

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал
№ 2(32)
Апрель – июнь 2017 г.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в
которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на
соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов,
Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко,
С. А. Редкозубов, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев,
А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж
(Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

Адрес редакции и издательства: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-16-19

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://predel.chgpu.edu.ru>

© ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева», 2017

Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТА, АРМИРОВАННОГО ОДНИМ СЕМЕЙСТВОМ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ВОЛОКОН

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
Россия г. Новосибирск*

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

Аннотация. В рамках плоской задачи неоднородной анизотропной теории упругости на основе структурной модели рассмотрено армирование одним семейством прямолинейных и криволинейных волокон. Механические свойства семейства волокон удовлетворяют условиям нерастяжимости или равнонапряженности. Построены разрешающие системы уравнений поставленных задач, исследован их тип. Получены численно-аналитические решения частных задач для металлокомпозиата.

Ключевые слова: армирование, структурная модель, одно семейство криволинейных волокон

УДК: 539.3+539.4+539.5

Введение. В машиностроении, авиастроении, судостроении в последние десятилетия активно внедряются армированные металлокомпозитные плоские конструкции. До последнего времени армирование таких конструкций осуществлялось прямолинейными волокнами. Однако такая структура армирования может быть эффективной лишь в частных случаях нагружения, при которых внутренние силовые потоки преимущественно направлены вдоль траекторий армирования. Реальные конструктивные элементы работают в более сложных условиях нагружения, что требует поиска других типов армирования. В работах [1], [2], [3] и в данной работе исследуется более общий случай армирования по криволинейным траекториям.

© Немировский Ю. В., Федорова Н. А., 2017

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiyury@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Федорова Наталья Александровна

e-mail: feodorova.natalia@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

Поступила 10.04.2017

Постановка задачи. Пусть армирование выполнено одним семейством волокон постоянного поперечного сечения. Для описания композита использована структурная модель [4]. Введены следующие обозначения интенсивности армирования семейства волокон как функции $\omega_1(x, y)$: компонент тензора деформаций — $\varepsilon_{ij}(x, y)$, деформации в волокнах семейства — $\varepsilon_1(x, y)$, напряжение в волокнах семейства — $\sigma_1(x, y)$. Осредненные напряжения обозначены через $\sigma_{ij}(x, y)$, где x, y — декартовы координаты, $\varphi(x, y)$ — угол армирования, индексы $i, j = 1, 2$. В дальнейшем при обращении к перечисленным функциям для краткости аргументы опускаются. Плоская задача армированной среды с одним семейством армирующих волокон запишется в виде:

$$(\omega_1 l_{11})_{,1} + (\omega_1 l_{12})_{,2} = 0, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{11} l_{11}^2 + \varepsilon_{22} l_{12}^2 + 2\varepsilon_{12} l_{11} l_{12} = \varepsilon_1^0, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}. \quad (3)$$

В (1)–(3) использованы обозначения: $\varepsilon_1^T = \alpha_1^q T$, $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_1^T$, $l_{11} = \cos \varphi$, $l_{12} = \sin \varphi$, где α_1^q — коэффициент линейного расширения материала семейства волокон, $T = \text{const}$ (T — температура). Символы $_{,1,2}$ означают частное дифференцирование по координатам x, y соответственно. Соотношение (1) — условие постоянства сечений семейства волокон [5], соотношение (3) — условие совместности деформаций. При формулировке (2) согласно [4] использован закон термоупругого деформирования и принцип совместного деформирования матрицы и семейства волокон (нет проскальзывания и отрыва). Правая часть в (2) учитывает как случай равнодеформированного семейства волокон ($\varepsilon_1 = \text{const}$, $\varepsilon_1^0 = \text{const} + \varepsilon_1^T$), так и случай нерастяжимого семейства ($\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1^T$). Осредненные напряжения $\sigma_{ij}(x, y)$ запишем в виде

$$\sigma_{ij} = (1 - \omega_1)\sigma_{ij}^c + \sigma_1 \omega_1 l_{1i} l_{1j}. \quad (4)$$

Соотношения (4) — это определение силы, действующей на слой композитов как суммы сил, создаваемых связующим материалом и суммы сил, создаваемых армирующими слоями. В (4) напряжения в связующем σ_{ij}^c определены по формулам [6]

$$\sigma_{ii}^c = \frac{E}{(1 - \nu^2)}(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj} - \alpha_c(1 + \nu)T), \quad \sigma_{ij}^c = \frac{E}{(1 + \nu)}\varepsilon_{ij}, \quad (5)$$

$$(j = 3 - i, \quad i = 1, 2).$$

Здесь E, ν, α_c — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного расширения связующего материала соответственно. Напряжения σ_{ij} должны удовлетворять уравнениям равновесия:

$$\sigma_{1i,1} + \sigma_{i2,2} = b_i, \quad (i = 1, 2). \quad (6)$$

Правые части в (6)

$$b_i = -((1 - \omega_1)\rho_c + \omega_1\rho_1)F_i$$

являются компонентами массовой распределенной нагрузки по направлениям прямоугольной декартовой системы координат; ρ_c, ρ_1 — массовые плотности материалов связующего и волокон; F_i — компоненты удельной распределенной нагрузки, действующей на единицу массы.

К системе (1) – (6) присоединены граничные условия на контуре. Уравнение контура Γ задано в параметрическом виде: $x = \psi_1(s)$, $y = \psi_2(s)$, s — некоторый параметр.

Пусть на контуре Γ_p заданы статические условия с нормальными и касательными усилиями $p_n(s), p_\tau(s)$ соответственно:

$$\sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 = p_n(s), (\sigma_{22} - \sigma_{11})n_1n_2 + \sigma_{12}(n_1^2 - n_2^2) = p_\tau(s). \quad (7)$$

На другой части контура Γ_u заданы кинематические условия для перемещений u_1, u_2 :

$$u_1(\Gamma_u) = u_1^0(s), \quad u_2(\Gamma_u) = u_2^0(s). \quad (8)$$

В (7) $p_n(s), p_\tau(s)$ – известные функции, $n_1 = \cos \beta, n_2 = \sin \beta, \beta$ – угол, задающий направление внешней нормали к Γ_p . С учетом (4) граничные условия (7) принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_1\sigma_1 \cos^2(\varphi - \beta) + (1 - \omega_1)[m_3(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T) \cos^2 \beta + \\ + m_3(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - L^T) \sin^2 \beta + m_4\varepsilon_{12} \sin \beta \cos \beta] = p_n(s), \\ \omega_1\sigma_1 \sin 2(\varphi_1 - \beta) + (1 - \omega_1)m_3(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11} + \nu(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})) \sin 2\beta + \\ + 2(1 - \omega_1)m_4\varepsilon_{12} \cos 2\beta = 2p_\tau(s). \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) использованы обозначения для констант

$$m_1 = \frac{1}{1 - \nu^2}, m_2 = \frac{1}{1 + \nu}, m_3 = Em_1, m_4 = Em_2, L^T = \alpha_c(1 + \nu)T.$$

Интенсивность ω_1 задается на той части Γ_ω контура, где волокно входит в конструкцию

$$\omega_1(\Gamma_\omega) = \omega_1^*(s). \quad (10)$$

Ограничение для интенсивности армирования имеет вид

$$0 < \omega_1 \leq 0,7. \quad (11)$$

Уравнения модели (1), (2), (3), (6) запишем в виде общей разрешающей системы относительно неизвестных $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \sigma_1, \omega_1, \varphi$. Входит или нет σ_1 в список неизвестных, зависит от механического содержания задачи: если волокно нерастяжимо, то σ_1 – искомая функция. В случае равнонапряженного волокна $\sigma_1 = Const$. Предварительно введем вспомогательную переменную $z = \operatorname{tg} \varphi$, выразим из (2) одну из компонент деформаций, например ε_{12} , через остальные компоненты, а именно $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$. Обозначив $r_1 = -\frac{1}{2z}, r_2 = -\frac{z}{2}, r_3 = \frac{\varepsilon_1^0(1+z^2)}{2z}$, получим

$$\varepsilon_{12} = r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3. \quad (12)$$

После сделанных замечаний перейдем к формулировке системы

$$\omega_{1,1} + z\omega_{1,2} + \omega_1 \left(-z \frac{z_{,1}}{1+z^2} + \frac{z_{,2}}{1+z^2} \right) = 0, \quad (13)$$

$$\varepsilon_{11,22} - 2(r_1\varepsilon_{11})_{,12} + \varepsilon_{22,11} - 2(r_2\varepsilon_{22})_{,12} - 2r_{3,12} = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \omega m_3(\varepsilon_{11,1} + \nu\varepsilon_{22,1}) + \omega m_4((r_1\varepsilon_{11})_{,2} + (r_2\varepsilon_{22})_{,2} + r_{3,2}) + \\ & + \sigma_{1,1} \frac{\omega_1}{1+z^2} + \sigma_{1,2} \frac{\omega_1 z}{1+z^2} + m_3(-\omega_{1,1})(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T) + \\ & + m_4(-\omega_{1,2})(r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3) - \\ & - \sigma_1 \omega_1 \left(\frac{zz_{,1}}{(1+z^2)^2} + \frac{z^2 z_{,2}}{(1+z^2)^2} \right) = b_1, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \omega m_3(\varepsilon_{22,2} + \nu\varepsilon_{11,2}) + \omega m_4((r_1\varepsilon_{11})_{,1} + (r_2\varepsilon_{22})_{,1} + r_{3,1}) + \\ & + \sigma_{1,1} \frac{\omega_1 z}{1+z^2} + \sigma_{1,2} \frac{\omega_1 z^2}{1+z^2} + m_3(-\omega_{1,2})(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T) + \\ & + m_4(-\omega_{1,1})(r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3) + \\ & + \sigma_1 \omega_1 \left(\frac{z_{,1}}{(1+z^2)^2} + \frac{zz_{,2}}{(1+z^2)^2} \right) = b_2. \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем используется обозначение $\omega = 1 - \omega_1$. Первое уравнение системы – следствие условия постоянства сечений волокон, второе – уравнение совместности деформаций, два последних – уравнения равновесия. Во всех случаях в дальнейшем при расчетах для удобства работы в системе производится ее обезразмеривание: декартовы координаты x, y относятся к некоторому характерному линейному размеру, напряжения относятся к характерной величине модуля Юнга используемых материалов.

Конфигурации армирования одним семейством волокон. Рассмотрены следующие варианты армирования одним семейством волокон: семейство прямых, семейства парабол, эллипсов, гипербол, семейства кривых специального вида. Угол армирования определен как угол между касательной к кривой семейства и положительным направлением оси OX . Значение тангенса угла армирования φ находится из уравнения $z = \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$. По заданному уравнению семейства кривых, выписано дифференциальное уравнение (1), связывающее угол армирования и интенсивность армирования. Из этого уравнения получим аналитическое решение для интенсивности армирования. Для всех случаев уравнение (1) удобно записать в виде

$$\omega_{1,1} + z\omega_{1,2} + \omega_1 \left(-z \frac{z_{,1}}{1+z^2} + \frac{z_{,2}}{1+z^2} \right) = 0. \quad (16)$$

Решения уравнения представлены в виде таблицы 1.

Таблица 1. Решения для интенсивностей армирования

Уравнения семейств	се-	$z = \operatorname{tg} \varphi$	Уравнение для ω_1	Точное решение ω_1
Семейство прямых $y = kx$	пря-	$z = k$	$\omega_{1,1} + k\omega_{1,2} = 0$	$\omega_1 = F(y - kx)$

Таблица 1.. Продолжение

Семейство парабол $y = ax^2$	$z = 2\frac{y}{x}$	$\omega_{1,1} + 2\frac{y}{x}\omega_{1,2} + \frac{2}{x}\omega_1 = 0.$	$\omega_1 = \frac{F(\frac{y}{x^2})}{x^2}$
Семейство парабол $y = x^2/2 + C$	$z = x$	$\omega_{1,1} + x\omega_{1,2} + \frac{-x}{1+x^2}\omega_1 = 0.$	$\omega_1 = F(y - x^2/2)\sqrt{1+x^2}$
Семейство окружностей $y^2 + x^2 = C$	$z = \frac{-x}{y}$	$\omega_{1,1} - \frac{x}{y}\omega_{1,2} = 0.$	$\omega_1 = F(y^2 + x^2)$
Семейство кривых $y = Ce^x$	$z = y$	$\omega_{1,1} + y\omega_{1,2} + \frac{1}{1+y^2}\omega_1 = 0.$	$\omega_1 = F(ye^{-x})e^{-x}\sqrt{1+y^2}$
Семейство эллипсов $y^2/2 + x^2 = C$	$z = \frac{-2x}{y}$	$\omega_{1,1} - \frac{2x}{y}\omega_{1,2} + \frac{2x}{y^2+4x^2}\omega_1 = 0.$	$\omega_1 = \frac{F(y^2+2x^2)}{\sqrt{4x^2+y^2}}$
Семейство гипербол $y^2 - x^2 = C$	$z = \frac{x}{y}$	$\omega_{1,1} + \frac{x}{y}\omega_{1,2} - \frac{2x}{y^2+x^2}\omega_1 = 0.$	$\omega_1 = F(y^2 - x^2)\sqrt{x^2+y^2}$

В решениях, представленных в таблице 1, F – произвольная функция, определяемая из граничных условий (10), соответствующих технологическим условиям выхода арматуры.

Семейство нерастяжимых волокон. Пусть семейство волокон нерастяжимо. Тогда в (2) правая часть имеет вид $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1^T$. В силу идеализации модели волокон (абсолютно твердое тело) σ_1 – неизвестная функция координат x, y . Пусть задан угол армирования как известная функция $\varphi(x, y)$. Тогда интенсивность армирования определим из уравнения (1). Получим разрешающую систему уравнений. Для этого в уравнения равновесия (6) подставим выражения для осредненных напряжений (4). Из уравнения (2) компоненту деформаций ε_{12} выражаем через $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$, получим

$$\varepsilon_{12} = r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3, \quad (17)$$

где коэффициенты r_1, r_2, r_3 в случае заданного угла армирования φ , вычисляем по формулам:

$$r_1 = -0,5ctg\varphi, r_2 = -0,5tg\varphi, r_3 = \frac{\alpha^a T}{\sin 2\varphi}.$$

Уравнение совместности деформаций (3) после исключения ε_{12} примет вид:

$$\varepsilon_{11,22} - 2(r_1\varepsilon_{11})_{,12} + \varepsilon_{22,11} - 2(r_2\varepsilon_{22})_{,12} + r_{3,12} = 0. \quad (18)$$

Уравнения равновесия в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned}
& \omega m_3(\varepsilon_{11,1} + \nu \varepsilon_{22,1}) + \sigma_{1,1}(\omega_1 \cos^2 \varphi) + \sigma_{1,2}(\omega_1 \cos \varphi \sin \varphi) + \\
& + \omega_1 m_4((r_1 \varepsilon_{11})_{,2} + (r_2 \varepsilon_{22})_{,2} + r_{3,2}) + m_3(-\omega_{1,1})(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22} - L^T) + \\
& + m_4(-\omega_{1,2})(r_1 \varepsilon_{11} + r_2 \varepsilon_{22} + r_3) + \\
& + \sigma_1(\omega_{1,2} \sin \varphi \cos \varphi + \omega_{1,1} \cos^2 \varphi) = b_1, \tag{19} \\
& \omega m_3(\varepsilon_{22,2} + \nu \varepsilon_{11,2}) + \sigma_{1,1}(\omega_1 \cos \varphi \sin \varphi) + \sigma_{1,2}(\omega_1 \sin^2 \varphi) + \\
& + \omega m_4((r_1 \varepsilon_{11})_{,1} + (r_2 \varepsilon_{22})_{,1} + r_{3,1}) + m_4(-\omega_{1,1})(r_1 \varepsilon_{11} + r_2 \varepsilon_{22} + r_3) + \\
& + m_3(-\omega_{1,2})(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11} - L^T) + \sigma_1(\omega_{1,1} \sin \varphi \cos \varphi + \omega_{1,2} \sin^2 \varphi) = b_2.
\end{aligned}$$

В результате сформулирована замкнутая система уравнений (18), (19) относительно σ_1 , ε_{11} , ε_{22} . Поскольку уравнение (18) второго порядка, а остальные уравнения первого порядка, для определения типа системы дифференциальных уравнений продифференцируем уравнения (19) по одной из переменных. Построим характеристический полином $P(\lambda)$ системы (18), (19) и найдем его корни [7]:

$$P(\lambda) = \det(A^{11}\lambda^2 + 2A^{12}\lambda + A^{22}) = 0. \tag{20}$$

Матрицы A^{11} , A^{12} , A^{22} в (20) имеют вид

$$\begin{aligned}
A^{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \omega m_3 & \omega m_3 \nu & \omega_1 \cos^2 \varphi \\ r_1 \omega m_4 & r_2 \omega m_4 & \omega_1 \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}, \\
A^{12} &= \begin{pmatrix} -2r_1 & -2r_2 & 0 \\ r_1 \omega m_4 & r_2 \omega m_4 \nu & \omega_1 \cos \varphi \sin \varphi \\ \nu \omega m_3 & r_2 \omega m_3 & \omega_1 \sin^2 \varphi \end{pmatrix}, \quad A^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

В металлокомпозите в качестве связующего выбран алюминий. Пусть армирование выполнено стальными волокнами. Введем механические характеристики названных материалов связующего и арматуры согласно [8].

Случай 1. Пусть армирование выполнено семейством прямолинейных волокон. Угол армирования при этом постоянный, что дает некоторые упрощения в системе, и пусть он равен $\frac{\pi}{4}$.

Интенсивность $\omega_1(x, y)$ определим из уравнения (1) и граничных условий (10). Общее решение для данного случая соответствует первой строке таблицы 1. После преобразований получим следующее выражение для характеристического многочлена относительно λ :

$$P(\lambda) = 52, 82\omega_1\omega\lambda^4 + 108, 39\omega_1\omega\lambda^3 + 88, 17\omega_1\omega\lambda^2 + 270, 99\omega_1\omega\lambda + 211, 29\omega_1\omega = 0.$$

Независимо от вида функции ω_1 корни λ будут действительными и комплексно сопряженными $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -0, 875$, $\lambda_3 = 0, 416 - 1, 454I$, $\lambda_4 = 0, 416 + 1, 454I$, где I здесь и далее – мнимая единица. Это означает, что система имеет действительные и комплексные характеристики и является системой составного типа [7]. Анализ дифференциальных уравнений составного типа рассмотрен в монографиях [9], [10]. Построение численного решения для таких систем вызывает определенные трудности. Поэтому в работе выбран подход построения численно-аналитического решения.

Заметим, что уравнение (18) для рассматриваемого случая прямолинейного армирования распадается на два независимых друг от друга уравнения относительно $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$

$$\varepsilon_{11,22} - 2r_1\varepsilon_{11,12} = 0, \quad (21)$$

$$\varepsilon_{22,11} - 2r_2\varepsilon_{22,12} = 0. \quad (22)$$

Уравнения (21), (22) – линейные уравнения гиперболического или эллиптического типа в зависимости от знаков r_1, r_2 .

Найдем аналитические решения (21), (22), которые являются их общими решениями и частными решениями уравнения (18). Они имеют вид

$$\varepsilon_{11} = F_1(y) + F_2(-y - 2r_1x), \quad \varepsilon_{22} = F_3(y) + F_4(y + 2r_1x) \quad (23)$$

и содержат произвольные функции F_1, F_2, F_3, F_4 .

Уравнения (19) представим в виде, разрешенном относительно частных производных от σ_1 :

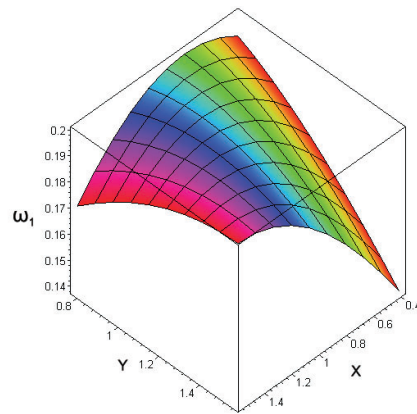
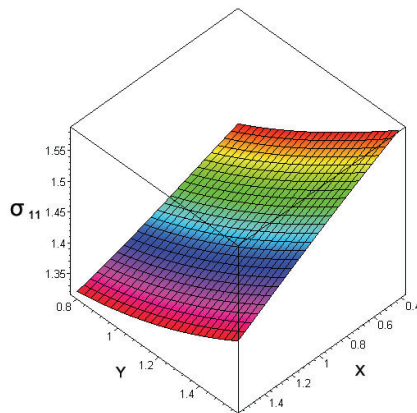
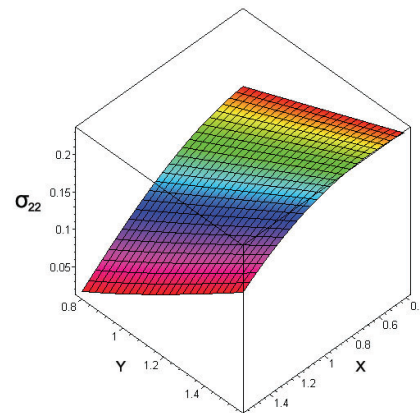
$$\begin{aligned} \sigma_{1,1}(\omega_1 \cos^2 \varphi) + \sigma_{1,2}(\omega_1 \cos \varphi \sin \varphi) = b_1 - (\sigma_1(\omega_{1,2} \sin \varphi \cos \varphi + \\ + \omega_{1,1} \cos^2 \varphi) + \omega m_4(r_1\varepsilon_{11,2} + r_2\varepsilon_{22,2}) + \\ + \omega m_3(\varepsilon_{11,1} + \varepsilon_{22,1}) + m_3(-\omega_{1,1})(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T) + \\ + m_4(-\omega_{1,2})(r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3)), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1}(\omega_1 \cos \varphi \sin \varphi) + \sigma_{1,2}(\omega_1 \sin^2 \varphi) = b_2 - (\sigma_1(\omega_{1,1} \sin \varphi \cos \varphi + \\ + \omega_{1,2} \sin^2 \varphi) + \omega m_4(r_1\varepsilon_{11,1} + r_2\varepsilon_{22,1}) + \\ + \omega m_3(\varepsilon_{22,2} + \nu\varepsilon_{11,2}) + m_3(-\omega_{1,2})(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - L^T) + \\ + m_4(-\omega_{1,1})(r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3)). \end{aligned} \quad (25)$$

Напряжение в волокне σ_1 должно удовлетворять полученным выше уравнениям (24), (25). Чтобы определить частное решение задачи, сложим эти уравнения, подставим найденные аналитические решения для $\omega_1, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$. Получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, выпишем формулу его аналитического решения. Произвольные функции полученных решений определим с помощью граничных условий (9), точно или приближенно решая алгебраические уравнения, связывающие значения решений на граничном контуре. Чтобы определить значение σ_1 на граничном контуре, подставим найденные аналитические решения в граничные условия (7). Пусть на граничном контуре (прямоугольная пластинка размером $[1, 2] \times [3, 4]$) заданы нормальное и касательное напряжение (9). Распределенные массовые нагрузки не учитываются $b_1 = b_2 = 0$. На границе пластины, где волокна входят в конструкцию, $x = 1$ значение интенсивности зададим равным $0, 2 \cos y$, воспользуемся полученным решением, результат показан на рис. 1.

Найденная интенсивность армирования удовлетворяет сформулированным выше ограничениям (11).

Пусть $p_n = 0, 2$, $p_\tau = -0, 02$, тогда графики решений для $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_1$ изображены на рисунках 2–4.

Рис. 1. Интенсивность армирования ω_1 Рис. 2. Напряжение σ_{11} Рис. 3. Напряжение σ_{22}

Случай 2. Предложенный выше способ решения задачи позволяет обобщить ее на случай криволинейной укладки волокон. Пусть в металлокомпозите укладка волокон произведена по параболам. Тогда угол армирования φ зависит от координат и задается в виде $\varphi = \arctg x$ либо $\varphi = \arctg y$. Выпишем точное решение (1) для интенсивности, когда $\varphi = \arctg x$:

$$\omega_1(x, y) = \frac{F_2(y + \ln(\cos(x)))}{\cos(x)},$$

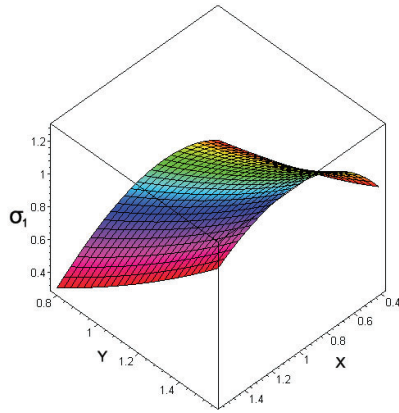
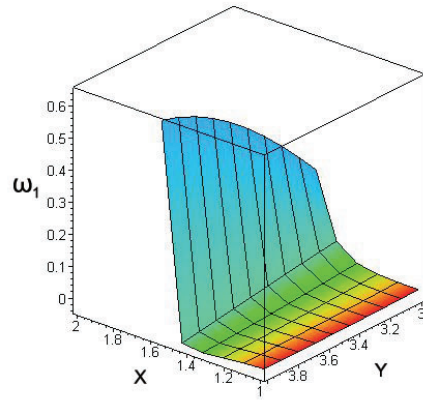
Рис. 4. Напряжение в волокне σ_1 

Рис. 5. Интенсивность армирования при укладке семейств армирующих волокон по параболам

где F_2 – функция граничных условий. Задавшись конкретной функцией граничных условий на отрезке $x \in [1, 2]$ (где волокна входят в конструкцию), находим решение для ω_1 и в символьной форме вычисляем ее производные. Это позволяет выписать переменные коэффициенты в (19). Коэффициенты в (18) r_1, r_2, r_3 при укладке по параболам также будут зависеть от координат, их вычисляем по формулам

$$r_1 = -0,5/x, r_2 = -0,5x, r_3 = \alpha_1^a T \frac{(1+x^2)}{2x}.$$

Интенсивность армирования в этом случае представлена на рис. 5.

Семейство равнонапряженных волокон. Для равнонапряженного семейства волокон правая часть в (2) примет вид $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_1^T$, напряжение в волокне $\sigma_1 = Const$. Соотношения (1), (2), (3), (4), (6) – образуют замкнутую систему восьми уравнений относительно восьми неизвестных

$$\omega_1, \varphi, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}.$$

Переформулируем названную систему в перемещениях, выразив напряжения через деформации, а деформации через перемещения, используя соотношения Коши. К системе присоединим граничные условия на контуре Γ_u : $u(\Gamma_u) = u(s)$, либо граничные условия (9), где деформации выражены через перемещения.

При подстановке напряжений через перемещения в уравнения равновесия нужно вычислить следующие выражения

$$(\sigma_1 \omega_1 \cos^2 \varphi)_{,1} + (\sigma_1 \omega_1 \cos \varphi \sin \varphi)_{,2}, \quad (\sigma_1 \omega_1 \cos \varphi \sin \varphi)_{,1} + (\sigma_1 \omega_1 \sin^2 \varphi)_{,2}. \quad (26)$$

При их вычислении выделяем слагаемые вида

$$(\omega_1 \cos \varphi)_{,1} + (\omega_1 \sin \varphi)_{,2},$$

которые в силу условия постоянства сечений волокон (1) равны нулю, что упрощает выражения (26) и они становятся соответственно равными:

$$\sigma_1 \omega_1 (\cos \varphi (\cos \varphi)_{,1} + \sin \varphi (\cos \varphi)_{,2})$$

$$\sigma_1 \omega_1 (\cos \varphi (\sin \varphi)_{,1} + \sin \varphi (\sin \varphi)_{,2}).$$

Для формулировки системы удобно ввести $z = \operatorname{tg} \varphi(x, y)$. Тогда производные от функции, задающей угол армирования, вычисляем по формулам

$$\varphi_{,1} = \frac{z_{,1}}{1+z^2}; \quad \varphi_{,2} = \frac{z_{,2}}{1+z^2}.$$

В итоге система для равнонапряженного семейства волокон относительно искомым переменных $\omega_1, \varphi, u_1, u_2$ записывается в виде:

$$\omega_{1,1} + z\omega_{1,2} + \omega_1 \left(-z \frac{z_{,1}}{1+z^2} + \frac{z_{,2}}{1+z^2}\right) = 0, \quad (27)$$

$$u_{1,2} + \frac{1}{z}u_{1,1} + u_{2,1} + u_{2,2} - \varepsilon_1^0 \left(\frac{1}{z} + z\right) = 0, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \omega m_3(u_{1,11} + \nu u_{2,21}) + \frac{1}{2}\omega m_4(u_{1,22} + u_{2,12}) + m_3(-\omega_{1,1})(u_{1,1} + \nu u_{2,2} - L^T) + \\ + \frac{1}{2}m_4(-\omega_{1,2})(u_{1,2} + u_{2,1}) + \sigma_1 \omega_1 \left(-\frac{z}{(1+z^2)^2}(z_{,1}) - \frac{z^2}{(1+z^2)^2}(z_{,2})\right) = b_1, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \omega m_3(u_{2,22} + \nu u_{1,12}) + \frac{1}{2}\omega m_4(u_{1,21} + u_{2,11}) + m_3(-\omega_{1,2})(u_{2,2} + \nu u_{1,1} - L^T) + \\ + \frac{1}{2}m_4(-\omega_{1,1})(u_{1,2} + u_{2,1}) + \sigma_1 \omega_1 \left(\frac{1}{(1+z^2)^2}(z_{,1}) + \frac{z}{(1+z^2)^2}(z_{,2})\right) = b_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Первые два уравнения системы содержат производные первого порядка, чтобы исследовать тип системы, продифференцируем эти уравнения по одной из координат. Затем построим характеристический многочлен для полученной системы (27) – (30)

$$P(\lambda) = \det(A^{11}\lambda^2 + 2A^{12}\lambda + A^{22}),$$

где

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{z\omega_1}{1+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} & 1 \\ 0 & 0 & \omega m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\omega m_4}{2} \end{pmatrix},$$

$$A^{12} = \begin{pmatrix} z & \frac{\omega_1}{1+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & \omega(\nu m_3 + \frac{m_4}{2}) \\ 0 & 0 & \omega(\nu m_3 + \frac{m_4}{2}) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega m_4}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega m_3 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 2z\lambda & \frac{\omega_1}{1+z^2}(-z\lambda^2 + 2\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{z} + 2\lambda & \lambda^2 - 2z\lambda \\ 0 & 0 & \omega(m_3\lambda^2 + \frac{m_4}{2}) & 2\lambda\omega(m_3\nu + \frac{m_4}{2}) \\ 0 & 0 & 2\lambda\omega(m_3\nu + \frac{m_4}{2}) & \omega(\frac{m_4\lambda^2}{2} + m_3) \end{vmatrix}.$$

Очевидно, он тождественно равен нулю, что означает вырождение типа системы [7]. Решение системы представляет определенные трудности и требует специального подхода. В данной работе предлагается следующий способ решения: находим частные решения после введения угла армирования как заданной функции координат. Это позволяет определить интенсивность армирования из уравнения (27). Уравнение (28) рассматриваем после вычисления u_1, u_2 как ограничение на условие равнонапряженности. Решаем (29),(30) совместно как систему относительно u_1, u_2 . Ее характеристический полином имеет вид

$$P(\lambda) = \det(A^{11}\lambda^2 + 2A^{12}\lambda + A^{22}),$$

где

$$A^{11} = \begin{pmatrix} \omega m_3 & 0 \\ 0 & 0,5\omega m_4 \end{pmatrix},$$

$$A^{12} = \begin{pmatrix} 0 & \omega(\nu m_3 + 0,5m_4) \\ \omega(\nu m_3 + 0,5m_4) & 0 \end{pmatrix}, A^{22} = \begin{pmatrix} 0,5\omega m_4 & 0 \\ 0 & \omega m_3 \end{pmatrix}.$$

Уравнение $P(\lambda) = 0$ после подстановки m_3, m_4 через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν запишется как биквадратное уравнение

$$\lambda^4 + \frac{3\nu^2 - 1 + 10\nu}{2(\nu - 1)}\lambda^2 + 1 = 0.$$

Находим четыре корня биквадратного уравнения:

$$\lambda_k = \pm \frac{\sqrt{-(\nu - 1)(3\nu^2 - 1 + 10\nu) \pm \sqrt{9\nu^4 + 78\nu^2 + 60\nu^3 - 15 + 12\nu}}}{2(\nu - 1)}, \quad (k = \overline{1, 4}).$$

Исследование выражения под радикалом $(9\nu^4 + 78\nu^2 + 60\nu^3 - 15 + 12\nu)$ как функции от ν показало, что оно имеет отрицательный знак на интервале $[0; 0,38]$. Это означает, что корни λ_k комплексно сопряженные на этом интервале. Рассматриваемая система (29), (30) имеет эллиптический тип. Заметим, что для многих материалов коэффициент Пуассона принимает значения от 0,25 до 0,3. Следовательно, возможные значения коэффициентов Пуассона попадают в указанный интервал, где корни λ_k — комплексно сопряженные.

Для построения численной схемы запишем оба уравнения в дивергентном виде. Предварительно введем следующие обозначения:

$$y_1 = \omega_1(x, y), \quad y_2 = z(x, y), \quad z_1 = (1 - y_1)m_3, \quad z_2 = (1 - y_1)m_4/2.$$

Здесь y_1, y_2 – известные функции координат, u_1, u_2 – неизвестные функции. Заметим выполнение следующих соотношений для слагаемых, входящих в первое уравнение

$$\begin{aligned}(1 - y_1)m_3u_{1,11} + m_3(-y_{1,1})u_{1,1} &= (z_1u_{1,1})_{,1}, \\ (1 - y_1)m_3\nu u_{2,11} + m_3(-y_{1,1})\nu u_{2,1} &= (\nu z_1u_{2,2})_{,1}, \\ \frac{(1 - y_1)}{2}m_4u_{1,22} + \frac{1}{2}m_4(-y_{1,2})u_{1,2} &= (z_2u_{1,2})_{,2}, \\ \frac{(1 - y_1)}{2}m_4u_{2,12} + \frac{1}{2}m_4(-y_{1,2})u_{2,1} &= (z_2u_{2,1})_{,2}.\end{aligned}$$

В итоге оно запишется

$$\begin{aligned}(z_1u_{1,1})_{,1} + (\nu z_1u_{2,2})_{,1} + (z_2u_{1,2})_{,2} + (z_2u_{2,1})_{,2} + F_1 &= 0, \\ F_1 = -b_1 + m_3y_{1,1}L^T + \sigma_1y_1\left(-\frac{y_2}{(1 + y_2^2)^2}y_{2,1} - \frac{y_2^2}{(1 + y_2^2)^2}y_{2,2}\right).\end{aligned}$$

Используем соотношения для второго уравнения

$$\begin{aligned}(1 - y_1)m_3u_{2,22} + m_3(-y_{1,1})u_{2,2} &= (z_1u_{2,2})_{,2}, \\ (1 - y_1)m_3\nu u_{1,12} + m_3(-y_{1,2})\nu u_{1,1} &= (\nu z_1u_{1,1})_{,2}, \\ \frac{(1 - y_1)}{2}m_4u_{1,12} + \frac{1}{2}m_4(-y_{1,2})u_{1,2} &= (z_2u_{1,2})_{,1}, \\ \frac{(1 - y_1)}{2}m_4u_{2,11} + \frac{1}{2}m_4(-y_{1,2})u_{2,1} &= (z_2u_{2,1})_{,1}.\end{aligned}$$

В итоге второе уравнение запишется

$$\begin{aligned}(z_1u_{2,2})_{,2} + (\nu z_1u_{1,1})_{,2} + (z_2u_{1,2})_{,1} + (z_2u_{2,1})_{,1} + F_2 &= 0, \\ F_2 = -b_2 + m_3y_{1,2}L^T + \sigma_1y_1\left(\frac{1}{(1 + y_2^2)^2}y_{2,1} + \frac{y_2}{(1 + y_2^2)^2}y_{2,2}\right).\end{aligned}$$

Таким образом получили дивергентную форму записи уравнений (29), (30), рассматриваемых как система относительно u_1, u_2 .

Заключение. В работе получены разрешающие системы уравнений плоской задачи для одного семейства равнонапряженных и нерастяжимых, прямолинейных и криволинейных волокон в прямоугольной декартовой системе координат. Задача рассмотрена в рамках линейной неоднородной анизотропной теории упругости. Установлено, что разрешающие системы являются системами составного типа для семейства нерастяжимых волокон. Введение условия равнонапряженности семейства волокон приводит к вырождению типа системы. Получены численно-аналитические решения частных задач. Для иллюстрации расчетов выбран металлокомпозит (алюминиевая пластинка армируется стальными волокнами). Знание типа системы позволяет как корректно строить численные схемы, так и применять широко используемые в настоящее время программные продукты, например ANSYS и COSMOS. При этом приведенные решения могут служить тестовыми примерами при решении более общих задач.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В., Федорова Н. А. Математическое моделирование плоских конструкций из армированных волокнистых материалов. Красноярск: СФУ, 2010. 136 с.
- [2] Немировский Ю. В., Федорова Н. А. Исследование рациональных структур криволинейного армирования в полярной системе координат // Вестн. Сам. Гос.тех.ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 1 (30). С. 233–244.
- [3] Немировский Ю. В., Федорова Н. А. Предельные деформации термоупругих плоских конструкций с криволинейным армированием // Вестник Сиб.гос.аэрокосмич.ун-та. 2016. № 1 (17). С. 73–78.
- [4] Nemirovsky Yu. V. On the elastic-plastic behaviour of the reinforced layer // Int. J. Mech. Sci. 1970. Vol. 12. P. 898-903.
- [5] Бушманов С. Б., Немировский Ю. В. Проектирование пластин, армированных равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композитных материалов. 1983. Т. 19 № 2. С. 207–213.
- [6] Коваленко А. Д. Введение в термоупругость. Киев: Наук. думка, 1965. 204 с.
- [7] Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
- [8] Композиционные материалы: справочник / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
- [9] Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1979. 237 с.
- [10] Джураев А. Системы уравнений составного типа. М.: Наука, 1972. 227 с.

Yu. V. Nemirovsky, N. A. Feodorova

**SOLUTION OF PLANAR PROBLEM FOR METAL COMPOSITE
REINFORCED WITH SINGLE FAMILY OF CURVILINEAR FIBERS**

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. One-family straight and curved fibers reinforcement is considered by reference to the structural model within the inhomogeneous anisotropic theory planar problem. We consider inextensible and equally stressed families of fibers. The resolving systems of equations for these problems are constructed and its type is studied. The numerical-analytical solutions of the particular problems for a metal composite were obtained.

Keywords: curvilinear reinforcement, structural model, single family of curvilinear fibers

REFERENCES

- [1] Nemirovsky Yu. V., Feodorova N. A. Mathematical modeling of the plane constructions from reinforced fibrous materials. Krasnoyarsk: Siberian Federal University, 2010. 136 p. (in Russian).
- [2] Nemirovsky Yu. V., Feodorova N. A. Study of curvilinear reinforcement rational structures in polar coordinate system // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2013. № 1(30). P. 233–244. (in Russian).
- [3] Nemirovsky Yu. V., Feodorova N. A. Breaking strains of planar thermoelastic constructions reinforced by curvilinear structures // Vestnik SibGAU, 2016. Vol. 17. № 1. P. 73–78. (in Russian).
- [4] Nemirovsky Yu. V. On the elastic-plastic behaviour of the reinforced layer // Int. J. Mech. Sci. 1970. Vol. 12. P. 898–903. (in Russian).
- [5] Bushmanov S. B., Nemirovsky Yu. V. Designing plates reinforced equally-stressed fibers with constant cross-section // Mech. Compos. Materials, 1983. Vol. 19. № 2. P. 207–213. (in Russian).
- [6] Kovalenko A. D. Introduction to thermoelasticity. Kiev: Naukova Dumka, 1965. 204 p. (in Russian).
- [7] Bitsadze A. V. Some classes of partial differential equations. M.: Nauka, 1981. 448 p. (in Russian).
- [8] Vasilyev V. V., Protasov V. D., Bolotin V. V. et al. Composite Materials: handbook. M.: Machine Building. 1990. 510 p. (in Russian).
- [9] Dzhurayev T. D. Boundary value problems for mixed and mixed-compound equations. Tashkent: Fan, 1979. 237 p. (in Russian).

Nemirovsky Yuri Vladimirovich

e-mail: nemiryury@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia.

Feodorova Natalia Alexandrovna

e-mail: feodorova.natalia@mail.ru, Ph.D. Phys. & Math., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia.

[10] Dzhurayev A. Systems of equations of compound type. M.: Nauka, 1972. 227 p. (in Russian).

Б. Г. Миронов, Ю. Б. Миронов

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ВКЛЮЧЕНИЕМ

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва

Аннотация. В работе рассмотрено кручение идеальнопластического прямоугольного призматического стержня с включением. Определено напряженное состояние стержня, найдены линии разрыва напряжений, построено поле характеристик.

Ключевые слова: кручение, напряжение, пластичность, предел текучести.

УДК: 539.735

Кручение изотропных цилиндрических и призматических идеальнопластических стержней рассмотрено в работах [1], [2]. Кручение анизотропных и неоднородных идеальнопластических стержней исследовано в [1]–[5].

Рассмотрим призматический идеальнопластический стержень, ориентированный в прямоугольной системе координат xyz .

Ось z направлена параллельно образующим стержня. Сечение стержня плоскостью $z = const$ есть прямоугольник $ABCD$ со сторонами равными $2a$ и $2b$.

Предположим, что стержень состоит из двух изотропных частей, разделенных левой половиной эллипса (рис. 1), тогда

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a_0 < a - b.$$

Стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил. Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок.

Напряженное состояние стержня определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

© Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б., 2017

Миронов Борис Гурьевич

e-mail: mbg.chspru@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва.

Миронов Юрий Борисович

e-mail: mistiam@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-41-210272).

Поступила 01.03.2017

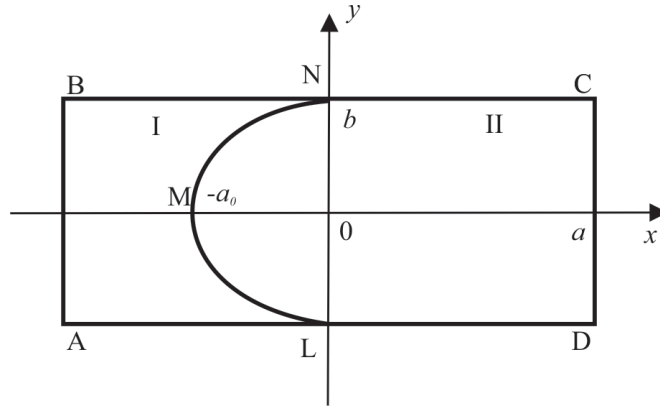


Рис. 1.

условиями пластичности

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_1^2 \quad (2)$$

в области I,

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_2^2 \quad (3)$$

в области II,
уравнением равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

где $k_1 < k_2$.

Согласно [2] характеристики соотношения (4) есть прямые, ортогональные вектору касательного напряжения

$$\bar{\tau} = \tau_{xz}\bar{i} + \tau_{yz}\bar{j}, \quad (5)$$

где \bar{i}, \bar{j} – орты осей x и y соответственно, который направлен по касательной к контуру поперечного сечения стержня и не меняется вдоль характеристики.

На линии неоднородности LMN неизбежен скачок касательных напряжений. Поэтому при переходе через кривую LMN вектор касательного напряжения $\bar{\tau}$, а соответственно и характеристики соотношения (4) меняют свое направление. Это приводит к дополнительным линиям разрыва напряжений ME, LE и NE , выходящим из точек M, L и N области II (рис. 2).

В области MNE характеристики соотношения (4) задаются уравнением

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a_0^2}} - (x - x_0) \operatorname{ctg}(\alpha - \beta), \quad (6)$$

а вектор касательного напряжения имеет вид

$$\bar{\tau}_{MNE} = -k_2 (\bar{i} \cos(\alpha - \beta) + \bar{j} \sin(\alpha - \beta)); \quad (7)$$

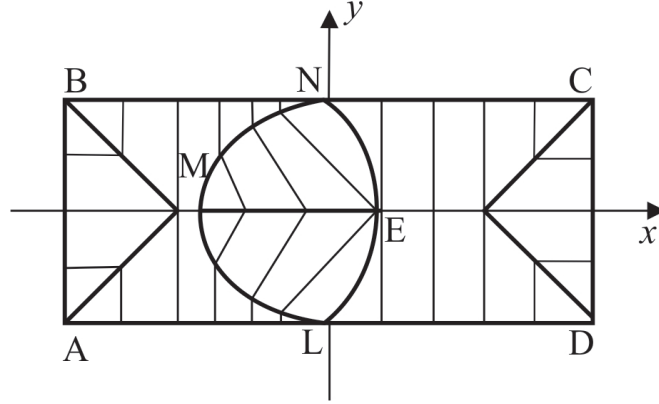


Рис. 2.

в области MLE характеристики соотношения (4) определяются уравнением

$$y = -b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a_0^2}} + (x - x_0) \operatorname{ctg}(\alpha - \beta), \quad (8)$$

а вектор касательного напряжения имеет вид

$$\bar{\tau}_{MLE} = k_2 (\bar{i} \cos(\alpha - \beta) - \bar{j} \sin(\alpha - \beta)), \quad (9)$$

где

$$x_0 \in (-a_0; 0), \quad \sin \alpha = -\frac{b^2 x_0}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a_0^4 y_0^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{a_0^2 y_0}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a_0^4 y_0^2}}, \quad \frac{x_0^2}{a_0^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

$$\sin \beta = k_1 \sin \alpha / k_2, \quad \cos \beta = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \alpha} / k_2.$$

Согласно (6) и (8) уравнения линий разрыва напряжений LE и NE имеют вид

$$NE: \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (10)$$

где $y = b$ при $x = 0$;

$$LE: \frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (11)$$

где $y = -b$ при $x = 0$.

Рассмотрим призматический стержень с прямоугольным сечением, в случае, когда сечение содержит включение в виде эллипса (рис. 3).

Пусть условие пластичности в эллипсе имеет вид (3), а вне ее – (2). В этом случае, в эллипсе появятся две дополнительные линии разрыва напряжений, которые совпадают с его диаметрами.

Характеристики соотношения (4) определяются уравнениями (6), (8) и соотношениями

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a_0^2}} + (x - x_0) \operatorname{ctg}(\alpha - \beta), \quad (12)$$

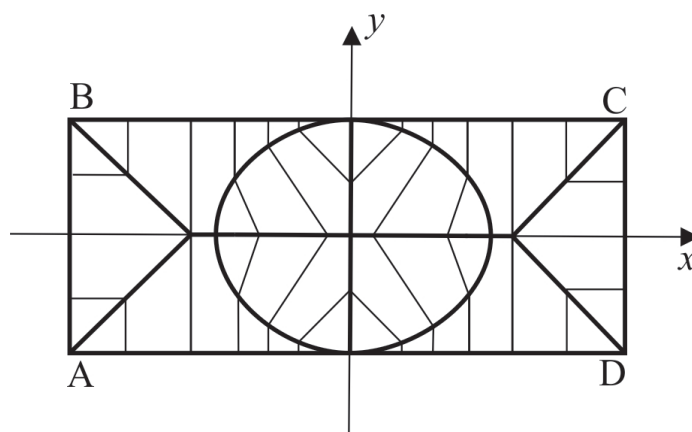


Рис. 3.

$$y = -b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a_0^2}} - (x - x_0) \operatorname{ctg}(\alpha - \beta), \quad (13)$$

где $x_0 \in (0; a_0)$.

На рисунках 2 и 3 жирными линиями нарисованы линии разрыва напряжений, а тонкими линиями – характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [3] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2012. № 4 (14). С. 108–112.
- [4] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. О кручении цилиндрических анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2011. № 1 (9). С. 150–155.
- [5] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964. 156 с.

B. G. Mironov, Yu. B. Mironov

ABOUT TORSION OF PIECEWISE ISOTROPIC PRISMATIC CORES WITH INCLUSION

N. Bauman Moscow State Technical University, Moscow

Abstract. In work torsion of a ideal plastic prismatic core with inclusion in the form of a rectangle is considered. Tension of a core is defined, lines of a rupture of tension are found, the field of characteristics is built.

Keywords: torsion, tension, plasticity, fluidity limit

REFERENCES

- [1] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. Teorija plastichnosti. Vlydivostok: Dal'nauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D. Teorija ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka, 1966. (in Russian).
- [3] Derevjannyh E. A., Mironov B. G. Ob obshhijh sootnoshenijah teorii kruchenija anizotropnyh sterzhnej // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2012. № 4. P. 108–112. (in Russian).
- [4] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. O kruchenii cilindricheskih anizotropnyh sterzhnej // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2011. No 9. P. 150–155. (in Russian).
- [5] Ol'shak V., Ryhlevskij Ja., Urbanovskij V. Teorija plastichnosti neodnorodnyh tel. M.: Mir, 1964. 156 p. (in Russian).

Mironov Boris Guryevich

e-mail: mbg.chspu@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, N. Bauman Moscow State Technical University, Moscow.

Mironov Yuriy Borisovich

e-mail: mistiam@gmail.com, Cand. Phys. & Math., Associate Professor, N. Bauman Moscow State Technical University, Moscow.

Ю. В. Немировский¹, А. С. Мозгова²

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОТЕРЬ НА УЧАСТКЕ СЛОИСТОГО ТРУБОПРОВОДА ТЕПЛОВЫХ СЕТЕЙ

¹ *Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

² *Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. Тепловые потери являются одним из основных показателей энергетической эффективности эксплуатации тепловых сетей и включаются в тарифы на тепловую энергию. Определение фактических тепловых потерь является важной практической задачей. Транспортные потери тепла вызывают падение температуры теплоносителя, вследствие этого удельные теплотери по длине трубопровода изменяются [1]. В статье рассмотрен метод определения уровня тепловых потерь на участке трубопровода тепловых сетей.

Ключевые слова: теплопроводность, тепловая сеть, тепловая изоляция, потери тепла, теплоноситель.

УДК: 539.374

1. Введение.

В системах централизованного теплоснабжения транспортировка тепла от теплоисточника до потребителей связана с потерями тепловой энергии, в том числе через тепловую изоляцию трубопроводов тепловых сетей. По опыту проведения энергетических обследований [2] величина тепловых потерь при транспортировке теплоносителя в существующих тепловых сетях составляет 15-30 % в зависимости от времени года.

Уровень тепловых потерь тепловыми сетями через теплоизоляционные конструкции в общем виде зависят от [3]:

- вида теплоизоляционной конструкции и примененных теплоизоляционных материалов;

© Немировский Ю. В., Мозгова А. С., 2017

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Мозгова Анна Станиславовна

e-mail: mozgova-energo@yandex.ru, кандидат экономических наук, Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 17-41-210272, 15-01-00825, 16-31-00511).

Поступила 07.03.2017

- типов прокладки (надземная, подземная канальная, бесканальная и т. п.) и их соотношений для данной тепловой сети;
- температурного режима и продолжительности работы тепловой сети в течение года;
- параметров окружающей среды;
- материальной характеристики тепловой сети и ее структуры по диаметрам и протяженности трубопроводов, по типам прокладки и видам теплоизоляционных конструкций;
- срока и условий эксплуатации тепловых сетей.

Под тепловыми потерями понимается количество теплоты, переданной от теплоносителя через теплоизоляционные конструкции в окружающую среду.

В статье трубопровод с тепловой изоляцией будем рассматривать как слоистую конструкцию трубопровода тепловых сетей.

Предположим, что трубопровод тепловых сетей, в котором протекает теплоноситель, полностью изолирован теплоизоляционным материалом, у которого коэффициент теплопроводности равен нулю. Следовательно, в этом случае температура теплоносителя, проходящая через участок трубопровода, будет постоянной и будет иметь начальную температуру. Данный случай рассматривается как идеальные условия протекания теплоносителя в трубопроводе без падения температуры теплоносителя.

Согласно закону Фурье, общее количество теплоты, протекающее за время t через конечную площадь поверхности, определяется по формуле [4]:

$$Q = - \sum_{j=1}^m \int_0^t \int_{R_j}^{R_{j+1}} \int_0^l \lambda_{jk} \frac{\partial T_j}{\partial n} dt dr dz, \quad (j = \overline{1, m}; k = r, z), \quad (1)$$

здесь $T_j = T_j(r, z, t)$ – температурное поле в j -ом слое; $\frac{\partial T_j}{\partial n}$ – частная производная от функции T_j по направлению нормали n ; λ_{jk} – коэффициенты теплопроводности вдоль осей Or и Oz соответственно; r, z – координаты; t – время; m – число слоев.

Ось слоистого трубопровода обозначим за ось Oz , тогда изотермическими поверхностями для теплопроводности будут сечения слоистого трубопровода, перпендикулярные оси Oz , нормаль к ним совпадает с осью Oz и $\frac{\partial T_j}{\partial n} = \frac{\partial T_j}{\partial z}$ ($j = \overline{1, m}$).

В реальных условиях потери тепла в трубопроводах тепловых сетей через теплоизоляцию технически неизбежны. За счет теплопроводности стенки трубопровода и теплоизоляционных материалов происходят тепловые потери, соответственно температура теплоносителя при протекании в трубопроводе падает. В этом случае количество теплоты dQ (рис.1), переданной от теплоносителя через слои трубопровода в окружающую среду, определим следующим образом [4]:

$$dQ = Q_z - Q_{z+dz}. \quad (2)$$

Здесь dQ – количество теплоты, переданной от теплоносителя через слои трубопровода в окружающую среду за единицу времени; Q_z – количество теплоты, входящее в трубопровод тепловой сети за единицу времени; Q_{z+dz} – количество теплоты, которое выходит из трубопровода тепловой сети за то же время.

$$Q_z = - \sum_{j=1}^m \int_0^t \int_{R_j}^{R_{j+1}} \int_0^l \lambda_{jk} \frac{\partial T_j}{\partial z} dt dr dz, \quad (j = \overline{1, m}; k = r, z), \quad (3)$$

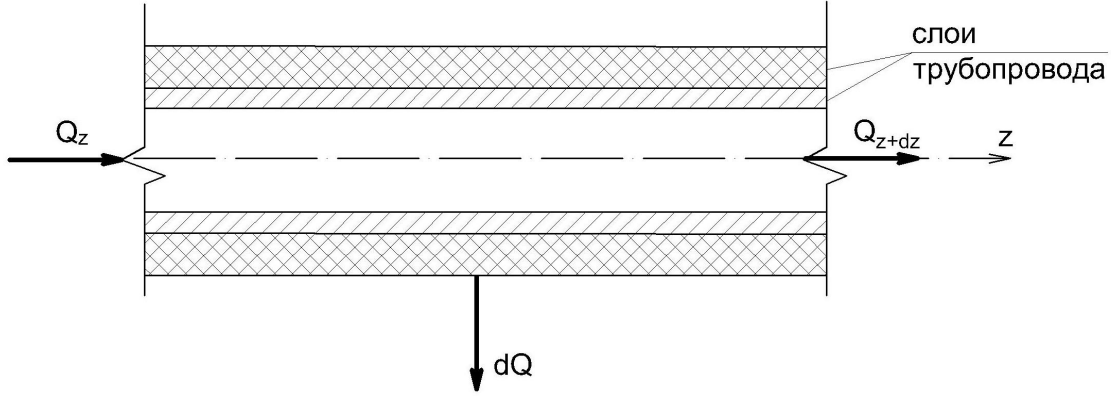


Рис. 1.

$$Q_{z+dz} = - \sum_{j=1}^m \int_0^t \int_{R_j}^{R_{j+1}} \int_0^l \lambda_{jk} \frac{\partial T_j}{\partial z} dt dr dz + \sum_{j=1}^m \int_0^t \int_{R_j}^{R_{j+1}} \int_0^l \lambda_{jk} \frac{\partial^2 T_j}{\partial z^2} dt dr dz^2, \quad (4)$$

$$(j = \overline{1, m}; k = r, z)$$

Подставив (3) и (4) в (2), получим:

$$Q = \sum_{j=1}^m \int_0^t \int_{R_j}^{R_{j+1}} \int_0^l \lambda_{jk} \frac{\partial^2 T_j}{\partial z^2} dt dr dz^2, \quad (j = \overline{1, m}; k = r, z). \quad (5)$$

Таким образом, уровень тепловых потерь на участке слоистого трубопровода тепловых сетей можно определить как разность между количеством теплоты при идеальных условиях и количеством теплоты с учетом тепловых потерь через слои трубопровода.

Для нахождения количества теплоты необходимо определить температурное поле в каждом слое трубопровода.

2. Постановка краевой задачи. Рассмотрим задачу по определению температурного поля в слоистом трубопроводе тепловых сетей с протекающей жидкостью. Решение задачи нестационарной теплопроводности слоистого трубопровода, применительно к осесимметричному случаю, состоящего из m слоев, разнородных по тепловым свойствам, при совершенном контакте на поверхности раздела слоев, сводится к решению системы уравнений [4]:

$$\frac{\partial T_j(r, z, t)}{\partial t} = a_{jr} \left(\frac{\partial^2 T_j(r, z, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_j(r, z, t)}{\partial r} \right) + a_{jz} \left(\frac{\partial^2 T_j(r, z, t)}{\partial z^2} \right) - \beta_j v_j \left(\frac{\partial T_j(r, z, t)}{\partial z} \right); \quad (6)$$

$$(t > 0; R_{j-1} \leq r < R_j; j = \overline{1, m}; 0 \leq z < l)$$

$$\beta_j = \begin{cases} 0 & \text{твердое тело;} \\ 1 & \text{жидкость.} \end{cases}$$

Здесь r и z – координаты; t – время; R_j и R_{j+1} – радиусы слоев трубопровода, ($j = \overline{1, m}$); l – длина трубопровода; m – число слоев; a_{jr} и a_{jz} – коэффициенты теплопроводности вдоль осей Or и Oz соответственно, ($j = \overline{1, m}$); v_j – скорость теплоносителя в трубопроводе, ($j = \overline{1, m}$).

В случае, когда количество теплоты протекает через боковые поверхности трубопровода, а торцевые стороны трубопровода непроницаемы для тепла, для первого и последнего слоя задаем температуры окружающей среды и закон конвективного теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Для описания процесса теплообмена используем закон Ньютона–Рихмана [4]. На границе раздела j -го и $(j + 1)$ -го слоев задаем условия идеального теплового контакта. Для решения системы (6) зададим следующие начальные и граничные условия [4]:

$$T_j(r, z, 0) = T_0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial T_1(R_1, z, t)}{\partial r} - H_{1r}[T_1(R_1, z, t) - T_{\text{ср}}(t)] = 0; \quad (8)$$

$$T_j(R_j, z, t) = T_{j+1}(R_j, z, t); \quad (9)$$

$$\lambda_{jr} \frac{\partial T_j(R_j, z, t)}{\partial r} = \lambda_{jr+1} \frac{\partial T_{j+1}(R_j, z, t)}{\partial r}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial T_m(R_m, z, t)}{\partial r} + H_{mr}[T_m(R_m, z, t) - T_{\text{окр.в.}}(t)] = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T_1(r, 0, t)}{\partial z} = T_0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial T_1(r, l, t)}{\partial z} - H_{1z}[T_1(r, l, t) - T_{\text{ср}}(t)] = 0; \quad (13)$$

здесь $H_{1r} = \frac{\alpha_1}{\lambda_{1r}}$; $H_{mr} = \frac{\alpha_m}{\lambda_{mr}}$; $H_{1z} = \frac{\alpha_1}{\lambda_{1z}}$; α_1 и α_m – коэффициенты теплоотдачи соответственно теплоносителя и m -го слоя трубопровода; λ_{1r} , λ_{mr} и λ_{1z} – коэффициенты теплопроводности, соответственно, теплоносителя и m -го слоя трубопровода вдоль осей Or и Oz ; T_0 – начальная температура теплоносителя; $T_{\text{ср}}(t)$ – температура теплоносителя; $T_{\text{окр.в.}}(t)$ – температура окружающего воздуха.

Если количество теплоты протекает через торцевые стороны трубопровода, а боковые поверхности непроницаемы для тепла, для решения системы (6) зададим следующие начальные и граничные условия [4]:

$$T_j(r, z, 0) = T_0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial T_j(r, 0, t)}{\partial z} - H_{jz}[T_j(r, 0, t) - T_{\text{окр.в.}}(t)] = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial T_j(r, l, t)}{\partial z} + H_{jz}[T_j(r, l, t) - T_{\text{окр.в.}}(t)] = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial T_1(R_1, z, t)}{\partial r} = T_{\text{ср.}}(t); \quad (17)$$

$$\frac{\partial T_m(R_m, z, t)}{\partial r} = T_{\text{окр.в.}}(t), \quad (18)$$

$$T_j(R_j, z, t) = T_{j+1}(R_j, z, t); \quad (19)$$

$$\lambda_{jr} \frac{\partial T_j(R_j, z, t)}{\partial r} = \lambda_{j+1r} \frac{\partial T_{j+1}(R_j, z, t)}{\partial r}; \quad (20)$$

здесь $H_{jz} = \frac{\alpha_j}{\lambda_{jz}}$; α_j – коэффициент теплоотдачи j -го слоя; λ_{jz} – коэффициенты теплопроводности j -го слоя вдоль оси Oz ; T_0 – начальная температура теплоносителя; $T_{\text{ср.}}(t)$ – температура теплоносителя; $T_{\text{окр.в.}}(t)$ – температура окружающего воздуха.

При идеальных условиях, когда стенка трубопровода тепловых сетей непроницаема для тепла, зададим следующие начальные и граничные условия [4]:

$$T_j(r, z, 0) = T_0; \quad (21)$$

$$\frac{\partial T_1(R_1, z, t)}{\partial r} = T_{\text{ср.}}(t); \quad (22)$$

$$\frac{\partial T_2(R_2, z, t)}{\partial r} = T_{\text{окр.в.}}(t); \quad (23)$$

$$T_1(R_1, z, t) = T_2(R_2, z, t) \quad (24)$$

$$\lambda_{1r} \frac{\partial T_1(R_1, z, t)}{\partial r} = \lambda_{2r} \frac{\partial T_2(R_2, z, t)}{\partial r}; \quad (25)$$

$$\frac{\partial T_1(r, 0, t)}{\partial z} = T_0; \quad (26)$$

$$\frac{\partial T_1(r, l, t)}{\partial z} - H_{1z}[T_1(r, l, t) - T_{\text{ср.}}(t)] = 0, \quad (27)$$

Задача теплопроводности для многослойного цилиндра без протекающей жидкости рассмотрена в статье [5].

3. Решение задачи. Приближенное решение задачи, следуя методу Л. В. Канторовича, определим среди функций вида [6]:

$$T_j(r, z, t) = T_{\text{ср.}}(t) + \sum_{j=1}^m f_j(t) \psi_j(r, z), \quad (j = \overline{1, m}) \quad (28)$$

здесь $f_j(t)$ - неизвестные функции времени; $\psi_j(r, z)$ - координатные функции.

В качестве простейшего примера рассмотрим участок слоистого трубопровода тепловых сетей с протекающей жидкостью, в случае, когда торцевые стороны трубопровода непроницаемы для тепла, а количество теплоты теряется через боковые поверхности трубопровода (рис. 2).

Координатные функции $\psi_j(r, z)$ представим в виде:

$$\psi_j(r, z) = E_{1j}(z) + E_{2j}(z)r^2, \quad (j = \overline{1, m}), \quad (29)$$

где $E_{1j}(z)$ и $E_{2j}(z)$ - неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (8)–(11).

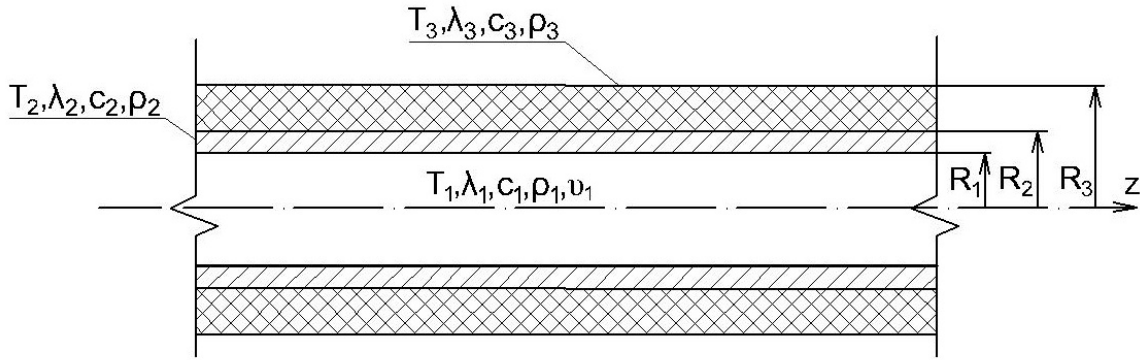


Рис. 2.

Здесь c_1 , c_2 и c_3 - удельная теплоемкость, соответственно, теплоносителя, трубопровода и теплоизоляционного материала; ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 - плотность теплоносителя, соответственно, теплоносителя, трубопровода и теплоизоляционного материала; v_1 - скорость теплоносителя в трубопроводе.

Выделим подобласти:

$0 \leq r \leq R_1$, $0 \leq z \leq l$ - теплоноситель;

$R_1 \leq r \leq R_2$; $0 \leq z \leq l$ - стенка трубопровода;

$R_2 \leq r \leq R_3$; $0 \leq z \leq l$ - теплоизоляционный материал.

Исходя из (29), координатные функции для каждого слоя трубопровода будут иметь вид:

для теплоносителя - $\psi_1(r, z) = E_{11}(z) + E_{21}(z)r^2$;

для стенки трубопровода - $\psi_2(r, z) = E_{12}(z) + E_{22}(z)r^2$;

для теплоизоляционного материала - $\psi_3(r, z) = E_{13}(z) + E_{23}(z)r^2$,

здесь $E_{11}(z)$, $E_{21}(z)$, $E_{12}(z)$, $E_{22}(z)$, $E_{13}(z)$, $E_{23}(z)$ - неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (8)–(11).

Используя условия сопряжения (19) и (20), получим:

$$E_{11}(z) + E_{21}(z)R_1^2 = E_{12}(z) + E_{22}(z)R_1^2 \quad (30)$$

$$\lambda_1[2E_{21}(z)R_1] = \lambda_2[2E_{22}(z)R_1] \quad (31)$$

$$E_{12}(z) + E_{22}(z)R_2^2 = E_{13}(z) + E_{23}(z)R_2^2 \quad (32)$$

$$\lambda_2[2E_{22}(z)R_2] = \lambda_3[2E_{23}(z)R_2]. \quad (33)$$

Используя условия конвективного теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой (8) и (11), получим:

$$2E_{21}(z)R_1 - H_1[E_{11}(z) + E_{21}(z)R_1^2 - T_{cp}(t)] = 0 \quad (34)$$

$$2E_{23}(z)R_3 + H_3[E_{13}(z) + E_{23}(z)R_3^2 - T_{окр.в.}(t)] = 0. \quad (35)$$

Неизвестные коэффициенты из уравнений (30)–(35) выразим через $E_{21}(z)$:

$$\begin{aligned} E_{22}(z) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} E_{21}(z); \\ E_{23}(z) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_3} E_{21}(z); \\ E_{11}(z) &= \frac{E_{21}(z)[2R_1 - H_1R_1^2]}{H_1} - T_{cp}(t); \\ E_{13}(z) &= \frac{E_{21}(z)[-2\frac{\lambda_1}{\lambda_3}R_3 - H_3\frac{\lambda_1}{\lambda_3}R_3^2]}{H_3} + T_{окр.в.}(t); \\ E_{12}(z) &= \frac{E_{21}(z)[2R_1 - H_1R_1^2]}{H_1} + E_{21}^2(z)R_1^2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} E_{21}(z)R_1^2 - T_{cp}(t). \end{aligned}$$

Таким образом, получим координатные функции для каждого слоя трубопровода: для теплоносителя

$$\psi_1(r, z) = \frac{E_{21}(z)[2R_1 - H_1R_1^2]}{H_1} - T_{cp}(t) + E_{21}(z)r^2; \quad (36)$$

для трубопровода

$$\psi_2(r, z) = \frac{E_{21}(z)[2R_1 - H_1R_1^2]}{H_1} + E_{21}^2(z)R_1^2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} E_{21}(z)R_1^2 - T_{cp}(t) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} E_{21}(z)r^2; \quad (37)$$

для теплоизоляционного материала

$$\psi_3(r, z) = \frac{E_{21}(z)[-2\frac{\lambda_1}{\lambda_3}R_3 - H_3\frac{\lambda_1}{\lambda_3}R_3^2]}{H_3} + T_{окр.в.}(t) + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} E_{21}(z)r^2. \quad (38)$$

Неизвестный коэффициент $E_{21}(z)$ определим из граничных условий (12)–(13).

Распределение температуры по длине трубопровода примем в виде полинома второй степени:

$$E_2(z) = z^2 + Bz + C. \quad (39)$$

Значения неизвестных коэффициентов B и C найдем из граничных условий (12)–(13):

$$B = T_{cp}(t)$$

$$C = \frac{H_1 T_{cp}(t) - 2l - T_{cp}(t) - H_1 l^2 + T_{cp}(t) l H_1}{H_1}$$

Таким образом, получим:

$$E_2(z) = z^2 + T_{cp}(t)z + \frac{H_1 T_{cp}(t) - 2l - T_{cp}(t) - H_1 l^2 + T_{cp}(t) l H_1}{H_1}. \quad (40)$$

Подставив $E_{21}(z)$ в (36)–(38), получим окончательные координатные функции для каждого слоя трубопровода.

Для нахождения неизвестных функций времени составим интеграл взвешенной невязки уравнения (6) [6]:

$$\int_{r_{j-1}}^{r_j} \int_0^l \left(\frac{\partial f_j(t)}{\partial t} \psi_j(r, z) - f_j(t) \right) \left[a_j \left(\frac{\partial^2 \psi_j(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_j(r)}{\partial r} \right) + a_{1j} \left(\frac{\partial^2 \psi_j(r, z)}{\partial z^2} \right) - \beta_j v_j \left(\frac{\partial \psi_j(r, z)}{\partial z} \right) \right] dr dz = 0. \quad (41)$$

($j = \overline{1, m}$)

Определяя интегралы в (41), относительно неизвестной функции времени, получим дифференциальное уравнение первого порядка.

Введем обозначение:

$$A_j = \int_{r_{j-1}}^{r_j} \int_0^l \psi_j(r, z) dr dz; \quad (j = \overline{1, m})$$

$$D_j = \int_{r_{j-1}}^{r_j} \int_0^l \left[a_j \left(\frac{\partial^2 \psi_j(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_j(r)}{\partial r} \right) + a_{1j} \left(\frac{\partial^2 \psi_j(r, z)}{\partial z^2} \right) - \beta_j v_j \left(\frac{\partial \psi_j(r, z)}{\partial z} \right) \right] dr dz; \quad (j = \overline{1, m})$$

С учетом введенных обозначений получаем следующее уравнение:

$$A_j f'(t) - D_j f(t) = 0 \quad (42)$$

Решая уравнение (42), получим:

$$f_j(t) = C_j \exp\left(\frac{D_j}{A_j} t\right), \quad (43)$$

здесь C_j – постоянная интегрирования, определяемая из начального условия (7).

Тогда соотношение (28) примет вид:

$$T_j(r, z, t) = \sum_{j=1}^3 C_j \exp\left(\frac{D_j}{A_j} t\right) \psi_j(r, z). \quad (44)$$

Для определения постоянной интегрирования найдем интеграл взвешенной невязки начального условия

$$\int_{r_{j-1}}^{r_j} \int_0^l \left(C_j \psi_j(r, z) \exp\left(\frac{B}{A} \cdot 0\right) - T_0 \right) dr dz = 0. \quad (45)$$

После нахождения постоянных интегрирования температурное поле определим из уравнения (44). Таким же образом определяется температурное поле в слоях идеального трубопровода при граничных условиях (22)–(27).

Количество теплоты, переданной от теплоносителя через слои трубопровода в окружающую среду определим по формуле (5), количество теплоты в трубопроводе при идеальных – определим по формуле (1).

Уровень тепловых потерь на участке слоистого трубопровода тепловых сетей определим как разность между количеством теплоты при идеальных условиях и количеством теплоты с учетом тепловых потерь через слои трубопровода.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Козин В. Е., Левина Т. А., Марков А. П., Пронина И. Б., Слемзин В. А. Теплоснабжение: учебное пособие для студентов вузов. Т. 34. М.: Высш. школа, 1980. 408 с.
- [2] Мозгова А. С., Суриков А. В. Энергетическое обследование котельных и тепловых сетей // Новое в архитектуре, проектировании строительных конструкций и реконструкции: материалы III Международной (IX Всероссийской) конференции НАСКР-2016. Чебоксары, 2016. С. 474–480.
- [3] РД 153-34.0-20.523-98. Часть II. Методические указания по составлению энергетической характеристики водяных тепловых сетей по показателю тепловые потери.
- [4] Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. школа, 2001. 550 с.
- [5] Немировский Ю.В., Мозгова А. С. Теплопроводность конструкционного элемента космического аппарата в виде многослойного цилиндра // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 1 (31). С. 49–54.
- [6] Кудинов В. А., Карташов Э. М., Калашников В. В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций: учебное пособие для вузов. М.: Высш. школа, 2005. 430 с.

Yu. V. Nemirovsky¹, A. S. Mozgova²

DEFINITION OF THERMAL LOSSES ON THE SITE OF THE LAYERED PIPELINE OF HEAT NETWORKS

¹*Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

²*I. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

Abstract. Thermal losses are one of the main rates of energy efficiency of heat networks and included in the tariffs for thermal energy. The determination of the actual thermal loss is an important practical task. Transport thermal loss as cause the temperature drop of the heat carrier, therefore the specific heat losses along the length of the pipeline change [1]. The article describes the method of determining the level of thermal losses in the pipeline section of heat networks.

Keywords: thermal conductivity, heat network, thermal isolation, thermal losses, heat carrier.

REFERENCES

- [1] Kozin V.E., Levina T.A., Markov A.P., Pronina I.B., Slemzin V.A. Teplosnabzheniye: Manual for students of higher education institutions. M.: Vyssh. school, 1980. 408 p. (in Russian).
- [2] Mozgova A. S., Surikov A. V. Power inspection of boiler and thermal networks // New in architecture, design of building constructions and reconstruction: materials III International (IX All-Russian) NASKR-2016 conferences. Cheboksary. 2016. P. 474–480. (in Russian).
- [3] RD 153-34.0-20.523-98. Part II. Methodical instructions on drawing up the power characteristic of water thermal networks on an indicator thermal losses. (in Russian).
- [4] Kartashov E. M. Analytical methods in the theory of heat conductivity of solid bodies. M.: Vyssh. shk., 2001. 550 p. (in Russian).
- [5] Nemirovsky Yu. V., Mozgova A. S. The Thermal conductivity of a constructional element of the spacecraft in the form of the multilayered cylinder//the Bulletin of the Chuvash state pedagogical university I. Yakovleva. Series: Mechanics of a limit state. 2017. №. 1 (31). P. 49–54. (in Russian).
- [6] Kudinov V. A., Kartashov E. M., Kalashnikov V. V. Analytical solutions of problems of a heatmass transfer and thermoelasticity for multilayered designs: manual for higher education institutions. M.: Vyssh. shk., 2005. 430 p. (in Russian).

Nemirovsky Yuri Vladimirovich

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.

Mozgova Anna Stanislavovna

e-mail: mozgova-energo@yandex.ru, Candidate of Economic Sciences, I. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

В. Д. Коробкин, М. Г. Ордян

ПОСТРОЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Рассмотрен вопрос построения непрерывного поля скоростей перемещений при вдавливании пластического материала через матрицу с гладким профилем. Составлено дифференциальное уравнение и определены первые интегралы. Используя граничные условия на входе материала в пластическую область, решена задача Коши и определены скорости перемещений и компоненты скорости деформаций для осесимметричной задачи.

Ключевые слова: пластичность, технологические задачи, поле скоростей перемещений, верхняя оценка усилий деформирования.

УДК: 539.374

Вопрос о непрерывных полях скоростей перемещений возник в связи с тем, что, как показано в работе [1], в упрочняющихся материалах нет разрыва скоростей перемещений. При деформировании упрочняющихся материалов, как правило, учитывают влияние факта неразрывности в среднем. Используют решение для жестко-пластического материала и считают, что кинематика для упрочняющегося материала мало отличается. Иногда, как например в работе [2], вместо поверхности разрыва вводят слой, устремляя при этом его толщину к нулю и фактически получают фиктивную поверхность разрыва скоростей перемещений. Течение жестко-пластического материала подробно изучено классиками теории пластичности и теории обработки металлов давлением. Наша задача заключается в следующем: используя метод, предложенный в работе [3], определить непрерывные поля скоростей перемещений для осесимметричных профилей.

1. Рассматривается пространственный осесимметричный профиль (рис. 1). Задача решается в цилиндрических координатах z, θ, r .

Пусть уравнение профиля матрицы задано в виде

© Коробкин В. Д., Ордян М. Г., 2017

Коробкин Валерий Дмитриевич

e-mail: v.d.korobkin@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия.

Ордян Михаил Гарегинович

e-mail: omg84@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 21.02.2017

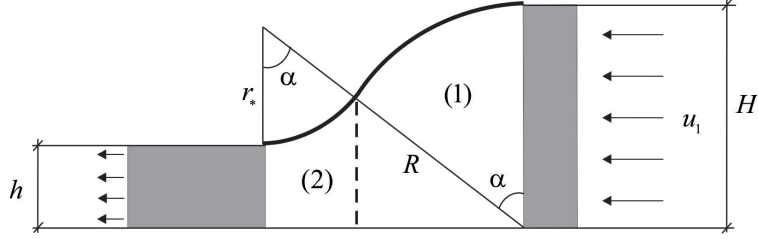


Рис. 1. Схема пластического течения

$$r = f(z). \quad (1.1)$$

Будем считать, что уравнения траекторий движений точек описываются следующим образом:

$$r = Cf(z), \quad (1.2)$$

где C — постоянная, которая изменяется в пределах от нуля до 1.

Дифференциальные уравнения траекторий движения точек

$$\frac{dr}{dz} = Cf'(z). \quad (1.3)$$

Рассмотрим случай установившегося процесса

$$\frac{dr}{dz} = \frac{u_r}{u_z}. \quad (1.4)$$

Используя выражения (1.2), (1.3) и подставляя в уравнение (1.4), получим следующее соотношение

$$\frac{rf'(z)}{f(z)} = \frac{u_r}{u_z}. \quad (1.5)$$

Условие несжимаемости в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (1.6)$$

Подставляя в условия несжимаемости, получим

$$zf'(z)\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{2f'(z)}{f(z)}u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (1.7)$$

2. Рассмотрим случай, когда угол $\alpha > 45^\circ$, а скорость u_z зависит только от координаты z .

Уравнение для определения u_z имеет вид

$$\frac{du_z}{dz} + u_z \frac{2f'(z)}{f(z)} = 0. \quad (2.1)$$

Решая уравнение (2.1), имеем:

$$u_z f^2(z) = C_1. \quad (2.2)$$

Используя граничное условие для u_z , при $z = 0$, $u_z = u_1$, $f(0) = H$, и учитывая, что $H = 1$, получим

$$u_z = \frac{u_1}{1 - z^2}. \quad (2.3)$$

Из условия несжимаемости находим u_r :

$$u_r = -\frac{rz}{(1 - z^2)^2}. \quad (2.4)$$

Таким образом, учитывая, что для первой пластической области $f_1(z) = \sqrt{1 - z^2}$, получим выражения для компонент скоростей деформации и сдвига

$$\varepsilon_z = \frac{2z}{(1 - z^2)^2}; \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \frac{-z}{(1 - z^2)^2}; \quad \gamma_{rz} = \frac{-1 + 3z^2}{(1 - z^2)^3}r. \quad (2.5)$$

Для первой области мощность определяется по формуле

$$N_1 = 2\pi k \int_0^{\sin\alpha} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{12\varepsilon_r^2 + \gamma_{rz}^2} dr dz. \quad (2.6)$$

Для второй области по формуле

$$N_2 = 2\pi k \int_{\sin\alpha}^{1+r_*\sin\alpha} \int_{\cos\alpha}^{f_2(z)} \sqrt{12\varepsilon_r^2 + \gamma_{rz}^2} dr dz, \quad (2.7)$$

где $f_2(z) = r_0 - \sqrt{r_*^2 - (z - z_0^2)^2}$, r_* — радиус малой окружности, r_0 и z_0 — координаты центра малой окружности. Если задать h и угол α , то h и r_* связаны зависимостью

$$h = (1 + r_*)\cos\alpha - r_*. \quad (2.8)$$

Используя граничные условия для во второй области, получим

$$u_z = \frac{u_1 t g^2 \alpha}{f_2^2(z)}. \quad (2.9)$$

Из условия несжимаемости

$$u_r = -\frac{r du_z}{dz}. \quad (2.10)$$

Аналогично определяются ε_r , ε_θ , ε_z .

Выводы.

1. При определении верхней оценки усилия деформирования упрочняющегося материала через осесимметричные матрицы использование непрерывного поля скоростей позволит уточнить значение верхней оценки.

2. Используя линии тока можно для каждого сечения $z = const$ получить распределение интенсивности деформации в зависимости от координат r .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
- [2] Коробкин В. Д., Чудаков П. Д. Диссипация мощности на поверхностях разрыва в упрочняющемся материале // Изв. АН СССР, МТТ. 1969. № 3. С. 158–161.
- [3] Коробкин В. Д. Построение непрерывных полей скоростей по линиям тока // Изв. вузов, Машиностроение. 1973. № 9. С. 28–31.

V. D. Korobkin, M. G. Ordyan

**CONSTRUCTION OF THE CONTINUOUS FIELD OF RATES OF
DISPLACEMENTS FOR THE AXISYMMETRIC PROBLEM OF THE THEORY
OF PLASTICITY**

Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

Abstract. The question of construction of continuous field of rates of displacements when plastic material is pressed through a matrix with a smooth profile is considered. A differential equation is constructed and the first integrals are determined. Using the boundary conditions on the input of material in plastic region the Cauchy problem is solved and rates of displacements and the components of the strain rate for the axisymmetric problem are determined.

Keywords: plasticity, technological problems, the field of rates of displacements, the upper estimate of deformation efforts.

REFERENCES

[1] Ivlev D. D., Bikovtsev G. I. Theory of a hardening plastic body. M.: Nauka, 1971. 232 p. (in Russian).

[2] Korobkin V. D., Chudakov P. D. Dissipation of the power at surfaces of discontinuity in the hardening material // Izv. AN SSSR, MTT. 1969. № 3. P. 158–161. (in Russian).

[3] Korobkin V. D. Constructing continuous fields of velocity along current lines // Izv. vuzov, Mashinostroenie. 1973. № 9. P. 28–31. (in Russian).

Korobkin Valery Dmitrievich

e-mail: v.d.korobkin@yandex.ru, Doctor Sci. Phys. & Math, Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia.

Ordyan Mikayel Gareginovich

e-mail: omg84@mail.ru, PhD in Phys. & Math, Assoc. Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia.

К. Н. Галимзянова¹, Л. В. Ковтанюк¹, Г. Л. Панченко^{2,3}

ПОЛЗУЧЕСТЬ И ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ МАТЕРИАЛА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ В УСЛОВИЯХ ВСЕСТОРОННЕГО ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО СЖАТИЯ

¹Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,
г. Владивосток, Россия

²Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН,
г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

³Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток,
Россия

Аннотация. В рамках теории малых деформаций приводится решение краевой задачи о деформировании материала с упругими, вязкими и пластическими свойствами в сферическом слое под действием равномерного изменяющегося со временем давления. Реологические эффекты учитываются на стадии деформирования, предвещающей пластическое течение. Рассчитаны обратимые и необратимые деформации, напряжения, перемещения. Установлена закономерность продвижения упругопластической границы в слое.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, пластичность.

УДК: 539.37

Изменение формы некоторых конструкционных материалов осуществляется способом холодной формовки в условиях ползучести [1]. Поэтому интересными становятся

© Галимзянова К. Н., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л., 2017

Галимзянова Ксения Наилевна

e-mail: gal-ksyusha@ya.ru, аспирант, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия.

Ковтанюк Лариса Валентиновна

e-mail: lk@iasp.dvo.ru, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия.

Панченко Галина Леонидовна

e-mail: ranchenko.21@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия; доцент, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-31-60017 мол_а_дк), программы фундаментальных научных исследований "Дальний Восток" (0262-2015-0064, 0262-2015-0065).

Поступила 08.05.2017

задачи о пластическом течении в материале, который на предварительной стадии уже приобретает необратимые деформации за счет его ползучести. Смена механизма накопления необратимых деформаций на упругопластических границах требует новых постановок задач. Рассмотренная задача является одним из таких примеров.

1. Основные модельные соотношения. Для решения задачи будем использовать математическую модель малых деформаций, в которой полные деформации d_{ij} складываются из обратимой e_{ij} и необратимой p_{ij} составляющих [2]

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (1)$$

В соотношениях (1) u_i — компоненты вектора перемещений, x_i — пространственные координаты точки деформируемой среды.

Напряжения в среде связаны с обратимыми деформациями законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (2)$$

в котором λ, μ — параметры Ламе.

Полагаем, что необратимые деформации накапливаются в материале непосредственно с начала процесса деформирования. При этом необратимые деформации p_{ij} могут быть и деформациями ползучести, и пластическими деформациями.

Диссипативный механизм деформирования свяжем только с вязкими и пластическими свойствами материалов. В областях, где напряженное состояние еще не достигло поверхности текучести, диссипативный механизм деформирования зададим в форме закона ползучести Нортон [3]

$$V(\sigma_{ij}) = B \Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}} \left((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2 \right)^{1/2}, \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений, ε_{ij}^v — скорости деформаций ползучести, B, n — заданные параметры ползучести материала.

При достижении напряженным состоянием поверхности текучести диссипативный механизм меняется: начинается пластическое течение. В качестве такой поверхности будем использовать условие пластичности Мизеса [4]

$$f(\sigma_{ij}) = s_{ij} s_{ji} - \frac{8}{3} k^2, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \xi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \xi > 0, \quad (4)$$

где ε_{ij}^p — тензор скоростей пластических деформаций, k — предел текучести.

2. Постановка и решение задачи до пластического течения. Пусть слой материала, ограниченный сферическими поверхностями $r = r_0$ и $r = R$ ($r_0 < R$), находится в условиях следующего воздействия

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = -p(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=r_0} = 0. \quad (5)$$

В соотношениях (5) $p(t)$ — известная возрастающая со временем функция, σ_{rr} — радиальная компонента тензора напряжений в сферической системе координат r, θ, φ .

Для отличных от нуля компонент тензора деформаций в рассматриваемом случае согласно соотношениям (1) имеем

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad d_{\theta\theta} = d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}. \quad (6)$$

В зависимостях (6) $u = u_r$ — единственная не равная нулю компонента вектора перемещений.

Из закона Гука (2) найдем напряжения в сферическом слое:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) e_{rr} + 2\lambda e_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda e_{rr} + 2(\lambda + \mu) e_{\varphi\varphi}. \quad (7)$$

В рамках квазистатического подхода запишем уравнение равновесия для рассматриваемого случая

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \quad (8)$$

Формула (3) в сферической системе координат принимает форму

$$V(\sigma_{ij}) = 2^{-n/2} B \left((\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta})^2 \right)^{n/2}. \quad (9)$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае сферической симметрии $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$, из (3) и (9) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^v &= \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} = -2\varepsilon_{\varphi\varphi}^v = -2 \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} = Bn (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^{n-1}, \\ \varepsilon_{rr}^v + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}^v &= 0, \quad p_{rr} + 2p_{\varphi\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из зависимостей (6) следуют два уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} = e_{rr} - e_{\varphi\varphi} + \frac{3}{2} p_{rr}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} = e_{rr} + 2e_{\varphi\varphi}. \quad (11)$$

Обратимые деформации вычисляются через напряжения согласно соотношениям (7)

$$e_{rr} = \frac{(\lambda + \mu) \sigma_{rr} - \lambda \sigma_{\varphi\varphi}}{\mu (3\lambda + 2\mu)}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{(\lambda + 2\mu) \sigma_{\varphi\varphi} - \lambda \sigma_{rr}}{2\mu (3\lambda + 2\mu)}. \quad (12)$$

Исключая обратимые деформации с помощью соотношений (12) из уравнений (11) и затем интегрируя их, получим

$$u = -\frac{r\sigma_{rr}}{4\mu} + \frac{3r}{2} \int \frac{p_{rr}}{r} dr, \quad u = \frac{1}{r^2(3\lambda + 2\mu)} \int r^2 (\sigma_{rr} + 2\sigma_{\varphi\varphi}) dr. \quad (13)$$

Вычисляя неопределенные интегралы в выражениях (13), получим окончательные зависимости

$$\begin{aligned} u &= -\frac{r\sigma_{rr}}{4\mu} + \frac{3r}{2} \int \frac{p_{rr}}{r} dr, \quad u = \frac{r\sigma_{rr}}{3\lambda + 2\mu} + \frac{c(t)}{r^2(3\lambda + 2\mu)}, \\ p_{rr} &= -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{2c(t)}{r^3(3\lambda + 2\mu)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя закон ползучести (10), получим интегро-дифференциальное уравнение для компоненты необратимых деформаций $p_{rr}(r, t) = -2p_{\varphi\varphi}$

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial t} = Bn \left(-\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left((3\lambda + 2\mu) p_{rr} + \frac{2c(t)}{r^3} \right) \right)^{n-1}, \quad (15)$$

а также выражения для компонент тензора напряжений $\sigma_{rr}(r, t)$ и $\sigma_{\varphi\varphi}(r, t)$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \int_{r_0}^r \frac{p_{rr}}{r} dr + \frac{4\mu c(t)}{3(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{rr} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left((3\lambda + 2\mu) p_{rr} + \frac{2c(t)}{r^3} \right), \\ c(t) &= -\frac{3r_0^3 R^3}{2(R^3 - r_0^3)} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} p(t) + (3\lambda + 2\mu) \int_{r_0}^R \frac{p_{rr}}{r} dr \right).\end{aligned}\quad (16)$$

Решение интегро-дифференциального уравнения (15) при начальном условии $p_{rr}(r, 0) = 0$ было получено методом конечных разностей с использованием составной формулы трапеций [5] для приближенного вычисления входящего в уравнение интеграла.

По известным значениям напряжений (16) из соотношений (12) можно найти компоненты упругих деформаций.

Из второй зависимости (6) получим распределение перемещений по сферическому слою

$$u = r(e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi}). \quad (17)$$

3. Пластическое течение. При дальнейшем возрастании функции $p(t)$ в момент времени $t = t_0$ на внутренней сферической поверхности $r = r_0$ выполнится условие пластичности (4). С этого момента времени от поверхности $r = r_0$ развивается область пластического течения $r_0 \leq r \leq m(t)$, а область $m(t) \leq r \leq R$ остается вязкоупругой областью, в которой присутствуют упругие деформации и деформации ползучести. Таким образом, граница $r = m(t)$ является движущейся границей области пластического течения.

Условие пластичности Мизеса (4) в нашем случае принимает вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \quad (18)$$

и выполняется во всей области $r_0 \leq r \leq m(t)$.

Согласно соотношениям (5)–(8), (10) и (18) в области $m(t) \leq r \leq R$ продолжает выполняться интегро-дифференциальное уравнение (15), в котором

$$c(t) = -\frac{3m^3 R^3}{2(R^3 - m^3)} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} p(t) - \frac{2k(\lambda + 2\mu)}{\mu} \ln \frac{m}{r_0} + (3\lambda + 2\mu) \int_m^R \frac{p_{rr}}{r} dr \right). \quad (19)$$

Из зависимостей (10) и (18), а также условия непрерывности напряжений на упруго-пластической границе $r = m(t)$ следует уравнение

$$\left(\frac{1}{Bn} \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} \right)^{\frac{1}{n-1}} \Big|_{r=m(t)} = 2k. \quad (20)$$

Уравнения (15) и (20) образуют систему относительно неизвестных функций $p_{rr}(r, t)$ в области $m(t) \leq r \leq R$ и $m(t)$. Данная система также была решена при помощи конечно-разностного метода.

Выражение для напряжения σ_{rr} в области $m(t) \leq r \leq R$ следует из зависимостей (5)–(8)

$$\sigma_{rr} = -\frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \int_r^R \frac{p_{rr}}{r} dr - \frac{4\mu c(t)}{3(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) - p(t). \quad (21)$$

В области пластического течения $r_0 \leq r \leq m(t)$, интегрируя уравнение равновесия (8) с учетом (18), найдем

$$\sigma_{rr} = -4k \ln \frac{r}{r_0}.$$

Соотношение для p_{rr} в области $r_0 \leq r \leq m(t)$ следует из (6)–(8) и (18)

$$p_{rr} = -\frac{2}{3\lambda + 2\mu} \left(\frac{c(t)}{r^3} + \frac{k(\lambda + 2\mu)}{\mu} \right). \quad (22)$$

В формулах (21) и (22) функция $c(t)$ имеет вид (19). Для компоненты напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ продолжает выполняться второе соотношение (16) в обеих областях. Компоненты упругих деформаций и перемещений вычисляются из зависимостей (12) и (17).

При проведении расчетов использовалась линейная функция давления $p(t) = \alpha t$ и следующие значения постоянных: $n = 3$, $Bn\mu^3/\alpha = 3.5$, $\lambda/\mu = 3.9$, $r_0/R = 0.03$, $k/\mu = 0.0026$. На рис. 1 показан график зависимости упругопластической границы m/R от безразмерного времени $\tau = \alpha t/\mu$. Распределение необратимых p_{rr} и $p_{\varphi\varphi}$ и обратимых e_{rr} и $e_{\varphi\varphi}$ деформаций по слою в момент времени $\tau = 0.03$ показано на рис. 2. Рис. 3 иллюстрирует распределение напряжений σ_{rr}/μ и $\sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ и перемещений u/R в момент времени $\tau = 0.03$.

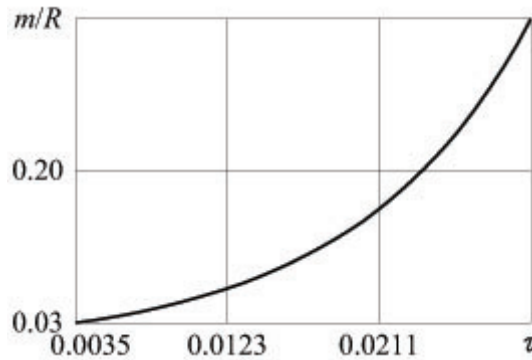


Рис. 1. График упругопластической границы в зависимости от времени

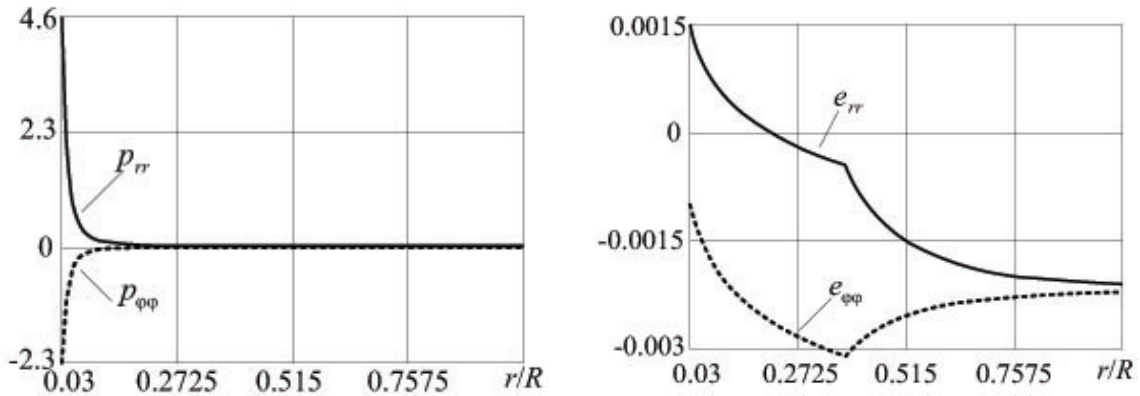


Рис. 2. Распределение необратимых и обратимых деформаций по слою

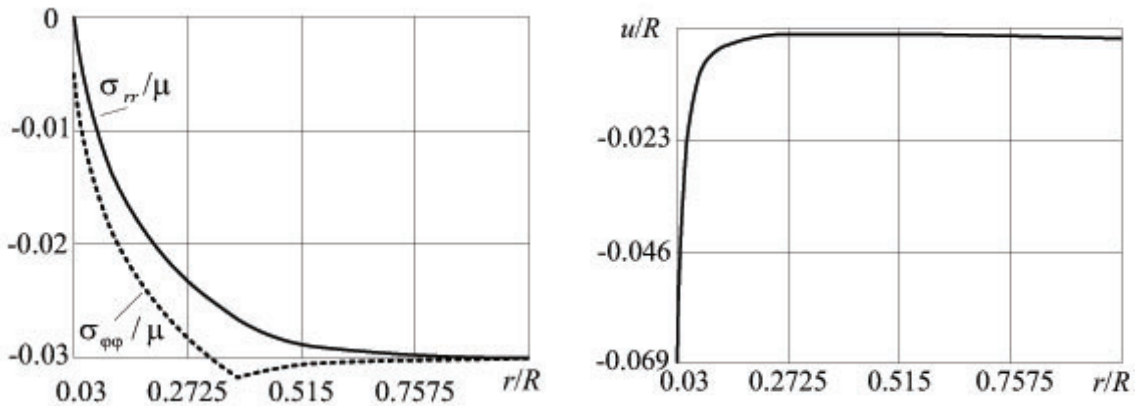


Рис. 3. Распределение напряжений и перемещений по слою

Заключение. В работе получено решение краевой задачи о пластическом течении материала сферического слоя, который предварительно накапливает необратимые деформации за счет ползучести. Расчитаны основные параметры напряженно-деформированного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Олейников А. И., Пекарш А. И. Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей. М.: Эком, 2009. 109 с.
- [2] Белых С. В., Бормотин К. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Прокудин А. Н. О больших изотермических деформациях материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 145–157.

[3] Norton F. H. The creep steel of high temperature / F. H. Norton. Y.: Mc Graw Hill, 1929. 110 p.

[4] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.

[5] Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): учеб. пособие для вузов. М.: Высш. школа, 2001. 382 с.

K. N. Galimzyanova¹, L. V. Kovtanyuk¹, G. L. Panchenko^{2,3}

**CREEP AND PLASTIC FLOW OF THE MATERIAL OF AN ELASTOPLASTIC
SPHERICAL LAYER UNDER CONDITIONS OF COMPREHENSIVE
HYDROSTATIC COMPRESSION**

¹*Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia*

²*Institute of Machinery and Metallurgy of FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

³*Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok, Russia*

Abstract. In the framework of the theory of small deformations the paper presents the solution of a boundary value problem about a deformation process of the material with elastic, viscous and plastic properties. The material is placed between two spherical surfaces and deformed under the action of uniform pressure changing with the times. Rheological effects are taken into account at the stage of deformation, which precedes the plastic flow. Reversible and irreversible deformations, stresses, and displacements are calculated. The regularity of motion of the elastoplastic boundary in the layer is established.

Keywords: elasticity, creep, plasticity.

REFERENCES

- [1] Oleinikov A. I., Pekarsh A. I. Integrated design of the manufacturing processes of integral panels. M.: Ekom, 2009. 109 p. (in Russian).
- [2] Belykh S. V., Bormotin K. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Prokudin A. N. On large isothermal deformation of materials with elastic, viscous and plastic properties // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2014. № 4 (22). P. 145–157. (in Russian).
- [3] Norton F. H. The creep steel of high temperature / F. H. Norton. Y.: Mc Graw Hill, 1929. 110 p.
- [4] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [5] Verzhbitsky V. M. Numerical methods (mathematical analysis and ordinary differential equations): manual for Universities. M.: Vyssh. shk., 2001. 382 p. (in Russian).

Galimzyanova Kseniya Nailevna

e-mail: gal-ksyusha@ya.ru, Postgraduate Student, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Kovtanyuk Larisa Valentinovna

e-mail: lk@iacp.dvo.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Panchenko Galina Leonidovna

e-mail: panchenko.21@yandex.ru, Candidate of Phys. & Math.; Senior Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy of FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia; Assoc. Professor, Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok, Russia.

Ю. В. Немировский¹, С. В. Тихонов²

ДИНАМИКА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК НА ВЯЗКО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

¹ *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

² *Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. Первоначально основы теории предельного равновесия и динамического деформирования строительных конструкций из металлов и железобетона были разработаны А. А. Гвоздевым [1]–[3] и развиты его последователями [4]–[7]. Положенная в основу расчета модель идеального жестко-пластического материала позволила достаточно простыми методами определять во многих случаях предельные нагрузки несущей способности, а также верхние (кинематически возможные) или нижние (статически допустимые) значения для широкого класса разнообразных конструкций. При этом применительно к железобетонным конструкциям не учитывалось важнейшее свойство бетона существенно по-разному сопротивляться растяжению и сжатию. Это обстоятельство было учтено в работе [8] для железобетонных балок в условиях квазистатического нагружения. В строительной практике часто возникают ситуации, когда деформирование сопровождается отпором окружающей среды [9]–[10], и возникает вопрос об оценке несущей способности конструкции и снижении уровня ее поврежденности при наличии такого отпора при воздействии динамических нагрузок. В рамках классической теории предельного равновесия А. А. Гвоздева этот вопрос не был рассмотрен, и в данной работе он будет исследован для железобетонных балок на упругом и вязкоупругом основании.

Ключевые слова: пластичность, многослойная железобетонная балка, предельное состояние, разносопротивляемость, прогиб, изгибающий момент, упругое основание, вязкое основание, нагрузки взрывного типа.

УДК: 539.374

При исследовании предельного состояния используем классическую модель идеального жесткопластического тела для всех материалов (бетона, арматуры) в соответствии с диаграммой (рис. 1).

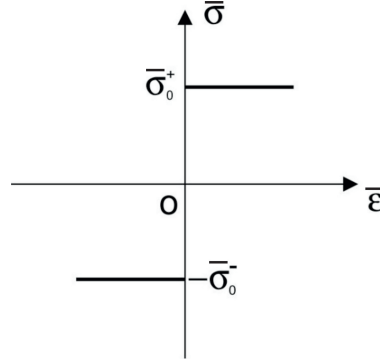


Рис. 1.

Предполагается, что все фазовые материалы будут разносопротивляющимися при растяжении и сжатии; примем для них диаграммы деформирования в виде изображенного на рис. 1, где σ_0^\pm – пределы текучести соответствующих фазовых материалов на растяжение + и сжатие –.

Будем считать, что структура армирования в слоях 1 и 3 поперечного сечения балки различна как по интенсивности, так и по свойствам фазовых материалов. Для всех рассматриваемых сечений будем считать справедливыми классические кинематические гипотезы Кирхгофа–Лява, в соответствии с которыми деформации $\bar{\epsilon}(\bar{x}, \bar{z})$ будет иметь выражения

$$\bar{\epsilon}(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{e}_0(\bar{x}) + \bar{z}\kappa(\bar{x}), \quad \bar{e}_0(\bar{x}) = \frac{d\bar{u}_0}{d\bar{x}}, \quad \kappa(\bar{x}) = -\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}, \quad (1)$$

где $\bar{u}_0(x)$ – перемещение вдоль отчетной оси \bar{x} балки, $\bar{w}(\bar{x})$ – прогиб.

Рассмотрим идеально-пластический участок балки, для которого

$$\bar{e}_0(\bar{x}) < 0, \quad \bar{e}_0 + \bar{h}_3\kappa(\bar{x}) > 0. \quad (2)$$

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В., 2017

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича, г. Новосибирск, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 17-41-210272, 15-01-00825, 16-31-00511).

Поступила 01.03.2017

Оба неравенства будут выполнены при

$$\bar{\epsilon}_0(\bar{x}) < 0, \quad \kappa(\bar{x}) > 0. \quad (3)$$

Напряженное состояние будет соответствовать рис. 2.

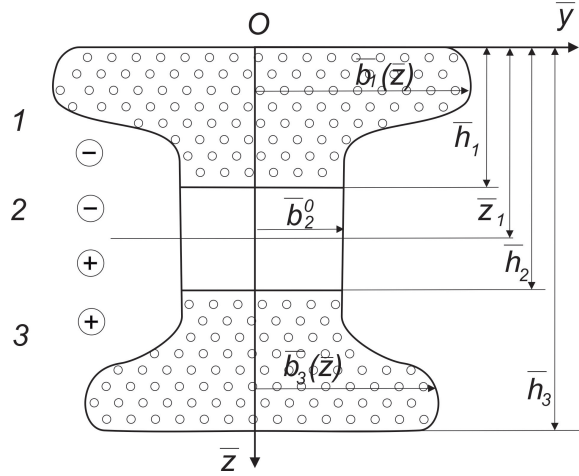


Рис. 2.

Тогда для рассматриваемого участка балки продольное усилие \bar{N} определяется равенством

$$\begin{aligned} \bar{N} = & -2\bar{\sigma}_{01} \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) d\bar{z} - 2\bar{\sigma}_{02} \int_{\bar{h}_1}^{\bar{z}_1} \bar{b}_2^0 d\bar{z} + 2\bar{\sigma}_{02}^+ \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_2} \bar{b}_2^0 d\bar{z} + \\ & + 2\bar{\sigma}_{03}^+ \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) d\bar{z} = -2\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+) \bar{z}_1 + 2\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^- \bar{h}_2 + \bar{\sigma}_{02}^+ \bar{h}_1) - \\ & - 2\bar{\sigma}_{01} \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) d\bar{z} + 2\bar{\sigma}_{03}^+ \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) d\bar{z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражение для изгибающего момента $\bar{M}(\bar{x})$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{M} = & -2\bar{\sigma}_{01} \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} - 2\bar{\sigma}_{02}^- \int_{\bar{h}_1}^{\bar{z}_1} \bar{b}_2^0 \bar{z} d\bar{z} + 2\bar{\sigma}_{02}^+ \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_2} \bar{b}_2^0 \bar{z} d\bar{z} + \\ & + 2\bar{\sigma}_{03}^+ \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} = -\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+) \bar{z}_1^2 + \bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^- \bar{h}_1^2 + \bar{\sigma}_{02}^+ \bar{h}_2^2) - \\ & - 2\bar{\sigma}_{01} \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + 2\bar{\sigma}_{03}^+ \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z}. \end{aligned} \quad (5)$$

В случае поперечного изгиба ($\bar{N} = 0$) имеем

$$\bar{z}_1 = \frac{\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^- \bar{h}_2 + \bar{\sigma}_{02}^+ \bar{h}_1) - \bar{\sigma}_{01} \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{\sigma}_{03}^+ \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) d\bar{z}}{\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+)}, \quad (6)$$

причем для \bar{z}_1 должно выполняться неравенство $\bar{h}_1 \leq \bar{z}_1 \leq \bar{h}_2$.

Подставляя в (5), получим предельный изгибающий момент

$$\begin{aligned} \bar{M}_0^+ = & \frac{\left(\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^- \bar{h}_2 + \bar{\sigma}_{02}^+ \bar{h}_1) - \bar{\sigma}_{01}^- \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{\sigma}_{03}^+ \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) d\bar{z} \right)^2}{\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+)} + \\ & + \bar{b}_2^0 \left(\bar{\sigma}_{02}^- \bar{h}_1^2 + \bar{\sigma}_{02}^+ \bar{h}_2^2 \right) - 2\bar{\sigma}_{01}^- \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + 2\bar{\sigma}_{03}^+ \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для идеально-пластического участка балки с деформированным состоянием

$$\bar{\epsilon}_0(\bar{x}) > 0, \quad \bar{\epsilon}_0 + \bar{h}_3 \quad \kappa(\bar{x}) < 0, \quad \bar{\epsilon}_0(\bar{x}) > 0, \quad \kappa(\bar{x}) < 0, \quad (8)$$

напряженное состояние будет соответствовать рис. 3.

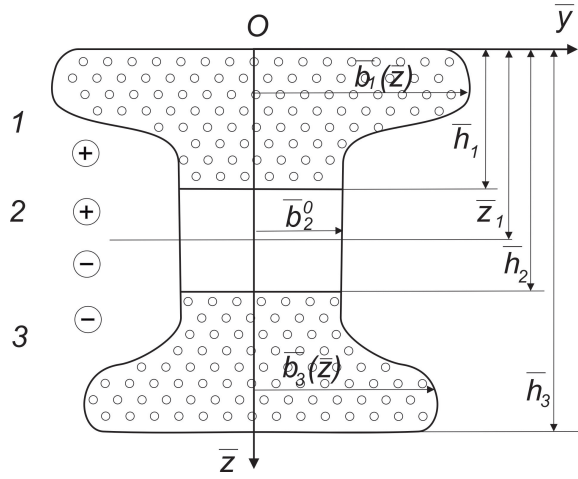


Рис. 3.

В этом случае продольное усилие \bar{N} будет равно

$$\begin{aligned} \bar{N} = & 2\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^+ + \bar{\sigma}_{02}^-) \bar{z}_1 - 2\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^+ \bar{h}_1 + \bar{\sigma}_{02}^- \bar{h}_2) + \\ & + 2\bar{\sigma}_{01}^+ \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) d\bar{z} - 2\bar{\sigma}_{03}^- \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) d\bar{z}, \end{aligned} \quad (9)$$

изгибающий момент \bar{M} равен

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^+ + \bar{\sigma}_{02}^-) \bar{z}_1^2 - \bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^+ \bar{h}_1^2 + \bar{\sigma}_{02}^- \bar{h}_2^2) + \\ & + 2\bar{\sigma}_{01}^+ \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} - 2\bar{\sigma}_{03}^- \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z}. \end{aligned} \quad (10)$$

Исключая с помощью условия $\bar{N} = 0$ величину \bar{z}_1 , аналогично получим выражение предельного изгибающего момента \bar{M}_0^-

$$\begin{aligned} \bar{M}_0^- = & \frac{\left(\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^+ \bar{h}_1 + \bar{\sigma}_{02}^- \bar{h}_2) - \bar{\sigma}_{01}^+ \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) d\bar{z} - \bar{\sigma}_{03}^- \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) d\bar{z} \right)^2}{\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^+ + \bar{\sigma}_{02}^-)} - \\ & - \bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^+ \bar{h}_1^2 + \bar{\sigma}_{02}^- \bar{h}_2^2) + 2\bar{\sigma}_{01}^+ \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} - 2\bar{\sigma}_{03}^- \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z}. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, в общем случае балка разделяется на участки, соответствующие деформированным состояниям $\bar{\epsilon}_0 < 0$, $\kappa < 0$ или $\bar{\epsilon}_0 > 0$, $\kappa > 0$ и $\bar{\epsilon}_0 = \kappa = 0$. Последние соответствуют жесткому недеформированному состоянию. Количество жестких участков и разделяющих их пластических шарниров будет зависеть от условий закрепления балок, типа распределенных и сосредоточенных нагрузок и закона сопротивления опорной среды.

Рассмотрим железобетонную балку длины l , лежащую на вязко-упругом основании и консольно закрепленную на левом краю $x = 0$ (рис. 4).

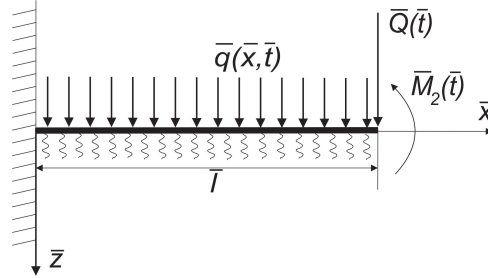


Рис. 4.

Балка нагружена распределенной поперечной нагрузкой $\bar{q}(x, t)$, собственным весом $\bar{q}_s = \bar{m}\bar{g}$, сосредоточенной нагрузкой $\bar{Q}(\bar{t})$ и моментом $\bar{M}_2(\bar{t})$ на конце $\bar{x} = \bar{l}$. Здесь \bar{m} – масса единицы длины балки. Для балки с поперечным сечением, изображенной на рис. 2, 3 масса будет определяться

$$\begin{aligned} \bar{m} = & \int_0^{\bar{h}_1} (\bar{\rho}_1^a \mu_1 + \bar{\rho}_1^c (1 - \mu_1)) \bar{b}_1(\bar{z}) d\bar{z} + 2\bar{b}_2^0 \bar{\rho}_2^c (\bar{h}_2 - \bar{h}_1) + \\ & + \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} (\bar{\rho}_3^a \mu_3 + \bar{\rho}_3^c (1 - \mu_3)) \bar{b}_3(\bar{z}) d\bar{z}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\rho_1^a, \rho_3^a, \rho_1^c, \rho_2^c, \rho_3^c$ – плотность материалов арматуры и связующих бетонов, μ_1, μ_3 – коэффициенты армирования.

Представим действующие внешние нагрузки в виде

$$\bar{q}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{q}_1 \bar{\varphi}(\bar{x}) \bar{\psi}_1(\bar{t}), \quad \bar{Q}(\bar{t}) = \bar{Q}_1 \bar{\psi}_2(\bar{t}), \quad \bar{M}_2(\bar{t}) = \bar{M}_{12} \bar{\psi}_3(\bar{t}). \quad (13)$$

Будем использовать для всех фазовых материалов железобетонной балки модель идеального разносопротивляющегося жестко-пластического материала. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{01}^{\pm} &= \mu_1 (\bar{\sigma}_{01}^{\pm})^a + (1 - \mu_1) (\bar{\sigma}_{01}^{\pm})^c, \\ \bar{\sigma}_{03}^{\pm} &= \mu_3 (\bar{\sigma}_{03}^{\pm})^a + (1 - \mu_3) (\bar{\sigma}_{03}^{\pm})^c.\end{aligned}\quad (14)$$

Для балок постоянного сечения, нагруженных равномерно-распределенной нагрузкой ($\varphi(x) = 1$) при условии $M_2(\bar{t}) \geq -\bar{M}_0^-$, движение будет происходить как жесткого стержня $\bar{e}_0 = 0$, $\bar{\kappa} = 0$ с образованием в опорном сечении $\bar{x} = 0$ пластического шарнира $\bar{M}_1 = \bar{M}_0^+$ при $\bar{M}_2(\bar{t}) \geq -\bar{M}_0^-$. Тогда для прогиба \bar{w} будем иметь выражение

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{w}_0(\bar{t}) \frac{\bar{x}}{\bar{l}}, \quad 0 \leq \bar{x} \leq \bar{l} \quad (15)$$

и, учитывая, что по условиям динамического равновесия главный момент относительно опоры $\bar{x} = 0$ всех действующих сил, включая силы инерции, должен быть равен нулю, получим уравнение

$$\bar{M}_0^+ = -\bar{M}_2(\bar{t}) + \bar{l}\bar{Q}(\bar{t}) + \int_0^{\bar{l}} \left[\bar{q}(\bar{x}, \bar{t}) + \bar{q}_s - \bar{q}_r - \bar{m}\bar{x}\bar{\theta} \right] \bar{x}d\bar{x}, \quad (16)$$

где $\bar{\theta} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} = \frac{\bar{w}_0(\bar{t})}{\bar{l}}$, $\bar{q}_r = \bar{b}_0 \bar{k}_1 \dot{\bar{w}} + \bar{b}_0 \bar{k}_2 \bar{w}$, \bar{k}_1, \bar{k}_2 – коэффициенты упругого и вязкого сопротивления основания, причем далее всюду предполагаем, что $\bar{k}_1 > 0, \bar{k}_2 > 0$, $\bar{b}_0 = \bar{b}_3(\bar{h}_3)$ – длина основания поперечного сечения балки. Точка означает частную производную по времени \bar{t} .

Из (16) получим уравнение для определения прогиба

$$\ddot{\bar{w}}_0(\bar{t}) + \frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{\bar{m}} \dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) + \frac{\bar{b}_0 \bar{k}_1}{\bar{m}} \bar{w}_0(\bar{t}) = \gamma(\bar{t}), \quad (17)$$

где

$$\gamma(\bar{t}) = \frac{3}{2\bar{m}} \bar{q}_1 \psi_1(\bar{t}) + \frac{3\bar{g}}{2} + \frac{3}{\bar{m}\bar{l}^2} (-\bar{M}_0^+ + \bar{l}\bar{Q}_1 \psi_2(\bar{t}) - \bar{M}_{12} \psi_3(\bar{t})). \quad (18)$$

Принимая значения

$$\ddot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_0) = \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_0) = \bar{w}_0(\bar{\tau}_0) = 0,$$

получим уравнение для первых предельных амплитуд рассматриваемой балки

$$\frac{3}{2\bar{m}} \bar{q}_1 \psi_1(\bar{t}) + \frac{3\bar{g}}{2} + \frac{3}{\bar{m}\bar{l}^2} (-\bar{M}_0^+ + \bar{l}\bar{Q}_1 \psi_2(\bar{t}) - \bar{M}_{12} \psi_3(\bar{t})) = 0. \quad (19)$$

Из уравнения (19) можно определить момент времени $\bar{\tau}_0$, когда нагрузки начнут превышать уровень первых предельных нагрузок. Соответственно до достижения этого момента времени $\bar{t} < \bar{\tau}_0$ балка будет жесткой. В момент времени $\bar{t} = \bar{\tau}_0$ для прогиба и скорости прогиба справедливо

$$\bar{w}_0(\bar{\tau}_0) = 0, \quad \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_0) = 0. \quad (20)$$

В момент времени $\bar{t} \geq \bar{\tau}_0$ в месте заземления балки образуется пластический шарнир, который будет сохраняться, пока нагрузки превышают предельные значения.

Тогда для $\bar{t} \geq \bar{\tau}_0$ будет справедливо уравнение (17), интегрируя его при начальных условиях (20), можем получить три решения. Вид будет зависеть от таких параметров,

как площадь основания балки, масса балки, коэффициенты вязкости и упругости основания, коэффициенты армирования, пределы текучести арматуры и бетона.

I. В случае, когда $\bar{d} = \bar{b}_0 \bar{k}_2^2 - 4\bar{m} \bar{k}_1 \bar{b}_0 > 0$,

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = \frac{\bar{m}}{\sqrt{\bar{d}}} \left(e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2 + \sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t}} \int_{\tau_0}^{\bar{t}} \gamma(z) e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2 - \sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} z} dz - e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2 - \sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t}} \int_{\tau_0}^{\bar{t}} \gamma(z) e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2 + \sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} z} dz \right), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) = \frac{1}{2\sqrt{\bar{d}}} \left((-\bar{b}_0 \bar{k}_2 + \sqrt{\bar{d}}) e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2 + \sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t}} \int_{\tau_0}^{\bar{t}} \gamma(z) e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2 + \sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} z} dz + \right. \\ \left. + (\bar{b}_0 \bar{k}_2 + \sqrt{\bar{d}}) e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2 - \sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t}} \int_{\tau_0}^{\bar{t}} \gamma(z) e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2 - \sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} z} dz \right), \end{aligned} \quad (22)$$

II. В случае, когда $\bar{d} = \bar{b}_0 \bar{k}_2^2 - 4\bar{m} \bar{k}_1 \bar{b}_0 < 0$,

$$\begin{aligned} \bar{w}_0(\bar{t}) = \frac{2\bar{m}}{\sqrt{\bar{d}}} e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} \bar{t}} \left(\sin \left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t} \right) \int_{\tau_0}^{\bar{t}} e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} z} \cos \left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} z \right) \gamma(z) dz - \right. \\ \left. - \cos \left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t} \right) \int_{\tau_0}^{\bar{t}} e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} z} \sin \left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} z \right) \gamma(z) dz \right), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) = \frac{2\bar{m}}{\sqrt{\bar{d}}} e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} \bar{t}}.$$

$$\begin{aligned} \cdot \left(\left(-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} \sin \left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t} \right) + \frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \cos \left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t} \right) \right) \int_{\tau_0}^{\bar{t}} e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} z} \cos \left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} z \right) \gamma(z) dz - \right. \\ \left. - \left(\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} \cos \left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t} \right) + \frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \sin \left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t} \right) \right) \int_{\tau_0}^{\bar{t}} e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} z} \sin \left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} z \right) \gamma(z) dz \right). \end{aligned} \quad (24)$$

III. В случае, когда $\bar{d} = \bar{b}_0 \bar{k}_2^2 - 4\bar{m} \bar{k}_1 \bar{b}_0 = 0$,

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} \bar{t}} \left(\bar{t} \int_{\tau_0}^{\bar{t}} \gamma(z) e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} z} dz - \int_{\tau_0}^{\bar{t}} \gamma(z) z e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} z} dz \right), \quad (25)$$

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) = -\frac{1}{2\bar{m}} e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} \bar{t}} \left((\bar{b}_0 \bar{k}_2 \bar{t} - 2\bar{m}) \int_{\tau_0}^{\bar{t}} \gamma(z) e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} z} dz - \bar{b}_0 \bar{k}_2 \int_{\tau_0}^{\bar{t}} \gamma(z) z e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} z} dz \right). \quad (26)$$

В каждом случае остановка движения будет происходить в момент времени $\bar{t}_{1\Phi}^*$, определяемым из уравнения

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}_{1\Phi}^*) = 0, \quad (27)$$

и максимальный остаточный прогиб определяется равенством

$$\bar{w}_0^* = \bar{w}_0(\bar{t}_{1\Phi}^*). \quad (28)$$

Если принять, что закон изменения давления на балку $\bar{q}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{q}_1 \bar{\psi}_1(\bar{t})$ меняется по закону (рис. 5),

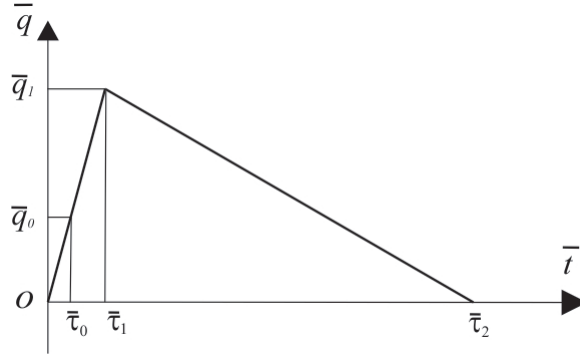


Рис. 5.

$$\bar{\psi}_1(\bar{t}) = \begin{cases} \frac{\bar{t}}{\bar{\tau}_1}, & \text{если } \bar{\tau}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_1, \\ 1 - \frac{\bar{t} - \bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}, & \text{если } \bar{\tau}_1 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_2, \end{cases} \quad (29)$$

действующий внешний момент и сосредоточенная сила при $\bar{x} = \bar{l}$ отсутствуют

$$\bar{M}_2(\bar{t}) = 0, \quad \bar{Q}(\bar{t}) = 0,$$

тогда до достижения первой предельной нагрузки \bar{q}_0 в момент времени $0 \leq \bar{t} < \bar{\tau}_0$ балка будет жесткой, причем для момента времени образования пластического шарнира и величины первой предельной нагрузки справедливо

$$\bar{\tau}_0 = \frac{2\bar{m}}{3\bar{q}_1} \left(\frac{3\bar{M}_0^+}{\bar{m}\bar{l}^2} - \frac{3\bar{g}}{2} \right) \bar{\tau}_1, \quad \bar{q}_0 = \frac{2\bar{m}}{3} \left(\frac{3\bar{M}_0^+}{\bar{m}\bar{l}^2} - \frac{3\bar{g}}{2} \right). \quad (30)$$

Из соотношений (30) и предположений $0 < \bar{\tau}_0 < \bar{\tau}_1$ следует необходимость выполнения неравенств

$$0 < \frac{3\bar{M}_0^+}{\bar{m}\bar{l}^2} - \frac{3\bar{g}}{2} < 1. \quad (31)$$

В случае возрастания нагрузки по закону (29) после достижения первой предельной нагрузки для отрезка времени $\bar{\tau}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_1$ соотношения (17), (18) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{w}_0(\bar{t}) + f_1 \dot{w}_0(\bar{t}) + f_2 w_0(\bar{t}) &= \gamma(\bar{t}), \\ \gamma(\bar{t}) &= f_4 \bar{t} + f_3, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$f_1 = \frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{\bar{m}}, \quad f_2 = \frac{\bar{b}_0 \bar{k}_1}{\bar{m}}, \quad f_3 = \frac{3\bar{g}}{2} - \frac{3}{\bar{m}\bar{l}^2} \bar{M}_0^+, \quad f_4 = \frac{3}{2\bar{m}} \frac{\bar{q}_1}{\bar{\tau}_1}.$$

Тогда для случая I, интегрируя уравнение (32) при начальных условиях (20), получим для прогиба выражение

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = g_3 e^{g_1 \bar{t}} + g_4 e^{g_2 \bar{t}} + g_5 \bar{t} + g_6, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{-f_1 + \sqrt{f_1^2 - 4f_2}}{2}, & g_2 &= \frac{-f_1 - \sqrt{f_1^2 - 4f_2}}{2}, \\ g_3 &= \frac{-f_4 f_2 - (f_4 f_2 \bar{t}_0 + f_3 f_2 - f_4 f_1) g_1}{(g_2 e^{g_2 \bar{t}_0} - e^{g_2 \bar{t}_0} g_1) f_2^2}, & g_4 &= \frac{-f_4 f_2 + (f_4 f_2 \bar{t}_0 + f_3 f_2 - f_4 f_1) g_1}{(g_2 e^{g_2 \bar{t}_0} - e^{g_2 \bar{t}_0} g_1) f_2^2}, \\ g_5 &= \frac{f_4}{f_2}, & g_6 &= \frac{f_3 f_2 - f_4 f_1}{f_2^2}. \end{aligned}$$

Для скорости прогиба справедливо

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) = g_3 g_1 e^{g_1 \bar{t}} + g_4 g_2 e^{g_2 \bar{t}} + g_5. \quad (34)$$

Обозначим через $\bar{w}_{0\tau}$ и $\bar{w}_{1\tau}$ прогиб и скорость прогиба соответственно в момент времени $\bar{t} = \bar{\tau}_1$

$$\begin{aligned} \bar{w}_0(\bar{\tau}_1) &= g_3 e^{g_1 \bar{\tau}_1} + g_4 e^{g_2 \bar{\tau}_1} + g_5 \bar{\tau}_1 + g_6 = \bar{w}_{0\tau}, \\ \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_1) &= g_3 g_1 e^{g_1 \bar{\tau}_1} + g_4 g_2 e^{g_2 \bar{\tau}_1} + g_5 = \bar{w}_{1\tau}. \end{aligned} \quad (35)$$

В диапазоне времени $\bar{\tau}_1 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$ выражения (17), (18) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{w}}_0(\bar{t}) + f_1 \dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) + f_2 \bar{w}_0(\bar{t}) &= \gamma(\bar{t}), \\ \gamma(\bar{t}) &= j_4 \bar{t} + j_3, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$j_3 = \frac{3\bar{g}}{2} - \frac{3}{\bar{m}l^2} \bar{M}_0^+ + \frac{3}{2m} \bar{q}_1 + \frac{3}{2\bar{m}} \bar{q}_1 \frac{\bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}, \quad j_4 = -\frac{3}{2\bar{m}} \frac{\bar{q}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}.$$

Решение (36) с учетом условий

$$\bar{w}_0(\bar{\tau}_1) = \bar{w}_{0\tau}, \quad \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_1) = \bar{w}_{1\tau}, \quad (37)$$

имеет вид

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = v_3 e^{v_1 \bar{t}} + v_4 e^{v_2 \bar{t}} + v_5 \bar{t} + v_6, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{-f_1 + \sqrt{f_1^2 - 4f_2}}{2}, & v_2 &= \frac{-f_1 - \sqrt{f_1^2 - 4f_2}}{2}, & v_5 &= \frac{j_4}{f_2}, & v_6 &= \frac{j_3 f_2 - j_4 f_1}{f_2^2}, \\ v_3 &= \frac{(w_{0\tau} - v_5 \bar{\tau}_1 - v_6) v_2 - w_{1\tau} + v_5}{e^{v_1 \bar{\tau}_1} (v_2 - v_1)}, & v_4 &= \frac{-(w_{0\tau} - v_5 \bar{\tau}_1 - v_6) v_1 + w_{1\tau} - v_5}{e^{v_2 \bar{\tau}_1} (v_2 - v_1)}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\bar{w}_{2\tau}$ и $\bar{w}_{3\tau}$ прогиб и скорость прогиба соответственно в момент времени $\bar{t} = \bar{\tau}_2$

$$\begin{aligned} \bar{w}_0(\bar{\tau}_2) &= v_3 e^{v_1 \bar{\tau}_2} + v_4 e^{v_2 \bar{\tau}_2} + v_5 \bar{\tau}_2 + v_6 = \bar{w}_{2\tau}, \\ \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_2) &= v_3 v_1 e^{v_1 \bar{\tau}_2} + v_4 v_2 e^{v_2 \bar{\tau}_2} + v_5 = \bar{w}_{3\tau}. \end{aligned} \quad (39)$$

После прекращения действия нагрузки при $\bar{t} > \bar{\tau}_2$ балка продолжит движение по инерции, прогиб определяется из уравнения

$$\ddot{\bar{w}}_0(\bar{t}) + f_1 \dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) + f_2 \bar{w}_0(\bar{t}) = y_1, \quad (40)$$

где

$$y_1 = \frac{3\bar{g}}{2} - \frac{3}{m\bar{l}^2} \bar{M}_0^+.$$

Решение (40) с учетом условий

$$\bar{w}_0(\bar{\tau}_2) = \bar{w}_{2\tau}, \quad \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_2) = \bar{w}_{3\tau} \quad (41)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{w}_0(\bar{t}) &= u_3 e^{u_1 \bar{t}} + u_4 e^{u_2 \bar{t}} + u_5, \\ \dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) &= u_3 u_1 e^{u_1 \bar{t}} + u_4 u_2 e^{u_2 \bar{t}}, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{-f_1 + \sqrt{f_1^2 - 4f_2}}{2}, \quad u_2 = \frac{-f_1 - \sqrt{f_1^2 - 4f_2}}{2}, \quad u_5 = \frac{y_1 f_2}{f_2^2}, \\ u_3 &= \frac{(w_{2\tau} - u_5)u_2 - w_{3\tau}}{e^{u_1 \bar{\tau}_2}(u_2 - u_1)}, \quad u_4 = \frac{-(w_{2\tau} - u_5)u_1 + w_{3\tau}}{e^{u_2 \bar{\tau}_2}(u_2 - u_1)}. \end{aligned}$$

Время остановки движения $\tau_{1\Phi}$ определяется из уравнения

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}_{1\Phi}) = 0, \quad (43)$$

откуда

$$\bar{t}_{1\Phi} = \frac{\ln\left(-\frac{u_4 u_2}{u_1 u_3}\right)}{u_1 - u_2}, \quad (44)$$

максимальный остаточный прогиб тогда будет равен

$$\bar{w}_0(\bar{t}_{1\Phi}) = u_3 e^{u_1 \bar{t}_{1\Phi}} + u_4 e^{u_2 \bar{t}_{1\Phi}} + u_5. \quad (45)$$

Данное решение будет справедливо на всей длине балки $0 \leq \bar{x} \leq \bar{l}$, если изгибающий момент $\bar{M}(\bar{x}, t)$ будет находиться в пределах

$$-\bar{M}_0^- \leq \bar{M}(\bar{x}, t) \leq \bar{M}_0^+. \quad (46)$$

При $0 \leq \bar{t} < \bar{\tau}_0$ балка остается жесткой, тогда уравнение для определения момента имеет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = \bar{q}(\bar{x}, \bar{t}) + \bar{q}_s, \quad (47)$$

проинтегрировав которое при граничных условиях

$$\bar{M}(\bar{l}, \bar{t}) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \bar{M}(\bar{l}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad (48)$$

получим уравнение для момента, справедливое для $0 \leq \bar{t} < \bar{\tau}_0$

$$\bar{M}(\bar{x}) = \frac{\bar{q}_1 \bar{t} + \bar{m} g \bar{\tau}_1}{2 \bar{\tau}_1} \bar{x}^2 - \frac{\bar{q}_1 \bar{t} \bar{l} + \bar{m} g \bar{l} \bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_1} \bar{x} - \frac{3(\bar{q}_1 \bar{t} + \bar{m} g \bar{\tau}_1) \bar{l}^2}{2 \bar{\tau}_1}. \quad (49)$$

Уравнение изгиба балки в случае появления пластического шарнира в месте защемления балки имеет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = \bar{q}(\bar{x}, \bar{t}) + \bar{q}_s - \frac{\bar{m} x \ddot{w}_0(\bar{t})}{\bar{l}} - \frac{\bar{k}_1 \bar{b}_0 x \dot{w}_0(\bar{t})}{\bar{l}} - \frac{\bar{k}_2 \bar{b}_0 x \dot{w}_0(\bar{t})}{\bar{l}}, \quad (50)$$

подставив в (50) выражение для прогиба (33) получим

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = \bar{x} \left(g_7 e^{g_1 \bar{t}} + g_8 e^{g_2 \bar{t}} + g_9 \bar{t} + g_{10} \right) + g_{11} \bar{t} + g_{12}, \quad (51)$$

где

$$g_7 = -\frac{\bar{m} g_3 g_1^2 + k_1 g_3 \bar{b}_0 + k_2 g_1 g_3 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad g_8 = -\frac{\bar{m} g_4 g_2^2 + k_1 g_4 \bar{b}_0 + k_2 g_2 g_4 \bar{b}_0}{\bar{l}},$$

$$g_9 = -\frac{k_1 g_5 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad g_{10} = -\frac{k_1 g_6 \bar{b}_0}{\bar{l}} - \frac{k_2 g_5 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad g_{11} = \frac{\bar{q}_1}{\bar{\tau}_1}, \quad g_{12} = \bar{m} g.$$

Интегрируя его по \bar{x} при условиях (33) получим выражение для момента, справедливого при $\bar{\tau}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_1$:

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \bar{x}^3 \left(\frac{g_7}{6} e^{g_1 \bar{t}} + \frac{g_8}{6} e^{g_2 \bar{t}} + \frac{g_9}{6} \bar{t} + \frac{g_{10}}{6} \right) + \\ & + \bar{x}^2 \left(\frac{g_{11} \bar{t}}{2} + \frac{g_{12}}{2} \right) + \bar{x} \left(-\frac{\bar{l}^2 g_7}{2} e^{g_1 \bar{t}} - \frac{\bar{l}^2 g_8}{2} e^{g_2 \bar{t}} - \left(\frac{\bar{l}^2}{2} g_9 + \bar{l} g_{11} \right) \bar{t} - \frac{\bar{l}^2}{2} g_{10} - \bar{l} g_{12} \right) + \\ & + \frac{\bar{l}^3}{3} g_7 e^{g_1 \bar{t}} + \frac{\bar{l}^3}{3} g_8 e^{g_2 \bar{t}} + \left(\frac{\bar{l}^3}{3} g_9 + \frac{\bar{l}^2}{2} g_{11} \right) \bar{t} + \bar{l}^2 \left(\frac{\bar{l} g_{10}}{3} + \frac{g_{12}}{2} \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Для отрезка времени $\bar{\tau}_1 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$, приняв что прогиб определяется соотношениями (38), получим выражение для момента

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = \bar{x} \left(v_7 e^{v_1 \bar{t}} + v_8 e^{v_2 \bar{t}} + v_9 \bar{t} + v_{10} \right) + v_{11} \bar{t} + v_{12}, \quad (53)$$

где

$$v_7 = -\frac{\bar{m} v_3 v_1^2 + k_1 v_3 \bar{b}_0 + k_2 v_1 v_3 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad v_8 = -\frac{\bar{m} v_4 v_2^2 + k_1 v_4 \bar{b}_0 + k_2 v_2 v_4 \bar{b}_0}{\bar{l}},$$

$$v_9 = -\frac{k_1 v_5 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad v_{10} = -\frac{k_1 v_6 \bar{b}_0}{\bar{l}} - \frac{k_2 v_5 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad v_{11} = -\frac{\bar{q}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}, \quad v_{12} = \bar{m} g + \bar{q}_1 + \frac{\bar{q}_1 \bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}.$$

Интегрируя (53) получим выражение для момента, справедливого при $\bar{\tau}_1 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$:

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \bar{x}^3 \left(\frac{v_7}{6} e^{v_1 \bar{t}} + \frac{v_8}{6} e^{v_2 \bar{t}} + \frac{v_9}{6} \bar{t} + \frac{v_{10}}{6} \right) + \\ & + \bar{x}^2 \left(\frac{v_{11}}{2} \bar{t} + \frac{v_{12}}{2} \right) + \bar{x} \left(-\frac{\bar{l}^2 v_7}{2} e^{v_1 \bar{t}} - \frac{\bar{l}^2 v_8}{2} e^{v_2 \bar{t}} - \left(\frac{\bar{l}^2}{2} v_9 + \bar{l} v_{11} \right) \bar{t} - \frac{\bar{l}^2}{2} v_{10} - \bar{l} v_{12} \right) + \\ & + \frac{\bar{l}^3}{3} v_7 e^{v_1 \bar{t}} + \frac{\bar{l}^3}{3} v_8 e^{v_2 \bar{t}} + \left(\frac{\bar{l}^3}{3} v_9 + \frac{\bar{l}^2}{2} v_{11} \right) \bar{t} + \bar{l}^2 \left(\frac{\bar{l} v_{10}}{3} + \frac{v_{12}}{2} \right). \end{aligned} \quad (54)$$

С момента прекращения действия нагрузки и до остановки движения при $\bar{\tau}_2 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_{1\Phi}$ дифференциальное уравнение для определения момента имеет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = u_6 + \bar{x}(u_7 e^{u_1 \bar{t}} + u_8 e^{u_2 \bar{t}} + u_9), \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} u_6 = \bar{m}g, \quad u_7 = -\frac{\bar{m}}{\bar{l}} u_3 u_1^2 - \frac{\bar{k}_1 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_3 - \frac{\bar{k}_2 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_3 u_1, \quad u_8 = -\frac{\bar{m}}{\bar{l}} u_4 u_2^2 - \frac{\bar{k}_1 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_4 - \frac{\bar{k}_2 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_4 u_2, \\ u_9 = -\frac{\bar{k}_1 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_5. \end{aligned}$$

Откуда получим выражение для момента

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \frac{\bar{x}^3}{6} (u_7 e^{u_1 \bar{t}} + u_8 e^{u_2 \bar{t}} + u_9 u_5) + \frac{\bar{x}^2}{2} u_6 + \\ & + \frac{\bar{x}}{2} \left(-\bar{l}^2 u_7 e^{u_1 \bar{t}} - \bar{l}^2 u_8 e^{u_2 \bar{t}} - \bar{l}^2 u_9 u_5 - 2u_6 \bar{l} \right) + \\ & + \frac{2}{3} u_7 \bar{l}^3 e^{u_1 \bar{t}} + \frac{2}{3} u_8 \bar{l}^3 e^{u_2 \bar{t}} + \frac{2}{3} \bar{l}^3 u_9 u_5 + \frac{1}{2} \bar{l}^2 u_6. \end{aligned} \quad (56)$$

Для случая II, интегрируя уравнение (32) при начальных условиях (20), получим для прогиба выражение, справедливое при $\bar{\tau}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_1$:

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = e^{g_1 \bar{t}} (g_5 \cos(g_2 \bar{t}) + g_6 \sin(g_2 \bar{t})) + g_3 \bar{t} + g_4, \quad (57)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 = \frac{-f_1}{2}, \quad g_2 = \frac{\sqrt{4f_2 - f_1^2}}{2}, \quad g_3 = \frac{f_4}{f_2}, \quad g_4 = \frac{f_3 f_2 - f_4 f_1}{f_2^2}, \\ g_5 = \frac{(-g_3 g_2 \bar{\tau}_0 - g_4 g_2) \cos(g_2 \bar{\tau}_0) + (-g_3 g_1 \bar{\tau}_0 - g_4 g_1 + g_3) \sin(g_2 \bar{\tau}_0)}{\cos(2g_2 \bar{\tau}_0)} e^{-g_1 \bar{\tau}_0}, \\ g_6 = \frac{(-g_3 + g_3 g_1 \bar{\tau}_0 + g_4 g_1) \cos(g_2 \bar{\tau}_0) + (-g_2 g_3 \bar{\tau}_0 - g_2 g_4) \sin(g_2 \bar{\tau}_0)}{\cos(2g_2 \bar{\tau}_0)} e^{-g_1 \bar{\tau}_0}. \end{aligned}$$

Для скорости прогиба справедливо

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) = ((g_5 g_1 + g_6 g_2) \cos(g_2 \bar{t}) + (g_6 g_1 - g_5 g_2) \sin(g_2 \bar{t})) e^{g_1 \bar{t}} + g_3. \quad (58)$$

Обозначим через $\bar{w}_{0\tau}$ и $\bar{w}_{1\tau}$ прогиб и скорость прогиба соответственно в момент времени $\bar{t} = \bar{\tau}_1$

$$\begin{aligned}\bar{w}_0(\bar{\tau}_1) &= e^{g_1\bar{\tau}_1}(g_5 \cos(g_2\bar{\tau}_1) + g_6 \sin(g_2\bar{\tau}_1)) + g_3\bar{\tau}_1 + g_4 = \bar{w}_{0\tau}, \\ \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_1) &= ((g_5g_1 + g_6g_2) \cos(g_2\bar{\tau}_1) + (g_6g_1 - g_5g_2) \sin(g_2\bar{\tau}_1))e^{g_1\bar{\tau}_1} + g_3 = \bar{w}_{1\tau}.\end{aligned}\quad (59)$$

Решение (36) с учетом условий (37), справедливое при $\bar{\tau}_1 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$, имеет вид

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = e^{v_1\bar{t}}(v_5 \cos(v_2\bar{t}) + v_6 \sin(v_2\bar{t})) + v_3\bar{t} + v_4, \quad (60)$$

где

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{-f_1}{2}, \quad v_2 = \frac{\sqrt{4f_2 - f_1^2}}{2}, \quad v_3 = \frac{j_4}{f_2}, \quad v_4 = \frac{j_3f_2 - j_4f_1}{f_2^2}, \\ v_5 &= \frac{(-v_3v_2\bar{\tau}_1 - v_4v_2 + v_2\bar{w}_{0\tau}) \cos(v_2\bar{\tau}_1) + (-v_3v_1\bar{\tau}_1 - v_4v_1 + v_3 - \bar{w}_{1\tau} + v_1\bar{w}_{0\tau}) \sin(v_2\bar{\tau}_1)}{\cos(2v_2\bar{\tau}_1)e^{v_1\bar{\tau}_1}}, \\ v_6 &= \frac{(\bar{w}_{1\tau} - v_1\bar{w}_{0\tau} - v_3 + v_3v_1\bar{\tau}_1 + v_4v_1) \cos(v_2\bar{\tau}_1) + (-v_2v_3\bar{\tau}_1 - v_2v_4 + v_2\bar{w}_{0\tau}) \sin(v_2\bar{\tau}_1)}{\cos(2v_2\bar{\tau}_1)e^{v_1\bar{\tau}_1}}.\end{aligned}$$

Для скорости прогиба справедливо

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) = ((v_5v_1 + v_6v_2) \cos(v_2\bar{t}) + (v_6v_1 - v_5v_2) \sin(v_2\bar{t}))e^{v_1\bar{t}} + v_3. \quad (61)$$

Обозначим через $\bar{w}_{2\tau}$ и $\bar{w}_{3\tau}$ прогиб и скорость прогиба соответственно в момент времени $\bar{t} = \bar{\tau}_2$

$$\begin{aligned}\bar{w}_0(\bar{\tau}_2) &= e^{v_1\bar{\tau}_2}(v_5 \cos(v_2\bar{\tau}_2) + v_6 \sin(v_2\bar{\tau}_2)) + v_3\bar{\tau}_2 + v_4 = \bar{w}_{2\tau}, \\ \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_2) &= ((v_5v_1 + v_6v_2) \cos(v_2\bar{\tau}_2) + (v_6v_1 - v_5v_2) \sin(v_2\bar{\tau}_2))e^{v_1\bar{\tau}_2} + v_3 = \bar{w}_{3\tau}.\end{aligned}\quad (62)$$

Решение (40) с учетом условий (41), справедливое при $\bar{\tau}_2 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_\Phi$, имеет вид

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = e^{u_1\bar{t}}(u_4 \cos(u_2\bar{t}) + u_5 \sin(u_2\bar{t})) + u_3, \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{-f_1}{2}, \quad u_2 = \frac{\sqrt{4f_2 - f_1^2}}{2}, \quad u_3 = \frac{y_1}{f_2}, \\ u_4 &= \frac{(-u_3u_2 + u_2\bar{w}_{0\tau}) \cos(u_2\bar{\tau}_2) + (-u_3u_1 - \bar{w}_{1\tau} + u_1\bar{w}_{0\tau}) \sin(u_2\bar{\tau}_2)}{\cos(2u_2\bar{\tau}_2)} e^{-u_1\bar{\tau}_2}, \\ u_5 &= \frac{(\bar{w}_{1\tau} - u_1\bar{w}_{0\tau} + u_3u_1) \cos(u_2\bar{\tau}_2) + (-u_2u_3 + u_2\bar{w}_{0\tau}) \sin(u_2\bar{\tau}_2)}{\cos(2u_2\bar{\tau}_2)} e^{-u_1\bar{\tau}_2}.\end{aligned}$$

Время остановки движения $\tau_{1\Phi}$ будет равно

$$\bar{t}_{1\Phi} = \frac{1}{u_2} \arctan \left(\frac{u_1u_4 + u_5u_2}{u_4u_2 - u_5u_1} \right), \quad (64)$$

максимальный остаточный прогиб будет равен

$$\bar{w}_0(\bar{t}_{1\Phi}) = e^{u_1\bar{t}_{1\Phi}}(u_4 \cos(u_2\bar{t}_{1\Phi}) + u_5 \sin(u_2\bar{t}_{1\Phi})) + u_3. \quad (65)$$

Изгибающий момент для отрезка времени $\bar{\tau}_0 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_1$ определим из уравнения

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = \bar{x} \left(e^{g_1 \bar{t}} (g_7 \cos(g_2 \bar{t}) + g_8 \sin(g_2 \bar{t})) + g_9 \bar{t} + g_{10} \right) + g_{11} \bar{t} + g_{12}, \quad (66)$$

где

$$\begin{aligned} g_7 &= \frac{-\bar{m}(g_5 g_1^2 + 2g_1 g_2 g_6 - g_5 g_2^2) - \bar{k}_1 \bar{b}_0 g_5 - \bar{k}_2 \bar{b}_0 (g_5 g_1 + g_6 g_2)}{\bar{l}}, \\ g_8 &= \frac{-\bar{m}(g_6 g_1^2 - 2g_5 g_1 g_2 - g_6 g_2^2) - \bar{k}_1 \bar{b}_0 g_6 - \bar{k}_2 \bar{b}_0 (g_6 g_1 - g_5 g_2)}{\bar{l}}, \\ g_9 &= -\frac{k_1 g_3 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad g_{10} = -\frac{k_1 g_4 \bar{b}_0}{\bar{l}} - \frac{k_2 g_3 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad g_{11} = \frac{\bar{q}_1}{\bar{\tau}_1}, \quad g_{12} = \bar{m} \bar{g}. \end{aligned}$$

Интегрируя его по \bar{x} , получим выражение для момента, справедливое при $\bar{\tau}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_1$:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \frac{\bar{x}^3}{6} \left(e^{g_1 \bar{t}} (g_7 \cos(g_2 \bar{t}) + g_8 \sin(g_2 \bar{t})) + g_9 \bar{t} + g_{10} \right) + \frac{\bar{x}^2}{2} (g_{11} \bar{t} + g_{12}) - \\ &- \frac{\bar{x}}{2} \left(e^{g_1 \bar{t}} (g_7 \bar{l}^2 \cos(g_2 \bar{t}) + g_8 \bar{l}^2 \sin(g_2 \bar{t})) + (g_9 \bar{l}^2 + 2g_{11} \bar{l}) \bar{t} + g_{10} \bar{l}^2 + 2g_{12} \bar{l} \right) + \\ &+ \frac{\bar{l}^3}{3} \left(e^{g_1 \bar{t}} (g_7 \cos(g_2 \bar{t}) + g_8 \sin(g_2 \bar{t})) + g_9 \bar{t} + g_{10} \right) + \frac{\bar{l}^2}{2} (g_{11} \bar{t} + g_{12}). \end{aligned} \quad (67)$$

Изгибающий момент для отрезка времени $\bar{\tau}_1 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$ определим из уравнения

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = \bar{x} \left(e^{v_1 \bar{t}} (v_7 \cos(v_2 \bar{t}) + v_8 \sin(v_2 \bar{t})) + v_9 \bar{t} + v_{10} \right) + v_{11} \bar{t} + v_{12}, \quad (68)$$

где

$$\begin{aligned} v_7 &= \frac{-\bar{m}(v_5 v_1^2 + 2v_1 v_2 v_6 - v_5 v_2^2) - \bar{k}_1 \bar{b}_0 v_5 - \bar{k}_2 \bar{b}_0 (v_5 v_1 + v_6 v_2)}{\bar{l}}, \\ v_8 &= \frac{-\bar{m}(v_6 v_1^2 - 2v_5 v_1 v_2 - v_6 v_2^2) - \bar{k}_1 \bar{b}_0 v_6 - \bar{k}_2 \bar{b}_0 (v_6 v_1 - v_5 v_2)}{\bar{l}}, \\ v_9 &= -\frac{k_1 v_3 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad v_{10} = -\frac{k_1 v_4 \bar{b}_0}{\bar{l}} - \frac{k_2 v_3 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad v_{11} = -\frac{\bar{q}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}, \quad v_{12} = \bar{m} \bar{g} + \bar{q}_1 + \frac{\bar{q}_1 \bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}. \end{aligned}$$

Интегрируя его по \bar{x} получим выражение для момента, справедливое при $\bar{\tau}_1 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \frac{\bar{x}^3}{6} \left(e^{v_1 \bar{t}} (v_7 \cos(v_2 \bar{t}) + v_8 \sin(v_2 \bar{t})) + v_9 \bar{t} + v_{10} \right) + \frac{\bar{x}^2}{2} (v_{11} \bar{t} + v_{12}) - \\ &- \frac{\bar{x}}{2} \left(e^{v_1 \bar{t}} (v_7 \bar{l}^2 \cos(v_2 \bar{t}) + v_8 \bar{l}^2 \sin(v_2 \bar{t})) + (v_9 \bar{l}^2 + 2v_{11} \bar{l}) \bar{t} + v_{10} \bar{l}^2 + 2v_{12} \bar{l} \right) + \\ &+ \frac{\bar{l}^3}{3} \left(e^{v_1 \bar{t}} (v_7 \cos(v_2 \bar{t}) + v_8 \sin(v_2 \bar{t})) + v_9 \bar{t} + v_{10} \right) + \frac{\bar{l}^2}{2} (v_{11} \bar{t} + v_{12}). \end{aligned} \quad (69)$$

С момента прекращения действия нагрузки и до остановки движения при $\bar{\tau}_2 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_{1\phi}$ дифференциальное уравнение для определения момента имеет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = \bar{x} \left(e^{u_1 \bar{t}} (u_7 \cos(u_2 \bar{t}) + u_8 \sin(u_2 \bar{t})) + u_9 \right) + u_{10}, \quad (70)$$

где

$$u_7 = -\frac{\bar{m}}{\bar{l}} u_3 u_1^2 - \frac{\bar{k}_1 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_3 - \frac{\bar{k}_2 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_3 u_1, \quad u_8 = -\frac{\bar{m}}{\bar{l}} u_4 u_2^2 - \frac{\bar{k}_1 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_4 - \frac{\bar{k}_2 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_4 u_2, \\ u_9 = -\frac{\bar{k}_1 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_5, \quad u_{10} = \bar{m} \bar{g}.$$

Откуда получим выражение для момента

$$\bar{M} = \frac{\bar{x}^3}{6} \left(e^{u_1 \bar{t}} (u_7 \cos(u_2 \bar{t}) + u_8 \sin(u_2 \bar{t})) + u_9 \right) + \frac{\bar{x}^2}{2} u_{10} - \\ - \frac{\bar{x}}{2} \left(e^{u_1 \bar{t}} (u_7 \bar{l}^2 \cos(g_2 \bar{t}) + u_8 \bar{l}^2 \sin(g_2 \bar{t})) + u_9 \bar{l}^2 + 2u_{10} \bar{l} \right) + \\ + \frac{\bar{l}^3}{3} \left(e^{u_1 \bar{t}} (u_7 \cos(u_2 \bar{t}) + u_8 \sin(u_2 \bar{t})) + u_9 \right) + \frac{\bar{l}^2}{2} u_{10}. \quad (71)$$

Для случая III, интегрируя уравнение (32) при начальных условиях (20), получим для прогиба выражение, справедливое при $\bar{\tau}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_1$:

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = g_1 e^{-\frac{f_1}{2} \bar{t}} + g_2 \bar{t} e^{-\frac{f_1}{2} \bar{t}} + g_3 \bar{t} + g_4, \quad (72)$$

где

$$g_1 = e^{\frac{f_1}{2} \bar{\tau}_0} \left(-\frac{f_3 f_2 - f_4 f_1}{f_2^2} + \frac{f_4 f_1}{2 f_2} \bar{\tau}_0^2 + \frac{f_3 f_2 f_1 - f_4 f_1^2}{2 f_2^2} \bar{\tau}_0 \right), \\ g_2 = e^{\frac{f_1}{2} \bar{\tau}_0} \left(-\frac{f_4}{f_2} - \frac{f_1}{2} \left(\frac{f_4}{f_2} \bar{\tau}_0 + \frac{f_3 f_2 - f_4 f_1}{f_2^2} \right) \right), \\ g_3 = \frac{f_4}{f_2}, \quad g_4 = \frac{f_3 f_2 - f_4 f_1}{f_2^2}.$$

Для скорости прогиба справедливо

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) = \left(-\frac{f_1}{2} g_1 + g_2 \right) e^{-\frac{f_1}{2} \bar{t}} - \frac{f_1}{2} g_2 \bar{t} e^{-\frac{f_1}{2} \bar{t}} + g_3. \quad (73)$$

Обозначим через $\bar{w}_{0\tau}$ и $\bar{w}_{1\tau}$ прогиб и скорость прогиба соответственно в момент времени $\bar{t} = \bar{\tau}_1$

$$\bar{w}_0(\bar{\tau}_1) = g_1 e^{-\frac{f_1}{2} \bar{\tau}_1} + g_2 \bar{\tau}_1 e^{-\frac{f_1}{2} \bar{\tau}_1} + g_3 \bar{\tau}_1 + g_4 = \bar{w}_{0\tau}, \\ \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_1) = \left(-\frac{f_1}{2} g_1 + g_2 \right) e^{-\frac{f_1}{2} \bar{\tau}_1} - \frac{f_1}{2} g_2 \bar{\tau}_1 e^{-\frac{f_1}{2} \bar{\tau}_1} + g_3 = \bar{w}_{1\tau}. \quad (74)$$

Решение (36) с учетом условий (37), справедливое при $\bar{\tau}_1 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$, имеет вид

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = v_1 e^{-\frac{f_1}{2} \bar{t}} + v_2 \bar{t} e^{-\frac{f_1}{2} \bar{t}} + v_3 \bar{t} + v_4, \quad (75)$$

где

$$\begin{aligned}
v_1 &= e^{\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_0} \left(\bar{w}_{0\tau} - \frac{f_1}{2}\bar{\tau}_0\bar{w}_{0\tau} - \frac{j_3f_2 - j_4f_1}{f_2^2} + \frac{j_4f_1}{2f_2}\bar{\tau}_0^2 - \bar{\tau}_0\bar{w}_{1\tau} + \frac{j_3f_2f_1 - j_4f_1^2}{2f_2^2}\bar{\tau}_0 \right), \\
v_2 &= e^{\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_0} \left(\bar{w}_{1\tau} - \frac{j_4}{f_2} - \frac{f_1}{2} \left(\frac{j_4}{f_2}\bar{\tau}_0 + \frac{j_3f_2 - j_4f_1}{f_2^2} - \bar{w}_{0\tau} \right) \right), \\
v_3 &= \frac{j_4}{f_2}, \quad v_4 = \frac{j_3f_2 - j_4f_1}{f_2^2}.
\end{aligned}$$

Для скорости прогиба справедливо

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) = \left(-\frac{f_1}{2}v_1 + v_2 \right) e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} - v_2\frac{f_1}{2}\bar{t}e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} + v_3. \quad (76)$$

Обозначим через $\bar{w}_{2\tau}$ и $\bar{w}_{3\tau}$ прогиб и скорость прогиба соответственно в момент времени $\bar{t} = \bar{\tau}_2$

$$\begin{aligned}
\bar{w}_0(\bar{\tau}_2) &= v_1e^{-\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_2} + v_2\bar{\tau}_2e^{-\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_2} + v_3\bar{\tau}_2 + v_4 = \bar{w}_{2\tau}, \\
\dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_2) &= \left(-\frac{f_1}{2}v_1 + v_2 \right) e^{-\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_2} - v_2\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_2e^{-\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_2} + v_3 = \bar{w}_{3\tau}.
\end{aligned} \quad (77)$$

Решение (40) с учетом условий (41), справедливое при $\bar{\tau}_2 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_\Phi$, имеет вид

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = u_1e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} + u_2\bar{t}e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} + u_3, \quad (78)$$

где

$$\begin{aligned}
u_1 &= e^{\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_0} \left(\bar{w}_{2\tau} - \frac{f_1}{2}\bar{\tau}_0\bar{w}_{2\tau} - \frac{-j_3f_1}{f_2^2} + \frac{j_3f_1}{2f_2}\bar{\tau}_0^2 - \bar{\tau}_0\bar{w}_{3\tau} + \frac{j_3f_2f_1 - j_4f_1^2}{2f_2^2}\bar{\tau}_0 \right), \\
u_2 &= e^{\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_0} \left(\bar{w}_{3\tau} - \frac{j_3}{f_2} - \frac{f_1}{2} \left(\frac{j_3}{f_2}\bar{\tau}_0 + \frac{-j_3f_1}{f_2^2} - \bar{w}_{2\tau} \right) \right), \quad u_3 = \frac{y_1}{f_2}.
\end{aligned}$$

Время остановки движения $\tau_{1\Phi}$ будет равно

$$\bar{t}_{1\Phi} = \frac{2u_2 - f_1u_1}{f_1u_2}, \quad (79)$$

максимальный остаточный прогиб будет равен

$$\bar{w}_0(\bar{t}_{1\Phi}) = u_1e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}_{1\Phi}} + u_2\bar{t}_{1\Phi}e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}_{1\Phi}} + u_3. \quad (80)$$

Изгибающий момент для отрезка времени $\bar{\tau}_0 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_1$ определим из уравнения

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = \bar{x} \left(e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} (g_5 + g_6\bar{t}) + g_7\bar{t} + g_8 \right) + g_9\bar{t} + g_{10}, \quad (81)$$

где

$$g_5 = \frac{-\bar{m}f_1^2g_1 + 4\bar{m}f_1g_2 - 4\bar{k}_1b_0g_1 + 2\bar{k}_2b_0f_1g_1 - 4\bar{k}_2b_0g_2}{4\bar{l}},$$

$$g_6 = \frac{-\bar{m}f_1^2g_2 - 4\bar{k}_1b_0g_2 + 4\bar{k}_2b_0f_1g_2}{4\bar{l}},$$

$$g_7 = -\frac{\bar{k}_1b_0g_3}{\bar{l}}, \quad g_8 = -\frac{\bar{k}_1b_0g_4 + \bar{k}_2b_0g_3}{\bar{l}}, \quad g_9 = \frac{\bar{q}_1}{\bar{\tau}_0}, \quad g_{10} = \bar{m}\bar{g}.$$

Интегрируя его по \bar{x} , получим выражение для момента, справедливого при $\bar{\tau}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_1$:

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \frac{\bar{x}^3}{6} \left(e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} (g_5 + g_6\bar{t}) + g_7\bar{t} + g_8 \right) + \\ & + \frac{\bar{x}^2}{2} (g_9\bar{t} + g_{10}) - \frac{\bar{x}}{2} \left(e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} (g_5\bar{l}^2 + g_6\bar{l}^2\bar{t}) + (g_7\bar{l}^2 + 2g_9\bar{l})\bar{t} + g_8\bar{l}^2 + 2g_{10}\bar{l} \right) + \\ & + e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} \left(\frac{1}{3}\bar{l}^3 g_5 + \frac{1}{3}\bar{l}^3 g_6\bar{t} \right) + \left(\frac{1}{3}\bar{l}^3 g_7 + \frac{1}{2}\bar{l}^2 g_9 \right) \bar{t} + \frac{1}{3}\bar{l}^3 g_8 + \frac{1}{2}\bar{l}^2 g_{10}. \end{aligned} \quad (82)$$

Изгибающий момент для отрезка времени $\bar{\tau}_1 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$ определим из уравнения

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{v}^2} = \bar{x} \left(e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} (v_5 + v_6\bar{t}) + v_7\bar{t} + v_8 \right) + v_9\bar{t} + v_{10}, \quad (83)$$

где

$$v_5 = \frac{-\bar{m}f_1^2v_1 + 4\bar{m}f_1v_2 - 4\bar{k}_1b_0v_1 + 2\bar{k}_2b_0f_1v_1 - 4\bar{k}_2b_0v_2}{4\bar{l}},$$

$$v_6 = \frac{-\bar{m}f_1^2v_2 - 4\bar{k}_1b_0v_2 + 4\bar{k}_2b_0f_1v_2}{4\bar{l}},$$

$$v_7 = -\frac{\bar{k}_1b_0v_3}{\bar{l}}, \quad v_8 = -\frac{\bar{k}_1b_0v_4 + \bar{k}_2b_0v_3}{\bar{l}}, \quad v_9 = -\frac{\bar{q}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}, \quad v_{10} = \bar{m}\bar{g} + \bar{q}_1 + \frac{\bar{q}_1\bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}.$$

Интегрируя его по \bar{x} , получим выражение для момента, справедливого при $\bar{\tau}_1 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$:

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \frac{\bar{x}^3}{6} \left(e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} (v_5 + v_6\bar{t}) + v_7\bar{t} + v_8 \right) + \\ & + \frac{\bar{x}^2}{2} (v_9\bar{t} + v_{10}) - \frac{\bar{x}}{2} \left(e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} (v_5\bar{l}^2 + v_6\bar{l}^2\bar{t}) + (v_7\bar{l}^2 + 2v_9\bar{l})\bar{t} + v_8\bar{l}^2 + 2v_{10}\bar{l} \right) + \\ & + e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} \left(\frac{1}{3}\bar{l}^3 v_5 + \frac{1}{3}\bar{l}^3 v_6\bar{t} \right) + \left(\frac{1}{3}\bar{l}^3 v_7 + \frac{1}{2}\bar{l}^2 v_9 \right) \bar{t} + \frac{1}{3}\bar{l}^3 v_8 + \frac{1}{2}\bar{l}^2 v_{10}. \end{aligned} \quad (84)$$

С момента прекращения действия нагрузки и до остановки движения при $\bar{\tau}_2 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_{1\Phi}$ дифференциальное уравнение для определения момента имеет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{v}^2} = \bar{x} \left(e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} u_5 + u_6 \right) + u_7, \quad (85)$$

где

$$u_5 = \frac{-\bar{m}f_1^2v_1 + 4\bar{m}f_1v_2 - 4\bar{k}_1b_0v_1 + 2\bar{k}_2b_0f_1v_1 - 4\bar{k}_2b_0v_2}{4\bar{l}}, \quad u_6 = -\frac{\bar{k}_1\bar{b}_0}{\bar{l}}u_3, \quad u_7 = \bar{m}g.$$

Откуда получим выражение для момента

$$\begin{aligned} \bar{M} = \frac{\bar{x}^3}{6} \left(e^{-\frac{f_1\bar{t}}{2}}u_5 + u_6 \right) + \frac{\bar{x}^2}{2}u_7 - \frac{\bar{x}}{2} \left(e^{-\frac{f_1\bar{t}}{2}}u_5\bar{l}^2 + u_6\bar{l}^2 + 2u_7\bar{l} \right) + \frac{1}{3}\bar{l}^3 u_5 e^{-\frac{f_1\bar{t}}{2}} + \\ + \frac{1}{3}\bar{l}^3 u_6 + \frac{1}{2}\bar{l}^2 u_7. \end{aligned} \quad (86)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гвоздев А. А. К расчету конструкций на действие взрывной волны // Строительная промышленность. 1943. № 1. С. 18–21.
- [2] Гвоздев А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. М.: Стройиздат, 1949. 280 с.
- [3] Гвоздев А. А. О развитии теории расчета железобетонных конструкций в СССР / Теория расчета бетонных и железобетонных конструкций. М.: Стройиздат, 1949. С. 3–18
- [4] Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М.: Стройиздат, 1954. 288 с.
- [5] Ерхов М. И. Теория идеальнопластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978. 352 с.
- [6] Комаров К. Л., Немировский Ю. В. Динамика жестко-пластических элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1984. 236 с.
- [7] Шамин В. М. Расчет элементов сооружений на действие взрывных нагрузок. М.: Стройиздат, 1989. 72 с.
- [8] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельные состояния железобетонных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3. С. 134–158.
- [9] Савельев Н. Г. Расчет балок переменного сечения на упругом основании // Расчеты на прочность. М.: Машгиз, 1956. Выпуск 2.
- [10] Горбунов-Посадов М. И. Балки и плиты на упругом основании. М.: Машстройиздат, 1949.

Y. V. Nemirovsky¹, S. V. Tikhonov²

DYNAMICS OF REINFORCED CONCRETE BEAMS ON THE VISCO-ELASTIC FOUNDATION

¹*Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

²*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

Abstract. Originally, fundamentals of the theory of limit equilibrium and dynamic deformation of building structures of metal and concrete were developed by A. A. Gvozdev [1]–[3] and evolved by his followers [4]–[7]. Forming the basis for the calculation model of an ideal rigid-plastic material made it possible to determine in many cases the ultimate load of bearing capacity and upper (kinematically possible) or lower (statically valid) values for a wide class of different structures by simple methods. Thus, with reference to concrete structures the most important property of concrete to resist significantly different tension and compression was not considered. This circumstance was taken into account in work [8] for reinforced concrete beams under conditions of quasi-static loading. In building practice there are often situations when the deformation is accompanied by the resistance of the environment [9]–[10], and the problem is about the assessment of the bearing capacity of the structure and reducing the level of its damage in the presence of such resistance when exposed to dynamic loads. In the framework of classical limit equilibrium theory by A. A. Gvozdev this issue was not considered, and in this paper it is investigated for reinforced concrete beams on elastic and visco-elastic foundation.

Keywords: plasticity, multi-layered reinforced concrete beam, limit state, multimodulus behavior, deflection, bending moment, elastic foundation, viscous base, loads of explosive type.

REFERENCES

- [1] Gvozdev A. A. To calculation of designs on action of a blast wave // Building industry. 1943. № 1. P. 18–21. (in Russian).
- [2] Gvozdev A. A. Calculation of the bearing ability of designs for a method of extreme balance. M.: Stroyizdat, 1949. 280 p. (in Russian).
- [3] Gvozdev A. A. About development of the theory of calculation of reinforced concrete structures in the USSR / Theory of calculation of concrete and reinforced concrete structures. M., 1949. P. 3–18 (in Russian).
- [4] Rzhanicin A. P. Calculation of constructions taking into account plastic properties of materials. M.: Stroyizdat, 1954. 288 p. (in Russian).
- [5] Erkhov M. I. Theory of ideally plastic solids and structures. M.: Nauka, 1978. – 352 p. (in Russian).

Nemirovsky Yuri Vladimirovich

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.

Tikhonov Sergey Vladimirovich

e-mail: strangcheb@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

- [6] Komarov K. L., Nemirovsky Yu. V. Dynamics of rigid and plastic elements of designs. Novosibirsk: Nauka, 1984. 236 p. (in Russian).
- [7] Shamin V. M. Calculation of elements of constructions on action of explosive loadings. M.: Stroyizdat, 1989. 72 p. (in Russian).
- [8] Nemirovsky Yu. V., Tikhonov S. V. Limit conditions of reinforced concrete beams // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2016. № 3. P. 134–158 (in Russian).
- [9] Savelyev N. G. Calculation of beams of variable section on the elastic base // Calculations on durability. M.: Mashgiz, 1956. Volume 2. (in Russian).
- [10] Gorbunov-Posadov M. I. Beams and plates on the elastic foundation. M.: Mashstroyizdat, 1949. (in Russian).

Е. А. Микишанина

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ УПРУГО-ПОРИСТОЙ ПЛИТЫ ПРИ НАГРУЖЕНИИ

Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Рассматривается деформация тонкой упруго-пористой плиты, лежащей на упругом основании. Устанавливается связь коэффициента фильтрации среды с первым инвариантом тензора напряжений. Исследуется изменение коэффициента фильтрации плиты при чистом цилиндрическом изгибе в зависимости от закрепления продольных кромок.

Ключевые слова: упруго-пористая плита, изгиб, коэффициент фильтрации, напряжения.

УДК: 532.685

Введение. Задачи фильтрации жидкости через упруго-пористую среду рассматривались неоднократно в самых различных постановках [1], [2], в том числе через изгибающуюся под внешней нагрузкой плиту [1]. В приведенных выше работах коэффициент фильтрации среды было принято считать постоянным ввиду высоких упругих характеристик среды и при этом малых деформаций. Однако коэффициент фильтрации среды ввиду возникающих в среде упругих возмущений требует корректировки.

Известно [3], что напряженное состояние твердого тела определяется тензором напряжений σ_{ik} , который связан с тензором деформации ε_{ik} обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} J_1(\varepsilon) \delta_{ik} \right), \quad (1)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $J_1(\varepsilon) = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – первый инвариант тензора деформаций, δ_{ik} – символ Кронекера. Первый инвариант тензора деформаций связан с тензором напряжения $J_1(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ соотношением [3]

$$J_1(\varepsilon) = \frac{1 - 2\nu}{E} J_1(\sigma).$$

Далее будет рассматриваться упруго-пористая среда. При фильтрации жидкости в упруго-пористой среде поры в зависимости от возникающих напряжений деформируются, одновременно изменяется коэффициент фильтрации. В представлении порового пространства в виде совокупности прямолинейных капиллярных трубок малого

© Микишанина Е. А., 2017

Микишанина Евгения Арифжановна

e-mail: evaeva_84@mail.ru, старший преподаватель, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.04.2017

радиуса [4], связь коэффициента фильтрации среды с возникающими в среде напряжениями может быть записана в виде

$$k' = k \left(1 + \frac{1 - 2\nu}{E} J_1(\sigma) \right). \quad (2)$$

где k , k' – коэффициенты недеформированной и деформированной сред соответственно.

Рассмотрим цилиндрический изгиб жесткой упруго-пористой плиты в форме полосы $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq 1$ толщиной h на упругом основании с коэффициентом жесткости C , распределенной по верхней поверхности силой $q_0(y)$ (рис. 1).

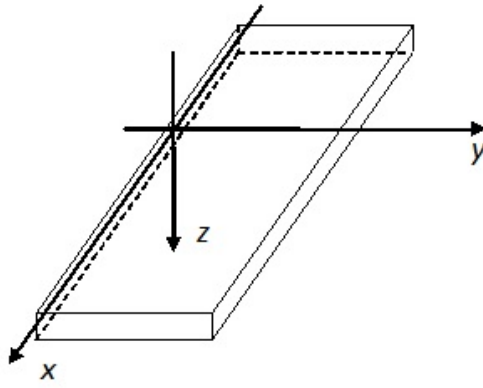


Рис. 1. Плита

Уравнение изгиба такой плиты имеет вид [1]:

$$\Delta^2 w + \frac{C}{D} w = \frac{q_0}{D}, \quad (3)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость плиты. Для упрощения введем обозначения $K^2 = C/D$, $q = q_0/D$, тогда уравнение (3) переписется в виде

$$\Delta^2 w + K^2 w = q. \quad (4)$$

В зависимости от условий моделируемого сценария и формы плиты возможны разные условия на контуре.

Решение уравнения (4) имеет вид

$$w(y) = a_0(y) + d_1 e^{ny} \cos ny + d_2 e^{ny} \sin ny + d_3 e^{-ny} \cos ny + d_4 e^{-ny} \sin ny,$$

где $a_0(y)$ – частное решение неоднородного уравнения (4).

Исследуем изменение коэффициента фильтрации при возникновении упругих возмущений в плите от распределенной по верхней поверхности плиты нагрузки $q(y) = q = const$ в зависимости от способа закрепления кромок:

1. Продольные края плиты жестко защемлены. В случае жесткого защемления продольных кромок функция прогиба имеет вид [1]

$$w(y) = \frac{q}{K^2} + d_1 e^{ny} \cos ny + d_2 e^{ny} \sin ny + d_3 e^{-ny} \cos ny + d_4 e^{-ny} \sin ny, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= -C_1 \cdot (e^n \sin n - 1 + e^n \cos n), & d_2 &= C_1 \cdot (-e^n \sin n - 1 + e^n \cos n), \\ d_3 &= -C_1 \cdot e^n (\sin n + e^n - \cos n), & d_4 &= C_1 \cdot e^n (\sin n - e^n + \cos n), \\ C_1 &= q/K^2 (2e^n \sin n + e^{2n} - 1), & n &= \sqrt{K/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим сечение плиты в плоскости Oxy . Ось сечения направлена параллельно оси y . В некоторых местах сечения происходит растяжение, в некоторых – сжатие. Вдоль длины сечения проходит так называемая «нейтральная» плоскость ($z = 0$), в точках которой не происходит ни сжатия, ни растяжения, то есть первый инвариант тензора деформаций, а, следовательно, и тензора напряжений будет равен в этих точках нулю. Пренебрегая напряжением σ_{zz} в силу его малости по сравнению с напряжениями σ_{xx} , σ_{yy} , первый инвариант тензора напряжений в соответствии с известными выражениями [3] примет вид

$$J_1(\sigma) = -\frac{Ez}{1-\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

На рис. 2 изображена функция прогиба бетонной плиты ($E = 1.7 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.18$) толщиной $h = 0.1$ м на песчаном грунте с коэффициентом постели $C = 36$ МПа/м, нагрузкой на верхней поверхности $q = 2$ и жестко защемленными продольными кромками.

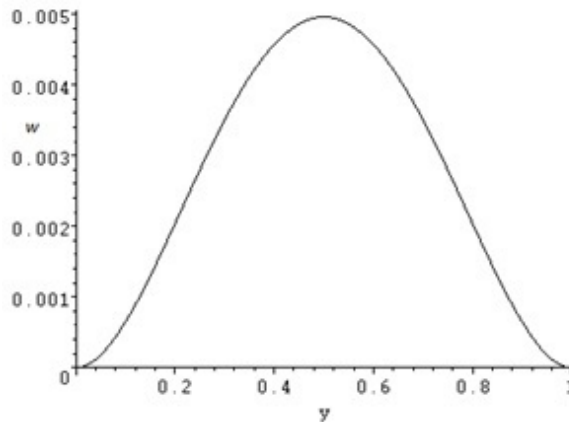


Рис. 2. Функция прогиба плиты, жестко защемленной по продольным кромкам

На рис. 3 изображены графики относительного изменения коэффициента фильтрации

$$\delta = \frac{k' - k}{k} = -\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot z \quad (7)$$

вдоль сечения при $z = -0.05$ (1), $z = -0.025$ (2), $z = 0$ (3), $z = 0.025$ (4), $z = 0.05$ (5).

2. Продольные края пластины шарнирно оперты. В случае шарнирно опертых продольных кромок функция прогиба примет вид (5), где константы определяются следующим образом:

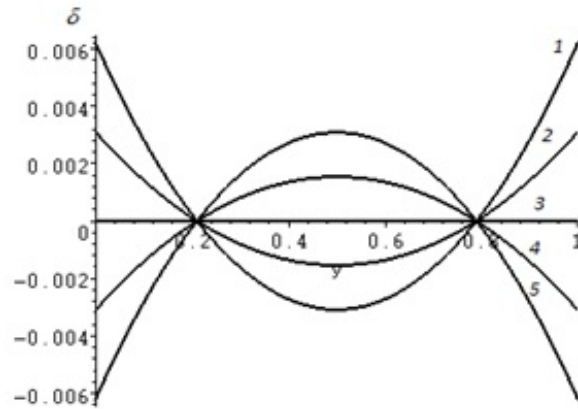


Рис. 3. Изменение коэффициента фильтрации

$$\begin{aligned}
 d_1 &= -C_2 \cdot (e^n \cos n + 1), & d_2 &= -C_2 \cdot e^n \sin n, \\
 d_3 &= -C_2 \cdot e^n (e^n + \cos n), & d_4 &= -C_2 \cdot e^n \sin n, \\
 C_2 &= q/K^2 (e^{2n} + 2e^n \cos n + 1).
 \end{aligned} \tag{8}$$

На рис. 4 изображена функция прогиба бетонной плиты ($E = 1.7 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.18$) толщиной $h = 0.1$ м на песчаном грунте с коэффициентом постели $C = 36$ МПа/м, нагрузкой на верхней поверхности $q = 2$ и шарнирно опертыми кромками.

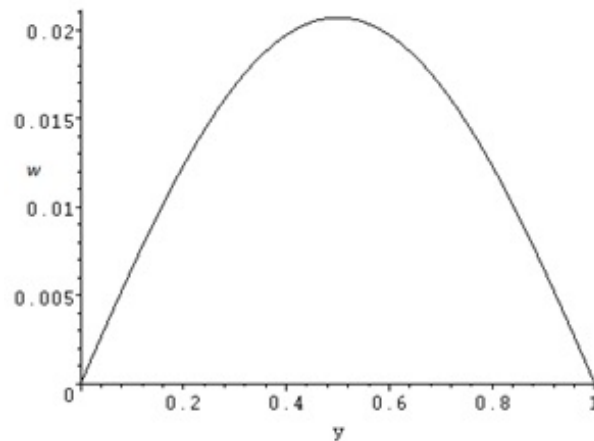


Рис. 4. Функция прогиба плиты, шарнирно опертой по продольным кромкам

На рис. 5 изображены графики относительного изменения коэффициента фильтрации (8) вдоль сечения плиты при $z = -0.05$ (1), $z = -0.025$ (2), $z = 0$ (3), $z = 0.025$ (4), $z = 0.05$ (5).

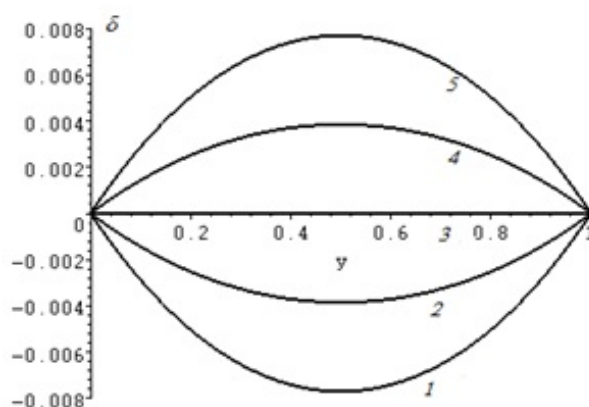


Рис. 5. Изменение коэффициента фильтрации

Учитывая скорректированный коэффициент фильтрации при чистом цилиндрическом изгибе

$$k' = k(1 + \delta(y, z)),$$

где функция $\delta(y, z)$ линейна относительно переменной z , определение давления жидкости при фильтрации через изогнутую плиту сводится к решению уравнения

$$\nabla \cdot ((1 + \delta(y, z)) \cdot \nabla P(y, z)) = 0. \quad (9)$$

Граничные условия будут формулироваться в зависимости от моделируемого сценария.

Заключение. В работе было исследовано изменение коэффициента фильтрации плиты в виде полосы постоянной толщины терпящей чистый цилиндрический изгиб под действием распределенной по верхней поверхности силы для случая жесткого защемления и шарнирного опирания продольных кромок. Изменение коэффициента фильтрации связано с возникающими в среде напряжениями.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Микишанина Е. А., Терентьев А. Г. Фильтрация через упруго-пористую плиту // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4 (30). С. 33–40.
- [2] Кулагина М. Ф., Микишанина Е. А. Построение почти-периодических решений некоторых систем дифференциальных уравнений // Математические заметки СВФУ. 2015. Т. 22. № 3. С. 11–19.
- [3] Терентьев А. Г. Теория упругости с элементами сопротивления материалов и пластичности: учебное пособие. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2016. 264 с.
- [4] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.;Л.: Гостехиздат, 1950. 676 с.

E. A. Mikishanina

**RESEARCH OF FILTRATION COEFFICIENT ELASTIC-POROUS PLATE AT
LOADING**

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. The author describes the deformation of a thin elastic-porous plate lying on an elastic foundation, connection of the filtration coefficient of the medium with the first invariant of the stress tensor, examines the change in the coefficient of filter plate with clean cylindrical bending, depending on the fastening of the longitudinal edges.

Keywords: elastic-porous plate, bending, filtration coefficient, voltage.

REFERENCES

- [1] Mikishanina E. A., Terentiev A. G. Filtration in elastic porous plate // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. – 2016. – №4(30). – P. 33-40 (in Russian)
- [2] Kulagina M. F., Mikishanina E. A. Construction of almost periodic solutions to some systems of differential equations // Mat. Zamet. SVFU. – 2015. – T.22. – № 3. – P. 11-19.(in Russian)
- [3] Terentiev A. G. Theory of elasticity elements of strength of materials and plasticity : a tutorial. – Cheboksary : Publishing house of the Chuvash. University press, 2016. – 264 p. (in Russian)
- [4] Loitsianskii L. G. Fluid mechanics. – Moscow-Leningrad : Gostehizdat, 1950. – 676 p. (in Russian)

Mikishanina Evgeniya Arifzhanovna

e-mail: evaeva_84@mail.ru, Senior Lecturer, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Ю. В. Немировский¹, А. В. Станиславович²

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ СЛОИСТЫХ ОРТОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

¹Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. В статье представлена математическая модель теплопроводности многослойных круглых и кольцевых пластин, слои которых имеют различную толщину и структуру. Слои могут быть набраны как из изотропных, так и ортотропных материалов, таких как армированные волокнами либо частицами композиционные материалы, сотовые структуры с различными параметрами армирования. Предложена методика решения нестационарной задачи теплопроводности для многослойных пластин. Методика решения основана на сведении нестационарной задачи к стационарной с помощью преобразования Лапласа и построении решения получившейся стационарной задачи в виде ряда методом Бубнова - Галеркина.

Ключевые слова: теплопроводность, кольцевые пластинки, круглые пластинки, сотовые конструкции, слоистые конструкции, аналитические решения.

УДК: 536.21

Введение. Исследование различных проблем теплопередачи играет важную роль при проектировании газотурбинных двигателей и установок, авиационной и ракетной техники [1], [2]. При этом помимо эффективного увеличения термического сопротивления по толщине стенок несущих и теплоотводящих конструкций требуется обеспечение достаточной прочности и жесткости при ограничении веса. Одновременное выполнение таких требований может быть реализовано в подкрепленных конструкциях коробчатого типа или в трехслойных панелях с легкими алюминиевыми или стеклопластиковыми сотовыми наполнителями. Теплопроводность таких конструкций была

© Немировский Ю. В., Станиславович А. В., 2017

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Станиславович Алексей Вячеславович

e-mail: alexey.st@bk.ru, ведущий специалист, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-00825, 17-41-210272).

Поступила 11.05.2017

исследована в работах [3], [4]. В настоящее время существуют технологии производства многослойных сотопластовых и металлотопластовых конструкций, разделяющих жидкости или газы с различными температурами. Все составляющие конструкции подслои могут состоять из различных материалов, иметь различные структуры армирования, различную форму, плотность и взаимное расположение сот, и в связи с этим могут позволять в широких пределах управлять температурным полем в направлении нормали к поверхности многослойной конструкции. Решение такой задачи нам неизвестно и должно быть основано на относительно разумных и простых гипотезах, позволяющих построить сравнительно простую расчетную модель, обеспечивающую возможность решения соответствующих задач управления тепловым полем и оптимизационных задач.

Рассматривая слоистую в направлении оси Oz конструкцию (рисунок 1), будем считать все составляющие слои ортотропными и имеющими размеченную структуру в направлении оси Oz . Структура в каждом слое является регулярно-сотовой или однородной с “тонкими слоями армирования”, позволяет использовать модель теплопроводности из [5], [6].

Математическая модель. Пусть дана кольцевая пластина толщиной l , состоящая из N слоев постоянной толщиной δ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) в направлении оси $O\tilde{z}$, внутренний радиус равен \tilde{R}_1 , внешний – \tilde{R}_2 (рисунок 1). Граница между i -м и $(i + 1)$ -м слоями имеет координату l_i ($i = 1, 2, \dots, N - 1$). Тогда выполняются условия:

$$0 = l_0 < l_1 < l_2 < \dots < l_{(N-1)} < l_N = l.$$

Материал каждого слоя неоднороден и ортотропен по типу [5],[6]. На границе раздела i -го и $(i + 1)$ -го слоев задаются условия идеального теплового контакта [7]:

$$T^i = T^{i+1}; \quad \lambda_i \frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{n}} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial \mathbf{n}}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{n} – вектор единичной нормали к поверхности раздела слоев, λ_i , λ_{i+1} – коэффициенты теплопроводности i -го и $(i + 1)$ -го слоев соответственно в направлении нормали \mathbf{n} .

Будем считать, что распределение температуры не зависит от угловой координаты (осесимметричный случай).

В случае неидеального теплового контакта (контактные поверхности разделены тонкой прослойкой) обычно вводится понятие контактного сопротивления R . Равенство тепловых потоков здесь имеет место, но появляется пропорциональная им разность между двумя поверхностными температурами [8]:

$$\lambda_i \frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_i} = \frac{1}{R} \left(T^{i+1}(x, y, z, t) \Big|_{S_{i+1}} - T^i(x, y, z, t) \Big|_{S_i} \right), \quad \lambda_i \frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_i} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_{i+1}}. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{n} – вектор внешней нормали к поверхности S_i относительно i -го слоя.

Решение задачи нестационарной теплопроводности многослойных круговых пластин, состоящих из N слоев, разнородных по геометрии и тепловым свойствам материалов, при различных вариантах теплообмена с окружающей средой, совершенном или несовершенном контакте на поверхности раздела слоев сводится к решению системы уравнений:

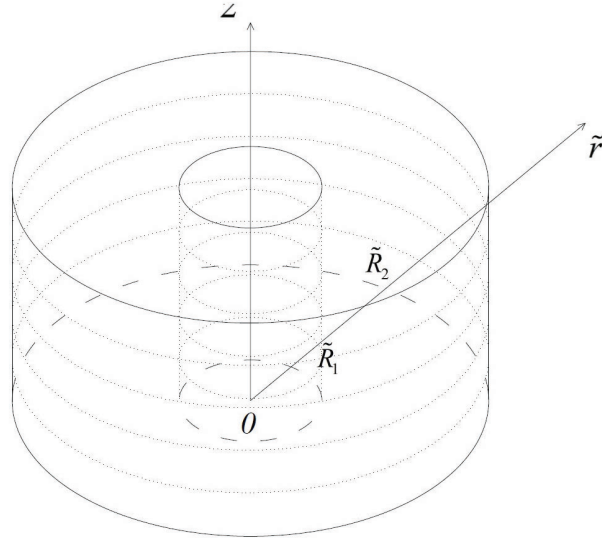


Рис. 1. Многослойная кольцевая пластина

$$\rho_i C_i \frac{\partial T^i}{\partial t} - \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\lambda_r^i(\tilde{r}) \tilde{r} \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\lambda_z^i(\tilde{z}) \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{z}} \right) \right] = \tilde{f}_i(\tilde{r}, \tilde{z}, t), \quad (3)$$

$$t > 0, \quad \tilde{R}_1 < \tilde{r} < \tilde{R}_2, \quad l_{z(i-1)} < \tilde{z} < l_{zi} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Здесь ρ_i , C_i – приведенная плотность и объемная теплоемкость i -го слоя, λ_r^i , λ_z^i – коэффициенты теплопроводности вдоль осей $O\tilde{r}$ и $O\tilde{z}$ соответственно, в общем случае зависящие от координат [6].

Дополним систему (2) следующими начальными и граничными условиями [8]:

$$T^i(\tilde{r}, \tilde{z}, t)|_{t=0} = \Phi_{oi}(\tilde{r}, \tilde{z}) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (4)$$

$$\beta_{11}^r \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}_1} - \beta_{21}^r T^i \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}_1} = -\phi_1^r(t), \quad \beta_{12}^r \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}_2} - \beta_{22}^r T^i \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}_2} = -\phi_2^r(t),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\beta_{11}^z \frac{\partial T^1}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=0} - \beta_{21}^z T^1 \Big|_{\tilde{z}=0} = -\phi_1^z(t), \quad \beta_{12}^z \frac{\partial T^N}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=l} - \beta_{22}^z T^N \Big|_{\tilde{z}=l} = -\phi_2^z(t). \quad (5)$$

При $\beta_{1j}^k = 0$, $\beta_{2j}^k = 1$ получим первую краевую задачу.

При $\beta_{1j}^k = \lambda$, $\beta_{2j}^k = 0$ получим вторую краевую задачу.

При $\beta_{1j}^k = -\lambda$, $\beta_{2j}^k = \alpha$, $\phi_j^k(t) = \alpha T_{\text{ср}}^j$ получим третью краевую задачу. Здесь α – коэффициент теплопередачи, $T_{\text{ср}}^j$ – температура окружающей среды при конвективном теплообмене, $j = 1, 2$, $k = "r"$ или $"z"$.

Условия сопряжения (предполагается идеальный тепловой контакт) (1) записываются в виде:

$$T^i \Big|_{\tilde{z}=l_i} = T^{i+1} \Big|_{\tilde{z}=l_i},$$

$$\lambda_z^i(l_i) \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=l_i} = \lambda_z^{i+1}(l_i) \frac{\partial T^{i+1}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=l_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \quad (6)$$

Введем безразмерные переменные [8]:

$$r = \frac{\tilde{r}}{\tilde{R}_2}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{\tilde{l}}, \quad w_i = \frac{l_i}{\tilde{l}}, \quad \omega_i = \frac{\delta_i}{\tilde{l}}, \quad R_1 = \frac{\tilde{R}_1}{\tilde{R}_2}, \quad R_2 = \frac{\tilde{R}_2}{\tilde{R}_2} = 1. \quad (7)$$

Обозначим

$$k_i(r) = \frac{\lambda_r^i(r)}{\rho_i C_i}, \quad a_i(z) = \frac{\lambda_z^i(z)}{\rho_i C_i}, \quad f_i(r, z, t) = \frac{1}{\rho_i C_i} \tilde{f}(r, z, t). \quad (8)$$

Тогда соотношения (2) – (6) придут к виду:

$$\frac{\partial T^i}{\partial t} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_i(r) r \frac{\partial T^i}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_i(z) \frac{\partial T^i}{\partial z} \right) \right] = f_i(r, z, t), \quad (9)$$

$$t > 0, \quad R_1 < r < 1, \quad w_{i-1} < z < w_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

$$T^i(r, z, t) \Big|_{t=0} = \Phi_{oi}(r, z) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (10)$$

$$\beta_{11}^r \frac{\partial T^i}{\partial r} \Big|_{r=R_1} - \beta_{21}^r T^i \Big|_{r=R_1} = -\phi_1^r(t), \quad \beta_{12}^r \frac{\partial T^i}{\partial x} \Big|_{r=1} - \beta_{22}^r T^i \Big|_{r=1} = -\phi_2^r(t),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\beta_{11}^z \frac{\partial T^1}{\partial z} \Big|_{z=0} - \beta_{21}^z T^1 \Big|_{z=0} = -\phi_1^z(t), \quad \beta_{12}^z \frac{\partial T^N}{\partial z} \Big|_{z=1} - \beta_{22}^z T^N \Big|_{z=1} = -\phi_2^z(t). \quad (11)$$

$$T^i \Big|_{z=w_i} = T^{i+1} \Big|_{z=w_i},$$

$$\lambda_z^i(w_i) \frac{\partial T^i}{\partial z} \Big|_{z=w_i} = \lambda_z^{i+1}(w_i) \frac{\partial T^{i+1}}{\partial z} \Big|_{z=w_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь случай сплошной круглой пластинки.

Пусть дана круглая пластина толщиной l , состоящая из N слоев постоянной толщиной δ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) в направлении оси $O\tilde{z}$, радиусом \tilde{R} (рисунок 2). Граница между i -м и $(i+1)$ -м слоями имеет координату l_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$). Тогда выполняются соотношения:

$$0 = l_0 < l_1 < l_2 < \dots < l_{(N-1)} < l_N = l.$$

Материал каждого слоя неоднороден и ортотропен по типу [5], [6]. На границе раздела i -го и $(i+1)$ -го слоев задаются условия идеального теплового контакта (1).

Так же, как в случае кольцевой пластинки, будем считать, что распределение температуры не зависит от угловой координаты.

Решение задачи нестационарной теплопроводности многослойных круглых пластин, состоящих из N слоев, разнородных по геометрии и тепловым свойствам материалов, при различных вариантах теплообмена с окружающей средой, совершенном или несовершенном контакте на поверхности раздела слоев сводится к решению системы уравнений:

$$\rho_i C_i \frac{\partial T^i}{\partial t} - \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\lambda_r^i(\tilde{r}) \tilde{r} \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\lambda_z^i(\tilde{z}) \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{z}} \right) \right] = \tilde{f}_i(\tilde{r}, \tilde{z}, t), \quad (13)$$

$$t > 0, \quad 0 < \tilde{r} < \tilde{R}, \quad l_{z(i-1)} < \tilde{z} < l_{zi} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Здесь ρ_i, C_i – приведенная плотность и объемная теплоемкость i -го слоя, λ_r^i, λ_z^i – коэффициенты теплопроводности вдоль осей $O\tilde{r}$ и $O\tilde{z}$ соответственно, в общем случае зависящие от координат [6]. Уравнение (8) отличается от (2) лишь граничными условиями.

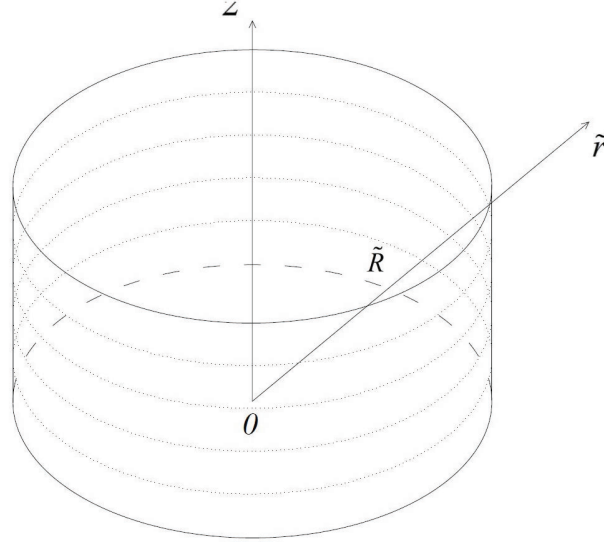


Рис. 2. Многослойная круглая пластина

В случае, когда материал i -го слоя имеет радиальное или круговое армирование, в центр круговой пластинки вставляется шайба из изотропного материала (рисунок 3). Это делается для того, чтобы исключить особенность в виде бесконечной плотности армирования при $r \rightarrow 0$. Таким образом, уравнение (8) распадается на два:

$$\tilde{\rho} \tilde{C} \frac{\partial \tilde{T}^i}{\partial t} - \left[\tilde{\lambda}_r \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}^i}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{T}^i}{\partial \tilde{r}} \right) + \tilde{\lambda}_z \frac{\partial^2 \tilde{T}^i}{\partial \tilde{z}^2} \right] = \tilde{f}_i(\tilde{r}, \tilde{z}, t),$$

$$t > 0, \quad 0 < \tilde{r} < \tilde{R}_1, \quad 0 < \tilde{z} < l_z,$$

$$\rho_i C_i \frac{\partial T^i}{\partial t} - \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\lambda_r^i(\tilde{r}) \tilde{r} \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\lambda_z^i(\tilde{z}) \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{z}} \right) \right] = \tilde{f}_i(\tilde{r}, \tilde{z}, t),$$

$$t > 0, \quad \tilde{R}_1 < \tilde{r} < \tilde{R}, \quad l_{i-1} < \tilde{z} < l_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (14)$$

На границе $\tilde{r} = \tilde{R}_1$ ставится условие идеального контакта по температуре (1):

$$T^i|_{\tilde{r}=\tilde{R}_1} = \tilde{T}^i|_{\tilde{r}=\tilde{R}_1},$$

$$\lambda_r^i(\tilde{R}_1) \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}_1} = \tilde{\lambda}_r^i \frac{\partial \tilde{T}^i}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}_1}. \quad (15)$$

Здесь $\tilde{\rho}$, \tilde{C} – приведенная плотность и объемная теплоемкость материала пайбы, $\tilde{\lambda}_r^i$, $\tilde{\lambda}_z^i$ – коэффициенты теплопроводности вдоль осей $O\tilde{r}$ и $O\tilde{z}$ соответственно.

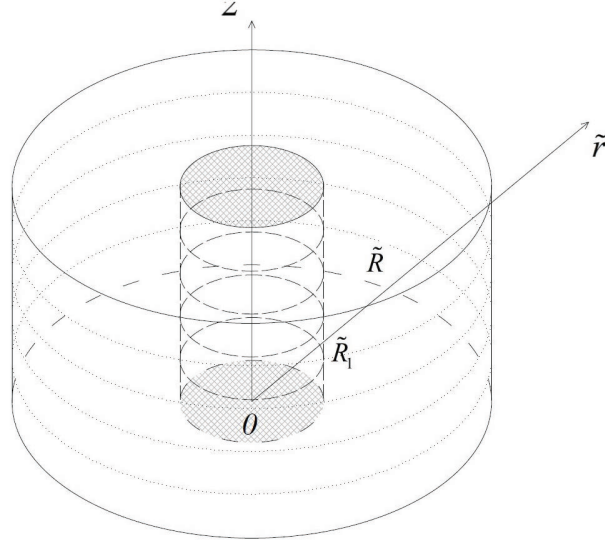


Рис. 3. Многослойная круглая составная пластина

Дополним систему (14) – (15) следующими начальными и граничными условиями, аналогичными (3) – (5) [8]:

$$T^i(\tilde{r}, \tilde{z}, t)|_{t=0} = \Phi_{oi}(\tilde{r}, \tilde{z}), \quad \tilde{T}(\tilde{r}, \tilde{z}, t)|_{t=0} = \Phi_{oi}(\tilde{r}, \tilde{z}) \quad (16)$$

$$\left| \tilde{T}(\tilde{r}, \tilde{z}, t) \right|_{\tilde{r}=0} < \infty, \quad \beta_{11}^r \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}} - \beta_{21}^r T^i \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}} = -\phi_1^r(t),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\beta_{11}^z \frac{\partial T^1}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=0} - \beta_{21}^z T^1 \Big|_{\tilde{z}=0} = -\phi_1^z(t), \quad \beta_{12}^z \frac{\partial T^N}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=l} - \beta_{22}^z T^N \Big|_{\tilde{z}=l} = -\phi_2^z(t),$$

$$\tilde{\beta}_{11}^z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=0} - \tilde{\beta}_{21}^z \tilde{T} \Big|_{\tilde{z}=0} = -\phi_1^z(t), \quad \tilde{\beta}_{12}^z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=l} - \tilde{\beta}_{22}^z \tilde{T} \Big|_{\tilde{z}=l} = -\phi_2^z(t). \quad (17)$$

Условия сопряжения между слоями в направлении оси $O\tilde{z}$ (1) записываются в виде (6).

Методика решения. Рассмотрим случай кольцевой пластинки. Положим [8]:

$$\bar{T}(r, z, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} T(r, z, t) dt. \quad (18)$$

Применив преобразование Лапласа (10) к задаче (6) – (11), получим:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_i(r) r \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_i(z) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z} \right) - p \bar{T}^i(r, z, p) = \bar{\Phi}_{1i}(r, z, p), \quad (19)$$

$$t > 0, \quad R_1 < r < 1, \quad w_{i-1} < z < w_i \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где

$$\bar{\Phi}_{1i}(r, z, p) = -(\Phi_{0i}(r, z) + \bar{f}_i(r, z, p)).$$

Начальные и граничные условия (7) – (11) принимают вид:

$$\beta_{11}^r \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial r} \Big|_{r=R_1} - \beta_{21}^r \bar{T}^i \Big|_{r=R_1} = -\bar{\phi}_1^r(p), \quad \beta_{12}^r \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial x} \Big|_{r=1} - \beta_{22}^r \bar{T}^i \Big|_{r=1} = -\bar{\phi}_2^r(p),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\beta_{11}^z \frac{\partial \bar{T}^1}{\partial z} \Big|_{z=0} - \beta_{21}^z \bar{T}^1 \Big|_{z=0} = -\bar{\phi}_1^z(p), \quad \beta_{12}^z \frac{\partial \bar{T}^N}{\partial z} \Big|_{z=1} - \beta_{22}^z \bar{T}^N \Big|_{z=1} = -\bar{\phi}_2^z(p). \quad (20)$$

Здесь $f_i(x, y, z, t) \rightarrow \bar{f}(x, y, z, p)$, $\phi_j^k(t) \rightarrow \bar{\phi}_j^k(p)$ ($k = "r"$ или $"z"$).

Условия сопряжения (12) приходят к виду:

$$\bar{T}^i \Big|_{z=w_i} = \bar{T}^{i+1} \Big|_{z=w_i},$$

$$\lambda_z^i(w_i) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z} \Big|_{z=w_i} = \lambda_z^{i+1}(w_i) \frac{\partial \bar{T}^{i+1}}{\partial z} \Big|_{z=w_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \quad (21)$$

Обозначим

$$L[\bar{T}^i(r, z, p)] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_i(r) r \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_i(z) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z} \right) - p \bar{T}^i(r, z, p). \quad (22)$$

Тогда выражение (11) можно записать в виде:

$$L[\bar{T}^i(r, z, p)] - \bar{\Phi}_{1i}(r, z, p) = 0. \quad (23)$$

Решение задачи (11)–(21) будем искать с помощью метода Бубнова – Галеркина в виде ряда [9], [10], [11]:

$$\bar{T}^i(r, z, p) = \phi_0(r, z) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(p) \phi_m(r, z). \quad (24)$$

Здесь $\phi_m(r, z)$, – какая-то полная система линейно независимых функций, дважды непрерывно дифференцируемая в

$$S = \{R_1 \leq r \leq 1; \quad 0 \leq z \leq 1\},$$

удовлетворяющая однородным краевым условиям, $\phi_0(r, z)$ – какая-то функция, удовлетворяющая неоднородным краевым условиям (20)–(21), $A_m(p)$ – произвольные коэффициенты. Тогда в общем случае ряд (14) не удовлетворяет дифференциальному уравнению (13):

$$\begin{aligned}
& L [\bar{T}^i (r, z, p)] - \Phi_{1i} (r, z, p) = \\
& = L \left[\phi_0 (r, z) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m (p) \phi_m (r, z) \right] - \Phi_{1i} (r, z, p) = \\
& = L [\phi_0 (r, z)] + \sum_{m=1}^{\infty} A_m (p) L [\phi_m (r, z)] - \Phi_{1i} (r, z, p) = F (r, z, p) \neq 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Очевидно, что невязка полученного решения существенно зависит от значений неопределенных коэффициентов $A_m (p)$. Потребуем выполнения условий ортогональности функции $F (r, z, p)$ полной системе линейно независимых функций $\phi_k (r, z)$:

$$\begin{aligned}
& \iint_{(S_i)} F (r, z, p) \phi_k^i (r, z) dr dz = \\
& = \iint_{(S_i)} \left[L [\phi_0 (r, z)] + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^i (p) L [\phi_m^i (r, z)] - \Phi_{1i} (r, z, p) \right] \times \phi_k^i (r, z) dr dz = \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} B_{mk}^i A_m^i - C_k^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N; \quad k = 1, 2, 3, \dots).
\end{aligned} \tag{26}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
B_{mk}^i &= \iint_{(S_i)} L [\phi_m^i (r, z)] \phi_k^i (r, z) dr dz, \\
C_k^i &= \iint_{(S_i)} [\Phi_{1i} (r, z, p) - \phi_0 (r, z)] \phi_k^i (r, z) dr dz.
\end{aligned}$$

Таким образом получена система алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{mk}^i A_m^i = C_k^i \quad (i = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, 2, 3, \dots)$$

для определения коэффициентов A_m^i , таких что функции $F^i (r, z, p)$ ортогональны системе функций $\phi_k^i (r, z)$ и, следовательно, функции $F^i (r, z, p)$ тождественно равны нулю:

$$F (x, y, z, p) = L [T^i (x, y, z, p)] - \Phi_{1i} (x, y, z, p) \equiv 0.$$

Так как система алгебраических уравнений в общем случае является полной бесконечной системой, решение которой в общем виде возможно лишь при определенных соотношениях между коэффициентами системы, то на практике обычно ограничиваются конечным числом членов ряда, получая таким образом приближенное решение.

Более простое решение получается, если системы функций $L [\phi_m^i (x, y, z)]$ и $\phi_k^i (x, y, z)$ взаимно ортогональны в области интегрирования. Тогда метод Бубнова – Галеркина приводит к системе независимых алгебраических уравнений для каждого неизвестного коэффициента A_m^i :

$$A_m^i = \frac{C_m^i}{B_{mm}^i}. \tag{27}$$

Таким образом, ряд (14) задает решение задачи (2) – (5) в изображениях.

В случае, когда толщина стенки мала по сравнению с ее размерами, задачу можно свести к одномерной, аппроксимировав распределение температуры вдоль оси Oz какой-либо функцией заданного вида (например, квадратичным полиномом).

Положим,

$$\bar{T}^i(r, z, p) = \bar{F}_1^i(r, p) F_2^i(z),$$

где

$$F_2^i(z) = z^2 + b_i z + c_i. \quad (28)$$

Коэффициенты b_i , c_i найдем из второго из соотношений (20) и условий сопряжения (21). Таким образом, с этого момента функции $F_2^i(z)$ будем считать известными. Задача (11) – (21) сводится к следующему виду:

$$F_2^i(z) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(k_i(r) r \frac{d\bar{F}_1^i}{dr} \right) + \bar{F}_1^i \frac{d}{dz} \left(a_i(z) \frac{dF_2^i}{dz} \right) - p \bar{F}_1^i(r, p) F_2^i(z) = \bar{\Phi}_{1i}(r, z, p), \quad (29)$$

$$t > 0, \quad R_1 < r < 1, \quad w_{i-1} < z < w_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

$$\beta_{11}^r \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial r} \Big|_{r=R_1} - \beta_{21}^r \bar{T}^i \Big|_{r=R_1} = -\bar{\phi}_1^r(p), \quad \beta_{12}^r \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial r} \Big|_{r=1} - \beta_{22}^r \bar{T}^i \Big|_{r=1} = -\bar{\phi}_2^r(p),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N). \quad (30)$$

Повторяя рассуждения (12)–(17), получим решение в виде ряда вида (14) для задачи (19) – (30). Отметим, что если

$$k_i(r) = const, \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

то уравнения (19) сводятся к виду

$$\frac{\partial \bar{F}_1^i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{F}_1^i}{\partial r} + \frac{1}{k_i F_2^i} \left[\frac{d}{dz} \left(a_i(z) \frac{dF_2^i}{dz} \right) - p F_2^i \right] \bar{F}_1^i = \frac{1}{k_i F_2^i} \bar{\Phi}_{1i} \quad (31)$$

и представляют собой в зависимости от знака выражения

$$Q_i = \frac{1}{k_i F_2^i} \left[\frac{d}{dz} \left(a_i(z) \frac{dF_2^i}{dz} \right) - p F_2^i \right]$$

либо неоднородное уравнение Бесселя нулевого порядка ($Q > 0$), либо неоднородное модифицированное уравнение Бесселя нулевого порядка ($Q < 0$) [12]. Тогда решение задачи (20) можно записать в виде

$$\bar{F}_1^i(r, z, p) = A_i(z, p) J_0\left(r\sqrt{Q_i}\right) + B_i(z, p) Y_0\left(r\sqrt{Q_i}\right) + \bar{\Psi}_{1i}(r, z, p), \quad (32)$$

когда $Q > 0$, или

$$\bar{F}_1^i(r, z, p) = A_i(z, p) I_0\left(r\sqrt{|Q_i|}\right) + B_i(z, p) K_0\left(r\sqrt{|Q_i|}\right) + \bar{\Psi}_{2i}(r, z, p), \quad (33)$$

когда $Q < 0$. Здесь J_0 , Y_0 – функции Бесселя первого и второго рода, I_0 , K_0 – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка. $A_i(z, p)$, $B_i(z, p)$ – произвольные коэффициенты, определяемые из граничных условий (30). $\bar{\Psi}_{1i}(r, z, p)$, $\bar{\Psi}_{2i}(r, z, p)$ – некоторые частные решения обыкновенного и модифицированного уравнения Бесселя, в общем случае имеющие вид

$$\bar{\Psi}_{1i}(r, z, p) = \sqrt{Q_i} J_0(r\sqrt{Q_i}) \int [r Y_0(r\sqrt{Q_i}) \bar{\Phi}_{1i}(r, z, p)] dr - \sqrt{Q_i} Y_0(r\sqrt{Q_i}) \int [r J_0(r\sqrt{Q_i}) \bar{\Phi}_{1i}(r, z, p)] dr, \quad (34)$$

$$\bar{\Psi}_{2i}(r, z, p) = \sqrt{|Q_i|} I_0(r\sqrt{-Q_i}) \int [r K_0(r\sqrt{|Q_i|}) \bar{\Phi}_{1i}(r, z, p)] dr - \sqrt{-Q_i} K_0(r\sqrt{|Q_i|}) \int [r I_0(r\sqrt{|Q_i|}) \bar{\Phi}_{1i}(r, z, p)] dr. \quad (35)$$

Задача (8)–(15) решается аналогичным образом.

Таким образом, ряды вида (14) представляют собой решение задачи (6)–(12) в изображениях. Для обратного перехода к оригиналам можно воспользоваться одним из справочников по преобразованию Лапласа, например [13], [14], [15].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Авдучевский В. С., Галицейский Б. М., Глебов Г. А. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1992. 528 с.
- [2] Иванов В. Л., Леонтьев А. И., Манушин Э. А., Осипов М. И. Теплообменные аппараты и системы охлаждения газотурбинных и комбинированных установок: учебник для вузов. 2-е изд., стереотип. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 592 с.
- [3] Марченко В. М. Температурные поля и напряжения в конструкциях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1965. 298 с.
- [4] Поварницын М. С. Исследование температурного поля в трехслойной пластине с сотовым наполнителем при несимметричном нагреве // Инженерно-физический журнал. 1961. №10. Т. 4. С. 64–70.
- [5] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Влияние формы и расположения армирующих элементов на тепловые свойства композитов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: механика предельного состояния. 2015. № 4 (16). С. 3–24.
- [6] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Теплопроводность пакета полиармированных слоев // Вестник КемГУ. 2015. № 4 (64). Т. 3. С. 177–183.
- [7] Коляно Ю. М., Ломакин В. А., Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368 с.
- [8] Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 2001. 550 с.
- [9] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений: в 2 т. Т. 2. температурное поле. М.: ГИФМЛ, 1959. 620 с.
- [10] Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики. Киев: Техника, 1967. 213 с.
- [11] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд. М.: Наука, 1970. 512 с.
- [12] Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Часть первая. М.: Иностран. Лит., 1949. 799 с.
- [13] Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
- [14] Егер Д., Карслоу Х. Операционные методы в прикладной математике. М.: Издательство иностранной литературы, 1948. 290 с.

[15] Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. М.: Государственное издательство технико-технической литературы, 1951. 255 с.

Yu. V. Nemirovskii¹, A. V. Stanislavovich²

THERMAL CONDUCTIVITY OF MULTILAYER ORTHOTROPIC ANNULAR CIRCULAR AND CIRCULAR PLATES

¹*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

²*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

Abstract. The paper presents mathematical model of heat conduction of multilayer annular circular and circular plates. Each layer of plate which is under consideration is either isotropic material or fiber composite or dispersion-strengthened composite or honeycomb composite structure. Method for solving unsteady-state heat conduction equation for multilayer annular circular or circular plate is proposed in the article. Proposed method is based on reduction of unsteady-state problem to steady-state heat conduction problem using Laplace transformation. Then steady-state heat conduction problem is solved using Galerkin – Bubnov method.

Keywords: heat conduction, annular circular plates, circular plates, honeycomb structures, fiber composites, analytical solutions.

REFERENCES

- [1] Avduevskii V. S., Galitseiskii B. M., Glebov G. A. Basics of heat transfer in aviation and aerospace machinery. 2nd edition. M.: Mashinostroenie, 1992. – 528 p.
- [2] Ivanov V. L., Leontev A. I., Manushin E. A., Osipov M. I. Heat exchangers and gas-turbine systems and integrated plants cooling systems: textbook for high school. 2nd edition. M.: Publishing house of Baumans MSTU, 2004. 592 p.
- [3] Marchenko V. M. Temperature fields and stresses in aircraft structures. M.: Mashinostroenie, 1965. 592 p.
- [4] Povarnitsyn M. S. Research of temperature field in three-layer honeycomb plate under nonsymmetrical heating // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 1961. № 10. V. 4. P. 64–70.
- [5] Nemirovskii Y. V., Stanislavovich A. V. The influence of shape and arrangement of rein-forcing elements on the thermal properties of rein-foeced materials // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 4 (16). P. 3–24.
- [6] Nemirovskii Y. V., Stanislavovich A. V. Thermal conductivity of the packet of multidirectional reinforced layers // Bulletin of KemSU. 2015. № 4 (64). V. 3. P. 177–183.
- [7] Koliano Y. M., Lomakin V. A., Podstrigach I. S. Thermoelasticity bodies non-homogeneous structures. M.: Mir, 1984. 368 p.

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Associate, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

Stanislavovich Alexey Viacheslavovich, Leading specialist at Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia.

- [8] Kartashov E. M. Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids. M.: Vyssh. Shkola, 2001. 550 p.
- [9] Berezin I. S., Zhidkov N. P. Computing methods: Vol. 2. M.: GIFML, 1959. 620 p.
- [10] Rvachev V. L. Geometric applications of logic algebra. Kiev: Technika, 1967. 213 p.
- [11] Mikhlin S. G. Variational methods in mathematical physics. 2nd edition. M.: Nauka, 1970. 512 p.
- [12] Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. M.: Inostr. lit., 1949. 799 p.
- [13] Dech G. A guide to the practical application of the Laplace transform and the Z-transformation. M.: Nauka, 1971. 288 p.
- [14] Karslow G., Eger D. Variational methods in applied mathematics. M.: Foreign literature publishing house, 1948. 290 p.
- [15] Ditkin V. A. Kuznetsov P. I. Operator calculus handbook. M.: State Publishing House of Technical and Technical Literature, 1951. 255 p.

И. Е. Илларионов, И. А. Стрельников

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕХНОГЕННЫХ ОТХОДОВ В ЛИТЕЙНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В настоящее время актуальна выработка технологии обращения с техногенными отходами, это также важно и в литейном производстве. Предлагается использовать разработанные составы для изготовления литейных форм, стержней и теплоизоляционных оболочек.

Ключевые слова: технология, техногенные отходы, литейные формы, стержни, компоненты, составы теплоизоляционных и формовочных смесей.

УДК: 621.74

В настоящее время наиболее актуальна выработка системных технологий обращения с техногенными отходами, т.к. сложившаяся в Российской Федерации ситуация в области экологической безопасности и обращения с отходами ведет к опасному загрязнению окружающей природной среды и создает реальную экономическую проблему. В то же время наша страна обладает значительными ресурсами вторичного сырья, которые можно характеризовать как возобновляемые сырьевые, материальные и топливно-энергетические ресурсы. По экспертным оценкам объемы накопления отходов в промышленности составляют около 80 млрд. тонн, объемы образования отходов - около 3 млрд. тонн в год (при годовом объеме потребления вторичных сырьевых ресурсов промышленностью менее 1 млрд. тонн). Средний уровень использования отходов в качестве вторичных ресурсов составляет около одной трети. Массовое накопление на промышленных предприятиях и в других сферах отходов производства и потребления говорит о несовершенстве технологий производства и о нерациональном использовании отходов в качестве вторичных ресурсов, но и создает экологические проблемы [1]. Основные пути решения проблем экологизации экономики и формирования устойчивого типа экономического развития следующие: структурная

© Илларионов И. Е., Стрельников И. А., 2017

Илларионов Илья Егорович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой материаловедения и металлургических процессов, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Стрельников Игорь Анатольевич, кандидат технических наук, доцент кафедры материаловедения и металлургических процессов, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 11.04.2017

перестройка экономики, изменение сырьевой ориентации экспорта; разработка и применение природоохраняющих или безотходных технологий, замкнутых циклов производства, глубоко продуманное, наиболее рациональное размещение “грязных” производств; прямые природоохранные мероприятия. Наиболее рациональным направлением утилизации промышленных отходов является их использование как техногенного сырья при получении различного вида продукции и прежде всего строительного и металлургического назначения. В проблеме рациональной утилизации промышленных отходов в единый узел сплелись вопросы охраны окружающей среды и ресурсосбережения. Решение проблемы ресурсосбережения в различных отраслях возможно при комплексном использовании технических, организационных, экономических факторов и применении современных технологических процессов. Использование промышленных отходов обеспечивает производство богатым источником дешёвого и часто уже подготовленного сырья; приводит к экономии капитальных вложений, предназначенных для строительства предприятий, добывающих и перерабатывающих сырьё, повышению уровня их рентабельности; высвобождению значительных площадей земельных угодий и снижению степени загрязнения окружающей среды. Повышение уровня использования промышленных отходов является важнейшей производственной задачей. На основе применения отходов промышленности возможно развитие производства не только традиционных, но и новых эффективных строительных и других материалов. Новые материалы обладают комплексом улучшенных технических и технологических свойств и в то же время характеризуются наименьшей ресурсоёмкостью как в процессе производства, так и при применении [2,3] Масштабы применения промышленных отходов в производстве строительных материалов в РФ неуклонно увеличиваются. Некоторые виды отходов, как, например, доменные гранулированные шлаки, пользуются достаточным спросом в настоящее время и используются полностью. Передовые металлургические предприятия переходят практически на безотвальную работу. В промышленности накоплен положительный опыт создания комбинированных производств. Это производство глинозёма, содопродуктов и портландцемента на основе нефелиновых шламов и известняков, легированного чугуна и глинозёмистого цемента и др. Значительно меньше, чем доменные, используются пока сталеплавильные шлаки. Объём их использования составляет около 65%. Незначителен уровень применения шлаков цветной металлургии. Утилизируется лишь около 15 % объёма золошлаковых отходов энергетической промышленности, которые наряду с металлургическими шлаками можно отнести к наиболее значительным сырьевым ресурсам для промышленности строительных материалов. Неудовлетворителен пока уровень использования отходов деревообрабатывающей, химической, нерудной и ряда других отраслей промышленности. Развитие и совершенствование производства современных материалов и продукции, повышение их экономической эффективности на данном этапе в значительной степени будут определяться рациональностью использования сырьевых ресурсов, полнотой вовлечения в производство отходов различных отраслей промышленности. При этом в основе безотходных производств лежит идея комплексного использования сырья. В зависимости от физико – химических свойств отходов, а также от их количества применяют различные методы обезвреживания и переработки: механические, биологические, химические, сорбционные, термические, а также комбинированные. На ряде металлургических предприятий освоена технология регенерации металлов путём переработки шлаков, шламов и др. Каждая тонна алюминия, извлечённого из отходов, обходится в 10 раз, меди – в 6, цинка – в 3,5

и свинца – в 2,5 раза дешевле, чем те же металлы, выплавленные обычным способом – из рудного сырья.[3,4] Эффективное решение проблемы промышленных отходов – это внедрение безотходной технологии. Безотходные производства основаны на принципиальном изменении технологических процессов, разработке систем с замкнутым циклом, обеспечивающих многократное использование продуктов и комплексном использовании сырья. При комплексном использовании сырьевых материалов промышленные отходы или побочные продукты одних производств являются исходными материалами других. Важность комплексного использования сырьевых материалов можно рассматривать в нескольких аспектах. Во-первых, утилизация отходов позволяет решать задачи по охране окружающей среды, освобождать ценные земельные угодья, отчуждаемые под отвалы и шламохранилища, устранять вредные выбросы в окружающую среду. Во-вторых, отходы промышленности в значительной степени покрывают потребность ряда перерабатывающих отраслей в сырье, причём во многих случаях высококачественном, подвергнутом в процессе производства первичной технологической обработке (измельчению, обжигу и т.д.). В-третьих, при комплексном использовании сырья снижаются удельные капитальные затраты на единицу продукции и уменьшается срок их окупаемости, снижаются также непроизводительные расходы основного производства, связанные со складированием отходов, строительством и эксплуатацией хранилищ для них; уменьшаются затраты, расход теплоты и электроэнергии на новую продукцию за счёт технологической подготовленности отходов; увеличивается производительность оборудования. К настоящему времени, учитывая эффективность применения многих минеральных и органических отходов в качестве сырьевых ресурсов, отходами их можно считать лишь по отношению к целевой продукции предприятий [2].

В различных отраслях промышленности образуется значительное количество побочных продуктов производственных процессов - материалов техногенного происхождения - отходов, содержащих химические соединения или их комплексы, введение которых в различные смеси (формовочные, стержневые, теплоизоляционные) литейного производства на этапе производства формы, стержней или теплоизоляционных оболочек позволяют достичь результатов, по качеству сопоставимых со стандартными требованиями, а иногда и превышающими их. Например, некоторые техногенные отходы, такие как шламы гальванических производств, золы и шлаки теплоэлектростанций (ТЭС), шлаки цветной и черной металлургии, отходы мукомольного и крахмального производств, в частности экструзионный крахмальный реагент являются ценным сырьем для получения различной продукции. Кроме того, такие отходы по опытным данным, могут быть использованы в литейном производстве в составах для приготовления различных смесей [4].

Авторами [6] предлагается использовать состав для изготовления литейных форм, включающий гипс, кварцевый песок, отличающийся тем, что он дополнительно содержит осадок после нейтрализации гальванического производства, при следующем соотношении компонентов, мас. %:

Гипс 30-40

Осадок после нейтрализации
гальванического производства 20-40

Кварцевый песок остальное

Введение осадка после нейтрализации гальванического производства в указанных количествах позволяет получать формовочные смеси с оптимальными свойствами, обеспечивающими изготовление качественных литейных форм [5].

Предлагается также использовать смесь для изготовления литейным форм и стержней, отверждаемых тепловой сушкой, содержащую формовочную глину, огнеупорный наполнитель, связующее и воду, отличающуюся тем, что в качестве связующего смесь содержит экструзионный крахмальный реагент при следующем соотношении ингредиентов, мас. %:

Формовочная глина 4-5

Экструзионный крахмальный реагент 1-5

Вода 2-4

Огнеупорный наполнитель остальное

Таким образом, введение реагента в указанных количествах позволяет получать формовочные смеси с оптимальными свойствами, обеспечивающими изготовление качественных литейных форм. При этом уменьшается стоимость формовочных смесей за счет низкой стоимости реагента, являющегося отходом мукомольного и крахмального производств. Экструзионный крахмальный реагент является готовым материалом, включающим в себя отходы производства. Дальнейшей дополнительной обработке (помолу и просеиванию) данный реагент перед употреблением в формовочной смеси не подвергается. Введение в состав экструзионного крахмального реагента, который представляет собой тонкодисперсное вещество с весьма малым размером частиц, позволяет увеличить прочностные характеристики смеси. Оптимальное содержание реагента в смеси находится в пределах 1 – 5 % [6].

В настоящее время основным потребителем доменных шлаков является цементная промышленность. Для цементной промышленности также перспективными являются некоторые другие виды металлургических шлаков: феррохромовый, позволяющий получать цветной портландцементный клинкер; никелевые и медные, применяемые в качестве железистого компонента сырьевой цементной смеси и активной минеральной добавки: шлаки алюмотермического производства ферросплавов и вторичной переплавки алюминия и его сплавов – как сырьё для производства глинозёмистого цемента и сверхбыстротвердеющего портландцемента: сталерафинировочные шлаки, пригодные для получения расширяющихся цементов. Для получения шлаковых вяжущих автоклавного твердения возможно применение как гранулированных, так и медленно охлаждённых сталеплавильных шлаков и шлаков цветной металлургии. На металлургических заводах образуется значительное количество различных железосодержащих пылей и шламов. Они с успехом могут применяться в качестве железистой корректирующей добавки в производстве портландцементного клинкера. Железосодержащие добавки используются также при получении керамзита для улучшения вспучивания и спекания глинистого сырья. Кроме того, предлагается использовать теплоизоляционную смесь для утепления прибылей отливок, содержащую металлофосфатное связующее и отход ваграночного производства чугуна, отличающуюся тем, что смесь дополнительно содержит трепел, а в качестве фосфатного связующего - алюмохромфосфатное связующее при следующем соотношении компонентов, мас. %:

Алюмохромфосфатное связующее 8-12

Трепел 5-10

Отход ваграночного производства чугуна остальное

Полученная смесь для утепления прибылей отливок обладает повышенной формустойкостью и улучшенными физико-механическими свойствами, в результате улучшается охрана окружающей среды за счёт утилизации отхода ваграночного производства и снижается себестоимость за счёт использования промышленных отходов и природного трепела, утилизируются отходы производства, решается экологическая проблема [7].

Подобранная совокупность компонентов и их количественное соотношение обеспечивает увеличение теплоизолирующего эффекта смеси при достаточных физико-механических свойствах, необходимых для изготовления теплоизоляционных оболочек и вставок.

К отходам топливно – энергетической промышленности относятся продукты, получаемые в виде отходов при добыче, обогащении и сжигании твёрдого топлива. Эту группу отходов разделяют по источнику образования, виду топлива, числу пластичности минеральной части отходов, Содержанию горючей части, зерновому составу, химико – минералогическому составу, степени плавкости, интервалу размягчения, степени вспучиваемости. При сжигании твёрдых видов топлива в топках тепловых электростанций (ТЭС) образуются зола в виде пылевидных остатков и кусковый шлак, а также золошлаковые смеси. Они являются продуктами высокотемпературной обработки минеральной частицы топлива. Зола – унос представляет собой тонкодисперсный материал, состоящий в основном из частиц размером 5 – 100 мкм. Её химико – минералогический состав соответствует составу минералогической части сжигаемого топлива. Авторами [8] предлагается использовать золу – унос ТЭС в составе смесей для изготовления литейных форм и стержней, отверждаемых тепловой сушкой. Смесь содержит, мас. %: формовочную глину 2,5 – 3,5; алюмохромфосфатную связку 3,0 – 4,0; воду до 1,0 %; золу – унос ТЭС 0,5 – 1,5 %; огнеупорный наполнитель остальное. Смесь готовят путём сухого перемешивания огнеупорного наполнителя (кварцевого песка), формовочной глины и золы – уноса ТЭС в течение 2 – 3 мин. Далее вводят воду и перемешивают 5 – 6 мин., после чего вводят алюмохромфосфатное связующее (АХФС) и перемешивают ещё 3 – 4 мин. Итого общее время перемешивания не более 13 мин. Образцы сушат при 180 – 200 градусов Цельсия в течение 20 – 30 мин. Вода в количестве 0,4 – 0,6 % необходима для повышения адгезии глины к огнеупорному наполнителю. При содержании воды менее 0,4 % увеличивается осыпаемость смеси, а при содержании более 0,6 % снижается прочность в сыром состоянии. Добавка золы – уноса ТЭС в количестве 0,5 - 1,5 % снижает прилипаемость смеси к оснастке, повышает прочность в высушенном состоянии, снижает осыпаемость. При более низком содержании золы – уноса не достигается необходимого значения прилипаемости, а при более высоком не наблюдается дальнейшего улучшения свойств смеси. Зола – унос ТЭС представляет собой тонкодисперсное вещество с весьма малым размером частиц, что позволяет использовать её без помола. Таким образом, использование данного изобретения позволит улучшить условия труда, повысить прочность стержней и форм, газопроницаемость, снизить газотворность, а также расширить арсенал средств данного назначения.

Предлагается также использовать смесь, содержащую в составе керамзитовую пыль для изготовления литейных форм и стержней, отверждаемых тепловой сушкой. Смесь содержит, масс. %: формовочную глину 3,0 – 3,5; крахмалит 0,3 – 0,5; воду 0,8 – 1,0; алюмохромфосфатное связующее (АХФС) 3,0 – 4,0; керамзитовую пыль 0,5 – 1,0; огнеупорный наполнитель остальное [9].

Изобретение относится к литейному производству, а именно к составам смесей для изготовления литейных форм и стержней, отверждаемых тепловой сушкой. Крахмалит представляет собой продукт на основе кукурузного крахмала, получаемый при термообработке крахмалобелковой суспензии на вальцовой сушке. Цель изобретения – улучшение качества форм и стержней за счёт повышения их прочности в сухом состоянии, увеличения газопроницаемости. Предлагаемую смесь готовят путём сухого перемешивания огнеупорного наполнителя, формовочной глины и керамзитовой пыли в течение 2 – 3 мин. Одновременно готовится суспензия воды и крахмалита. Далее вводят суспензию в сухую смесь и перемешивают 5 – 6 мин., после чего вводят АХФС и перемешивают ещё 3 – 4 мин. Общее время перемешивания не более 13 мин. Образцы сушат при 180 – 200 градусов Цельсия в течение 10 – 20 мин. Керамзитовая пыль – пылевидный отход керамзитового производства, имеет следующий химический состав, мас. %: оксид кремния 48 – 80; оксид алюминия 7 – 27; оксиды железа 0,5 – 13,5; оксид кальция 0,5 – 20,0; оксид магния 0,3 – 12,0; оксиды калия и натрия 0,5 – 7,5. Керамзитовая пыль в пределах 0,5 – 1,0 обеспечивает интенсивное объёмное твердение, ускоряет сушку, препятствует прилипаемости смеси к оснастке. При более низком содержании керамзитовой пыли не достигается значения интенсификации твердения, прилипаемости и прочности в высушенном состоянии, а при более высоком увеличивается осыпаемость. Формовочная глина в количестве 3,0 – 3,5 мас.% обеспечивает сырую прочность смеси. При содержании глины ниже 3 мас.% не обеспечивается требуемой прочности на сжатие в сыром состоянии, а при содержании свыше 3,5 мас.% возрастает осыпаемость смеси. Вода в количестве 0,8 – 1,0 мас.% необходима для повышения адгезии глины к огнеупорному наполнителю. При содержании воды менее 0,8 мас.% увеличивается осыпаемость смеси, а при содержании свыше 1 мас.% снижается прочность в сыром состоянии. Использование предлагаемого изобретения позволит улучшить условия труда, повысить прочность стержней и форм, газопроницаемость, снизить осыпаемость, а также расширить арсенал средств данного назначения и утилизировать отходы керамзитового производства.

Перед современным литейным производством ставятся задачи по снижению себестоимости, повышению качества и товарного вида отливок, а также по повышению экологической безопасности производства. Решение этих задач во многом связано с разработкой новых, более технологичных составов формовочных и других смесей, а также с оптимизацией существующих способов их приготовления и упрочнения.

Комплексное использование сырья и техногенных отходов производства даёт возможность увеличить выпуск многих видов продукции на 25-30%, снизить ее себестоимость в несколько раз.

Проблемы утилизации отходов промышленных производств становятся всё более актуальными. Практика показывает, что основная масса всех образующихся технологических отходов не может быть переработана (утилизирована) на тех предприятиях, где данные отходы образуются. Распространение получает практика использования отходов в смежных отраслях. При этом особая роль при решении данной проблемы отводится литейно-металлургическому производству – основной заготовительной базе машиностроения [10]–[15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Илларионов, И. Е. Экологические проблемы металлургического производства: конспект лекций / И. Е. Илларионов, Ю. А. Жупавлёв, И.А. Стрельников. – Чебоксары : Изд-во Чуваш. ун-та, 2015. - 88 с.
2. Дворкин, Л.И. Строительные материалы из отходов промышленности /Л.И. Дворкин, О.Л. Дворкин. – Ростов н/Д: Феникс, 2007. – 368 с.
3. Илларионов, И.Е. Основы промэкологии, теории процессов и аппаратов очистки технологических и аспирационных газов литейно – металлургических и смежных производств: Монография Ч.1./ И.Е. Илларионов, И.О. Леушин, В.А. Ульянов, В.Н. Гуцин, В.В. Новоселов. Под общей ред.Илларионова И.Е. Чебоксары – Н.Новгород: НГТУ, 2003. – 196 с.
4. Илларионов, И.Е. Основы промэкологии, теории процессов и аппаратов очистки технологических и аспирационных газов литейно – металлургических и смежных производств: Монография Ч.2./ И.Е. Илларионов, И.О. Леушин, В.А. Ульянов, В.Н. Гуцин, В.В. Новоселов. Под общей ред.Илларионова И.Е. Чебоксары – Н.Новгород: НГТУ, 2003. – 216 с.
5. Патент РФ №2187404 “Состав для изготовления литейных форм” от 20.08.2002. Авторы: Илларионов И. Е., Стрельников И. А., Никитин С. И. Бюл.№23.
6. Патент РФ №2267376 “Состав для изготовления литейных форм и стержней” от 10.01.2006. Авторы: Стрельников И. А., Евлампиев А. А., Иванова Л. А. Бюл.№01.
7. Патент РФ №2356688 “Теплоизоляционная смесь для утепления прибылей отливок” от 27.05.2009. Авторы: Илларионов И.Е., Стрельников И.А., Петрова Н. В., Журавлев А.Ф. Бюл.№15.
8. Патент РФ № 2033880 “Смесь для изготовления литейных форм и стержней” от 30.04.1995. Авторы: Илларионов И.Е., Стрельников И.А.
9. Патент РФ № 2026766 “Смесь для изготовления литейных форм и стержней, отверждаемых тепловой сушкой” от 20.01.1995. Авторы: Илларионов И.Е., Стрельников И.А.
10. А.Н. Грачёв, О.С. Кошелев, И.О. Леушин, Л.И. Леушина, К.А. Маслов, Шлам селитровых ванн термических цехов – перспективный материал для литейно – металлургического производства “Заготовительные производства в машиностроении”2013, №10, С. 6-8.
11. И.Е. Илларионов, И.А. Стрельников, В.С. Григорьев. Применение ресурсосберегающих холоднотвердеющих металлофосфатных смесей. В сб.: “Современные технологии в машиностроении и литейном производстве”. Материалы I - ой Международной научно – практической конференции. Чебоксары, 2015. С. 122 – 131.
12. А.А. Моляков, В.Н. Цай, Г.А. Троицкий. Холоднотвердеющие металлофосфатные смеси и противопопригарные покрытия. В сб.: “Современные технологии в машиностроении и литейном производстве”. Материалы I - ой Международной научно – практической конференции. Чебоксары, 2015. С. 113 – 121.
13. И.Е. Илларионов, И.А. Стрельников. О применении теплоизоляционных металлофосфатных смесей. Литейное производство, 2015, №7, С. 14 – 16.
14. И.Е. Илларионов, И.А. Стрельников, Е.С. Соколов. Теплоизоляционные металлофосфатные смеси, обладающие экзотермическим эффектом. В сб.: “Проектирование и перспективные технологии в машиностроении и металлургии”. Материалы II - ой Республиканской научно – практической конференции. Чебоксары, 2016. С. 74 – 80.

15. И.Е. Илларионов, И.А. Стрельников, А.В. Королёв, Е.П. Шалунов, Е.С. Соколов, А.В. Мотков, В.С. Григорьев, С.В. Иванов Модифицированные металлофосфатные связующие и смеси на их основе для производства отливок из различных сплавов. В сб.: “Проектирование и перспективные технологии в машиностроении и металлургии”. Материалы II - ой Республиканской научно – практической конференции. Чебоксары, 2016. С. 23 – 32.

I. E. Illarionov, I. A. Strelnikova

ON THE APPLICATION OF TECHNOGENIC WASTE IN FOUNDRY

Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia

Abstract. Currently, the elaboration of technologies of handling of technogenic wastes, it is also important in the foundry. It is proposed to use the developed formulations for the manufacture of molds, cores and insulating sheaths.

Keywords: technology, industrial waste, molds, cores, components, insulating compositions and molding compounds.

REFERENCES

1. Illarionov, I. E. *Ekologicheskie problemy metallurgicheskogo proizvodstva: konspekt lekciy* / I. E. Illarionov, YU. A. Zhupavlyov, I.A. Strel'nikov. – Cheboksary : Izd-vo Chuvash. un-ta, 2015. - 88 s.
2. Dvorkin, L.I. *Stroitel'nye materialy iz othodov promyshlennosti* /L.I. Dvorkin, O.L. Dvorkin. – Rostov n/D: Feniks, 2007. – 368 s.
3. Illarionov, I.E. *Osnovy promehkologii, teorii processov i apparatov oчитki tekhnologicheskikh i aspiracionnyh gazov litejno – metallurgicheskikh i smezhnyh proizvodstv: Monografiya CH.1./* I.E. Illarionov, I.O. Leushin, V.A. Ul'yanov, V.N. Gushchin, V.V. Novoselov. Pod obshchej red.Illarionova I.E. Cheboksary – N.Novgorod: NGTU, 2003. – 196 s.
4. Illarionov, I.E. *Osnovy promehkologii, teorii processov i apparatov oчитki tekhnologicheskikh i aspiracionnyh gazov litejno – metallurgicheskikh i smezhnyh proizvodstv: Monografiya CH.2./* I.E. Illarionov, I.O. Leushin, V.A. Ul'yanov, V.N. Gushchin, V.V. Novoselov. Pod obshchej red.Illarionova I.E. Cheboksary – N.Novgorod: NGTU, 2003. – 216 s.
5. Patent RF №2187404 “Sostav dlya izgotovleniya litejnyh form” ot 20.08.2002. Avtory: Illarionov I. E., Strel'nikov I. A., Nikitin S. I. Byul.№23.
6. Patent RF №2267376 “Sostav dlya izgotovleniya litejnyh form i sterzhnej” ot 10.01.2006. Avtory: Strel'nikov I. A., Evlampiev A. A., Ivanova L. A. Byl.№01.
7. Patent RF №2356688 “Teploizolyacionnaya smes' dlya utepleniya pribylej otlivok” ot 27.05.2009. Avtory: Illarionov I.E., Strel'nikov I.A., Petrova N. V., Zhuravlev A.F. Byul.№15.
8. Patent RF № 2033880 “Smes' dlya izgotovleniya litejnyh form i sterzhnej” ot 30.04.1995. Avtory: Illarionov I.E., Strel'nikov I.A.
9. Patent RF № 2026766 “Smes' dlya izgotovleniya litejnyh form i sterzhnej, otverzhdaemyh teplovoj sushkoj” ot 20.01.1995. Avtory: Illarionov I.E., Strel'nikov I.A.
10. A.N. Grachyov, O.S. Koshelev, I.O. Leushin, L.I. Leushina, K.A. Maslov, *SHlam selitrovyyh vann termicheskikh cekhov – perspektivnyj material dlya litejno –*

Illarionov Il'ya Egorovich, Ph. D., Professor, Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

Strelnikov Igor' Anatol'evich, Ph. D., Ass. Professor, Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

metallurgicheskogo proizvodstva "Zagotovitel'nye proizvodstva v mashinostroenii"2013, №10, S. 6-8.

11. I.E. Illarionov, I.A. Strel'nikov, V.S. Grigor'ev. Primenenie resursosberegayushchih holodnotverdeyushchih metallofosfatnyh smesey. V sb.: "Sovremennye tekhnologii v mashinostroenii i litejnom proizvodstve". Materialy I - oj Mezhdunarodnoj nauchno – prakticheskoy konferencii. CHEboksary, 2015. S. 122 – 131.

12. A.A. Molyakov, V.N. Caj, G.A. Troickij. Holodnotverdeyushche metallofosfatnye smesi i protivoprigarnye pokrytiya. V sb.: "Sovremennye tekhnologii v mashinostroenii i litejnom proizvodstve". Materialy I - oj Mezhdunarodnoj nauchno – prakticheskoy konferencii. CHEboksary, 2015. S. 113 – 121.

13.I.E. Illarionov, I.A. Strel'nikov. O primenении teploizolyacionnyh metallofosfatnyh smesey. Litejnoe proizvodstvo, 2015, №7, S. 14 – 16.

14. I.E. Illarionov, I.A. Strel'nikov, E.S. Sokolov. Teploizolyacionnye metallofosfatnye smesi, obladayushchie ehkzotermicheskim ehffektom. V sb.: "Proektirovanie i perspektivnye tekhnologii v mashinostroenii i metallurgii". Materialy II - oj Respublikanskoj nauchno – prakticheskoy konferencii. CHEboksary, 2016. S. 74 – 80.

15. I.E. Illarionov, I.A. Strel'nikov, A.V. Korolyov, E.P. SHalunov, E.S. Sokolov, A.V. Motkov, V.S. Grigor'ev, S.V. Ivanov Modificirovannye metallofosfatnye svyazuyushchie i smesi na ih osnove dlya proizvodstva otlivok iz razlichnyh splavov. V sb.: "Proektirovanie i perspektivnye tekhnologii v mashinostroenii i metallurgii". Materialy II - oj Respublikanskoj nauchno – prakticheskoy konferencii. CHEboksary, 2016. S. 23 – 32.

Г. Е. Чекмарев

СООТНОШЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ ИЗ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Одним из основных свойств металлов является упрочнение, характеризующее влияние пластического деформирования на механическое поведение среды. Исследованию методом возмущений осесимметрической задачи деформирования тел из упрочняющегося материала и посвящена данная работа. В ней приведен алгоритм определения первого приближения в задаче пластического деформирования прута из упрочняющегося материала.

Ключевые слова: пластичность, деформация, линеаризация, упрочнение.

УДК: 539.375

1. Рассмотрим вязкопластическое течение жесткого пространственного тела, изготовленного из однородного изотропного материала.

По аналогии с работами [1,2] введем тензор $S_{ij} = \sigma_{ij} - \mu \varepsilon_{ij}$, где $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ - компоненты тензоров напряжения и скорости деформаций соответственно, μ - коэффициент вязкости. Для изотропного материала главные направления тензоров σ_{ij} и ε_{ij} совпадают. В главных направлениях условие пластичности представимо в виде

$$S_1 = S_2, \quad S_3 = S_1 + 2k.$$

Условие не сжимаемости материала запишется в виде

$$\varepsilon = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3 = 0.$$

Так как

$$\varepsilon = 0, \quad \sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3, \quad 3\sigma - 3\mu\varepsilon = 3S_1 + 2k,$$

то получим следующее выражение

$$S_1 = \sigma - 2k/3.$$

Представим тензор S_{ij} в виде суммы двух тензоров $S_1 \cdot \delta_{ij}$ и $S_{ij} - S_1 \cdot \delta_{ij}$, где δ_{ij} - символ Кронекера. В главных направлениях ранг матрицы тензора $S_{ij} - S_1 \cdot \delta_{ij}$ равен

© Чекмарев Г. Е., 2017

Чекмарев Георгий Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.05.2017

единице. Преобразование тензора при переходе от одной декартовой системы координат к другой можно представить в матричной форме как произведение матрицы тензора и двух невырожденных матриц

$$S^* = A^{-1} S A, \quad \text{где } A = (\alpha_{ij}), \quad x_i^* = \alpha_{ij} x_j, \quad |A| = 1.$$

Из линейной алгебры [3] известно, что при умножении некоторой матрицы слева или справа на невырожденную матрицу ранг исходной матрицы не меняется. Отсюда получим равенство ранга матрицы тензора $S_{ij} - S_1 \cdot \delta_{ij}$ единице в любой декартовой системе координат. Следовательно, все миноры второго порядка матрицы тензора $S_{ij} - S_1 \cdot \delta_{ij}$ будут равны нулю. С учетом симметрии тензора получим шесть соотношений

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma - \mu\varepsilon_x + 2k/3)(\sigma_y - \sigma - \mu\varepsilon_y + 2k/3) &= (\tau_{xy} - \mu\varepsilon_{xy})^2, \\ (\sigma_y - \sigma - \mu\varepsilon_y + 2k/3)(\sigma_z - \sigma - \mu\varepsilon_z + 2k/3) &= (\tau_{yz} - \mu\varepsilon_{yz})^2, \\ (\sigma_z - \sigma - \mu\varepsilon_z + 2k/3)(\sigma_x - \sigma - \mu\varepsilon_x + 2k/3) &= (\tau_{xz} - \mu\varepsilon_{xz})^2, \\ (\sigma_x - \sigma - \mu\varepsilon_x + 2k/3)(\tau_{yz} - \mu\varepsilon_{yz}) &= (\tau_{xy} - \mu\varepsilon_{xy})(\tau_{xz} - \mu\varepsilon_{xz}), \\ (\sigma_y - \sigma - \mu\varepsilon_y + 2k/3)(\tau_{xz} - \mu\varepsilon_{xz}) &= (\tau_{xy} - \mu\varepsilon_{xy})(\tau_{yz} - \mu\varepsilon_{yz}), \\ (\sigma_z - \sigma - \mu\varepsilon_z + 2k/3)(\tau_{xy} - \mu\varepsilon_{xy}) &= (\tau_{xz} - \mu\varepsilon_{xz})(\tau_{yz} - \mu\varepsilon_{yz}), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\varepsilon = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3 = 0, \quad \sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3.$$

С другой стороны, из равенства ранга симметричной матрицы единице следует, что строки и столбцы рассматриваемой матрицы отличаются друг от друга только коэффициентом.

Без ограничения общности предположим $T_{11} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ \alpha T_{11} & \alpha T_{12} & \alpha T_{13} \\ \beta T_{11} & \beta T_{12} & \beta T_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & \alpha T_{11} & \beta T_{11} \\ \alpha T_{11} & \alpha^2 T_{11} & \alpha \beta T_{11} \\ \beta T_{11} & \beta \alpha T_{11} & \beta^2 T_{11} \end{pmatrix}, \quad (T_{ij} = T_{ji}).$$

Коэффициенты α, β определим через элементы первого столбца

$$\alpha = \frac{T_{21}}{T_{11}}, \quad \beta = \frac{T_{31}}{T_{11}}.$$

Из условий

$$T_{22} = \alpha^2 T_{11}, \quad T_{33} = \beta^2 T_{11}, \quad T_{23} = \alpha \beta T_{11},$$

получим

$$T_{22} = \left(\frac{T_{21}}{T_{11}}\right)^2 T_{11}, \quad T_{33} = \left(\frac{T_{31}}{T_{11}}\right)^2 T_{11}, \quad T_{23} = \frac{T_{21}}{T_{11}} \frac{T_{31}}{T_{11}} T_{11}.$$

В результате условие равенства ранга симметричной матрицы T единице эквивалентно трем условиям

$$T_{11} T_{22} = T_{21}^2, \quad T_{11} T_{33} = T_{31}^2, \quad T_{23} T_{11} = T_{12} T_{13} \quad T_{11} \neq 0.$$

Следовательно, из шести условий (1) линейно независимыми являются только три соотношения

$$\begin{aligned}
 (\sigma_y - \mu \varepsilon_y - \sigma + 2k/3)(\sigma_z - \mu \varepsilon_z - \sigma + 2k/3) &= (\tau_{yz} - \mu \varepsilon_{yz})^2, \\
 (\sigma_x - \mu \varepsilon_x - \sigma + 2k/3)(\sigma_z - \mu \varepsilon_z - \sigma + 2k/3) &= (\tau_{xz} - \mu \varepsilon_{xz})^2, \\
 (\sigma_z - \mu \varepsilon_z - \sigma + 2k/3)(\tau_{xy} - \mu \varepsilon_{xy}) &= (\tau_{xz} - \mu \varepsilon_{xz})(\tau_{yz} - \mu \varepsilon_{yz}), \\
 \sigma_z - \mu \varepsilon_z - \sigma + 2k/3 &\neq 0, \quad (xyz).
 \end{aligned}$$

2. Приведем решение задачи о вязкопластическом течении жесткого изотропного бруса переменного прямоугольного поперечного сечения под действием растягивающих сил вдоль оси бруса.

Уравнения боковых граней бруса имеют вид

$$x = \pm [h_1 + f_1(y, z)], \quad y = \pm [h_2 + f_2(x, z)], \text{ где } f_1(y, z) \ll h_1, \quad f_2(x, z) \ll h_2.$$

Решение задачи ищется в виде

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^*, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^*, \\
 u &= u^0 + u^*, \quad v = v^0 + v^*, \quad w = w^0 + w^*.
 \end{aligned}$$

В качестве исходного состояния принято однородное напряженно-деформированное состояние

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^0 = 0, \quad \sigma_y^0 = 0, \quad \sigma_z^0 = k + \frac{3}{2}\mu\varepsilon_3^0, \quad \tau_{xy}^0 = \tau_{yz}^0 = \tau_{xz}^0 = 0, \\
 \varepsilon_z^0 = \varepsilon_3^0, \quad \varepsilon_x^0 = \varepsilon_y^0 = -\frac{1}{2}\varepsilon_3^0, \quad \varepsilon_{xy}^0 = \varepsilon_{yz}^0 = \varepsilon_{xz}^0 = 0.
 \end{aligned}$$

Компоненты возмущения получают следующий вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^* - \sigma^* - \mu\varepsilon_x^* &= 0, \quad \sigma_y^* - \sigma^* - \mu\varepsilon_y^* = 0, \quad \varepsilon_x^* + \varepsilon_y^* + \varepsilon_z^* = 0, \\
 \tau_{xy}^* - \mu\varepsilon_{xy}^* &= 0, \quad \sigma_x^* - \sigma_y^* - \frac{2}{3}(\sigma_x^* + \sigma_y^* + \sigma_z^*) - \mu(\varepsilon_x^* + \varepsilon_y^*) = 0, \\
 \frac{1}{3}(\sigma_x^* + \sigma_y^*) - \frac{2}{3}\sigma_x^* + \mu\varepsilon_z^* &= 0, \quad \frac{1}{3}(\sigma_x^* + \sigma_y^* + \sigma_z^*) - \sigma_z^* + \mu\varepsilon_z^* = 0, \\
 \sigma_z^* - \sigma^* - \mu\varepsilon_z^* &= 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Для компонент τ_{xy}^* , ε_{xy}^* , τ_{yz}^* , ε_{yz}^* , τ_{xz}^* , ε_{xz}^* из условия изотропии выполняются следующие соотношения

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy}^* &= \mu\varepsilon_{xy}^*, \quad \tau_{yz}^* = 2a\varepsilon_{yz}^*, \quad \tau_{xz}^* = 2a\varepsilon_{xz}^*, \\
 a &= \frac{\mu}{2} + \frac{S_1^0 - S_3^0}{2(\varepsilon_1^0 - \varepsilon_3^0)} = \frac{\mu}{2} + \frac{k}{3\varepsilon_3^0},
 \end{aligned} \tag{3}$$

где a зависит только от одного "0" приближения и, следовательно, принимает постоянное значение.

Переходя к компонентам перемещений и подставляя (2), (3) в линеаризованные уравнения равновесия, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma^*}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) + a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) &= 0, \\
 \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial \sigma^*}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} + a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) &= 0, \\
 a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) + a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial \sigma^*}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} &= 0, \\
 \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Будем искать σ^* , u^* , v^* , w^* в виде

$$\begin{aligned}\sigma^* &= H \cos mx \cos ny \cos \lambda z, \\ u^* &= A \sin mx \cos ny \cos \lambda z, \\ v^* &= B \cos mx \sin ny \cos \lambda z, \\ w^* &= C \cos mx \cos ny \sin \lambda z.\end{aligned}\tag{5}$$

Подставляя (5) в (4) получим

$$\begin{cases} (\mu m^2 + \frac{\mu}{2}n^2 + a\lambda^2)A + mn\frac{\mu}{2}B + am\lambda C + Hm = 0, \\ mn\frac{\mu}{2}A + (\frac{\mu}{2}m^2 + \mu n^2 + a\lambda^2)B + an\lambda C + Hn = 0, \\ am\lambda A + an\lambda B + (m\lambda^2 + an^2 + am^2)C + H\lambda = 0, \\ mA + nB + \lambda C = 0. \end{cases}\tag{6}$$

Система (6) является однородной системой линейных алгебраических уравнений относительно A , B , C , H . Она имеет нетривиальное решение только в том случае, когда её определитель равен нулю [3], т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu m^2 + \frac{\mu}{2}n^2 + a\lambda^2 & mn\frac{\mu}{2} & am\lambda & m \\ mn\frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2}m^2 + \mu n^2 + a\lambda^2 & an\lambda & n \\ am\lambda & an\lambda & \mu\lambda^2 + an^2 + am^2 & \lambda \\ m & n & \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

После серии элементарных преобразований приходим к уравнению $(\mu(m^2 + n^2) + 2a\lambda^2) \{a\lambda^4 + 2(m^2 + n^2)(\mu - a)\lambda^2 + a(m^2 + n^2)^2\} = 0$, которое выражает зависимость $\lambda = \lambda(m, n)$. Если m , n предположить действительными числами, то из приведенного выше уравнения следует, что величина λ принимает комплексные значения.

Разрешая систему (6) для коэффициентов A, B, C получим следующие выражения

$$\begin{aligned}A &= \frac{Hm(2(\mu - a)\lambda^2 + am^2 + an^2)}{((\mu - 2a)\lambda^2 + am^2 + an^2)(\frac{\mu}{2}m^2 + \frac{\mu}{2}n^2 + a\lambda^2)}, \\ B &= -H \frac{(\mu m^2 + \frac{\mu}{2}n^2 + a\lambda^2)\lambda^2 + m^2((\mu - 2a)\lambda^2 + am^2 + an^2)}{((\mu - 2a)\lambda^2 + am^2 + an^2)(\frac{\mu}{2}m^2 + \frac{\mu}{2}n^2 + a\lambda^2)}, \\ C &= \frac{\lambda H}{((\mu - 2a)\lambda^2 + am^2 + an^2)}.\end{aligned}\tag{7}$$

Граничные условия на боковых гранях, свободных от напряжения, запишутся в виде

$$\sigma_x \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{xz} \gamma = 0, \quad \tau_{xy} \alpha + \sigma_y \beta + \tau_{yz} \gamma = 0, \quad \tau_{xz} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_z \gamma = 0,$$

где α, β, γ - направляющие косинусы нормали к боковой поверхности бруса.

На боковой грани $x = \pm [h_1 + f_1(y, z)]$ компоненты нормали примут значения

$$\alpha = \pm 1, \quad \beta = -\frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial f_1(y, z)}{\partial z}.$$

Соответствующие граничные условия, преобразуются к виду

$$\sigma_x^* = 0, \quad \tau_{xz}^* \mp \sigma_z^0 \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0 \quad x = \pm h_1.\tag{8}$$

Аналогично на грани $y = \pm [h_2 + f_2(x, z)]$ получим

$$\sigma_y^* = 0, \quad \tau_{yz}^* \mp \sigma_z^0 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \quad y = \pm h_2. \quad (9)$$

Из (5), (8), (9) получим

$$mh_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k_1, \quad nh_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k_2, \quad k_1, k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$m = \pi(2k_1 + 1)/2h_1, \quad n = \pi(2k_2 + 1)/2h_2, \quad k_1, k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{(-1)^{k_1}}{3\varepsilon_3^0} (-A\lambda - Cm) \cos ny \sin \lambda z, \quad (10)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{(-1)^{k_2}}{3\varepsilon_3^0} (-B\lambda - Cn) \cos mx \sin \lambda z. \quad (11)$$

Функции f_1 , f_2 при которых имеет место решение, определяются из (10), (11), причем задание уравнения одной боковой грани определяет уравнение другой. В случае $\mu = 0$ полученные результаты совпадают с результатами работы [4].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Артемов М.А., Ивлев Д.Д. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочно-линейных условиях текучести // ДАН РАН. 1996. Т.350. №3. С.332-334.

[2] Чекмарев Г. Е. Условие пластичности для задачи деформирования тел из упрочняющегося материала при условии осевой симметрии. Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 177–179

[3] Ф.Р. Гантмахер Теория матриц. – М.: Наука, 1966, 576 с.

[4] Артемов М.А., Ивлев Д.Д. О пластическом течении бруса переменного прямоугольного сечения при растяжении // Динамика сплошных сред со свободными границами. Чебоксары: изд-во ЧГУ, 1996. С.8-17.

G. E. Chekmarev

DEFORMATION OF HARDENING PLASTIC ROD, WEAKENED BY GENTLE GROOVE

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. One of the main properties of metals is the hardening that characterizes the influence of plastic deformation on the mechanical behavior of the environment. The study by the method of perturbations of the axisymmetric problem of deformation of bodies of hardenable material this work is dedicated to. It shows the algorithm for determining a first approximation in the problem of plastic deformation of a rod of hardenable material.

Keywords: plasticity, deformation, linearization, hardening.

Chekmarev Georgij Evgen'evich, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

REFERENCES

- [1] Artemov M.A., Ivlev D.D. Ob obshchih sootnosheniyah teorii ideal'noj plastichnosti pri kusochno-linejnyh usloviyah tekuchesti // DAN RAN. 1996. T.350. №3. S.332-334.
- [2] Chekmarev G.E. Uslovie plastichnosti dlja zadachi deformirovanija tel iz uprochnjajushhegosja materiala pri uslovii osevoj simmetrii // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2015. № 2 (24). S. 177–179. (in Russian).
- [3] F.R. Gantmaher Teoriya matric. – M.: Nauka, 1966, 576 s.
- [4] Artemov M.A., Ivlev D.D. O plasticheskom techenii brusa peremennogo pryamougol'nogo secheniya pri rastyazhenii // Dinamika sploshnyh sred so svobodnymi granicami. CHEboksary: izd-vo CHGU, 1996. S.8-17.

М. М. Алиев, С. Р. Гилязова, С. В. Шафиева

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ, ПОДЧИНЯЮЩЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАКОНОМЕРНОСТИ КУЛОНА – МОРА

Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск, Россия

Аннотация. Рассматривается предельное равновесие анизотропной разносопротивляющейся среды типа грунты и горные породы, которая имеет упорядоченную анизотропию прочностных свойств. Выводится условие предельного равновесия в виде обобщения условия Кулона - Мора, представленное в нелинейной форме. Получено условие в компонентах напряжения и выражения для напряжений, удовлетворяющих этому условию. Рассмотрена плоская деформация среды с учетом сил тяжести. Получены обобщенные уравнения Кеттера и основные уравнения характеристик.

Ключевые слова: анизотропная разносопротивляющаяся среда, условие предельного равновесия, закономерность Кулона - Мора, уравнение характеристик.

УДК: 539.37

Введение. Анизотропные грунты и горные породы являются разносопротивляющимися природными материалами, так как имеют различные механические характеристики при испытаниях напряжениями положительного и отрицательного знака. Кроме того, условия залегания таких природных материалов часто обуславливают изменчивость их свойств по направлениям.

Если прочностные или другие характеристики грунтов и горных пород могут быть сформулированы некоторыми непрерывными функциями координат, то такая анизотропия принимается как упорядоченная. Можно встретить также неупорядоченную анизотропию в материалах с дискретными свойствами, математическое выражение которой, для описания этих свойств, требует принятия более сложных моделей, а их практическая реализация порой становится невозможной.

© Алиев М. М., Гилязова С. Р., Шафиева С. В., 2017

Алиев Мехрали Мирзали оглы

e-mail: mmaliev@ Rambler.ru, доктор технических наук, профессор, Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск, Россия.

Гилязова Светлана Ричатовна

e-mail: gil.svet2011@yandex.ru, старший преподаватель, Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск, Россия.

Шафиева Светлана Владимировна

e-mail: shafieva_sv@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск, Россия.

Поступила 11.08.2016

Предельное равновесие анизотропной сыпучей среды было исследовано в ранних работах Д.Д. Ивлева и Т.Н. Мартыновой [1] и представителей Тульской школы механиков под руководством Л.А. Толоконникова (работы В.В. Глаголева и Н.М. Матченко [2], [3], С.Д. Фейгина и Н.М. Матченко [4] и др.).

Предельное равновесие анизотропных грунтов и горных пород рассмотрено также в работах [5], [6], [7].

Линейная зависимость Кулона - Мора

Принимая упорядоченность механических характеристик, воспользуемся подходом, предложенным в [6] Г.А. Гениевым для вывода критерия прочности или условия предельного равновесия, а также для получения основных разрешающих уравнений предельного напряженного состояния анизотропных грунтов и горных пород.

Сущность подхода заключается в том, что из двух зависимостей

$$\tau_n = f(\sigma_n) \text{ и } \frac{d}{d\psi} [\tau_n - f(\sigma_n)] = 0 \quad (1)$$

определяются компоненты напряжения по координатам x, y , включающие прочностные характеристики среды и угол ψ , который выбран как угол между нормалью к площадке скольжения и осью x . В уравнение предельного напряженного состояния входит угол ψ , который, в отличие от изотропной сыпучей среды, совместным решением двух зависимостей из (1) исключить не удастся. В (1) τ_n и σ_n - касательное и нормальное напряжения на площадке скольжения.

Изложим последовательность вывода условий предельного равновесия анизотропных грунтов и горных пород, полученных в [5] и в [7].

В обеих работах принимается, что на площадке скольжения между τ_n и σ_n существует линейная зависимость в виде

$$\tau_n = \sigma_n k + c, \quad (2)$$

где в [1] $\tau_n = 0,5(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\mu$; (3)

$$\sigma_n = 0,5(\sigma_1 + \sigma_3) + 0,5(\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\mu; \quad (3)$$

в [2] $\tau_n = 0,5(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\psi + \tau_{xy} \cos 2\psi$; (5)

$$\sigma_n = 0,5(\sigma_x + \sigma_y) + 0,5(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\psi - \tau_{xy} \sin 2\psi; \quad (4)$$

μ - угол между нормалью к площадке скольжения и максимальным нормальным напряжением σ_1 ; ψ - также как в (1); k и c - соответственно тангенс угла внутреннего трения и сцепления среды на площадке скольжения, являющиеся функциями угла μ в [5] и угла ψ в [7].

Условие предельного равновесия выполняется согласно [5], если

$$\frac{d}{d\mu} [\tau_n - \sigma_n k - c] = 0, \quad (5)$$

согласно [6] $\frac{d}{d\psi} [\tau_n - \sigma_n k - c] = 0$. (8)

Как видно, направление площадки скольжения в [5] связано с направлением главного нормального напряжения, а в [7] с направлением анизотропии (слоистости).

В [5] совместным решением (2) и (5) исключается одно из главных напряжений и выводится уравнение для угла μ как функция σ_3 .

В [7], учитывая инвариантность суммы $\sigma_x + \sigma_y = 2\sigma$ относительно поворота осей (угла ψ), из (2) и (8) выводятся зависимости для τ_{xy} и $\sigma_x - \sigma_y$ как функции параметров прочности угла ψ и σ , т.е.

$$\tau_{xy} = f_1(\sigma, \psi, c, k); \quad (6)$$

$$\sigma_x - \sigma_y = f_2(\sigma, \psi, c, k). \quad (7)$$

Возведением в квадрат (6) и (7) получено условие предельного равновесия в виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4f_1^2(\sigma, \psi, c, k) + f_2^2(\sigma, \psi, c, k). \quad (8)$$

Компоненты напряжения, удовлетворяющие (8) определяются в виде

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= f_1(\sigma, \psi, c, k); \\ \sigma_x &= \sigma + 0,5f_2(\sigma, \psi, c, k); \\ \sigma_y &= \sigma - 0,5f_2(\sigma, \psi, c, k). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (9) в дифференциальные уравнения равновесия в условиях плоской деформации, получим обобщенные уравнения Кеттера для анизотропной среды [7] в переменных σ и ψ .

В работах [7,8,9] разрешающие уравнения были решены в численном виде методом характеристик, а также решен ряд задач теории предельного равновесия.

Нелинейная зависимость Кулона - Мора. Иногда линейная зависимость между τ_n и σ_n нарушается, особенно при высоких гидростатических давлениях, в которых находятся горные породы в глубоких горизонтах. В таких случаях рассмотрение нелинейных связей между касательным и нормальным напряжением лучше согласуется с экспериментами.

В работе [10] доказано, что для изотропной горной породы квадратичную зависимость между τ_n и σ_n , принятую в виде

$$\tau_n^2 = \sigma_n k + c, \quad (10)$$

после определения постоянных k и c из двух видов испытаний можно привести к виду

$$\tau_n^2 = \frac{1}{2}(\sigma_c - \sigma_p)\sigma_n - \left(\frac{\sigma_c + \sigma_p}{4}\right)^2, \quad (11)$$

где σ_c , σ_p - соответственно пределы прочности изотропной горной породы на одноосное сжатие и растяжение.

Проверка для различных горных пород подтверждает удовлетворительное совпадение (11) с данными экспериментов и её почти идеальное совпадение с критерием прочности Г.Н. Кузнецова [11], который также исходит из квадратичной зависимости (10), но имеет другой окончательный вид.

Изложенный в [6] подход допускает определение прочностных характеристик грунтов на приборе прямого среза, располагая слои параллельно или перпендикулярно сдвигающей силе. Такие испытания проводились в работе Л. Бьеррума [12].

Рассмотрим модель анизотропной разнсопротивляющейся среды в случае нелинейной связи между τ_n и σ_n на площадках скольжения в виде

$$\tau_n^2 = \sigma_n k + c, \quad (12)$$

где $k = k(\psi)$; $c = c(\psi)$.

Согласно (11) примем, что

$$k = k(\psi) = \frac{1}{2} [\sigma_c(\psi) - \sigma_p(\psi)];$$

$$c = c(\psi) = \left[\frac{\sigma_c(\psi) + \sigma_p(\psi)}{4} \right]^2,$$

где $\sigma_c(\psi) = \sigma_c(0) \cos^2 \psi + \sigma_c(90) \sin^2 \psi$;

$$\sigma_p(\psi) = \sigma_p(0) \cos^2 \psi + \sigma_p(90) \sin^2 \psi;$$

$\sigma_c(0)$, $\sigma_c(90)$ – пределы прочности среды (горной породы) при принудительном сжатии поперек и вдоль слоев (рисунок 1);

$\sigma_p(0)$, $\sigma_p(90)$ – то же самое при принудительном растяжении (рисунок 2, а);

$\sigma_p(0)$, $\sigma_p(90)$ можно также определить методом «бразильская проба» (рисунок 2, б).

Образцы должны быть испытаны так, чтобы имело место смятие (при сжатии) или отрыв (при растяжении). Форма образцов позволяет разрушить их вдоль или поперек слоев.

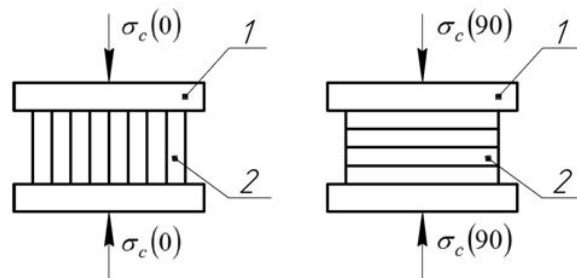
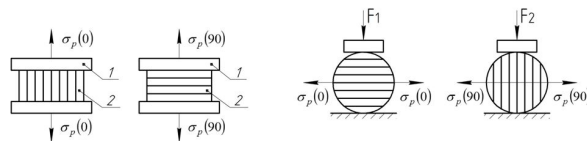


Рисунок 1

1 – обойма; 2 – испытываемый образец



а) б)

Рисунок 2

1 – обойма; 2 – испытываемый образец

Запишем условие минимума функции (12) в виде

$$\frac{d}{d\psi}[\tau_n^2 - \sigma_n k - c] = 0, \quad (13)$$

или

$$2\tau_n \tau_{n,\psi} - \sigma_{n,\psi} k - c - \sigma_n k_{,\psi} - c_{,\psi} = 0, \quad (14)$$

где $k_{,\psi} = \frac{dk(\psi)}{d\psi}$; $c_{,\psi} = \frac{dc(\psi)}{d\psi}$.

В (12) τ_n и σ_n определяются по формулам (5) и (4).

Для простоты обозначим $\tau_n = T_1$, $\sigma_n = \sigma + T_2$. Тогда

$$\tau_{n,\psi} = \frac{d\tau_n}{d\psi} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\psi - 2\tau_{xy} \sin 2\psi = -2T_2;$$

$$\sigma_{n,\psi} = \frac{d\sigma_n}{d\psi} = -0,5(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\psi - 2\tau_{xy} \cos 2\psi = -2T_1.$$

Подставляя τ_n и σ_n в (12), находим

$$T_1^2 = (\sigma + T_2)k + c. \quad (15)$$

Из (13) будем иметь

$$4T_1 T_2 - 2T_1 k + (\sigma + T_2)k_{,\psi} + c_{,\psi} = 0. \quad (16)$$

Исключив из (15) и (16) T_1 , получим выражение

$$\frac{[(\sigma + T_2)k_{,\psi} + c_{,\psi}]^2}{4[k - 2T_2]^2} = (\sigma + T_2)k + c, \quad (17)$$

которое приводится к кубическому уравнению вида

$$a_1 T_2^3 + a_2 T_2^2 + a_3 T_2 + a_4 = 0, \quad (18)$$

где $a_1 = 16k$;

$$a_2 = 16(\sigma k + c) - 16k^2 - k_{,\psi}^2;$$

$$a_3 = 4k^3 - 16k(\sigma k + c) - 2\sigma k_{,\psi}^2 - 2k_{,\psi} c_{,\psi};$$

$$a_4 = 4k^2(\sigma k + c) - \sigma^2 k_{,\psi}^2 - 2\sigma k_{,\psi} c_{,\psi} - c_{,\psi}^2.$$

Уравнение (6) запишем в традиционном виде

$$T_2^3 + aT_2^2 + bT_2 + d = 0, \quad (19)$$

где $a = \frac{a_2}{a_1}$; $b = \frac{a_3}{a_1}$; $d = \frac{a_4}{a_1}$.

Решение уравнения (19) осуществим исходя из формулы Кардано

$$T_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{a}{3}, \quad (20)$$

где $p = b - \frac{a^3}{3}$; $q = d + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3}$.

Так как

$$T_1 = 0,5(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\psi + \tau_{xy} \cos 2\psi; \quad (21)$$

$$T_2 = 0,5(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\psi - \tau_{xy} \sin 2\psi$$

получим условие предельного равновесия анизотропной разнородной среды в следующем виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4(T_1^2 + T_2^2), \quad (22)$$

где T_1 определяется из (15), а T_2 из (20).

Совместное решение (21) определяет компоненты напряжения, удовлетворяющие условию предельного равновесия (22)

$$\sigma_{x,y} = \sigma \pm (T_1 \sin 2\psi + T_2 \cos 2\psi); \quad (23)$$

$$\tau_{xy} = T_1 \cos 2\psi - T_2 \sin 2\psi.$$

Основные разрешающие уравнения. Уравнения равновесия с учетом собственного веса имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad (24)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma,$$

где γ - объемный вес среды.

Подставляя (23) в (24), получим

$$\begin{aligned} F_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + F_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + H_1 \frac{\partial \sigma}{\partial y} + H_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0; \\ H_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + H_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + F_3 \frac{\partial \sigma}{\partial y} - F_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \gamma, \end{aligned} \quad (25)$$

где $F_1 = 1 + R_1 \sin 2\psi + M_2 \cos 2\psi$;

$$F_2 = R_2 \sin 2\psi + 2T_1 \cos 2\psi + M_1 \cos 2\psi - 2T_2 \sin 2\psi;$$

$$F_3 = 1 - R_1 \sin 2\psi + M_2 \cos 2\psi;$$

$$H_1 = R_1 \cos 2\psi - M_2 \sin 2\psi;$$

$$H_2 = R_2 \cos 2\psi - 2T_1 \sin 2\psi - M_1 \sin 2\psi - 2T_2 \cos 2\psi;$$

$$R_1 = \frac{k}{2\sqrt{(\sigma + T_2)k + c}} + M_2 k;$$

$$R_2 = \frac{1}{2\sqrt{(\sigma + T_2)k + c}}(z_1 \sigma + M_1 k + z_1 T_2 + z_3);$$

$$M_1 = \left[\left(\frac{q}{12N} - \frac{1}{6} \right) \left(-\frac{q}{2} + N \right)^{-\frac{2}{3}} - \left(\frac{q}{12N} + \frac{1}{6} \right) \left(-\frac{q}{2} - N \right)^{-\frac{2}{3}} \right] (m_1 z_1 + m_3 z_3 - m_4 z_2 - m_5 z_4) + \left[\frac{p^2}{54N} \left(\left(-\frac{q}{2} + N \right)^{-\frac{2}{3}} - \left(-\frac{q}{2} - N \right)^{-\frac{2}{3}} \right) \right] (n_1 z_1 - n_3 z_3 - n_4 z_2 - \frac{2}{a_1} z_1 z_4) - \frac{2}{3a_1} (8\sigma z_1 + 8z_3 - 16kz_1 - z_1 z_2 - 8a^2 z_1);$$

$$M_2 = \left[\left(\frac{q}{12N} - \frac{1}{6} \right) \left(-\frac{q}{2} + N \right)^{-\frac{2}{3}} - \left(\frac{q}{12N} + \frac{1}{6} \right) \left(-\frac{q}{2} - N \right)^{-\frac{2}{3}} \right] m_2 - \left[\frac{p^2}{54N} \left(\left(-\frac{q}{2} + N \right)^{-\frac{2}{3}} - \left(-\frac{q}{2} - N \right)^{-\frac{2}{3}} \right) \right] n_2 - \frac{16k}{3a_1};$$

$$N = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Здесь значения переменных $m_1, m_2, \dots, n_1, n_2, \dots, z_1, z_2, \dots$ и др. для простоты не приводятся. Эти переменные также являются функциями ψ и σ .

Дифференциальные уравнения характеристик системы (25) получены в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M_0}{2L_0} + \sqrt{\left(\frac{M_0}{2L_0} \right)^2 - \frac{G_0}{L_0}}; \quad (I \text{ семейство}) \quad (26)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M_0}{2L_0} - \sqrt{\left(\frac{M_0}{2L_0} \right)^2 - \frac{G_0}{L_0}}, \quad (II \text{ семейство}) \quad (27)$$

где $M_0 = -F_1 F_2 - H_1 H_2 + F_2 F_3 - H_1 H_2 = (F_3 - F_1) F_2 - 2H_1 H_2$;

$$L_0 = H_1^2 - F_1 F_3;$$

$$G_0 = H_2^2 + F_2^2.$$

Соотношения на характеристиках системы (25) имеют вид

$$d\sigma W_1 - d\psi P_1 = \gamma H_2 dx - \gamma H_1 dy; \quad (I \text{ семейство}) \quad (28)$$

$$d\sigma W_2 - d\psi P_2 = \gamma H_2 dx - \gamma H_1 dy, \quad (II \text{ семейство}) \quad (29)$$

где $W_1 = (F_2 F_3 - H_1 H_2) + (H_2^2 + F_2^2) \Pi_1$;

$$W_2 = (F_2 F_3 - H_1 H_2) + (H_2^2 + F_2^2) \Pi_2;$$

$$P_1 = P_2 = -H_1 F_2 - H_2 F_3;$$

$\Pi_1 = \frac{dx}{dy}$ определяется по (29);

$\Pi_2 = \frac{dx}{dy}$ определяется по (30).

Представляя (29), (30), (31) и (32) в конечноразностной форме можно численно решить ряд задач плоской деформации анизотропных грунтов и горных пород. Алгоритм и программа решения подобных задач приведены в работах [7], [8], [9].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д., Мартынова Т. Н. Об условии полной пластичности для осесимметричного состояния // ПМТФ. – 1963. – №3. – С. 102-104.
- [2] Глаголев В. В., Матченко, Н. М. Устойчивость анизотропных оснований // Труды ТПИ “Исследования по механике деформируемой среды”. – Тула. – 1973.
- [3] Глаголев В. В., Матченко, Н. М. Устойчивость анизотропных откосов // Сб. “Технология машиностроения”. – Тула. – Вып. 28. – 1972.
- [4] Фейгин С. Д., Матченко Н. М. Несущая способность анизотропных оснований // Сб. “Работы по механике сплошных сред”. Тула: Тульский политехнический институт, 1975.
- [5] Бугров А. К., Голубев А. И. Анизотропные грунты и основания сооружений. СПб: “Недра”, 1993. 245 с.
- [6] Гениев Г. А. Плоская деформация анизотропной идеально пластической среды // Строит. механика и расчет сооружений. 1982. №3. С. 14-18.
- [7] Алиев М. М., Гениев Г. А. Расчет несущей способности анизотропных оснований сооружений // Изв. вузов. Строительство. 2001. №6. С. 18-22.
- [8] Алиев М. М., Алексеев Б. Г., Файзрова И. Н. Предельное напряженное состояние анизотропной сыпучей среды, угол внутреннего трения которой является функцией координат // Изв. вузов. Строительство. 2001. №7. С. 17-21.
- [9] Алиев М. М., Миндиярова Н. И. Предельное равновесие анизотропной неоднородной сыпучей среды, характеристики прочности которой являются функциями направления и координат // Изв. вузов. Строительство. 2002. №9. С. 20-24.
- [10] Алиев М. М., Каримова Н. Г., Гилязова С. Р. Нелинейный вариант критерия Кулона-Мора // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2015. №7. С. 226-232.
- [11] Кузнецов Г. Н. Механические свойства горных пород. Задачи и методы их изучения в связи с вопросами управления горным давлением. М.: Углетехиздат, 1947. 176 с.
- [12] Бьеррум Л. Проблемы механики строительства на структурно-неустойчивых и слабых грунтах // Ген. докл. Международ. конгресса по механике грунтов и фундаментостроению. М.: Стройиздат, 1975. С. 98–165.

M. M. Aliev, S. R. Gilyazova, S. V. Shafieva

PLANE DEFORMATION OF ANISOTROPIC MEDIUM PLASTICITY BENDING THE LAWS OF NONLINEAR BY COULOMB - MOHR

Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk

Abstract. There investigated limit equilibrium of anisotropic multimodulus medium in terms of ground or rock, which are ordered anisotropic strength properties. There developed limit equilibrium equation in the form of generalizations of Coulomb - Mohr conditions which is presented in a nonlinear manner. There obtained the condition in the voltage components and expressions for the stresses that satisfy this condition. There investigated an environment plane deformation taking into account the forces of gravity. There developed Kettera’s equation and the main characteristics of the equation.

Keywords: anisotropic multimodulus medium, limit equilibrium conditions, law of Coulomb - Mohr, equation of the characteristics.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D.D., Martynova, T.N.* About the conditions of total plasticity for axisymmetric state // АМТФ. – 1963. – №3. – P. 102-104.

- [2] *Glagolev, V.V., Matchenko, N.M.* The hardness of anisotropic foundations // The works of TPI "The research on the mechanics of deformable medium". – Tula. - 1973.
- [3] *Glagolev, V.V., Matchenko, N.M.* The hardness of anisotropic slopes // SP. "Technology of mechanical engineering". – Tula. - 1972.
- [4] *Feigin, S.D., Matchenko, N.M.* Load bearing ability of anisotropic foundations // SP. "The works on the mechanics of continuous medium". – Tula: Tula Polytechnic Institute, 1975.
- [5] *Bugrov, A.K., Golubev, A.I.* Anisotropic soils and foundation structures. - St. Petersburg: "Nedra", 1993. - 245 p.
- [6] *Geniev, G.A.* Plane deformation of anisotropic perfectly plastic medium // Build. mechanics and calculation of constructions. – 1982. - №3. – P. 14-18.
- [7] *Aliev, M.M., Geniev, G.A.* Calculation of bearing capacity of anisotropic structures bases // Inf. universities. Building. – 2001. - №6. – P. 18-22.
- [8] *Aliev M.M., Alekseev B.G., Fayzrova I.N.* Limit stress state of anisotropic granular medium, internal friction angle which is a function of the coordinates // Inf. universities. Building. – 2001. - №7. – P. 17-21.
- [9] *Aliev, M.M., Mindiyarova, N.I.* Limit equilibrium anisotropic inhomogeneous granular medium, the characteristics of which are functions of the strength and direction of the coordinate // Inf. universities. Building. – 2002. - №9. – P. 20-24.
- [10] *Aliev, M.M., Karimova, N.G., Gilyazova, S.R.* Nonlinear Coulomb - Mohr criterion // Mountain information-analytical bulletin. – 2015. - №7. – P. 226-232.
- [11] *Kuznetsov, G.N.* The mechanical properties of rocks. Objectives and methods of their study due to rock pressure control issues. – M.: Ugltechissue, 1947. – 176 p.
- [12] Bjerrum, L. Problems of construction on structurally unstable and weak soils // Gene. rep. The International. Congress on Soil Mechanics and Foundation Engineering. – M.: Buildissue, 1975. – P. 98-165.

Aliev Mekhrali Mirzali ogly

e-mail: mmaliev@rambler.ru, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department "Transportation and storage of oil and gas" Almet'yevsk State Oil Institute, Republic of Tatarstan, Almet'yevsk, Lenin street, 2.

Gilyazova Svetlana Rishatovna

e-mail: gil.svet2011@yandex.ru, Senior Lecturer of the Department "Oil and gas equipment and technology of mechanical engineering" Almet'yevsk State Oil Institute, Republic of Tatarstan, Almet'yevsk.

Shafieva Svetlana Vladimirovna

e-mail: shafieva_sv@mail.ru, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of "Oil and gas equipment and technology of mechanical engineering" Almet'yevsk State Oil Institute, Republic of Tatarstan, Almet'yevsk.

Ю. В. Астапов

ВНЕДРЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ИНДЕНТОРА В ОСНОВАНИЕ УПРУГОГО И ГИПОУПРУГОГО КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Тульский государственный университет, Тула

Аннотация. В работе приведены результаты решения задачи о вдавливании в цилиндрический образец жесткого штампа сферической формы. Использовались три типа определяющих соотношений. Исследовалось влияние выбора коротационной производной на характеристики напряженно-деформированного состояния, а также выявлялись отличия в поведении упругих и гипопругих моделей материалов в таких процессах. Предложен метод построения определяющих соотношений упругого материала, записанных с использованием логарифмического тензора деформаций Генки. Получены разложения тензора Генки и его производной по монотонному параметру в ряды по степеням тензора деформаций Коши без ограничений на величины допустимых деформаций. Построен численный алгоритм учета изменяющейся зоны контакта. Вычислительные процедуры, осуществляющие дискретизацию поставленной задачи методами конечных элементов и пошагового нагружения, были реализованы в виде пакета прикладных программ. Проведен анализ полученных решений и их сравнение с известными аналитическими зависимостями.

Ключевые слова: конечные упругие деформации, осесимметричные задачи, гипопругость, логарифмическая мера деформаций, жесткий индентор

УДК: 539.3

Введение. Элементы конструкций, испытывающие в процессе эксплуатации конечные упругие деформации, играют значительную роль при рассмотрении таких вопросов, как, например, проблемы гидроизоляции и вибробезопасности. Для изготовления таких узлов используют резиноподобные материалы, характеризуемые с точки зрения механики деформируемого твердого тела как слабосжимаемые изотропные упругие среды. Точное описание отклика таких материалов при взаимодействии с жесткими матрицами является актуальной задачей, оказывающей влияние на качество изготовления узлов и их эксплуатацию. Для верификации численных моделей многие исследователи используют в качестве тестовых примеров задачи о вдавливании жестких штампов с вершинами различной формы в образец простой формы. Для данного класса контактных задач проведено множество теоретических исследований

© Астапов Ю. В., 2017
Астапов Юрий Владимирович
e-mail: ast3x3@gmail.com, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (15-01-01875_а).

Поступила 16.04.2017

[2, 3, 4], получены ряд аналитических прикладных решений для моделей упругих и гиперупругих тел, для случаев конечных вязкоупругих и упругопластических деформаций [13, 14, 17, 19]. Обширная экспериментальная база, накопленная в последние десятилетия, объясняется относительной простотой постановки эксперимента, который в различных вариациях может быть использован как для определения твердости материалов, так и для определения упругих констант материала. Оправданным такой подход становится, когда представленный объем образца недостаточен для проведения экспериментов другого типа, как, например, опыта на одноосное растяжение. Достоверность предположения о характере контактного взаимодействия может быть обоснована путем измерения макрохарактеристик деформированного состояния для относительно простой задачи [16] и сравнения полученных результатов.

В рамках данной работы предложен алгоритм учета смешанных граничных условий контактного типа с изменяющейся поверхностью взаимодействия. Результаты работы данного алгоритма сравнивались с известными решениями для задачи о внедрении жесткого штампа в основание деформируемого цилиндра.

Открытым является вопрос выбора варианта определяющих соотношений, адекватно описывающих упругое поведение образцов в подобных процессах. Общепринятым подходом для описания конечных деформаций является использование постановок, записанных в терминах скоростей деформаций. В этом случае необходимо специальным образом определить абсолютную производную по времени от тензорной меры так, чтобы исключить изменение тензора напряжений при совершении телом жесткого движения. В работе [20] приведен анализ известных объективных (коротационных) производных тензоров и определяющих эти производные спин-тензоров. В работе [1] обращается внимание на возможность выбора такой производной тензора из несчетного множества. Другим подходом для описания кинематики конечных деформаций упругих изотропных тел является использование логарифмической меры деформаций Генки [6, 7], использование которой может быть особенно удобно при описании материалов с существенно различными откликами на изменение объема и формы, так как первый инвариант тензора Генки связан только с изменением элементарного объема, а его девиатор – с изменением формы. В данной статье приведены результаты расчетов для гипотупругих определяющих соотношений с использованием Яуманновской и обобщенной Яуманновской производных, а также для упругой модели с логарифмической мерой Генки в качестве меры деформаций. На примере процесса жесткого внедрения исследуется влияние выбора определяющих соотношений на результаты решения.

Необходимо также отметить, что при рассмотрении моделей эластомеров многие исследователи [15, 19] переходят к рассмотрению несжимаемых материалов, что в общем случае увеличивает количество разрешающих уравнений системы для сеточных методов и требует специальных методов решения систем уравнений с малыми числами обусловленности. В данной работе мы рассматриваем слабосжимаемый изотропный материал с коэффициентом Пуассона, приближающимся к 0.5. Сходимость решения достигается измельчением сетки вблизи области с предполагаемой большой интенсивностью деформаций.

Постановка задачи и варианты определяющих соотношений. Для моделирования квазистатического отклика материала на внешнее силовое воздействие возможно использовать условие равновесного протекания процесса деформирования.

Требование равенства нулю не только главного вектора приложенных к телу нагрузок, но и скорости его изменения после применения вариационного принципа Журдена приводит системе уравнений следующего вида [7]:

$$\begin{cases} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{v} dV = 0, \\ \int_V \frac{d}{dt} (\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{v} + \dot{\theta} (\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{v} dV = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{S} – тензор истинных напряжений Коши; $\mathbf{P}^{(n)}$ и \mathbf{F} – внешние поля соответственно поверхностных и массовых сил; ρ – плотность; \mathbf{v} – поле скоростей точек среды, V – объем, занимаемый телом.

После преобразований [7] и исключения из рассмотрения массовых сил получим условие равновесного протекания процесса деформирования (1) в вариационной форме:

$$\int_V (\dot{\mathbf{S}} + \mathbf{S}\dot{\theta} - \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \delta(\mathbf{v}\nabla) dV = \int_{\Sigma} (\dot{\mathbf{P}}^{(n)} + \mathbf{P}^{(n)} (\dot{\theta} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n})) \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma, \quad (2)$$

которое должно быть дополнено соотношениями, связывающими скорость изменения напряжений со скоростью деформаций, а также начальными и граничными условиями.

Считаем, что в начальный момент деформирования напряжения в теле отсутствуют. Граничные условия статического типа предусматривают задание в каждой точке поверхности Σ_P закона изменения внешних нагрузок как функции времени и эйлеровых координат

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Sigma_P \quad \forall t > t_0. \quad (3)$$

Граничные условия кинематического типа в каждой точке поверхности Σ_U определяют закон изменения перемещений материальных точек

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Sigma_u \quad \forall t > t_0. \quad (4)$$

При записи определяющих соотношений конечного упругого поведения эластомеров обычно используют пары энергетически сопряженных тензоров напряжений и деформаций, входящих в выражение для удельной мощности напряжений [6, 7, 10]. Если в качестве меры напряжений использовать тензор истинных напряжений Коши \mathbf{S} , удельную мощность напряжений можно записать в виде $N^{(i)} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{W}$, где ρ – плотность материала, $\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla)$ – тензор деформации скорости. В общем случае тензор \mathbf{W} не является абсолютной производной по времени ни одной из известных мер конечных деформаций [6, 7].

В работах [9, 11, 12, 18] через тензоры \mathbf{S} и \mathbf{W} строятся определяющие соотношения гипопругости, линейно связывающие скорости напряжений со скоростями деформаций:

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{W}, \quad (5)$$

где \mathbf{N} – тензор упругих постоянных четвертого ранга, \mathbf{S}^* – производная тензорной меры напряжений по параметру процесса. Соотношения (5) должны удовлетворять принципу материальной объективности, то есть компоненты этой меры не должны

изменяться при жестких поворотах деформируемой среды [6, 7], для этого в них используют объективную (коротационную) производную тензора напряжений. Проблема состоит в выборе типа такой производной, что определяется выбором вращающегося ортогонального базиса, относительно которого вычисляется изменение тензора напряжений. Производная Яуманна [9] определяет производную тензора относительно вихревого базиса \mathbf{i}_k , $k = 1..3$, вращающегося со скоростью $\omega = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \mathbf{v}\nabla)$:

$$\mathbf{S}^\nabla = \dot{\mathbf{S}} + \omega \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \omega. \quad (6)$$

Одним из альтернативных подходов является использование обобщенной производной Яуманна [9], позволяющей вычислить скорость изменения тензора относительно полярного базиса \mathbf{n}_k , $k = 1..3$, вращающегося со скоростью $\mathbf{\Omega} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}$ (\mathbf{R} – ортогональный тензор, входящий в полярное разложение аффинора деформаций $\mathbf{\Phi} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1}$):

$$\mathbf{S}^\Delta = \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{\Omega}. \quad (7)$$

В работе рассматриваются два варианта определяющих соотношений гипотезы упругости, когда $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^\nabla$ или $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^\Delta$. Для изотропных материалов соотношение (5) при $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^\nabla$ принимает вид:

$$\mathbf{S}^\nabla = K\dot{\theta}\mathbf{E} + 2G\left(\mathbf{W} - \frac{1}{3}\dot{\theta}\mathbf{E}\right), \quad (8)$$

а при $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^\Delta$:

$$\mathbf{S}^\Delta = K\dot{\theta}\mathbf{E} + 2G\left(\mathbf{W} - \frac{1}{3}\dot{\theta}\mathbf{E}\right). \quad (9)$$

Инвариант $\dot{\theta} = I_1(\mathbf{W})$ – скорость изменения элементарного объема. Для слабосжимаемых материалов выполняется условие $K \gg G$, где K и G – объемный и сдвиговой модули упругости.

В работах [5, 6, 8] показано, что в изотропном материале энергетически сопряженными являются обобщенный «повернутый» тензор напряжений $\mathbf{\Sigma}_\mathbf{R} = \frac{dV}{dV_0}\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}^{-1}$ и тензор логарифмических деформаций Генки $\mathbf{\Gamma} = \ln \mathbf{U}$, где \mathbf{U} – левая мера искажений, входящая в полярное разложение аффинора деформаций. $N^{(i)} = -\frac{1}{\rho_0}\mathbf{\Sigma}_\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{\Gamma}}$. Тогда для изотропных упругих материалов простейший вариант тензорно-линейных определяющих соотношений может быть записан в виде:

$$\mathbf{\Sigma}_\mathbf{R} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{\Gamma} \quad (10)$$

или с учетом выражения для компонент тензора \mathbf{N} через константы K и G в виде:

$$\mathbf{\Sigma}_\mathbf{R} = KI_1(\mathbf{\Gamma})\mathbf{E} + 2G\left(\mathbf{\Gamma} - \frac{1}{3}I_1(\mathbf{\Gamma})\mathbf{E}\right), \quad (11)$$

где $I_1(\mathbf{\Gamma})$ – первый инвариант тензора Генки, связанный с изменением объема соотношением $I_1(\mathbf{\Gamma}) = \ln \frac{dV}{dV_0}$.

С целью использования соотношений (11) в вариационных соотношениях (2) требуется продифференцировать соотношения (11) по времени в предположении, что константы материала не изменяются. Из (11) следует вариант этих соотношений в скоростях:

$$\dot{\Sigma}_{\mathbf{R}} = K\dot{\theta}\mathbf{E} + 2G \left(\dot{\Gamma} - \frac{1}{3}\dot{\theta}\mathbf{E} \right). \quad (12)$$

После подстановки этих выражений в определяющие соотношения (8), (9) и (12), приходим к трем вариантам разрешающих уравнений:

$$\begin{aligned} \int_V \left(K\dot{\theta}\mathbf{E} + 2G \left(\mathbf{W} - \frac{1}{3}\dot{\theta}\mathbf{E} \right) - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{S}\dot{\theta} - \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \delta(\mathbf{v}\nabla) dV = \\ = \int_{\Sigma} \left(\dot{\mathbf{P}}^{(\mathbf{n})} + \mathbf{P}^{(\mathbf{n})} \left(\dot{\theta} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \right) \right) \cdot \delta\mathbf{v} d\Sigma, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \int_V \left(K\dot{\theta}\mathbf{E} + 2G \left(\mathbf{W} - \frac{1}{3}\dot{\theta}\mathbf{E} \right) - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{S}\dot{\theta} - \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \delta(\mathbf{v}\nabla) dV = \\ = \int_{\Sigma} \left(\dot{\mathbf{P}}^{(\mathbf{n})} + \mathbf{P}^{(\mathbf{n})} \left(\dot{\theta} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \right) \right) \cdot \delta\mathbf{v} d\Sigma, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \int_V \left(\frac{dV_0}{dV} \mathbf{R}^{-1} \cdot \left(K\dot{\theta}\mathbf{E} + 2G \left(\dot{\Gamma} - \frac{1}{3}\dot{\theta}\mathbf{E} \right) \right) \cdot \mathbf{R} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \delta(\mathbf{v}\nabla) dV = \\ = \int_{\Sigma} \left(\dot{\mathbf{P}}^{(\mathbf{n})} + \mathbf{P}^{(\mathbf{n})} \left(\dot{\theta} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \right) \right) \cdot \delta\mathbf{v} d\Sigma, \end{aligned} \quad (15)$$

где соотношения (13) соответствуют модели гипопругого материала с определяющими соотношениями (8), соотношения (14) – модели гипопругого материала с определяющими соотношениями (9), соотношения (15) соответствуют модели упругого материала (13).

Разложение логарифмической меры деформаций в ряд по степеням тензора деформаций Коши. Вычисление компонент тензора Генки в общем виде требует перехода к главным осям меры деформаций \mathbf{U} . Однако даже для относительно простых процессов имеет место неоднозначность выбора направлений главных осей тензора, что может приводить к неопределенностям и даже ошибкам, преодоление которых требует наложения дополнительных условий. Связь меры Генки с другими мерами деформаций имеет следующий вид: $\mathbf{\Gamma} = \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{G} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{E} + 2\boldsymbol{\varepsilon})$, где $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{g})$ – тензор деформаций Коши, $\mathbf{G} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{T}}$ – мера деформаций Коши, а \mathbf{g} – метрический тензор отсчетной конфигурации. Используя ряд Маклорена для логарифмической функции, можно получить представление функции $\mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{E} + 2\boldsymbol{\varepsilon})$ в виде тензорного ряда, сходящегося при $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| < \frac{1}{2}$. Данное условие, однако, существенно ограничивает класс рассматриваемых задач. Известен прием, позволяющий расширить область сходимости ряда для логарифмической функции. В частности $\forall z > 0, z > 0$ имеет место сходящийся ряд:

$$\ln(a+z) = \ln a + 2 \left(\frac{z}{2a+z} + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{2a+z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z}{2a+z} \right)^5 + \dots \right). \quad (16)$$

Разложение тензора Генки в ряд (16) получается формальной подстановкой:

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{E} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \mathbf{H}^{2k-1}, \quad (17)$$

где $\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$. Определим производную \mathbf{H} по t : $\dot{\mathbf{H}} = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{E} - (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})$. Используя формулу дифференцирования произведения тензорных функций $\frac{d(\mathbf{H}^n)}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}^{i-1} \cdot \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H}^{n-i}$, получим, что производная логарифмической меры имеет разложение:

$$\dot{\mathbf{I}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \left(\sum_{m=1}^{2k-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{m-1} \cdot (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon})^{-m} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{E} - (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot ((\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^{2k-m-1} \right) \quad (18)$$

Ряд (18) сходится к значениям производной от логарифмической меры деформаций по параметру без ограничений на величины деформаций.

Процедура численного решения. Для дискретизации краевых задач (3),(4),(13)-(15) используется метод конечных элементов, позволяющий, разбив расчетную область на конечное число подобластей с линейной аппроксимацией поля скоростей, перейти от вариационной проблемы (3),(4),(13)-(15) к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых скоростей: $([\mathbf{K}_1] + [\mathbf{K}_2]) \mathbf{V} = \dot{\mathbf{F}}$. Часть глобальной матрицы жесткости $[\mathbf{K}_1]$ соответствует определяющим соотношениям (8), (9) или (12), а $[\mathbf{K}_2]$ – геометрически нелинейным слагаемым в (13)-(15). Следует отметить, что соотношения (6) и (7) не эквивалентны по ресурсам, требуемым для построения $[\mathbf{K}_2]$. Развитие процесса во времени аппроксимируется с помощью метода пошагового нагружения, разбивающего параметр процесса на конечные отрезки.

В данной работе рассматривается внедрение в цилиндрическое тело, покоящееся на жесткой плоскости, штампа сферической формы. Расчетная схема представлена на рисунке 1.

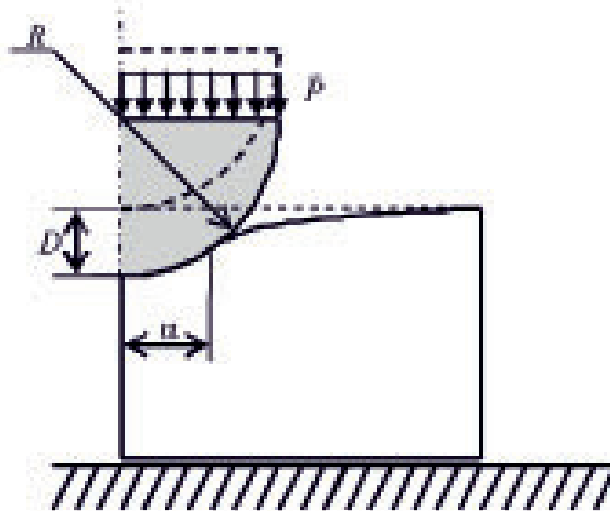


Рис. 1. Расчетная схема задачи

В начальный момент времени напряжения отсутствуют. Затем образец подвергается осесимметричному воздействию со стороны абсолютно жесткого штампа, форма которого определяется кусочно-гладкой кривой $f(\xi)$, где ξ – монотонный параметр.

Учет изменения зоны контакта отслеживается на каждом шаге нагружения вместе с выполнением неравенства $f(\mathbf{x}) > 0$ – условия взаимного непроникновения упругого образца и жесткого штампа, где $\mathbf{x} \in V$. Вводится полоса скольжения достаточно малой ширины, попав в которую, точка границы считается скользящей по образующей штампа при условии неотрицательности действующей со стороны штампа реакции связи. Перемещения контактных узловых точек находятся путем интегрирования скоростей вдоль образующей в предположении достаточной малости изменения кривизны функции $f(\xi)$ за один шаг.

Статические граничные условия сводятся в данной задаче к условию $\sigma_\tau = 0$ – трение отсутствует. Вопрос о сходимости численного решения исследовался с использованием метода сгущающихся сеток.

Результаты численного моделирования. Схема нагружения соответствует взаимодействию тела со штампом, вершиной которого является шар. Отношение радиуса шара R к толщине тела $h - R/h = 0.15$. Производятся вычисления для слабосжимаемого изотропного образца ($E = 7.5 \cdot 10^6, \nu = 0.485$). Расчеты производились до достижения глубины внедрения, соответствующей уменьшению толщины образца под штампом на 3%.

На рисунке 2 представлены зависимости величины действующей силы P , приложенной к штампу, от глубины внедрения D для различных вариантов определяющих соотношений.

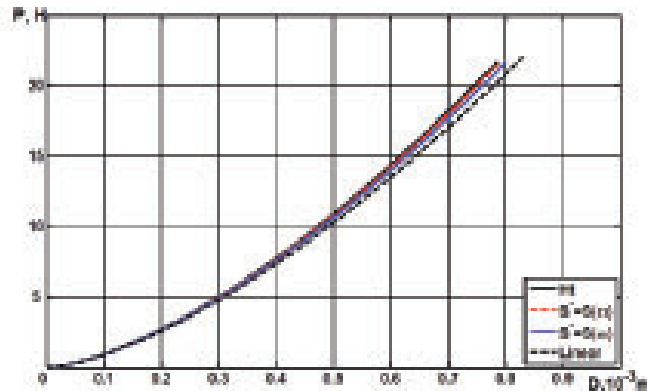


Рис. 2. Зависимость действующей нагрузки от величины осадки

На рисунке 2 черная пунктирная кривая соответствует аналитическому решению для линейно-упругого материала, когда $\alpha/R \ll 1$ [15]. Синей кривой соответствует решение с использованием определяющих соотношений (8), а красной пунктирной кривой – (9). Черная сплошная кривая соответствует модели упругого материала (12). Из графиков видно, что зависимости, полученные в статье с использованием геометрически-нелинейных постановок (13)-(15) мало отличаются, но вносят, однако, существенные поправки к линейному решению для больших деформаций. Для процесса простого сдвига различия при использовании производных (6) и (7) значительны уже при деформациях порядка 10%. В рассматриваемых процессах жесткого индентирования при величинах сдвиговых деформаций, превышающих 20%, наблюдается различие порядка 2.9%. Решение с использованием упругих определяющих соотношений (12) проходит близко к гипоупругому решению (9) с использованием обобщенной Яуманновской производной.

На рисунке 3а приведены распределения величин интенсивности деформаций, вычисленные для тензора конечных деформаций Коши.

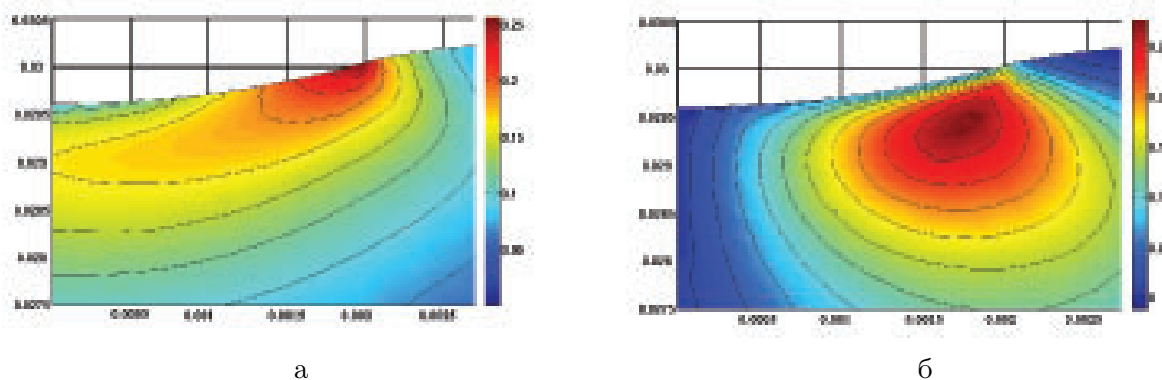


Рис. 3. Распределения интенсивности деформаций и сдвиговых напряжений

Максимальные интенсивности деформаций достигаются на границе зоны контакта α , где со штампом начинают взаимодействовать новые точки. Компоненты касательных напряжений непропорциональны сдвиговым деформациям в данных процессах. На рисунке 3б показано распределение касательных напряжений S_{13} , отнесенное к модулю сдвига μ , в зоне, близкой к области контакта.

Как видно из графиков, очаг сдвиговых напряжений находится внутри области, а не на ее границе, что соответствует ожидаемым результатам.

Выводы. Несмотря на конечные величины сдвиговых деформаций в зоне, близкой к границе контакта, тип используемой коротационной производной в малой степени влияет на интегральные характеристики процесса. Используемые в настоящей работе двухконстантные упругие (12) и гипоупругие определяющие соотношения (8) и (9) качественно верно описывают конечные деформации материала при индентировании. Для рассматриваемого процесса различие между решениями с определяющими соотношениями (9) и с соотношениями (12) не превышает 1%. В дальнейшем предлагается использовать определяющие соотношения, учитывающие не только геометрическую, но и физическую нелинейность поведения эластомеров.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бровко Г. Л. Материальные и пространственные представления определяющих соотношений деформируемых сред // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54. № 5. С. 814–824.
- [2] Бураго Н. Г., Кукуджанов В. Н. Обзор контактных алгоритмов // Известия РАН. Механика твердого тела. 2005. Т. 1. С. 45–87.
- [3] Ворович И. И., Александров В.М. Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. 672 с.
- [4] Горячева И. Г. Механика трения. М.: Наука, 2001. 478 с.
- [5] Коробейников С. Н. Строго сопряженные тензоры напряжений и деформаций // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41. № 3. С. 149–154.
- [6] Маркин А. А., Христинич Д. В. Нелинейная теория упругости: Учеб. пособие. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. 92 с.

- [7] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 320 с.
- [8] Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
- [9] Труделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
- [10] Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.
- [11] Adam L., Ponthot J. P. Thermomechanical modeling of metals at finite strains: First and mixed order finite elements // *International Journal of Solids and Structures*. 2005. V. 42. P. 5615–5655.
- [12] Altmeyer G., Panicaud B., Rouhaud E., Wang M., Roos A, Kerner R. Viscoelasticity behavior for finite deformations, using a consistent hypoelastic model based on Rivlin materials // *Continuum Mech. Thermodyn*. 2016. V. 28. P. 1741–1758.
- [13] Bartier O., Hernot X., Mauvoisin G. Theoretical and experimental analysis of contact radius for spherical indentation // *Mechanics and Materials*. 2010. V. 42. P. 640–656.
- [14] Braun B., Deppler J., Fidlin A., Hochbruck M. Convergence of viscoelastic constraints to nonholonomic idealization // *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2016. V. 58. P. 140–147.
- [15] Giannakopoulos A. E., Triantafyllou A. Spherical indentation of incompressible rubber-like materials // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2007. V. 55. P. 1196–1211.
- [16] Jang Jae-Won, Hyung-Kyu Kim, Soon-Bok Lee Numerical and experimental investigation of a complete contact problem by comparing with an asymptotic analysis // *International Journal of Solids and Structures*. 2016. V. 82. P. 39–46.
- [17] Lin D. C., Shreiber D. I., Dimitriadis E. K., Horkay F. Spherical indentation of soft matter beyond the Hertzian regime: numerical and experimental validation of hyperelastic models // *Biomech Model Mechanobiol*. 2009. V. 8. P. 345–358.
- [18] Ramezani S., Naghdabadi R. Micropolar hypo-elasticity // *Arch Appl Mech*. V. 80 P. 1449–1461.
- [19] Zhang M. G., Cao Y. P., Li G. Y., Feng X. Q. Spherical indentation method for determining the constitutive parameters of hyperelastic soft materials // *Biomech Model Mechanobiol*. 2014. V. 13. P. 1–11.
- [20] Xiao H., Bruhns O. T., Meyers A. Objective stress rates, path-dependence properties and non-integrability problems // *Acta mechanica*. 2005. V.176, no 3-4. P. 135–151.

Yu. V. Astapov

**THE RIGID SPHERICAL INDENTATION INTO THE BOTTOM OF ELASTIC
AND HYPOELASTIC CIRCULAR CYLINDERS UNDER FINITE
DEFORMATIONS***Tula State University, Tula*

Abstract. The results of solving of the problem about rigid spherical stamp indentation into the cylindrical body are presented in current investigation. The constitutive relations of three types were used within this paper. The influence of the corotational derivative type on stress-strain state characteristics was examined as well as the differences between the behavior of the elastic and the hypoelastic models in such processes were identifying. The formation of the constitutive relation for an elastic material using Hencky's logarithmic tensor of deformation is proposed. The decomposition of the Hencky's tensor and its monotone parameter derivative into the series in terms of powers of the Cauchy strain tensor is obtained without strain rate limitations. The numerical algorithm to take into account changes in a contact zone is built up. The computational procedures to discretize considered problem using finite element method and step-by-step loading method were realized into the software package. The obtained solutions were compared with commonly known analytical relations.

Keywords: finite elastic deformations, axisymmetrical problems, hypoelasticity, logarithmic strain measure, rigid indenter

REFERENCES

- [1] Brovko G. L. Material and dimensional representations of the constitutive relations for deformable media // Applied mathematics and mechanics. 1990. V. 54. No 5. P. 814–824.
- [2] Bourago N. G., Kukudzhanov V. N. A review of contact algorithms // Russian Academy of Sciences tidings. Mechanics of Solids. 2005. V. 1. P. 45–87.
- [3] Vorovich I. I., Aleksandrov V. M. Mechanics of contact interactions. Moscow.: FizMatLit, 2001. 672 p.
- [4] Goryacheva I. G. Mechanics of friction interaction. Moscow.: Nauka, 2001. 478 p.
- [5] Korobeynikov S. N. Strictly conjugated tensors of stresses and strains // Applied mechanics and technical physics. 2000. V. 41. No 3. P. 149–154.
- [6] Markin A. A., Khristich D. V. Nonlinear theory of elasticity: tutorial. Tula: TSU publ., 2007. 92 p.
- [7] Markin A. A., Sokolova M. Yu. Thermomechanics of elastoplastic deformation. Moscow.: FizMatLit, 2013. 320 p.
- [8] Sedov L. I. Introduction into mechanics of continuous media. Moscow.: FizMatGiz, 1962. 284 p.
- [9] Truesdell C. A First Course in Rational Continuum Mechanics, Academic Press, 1977. 304 p.
- [10] Chernykh K. F. Introduction to anisotropic elasticity. Moscow.: Nauka, 1988. 192 p.

Astapov Yuri Vladimirovich

e-mail: ast3x3@gmail.com, postgraduate student, Tula State University, Tula.

- [11] Adam L., Ponthot J. P. Thermomechanical modeling of metals at finite strains: First and mixed order finite elements // *International Journal of Solids and Structures*. 2005. V. 42. P. 5615–5655.
- [12] Altmeyer G., Panicaud B., Rouhaud E., Wang M., Roos A, Kerner R. Viscoelasticity behavior for finite deformations, using a consistent hypoelastic model based on Rivlin materials // *Continuum Mech. Thermodyn*. 2016. V. 28. P. 1741–1758.
- [13] Bartier O., Hernot X., Mauvoisin G. Theoretical and experimental analysis of contact radius for spherical indentation // *Mechanics and Materials*. 2010. V. 42. P. 640–656.
- [14] Braun B., Deppler J., Fidlin A., Hochbruck M. Convergence of viscoelastic constraints to nonholonomic idealization // *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2016. V. 58. P. 140–147.
- [15] Giannakopoulos A. E., Triantafyllou A. Spherical indentation of incompressible rubber-like materials // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2007. V. 55. P. 1196–1211.
- [16] Jang Jae-Won, Hyung-Kyu Kim, Soon-Bok Lee Numerical and experimental investigation of a complete contact problem by comparing with an asymptotic analysis // *International Journal of Solids and Structures*. 2016. V. 82. P. 39–46.
- [17] Lin D. C., Shreiber D. I., Dimitriadis E. K., Horkay F. Spherical indentation of soft matter beyond the Hertzian regime: numerical and experimental validation of hyperelastic models // *Biomech Model Mechanobiol*. 2009. V. 8. P. 345-358.
- [18] Ramezani S., Naghdabadi R. Micropolar hypo-elasticity // *Arch Appl Mech*. V. 80 P. 1449–1461.
- [19] Zhang M. G., Cao Y. P., Li G. Y., Feng X. Q. Spherical indentation method for determining the constitutive parameters of hyperelastic soft materials // *Biomech Model Mechanobiol*. 2014. V. 13. P. 1–11.
- [20] Xiao H., Bruhns O. T., Meyers A. Objective stress rates, path-dependence properties and non-integrability problems // *Acta mechanica*. 2005. V.176, no 3-4. P. 135–151.

Л. В. Ковтанюк, В. И. Штука

ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН В УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ НЕСЖИМАЕМЫХ ТЕЛАХ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ЛУЧЕВЫХ РЯДОВ

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

Аннотация. На примере одномерной задачи о нагружении упруговязкопластического цилиндрического слоя с предварительными деформациями скручивающего типа демонстрируется применение метода лучевых рядов для получения приближённого решения с двумя близко расположенными поверхностями разрывов деформаций. Такое решение оказывается применимым при численных расчётах, которые проводятся в целях верификации соотношений метода а также распространения области его определения на времена существенно большие, чем предполагает использование только лучевого метода. Предположения малости обратимых или необратимых деформаций не делается, поэтому используется теория больших упругопластических деформаций, за счёт чего снимаются соответствующие вопросы выбора объективной производной и самого разделения полных деформаций на составляющие.

Ключевые слова: динамика твёрдого тела, численные методы, ударные волны, несжимаемость, лучевые ряды, необратимое деформирование

УДК: 539.3

Введение. С точки зрения вискозиметрии важные и интересные опыты состоят в употреблении соосно-цилиндрических вискозиметров для определения параметров вязкоупругих сред [23]. Исследуемый материал помещается в пространство между двумя жёсткими цилиндрами, один из которых приводится во вращение, а другой при этом испытывает закручивающее воздействие. При обработке экспериментальных данных, полученных с помощью таких приборов, необходимо знать точное решение краевой задачи, что в отношении вязких и вязкопластических жидкостей не

© Ковтанюк Л. В., Штука В. И., 2017

Ковтанюк Лариса Валентиновна

e-mail: lk@iacr.dvo.ru, доктор физико-математических наук, зав. лабораторией необратимого деформирования, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Штука Виктор Игоревич

e-mail: onslice@mail.ru, аспирант, инженер-математик, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-301-50007 "мол_нр".

Поступила 05.06.2017

является проблемой [21]. Учёт не только вязкопластических, но и упругих свойств материалов продиктован потребностями технологической практики, поскольку обратимые составляющие деформаций оказывают существенное влияние на окончательную картину распределения остаточных напряжений [11], а моделирование динамического нагружения в силу определённых причин лучше производить с учётом вязкости, чем без неё [15].

Процесс деформирования является сложным и нередко случаи, когда после окончания активного воздействия на твёрдое тело оно претерпевает значительные изменения и состояние его качественно отличается от первоначального. Чтобы моделировать и характеризовать подобные явления, необходимо иметь некоторый критерий разделения деформаций на обратимые (которые не определяют окончательной картины) и необратимые (которые вызывают изменения). Удовлетворительного критерия разделения полных деформаций не существует, поскольку его вид обусловлен произволом конструктора математической модели упруговязкопластической среды [8], [20]. Сами эти величины могут быть измерены лишь опосредованно при обращении к некоторым гипотезам, в то время как прямому измерению поддаются лишь полные деформации. Так, например, теория упругости изучает механику деформируемых твёрдых тел, которые после окончания действия внешних сил восстанавливают свою исходную форму. При значительных деформациях снятие нагрузки не приводит к полному её восстановлению. Деформации, которые сыграли при этом решающую роль, называются пластическими. Моделирование такого рода процессов учитывает различные подходы к определению необратимых деформаций, явлений нагрузки и разгрузки [8], [12].

Несмотря на сложность описания отклика упруговязкопластической среды на существенно нестационарные воздействия, при наличии свойства несжимаемости в ней будут распространяться поперечные ударные волны, причём скорости их в случае малых деформаций не будут отличными от скоростей ударных волн в несжимаемой упругой среде [4]. Иначе, полученные лучевым методом прифронтные асимптотики используются в разностных схемах с целью выделения разрывов и расчёта их интенсивностей в процессе распространения ударных волн. Качественный обзор [27] отражает отличительные характеристики метода лучевых рядов и всевозможные аспекты его применения к различным задачам нестационарного деформирования сплошных сред, обладающих разнообразными свойствами.

Для описания данных явлений поэтому была избрана теория больших необратимых деформаций, в которой разделение деформаций на составляющие является следствием дифференциальных определений, а в уравнениях переноса за счёт этого скорости пластических деформаций выступают в качестве источников. При этом выбирать объективную производную не приходится, поскольку её вид обусловлен термодинамическими соотношениями модели [8].

Применение метода С. К. Годунова [1], [2], [14] в задачах механики деформируемого твёрдого тела с целью выделения движущихся поверхностей разрывов невозможно, поскольку процессы распространения объёмных и сдвиговых явлений в твёрдых телах взаимосвязаны и взаимозависимы. Это обстоятельство делает затруднительным расчёт распада разрыва, потому непосредственное приложение метода выделения разрыва С.К. Годунова становится невозможным. Выход из такого положения находится в использовании схем сквозного счета и их различных модификаций. Однако такой подход не является универсальным, тем более что немонотонность схем в этом случае

заставляет прибегать к специальным приемам, в частности к введению искусственной вязкости, что вызывает неоправданное сглаживание разрывов. По-видимому первыми предложили конструктивную возможность реализации схемы, свободной от использования таких приёмов Новосибирские авторы [16].

Свойство вязкости естественным образом сказывается на решении ввиду формирования диссипативных явлений за ударными волнами, что приводит в конечном итоге к размытию разрыва, как раз за счёт появления необратимых деформаций. При численном моделировании была задействована апробированная на упругой задаче монотонная схема сквозного счёта с выделением и сохранением самого понятия разрыва [22]. К аналогичным работам [7], [13], где также описаны все моменты построения расчётных схем, сохраняющим сам разрыв, также можно обратиться поскольку в них были показаны особенности конструирования таких схем, специальные ограничения, положенные на величины шагов расчётной сетки, применительно к задачам с движущимися поверхностями сильных разрывов.

Модельные соотношения. Движение точек несжимаемой вязкоупругопластической среды при адиабатическом приближении в эйлеровых переменных x_1, x_2, x_3 определено системой

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}) - p\delta_{ij}, \quad v_i = \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \\ \alpha_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{kl}e_{lj}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad \frac{Dp_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij}^p + r_{ik}\varepsilon_{kj}^p + \varepsilon_{ik}^p r_{kj}, \quad r_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}, \\ z_{ij} &= A^{-1} (B^2 (\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj}) + B (\varepsilon_{ik}e_{kl}e_{lj} - e_{ik}e_{kl}\varepsilon_{lj}) + e_{ik}\varepsilon_{kl}e_{ln}e_{nj} - e_{ik}e_{kl}\varepsilon_{ln}e_{nj}), \\ A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3, \quad B = 2 - E_1, \\ E_1 &= e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}, \\ \dot{u}_i &= \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \frac{Dp_{ij}}{Dt} = \frac{dp_{ij}}{dt} + r_{ik}p_{kj} + p_{ik}r_{kj}. \end{aligned} \tag{1}$$

где: u_i, v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей; σ_{ij}, α_{ij} – компоненты тензоров напряжений Коши-Эйлера и полных деформаций; e_{ij}, p_{ij} – компоненты тензоров обратимых и необратимых деформаций; $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p$ – компоненты тензоров скоростей полных и необратимых деформаций; D/Dt – оператор объективной производной (по типу Коттера-Ривлина); p – функция добавочного давления; $\rho = const$ – плотность среды. Индекс после запятой обозначает частную производную по соответствующей координате, точка над символом – по времени.

Потенциал изотропной несжимаемой упругой среды W определён своим разложением по инвариантам тензора полных деформаций A_1, A_2 в ряд Тейлора относительно свободного состояния

$$\begin{aligned} W(A_1, A_2) &= -2\mu A_1 - \mu A_2 + bA_1^2 - (\mu - b) A_1 A_2 - aA_1^3 + \dots, \\ A_1 &= \alpha_{kk}, \quad A_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}. \end{aligned} \tag{2}$$

где: μ – модуль сдвига; a и b – модули упругости третьего порядка. Сокращение числа упругих постоянных связано с особенностями антиплоского деформирования [19].

В качестве условия пластичности был избран расширенный (с учётом вязкости) критерий Губера-Мизеса

$$\left(\tau_{ij} - \eta \varepsilon_{ij}^p\right) \left(\tau_{ji} - \eta \varepsilon_{ji}^p\right) = K^2, \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk},$$

где: η - коэффициент вязкости; K - предел текучести; ввиду чего зависимость скоростей пластических деформаций от напряжений получается следующей

$$\varepsilon_{ij}^p = \left(1 - \frac{K}{\sqrt{\tau_{lk}\tau_{kl}}}\right) \frac{\tau_{ij}}{\eta}. \quad (3)$$

Важно иметь явное выражение ассоциированного закона течения (3), чтобы использовать его в соотношениях метода и последующих расчётах с привлечением численных схем, поскольку ε_{ij}^p являются источниками необратимых деформаций (1), образующихся в теле, которое изначально их не имело ($p_{ij} = 0, \varepsilon_{ij}^p = 0$ – такое предположение делается именно в данной постановке).

Компоненты тензора напряжений Коши-Эйлера согласно (1) и (2) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -2\mu - p - \theta_1 m - \theta_2 m^2 + \dots, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{rr} + \mu e_{r\varphi}^2 - \theta_3 e_{rz}^2 m + \dots, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{rr} + \mu e_{rz}^2 - \theta_3 e_{r\varphi}^2 m + \dots, & \sigma_{\varphi z} &= 4(\mu + \theta_3 m + \dots) e_{rz} e_{r\varphi}, \\ \sigma_{r\varphi} &= 2\mu(1 + \chi m^2 + \dots) e_{r\varphi} = 2\rho h e_{r\varphi}, & \sigma_{rz} &= 2\mu(1 + \chi m^2 + \dots) e_{rz} = 2\rho h e_{rz}, \\ \theta_1 &= \frac{\mu + b}{2}, & \theta_2 &= \frac{3(a - b + \mu)}{4}, & \theta_3 &= -\frac{\mu - b}{2}, & \chi &= \frac{\theta_2}{\mu}, & m &= e_{r\varphi}^2 + e_{rz}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение движения (1) в развёрнутом виде выглядит следующим образом ($C = \sqrt{\mu/\rho}$)

$$\begin{aligned} p, r + r^{-1}(\mu e_{r\varphi}^2 - \theta_3 e_{rz}^2) + 2(\theta_1 + 2\theta_2 m)(e_{rz,r} e_{rz} + e_{r\varphi,r} e_{r\varphi}) &= r^{-1} \rho v_\varphi^2, \\ (e_{r\varphi,r} + 2r^{-1} e_{r\varphi})(1 + \chi m^2) + 4\chi(e_{rz,r} e_{rz} + e_{r\varphi,r} e_{r\varphi}) e_{r\varphi} m &= C^{-2} v_{z,t}, \\ (e_{rz,r} + r^{-1} e_{rz})(1 + \chi m^2) + 4\chi(e_{rz,r} e_{rz} + e_{r\varphi,r} e_{r\varphi}) e_{rz} m &= C^{-2} v_{z,t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Первая компонента системы (3) используется только для определения функции добавочного всестороннего давления (является производной величиной) уже по известным $e_{r\varphi}(r, t)$ и $e_{rz}(r, t)$.

В принципе, достаточно иметь представление системы (1) в деформациях. Однако, чтобы организовать пересчёт результатов на компоненты вектора перемещений, необходимо воспользоваться представлением

$$u_r = r(1 - \cos \psi(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin \psi(r, t), \quad u_z = u(r, t). \quad (6)$$

где функциями, определяющими поле деформаций, являются тангенциальная $\psi(r, t)$ и аксиальная $u(r, t)$ составляющие перемещения.

Ударные волны. Поскольку нестационарность воздействия предполагает существование механизмов переноса возмущений от границы вглубь среды, то естественными переносчиками таких явлений будут поверхности разрывов деформаций (ударные волны), характеристики которых определяются динамическим условием совместности

$$[\sigma_{ij}] n_j = \rho^+(v_j^+ n_j - G)[v_i], \quad (7)$$

где: $[f] = f^+ - f^-$ – разрыв функции; n_i – компоненты вектора внешней к поверхности разрывов нормали. В дальнейшем индекс "плюс" для обозначения состояния перед поверхностью разрывов опускается.

В рассматриваемом случае (7) сводится к системе трёх уравнений ($n_r = 1, n_\varphi = 0, n_z = 0$)

$$[\sigma_{rr}] = 0, \quad [\sigma_{r\varphi}] = -\rho G[v_\varphi], \quad [\sigma_{rz}] = -\rho G[v_z], \quad (8)$$

первое из которых позволяет выразить $[p]$, а следующие два дают условие, определяющие существование ударных волн. Для его получения в явном виде необходимо умножить второе уравнение системы (8) на $[v_z]$, третье – на $[v_\varphi]$, а затем вычесть одно из другого

$$[h] (e_{r\varphi}[v_z] - e_{rz}[v_\varphi]) + h ([e_{r\varphi}][v_z] - [e_{rz}][v_\varphi]) = 0. \quad (9)$$

Так как пластические деформации являются непрерывными ($[p_{ij}] = 0$) [3], имеем

$$[e_{r\varphi}][v_z] - [e_{rz}][v_\varphi] = 0. \quad (10)$$

Поэтому условие (10) является полностью аналогичным условию существования поверхностей сильных разрывов в упругой среде, рассмотренному в работе [22]. Там разделения деформаций на обратимые и необратимые не происходило. Следовательно распространяться будут также ударные волны двух типов, скорости которых вычисляются из выражения

$$G^2 = h - [h] + \frac{e_{r\varphi}}{[e_{r\varphi}]}[h] = h - [h] + \frac{e_{rz}}{[e_{rz}]}[h]. \quad (11)$$

В результате выводы относительно соотношений на поверхностях разрывов оказываются согласными с [22]. Представим их:

1. Выражение (9) выполняется при $e_{r\varphi}[v_z] - e_{rz}[v_\varphi] = 0$, т.е.

$$\frac{e_{r\varphi}}{[e_{r\varphi}]} = \frac{e_{rz}}{[e_{rz}]}.$$

Скорость распространения такой поверхности разрывов определяется из уравнения (11)

$$G_1 = \left(h - [h] + \frac{e_{r\varphi}}{[e_{r\varphi}]}[h] \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Такая ударная волна является плоскополяризованной по определению и называется волной нагрузки. Она не изменяет направление предварительного сдвига, однако увеличивает его. При отсутствии предварительной деформации антиплоского типа $e_{rz} = 0$ за поверхностью волны её значение останется прежним $e_{rz}^- = 0$, а предварительная деформация скручивающего типа ($e_{r\varphi} \neq 0$) возрастёт, поскольку ударные волны на которых происходило бы уменьшение предварительного сдвига невозможны. За подтверждением данного факта следует обратиться к термодинамическому условию совместности разрывов для несжимаемых сред (аналогу теоремы Цемпелена в газовой динамике).

$$\sigma_{ij}[v_i]n_j - (v_i n_i - G) \left([W] + \frac{\rho}{2}[v_j][v_j] \right) \geq 0.$$

2. Выражение (9) выполняется при $[m] = 0$. Этот случай соответствует нейтральной волне или волне круговой поляризации [5], скорость которой определена выражением

$$G_2 = h^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Такая волна не оказывает никакого влияния на интенсивность сдвига, а изменяет только его направленность. Скорость её распространения зависит от предварительного состояния среды, то есть от состояния за фронтом волны нагрузки. Для несжимаемой среды порядок следования поверхностей сильных разрывов чётко определён: $G_1 > G_2$. Данное обстоятельство было показано ещё в работе [6]. Это также несложно заметить, обратившись к явному виду выражений для скоростей ударных волн.

Лучевой метод. Изначально лучевой метод был применён именно к упругопластическим средам [25], [3]. Авторы упомянутых подходов, однако, даже не рассматривали вариант применения подобных разложений к задачам с ударными волнами. Предложенный в начале 90-х годов приём [10] позволил разрешить этот вопрос посредством введения дополнительного разложения на ударных волнах [28]. Полагаем, что: несжимаемая упругая среда, движение которой определено соотношениями (1), (2) заполняет собой цилиндрический слой, расположенный между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями $r = r_0$ и $r = R$ ($R > r_0$). На внешней границе $r = R$ выполняется условие жёсткого закрепления. На внутренней границе $r = r_0$ задана тангенциальная составляющая перемещений $\psi(r_0, t) = \psi_0$, определяющая предварительные ($t \leq 0$) деформации в слое (6). Для времени $t > 0$ краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} \psi(r_0, t) &= \psi_0, & \psi(R, t) &= 0, \\ u(r_0, t) &= u_1 t + u_2 t^2/2, & u(R, t) &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

чем инициируют развитие аксиального воздействия и распространение ударных волн.

Расходящихся поверхностей сильных разрывов: Σ_1 и следом за ней Σ_2 . В работах [9], [17] описываются альтернативные подходы к решению задач о нагружении предварительно недеформированных несжимаемых сред, за счёт чего в них распространяется лишь одна поверхность сильных разрывов. На рисунке 1 римской цифрой I обозначена область перед волной нагрузки Σ_1 (присутствуют скручивающие деформации), II - между Σ_1 и волной поляризации Σ_2 , III - за Σ_1 .

Приближённое решение в области II представляется в форме лучевого ряда

$$\begin{aligned} u(r, t) &= -\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \frac{(t-t_1)^j}{j!}, & \psi(r, t) &= \psi(r) - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \frac{(t-t_1)^j}{j!}, \\ \kappa_j &= \left[\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{t=t_1}, & \lambda_j &= \left[\frac{\partial^j \psi}{\partial t^j} \right]_{t=t_1}, & t_1 &= \int_0^r G_1^{-1}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Волна нагрузки движется согласно (12) со скоростью

$$G_1 = C \left(1 + \chi e_{r\varphi}^4 \left(5 - 10 \frac{r\lambda_1}{C e_{r\varphi}} + 10 \left(\frac{r\lambda_1}{C e_{r\varphi}} \right)^2 - 5 \left(\frac{r\lambda_1}{C e_{r\varphi}} \right)^3 + \left(\frac{r\lambda_1}{C e_{r\varphi}} \right)^4 \right) + \dots \right). \quad (16)$$

Уравнения лучевого метода на волне нагрузки

$$\frac{\delta \lambda_1}{\delta t} = \lambda_1 \left(-\frac{C}{r} + \frac{5}{8} \chi \frac{e_{r\varphi}^3}{C} (\lambda_2 - C^2 e_{r\varphi, r}) \right) + \dots, \quad \kappa_2 = 0. \quad (17)$$

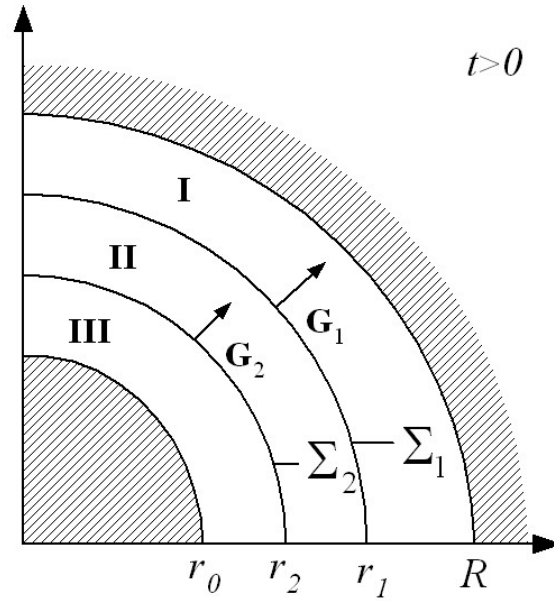


Рис. 1. Схема распространения цилиндрических ударных волн

За второй поверхностью разрывов запишем лучевые ряды

$$u^-(r, t) = u(r, t) - \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \frac{(t - t_2)^j}{j!}, \quad \psi^-(r, t) = \psi(r, t) - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \frac{(t - t_2)^j}{j!}, \quad (18)$$

$$\eta_j = \left[\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{t=t_2}, \quad \omega_j = \left[\frac{\partial^j \psi}{\partial t^j} \right]_{t=t_2}, \quad t_2 = \int_0^r G_2^{-1}(\xi) d\xi.$$

Скорость распространения волны круговой поляризации получается из (13) и имеет вид

$$G_2 = C \left(1 + \chi e_{r\varphi}^4 \left(1 - 4 \frac{r\lambda_1}{C e_{r\varphi}} + 6 \left(\frac{r\lambda_1}{C e_{r\varphi}} \right)^2 - 4 \left(\frac{r\lambda_1}{C e_{r\varphi}} \right)^3 + \left(\frac{r\lambda_1}{C e_{r\varphi}} \right)^4 \right) + \dots \right). \quad (19)$$

Уравнения лучевого ряда на волне круговой поляризации

$$\frac{\delta \omega_1}{\delta t} = \omega_1 \left(-\frac{1}{2} \frac{C}{r} + 2\chi \frac{e_{r\varphi}^3}{C} (\lambda_2 - C^2 e_{r\varphi, r}) \right) +$$

$$+ \chi e_{r\varphi}^2 \lambda_1 \left(3\omega_1 \left(\frac{e_{r\varphi}}{r} + 2 \left(\frac{\lambda_2}{C^2} - e_{r\varphi, r} \right) \right) + 2 \frac{\omega_2 e_{r\varphi}}{C} \right) + \dots, \quad (20)$$

$$\eta_2 = -\frac{r^2 \omega_1 \omega_2}{C e_{r\varphi}} \left(1 - \frac{4}{5} \frac{\lambda_1}{C e_{r\varphi}} (1 - \chi e_{r\varphi}^4) \right) - 2 \frac{\mu}{\eta} r \omega_1 + \dots$$

Как видно из уравнений (17), (20) коэффициент затухания интенсивности волны нагрузки определяется множителем $-\frac{C}{r}$ при λ_1 , аналогичный параметр для волны

поляризации множителем $-\frac{1}{2}\frac{C}{r}$ при ω_1 . Поэтому существенная доля в явлении затухания ударных волн приходится на геометрические эффекты, однако доля нелинейных эффектов может быть с ней сравнимой при существенном граничном воздействии.

Разрывы скоростей и ускорений представлены рядами уже относительно эйконалов согласно модификации лучевого метода, предложенной в [10]

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{jk} \frac{t_1^k}{k!}, \quad \lambda_{jk} = \left[\frac{\delta^k \lambda_j}{\delta t^k} \right]_{t_1=0}, \quad \omega_j = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{jk} \frac{t_2^k}{k!}, \quad \omega_{jk} = \left[\frac{\delta^k \omega_j}{\delta t^k} \right]_{t_2=0}, \quad (21)$$

благодаря которой были получены аналитические выражения при решении упругой задачи, как за волной нагрузки, так и за волной круговой поляризации.

$$\lambda_{10} = \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{C e_{r\varphi}(r_0)} + \dots, \quad \lambda_{20} = C^2 r e_{r\varphi,r}(r_0) + 2 \frac{u_1}{C} \left(\frac{u_2}{e_{r\varphi}} + C \frac{\mu}{\eta} \right) + \dots, \quad (22)$$

$$\omega_{10} = -u_1, \quad \omega_{20} = -u_2.$$

Помимо коэффициентов лучевых рядов, а следовательно и разложений искомым функций за поверхностями разрывов, получены значения эйконалов

$$t_1 = \frac{r - r_0}{C (1 + 5\chi e_{r\varphi}^2(r_0) (e_{r\varphi}^2(r_0) + 2C^{-1}\lambda_{10} (C^{-1}\lambda_{10} - e_{r\varphi}(r_0))))} - \frac{5\chi\lambda_{11}e_{r\varphi}^2(r_0) (2C^{-1}\lambda_{10} - e_{r\varphi}(r_0)) (r - r_0)^2}{C^3 (1 + 5\chi e_{r\varphi}^2(r_0) (e_{r\varphi}^2(r_0) + 2C^{-1}\lambda_{10} (C^{-1}\lambda_{10} - e_{r\varphi}(r_0))))^3} + \dots, \quad (23)$$

$$t_2 = \frac{r - r_0}{C (1 + \chi e_{r\varphi}^2(r_0) (e_{r\varphi}^2(r_0) + 2C^{-1}\lambda_{10} (3C^{-1}\lambda_{10} - 2e_{r\varphi}(r_0))))} - \frac{2\chi\lambda_{11}e_{r\varphi}^2(r_0) (3C^{-1}\lambda_{10} - e_{r\varphi}(r_0)) (r - r_0)^2}{C^3 (1 + \chi e_{r\varphi}^2(r_0) (e_{r\varphi}^2(r_0) + 2C^{-1}\lambda_{10} (3C^{-1}\lambda_{10} - 2e_{r\varphi}(r_0))))^3} + \dots$$

Лучевой метод позволяет получить и следующие коэффициенты в разложениях (15) и (18), для чего следует разрешить второй и последующие шаги метода записью в разрывах продифференцированного по времени уравнения движения. Однако, ограничившись заданием краевых условий в форме рядов их квадратичным представлением по времени (14), первого шага лучевого метода оказывается достаточно, чтобы полностью замкнуть систему.

Существенной особенностью рассматриваемой задачи является моментальный выход на активное нагружение, который обусловлен соответствующим предварительным состоянием среды ($p_{ij} = 0, \varepsilon_{ij}^p = 0$), а также граничным воздействием, которое сразу приводит к проявлению необратимых деформаций ($\tau_{ij}\tau_{ji} \geq K^2$). Следовательно ударная волна нагрузки является локомотивом, который тянет за собой все диссипативные явления, а волна поляризации, как и полагается, идёт следом уже в зоне вязкопластического ядра. Пластические деформации в соответствующих областях определяются посредством соотношения

$$p_{ij}^- = p_{ij}^+ - [\dot{p}_{ij}] (t - t_{\Sigma}) - [\ddot{p}_{ij}] (t - t_{\Sigma})^2 - \dots \quad (24)$$

В случае необходимости определения остаточных деформаций, необходимо воспользоваться данным разложением и проделать те же действия, которые описаны в работе [4].

Определение добавочного давления по уже известным $e_{r\varphi}(rt)$ и $e_{rz}(rt)$ не представляет особых сложностей, за исключением производства аналитических и численных расчётов, но является важным с точки зрения получения полного решения поставленной задачи.

Численное моделирование. Полученное в предыдущем разделе с помощью модифицированного лучевого метода решение (22) может считаться справедливым только для малых последударных времён. Обусловлено это тем, что в выражениях (21), описывающих эволюцию интенсивности разрывов и (15), (18), представляющих непосредственно движение точек сплошной среды после прохождения через них ударной волны, содержится ограниченное число слагаемых, которые не в состоянии обеспечить асимптотический характер интенсивностям ударных волн. Поэтому при расчётах, основанных на чисто приближённом решении необходимо ограничиваться некоторым значением времени t_q , величина которого обусловлена несколькими факторами.

Поскольку расчётная область $t > t_q$ и $r \in [r_0; r_2]$ разбивается равномерной сеткой с шагом Δt по времени и Δr по пространственной координате, а уравнение движения записывается в дискретизированном виде, то сама возможность записи второй производной функций для шаблона с центральными разностями будет определяться величиной шага. То есть желание как можно раньше производить учёт состояния среды по уравнению движения за волной поляризации вызывает необходимость уменьшения шага, что в свою очередь приводит к увеличению расчётного времени. Эти явления уже относятся к области оптимизации и определения некоторого оптимального критерия, который бы определял взаимосвязь всех этих параметров.

При $t > t_q$ в расчётную схему включается процедура удовлетворения уравнениям динамики (5) в той части области, где уже прошла ударная волна поляризации и где возможно записать в разностном виде вторые производные по времени функций $\psi(r, t)$ и $u(r, t)$.

Также близ фронта волны происходит обращение к лучевым разложениям (15) и (18), только с неизвестными коэффициентами в рядах (21), вычислять которые придётся посредством решения сложной системы нелинейных алгебраических уравнений. Для реализации означенного подхода применяется специальная неявная конечно-разностная схема. Функции в узлах с координатами r_i и t_j записываются посредством индексов

$$\psi_{i,j} = \psi(r_i, t_j), \quad u_{i,j} = u(r_i, t_j).$$

Положения фронтов поверхностей разрывов деформаций $r_1(t)$ и $r_2(t)$ в момент времени $t = t_j$ обозначены x_j и y_j соответственно. Для неявной конечно-разностной схемы с центральными разностями аппроксимация производных функций, входящих в уравнение движения, записывается так

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta r}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta r^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \approx \frac{\psi_{i,j} - 2\psi_{i,j-1} + \psi_{i,j-2}}{\Delta t^2}.$$

Таким образом, в текущий момент времени t_j для точек $r \in [r_0; y_{j-2}]$ (именно в этой области возможна разностная запись $\ddot{\psi}$ и \ddot{u}) исходному уравнению движения ставится в соответствие его дискретный аналог в виде системы нелинейных алгебраических уравнений. В качестве краевых условий используются значения функций на нагружаемой границе (14) и их значения, вычисленные посредством лучевых рядов в ближайшем к $r = y_{j-2}$ узле. Таким образом определяется поле перемещений за второй ударной волной за исключением прифронтальной зоны, где записать дискретизированное

уравнение движения невозможно. Предполагается, что в этой зоне функции и также описываются лучевыми рядами в форме (15), (18) с той лишь разницей, что значения дельта-производных аппроксимируются выражениями

$$\frac{\delta\omega_1}{\delta t} \approx \frac{\omega_{1,j} - \omega_{1,j-1}}{\Delta t}, \quad \omega_{1,j} \approx \omega_{1,j-1} + \frac{\delta\omega_1}{\delta t} \Delta t, \quad \omega_{2,j} \approx \omega_{2,j-1}.$$

После при помощи метода наименьших квадратов решается задача минимизации невязки лучевого разложения решения, полученных интегрированием уравнения динамики на нескольких соседних точках близ границы $r = y_{j-2}$. Этим завершается текущий шаг алгоритма по времени: во всей области за ударной волной круговой поляризации определены перемещений точек среды и получены значения величин разрывов.

Таким образом, численная схема получается замкнутой и реализуется методом простых итераций. Естественным образом, необходимо пересчитывать значений функций в ближайших к поверхности разрывов точках. Однако только так возможно достичь хорошего качества исполнения алгоритма и повысить его точность. Для наглядности на рисунке 2 представлена маркировка узлов расчётной сетки, где: 'o' – записаны лучевые ряды, '+' – где решается дискретный аналог уравнения движения.

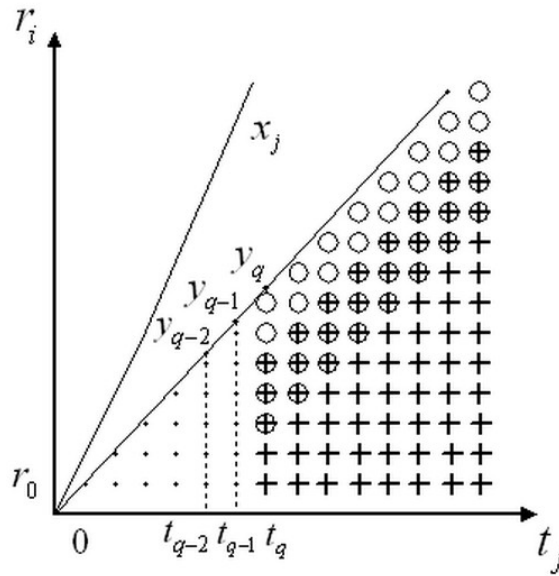


Рис. 2. Маркировка узлов расчётной сетки

Ввиду линейной аппроксимации интенсивностей разрывов на волнах нагрузки и круговой поляризации (21) время t_q , начиная с которого производится учёт уравнения движения (5) в области за второй ударной волной, не должно быть слишком большим, поскольку для него существует ещё ограничение. Приближённое решение для интенсивности ω_1 представляет собой линейную функцию и не следует допускать ситуации, когда она обратится в нуль. Поэтому $t_q < 2r_0/C$. При учёте следующих слагаемых в (21) можно показать, что ω_1 стремится к нулю асимптотически.

Схема с центральными разностями даёт хорошее приближение к решению и имеет порядок $O(\Delta t^2)$ за счёт чего при уменьшении шага сетки в 2 и 4 раза относительное отклонение полученного решения от предыдущего (менее точного) составило 5 и 3 % соответственно, а расчётное время увеличилось примерно в 4 и 16 раз. Подобные особенности численного моделирования свидетельствуют о сходимости и устойчивости неявной конечно-разностной схемы (был смоделирован отклик при различных параметрах нагрузки и свойствах среды), благодаря которой удалось отойти от естественных для метода лучевых рядов ограничений (малости послеударных времён), определить поля напряжений, деформаций (полных, обратимых и необратимых) и расширить область их определения.

Результаты экспериментов. Для верификации полученного приближённого решения и применения разработанного алгоритма расчёта был проведён ряд численных экспериментов, чтобы рассмотреть влияние различных граничных воздействий и параметров материала на распределение полей напряжений и деформаций. При различных параметрах материала а также размерах ячейки сеточной области отклонения решений находились в рамках допустимой погрешности, что является свидетельством устойчивости расчётной схемы. Представленные ниже графики приведены для материала с параметрами: $c = 55$ м/с, $\chi = 200$, $\mu = 2,6 \cdot 10^6$ Па, $K = 1.01\mu$, $\eta = 2,6 \cdot 10^6$ Па/с. Геометрию слоя определяют внешний и внутренний радиусы: $r_0 = 10^{-2}$ м, $R = 2 \cdot 10^{-2}$ м. Условия на внутренней границе следующие: $\psi_0 = 10^{-2}$, $u_1 = 10$ м/с, $u_2 = 200$ м/с². На рисунках 3 и 4 представлены эпюры (всего 10 штук, с указанием моментов времени, для которых они показаны) осевого смещения u , нормированной касательной компоненты тензора напряжений Коши-Эйлера $\sigma_{\varphi z}/\mu$, компоненты тензора необратимых деформаций p_{rz} , рассчитанная по данным (4) и (24), эволюция интенсивности ω_1 , где момент включения в расчётную схему уравнения движения (5) и определения состояния за поверхностями разрывов соответствует стыку линейного и нелинейного участков ($t_q \approx 10^{-5}$).

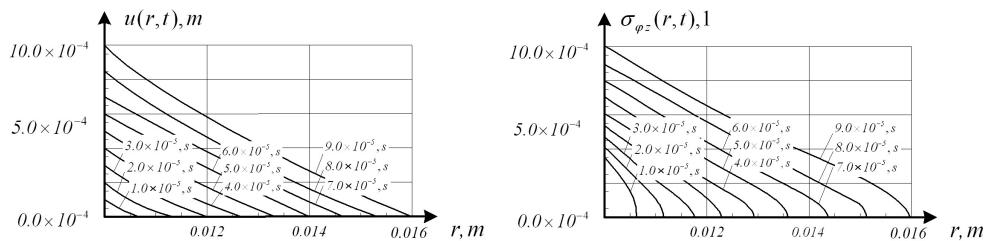


Рис. 3. Аксиальное смещение точек слоя и компонента тензора напряжений

Заключение. На основании приближённого метода лучевых рядов и специально устроенной конечно-разностной расчётной схемы был смоделирован отклик вязкоупругопластической среды на ударное граничное воздействие, которое вызывало распространение в предварительно продеформированном несжимаемом цилиндрическом слое двух поверхностей сильных разрывов. Было показано существенное влияние предварительного сдвига на скорости ударных волн, и, главным образом, их число. В

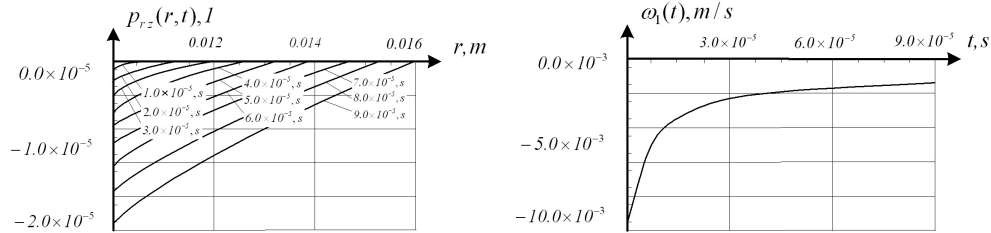


Рис. 4. Компонента тензора необратимых деформаций и изменение интенсивности

средах, пребывающих в свободном состоянии до момента начала нагружения возможно распространение лишь одной поперечной волны нагрузки [9], [17]. За счёт использования в конечно-разностной схеме расчётов прифронтных разложений решения за поверхностями сильных разрывов (ударных волн) удалось на каждом временном шаге расчётов указать положение как ударной волны нагрузки, так и ударной волны круговой поляризации и вычислить величины возможных разрывов (интенсивностей ударных волн). Это позволило получить решение задачи для времён существенно больших по сравнению с тем временем, когда справедливо приближённое решение при непосредственном вычислении коэффициентов лучевого ряда согласно задаваемым граничным условиям на нагружаемой поверхности. Модель больших упругопластических деформаций послужила хорошим подспорьем при учёте диссипативных явлений. За счёт уравнения переноса пластических деформаций, где скорости таких деформаций выступают в роли источника удалось построить решение для областей за ударными волнами. Результаты расчётов показывают зависимость напряжённого состояния от необратимых деформаций, которые обязательно сказываются на всём процессе при активном нагружении. Ввиду зависимости скорости пластических деформаций от напряжённого состояния, влияние одних явлений на другие здесь чрезвычайно сильно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алалыкин Г. Б., Годунов С. К., Киреева И. Л., Плинер Л. А. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М.: Наука, 1976. 112 с.
- [2] Афанасьев С. Б., Баженов В. Г. О численном решении одномерных нестационарных задач упругопластического деформирования сплошных сред методом Годунова // Прикл. проблемы прочн. и пласт. Горький: Из-во ГГУ, 1986. Вып. 33. С. 21–29.
- [3] Бабичева Л. А., Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д. Лучевой метод решения задач в упруго-вязкопластических средах // Прикладная математика и механика, 1973. Т. 37, № 1. С. 145–155.
- [4] Безгласный П. А., Вервейко Н. Д. О распространении ударных волн в упруговязко-пластической среде // Механика твёрдого тела, 1971. № 5, С. 71–76.
- [5] Буренин А. А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства // Прикладная механика, 1985. № 25 (5). С. 3–8.
- [6] Буренин А. А., Дудко О. В., Лаптева А. А. К закономерностям распространения деформаций изменения формы // Сибирский журнал индустриальной математики, 2011. Т. 14, № 4. С. 14–23.

- [7] Буренин А. А., Зиновьев П. В. К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред // Проблемы механики. Сборник статей к 90-летию А. Ю. Ишлинского. М. : Физматлит, 2003. С. 146–155.
- [8] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с. ISBN 978-5-8044-1423-9.
- [9] Буренин А. А., Рагозина В. Е. К построению приближенных решений краевых задач ударного деформирования // Механика твёрдого тела, 2008. № 2. С. 106–113.
- [10] Буренин А. А., Россихин Ю. А. О влиянии вязкости на характер распространения плоской продольной волны // ПМТФ, 1990. № 6. С. 13–17.
- [11] Буренин А. А., Устинова А. С. Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчётом упругого отклика после остановки течения и разгрузки // В сб. Успехи механики сплошных сред. К 70-летию В. А. Левина. Владивосток: Дальнаука, 2009. С. 91–102.
- [12] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [13] Герасименко Е. А., Завертан А. В. Расчеты динамики несжимаемой упругой среды при антиплоском и скручивающем ударе // Вычислительная механика сплошных сред, 2008. Т. 1, № 3. С. 46–56.
- [14] Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
- [15] Зволинский Н. В., Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Динамика деформируемых твёрдых тел // В кн. : Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1972. С. 291–323.
- [16] Иванов Г. В., Волчков Ю. М., Богульский И. О., Анисимов С. А., Кургузов В. Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твёрдых тел. Новосибирск: Сибирское универс. Из-во, 2002. 352 с.
- [17] Иванова Ю. Е. Эволюционные уравнения в описании ударных движений несжимаемой упругой среды // Вестник ДВО РАН, 2006. № 4. С. 118–122.
- [18] Локшин А. А., Сагомоян Е. А. Нелинейные волны в механике твёрдого тела: Метод факторизации. М.: Московский Университет, 1989. 144 с. ISBN 5-211-00326-8.
- [19] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [20] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 319 с. ISBN 978-5-9221-1409-7.
- [21] Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965. 224 с.
- [22] Севастьянов Г. М., Штука В. И., Буренин А. А. Лучевой метод в приближённом решении задачи об ударном нагружении несжимаемого цилиндрического слоя // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2015. № 4 (26). С. 50–62.
- [23] Шрамм Г. Основы практической реологии и реометрии / Пер. с англ. И. А. Лавыгина. М.: КолосС, 2003. 321 с.
- [24] Энгельбрехт Ю. К. О нелинейных волнах деформации в релаксирующей и неоднородной средах // Материалы симпозиума "Нелинейные волны деформации". Таллин, 31 января – 3 февраля 1978 г. Часть 1. С. 169–184.
- [25] Achenbach J. D., Reddy D. R. Note on wave propagation in lineary viscoelastic media // Zeitschr. fur angew. Match. und Phus., 1967. Vol. 18, № 1. P. 141–144.
- [26] Boa-The Chu. Transverse shock waves in incompressible elastic solids. J. Mech. Phys. Solids, 1967. Vol. 15. P. 1–14.

[27] Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // *Appl. Mech. Rev.*, 1995. Vol. 48. № 1. P. 1–39.

[28] Tomas T. Y. *Plastic Flow and fracture in solids*. New York, London: Academic Press, 1961. 271 p.

L. V. Kovtaniuk, V. I. Shtuka

INVESTIGATION OF CYLINDRICAL SHOCK WAVES IN ELASTOVISCOPLASTIC INCOMPRESSIBLE BODIES USING THE METHOD OF RAY SERIES

Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. The one-dimensional problem of loading elastoviscoplastic cylindrical layer with preliminary deformations of a twisting type demonstrates the application of the method of ray series to obtain an approximate solution with two closely spaced discontinuity surfaces for example. This solution proves to be applicable in numerical calculations, which are conducted for the purpose of verification of the method relations and for the extension of the scope of its definition at times that are substantially longer than the use of only the ray method. Assumptions of smallness of reversible or irreversible deformation are not done, therefore the theory of large elastoplastic deformations is used, due to which the questions of the choice of the objective derivative and the separation of finite deformations into components.

Keywords: solid dynamics, elastoviscoplasticity, shock waves, incompressibility, numerical methods, ray series

REFERENCES

- [1] Alalykin G. B., Godunov S. K., Kireeva I. L., Pliner L. A. Solution of one-dimensional problems of gas dynamics in moving grids. Moscow : Nauka. 1976. – 112 p. (in Russian).
- [2] Afanasiev S. B., Bazhenov V. G. About the numerical solution of one-dimensional nonstationary problems of elastoplastic deformation of continuous media by the Godunov method // Applied problems of strength and plasticity. Gorkii: GSU Publishing House, 1986. – Issue 33. P. 21–29. (in Russian).
- [3] Babicheva L. A., Bykovtsev G. I., Verveiko N. D. The ray method for solving problems in visco-elastic-plastic media // Applied Mathematics and Mechanics, 1973. – Vol. 37, № 1. P. 145–155. (in Russian).
- [4] Bezglasnyi B. N., Varveiko N. D. On shock deformation of an incompressible elastic half-space // Applied Mechanics, 1971. – № 5. P. 71–76. (in Russian).
- [5] Burenin A. A. About the shock deformation of an incompressible elastic half-space // Applied Mechanics, 1985. – № 25 (5). P. 3–8. (in Russian).
- [6] Burenin A. A., Dudko O. V., Lapteva A. A. By the patterns of distribution change of shape deformations // Siberian Journal of Industrial Mathematics, 2011. – Vol. 14, № 4. P. 14–23. (in Russian).
- [7] Burenin A. A., Zinoviev P. V. On the problem of the separation of discontinuity surfaces in numerical methods for the dynamics of deformable media // Problems of

Kovtaniuk Larisa Valentinovna

e-mail: lk@iacp.dvo.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Laboratory of Irreversible Deformation, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Shtuka Victor Igorevich

e-mail: onslice@mail.ru, Post-Graduate Student, Mathematician Engineer, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Mechanics. Collection of articles for the 90th anniversary of A. Yu. Ishlinskii. Moscow : Fizmatlit, 2003. P. 146–155. (in Russian).

[8] Burenin A. A., Kovtaniuk L. V. Finite irreversible deformations and elastic aftereffects. Vladivostok : Dalnauka, 2013. – 312 p. ISBN 978-5-8044-1423-9. (in Russian).

[9] Burenin A. A., Ragozina V. E. To the construction of approximate solutions of boundary value problems of shock deformation // *Solid Mechanics*, 2008. – № 2. P. 106–113. (in Russian).

[10] Burenin A. A., Rossikhin Yu. A. Ray method for solving one-dimensional problems of nonlinear dynamic theory of elasticity with flat surfaces breaks *Applied problems of mechanics of deformable media*. Vladivostok : FEB AS USSR. 1990. P. 129–137. (in Russian).

[11] Burenin A. A., Ustinova A. S. Development and braking of a viscoelastic screw flow with the calculation of the elastic response after stopping the flow and unloading // *Successes in Continuum Mechanics*. Collection of articles for the 70th anniversary V. A. Levin. Vladivostok : Dalnauka, 2009. P. 91–102. (in Russian).

[12] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. *Theory of plasticity*. Vladivostok : Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).

[13] Gerasimenko E. A., Zavertan A. V. The calculations of the dynamics of an incompressible elastic medium and twisting at impact antiplane // *Computational Continuum Mechanics*. 2008. – Vol. 1, № 3. P. 46–56. (in Russian).

[14] Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Prokopov G. P. *Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics*. Moscow : Nauka, 1976. – 400 p. (in Russian).

[15] Zvolinskii N. V., Reightman M. I., Shapiro G. S. *Solid dynamics* // In the Book : *Mechanics in the USSR for 50 years*. – Vol. 3. *Solid Mechanics*. Moscow : Nauka, 1972. P. 291–323. (in Russian).

[16] Ivanov G. V., Volchkov Yu. M., Bogulskii I. O., Anisimov S. A., Kurguzov V. D. *Numerical solution of dynamic problems of elastoplastic deformation of solids*. Novosibirsk: SSU Publishing House. 2002. – 352 p. (in Russian).

[17] Ivanova Yu. E. Evolution equations in the description of shock motions of an incompressible elastic medium // *Vestnik FEB RAS*, 2006. – № 4. P. 118–122. (in Russian).

[18] Lokshin A. A., Sagomonian E. A. *Nonlinear waves in the mechanics of solids: The method of factorization*. Moscow : MSU Publishing House, 1989. – 144 p. ISBN 5-211-00326-8. (in Russian).

[19] Lurie A. I. *Nonlinear theory of elasticity*. Moscow : Nauka, 1980. 512 p. (in Russian).

[20] Markin A. A., Sokolova M. Yu. *Thermomechanics of elastoplastic deformation*. Moscow : Fizmatlit, 2013. – 319 p. ISBN 978-5-9221-1409-7. (in Russian).

[21] Reiner M. *Rheology*. Moscow : Nauka, 1965. – 224 p. (in Russian).

[22] Sevastyanov G. M., Shtuka V. I., Burenin A. A. The ray method in approximate solve of shock loading of noncompressible cylindrical layer problem // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2015. № 4 (26). P. 50–62. (in Russian).

[23] Shramm G. *Basics of practical rheology and rheometry* / Translation from English by I. A. Lavygin. Moscow : KolosS, 2003. – 321 p. (in Russian).

[24] Engelbreight Yu. K. About the nonlinear deformation waves in a relaxing and inhomogeneous medium // *Symposium materials "Nonlinear deformation waves Tallin*, January 31 – February 3, 1978. Part 1. – P. 169–184. (in Russian).

- [25] Achenbach J. D., Reddy D. R. Note on wave propagation in lineary viscoelastic media // Zeitschr. fur angew. Match. und Phus., 1967. – Vol. 18, № 1. P. 141–144.
- [26] Boa-The Chu. Transverse shock waves in incompressible elastic solids. J. Mech. Phys. Solids, 1967. – Vol. 15. P. 1–14.
- [27] Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. Mech. Rev., 1995. – Vol. 48, № 1. P. 1–39.
- [28] Tomas T. Y. Plastic Flow and fracture in solids. New York, London : Academic Press, 1961. – 271 p.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@gmail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@inbox.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матченко Николай Михайлович (eks_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marusbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спори́хин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига, Латвия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стил `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Немировский Ю. В., Федорова Н. А.</i> Решение плоской задачи для металлокомпозиата, армированного одним семейством криволинейных волокон.....	3
<i>Мионов Б. Г., Мионов Ю. Б.</i> К вопросу о кручении призматических стержней с включением	18
<i>Немировский Ю. В., Мозгова А. С.</i> Определение тепловых потерь на участке слоистого трубопровода тепловых сетей	23
<i>Коробкин В. Д., Ордян М. Г.</i> Построение непрерывного поля скоростей перемещений для осесимметричной задачи теории пластичности	33
<i>Галимзянова К. Н., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л.</i> Ползучесть и пластическое течение материала упругопластического сферического слоя в условиях всестороннего гидростатического сжатия	37
<i>Немировский Ю. В., Тихонов С. В.</i> Динамика железобетонных балок на вязко-упругом основании.....	45
<i>Микишанина Е. А.</i> Исследование коэффициента фильтрации упруго-пористой плиты при нагружении.....	65
<i>Немировский Ю. В., Станиславович А. В.</i> Теплопроводность слоистых ортотропных круглых и кольцевых пластин.....	71
<i>Илларионов И. Е., Стрельников И. А.</i> О применении техногенных отходов в литейном производстве.....	83
<i>Чекмарев Г. Е.</i> Соотношения предельного состояния для пространственных тел из вязкопластического материала.....	93
<i>Алиев М. М., Гилязова С. Р., Шафиева С. В.</i> Плоская деформация анизотропной среды, подчиняющейся нелинейной закономерности Кулона – Мора....	99
<i>Астапов Ю. В.</i> Внедрение сферического индентора в основание упругого и гипопругого круговых цилиндров при конечных деформациях.....	108
<i>Ковтанюк Л. В., Штука В. И.</i> Исследование цилиндрических ударных волн в упруговязкопластических несжимаемых телах с помощью метода лучевых рядов	119
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	136
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	139
СОДЕРЖАНИЕ	141

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2017. № 2 (32)**

Отв. за выпуск: А. В. Балашникова

Технические редакторы: А. В. Балашникова, Е. В. Мурашкин, С. В. Тихонов

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова

Макет: А. В. Балашникова

Подписано в печать 24.03.2017. Выход в свет 31.03.2017.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 16,5.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38