение остаточных напряжений в материале пластины со свободными краями

В области упругого деформирования, интегрируя выражения (21) с учетом равенства перемещений на границе n_2 находим

$$u_x = -\lambda g^{-1} \int_0^x p_x(\rho) d\rho + (n_2 - s) k_0 (3K)^{-1} + \lambda g^{-1} \int_0^{n_2} p_x(\rho) d\rho.$$

В результате высокого градиента температуры, возникающего вблизи термического воздействия, появляется пластическое течение, которое приводит к росту необратимых деформаций. Величина необратимых деформаций зависит от величины температуры. Когда температура в области термического воздействия достигает достаточно больших значений, в дальнейшем при ее понижении возможно повторное пластическое течение в области, где ранее развились необратимые деформации. Хотя повторное пластическое течение протекает с обратным знаком, но достаточно медленно, поскольку процесс охлаждения медленнее процесса нагревания, необратимые деформации не могут исчезнуть полностью и приводят к возникновению нейтрального нагружения. Остаточное напряжение и перемещение изображено на рисунках 2 и 3, из которых видно, что наибольшие перемещения расположены в области упругопластической границы, на которой происходит падение напряжения.

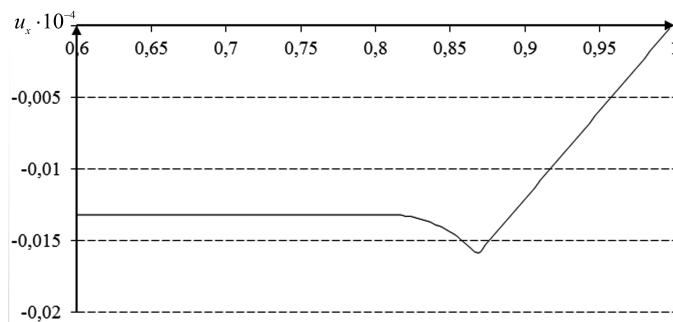


Рис. 3. Распределение перемещений материала пластины со свободными краями

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рыкалин Н. Н. Расчеты тепловых процессов при сварке. М.: Машгиз, 1951. 295 с.
- [2] Слепцова Е. А., Павлов А. Р. Определение остаточных сварочных напряжений и деформаций при стыковой сварке тонких пластин // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2008. № 2 (61). С. 273–287.
- [3] Биленко Г. А., Моргунов Е. А., Коробов Ю. С. Компьютерное моделирование напряженного состояния сварного соединения из нержавеющей стали 03X18H9M3, выполненного многопроходной орбитальной сваркой // Сварка и диагностика : сборник докладов международного форума (Екатеринбург, 25–27 ноября 2014 г.). Екатеринбург: УрФУ, 2015. С. 35–41.
- [4] Винокуров В. А., Григорьянц А. Г. Теоретическое определение временных и остаточных деформаций и напряжений при сварке пластин применительно к титановым и алюминиевым сплавам // Сварочное производство. 1968. № 5. С. 2–4.
- [5] Буренин А. А., Дац Е. П., Мурашкин Е. В. Фомрирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия // Изв. РАН МТТ. 2014. С. 124–131.
- [6] Бадамшин И. Х., Кусова О. И. Температурная зависимость модуля упругости интерметаллидов TiAl и Ni3Al — основных компонентов сплавов лопаток газовых турбин // Вестник УГАТУ. 2012. Т. 16. № 5 (50). С. 41–43.
- [7] Барамшин И. Х. От четырех к одному. Силы внутриатомного взаимодействия и прочность материалов. М.: Академия Естествознания, 2014. 89 с.
- [8] Буренков Ю. А., Никаноров С. П., Смирнов Б. И., Копылов В. И. Восстановление модуля Юнга при отжиге наноструктурного ниобия, полученного в условиях интенсивной пластической деформации // Физика твердого тела. 2003. Т. 45. Вып. 11.
- [9] Токий Н. В., Токий В. В., Пилипенко А. Н., Письменова Н. Е. Температурная зависимость модуля упругости субмикроструктурной меди // Физика твердого тела. 2014. Т. 56. Вып. 5. С. 966–969.
- [10] Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
- [11] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.

E. E. Abashkin, M. Khaing, A. V. Tkacheva

THERMAL STRESSES PLATE

Institute of Machine Science and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Komsomolsk-on-Amure State Technical University, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. The solution of the one-dimensional problem of the theory of thermal stress on local rectilinear heating of the plate with free edges made of elastic-plastic material is given. It is believed that the transverse dimension of the plate is finite, and the longitudinal dimension is infinite. The dependence of the yield strength of the material on the temperature of the quadratic, elastic modules – linear. The evolution of the temperature stresses during rapid to high temperature on the direct material and subsequent cooling down to room temperature. We estimate the level of distribution of the plate residual stresses.

Keywords: elasticity, plasticity, thermal stresses, plane stress state, elastoplastic border.

REFERENCES

- [1] Rykalin N. N. Raschety teplovyh processov pri svarke. M. : Mashgiz, 1951. 295 s. (in Russian).
- [2] Slepčova E. A., Pavlov A. R. Opredelenie ostatochnyh svarochnyh naprjazhenij i deformacij pri stykovoju svarke tonkih plastin // Vestnik SamGU. Estestvennonauchnajach serija. 2008. № 2 (61). S. 273–287. (in Russian).
- [3] Bilenko G. A., Morgunov E. A., Korobov Ju. S. Komp'juternoe modelirovanie naprjazhennogo sostojanija svarnogo soedinenija iz nerzhavejushhej stali 03H18N9M3, vypolnennogo mnogoprohodnoj orbital'noj svarkoj // Svarka i diagnostika : sbornik dokladov mezhdunarodnogo foruma (Ekaterinburg, 25–27 nojabrja 2014 g.). Ekaterinburg : UrFU, 2015. S. 35–41. (in Russian).
- [4] Vinokurov V. A., Grigor'janc A. G. Teoreticheskoe opredelenie vremennyh i ostatochnyh deformacij i naprjazhenij pri svarke plastin primenitel'no k titanovym i aljuminievym splavam // Svarochnoe proizvodstvo. 1968. № 5. S. 2–4. (in Russian).
- [5] Burenin A. A., Dac E. P., Murashkin E. V. Fomrirovanie polja ostatonyh naprjazhenij v uslovijah lokal'nogo teplovogo vozdejstvija // Izv. RAN MTT. 2014. S. 124–131. (in Russian).
- [6] Badamshin I. H., Kusova O. I. Temperaturnaja zavisimost' modulja uprugosti intermetallidov TiAl i Ni3Al – osnovnyh komponentov splavov lopatok gazovyh turbin // Vestnik UGATU. 2012. T. 16. № 5 (50). S. 41–43. (in Russian).
- [7] Baramshin I. H. Ot chetyreh k odnomu. Sily vnutriatomnogo vzaimodejstvija i prochnost' materialov. M. : Akademija Estestvoznaniya 2014. 89 s. (in Russian).

Abashkin Evgeny Evgenyevich, Junior Research Fellow, Institute of Engineering and Metallurgy FEB RAN, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Khaing Myat, Graduate Student Komsomolsk-on-Amure State Technical University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Tkacheva Anastasia Valerevna, Junior Research Fellow, Institute of Engineering and Metallurgy FEB RAN, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

[8] Burenkov Ju. A., Nikanorov S. P., Smirnov B. I., Kopylov V. I. Vosstanovlenie modulja Junga pri otzhige nanostrukturnogo niobija, poluchennogo v uslovijah intensivnoj plasticheskoj deformacii // Fizika tverdogo tela. 2003. T. 45. Vyp. 11. (in Russian).

[9] Tokij N. V., Tokij V. V., Pilipenko A. N., Pis'menova N. E. Temperaturnaja zavisimost' modulja uprugosti submikrokristollicheskoj medi // Fizika tverdogo tela. 2014. T. 56. Vyp. 5. S. 966–969. (in Russian).

[10] Poljanin A. D. Spravochnik po linejnym uravnenijam matematicheskoj fiziki. M. : Fizmatlit, 2001. 576 s. (in Russian).

[11] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. Teorija plastichnosti. Vladivostok : Dal'nauka, 1998. (in Russian).

Е. А. Микишанина, А. Г. Терентьев

ФИЛЬТРАЦИЯ ЧЕРЕЗ УПРУГО-ПОРИСТУЮ ПЛИТУ

Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Рассматривается деформация тонкой упруго-пористой плиты, лежащей на упругом основании. Задача разбивается на две последовательные задачи: изгиб пластины на упругом основании и фильтрация жидкости сквозь пористую среду. Для решения первой задачи используется аппарат почти-периодических функций, для второй – численный метод граничных элементов.

Ключевые слова: упруго-пористая среда, плита, изгиб, почти-периодические функции, фильтрация, метод граничных элементов.

УДК: 532.685

Введение. Процессы фильтрации жидкости через изогнутые под действием внешней нагрузки упруго-пористые пластины и плиты малой толщины представляют практический интерес в различных технологических процессах, связанных с фильтрацией загрязненной жидкости, очищением среды от твердых фракций, а также при фильтрации жидкости в грунт (подпочвенный полив) или, напротив, извлечении жидкости из грунта (дренажные устройства, эксплуатационные скважины и др.). Фильтрация через мелкопористый материал может использоваться, например, для извлечения кислорода из воды. Ниже рассматривается фильтрация через тонкую упруго-пористую плиту, контактирующую с упругим основанием (грунтом). Предполагается, что изгиб плиты слабый, что позволяет краевую задачу формулировать на горизонтальной плоскости и воспользоваться методами теории оболочек.

Постановка задачи. Рассматривается деформация жесткой упруго-пористой плиты при одновременном выполнении обобщенного закона упругости Гука и закона фильтрации Дарси. Плита имеет форму бесконечной полосы $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq$

© Микишанина Е. А., Терентьев А. Г., 2016

Микишанина Евгения Арифжановна

e-mail: evaeva_84@mail.ru, старший преподаватель, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Терентьев Алексей Григорьевич

e-mail: agterent@gambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.11.2016

$y \leq 1$ толщиной h и жестко закреплена по краям $y = 0$ и $y = 1$. На верхней поверхности этой пластины $z = h/2$ действуют нагрузка $q_0 = q_0(y)^1$ и атмосферное давление $p_a = 0$, на нижней поверхности $z = -h/2$ давление жидкости равно $p_0 = \alpha w(x, y)$, где $w(x, y)$ – функция прогиба срединной плоскости плиты, α – коэффициент пропорциональности.

Тензор напряжений при установившейся через пластину фильтрации изменяется за счет гидростатического давления $P = P(x, y, z)$:

$$\tilde{\sigma}_{i,k} = \sigma_{i,k} - P\delta_{i,k}, \quad P = p + \rho g(h/2 - z).$$

В соответствии с гипотезами Кирхгофа-Лява [1], на поверхности пластины $\tilde{\sigma}_{1,3} = \tilde{\sigma}_{2,3} = 0$. Напряжение $\tilde{\sigma}_{3,3}$ в противоречии гипотезам Кирхгофа-Лява отлично от нуля, доказано в [2]. С учетом известных выражений для напряжений $\tilde{\sigma}_{1,1}$, $\tilde{\sigma}_{2,2}$, $\tilde{\sigma}_{1,2}$ [3], напряжения $\sigma_{1,1}$, $\sigma_{2,2}$, $\sigma_{1,2}$ определяются как

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1} &= -\frac{Ez}{(1-v^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + P, \\ \sigma_{2,2} &= -\frac{Ez}{(1-v^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + P, \\ \sigma_{1,2} = \sigma_{2,1} &= -\frac{Ez}{(1-v^2)} (1-v) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

где E , ν – коэффициенты упругости и Пуассона соответственно.

Из уравнений равновесия и условия равенства нулю на поверхностях $z = \pm h/2$ напряжения $\sigma_{1,3}$, $\sigma_{2,3}$ определяются как

$$\begin{aligned} \sigma_{1,3} &= \frac{E(z^2 - h^2/4)}{2(1-v^2)} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w, \\ \sigma_{2,3} &= \frac{E(z^2 - h^2/4)}{2(1-v^2)} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w. \end{aligned} \quad (1)$$

Из последнего уравнения равновесия с учетом парности касательных напряжений и с учетом (1) получим

$$\frac{\partial(\sigma_{3,3} - P)}{\partial z} = -\frac{E(z^2 - h^2/4)}{2(1-v^2)} \Delta^2 w. \quad (2)$$

Проинтегрируем правую и левую части равенства (2):

$$\sigma_{3,3}(h/2) - P(h/2) - \sigma_{3,3}(-h/2) + P(-h/2) = D\Delta^2 w,$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)}$.

В соответствии со статическими граничными условиями на поверхностях плиты

$$\sigma_{3,3} \Big|_{z=h/2} = q_0, \quad \sigma_{3,3} \Big|_{z=-h/2} = p_0,$$

уравнение чистого изгиба тонкой плиты, сквозь которую происходит установившаяся фильтрация, определяется уравнением Софи Жермен [3]

¹Считается, что нагрузка на поверхности пластины тоже является проникаемой и не препятствует процессу фильтрации.

$$\Delta^2 w = \frac{q_0}{D}. \quad (3)$$

Таким образом, изменяющееся внутри пластины давление при установившейся фильтрации не влияет на изгиб.

Если пластина на упругом проницаемом основании, то уравнение (3) преобразуется к виду [4]:

$$\Delta^2 w + \frac{k}{D} w = \frac{q_0}{D}, \quad (4)$$

где k – положительная постоянная, характеризующая жесткость основания (коэффициент постели).

Для упрощения введем обозначения $K^2 = \frac{k}{D}$, $q = \frac{q_0}{D}$, тогда уравнение (4) переписывается в виде

$$\Delta^2 w + K^2 w = q. \quad (5)$$

В силу уравнения неразрывности давление является решением уравнения Лапласа

$$\Delta P = 0,$$

$$\text{где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Учитывая, что решение $w = w(x, y)$ дифференциального уравнения (5) характеризует изгиб срединного сечения пластины $z = 0$, то при изгибе на поверхностях пластины выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} P|_{z=-w(x,y)+h/2} &= p_a, \\ P|_{z=-w(x,y)-h/2} &= \alpha w(x, y), \end{aligned}$$

где α – коэффициент пропорциональности.

Приведенная задача разбивается на две последовательные задачи: изгиб пластины на упругом основании и фильтрация жидкости сквозь пористую среду. Для решения первой будем использовать аппарат почти-периодических функций, для решения второй – численный метод граничных элементов.

Расчет изгиба однородно-изотропной тонкой пористой плиты на упругом основании. Найти непрерывную вместе со своими производными до четвертого порядка в области $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq 1$ функцию $w = w(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (5), если на границе заданы условия:

$$\begin{aligned} w|_{y=0} &= 0, & w|_{y=1} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial y}|_{y=0} &= 0, & \frac{\partial w}{\partial y}|_{y=1} &= 0. \end{aligned}$$

Решение. Воспользуемся аппаратом почти-периодических функций и обобщенного дискретного преобразования Фурье, введенного и изученного в работе [5]. Ранее этот аппарат уже применялся в [6] при решении некоторых задач фильтрации.

Будем искать решение уравнения (5) в виде почти-периодических функций [5], [6], то есть в виде

$$w(x, y) = A_0(y) + \sum_{\lambda} A_{\lambda}(y) e^{i\lambda x}, \quad w(x, y) \in \Pi_W^y,$$

где $\{\lambda\}$ – множество действительных чисел, не сгущающихся к нулю.

Применяя обратное преобразование Фурье к системе (5), переходим к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\lambda = 0, \quad A_0^{(4)} + K^2 A_0 - q = 0, \quad (6)$$

$$\lambda \neq 0, \quad A_{\lambda}^{(4)} - 2\lambda^2 A_{\lambda}^{(2)} + (\lambda^4 + K^2) A_{\lambda} = 0, \quad (7)$$

где $A_0 = A_0(y)$, $A_{\lambda} = A_{\lambda}(y)$. Решения уравнений (6) и (7) имеют вид:
при $\lambda = 0$

$$A_0(y) = a_0(y) + d_1 e^{ny} \cos ny + d_2 e^{ny} \sin ny + d_3 e^{-ny} \cos ny + d_4 e^{-ny} \sin ny,$$

где $n = \sqrt{K/2}$, $a_0(y)$ – некоторое частное решение уравнения (6);
при $\lambda \neq 0$

$$A_{\lambda}(y) = c_1 e^{\alpha y} \cos \beta y + c_2 e^{\alpha y} \sin \beta y + c_3 e^{-\alpha y} \cos \beta y + c_4 e^{-\alpha y} \sin \beta y,$$

$$\text{где } \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^4 + K^2} + \lambda^2}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^4 + K^2} - \lambda^2}{2}}.$$

Итак, искомая функция прогибов имеет вид

$$w(x, y) = a_0(y) + d_1 e^{ny} \cos ny + d_2 e^{ny} \sin ny + d_3 e^{-ny} \cos ny + d_4 e^{-ny} \sin ny + \\ + \sum_{\lambda \neq 0} (c_1 e^{\alpha y} \cos \beta y + c_2 e^{\alpha y} \sin \beta y + c_3 e^{-\alpha y} \cos \beta y + c_4 e^{-\alpha y} \sin \beta y) \cdot e^{i\lambda x}.$$

Константы $c_m = c_m(\lambda)$, d_m , $m = \overline{1, 4}$ находятся из граничных условий, то есть из системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_3 = -a_0(0), \\ d_1 e^n \cos n + d_2 e^n \sin n + d_3 e^{-n} \cos n + d_4 e^{-n} \sin n = -a_0(1), \\ d_1 + d_2 - d_3 + d_4 = -\frac{a'_0(0)}{n} \\ d_1 (e^n \cos n - e^n \sin n) + d_2 (e^n \sin n + e^n \cos n) + \\ + d_3 (-e^{-n} \cos n - e^{-n} \sin n) + d_4 (-e^{-n} \sin n + e^{-n} \cos n) = -\frac{a'_0(1)}{n}, \\ c_1 + c_3 = 0, \\ \alpha c_1 + \beta c_2 - \alpha c_3 + \beta c_4 = 0, \\ c_1 e^{\alpha} \cos \beta + c_2 e^{\alpha} \sin \beta + c_3 e^{-\alpha} \cos \beta + c_4 e^{-\alpha} \sin \beta = 0, \\ c_1 (\alpha e^{\alpha} \cos \beta - \beta e^{\alpha} \sin \beta) + c_2 (\alpha e^{\alpha} \sin \beta + \beta e^{\alpha} \cos \beta) + \\ + c_3 (-\alpha e^{-\alpha} \cos \beta - \beta e^{-\alpha} \sin \beta) + c_4 (-\alpha e^{-\alpha} \sin \beta + \beta e^{-\alpha} \cos \beta) = 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

Из системы (8) постоянные $c_m = 0$, а постоянные d_m определяются единственным образом.

Таким образом, функция прогиба зависит только от y , то есть имеет вид

$$w(y) = a_0(y) + d_1 e^{ny} \cos ny + d_2 e^{ny} \sin ny + d_3 e^{-ny} \cos ny + d_4 e^{-ny} \sin ny, \quad (9)$$

где постоянные d_m определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} d_1 + d_3 = -a_0(0), \\ d_1 e^n \cos n + d_2 e^n \sin n + d_3 e^{-n} \cos n + d_4 e^{-n} \sin n = -a_0(1), \\ d_1 + d_2 - d_3 + d_4 = -\frac{a'_0(0)}{n}, \\ d_1 (e^n \cos n - e^n \sin n) + d_2 (e^n \sin n + e^n \cos n) + \\ + d_3 (-e^{-n} \cos n - e^{-n} \sin n) + d_4 (-e^{-n} \sin n + e^{-n} \cos n) = -\frac{a'_0(1)}{n}. \end{cases} \quad (10)$$

Определение давления внутри однородно-изотропной пористой плиты при установившейся фильтрации. При условии, что давление в области не зависит от x (граничные условия не зависят от x), задача его определения сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \quad (11)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_{y=1} = 0, \quad (12)$$

$$P|_{-w(y)+h/2} = 0, \quad P|_{-w(y)-h/2} = \alpha w(y), \quad (13)$$

Граничные условия (12) характеризуют непроницаемые (твердые) границы, условия (13) – проницаемые.

Итак, необходимо найти непрерывную вместе со своими производными до второго порядка в области $0 \leq y \leq 1, \quad -w(y) - h/2 \leq z \leq -w(y) + h/2$ функцию $P(y, z)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (11), если на границе заданы условия (12), (13).

Решение последней задачи целесообразно получить численно с помощью метода граничных элементов [7].

Для составления численного алгоритма следует воспользоваться интегральным тождеством Грина

$$\varepsilon P(z) = \oint_{\partial T} P_n(\tau) G(r) ds - \oint_{\partial T} P(\tau) G_n(r) ds \quad (14)$$

где r – расстояние между точками z и τ , $\varepsilon = 0.5$ для $z \in \partial T$, $\varepsilon = 1$ для $z \in T$.

В соответствии с методом граничных элементов аппроксимируем границу области N -вписанным многоугольником с вершинами (узлами) в точках (y^k, z^k) . Граничные условия выполняются в средней (контрольной) точке (Y^k, Z^k) . Тогда каждый интеграл может быть представлен в виде произведения значения искомой функции в контрольной точке и интеграла по хорде, например,

$$\int_{s^{j-1}}^{s^j} P(Y(s), Z(s)) G_n(s, Y^k, Z^k) ds = P(Y^j, Z^j) \int_{s^{j-1}}^{s^j} G_n(s, Y^k, Z^k) ds = A_{kj} P_j.$$

Выражая все интегралы в виде аналогичных сумм, запишем интегральное уравнение (14) в матричной форме:

$$(\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}) \mathbf{P} - \mathbf{B} \mathbf{Q} = 0,$$

где \mathbf{E} – единичная матрица, \mathbf{A} , \mathbf{B} – матрицы с элементами

$$A_{kj} = \int_{s^{j-1}}^{s^j} G_n(s, Y^k, Z^k) ds, \quad B_{kj} = \int_{s^{j-1}}^{s^j} G(s, Y^k, Z^k) ds,$$

\mathbf{P} , \mathbf{Q} – вектор-столбцы с элементами $P_j = P(Y^j, Z^j)$, $Q_j = Q(Y^j, Z^j)$.

Для определения давления в любой точке области достаточно принять $\varepsilon = 1$ в равенстве (14).

Числовой пример. Сквозь однородно-изотропную тонкую плиту $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq 1$, $-w(y) - h/2 \leq z \leq -w(y) + h/2$, $h = 0.1$ на упругом основании с коэффициентом, характеризующим жесткость основания $K = \sqrt{\frac{k}{D}} = 2$, происходит установившаяся фильтрация несжимаемой жидкости, которая оказывает на нижней поверхности пластины давление $p_0 = 10^6 w(y)$. На верхней поверхности плиты действует изгибающая нагрузка $q = 4 + 16y^2$.

Решение. Функция прогиба имеет вид (9), то есть в данном случае

$$w(y) = 1 + 4y^2 - 0.11951375 e^y \cos(y) - 2.231724 e^y \sin(y) - \\ - 0.88048625 e^{-y} \cos(y) + 1.4707515 e^{-y} \sin(y).$$

График функции прогиба изображен на рис. 1.

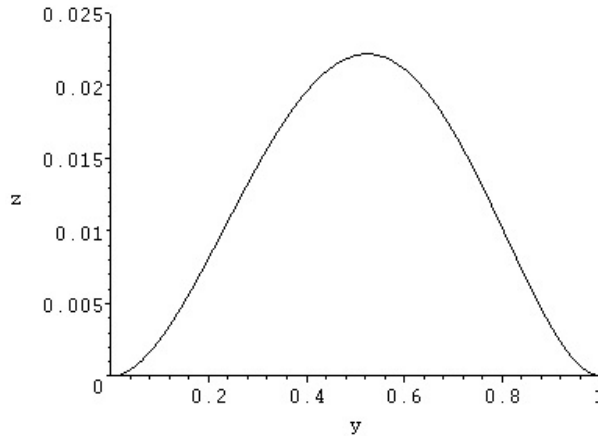


Рис. 1. Функция прогиба

Максимального прогиба $z = 0.0222$ плита достигает в точке $y = 0.525$.

Теперь решаем задачу стационарной фильтрации в области $0 \leq y \leq 1$, $-w(y) - h/2 \leq z \leq -w(y) + h/2$. Изменение давления внутри области на каждой кривой $z = -w(y) + a$, $a \in [-h/2, h/2]$, параллельной средней линии, изображено на рис. 2:

$a = -h/2$ (1), $a = -2h/5$ (2), $a = -h/5$ (3), $a = 0$ (4), $a = h/5$ (5), $a = 2h/5$ (6).

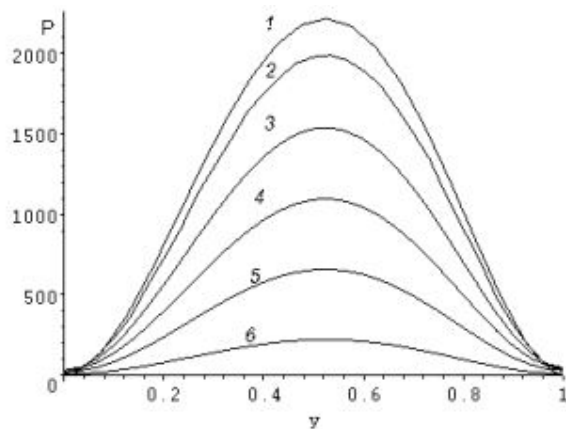


Рис. 2. Изменение давления в плите

Графики распределения давления и его нормальной производной на границе области представлены на рис. 3 и 4. Обход контура производится против часовой стрелки, начиная с нижней крайней правой точки границы.

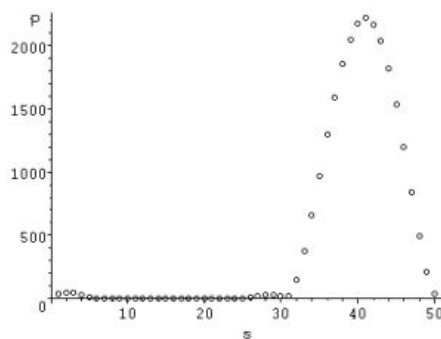


Рис. 3. Изменение функции давления на границе

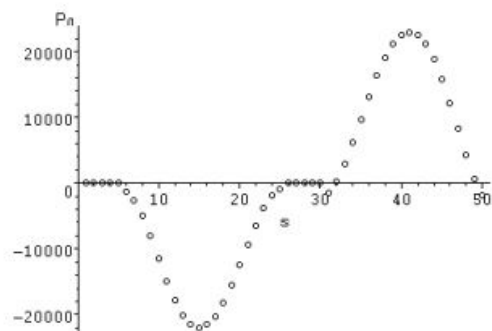


Рис. 4. Изменение нормальной производной функции давления на границе

По рис. 2 можно сделать вывод: давление падает при движении от нижней границы области к верхней, а на каждой кривой $z = -w(y) + a$ максимального значения давление достигает в месте наибольшего прогиба плиты.

Композиционное использование метода граничных элементов и аппарата почти-периодических функций позволило решить задачу изгиба тонкой упруго-пористой плиты на упругом основании при одновременной фильтрации через плиту жидкости. Стоит отметить, что область применения этих методов довольно широка.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Reddy J. N. Theory and analysis of elastic plates and shells. London : Taylor and Francis, 2007. 547 p.
- [2] Саченков А. А. Цикл лекций по теории изгиба пластин: учебное пособие. Казань : Казан. (Приволж.) федер. ун-т, 2012. 53 с.
- [3] Терентьев А. Г. Теория упругости с элементами сопротивления материалов и пластичности : учебное пособие. Чебоксары : Изд-во Чуваш. ун-та, 2016. 264 с.
- [4] Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М. : Физматлит, 1948. 296 с.
- [5] Кулагина М. Ф. Обобщенное дискретное преобразование Фурье и его приложения // Сборник научных статей Российской ассоциации «Женщины-математики». Н. Новгород : Изд-во Нижегород. ун-та, 1993. Вып. 1. С. 79–83.
- [6] Микишанина Е. А. Компьютерное моделирование решений плоской краевой задачи теории фильтрации // Вестник Чувашского университета. 2016. № 1. С. 145–153.
- [7] Терентьев А. Г., Афанасьев К. Е. Численные методы в гидродинамике : учеб. пособие. Чебоксары : Изд-во Чуваш. ун-та, 1987. 80 с.

E. A. Mikishanina, A. G. Terentiev

FILTRATION IN ELASTIC POROUS PLATE

Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia

Abstract. The article describes the deformation of a thin elastic-porous plate lying on an elastic foundation. The task is divided into two consecutive tasks: the bending of a plate on an elastic foundation and fluid filtration through porous medium. To solve the first problem we use the technique of almost-periodic functions, to the second numerical method of boundary elements.

Keywords: elastic-porous medium, plate, bending, almost periodic functions, filtering, boundary element method.

REFERENCES

- [1] Reddy J. N. Theory and analysis of elastic plates and shells. London : Taylor and Francis, 2007. 547 p.
- [2] Sachenkov A. A. Series of lectures on the theory of bending of plates : a tutorial. Kazan : Kazan. (Privolzh.) Feder. University, 2012. 53 p. (in Russian).
- [3] Terentiev A. G. Theory of elasticity elements of strength of materials and plasticity : a tutorial. Cheboksary : Publishing House of the Chuvash University, 2016. 264 p. (in Russian).
- [4] Vekua I. N. New methods for solving elliptic equations. Moscow : Fizmathlit, 1948. 296 p. (in Russian).
- [5] Kulagina M. F. Generalized discrete Fourier transform and its applications // Collection of scientific articles of the Russian Association «Women-mathematicians». N. Novgorod : Publishing House N. N. Novgorod University, 1993. Vol. 1. P. 79–83. (in Russian).
- [6] Mikishanina E. A. Computer simulation of solutions of the flat boundary's problem of filtration theory // Bulletin of the Chuvash University. 2016. № 1. P. 145–153. (in Russian).
- [7] Terentiev A. G., Afanasiev K. E. Numerical methods in fluid dynamics : a tutorial. Cheboksary : Publishing House of the Chuvash University, 1980. 80 p. (in Russian).

Mikishanina Evgeniya Arifzhanovna

e-mail: evaeva_84@mail.ru, Senior Lecturer, Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

Terentiev Aleksei Grigor'evich

e-mail: agterent@rambler.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

А. В. Ковалев, И. Э. Свиридов, Ю. Д. Щеглова

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ НЕКРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ В СЛУЧАЕ АНИЗОТРОПИИ ОБЩЕГО ВИДА

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. В работе рассматривается задача упругопластического кручения стержня некругового поперечного сечения. Материал стержня предполагается анизотропным и обладает свойствами анизотропии, частными случаями которой являются анизотропия согласно Хиллу и трансляционная анизотропия. С использованием метода малого параметра определены напряженно-деформированное состояние стержня и упругопластическая граница в первом приближении.

Ключевые слова: деформации, напряжение, упругопластическое кручение, анизотропия по Хиллу, трансляционная анизотропия.

Определению напряженно-деформированного состояния в цилиндрических трубах при температуре и сжимаемости посвящены работы [5], [7], [8]. В работе [1] в рамках метода возмущений определено напряженное состояние в цилиндрической трубе, подверженной действию внешнего и внутреннего давлений, с границами поперечного сечения близкими к круговым. При этом рассмотрен вопрос о существовании и единственности решения задачи на основе теоремы о неявных функциях. В работах [3], [11] представлены соотношения трансляционной идеальнопластической анизотропии и анизотропии по Хиллу при кручении. Работы [6], [9] посвящены исследованию напряженно-деформированного состояния пластически анизотропной толстостенной трубы при упругопластическом кручении в случае трансляционной анизотропии, а в работе [10] рассмотрена анизотропия согласно Хиллу. Случай анизотропии общего

© Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д., 2016

Ковалев Алексей Викторович

e-mail: kav-mail@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Свиридов Илья Эдуардович

e-mail: synettt@gmail.com, аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Щеглова Юлия Дмитриевна

e-mail: scheglova@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 02.10.2016

вида, включающей в себя, как частные случаи, анизотропию по Хиллу и трансляционную анизотропию, рассмотрен в работе [13] при упругопластическом состоянии толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. В данной работе с использованием метода малого параметра [2], [12] исследована задача упругопластического кручения цилиндрического стержня некругового поперечного сечения в случае анизотропии общего вида. Определены в первом приближении поле напряжений и перемещений в пластической и упругой областях и упругопластическая граница.

Рассмотрим цилиндрический стержень, находящийся под действием кручения [4]. Боковые поверхности стержня свободны от нагрузки. Поперечное сечение стержня ограничено контурами внешним L_1 и внутренним L_2 (рис. 1).

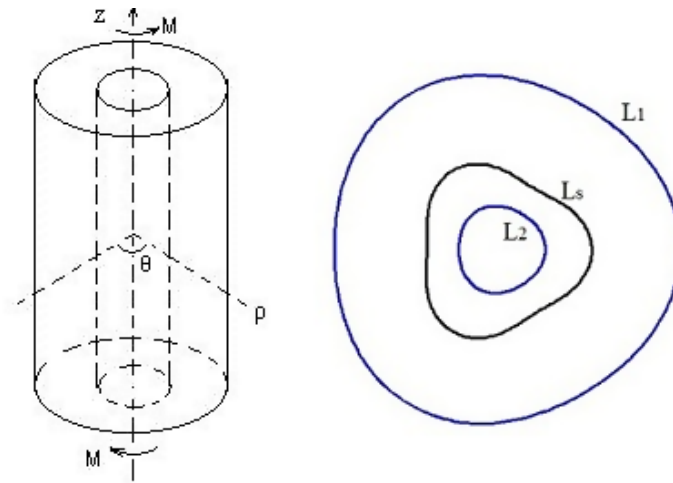


Рис. 1. Упругопластическое кручение стержня кругового поперечного сечения.

Условие пластичности анизотропии общего вида в случае кручения может быть записано в виде

$$A(\tau_{xz} - k_1)^2 + B(\tau_{yz} - k_2)^2 = k_0^2, \quad (1)$$

где A, B, k_1, k_2 — параметры анизотропии, k_0 — предел текучести материала.

Для определения напряженно-деформированного состояния стержня будем использовать определяющие соотношения, записанные в цилиндрической системе координат в безразмерном виде (ρ, θ, z — цилиндрическая система координат, ось z направлена по оси стержня). Величины, имеющие размерность напряжения, отнесены к пределу текучести k_0 , величины, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу упругопластической границы в нулевом приближении ρ_0 .

Используя известную связь между компонентами напряжений в декартовой и цилиндрической системах координат [6]

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \tau_{\rho z} \cos \theta - \tau_{\theta z} \sin \theta, \\ \tau_{yz} &= \tau_{\rho z} \sin \theta + \tau_{\theta z} \cos \theta, \end{aligned}$$

и осуществляя переход к безразмерным координатам, соотношения (1) получим в виде

$$A(\tau_{\rho z}^p \cos \theta - \tau_{\theta z}^p \sin \theta - k_1)^2 + B(\tau_{\rho z}^p \sin \theta + \tau_{\theta z}^p \cos \theta - k_2)^2 = 1. \quad (2)$$

Уравнение равновесия для задачи кручения имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0. \quad (3)$$

В упругой области имеют место соотношения Коши

$$\varepsilon_{\rho z}^e = \frac{\omega}{2} \frac{\partial w^e}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z}^e = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w^e}{\partial \theta} + \rho \right), \quad (4)$$

связывающие компоненты тензора деформаций с функцией w^e , характеризующей деформацию поперечного сечения. Через ω обозначена крутка или угол кручения на единицу длины.

Соотношения закона Гука в упругой области имеют вид

$$\tau_{\rho z}^e = 2G\varepsilon_{\rho z}^e, \quad \tau_{\theta z}^e = 2G\varepsilon_{\theta z}^e, \quad (5)$$

где G — модуль сдвига.

Полная деформация в пластической области складывается из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_{\rho z} = \varepsilon_{\rho z}^e + \varepsilon_{\rho z}^p, \quad \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{\theta z}^e + \varepsilon_{\theta z}^p. \quad (6)$$

Согласно ассоциированному закону пластического течения для приращения пластических деформаций, учитывая (2), будем иметь

$$d\varepsilon_{\rho z}^p = d\lambda \left((A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) \tau_{\rho z}^p + (B - A) \tau_{\theta z}^p \cos \theta \sin \theta - Ak_1 \cos \theta - Bk_2 \sin \theta \right), \quad (7)$$

$$d\varepsilon_{\theta z}^p = d\lambda \left((B \cos^2 \theta + A \sin^2 \theta) \tau_{\theta z}^p + (B - A) \tau_{\rho z}^p \sin \theta \cos \theta + Ak_1 \sin \theta - Bk_2 \cos \theta \right), \quad (8)$$

где $d\lambda$ — неизвестный скалярный множитель.

Упругие деформации связаны с напряжениями в пластической области законом Гука

$$\varepsilon_{\rho z}^e = \frac{\tau_{\rho z}^p}{2G}, \quad \varepsilon_{\theta z}^e = \frac{\tau_{\theta z}^p}{2G}. \quad (9)$$

Полные деформации связаны с перемещениями в пластической области соотношениями Коши

$$\varepsilon_{\rho z} = \frac{1}{2} \frac{\partial w^p}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w^p}{\partial \theta} + \omega \rho \right). \quad (10)$$

В соотношениях (2)–(10) и далее символ “ e ” сверху обозначает принадлежность величин к упругой области, а символ “ p ” — к пластической.

Граничные условия в напряжениях на внешнем L_1 и внутреннем L_2 контурах поперечного сечения имеют вид

$$\{\tau_{\rho z}^p n_{\rho 1} + \tau_{\theta z}^p n_{\theta 1}\} \Big|_{L_1} = 0, \quad (11)$$

$$\{\tau_{\rho z}^e n_{\rho 2} + \tau_{\theta z}^e n_{\theta 2}\} \Big|_{L_2} = 0, \quad (12)$$

где $n_{\rho i}$, $n_{\theta i}$ ($i = 1, 2$) являются компонентами единичной нормали к контуру L_i .

Уравнение внешнего контура поперечного сечения стержня L_1 примем в виде

$$\Phi_1(\rho, \theta) = 0, \quad (13)$$

внутреннего L_2

$$\Phi_2(\rho, \theta) = 0. \quad (14)$$

Компоненты единичной нормали к контуру L_i ($i = 1, 2$) поперечного сечения стержня определяются по формулам

$$\begin{aligned} n_{\rho i} &= \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \\ n_{\theta i} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

На упругопластической границе L_s (рис. 1), которая заранее неизвестна и определяется в процессе решения, выполняются условия непрерывности компонент напряжений и функции перемещения

$$[\tau_{\rho z}] \Big|_{L_s} = [\tau_{\theta z}] \Big|_{L_s} = [w] \Big|_{L_s} = 0. \quad (16)$$

В упругой области из уравнения равновесия (3), учитывая (5) и (4), получим уравнение

$$\Delta w^e = 0, \quad (17)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$ — оператор Лапласа.

Следуя методу возмущений [2], параметры анизотропии представим в виде [13]

$$\begin{aligned} A &= 1 + \delta a_1 + \delta^2 a_2 + \dots, & B &= 1 + \delta b_1 + \delta^2 b_2 + \dots, \\ k_1 &= \delta k_1^{(1)} + \delta^2 k_1^{(2)} + \dots, & k_2 &= \delta k_2^{(1)} + \delta^2 k_2^{(2)} + \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

где δ — безразмерный малый параметр, $\delta \ll 1$.

Уравнение контуров поперечного сечения (13), (14) представим в виде

$$\Phi_1(\rho, \theta) = \rho - (R_0 + \delta_2 R_1 + \delta_2^2 R_2 + \dots), \quad (19)$$

$$\Phi_2(\rho, \theta) = \rho - (r_0 + \delta_1 r_1 + \delta_1^2 r_2 + \dots), \quad (20)$$

где δ_1, δ_2 — безразмерные малые параметры, r_0, R_0 — константы, $r_i = r_i(\theta)$, $R_i = R_i(\theta)$ — функции координаты θ .

Примем $\delta_1 = d_1 \delta$, $\delta_2 = d_2 \delta$, где $-1 \leq d_i \leq 1$ ($i = 1, 2$).

Решение будем искать в виде разложения по степеням малого параметра δ

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^{(0)} + \delta\tau_{ij}^{(1)} + \delta^2\tau_{ij}^{(2)} + \dots, \quad (21)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \delta\varepsilon_{ij}^{(1)} + \delta^2\varepsilon_{ij}^{(2)} + \dots, \quad (22)$$

$$w = w^{(0)} + \delta w^{(1)} + \delta^2 w^{(2)} + \dots, \quad (23)$$

$$\rho_s = \rho_0 + \delta\rho_1 + \delta^2\rho_2 + \dots, \quad (24)$$

где соотношение (24) – представление упругопластической границы.

Согласно методу малого параметра [2], [12] подставляя разложение (18)–(24) в (2)–(17) и приравнивая члены при одинаковых степенях параметра δ , получим системы уравнений для каждого приближения.

В нулевом приближении имеет место известная задача упругопластического кручения изотропного стержня с поперечным сечением в виде кругового кольца радиусов $r_0 = \alpha$ и $R_0 = \beta$ ($\alpha < \beta$).

Решение этой задачи имеет вид [4]

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{p(0)} &= 1, \quad \tau_{\rho z}^{p(0)} = 0, \quad w^{p(0)} = 0, \\ \tau_{\theta z}^{e(0)} &= G\omega\rho, \quad \tau_{\rho z}^{e(0)} = 0, \quad w^{e(0)} = 0, \quad \rho_0 = 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим первое приближение.

Уравнение внешней границы (19) примем в виде, следуя [12]

$$\rho = \beta(1 + \delta d_1 \cos m\theta). \quad (26)$$

Уравнение внутреннего контура (20) согласно [12] представим в форме

$$\rho = \alpha(1 + \delta d_2 \cos m\theta). \quad (27)$$

Условие пластичности (2) в первом приближении с учетом известного решения в нулевом приближении (25) дает соотношение для компоненты $\tau_{\theta z}^{p(1)}$ в виде

$$\tau_{\theta z}^{p(1)} = -k_1^{(1)} \sin \theta + k_2^{(1)} \cos \theta - \frac{1}{2} (a_1 \sin^2 \theta + b_1 \cos^2 \theta). \quad (28)$$

Подставляя (15), (19) и (21) в граничное условие на внешнем контуре (11), получим

$$\tau_{\rho z}^{p(1)} \Big|_{\rho=R_0} = \frac{\dot{R}_1}{R_0} \tau_{\theta z}^{p(0)} \Big|_{\rho=R_0} - R_1 \frac{\partial \tau_{\rho z}^{p(0)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_0}. \quad (29)$$

Для определения компоненты напряжений $\tau_{\rho z}^{p(1)}$ из уравнения равновесия (3) и граничного условия (29), учитывая (25) и (26), получим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \tau_{\rho z}^{p(1)}) &= -\frac{\partial \tau_{\theta z}^{p(1)}}{\partial \theta}, \\ \tau_{\rho z}^{p(1)} \Big|_{\rho=\beta} &= -d_1 m \sin m\theta. \end{cases}$$

Решая эту систему с учетом (28), найдем

$$\tau_{\rho z}^{p(1)} = \left(k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta + \frac{1}{2} (a_1 - b_1) \sin 2\theta \right) \left(1 - \frac{\beta}{\rho} \right) - \frac{d_1 \beta m}{\rho} \sin m\theta. \quad (30)$$

В упругой области из соотношений (4) и (15) получим компоненты напряжений в виде

$$\tau_{\rho z}^{e(1)} = G\omega \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho}, \quad \tau_{\theta z}^{e(1)} = G\omega \frac{1}{\rho} \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \theta}. \quad (31)$$

Граничное условие на внутреннем контуре (12) с учетом (15), (20) и (21) примет форму

$$\tau_{\rho z}^{e(1)} \Big|_{\rho=r_0} = \frac{1}{G\omega} \left(\dot{r}_1 \tau_{\theta z}^{e(0)} \Big|_{\rho=r_0} - r_1 \frac{\partial \tau_{\rho z}^{e(0)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=r_0} \right). \quad (32)$$

Условия непрерывности для компонент напряжений на упругопластической границе (16) при подстановке (21) и (24) в первом приближении дают соотношения

$$\left(\frac{\partial \tau_{\rho z}^{p(0)}}{\partial \rho} \rho_1 + \tau_{\rho z}^{p(1)} \right) \Big|_{\rho=\rho_0} = \left(\frac{\partial \tau_{\rho z}^{e(0)}}{\partial \rho} \rho_1 + \tau_{\rho z}^{e(1)} \right) \Big|_{\rho=\rho_0}, \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial \tau_{\theta z}^{p(0)}}{\partial \rho} \rho_1 + \tau_{\theta z}^{p(1)} \right) \Big|_{\rho=\rho_0} = \left(\frac{\partial \tau_{\theta z}^{e(0)}}{\partial \rho} \rho_1 + \tau_{\theta z}^{e(1)} \right) \Big|_{\rho=\rho_0}. \quad (34)$$

Объединяя (17), а также (32) и (33) с учетом (31), (27) и (25), получим задачу Неймана для определения функции перемещений в упругой области

$$\begin{cases} \Delta w^{e(1)} = 0, & \alpha < \rho < 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \\ \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = \frac{1}{G\omega} \tau_{\rho z}^{p(1)} \Big|_{\rho=1}, \\ \frac{\partial w^{p(1)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\alpha} = -d_2 m \sin m\theta. \end{cases} \quad (35)$$

Подставляя найденное ранее выражение для $\tau_{\rho z}^{p(1)}$ (30) и решая систему (34), получим

$$\begin{aligned} w^{e(1)} = & -\frac{(\beta-1)}{G\omega(1-\alpha^2)} \left(\rho + \frac{\alpha^2}{\rho} \right) \left(k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta \right) - \\ & - \frac{(a_1 - b_1)(\beta-1)}{4G\omega(1-\alpha^4)} \left(\rho^2 + \frac{\alpha^4}{\rho^2} \right) \sin 2\theta + \\ & + \left(\frac{-d_1\beta + G\omega d_2 \alpha^{m+2}}{G\omega(1-\alpha^{2m})} \left(\rho^m + \frac{\alpha^{2m}}{\rho^m} \right) + \frac{d_2 \alpha^{m+2}}{\rho^m} \right) \sin m\theta. \end{aligned} \quad (36)$$

Напряженное состояние в упругой области определяется подстановкой (36) в (31).

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z}^{e(1)} = & -\frac{\beta-1}{1-\alpha^2} \left[\left(1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) \left(k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta \right) + \frac{(a_1 - b_1)}{2(1+\alpha^2)} \left(\rho - \frac{\alpha^4}{\rho^3} \right) \sin 2\theta \right] + \\ & + m \left(\frac{-d_1\beta + G\omega d_2 \alpha^{m+2}}{1-\alpha^{2m}} \left(\rho^{m-1} - \frac{\alpha^{2m}}{\rho^{m+1}} \right) - \frac{G\omega d_2 \alpha^{m+2}}{\rho^{m+1}} \right) \sin m\theta, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{e(1)} = & -\frac{\beta-1}{1-\alpha^2} \left[\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) (-k_1^{(1)} \sin \theta + k_2^{(1)} \cos \theta) + \frac{a_1 - b_1}{2(1+\alpha^2)} \left(\rho + \frac{\alpha^4}{\rho^3}\right) \cos 2\theta \right] + \\ & + m \left(\frac{-d_1\beta + G\omega d_2 \alpha^{m+2}}{1-\alpha^{2m}} \left(\rho^{m-1} + \frac{\alpha^{2m}}{\rho^{m+1}}\right) - \frac{G\omega d_2 \alpha^{m+2}}{\rho^{m+1}} \right) \cos m\theta. \end{aligned} \quad (38)$$

Из условия (34), учитывая (25), получим соотношение для определения радиуса упругопластической границы

$$\rho_1 = \left(\tau_{\theta z}^{p(1)} - \tau_{\theta z}^{e(1)} \right) \Big|_{\rho=1}. \quad (39)$$

Подставляя в (39) полученные выше выражения для компоненты напряжений $\tau_{\theta z}^{(1)}$ (28) и (38), найдем

$$\begin{aligned} \rho_1 = & \left(\frac{(\beta-1)(1+\alpha^2)}{1-\alpha^2} + 1 \right) (-k_1^{(1)} \sin \theta + k_2^{(1)} \cos \theta) + \\ & + \frac{a_1 - b_1}{4} \left(\frac{2(\beta-1)(1+\alpha^4)}{1-\alpha^4} + 1 \right) \cos 2\theta - \frac{a_1 + b_1}{4} - \\ & - m \left(\frac{-d_1\beta + G\omega d_2 \alpha^{m+2}}{1-\alpha^{2m}} - G\omega d_2 \alpha^{m+2} \right) \cos m\theta. \end{aligned} \quad (40)$$

Определим в первом приближении функцию перемещений в пластической области $w^{p(1)}$.

Из соотношений ассоциированного закона пластического течения (7), (8) получим

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{\rho z}^p \left((A \sin^2 \theta + B \cos^2 \theta) \tau_{\theta z}^p + (B - A) \tau_{\rho z}^p \cos \theta \sin \theta + Ak_1 \sin \theta - Bk_2 \cos \theta \right) = \\ d\varepsilon_{\theta z}^p \left((A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) \tau_{\rho z}^p + (B - A) \tau_{\theta z}^p \cos \theta \sin \theta - Ak_1 \cos \theta - Bk_2 \sin \theta \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Подставляя в (41) разложения (18), (21), (22), в первом приближении будем иметь

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{\rho z}^{p(0)} \left(\tau_{\theta z}^{p(0)} (a_1 \sin^2 \theta + b_1 \cos^2 \theta) + \tau_{\theta z}^{p(1)} + (b_1 - a_1) \tau_{\rho z}^{p(0)} \cos \theta \sin \theta + k_1^{(1)} \sin \theta - k_2^{(1)} \cos \theta \right) \\ + d\varepsilon_{\rho z}^{p(1)} \tau_{\theta z}^{p(0)} = \\ = d\varepsilon_{\theta z}^{p(0)} \left(\tau_{\rho z}^{p(0)} (a_1 \cos^2 \theta + b_1 \sin^2 \theta) + \tau_{\rho z}^{p(1)} + (b_1 - a_1) \tau_{\theta z}^{p(0)} \cos \theta \sin \theta - k_1^{(1)} \cos \theta - k_2^{(1)} \sin \theta \right) \\ + d\varepsilon_{\theta z}^{p(1)} \tau_{\rho z}^{p(0)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Учет нулевого приближения (25) в (42) позволяет получить ассоциированный закон в виде

$$d\varepsilon_{\rho z}^{p(1)} = d\varepsilon_{\theta z}^{p(0)} \left(\tau_{\rho z}^{p(1)} + \frac{b_1 - a_1}{2} \sin 2\theta - k_1^{(1)} \cos \theta - k_2^{(1)} \sin \theta \right), \quad (43)$$

где, следуя [9],

$$\varepsilon_{\theta z}^{p(0)} = \lambda^0 = \frac{G\omega\rho - 1}{2G}, \quad (44)$$

$\lambda^{(0)}$ — скалярный множитель в нулевом приближении.

Подставляя (30) в (43), получим

$$d\varepsilon_{\rho z}^{p(1)} = -\frac{\beta}{\rho} \left(k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta + \frac{a_1 - b_1}{2} \sin 2\theta + d_1 m \sin m\theta \right) d\lambda^{(0)}. \quad (45)$$

В процессе нагружения частица тела переходит в пластическое состояние в момент прохождения через нее упругопластической границы, что соответствует $\rho = 1$. Следовательно, в процессе пластического деформирования безразмерный радиус в точке будет изменяться от 1 до некоторого значения ρ , соответствующего текущему значению приложенных внешних усилий [12].

Соотношение (44) позволяет в (45) перейти от интегрирования по $\lambda^{(0)}$ к интегрированию по радиусу упругопластической границы, в результате чего получим

$$\varepsilon_{\rho z}^{p(1)} = \frac{\omega\beta}{2} \left(k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta + \frac{a_1 - b_1}{2} \sin 2\theta + d_1 m \sin m\theta \right) \ln \frac{1}{\rho}. \quad (46)$$

Определить перемещения в пластической зоне позволяет уравнение, полученное из первых соотношений в (6),(9),(10), а также выражений (30) и (45),

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{p(1)}}{\partial \rho} = \frac{\beta}{G} \left[\left(k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta + \frac{a_1 - b_1}{2} \sin 2\theta \right) \left(G\omega \ln \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\beta} \right) + \right. \\ \left. + d_1 m \sin m\theta \left(G\omega \ln \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} \right) \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

Решая уравнение (47), найдем $w^{p(1)}$ с точностью до функции координаты θ .

$$\begin{aligned} w^{p(1)} = \frac{\beta}{G} \left[\left(k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta + \frac{a_1 - b_1}{2} \sin 2\theta \right) \left(G\omega\rho \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \ln \rho + \frac{\rho}{\beta} \right) + \right. \\ \left. + d_1 m \sin m\theta \left(G\omega\rho \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \ln \rho + \frac{\rho}{\beta} \right) \right] + \varphi(\theta). \end{aligned} \quad (48)$$

Функция $\varphi(\theta)$ определяется из условия непрерывности перемещений на упругопластической границе (16). В первом приближении это условие с учетом (23), (24) и (25) будет иметь вид

$$w^{p(1)} \Big|_{\rho=1} = w^{e(1)} \Big|_{\rho=1}. \quad (49)$$

Подставляя (48) и (36) в (49), а затем найденное выражение для функции $\varphi(\theta)$ в (48), получим поле перемещений в пластической области в первом приближении

$$\begin{aligned}
w^{p(1)} = \frac{1}{G} & \left[(k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta) \left\{ G\omega\beta\rho \left(\ln \left(\frac{1}{\rho} \right) + 1 \right) - \beta \ln \rho + \rho + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(\beta - 1)(1 + \alpha^2)}{1 - \alpha^2} - G\omega\beta - 1 \right\} + \right. \\
+ \frac{a_1 - b_1}{2} \sin 2\theta & \left\{ G\omega\beta\rho \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \beta \ln \rho + \rho + \frac{(\beta - 1)(1 + \alpha^4)}{2(1 - \alpha^4)} - G\omega\beta - 1 \right\} + \\
& + \sin m\theta \left\{ d_1 m \left(G\omega\beta\rho \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \beta \ln \rho - G\omega\beta \right) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{d_1\beta + 2G\omega d_2\alpha^{m+2}}{1 - \alpha^{2m}} \right\} \right]. \quad (50)
\end{aligned}$$

Используя вторые соотношения в (6), (9) и (10), а также и (28), (50), найдем компоненты деформации $\varepsilon_{\theta z}^{(1)}$ и $\varepsilon_{\theta z}^{p(1)}$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta z}^{(1)} = \frac{1}{2G} & \left[(-k_1^{(1)} \sin \theta + k_2^{(1)} \cos \theta) \left\{ G\omega\beta \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \beta \frac{1}{\rho} \ln \rho + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\rho} \left(\frac{(\beta - 1)(1 + \alpha^2)}{1 - \alpha^2} - G\omega\beta - 1 \right) + 1 \right\} + \right. \\
& + (a_1 - b_1) \cos 2\theta \left\{ G\omega\beta \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \beta \frac{1}{\rho} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\rho} \left(\frac{(\beta - 1)(1 + \alpha^4)}{2(1 - \alpha^4)} - G\omega\beta - 1 \right) + 1 \right\} + \right. \\
& m \cos m\theta \left\{ d_1 m \left(G\omega\beta \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \beta \frac{1}{\rho} \ln \rho - \frac{G\omega\beta}{\rho} \right) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{1 - d_1\beta + 2G\omega d_2\alpha^{m+2}}{\rho(1 - \alpha^{2m})} \right\} \right], \\
\varepsilon_{\theta z}^{p(1)} = \frac{1}{2G} & \left[(-k_1^{(1)} \sin \theta + k_2^{(1)} \cos \theta) \left\{ G\omega\beta \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \beta \frac{1}{\rho} \ln \rho + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\rho} \left(\frac{(\beta - 1)(1 + \alpha^2)}{1 - \alpha^2} - G\omega\beta - 1 \right) \right\} + \right. \\
& + (a_1 - b_1) \cos 2\theta \left\{ G\omega\beta \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \beta \frac{1}{\rho} \ln \rho + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\rho} \left(\frac{(\beta - 1)(1 + \alpha^4)}{2(1 - \alpha^4)} - G\omega\beta - 1 \right) + \frac{3}{4} \right\} + \right. \\
& m \cos m\theta \left\{ d_1 m \left(G\omega\beta \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \beta \frac{1}{\rho} \ln \rho - \frac{G\omega\beta}{\rho} \right) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{1 - d_1\beta + 2G\omega d_2\alpha^{m+2}}{\rho(1 - \alpha^{2m})} \right\} + \frac{a_1 + b_1}{4} \right].
\end{aligned}$$

На рис. 2 изображена упругопластическая граница в нулевом приближении ρ_0 и в первом приближении $\rho_s = \rho_0 + \delta\rho_1$ при $\delta = 0.04$, $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.6$, $b_1 = 0.4$, $a_1 = 0.3$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$, $m = 3$, $G\omega = 1$, $G = 323.67$.

На рис. 3, при тех же значениях параметров, представлено поле перемещений в упругой и пластической областях.

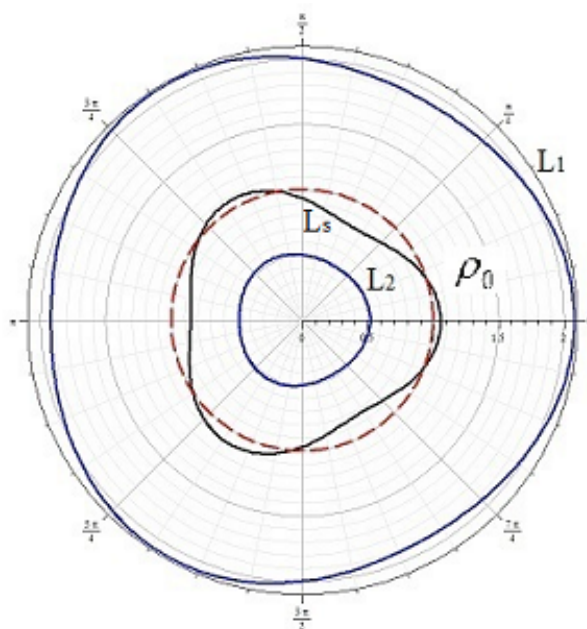


Рис. 2. Упругопластическая граница в нулевом и первом приближении.

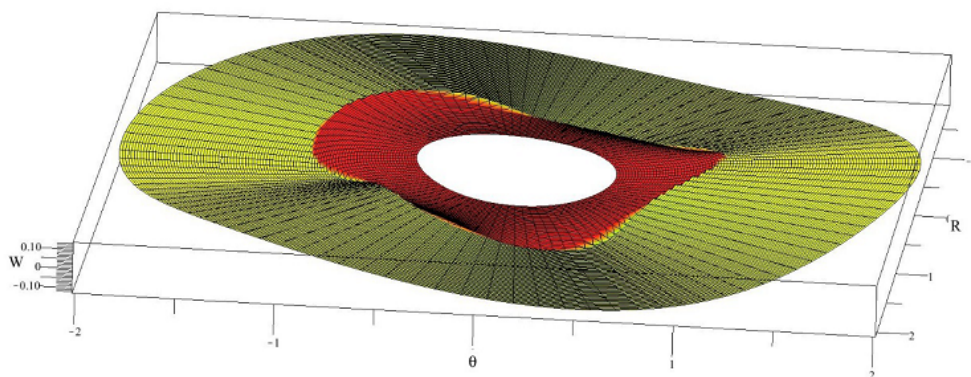


Рис. 3. Поле перемещений в упругой и пластической областях при первом приближении.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Задорожний В. Г., Ковалев А. В., Спорыхин А. Н. Об аналитичности решения плоской упругопластической задачи // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. № 1. С.138–146.
- [2] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
- [3] Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 560–600.
- [4] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [5] Ковалев А. В. Об учете ассоциированной сжимаемости упругопластических тел в случае плоской деформации // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1. С. 64–68.
- [6] Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д., Свиридов И. Э. Упругопластическое кручение толстостенной трубы в случае трансляционной анизотропии // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. Чебоксары, 2014. Ч. 1. С. 193–199.
- [7] Ковалев А. В., Горностаев К. К. Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы с учетом температуры для сложной модели среды // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 1. С. 135–140.
- [8] Ковалев А. В., Горностаев К. К. О симметричной деформации упрочняющейся упруговязкопластической трубы с учетом температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3. С. 176–184.
- [9] Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д. Об определении перемещений в задаче упругопластического кручения кругового цилиндра в случае трансляционной анизотропии // Материалы Всероссийской научной школы-конференции „Механика предельного состояния и смежные вопросы“, посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева. Чебоксары, 2015. С. 113–117.
- [10] Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д. Упругопластическое кручение кругового цилиндра в случае анизотропии согласно Хиллу // Сборник трудов Международной научно-технической конференции. Воронеж, 2015. С. 68–71.
- [11] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. О кручении анизотропных цилиндрических стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1 (9). С. 150–155.
- [12] Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. Неоднородные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2004. 219 с.
- [13] Фоминых С. О. Определение упругопластического состояния в толстостенной трубе при условии идеальнопластической анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2 (16). С. 150–153.

A. V. Kovalev, I. E. Sviridov, Ju. D. Scheglova

ELASTOPLASTIC TORSION OF THICK-WALLED NON-CIRCULAR CROSS-SECTION SHAFT IN CASE OF GENERAL FORM ANISOTROPY

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The present work is devoted to the problem of elastoplastic torsion of the thick-walled non-circular cross-section shaft. It is considered as an anisotropic material that in particular cases is in the kinematic properties of the anisotropy and anisotropy according to Hill. With using perturbation method, stress-strain state and elastoplastic boundary at first approximate is defined.

Keywords: stress, strain, elastoplastic torsion, anisotropy according to Hill, kinematic anisotropy.

REFERENCES

- [1] Zadorozhniy V. G., Kovalev A. V., Sporykhin A. N. An analytic solution of the plane elastoplastic problem // Russian Academy of Sciences. Mechanics of solid body. 2008. № 1. P. 138–146. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbing approximation in theory of elastoplastic body. M.: Science, 1978. 208 p. (in Russian).
- [3] Ivlev D. D., Mironov B. G. On ratio of translational perfectly plastic anisotropy at torsion // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 560–600. (in Russian).
- [4] Kachanov L. M. Basics of the theory of plasticity. M.: Science, 1969. 420 p. (in Russian).
- [5] Kovalev A. V. On account of the associated compressibility of the elastic-plastic bodies in the case of the plane strain // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2013. № 1. P.64–68. (in Russian).
- [6] Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Yu. D. Elastoplastic torsion of the thick-walled shaft in case of translational anisotropy // Materials of VIII All-Russian conference of mechanics of deformable bodies. Cheboksary, 2014. Vol. 1. P. 193–199. (in Russian).
- [7] Kovalev A. V., Gornostaev K. K. An elastoplastic state of thick-walled pipes with respect to temperature for the complex material model // Bulletin of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2015. № 1. P. 135–140. (in Russian).
- [8] Kovalev A. V., Gornostaev K. K. A symmetrical deformation of hardening elastoviscoplastic pipe with temperature// Bulletin of the Yakovlev Chuvash State

© Kovalev A. V., Sviridov I. E., Scheglova J. D., 2016

Kovalev Alexey Victorovich

e-mail: kav-mail@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of Mechanics and Computer Simulation, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Scheglova Julia Dmitrievna

e-mail: scheglova@gmail.com, Candidate of Phys. & Math., Ass. Professor of the Department of Mechanics and Computer Simulation, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Sviridov Ilya Eduardovich

e-mail: synettt@gmail.com, Post Graduate Student, Department of Mechanics and Computer Simulation, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 3. P. 176–184. (in Russian).

[9] Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Yu. D. Determination of displacements in problem of the elastoplastic torsion of the circle cross-section pipe in case of translational anisotropy // Materials of All-Russian Scientific School-Conference «Mechanics of limit state and related questions», dedicated on the 85th anniversary of Prof. D.D. Ivlev. Cheboksary, 2015. P. 113–117. (in Russian).

[10] Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Yu. D. Elastoplastic torsion of the circle pipe in case of anisotropy according Hill // Proceedings of the International scientific-technical conference. Voronezh, 2015. P. 68–71. (in Russian).

[11] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. Torsion of the anisotropy cylindrical // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2011. № 1 (9). P. 150–155. (in Russian).

[12] Sporykhin A. N., Kovalev A. V., Shcheglova Yu. D. One-dimensional problems of elastic visco-plasticity with an unknown boundary. Voronezh : Publishing House of Voronezh State University, 2004. 219 p. (in Russian).

[13] Fominyh S. O. Definition of elastoplastic state in the thick-walled pipe in case of ideal plastic translational anisotropy // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2013. № 2 (16). P. 150–153. (in Russian).

И. Е. Илларионов, И. А. Стрельников, В. А. Гартфельдер, О. В. Моисеева

ПРОТИВОПРИГАРНЫЕ ПОКРЫТИЯ ДЛЯ ЛИТЕЙНЫХ ФОРМ И СТЕРЖНЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ЛИТЕЙНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ НА ПРЕДПРИЯТИЯХ МАШИНОСТРОЕНИЯ

Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Представлены составы противопригарных покрытий для литейных форм и стержней, рекомендуемых к применению в литейном производстве на машиностроительных и металлургических предприятиях.

Ключевые слова: формы, стержни, противопригарное покрытие, краски, составы, седиментационная устойчивость.

УДК: 621.74

Введение противопригарных добавок в состав формовочных и стержневых смесей не всегда может обеспечить получение отливок без пригара. Одним из наиболее распространенных способов предупреждения образования пригара на отливках является нанесение защитного покрытия на поверхность изготовленных форм и стержней, которое препятствует проникновению жидкого металла в поры смеси и химическому взаимодействию, вследствие чего образуются различные оксиды металла и материала формы. Наиболее распространенным является образование оксида железа FeO и его взаимодействие с диоксидом кремния и образование фаялита $2FeO \cdot SiO_2$, отличающегося повышенной жидкотекучестью по сравнению с металлом. Формовочные краски должны обладать следующими свойствами: иметь повышенную термостойкость и не размягчаться от соприкосновения с расплавом, оставаться постоянной по

© Илларионов И. Е., Стрельников И. А., Гартфельдер В. А., Моисеева О. В., 2016

Илларионов Илья Егорович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой материаловедения и металлургических процессов, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Стрельников Игорь Анатольевич, кандидат технических наук, доцент кафедры материаловедения и металлургических процессов, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Гартфельдер Виктор Адольфович, кандидат технических наук, профессор, декан машиностроительного факультета, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Моисеева Ольга Валерьевна, инженер кафедры материаловедения и металлургических процессов, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 11.11.2016

составу во время приготовления, хранения и использования, то есть должны обладать высокой седиментационной устойчивостью, обладать хорошей кроющей способностью, не трескаться при сушке форм и стержней, после подсушки удерживаться на поверхности формы или стержня. Вне зависимости от их вида противопопригарные покрытия должны отвечать следующим основным требованиям: иметь высокие противопопригарные свойства; обладать высокой седиментационной устойчивостью, т. е. не расслаиваться после перемешивания компонентов и в течение определенного времени вплоть до применения; иметь хорошую кроющую способность, т. е. способствовать покрытию форм и стержней равномерным слоем заданной толщины; формировать хорошую адгезионную и когезионную прочность сцепления с поверхностью формы и стержня, предотвращающую отслаивание и осыпаемость красочного слоя при заливке форм жидким расплавом. На поверхность форм и стержней перед сборкой необходимо наносить противопопригарные покрытия, которые представляют собой суспензии – дисперсные структуры, состоящие из огнеупорного наполнителя, связующего материала, стабилизатора, растворителя и вспомогательных компонентов с заданными технологическими свойствами. После нанесения таких покрытий процесс формирования защитного слоя заключается в переходе жидкообразной системы в твердое деформируемое состояние.

Современные противопопригарные покрытия могут использоваться при окраске форм и стержней, при производстве средних и крупных чугунных отливок, мелких, средних и крупных отливок из углеродистой и легированной стали. Наиболее изученными и распространенными связующими при изготовлении фосфатных противопопригарных покрытий и красок являются: алюмофосфатное (АФС), алюмохромфосфатное (АХФС), магнийалюмофосфатное (МАФС). В составе фосфатных связующих отсутствуют фенол, формальдегид и другие токсичные вещества, что очень важно в условиях литейного производства. Применяемое в составах покрытий алюмохромфосфатное связующее является высокотемпературным (до 1800 °С) связующим на основе фосфатов алюминия и магния, оксидов хрома, стойкость в 3–4 раза выше по сравнению со связками на основе жидкого стекла. АХФС – это полимер, который обладает клеящей способностью в исходном состоянии и дополнительно способностью к отверждению на воздухе. При нагревании до 150–200 °С происходит интенсивная полимеризация связующего с образованием аморфных и кристаллических фаз, которые и обеспечивают прочностные свойства покрытий и смесей [1].

Состав противопопригарного покрытия готовят следующим образом. В смеситель заливают воду, затем при перемешивании загружают алюмохромфосфатное связующие, отход электросталеплавильного производства, дистенсиллиманит и бентонит в определенных количествах. Приготовленный состав наносят на формы и стержни известными способами и сушат по стандартной (общепринятой) технологии.

Отличием предлагаемого решения от известных является введение в состав противопопригарного покрытия новых ингредиентов – пылевидного отхода электросталеплавильного производства и бентонита, а также использование в данной совокупности ингредиентов, а в качестве огнеупорного наполнителя – дистенсиллиманита, что обеспечивает улучшение физико-механических свойств покрытия, а именно: повышение прочности покрытия к истиранию и улучшение кроющей способности.

Выбор оптимальных количеств ингредиентов обусловлен тем, что при меньшем содержании отхода электросталеплавильного производства снижается прочность на

истирание покрытия, а при большем – резко снижается седиментационная устойчивость, ухудшается кроющая способность.

Количество бентонита повышает склонность красочного слоя к трещинообразованию, а при уменьшении содержания бентонита снижается седиментационная устойчивость покрытия.

Состав противопригарного покрытия для литейных форм и стержней, включающий огнеупорный наполнитель, алюмохромфосфатное связующее и воду, отличается тем, что он дополнительно содержит бентонит и пылевидный отход электросталеплавильного производства, содержащий, мас. %:

Оксид магния 10–15

Оксид кальция 4–6

Оксид алюминия 11–13

Диоксид кремния 8–10

Углерод 0.5–2.0

Оксид железа остальное.

В качестве огнеупорного наполнителя используется дистенсиллиманит при следующем соотношении ингредиентов покрытия, мас. %:

Дистенсиллиманит 33–35

Бентонит 2–4

Алюмохромфосфатное связующее 2–30

Пылевидный отход

электросталеплавильного производства,

улавливаемый системой Бигхауз 4–6

Вода – остальное.

Многие известные составы противопригарных покрытий характеризуются нестабильными показателями кроющей способности и невысокими показателями прочности к истиранию получаемого покрытия. Данный состав решает задачу улучшения физико-механических свойств противопригарных покрытий. Это достигается тем, что в состав, содержащий алюмохромфосфатное связующее (АХФС), воду, огнеупорный наполнитель, дополнительно вводят бентонит и отход электросталеплавильного производства (ОЭСП), образующийся в электродуговых печах, улавливаемый фильтрами в виде пыли вышеприведенного химического состава.

На кафедре «Материаловедение и металлургические процессы» Чувашского государственного университета имени И. Н. Ульянова под руководством д. т. н., профессора, заслуженного деятеля науки и техники Российской Федерации и заслуженного деятеля науки Чувашской Республики Илларионова И. Е., разработаны и запатентованы современные противопригарные составы и покрытия для литейных форм и стержней, которые успешно прошли опытно-промышленные испытания в производственных условиях концерна «Тракторные заводы». Противопригарная краска для литейных форм и стержней, содержащая огнеупорный наполнитель, бентонит и воду, отличается тем, что она дополнительно содержит лигносульфонат технический и мыло хозяйственное, а в качестве огнеупорного наполнителя используется цирконовый концентрат при следующем соотношении компонентов, мас. % [2]:

Цирконовый концентрат 60–67

Бентонит 1–3

Лигносульфанат технический 2–5

Мыло хозяйственное 0,5–2

Вода – остальное.

Задачей изобретения является создание противопопригарной краски для литейных форм и стержней с улучшенными технологическими и эксплуатационными характеристиками. Отличительными признаками заявляемого изобретения являются вышеперечисленные дополнительные компоненты и соотношение их с уже известными. Такое соотношение новых признаков с известными позволяет получить противопопригарную краску с улучшенными физико-механическими характеристиками, удовлетворяющими требованиям нормативно-технической документации, что позволяет расширить ассортимент составов для производства противопопригарных красок.

Противопригарную краску готовят следующим образом. В специальную краскомешалку загружают бентонит, предварительно просеянный через сито и замоченный на сутки в воде из расчета 1:5 до сметанообразного состояния. Затем в краскомешалку добавляют мыло хозяйственное, растворенное в воде. К полученной смеси добавляют лигносульфонат технический и тщательно перемешивают, после чего вводят цирконный порошок и остальное количество воды и перемешивают 10–15 мин.

Состав противопопригарного покрытия для литейных форм и стержней, содержащий огнеупорный наполнитель – дистенсиллиманит, алюмохромфосфатное связующее и воду, отличается тем, что оно дополнительно содержит каолиновую глину и трепел при следующих соотношениях компонентов, мас. % [3]:

Дистенсиллиманит 33–35

Алюмохромфосфатное
связующее 12–30

Каолиновая глина 2–5

Трепел 4–7

Вода – остальное.

Задачей изобретения является создание состава противопопригарного покрытия для литейных форм и стержней с улучшенными качественными показателями, расширяющими ассортимент противопопригарных материалов для литейного производства. Технический результат – улучшение технологических и эксплуатационных характеристик. Отличием заявляемого состава от известного является использование трепела с каолиновой глиной, алюмохромфосфатным связующим и водой. Образуется достаточно прочная суспензия, за счет чего уменьшается толщина проникновения ее в поверхность литейных форм. А присутствие огнеупорного наполнителя – дистенсиллиманита – снижает гигроскопичность покрытия, улучшает его седиментационную устойчивость, а также увеличивает прочность покрытия к истиранию. Также сочетание огнеупорного наполнителя с фосфатным связующим увеличивает термостойкость противопопригарного покрытия. Состав противопопригарного покрытия для литейных форм и стержней готовят следующим образом. В смеситель наливают воду, затем при перемешивании загружают алюмохромфосфатное связующее, дистенсиллиманит, каолиновую глину и трепел. После перемешивания приготовленный состав наносят на формы и стержни известным способом и сушат по известной технологии.

Карбонатно-кремниевые цеолитсодержащие породы Чувашской Республики, известные под названием трепелов, распространены в юго-восточной части Алатырского района, в пределах водораздельных площадей. Химический состав их следующий: оксиды кремния – 60,3–72,5; оксиды железа – 2,8–4,2; оксид алюминия – 8,4–10,1; оксид кальция – 2,6–12,3; оксид магния – 0,9–1,2; оксид натрия – 0,18–0,29; оксид калия – 1,4–1,5, мас. %. Запасы вышеуказанной породы в Чувашии исчисляются сотнями тысяч

тонн, что вполне достаточно для обеспечения потребностей литейного производства России и стран ближнего и дальнего зарубежья.

Технический результат достигается тем, что противопопригарная краска для литейных форм и стержней, содержащая маршалит, цирконосодержащий компонент, воду и связующее, согласно изобретению в качестве связующего содержит водно-дисперсное связующее на основе коллоидного кремния, а в качестве цирконосодержащего компонента – цирконовую пасту при следующем соотношении компонентов в масс. % [4]:

Цирконовая паста 0,5–3

Водно-дисперсное связующее на основе коллоидного кремния 1–3

Маршалит 86–91,5

Вода – остальное.

Отличительными признаками заявляемого изобретения являются вышеперечисленные дополнительные компоненты и соотношение их с уже известными. Такое соотношение позволяет получить противопопригарную краску с улучшенными физико-механическими характеристиками, удовлетворяющими требованиям нормативно-технической документации, что позволяет расширить ассортимент составов для производства противопопригарных красок. Количественный состав противопопригарной краски является оптимальным. Увеличение содержания составляющих выше указанных пределов приводит к снижению седиментационной устойчивости и резкому повышению плотности, что ухудшает кроющую способность краски, тем самым затрудняет получение ровного покровного слоя. При уменьшении содержания составляющих также ухудшается кроющая способность и снижается прочность покрытия. Противопопригарную краску готовят следующим образом: в специальную краскомешалку загружают маршалит, цирконовую пасту и водно-дисперсное связующее на основе коллоидного кремния (Армосил А). К полученной смеси добавляют воду и перемешивают 10–15 мин. Полученная противопопригарная краска имеет плотность 1,8–1,9 г/см³.

Представленные и запатентованные современные составы противопопригарных покрытий для литейных форм и стержней, рекомендуются к применению в литейном производстве.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Илларионов И. Е. и др. Металлофосфатные связующие и смеси / под общ. ред. И. Е. Илларионова. Чебоксары : ЧГУ, 1995. 524 с.

[2] Пат. 2574615 Российская Федерация. Противопопригарная краска для литейных форм и стержней / Илларионов И. Е., Стрельников И. А. и др. – опубл. 10.02.16.

[3] Пат. 2574616 Российская Федерация. Состав противопопригарного покрытия для литейных форм и стержней / Илларионов И. Е., Стрельников И. А. и др. – опубл. 10.02.16.

[4] Пат. 2585607 Российская Федерация. Противопопригарная краска для литейных форм и стержней / Илларионов И. Е., Стрельников И. А. и др. – опубл. 27.05.16.

I. E. Illarionov, I. A. Strelnikov, V. A. Hartfelder, O. V. Moiseeva

**NONSTICK COATINGS FOR CASTING MOLDS AND CORES USED
IN FOUNDRIES AT MACHINE-BUILDING ENTERPRISES**

Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia

Abstract. The compounds of nonstick coatings for casting molds and cores, recommended for use in foundries on machinery and metallurgical enterprises, are presented.

Keywords: shapes, rods, nonstick coating, paints, compounds, sedimentation stability.

REFERENCES

- [1] Illarionov I. E. i dr. Metallofosfatnye svjazujushie i smesi / pod obshh. red. I. E. Illarionova. Cheboksary : ChGU, 1995. 524 s. (in Russian).
- [2] Pat. 2574615 Rossijskaja Federacija. Protivoprigarnaja kraska dlja litejnyh form i sterzhnej / Illarionov I. E., Strel'nikov I. A. i dr. – opubl. 10.02.16. (in Russian).
- [3] Pat. 2574616 Rossijskaja Federacija. Sosstav protivoprigarnogo pokrytija dlja litejnyh form i sterzhnej / Illarionov I. E., Strel'nikov I. A. i dr. – opubl. 10.02.16. (in Russian).
- [4] Pat. 2585607 Rossijskaja Federacija. Protivoprigarnaja kraska dlja litejnyh form i sterzhnej / Illarionov I. E., Strel'nikov I. A. i dr. – opubl. 27.05.16. (in Russian).

Illarionov Il'ja Egorovich, Ph. D., Professor, Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

Strelnikov Igor' Anatol'evich, Ph. D., Ass. Professor, Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

Hartfelder Viktor Adol'fovich, Candidate of Technical Sciences, Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

Moiseeva Ol'ga Valer'evna, Engineer, Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

О. В. Марченко, А. М. Сергеева

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЯЖЕЛОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ИЗУЧЕНИЮ ПРОЧНОСТИ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Применяя теорию малых упругих деформаций и апробированный численный метод, строится математическая модель для исследования напряженно-деформированного состояния упругой изотропной пластины конечной толщины, находящейся под воздействием системы нагрузок. Показано применение разработанной модели для анализа напряженно-деформированного состояния ледяного покрова, претерпевающего деформирующее воздействие со стороны ледокольного устройства, а также показана пригодность данной модели для анализа эффективности ледоразрушающей способности устройств.

Ключевые слова: математическая модель, численное моделирование, сложное нагружение, теория упругости, деформирование, напряжения, ледяной покров.

УДК: 539.3

Введение. Проблеме разработки математических моделей для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) материалов, исследования поведения объектов, находящихся под действием нагрузок, решения контактных задач посвящено много работ российских и зарубежных исследователей. Проведение теоретических исследований с применением математического моделирования позволяет получать новые знания с минимальными временными и сырьевыми затратами, а также дает возможность детально изучать образование и распространение трещин в материале, спрогнозировать возможные области, являющиеся концентраторами напряжений, и предупреждать возможные нежелательные разрушения.

Моделирование исследуемых объектов в качестве упругой изотропной пластины конечной толщины часто используется для исследования бетонных металлических конструкций, но также может быть применено к исследованиям ледяного покрова [1], [2].

© Марченко О. В., Сергеева А. М., 2017

Марченко Олеся Владимировна

e-mail: olemarchenko@yandex.ru, соискатель, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Сергеева Анастасия Михайловна

e-mail: serg-nasty@mail.ru, кандидат физико-математических наук, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Поступила 09.10.2016

Разрабатывая матмодель процесса деформирования или разрушения объекта необходимо учитывать особенности материалов, их поведение при внешнем воздействии и воздействии температурных полей. Моделируя процессы, протекающие в ледяном покрове, необходимо учитывать, что физические и механические свойства исследуемого материала являются зависимыми от температуры.

Исследуя особенности ледяного покрова и процессы нарушения его сплошности в результате внешнего деформирующего воздействия методами математического моделирования, еще на стадии разработки математической модели необходимо учитывать, что некоторые задаваемые величины являются известными (например, параметры ледоразрушающего устройства), тогда как другие могут быть случайными (толщина льда, скорость ледового поля и т. д.). Необходимо также максимально учитывать всевозможные сочетания параметров окружающей среды, которые могут оказывать существенное влияние на протекание процессов в исследуемом объекте или объектах. Проводя исследования ледяного покрова, необходимо учитывать тот факт, что напряжения растяжения или сдвига, при которых происходит полное разрушение ледяного покрова, должны в несколько раз превышать предел прочности льда, определенный для образца в лабораторных условиях [3]. В случае, если напряжения незначительно превышают предел прочности, то может образовываться трещина или группа трещин, а лед при этом переходит в новое устойчивое состояние и способен выдерживать внешнюю нагрузку.

Разрабатывая математическую модель, необходимо учитывать не только физические особенности моделируемого процесса, но необходимо прорабатывать модель для решения широкого круга задач с применением такой модели, например, модель должна позволять решать задачи о нагружении объекта не только квазистационарной нагрузкой, но и движущейся или даже внедряющейся. По возможности математическая модель должна быть универсализирована и при необходимости легко адаптироваться для конкретного случая.

В данной работе рассмотрено построение математической модели для проведения исследований объектов, которые можно представить в виде упругой изотропной пластины конечной толщины, находящейся под действием квазистатических и динамических нагрузок, а также инородных исследуемому объекту нагрузок, которые имеют возможность внедряться в пластину. После построения математической модели показано ее практическое применения для анализа НДС ледяного покрова, претерпевающего сложное нагружение. Проведен анализ полученных результатов и сделано заключение о практической применимости рассмотренной математической модели.

Математическая модель. Разрабатывая математическую модель для анализа НДС деформируемой внешним воздействием упругой изотропной пластины конечной толщины, необходимо определиться с рядом допущений: во-первых, физические и механические свойства материалов, составляющих исследуемый объект, не являются константами, а зависят от условий окружающей среды, а именно от температуры; во-вторых, при моделировании движущейся нагрузки система отсчета может быть привязана как к подвижной нагрузке, так и к пластине. В зависимости от того, с каким объектом связана система отсчета, будут определяться и назначаться скорости объектов, являющихся составляющими исследуемой системы; в-третьих, сила тяжести относится к внешним силам.

Используя уравнения теории упругости для малых деформаций, запишем систему дифференциальных уравнений в эйлеровой системе координат:

Уравнение движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i^t = I_i^t; \quad i, j, k = 1, 2, 3; \quad t = 1, 2 \dots n - \text{номер нагрузки} \quad (1)$$

$$I_i^t = \rho_t \left(\dot{v}_i + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) - \text{в случае подвижной нагрузки} \quad (2)$$

$$I_i^t = \rho_t \left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) - \text{в случае стационарного движения нагрузки} \quad (3)$$

$$I_i^t = 0 - \text{в случае неподвижной нагрузки} \quad (4)$$

Закон Гука

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G \varepsilon_{ij}; \quad \text{где } \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (5)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Дополнительное условие в случае всестороннего сжатия

$$\frac{d\sigma}{d\tau} - k_t \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6)$$

для стационарного случая

$$\varepsilon_{ii} = 3k_t \sigma; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (7)$$

Уравнение теплопроводности (только для пластины)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

В уравнениях (1)–(8) используется суммирование по повторяющимся индексам, θ – температура льда, $\rho = \rho(\theta)$ – плотность льда, $G = G(\theta)$ – модуль сдвига льда, σ_{ij} – тензор напряжений, ε_{ij} – тензор деформаций, v_i, F_i – проекции скорости перемещений и удельной объемной силы по координатным осям x_i , $i = 1, 2, 3$, λ – коэффициент теплопроводности, $\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial \tau}$, τ – время деформации.

По краям пластины при необходимости можно задавать условия закрепления уравнением:

$$\sigma_{ij} = -\psi \tau_S \frac{v_{СК}}{|v|}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (9)$$

где τ_S – предел текучести на сдвиг материала пластины, $v_{СК}$ – скорость перемещения пластины относительно основы закрепления, ψ – коэффициент трения, $|v|$ – нормирующая скорость.

Постановка и решение задачи с применением математической модели. Применение предлагаемой математической модели рассмотрим на примере решение задачи о деформировании упругой изотропной пластины, материал которой – пресный лед. Ледяная пластина претерпевает деформирующее воздействие со стороны ледокольного судна. Ледокольное устройство представляет собой приставку [4] и схематично представлено на рис. 1. В носовой части судна 1 при помощи креплений 2 устанавливаются ледокольную приставку 3, перед которой в ледяном покрове 4 создают

свободную кромку 5. Приставку 3 выполняют в виде плавучей конструкции, в вертикальной плоскости 6 которой устанавливают форштевень 7, наклоненный под углом к горизонтальной поверхности, а по бортам – боковые ножи 8 с углом β и наклоненные к горизонту под таким же, но отрицательным по отношению к форштевню углом. Благодаря такой геометрической форме форштевня и боковым ножам при их контакте со свободной кромкой 5 в ледяном покрове между ножами 8 будут возникать сжимающие усилия 9. При определенном расстоянии $2b_0$ усилиях 9 это приведет к потере устойчивости формы участка льда 10 и его разрушению. Отломанный участок льда 10 от сплошного льда 4 притопится наклонным днищем приставки 3, и его обломки бортами 11 судна раздвинутся под кромки образовавшегося канала 12.

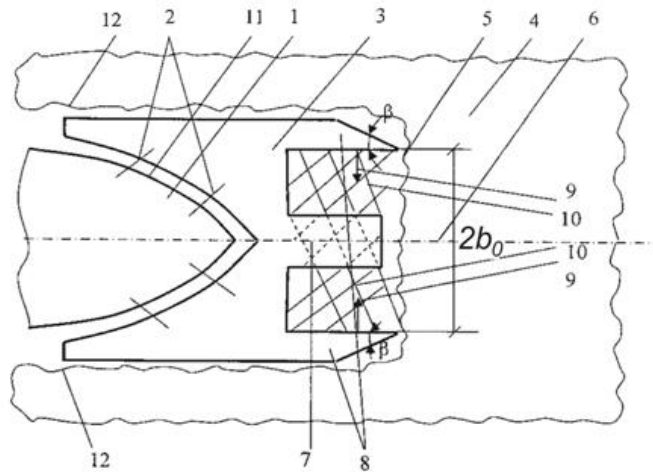


Рис. 1. Схема ледокольного устройства

Известно, что ледяной покров неоднороден из-за условий его формирования и наличия всевозможных включений: пузырьков воздуха, песчинок, камней и др. Сплошным лед также трудно назвать, в нем имеются температурные и деформационные трещины, образующиеся в процессе роста льда и движения ледовых масс. Возникающие в процессе жизненного цикла льда сквозные трещины могут залечиваться, в результате заполнения их водой на 90 % и последующей ее кристаллизации, причем в случае такого восстановления сплошности ледяного покрова прочностные свойства льда возрастают. Достаточно сложно учесть все возможные особенности льда, поэтому при решении задач, связанных с анализом напряженно-деформированного состояния льда, применяют модели упругих изотропных пластин конечной толщины. Предложенную в работе модель упругой изотропной пластины конечной толщины с учетом ее сжимаемости можно применить к решению задачи о деформировании и разрушении льда ледокольной приставкой. Примем, что рассматриваемая ледяная пластина имеет распределение температур по толщине от -5°C до -30°C , в таком диапазоне температур лед ведет себя упруго. Для решения задачи примем модуль Юнга и коэффициент Пуассона зависимыми от температуры и согласно работам [5], [6] равными соответственно $E = (87.6 - 0.21\theta - 0.0017\theta^2) 10^2$ МПа, $\nu = 0.5 + 0.003\theta$; коэффициент объемного сжатия (k) примем равным $k = (1 - 2\nu)/E$, модуль сдвига – $G = E/2(1 + \nu)$. В

качестве критических напряжений примем напряжения $\sigma_{кр}^{рас} = 4$ МПа, $\sigma_{кр}^{сж} = -8$ МПа, установленные в работе [5]. Процессы, происходящие в материале, из которого выполнены клин и форштевень устройства, не являются объектами исследования в данной работе, поэтому трением на контактных со льдом поверхностях устройства пренебрегаем. Воспользуемся решением уравнения теплопроводности, приведенным в работах [7], [8] с учетом $\lambda = \lambda_0 (1 + a\theta)$, где $a = -0.0159$ град⁻¹.

$$\theta = -\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{x_1}{h_0} \left(\frac{2\theta_1}{a} + \theta_1 \right)} \quad (10)$$

Рассмотрим половину области деформирования ледяного покрова в сечении Ox_1x_2 , проходящим вдоль судна. На рис. представлена схема, поясняющая назначение граничных условий для решения указанной задачи.

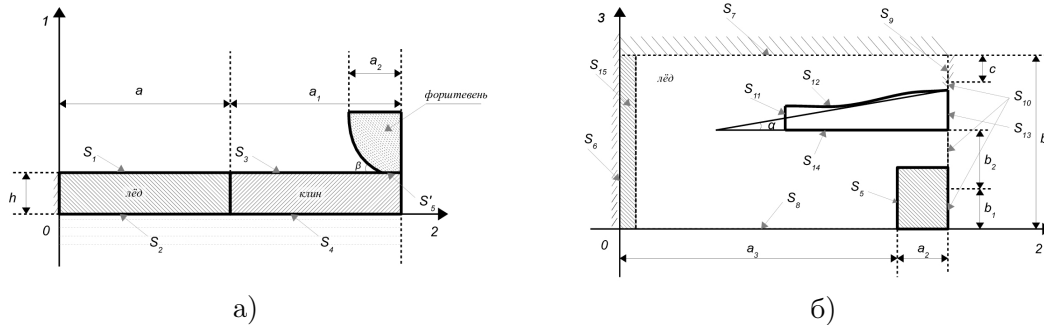


Рис. 2. Схема к расчету деформации ледяной пластины: а) в плоскости Ox_1x_2 ; б) в плоскости Ox_2x_3

В представленной схеме выделены поверхности, характеризующие взаимодействия ледяного покрова с нагрузками и окружающей средой. В плоскости Ox_2x_3 на расстоянии h_0 (толщина ледяного покрова) от нижней плоскости льда определены три области S_1, S_3, S_5 , моделирующие соответственно поверхность взаимодействия льда с атмосферой, поверхность взаимодействия клина с атмосферой, поверхность взаимодействия льда с форштевнем. На поверхности льда, расположенной в плоскости Ox_2x_3 , при $h_0 = 0$ выделены поверхности S_2, S_4 , характеризующие соответственно взаимодействие нижней поверхности ледяной пластины и нижней поверхности клина с водой. Также выделена поверхность S_{15} с целью имитации закрепления исследуемой области льда с неподвижным полем ледяного покрова. В плоскости Ox_1x_3 выделен ряд поверхностей, ограничивающих исследуемую область и характеризующих: S_6 – взаимодействие исследуемой области льда и с ледяным полем, S_{10} – взаимодействие свободного края льда с атмосферой, S_{13} – взаимодействие рассматриваемой части клина с основной частью ледокольной приставки, S_{11} – взаимодействие острия клина со льдом, S_9 – взаимодействие исследуемого льда с ледяным полем. В плоскость симметрии смоделирована поверхностью S_8 , поверхность S_7 , расположенная в плоскости Ox_1x_2 на расстоянии b от плоскости симметрии, характеризует взаимодействие исследуемой ледяной области с неподвижным ледяным полем. Поверхности S_{12}, S_{14} ограничивают область, моделирующую внедрение инородного льду объекта клиновидной формы, деформационные процессы в области ограниченной поверхностями $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}$ в рамках данной задачи не исследуются.

Начальные условия задачи:

$$v_i|_{\tau=0} = 0, \quad \varepsilon_{ij}|_{\tau=0} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Граничные условия задачи, в соответствии с рис. :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}|_{S_1} = -p_0; \quad \sigma_{11}|_{S_2} = -(p_0 + \gamma h_0); \quad \sigma_{11}|_{S_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3; \\ (\sigma_{12} = \sigma_{13})|_{S_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 15; \quad \sigma_{22}|_{S_i} = 0, \quad i = 6, 13; \\ (\sigma_{21} = \sigma_{23})|_{S_i} = 0, \quad i = 6, 10, 11, 12, 13, 14; \quad \sigma_{22}|_{S_{10}} = -p_0; \\ \sigma_{22}|_{S_{13}} = 0; \quad (\sigma_{31} = \sigma_{32})|_{S_i} = 0, \quad i = 7, 8, 12, 14; \quad v_1|_{S_5} = -V \operatorname{tg}(\beta); \\ v_1|_{S_{15}} = 0; \quad v_2|_{S_i} = 0, \quad i = 7, 8; \quad v_2|_{S_{11}} = -V; \quad v_2|_{S_9} = 0; \\ v_3|_{S_i} = 0, \quad i = 7, 8, 14; \quad v_3|_{S_{12}} = V \sin(\alpha). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь p_0 – атмосферное давление; γ – удельный вес льда, h_0 – толщина льда; V – скорость движения ледокольной приставки; β – угол наклона форштевня относительно верхней поверхности льда, принят равным 10° ; α – угол острия клина, принят равным 25° .

При решении задачи применялся численный метод [9], в соответствии с которым исследуемая область представляется в виде объемных ортогональных ячеек конечных размеров, количество ячеек – 2500 штук. Для каждой ячейки записывается система уравнений в разностном виде в количестве 7680. Расчетное время одной итерации, произведенной на компьютере с процессором на базе INTEL(R) Core (TM)i5CPU 760@2.80GHz составило 54 с. Для сходимости решения с установленной точностью 0.001 потребовалось 24 итерации на каждом временном шаге. Решение системы уравнений производится по алгоритму, описанному в работах [10], [11], с применением программного продукта [12].

Результаты исследований. Исследованию напряженно-деформированного состояния подвергался ледяной покров, находящийся под воздействием ледокольного устройства [2]. Для проведения численных исследований в соответствии со схемой, представленной на рис. , для льда и устройства назначались следующие параметры: a – 35 м, a_1 – 3 м, a_2 – 1 м, a_3 – 0,03 м, b – 25.6 м, b_1 – 3 м, b_2 – 1,5 м, b_3 – 0.8 м, c – 20 м. Скорость устройства задавалась последовательно равной 6 км/ч, 8 км/ч, 10 км/ч. Время всего исследуемого процесса принималось $\tau = 0,4$ с, $\Delta\tau = 0,1$ с. Толщина ледяного покрова h_0 принималась равной 0,5 м, так как авторы, предлагающие устройство для разрушения льда, полагают, что данное судно способно преодолеть лед толщиной до 1 метра, причем рабочая толщина должна быть не более 0,5 м.

Устойчивость полученных решений проверялась численно при варьировании задаваемых параметров в пределах 0.01 %. В результате вычислений решения, полученные при задании параметров с погрешностью, и без нее совпали, соответственно получаемые решения можно считать устойчивыми. При проведении вычислений проводился контроль значений касательных напряжений. Расчетные значения касательных напряжений всегда на порядок были меньше нормальных напряжений, поэтому нормальные напряжения принимались главными.

Рассмотрим более подробно результаты численного решения, и определим возможность разрушения льда данным ледокольным судном на основании анализа НДС ледяной пластины, претерпевающей сложное нагружение.

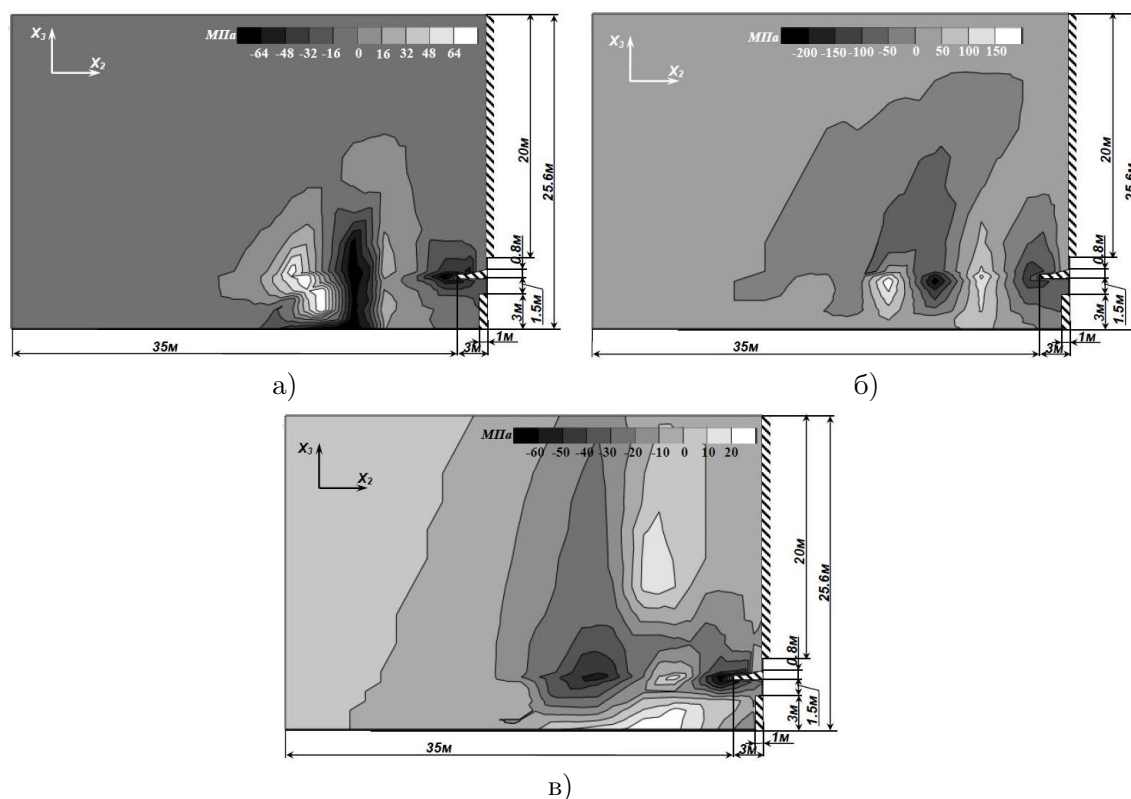


Рис. 3. Схема распределения напряжений σ_{22} в приповерхностных слоях ледяного покрова, находящегося под действием системы нагрузок при скорости движения ледокольного судна
 а) 6 км/ч; б) 8 км/ч; в) 10 км/ч

В данной работе рассматривается процесс до зарождения и развития трещин во льду. На рис. приведено распределение напряжений в верхних слоях ледяной пластины, при контакте льда с ледокольным судном при различных скоростях движения судна до момента столкновения со льдом. Сжимающий характер напряжений преимущественно фиксируется в ледяном покрове вдоль прямой движения устройства. Наибольшие сжимающие напряжения σ_{22} характерны для областей, расположенных фронтально от клина. При всех рассматриваемых скоростях движения устройства в ледяном покрове напряжения σ_{22} по всей исследуемой области деформирования распределяются волнообразно и с удалением от устройства – сглаживаются. Волнообразное распределение напряжений σ_{22} , выражающееся в чередовании растягивающих и сжимающих напряжений, при скорости устройства 8 км/ч просматривается наиболее четко, чем при скоростях 6 км/ч и 10 км/ч (рис. , б).

Анализируя рис. и можно с уверенностью утверждать, что в ледяном покрове, находящемся под действием нескольких нагрузок, обеспечиваемых ледокольным устройством, имеется достаточно большое количество областей, в которых напряжения превышают критические. Чередование областей с большими растягивающими и сжимающими напряжениями свидетельствует о том, что ледяная пластина будет активно деформироваться, причем наличие областей с растягивающими напряжениями

в верхних слоях сопровождается наличием сжимающих напряжений на противоположной стороне ледяной пластины. Таким образом, можно утверждать, что в ледяном покрове будет наводиться изгибающий момент, который в свою очередь будет способствовать еще большему деформированию льда, приводящему к нарушению сплошности. В настоящей работе не рассматривается вопрос о возникновении и развитии нарушений сплошности, которые могут приводить лед к разрушению, а также не затрагивается вопрос о перераспределении нагрузок вследствие нарушения сплошности ледяного покрова и его переход в новое устойчивое состояние.

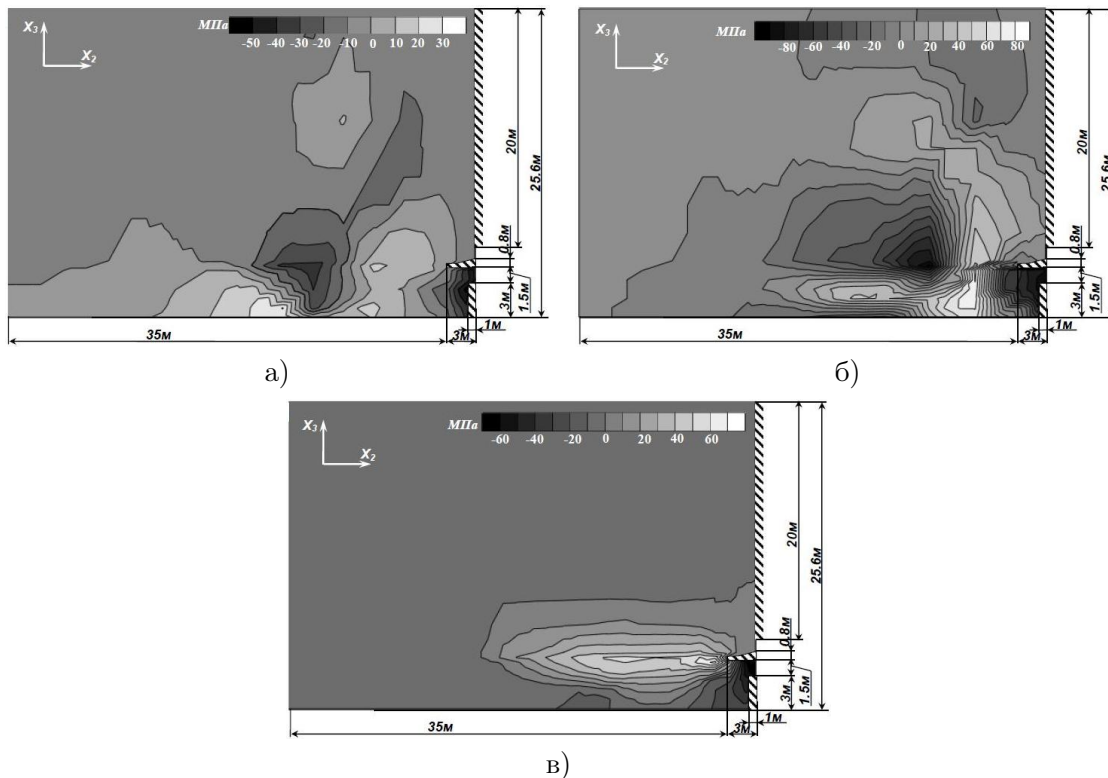


Рис. 4. Схема распределения напряжений σ_{33} в приповерхностных слоях ледяного покрова, находящегося под действием системы нагрузок при скорости движения ледокольного судна
а – 6 км/ч; б – 8 км/ч; в – 10 км/ч

Наиболее эффектная деформационная картина наблюдается при скорости передвижения устройства 8 км/ч. При скоростях перемещения устройства равных 6 км/ч и 10 км/ч, ледяная пластина, в силу своих физических свойств и инерционности, соответственно успевает перераспределить возникающие в ней напряжения или не успевает отреагировать на нагрузку. Схемы распределения напряжений, представленные на рис. и не противоречат известным положениям о физических и механических свойствах пресного льда.

Вывод. Проведенные в работе исследования ледяного покрова, находящегося под действием нескольких нагрузок, с применением разработанной математической модели однородной изотропной пластины конечной толщины, находящейся под действием системы нагрузок, показали пригодность разработанной модели для проведения исследований напряженно-деформированного состояния нагруженных пластин.

Результаты численных исследований показали, что данное ледокольное устройство может быть использовано для разрушения ледяного покрова толщиной 0,5 м, причем оптимальная скорость устройства равна 8 км/ч.

Предложенная математическая модель деформирования системой нагрузок однородной изотропной пластины конечной толщины и результаты исследования напряженно-деформированного состояния ледяного покрова могут быть использованы для разработок инновационных способов разрушения льда и прокладывания судоходных каналов в зимние периоды на реках северных регионов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лосет С., Шхинек К., Гудместад О., Хойланд К. Воздействие льда на морские и береговые сооружения. СПб. : Издательство «Лань», 2010. 272 с.
- [2] Козин В. М., Онищук А. В., Марьин Б. Н., Иванов Ю. Л., Повзык Н. Г., Шпорт В. П. Ледоразрушающая способность изгибно-гравитационных волн от движения объектов. Владивосток : Дальнаука, 2005. 191 с.
- [3] Сергеева А. М. Моделирование разрушения ледяного покрова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 1. С. 131–137.
- [4] Пат. 2229415 Российской Федерации. Устройство для разрушения ледяного покрова / Горкунов Э. С., Колмогоров В. Л., Козин В. М., Одинокоев В. И. – опубл. 27.05.04.
- [5] Богородский В. В., Гаврило В. П. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л. : Гидрометеиздат, 1980.
- [6] Богородский В. В., Гаврило В. П., Недошивин О. А. Разрушение льда. Методы, технические средства. Л. : Гидрометеиздат, 1983.
- [7] Сергеева А. М., Одинокоев В. И., Марченко О. В. Математическое моделирование процессов деформирования пластины конечной толщины, находящейся под действием системы нагрузок // Приоритеты и научное обеспечение технологического прогресса : сборник статей Международной научно-практической конференции. Уфа : Аэтерна, 2016. С. 100–102.
- [8] Сергеева А. М., Марченко О. В. Применение математической модели деформирования пластины конечной толщины для исследования напряженно-деформированного

состояния ледяного покрова // Инновационные исследования: Проблемы и направления развития : сборник статей Международной научно-практической конференции: в 2 ч. Ч. 1. Уфа : МЦИИ ОМЕГА САЙНС, 2016. С. 8–11.

[9] Одинокое В. И. Численное исследование процесса деформации материалов бескоординатным методом. Владивосток : Дальнаука, 1995. 168 с.

[10] Сергеева А. М., Одинокое В. И., Марченко О. В. Определение напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при движении под ним ледокольной приставки // Математическое моделирование. 2009. № 10. С. 47–57.

[11] Сергеева А. М., Марченко О. В. Деформация ледяного покрова под действием атмосферного давления и собственного веса льда // Труды НГТУ им. Р. Е. Алексеева. Н. Новгород : НГТУ им. Р. Е. Алексеева. 2010. № 4 (83). С. 157–165.

[12] Свидетельство № 2007614584 Российская Федерация. Моделирование процесса разрушения ледяного покрова с помощью ледокольной приставки: свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ / Одинокое В. И., Сергеева А. М., Захарова Е. А. – № 2007612232; зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 31.10.2007.

O. V. Marchenko, M. A. Sergeeva

**ABOUT THE PECULIARITIES DEFORMATION OF SEVERE ELASTIC PLATE
OF FINITE THICKNESS UNDER THE ACTION OF A MOVING LOAD FOR
EXPLORING OF STRENGTH OF THE ICE COVE**

*Institute of Machinery and Metallurgy of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences,
Komsomolsk-on-Amur, Russia*

Abstract. The mathematical model has been made with the applying of theory of small elastic strains and well-tested numerical method for research of stress-strain state of elastic isotropic plate of finite thickness under the influence of the system load. The application of the developed model for the analysis of stress-strain state of the ice cover, which undergoes of deformation by the icebreaking device was shown. Also, it shows the suitability of this model for the analysis of the efficiency of ice-breaking ability of devices.

Keywords: mathematical model, numerical simulation, complex loading, theory of elasticity, deformation, stress, ice cover.

REFERENCES

- [1] Loset S., Shhinek K., Gudmestad O., Hoyland K. Effects of ice on offshore and onshore facilities. – SPb. : "Lan" Publishing House, 2010. 272 p. (in Russian).
- [2] Kozin V. M., Onischuk A. V., Marin B. N., Ivanov Yu. L., Povzyk N. G., Shport V. P. Ice-breaking capacity of flexural-gravity waves on the motion of objects. Vladivostok : Dal'nauka, 2005. 191 p. (in Russian).
- [3] Sergeeva A. M. Modelling of ice cover destruction // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2007. № 1. С. 131–137. (in Russian).
- [4] Pat. 2229415 Rossijskoj Federacii. Ustrojstvo dlja razrushenija ledjanogo pokrova / Gorkunov E. S., Kolmogorov V. L., Kozin V. M., Odinkov V. I. – opubl. 27.05.04. (in Russian).
- [5] Bogorodsky V. V., Gavriilo V. P. Physical properties. Modern methods of glaciology. L. : Gidrometeoizdat, 1980. (in Russian).
- [6] Bogorodsky V. V., Gavriilo V. P., Nedoshivin O. A. Destruction of ice. Methods, technical means. L. : Gidrometeoizdat, 1983. (in Russian).
- [7] Sergeeva A. M., Odinkov V. I., Marchenko O. V. Mathematical modeling of the deformation of the plate finite thickness under the action of loads system // Priorities and scientific support for technological progress : collection of articles of the International Scientific-Practical conference. Ufa : Aeterna, 2016. P. 100–102. (in Russian).
- [8] Sergeeva A. M., Marchenko O. V. The application of mathematical model of deformation of the plate of finite thickness for the study of stress-strain state of ice

Marchenko Olesya Vladimirovna

e-mail: olemarchenko@yandex.ru, Post Graduate Student, Institute of Machinery and Metallurgy of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Sergeeva Anastasiya Mikhailovna

e-mail: serg-nasty@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Deputy Director for Research, Institute of Machinery and Metallurgy of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

cover // Innovative research: Problems and development trends : articles collection of the International scientific-practical conference. In 2 ps. P. 1. Ufa : LLC "OMEGA SCIENCE" , 2016. P. 8–11. (in Russian).

[9] Odínokov V. I. Numerical research of the deformation of materials with coordinate-free method. Vladivostok : Dal'nauka, 1995. 168 p. (in Russian).

[10] Sergeeva A. M., Odínokov V. I., Marchenko O. V. Investigation of ice cover deflected mode due to ice breaking device moving under it // Matematicheskoe Modelirovanie. 2009. № 10. C.47–57. (in Russian).

[11] Sergeeva A. M., Marchenko O. V. Deformation of ice under the influence of atmospheric pressure and its own weight ice // Transactions of NNSTU n.a. R. E. Alekseev. Nizhny Novgorod: NNSTU n.a. R. E. Alekseev, 2010. № 4 (83). P. 157–165. (in Russian).

[12] Svidetel'stvo № 2007614584 Rossijskaja Federacija. Modelirovanie processa razrushenija ledjanogo pokrova s pomoshh'ju ledokol'noj pristavki: svidetel'stvo ob oficial'noj registracii programmy dlja JeVM / Odínokov V. I., Sergeeva A. M., Zaharova E. A. – № 2007612232; zaregistrovano v reestre programm dlja JeVM 31.10.2007. (in Russian).

Н. М. Матченко¹, И. Н. Матченко²

К ПОСТРОЕНИЮ ЧЕТЫРЕХКОНСТАНТНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ИЗОТРОПНО УПРУГОЙ СРЕДЫ

¹Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

²Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Предлагается подход к формулировке четырех константных определяющих соотношений изотропно упругой среды, заключающийся в использовании первых двух инвариантов тензора напряжений и параметра жесткости вида напряженного состояния. Показано, что для определения констант, характеризующих механические свойства упругой среды, достаточно двух базовых экспериментов на одноосное растяжение и сжатие.

Ключевые слова: инварианты напряженного состояния, параметр жесткости нагружения, квазилинейная упругая среда, четырехконстантный упругий потенциал.

УДК: 539.3

Довольно подробный обзор работ, посвященный построению определяющих соотношений, учитывающих чувствительность деформирования упругой среды к виду напряженного состояния, представлен в статьях [3]–[5].

Рассмотрим возможности построения четырех константных квазиквадратичных потенциалов изотропной среды на базе двух первых инвариантов тензора напряжений и весового коэффициента равного в трехмерном векторном пространстве главных напряжений косинусу угла между направлением гидростатической оси и вектора тензора напряжений. Показано, что для определения четырех констант достаточно экспериментов на одноосное растяжение и сжатие.

1. Инварианты напряженного состояния. Сплошную среду отнесем к декартовой системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$). Напряженное состояние в элементе сплошной среды характеризуется симметричным тензором напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Растягивающее усилие считается положительным.

© Матченко Н. М., Матченко И. Н., 2016

Матченко Николай Михайлович

e-mail: eks_05@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матченко Илья Николаевич

e-mail: eks_05@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 19.11.2016

Напряженное состояние изотропной среды также можно характеризовать триэдром направлений главных напряжений σ_i и тремя инвариантами напряженного состояния. Далее рассмотрим сплошные среды, механические характеристики, которые не зависят от третьих инвариантов тензора напряжений.

В качестве примера выберем следующие первый и второй инварианты тензора напряжений [8], [9]: инварианты, полученные сверткой произведения тензоров напряжений,

$$H_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad H_{II} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2; \quad (1.1)$$

естественные инварианты

$$I_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad I_{II} = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2; \quad (1.2)$$

алгебраические инварианты

$$J_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad J_{II} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1. \quad (1.3)$$

Заметим, что некоторые из приведенных инвариантов имеют ясный механический смысл. Так, например, первые инварианты равны между собой и пропорциональны гидростатическому давлению $H_I = I_I = J_I = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 3\sigma$. Инвариант $\sqrt{H_{II}} = \Sigma$ равен модулю вектора напряжений $\vec{\Sigma}$ в трехмерном векторном пространстве главных напряжений [6]. Инвариант $I_{II} = \sqrt{3}\Sigma_d$ пропорционален модулю вектора девиаторных напряжений $\vec{\Sigma}_d$.

2. Квадратичные потенциалы линейноупругой среды. Квадратичные потенциалы линейноупругой среды Гука можно представить через приведенные выше инварианты (1.1)–(1.3):

$$W = (A_h H_I^2 + B_h H_{II}), \quad (2.1)$$

или

$$W = (A_i I_I^2 + B_i I_{II}), \quad (2.2)$$

или

$$W = (A_j J_I^2 + B_j J_{II}). \quad (2.3)$$

Используя потенциалы (2.1)–(2.3), можно получить выражения для главных деформаций e_i . Например, из потенциала (2.1) следует

$$e_1 = 2(A_h H_I + B_h \sigma_1) \quad (123). \quad (2.4)$$

Знак (123) означает, что выражения для главных деформаций e_2, e_3 получаются из (2.4) круговой перестановкой.

Механические характеристики линейно упругой среды находятся из эксперимента на одноосное растяжение (или сжатие). Напряженное состояние при этом задается в виде $\sigma_1 = \omega, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

Из (2.1) следует

$$e_1 = 2(A_h + B_h)\omega, \quad e_2 = e_3 = 2A_h\omega.$$

Учитывая, что

$$e_1/\omega = 2(A_h + B_h) = 1/E, \quad e_2/\omega = e_3/\omega = 2A_h = -\nu/E,$$

получим

$$A_h = -\nu/2E, \quad B_h = (1 + \nu)/2E.$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона.

Рассуждая аналогично, в соответствии с формулировкой потенциала (2.2) запишем

$$e_1 = 2[A_i I_I + B_i(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)] \quad (123),$$

$$A_i = (1 - 2\nu)/6E, \quad B_i = (1 + \nu)/6E.$$

Аналогично, потенциалу (2.3) соответствует

$$e_1 = 2A_j J_I + B_j(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (123),$$

$$A_j = 1/2E, \quad B_j = -(1 + \nu)/E.$$

Следовательно, константы, входящие в потенциалы (2.1)–(2.3), вычисляются через две механические характеристики среды: модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Модель линейноупругой среды Гука постулирует независимость механических характеристик сплошной среды от вида напряженного состояния. Потенциалы (2.1)–(2.3), записанные через различные инварианты, прогнозируют в эксперименте на чистый сдвиг одинаковые значения модуля сдвига $G_\tau = E/2(1 + \nu)$ и отсутствие дилатации $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

3. Четырехконстантные потенциалы. Рассмотрим сплошные среды, механические характеристики которых различны при одноосном растяжении и сжатии. Введем предположение, что коэффициенты квадратичных потенциалов (2.1)–(2.3) являются линейными функциями параметра жесткости нагружения [2]

$$\chi = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}}. \quad (3.1)$$

Параметр χ является инвариантом напряженного состояния и пропорционален косинусу угла между вектором главных напряжений $\vec{\Sigma}$ и направлением гидростатической оси в трехмерном векторном пространстве главных напряжений [6]. Это предположение позволяет сформулировать четырехконстантные квазиквадратичные потенциалы:

$$W = (A_h + a_h\chi)H_I^2 + (B_h + b_h\chi)H_{II}, \quad (3.2)$$

или

$$W = (A_i + a_i\chi)I_I^2 + (B_i + b_i\chi)I_{II}, \quad (3.3)$$

или

$$W = (A_j + a_j\chi)J_I^2 + (B_j + b_j\chi)J_{II}. \quad (3.4)$$

Покажем, что четыре константы, входящие в каждый из квазиквадратичных потенциалов (3.2)–(3.4), однозначно определяются в эксперименте на одноосное растяжение и сжатие.

Из потенциала (3.2) следует

$$e_1 = 2A_h H_I + a_h[(\Sigma - \chi\sigma_1)\chi + 2H_I] + 2B_h\sigma_1 + b_h(\Sigma + \chi\sigma_1) \quad (123).$$

Из эксперимента на одноосное растяжение и сжатие имеем

$$\begin{aligned} 2(A_h + a_h + B_h + b_h) &= 1/E_+, & 2A_h + 3a_h + b_h &= -\nu_+/E_+, \\ 2(A_h - a_h + B_h - b_h) &= 1/E_-, & 2A_h - 3a_h - b_h &= -\nu_-/E_-. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решая совместно уравнения (3.5), получим

$$A_h = -\frac{1}{4} \left(\frac{\nu_+}{E_+} + \frac{\nu_-}{E_-} \right), \quad B_h = \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \nu_+}{E_+} + \frac{1 + \nu_-}{E_-} \right),$$

$$a_h = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-} \right) + \left(\frac{\nu_+}{E_+} - \frac{\nu_-}{E_-} \right) \right], \quad b_h = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-} \right) + \left(\frac{\nu_+}{E_+} - \frac{\nu_-}{E_-} \right) \right].$$

где E_+ , E_- – модули упругости, ν_+ , ν_- – коэффициенты Пуассона при одноосном растяжении и сжатии соответственно.

Из потенциала (3.3) имеем следующие определяющие соотношения:

$$e_1 = 2(A_i + a_i\chi)I_I + [a_i\chi^2 + b_i(1 + I_{II}/\Sigma^2)](\Sigma - \chi\sigma_1) + 2B_i(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) \quad (123).$$

Обработывая данные, полученные в экспериментах на одноосное растяжение и сжатие, получим следующие выражения для констант:

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{12} \left(\frac{1 - 2\nu_+}{E_+} + \frac{1 - 2\nu_-}{E_-} \right), & B_i &= \frac{1}{12} \left(\frac{1 + \nu_+}{E_+} + \frac{1 + \nu_-}{E_-} \right), \\ a_i &= -\frac{1}{6} \left(\frac{\nu_+}{E_+} - \frac{\nu_-}{E_-} \right), & b_i &= \frac{1}{12} \left[\left(\frac{\nu_+}{E_+} - \frac{\nu_-}{E_-} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-} \right) \right]. \end{aligned}$$

Аналогично, рассматривая потенциал (3.4), получим определяющие соотношения

$$e_1 = 2(A_j + a_j\chi)J_I + [a_j\chi^2 + b_jJ_{II}/\Sigma^2](\Sigma - \chi\sigma_1) + (B_j + b_j\chi)(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (123).$$

Эксперименты на одноосное растяжение и сжатие позволяют установить зависимости

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{E_+} + \frac{1}{E_-} \right), & a_j &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-} \right), \\ B_j &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \nu_+}{E_+} + \frac{1 + \nu_-}{E_-} \right), & b_j &= -\frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-} \right) + \left(\frac{\nu_+}{E_+} - \frac{\nu_-}{E_-} \right) \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что при чистом сдвиге все три потенциала (3.2)–(3.4) дают одинаковый прогноз значений как для модуля сдвига G_τ

$$\frac{1}{G_\tau} = \frac{1 + \nu_+}{E_+} + \frac{1 + \nu_-}{E_-},$$

так и для объемной деформации

$$\theta_\tau = e_1 + e_2 + e_3 = \frac{3}{2\sqrt{2}} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-} \right) + \left(\frac{\nu_+}{E_+} - \frac{\nu_-}{E_-} \right) \right] \tau,$$

где τ – максимальное касательное напряжение.

4. Частный случай. В связи с тем, что при формулировке трех константных потенциалов, использующих только первые два инварианта, допускаются ошибки, сделаем несколько замечаний.

Если механические характеристики материала таковы, что $a_h = 0$, то из потенциала (3.2) следует трех константный потенциал деформаций [1]

$$W = A_h H_I^2 + B_h H_{II} + b_h H_I \sqrt{H_{II}}. \quad (4.1)$$

Потенциал (4.1) аналогичен потенциалу напряжений В. П. Мясникова [7]

$$W = 0,5\lambda\Lambda_I^2 + \mu\Lambda_{II} - \varepsilon\Lambda_I\sqrt{\Lambda_{II}}, \quad (4.2)$$

где $\Lambda_I = e_1 + e_2 + e_3$, $\Lambda_{II} = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$.

А. А. Трещев в монографии [10] утверждает, что потенциалы, построенные на использовании инвариантов свертки произведения тензоров, противоречат физическому смыслу.

Покажем, что это утверждение А. А. Трещева несостоятельно. Сначала приведем вариант физически противоречивого потенциала. Например, в работе [1] был рассмотрен квазиквадратичный трех константный потенциал вида

$$W = f\sigma^2 + g\sigma\tau + h\tau^2, \quad (4.3)$$

где $3\sigma = I_1$, $3\tau = \sqrt{I_2}$.

Поскольку потенциал (4.3) не зависит от третьего инварианта, то вариация энергии упругого деформирования вычисляется по формуле [9]

$$W = 3(e\delta\sigma + \gamma\delta\tau), \quad (4.4)$$

где $e = (e_1 + e_2 + e_3)/3$ – средняя деформация, $3\gamma = \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2}$ – параметр формоизменения.

Из (4.3) и (4.4) следуют определяющие соотношения

$$3e = 2f\sigma + g\tau, \quad 3\gamma = g\sigma + 2h\tau. \quad (4.5)$$

Подвергнем изотропный материал, механические свойства которого описывается потенциалом (4.2), воздействию гидростатического давления $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, $\tau = 0$.

Соотношения (4.5) принимают вид

$$3e = 2f\sigma, \quad 3\gamma = g\sigma. \quad (4.6)$$

Из второго соотношения в формулах (4.6) следует, что **воздействие гидростатического давления на изотропный материал приводит к его формоизменению, что противоречит физическому смыслу.**

Рассмотрим теперь потенциал (4.1). Учитывая, что $H_1 = 3\sigma$, $H_2 = 9(\sigma^2 + \tau^2)$, из потенциала (4.1) следуют определяющие соотношения

$$e = 3 \left[2(A_h + B_h)\sigma + b_h \left(\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \right],$$

$$\gamma = 3 \left[2B_h + b_h \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \right] \tau. \quad (4.6)$$

При воздействии на изотропный материал только гидростатического давления соотношения (4.6) принимают вид

$$e = 6(A_h + B_h + b_h)\sigma, \quad \gamma = 0. \quad (4.7)$$

Из второго соотношения в (4.7) видно, что наложение гидростатического давления на изотропный материал, подчиняющийся потенциалу (4.1), не приводит к формоизменению, следовательно, **потенциал (4.1) физически не противоречив.**

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Буренин А. А., Якунина В. М. К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. М. : Физматлит, 2006. С. 100–106.
- [2] Матченко Н. М. О выборе показателя пластичности // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 1987. № 3. С. 150–151.
- [3] Матченко Н. М., Толоконников Л. А., Трещев А. А. Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. Ч. 1: Квазилинейные соотношения // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 73–78.
- [4] Матченко Н. М., Толоконников Л. А., Трещев А. А. Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. Ч. 2: Нелинейные соотношения // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 4. С. 87–95.
- [5] Матченко Н. М., Трещев А. А. Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Определяющие соотношения. Тула : ТулГУ, 2000. 149 с.
- [6] Матченко Н. М., Кузнецов Е. Е., Матченко И. Н. Шесть вариантов представления вектора интенсивности тензора напряжений в пространстве главных напряжений // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (11). С. 90–97.
- [7] Мясников В. П., Олейников А. И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разносопротивляющейся среды // Докл. АН СССР. 1992. Т. 322. № 1. С. 57–60.
- [8] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела: учебное пособие для мех. мат. и физ. спец. университетов. М. : Наука. 1988. 711 с.
- [9] Толоконников Л. А. Механика деформируемого твердого тела. М. : Высш. школа, 1979. С. 61.
- [10] Трещев А. А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной или наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения. Тула : ТулГУ, 2016. 326 с.

I. N. Mattchenko¹, N. M. Mattchenko²

FOUR-CONSTANT DEFINING RELATIONS OF QUASI-LINAR OF THE ISOTROPI-ELASTIC ENVIRONMENT

¹*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

²*Tula State University, Tula, Russia*

Abstract. The approach to the formulation of four constant defining relations of the isotropic elastic environment, consisting in use of parameter of rigidity loading is offered. For definition of the constants describing mechanical properties of the elastic environment, it is enough only two experiments on uniaxial stretching and compression.

Keywords: invariants of intense condition, parameter of rigidity loading, quasi-linear elastic environment, fourconstant elastic potential.

REFERENCES

- [1] Burenin A. A., Yakunin V. M. To modelling deformation of the materials, differently resisting to a stretching and compression // Problems of mechanics of deformable firm bodies and rocks. M. : Phismathlit, 2006. P. 100–106. (in Russian).
- [2] Matchenko N. M. About a choice of a parameter of plasticity // News of higher educational institutions. Ferrous metallurgy. 1987. № 3. P. 150–151. (in Russian).
- [3] Matchenko N. M., Tolokonnikov L. A., Treshchev A. A. Define of a ratio isotropic differently resisting environments. Part 1: Quasi-linear parities // News of the Russian Academy of Science. MRS. 1995. № 1. P. 73–78. (in Russian).
- [4] Matchenko N. M., Tolokonnikov L. A., Treshchev A. A. Define of a ratio isotropic differently resisting environments. Part 2: Nonlinear Ratio // News the Russian Academy of Sciences. MRS. 1999. № 4. P. 87–95. (in Russian).
- [5] Matchenko N. M., Treshchev A. A. Theory of deformation of differently resisting materials. Defining ratio. Tula : Tula State University, 2000. 149 p. (in Russian).
- [6] Matchenko N. M., Kuznetsov E. E., Matchenko I. N. Six of variants of representation of a vector of intensity тензора pressure in space of the main pressure // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2013. № 1 (11). P. 90–97. (in Russian).
- [7] Mysnikov V. P., Olejnikov A. I. Core's butchers the general ratio of model is isotropic-elastic differently resisting environments // Reports of AS SSSR. 1992. Vol. 322. № 1. P. 57–60. (in Russian).
- [8] Rabotnov J.N. Mechanics of a deformable firm body: manual for mech. and phis. spec. of Universities. M. : Nauka, 1988. 711 p. (in Russian).
- [9] Tolokonnikov L. A. Mechanics of a deformable firm body. M. : Higher School, 1979. 318 p. (in Russian).

Matchenko Nikolay Mihalovich, Dr. Sci. Phys.& Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

Matchenko Ilya Nikolaevich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

[10] Treshchev A. A. The theory of deformation and durability of materials with a primary or induced sensitivity to a kind of the intense condition. Determining correlations. Tula : Tula State University. 2016. 326 p. (in Russian).

А. В. Балашникова, Б. Г. Миронов, М. В. Михайлова

РАСТЯЖЕНИЕ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО АНИЗОТРОПНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО БРУСА

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе рассмотрено растяжение прямоугольного бруса из идеальнопластического материала при трансляционной анизотропии.

Ключевые слова: напряжение, пластичность, растяжение, брус.

УДК: 539.375

Уравнения поверхностей боковых граней представим в виде:

$$x = \pm (a + \delta f_1(y, z)), \quad (1)$$

$$y = \pm (b + \delta f_2(x, z)). \quad (2)$$

Брус растягивается вдоль оси z , боковые грани свободны от напряжений. Материал бруса анизотропный идеальнопластический, удовлетворяющий условию пластичности

$$A((\sigma_x - \sigma_y) - (k_x - k_y))^2 + B((\sigma_y - \sigma_z) - (k_y - k_z))^2 + C((\sigma_z - \sigma_x) - (k_z - k_x))^2 + \\ + 6 \left[D(\tau_{xy} - k_{xy})^2 + F(\tau_{yz} - k_{yz})^2 + E(\tau_{xz} - k_{xz})^2 \right] = 6k_0^2, \quad (3)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ – компоненты напряжения, $A, B, C, D, F, E, k_{ij}, k_0$ – *const*, определяющие предел текучести и параметры анизотропии.

Согласно ассоциированному закону пластического течения имеем

© Балашникова А. В., Миронов Б. Г., Михайлова М. В., 2016

Балашникова Анжелика Вениаминовна

e-mail: info3006@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Миронов Борис Гурьевич, доктор физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Михайлова Марина Васильевна, доктор физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-31-00511 мол_a, 15-31-21111 мол_a_вед).

Поступила 11.08.2016

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= 2\lambda [C(\sigma_x - \sigma_z - (k_1 - k_3)) + B(\sigma_x - \sigma_y - (k_1 - k_2))], \\
\varepsilon_y &= 2\lambda [B(\sigma_y - \sigma_z - (k_2 - k_3)) + A(\sigma_y - \sigma_x - (k_2 - k_1))], \\
\varepsilon_z &= 2\lambda [B(\sigma_z - \sigma_y - (k_3 - k_2)) + C(\sigma_z - \sigma_x - (k_3 - k_1))], \\
\varepsilon_{xy} &= \lambda D(\tau_{xy} - k_6), \\
\varepsilon_{yz} &= \lambda F(\tau_{yz} - k_4), \\
\varepsilon_{xz} &= \lambda E(\tau_{xz} - k_5),
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$ – компоненты скорости деформации.

От компонент скоростей деформаций ε_{ij} перейдем к скоростям перемещений u, v, w по формулам Коши

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),
\end{aligned} \tag{5}$$

где u, v, w – скорости перемещения.

Решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \delta\sigma'_{ij}, \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \delta\varepsilon'_{ij}, u = u^0 + \delta u', \dots, \lambda = \lambda^0 + \delta\lambda', \tag{6}$$

$$\sigma_z^0 = k\sqrt{\frac{6}{B+C}}, \sigma_x^0 = \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = \tau_{xz}^0 = \tau_{yz}^0, \sigma^0 = \frac{1}{3}\sigma_z^0 > 0. \tag{7}$$

Граничные условия согласно (1), (2), (6), (7) примут вид

$$\sigma'_x = 0, \tau'_{xy} = 0, \tau'_{xz} \mp \sigma_z^0 \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0, x = \pm a. \tag{8}$$

$$\sigma'_y = 0, \tau'_{xy} = 0, \tau'_{yz} \mp \sigma_z^0 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0, y = \pm b. \tag{9}$$

Линеаризируя условие пластичности (3), используя (6), (7) получим

$$(B+C)(\sigma'_z - k'_z) - B(\sigma'_y - k'_y) - C(\sigma'_x - k'_x) = 0. \tag{10}$$

Из (5)–(7) получаем

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^0 &= -\lambda^0 C \sigma_z^0, \varepsilon_y^0 = -\lambda^0 B \sigma_z^0, \varepsilon_z^0 = \lambda^0 (B+C) \sigma_z^0, \lambda^0 = \frac{\varepsilon_z^0}{(B+C) \sigma_z^0}, \\
\varepsilon_{xy}^0 &= \varepsilon_{xz}^0 = \varepsilon_{yz}^0 = 0, u^0 = -\lambda^0 C \sigma_z^0 x, \\
v^0 &= -\lambda^0 B \sigma_z^0 y, w^0 = \lambda^0 (B+C) \sigma_z^0 z.
\end{aligned} \tag{11}$$

Согласно (4)–(7), (11) будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial x} &= 2\lambda^0 [C(\sigma'_x - \sigma'_z - (k'_1 - k'_3)) + B(\sigma'_x - \sigma'_y - (k'_1 - k'_2))] - \lambda' C \sigma'_z, \\
\frac{\partial v'}{\partial y} &= 2\lambda^0 [B(\sigma'_y - \sigma'_z - (k'_2 - k'_3)) + A(\sigma'_y - \sigma'_x - (k'_2 - k'_1))] - \lambda' B \sigma'_z, \\
\frac{\partial w'}{\partial z} &= \lambda'(B + C) \sigma'_z, \\
\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} &= 2\lambda^0 D(\tau'_{xy} - k'_6), \\
\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} &= 2\lambda^0 F(\tau'_{yz} - k_4), \\
\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} &= 2\lambda^0 E(\tau'_{xz} - k'_5),
\end{aligned} \tag{12}$$

Согласно (12) выполняется условие несжимаемости

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z &= 0, \\
\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Удовлетворим уравнению (13), положив

$$u' = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, v' = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, w' = \lambda' = 0. \tag{14}$$

Согласно (14), (12), (10) будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= \lambda^0 \frac{(AB + AC + BC)}{B + C} (\sigma'_x - \sigma'_y), \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= 6\lambda^0 D \tau'_{xy}, \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} &= 6\lambda^0 E \tau'_{xz}, \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} &= -6\lambda^0 F \tau'_{xy}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Из первого уравнения системы (15) и условия пластичности (10) получим

$$\begin{aligned}
\sigma'_x &= \sigma'_y + \frac{B + C}{\lambda^0 (AB + AC + BC)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \\
\sigma'_z &= \sigma'_y + \frac{C}{\lambda^0 (AB + AC + BC)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Подставим выражения (16) и (15) в уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} &= 0.
\end{aligned}$$

и получим

$$\frac{\partial \sigma'_y}{\partial x} + \frac{B+C}{\lambda^\circ (AB+AC+BC)} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{6\lambda^\circ D} \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{1}{6\lambda^\circ E} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^2 \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{1}{6\lambda^\circ D} \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} \right) - \frac{1}{6\lambda^\circ F} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^2 \partial x} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{1}{6\lambda^\circ E} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{1}{6\lambda^\circ F} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial z} + \frac{C}{\lambda^\circ (AB+AC+BC)} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

Из третьего уравнения системы (17) найдем

$$\sigma'_y = \left(\frac{1}{6\lambda^\circ F} - \frac{1}{6\lambda^\circ E} - \frac{C}{\lambda^\circ (AB+AC+BC)} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + f(x, y). \quad (18)$$

Подставим выражение (18) в два первых уравнения системы (17) и получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{1}{6\lambda^\circ F} - \frac{1}{6\lambda^\circ E} - \frac{1}{6\lambda^\circ D} + \frac{B}{\lambda^\circ (AB+AC+BC)} \right) \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2 \partial y} + \\ + \frac{1}{6\lambda^\circ D} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} + \frac{1}{6\lambda^\circ E} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^2 \partial y} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{1}{6\lambda^\circ F} - \frac{1}{6\lambda^\circ E} + \frac{1}{6\lambda^\circ D} + \frac{C}{\lambda^\circ (AB+AC+BC)} \right) \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y^2} - \\ - \frac{1}{6\lambda^\circ D} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} + \frac{1}{6\lambda^\circ F} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^2 \partial x} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Из уравнений (19) найдем

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3\lambda^\circ D} + \frac{B+C}{\lambda^\circ (AB+AC+BC)} \right) \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + \frac{1}{6\lambda^\circ D} \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} \right) + \frac{1}{6\lambda^\circ E} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^2 \partial y^2} + \frac{1}{6\lambda^\circ F} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^2 \partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение уравнения (20) будем искать в виде

$$\Psi = \sin(mx) \sin(ny) Z(z), \quad (21)$$

тогда уравнение (20) примет вид

$$\begin{aligned} m^2 n^2 \left(-\frac{1}{3\lambda^\circ D} + \frac{B+C}{\lambda^\circ (AB+AC+BC)} \right) Z(z) + \\ + \frac{1}{6\lambda^\circ D} (m^4 + n^4) Z(z) - \left(\frac{n^2}{6\lambda^\circ E} + \frac{m^2}{6\lambda^\circ F} \right) Z''(z) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнение (22) является дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, поэтому его решение будем искать в виде

$$Z(z) = e^{\lambda z},$$

тогда коэффициент λ будет определяться из уравнения

$$m^2 n^2 \left(-\frac{1}{3\lambda^\circ D} + \frac{B+C}{\lambda^\circ (AB+AC+BC)} \right) + \frac{1}{6\lambda^\circ D} (m^4 + n^4) = \left(\frac{n^2}{6\lambda^\circ E} + \frac{m^2}{6\lambda^\circ F} \right) \lambda^2. \quad (23)$$

Если $\lambda^2 > 0$, то функция $Z(z)$ имеет вид

$$Z(z) = C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z},$$

если $\lambda^2 < 0$, то функция $Z(z)$ имеет вид

$$Z(z) = C_1 \cos(\lambda z) + C_2 \sin(\lambda z),$$

если $\lambda^2 = 0$, то функция $Z(z)$ имеет вид

$$Z(z) = C_1 z + C_2,$$

где $C_1, C_2 - \text{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Быковцев Г. И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред : сб. статей. Владивосток : Дальнаука, 2002. 566 с.

[2] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2012. № 4 (76). С. 108–112.

[3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М. : Наука, 1966. 232 с.

[4] Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 576–579.

A. V. Balashnikova, B. G. Mironov, M. V. Mihalova

STRETCHING IDEAL SOLUTION ANISOTROPIC RECTANGULAR BAR

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. In operation the tension of the rectangular bar of ideal solution layer in translational anisotropy.

Keywords: power, flexibility, stretching, bar.

REFERENCES

- [1] Bykovtsev G. I. Selected problematic issues of the mechanics of deformable media : collection of articles. Vladivostok : Dal'nauka, 2002. 566 p. (in Russian).
- [2] Derevyannyh E. A., Mironov B. G. On the general relations of anisotropic torsion rod theory // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2012. № 4 (76). P. 108–112. (in Russian).
- [3] Ivlev D. D. The theory of ideal plasticity. M. : Nauka, 1966. 232 p. (in Russian).
- [4] Ivlev D. D., Mironov B. G. On relations translational perfectly plastic anisotropy torsional // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 576–579. (in Russian).

Balashnikova Angelika Veniaminovna, Candidate of Phys. & Math., I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Mironov Boris Gurevich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Mihailova Marina Vasilevna, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Д. А. Аbruков

ИЗГИБ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО ДЛИННЫМ СТОРОНАМ, НА ТОРЦЕ КОТОРОЙ ЗАДАНЫ ПРОГИБ ИЛИ УГОЛ ПОВОРОТА. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. Построено точное аналитическое решение краевой задачи изгиба полубесконечной прямоугольной пластины с защемлёнными длинными сторонами, на торце которой заданы прогиб или угол поворота (краевые функции четные). Решение представляется в рядах по функциям Фадля – Папковича. Искомые коэффициенты ряда находятся с помощью систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича.

Ключевые слова: изгиб пластины, изгиб полубесконечной прямоугольной пластины, функции Фадля – Папковича, аналитические решения.

УДК: 539.3+624.073

Введение. В работах [1]–[3] изучались свойства систем функций Фадля-Папковича, возникающих при решении двумерной краевой задачи теории упругости в прямоугольнике (полуполосе) с однородными граничными условиями по двум противоположным сторонам. Функции Фадля-Папковича комплекснозначны и не образуют базиса на отрезке в обычном смысле [1]. Поэтому разложения по ним невозможно построить, опираясь на классический аппарат теории базиса функций [4]. Решению краевой задачи предшествует изучение, так называемых разложений Лагранжа [1]. Разложения Лагранжа являются аналогами разложений по тригонометрическим системам функций и играют такую же роль при решении краевых задач, какую тригонометрические ряды играют в решениях Файлона-Рибьера. Аналогичная ситуация имеет место и в задаче изгиба тонких прямоугольных пластин, а также её частного случая – изгиба полубесконечной прямоугольной пластины.

1. Постановка задачи. Рассмотрим пластину, отнесенную к декартовым координатам x, y . Дифференциальные уравнения равновесия можно записать в виде [5]

© Аbruков Д. А., 2016
Аbruков Денис Александрович
e-mail: AbrukovDA@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-41-02-644 р_поволжье_а.

Поступила 12.07.2016

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -P(x, y), \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x(x, y), \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $P(x, y)$ – произвольная поперечная нагрузка, Q_x, Q_y – перерезывающие силы, M_x, M_y, M_{xy} – изгибающие и крутящий моменты.

Моменты и углы поворота Φ_x, Φ_y можно выразить через прогиб $w = w(x, y)$:

$$\begin{aligned} M_x(x, y) &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad M_y(x, y) = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \\ M_{xy}(x, y) &= -M_{yx}(x, y) = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \Phi_x(x, y) = D \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Phi_y(x, y) = D \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где ν – коэффициент Пуассона, а

$$D = \frac{E\rho^3}{12(1 - \nu^2)}$$

– цилиндрическая жесткость пластины (E – модуль упругости, ρ – толщина пластины).

Кроме того,

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \quad (1.3)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа на плоскости.

Подставляя выражения (1.3) в первое из уравнения (1.1) получим основное дифференциальное уравнение теории изгиба пластин

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = P(x, y). \quad (1.4)$$

Помимо обычных сил Q_x, Q_y вводятся также обобщенные в смысле Кирхгофа перерезывающие силы

$$\begin{aligned} K_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \\ K_y &= Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Будем строить решение, пользуясь методом начальных функций [6], позволяющим эффективно получать выражения для функций Фадля-Папковича. Основные соотношения метода имеют вид

$$W(x, y) = L_W W(y) W_0(x) + L_W \Phi(y) \Phi_0(x) + L_W M(y) M_0(x) + L_W Q(y) Q_0(x),$$

$$\begin{aligned}\Phi_y(x, y) &= L_{\Phi W}(y)W_0(x) + L_{\Phi\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{\Phi M}(y)M_0(x) + L_{\Phi Q}(y)Q_0(x), \\ M_y(x, y) &= L_{MW}(y)W_0(x) + L_{M\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{MM}(y)M_0(x) + L_{MQ}(y)Q_0(x),\end{aligned}\quad (1.6)$$

$$K_y(x, y) = L_{QW}(y)W_0(x) + L_{Q\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{QM}(y)M_0(x) + L_{QQ}(y)Q_0(x).$$

где $L_{WW}(h)$, $L_{WM}(h)$ и т. д. – операторы метода начальных функций [6].
Функции $W(x, y)$, $\Phi_y(x, y)$, $M_y(x, y)$, $K_y(x, y)$, определенные при $y = 0$,

$$\begin{aligned}W_0(x) &= Dw(x, 0), \quad \Phi_0(x) = \frac{\partial W(x, 0)}{\partial y}, \\ M_0(x) &= M_y(x, 0), \quad Q_0(x) = K_y(x, 0),\end{aligned}\quad (1.7)$$

называются начальными. Решение задачи будем искать с разделением на симметрическое и обратно симметрическое относительно линии симметрии пластины $y = 0$. В случае симметрической задачи начальные функции $\Phi_0(x) = Q_0(x) = 0$. Зная начальные функции, по формулам (1.6), (1.7) можно найти основные факторы.

Рассмотрим полубесконечную прямоугольную пластину $\{\Pi : |x| \geq 0, |y| \leq h\}$ шириной $2h$ с заземленными краями $y = \pm h$:

$$W(x, \pm h) = \Phi_y(x, \pm h) = 0, \quad (1.8)$$

и с некоторыми граничными условиями на торце $x = 0$.

С помощью формул (1.6) удовлетворим граничным условиям (1.8), которые примут вид:

$$\begin{aligned}L_{\Phi W}(\alpha, h)W_0(x) + L_{\Phi M}(\alpha, h)M_0(x) &= 0, \\ L_{WW}(\alpha, h)W_0(x) + L_{WM}(\alpha, h)M_0(x) &= 0.\end{aligned}\quad (1.9)$$

Здесь $W_0(x) = Dw(x, 0)$, $M_0(x) = M_y(x, 0)$ – начальные функции, определенные при $y = 0$, $\alpha = d/dx$ – оператор дифференцирования.

Введем разрешающую функцию $F(x)$ по формулам

$$W_0(x) = -L_{\Phi M}(\alpha, h)F(x), \quad M_0(x) = L_{\Phi W}(\alpha, h)F(x). \quad (1.10)$$

При этом первое из уравнений (1.9) будет тождественно удовлетворено, а второе примет вид

$$[L_{WM}(\alpha, h)L_{\Phi W}(\alpha, h) - L_{WW}(\alpha, h)L_{\Phi M}(\alpha, h)]F(x) = 0. \quad (1.11)$$

Раскрывая выражения для дифференциальных операторов, получим обыкновенное дифференциальное уравнение бесконечного порядка

$$\left(\frac{2\alpha h + \sin 2\alpha h}{4\alpha}\right)F(x) = 0. \quad (1.12)$$

Будем искать его решение в виде

$$F(x) = e^{\lambda x}. \quad (1.13)$$

Подставляя (1.13) в (1.11), получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$\frac{L(\lambda, h)}{\lambda} = 0, \quad (1.14)$$

$$L(\lambda, h) = \frac{1}{4} (2\lambda h + \sin 2\lambda h). \quad (1.15)$$

Уравнение (1.15) имеет бесконечное множество комплексных корней $\{\pm\lambda_k, \pm\bar{\lambda}_k\} = \Lambda$, $k = 1, 2, \dots$. Ниже для иллюстрации приведены значения пяти корней уравнения (1.15) при $h = 1$, $\nu = \frac{1}{3}$, принадлежащих первой координатной четверти (табл. 1).

Таблица 1

№ корня λ_k	$Re\lambda_k$	$Im\lambda_k$
1	2.10619611524533	1.12536430580093
2	5.356268698639631	1.551574372912625
3	8.536682426575915	1.77554367351104
4	11.69917761282565	1.929404496552787
5	14.85405991263802	2.046852462382667

Для определения точных значений λ_k можно воспользоваться асимптотической формулой

$$\lambda_k \approx \frac{1}{h} \left[k\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(4k\pi - \pi)}{4k\pi} \right] + i \frac{1}{h} \left[\frac{\ln(4k\pi)}{2} - \frac{\ln(4k\pi - \pi)}{4k\pi} \right].$$

Итак, решение уравнения (1.11), имеет вид

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k e^{\bar{\lambda}_k x} \right) (\lambda_k \in \Lambda). \quad (1.16)$$

Подставляя (1.16) в формулы (1.9) найдем начальные функции, а затем по формулам (1.6) – прогиб, углы поворота и моменты ($Re\lambda_k < 0$, $W(x, y) = Dw(x, y)$):

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \omega(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \Phi_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k \omega(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \bar{\lambda}_k \omega(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \Phi_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \phi_y(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \phi_y(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ M_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ M_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_y(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k m_y(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ M_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_{xy}(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k m_{xy}(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned}
 \omega(\lambda_k, y, h) &= \frac{1}{2} [\lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y + (\sin \lambda_k h + \lambda_k h \cos \lambda_k h) \cos \lambda_k y]; \\
 \phi_x(\lambda_k, y, h) &= \frac{\lambda_k}{2} \{ \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y + (\sin \lambda_k h + \lambda_k h \cos \lambda_k h) \cos \lambda_k y \}; \\
 \phi_y(\lambda_k, y, h) &= -\frac{\lambda_k^2}{2} [h \cos \lambda_k h \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y]; \\
 m_x(\lambda_k, y, h) &= \frac{\lambda_k^2}{2} \{ (\nu - 1) \lambda_k \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y - [(\nu + 1) \sin \lambda_k h - (\nu - 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h] \cos \lambda_k y \}; \\
 m_y(\lambda_k, y, h) &= -\frac{\lambda_k^2}{2} ((\nu - 1) \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y + \\
 &+ [(\nu + 1) \sin \lambda_k h + (\nu - 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h] \cos \lambda_k y); \\
 m_{xy}(\lambda_k, y, h) &= -\frac{\lambda_k^3}{2} (\nu - 1) \{ h \cos \lambda_k h \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y \}
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

– функции Фадля – Папковича.

Функции (1.18) назовем s -представлением функций Фадля – Папковича. Если же разрешающую функцию $F(x)$ вводить по формулам:

$$W_0(x) = -L_{WM}(\alpha, h)F(x), \quad M_0(x) = L_{WW}(\alpha, h)F(x), \tag{1.19}$$

то получим другие выражения для функций Фадля – Папковича, которые назовем s -представлением функций Фадля-Папковича.

На продольных границах $y = \pm h$ полубесконечной прямоугольной пластины граничные условия (1.8) удовлетворяются автоматически. Удовлетворяя с помощью выражений (1.17) граничным условиям, заданным на торце пластины $x = 0$, приходим к задаче определения коэффициентов A_k, \bar{A}_k из двух разложений по двум системам функций Фадля – Папковича, например

$$\begin{aligned}
 W(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega(\lambda_k, y, h) + \bar{A}_k \omega(\bar{\lambda}_k, y, h), \\
 \Phi_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \phi_x(\lambda_k, y, h) + \bar{A}_k \phi_x(\bar{\lambda}_k, y, h),
 \end{aligned}
 \tag{1.20}$$

где $W(y) = W(0, y)$, $\Phi_x(y) = \Phi_x(0, y)$ – заданные при $x = 0$ прогиб и угол поворота (краевые функции четные). Коэффициенты A_k находятся из системы (1.20), как и в работах [7]–[9], с помощью функций, биортогональных к функциям Фадля-Папковича.

2. Биортогональные функции. Построим функции $W_k(y), \Phi_{xk}(y)$, биортогональные к функциям Фадля-Папковича (1.18). Функции, получающиеся из функций Фадля-Папковича путем замены λ_k комплексным параметром λ , называются порождающими [7], [10].

Как и в статьях [7], [10], биортогональные функции будем искать, как решения уравнений, полагая в них λ вещественным:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda, y, h) W_k(y) dy = \frac{L(\lambda, h)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(\lambda, y, h) \Phi_{xk}(y) dy = \frac{\lambda L(\lambda, h)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}. \tag{2.1}$$

Для комплексных значений λ , в частности при $\lambda = \lambda_k \in \Lambda$, прямую интегрирования в формулах (2.1) надо заменить T -образным контуром T , лежащим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и составленным из отрезка мнимой оси $y \in [-h, h]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$ [7], [10].

При $\lambda \rightarrow \lambda_k$, в соответствии с асимптотическим равенством [11]

$$f(\lambda) - f(\lambda_k) = f'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k),$$

из формул (2.1) получаются следующие соотношения биортогональности:

$$\int_T \omega(\lambda_m, y, h) W_k(y) dy = \begin{cases} M_k & \text{при } \lambda_m = \lambda_k; \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\int_T \phi_x(\lambda_m, y, h) \Phi_{xk}(y) dy = \begin{cases} \lambda_k M_k & \text{при } \lambda_m = \lambda_k; \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

где

$$M_k = \frac{L'(\lambda_k, h)}{2\lambda_k} = \frac{h \cos^2(\lambda_k h)}{2\lambda_k}, \quad (2.3)$$

а $L'(\lambda_k, h)$ – производная функции $L(\lambda, h)$ при $\lambda = \lambda_k$.

Понятие биортогональности включает в себя также равенства вида (k, m – любые)

$$\int_T \omega(\bar{\lambda}_m y, h) \bar{W}_k(y) dy = \begin{cases} \bar{M}_k & \text{при } \bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_m; \\ 0 & \text{при } \bar{\lambda}_k \neq \bar{\lambda}_m \end{cases} \quad (2.4)$$

и

$$\int_T \omega(\bar{\lambda}_m, y, h) W_k(y) dy = \int_T \omega(\lambda_m, y, h) \bar{W}_k(y) dy = 0. \quad (2.5)$$

Они сразу следуют из формул (2.1), (2.2).

Разложения порождающих функций и функции $L(\lambda, h)$ в ряды по степеням параметра λ имеют вид:

$$L(\lambda, h) = h\lambda - \frac{h^3}{3}\lambda^3 + \dots; \quad \omega(\lambda, y) = h\lambda - \frac{h^3}{3}\lambda^3 + \dots;$$

$$\phi_x(\lambda, y, h) = h\lambda^2 - \frac{h^3}{3}\lambda^4 + \dots \quad (2.6)$$

Биортогональные функции $W_k(y)$, $\Phi_{xk}(y)$ можно представить в виде суммы финитных, равных нулю вне отрезка $|y| \leq h$, и не финитных частей [7], [10]. Финитные части имеют вид ($|y| \leq h$, $k = 1, 2, \dots$):

$$\omega_k(y) = -\frac{\cos(\lambda_k y)}{2\lambda_k \sin(\lambda_k h)}, \quad \phi_{xk}(y) = \omega_k(y). \quad (2.7)$$

Простой способ их построения указан в статье [10].

3. Решение краевой задачи при условии, что на торце пластины задан прогиб. Пусть на торце $x = 0$ пластины $\{\Pi : |x| \geq 0, |y| \leq h\}$ задан прогиб

$W(y) = W(0, y)$, а угол поворота $\Phi_x^{(y)} = \Phi_x^{(0,y)} = 0$. Тогда система уравнений (1.20) примет вид

$$\begin{aligned} W(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega(\lambda_k, y, h) + \bar{A}_k \omega(\bar{\lambda}_k, y, h), \\ 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \phi_x(\lambda_k, y, h) + \bar{A}_k \phi_x(\bar{\lambda}_k, y, h), \end{aligned} \quad (3.1)$$

Умножая равенства (3.1) соответственно на $W_k(y) + \bar{W}_k(y)$ и $\Phi_{xk}(y) + \bar{\Phi}_{xk}(y)$ и интегрируя обе части полученных равенств по контуру T , с учетом соотношений (2.2), (2.4)–(2.5) для каждого номера $k = 1, 2, \dots$, получим систему алгебраических уравнений (2.3), (2.7)

$$\begin{aligned} w_k^* &= A_k M_k + \bar{A}_k \bar{M}_k, \\ 0 &= \lambda_k A_k M_k + \bar{\lambda}_k \bar{A}_k \bar{M}_k, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$w_k^* = w_k^+ \bar{w}_k^i \quad (3.3)$$

$$w_k = \int_{-h}^h W(y) \omega_k(y) dy, \quad \bar{w}_k = \int_{-h}^h W(y) \bar{\omega}_k(y) dy. \quad (3.4)$$

Поочерёдно умножая первое уравнение системы (3.2) на $\bar{\lambda}_k$ и λ_k , и вычитая второе уравнение, для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ получим решение системы (3.2)

$$A_k = -\frac{w_k^* \bar{\lambda}_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) M_k}, \quad \bar{A}_k = \frac{w_k^* \lambda_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) \bar{M}_k}. \quad (3.5)$$

Дальнейшее построение решений состоит в подстановке выражений (3.5) в равенства (1.17) и последующем выделении по аналогии с работами [12], [13] нуль-рядов. В результате получим выражения для прогиба, углов поворота и моментов в полубесконечной прямоугольной пластине ($a_k = Re \lambda_k$, $b_k = Im \lambda_k$, $a_k < 0$):

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\omega(\lambda_k, y, h)}{M_k} w_k C(x) \right\}; \quad \Phi_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\phi_x(\lambda_k, y, h)}{\lambda_k M_k} w_k S(x) \right\}; \\ \Phi_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\phi_y(\lambda_k, y, h)}{M_k} w_k C(x) \right\}; \\ M_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{m_x(\lambda_k, y, h)}{M_k} w_k C(x) \right\}; \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{m_y(\lambda_k, y, h)}{\lambda_k^2 M_k} w_k T(x) \right\}; \quad M_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{m_{xy}(\lambda_k, y, h)}{\lambda_k M_k} w_k S(x) \right\};$$

где

$$C(x) = \left\{ \cos(b_k x) - \frac{a_k \sin(b_k x)}{b_k} \right\} e^{a_k x}; \quad S(x) = -(a_k^2 + b_k^2) \frac{\sin(b_k x)}{b_k} e^{a_k x};$$

$$T(x) = -(a_k^2 + b_k^2) \left\{ \cos(b_k x) + \frac{a_k \sin(b_k x)}{b_k} \right\} e^{a_k x}.$$

На основании зависимостей (1.1) и (1.5), получим:

$$Q_x(x, y) = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y(x, y) = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}; \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} K_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \\ K_y &= Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подставляя выражения (3.5) в равенства (3.6), (3.7), получим формулы для перерезывающих сил $Q_x(x, y)$, $Q_y(x, y)$ и $K_x(x, y)$, $K_y(x, y)$:

$$\begin{aligned} Q_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda_k m_x(\lambda_k, y, h) \cdot dC(x)/dx + S(x) \cdot dm_{xy}(\lambda_k, y, h)/dy}{\lambda_k M_k} w_k \right\}, \\ Q_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{T(\lambda_k, x, l) \cdot dm_y(\lambda_k, y, h)/dy + \lambda_k m_{xy}(\lambda_k, y, h) \cdot dS(x)/dx}{\lambda_k^2 M_k} w_k \right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} K_x(x, y) &= Q_x(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{dm_{xy}(\lambda_k, y, h)/dy}{\lambda_k M_k} w_k S(x) \right\}, \\ K_y(x, y) &= Q_y(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{m_{xy}(\lambda_k, y, h)}{\lambda_k M_k} w_k \cdot dS(x)/dx \right\}. \end{aligned}$$

Пример. Пусть $\nu = \frac{1}{3}$, $h = 1$, $E = 0,69 \cdot 10^5$ МПа, $\rho = 0,1$, $W(y) = \frac{(y^2 - h^2)^2}{24}$ (материал – катанный алюминий). На рис. 1–4 показаны кривые распределения прогиба, моментов и перерезывающих сил на торце полубесконечной прямоугольной пластины.

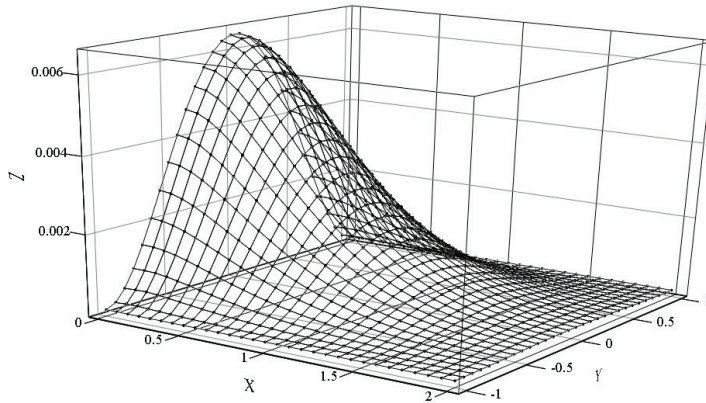


Рис. 1

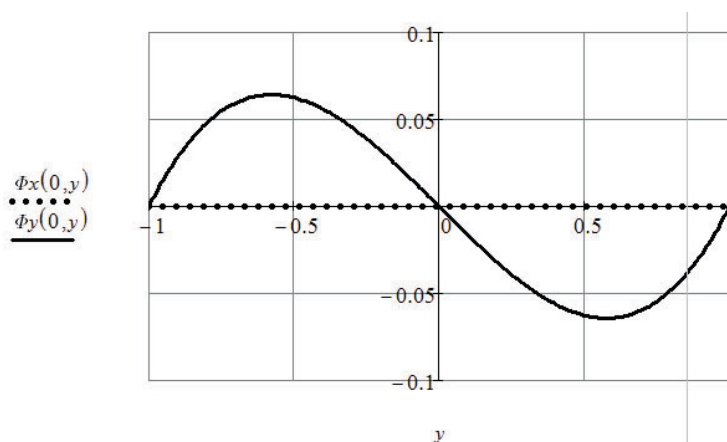


Рис. 2

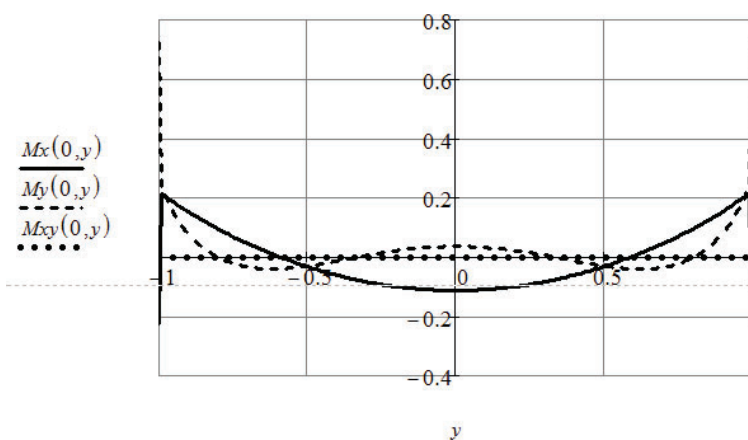


Рис. 3

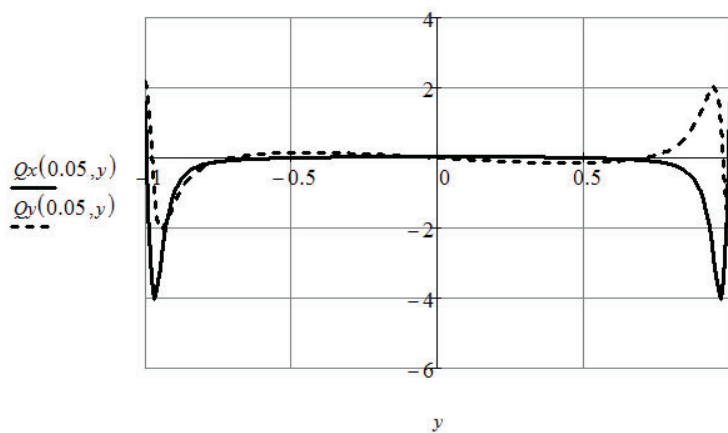


Рис. 4

4. Решение краевой задачи при условии, что на торце пластины задан угол поворота. Пусть на торце $x = 0$ пластины $\{\Pi : |x| \geq 0, |y| \leq h\}$ задан угол поворота $\Phi_x^{(y)} = \Phi_x^{(0,y)}$, а прогиб $W(y) = W(0, y) = 0$. Тогда система уравнений (1.20) примет вид

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega(\lambda_k, y, h) + \bar{A}_k \omega(\bar{\lambda}_k, y, h), \\ \Phi_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \phi_x(\lambda_k, y, h) + \bar{A}_k \phi_x(\bar{\lambda}_k, y, h), \end{aligned} \quad (4.1)$$

Умножая равенства (4.1) соответственно на $W_k(y) + \bar{W}_k(y)$ и $\Phi_{xk}(y) + \bar{\Phi}_{xk}(y)$ и интегрируя обе части полученных равенств по контуру T , с учетом соотношений (2.2), (2.4)–(2.5) для каждого номера $k = 1, 2, \dots$, получим систему алгебраических уравнений (2.3), (2.7)

$$\begin{aligned} 0 &= A_k M_k + \bar{A}_k \bar{M}_k, \\ w_k^* &= \lambda_k A_k M_k + \bar{\lambda}_k \bar{A}_k \bar{M}_k, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$w_k^* = w_k + \bar{w}_k, \quad (4.3)$$

$$w_k = \int_{-h}^h \Phi_{xk}(y) \phi_{xk}(y) dy, \quad \bar{w}_k = \int_{-h}^h \Phi_{xk}(y) \bar{\phi}_{xk}(y) dy. \quad (4.4)$$

Поочередно умножая первое уравнение системы (4.2) на $\bar{\lambda}_k$ и λ_k , и вычитая второе уравнение, для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ получим решение системы (4.2)

$$A_k = \frac{w_k^*}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) M_k}, \quad \bar{A}_k = -\frac{w_k^*}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) \bar{M}_k}. \quad (4.5)$$

Дальнейшее построение решений состоит в подстановке выражений (4.5) в равенства (1.17) и последующем выделении по аналогии с работами [12], [13] нуль-рядов. В результате получим выражения (3.6) для прогиба, углов поворота и моментов в полубесконечной прямоугольной пластине, где

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{\sin(b_k x)}{b_k} e^{a_k x}; \quad S(x) = \left\{ \cos(b_k x) + \frac{a_k}{b_k} \sin(b_k x) \right\} e^{a_k x}; \\ T(x) &= \left\{ 2a_k \cos(b_k x) + \frac{a_k^2 - b_k^2}{b_k} \sin(b_k x) \right\} e^{a_k x}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Формулы для перерезывающих сил $Q_x(x, y)$, $Q_y(x, y)$ и $K_x(x, y)$, $K_y(x, y)$ примут вид (3.8).

Пример. Приведем примеры расчетов при $\nu = \frac{1}{3}$, $h = 1$, $E = 0,69 \cdot 10^5$ МПа, $\rho = 0,1$, $\Phi_x(y) = \frac{(y^2 - h^2)^2}{24}$ (материал – катанный алюминий). На рис. 5–8 показаны кривые распределения прогиба, моментов и перерезывающих сил.

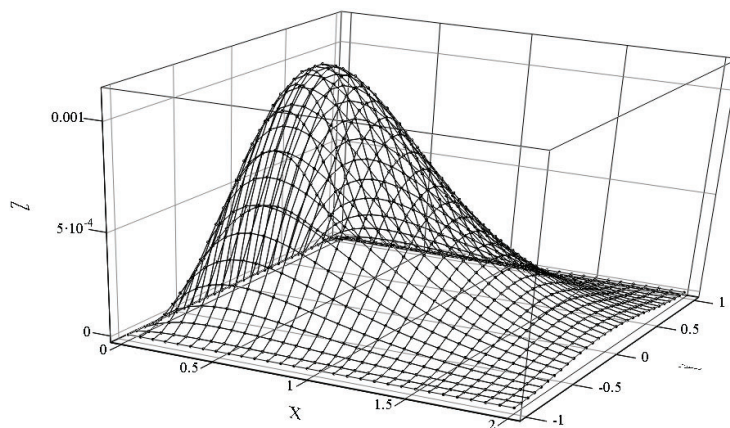


Рис. 5

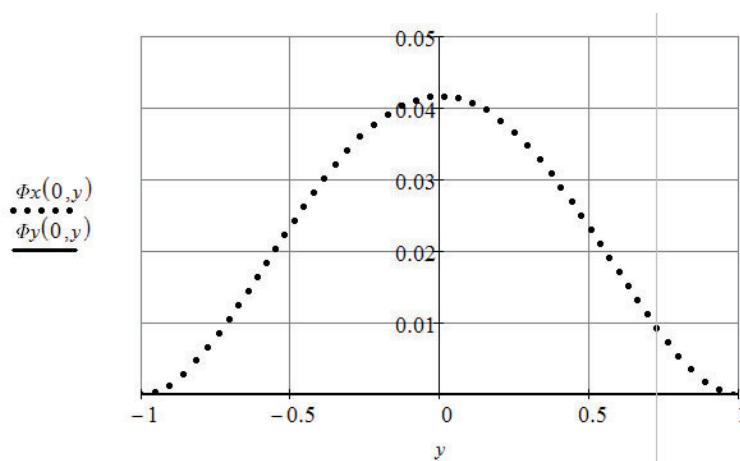


Рис. 6

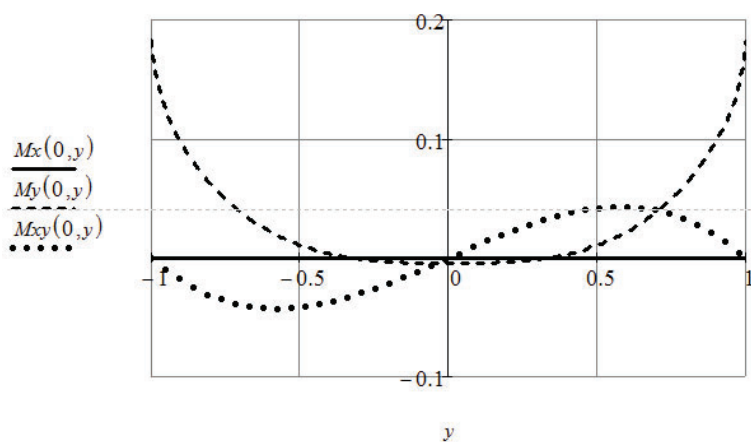


Рис. 7

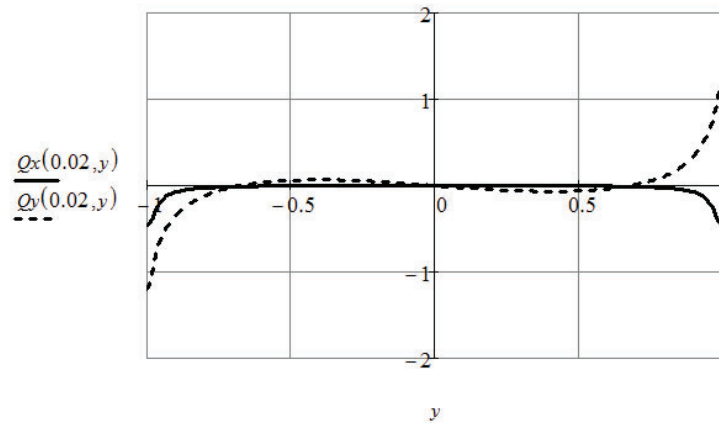


Рис. 8

Заключение. Впервые дано точное аналитическое решение краевой задачи изгиба полубесконечной прямоугольной пластины, продольные стороны которой защемлены, а на торце заданы прогиб или угол поворота (краевые функции четные). Как и в случае плоской задачи теории упругости [7]–[9], решение строится в виде разложений по функциям Фадля – Папковича (однородным решениям), по существу, по той же схеме, что и решение в тригонометрических рядах. Искомые коэффициенты разложений находятся с помощью систем функций, биортогональных к функциям Фадля-Папковича.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коваленко М. Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям // Доклады РАН. 1997. Т. 352. № 4. С. 480–482.
- [2] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 78–98.
- [3] Коваленко М. Д., Меньшова И. В. Разложения Лагранжа по функциям Фадля-Папковича в обратно-симметрической задаче теории упругости для прямоугольной полуполосы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 81-90.
- [4] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М. : АФЦ, 1999. 560 с.
- [5] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М. : Наука, 1966. 636 с.
- [6] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М.: Стройиздат, 1975. 224 с.
- [7] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 5. С. 78–98.
- [8] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Шуляковская Т. Д. // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 136–158
- [9] Коваленко М. Д., Меньшова И. В. Аналитические решения двумерных краевых задач теории упругости в конечных областях с угловыми точками границы. Чебоксары : Изд-во Чуваш. гос. пед. ун-та, 2014. 123 с.

[10] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 136–158.

[11] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. М. : ФМЛ, 1962. 608 с.

[12] Аbruков Д. А. Изгиб полуполосы со свободными продольными краями, на торце которой заданы изгибающий момент и обобщенная поперечная сила. Точное решение краевой задачи // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 94–114.

[13] Коваленко М. Д., Клейн Н. В. Однородные решения теории упругости. Биортогональные разложения // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. Т. 11. № 3. С. 393–408.

D. A. Abrukov

**THE BENDING OF A SEMI-INFINITE RECTANGULAR PLATE, CLAMPED
ON THE LONG SIDES, AT WHICH END-WALL A DEFLECTION OR AN
ANGLE OF TURN IS GIVEN**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. The exact analytical solution of a boundary value problem of a bend of a semi-infinite rectangular plate which long sides are clamped, and at an end-wall a deflection or an angle of turn is given (boundary function is even). The solution is submitted in series on Fadde-Papkovich functions. Required coefficients of series are by means of systems of functions, biorthogonal to Fadde – Papkovich functions.

Keywords: plate bending, semi-strip bending, Fadde – Papkovich functions, analytical solutions.

REFERENCES

- [1] Kovalenko M. D. Razlozhenija Lagranzha i netrivial'nye predstavlenija nulja po odnorodnym reshenijam // Doklady RAN. 1997. Vol. 352. № 4. S. 480–482.
- [2] Kovalenko M. D., Shuljakovskaja T. D. Razlozhenija po funkcijam Fadlja – Papkovicha v polose. Osnovy teorii // Izvestija RAN. MTT. 2011. № 5. S. 78–98.
- [3] Kovalenko M. D., Men'shova I. V. Razlozhenija Lagranzha po funkcijam Fadlja-Papkovicha v obratno-simmetricheskoj zadache teorii uprugosti dlja prjamougol'noj polupolosey // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2013. № 1 (15). S. 81–90.
- [4] Kashin B. S., Saakjan A. A. Ortogonal'nye rjady M. : AFC, 1999. 560 s.
- [5] Timoshenko S. P., Vojnovskij-Kriger S. Plastiny i oblochki. M. : Nauka, 1966. 636 s.
- [6] Vlasov V. V. Metod nachal'nyh funkcij v zadachah teorii uprugosti i stroitel'noj mehaniki. M. : Strojizdat, 1975. 224 s.
- [7] Kovalenko M. D., Shuljakovskaja T. D. // Izvestija RAN. Mehanika tverdogo tela. 2011. № 5. S. 78–98.
- [8] Kovalenko M. D., Men'shova I. V., Shuljakovskaja T. D. // Izvestija RAN. Mehanika tverdogo tela. 2013. № 5. S. 136–158
- [9] Kovalenko M. D., Men'shova I. V. Analiticheskie reshenija dvumernyh kraevykh zadach teorii uprugosti v konechnykh oblastjah s uglovymi tochkami granicy. Cheboksary : Izd-vo Chuvash. gos. ped. un-ta. 2014. 123 s.
- [10] Kovalenko M. D., Men'shova I. V., Shuljakovskaja T. D. Razlozhenija po funkcijam Fadlja-Papkovicha. Primery reshenij v polupolose // Izvestija RAN. Mehanika tverdogo tela. 2013. № 5. S. 136–158.
- [11] Fihntengol'c G. M. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija. Vol. I. M. : FML, 1962. 608 s.

Abrukov Denis Alexandrovich, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

[12] Abrukov D. A. Izgib polupolosy so svobodnymi prodol'nymi krajami, na torce kotoroj zadany izgibajushhij moment i obobshhennaja poperechnaja sila. Tochnoe reshenie kraevoj zadachi // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2014. № 4 (22). S. 94–114.

[13] Kovalenko M. D., Klejn N. V. Odnorodnye reshenija teorii uprugosti. Biortogonal'nye razlozhenija // Mehanika kompozicionnyh materialov i konstrukcij. 2005. Vol. 11. № 3. С. 393–408.

А. Н. Максимов

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВОЗМУЩЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ПРИ УСЛОВИИ ПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Методом малого параметра получено решение аналитической задачи определения нулевых и первых приближений компонент напряжений в упругой и пластической областях при условии полной пластичности для сжимаемого пространства, ослабленного полостью.

Ключевые слова: напряжения, деформации, пластичность, упругость.

УДК: 539.3+624.073

В работе исследуется напряженное состояние идеальнопластического сжимаемого массива. В постановке задачи массив ослаблен полностью, внутри которого давление отсутствует, а на бесконечности приложены взаимно-перпендикулярные усилия. Задача решена методом малого параметра, в сферической системе координат, в безразмерных единицах длины (все величины, имеющие размерность длины отнесены к радиусу сферической полости ρ_0).

Рассматривается массив из сыпучей среды, обладающей свойствами внутреннего трения и сцепления. Условие предельного состояния сыпучей среды определено в виде [1]:

$$f(\sigma'_{ij}) = k_0 + a\sigma, \quad (1)$$

где σ'_{ij} – компоненты девиатора напряжения, k_0 – коэффициент сцепления, $a = \operatorname{tg}\alpha$ – коэффициент внутреннего трения, α – угол внутреннего трения.

Для решения задачи в сферической системе координат используем уравнения равновесия [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\rho\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_\rho - \sigma_\theta - \sigma_\phi + \tau_{\rho\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} ((\sigma_\theta - \sigma_\phi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\rho\theta}) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

© Максимов А. Н., 2016

Максимов Алексей Николаевич

e-mail: alexei.maksimow@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.09.2016

$$\frac{\partial \tau_{\rho\phi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} (3\tau_{\rho\phi} + 2\tau_{\theta\phi} \operatorname{ctg} \theta) = 0.$$

Условия пластичности Треска-Сен-Венана [3] с учетом (1):

$$\begin{aligned} \left(\sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \left(\sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) - \tau_{\rho\theta}^2 &= 0, \\ \left(\sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \left(\sigma_\phi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) - \tau_{\theta\phi}^2 &= 0, \\ \left(\sigma_\phi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \left(\sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) - \tau_{\rho\phi}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а также

$$\begin{aligned} \left(\sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \tau_{\theta\phi} &= \tau_{\rho\theta} \cdot \tau_{\rho\phi}, \\ \left(\sigma_\phi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \tau_{\rho\theta} &= \tau_{\rho\phi} \cdot \tau_{\theta\phi}, \\ \left(\sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \tau_{\rho\phi} &= \tau_{\rho\theta} \cdot \tau_{\theta\phi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho l + \tau_{\rho\theta} m + \tau_{\rho\phi} n &= P_\rho, \\ \tau_{\rho\theta} l + \sigma_\theta m + \tau_{\theta\phi} n &= P_\theta, \\ \tau_{\rho\phi} l + \tau_{\theta\phi} m + \sigma_\phi n &= P_\phi, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sigma_\rho, \tau_{\rho\theta}, \dots$ – компоненты девиатора напряжения, l, m, n – направляющие косинусы нормали, P_ρ, P_θ, P_ϕ – проекции усилий на оси ρ, θ, ϕ , $\sigma = (\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_\phi)/3$ – среднее давление.

Компоненты напряжения представим в виде рядов по малому параметру δ ($\delta \ll 1$):

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \sigma_\rho^0 + \delta \sigma'_\rho, \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \delta \sigma'_\theta, \sigma_\phi = \sigma_\phi^0 + \delta \sigma'_\phi, \\ \tau_{\rho\theta} &= \tau_{\rho\theta}^0 + \delta \tau'_{\rho\theta}, \tau_{\rho\phi} = \tau_{\rho\phi}^0 + \delta \tau'_{\rho\phi}, \tau_{\theta\phi} = \tau_{\theta\phi}^0 + \delta \tau'_{\theta\phi}. \end{aligned} \quad (6)$$

Условия пластичности (3) и (4) могут быть удовлетворены в трех случаях. Случай, соответствующий сферической полости был рассмотрен в [4].

В работе рассматривается аналитическая задача, соответствующая случаю:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) &= 0, \\ \sigma_\theta^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) &= 0, \\ \sigma_\phi^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) &\neq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решая совместно (7) и (3), получим:

$$\sigma_\theta^0 = \sigma_\rho^0, \tau_{\rho\theta}^0 = \tau_{\rho\phi}^0 = \tau_{\theta\phi}^0 = 0. \quad (8)$$

Тогда (6) с учетом (8) примет вид:

$$\sigma^0 = (2\sigma_\rho^0 + \sigma_\phi^0)/3. \quad (9)$$

Решая совместно (7) и (9), получим:

$$\sigma_\rho^0 = \sigma_\phi^0/A + D, \quad (10)$$

где $A = (3 + 4a)/(3 - 2a)$, $D = -6k_0/(3 + 4a)$.

Уравнения равновесия (2) с учетом (8) примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_\rho^0}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}(\sigma_\rho^0 - \sigma_\phi^0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\phi^0}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\rho^0}{\partial \theta} + (\sigma_\rho^0 - \sigma_\phi^0) \operatorname{ctg} \theta = 0. \quad (11)$$

Решая совместно (10) и (11), получим для компонент нормального напряжения в нулевом приближении в пластической области:

$$\sigma_\theta^{0p} = \sigma_\rho^{0p} = (c(\rho \sin \theta)^{\frac{6a}{3-2a}} - k_0)/a, \quad \sigma_\phi^{0p} = A\sigma_\theta^{0p} - AD, \quad (12)$$

где $c - \text{const}$, A и D определены выше.

Решая совместно (7), (8) и линеаризированные условия пластичности (3), получим:

$$\sigma'_\rho - \sigma' \left(1 - \frac{2}{3}a\right) = 0, \quad \sigma'_\theta - \sigma' \left(1 - \frac{2}{3}a\right) = 0. \quad (13)$$

Тогда

$$\sigma'_\rho = \sigma'_\theta \quad (14)$$

$$\sigma' = (2\sigma'_\rho + \sigma'_\phi)/3. \quad (15)$$

Решая совместно (13) и (15), получим

$$\sigma'_\phi = A\tilde{\sigma}', \quad (16)$$

где

$$\tilde{\sigma}' = \sigma'_\rho = \sigma'_\theta. \quad (17)$$

Решая совместно (7), (8) и линеаризированные условия пластичности (4), получим:

$$\tau'_{\rho\theta} = 0. \quad (18)$$

Уравнения равновесия (2) с учетом (17), (18) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\sigma}'}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau'_{\rho\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tilde{\sigma}'}{\rho} (1 - A) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma'}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tau'_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \tilde{\sigma}' (1 - A) \operatorname{ctg} \theta &= 0, \\ \frac{\partial \tau'_{\rho\phi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{A}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\sigma}'}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} \left(3\tau'_{\rho\phi} + 2\tau'_{\theta\phi} \operatorname{ctg} \theta \right) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Для решения (14) водится функция $U(\rho, \theta, \phi)$ таким образом, чтобы выполнялись равенства:

$$\tilde{\sigma}' = \frac{\partial U}{\partial \phi}, \tau'_{\rho\phi} = -\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \sin \theta - (1-A)U \sin \theta, \tau'_{\theta\phi} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \sin \theta - (1-A)U \cos \theta. \quad (20)$$

Тогда первые два уравнения (20) тождественно удовлетворяются, а последнее примет вид:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + (5-A)\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + (4-A)\operatorname{ctg}\theta \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{A}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{2(1-A)}{\sin^2 \theta} U = 0. \quad (21)$$

Решение (21) найдено методом разделения переменных:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 \rho^{\chi_1} + C_2 \rho^{\chi_2}) \left(a_{mn} \cos \frac{m}{\sqrt{A}} \phi + b_{mn} \sin \frac{m}{\sqrt{A}} \phi \right) (\sin \theta)^{\frac{A-3}{2} + \alpha} P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta), \quad (22)$$

где первый множитель (22) представляет решение уравнения Эйлера, в котором:

$$\chi_{1,2} = \frac{A}{2} - 2 \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2} - 2\right)^2 + \lambda}, \quad (23)$$

C_1, C_2 – константы, которые могут быть определены из граничных условий и условий сопряжения.

$$\lambda = (2\alpha + 1)(n + 0,5) + n^2 - m^2 + 5A/2 - 4, \quad (24)$$

$$\alpha = \sqrt{(A+1)^2 - 4m^2}/2. \quad (25)$$

Второй множитель представляет решение уравнения Фурье, в котором a_{mn}, b_{mn} – коэффициенты Фурье, определяемые:

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{1}{N_{mn}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho_1(\theta, \phi) \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot \cos m\phi \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi, \\ b_{mn} &= \frac{1}{N_{mn}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho_1(\theta, \phi) \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot \sin m\phi \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi, \\ N_{mn} &= \frac{2\pi \varepsilon_m (n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}, \varepsilon_m = 2(m=0), 1(m>0), \end{aligned} \quad (26)$$

где $P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta)$ – полином Якоби.

Подставляя (22) в (20) и принимая во внимание (16), получим для первого приближения компонент напряжения в пластической области:

$$\begin{aligned}
\sigma'_\rho &= \sigma'_\theta = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 \rho^{\chi_1} + C_2 \rho^{\chi_2}) (b_{mn} \cos \frac{m\phi}{\sqrt{A}} - a_{mn} \sin \frac{m\phi}{\sqrt{A}}) \cdot \\
&\cdot m (\sin \theta)^{\frac{A-3}{2} + \alpha} P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta), \\
\sigma' &= A \sigma'_\rho, \\
\tau'_{\rho\phi} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 \rho^{\chi_1} (\chi_1 + 1 - A) + C_2 \rho^{\chi_2} (\chi_2 + 1 - A)) \cdot \\
&\cdot (a_{mn} \cos \frac{m\phi}{\sqrt{A}} + b_{mn} \sin \frac{m\phi}{\sqrt{A}}) (\sin \theta)^{\frac{A-1}{2} + \alpha} \times P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta), \\
\tau'_{\theta\phi} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 \rho^{\chi_1} + C_2 \rho^{\chi_2}) (a_{mn} \cos \frac{m\phi}{\sqrt{A}} + b_{mn} \sin \frac{m\phi}{\sqrt{A}}) (\sin \theta)^{\frac{A-1}{2} + \alpha} \cdot \\
&\cdot (\operatorname{ctg} \theta \left(\alpha - \frac{A+1}{2} \right) P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) + \frac{\partial P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta)}{\partial \theta}), \\
\tau'_{\rho\theta} &= 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М. : ГИТТЛ, 1954.
- [2] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М. : Наука, 1978. 208 с.
- [3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М. : Наука, 1966. 231 с.
- [4] Максимов А. Н., Пушкаренко Н. Н. К вопросу определения возмущенного состояния идеальнопластического сжимаемого массива, ослабленного сферической полостью // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 117–121.

A. N. Maksimov

ON THE DEFINITION OF THE DISTURBED STATE ARRAY UNDER THE
CONDITION OF FULL PLASTICITY

Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia

Abstract. With the method of small parameter we solve the problem of determining the analytical zero and first approximation of the stress in the elastic and plastic regions with the full plasticity of compressed space, attenuated byoral.

Keywords: stress, strain, flexibility, elasticity.

REFERENCES

- [1] Sokolovskij V. V. Statika sypuchej sredy. M. : GITTL, 1954. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D., Ershov L. V. Metod vozmushhenij v teorii uprugoplasticheskogo tela. M. : Nauka, 1978. 208 s. (in Russian).
- [3] Ivlev D. D. Teorija ideal'noj plastichnosti. M. : Nauka, 1966. 231 s. (in Russian).
- [4] Maksimov A. N., Pushkarenko N. N. K voprosu opredelenija vozmushhennogo sostojanija idel'noplasticheskogo szhimaemogo massiva, oslablennogo sfericheskoj polost'ju // Vestnik ChGPU im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2016. №3 (29). S. 117–121. (in Russian).

Maksimov Alexey Nikolaevich, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

Г. Е. Чекмарев

ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ПРУТА, ОСЛАБЛЕННОГО ПОЛОГОЙ ВЫТОЧКОЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Одним из основных свойств металлов является упрочнение, характеризующее влияние пластического деформирования на механическое поведение среды. Исследованию методом возмущений осесимметрической задачи деформирования тел из упрочняющегося материала и посвящена данная работа. В ней приведен алгоритм определения первого приближения в задаче пластического деформирования прута из упрочняющегося материала.

Ключевые слова: пластичность, деформация, линеаризация, упрочнение.

УДК: 539.375

Рассмотрим пластическое деформирование круглого в плане прута радиуса R , ослабленного пологой выточкой, при растяжении вдоль оси аппликат. Материал стержня считается изотропным и несжимаемым.

Уравнения равновесия пространственной задачи в цилиндрической системе координат имеют вид [1]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} &= 0.\end{aligned}$$

Уравнения равновесия для осесимметричной задачи, в предположении, что $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\rho, z)$, $e_{ij} = e_{ij}(\rho, z)$, $\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta z} = 0$, запишутся в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} &= 0.\end{aligned}$$

Условие несжимаемости имеет вид

© Чекмарев Г. Е., 2016

Чекмарев Георгий Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.10.2016

$$e_{\rho}^{+} e_{\theta}^{+} e_z^{-} = 0.$$

Будем считать, что боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений

$$\sigma_{\mathbf{n}} = 0, \quad \tau_{\mathbf{n}} = 0, \quad \text{при } \rho = R + f(z),$$

где

$$f(z) = A \cos nz$$

уравнение, задающее форму пологой выточки.

Положим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij}, \quad e_{ij} = e_{ij}^0 + e'_{ij}, \\ u_{\rho} &= u_{\rho}^0 + u'_{\rho}, \quad u_{\theta} = 0, \quad u_z = u_z^0 + u'_z, \end{aligned}$$

где u_{ρ} , u_{θ} , u_z – компоненты перемещения в цилиндрической системе координат, компоненты с нуликом наверху соответствуют невозмущенному состоянию, компоненты со штрихом – возмущению.

В качестве невозмущенного состояния примем однородное напряженно-деформированное состояние:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^0 = \sigma_{\theta}^0 = 0, \quad \sigma_z^0 \neq 0, \quad \tau_{\rho\theta}^0 = \tau_{\theta z}^0 = \tau_{\rho z}^0 = 0, \\ e_{\rho}^0 + e_{\theta}^0 + e_z^0 = 0, \quad e_{\rho\theta}^0 = e_{\theta z}^0 = e_{\rho z}^0 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Линеаризованное уравнение несжимаемости запишется в виде

$$e_{\rho}^0 + e_{\theta}^0 + e_z^0 = 0, \quad e'_{\rho} + e'_{\theta} + e'_z = 0. \quad (2)$$

Линеаризовав условия пластичности [2] для невозмущенного состояния, получим

$$\begin{aligned} \sigma_z^0 &= 2k + c(e_z^0 - e_{\rho}^0), \\ 0 &= \sigma_z^0 + 3ce_{\theta}^0 - 2k. \end{aligned}$$

Из (2) имеем

$$\begin{cases} e_z^0 - e_{\rho}^0 = 3e_{\theta}^0, \\ e_{\theta}^0 = -e_z^0 - e_{\rho}^0. \end{cases} \quad (3)$$

Разрешая систему (3), получим

$$e_{\rho}^0 = e_{\theta}^0 = -\frac{1}{2}e_z^0,$$

$$\sigma_z^0 = 2k + \frac{3c}{2}e_z^0.$$

Для компонент со штрихом получим

$$\begin{aligned} \sigma'_z - \sigma'_{\rho} &= c(e'_z - e'_{\rho}), \\ \sigma'_{\theta} &= \frac{1}{2}(\sigma'_{\rho} + \sigma'_z) + \frac{3c}{2}e'_{\theta} - k, \\ e'_{\rho} + e'_{\theta} + e'_z &= 0. \end{aligned}$$

Линеаризованные граничные условия запишутся в виде

$$\sigma'_\rho = 0, \quad \tau'_{\rho z} = \sigma'_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{при} \quad \rho = R.$$

Линеаризуя уравнения равновесия, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau'_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma'_\rho - \sigma'_\theta}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau'_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \frac{\tau'_{\rho z}}{\rho} &= 0. \end{aligned}$$

Обобщенный ассоциированный закон пластического течения запишем в виде

$$de_{ij} = d\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (4)$$

где

$$f_1 = [(\sigma_\rho - \sigma_z) - c(e_\rho - e_z)]^2 + 4(\tau_{\rho z} - c e_{\rho z})^2 - 4k^2,$$

$$f_2 = \sigma_\theta - \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) - \frac{3}{2}c e_\theta + k,$$

а λ_1, λ_2 – неопределенные множители.

Из обобщенного ассоциированного закона течения (4) следует

$$\begin{aligned} de_\rho &= 2d\lambda_1 [(\sigma_\rho - \sigma_z) - c(e_\rho - e_z)] - \frac{1}{2}d\lambda_2, \\ de_z &= -2d\lambda_1 [(\sigma_\rho - \sigma_z) - c(e_\rho - e_z)] - \frac{1}{2}d\lambda_2, \\ de_\theta &= d\lambda_2, \quad 2de_{\rho z} = 8d\lambda_1(\tau_{\rho z} - c e_{\rho z}). \end{aligned} \quad (5)$$

Линеаризуя соотношения ассоциированного течения (5), с учетом (1) в нулевом приближении получим

$$de_\rho^0 = 4kd\lambda_1^0 - \frac{1}{2}d\lambda_2^0, \quad de_z^0 = -4kd\lambda_1^0 - \frac{1}{2}d\lambda_2^0, \quad (6)$$

$$de_\theta^0 = d\lambda_2^0, \quad 2de_{\rho z}^0 = 0. \quad (7)$$

Из (6), (7), (1) находим

$$d\lambda_2^0 = de_\theta^0 = -\frac{1}{2}de_z^0, \quad d\lambda_1^0 = \frac{1}{8k}(2de_\rho^0 + de_\theta^0) = -\frac{3de_z^0}{16k}.$$

Для компонент со штрихом из (5) с учетом (3) получим

$$\begin{aligned} de'_\rho &= 4kd\lambda_1' - \frac{1}{2}d\lambda_2', \quad de'_z = -4kd\lambda_1' - \frac{1}{2}d\lambda_2', \\ de'_\theta &= d\lambda_2', \quad 2de'_{\rho z} = 8d\lambda_1'(\tau'_{\rho z} - c e'_{\rho z}), \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует

$$de'_{\rho z} = -\frac{3de_z^0}{4k}(\tau'_{\rho z} - c e'_{\rho z}),$$

$$\tau'_{\rho z} = c e'_{\rho z} - \frac{3}{4k} \frac{de'_{\rho z}}{ds}, \quad (9)$$

где введено обозначение $s = e_z^0$.

Используя известные формулы связи между компонентами тензора деформации и компонентами перемещений при условии, что $u_\theta = 0$

$$\begin{aligned} e_\rho &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad e_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho}, \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ e_{\rho\theta} &= \frac{1}{2} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{u_\theta}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \right), \\ e_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \quad e_{\rho z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right), \end{aligned}$$

запишем (4), (2), (9) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau'_{\rho z}}{\partial z} + c \left[\frac{\partial^2 u'_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u'_\rho}{\partial \rho} - \frac{u'_\rho}{\rho} \right) \right] &= 0, \\ \frac{\partial \sigma'}{\partial z} + \frac{\partial \tau'_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\tau'_{\rho z}}{\rho} + c \frac{\partial^2 u'_z}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u'_\rho}{\partial \rho} + \frac{u'_\rho}{\rho} + \frac{\partial u'_z}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

$$\tau'_{\rho z} = \frac{c}{2} \left(\frac{\partial u'_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u'_z}{\partial \rho} \right) - \frac{3}{8k} \frac{d}{ds} \left[\frac{\partial u'_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u'_z}{\partial \rho} \right]. \quad (12)$$

Удовлетворим уравнение несжимаемости (11) с помощью замены

$$u'_\rho = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u'_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}.$$

В уравнениях равновесия (9) проинтегрируем первое выражение по z , второе по ρ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial \rho \partial z} + \frac{\partial^2 \tau'_{\rho z}}{\partial z^2} + c \left[\frac{\partial^3 u'_\rho}{\partial \rho^2 \partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u'_\rho}{\partial \rho \partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u'_\rho}{\partial z} \right) \right] &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial z \partial \rho} + \frac{\partial^2 \tau'_{\rho z}}{\partial \rho^2} - \frac{\tau'_{\rho z}}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'_{\rho z}}{\partial \rho} + c \frac{\partial^3 u'_z}{\partial z^2 \partial \rho} &= 0, \end{aligned}$$

и вычитая из полученного первого соотношения второе, исключим из выражения σ'

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau'_{\rho z}}{\partial z^2} + c \left[\frac{\partial^3 u'_\rho}{\partial \rho^2 \partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u'_\rho}{\partial \rho \partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u'_\rho}{\partial z} \right) \right] - \\ - \frac{\partial^2 \tau'_{\rho z}}{\partial \rho^2} + \frac{\tau'_{\rho z}}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'_{\rho z}}{\partial \rho} - c \frac{\partial^3 u'_z}{\partial z^2 \partial \rho} &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \right) \tau'_{\rho z} - c \frac{\partial^3 u'_z}{\partial z^2 \partial \rho} - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \right] u'_\rho = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставив (12) в (13), получим

$$\begin{aligned} & c \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} u'_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} u'_z \right] - \\ & - \frac{3}{4k} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} u'_\rho + \frac{\partial}{\partial \rho} u'_z \right] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (13), (14) находим

$$\begin{aligned} & c \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \right] - \\ & - \frac{3}{4k} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение (15) представим в виде [3]

$$\psi = \varphi(\rho, z) S(s). \quad (16)$$

Подставив (16) в (15), получим

$$\begin{aligned} & c \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) \right] - \\ & - \frac{3}{4k} \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) \right] = \frac{\dot{S}}{S} = -\lambda, \lambda - \text{const}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17) имеем

$$S + \lambda S = 0,$$

$$\begin{aligned} & c \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right] - \\ & - \frac{3\lambda}{4k} \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение (18) представим в виде

$$\varphi(\rho, z) = R(\rho) \cos nz. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), получим

$$\begin{aligned} & c \left(-n^2 + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) \left[\frac{n^2}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right] - \\ & - \frac{3\lambda}{4k} \left(n^2 + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) \left[\frac{n^2}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right] = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение (17) имеет вид $S(s) = \exp(\lambda s)$. Постоянная λ определяет характер нагрузки или деформирования. Величина φ может быть определена согласно (20). В этом случае выражения для пластических перемещений и напряжений определяются согласно (9)–(11).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток : Дальнаука, 1998. 528 с.
- [2] Чекмарев Г. Е. Условие пластичности для задачи деформирования тел из упрочняющегося материала при условии осевой симметрии. Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 177–179
- [3] Петров Г. В., Чекмарев Г. Е. О деформировании плоской полосы из упрочняющегося материала ослабленной пологими выточками // ДАН РАН. М. : Наука, 1998. Т. 358. № 5. С. 630–632.

G. E. Chekmarev

DEFORMATION OF HARDENING PLASTIC ROD, WEAKENED BY GENTLE GROOVE

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. One of the main properties of metals is the hardening that characterizes the influence of plastic deformation on the mechanical behavior of the environment. The study by the method of perturbations of the axisymmetric problem of deformation of bodies of hardenable material this work is dedicated to. It shows the algorithm for determining a first approximation in the problem of plastic deformation of a rod of hardenable material.

Keywords: plasticity, deformation, linearization, hardening.

REFERENCES

- [1] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. Teorija plastichnosti. Vladivostok : Dal'nauka, 1998. 528 s. (in Russian).
- [2] Chekmarev G. E. Uslovie plastichnosti dlja zadachi deformirovanija tel iz uprochnjajushhegosja materiala pri uslovii osevoj simmetrii // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2015. № 2 (24). S. 177–179. (in Russian).
- [3] Petrov G. V., Chekmarev G. E. O deformirovanii ploskoj polosy iz uprochnjajushhegosja materiala oslablennoj pologimi vytochkami // DAN RAN. M. : Nauka, 1998. Vol. 358. № 5. S. 630–632. (in Russian).

Chekmarev Georgij Evgen'evich, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

В. Н. Орлов^{1,2}, П. В. Хмара²

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ
АНАЛИТИЧНОСТИ И В ОКРЕСТНОСТИ
ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ**

¹ ГПА (филиал) «КФУ им. В. И. Вернадского», г. Ялта, Россия

² Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Нелинейные дифференциальные уравнения имеют особенности, которые не позволяют использовать классическую теорию линейных дифференциальных уравнений. Наличие подвижных особых точек актуализируют разработку своей теории. В связи с этим имеются публикации, посвященные основным задачам (теоремам существования и единственности решения нелинейных дифференциальных уравнений), и новый подход к их доказательству, который позволяет использовать эти результаты в решении всех задач, возникающих в аналитическом приближенном методе решения нелинейных дифференциальных уравнений. В данной работе представлено обобщение на комплексную область ранее полученных результатов в вещественной области.

Ключевые слова: теорема существования и единственности, аналитическое приближенное решение, подвижная особая точка, априорная погрешность, комплексная область.

УДК: 517.95:515.172.22

При разработке аналитического приближенного метода решения нелинейных дифференциальных уравнений необходим третий вариант теорем существования [1] и новый подход в доказательстве теорем существования, метод мажорант не к правой части дифференциального уравнения, как это дается в классической теореме Коши, а к самому решению исходного нелинейного дифференциального уравнения. В этом

© Орлов В. Н., Хмара П. В., 2016

Орлов Виктор Николаевич

e-mail: orlowvn@gambler.ru, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математики, теории и методики обучения математике, ГПА (филиал) «КФУ им. В. И. Вернадского», г. Ялта, Россия; Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Хмара Павлина Васильевна, магистр 2 года обучения, ГПА (филиал) «КФУ им. В. И. Вернадского», г. Ялта, Россия.

Поступила 12.10.2016

случае получаем теорему существования, относящуюся к третьему варианту приведенной классификации. Такой подход позволяет решить задачи, составляющие основу приближенного метода решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками:

1. Доказательство теорем существования решения нелинейного дифференциального уравнения для области аналитичности и окрестности подвижной особой точки.

2. Построение аналитического приближенного решения, как в области аналитичности, так и в окрестности подвижной особой точки, в случае точных значений начальных условий и подвижной особой точки.

3. Исследование влияния возмущения начальных условий и подвижной особой точки на аналитическое приближенное решение, как в вещественной, так и в комплексной областях.

4. Получение точных границ для аналитического приближенного решения в окрестности возмущенного значения подвижной особой точки.

5. Получение точных критериев существования подвижной особой точки, как в вещественной [2], так и комплексной областях.

6. Разработка алгоритма и программного обеспечения для нахождения подвижной особой точки с заданной точностью на основе разработанной математической теории.

Рассматривается задача Коши

$$y''' = y^4(z) + r(z), \quad (1)$$

$$y(z_0) = y_0, \quad y'(z_0) = y_1, \quad y''(z_0) = y_2. \quad (2)$$

Ранее были доказаны теоремы существования и единственности решения в области аналитичности [3] и в окрестности подвижной особой точки [4]. При обобщении на комплексную область получаем следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1) $r(z) \in C^1$ в области $|z - z_0| < \rho_1$, $\rho_1 = const$;

2) $\exists M_1 : \left| \frac{r^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq M_1$, где $n = 0, 1, \dots$

Тогда $y(z)$ — решение задач (1) и (2), является аналитической функцией

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \text{ в области}$$

$$|z - z_0| < \rho_2,$$

где

$$\rho_2 = \min \left\{ \frac{\rho_{1,1}}{M+1} \right\}, M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \left| \frac{r^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \right\}.$$

Доказательство. На основании условий теоремы функцию $r(z)$ представляем в виде регулярного ряда:

$$r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z^*)^n. \quad (3)$$

Ищем решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), в виде

$$y(z) = (z - z^*)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z^*)^n. \quad (4)$$

Подставляем (3) и (4) в уравнение (1):

$$\begin{aligned} & \sum_{n=3}^{\infty} C_n n(n-1)(n-2)(z-z_0)^{n-3} = \\ & = \sum_{n=3}^{\infty} C_n^{**} (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) следует:

$$C_n(n-1)(n-2)(n-3) = C_{n-3}^{**} + A_{n-3}, \forall n = 4, 5, 6... \quad (6)$$

Выражение (6) позволяет однозначно определить все выражения коэффициентов C_n :

$$C_3 = \frac{1}{6}(C_0^4 + A_0); \quad C_4 = \frac{1}{24}(4C_0^3 C_1 + A_1); \quad C_5 = \frac{1}{60}(4C_0^3 C_2 + 6C_0^2 C_1^2 + A_2) \text{ и т. д.,}$$

где $C_0 = y(z)$, $C_1 = y'(z)$, $C_2 = y''(z)$.

С помощью программного обеспечения на ПК получены аналитические выражения коэффициентов C_n .

На основании выражений коэффициентов C_n строим гипотезу их оценок

$$|C_n| \leq \frac{1}{n(n-1)(n-2)} (M+1)^{n+1}, \forall n \geq 3. \quad (7)$$

Докажем методом математической индукции нашу гипотезу. Из рекуррентного соотношения (6) следует:

$$\begin{aligned} |C_{n+1}| & \leq \frac{1}{(n+1)n(n-1)} |C_{n-2}^{**} + A_{n-2}| \leq \\ & \leq \frac{1}{(n+1)n(n-1)} \left| \sum_{i=0}^{n-2} C_i^* C_{n-i-2}^* + A_{n-2} \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{(n+1)n(n-1)} \left| \sum_{i=0}^{n-2} \left(\sum_{k=0}^i C_k C_{i-k} \cdot \sum_{k=0}^{n-i-2} C_k C_{n-i-k-2} \right) + A_{n-2} \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{(n+1)n(n-1)} (M+1)^{n+2}. \end{aligned}$$

На основании достаточного признака сходимости формально построенный регулярный ряд будет сходиться:

$$|z - z_0| < \frac{1}{(M+1)}.$$

Аналогичным образом получаем обобщение на комплексную область и теоремы существования и единственности решения в окрестности подвижной особой точки.

Теорема 2. Пусть выполняются условия:

- 1) z^* – подвижная особая точка задачи (1) и (2);
- 2) $r(z) \in C^1$ в $|z - z^*| < \rho_1, \rho_1 = const$;

$$3) \exists M_1 : \left| \frac{r^{(n)}(z^*)}{n!} \right| \leq M_1, \quad M_1 = \text{const.}$$

Тогда решение задачи Коши (1), (2) является мероморфной функцией

$$y(x) = (z - z^*)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z^*)^n \quad (8)$$

в области

$$|z - z^*| < \rho_2,$$

где

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[4]{M+1}} \right\}, \quad M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \left| \frac{r^{(n)}(z^*)}{n!} \right| \right\}.$$

Доказательство. На основании условий теоремы функцию $r(x)$ представляем в виде регулярного ряда:

$$r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z^*)^n. \quad (9)$$

Ищем решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), в виде

$$y(z) = (z - z^*)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z^*)^n. \quad (10)$$

Подставляем (9) и (10) в уравнение (1):

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n + \rho) (n + \rho - 1) (n + \rho - 2) (z - z^*)^{n+\rho-3} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{**} (z - z^*)^{n+4\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z^*)^n. \end{aligned}$$

Из последнего следует:

- 1) $n + \rho - 3 = n + 4\rho$;
- 2) $C_n (n - 1) (n - 2) (n - 3) = C_n^{**}, \quad \forall n = 1, 2, 3$;

$$C_n (n - 1) (n - 2) (n - 3) = C_n^{**} + A_{n-4}, \quad \forall n = 4, 5, 6, \dots \quad (11)$$

Первое соотношение определяет значение $\rho = -1$, а второе позволяет однозначно определить все выражения коэффициентов C_n :

$$C_0 = \sqrt[3]{-6}; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = 0; \quad C_4 = \frac{1}{30} A_0; \quad C_5 = \frac{1}{48} A_1 \text{ и т. д.}$$

С помощью специализированного программного обеспечения получаем аналитические выражения коэффициентов C_n .

На основании выражений коэффициентов C_n строим гипотезу их оценок

$$\begin{aligned}
|C_{4m}| &\leq \frac{1}{(4m-1)(4m-2)(4m-3)} (M+1)^m, \\
|C_{4m+1}| &\leq \frac{1}{4m(4m-1)(4m-2)} (M+1)^m, \\
|C_{4m+2}| &\leq \frac{1}{(4m+1)4m(4m-1)} (M+1)^m, \\
|C_{4m+3}| &\leq \frac{1}{(4m+2)(4m+1)4m} (M+1)^m.
\end{aligned}$$

Методом математической индукции докажем нашу гипотезу для коэффициента C_{4m+4} .

Из рекуррентного соотношения (11) следует:

$$\begin{aligned}
|C_{4m+4}| &= \frac{1}{(4m+3)(4m+2)(4m+1)} |C_{4m}^{**} + A_{4m-4}| = \\
&= \frac{1}{(4m+3)(4m+2)(4m+1)} \left| \sum_{k=0}^{4m} \left(\sum_{i=0}^k C_i C_{k-i} \right) \left(\sum_{j=0}^{4m-k} C_j C_{4m-k-j} \right) + A_{4m-4} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{(4m+3)(4m+2)(4m+1)} \cdot \\
&\cdot \left[\sum_{k=0}^{4m} \left(\sum_{i=0}^k \frac{(M+1)^{\frac{i}{4}}}{(i+1)(i+2)(i+3)} \right) \left(\frac{(M+1)^{\frac{k}{4} - \frac{i}{4}}}{(k-i+1)(k-i+2)(k-i+3)} \right) \right] \cdot \\
&\cdot \left(\sum_{j=0}^{4m-k} \frac{(M+1)^{\frac{j}{4}}}{(j+1)(j+2)(j+3)} \frac{(M+1)^{m - \frac{k}{4} - \frac{j}{4}}}{(4m-k-j+1)(4m-k-j+2)(4m-k-j+3)} \right) + \\
&+ |M| \leq \frac{1}{(4m+3)(4m+2)(4m+1)} (M+1)^{m+1}.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом доказываются оценки для коэффициентов C_{4m+1} , C_{4m+2} , C_{4m+3} .

Так как

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z^*)^{n-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{4m} (z - z^*)^{4m-1} + \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} C_{4m+1} (z - z^*)^{4m} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{4m+2} (z - z^*)^{4m+1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{4m+3} (z - z^*)^{4m+2},
\end{aligned}$$

а каждый из рядов в правой части последнего равенства имеет область сходимости на основании достаточного признака сходимости

$$|z - z^*| < \frac{1}{\sqrt[4]{M+1}}.$$

Следовательно, ряд в (10) будет иметь ту же область сходимости.

На основании теорем 1 и 2 строим приближенные решения задачи (1) — (2) в области аналитичности и в окрестности подвижной особой точки соответственно.

Теорема 3. Пусть выполняются пункты 1 и 2 теоремы 1, тогда для приближенного решения

$$y_N = \sum_{n=0}^N C_n |z - z_0|^n$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta y_N(z) \leq \frac{(M+1)^{N+2} |z - z_0|^{N+1}}{(N+1)N(N-1)(1-|z-z_0|)}$$

в области

$$|z - z_0| < \rho_1,$$

где

$$\rho_1 = \min \left\{ \rho_0, \frac{1}{M+1} \right\}, \quad M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \left| \frac{r^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \right\}, \quad N \geq 2.$$

Доказательство (на основании классического подхода):

$$\begin{aligned} \Delta y_N(z) &= |y(z) - y_N(z)| = \\ &= \left| \sum_0^\infty C_n (z - z_0)^n - \sum_0^N C_n (z - z_0)^n \right| = \\ &= \left| \sum_{N+1}^\infty C_n (z - z_0)^n \right|. \end{aligned} \tag{12}$$

С учетом оценки для коэффициентов C_n (7), из (12) следует:

$$\begin{aligned} \Delta y_N(x) &= \left| \sum_{N+1}^\infty C_n (z - z_0)^n \right| \leq \\ &\leq \frac{(M+1)^{N+2} |z - z_0|^{N+1}}{(N+1)N(N-1)} \cdot \frac{1}{(1-|z-z_0|)}, \end{aligned}$$

где $N \geq 2$.

На основании достаточного признака сходимости степенных рядов получаем область справедливости теоремы 2

$$|z - z_0| < \rho_1, \quad \rho_1 = \min \left\{ \rho_0, \frac{1}{M+1} \right\}.$$

Пример:

$$y''' = y^4(z) + z^2, \quad y(1, 1+0, 1i) = 0,5, \quad y'(1, 1+0, 1i) = 1, \quad y''(1, 1+0, 1i) = 1,5.$$

Расчеты представлены в таблице 1.

Таблица 1

Приближенное решение и его характеристика в области аналитичности

z	$1, 2 + 0, 2i$
$y_3(z)$	$1, 07 + 1, 23i$
$\Delta y_3(z)$	$0,004717$
$\Delta_1 y_3(z)$	$0,001$

где $y_3(z)$ – структура приближения, $\Delta y_3(z)$ – априорная погрешность, $\Delta_1 y_3(z)$ – апостериорная погрешность.

Апостериорная оценка позволяет оптимизировать структуру приближенного решения. В нашем случае для $\varepsilon = 0,001$ получаем значение $N = 6$. Слагаемые в структуре приближенного решения с 4 по 6 не превышают требуемой точности. Таким образом, получаем, что в структуре приближенного решения при $N = 3$ погрешность решения не будет превышать $\varepsilon = 0,001$.

В окрестности подвижной особой точки, в случае комплексной области, следующая теорема определяет структуру аналитического приближенного решения.

Теорема 4. Пусть выполняются условия 1 – 3 теоремы 2, тогда для приближенного решения задачи (1) и (2)

$$y_N(x) = (z - z^*)^{-1} \sum_{n=0}^N C_n (z - z^*)^n,$$

в области

$$|z - z^*| < \rho_2$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta y_N(z) \leq \frac{(M+1)^{(N+1)/4} |z - z^*|^{N/4-0,75}}{1 - (M+1) |z - z^*|} \left(\frac{1}{N(N-1)(N-2)} + \frac{1}{(N+1)N(N-1)} + \frac{1}{(N+2)(N+1)N} + \frac{1}{(N+3)(N+2)(N+1)} \right),$$

где

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[4]{M+1}} \right\}, \quad M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \left| \frac{r^{(n)}(z^*)}{n!} \right| \right\}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \Delta y_N(z) &= |y(z) - y_N(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z^*)^{n-1} - \sum_{n=0}^d C_n (z - z^*)^{n-1} \right| = \\ &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n (z - z^*)^{n-1} \right|. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $N + 1 = 4m$.

$$\begin{aligned}
\Delta y_N(z) &= \left| \sum_{n=4m}^{\infty} C_n (z - z^*)^{n-1} \right| = \\
&= \left| C_{4m} (z - z^*)^{m-1} + C_{4m+1} (z - z^*)^{m-1} + C_{4m+2} (z - z^*)^{m-1} + \right. \\
&\quad \left. + C_{4m+3} (z - z^*)^{m-1} + C_{4m+4} (z - z^*)^{m-1} + C_{4m+5} (z - z^*)^{m-1} + \right. \\
&\quad \left. + C_{4m+6} (z - z^*)^{m-1} + C_{4m+7} (z - z^*)^{m-1} + C_{4m+8} (z - z^*)^{m-1} + \dots \right| = \\
&= \left| \left(C_{4m} (z - z^*)^{m-1} + C_{4m+4} (z - z^*)^m + C_{4m+8} (z - z^*)^{m+1} + \dots \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(C_{4m+1} (z - z^*)^{m-1} + C_{4m+5} (z - z^*)^m + C_{4m+9} (z - z^*)^{m+1} + \dots \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(C_{4m+2} (z - z^*)^{m-1} + C_{4m+6} (z - z^*)^m + C_{4m+10} (z - z^*)^{m+1} + \dots \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(C_{4m+3} (z - z^*)^{m-1} + C_{4m+7} (z - z^*)^m + C_{4m+11} (z - z^*)^{m+1} + \dots \right) \right|.
\end{aligned}$$

С учетом оценок для коэффициентов получаем:

$$\begin{aligned}
\Delta y_N(z) &\leq \left| \frac{(M+1)^m (z - z^*)^{m-1}}{(4m-1)(4m-2)(4m-3)} + \frac{(M+1)^{m+1} (z - z^*)^m}{4m(4m-1)(4m-2)} + \dots \right| + \\
&+ \left| \frac{(M+1)^m (z - z^*)^{m-1}}{4m(4m-1)(4m-2)} + \frac{(M+1)^{m+1} (z - z^*)^m}{(4m+1)4m(4m-1)} + \dots \right| + \\
&+ \left| \frac{(M+1)^m (z - z^*)^{m-1}}{(4m+1)4m(4m-1)} + \frac{(M+1)^{m+1} (z - z^*)^m}{(4m+2)(4m+1)4m} + \dots \right| + \\
&+ \left| \frac{(M+1)^m (z - z^*)^{m-1}}{(4m+2)(4m+1)4m} + \frac{(M+1)^{m+1} (z - z^*)^m}{(4m+3)(4m+2)(4m+1)} + \dots \right|
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&\frac{(M+1)^{(N+1)/4} |z - z^*|^{N/4-0,75}}{1 - (M+1)|z - z^*|} \left(\frac{1}{N(N-1)(N-2)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(N+1)N(N-1)} + \frac{1}{(N+2)(N+1)N} + \frac{1}{(N+3)(N+2)(N+1)} \right).
\end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем выражение оценок в случаях $N+1 = 4m+1$, $N+1 = 4m+2$, $N+1 = 4m+3$ для $N \geq 3$. На основании достаточного признака сходимости степенных рядов получаем, что оценки погрешности приближенного решения будут справедливы в области

$$|z - z^*| < \frac{1}{\sqrt[4]{M+1}}.$$

Численный эксперимент требует знания подвижных особых точек, а это является следующей задачей, требующей решения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. М. : МПГУ, 2013. 174 с.

[2] Орлов В. Н., Хмара П. В., Сейтвелиева Т. Б. Необходимые и достаточные условия существования подвижных особых точек одного класса нелинейных дифференциальных уравнений // *Нелинейный мир*. 2016. Т. 14. № 5. С. 31–35.

[3] Орлов В. Н., Хмара П. В., Хоменко Е. С. Теорема существования и единственности решения нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка нормальной формы полиномиальной структуры четвертой степени в области аналитичности // *Международное научное периодическое издание по итогам междунар. науч.-практ. конф. «Новая наука: стратегии и вектор развития»* (Стерлитамак, 19 декабря 2015 г.). Стерлитамак : РИЦ АМИ, 2015. С. 35–38.

[4] Орлов В. Н., Хмара П. В. Теорема существования и единственности решения нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка нормальной формы полиномиальной структуры четвертой степени в окрестности подвижной особой точки // *Международное научное периодическое издание по итогам международной. науч.-практ. конф.* (Уфа, 29–30 декабря 2015 г.). Уфа: РИО ИЦИПТ, 2015. С. 103–106.

[5] Орлов В. Н., Хмара П. В., Хоменко Е. С. О приближенном решении нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка в области аналитичности // *Тенденции развития высшего образования в новых условиях : материалы научно-практической конференции*, Ялта (28–29 апреля 2016 г.). Ялта : РИО ГПА, 2016. С. 196–198.

[6] Орлов В. Н., Хмара П. В., Хоменко Е. С. Аналитическое приближенное решение нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности // *Проблемы современного педагогического образования*. Серия: Педагогика и психология. Ялта : РИО ГПА, 2016. Вып. 51. Ч. 1. С. 158–165.

[7] Орлов В. Н., Хмара П. В. О приближенном решении нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка в окрестности подвижной особой точки // *Тенденции развития высшего образования в новых условиях: Материалы научно-практической конференции*, Ялта (28–29 апреля 2016 г.). Ялта : РИО ГПА, 2016. С. 133–134.

[8] Орлов В. Н., Хмара П. В. Аналитическое приближенное решение нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки // *Проблемы современного педагогического образования*. Серия: Педагогика и психология. Ялта : РИО ГПА, 2016. Вып. 51. Ч. 1. С. 152–158.

[9] Орлов В. Н., Хмара П. В., Сейтвелиева Т. Б. О точных критериях существования подвижных особых точек одного класса нелинейных дифференциальных уравнений // *Информационные системы и технологии в моделировании и управлении : сборник материалов всероссийской научно-практической конференции* (23–24 мая 2016 г.) / отв. секретарь Н. Н. Олейник. Симферополь : ИТ “АРИАЛ”, 2016. С. 136–139.

V. N. Orlov^{1,2}, P. V. Khmara¹

INVESTIGATION OF A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION IN THE DOMAIN OF ANALYTICITY AND IN THE VICINITY OF MOVABLE SINGULARITIES

¹*Humanitarian and Pedagogical Academy (branch) of V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Yalta, Russia*

²*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

Abstract. Nonlinear differential equations have features that do not allow the use of the classical theory of linear differential equations. The presence of movable singular points actualize the development of the theory. In this respect, there are publications devoted to the major problems (theorems of existence and uniqueness of nonlinear differential equations' solutions), and a new approach to their proof, which allows the use of these results in the solution of all the problems arising in the analytical method of nonlinear differential equations' approximate solution. This paper presents a generalization to the complex domain, previous results in the real domain.

Keywords: existence and uniqueness theorem, analytic approximate solution, movable singular point, priori uncertainty, complex region.

REFERENCES

- [1] Orlov V. N. Metod priblizhennogo reshenija pervogo, vtorogo differencial'nyh uravnenij Penleve i Abelja. M. : MPGU, 2013. 174 s. (in Russian).
- [2] Orlov V. N., Hmara P. V., Sejtvelieva T. B. Neobhodimye i dostatochnye uslovija sushhestvovaniya podvizhnyh osobyh toчек odnogo klassa nelinejnyh differencial'nyh uravnenij // Nelinejnyj mir. 2016. T. 14. № 5. S. 31–35. (in Russian).
- [3] Orlov V. N., Hmara P. V., Homenko E. S. Teorema sushhestvovaniya i edinstvennosti reshenija nelinejnogo differencial'nogo uravnenija tret'ego porjadka normal'noj formy polinomial'noj struktury четвртој степени v oblasti analitichnosti // Mezhdunarodnoe nauchnoe periodicheskoe izdanie po itogam mezhdunar. nauch.-prakt. konf. Novaja nauka : strategii i vektor razvitija (Sterlitamak, 19 dekabrja 2015 g.). Sterlitamak : RIC AMI, 2015. S. 35–38. (in Russian).
- [4] Orlov V. N., Hmara P. V. Teorema sushhestvovaniya i edinstvennosti reshenija nelinejnogo differencial'nogo uravnenija tret'ego porjadka normal'noj formy polinomial'noj struktury четвртој степени v okrestnosti podvizhnoj osoboj toчки // Mezhdunarodnoe nauchnoe periodicheskoe izdanie po itogam mezhdunarodnoj. nauch.-prakt. konf. (Ufa, 29–30 dekabrja 2015 g.). Ufa : RIO ICIPT, 2015. S. 103–106. (in Russian).
- [5] Orlov V. N., Hmara P. V., Homenko E. S. O priblizhennom reshenii nelinejnogo differencial'nogo uravnenija tret'ego porjadka v oblasti analitichnosti // Tendencii razvitija

Orlov Viktor Nikolaevich, Dr. Sci. Phys. & Math., Theory and Methods of Teaching Mathematics, Humanitarian and Pedagogical Academy (branch) of V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Yalta, Russia; Professor at the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry of I. Y. Yakovlev Cheboksary State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Hmara Pavlina Vasil'evna, 2nd Year Graduate Student, Humanitarian and Pedagogical Academy (branch) of V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Yalta, Russia.

vysshego obrazovanija v novyh uslovijah: materialy nauchno-prakticheskoj konferencii, Jalta (28–29 aprelja 2016 g.). Jalta : RIO GPA, 2016. S. 196–198. (in Russian).

[6] Orlov V. N., Hmara P. V., Homenko E. S. Analiticheskoe priblizhennoe reshenie nelinejnogo differencial'nogo uravnenija v oblasti analitichnosti // Problemy sovremennogo pedagogicheskogo obrazovanija. Seriya: Pedagogika i psihologija. Jalta : RIO GPA, 2016. Vyp. 51. Ch. 1. S. 158–165. (in Russian).

[7] Orlov V. N., Hmara P. V. O priblizhennom reshenii nelinejnogo differencial'nogo uravnenija tret'ego porjadka v okrestnosti podvizhnoj osoboj točki // Tendencii razvitija vysshego obrazovanija v novyh uslovijah : Materialy nauchno-prakticheskoj konferencii, Jalta (28–29 aprelja 2016 g.). Jalta : RIO GPA, 2016. S. 133–134. (in Russian).

[8] Orlov V. N., Hmara P. V. Analiticheskoe priblizhennoe reshenie nelinejnogo differencial'nogo uravnenija v okrestnosti podvizhnoj osoboj točki // Problemy sovremennogo pedagogicheskogo obrazovanija. Seriya: Pedagogika i psihologija. Jalta : RIO GPA, 2016. Vyp. 51. Ch. 1. S. 152–158. (in Russian).

[9] Orlov V. N., Hmara P. V., Sejtvelieva T. B. O tochnyh kriterijah sushhestvovanija podvizhnyh osobyh toček odnogo klassa nelinejnyh differencial'nyh uravnenij // Informacionnye sistemy i tehnologii v modelirovanii i upravlenii: sbornik materialov vsrossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii (23–24 maja 2016 g.) / otv. sekretar' N. N. Olejnik. Simferopol' : IT "ARIAL", 2016. S. 136–139. (in Russian).

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@gmail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@inbox.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матченко Николай Михайлович (eks_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marusbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига, Латвия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., Лемза А. О.</i> Ползучесть и релаксация напряжений в материале цилиндрического слоя при его ротационном движении.....	3
<i>Тлюстангелов Г. С.</i> Развитие возмущений в растекающемся вязком цилиндрическом слое с учетом вращения и осевого движения.....	12
<i>Абашкин Е. Е., Каинг М., Ткачева А. В.</i> Температурные напряжения пластины.....	24
<i>Микишанина Е. А., Терентьев А. Г.</i> Фильтрация через упруго-пористую плиту.....	33
<i>Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д.</i> Упругопластическое состояние толстостенного стержня некругового поперечного сечения при кручении в случае анизотропии общего вида.....	42
<i>Илларионов И. Е., Стрельников И. А., Гартфельдер В. А., Моисеева О. В.</i> Противопрigarные покрытия для литейных форм и стержней, применяемые в литейном производстве на предприятиях машиностроения.....	55
<i>Марченко О. В., Сергеева А. М.</i> Об особенностях деформирования тяжелой упругой пластины конечной толщины под действием подвижной нагрузки применительно к изучению прочности ледяного покрова.....	61
<i>Матченко Н. М., Матченко И. Н.</i> К построению четырехконстантных определяющих соотношений квазилинейной изотропно упругой среды.....	73
<i>Балашникова А. В., Миронов Б. Г., Михайлова М. В.</i> Растяжение идеальнопластического анизотропного прямоугольного бруса.....	81
<i>Абруков Д. А.</i> Изгиб полубесконечной прямоугольной пластины, зацмленной по длинным сторонам, на торце которой заданы прогиб или угол поворота. Точное решение краевой задачи.....	87
<i>Максимов А. Н.</i> Об определении возмущенного состояния массива при условии полной пластичности.....	102
<i>Чекмарев Г. Е.</i> Деформирование упрочняющегося пластического прута, ослабленного пологой выточкой.....	108
<i>Орлов В. Н., Хмара П. В.</i> Исследование одного нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности и в окрестности подвижной особой точки	114
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	125
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ.....	128

СОДЕРЖАНИЕ	130
------------------	-----

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2016. № 4 (30)**

Отв. за выпуск: А. В. Балашникова

Технические редакторы: А. В. Балашникова, Е. В. Мурашкин, С. В. Тихонов

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова

Макет: А. В. Балашникова

Подписано в печать 23.12.2016. Выход в свет 30.12.2016.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 16,5.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском отделе ФГБОУ ВО «Чувашский
государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38