

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал
№ 4(34)
Октябрь – декабрь 2017 г.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов,
Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко,
С. А. Редкозубов, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев,
А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж
(Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

Адрес редакции и издательства: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://limit21.ru>

© ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева», 2017

Ю. В. Немировский^{1, 2}

МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГЕОВЕББЕТОННЫХ МОСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ВОЗДУШНЫХ ЭСТАКАДНЫХ ДОРОГ

¹Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. Применительно к мостовым и эстакадным сооружениям коробчатых и широкополых тавровых сечений разработана математическая модель напряженно-деформированного состояния бетонных конструкций армированных геовебом. Структура армирования геовебом в различных частях конструкции может быть различной.

Ключевые слова: бетонные балки, армирование геовебом, коробчатые, тавровые сечения, напряжения, деформации, перемещения, сложный продольно-поперечных изгиб.

УДК: 539.3

Опыт успешного применения геосинтетических материалов в строительной практике насчитывает уже более чем полувековой срок [1]-[5]. Такие материалы используются для армирования дорожных конструкций, усиления грунтов земляного полотна и оснований дорожных одежд, при устройстве подпорных стенок, для предотвращения оползней, обеспечения дренажа и укрепления откосов. Применение геосинтетики при проектировании, строительстве, реконструкции, ремонте и эксплуатации автомобильных дорог и других транспортных коммуникаций позволяет компенсировать недостатки грунтов и дорожно-строительных материалов, повысить их физико-механические свойства и в ряде случаев привести к созданию совершенно новых материалов и несущих конструктивных элементов. В последние годы в связи с намечающимися планами освоение Северо-Восточной и Приполярных регионов нашей страны обсуждаются серьезные проблемы оперативного создания надежных и долговечных транспортных

© Немировский Ю. В., 2017

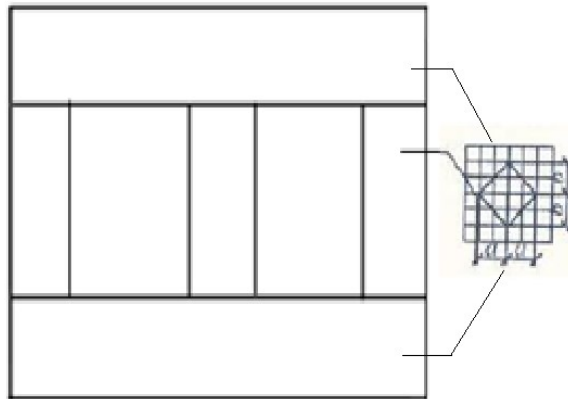
Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

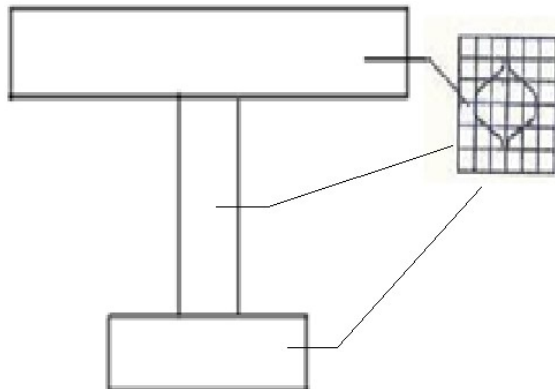
Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №17-41-210272).

Поступила 10.07.2017

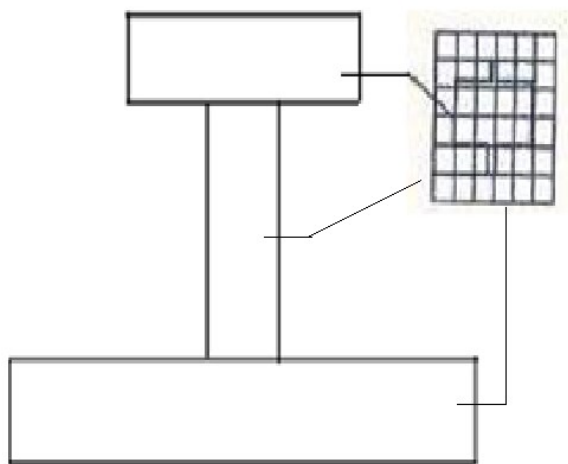
магистралей для этих районов. Вследствие массивной заболоченности рассматриваемых регионов и слабости грунтовых оснований традиционные методы строительства протяженных транспортных магистралей оказывается экономически и практически мало пригодными. Одним из возможных способов решения проблемы могло бы выступить создание протяженных воздушных из геовибетонных сооружений на колоннадных геовибетонных основаниях. В поперечном направлении трассы сечения сооружений могут иметь вид коробчатых (фиг. 1) или широкополых тавровых балок (фиг. 2а и 2б) с различными структурами геоармирования полок и стенок (фиг. 3,4), опирающихся на колоннадную геовибетонную трассу. При создании элементов геовибетонных конструкций целесообразно использовать специальные марки саморасширяющихся климатически устойчивых кау- и полимербетонов. При разработке методики расчёта рассматриваемых конструкций следует учитывать особенности деформирования фазовых материалов (полимеров и бетонов). Как известно [1]-[3],[8],[9] как бетоны, так и полимеры обладает существенным свойством разносопротивляемости при растяжении или сжатии. Причём, при растяжении они деформируются практически, как линейно упругие материалы, а при сжатии диаграммы их деформирования имеют ярко выраженный нелинейный характер. В связи с этим в диапазоне деформаций между предельно допустимыми деформациями ($-\varepsilon_*^-$) и (ε_*^+) фазовых материалов, связь напряжений σ с деформациями и температурой T для бетонов и полимеров может быть представлена в единообразной форме



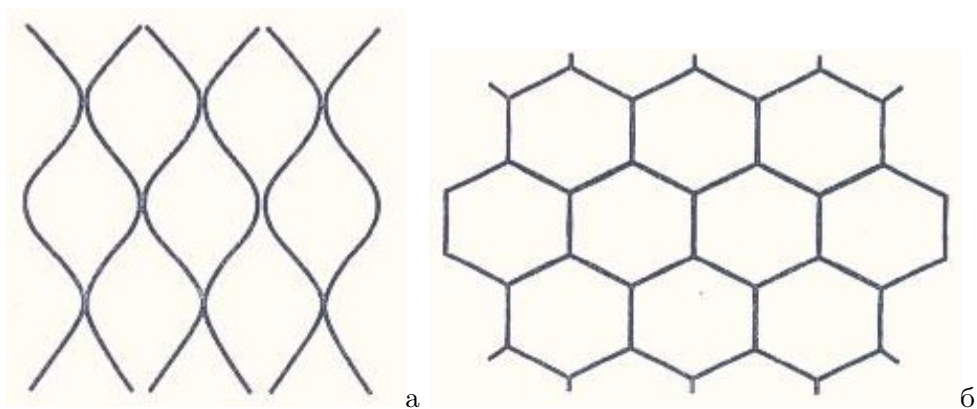
Фигура 1



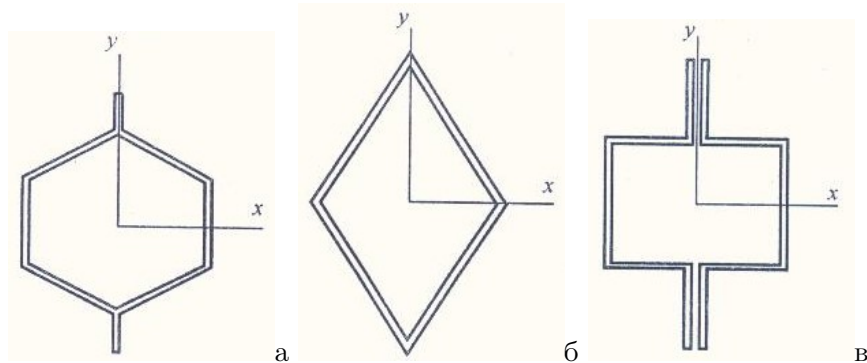
Фигура 2а



Фигура 2б



Фигура 3 Сотовые структуры для армирования а: geoweb, б: armater



Фигура 4 Характерные ячейки армирующей структуры а: гексагональная; б: ромбическая; в: прямоугольная

$$\sigma = A_1 (\varepsilon - \alpha T) + A_2 (\varepsilon - \alpha T)^2 \quad (1)$$

$$\sigma = B_1 (\varepsilon - \beta T) + B_2 (\varepsilon - \beta T)^2 \quad (2)$$

где A_1 , A_2 , B_1 , B_2 - характеристики механического деформирования бетонов и полимеров, α , β - коэффициенты температурного расширения бетонов и полимеров. Тогда,

используя модели геовебматериалов, разработанные в [5]-[8] в случае закономерностей деформирования фазовых материалов в форме (1), (2) для i -го геовеббетонного элемента получим зависимость

$$\sigma_i = C_{1i}\varepsilon^2 + C_{2i}\varepsilon + C_{3i}\varepsilon T + C_{4i}T^2 + C_{5i}T \quad (3)$$

где в коэффициентах C_{1i}, \dots, C_{5i} отражены параметры удельного содержания армирующего материала, геометрической формы армирующей ячейки, физико-механические характеристики ($A_{1i}, B_{1i}, A_{2i}, B_{2i}, \alpha_i, \beta_i$) бетона и армирующего материала. В общем случае рассматриваемые конструкции деформируются в условиях сложного продольно-поперечного изгиба. Для упрощения получающихся в дальнейшем формул будем считать, что структуры рассматриваемых гибридных стержней и распределенных нагрузок согласованы так, что они в процессе нагружения вовсе не вызывают эффектов закручивания, либо они столь незначительные, что ими можно пренебречь. Деформации и перемещения будем считать малыми. Введем системы декартовых координат x, y, z с осью x , совпадающей с осью стержня. Тогда уравнения равновесия будут иметь вид

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q_y - \frac{dm_z}{dx}, \quad \frac{d^2 M_y}{dx^2} = q_z - \frac{dm_y}{dx}, \quad \frac{dN}{dx} = -q_x \quad (4)$$

Здесь N - проекция вектора внутреннего усилия на ось x , M_z, M_y - проекции вектора внутреннего момента на оси z, y . Величины q_x, q_y, q_z - проекции вектора распределенной нагрузки, приложенной к оси стержня, m_z, m_y - проекции вектора распределенной нагрузки на оси z, y . Интегрируя уравнение (4), получим выражения для внутренних усилий

$$\begin{aligned} N(x) &= N(0) + \int_0^x q_x(x) dx \\ M_z(x) &= M_z(0) - Q_y(0)x - \int_0^x m_z(x) dx + \int_0^x \left[\int_0^x q_y(x) dx \right] dx \\ M_y(x) &= M_y(0) - Q_z(0)x - \int_0^x m_y(x) dx + \int_0^x \left[\int_0^x q_z(x) dx \right] dx \end{aligned} \quad (5)$$

В случае статически определимых задач значения начальных усилий определяется из условий равновесия узловых сечений. В противном случае необходимо привлекать дополнительные стандартные кинематические условия. Принимая справедливой традиционную теорию плоских сечений Кирхгофа, для выражения связи деформаций $\varepsilon(x, y, z)$ с компонентами вектора перемещения $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ будем иметь выражения

$$\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_0(x) - y\kappa_z(x) - z\kappa_y(x) \quad (6)$$

$$\varepsilon_0(x) = \frac{du_0}{dx}, \quad \kappa_y(x) = \frac{d^2 v_0}{dx^2}, \quad \kappa_z(x) = \frac{d^2 w_0}{dx^2} \quad (7)$$

Интегрируя соотношения (7), получим

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= u_0(0) + \int_0^x \varepsilon_0(x) dx, \\
v_0(x) &= v_0(0) + \varphi_y(0)x + \int_0^x \left[\int_0^x \kappa_y(x) dx \right] dx, \\
\varphi_y(x) &= \varphi_y(0) + \int_0^x \kappa_y(x) dx, \\
w_0(x) &= w_0(0) + \varphi_z(0)x + \int_0^x \left[\int_0^x \kappa_z(x) dx \right] dx, \\
\varphi_z(x) &= \varphi_z(0) + \int_0^x \kappa_z(x) dx
\end{aligned} \tag{8}$$

Величины $u_0(0)$, $v_0(0)$, $w_0(0)$, $\varphi_y(0)$, $\varphi_z(0)$ находим из условий закрепления стержня. Связь напряжений с деформацией и температурой в i -м геобетонном элементе определяется выражением (3), а связь между обобщенными усилиями N , M_z , M_y и напряжениями σ_i

$$N = \sum_{i=1}^n \int_{F_i} \sigma_i dF, \quad M_y = \sum_{i=1}^n \int_{F_i} \sigma_i z dF, \quad M_z = \sum_{i=1}^n \int_{F_i} \sigma_i y dF \tag{9}$$

После подстановки выражений (3) и интегрирования получим значения N , M_y , M_z в виде полиномов второго порядка от трех неизвестных ε_0 , κ_z , κ_y . В случае статически определимых задач решение получающейся системы нелинейных алгебраических уравнений можно определить численно с помощью известных итерационных процедур [10]. После чего необходимо использовать формулы (8). Более сложные процедуры решения будут возникать в случае статически неопределимых задач. Тогда подставляя вышеупомянутые полиномиальные зависимости N , M_y , M_z от ε_0 , κ_z , κ_y в уравнения (4) будем получать систему трех нелинейных дифференциальных уравнений для функций $u_0(x)$, $v_0(x)$, $w_0(x)$. Приближенные решения этой системы можно получать с помощью некоторых модификаций метода Бубнова-Галеркина [11].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Синтетические текстильные материалы в транспортном строительстве / под редакцией В. Д. Казарновского. М.: Транспорт, 1984. 160 с.
- [2] Синтетические текстильные материалы в конструкциях автомобильных дорог: Сб. научных трудов М.: Союздороги, 1980. 138 с.
- [3] Смирнов А. Р. Прикладная механика дорожных и аэродромных конструкций. Омск: ОмГУ, 1993. 128 с.
- [4] Koerner R. M. Designing with geosynthetics, 2nd edition Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice Hall, 1990.
- [5] Матвеев С. А., Немировский Ю. В. Автомобильные дорожные покрытия. Моделирование и расчет. Новосибирск: Наука, 2006. 346 с.
- [6] Nemirovsky Ju. V., Matveev S. A. Construction of settlement model of the soil reinforce with cellular system. //News of high schools. Construction. №9. 2002. P. 95–101.
- [7] Matveev S. A., Nemirovsky Ju. V. Phisico-mechanical properties of the composite Cellular system cell infill material. Geosintetics // Proc. of the 8th Internat. Conference on Geosyntetics (SICG). Vol. 4. 2006. P. 1627–1630.
- [8] Крижановский В. К., Бурлов В. В., Паниматченко А. Д., Крыжановская Ю. В. Технические свойства полимерных материалов. Санкт-Петербург: Профессия, 2005. 235 с.
- [9] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Особенности расчета дерево-железобетонного балочного моста // Вестник СибАДИ. 2016. №5. С. 114–124.
- [10] Ortega J. M., Rheinboldt W. C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. New York: London Academic Press, 1970.
- [11] Fletcher C. A. J. Computational Galerkin Methods. New York: Springer Verlag, 1984.

Yu. V. Nemirovskii

**MODELING AND CALCULATION OF DEFORMATION OF GEOWEB
CONCRETE BRIDGE STRUCTURES, ELEVATED ROADS AND AIR**

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics S.A.Christianovich Siberian Branch of the
Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

Abstract. In the case of bridge and trestle structures of box and wide-section T-sections, a mathematical model of the stress-strain state of concrete structures reinforced by the geoweb. The structure of the reinforcement by the geoweb in different areas of the structure may be different.

Keywords: concrete beams, geoweb reinforcement, box-shaped, T-sections, stresses, deformations, displacements, complex longitudinal-transverse bending.

REFERENCES

- [1] Sinteticheskie tekstil'nye materialy v transportnom stroitel'stve / pod redakciej V. D. Kazarnovskogo. M.: Transport, 1984. 160 s. (in Russian)
- [2] Sinteticheskie tekstil'nye materialy v konstrukciyah avtomobil'nyh dorog: Sb. nauchnyh trudov M.: Soyuzdorogi, 1980. 138 s. (in Russian)
- [3] Smirnov A. R. Prikladnaya mekhanika dorozhnyh i aehrodromnyh konstrukcij. Omsk: OmGU, 1993. 128 s. (in Russian)
- [4] Koerner R. M. Designing with geosynthetics, 2nd edition Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice Hall, 1990.
- [5] Matveev S. A., Nemirovskij YU. V. Avtomobil'nye dorozhnye pokrytiya. Modelirovanie i raschet. Novosibirsk: Nauka, 2006. 346 s. (in Russian)
- [6] Nemirovskij Ju. V., Matveev S. A. Construction of settlement model of the soil reinforce with cellular system. //News of high schools. Construction. №9. 2002. P. 95–101.
- [7] Matveev S. A., Nemirovskij Ju. V. Phisico-mechanical properties of the composite Cellular system cell infill material. Geosynthetics // Proc. of the 8th Internat. Conference on Geosynthetics (SICG). Vol. 4. 2006. P. 1627–1630.
- [8] Krizhanovskij V. K., Burlov V. V., Panimatchenko A. D., Kryzhanovskaya YU. V. Tekhnicheskie svojstva polimernyh materialov. Sankt-Peterburg: Professiya, 2005. 235 s. (in Russian)
- [9] Nemirovskij YU. V., Boltaev A. I. Osobennosti rascheta derevo-zhelezobetonnoho balochnogo mosta // Vestnik SibADI. 2016. №5. С. 114–124. (in Russian)
- [10] Ortega J. M., Rheinboldt W. C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. New York: London Academic Press, 1970.
- [11] Fletcher C. A. J. Computational Galerkin Methods. New York: Springer Verlag, 1984.

Nemirovskij Yuri Vladimirovich

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S.A.Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia.

А. А. Манцыбора, М. В. Полоник

К ПРОБЛЕМЕ УЧЕТА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ И ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА ИСТИРАНИЯ ЗЕРНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

*Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,
г. Владивосток*

Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

Аннотация. На основе полученных экспериментальных данных и численного анализа изучаются прочностные свойства композитных материалов в процессе их истирания. Особое внимание уделено стадиям, предшествующим разрушению материала. Численное моделирование проведено в программном комплексе ANSYS.

Ключевые слова: трибология, механика контактного взаимодействия, композитные материалы, истирание, бетон, разрушение, численное моделирование.

УДК: 539.421:691.327

Введение. В транспортных, гидротехнических сооружениях, поверхности которых подвергаются абразивному изнашиванию, широкое применение в качестве как конструкционных, так и защитных материалов, получили зернистые композиты на полимерных либо цементных вяжущих.

В процессе эксплуатации таких материалов их более мягкая структура разрушается, а более твердая – обнажается. Это приводит к потере эффективной толщины и изменению конструктивной схемы элементов. Эти особенности процессов истирания и разрушения необходимо учитывать при прогнозировании ресурсов зернистых композитов.

В данной статье особое внимание будет уделено строительным композитам, а именно бетону, на цементном вяжущем. По сравнению с конструкциями из металла, керамики и других материалов, для оценки прочности и долговечности конструкций из бетонов применение теоретических и экспериментальных методов механики контакта

© Манцыбора А. А., Полоник М. В., 2017

Манцыбора Александр Анатольевич

e-mail: manzubor@iasp.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток.

Полоник Марина Васильевна

e-mail: arolonik@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук; доцент, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток.

Поступила 11.10.2017

затруднено из-за особенностей структуры бетонов. Поэтому в течение длительного времени изучение стойкости к истиранию бетонов осуществляется экспериментально. Составы бетонных смесей также выбираются по результатам экспериментов [1-3].

При математическом моделировании процесса истирания бетонной поверхности возникают проблемы, в первую очередь связанные с существенной неоднородностью данного материала. Модели изнашивания бетона с учетом его неоднородной структуры отражены в работах [1, 3-4]. В этих работах износ поверхности представлен как результат выпадения зерен заполнителя из цементно-песчаной матрицы. Выпадение зерен происходит при их оголении на определенную величину, сопоставимую с размером крупного заполнителя. В то же время на протяжении достаточно длительного эксплуатационного периода конструкций истирание поверхности происходит только за счет износа тонких приповерхностных слоев. В связи с этим достаточно сложно выбрать критерии применения математических моделей изнашивания бетонной поверхности на различных структурных уровнях.

В настоящей работе на основе полученных экспериментальных данных и численных расчетов изучаются прочностные свойства композитных материалов в процессе их истирания. Особое внимание уделено стадиям предшествующим разрушению материала. Численные расчеты осуществлялись на основе построенной имитационной модели в программном комплексе ANSYS.

Обоснование выбора структурных уровней на основе полученных экспериментальных данных Процесс изнашивания, согласно [1-3, 5], может быть разделен на следующие возможные стадии:

стадия I – начальная, в которой происходит процесс изнашивания цементного камня, сольватных оболочек и обнажение зерен крупного и мелкого заполнителей;

стадия II – нормальная эксплуатационная, в которой происходит процесс истирания зерен крупного заполнителя и цементно-песчаной матрицы, причем с разной скоростью, зависящей от их физических свойств; после обнажения поверхности зерен крупного заполнителя поверхность представлена совокупностью областей с различными трибологическими характеристиками;

стадия III – разрушения поверхности бетона. Здесь возможны два случая: случай 1 – происходит усталостное разрушение матрицы (объемное микрорастрескивание) между зернами крупного заполнителя, приводящее к их выпадению, что характерно для бетона с малопрочной цементно-песчаной матрицей; случай 2 – прорастание усталостной макротрещины на границе между зернами крупного заполнителя и цементно-песчаной матрицей, что характерно для высокопрочных бетонов.

В работе [2] выбор структурных уровней обоснован экспериментально. С целью уточнения границ применения математических моделей был проведен ряд опытов с использованием истирающего круга ЛКИ-3 по стандартной методике (ГОСТ 13087) [6]. В результате было установлено, что в определенный, достаточно продолжительный период времени горизонтальные деформации материала незначительны и стабильны (стадии I и II). Далее происходило скачкообразное увеличение величины и амплитуды деформаций (переход в стадию III). Наибольшие горизонтальные деформации наблюдались на высоте 0.7-1.5 максимального размера крупного заполнителя, а не в непосредственной близости от истираемой грани. Это объясняется работой сил трения. С помощью датчиков была зафиксирована максимальная концентрация деформаций на жестких включениях, что объясняется концентрацией напряжений вокруг жестких включений. В [2] также были проведены испытания для развития

усталостной трещины. Результаты эксперимента показали, что причиной прорастания трещины на контакте является достижение относительными деформациями предельных для бетона значений. Трещина прорастает постепенно с определенной скоростью. Скорость прорастания зависит от пути.

Экспериментальные исследования показали, что процесс износа поверхности бетона на начальных этапах (стадия I, II) происходит в достаточно тонких (< 1 мм) слоях и не приводит к изменению структуры материала в приповерхностной зоне. Скорость истирания зависит от трибологических характеристик поверхности бетона. В дальнейшем это позволило более гибко использовать математический аппарат механики контактного взаимодействия.

Математическое моделирование начальной и эксплуатационной стадий Математическое моделирование процесса истирания в начальной (I) стадии, исходя из полученных экспериментальных данных, сводится к моделированию истирания однородного тела [5, 7-9]. Степень изнашивания задается $-\partial w^*/\partial t$ и зависит от скорости ν , давления p на контакте поверхности, твердости материала H , а также от параметров, имеющих определенное значение для каждого механизма процесса изнашивания и используемых для его моделирования.

Математическое моделирование в стадия II сводится к моделированию неравномерного изнашивания материала с неоднородной структурой. Более мягкая структура мелкого заполнителя цементной матрицы разрушается, в результате чего достаточно ровная поверхность становится волнообразной – зерна крупного заполнителя обнажаются на поверхности. Применение математической модели, используемой для I стадии, здесь невозможно. Процесс изнашивания необходимо рассматривать одновременно на микроуровне – истирание поверхности заполнителя; и мезоуровне – разрушение цементной матрицы. Последнее приводит к изменению формы поверхности [1-2, 4]. Поэтому здесь приемлемо использование математических инструментов механики фрикционного взаимодействия [10-11]. При этом давление p и скорость ν – постоянные, а процесс установившийся. Поверхность бетона представлена как упругое полупространство с областью, усиленной в круговых областях. Расстояние между центрами усиленных зон вдоль на одной оси равны l . Применение данной математической модели для включений различных геометрических форм (окружность, квадрат, шестиугольник), подробно описано в [5, 7-9, 12-13]. Представленные в интегральной форме решения учитывают как геометрические параметры упрочненных областей и их количество, так и трибологические характеристики материала (параметры, характеризующие степень упрочнения, и относительный размер упрочненной зоны). Полученные численные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными [2, 5, 14, 15] и позволяют сформулировать рекомендации для подбора состава и технологических параметров строительных композитов с высокой прочностью и износостойкостью.

Численное моделирование стадии истирания предшествующей разрушению Следует заметить, что, прежде чем рассмотреть III стадию (стадию разрушения), построим имитационную модель и сравним ее с экспериментальными данными. Все построения и расчеты будем производить с использованием одного из известных специальных программных пакетов для инженерных расчетов механики (ANSYS). На рис. 1 представлен бетонный кубик, который неоднократно подвергался истиранию по верхней поверхности, как это было описано ранее в экспериментальной части статьи.



Рис. 1. Экспериментальный образец

Построенная в Ansys область выбранного объекта (рис. 1) включает в себя не только упрочненные области (А) и матрицу мелкого заполнителя (В), но и микропоры (С) (рис. 2). При имитационном моделировании рассмотрим возможные варианты, предшествующие стадии разрушения III при приложенной нагрузке, как указано на рис. 2. Расчеты проводились для заданных параметров материала (таб. 1), и приложенных нагружающих усилий $P_x = 6.9$ МПа, $P_x = 1.1$ МПа.

Материал	Модуль Юнга, Е, ГПа	Коэффициент Пуассона, ν
Цементно-песчаная матрица (В)	20	0,16
Песчаник кварцевый (жесткие включения) (А)	46	0,21

Таблица 1. Параметры материала

Максимальные сжимающие и растягивающие усилия σ_x достигаются на поверхностях материала в окрестности жестких включений, что подтверждено экспериментально рис. 3.

На рис. 4 представлены максимальные напряжения σ_y : в окрестностях между жесткими включениями; в окрестностях микропор; в окрестностях микропор и жестких включений. Таким образом, чем больше микропор в матрице мелкого заполнителя (рис. 4), тем материал менее прочный. Дальнейшая эксплуатация такого материала

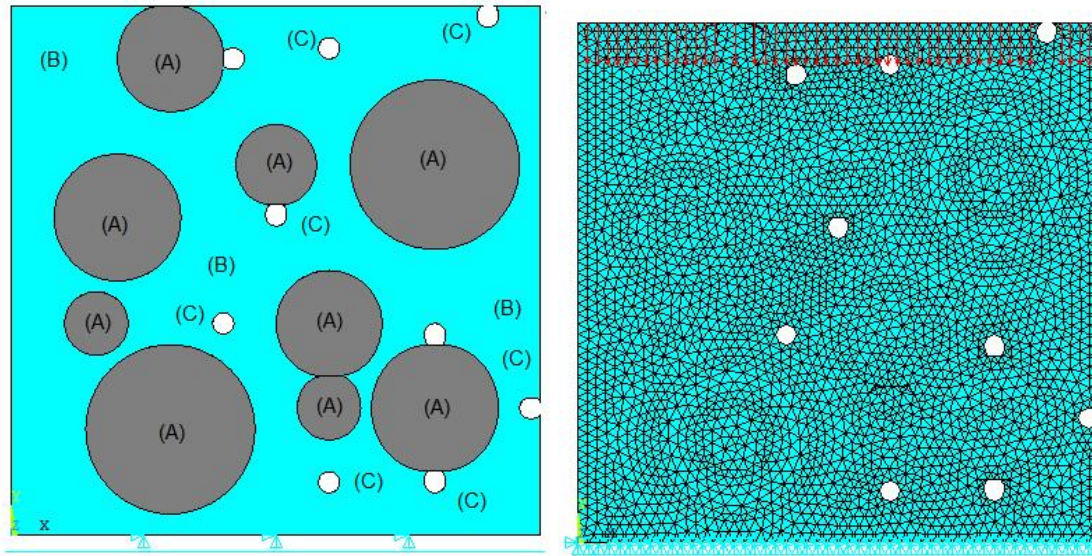
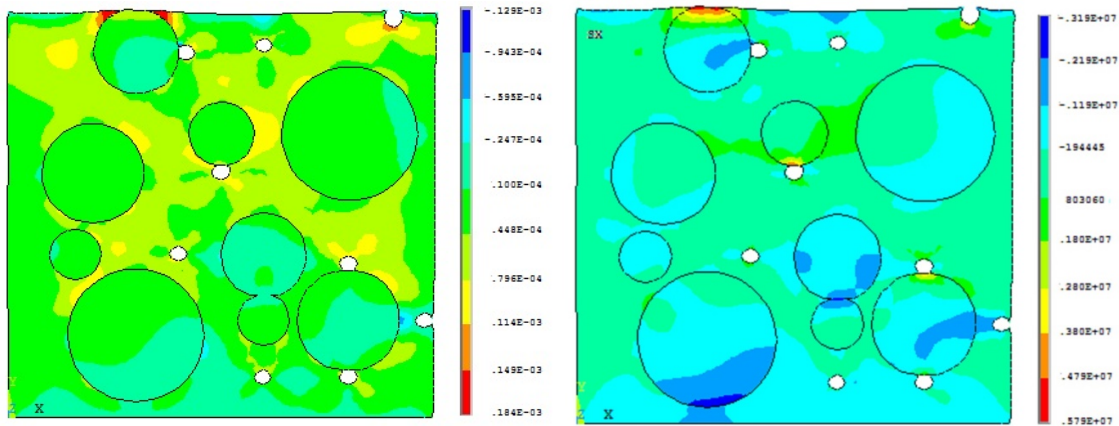


Рис. 2. Графическая реализация экспериментального образца

Рис. 3. Распределение в истираемой среде деформаций d_x и напряжений σ_x соответственно

приведет к 1 случаю усталостного разрушения – к микро-растрескиванию. Как показывает эксперимент, это как раз и характерно для бетонов с малопрочной цементно-песчаной матрицей.

Для жестких включений, близких к поверхности истирания (рис. 4), произойдет прорастание усталостной макротрещины на границе между зернами крупного заполнителя и цементно-песчаной матрицей (случай 2) и выпадение зерна. Как показывает эксперимент, это характерно для высокопрочных бетонов.

С помощью имитационной модели (рис. 3 – рис. 5), как и при эксперименте, была зафиксирована максимальная концентрация деформаций на жестких включениях, и максимальная концентрация напряжений в окрестности жестких включений.

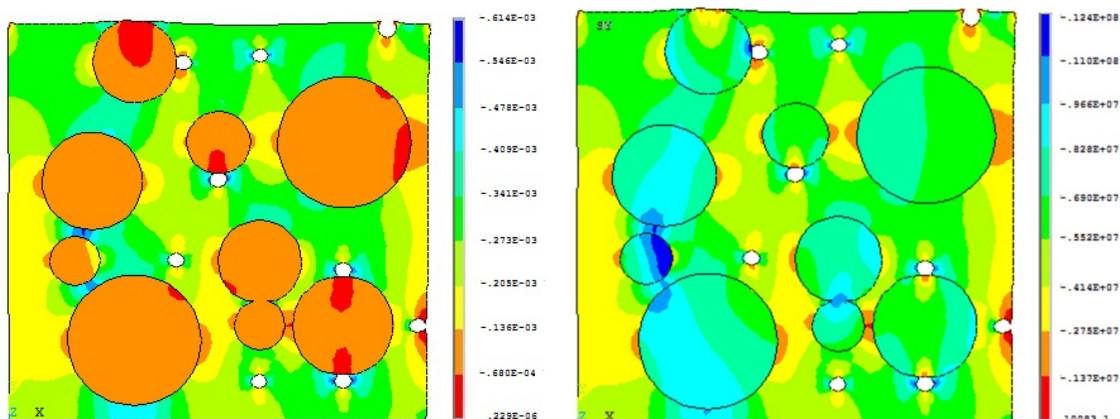


Рис. 4. Распределение в истираемой среде деформаций d_y и напряжений σ_y соответственно

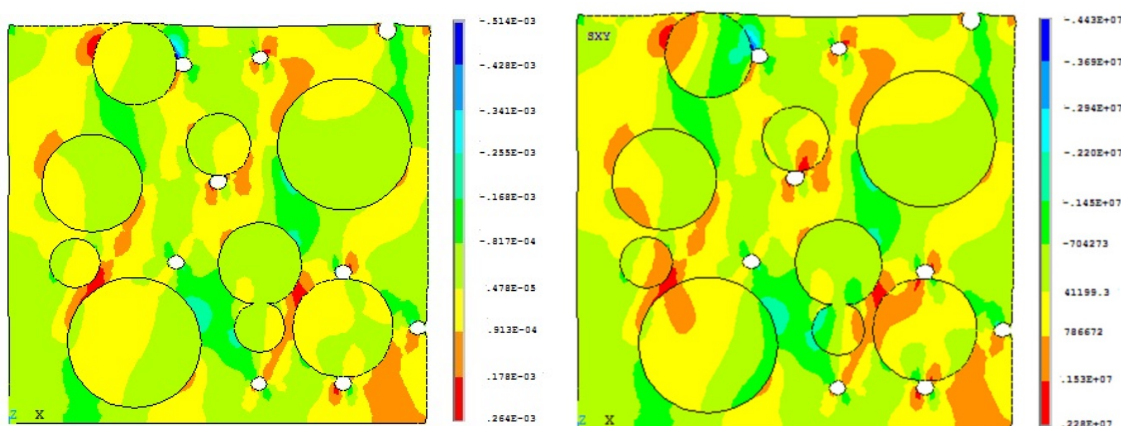


Рис. 5. Распределение в истираемой среде деформаций d_{xy} и напряжений σ_{xy} соответственно

Выводы. Таким образом, и экспериментальные, и численные расчеты показывают возможность разрушения неоднородного материала по двум возможным направлениям: микро-растрескивание или выпадение зерен крупного заполнителя у поверхности. Однако, какое из направлений реализуется, предсказать заранее невозможно. Это зависит не только от трибологических характеристик исследуемого материала, но и от наличия в нем неизвестного количества микропор и жестких включений. Поэтому моделирование таких случайных процессов необходимо осуществлять либо с помощью специальных вероятностных методов (например, методом Монте-Карло), либо с использованием имитационного моделирования в программных пакетах типа ANSYS. Построенная в ANSYS имитационная модель хорошо согласуется с экспериментальными данными. Эта модель позволяет оценить максимальные и минимальные уровни напряжений и деформаций в представленном образце и прогнозировать зарождение трещин.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Itoh Y., Yoshida A., Tsuchiya M., Katoh K. An experimental study on abrasion of concrete due to sea ice. Proc. of Offshore Technology Conference, 1988. P. 297–305.
- [2] Макарова Н. В. Об учете неоднородности при моделировании процесса истирания бетона // Вестник гражданских инженеров. 2009. № 3. С. 137–139.
- [3] Makarova N. V. Experimental and theoretical investigation on abrasion strength of concrete. Assessment of Reliability of Materials and Structures: Problems and Solutions: Proceedings of the Intern. Conference. SPb.: Polytechnic Univ. Publ., 2008. P. 219–224.
- [4] Saeki H., Asai Y., Izumi K., Takeuchi T. Study of the abrasion of concrete due to sea ice. The 20th Marine Development Symposium. Japan, 1988.
- [5] Макарова Н. В., Полоник М. В. К проблеме учета неоднородности при моделировании процесса истирания бетона // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. 2(8) С. 326–332.
- [6] Гост 13087–81. Бетоны. Методы определения истираемости. GOST 13087–81.
- [7] Makarova N. V., Polonik M. V. Modeling of the wear on the concrete at the micro- and mesolevels on the basis of experimental findings // FEFU: School of Engineering Bulletin. 2012. N 1 (10). P. 116–120
- [8] Makarova N. V., Polonik M. V. Abrasion Wear of Heterogeneous Materials // Applied Mechanics and Materials. 2013. №248. P. 355–360. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.248.355.
- [9] Makarova N. V., Polonik M. V. Modelling the influence of structural and compositional parameters on the abrasion resistance of concrete. Proceedings of the International Offshore and Polar Engineering Conference, 2012. P. 67–71.
- [10] Горячева И. Г. Контактные задачи теории упругости для системы изнашивания штампов // Известия РАН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 62–68.
- [11] Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
- [12] Makarova N. V., Polonik M. V., Rogachev E.E. Abrasion deterioration of inhomogeneous materials // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2012. № 4(14). С. 164–173.
- [13] Макарова Н. В., Полоник М. В. Формирование рельефа истираемой поверхности неоднородных материалов // Механика деформируемого твердого тела. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (4). С. 1591–1593.
- [14] Makarova N. V. Relations between Concrete Structural Parameters and Abrasion Resistance // Applied Mechanics and Materials. 2013. P. 1259–1262. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.357-360.1259.
- [15] Макарова Н. В., Полоник М. В. Моделирование процесса разрушения бетонной поверхности при абразивном износе // Долговечность строительных материалов, изделий и конструкций: материалы Всероссийской научно-технической конференции, посвященной памяти заслуженного деятеля науки Российской Федерации, академика РААСН, доктора технических наук профессора Соломатова Василия Ильича / редкол.: В.П.Селяев [и др.]; отв. ред. Т.А.Низина. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2016. С. 76–80. ISBN 978-5-7103-3299-3.

A. A. Mantsybora, M. V. Polonik

THE PROBLEM OF ACCOUNTING OF EXPERIMENTAL DATA AND NUMERICAL MODELING THE GRANULAR COMPOSITE ABRASION

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok

Far Eastern Federal University, Vladivostok

Abstract. Based on the obtained experimental data and numerical calculations, the strength properties of composite materials in the process of abrasion are examined. Particular attention is paid to the stages preceding the destruction of the material. Numerical calculations were carried out in the software package ANSYS.

Keywords: tribology, the mechanics of contact interaction, composite materials, abrasion, concrete, structure deterioration, numerical modeling.

REFERENCES

- [1] Itoh Y., Yoshida A., Tsuchiya M., Katoh K. An experimental study on abrasion of concrete due to sea ice. Proc. of Offshore Technology Conference, 1988. P. 297–305.
- [2] Makarova N. V. Ob uchete neodnorodnosti pri modelirovanii processa istiraniya betona // Vestnik grazhdanskikh inzhenerov. 2009. № 3. С. 137–139. (in Russian)
- [3] Makarova N. V. Experimental and theoretical investigation on abrasion strength of concrete. Assessment of Reliability of Materials and Structures: Problems and Solutions: Proceedings of the Intern. Conference. SPb.: Polytechnic Univ. Publ., 2008. P. 219–224.
- [4] Saeki H., Asai Y., Izumi K., Takeuchi T. Study of the abrasion of concrete due to sea ice. The 20th Marine Development Symposium. Japan, 1988.
- [5] Makarova N. V., Polonik M. V. K probleme ucheta neodnorodnosti pri modelirovanii processa istiraniya betona // Vestnik CHGPU im. I.YA. YAKovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2010. 2(8) S. 326–332. (in Russian)
- [6] Gost 13087–81. Betony. Metody opredeleniya istiraemosti. GOST 13087–81. (in Russian)
- [7] Makarova N. V., Polonik M. V. Modeling of the wear on the concrete at the micro- and mesolevels on the basis of experimental findings // FEFU: School of Engineering Bulletin. 2012. N 1 (10). P. 116–120
- [8] Makarova N. V., Polonik M. V. Abrasion Wear of Heterogeneous Materials // Applied Mechanics and Materials. 2013. №248. P. 355–360. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.248.355.

Mantsybora Alexandr Anatolevich

e-mail: manzubor@iacp.dvo.ru, Ph.D. (Phys. & Math.), Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok.

Polonik Marina Vasilevna

e-mail: apolonik@mail.ru, Ph.D. (Phys. & Math.), Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of RAS; Assistant Professor, Far Eastern Federal University, Vladivostok.

- [9] Makarova N. V., Polonik M. V. Modelling the influence of structural and compositional parameters on the abrasion resistance of concrete. Proceedings of the International Offshore and Polar Engineering Conference, 2012. P. 67–71.
- [10] Goryacheva I. G. Kontaktnye zadachi teorii uprugosti dlya sistemy iznashivaniya shtampov // Izvestiya RAN SSSR. MTT. 1987. № 6. S. 62-68. (in Russian)
- [11] Goryacheva I. G. Mekhanika frikcionnogo vzaimodejstviya. M.: Nauka, 2001. 478 s. (in Russian)
- [12] Makarova N. V., Polonik M. V., Rogachev E.E. Abrasion deterioration of inhomogeneous materials // Vestnik CHGPU im. I.YA. YAKovleva. Seriya Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2012. № 4(14). С. 164–173. (in Russian)
- [13] Makarova N. V., Polonik M. V. Formirovanie rel'efa istiraemoj povernosti neodnorodnyh materialov // Mekhanika deformiruемого tverdogo tela. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. 2011. № 4 (4). С. 1591–1593. (in Russian)
- [14] Makarova N. V. Relations between Concrete Structural Parameters and Abrasion Resistance // Applied Mechanics and Materials. 2013. P. 1259–1262. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.357-360.1259.
- [15] Makarova N. V., Polonik M. V. Modelirovanie processa razrusheniya betonnoj povernosti pri abrazivnom iznose // Dolgovechnost' stroitel'nyh materialov, izdelij i konstrukcij: materialy Vserossijskoj nauchno-tekhnicheskoj konferencii, posvyashchennoj pamyati zaslužennogo deyatelya nauki Rossijskoj Federacii, akademika RAASN, doktora tekhnicheskikh nauk professora Solomatova Vasiliya Il'icha / redkol.: V.P.Selyaev [i dr.]; otv. red. T.A.Nizina. Saransk: Izd-vo Mordov. un-ta, 2016. S. 76–80. ISBN 978-5-7103-3299-3. (in Russian)

В. И. Прокопьев¹, Т. В. Жданова¹, Б. С. Кушхов²

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО КОЛЕСА И РЕЛЬСА ПРИ КОНТАКТЕ

¹ *Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия*

² *ЗАО «Фодд», г. Москва, Россия*

Аннотация. В статье перечислены методы, реализованные в программе ANSYS Mechanical, для решения контактных задач механики: метод множителей Лагранжа, метод штрафа, комбинация методов множителей Лагранжа и штрафа, метод ограничений во внутренних точках. Приводятся результаты примера анализа напряжённо-деформированного состояния контакта колеса и рельсы железнодорожного транспорта с максимально приближенной к реальности геометрией в статической постановке по программе ANSYS Mechanical.

Ключевые слова: контактные задачи, метод множителей Лагранжа, метод штрафа, метод ограничений, ANSYS, напряжённо-деформированное состояние, колесо, рельс, железнодорожный транспорт.

УДК: 539.3

При проектировании надежных и энергосберегающих технических устройств одной из важнейших задач является определение контактной прочности элементов соединений. Большие значения напряжений в области контакта железнодорожного колеса и рельса приводят к износу контактирующих поверхностей [1]. Решение задач контактного взаимодействия с учётом нелинейностей материала, как правило, возможно,

© Прокопьев В. И., Жданова Т. В., Кушхов Б. С., 2017

Прокопьев Валерий Иванович

e-mail: prokorievvi@mgsu.ru, кандидат технических наук, профессор, доцент кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Жданова Татьяна Владимировна

e-mail: zhdanovatv@mgsu.ru, ассистент кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Кушхов Барасби Султанович

e-mail: zhdanovatv@mgsu.ru, Специалист ЗАО «Фодд», г. Москва, Россия.

Поступила 02.09.2017

лишь при использовании численных методов [2]. В настоящее время широко используется метод конечных элементов, реализованный в ряде известных комплексов программ для персональных компьютеров [3, 4]. Данная статья иллюстрирует использование программы ANSYS Mechanical для анализа напряжённо-деформированное состояния в области контакта колеса и рельсы железнодорожного транспорта.

В контактных задачах неизвестна зона контакта до решения задачи. В зависимости от нагрузок, свойств материала, граничных условий и других факторов поверхности могут входить в контакт друг с другом и выходить из него внезапно и непредсказуемо. С другой стороны, в зоне контакта необходимо учитывать трение взаимодействующих контактирующих поверхностей, что может сказаться на процессе сходимости при компьютерном моделировании.

Влияние шероховатости поверхностей на трение в контактирующих телах впервые было исследовано Боуденом и Тейбором в середине XX-го столетия, что привело к расширению направлений исследований в трибологии и возрождению идей Кулона об адгезии как о возможном механизме трения. К новаторским работам в этой области относятся труды Арчарда (1957), Гринвуда и Вильямсона (1966), Буша (1975) и Перссона (2002). Одним из важнейших толчков к точным расчетам условий нагрузки в контакте стало развитие железнодорожного транспорта, поскольку напряжения в области взаимодействия колесо-рельс могут достигать предельной допустимой нагрузки для стали. Исследования взаимодействующих контактирующих поверхностей в последующие годы отражены [5-11], что позволило сформулировать соответствующие математические модели. Компьютерное моделирование расчетных схем решения контактных задач описывается в [12].

В ANSYS Mechanical [13] реализованы следующие алгоритмы:

- метод множителей Лагранжа (Augmented Lagrangian, KEYOPT(2)=0);
- метод штрафа (Penalty method, KEYOPT(2)=1);
- метод множителей Лагранжа в направлении нормали к поверхности контакта и метод штрафа в направлении касательной (KEYOPT(2)=3);
- метод множителей Лагранжа в направлении нормали к поверхности контакта и касательной (KEYOPT(2)=4);
- метод ограничений во внутренних точках (internal multipoint constraint (MPC), KEYOPT(2) = 2).

Для моделирования контакта используются следующие модели: “поверхность–поверхность”, “узел–поверхность”, “узел–линия”, “узел–узел”.

Каждый тип модели использует разные наборы контактных элементов и применяется для решения разных задач.

Рассмотрим тип контакта “узел-поверхность”.

Для представления контакта и скольжения между двумя поверхностями (или между узлом и поверхностью или между линией и поверхностью) в двумерном (2D) или трехмерном (3D) пространствах может использоваться элемент CONTA175. Контакт происходит при внедрении контактного узла в элемент ответной поверхности TARGE169 или TARGE170 (рис. 1).

Методы контроля совместности гарантируют, что одна поверхность не будет внедряться в другую более чем на приемлемую величину. Это может быть выполнено при помощи вышеперечисленных алгоритмов.

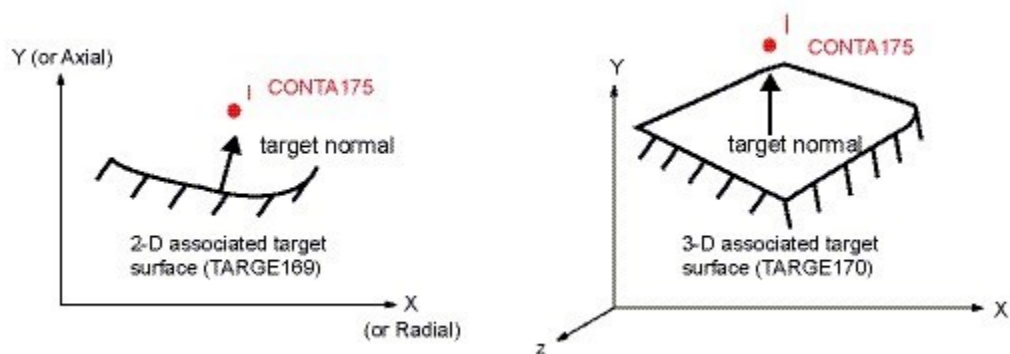


Рис. 1. Тип контакта «узел-поверхность»

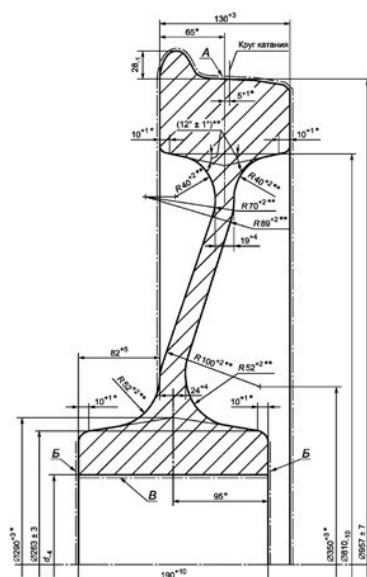


Рис. 2. Конструкция и размеры колеса типа А1

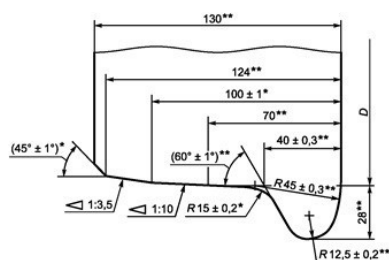


Рис. 3. Конструкция и размеры профиля обода колеса

Рассматривается расчёт контакта колеса и рельса с максимально приближенной к реальности геометрией в статической постановке. В качестве примера возьмём наиболее распространённое железнодорожное колесо А1 – цельнокатаные с плоскоконическим диском [14] и рельс типа Р65 [15].

Конечноэлементная модель представлена на рис. 5 и 6.

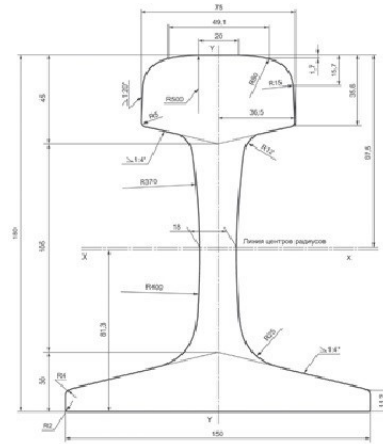


Рис. 4. Конструкция и размеры рельса типа Р65

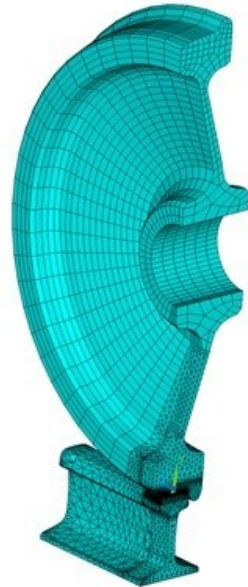


Рис. 5. Конечно-элементная модель системы колесо-рельса
(количество конечных элементов 118002)

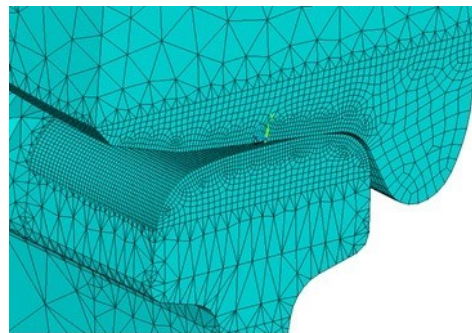


Рис. 6. Конечно-элементная модель системы колесо-рельса (в масштабе)

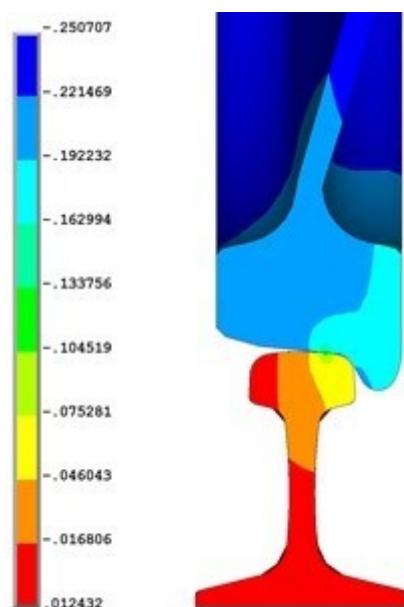


Рис. 7. Изополя перемещений

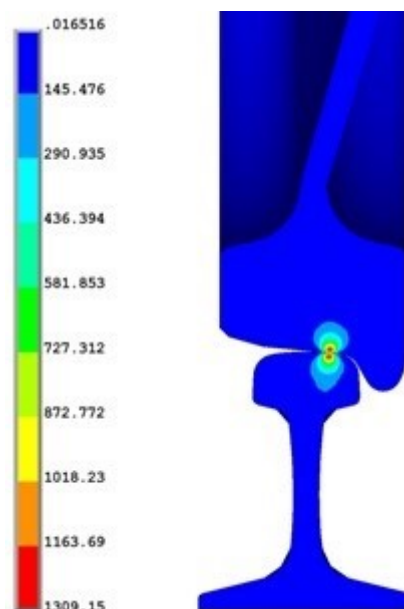


Рис. 8. Изополя напряжении по Мизесу

Для колеса и рельса использовались материалы со следующими механическими свойствами:

Колесо: $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $\sigma_T = 820$ МПа, модуль упрочнения $E_{упр} = 2.1 \cdot 10^2$ МПа.

Рельса: $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $\sigma_T = 1080$ МПа, модуль упрочнения $E_{упр} = 2.1 \cdot 10^2$ МПа.

Коэффициент трения $\mu = 0.15$.

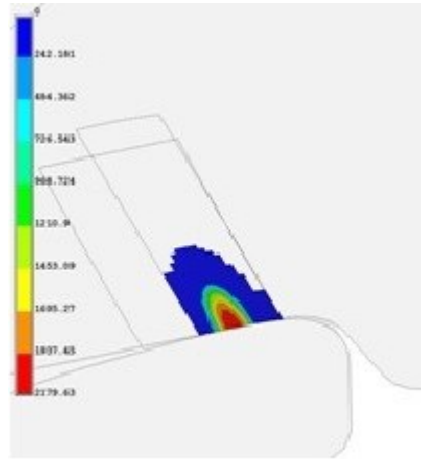


Рис. 9. Изополя контактного давления в тестовом расчёте

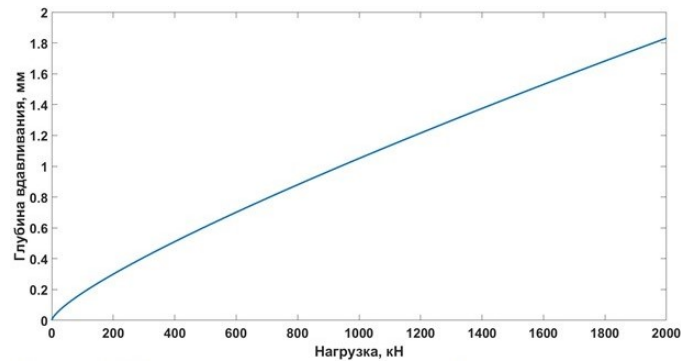


Рис. 10. Зависимость глубины вдавливания d от величины нагрузки F для численного решения ($max=1.83$ мм).

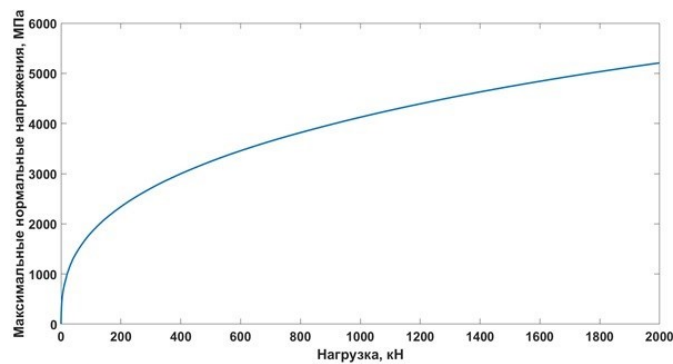


Рис. 11. Зависимость максимальных нормальных напряжений σ_{max} от величины нагрузки F для численного решения ($max = 5208$ МПа)

Модуль упрочнения используется в постановке, учитывающей нелинейные свойства материала, трение и геометрическую нелинейность.

Конструкция и размеры колеса и рельса представлены на рис. 2, 3 и 4.

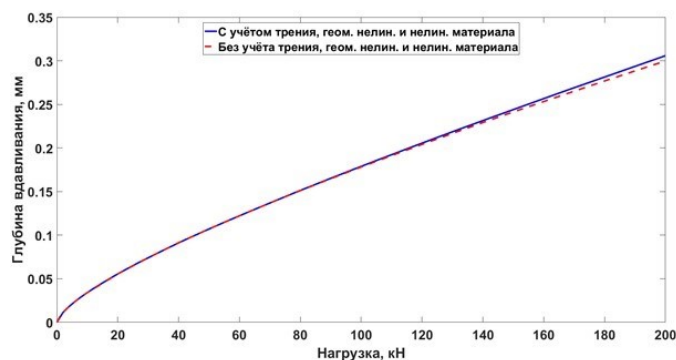


Рис. 12. Зависимость глубины вдавливания d от величины нагрузки F для численных решений с учётом ($max = 0,31$ мм) и без учёта ($max = 0,30$ мм) трения, геометрической нелинейности и нелинейных механических свойств материала.

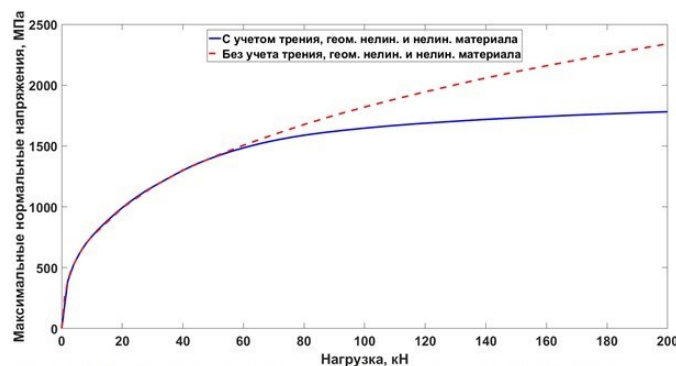


Рис. 13. Зависимость максимальных нормальных напряжений σ_{max} величины нагрузки F для численных решений с учётом ($max = 1782$ МПа) и без учёта ($max = 2340$ МПа) трения, геометрической нелинейности и нелинейных механических свойств материала

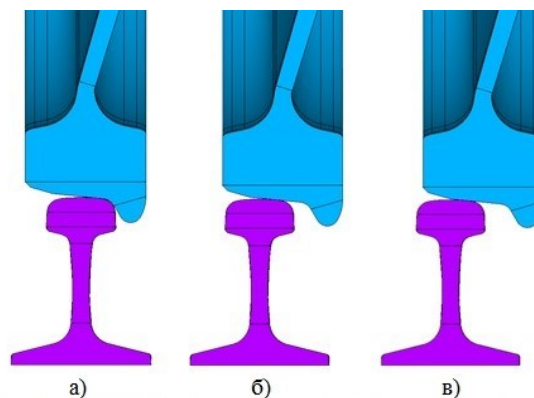


Рис. 14. Различные положения колеса на рельсе а) центральное положение, б) смещение на 2 см. в) смещение на 3 см

Для иллюстрации вида изополей перемещений, напряжений по Мизесу и контактного давления в области колеса проводился дополнительных расчёт на действие кинематической нагрузки: перемещение, равное 0,25мм, приложенное к ступице колеса и направленное к рельсу. Результаты расчёта показаны на рис. 7, 8, 9.

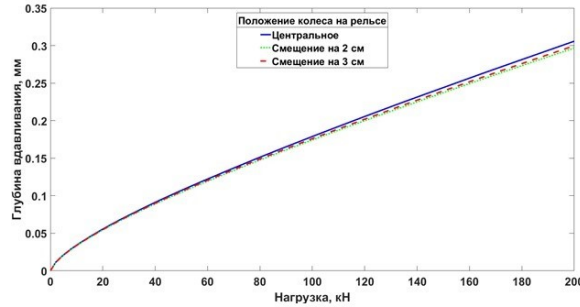


Рис. 15. Зависимость глубины вдавливания d от величины нагрузки F для различных положений колеса на рельсе с учётом трения, геометрической нелинейности и нелинейных механических свойств материала

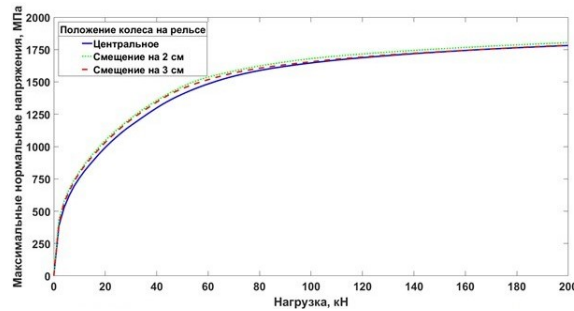


Рис. 16. Зависимость максимальных нормальных напряжений σ_{max} от величины нагрузки F для различных положений колеса на рельсе с учетом трения, геометрической нелинейности и нелинейных механических свойств материала

Первоначально расчёты проводились по схеме, использованной в предыдущих задачах (линейный материал). Результаты расчета приведены на рис. 10 и 11.

На рис. 12 и 13 сравниваются результаты расчётов с учётом и без учета трения, геометрической нелинейности и нелинейных свойств материала.

Результаты расчетов для различных положений колеса на рельсе (рисунок 14) с учётом трения, геометрической нелинейности и упругопластических свойств материала приведены на рис. 15 и 16.

Результаты проведённых расчётов показывают, что учёт геометрической нелинейности, трения и упругопластических свойств материала приводит к существенному уменьшению напряжения в области контакта при незначительном изменении глубины вдавливания. Различные положения колеса на рельсе слабо влияют на напряжения в области контакта и глубину заглабления (до 5%).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сакало В. М., Коссов В. С. Контактные задачи железнодорожного транспорта. М.: Машиностроение, 2004. 496 с.
- [2] Джонсон К. Л. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
- [3] Морозов Е. М., Зернин М. В. Контактные задачи механики разрушения. М.: Машиностроение, 1999. 544 с.
- [4] Каплун А. Б., Морозов Е. М., Олферьева М. А. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 272 с.

- [5] Johnson K. L. Contact mechanics. Cambridge University Press, 6. Nachdruck der 1. Auflage, 2001.
- [6] Попов V.L. Kontaktmechanik und Reibung. Ein Lehr- und Anwendungsbuch von der Na-notriologie bis zur numerischen Simulation. Springer-Verlag, 2009. 328 p. ISBN 978-3-540-88836-9.
- [7] Попов V. L. Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications. Springer-Verlag, 2010. 362 p. ISBN 978-3-642-10802-0.
- [8] Попов В. Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения. М.: Физматлит, 2012. 348 с. ISBN 978-5-9221-1443-1.
- [9] Sneddon I. N. The Relation between Load and Penetration in the Axisymmetric Boussinesq Problem for a Punch of Arbitrary Profile //Int. J. Eng. Sci. 1965. V. 3. P. 47–57.
- [10] Hyun S., Robbins M. O. Elastic contact between rough surfaces: Effect of roughness at large and small wavelengths //Tribology International. 2007. V. 40. P. 1413–1422.
- [11] Попов V. L. Method of reduction of dimensionality in contact and friction mechanics: A linkage between micro and macro scales // Friction. 2013. V. 1. №1. P. 41–62. [12] Бураго Н. Г., Кукуджанов В. Н. Обзор контактных алгоритмов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2005. №1. С. 44–85.
- [13] ANSYS 14.5 Users Guide. Canonsburg, 2012.
- [14] ГОСТ 10791-2011 Колеса цельнокатаные. Москва: Стандартинформ, 2011.
- [15] ГОСТ Р 51685-2013 Рельсы железнодорожные. Москва: Стандартинформ, 2011.

V. I. Prokopev¹, T. V. Zhdanova¹, B. S. Kushev²

MODELING OF THE STRESS-STRAIN STATE RAILWAY WHEEL AND RAIL IN CONTACT

¹*National research Moscow state University of civil engineering (NRU MSUCE), Moscow, Russia*

²*CJSC «Fodd», Moscow, Russia*

Abstract. This article lists the methods implemented in ANSYS Mechanical, the solution of contact problems in mechanics: Augmented Lagrangian, Penalty method, Lagrange multiplier on contact normal and penalty on tangent, Pure Lagrange multiplier on contact normal and tangent, Internal multipoint constraint. Results over of example of analysis of the tensely-deformed state of contact of wheel and rail of railway transport are brought with maximally close to reality geometry in the static raising on the program ANSYS Mechanical.

Keywords: contact problems, Augmented Lagrangian, Penalty method, Lagrange multiplier on contact normal and penalty on tangent, Pure Lagrange multiplier on contact normal and tangent, Internal multipoint constraint, ANSYS, the stress-strain state, wheel, rail, rail transport.

REFERENCES

- [1] Sakalo V. M., Kossov V. S. Kontaktnye zadachi zheleznodorozhnogo transporta. M.: Mashinostroenie, 2004. 496 s. (in Russian)
- [2] Dzhonson K. L. Mekhanika kontaktnogo vzaimodejstviya. M.: Mir, 1989. 510 s. (in Russian)
- [3] Morozov E. M., Zernin M. V. Kontaktnye zadachi mekhaniki razrusheniya. M.: Mashinostroenie, 1999. 544 s. (in Russian)
- [4] Kaplun A. B., Morozov E. M., Olfer'eva M. A. ANSYS v rukah inzhenera: Prakticheskoe rukovodstvo. M.: Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2009. 272 s.
- [5] Johnson K. L. Contact mechanics. Cambridge University Press, 6. Nachdruck der 1. Auflage, 2001.
- [6] Popov V.L. Kontaktmechanik und Reibung. Ein Lehr- und Anwendungsbuch von der Na-notribologie bis zur numerischen Simulation. Springer-Verlag, 2009. 328 p. ISBN 978-3-540-88836-9.
- [7] Popov V. L. Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications. Springer-Verlag, 2010. 362 p. ISBN 978-3-642-10802-0.
- [8] Popov V. L. Mekhanika kontaktnogo vzaimodejstviya i fizika treniya. M.: Fizmatlit, 2012. 348 c. ISBN 978-5-9221-1443-1. (in Russian)

Prokopev Valeriy Ivanovich

e-mail: prokopievvi@mgsu.ru, Ph. D., Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, National research Moscow state University of civil engineering (NRU MSUCE), Moscow, Russia.

Zhdanova Tatiana Vladimirovna

e-mail: zhdanovatv@mgsu.ru, Assistant Professor of the Department of Applied Mathematics, National research Moscow state University of civil engineering (NRU MSUCE), Moscow, Russia.

Kushev Barasbi Sultanovich

e-mail: zhdanovatv@mgsu.ru, Specialist of CJSC «Fodd», Moscow, Russia.

- [9] Sneddon I. N. The Relation between Load and Penetration in the Axisymmetric Boussinesq Problem for a Punch of Arbitrary Profile // *Int. J. Eng. Sci.* 1965. V. 3. P. 47–57.
- [10] Hyun S., Robbins M. O. Elastic contact between rough surfaces: Effect of roughness at large and small wavelengths // *Tribology International*. 2007. V. 40. P. 1413–1422.
- [11] Popov V. L. Method of reduction of dimensionality in contact and friction mechanics: A linkage between micro and macro scales // *Friction*. 2013. V. 1. №1. P. 41–62. [12] Burago N. G., Kukudzhanov V. N. Obzor kontaktnyh algoritmov // *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2005. №1. С. 44–85. (in Russian)
- [13] ANSYS 14.5 Users Guide. Canonsburg, 2012.
- [14] GOST 10791-2011 Kolesa cel'nokatanye. Moskva: Standartinform, 2011. (in Russian)
- [15] GOST R 51685-2013 Rel'sy zheleznodorozhnye. Moskva: Standartinform, 2011. (in Russian)

А. Н. Плотников

РАСЧЕТ КАМЕННОЙ КЛАДКИ НА ЦЕНТРАЛЬНОЕ СЖАТИЕ КАК КВАЗИОДНОРОДНОГО СПЛОШНОГО УПРУГОПЛАСТИЧНОГО ТЕЛА

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В статье показывается возможность расчета каменной кладки по полученным экспериментальным путем частным характеристикам прочности с учетом пластической работы. Приведены результаты испытаний каменной кладки из нетрадиционного для нормативной базы материала – пустотного керамического кирпича.

Ключевые слова: каменная кладка, квазиоднородное сплошное тело, прочность, пластичность, модуль деформаций, коэффициент Пуассона, расчет, трещины, испытания.

УДК: 539.3

Несмотря на использование каменной кладки в качестве несущих конструкций в течение многих столетий, она остается малоизученной как в теоретическом, так и в экспериментальном аспектах.

С современной точки зрения каменную кладку характеризуют как композитный материал с кусочно-однородной структурой, с позиций механики сплошных сред как квазиоднородный [1],[2],[3],[5].

Для расчета и моделирование каменных конструкций применяется феноменологический подход, основанный на изучении обобщенных механических характеристик, прежде всего, предела прочности, модуля деформаций при сжатии вдоль элемента, коэффициента Пуассона (поперечных деформаций). По работе [1], модели в рамках феноменологической концепции формируются на базе эмпирических зависимостей о поведении объекта под нагрузкой, что определяет невозможность исследований деталей, зачастую важнейших, процесса деформирования.

Такой подход долгие годы был оправдан относительно небольшим набором составляющих каменной кладки: керамический или силикатный кирпич, цементно-песчаный раствор, стальная арматура. С последней компонентой связаны проблемы оценки прочности при максимальных процентах армирования и моделирования методом конечных элементов (при структурном подходе). Особенно эти проблемы проявляются при моделировании работы конструкций с новыми материалами, композитной арматурой, пустотными керамическими камнями [3],[7].

© Плотников А. Н., 2017

Плотников Алексей Николаевич

e-mail: plotnikovAN2010@yandex.ru, кандидат технических наук, доцент, Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 05.09.2017

Традиционная методика расчета каменных конструкций, заложенная в СП 15.13330.2012, построена на эмпирических зависимостях Л.И. Онищика [4].

Для элементов с минимальным влиянием продольного изгиба (гибкости $\lambda < 14$) прочность кладки определяется как $N = RA$, т.е. произведение сопротивления сжатию на площадь сечения. Здесь R – расчетное сопротивление кладки, однако, для оценки предельного сопротивления и для сопоставления с экспериментальными данными используется величина временного сопротивления R_u .

В нормативной и научной литературе нет однозначной трактовки величины временного сопротивления. По ГОСТ Р 57290-2016 “Кладка каменная. Метод определения прочности на сжатие” этой величине соответствует максимально достигнутая нагрузка. Так как для испытания кладки используют практически только гидравлические прессы, максимальной нагрузкой является та, при которой давление масла в гидравлической системе перестает расти, т.е. конструкция перестает сопротивляться.

Вместе с тем, устоявшейся концепцией сопротивления кладки является разделение процесса нагружения на четыре этапа, когда первые трещины, пересекающие не более двух рядов, образуются при нагрузке более $0,5R_u$ [1],[2],[3]. По этой величине назначается расчетное сопротивление.

При названном уровне нагрузки каменная кладка перестает быть сплошным телом, даже квазиоднородным, неупругие деформации вдоль оси приложенной силы начинают резко возрастать.

Исходя из состояния конструкции при образовании первых трещин как в пограничном состоянии теории сплошных сред, можно рассмотреть кладку как тело, находящееся в объемном напряженном состоянии. При этом логично было бы считать, что напряжения в направлениях, перпендикулярных оси действия нагрузки, одинаковы по всей высоте элемента. Но многочисленные испытания показывают, что трещины развиваются первоначально в одном ряду кладки. На соседних участках напряжения еще не достигают $0,5R_u$. Процесс продолжается до R_u .

На рис. 1 показано развитие процесса трещинообразования: 1 – трещины на первой стадии работы кладки под нагрузкой, 2 – на завершающих этапах.

Напряженное состояние элемента каменной кладки с точки зрения механики сплошных сред можно представить в виде обобщенного закона Гука [5]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \quad (1)$$

Расчет каменной кладки в основном заключается в сравнении нормального напряжения вдоль оси Z (рис. 1) с эмпирически определенной прочностью вдоль этой же оси.

В последнее время возникают ситуации, когда композиция кладки усложняется компонентами с новыми свойствами, например, керамические пористые материалы, пористые растворы, композитная арматура и др. Возникает необходимость в моделировании внутренней структуры кладки. Для этого представляется целесообразным обратиться к аппарату механики сплошных сред. Выражение (1) можно преобразовать, выразив напряжение по оси Z через предельные деформации и напряжения слоев в поперечном направлении.

После преобразования выражения (1):

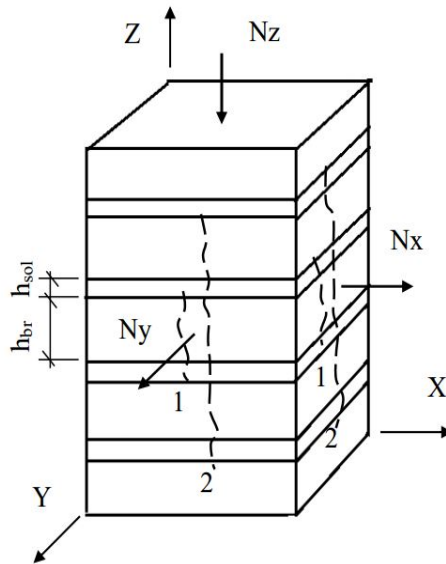


Рис. 1. Элемент каменной кладки с расположением осей

$$\sigma_z = -\frac{1}{\nu} (\varepsilon_x E - \sigma_x) - \sigma_y \quad (2)$$

Обобщение работ, посвященных деформированию кладки под нагрузкой, выполненные Кабанцевым О.В. [1,2,3] определяет необходимость определения набора характеристик прочности, соответствующих реализуемым механизмам разрушения – частных характеристик прочности. Все частные характеристики прочности должны учитывать действительные размеры элемента из кирпича или раствора, а также специфические условия работы такого элемента в составе кладки.

В.В. Пангаевым [3] проведены важные исследования, позволившие получить значения кирпича на растяжение и предельные величины раствора кладки при поперечных деформациях. При напряжениях в кладке, составляющих 80% от разрушающих, относительная деформация кладки вдоль действия нагрузки составляет $\varepsilon_z = 18.72 \cdot 10^{-4}$. При этом кладка переходит в пластическое состояние, идет интенсивный процесс образования продольных трещин внутри кладки. Началу образования трещин соответствует преодоление кирпичом прочности на растяжение, для полнотелого керамического эта прочность оценивается в 2 – 2,8 МПа.

На данном этапе накопления частных характеристик прочности и деформативности можно принять $\varepsilon_z = \varepsilon_{red}$, $\sigma_x = \sigma_y = R_{brt}$, где ε_{red} - приведенная деформация кладки, R_{brt} - прочность кирпича на растяжение.

Для обычной кладки из глиняного полнотелого кирпича М100 и раствора М100 по СП 15.13330.2012 расчетное сопротивление кладки $R=2$ МПа, предел сопротивления $R_u = 2R = 4$ МПа. $E = \alpha R_u = 1000 \cdot 4 = 4000$ МПа. Тогда для сечения 38х38 см получаем $N_z = R_u A = 577,6$ кН.

Если в (2) подставить определенные компоненты частных характеристик без учета пластических деформаций, предельное сопротивление определится как $\sigma_z = 3797$ кН, что невероятно. Однако учитывая пластику, т.е., коэффициент Пуассона принимая не

по первоначальному значению, а по предельному, что уже применяется, например, для бетона, непосредственно перед разрушением $\nu = 0,45$, модуль упругости заменяя на модуль деформаций $E' = 0,5E$, что рекомендуется СП 15.13330.2012, при $R_{brt} = 2\text{МПа}$ получаем $N_z = 587\text{кН}$.

В этом случае N_z практически совпадает с решением, полученным по традиционным нормам проектирования.

Оценка методики расчета по частным характеристикам была проведена по испытаниям до разрушения образца кладки из пустотного кирпича КР-л-пу 250*120*88/1,4НФ/175/1,4/100/ГОСТ 530-2012. Испытание проводилось по ГОСТ 32047-2012. В качестве силового устройства применялся гидравлический пресс П-125. Размеры плит пресса превышали размеры основания кладки. Размеры образцов составляли в основании 380 x 380 мм, высота в 7 рядов обыкновенного кирпича - 700 мм, что допускается ГОСТ 32047-2012. Для выравнивания торцов кладки использовались металлические пластины 6 мм и слои войлока 10 мм.

Для определения модуля упругости образец кладки оснащался приборами для измерения деформаций, как показано на рис 2. В качестве приборов, измеряющих деформации, применялись тензометры ДПЛ-10, подключенные к измерительному модулю "Терем-4" с ценой деления 0,001 мм. Для определения модуля упругости фиксировались показания приборов на 4 гранях образца, на каждом этапе после завершения выдержки до достижения значения нагрузки около 50% максимальной. Горизонтально расположенные приборы для измерения деформаций использовались для облегчения фиксации момента возникновения первой трещины и определения модуля поперечных деформаций.



Рис. 2. Испытание образца каменной кладки

Предел прочности составил $R_u = 6,58\text{ МПа}$. Начальный модуль упругости $E = 8200\text{ МПа}$, относительные поперечные деформации до образования трещин $\varepsilon_x = 0,001$.

Коэффициент Пуассона для пластического состояния кладки принят теоретически $\nu = 0,45$. Прочность кирпича на растяжение была определена из испытания на изгиб и составила $R_{brt} = 2,2$ МПа.

При использовании зависимости (2) с полученными экспериментально частными характеристиками кладки значение прочности $N_z = 927$ кН, что отличается незначительно от экспериментальной величины 950 кН. При накоплении экспериментальных данных по частным характеристикам можно будет говорить о возможности более детального расчета каменной кладки как квазиоднородного сплошного тела с пластическими деформациями при различных исходных параметрах материалов, не представленных в нормативных источниках.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кабанцев О. В. Научные основы структурной теории каменной кладки для оценки предельных состояний каменных конструкций сейсмостойких зданий: дис. ... докт.техн.наук: 05.23.01. Москва, 2016. 358 с.

[2] Наумов А. Е. Прочность центрально-сжатой кладки с учетом технологических факторов: дис. ... канд.техн.наук: 05.23.01. Белгород, 2010. 165 с.

[3] Пангаев В. В. Развитие расчетно-экспериментальных методов исследования прочности кладки каменных конструкций: дис. ... докт.техн.наук: 05.23.01. Новосибирск, 2009. 267 с.

[4] Онищик Л. И. Прочность и устойчивость каменных конструкций. Ч.1.Работа элементов каменных конструкций. М.: Главная редакция строительной литературы, 1937. 291 с.

[5] Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. 1. М.: Наука, 1975. 832 с.

[6] Бедов А. И. Несущая способность элементов из каменной кладки, усиленных сталефибробетонными обоймами // Промышленное и гражданское строительство. 2016. № 7. С. 45–50.

[7] Антаков А. Б., Плотников А. Н., Поздеев В. М. Несущая способность каменной кладки, армированной сетками из базальтопластиковой арматуры. Современные проблемы расчета железобетонных конструкций, зданий и сооружений на аварийные воздействия. Сборник Международной научной конференции, посвященной 85-летию кафедры железобетонных и каменных конструкций и 100-летию со дня рождения Н.Н. Попова. 19-20 апреля 2016 г. Москва, Издательство: Нац. исследоват. Моск. гос. строит. ун-т. С. 15 – 21.

A. N. Plotnikov

THE CALCULATION OF THE STONEMASONRY ON THE CENTRAL GRIP AS A QUASI-HOMOGENEOUS SOLID ELASTIC PLASTIC BODY

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russian

Abstract. The article shows the possibility of calculating the masonry from the experimental strengths obtained by the partial strength characteristics taking into account the plastic work. The results of tests of masonry from an unconventional material for a standard base - hollow ceramic bricks are given.

Keywords: masonry, quasihomogeneous solid body, strength, plasticity, modulus of deformations, Poisson's ratio, calculation, cracks, tests.

REFERENCES

- [1] Kabancev O. V. Nauchnye osnovy strukturnoj teorii kamennoj kladki dlya ocenki predel'nyh sostoyanij kamennyh konstrukcij sejsmostojkikh zdaniy: dis. ... dokt.tekhn.nauk: 05.23.01. Moskva, 2016. 358 s. (in Russian)
- [2] Naumov A. E. Prochnost' central'no-szhatoj kladki s uchetom tekhnologicheskikh faktorov: dis. ... kand.tekhn.nauk: 05.23.01. Belgorod, 2010. 165 s. (in Russian)
- [3] Pangaev V. V. Razvitie raschetno-eksperimental'nyh metodov issledovaniya prochnosti kladki kamennyh konstrukcij: dis. ... dokt.tekhn.nauk: 05.23.01. Novosibirsk, 2009. 267 s. (in Russian)
- [4] Onishchik L. I. Prochnost' i ustojchivost' kamennyh konstrukcij. CH.1.Rabota ehlementov kamennyh konstrukcij. M.: Glavnaya redakciya stroitel'noj literatury, 1937. 291 s. (in Russian)
- [5] Filin A. P. Prikladnaya mekhanika tverdogo deformiruemogo tela. T. 1. M.: Nauka, 1975. 832 s. (in Russian)
- [6] Bedov A. I. Nesushchaya sposobnost' ehlementov iz kamennoj kladki, usilennyh stalefibrobetonnymi obojmami // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo. 2016. № 7. S. 45–50. (in Russian)
- [7] Antakov A. B., Plotnikov A. N., Pozdeev V. M. Nesushchaya sposobnost' kamennoj kladki, armirovannoj setkami iz bazal'toplastikovej armatury. Sovremennye problemy rascheta zhelezobetonyh konstrukcij, zdaniy i sooruzhenij na avarijnye vozdejstviya. Sbornik Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, posvyashchennoj 85-letiyu kafedry zhelezobetonyh i kamennyh konstrukcij i 100-letiyu so dnya rozhdeniya N.N. Popova. 19-20 aprelya 2016 g. Moskva, Izdatel'stvo: Nac. issledovat. Mosk. gos. stroit. un-t. S. 15 – 21. (in Russian)

Plotnikov Alexey Nikolaevich

e-mail: plotnikovAN2010@yandex.ru, Ph. D., I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Е. Ю. Русина

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ГРАНИЦ В ТОНКОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ С ВКЛЮЧЕНИЕМ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Аннотация. Настоящая работа посвящена определению напряженно-деформированного состояния механической конструкции, которая состоит из тонкой бесконечной упругопластической пластины с отверстием и включения цилиндрической формы. В качестве метода решения использован метод малого параметра, при этом малый параметр характеризует возмущение внешних статических граничных условий. В работе получены приближенно аналитически выражения для упругопластических границ в тонкой пластине с круговым отверстием, в которую с напрягом запрессовывается несколько большее по размеру включение цилиндрической формы.

Ключевые слова: малый параметр, пластичность, упругость, плоское напряженное состояние, условие пластичности Треска-Сен-Венана.

УДК: 539.3

1. Введение

Определению напряженно-деформированного состояния в плоских упругопластических задачах посвящены исследования ряда различных авторов [1, 3, 5, 6, 7, 10]. В данной работе в рамках плоского напряженного состояния методом малого параметра [4] определяются величины пластических зон в тонкой пластине с круглым отверстием, в которую с натягом запрессовывается несколько большее по размеру включение цилиндрической формы. Материал как пластины, так и включения предполагается упругопластическим. Решение в пластических областях конструкции строилось согласно условию пластичности Треска - Сен-Венана [4].

2. Постановка задачи

На бесконечности пластина растягивается взаимно перпендикулярными усилиями интенсивностями P_1 и P_2 , по контуру внутреннего отверстия во включении приложено распределенное давление интенсивностью P_0 . Особенностью данной работы является наличие пластических зон в обоих элементах рассматриваемой механической конструкции. Задача решалась с учетом того, что пластическая зона в пластине целиком охватывает контур кругового отверстия в пластине, а пластическая зона во включении аналогично охватывает целиком внутренний контур включения.

© Русина Е. Ю., 2017

Русина Елена Юрьевна

e-mail: Elena_RS@inbox.ru, аспирант, Воронежский Государственный Университет, г. Воронеж, Россия

Поступила 10.11.2017

Решение находится в цилиндрических координатах (ρ, θ, z) , при этом ось Oz направим перпендикулярно плоскости пластины. Начало координат выбираем в центре кругового отверстия в пластине.

3. Метод решения

Задача решается методом малого параметра [4], при этом определено два приближения: нулевое и первое.

За нулевое приближение выбирается осесимметричное состояние тонкой пластины с круговым отверстием радиуса α с тонким упругопластическим включением с внешним радиусом α_1 ($\alpha_1 > \alpha$) и внутренним β . На бесконечности данная конструкция растягивается взаимно перпендикулярными усилиями с интенсивностями $P = (P_1 + P_2)/2$. Внутренний контур включения нагружен усилиями интенсивностью P_0 .

Здесь и далее расчет производится с величинами, которые были записаны в безразмерном виде. Так величины, имеющие размерность напряжений, отнесены $2k_1$ – удвоенному значению предела текучести на сдвиг материала пластины. Перемещения и геометрические характеристики отнесем к радиусу упругопластической границы в пластине $r_{s1}^{(0)}$ в нулевом приближении. Для обозначения безразмерных величин используем их прежние обозначения.

Введем малый параметр, характеризующий, в данном случае, возмущение статических граничных условий $\delta d_3 = (P_1 - P_2)/2$. Тогда решение задачи будет иметь вид

$$r_{s1} = 1 + \delta r_{s1}^{(1)}, r_{s2} = r_1 + \delta r_{s2}^{(1)}, \quad (1)$$

где верхний индекс указывает на номер приближения, δ – малый параметр, r_{s1} – радиус упругопластической границы в пластине, r_{s2} – радиус упругопластической границы во включении, r_1 – радиус упругопластической границы во включении в нулевом приближении.

Ввиду малости величины ε , примем за линию контакта пластины и включения внешнюю границу включения [8, 10], которая при разложении представляется в форме

$$\rho_{kon} = \alpha_1. \quad (2)$$

3.1. Нулевое приближение в пластине

Следуя [4], для нулевого приближения имеем в упругой области пластины

$$\sigma_\rho^{e(0)} = P - \frac{(q+1)\alpha}{2\rho^2}, \sigma_\theta^{e(0)} = P + \frac{(q+1)\alpha}{2\rho^2}, \tau_{\rho\theta}^{e(0)} = 0, \quad (3)$$

$$u_\rho^{e(0)} = \frac{1}{E_1} \left((2 - (q+1)\alpha)\rho + \frac{3(q+1)\alpha}{\rho} \right), u_\theta^{e(0)} = 0.$$

В пластической зоне пластины

$$\sigma_\rho^{p(0)} = 1 - \frac{(q+1)\alpha}{\rho}, \sigma_\theta^{p(0)} = 1, \tau_{\rho\theta}^{p(0)} = 0, \quad (4)$$

$$u_\rho^{p(0)} = \frac{1}{2E_1} (\rho + (q+1)\alpha(1 - 2 \ln \rho)), u_\theta^{p(0)} = 0,$$

где $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\rho\theta}$ – компоненты тензора напряжений, u_ρ, u_θ – компоненты вектора перемещений, E_1 – модуль Юнга материала пластины, q – нормальное давление на границе контакта пластины и включения. Здесь и далее индексы "e" и "p" обозначают принадлежность к упругой или пластической зоне соответственно.

3.2. Нулевое приближение во включении

В упругой зоне включения, распределение поля напряжений и перемещений имеет вид [10]

$$\begin{aligned}\sigma_{B\rho}^{e(0)} &= \frac{(\rho^2 - \alpha_1^2) r_1 (r_1 k^* + r_1 q - (P_0 + k^*) \beta)}{\rho^2 (r_1^2 - \alpha_1^2)} - q, \\ \sigma_{B\theta}^{e(0)} &= \frac{(\rho^2 + \alpha_1^2) r_1 (r_1 k^* + r_1 q - (P_0 + k^*) \beta)}{\rho^2 (r_1^2 - \alpha_1^2)} - q, \quad \tau_{B\rho\theta}^{e(0)} = 0, \\ u_{B\rho}^{e(0)} &= -\frac{1}{2E_2} \left(\frac{3(\rho^2 - \alpha_1^2) r_1 (r_1 k^* + r_1 q - (P_0 + k^*) \beta)}{\rho (r_1^2 - \alpha_1^2)} + q\rho \right), \quad u_{B\theta}^{e(0)} = 0,\end{aligned}\quad (5)$$

где E_2 – модуль Юнга материала включения, k^* – величина предела текучести на сдвиг материала включения.

В пластической зоне включения, распределение поля напряжений и перемещений имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{B\rho}^{p(0)} &= k^* - \frac{(P_0 + k^*) \beta}{\rho}, \quad \sigma_{B\theta}^{p(0)} = k^*, \quad \tau_{B\rho\theta}^{p(0)} = 0, \\ u_{B\rho}^{p(0)} &= \frac{1}{E_2} \left(\frac{1}{2} k^* \rho + \beta (P_0 + k^*) (2 \ln r_1 - \ln \rho + 3) - 4r_1 (k^* + q) \right), \quad u_{B\theta}^{p(0)} = 0,\end{aligned}\quad (6)$$

где σ_ρ , σ_θ , σ_z , $\tau_{\rho\theta}$ – компоненты тензора напряжений, u_ρ , u_θ – компоненты вектора перемещений.

3.3. Определение контактного давления и радиуса упругопластических границ в пластине и включении в нулевом приближении

Из условия совместности деформаций пластины и включения вдоль линии контакта следует

$$u_{\rho=\alpha}^{p(0)} = u_{B\rho=\alpha_1}^{e(0)} + \varepsilon, \quad (7)$$

из условия сопряжения на упругопластической границе в пластине

$$\sigma_\theta^{p(0)} = \sigma_\theta^{e(0)}, \quad \text{при } \rho = 1 \quad (8)$$

из условий сопряжения на упругопластической границе во включении

$$\sigma_{B\theta}^{p(0)} = \sigma_{B\theta}^{e(0)}, \quad \text{при } \rho = r_1 \quad (9)$$

имеем следующую систему уравнений для определения контактного давления q и радиусов упругопластических границ в пластине и включении в нулевом приближении $r_{s1}^{(0)}$ и $r_{s2}^{(0)}$.

$$\begin{aligned}\frac{(1-P)r_{s1}^{(0)} \ln r_{s1}^{(0)}}{E_1} + r_{s1}^{(0)} (1-P) \left(\frac{\alpha_1}{\alpha E_2} - \frac{1}{E_1} - \frac{\ln \alpha}{E_1} \right) + (\alpha - \alpha_1) \left(\frac{1}{2E_1} - \frac{1}{2E_2} + 1 \right) &= 0, \\ q &= \frac{2(1-P)}{\alpha} - 1,\end{aligned}\quad (10)$$

$$\frac{4(1-P)\alpha_1^2 r_{s1}^{(0)} r_{s2}^{(0)}}{\alpha} - (P_0 + k^*)\beta \left(r_{s2}^{(0)2} + \alpha_1^2 \right) + 2\alpha_1^2 r_{s2}^{(0)} (k^* - 1) = 0.$$

4. Первое приближение

Рассмотрим первое приближение.

Граничные условия на внутреннем контуре отверстия во включении для первого приближения запишем согласно [4]

$$\sigma_{B\rho}^{(1)} = 0, \tau_{\rho\theta}^{(1)} = 0, \text{ при } \rho = \beta \quad (11)$$

Вдоль линии контакта пластины и включения, согласно [4, 9] запишем

1) если включение вложено с натягом в пластину

$$\sigma_{\rho}^{p(1)} = \sigma_{B\rho}^{e(1)}, \tau_{\rho B\theta}^{e(1)} = 0, \tau_{\rho\theta}^{p(1)} = 0, u_{\rho}^{p(1)} = u_{B\rho}^{e(1)}, \text{ при } \rho = \alpha_1, \quad (12)$$

2) если включение впаяно в пластину

$$\sigma_{\rho}^{p(1)} = \sigma_{B\rho}^{e(1)}, \tau_{\rho B\theta}^{e(1)} = \tau_{\rho\theta}^{p(1)}, u_{\rho}^{p(1)} = u_{B\rho}^{e(1)}, u_{\theta}^{p(1)} = u_{B\theta}^{e(1)}, \text{ при } \rho = \alpha_1. \quad (13)$$

5. Результаты решения

В результате решения задачи следуя [2] и [4] были получены компоненты тензора напряжений и вектора перемещений во включении и в пластине для обеих зон деформирования. Определяющие соотношения для форм упругопластических границ в пластине и во включении имеет вид:

$$r_{s1}^{(1)} = - \left[\sigma_{\theta}^{(1)} \right] \left[\left[\frac{\partial \sigma_{\theta}^{(0)}}{\partial \rho} \right]^{-1} \right]_{\rho=1}, \quad (14)$$

$$r_{s2}^{(1)} = - \left[\sigma_{\theta}^{(1)} \right] \left[\left[\frac{\partial \sigma_{\theta}^{(0)}}{\partial \rho} \right]^{-1} \right]_{\rho=r_1}, \quad (15)$$

где [] обозначают разность компонент в упругой и пластической области.

Подстановка полученных выражений для напряжений в (14), (15) дает для радиусов упругопластических границ (16) и (17)

$$r_{s1}^{(1)} = \frac{4d_3 - a_1 + 2a_2}{(q+1)\alpha} \cos 2\theta, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} r_{s2}^{(1)} = & \frac{r_1^2 (r_1^2 - \alpha_1^2)}{2N\alpha_1^2 (r_1 k^* + r_1 q - (P_0 + k^*)\beta)} \left(\left((-1 + 2\beta^{-2} - \beta^4) - (3 - 2\beta^{-2} - \beta^{-4}) \left(\frac{r_1}{\beta} \right)^{-4} + \right. \right. \\ & + 2(-3 + 2\beta^2 + \beta^4) \left(\frac{r_1}{\beta} \right)^2 \left(-b_{B1} \left(\frac{C_{12}}{C_{11}} \left(\frac{C_{13}C_{21} - C_{23}}{C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21}} \right) + \frac{C_{13}}{C_{11}} \right) - \right. \\ & - b_{B2} \left(\frac{C_{12}}{C_{11}} \left(\frac{C_{14}C_{21} - C_{24}}{C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21}} \right) + \frac{C_{14}}{C_{11}} \right) - \frac{C_{12}}{C_{11}} \left(\frac{4d_3\alpha C_{21} - 2d_3\alpha(3\alpha_1 - 4)}{C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21}} \right) - \\ & \left. \left. - \frac{4d_3\alpha}{C_{11}} \right) + \left((-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}) + (-1 + 2\beta^2 + \beta^4) r_1^{-4} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2(-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}) r_1^2 \right) \left(b_{B1} \left(\frac{C_{13}C_{21} - C_{23}}{C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21}} \right) + b_{B2} \frac{C_{14}C_{21} - C_{24}}{C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21}} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4d_3\alpha C_{21} - 2d_3\alpha(3\alpha_1 - 4)}{C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21}} \left) + \left((2 - 2\beta^{-2}) + (2\beta^{-1} - 2\beta^{-4}) \left(\frac{r_1}{\beta}\right)^{-4} + \right. \\
& \quad \left. + (6 - 8\beta^2 + 2\beta^4) \left(\frac{r_1}{\beta}\right)^2 + \beta^{-4} \left(\frac{r_1}{\beta}\right)^{-2} \right) b_{B1} + \\
& \quad \left. + \left((2 - 2\beta^2) + (-2\beta^4 + 2\beta^2) r_1^{-4} + (6 - 8\beta^{-2} + 2\beta^{-4}) r_1^2 \right) b_{B2} \right) \cos 2\theta, \quad (17)
\end{aligned}$$

где a_1, a_2, b_{B1}, b_{B2} – константы, определяемые из условий сопряжения (12) и (13) на границе контакта пластины и включения

$$\begin{aligned}
N &= 6 - 4(\beta^{-2} + \beta^2) + (\beta^{-4} + \beta^4), \\
C_{ij} &= \left(\frac{A_{i+1,1}B_{1j}}{NA_{11}} - \frac{A_{12}A_{i+2,1}B_{2j}}{NA_{11}A_{22}} + \frac{A_{i+2,2}B_{2j}}{NA_{22}} - \frac{\beta^2 B_{i+2,1}}{E} \right), \text{ где } i = 1, 2; j = 1, \dots, 4,
\end{aligned}$$

$$A_{11} = \frac{1}{\alpha_1}, \quad A_{12} = 2 \left(\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_1} \right), \quad A_{21} = 0, \quad A_{22} = \frac{2}{\alpha_1^2}, \quad A_{23} = \left(\frac{\ln \alpha_1 + 1}{E} - \frac{3}{2}\alpha - 1 \right),$$

$$A_{32} = \left(\alpha + 4 - \frac{2(\ln \alpha_1 + 1)}{E} - \frac{2}{\alpha_1 E} \right), \quad A_{41} = (3\alpha + 2 - 2\alpha_1(\alpha + 1)),$$

$$A_{42} = \left(\frac{2 \ln \alpha_1}{E} + \frac{5}{2E} - 2(\alpha + 4) + \alpha_1(2\alpha + 7) \right),$$

$$B_{11} = \left(\left(1 - \frac{4}{\beta^2} + \beta^4 \right) + \left(3 - \frac{2}{\beta^2} - \beta^{-4} \right) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-4} + 2(1 - 2\beta^2 + \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-2} \right),$$

$$B_{12} = \left((1 - 2\beta^2 + \beta^{-4}) + (1 - 2\beta^2 - \beta^4) \alpha_1^{-4} + 2(1 - 2\beta^{-2} + \beta^4) \alpha_1^{-2} \right),$$

$$B_{13} = \left((-2 + 2\beta^{-2}) + (-2\beta^{-2} + 2\beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-4} + (2 - 2\beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-2} \right),$$

$$B_{14} = \left((-2 + 2\beta^2) + (2\beta^4 - 2\beta^2) \alpha_1^{-4} + (2 - 2\beta^4) \alpha_1^{-2} \right),$$

$$\begin{aligned}
B_{21} &= \left((-2 + 2\beta^{-2} - \beta^4) + (3 - 2\beta^{-2} - \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-4} + \right. \\
& \quad \left. + (-3 + 2\beta^2 + \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^2 + (1 - 2\beta^2 + \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{22} &= \left((-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}) + (3 - 2\beta^2 - \beta^4) \alpha_1^{-4} + \right. \\
& \quad \left. + (-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}) \alpha_1^2 + (1 - 2\beta^{-2} + \beta^4) \alpha_1^{-2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{23} &= \left((2 - 2\beta^{-2}) + (-2\beta^{-2} + 2\beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-4} + \right. \\
& \quad \left. + (3 - 4\beta^2 + \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^2 + (1 - \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-2} \right),
\end{aligned}$$

$$B_{24} = ((2 - 2\beta^2) + (2\beta^4 - 2\beta^2) \alpha_1^{-4} + (3 - 4\beta^{-2} + \beta^{-4}) \alpha_1^2 + (1 - \beta^4) \alpha_1^{-2}),$$

$$B_{31} = \left(\frac{-3}{2N} (-1 + 2\beta^{-2} - \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right) + \frac{1}{2N} (-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{3N} (-3 + 2\beta^{-2} + \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^3 + \frac{2}{N} (-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-1} \right),$$

$$B_{32} = \left(-\frac{3}{2N} (-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right) + \frac{3}{2N} (-3\beta^{-4} + 2\beta^{-2} + 1) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{3N} (-3\beta^2 + 2 + \beta^{-2}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^3 + \frac{2}{N} (-\beta^{-2} + 2\beta^{-4} - \beta^2) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-1} \right),$$

$$B_{33} = \left(-\frac{3}{N} (1 - \beta^{-2}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right) + \frac{1}{N} (\beta^{-2} - \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{3N} (3 - 4\beta^2 + \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^3 + \frac{2}{N} (-1 + \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-1} \right),$$

$$B_{34} = \left(-\frac{3}{N} (1 - \beta^{-2}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right) + \frac{1}{N} (\beta^{-2} - 1) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{6N} (3\beta^2 - 4 + \beta^{-2}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^3 + \frac{2}{N} (-\beta^{-2} + \beta^2) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-1} \right),$$

$$B_{41} = \left(\frac{3}{2N} (-1 + 2\beta^{-2} - \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right) + \frac{1}{2N} (-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-3} + \right. \\ \left. + \frac{7}{6N} (-3 + 2\beta^{-2} + \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^3 - \frac{1}{2N} (-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-1} \right),$$

$$B_{42} = \left(\frac{3}{2N} (-1 + 2\beta^2 - \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right) + \frac{3}{2N} (-3\beta^{-4} + 2\beta^{-2} + 1) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-3} + \right. \\ \left. + \frac{7}{6N} (-3\beta^{-2} + 2 + \beta^{-2}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^3 + \frac{1}{2N} (\beta^{-2} - 2\beta^{-4} + \beta^2) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-1} \right),$$

$$B_{43} = \left(\frac{3}{N} (1 - \beta^{-2}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right) + \frac{1}{N} (\beta^{-2} - \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-3} + \right. \\ \left. + \frac{7}{6N} (3 - 4\beta^2 + \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^3 - \frac{1}{2N} (-1 + \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-1} \right),$$

$$B_{44} = \left(\frac{3}{N} (1 - \beta^2) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right) + \frac{1}{N} (\beta^{-2} - 1) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-3} + \right. \\ \left. + \frac{7}{12N} (3\beta^2 - 4 + \beta^{-2}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^3 - \frac{1}{2N} (-\beta^{-2} + \beta^2) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-1} \right).$$

Из (16) и (17) следует, что радиус упругоэластических границ в пластине и включения имеют форму эллипсов, которые при $\delta = 0$ переходят в окружности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Артемов М. А. О двусосном растяжении толстой пластины с круговым отверстием из упрочняющегося упругопластического материала // ПМТФ, 1985. №6. С. 158–163.
- [2] Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика / Пер. с нем. Я. И. Перельмана и Е. П. Попова; Под ред. А. И. Лурье. Ленинград; Москва: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1950-1952.
- [3] Горностаев К. К., Ковалев А. В. Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы с учетом температуры для сложной модели среды // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, 2015. №1. С. 135-140.
- [4] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М. : Наука, 1978. 208 с.
- [5] Ковалев А. В. Об учете ассоциированной сжимаемости упругопластических тел в случае плоской деформации // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. №1(15). С. 65–69.
- [6] Ковалев А. В., Русина Е. Ю., Яковлев А. Ю. Об исследовании механического взаимодействия элементов тонкой упругопластической конструкции // В сборнике: Механика предельного состояния и смежные вопросы. Материалы Всероссийской научной школы-конференции, посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева, 2015. С. 107–114.
- [7] Ковалев А. В., Спорыхин А. Н., Яковлев А. Ю. Исследование механического взаимодействия элементов различных форм и свойств в системе спрессованных тел // В сборнике: Современные проблемы механики и прикладной математики сборник трудов международной школы-семинара. Ответственный редактор: А. Д. Чернышов, 2004. С. 280–281.
- [8] Марушкой Ю. М. Двусосное растяжение упругопластического пространства с включением. Изв. ВУЗов. Машиностроение, 1975. №12. С. 25–30.
- [9] Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. : Наука, 1966. 707 с.
- [10] Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. Неодномерные задачи упруго-вязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2004. 219 с.

E. Y. Rusina

**ON THE DETERMINATION OF ELASTOPLASTIC BOUNDARIES IN A THIN
ELASTOPLASTIC STRUCTURE WITH INCLUSION**

Voronezh State University, Voronezh

Abstract. The paper is devoted to the determination of the stress-strain state of a mechanical structure, which consists of a thin infinite elastoplastic plate with a hole and inclusion of a cylindrical shape. The small parameter method is used as the solution method, while the small parameter characterizes the perturbation of external static boundary conditions. In the paper we obtain approximate analytical expression for elastoplastic boundaries in a thin plate with a circular aperture, into which a cylindrical shape incomparably larger in size is pressed in with stress.

Keywords: small parameter, plasticity, elasticity, plainly stresses a conditions, condition of plasticity of Tresca-Saint-Venant.

REFERENCES

- [1] Artemov M. A. O dvuosnom rastyazhenii tolstoj plastiny s krugovym otverstiem iz uprochnyayushchegosya uprugoplasticheskogo materiala // PMTF, 1985. №6. S. 158–163. (in Russian)
- [2] Biceno K. B., Grammel' R. Tekhnicheskaya dinamika / Per. s nem. YA. I. Perel'mana i E. P. Popova; Pod red. A. I. Lur'e. Leningrad; Moskva: Gos. izd-vo tekhn.-teoret. lit., 1950-1952. (in Russian)
- [3] Gornostaev K. K., Kovalev A. V. Ob uprugoplasticheskom sostoyanii tolstostennoj trubyy s uchetom temperatury dlya slozhnoj modeli sredy // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika, 2015. №1. S. 135-140. (in Russian)
- [4] Ivlev D. D., Ershov L. V. Metod vozmushchenij v teorii uprugoplasticheskogo tela. M. : Nauka, 1978. 208 s. (in Russian)
- [5] Kovalev A. V. Ob uchete associirovannoj szhimaemosti uprugoplasticheskikh tel v sluchae ploskoj deformacii // Vestnik CHuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. YA. YAKovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2013. №1(15). S. 65–69. (in Russian)
- [6] Kovalev A. V., Rusina E. YU., YAKovlev A. YU. Ob issledovanii mekhanicheskogo vzaimodejstviya ehlementov tonkoj uprugoplasticheskoy konstrukcii // V sbornike: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya i smezhnye voprosy. Materialy Vserossijskoj nauchnoj shkoly-konferencii, posvyashchennoj 85-letiyu professora D. D. Ivleva, 2015. S. 107–114. (in Russian)
- [7] Kovalev A. V., Sporyhin A. N., YAKovlev A. YU. Issledovanie mekhanicheskogo vzaimodejstviya ehlementov razlichnyh form i svojstv v sisteme spressovanyh tel // V sbornike: Sovremennyye problemy mekhaniki i prikladnoj matematiki sbornik trudov mezhdunarodnoj shkoly-seminara. Otvetstvennyj redaktor: A. D. CHernyshov, 2004. S. 280–281. (in Russian)

Rusina Elena Yuryevna

e-mail: Elena_RS@inbox.ru, Postgraduate student, Voronezh State University, Voronezh, Russia

[8] Marushkej YU. M. Dvuosnoe rastyazhenie uprugoplasticheskogo prostranstva s vklyucheniem. Izv. VUZov. Mashinostroenie, 1975. №12. S. 25–30. (in Russian)

[9] Muskhelishvili N. I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti. M. : Nauka, 1966. 707 s. (in Russian)

[10] Sporyhin A. N., Kovalev A. V., SHCHeglova YU. D. Neodnomernye zadachi uprugovyazkoplastichnosti s neizvestnoj granicej. Voronezh: Izd-vo VGU, 2004. 219 s. (in Russian)

Л. В. Левина, О. С. Новикова, В. Б. Пеньков, М. В. Поликарпов

ОПТИМИЗАЦИЯ ОБЛЕГЧЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КРЕПЛЕНИЯ ПРИ ВАРЬИРОВАНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия

Аннотация. Выполнена оптимизация облегченного элемента крепления с границей в форме гиперboloида в зависимости от нагрузки и радиуса конструкции, обладающего неоднородными жесткостными свойствами. Для анализа напряженно-деформированного состояния использован метод граничных состояний в сочетании с методом возмущений. Полнопараметрическое аналитическое решение, включающее параметры геометрии тела, построено с использованием интерполяционного многочлена Лагранжа.

Ключевые слова: метод граничных состояний, метод граничных состояний с возмущениями, базис состояний; неоднородное тело, дюралюминий, коэффициенты Фурье, интерполяционный многочлен Лагранжа.

УДК: 539.3

Метод граничных состояний [1] (МГС) основан на понятии состояния среды, под которым понимается частное решение определяющих уравнений среды безотносительно к условиям, поставленным на границе тела. Определяющие соотношения в математической модели неоднородного эластостатического тела представлены в тензорно-индексной форме записи:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{tt} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \sigma_{ij,j} + X_i^0 = 0, \quad (1)$$

© Левина Л. В., Новикова О. С., Пеньков В. Б., Поликарпов М. В., 2017

Левина Любовь Владимировна

e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Новикова Ольга Сергеевна

e-mail: _o_l_g_a_@bk.ru, аспирант, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Пеньков Виктор Борисович

e-mail: vbpenkov@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Поликарпов Максим Владимирович

e-mail: messiah142@gmail.com, студент, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-41-480729 «р_а»).

Поступила 10.11.2017

где u_i, X_i^0 – компоненты векторов перемещения и объемных сил, $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций, δ_{ij} – символ Кронекера, λ, μ – неоднородные параметры Ламе. При фиксированных значениях λ, μ совокупность соотношений (1) сводится к системе уравнений Ламе

$$\mu u_{i,jj}^+ (\lambda + \mu) u_{j,ji}^+ X_i^0 = 0.$$

Их общее решение построено Папковичем и Нейбером и для ограниченного односвязного тела представляется в форме Аржаных – Слободянского:

$$u_i^- 4(1 - \nu) B_i + x_j B_{i,j} - x_i B_{j,i}, \quad (2)$$

где B_i – компонента произвольного гармонического вектора. Общие решения (2) служит эффективным средством формирования базиса пространства состояний для тела [1].

Понятие состояния среды трансформируется в понятия внутреннего ξ и граничного γ состояний, если речь заходит о конкретном теле V , имеющем границу ∂V :

$$\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}, \quad \gamma = \{u_i|_{\partial V}, p_i\}.$$

Совокупность всех возможных состояний $\xi \leftrightarrow \gamma$ образует изоморфные гильбертовы пространства внутренних Ξ и граничных Γ состояний со скалярными произведениями

$$\left(\xi^{(k)}, \xi^{(m)} \right)_{\Xi} = \int_V \sigma_{ij}^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(m)} dV, \quad \left(\gamma^{(k)}, \gamma^{(m)} \right)_{\Gamma} = \int_{\partial V} p_i^{(k)} u_i^{(m)} dS,$$

которые равны между собой в силу принципа возможных перемещений

$$\left(\xi^{(k)}, \xi^{(m)} \right)_{\Xi} = \left(\gamma^{(k)}, \gamma^{(m)} \right)_{\Gamma}.$$

После ортогонализации атрибуты результирующих внутреннего и граничного состояний представляются рядами Фурье по элементам ортонормированных базисов:

$$u_i = \sum_k c_k u_i^{(k)}, \sigma_{ij} = \sum_k c_k \sigma_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij} = \sum_k c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}, u_i|_{\partial V} = \sum_k c_k u_i^{(k)}|_{\partial V}, p_i = \sum_k c_k p_i^{(k)}.$$

Проведем декомпозицию определяющих соотношений среды методом возмущений и представим искомые состояния в виде асимптотических рядов по малому параметру β [2] (ниже верхние индексы в круглых скобках указывают на номер итерации):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \beta \sigma_{ij}^{(1)} + \dots; \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \beta \varepsilon_{ij}^{(1)} + \dots; \quad u_i = u_i^{(0)} + \beta u_i^{(1)} + \dots; \quad X_i = X_i^0 + \beta X_i^{(1)} + \dots$$

Тогда исходные соотношения эквивалентны бесконечной последовательности линейных систем уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{(k)} &= \frac{1}{2} \left(u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)} \right), \quad s_{ij}^{(k)} = \lambda_0 \varepsilon_{tt}^{(k)} \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^{(k)}, \quad s_{ij,j}^{(k)} + X_i^{(k)} = 0, \\ X_i^{(k)} &= \left(\lambda_1 \varepsilon_{tt}^{(k-1)} \delta_{ij} + 2\mu_1 \varepsilon_{ij}^{(k-1)} \right)_{,j}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $s_{ij}^{(k)}$ выполняет роль компоненты тензора напряжений и находится по решению задачи итерации k . При однородном коэффициенте ν и слабой неоднородности модуля

сдвига $\mu = \mu_0 + \beta\mu_1$ модуль объемного расширения получает аналогичное представление $\lambda = \lambda_0 + \beta\lambda_1$, поскольку $\lambda_m = 2\nu\mu_m/(1 - 2\nu)$, $m = 1, 2$. Для задачи каждого приближения справедливо общее решение (2), которое обеспечивает способ построения базиса пространства внутренних состояний. Совокупность соотношений (1) определяет последовательность задач, решением которых должны явиться поля, соответствующие итерациям. По решению задачи итерации k восстанавливается тензор напряжений:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k)} + \lambda_1 \varepsilon_{tt}^{(k-1)} \delta_{ij} + 2\mu_1 \varepsilon_{ij}^{(k-1)}.$$

Методом граничных состояний с возмущениями [3] в безразмерной постановке решена первая основная задача теории упругости для внутренности пяти неоднородных упругих гиперboloидов, выполненных из поверхностно упрочненного дюралюминия с параметрами

$$\mu_k = \mu_0 + \beta\mu_1, \quad \nu = 0.34, \quad \mu_0 = 1, \quad \mu_1 = \frac{x^2 + y^2}{R_n^2 + z^2}, \quad R_n = \left\{ \frac{19}{20}, \frac{17}{20}, \frac{3}{4}, \frac{13}{20}, \frac{11}{20} \right\},$$

где R_n – радиус торца гиперboloида в варианте n . Заложенная в μ_1 неоднородность достигается средствами приповерхностного упрочнения материала. Во всех вариантах безразмерная высота тела равна 2. Граничные условия на боковой поверхности S_1 и торцах S_2, S_3 таковы:

$$p|_{S_1} = \{0, 0, 0\}, \quad p|_{S_2} = \{0, 0, 0.01\}, \quad p|_{S_3} = \{0, 0, -0.01\}.$$

В задаче требовалось восстановить напряженно-деформированное состояние (НДС) тел (рис. 1).

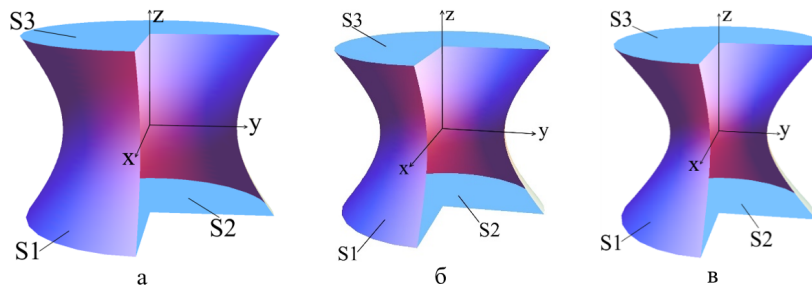


Рис. 1. Гиперboloид: а) $R = \frac{19}{20}$, б) $R = \frac{15}{20}$, в) $R = \frac{11}{20}$

Выполнены расчеты при $\beta = 0.2$ (20-процентное упрочнение на боковой поверхности) для трех итераций. Характеристики, отвечающие за напряженно-деформированное состояние, имеют форму аналитических выражений, но из-за их визуальной необозримости здесь не приведены. Для краткости в табл.1 представлены изолинии напряжений (обладают 2-ной симметрией), построенные в сечении $y = 0$.

Чтобы построить полнопараметрическое аналитическое решение [4], зависящее от радиуса торца гиперboloида, использовался интерполяционный многочлен Лагранжа

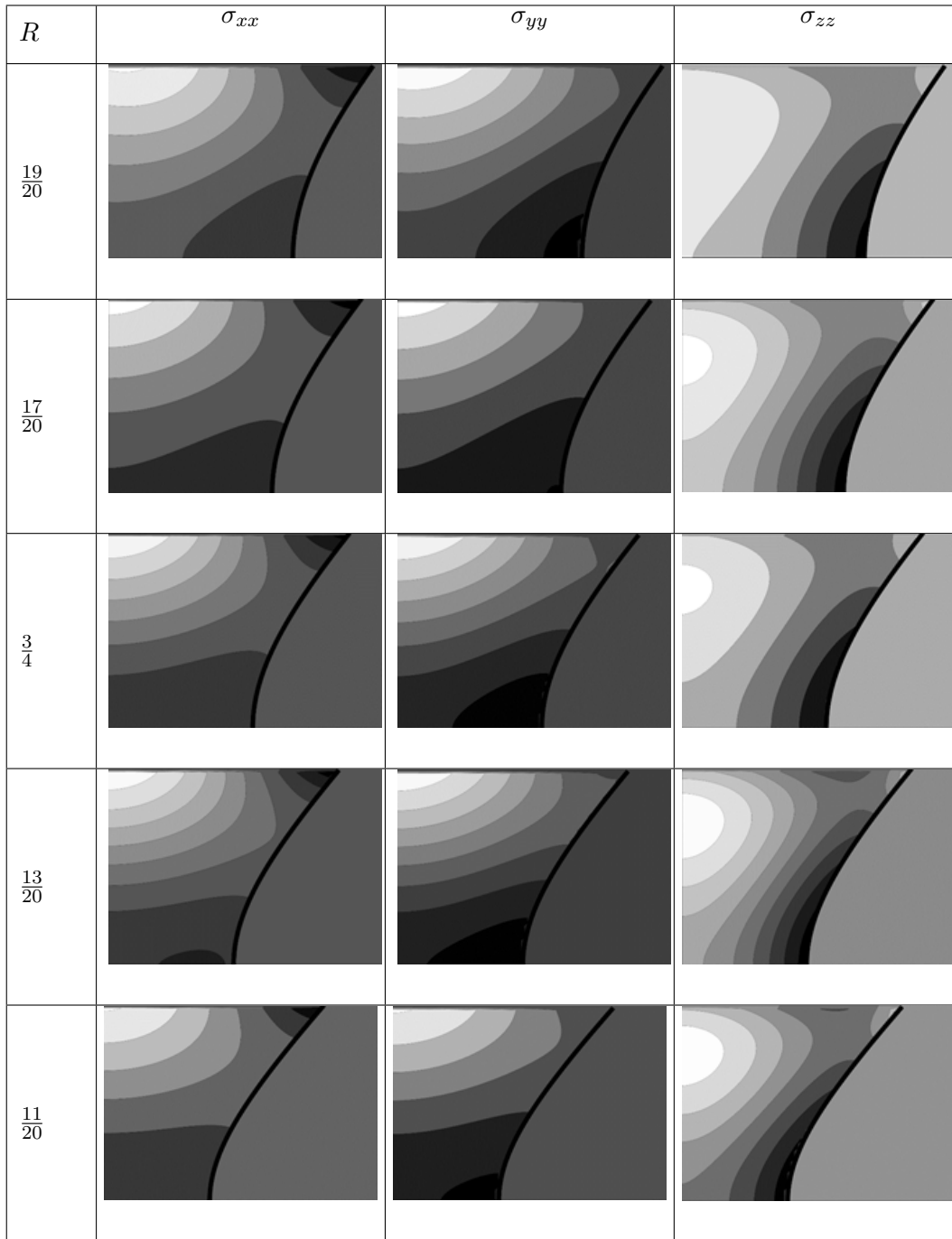


Таблица 1. Результаты решения задач

$$\xi(R) = \sum_{n=0}^N \xi_n l_n(R), \quad l_n(R) = \prod_{j=0, j \neq n}^N \frac{R - R_j}{R_n - R_j} \quad (4)$$

График на рис. 2 отображает невязку $\tau(R)$, сопоставляющую тензоры напряжений, построенные двумя способами: 1) непосредственная аппроксимация пяти полей тензоров напряжений; 2) построение тензоров напряжений через соотношения (1) по результатам аппроксимации полей перемещений. Вертикальная шкала свидетельствует о допустимости отклонения.

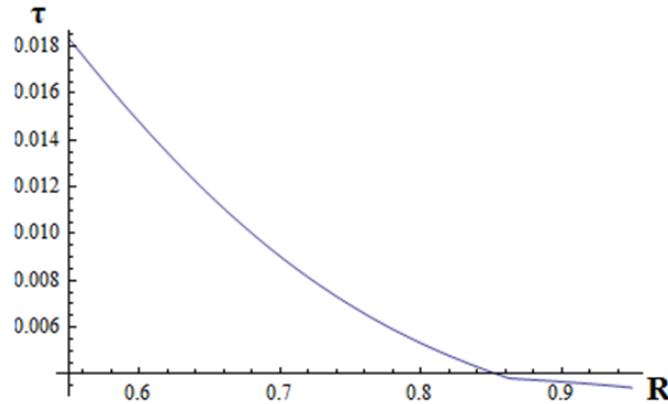


Рис. 2. Невязка лагранжевой аппроксимации

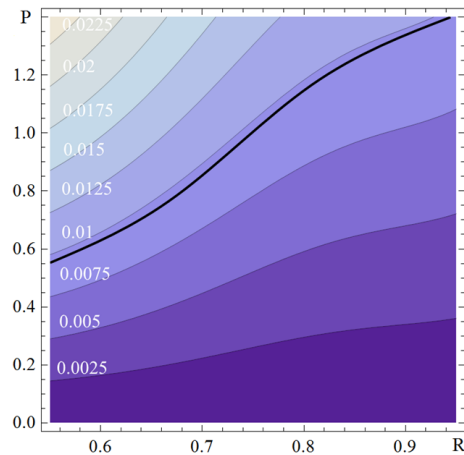


Рис. 3. Распределение σ_{\max} в плоскости параметров

Проведена процедура обезразмеривания типового значения предела текучести дюралюминия, которое составляет величину порядка 250 Мпа, а справочное значение модуля сдвига равно 27 ГПа: $\sigma_T = \sigma_T^0 / \mu_0$. Согласно теории предельного упругого состояния Губера – Мизеса интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \frac{p}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)}$$

не может превышать предела текучести:

$$\sigma_i \leq \sigma_T. \quad (5)$$

В этой связи интерес представляет именно максимальное по области V значение интенсивности напряжений

$$\sigma_{\max}(R, p) = \max_{x \in V} \sigma_i(x, R, p).$$

Зависимость σ_{\max} от варьируемых безразмерных параметров p, R приведена на рис. 3 изолиниями. Жирной линией отмечена кривая, отвечающая предельно допустимому значению σ_T . Наличие аналитического полнопараметрического решения позволяет проводить параметрическую оптимизацию без промежуточных громоздких численных операций и занимает по времени считанные секунды.

Любая пара значений усилий и радиуса торца гиперблоида, лежащая ниже кривой отмеченной на графике, сохранит конструкцию в рабочем состоянии. Значения, находящиеся выше, приведут к разрушению элементов крепления. Эта информация позволяет инженерам-конструкторам назначать геометрические параметры элементов, обеспечивая устраивающий их запас прочности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пеньков В. Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т.2, №2. С. 115–137.

[2] Пеньков В. Б., Саталкина Л. В., Кузьменко Н. В. Решение задач изотропной теории упругости при наличии массовых непрерывных сил // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 259–265.

[3] Пеньков В. Б., Левина Л. В., Поликарпов М. В. Упругое состояние неоднородных конструкционных элементов // Потенциал современной науки. 2015. № 3. С. 7–13.

[4] Новикова О. С. Построение полнопараметрических аналитических решений основных смешанных задач эластостатики для обеспечения технологических процессов обработки давлением // Проблемы и перспективы развития машиностроения. Сб. научных трудов МНТК, посвященной 60-летию Липецкого ГТУ. Ч.2. 17-18 ноября 2016 г. Липецк: ЛГТУБ2016. С. 203–207.

L. V. Levina, O. S. Novikova, V. B. Penkov, M. V. Polikarpov

OPTIMIZATION OF LIGHTWEIGHT FASTENING ELEMENTS AT A VARIATION OF GEOMETRICAL PARAMETERS

Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia

Abstract. Optimization of a lightweight fastening element with a hyperboloid-shaped boundary, depending on the load and the radius of the structure, having heterogeneous stiffness properties, is performed. Method of boundary states in combination with the method of perturbation is used to analyze of the stress-strain state of a heterogeneous element of construction. A full parametrical analytic solution, including parameters of body geometry is built on the Lagrange interpolation polynomial.

Keywords: method of boundary states, method of boundary states with perturbation; basis of states, heterogeneous body, duraluminium, coefficients of Fourie, Lagrange interpolation polynomial.

REFERENCES

[1] Pen'kov V. B., Pen'kov V. V. Metod granichnyh sostojanij dlja reshenija zadach linejnoj mehaniki. // Dal'nevostochnyj matematicheskij zhurnal. 2001. T.2, №2. S.115–137. (in Russian)

[2] Pen'kov V. B., Satalkina L. V., Kuz'menko N.V. Reshenie zadach izotropnoj teorii uprugosti pri nalichii massovyh nepreryvnyh sil //Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii "Sovremennye problemy matematiki, mehaniki, informatiki". Tula: Izd-vo TulGU, 2014. S. 259–265. (in Russian)

[3] Pen'kov V. B., Levina L. V., Polikarpov M. V. Uprugoe sostoyanie neodnorodnyh konstrukcionnyh ehlementov // Potencial sovremennoj nauki. 2015. № 3. S. 7–13. (in Russian)

[4] Novikova O. S. Postroenie polnoparametricheskikh analiticheskikh reshenij osnovnyh smeshannyh zadach ehlastostatiki dlya obespecheniya tekhnologicheskikh processov obrabotki davleniem // Problemy i perspektivy razvitiya mashinostroeniya. Sb. nauchnyh trudov MNTK, posvyashchennoj 60-letiyu Lipeckogo GTU. CH.2. 17–18 noyabrya 2016 g. Lipeck: LGTUB2016. S. 203–207. (in Russian)

Levina Lyubov Vladimirovna,

e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru, Ph. D. Phys. & Math., Associate Professor, Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia.

Novikova Olga Sergeevna,

e-mail: _o_l_g_a_@bk.ru, graduate student, Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia.

Penkov Viktor Borisovich,

e-mail: vbpenkov@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia.

Polikarpov Maxim Vladimirovich,

e-mail: messiah142@gmail.com, student, Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia.

М. В. Петров, Е. Г. Гоник, Т. Г. Федорова

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК, ЗАПОЛНЕННЫХ РАЗЛИЧНЫМИ СЫПУЧИМИ МАТЕРИАЛАМИ

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Выполнены эксперименты по исследованию потери устойчивости пустых и заполненных сыпучими материалами цилиндрических образцов при изгибе. Образцы были изготовлены по физическому и геометрическому подобию [10], [11] с большегабаритными автоцистернами для перевозки сыпучих материалов [12]. Образец одним концом жестко закреплялся на испытательном стенде, а на другой, свободный конец образца, прикладывалась поперечная сила. Ее увеличивали до момента, когда происходила потеря устойчивости образца. Испытываемый образец заполнялся железным порошком ПЖ-5, речным песком, медным порошком на 30%, 60% и 90% по объему. Полученные результаты экспериментальных исследований были проанализированы и по этим данным построены графики зависимости критической нагрузки от степени заполнения образцов для испытываемых материалов. Образцы теряют устойчивость в упругой стадии работы. При потере устойчивости образуются ромбовидные вмятины около жесткой заделки в сжатой зоне выпуклостью внутрь.

Ключевые слова: железный порошок ПЖ-5, индикатор часового типа, критическая сила, образец, оболочка, устойчивость

УДК: 517.95:515.172.22

© Петров М. В., Гоник Е. Г., Федорова Т. Г., 2017

Петров Михаил Васильевич

e-mail: katty.gonik@mail.ru, доктор технических наук, профессор кафедры строительных конструкций строительного факультета ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», г. Чебоксары.

Гоник Екатерина Григорьевна

e-mail: katty.gonik@mail.ru, старший преподаватель кафедры строительных конструкций строительного факультета ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова». г. Чебоксары.

Федорова Татьяна Георгиевна

e-mail: tanusha2884@mail.ru, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций строительного факультета ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова». г. Чебоксары.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований №16-38-60051

Поступила 15.08.2017

Применение тонкостенных металлических конструкций в настоящее время в технике и строительстве весьма целесообразно. В цилиндрических емкостях хранят и перевозят жидкие, сыпучие и газообразные вещества. Сыпучие вещества перевозят цистернами, имеющими вид замкнутой цилиндрической оболочки. Обеспечение ее устойчивости является одной из ключевых задач при эксплуатации. В работах [1],[2],[8],[9] исследованы устойчивость пустых тонкостенных оболочек. Потеря устойчивости и закритическое поведение тонкостенных оболочек, заполненных сыпучим материалом, исследовано в работах [3]-[7]. Устойчивость при изгибе тонкостенных оболочек, заполненных различными сыпучими материалами, недостаточно исследовано.

Поэтому целью выполнения данного исследования является экспериментальное исследование влияния различных сыпучих материалов на потерю устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек при поперечном изгибе.

В качестве сыпучих материалов были взяты: речной песок, железный порошок ПЖ-5, медный порошок. Насыпная плотность речного песка $\rho=1,52\text{г/см}^3$, железного порошка ПЖ-5 $\rho=2,62\text{г/см}^3$, медного порошка $\rho=3,54\text{ г/см}^3$.

Для выполнения испытаний была собрана специально разработанная установка, показанная на рисунке 1.

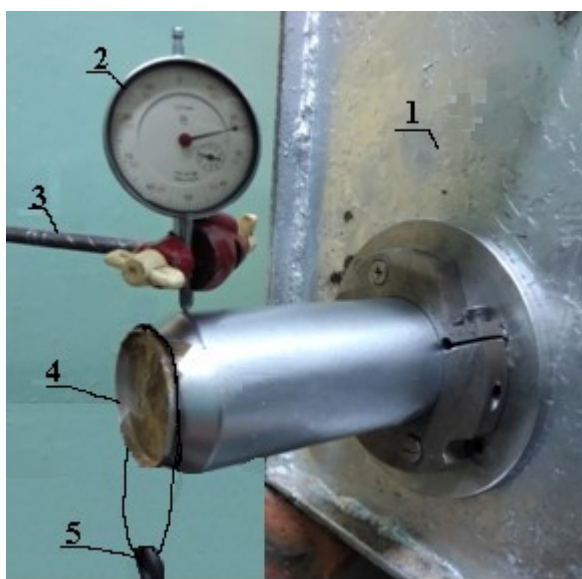


Рис.1. Фотография установки

Экспериментальная установка состояла из: металлического стенда -1, индикатора часового типа -2, штатива -3, модельного образца -4, нагружающего устройства -5.

Жесткий стенд был выполнен из стали. Образцы закреплялись консольно к стенду. Жесткая заделка для испытания образцов выполнялась следующим образом. Металлическая оправка, выточенная по внутреннему диаметру образца, жестко закреплялась на стенде. На оправку насаживался один конец испытываемого образца и на наружную поверхность этого конца образца надевались полукольца, которые стягивались между собой болтами и крепились к металлическому стенду.

С помощью подвески и грузов 5 создавалась нагрузка на образец. Нагрузка возрастала с шагом 1Н и доводилась до критической, при которой происходила полная

потеря устойчивости образца 4. Вертикальное перемещение конца оболочки замерялась с помощью индикатора часового типа 2, установленного на штативе 3.

Образцы были изготовлены из условия геометрического и физического подобия с большегабаритными автоцистернами. Материалом образцов был выбран алюминиевый сплав. Размеры цилиндрических образцов: наружный диаметр 65,5мм, длина 135мм, толщина 0,1мм.

Испытание образцов на устойчивость выполнялось следующим образом. Вначале были испытаны пустые образцы, а затем заполненные с одним видом упругого заполнителя на 30%, 60% и 90% по объему. К свободному концу оболочки прикладывалась нагрузка, и она возрастала с шагом 1Н, пока образец не потеряет устойчивость. При каждом шаге увеличения вертикальной нагрузки, замерялось показания индикатора. Нагрузка доводилась до критической, при которой происходила потеря устойчивости оболочки. Испытав оболочку с одним видом засыпки, вид сыпучего вещества менялся на другой. В процессе данных экспериментов определялась критическая сила и величина перемещения свободного конца.

По завершению экспериментов полученные результаты были проанализированы и статистически обработаны. Была установлена зависимость критической силы от процента загрузки образцов, заполненных речным песком, медным и железным порошками. Результаты представлены в таблице 1,2 и на рисунках 2,3.

Значение критических нагрузок в кН для образцов, заполненных различными сыпучими материалами представлены в таблице 1.

Табл.1

Вид сыпучего материала	для пустых	для заполненных на:		
		30%	60%	90%
Речной песок	0,153	0,156	0,158	0,173
Железный порошок ПЖ-5		0,159	0,165	0,215
Медный порошок		0,165	0,18	0,219

Возрастание критических нагрузок образцов заполненных сыпучими материалами относительно пустых образцов в процентах, представлены в таблице 2.

Табл.2

Вид сыпучего материала	% заполнения		
	на 30%	на 60%	на 90%
Речной песок	2	3,27	13,1
Железный порошок ПЖ-5	4	7,84	40,5
Медный порошок	7,84	17,65	43,1

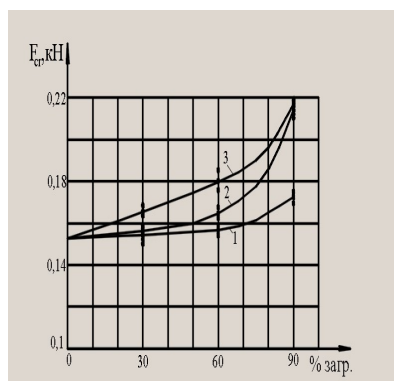


Рис.2. График зависимости критической силы от процента загрузки
1 - для речного песка; 2 - для железного порошка ПЖ-5; 3 - для медного порошка

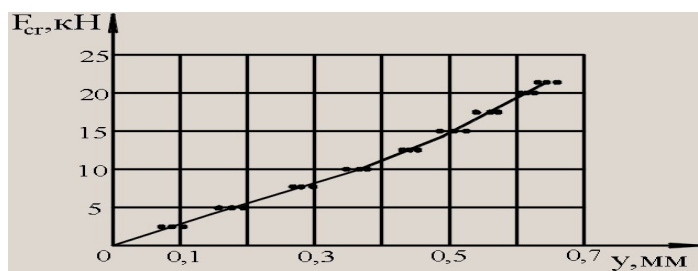


Рис.3. График зависимости прогиба от критической силы



Рис.4. Фотография деформированного образца

На рисунке 3 показана зависимость перемещения свободного конца образца от нагрузки для случая заполнения медным порошком на 90%.

Фотография деформированного образца представлена на рисунке 4. Гофры образовались в сжатой зоне. Они имели ромбовидную форму.

При нагружении поперечной нагрузкой образцов, заполненных сыпучим материалом, устойчивость увеличивается по сравнению с пустыми образцами. Нет опасности потери устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
- [2] Ильгамов М. А. Экспериментальное исследование устойчивости консольно закрепленной цилиндрической оболочки под действием поперечной силы и внутреннего давления // Исследования по теории пластин и оболочек. 1964. № 2. С. 186–191.
- [3] Петров М. В., Федорова Т. Г. Экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных оболочек, заполненных сыпучим материалом при изгибе // Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И.Лобачевского. Механика. 2011. №4(5). С. 2420–2422.
- [4] Баженов В. Г., Гоник Е. Г., Кибец А. И., Кибец Ю. И., Павленкова Е. В., Петров М. В., Федорова Т. Г. Конечно-элементное решение задачи устойчивости и критического поведения автоцистерн для транспортировки сыпучих грузов // Проблемы прочности и пластичности. Вып.75(1). 2013. С. 56–62.
- [5] Гоник Е. Г., Кибец А. И., Иванов В. А., Петров М. В., Федорова Т. Г. Экспериментальное исследование потери устойчивости подъемной цистерны для перевозки сыпучих материалов при аварийном падении. Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. Чебоксары, 2014. С. 129–131.
- [6] Гоник Е. Г., Кибец А. И., Петров М. В., Федорова Т. Г. Экспериментальное исследование упругопластического деформирования и потери устойчивости подкрепленных цилиндрических оболочек с наполнителем при изгибе // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. Н. Новгород: Изд-во ННГУ. Вып.75(3), 2013. С. 215–220.
- [7] Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г. Экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных оболочек при чистом изгибе // Вестник ЧГПУ им. И.Я.Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. №2(24). С. 119–125.
- [8] Shariati M., Allahbakhsh H. R. Numerical and experimental investigations on the buckling of steel semi-spherical shells under various loadings // Thin-Walled Structures. 2010. Vol. 48. № 8. P. 620–628.
- [9] Баженов В. Г., Гоник Е. Г., Кибец А. И., Шошин Д. В. Устойчивость и предельные состояния упругопластических сферических оболочек при статических и динамических нагружениях // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т.55. №1. С. 13–22.
- [10] Моссаковский В. И., Маневич Л. И., Мильцын А. М. Моделирование несущей способности цилиндрических оболочек. Киев: Наукова думка, 1977. 141 с.
- [11] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 8-е изд., перераб. М.: Наука, 1977. 440 с.
- [12] <http://www.sespe.com/>

M. V. Petrov, E. G. Gonik, T. G. Fedorova

FLEXURAL BUCKLING OF THIN SHELLS FILLED WITH DIFFERENT BULK MATERIALS

Chuvash state University. I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia

Abstract. Experiments were carried out to investigate the loss of stability of empty and filled with bulk materials cylindrical samples during bending. The samples were made in physical and geometric similarity [10,11] with large-sized tankers for transportation of bulk materials [12]. The sample was rigidly fixed at one end on the test bench, and on the other, the free end of the sample, a transverse force was applied. It was increased until the moment when the loss of stability of the sample occurred. The test sample was filled with iron powder PZH-5, river sand, copper powder by 30%, 60% and 90% by volume. The obtained results of experimental studies have been analyzed and the graphs of the dependence of the critical load on the degree of filling of samples for the tested materials lose stability in the elastic stage of operation. When buckling is formed, the diamond-shaped indentations around a rigid fixing in the compressed area bulge inside

Keywords: Iron powder PZH-5, indicator of hour type, critical force, sample, shell, stability.

REFERENCES

- [1] Vol'mir A. S. Ustojchivost' deformiruemyh sistem. M.: Nauka, 1967. 984 s. (in Russian)
- [2] Il'gamov M. A. EHksperimental'noe issledovanie ustojchivosti konsol'no zakreplennoj cilindricheskoj obolochki pod dejstviem poperechnoj sily i vnutrennego davleniya // Issledovaniya po teorii plastin i obolochek. 1964. № 2. S. 186–191. (in Russian)
- [3] Petrov M. V., Fedorova T. G. EHksperimental'noe issledovanie poteri ustojchivosti tonkostennyh obolochek, zapolnennyh sypuchim materialom pri izgibe // Vestnik Nizhegorodskogo un-ta im. N.I.Lobachevskogo. Mekhanika. 2011. №4(5). С. 2420–2422. (in Russian)
- [4] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibec A. I., Kibec YU. I., Pavlenkova E. V., Petrov M. V., Fedorova T. G. Konechno-ehlementnoe reshenie zadachi ustojchivosti i zakriticheskogo povedeniya avtocistern dlya transportirovki sypuchih грузов // Problemy prochnosti i plastichnosti. Vyp.75(1). 2013. S. 56–62. (in Russian)
- [5] Gonik E. G., Kibec A. I., Ivanov V. A., Petrov M. V., Fedorova T. G. EHksperimental'noe issledovanie poteri ustojchivosti pod"emnoj cisterny dlya perevozki sypuchih materialov pri avarijnom padenii. Materialy VIII Vserossijskoj konferencii po mekhanike deformiruemogo tverdogo tela. CHEboksary, 2014. S. 129–131. (in Russian)

Petrov Mikhail Vasilyevich

e-mail: katya.gonik@mail.ru, Dr. Sci., Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Gonic Ekaterina Grigoryevna

e-mail: katya.gonik@mail.ru, Senior lecturer, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Fedorova Tatyana Georgievna

e-mail: tanusha2884@mail.ru, Ph. D., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

[6] Gonik E. G., Kibec A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G. Eksperimental'noe issledovanie uprugoplasticheskogo deformirovaniya i poteri ustojchivosti podkreplennyh cilindricheskikh obolochek s zapolnitelem pri izgibe // Problemy prochnosti i plastichnosti. Mezhd. sb. N. Novgorod: Izd-vo NNGU. Vyp.75(3), 2013. S. 215–220. (in Russian)

[7] Petrov M. V., Fedorova T. G., Gonik E. G. Eksperimental'noe issledovanie poteri ustojchivosti tonkostennyh obolochek pri chistom izgibe // Vestnik CHGPU im. I.YA.Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2015. №2(24). С. 119–125. (in Russian)

[8] Shariati M., Allahbakhsh H. R. Numerical and experimental investigations on the buckling of steel semi-spherical shells under various loadings // Thin-Walled Structures. 2010. Vol. 48. № 8. P. 620–628.

[9] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibec A. I., Shoshin D. V. Ustojchivost' i predel'nye sostoyaniya uprugoplasticheskikh sfericheskikh obolochek pri staticheskikh i dinamicheskikh nagruzheniyah // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2014. T.55. №1. S. 13–22. (in Russian)

[10] Mossakovskij V. I., Manevich L. I., Mil'cyn A. M. Modelirovanie nesushchej sposobnosti cilindricheskikh obolochek. Kiev: Naukova dumka, 1977. 141 s. (in Russian)

[11] Sedov L. I. Metody podobiya i razmernosti v mekhanike. 8-e izd., pererab. M.: Nauka, 1977. 440 s. (in Russian)

[12] <http://www.sespel.com/>

С. В. Матвеев, А. Н. Матвеева, Т. И. Рыбакова

РАВНОМЕРНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ТОНКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ, ПРИ УСЛОВИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТРЫВУ

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары

Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары

Аннотация. В работе рассматривается равномерное растяжение тонкой пластины, ослабленной эллиптическим отверстием, из анизотропного упругопластического материала при условии сопротивления отрыву. При решении задачи используются соотношения, полученные в работах [1], [2]. Свойства анизотропии вводятся согласно идеям Хилла [3]. Методом малого параметра определены компоненты напряжения и граница, разделяющая пластическую и упругую зоны.

Ключевые слова: пластичность, упругость, линеаризация, напряжение, отрыв, анизотропия.

УДК: 539.374

Рассмотрим тонкую пластину из анизотропного идеальнопластического материала, ослабленную отверстием эллиптической формы. Уравнение контура эллиптического отверстия запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2(1+\varepsilon)^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon)^2} = 1. \quad (1)$$

При $\varepsilon = 0$ согласно (1) имеет место круговое отверстие радиуса a . Условие пластичности для изотропного материала можно записать в виде

$$(\sigma_x - p_0)(\sigma_y - p_0) - \tau_{xy}^2 = 0, \quad p_0 = const, \quad (2)$$

© Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Рыбакова Т. И. 2017

Матвеев Сергей Владимирович

e-mail: sergio2100@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары.

Матвеева Алена Николаевна

e-mail: goshtova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Рыбакова Татьяна Ивановна

e-mail: rti2112@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Поступила 10.09.2017

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — компоненты напряжения в декартовой системе координат. Следуя идеям Хилла [3], условие пластичности для анизотропного материала примем в виде

$$(\tilde{A}\sigma_x - p_0)(\tilde{B}\sigma_y - p_0) - \tilde{C}\tau_{xy}^2 = 0, \quad \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, p_0 = const. \quad (3)$$

Константы анизотропии $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ могут быть определены экспериментальным путем

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{p_0}{\tilde{A}}, & \sigma_y &= \tau_{xy} = 0, \\ \sigma_y &= \frac{p_0}{\tilde{B}}, & \sigma_x &= \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xy} &= \frac{p_0}{\tilde{C}}, & \sigma_x &= \sigma_y = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Перейдем к полярной системе координат. Связь между напряжениями в декартовой системе координат xy и напряжениями в полярной системе координат $\rho\theta$ имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (3) и (5) получим

$$\begin{aligned} &\tilde{A}\tilde{B}(\sigma_\rho + \sigma_\theta)^2 - (\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 \left(\frac{\tilde{A}\tilde{B}}{2} + \tilde{C} \cos 4\theta \right) - \\ &- 2\tau_{\rho\theta}^2(\tilde{A}\tilde{B} + \tilde{C} + (\tilde{C} - \tilde{A}\tilde{B}) \cos 4\theta) - 2\tau_{\rho\theta}(\sigma_\rho - \sigma_\theta) \times \\ &\times (\tilde{A}\tilde{B} - \tilde{C}) \sin 4\theta - 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta)(\tilde{A} - \tilde{B})p_0 \cos 2\theta - \\ &- 4\tau_{\rho\theta}(\tilde{A} - \tilde{B})p_0 \sin 2\theta - 2(\sigma_\rho + \sigma_\theta)(\tilde{A} + \tilde{B})p_0 = -4p_0^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Все величины, имеющие размерность напряжения, будем считать безразмерными, отнесенными к величине предела текучести k , а величины, имеющие размерность длины, — к радиусу пластической зоны ρ_s^0 . В дальнейшем положим

$$\tilde{A} = 1 + \delta\tilde{a}, \quad \tilde{B} = 1 + \delta\tilde{b}, \quad \tilde{C} = 1 + \delta\tilde{c}, \quad \varepsilon = \delta d_1, \quad 0 \leq d_1 \leq 1, \quad (7)$$

где $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ — константы анизотропии, $d_1 = const$, δ — малый безразмерный параметр. В исходном нулевом приближении при $\delta = 0$, $\tilde{A} = \tilde{B} = \tilde{C} = 1$ соотношение (6) имеет вид

$$(\sigma_x^{(0)} - p_0)(\sigma_y^{(0)} - p_0) - \tau_{xy}^{(0)2} = 0, \quad p_0 = const, \quad (8)$$

Аналогично работам [4], [5], решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(I)} + \delta^2\sigma_{ij}^{(II)} + \dots \quad (9)$$

Положим

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (10)$$

Припишем компонентам напряжения в пластической зоне индекс p наверху, а упругой — индекс e наверху. В исходном нулевом приближении из (7) — (10) получим

$$\sigma_\theta^{(0)p} = p_0. \quad (11)$$

Уравнения равновесия в первом приближении имеют вид

$$\frac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}}{\rho} = 0. \quad (12)$$

Из (11), (12) следует

$$\sigma_\rho^{(0)p} = p_0 - \frac{C_1}{\rho}. \quad (13)$$

Контур отверстия свободен от усилий, т. е. $\sigma_\rho = 0$ при $\rho \geq \alpha$. Найдем константу из условия $\sigma_\rho = 0$ при $\rho = \alpha$. Тогда соотношение (13) можно переписать в виде

$$\sigma_\rho^{(0)p} = p_0 \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right). \quad (14)$$

Таким образом, компоненты напряжения в пластической области в исходном нулевом состоянии имеют вид

$$\sigma_\rho^{(0)p} = p_0 \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right), \quad \sigma_\theta^{(0)p} = p_0, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0. \quad (15)$$

В полярной системе координат, уравнение (1) запишется в виде

$$\rho = \frac{\alpha(1-\delta^2 d_1^2)}{\sqrt{1-2\delta d_1 \cos 2\theta + \delta^2 d_1^2}} = \alpha \left[-1 + \delta d_1 \cos 2\theta - \frac{3}{4}\delta^2 d_1^2(1 - \cos 4\theta) + \frac{5}{8}\delta^3 d_1^3(\cos 2\theta + \cos 6\theta)\right] + \dots, \quad \rho = \frac{1}{\rho_s}, \quad \alpha = \frac{a}{\rho_s^0}. \quad (16)$$

В первом приближении граничные условия на контуре согласно [6] имеют вид

$$\sigma_\rho^{(I)p} = -p_0 d_1 \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = -2p_0 d_1 \sin 2\theta \quad \text{при} \quad \rho = \alpha. \quad (17)$$

В первом приближении компоненты напряжения в пластической зоне имеют вид [6]

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)p} &= \left[\frac{15\alpha p_0}{8} (\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c}) \frac{\ln \rho}{\rho} - \frac{2\alpha p_0(\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c}) + 15C_1}{\rho} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{16C_2}{\rho^2} \right] \cos 4\theta - \left[\frac{p_0}{2} (\tilde{a} - \tilde{b}) + \frac{3C_3}{\rho} + \frac{4C_4}{\rho^2} \right] \cos 2\theta + \\ &\quad + \frac{\alpha p_0}{8} (\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c}) \frac{\ln \rho}{\rho} - \frac{p_0}{2} (\tilde{a} + \tilde{b}) + \frac{C_5}{\rho}, \\ \sigma_\theta^{(I)p} &= -\frac{\alpha p_0}{8\rho} (\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c}) \cos 4\theta + \frac{p_0}{2} (\tilde{a} - \tilde{b}) \cos 2\theta + \\ &\quad + \frac{\alpha p_0}{8\rho} (\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c}) \cos 4\theta + \frac{p_0}{2} (\tilde{a} - \tilde{b}), \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= -\left[\frac{\alpha p_0}{2\rho} (\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c}) + \frac{4C_2}{\rho} \right] \sin 4\theta + \left[\frac{p_0}{2} (\tilde{a} - \tilde{b}) - \frac{2C_4}{\rho^2} \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (17), (18) получим

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{p_0 \alpha \ln \alpha}{8} (\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c}), & C_2 &= -\frac{p_0 \alpha^2}{8} (\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c}), \\ C_3 &= -\frac{p_0 \alpha}{2} (\tilde{a} - \tilde{b}) + \frac{p_0 d_1}{3} (1 - 4\alpha), & C_4 &= \frac{\alpha^2 p_0}{4} (\tilde{a} - \tilde{b}) + \alpha^2 p_0 d_1. \\ C_5 &= \frac{p_0 \alpha}{2} (\tilde{a} - \tilde{b}) - \frac{p_0 \alpha \ln \alpha}{8} (\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c}). \end{aligned} \quad (19)$$

Выражения для напряжения в пластической зоне в первом приближении согласно (18), (19) примут вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)p} &= \alpha p_0 (\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c}) \left[\frac{15 \ln \rho}{8\rho} - \frac{16+15 \ln \alpha}{8\rho} + \frac{2\alpha}{\rho^2} \right] \cos 4\theta - \\
&\quad - \left[\frac{p_0(\tilde{a}-\tilde{b})}{2} \left(1 - \frac{3\alpha}{\rho} + \frac{2\alpha^2}{\rho^2} \right) + p_0 d_1 \left(\frac{1-4\alpha}{\rho} + \frac{4\alpha^2}{\rho^2} \right) \right] \cos 2\theta + \\
&\quad + \frac{p_0 \alpha \ln \alpha}{8\rho} \tilde{c} - p_0 (\tilde{a} + \tilde{b}) \left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\rho} \right] + \frac{\alpha p_0}{8\rho} (\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c}) \ln \frac{\rho}{\alpha}, \\
\sigma_{\theta}^{(I)p} &= -\frac{\alpha p_0}{8\rho} (\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c}) \cos 4\theta + \frac{p_0(\tilde{a}-\tilde{b})}{2} \cos 2\theta - \frac{p_0(\tilde{a}+\tilde{b})}{2} + \frac{\alpha p_0}{8\rho} (\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c}), \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= -\frac{\alpha p_0}{2\rho} (\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c}) (1 - \alpha^2) \sin 4\theta + \left[\frac{p_0(\tilde{a}-\tilde{b})}{2} \times \left(1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) - \frac{2p_0 d_1 \alpha^2}{\rho^2} \right] \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{20}$$

Условия сопряжения на упругопластической границе имеют вид

$$\sigma_{\rho}^p|_{\rho=1} = \sigma_{\rho}^e|_{\rho=1}; \quad \sigma_{\theta}^p|_{\rho=1} = \sigma_{\theta}^e|_{\rho=1}. \tag{21}$$

Компоненты напряжения в упругой области в первом приближении с учетом условия сопряжения (21) имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)e} &= K_1 + N_1 \cos 2\theta + M_1 \cos 4\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \bar{N}_1 \sin 2\theta + \bar{M}_1 \sin 4\theta,
\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned}
M_1 &= -\alpha p_0 (\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c}) \left[2(1 - \alpha) + \frac{15 \ln \alpha}{8} \right], \\
N_1 &= -p_0 \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \left[(\tilde{a} - \tilde{b}) (\alpha - 1) + 4d_1 \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \right], \\
K_1 &= \frac{p_0(\tilde{a}+\tilde{b})}{2} \left(\alpha - 1 - \frac{\alpha \ln \alpha}{4} \right) + \frac{p_0 \alpha \ln \alpha}{8} \tilde{c}, \\
\bar{M}_1 &= -\frac{\alpha p_0}{2} (\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c}) (1 - \alpha^2), \\
\bar{N}_1 &= \frac{p_0(\tilde{a}-\tilde{b})}{2} (1 - \alpha^2) - 2p_0 d_1 \alpha^2.
\end{aligned}$$

Справедливы формулы раздела (I), (VI), (VIII), приведенные в монографии [6].
Получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)e} &= \frac{p_0(\tilde{a}+\tilde{b})}{2\rho^2} \left(\alpha - 1 - \frac{\alpha \ln \alpha}{4} \right) + \frac{p_0 \alpha \ln \alpha}{8\rho^2} \tilde{c} + \left[\frac{p_0(\tilde{a}-\tilde{b})}{2} (1 - \alpha) \left(\frac{3}{\rho^4} + \frac{2(\alpha-2)}{\rho^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - p_0 d_1 \left(\frac{4\alpha-1}{\rho^4} + \frac{4\alpha^2-8\alpha+2}{\rho^2} \right) \right] \cos 2\theta + \frac{\alpha p_0(\tilde{a}+\tilde{b}+\tilde{c})}{2} \times \\
&\quad \times \left[(1 - \alpha) \left(\frac{3(\alpha-3)}{\rho^4} - \frac{4(\alpha-1)}{\rho^6} \right) - \frac{15 \ln \alpha}{4} \left(\frac{3}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^6} \right) \right] \cos 4\theta, \\
\sigma_{\theta}^{(I)e} &= -\frac{p_0(\tilde{a}+\tilde{b})}{2\rho^2} \left(\alpha - 1 - \frac{\alpha \ln \alpha}{4} \right) - \frac{p_0 \alpha \ln \alpha}{8\rho^2} \tilde{c} + \\
&\quad + \left[\frac{3p_0(\tilde{a}-\tilde{b})}{2\rho^4} (\alpha - 1) - p_0 d_1 \frac{4\alpha-1}{\rho^4} \right] \cos 2\theta + \frac{\alpha p_0(\tilde{a}+\tilde{b}+\tilde{c})}{2} \times \\
&\quad \times \left[(1 - \alpha) \left(-\frac{\alpha-3}{\rho^4} + \frac{4(\alpha-1)}{\rho^6} \right) + \frac{15 \ln \alpha}{4} \left(\frac{1}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^6} \right) \right] \cos 4\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left[\frac{p_0(\tilde{a}-\tilde{b})}{2} (1 - \alpha) \left(\frac{3}{2\rho^4} + \frac{\alpha-2}{\rho^2} \right) + p_0 d_1 \times \right. \\
&\quad \times \left. \left(\frac{1-4\alpha}{\rho^4} - \frac{2\alpha^2-4\alpha+1}{\rho^2} \right) \right] \sin 2\theta + \alpha p_0 (\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c}) \times \\
&\quad \times \left[(1 - \alpha) \left(\frac{1-\alpha}{\rho^6} + \frac{\alpha-3}{\rho^4} \right) - \frac{15 \ln \alpha}{4} \left(\frac{1}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^6} \right) \right] \sin 4\theta.
\end{aligned} \tag{23}$$

Граница упругопластической зоны $\rho_s^{(I)}$ определим из соотношения

$$\rho_s^{(I)} = \frac{1}{4} \left(\sigma_\theta^{(I)e} - \sigma_\theta^{(I)p} \right) \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (24)$$

Получим

$$\begin{aligned} \rho_s^{(I)} = \frac{1}{4} & \left[\alpha p_0 \left(\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c} \right) \left(\frac{\ln \alpha}{8} - 1 \right) + \frac{p_0(\tilde{a} + \tilde{b})}{2} (2 - \alpha) + \right. \\ & + \left. \left(\frac{p_0(\tilde{a} - \tilde{b})}{2} (3\alpha - 4) + p_0 d_1 (4\alpha - 1) \right) \cos 2\theta - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha p_0}{8} \left(\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c} \right) (12\alpha^2 - 16\alpha + 3 + 15 \ln \alpha) \cos 4\theta \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

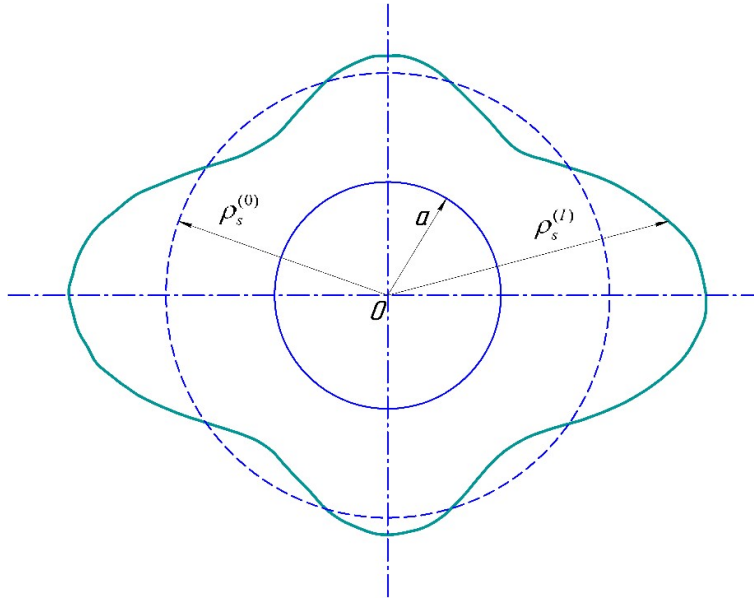


Рис. 1.

Методом малого параметра получено приближенное, аналитическое решение задачи для тонкой пластины ослабленной эллиптическим отверстием при условии сопротивления отрыву. Определены компоненты напряжения в пластической и упругой областях и радиус упругопластической зоны в первом приближении.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Роштова А. Н. О плоском напряженном состоянии анизотропного идеальнопластического материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2007. Т.1. №3. С. 19–22.
- [2] Роштова А. Н. Об общих предельных условиях при отрыве для сжимаемых анизотропных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. №2. С. 131.
- [3] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М. : Гостехиздат, 1956. 407 с.

[4] Кузнецов П. Н. Упругопластическое состояние плоскости, подкрепленной эксцентрическими включениями, при двусосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2009. №2(62). С. 13–18.

[5] Матвеев С. В. Матвеева А. Н., Тихонов С. В. Деформированное состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двусосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. №1(27). С. 105–114.

[6] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела М. : Наука, 1978. 208 с.

S. V. Matveev, A. N. Matveeva, T. I. Rybakova

UNIFORM STRETCHING OF A THIN ANISOTROPIC PLATE, WEAKENED BY AN ELLIPTICAL HOLE, UNDER THE CONDITION OF RESISTANCE TO SEPARATION

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. The paper considers the uniform stretching of a thin plate weakened by an elliptical hole from an anisotropic elastoplastic material under the condition of tear resistance. When solving the problem, the relations obtained in [1], [2] are used. The anisotropy properties are introduced according to Hill's ideas [3]. By the method of a small parameter, the stress components and the boundary separating the plastic and elastic zones are determined.

Keywords: plasticity, elasticity, linearization, stress, separation, anisotropy.

REFERENCES

[1] Roshtova A. N. O ploskom napryazhennom sostoyanii anizotropnogo ideal'noplasticheskogo materiala // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.YA. Yakovleva. 2007. T.1. №3. S. 19–22. (in Russian)

Matveev Sergey Vladimirovich

e-mail: sergio2100@mail.ru, Ph. D., Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Matveeva Alena Nikolaevna

e-mail: roshtova@mail.ru, Ph. D., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Rybakova Tatyana Ivanovna

e-mail: rti2112@mail.ru, Ph. D., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

[2] Roshtova A. N. Ob obshchikh predel'nykh usloviyakh pri otryve dlya szhimayemykh anizotropnykh sred // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2007. №2. S. 131. (in Russian)

[3] Khill R. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M. : Gostekhizdat, 1956. 407 s. (in Russian)

[4] Kuznetsov P. N. Uprugoplasticheskoye sostoyaniye ploskosti, podkreplen-noy ekstsentrisheskimi vklyucheniymi, pri dvuosnom rastyazhenii // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. YA. Yakovleva. 2009. №2(62). S. 13–18. (in Russian)

[5] Matveyev C. V. Matveyeva A. N., Tikhonov S. V. Deformirovannoye sostoyaniye anizotropnoy ploskosti, oslablennoy otverstiyem, podkreplennoy vklyucheniym, ogranichennoy ekstsentrisheskoy okruzhnost'yu, pri dvuosnom rastyazhenii // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2016. №1(27). С. 105–114. (in Russian)

[6] Ivlev D. D., Yershov L. V. Metod vozmushcheniy v teorii uprugoplasticheskogo tela M. : Nauka, 1978. 208 s. (in Russian)

В. А. Кадымов

ПЛАСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ СЛОЕ С НЕОДНОРОДНЫМИ СВОЙСТВАМИ ПО ТОЛЩИНЕ

Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе исследуются задачи течения тонкого пластического слоя с неоднородными свойствами по толщине. Обсуждается условие, при выполнении которого пластическое течение происходит во всем кусочно-однородном слое. Решена осесимметричная задача об осадке биметаллического слоя в кольцевой области, для которой выписаны поля скоростей и контактного давления, найдено общее усилие, потребное для осуществления процесса пластической осадки.

Ключевые слова: растекание тонкого пластического слоя, пластическая осадка, осесимметричная задача.

УДК: 539.3

Теория течения в тонком пластическом слое (ТТПС) получила развитие на горячие процессы [1,2]. Исследована плоская задача о сжатии предварительно нагретой полосы холодными внешними телами. В результате интенсивного теплообмена образуются приконтактные слои затвердевания. Для определения истинной границы течения используется принцип минимума мощности внешних сил. В работе [3] получено решение плоской задачи об осадке пластического слоя с неоднородными свойствами по толщине ($\tau_s = \tau_s(z)$) в изотермической постановке. В [4] решена плоская задача о пластическом сжатии трехслойной полосы с кусочно-однородными и симметричными свойствами по толщине. В [5] решена задача Прандтля для слабо неоднородного по пределу текучести пластического слоя.

1. Ниже ставится и решается плоская задача о сжатии двухслойной биметаллической полосы в рамках модели жесткопластического тела (рис.1). Предположим, что пластическое течение происходит только в “мягком” слое, а второй слой при этом остается жестким.

Выпишем замкнутую систему уравнений краевой задачи:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

© Кадымов В. А., 2017

Кадымов Вагид Ахмедович

e-mail: vkadymov@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия.

Поступила 05.10.2017

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{xz}^2 = 4\tau_{s1}^2, \quad (2)$$

$$\frac{2\sigma_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Краевые условия задачи:

$$z = 0 : \quad \sigma_{xz} = \tau_{s1}; \quad v = 0 \quad (5)$$

$$z = h_1(t) : \quad \sigma_{xz} = -\tau_{s1}; \quad v = -v_0 = \frac{dh_1}{dt} \quad (6)$$

Кроме того, необходимо поставить краевые условия на неизвестной свободной границе $F(x, z, t) = 0$, которая в начальный момент задана уравнением $F(x, z, t_0) \equiv l_0 - x = 0$.

В рассматриваемом случае, при котором течение наблюдается в одном слое, остается в силе решение плоской задачи об осадке пластического слоя с неоднородными свойствами по толщине ($\tau_s = \tau_s(z)$) в изотермической постановке [3]:

$$\sigma_{xz} = az + b, \quad \sigma_{zz} = -ax - c_0, \quad \sigma_{xx} = -ax - c_0 + 2\sqrt{\tau_s^2(z) - (az + b)^2},$$

$$v = -v_0 \frac{z}{h}, \quad u = v_0 \left(\frac{x}{h} + \frac{2}{h} \int_0^z \frac{az + b}{\sqrt{\tau_s^2(z) - (az + b)^2}} dz + c_1 \right),$$

в котором надо положить $\tau_s(z) \equiv \tau_{s1} = const$.

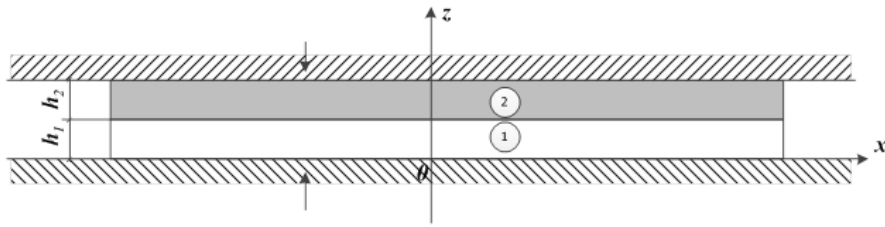


Рис. 1. Пластическая осадка биметаллической полосы

Постоянные a, b определяются из следующих краевых условий:

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad \tau_{s1} = \sigma_{xz} &= a \cdot 0 + b, \\ z = h_1 : \quad -\tau_{s1} = \sigma_{xz} &= a \cdot h_1 + b, \end{aligned}$$

из которых получаем:

$$b = \tau_{s1}, \quad a = -\frac{2\tau_{s1}}{h_1}$$

Постоянная c_0 находится из интегрального условия на свободной границе $x = \bar{l}$, ($\bar{l} = \frac{l_0 h_0}{h(\bar{l})}$ – условная средняя граница):

$$\int_0^{h_1} \sigma_{xx} dz = 0,$$

откуда нетрудно убедиться, что:

$$c_0 = \frac{2\tau_{s1}\bar{l}}{h_1} \left(1 + \frac{\pi h_1}{4\bar{l}}\right) \approx \tau_{s1} \left(\frac{2\bar{l}}{h_1}\right),$$

при этом мы учли условие тонкости слоя ($h/\bar{l} \ll 1$).

Следовательно, поле напряжений имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \tau_{s1} \left(-\frac{2z}{h_1} + 1\right), & \sigma_{zz} &= \frac{2\tau_{s1}}{h_1} x - c_0, \\ \sigma_{xx} &= \frac{2\tau_{s1}}{h_1} x - c_0 + 2\tau_{s1} \sqrt{1 - \left(-\frac{2z}{h_1} + 1\right)^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь можем найти общее потребное усилие для осуществления процесса пластической осадки:

$$Q_{(1)} = \left| \int_{-\bar{l}}^{\bar{l}} \sigma_{zz} dx \right| = \left| \int_{-\bar{l}}^{\bar{l}} \left(\frac{2\tau_{s1}}{h_1} x - c_0 \right) dx \right| = c_0 2\bar{l} = \frac{2\tau_{s1}\bar{l}}{h_1} (2\bar{l}) \left(1 + \frac{\pi h_1}{4\bar{l}}\right) \sim \frac{2\tau_{s1}\bar{l}}{h_1} (2\bar{l}) \quad (8)$$

Итак, в рассматриваемом случае, при котором течет только “мягкий” слой, определили напряжения (7), а также величину потребного усилия Q . Кроме того, как нетрудно заметить, имеет место условие (9), при котором прямая II располагается ниже прямой I (рис. 2):

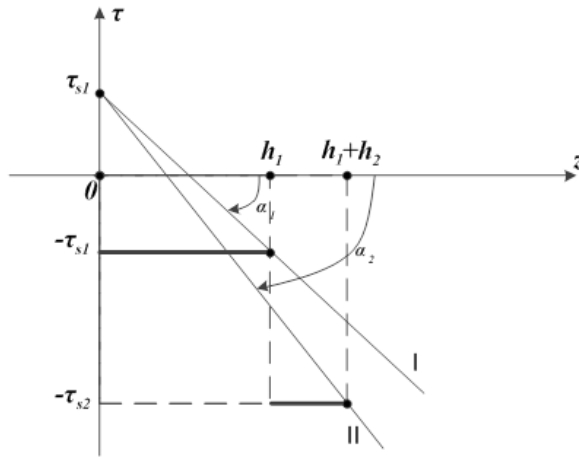


Рис. 2. Пластическое течение в двухслойной полосе

$$\frac{2\tau_{s1}}{h_1} < \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}, \quad (9)$$

которое подтверждает выполнимость условия [1], при выполнении которого течение происходит только в “мягком” слое. Таким образом, в результате осадки пластического слоя уменьшается h_1 до некоторого значения h_{10} такого, что:

$$\frac{2\tau_{s1}}{h_{10}} = \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_{10} + h_2}, \quad (10)$$

и в дальнейшем пластическое течение распространяется на весь объем двухслойной полосы.

Предположим теперь, что течет вся полоса. Для этого случая можем принять решение (7), в котором надо положить:

$$\tau_s(z) = \begin{cases} \tau_{s1}, & 0 < z < h_1, \\ \tau_{s2}, & h_1 < z < h_1 + h_2 \equiv h, \end{cases} ; \quad \tau_{s1} \leq \tau_{s2}. \quad (11)$$

Аналогично тому, что мы проделали в предыдущем случае, найдем постоянные a, b из соответствующих условий на контакте:

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad \tau_{s1} &= \sigma_{xz} = a \cdot 0 + b, \\ z = h_1 + h_2 : \quad -\tau_{s1} &= \sigma_{xz} = a \cdot (h_1 + h_2) + b, \end{aligned} \quad (12)$$

из которых следует, что:

$$b = \tau_{s1}, \quad a = -\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \quad (13)$$

Напряжения в области течения принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= -\left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}\right)z + \tau_{s1}, & \sigma_{zz} &= \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}x - c_0, \\ \sigma_{xx} &= \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}x - c_0 + 2\sqrt{\tau_s^2(z) - \left(-\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}z + \tau_{s1}\right)^2} \end{aligned} \quad (14)$$

В рассматриваемом случае прямая II располагается выше прямой I (рис.3), то есть:

$$\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} < \frac{2\tau_{s1}}{h_1} \quad (15)$$

Утверждение 1. Условия (9), (12) в точности совпадают с условием, выведенным в [1] из принципа минимума мощности внешних сил:

истинному положению границы течения (неоднородного по толщине пластического слоя) в данном состоянии соответствует минимум мощности, потребной для протекания процесса. При заданном законе сближения плит минимуму мощности отвечает условие минимума внешних усилий.

Для подтверждения приведенного выше утверждения достаточно вычислить потребное усилие сжатия полосы относительно второго случая, при котором течет вся биметаллическая полоса:

$$Q_{(2)} = \left| \int_{-\bar{l}}^{\bar{l}} \sigma_{zz} dx \right| = \left| \int_{-\bar{l}}^{\bar{l}} \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} x - c_0 \right) dx \right| = c_0 2\bar{l}. \quad (16)$$

Найдем постоянную интегрирования c_0 , входящую в (13):

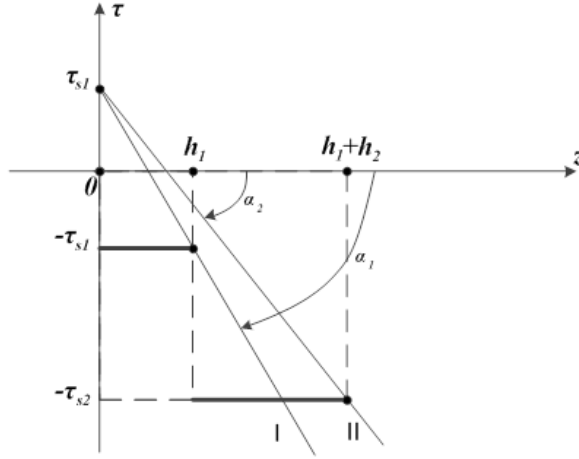


Рис. 3. Пластическое течение в двухслойной полосе

$$\int_0^{h_1+h_2} \sigma_{xx}(x = \bar{l}, z) dz = 0, \quad (17)$$

$$\int_0^{h_1} \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \bar{l} - c_0 + 2\sqrt{\tau_s^2(z) - \left(-\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} z + \tau_{s1}\right)^2} \right) dz = 0, \quad (18)$$

$$c_0 = \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \bar{l} (1 + O(h/\bar{l})) \sim \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \bar{l},$$

где $O(h/\bar{l})$ - бесконечно-малая одного порядка с h/\bar{l} .

Подставим последнее выражение в (13):

$$Q_{(2)} = 2\bar{l} \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \bar{l} \right) (1 + O(h/\bar{l})) \sim 2\bar{l} \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \bar{l} \right) \quad (19)$$

Из (8) и (14) видно, что случаю пластического течения всей биметаллической полосы отвечает условие (12), которое, в свою очередь, совпадает с условием минимума внешних сил.

Преобразуем условие (12):

$$(\tau_{s1} + \tau_{s2}) h_1 < 2\tau_{s1} (h_1 + h_2),$$

или разделив последнее на $\tau_{s1} h_2$, получим:

$$(h_1/h_2) < \frac{2}{(\tau_{s2}/\tau_{s1}) - 1} \quad (20)$$

Из соотношения (15) можем сделать следующий вывод. Примем, что $\tau_{s1}, \tau_{s2}, h_1$ заданы. Тогда (15) налагает ограничения на h_2 : чем разнороднее материалы слоев, тем большим следует принять относительную толщину слоя, имеющего больший предел текучести.

2. В предыдущем разделе мы представили метод определения истинного положения границы течения неоднородного по толщине тонкого пластического слоя. А теперь, зная границу области течения, можем приложить сказанное к решению задач о пластическом сжатии многослойных пластин. В качестве примера рассмотрим осесимметричную задачу о пластическом сжатии биметаллической пластины (рис.4) в плане формы кольца ($a \leq r \leq b$), у которого внутренний конец остается неизменным (затекание в пазы в одном из тел инструмента), а внешний контур свободно растекается ($b = b(t)$).

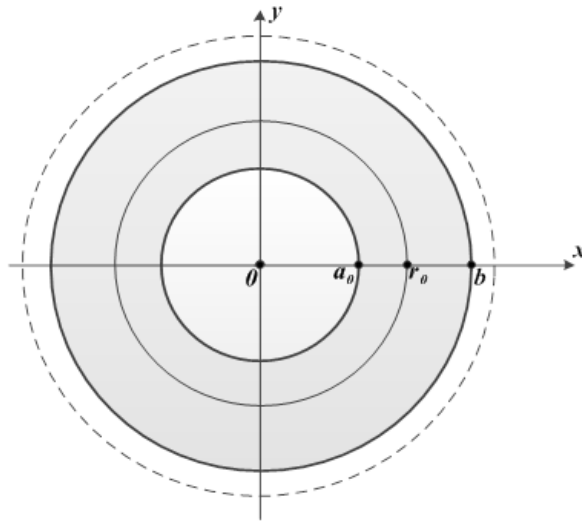


Рис. 4. Пластическая осадка тонкой пластины в плане формы кольца

Предположим, что пластическое течение происходит во всем объеме так, что выполняется условие:

$$\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} < \frac{2\tau_{s1}}{h_1} \quad (21)$$

Отметим, что граница раздела двух пластических сред $h_1(t) \equiv z(t) = \frac{h_{10}}{h_{10} + h_{20}} h(t)$ определяется как решение следующей задачи Коши:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} z; \quad z(t = t_0) = h_{10}; \quad 0 \leq z \leq h_1 + h_2. \quad (22)$$

Воспользуемся упрощенной постановкой задач ТТТПС. Выпишем основные соотношения задачи в полярной системе координат:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mp \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}; \quad \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} = \frac{d\lambda}{dt}, \quad (23)$$

$$r = a_0 : p = \frac{\sigma_{s1} h_1 + \sigma_{s2} h_2}{h_1 + h_2}; \quad r = b(t) : p = 2 \left(\frac{\sigma_{s1} h_1 + \sigma_{s2} h_2}{h_1 + h_2} \right) \quad (24)$$

Интегрируя уравнение равновесия (17) со стороны внутренней, а затем внешней границы области, и, приравнявая найденные значения контактного давления, определим из условия непрерывности неизвестную линию ребра поверхности давлений (линию ветвления течения) $r = r_0$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) (r_0 - a_0) - 2\sqrt{3} \left(\frac{\tau_{s1}h_1 + \tau_{s2}h_2}{h_1 + h_2} \right) = \\ & = \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) (b - r_0) - \sqrt{3} \left(\frac{\tau_{s1}h_1 + \tau_{s2}h_2}{h_1 + h_2} \right), \end{aligned} \quad (25)$$

откуда с точностью до h/L получаем:

$$r_0 = \frac{1}{2}(b(t) + a_0) \quad (26)$$

Интегрируя уравнение несжимаемости (17) с учетом условия на ребре $w(r = r_0) = 0$, находим:

$$w(r) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right). \quad (27)$$

Теперь с учетом условия (20) можем найти закон изменения свободной границы из решения задачи Коши:

$$w(b) = \frac{db}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left(b - \frac{r_0^2}{b} \right) = \frac{(3b + a_0)(b - a_0)}{8b}; \quad b(t = t_0) = b_0. \quad (28)$$

В результате получаем в неявном виде зависимость $b = b(t)$:

$$8 \int \frac{db}{3b + a_0} + 8a_0 \int \frac{db}{(3b + a_0)(b - a_0)} = \int d\lambda, \quad (29)$$

$$\left(\frac{3b + a_0}{3b_0 + a_0} \right)^{2/3} \left(\frac{b - a_0}{b_0 - a_0} \right)^2 = e^{\lambda(t)} = \frac{h_0}{h(t)} \quad (30)$$

Выпишем теперь значение максимального контактного давления в точках ребра:

$$p_{\max} = \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} (r_0 - a_0) - 2\sqrt{3} \left(\frac{\tau_{s1}h_1 + \tau_{s2}h_2}{h_1 + h_2} \right) \approx \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h(t)} \left(\frac{b(t) - a_0}{2} \right). \quad (31)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Труды (1946-1966). Т.2 Пластичность. М.:Физматлит, 2004. 480 с.
- [2] Кийко И. А. Теория пластического течения. М.: МГУ, 1978. 75 с.
- [3] Кузнецов А. И. // Archiwum Mech.Stos. 1960. №12(1960). Р. 163–171.
- [4] Kadymov V., Wille R. // ZAMM. 1995. V. 75. №S1. Р. 293–294.
- [5] Георгиевский Д. В. Задача Прандтля для слабонеоднородного по пределу течения пластического слоя // Изв. РАН. МТТ. 2006. №1. С.47–59.

V. A. Kadyrov

PLASTIC FLOW IN A THIN LAYER WITH NON-UNIFORM PROPERTIES ON THE THICKNESS

Moscow State University of Humanities and Economics, Moscow, Russia

Abstract. The problem of flow of a thin plastic layer with non-uniform properties on the thickness is discussed in the paper. The condition of providing the plastic flow for all piecewise-homogeneous layer is investigated. The axisymmetric problem of compression of a bimetallic layer in the annular region is solved. The velocities, contact pressures and the total required force for the plastic compression of the layer are obtained.

Keywords: spreading of a thin plastic layer, plastic sediment, axisymmetric problem.

REFERENCES

- [1] Ilyushin A. A. Trudy (1946-1966). T.2 Plastichnost'. M.:Fizmatlit, 2004. 480 s. (in Russian)
- [2] Kiyko I. A. Teoriya plasticheskogo techeniya. M.: MGU, 1978. 75 s. (in Russian)
- [3] Kuznetsov A. I. // Arhivum Mech.Stos. 1960. 2. P. 163–171.
- [4] Kadyrov V., Wille R. // ZAMM. 1995. V.75. № 1. P. 293–294. (in Russian)
- [5] Georgiyevskiy D. V. Zadacha Prandtlya dlya slaboneodnorodnogo po predelu tekuchesti plasticheskogo sloya // Izv. RAN. MTT. 2006. №1. S. 47–59. (in Russian)

Kadimov Vagid Ahmedovich,

e-mail: vkadymov@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow State University of Humanities and Economics, Moscow, Russia.

Л. М. Абрамов, С. Н. Маклакова, М. А. Галкина, В. И. Гультияев

О НАЗНАЧЕНИИ ДОПУСКОВ НА ЛИНЕЙНЫЕ РАЗМЕРЫ И ФОРМУ КУБИЧЕСКИХ И ПРИЗМАТИЧЕСКИХ БЕТОННЫХ ОБРАЗЦОВ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ НА СЖАТИЕ

*Костромская государственная сельскохозяйственная академия, Костромской район, п.
Караваево*

Тверской государственный технический университет, г. Тверь

Аннотация. Произведен анализ существующих нормативов на допуски размеров и форм бетонных образцов. Выявлены негативные факторы, влияющие на результаты испытаний. Анализ геометрических параметров образцов показал, что при согласованности допусков и отклонений на основные размеры образцов возможно реально повысить объективность величин характеристик прочности.

Ключевые слова: кубические образцы, допуски, механические характеристики, прочность, предельная линейная деформация, предельные отклонения, испытания.

УДК: 620.173.21

Как известно, номинальные размеры и форма образцов для испытаний на сжатие приведены в нормативных документах [1-2]. В частности, стандартами регламентирована номенклатура образцов, которая содержит 5 типов кубических (и столько же цилиндрических) типов образцов с длиной ребра (или образующей) от 70 до 300 мм. При этом за базовый тип принят образец с размером ребра (или диаметра) равным 150 мм.

© Абрамов Л. М., Маклакова С. Н., Галкина М. А., Гультияев В. И. 2017

Абрамов Лев Михайлович

e-mail: vadimabramov30@mail.ru, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительных конструкций, Костромская государственная сельскохозяйственная академия, Костромской район, п. Караваево.

Маклакова Светлана Николаевна

e-mail: aviarettra@mail.ru, доцент кафедры строительных конструкций, Костромская государственная сельскохозяйственная академия, Костромской район, п. Караваево.

Галкина Марина Александровна

e-mail: aviarettra@mail.ru, аспирант, старший преподаватель кафедры сопротивления материалов и графики, Костромская государственная сельскохозяйственная академия, Костромской район, п. Караваево.

Гультияев Вадим Иванович

e-mail: vig0@mail.ru, доктор технических наук, профессор кафедры конструкции и сооружения, Тверской государственный технический университет, г. Тверь

Поступила 12.11.2016

Так как стандартом предусмотрены только номинальные размеры образцов без указания допусков на линейные размеры, форму и взаимное расположение поверхностей, то фактически это означает принятие в качестве основных величин допусков их значения по нормам [3].

Следует отметить, что ГОСТ10180- 2012 рекомендует измерять линейные размеры ребер с точностью до 0,001 от номинального размера, что для куба со стороной 150 мм в абсолютном выражении составляет 0,15 мм. Такая точность измерений практически нереальна при размере зерна заполнителя более указанной величины. В то же время размер квадратных ячеек сит для просеивания песка, согласно [4], в частности, сита нормальной прочности №010, равен 0,16мм с положительным допуском 0,091 мм. Это означает, что максимальный размер ячейки может достигать величины 0,251 мм. Но эта величина примерно в 1,67 раза больше, чем допуск на измерения. Аналогичный подсчет несложно провести также для размеров ячеек 0,63; 1,25 и 2,5 мм. Иначе говоря, для соответствия проходного размера квадратных ячеек сит и размеров зерен просеиваемого заполнителя необходимо учитывать вышеуказанные размеры и допуски на них, поскольку изготовить тканую или иную сетку с приведенными отклонениями, соответствующими ГОСТ 6613-86, возможным не представляется. Тем более, что усадку бетонной смеси принимают в среднем равной 1%, хотя она также колеблется в пределах 10-15%. Согласно средней величине усадки отклонения для образца с размером ребра 150 мм составляют 1,5 мм, а измерять этот размер, в соответствии с нормативными требованиями следует с точностью 0,001 от номинального размера.

Таким образом, краткий анализ показал, что при размере зерен заполнителя, начиная с 0,63 мм и более возможные отклонения длин ребер кубического образца будут превышать величины предельных линейных деформаций как при растяжении ($\varepsilon_{bt0} = 0,0001$), так и при сжатии ($\varepsilon_{b0} = 0,002$). Несложно подсчитать, что фактически при испытаниях на сжатие могут иметь место случаи, когда в зоне контакта одного из продольных ребер будет иметь место предельная линейная деформация, а зоны трёх (или двух) других рёбер еще не вошли в контакт с плитой испытательного пресса. Указанное явление не позволяет в условиях принятых нормативных допусков получать стабильные значения механических характеристик прочности. Установленный эффект существенно понижает надёжность получаемых характеристик (а, следовательно, и надёжность проектируемых конструкций) и может служить причиной возникновения аварийных ситуаций. Следует отметить, что наличие установленного эффекта подтверждает анализ видов разрушения образцов-кубиков, приведённых в приложении Е к ГОСТ 10180-2012. Практически во всех 9 вариантах так называемых неудовлетворительных видов разрушения весьма определенно просматривается нецентральное приложение нагрузки по контактной поверхности образцов. При рассмотрении нагрузки по контактной поверхности образцов. При рассмотрении становится ясным, что в процессе нагружения вначале происходит скалывание какой-либо угловой части куба-образца, а затем- окончательное разрушение по различным плоскостям с внешним видом, который трудно классифицировать.

По этой причине, например, первый тип разрушенного образца, по нормативной классификации отнесенный к удовлетворительным, почти полностью совпадает с первым типом разрушения образца, признанного неудовлетворительным (рис. Е1 и Е2 в приложении Е к ГОСТ10180-2012.

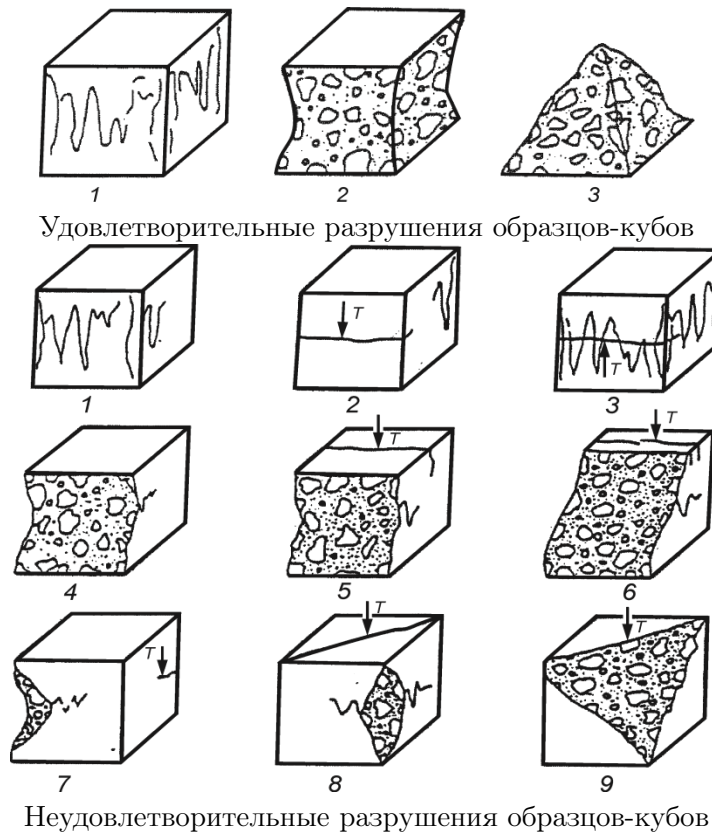


Рис. 1. Виды типового разрушения кубических образцов

Следовательно, для избежания разновысотности кубов-образцов их необходимо либо обрабатывать абразивным камнем по плоскостям опорных поверхностей, либо принять низкопрочные вязкопластичные прокладки, обеспечивающие по возможности выравнивание контактных давлений по указанным плоскостям.

В принятых допущениях размеры и форма образцов должны соответствовать чертежу (рис.2). Тогда влияние вышеперечисленных негативных факторов на получаемые результаты испытаний может быть существенно уменьшено.

Необходимо отметить также, что согласно требованиям стандарта контактные (опорные) грани образцов-кубов выбирают так, чтобы сжимающая сила была направлена параллельно слоям укладки бетонной смеси в форму. Следовательно, усадка в принятом направлении будет зависеть от распределения заполнителя по высоте. Это безусловно сказывается на разновысотности ребер куба, что в свою очередь может привести к прерывистому контакту опорных поверхностей образца и плиты испытательной машины.

Рабочие чертежи образцов необходимы для установления размеров форм для их изготовления.

Согласно ГОСТ22685-89 предельные отклонения внутренних линейных размеров собранных форм не должны превышать $\pm 0.5\%$ их номинального значения и не должны быть более ± 1 мм. Тогда ширина поля допуска по первому ограничению составляет

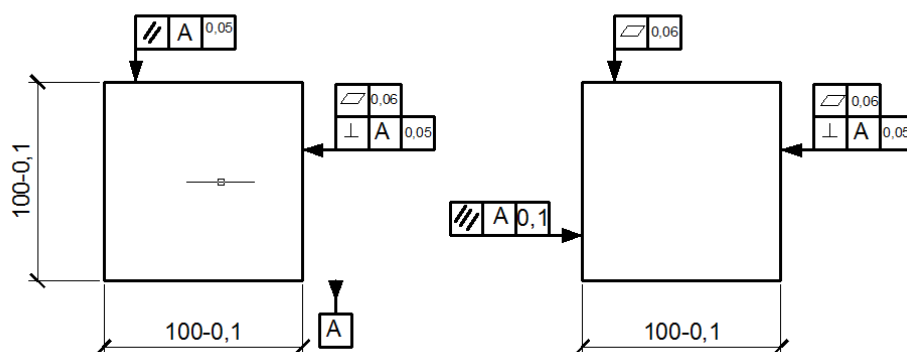


Рис. 2. Рабочий чертёж образца-куба из бетона для испытаний на сжатие

1 мм и 1,5 мм для образцов с номинальными размерами поперечного сечения соответственно 100 и 150 мм. В то же время по второму ограничению ширина поля допуска составляет 2 мм.

Таким образом, налицо несогласованность в назначении предельных отклонений, что может привести к погрешности в определении механических характеристик на уровне внутрисерийного коэффициента вариации выше 8%, с учетом того дополнительного фактора как неравномерность усадки бетона в углах формы и серединной зоны. Во всяком случае усадка по боковому размеру образца может существенно отличаться от усадки по вертикальной оси образца, а это означает, что процессы образования цементного камня протекают с различной скоростью и в различных условиях. Этот фактор также сказывается в виде увеличения внутрисерийного коэффициента вариации по результатам испытаний серий образцов.

Если исходить из аналогичных требований для образцов-призм, то необходимо отметить, что в этом случае были установлены дополнительные технические требования, ограничивающие величину случайного эксцентриситета. Для этого помимо требований, приведённых по рис.1, следует указать требование к базовой поверхности образца, а также требование к прямолинейности ости призмы, так как стандартом принято отношение высоты призмы к поперечному размеру стороны квадрата $\frac{h}{a} = 4$. Рабочий чертёж образца-призмы приведён на рис.3.

Следует отметить, что очень важную роль играет допуск на симметричность образца относительно боковой оси, потому что нецентральное приложение нагрузки здесь сказывается самым существенным образом.

Итак, анализ геометрических параметров образцов показал, что для повышения объективности величин характеристик прочности следует, по меньшей мере, добиться согласованности при назначении допусков и отклонений на основные размеры. Результаты испытаний образцов, приведённые в работах [5-6] показали, что достижение внутрисерийного коэффициента вариации на уровне 8%, является вполне реальным.

Основные выводы:

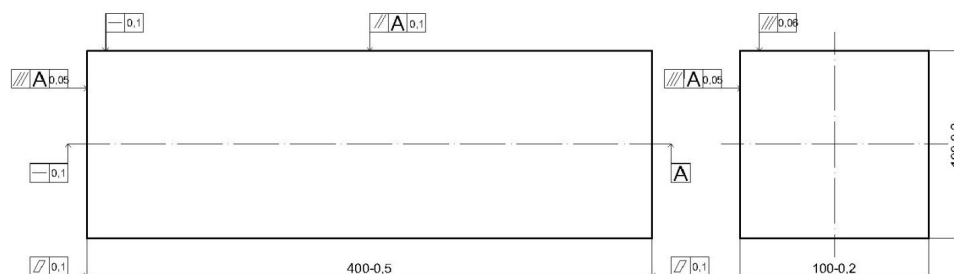


Рис. 3. Рабочий чертёж образца-призмы для испытаний бетона на сжатие

В настоящее время существует несогласованность в назначении допусков на линейные размеры, форму и отклонение поверхностей образцов кубов, что приводит к значительному повышению внутрисерийного коэффициента вариации, а, следовательно, к нестабильной работе испытательных лабораторий.

Анализ рабочих чертежей образцов-призм показал, что наблюдение нужных геометрических параметров приведёт к значительному разбросу получаемых характеристик прочности и не позволяет обеспечить объективные характеристики бетона при испытании контрольных образцов.

Разработанные рабочие чертежи позволяют повысить надёжность и стабильность получаемых характеристик прочности, а также служат исходными документами для разработки чертежей приспособлений для формования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] ГОСТ10180-2012. Бетоны. Методы определения прочности по контрольным образцам. М.: Стандартинформ, 2013. 86 с.
- [2] ГОСТ18105-2010. Бетоны. Правила контроля и оценки прочности. М.: Стандартинформ, 2010. 74 с.
- [3] ГОСТ25346-2013. Бетоны. Основные формы взаимозаменяемости. Характеристики изделий геометрические. Система допусков на линейные размеры. Основные положения, допуски, отклонения и посадки. М.: Стандартинформ, 2014. 94с.
- [4] ГОСТ6613-86. Бетоны. Сетки проволочные тканые с квадратными ячейками. Технические условия. М.: Стандартинформ, 2006. 12 с.
- [5] Абрамов Л. М. и др. Об оценке влияния сил трения при определении прочности на сжатие по контрольным образцам //Бетон и железобетон. 2014. №1. С. 6–9.
- [6] Абрамов Л. М., Абрамов И. Л., Маклакова С. Н. Анализ напряженно-деформированного состояния бетонного образца при испытании на сжатие //Промышленное и гражданское строительство. 2015. №9. С. 37–40
- [7] Баженов Ю. М. Технология бетона. М.: АСВ, 2002. 500 с.
- [8] Гургенидзе Г. Г. и др. Методика исследования прочности и трещиностойкости легких бетонов // Бетон и железобетон. 2009. №5. С. 16–18.

- [9] Байков В. Н. и др. Построение зависимости между напряжениями и деформациями сжатого бетона по системе нормируемых показателей // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1977. №6. С. 45–48.
- [10] Басов К. А. ANSYS. Справочник пользователя. М: ДМК Пресс, 2005. 640 с.
- [11] Чигарев А. В. ANSYS для инженеров. М.: Машиностроение, 2004. 512 с.
- [12] Морозов Е. М. Механика разрушения. М.: Ленанд, 2010. 456 с.
- [13] Басов К. А. ANSYS в примерах и задачах / под ред. Д. Г. Красовского. М.: Компьютер пресс, 2002. 224 с.
- [14] Каплун А. Б., Морозов Е. М., Олферьева М. А. ANSYS в руках инженера. М.: Едиториал, 2003. 272 с.
- [15] Жидков А. В. Применение системы ANSYS к решению задач геометрического и конечно-элементного моделирования. Нижний Новгород: ННГУ, 2006. 116 с.
- [16] Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическому деформированию: инженерные расчеты процессов конечного формоизменения материалов. Л.: Машиностроение, 1978. 368 с.

L. M. Abramov¹, S. N. Maklakova¹, M. A. Galkina¹, V. I. Gulyaev²

**ON THE APPOINTMENT OF TOLERANCES FOR LINEAR DIMENSIONS
AND SHAPE OF CUBIC AND PRISMATIC CONCRETE SPECIMENS UNDER
COMPRESSION TESTS**

¹*Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma, Russia*

²*Tver State Technical University, Tver, Russia*

Abstract. The analysis of existing standards on tolerances of the sizes and shapes of concrete samples. Identified negative factors affecting the results of EC-pitanii. Analysis of the geometric parameters of the samples showed that consistency of balance tolerances and deviations for the main sample size possible to increase the objectivity of values of the strength characteristics.

Keywords: cubic samples, tolerances, mechanical characteristics, strength, maximum linear strain, limit deviations, testing.

REFERENCES

- [1] GOST10180-2012 Betony Metody opredeleniya prochnosti po kontrolnym obrazcam. M.: Standartinform, 2013. 86s. (in Russian)
- [2] GOST18105-2010 Betony Pravila kontrolya i ocenki prochnosti. M: Standartinform, 2010. 74s. (in Russian)
- [3] GOST25346-2013 Betony Osnovnye formy vzaimozamenyaemosti Harakteri-stiki izdelij geometricheskie Sistema dopuskov na linejnye razmery. Osnovnye polozheniya dopuski otkloneniya i posadki. M: Standartinform, 2014. 94s. (in Russian)
- [4] GOST6613-86 Betony Setki provolochnye tkanye s kvadratnymi yachejkami Tekhnicheskie usloviya M Standartinform, 2006. 12s. (in Russian)
- [5] Abramov L. M. i dr. Ob ocenke vliyaniya sil treniya pri opredelenii prochnosti na szhatie po kontrolnym obrazcam //Beton i zhelezobeton. 2014. №1. S 6–9 (in Russian)
- [6] Abramov L. M., Abramov I. L., Maklakova S. N. Analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya betonogo obrazca pri ispytanii na szhatie //Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitelstvo. 2015. №9. S 37–40 (in Russian)
- [7] Bazhenov YU. M. Tekhnologiya betona. M: ASV, 2002. 500s. (in Russian)
- [8] Gurgenidze G. G. i dr. Metodika issledovaniya prochnosti i treshchinostojkosti legkih betonov //Beton i zhelezobeton. 2009. №5. S. 16–18 (in Russian)

Lev Mikhailovich Abramov

e-mail: vadimabramov30@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma, Russia.

Svetlana Nikolaevna Maklakova

e-mail: aviapetra@mail.ru, Assoc. Professor, Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma, Russia.

Marina Aleksandrovna Galkina

e-mail: aviapetra@mail.ru, Senior Lecturer, Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma, Russia.

Vadim Ivanovich Gulyaev

e-mail: vig0@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

- [9] Bajkov V. N. i dr. Postroenie zavisimosti mezhdu napryazheniyami i deformatsiyami szhatogo betona po sisteme normiruemykh pokazatelej //Izv. vuzov. Stroitelstvo i arhitektura. 1977. №6. S. 45–48 (in Russian)
- [10] Basov K. A. ANSYS Spravochnik polzovatelya. M.: DMK Press, 2005. 640s. (in Russian)
- [11] CHigarev A. V. ANSYS dlya inzhenerov. M.: Mashinostroenie, 2004. 512s. (in Russian)
- [12] Morozov E. M. Mekhanika razrusheniya. M.: Lenand, 2010. 456s. (in Russian)
- [13] Basov K. A. ANSYS v primerah i zadachah /pod red. D. G. Krasovskogo. M.: Kompyuter press, 2002. 224s. (in Russian)
- [14] Kaplun A. B. Morozov E M Olfereva M A ANSYS v rukah inzhenera, M.: Editorial, 2003. 272s. (in Russian)
- [15] ZHidkov A. V. Primenenie sistemy ANSYS k resheniyu zadach geometricheskogo i konechno-ehlementnogo modelirovaniya. Nizhnij Novgorod: NNGU, 2006. 116s. (in Russian)
- [16] Smirnov-Alyaev G. A. Soprotivlenie materialov plasticheskomu deformirovaniyu inzhenernye raschety processov konechnogo formoizmeneniya materialov. L.: Mashinostroenie, 1978. 368s. (in Russian)

А. Н. Спорыхин

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ В ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. На примере обобщенной модели анизотропного пластического тела показано, что ассоциированная несжимаемость имеет место, когда в частице сплошной среды константы анизотропии равны по величине в направлении нормальных составляющих компонент тензора напряжений.

Ключевые слова: пластичность, анизотропия, несжимаемость

УДК: 539.375

Известно [1], что если во время процесса пластического деформирования сохраняется свойство изотропии материала, то следствием ассоциированного закона пластического деформирования, в частности, идеально пластических сред, является пластическая несжимаемость. Очевидно, что существует большое число естественных и искусственных материалов, которые во время пластического деформирования изменяют структуру, что во многом определяет их физические свойства, к которым относится и "приобретенная" анизотропия. Пусть при этом при процессе пластического деформирования выполняется условие

$$f = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} S_{ij} S_{ij} - k^2 = 0, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad (1)$$

которому удовлетворяет напряженное состояние и, кроме этого, имеет место ассоциированный закон для компонент тензора скоростей пластических деформаций e_{ij}^p , представляющийся формулами вида

$$e_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (2)$$

Согласно (1) соотношения (2) принимают вид

$$e_{ij}^p = 2\lambda A_{ij} S_{ij}, \quad (\sum i, j = 1, 2, 3), \quad (3)$$

© Спорыхин А. Н., 2017
Спорыхин Анатолий Николаевич
e-mail: ansrog@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 09.09.2017

где λ -- положительная скалярная величина, A_{ij} -- константы анизотропии. В силу инвариантности физических законов относительно выбора системы координат, следует, что A_{ij} являются компонентами тензора второго ранга, которые характеризуют свойства данной среды. В классическом случае (выполняется закон парности $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) число независимых компонент, характеризующих анизотропию пластической среды, становится равным 6. Таким образом, конкретизация модели анизотропного пластического тела определяется заданием числовых значений A_{ij} .

В случае изотропного пластического тела $A_{ij} \equiv 1$. Из соотношений (3) следует

$$e_{ii}^p = 2\lambda A_{ii} S_{ii}, \quad (\Sigma i = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Откуда

$$e_{11}^p + e_{22}^p + e_{33}^p = J_1(e_{ij}^p) = 2\lambda (A_{11} S_{11} + A_{22} S_{22} + A_{33} S_{33}). \quad (5)$$

Таким образом, в случае анизотропной среды, когда при пластическом деформировании напряженное состояние удовлетворяет условию текучести (1), имеет место ассоциированная сжимаемость, так как согласно (5)

$$J_1(e_{ij}^p) \neq 0. \quad (6)$$

Равенство

$$J_1(e_{ij}^p) = 0. \quad (7)$$

имеет место, если

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = A. \quad (8)$$

То есть, когда константы анизотропии пластической среды одинаковы по величине в направлении нормальных составляющих компонент тензора напряжений в частице. Таким образом, только при такой "симметрии" свойств анизотропии имеет место ассоциированная несжимаемость. В случае изотропного пластического деформирования $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1$ и, очевидно, $J_1(e_{ij}^p) = 0$. Таким образом, приходим к следствию в классическом случае -- пластической несжимаемости [1]. Заметим, что свойство необратимой сжимаемости (6) имеет место и для пластических материалов, изначально анизотропных при условии (1).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.

A. N. Sporykhin

ABOUT ONE PROBLEM IN ANISOTROPIC PLASTIC SOLID THEORY

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. We used generalized model of anisotropic plastic solid. It was argued that associated incompressibility in the element of continuum occurs when anisotropy constants are equal in the direction of normal components of stress tensor.

Keywords: plasticity, anisotropy, incompressibility.

REFERENCES

- [1] Ivlev D. D. Teoriya ideal'noy plastichnosti. M.: Nauka, 1966. 231 s. (in Russian)

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ АНИЗОТРОПНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск

Аннотация. В статье рассмотрено предельное состояние анизотропных пластических тел. Теория предельного состояния имеет дело со статически определимым состоянием твердых тел. В этом случае система замкнута за счет предельных условий. Рассмотрена система уравнений, в которой содержатся три касательных компонента тензора напряжений, а диагональные компоненты равны между собой. В этом случае удастся подобрать такое поле скоростей, что система также является статически определимой. Показано, что эта система может быть рассмотрена и в терминах компонент тензора скоростей деформации. При этом количество уравнений не увеличивается, поскольку условия совместности выполняется тождественно. Для этой системы найдена группа точечных симметрий и законы сохранения, рассмотрены некоторые точные решения, которые могут быть использованы для описания пластического кручения вокруг трех ортогональных осей.

Ключевые слова: предельное состояние, пластические тела, анизотропные пластические тела.

УДК: 539.374

Введение. Некоторые задачи теории идеальной пластичности исследованы достаточно хорошо. Это так называемые статически определимые задачи. К ним относятся задачи о кручении призматических стержней и задачи о плоском деформированном состоянии. Они относятся к широкому классу задач – задачам о предельном состоянии деформируемых тел. Теория предельного состояния – один из фундаментальных разделов механики деформируемого твердого тела [1,2]. Теория предельного состояния имеет дело со статически определимым состоянием твердых тел. В этом случае система замкнута за счет предельных условий и такие свойства материи как вязкость, упругость и т.п. на предельное состояние влиять не могут. Другими словами при достижении предельного состояния характер связи между напряжениями и деформациями не оказывает влияния на предельное состояние. Некоторые такие системы

© Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., 2017

Сенашов Сергей Иванович

e-mail: sen@sibsau.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск.

Савостьянова Ирина Леонидовна

e-mail: savostyanova@sibsau.ru, кандидат педагогических наук, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск.

Поступила 30.11.2017

рассмотрены в [1].

В предлагаемой работе приведена еще одна система уравнений пластичности, которая описывает предельное состояние. Эта система может быть использована для описания пластического течения вокруг трех ортогональных осей.

Постановка задачи. Пусть $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ – ортогональная система координат, u, v, w – компоненты вектора скорости деформаций, e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\partial_j \sigma_{ij} = 0. \quad (1)$$

По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Система уравнений (1) – это три уравнения на шесть компонент тензора напряжений. В общем случае система (1) замыкается присоединением к ней трех уравнений, описывающих предельное состояние.

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0, f_2(\sigma_{ij}) = 0, f_3(\sigma_{ij}) = 0. \quad (2)$$

Очевидно, что система (1)-(2) является статически определимой. Иногда систему уравнений (1) удастся сделать статически определимой с помощью двух соотношений вида

$$f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \quad (3)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные компоненты тензора напряжений, как это было сделано Рейсом [1]. В ряде случаев систему уравнений (1) удастся замкнуть с помощью одного условия пластичности вида

$$f(\sigma_{ij}) = 0. \quad (4)$$

Установление даже одного условия пластичности вида (4) для данного материала это очень не простая задача. Она сильно усложняется для условий вида (2) и (3). В данной работе мы ограничимся одним условием пластичности и рассмотрим только те случаи, когда система уравнений (1) может быть замкнута уравнением вида (4). Считаем, что компоненты тензора напряжений и тензора скоростей деформации связаны ассоциированным законом течения

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = e_{ij}, \quad (5)$$

где λ – некоторая неотрицательная функция.

Система уравнений (1) замыкается условием пластичности Мизеса в анизотропном случае [3]

$$f = a_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + a_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + a_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2(a_{12}\sigma_{12}^2 + a_{13}\sigma_{13}^2 + a_{23}\sigma_{23}^2) - 1 = 0, \quad (6)$$

здесь a_{ij} – параметры анизотропии.

Известно из [1], что в случае кручения призматического стержня вокруг оси oz поле скоростей деформации имеет вид

$$u = yz, v = -xz, w = w(x, y). \quad (7)$$

Обобщая соотношения (7), потребуем

$$u = u(y, z), v = v(x, z), w = w(x, y). \quad (8)$$

Построим систему уравнений, соответствующую полю скоростей деформации (8). В результате получаем следующую систему, которая и будет исследоваться в этой работе

$$\begin{aligned} \partial_y \tau^1 + \partial_z \tau^2 &= \partial_x p, \partial_x \tau^1 + \partial_z \tau^3 = \partial_y p, \partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 = \partial_z p, \\ 2a_{12}(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 + 2a_{23}(\tau^3)^2 - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Система уравнений (9) может быть использована, в частности, для описания кручения прямоугольного параллелепипеда находящегося в пластическом состоянии, вокруг трех осей. (см. рисунок)

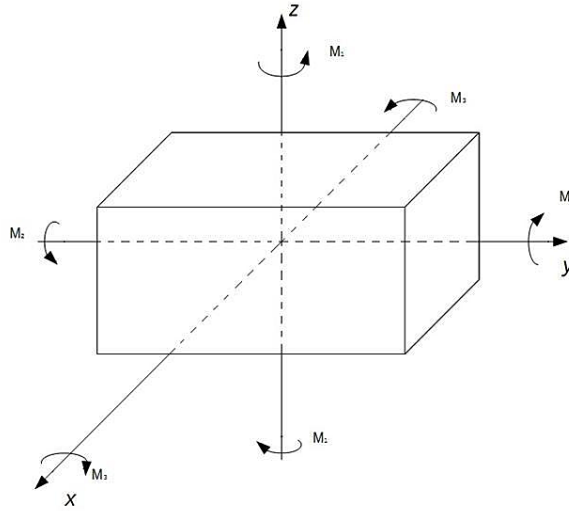


Рис. 1. Кручение прямоугольного параллелепипеда находящегося в пластическом состоянии, вокруг трех осей

Предположим, что параллелепипед закручивается вокруг осей ox , oy , oz равными и противоположными парами сил с моментами M_1 , M_2 , M_3 . При этом существует некоторые предельные моменты M_1^* , M_2^* , M_3^* , когда параллелепипед перейдет в пластическое состояние и начнет закручиваться. Из системы (9) видно, что такая задача является статически определяемой и может служить для определения значения предельных моментов по формулам

$$\begin{aligned} M_1^* &= \int \int (y\tau^2 - z\tau^1) dydz, \\ M_2^* &= \int \int (z\tau^1 - x\tau^3) dx dz, \\ M_3^* &= \int \int (x\tau^3 - y\tau^2) dy dz. \end{aligned} \quad (10)$$

Кроме моментов (10) на тело еще действует гидростатическое давление

$$P|_{\Sigma} = P_0,$$

где Σ – боковая поверхность параллелепипеда.

Свойства системы (9)

1. Характеристические поверхности системы (9). Система (9) содержит конечное соотношение, связывающее величины τ^1, τ^2, τ^3 . Дифференцируем его по x, y, z , в результате получаем систему

$$\begin{aligned} \partial_y \tau^1 + \partial_z \tau^2 &= \partial_x p, \partial_x \tau^1 + \partial_z \tau^3 = \partial_y p, \partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 = \partial_z p, \\ a_{12} \tau^1 \partial_x \tau^1 + a_{13} \tau^2 \partial_x \tau^2 + a_{23} \tau^3 \partial_x \tau^3 &= 0, \\ a_{12} \tau^1 \partial_y \tau^1 + a_{13} \tau^2 \partial_y \tau^2 + a_{23} \tau^3 \partial_y \tau^3 &= 0, \\ a_{12} \tau^1 \partial_z \tau^1 + a_{13} \tau^2 \partial_z \tau^2 + a_{23} \tau^3 \partial_z \tau^3 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение характеристической поверхности системы уравнений (11) представим в виде

$$\psi = \psi(x, y, z) = 0. \quad (12)$$

Характеристические поверхности системы (11) находятся из определителя

$$\begin{vmatrix} \partial_x \psi & \partial_y \psi & \partial_z \psi & 0 \\ \partial_y \psi & \partial_x \psi & 0 & \partial_z \psi \\ \partial_z \psi & 0 & \partial_x \psi & \partial_y \psi \\ 0 & a_{12} \tau^1 & a_{13} \tau^2 & a_{23} \tau^3 \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Замечание. Нетрудно видеть, что все три последних уравнения системы (11) дают одинаковые строки в определителе (13). Раскрываем определитель (13) по последней строке получаем

$$\begin{aligned} a_{12} \tau^1 \partial_z \psi ((\partial_z \psi)^2 - (\partial_x \psi)^2 - (\partial_y \psi)^2) + a_{13} \tau^2 \partial_y \psi ((\partial_y \psi)^2 - (\partial_x \psi)^2 - (\partial_z \psi)^2) + \\ + a_{23} \tau^3 \partial_x \psi ((\partial_x \psi)^2 - (\partial_y \psi)^2 - (\partial_z \psi)^2) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение можно записать в виде

$$a_{12} \tau^1 n_3 (2n_3^2 - 1) + a_{13} \tau^2 n_2 (2n_2^2 - 1) + a_{23} \tau^3 n_1 (2n_1^2 - 1) = 0, \quad (14)$$

где $n_1 = \frac{\partial_x \psi}{\sqrt{(\nabla \psi)^2}}, n_2 = \frac{\partial_y \psi}{\sqrt{(\nabla \psi)^2}}, n_3 = \frac{\partial_z \psi}{\sqrt{(\nabla \psi)^2}}$.

Одно из решений уравнения (14), которое не зависит от величин τ^1, τ^2, τ^3 имеет вид

$$2n_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Следовательно, угол между нормалью к характеристической поверхности $\psi(x, y, z) = 0$ и вектором n равен $\pm\pi/4$. Совокупность элементов характеристической поверхности образуют конус раствора $\pm\pi/4$ вокруг направления, которое определяется третьим корнем уравнения (14) и зависит от напряженного состояния.

Точечные симметрии системы уравнений (9)

Точечные симметрии уже достаточно широко применяются в механике деформируемого твердого тела. С их помощью удастся не только построить т.н. инвариантные решения, но и строить новые решения используя технику «размножения» (см. [4-9]). В этой статье точечные симметрии будут использоваться только для построения инвариантных решений.

Поскольку система (9) содержит конечное соотношение, то необходимо работать с ее следствиями, которые имеют вид (11), где для удобства введены обозначения $\partial_x \tau^1 = q_1^1, \partial_x \tau^2 = q_1^2, \partial_x \tau^3 = q_1^3, \partial_x p = q_1^4$ и т.д.

$$\begin{aligned} q_2^1 + q_3^2 &= q_1^4, q_1^1 + q_3^3 = q_2^4, q_1^1 + q_2^3 = q_3^4, \\ a_{12} \tau^1 q_1^1 + a_{13} \tau^2 q_1^2 + a_{23} \tau^3 q_1^3 &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a_{12}\tau^1 q_2^1 + a_{13}\tau^2 q_2^2 + a_{23}\tau^3 q_2^3 &= 0, \\ a_{12}\tau^1 q_3^1 + a_{13}\tau^2 q_3^2 + a_{23}\tau^3 q_3^3 &= 0, \\ a_{12}\tau^1(\tau^1)^2 + a_{13}(\tau^2)^2 + a_{23}(\tau^3)^2 - \frac{1}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Будем искать точечные симметрии, относительно которых инвариантно многообразие, определяемое системой уравнений (15). Согласно методике Ли–Овсянникова, будем искать допустимый оператор точечной симметрии в виде

$$X = \xi^j \frac{\partial}{\partial x_j} + \eta^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}, j = 1, 2, 3; i = 1, 2, 3, 4 \quad (16)$$

Продолжаем оператор (16) на первые производные по формулам

$$\tilde{X} = X + \varsigma_k^i \frac{\partial}{\partial q_k^i}, \quad (17)$$

где $\varsigma_k^i = D_k(\eta^i) - q_\beta^i D_k(\zeta^\beta)$, $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + q_k^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}$. Действуем оператором (17) на систему уравнений (15) и переходим на многообразие, задаваемое этой системой. В результате получаем многочлены второй степени относительно «внутренних» - эндогенных переменных q_k^2, q_k^3 . «Внешние» - экзогенные переменные q_k^1, q_k^4 определяются из системы (15) через эндогенные переменные. В полученных многочленах второй степени приравниваем нулю коэффициенты при первых и вторых степенях эндогенных переменных. Это позволяет получить переопределенную систему линейных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов ξ^j, η^i . Решая эту систему, получаем следующий результат.

Теорема. Система уравнений (9) допускает алгебру Ли L_5 , порождаемую операторами

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, X_4 = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, X_5 = \frac{\partial}{\partial p}.$$

Наличие операторов X_i $i = 1, 2, 3, 4$ означает, что система (9) допускает сдвиги и растяжение по осям x, y, z .

$$x'_i = x_i + a_i, i = 1, 2, 3, x'_i = x_i \exp a_4,$$

сдвиг для гидростатического давления $p' = p + a_5$.

Инвариантные решения системы уравнений (9)

Построим инвариантное решение относительно подалгебры, порождаемой оператором $X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$.

Такое решение следует искать в виде

$$\tau^i = \tau^i(x, y), p = p(x, y). \quad (18)$$

Подставляем (18) в систему (9) получаем

$$\partial_y \tau^1 = \partial_x p, \partial_x \tau^1 = \partial_y p, \partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 = 0, \quad (19)$$

$$a_{12}(\tau^1)^2 + a_{13}(\tau^2)^2 + a_{23}(\tau^3)^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Из (19) без труда получаем

$$\tau^1 = f(x + y) + g(x - y), p = f(x + y) - g(x - y). \quad (20)$$

Теперь функции τ^2, τ^3 определяются из системы уравнений

$$\partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 = 0, a_{13}(\tau^2)^2 + a_{23}(\tau^3)^2 = k_s^2 - a_{12}(\tau^1)^2. \quad (21)$$

Система уравнений (21) описывает кручение анизотропного стержня в условиях, когда предел текучести зависит от переменных x, y . Такие задачи рассмотрены в [1,2] и цитируемой там литературе.

Законы сохранения системы уравнений (9) Использование законов сохранения для уравнений механики деформируемого твердого тела еще только начинается. Но уже имеются обнадеживающие результаты, которых удастся добиться именно с помощью законов сохранения. Это решение задачи Коши для плоского деформированного ряда и решение ряда упруго – пластических задач, описывающих кручение стержней и консолей [4, 5, 10-13]. В этом разделе построены законы сохранения для уравнений (9).

Будем искать законы сохранения системы уравнений (9) в виде

$$\partial_x A(\tau^1, \tau^2, \tau^3, p) + \partial_y B(\tau^1, \tau^2, \tau^3, p) + \partial_z C(\tau^1, \tau^2, \tau^3, p) = 0.$$

Это равенство выполняется в силу системы уравнений (9). Из этого следуют соотношения

$$\begin{aligned} X_{12}A - a_{13}\tau^2\partial_p B + a_{12}\tau^1\partial_p C &= 0, \\ X_{13}B - a_{23}\tau^3\partial_p A + a_{12}\tau^1\partial_p C &= 0, \\ X_{12}B - a_{13}\tau^2\partial_p A &= 0, \\ X_{12}C - a_{12}\tau^1\partial_p A &= 0, \\ X_{13}C + a_{12}\tau^1\partial_p B &= 0, \\ X_{13}A - a_{23}\tau^3\partial_p B &= 0, \end{aligned}$$

где $X_{12} = -a_{13}\tau^2\partial_{\tau^1} + a_{12}\tau^1\partial_{\tau^2}$, $X_{13} = -a_{23}\tau^3\partial_{\tau^1} + a_{12}\tau^1\partial_{\tau^3}$.

Покажем, что эти уравнения совместны. Пусть

$$\partial_p A = \partial_p B = \partial_p C = 0,$$

тогда одно из решений - бесконечная серия $A(S), B(S), C(S)$, где $S = a_{12}(\tau^1)^2 + a_{13}(\tau^2)^2 + a_{23}(\tau^3)^2$,

$A(S), B(S), C(S)$ - произвольные гладкие функции.

Замечание. Есть ли другие законы? Неизвестно, но, по мнению авторов, других законов сохранения нет.

Система уравнений (9) в терминах компонент тензора деформации

Понятно, что для системы (9) наиболее актуально напряженное состояние. Пусть оно известно. Тогда для нахождения трех компонент вектора скорости имеем три уравнения

$$a_{12}\lambda\tau^1 = e_{12}, a_{13}\lambda\tau^2 = e_{13}, a_{23}\lambda\tau^3 = e_{23}, \quad (22)$$

где

$$2e_{12} = \partial_y u + \partial_x v, 2e_{13} = \partial_z u + \partial_x w, 2e_{23} = \partial_z v + \partial_y w. \quad (23)$$

Покажем, что уравнения (22) можно решить в терминах компонент тензора скоростей деформации. Как известно, компоненты тензора скоростей деформации кроме уравнений (22) должны удовлетворять еще и уравнениям совместности. В силу соотношений (23) и (5) их остается только шесть

$$\partial_{xy}^2 e_{12} = 0, \partial_{xz}^2 e_{13} = 0, \partial_{yz}^2 e_{23} = 0, \quad (24)$$

$$\partial_x (\partial_x e_{23} - \partial_z e_{12} - \partial_y e_{13}) = 0,$$

$$\partial_y (\partial_y e_{13} - \partial_z e_{12} - \partial_x e_{23}) = 0,$$

$$\partial_z (\partial_z e_{12} - \partial_y e_{13} - \partial_x e_{23}) = 0.$$

Теорема. Уравнения совместности скоростей деформации выполняются тождественно.

В этом случае из (22) имеем

$$\begin{aligned} (\tau^1)^2 (e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2) &= k_s^2 e_{12}^2, \\ (\tau^2)^2 (e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2) &= k_s^2 e_{23}^2, \\ (\tau^3)^2 (e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2) &= k_s^2 e_{13}^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Системы уравнений (25) – это система линейных однородных уравнений относительно переменных $e_{12}^2, e_{13}^2, e_{23}^2$. Ее определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} (\tau^1)^2 - k_s^2 & (\tau^1)^2 & (\tau^1)^2 \\ (\tau^2)^2 & (\tau^2)^2 - k_s^2 & (\tau^2)^2 \\ (\tau^3)^2 & (\tau^3)^2 & (\tau^3)^2 - k_s^2 \end{vmatrix}$$

Этот определитель равен нулю, поскольку сумма всех строк равна нулю. Это означает, что система (25) имеет только два независимых уравнения для трех компонент тензора скоростей деформации. Например, величина e_{23}^2 может быть выбрана произвольно, поэтому для данного напряженного состояния, определяемого из системы (9), поле скоростей определяется с функциональным произволом. Систему (9), в случае, когда $p \equiv 0$ можно записать так:

$$\begin{aligned} \partial_y \Lambda e_{12} + \partial_z \Lambda e_{13} &= 0, \\ \partial_x \Lambda e_{12} + \partial_z \Lambda e_{23} &= 0, \\ \partial_x \Lambda e_{13} + \partial_y \Lambda e_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь для удобства считаем $\Lambda = \lambda^{-1}$.

Продифференцируем первое уравнение по x , а второе по y и вычтем полученное соотношение

$$\partial_z (\partial_x \Lambda e_{13} - \partial_y \Lambda e_{23}) = 0. \quad (27)$$

Из третьего уравнения (26) имеем

$$\partial_z (\partial_x \Lambda e_{13} + \partial_y \Lambda e_{23}) = 0. \quad (28)$$

Из (27) и (28) получаем

$$\partial_{zx} \Lambda e_{13} = 0, \partial_{zy} \Lambda e_{23} = 0. \quad (29)$$

Проделав аналогичную операцию с первым и третьим уравнениями системы (26) имеем

$$\partial_{xy} \Lambda e_{12} = 0. \quad (30)$$

Из этих соотношений можно определить вид компонент тензора напряжений

$$S_{12} = \Lambda e_{12} = F_1(x, z) + G_1(z, y). \quad (31)$$

$$S_{13} = \Lambda e_{13} = H_1(x, y) + G_1(z, y), S_{23} = \Lambda e_{23} = H_2(x, y) + F_2(z, x).$$

Между этими функциями выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \partial_y G_1 + \partial_z G_2 = 0, \partial_x F_1 + \partial_z F_2 = 0, \partial_x H_1 + \partial_y H_2 = 0, \\ a_{12}(G_1 + F_1)^2 + a_{13}(G_2 + H_1)^2 + a_{23}(F_2 + H_2)^2 = 1. \end{aligned} \quad (32)$$

В системе уравнений (32) введем функции Φ_i , по следующим формулам

$$F_1 = \partial_z \Phi_1, F_2 = -\partial_x \Phi_1, G_1 = \partial_z \Phi_2, G_2 = -\partial_y \Phi_2, H_1 = \partial_y \Phi_3, H_2 = -\partial_x \Phi_3.$$

В этом случае первые три уравнения (32) удовлетворяются тождественно, а последнее запишется так

$$a_{12}(\partial_z\Phi_1 + \partial_z\Phi_2)^2 + a_{13}(\partial_y\Phi_3 - \partial_y\Phi_2)^2 + a_{23}(\partial_x\Phi_3 + \partial_x\Phi_1)^2 = 1.$$

В этом случае компоненты напряжения примут вид

$$S_{12} = \Lambda e_{12} = \partial_z(\Phi_1(x, z) + \Phi_2(z, y)), \quad (33)$$

$$S_{13} = \Lambda e_{13} = \partial_y(\Phi_3(x, y) - \Phi_2(z, y)), S_{23} = \Lambda e_{23} = \partial_x(-\Phi_1(x, z) - \Phi_3(x, y)).$$

Заключение. В работе построена новая система уравнений (9). Ее необходимо исследовать более подробно. Для этого можно использовать методы развитые в работах [4-13].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д. и др. Предельное состояние деформированных тел и горных пород. М., Физматлит, 2008. 832 с.
- [2] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 702 с.
- [3] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
- [4] Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решениям дифференциальных уравнений. Новосибирск: СО РАН, 2001. 192 с.
- [5] Сенашов С. И., Гомонова О. В., Яхно А. Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности. Красноярск: СибГАУ, 2012. 139 с.
- [6] Senashov S. I., Yakchno A. N. Reproduction of solutions for bidimensional ideal plasticity // Journal of Non-Linear Mechanics. 2007. № 42. P. 500–503
- [7] Senashov S. I., Yakchno A. N. Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries // Nonlinear analysis. 2009. №71. P. 1274–1284
- [8] Senashov S. I., Yakchno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity // SIGMA 8 (2012), 071, 16 pages, <http://dx.doi.org/10.3842//SIGMA.2012.071>. Special Issue „Geometrical Methods in Mathematical Physics“
- [9] Senashov S. I., Yakchno A.N. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system //J. Phys. A: Math. Theor. 2013. №46. P. 355202.
- [10] Senashov S. I., Yakchno A.N. Conservation Laws of Three-Dimensional Perfect Plasticity Equations under von Mises Yield // Criterion Abstract and Applied Analysis. 2013. V. 2013. 702132. 8 p.
- [11] Senashov S. I, Kondrin A. V., Cherepanova O. N. On Elastoplastic Torsion of a Rod with Multiply Connected Cross-Section // J. Siberian Federal Univ. Math. and Physics. 2015. №7(1). P. 343–351.
- [12] Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. Elastoplastic Bending of Beam //J. Siberian Federal Univ., Math. and Physics. 2014. №7(2). P. 203–208.
- [13] Senashov S. I., Filyushina E. V., Gomonova O. V. Construction of elasto-plastic boundaries using conservation laws. // Scientific Journal of Science and Technology. 2015. V. 16. №2. P. 343–346

S. I. Senashov, I. L. Savostyanova

ELASTIC STATE OF A PLATE WITH FREE-FORM HOLES

Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk

Abstract. The authors consider the limit state of anisotropic plastic bodies. The theory of limit state deals with statically determinate condition of solids. The system is closed due to the marginal conditions in this case. The system of equations has three tangential component of the stress tensor. Diagonal components of this system are equal. In this case, the authors are able to choose a velocity field that the system is also statically determinate. The system can be considered in terms of components of tensor of rate of deformation. The number of equations is not increased because the terms of jointness performs identically. For this system the authors found a group of point symmetries and conservation laws, considered some exact solutions, which can be used to describe the plastic swirl around the three orthogonal axes.

Keywords: limit state, plastic body, anisotropic plastic body.

REFERENCES

- [1] Ivlev D. D. i dr. Predel'noe sostoyanie deformirovannyh tel i gornyh porod. M. , Fizmatlit, 2008. 832 s. (in Russian)
- [2] Ishlinskij A. YU., Ivlev D. D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: Fizmatlit, 2001. 702 s. (in Russian)
- [3] Hill R. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: Gostekhizdat, 1956. 407 s. (in Russian)
- [4] Kiryakov P. P., Senashov S. I., YAhno A. N. Prilozhenie simmetrij i zakonov sohraneniya k resheniyam differencial'nyh uravnenij. Novosibirsk: SO RAN, 2001. 192 s. (in Russian)
- [5] Senashov S. I., Gomonova O. V., YAhno A. N. Matematicheskie voprosy dvumernyh uravnenij ideal'noj plastichnosti. Krasnoyarsk: SibGAU, 2012. 139 s. (in Russian)
- [6] Senashov S. I., Yakchno A. N. Reproduction of solutions for bidimensional ideal plasticity // Journal of Non-Linear Mechanics. 2007. № 42. P. 500–503
- [7] Senashov S. I., Yakchno A. N. Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries // Nonlinear analysis. 2009. №71. P. 1274–1284
- [8] Senashov S. I., Yakhno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity // SIGMA 8 (2012), 071, 16 pages, <http://dx.doi.org/10.3842//SIGMA.2012.071>. Special Issue „Geometrical Methods in Mathematical Physics“
- [9] Senashov S. I., Yakhno A.N. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system // J. Phys. A: Math. Theor. 2013. №46. P. 355202.

Senashov Sergei Ivanovich

e-mail: sen@sibsau.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology , Krasnoyarsk, Russia.

Savostyanova Irina Leonidovna

e-mail: savostyanova@sibsau.ru, Ph.D. in Pedagogy, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology , Krasnoyarsk, Russia

[10] Senashov S. I., Yakchno A.N. Conservation Laws of Three-Dimensional Perfect Plasticity Equations under von Mises Yield // *Criterion Abstract and Applied Analysis*. 2013. V. 2013. 702132. 8 p.

[11] Senashov S. I., Kondrin A. V., Cherepanova O. N. On Elastoplastic Torsion of a Rod with Multiply Connected Cross-Section // *J. Siberian Federal Univ. Math. and Physics*. 2015. №7(1). P. 343–351.

[12] Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. Elastoplastic Bending of Beam // *J. Siberian Federal Univ., Math. and Physics*. 2014. №7(2). P. 203–208.

[13] Senashov S. I., Filyushina E. V., Gomonova O. V. Sonstruction of elasto-plastic boundaries using conservation laws. // *Scientific Journal of Science and Technology*. 2015. V. 16. №2. P. 343–346

С. В. Матвеев¹, А. Н. Матвеева², С. В. Тихонов¹

РАВНОМЕРНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ТОНКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ВКЛЮЧЕНИЕМ, ПРИ УСЛОВИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТРЫВУ

¹ Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары

² Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары

Аннотация. В работе рассматривается упругопластическое состояние тонкой пластины с круговым отверстием, подкрепленной включением. Пластина подвергается равномерному растяжению. Материал пластины и включения различен и имеет разные свойства анизотропии и сопротивления отрыву. В работе определено напряженное состояние пластины и найдена граница между упругой и пластической областями.

Ключевые слова: пластичность, упругость, линеаризация, напряжение, отрыв, анизотропия

УДК: 539.374

Рассмотрим бесконечную кольцевую анизотропную идеальнопластическую пластину подкрепленную круговым включением с отверстием радиуса a (рис. 1). Области I соответствует включение, области II материал пластины. Начало координат совпадает с центром окружности и включения. Константа отрыва для материала включения равна p_1 , константа отрыва для материала пластины – p_2 . Пластина находится в состоянии равномерного растяжения.

Условие пластичности для материала включения и пластины примем в виде

$$(A_n \sigma_x - p_n)(B_n \sigma_y - p_n) - C_n \tau_{xy}^2 = 0, \quad A_n, B_n, C_n, p_n = const, \quad (1)$$

где A_n, B_n, C_n – константы анизотропии области n , p_n – константа сопротивления отрыву области n .

© Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Тихонов С. В., 2017

Матвеев Сергей Владимирович

e-mail: sergio2100@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары.

Матвеева Алена Николаевна

e-mail: goshtova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары.

Поступила 11.12.2017

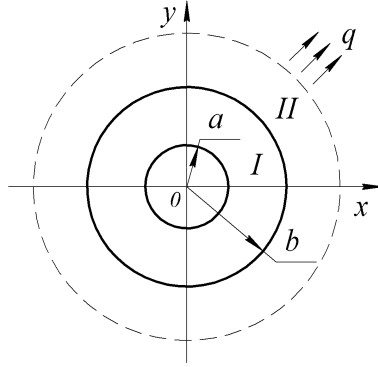


Рис. 1.

Перейдем к полярной системе координат. Связь между напряжениями в декартовой системе координат xy и напряжениями в полярной системе координат $\rho\theta$ имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta.\end{aligned}\quad (2)$$

Из (1) и (2) получим

$$\begin{aligned}A_n B_n (\sigma_\rho + \sigma_\theta)^2 - (\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 \left(\frac{A_n B_n + C_n}{2} + \frac{A_n B_n - C_n}{2} \cos 4\theta \right) - \\ - 2\tau_{\rho\theta}^2 (A_n B_n + C_n + (C_n - A_n B_n) \cos 4\theta) - 2\tau_{\rho\theta} (\sigma_\rho - \sigma_\theta) \times \\ \times (A_n B_n - C_n) \sin 4\theta - 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta) (A_n - B_n) p_0 \cos 2\theta - \\ - 4\tau_{\rho\theta} (A_n - B_n) p_n \sin 2\theta - 2(\sigma_\rho + \sigma_\theta) (A_n + B_n) p_n = -4p_n^2.\end{aligned}\quad (3)$$

Все величины, имеющие размерность напряжения будем считать безразмерными, отнесенными к величине предела текучести k , а величины, имеющие размерность длины, – к радиусу пластической зоны ρ_s^0 .

В дальнейшем положим

$$A_n = 1 + \delta a_n, \quad B_n = 1 + \delta b_n, \quad C_n = 1 + \delta c_n, \quad \alpha = \frac{a}{\rho_s^0}, \quad \beta = \frac{b}{\rho_s^0}, \quad (4)$$

где a_n, b_n, c_n – константы анизотропии, a – радиус отверстия, b – радиус включения, δ – малый безразмерный параметр.

В исходном нулевом приближении при $\delta = 0$, $A_n = B_n = C_n = 1$ соотношение (3) имеет вид

$$(\sigma_{\rho n} - p_n)(\sigma_{\theta n} - p_n) - \tau_{\rho\theta n}^2 = 0, \quad p_n = \text{const.} \quad (5)$$

Решение будем искать аналогично работам [1-5], полагая

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(I)} + \delta^2 \sigma_{ij}^{(II)} + \dots \quad (6)$$

Положим

$$\tau_{\rho\theta n}^{(0)} = 0. \quad (7)$$

Припишем компонентам напряжения в пластической зоне индекс “ p ” наверху, а упругой – индекс “ e ” наверху.

В нулевом приближении из (3 – 7) получим

$$\sigma_{\theta n}^{(0)p} = p_n. \quad (8)$$

Уравнения равновесия в первом приближении для обеих областей имеют вид

$$\frac{d\sigma_{\rho n}^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho n}^{(0)} - \sigma_{\theta n}^{(0)}}{\rho} = 0. \quad (9)$$

Из (8), (9) следует

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = p_1 - \frac{C_1}{\rho}. \quad (10)$$

Контур отверстия свободен от усилий, т. е. $\sigma_{\rho 1} = 0$ при $\rho \geq \alpha$. Найдем константу C_1 из условия $\sigma_{\rho 1} = 0$ при $\rho = \alpha$. Тогда соотношение (10) можно переписать в виде

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = p_1 \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right). \quad (11)$$

Таким образом, компоненты напряжения в пластической области в исходном нулевом состоянии для первой области имеют вид

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = p_1 \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right), \quad \sigma_{\theta 1}^{(0)p} = p_1, \quad \tau_{\rho\theta 1}^{(0)p} = 0. \quad (12)$$

Определим компоненты напряжений для второй области в нулевом приближении. Из (8), (9) следует

$$\sigma_{\rho 2}^{(0)p} = p_2 - \frac{C_2}{\rho}. \quad (13)$$

Значение коэффициента C_2 определим из условий сопряжения компонент напряжения на границе включения

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = \sigma_{\rho 2}^{(0)p}, \quad \text{при } \rho = \beta. \quad (14)$$

Используя выражения (7), (8), (11), (13) получим компоненты напряжений в нулевом приближении для второй области

$$\sigma_{\rho 2}^{(0)p} = p_2 \left(1 - \frac{\beta}{\rho}\right) + \frac{p_1(\beta - \alpha)}{\rho}, \quad \sigma_{\theta 2}^{(0)p} = p_2, \quad \tau_{\rho\theta 2}^{(0)p} = 0. \quad (15)$$

Напряжения в упругой области в нулевом приближении запишем в виде

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = q - \frac{F}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = q + \frac{F}{\rho^2}, \quad F - const. \quad (16)$$

Условие сопряжения компонент напряжения во второй области на упругопластической границе будет иметь вид

$$\sigma_{\rho 2}^{(0)p} = \sigma_{\rho}^{(0)e}, \quad \sigma_{\theta 2}^{(0)p} = \sigma_{\theta}^{(0)e}, \quad \rho = 1. \quad (17)$$

Из (15) – (17) получим выражения для компонент напряжений в упругой области

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = q - \frac{p_2\beta - p_1(\alpha + \beta)}{2\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = q + \frac{p_2\beta - p_1(\alpha + \beta)}{2\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (18)$$

Радиус упругопластической границы определим из соотношений (4), (15), (17) и (18)

$$\rho_s^0 = \frac{b(p_2 - p_1) - ap_1}{2(p_2 - q)}. \quad (19)$$

В первом приближении из (3), (4) (6), с учетом (7), (12), (15) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta 1}^{(I)p} &= -\frac{\alpha p_1}{8\rho}(a_1 + b_1 - c_1) \cos 4\theta + \frac{p_1}{2}(a_1 - b_1) \cos 2\theta + \\ &\quad + \frac{\alpha p_1}{8\rho}(a_1 + b_1 - c_1) - \frac{p_1}{2}(a_1 + b_1), \\ \sigma_{\theta 2}^{(I)p} &= -\left(\frac{\beta}{\rho}(p_2 - p_1) + \frac{p_2\alpha}{\rho}\right) \frac{(a_2 + b_2 - c_2)}{8} \cos 4\theta + \\ &\quad + \frac{p_2(a_2 - b_2)}{2} \cos 2\theta - \frac{p_2(a_2 + b_2)}{2} + \left(\frac{\beta}{\rho}(p_2 - p_1) + \frac{p_2\alpha}{\rho}\right) \frac{(a_2 + b_2 - c_2)}{8}. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения равновесия в первом приближении записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho}^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{\rho}^{(I)} - \sigma_{\theta}^{(I)}}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta}^{(I)}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнениям равновесия удовлетворим, полагая

$$\sigma_{\rho}^{(I)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(I)} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (22)$$

Для первой области из (20), (22) получим

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \left[-\frac{\alpha p_1}{8}(a_1 + b_1 - c_1)\rho(\ln \rho - 1) + C_1\rho + C_2 \right] \cos 4\theta + \\ &\quad + \left[\frac{p_1\rho^2}{4}(a_1 - b_1) + C_3\rho + C_4 \right] \cos 2\theta + \\ &\quad + \frac{\alpha p_1}{8}(a_1 + b_1 - c_1)\rho(\ln \rho - 1) - \frac{p_1\rho^2}{4}(a_1 + b_1) + C_5\rho + C_6. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (22), (23) следует

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} &= \left[\frac{15\alpha p_1}{8}(a_1 + b_1 - c_1) \frac{\ln \rho}{\rho} - \frac{2\alpha p_1(a_1 + b_1 + c_1) + 15C_1}{\rho} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{16C_2}{\rho^2} \right] \cos 4\theta - \left[\frac{p_1}{2}(a_1 - b_1) + \frac{3C_3}{\rho} + \frac{4C_4}{\rho^2} \right] \cos 2\theta + \\ &\quad + \frac{\alpha p_1}{8}(a_1 + b_1 - c_1) \frac{\ln \rho}{\rho} - \frac{p_1}{2}(a_1 + b_1) + \frac{C_5}{\rho}, \\ \sigma_{\theta}^{(I)p} &= -\frac{\alpha p_1}{8\rho}(a_1 + b_1 - c_1) \cos 4\theta + \frac{p_1}{2}(a_1 - b_1) \cos 2\theta + \\ &\quad + \frac{\alpha p_1}{8\rho}(a_1 + b_1 - c_1) - \frac{p_1}{2}(a_1 + b_1), \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= -\left[\frac{\alpha p_1}{2\rho}(a_1 + b_1 - c_1) + \frac{4C_2}{\rho} \right] \sin 4\theta + \left[\frac{p_1}{2}(a_1 - b_1) - \frac{2C_4}{\rho^2} \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (24)$$

Определим константы C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 из условия

$$\sigma_{\rho 1}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha} = 0, \quad \tau_{\rho\theta 1}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha} = 0. \quad (25)$$

Получим

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{p_1 \alpha \ln \alpha}{8} (a_1 + b_1 - c_1), & C_2 &= -\frac{p_1 \alpha^2}{8} (a_1 + b_1 - c_1), \\ C_3 &= -\frac{p_1 \alpha}{2} (a_1 - b_1), & C_4 &= \frac{p_1 \alpha^2}{4} (a_1 - b_1), \\ C_5 &= \frac{p_1 \alpha}{2} (a_1 + b_1) - \frac{p_1 \alpha \ln \alpha}{8} (a_1 + b_1 - c_1). \end{aligned}$$

Тогда компоненты напряжения в пластической зоне в первом приближении примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 1}^{(I)p} &= \alpha p_1 (a_1 + b_1 - c_1) \left[\frac{15 \ln \rho}{8\rho} - \frac{(16+15 \ln \alpha)}{8\rho} + \frac{2\alpha}{\rho^2} \right] \cos 4\theta - \\ &\quad - p_0 (a_1 - b_1) \left[\frac{1}{2} - \frac{3\alpha}{2\rho} + \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right] \cos 2\theta + \frac{p_1 \alpha \ln \alpha}{8\rho} c_1 - \\ &\quad - p_0 (a_1 + b_1) \left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\rho} \right] + \frac{\alpha p_1}{8\rho} (a_1 + b_1 - c_1) \ln \frac{\rho}{\alpha}, \\ \sigma_{\theta 1}^{(I)p} &= -\frac{\alpha p_1}{8\rho} (a_1 + b_1 - c_1) \cos 4\theta + \frac{p_1}{2} (a_1 - b_1) \cos 2\theta + \\ &\quad + \frac{\alpha p_1}{8\rho} (a_1 + b_1 - c_1) - \frac{p_1}{2} (a_1 + b_1), \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= -\frac{\alpha p_1}{2\rho} (a_1 + b_1 - c_1) [1 - \alpha^2] \sin 4\theta + \frac{p_1}{2} (a_1 - b_1) \left[1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (26)$$

Для второй зоны из (20), (22) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 2}^{(I)p} &= \left[\frac{15(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+p_2\alpha) \ln \rho}{8} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+p_2\alpha)+15\bar{C}_1}{\rho} - \frac{16\bar{C}_2}{\rho^2} \right] \cos 4\theta - \\ &\quad - \left[\frac{p_2(a_2-b_2)}{2} + \frac{3\bar{C}_3}{\rho} + \frac{4\bar{C}_4}{\rho^2} \right] \cos 2\theta + \\ &\quad + \frac{(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+p_2\alpha) \ln \rho}{8} - \frac{p_2(a_2-b_2)}{2} + \frac{\bar{C}_5}{\rho}, \\ \sigma_{\theta 2}^{(I)p} &= -\left(\frac{\beta}{\rho} (p_2 - p_1) + \frac{p_2 \alpha}{\rho} \right) \frac{(a_2+b_2-c_2)}{8} \cos 4\theta + \\ &\quad + \frac{p_2(a_2-b_2)}{2} \cos 2\theta - \frac{p_2(a_2+b_2)}{2} + \left(\frac{\beta}{\rho} (p_2 - p_1) + \frac{p_2 \alpha}{\rho} \right) \frac{(a_2+b_2-c_2)}{8}, \\ \tau_{\rho\theta 2}^{(I)p} &= -\left[\frac{(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+p_2\alpha)}{2\rho} + \frac{4\bar{C}_2}{\rho^2} \right] \sin 4\theta + \left[\frac{p_2(a_2-b_2)}{2} + \frac{2\bar{C}_4}{\rho^2} \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (27)$$

Условия сопряжения на границе первой и второй зоны имеют вид

$$\sigma_{\rho 1}^{(I)p} = \sigma_{\rho 2}^{(I)p}, \quad \tau_{\rho\theta 1}^{(I)p} = \tau_{\rho\theta 2}^{(I)p} \quad \text{при } \rho = \beta. \quad (28)$$

Из условий (27), (28) определим константы $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3, \bar{C}_4, \bar{C}_5$.

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= \frac{(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+p_2\alpha) \ln \beta}{8} - \\ &\quad - \frac{\alpha p_1 (a_1+b_1-c_1) \ln \frac{\beta}{\alpha} + \frac{2\alpha^2 p_1 (a_1+b_1-c_1)}{15}}{8} \left(\alpha - \frac{1}{\beta} \right), \\ \bar{C}_2 &= \frac{\alpha \beta p_1 (a_1+b_1-c_1)(1-\alpha^2)}{8} - \frac{\beta(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+p_2\alpha)}{8}, \\ \bar{C}_3 &= \frac{-\beta p_2 (a_2-b_2) + (\beta-\alpha) p_1 (a_1-b_1)}{2}, \\ \bar{C}_4 &= \frac{p_2 \beta^2 (a_2-b_2)}{4} - \frac{p_1 (a_1-b_1)(\beta^2-\alpha^2)}{4}, \\ \bar{C}_5 &= \frac{\beta(p_2(a_2+b_2)-p_1(a_1+b_1))}{2} - \frac{(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+p_2\alpha) \ln \beta}{8} + \\ &\quad + \frac{\alpha p_1}{8} \left(4a_1 + 4b_1 + c_1 \ln \alpha + (a_1 + b_1 - c_1) \ln \frac{\beta}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Условия сопряжения на упругопластической границе имеют вид

$$\sigma_{\rho 2}^{(I)p} = \sigma_{\rho}^{(I)e}, \quad \tau_{\rho\theta 2}^{(I)p} = \tau_{\rho\theta}^{(I)e} \quad \text{при } \rho = 1. \quad (29)$$

Компоненты напряжения в упругой зоне в первом приближении с учетом (29) примут вид

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(I)e} &= a_0'' + a_2'' \cos 2\theta + a_4'' \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= b_2''' \sin 2\theta + b_4''' \sin 4\theta,\end{aligned}\quad (30)$$

где

$$\begin{aligned}a_0'' &= -\frac{p_2(a_2-b_2)}{2} + \bar{C}_5, \\ a_2'' &= -\left[\frac{p_2(a_2-b_2)}{2} + 3\bar{C}_3 + 4\bar{C}_4\right], \\ a_4'' &= -2(a_2 + b_2 - c_2)(\beta(p_2 - p_1) + \alpha p_2) - 15\bar{C}_1 - 16\bar{C}_2, \\ b_2''' &= \frac{p_2(a_2-b_2)}{2} - 2\bar{C}_4, \\ b_4''' &= -\frac{(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+\alpha p_2)}{2} - 4\bar{C}_2.\end{aligned}$$

Согласно [6] из (30) получим

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(I)e} &= [2\bar{C}_5 - p_2(a_2 + b_2)] \frac{1}{2\rho^2} + \left[(p_2(a_2 - b_2) + 3\bar{C}_3 + 2\bar{C}_4) \left(\frac{1}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{p_2(a_2-b_2)}{2} - 2\bar{C}_4 \right) \frac{1}{\rho^4} \right] \cos 2\theta + \left[\left(\frac{3(a_2+b_2-c_2)}{2} + 15\bar{C}_1 + 12\bar{C}_2 \right) \left(\frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+\alpha p_2)}{2} + 4\bar{C}_2 \right) \frac{1}{\rho^2} \right] \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(I)e} &= (p_2(a_2 + b_2) - 2\bar{C}_5) \frac{1}{2\rho^2} - (p_2(a_2 - b_2) + 2\bar{C}_3) \frac{3}{2\rho^4} \cos 2\theta + \\ &\quad \left[((a_2 + b_2 - c_2)(\beta(p_2 - p_1) + \alpha p_2) + 8\bar{C}_2) \frac{1}{2\rho^6} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{3(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+\alpha p_2)}{2} + 15\bar{C}_1 + 12\bar{C}_2 \right) \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \right] \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left[\left(\frac{p_2(a_2-b_2)}{2} - 2\bar{C}_4 \right) \frac{1}{\rho^4} - (p_2(a_2 - b_2) + 3\bar{C}_3 + 2\bar{C}_4) \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4} \right) \right] \sin 2\theta - \\ &\quad - \left[(3(a_2 + b_2 - c_2)(\beta(p_2 - p_1) + \alpha p_2) + 15\bar{C}_1 + 12\bar{C}_2) \left(\frac{1}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^6} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{(a_2+b_2-c_2)}{2} (\beta(p_2 - p_1) + \alpha p_2) + 4\bar{C}_2 \right) \frac{1}{\rho^6} \right] \sin 4\theta.\end{aligned}\quad (31)$$

Для определения упругопластической границы в первом приближении будет справедливо соотношение [6]

$$\sigma_{\theta 2}^{(I)p} + \frac{d\sigma_{\theta 2}^{(0)p}}{d\rho} \rho_s^{(I)} = \sigma_{\theta}^{(I)e} + \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} \rho_s^{(I)} \quad \text{при } \rho = 1. \quad (32)$$

Из (15), (18), (27), (31), (32) получим

$$\begin{aligned}\rho_s^{(I)} &= \frac{6}{\alpha p_1 - \beta(p_2 - p_1)} \left[\frac{(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+\alpha p_2)}{8} - \right. \\ &\quad - \frac{3p_2(a_2+b_2)}{2} + 2\bar{C}_5 + (2p_2(a_2 - b_2) + 3\bar{C}_3) \cos 2\theta + \\ &\quad \left. + \left(\frac{7(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+\alpha p_2)}{8} + 8\bar{C}_2 + 15\bar{C}_1 \right) \cos 4\theta \right].\end{aligned}$$

В случае однородности материала пластины и включения, полученное решение соответствует результатам работы [7].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Роштова А. Н. О плоском напряженном состоянии анизотропного идеальнопластического материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2007. Т.1. № 3. С. 19–22.
- [2] Роштова А. Н. Об общих предельных условиях при отрыве для сжимаемых анизотропных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 2. С. 131–134.
- [3] Матвеев С. В. Матвеева А. Н., Тихонов С. В. Деформированное состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двусном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 1(27). С. 105–114.
- [4] Кержаев А. П. Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2 (16). С. 71–81.
- [5] Кузнецов П. Н. Упругопластическое состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленной включениями, ограниченными эксцентрическими окружностями, при двусном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1 (6). С. 134–141.
- [6] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела М. : Наука, 1978. 208 с.
- [7] Роштова А. Н. Растяжение упругопластической анизотропной тонкой пластины, ослабленной круговым отверстием // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2007. № 3 (55). С. 22–27.

S. V. Matveev¹, A. N. Matveeva², S. V. Tikhonov¹

**UNIFORM STRETCHING OF A THIN ANISOTROPIC PLATE WITH A
CIRCULAR APERTURE BACKED UP BY INCLUSION, UNDER THE
CONDITION OF RESISTANCE TO SEPARATION**

¹*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary*

²*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

Abstract. The elastic-plastic state of a thin annular plate reinforced by inclusion is considered, the outer radius of the plate is equal to infinity. The plate is subjected to uniform stretching. The material of the plate and the inclusion is different and has different properties of anisotropy and tear resistance. The stress state of the plate is determined and the boundary between the elastic and plastic regions is found.

Keywords: plasticity, elasticity, linearization, stress, separation, anisotropy

REFERENCES

[1] Roshtova A. N. O ploskom napryazhennom sostoyanii anizotropnogo ideal'noplasticheskogo materiala // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.YA. Yakovleva. 2007. T.1. № 3. S. 19–22. (in Russian)

[2] Roshtova A. N. Ob obshchikh predel'nykh usloviyakh pri otryve dlya szhimayemykh anizotropnykh sred // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universitet im. I.YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2007. № 2. S. 131. (in Russian)

[3] Matveyev K. V. Matveyeva A. N., Tikhonov S. V. Deformirovannoye sostoyaniye anizotropnoy ploskosti, oslablennoy otverstiyem, podkreplennoy vklyuchencheniyem, ogranichennaya ekstsentricheskaya okruzhnost'yu, pri dvuosnom rastyazhenii // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2016. № 1 (27). S. 105–114. (in Russian)

[4] Kerzhayev A. P. Uprugoplasticheskoye sostoyaniye dvukhsloynoy tolstostennoy trubyy, nakhodyashchayasya pod vozdeystviyem davleniya, pri translyatsionnoy anizotropii // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universitet im. I. YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2013. № 2 (16). S. 71–81. (in Russian)

Matveev Sergey Vladimirovich

e-mail: sergio2100@mail.ru, Ph.D., Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Matveeva Alena Nikolaevna

e-mail: roshtova@mail.ru, Ph.D., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Tikhonov Sergey Vladimirovich

e-mail: strangcheb@mail.ru, Ph.D., Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

[5] Kuznetsov P. N. Uprugoplasticheskoye sostoyaniye neodnorodnoy ploskosti, oslablennoy krugovym otverstiyem, podkreplennoy vklyucheniymi, sht. ekstsentricheskimy okruzhnostyami, pri dvuosnom rastyazhenii // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2009. № 1 (6). S. 134–141. (in Russian)

[6] Ivlev D. D., Yershov L. V. Metod vozmushcheniy v teorii uprugoplasticheskogo tela M. : Nauka, 1978. 208 s. (in Russian)

[7] Roshtova, A. N. Rastyazheniye uprugoplasticheskoy anizotropnoy tonkoy plastiny, oslablennoy krugovym otverstiyem // Vestnik CHGPU im. I.YA. Yakovleva. 2007. № 3 (55). S. 22–27. (in Russian)

М. С. Максютлов, В. А. Кадымов

О БЕЗМОМЕНТНОМ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ГЛАДКОГО ТОРА, НАГРУЖЕННОГО РАВНОМЕРНЫМ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия

Аннотация. Уточняется задача определения напряженно-деформированного состояния (НДС) тороидальной оболочки, нагруженной равномерным внутренним давлением, и определяемого по безмоментной теории. Предложена система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающая НДС тора на основе моментной теории оболочек. Выписано численное решение краевой задачи НДС тора, проведен его анализ.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, усилия, перемещения, моментная теория оболочек, тор, метод прогонки, метод отложенной коррекции.

УДК: 539.3

Введение.

При расчетах на прочность часто приходится сталкиваться с конструкциями, включающими в себя элементы трубопроводов и насосов тороидальной формы. Расчет таких конструкций регламентирован СНиП на основе упрощенных постановок, по формулам сопротивления материалов, и обычно не представляет особых трудностей. При математической постановке и решении задачи определения осесимметричного напряженно-деформированного состояния тороидальных оболочек, возникают определенные трудности в получении аналитического решения. Матрица системы дифференциальных уравнений имеет переменные коэффициенты, поэтому, в общем, система не разрешима аналитически. Лишь в некоторых случаях удается получить аналитическое решение. В частности, в работе [3] представлено аналитическое решение для тороидального участка трубопровода, в виде поворотного колена, жестко закрепленного на концах фланцами и нагруженного равномерным внутренним давлением. Постановка краевой задачи для замкнутого кругового тора, нагруженного равномерным внутренним давлением, была предложена В. Л. Бидерманом [1] в виде системы ОДУ четвертого порядка. Ее решение было получено численно, причем только на

© Максютлов М. С., Кадымов В. А., 2017

Максутлов Малик Сабитович

e-mail: mmaxutov@icloud.com, кандидат технических наук, доцент, Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия.

Кадымов Вагид Ахмедович

e-mail: vkadymov@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия.

Поступила 11.11.2017

локальном участке, исключая окрестности полюсных точек поверхности тора. Однако, в некоторых случаях, требуется провести полный расчет НДС кругового тора, находящегося под действием равномерного внутреннего давления, например, при проектировании напорных высоконапорных элементов конструкций в горной и нефтедобывающей промышленности и др.

Вывод уравнений равновесия и постановка краевой осесимметричной задачи НДС тора.

Рассмотрим тороидальную оболочку, представленную на рис. 1

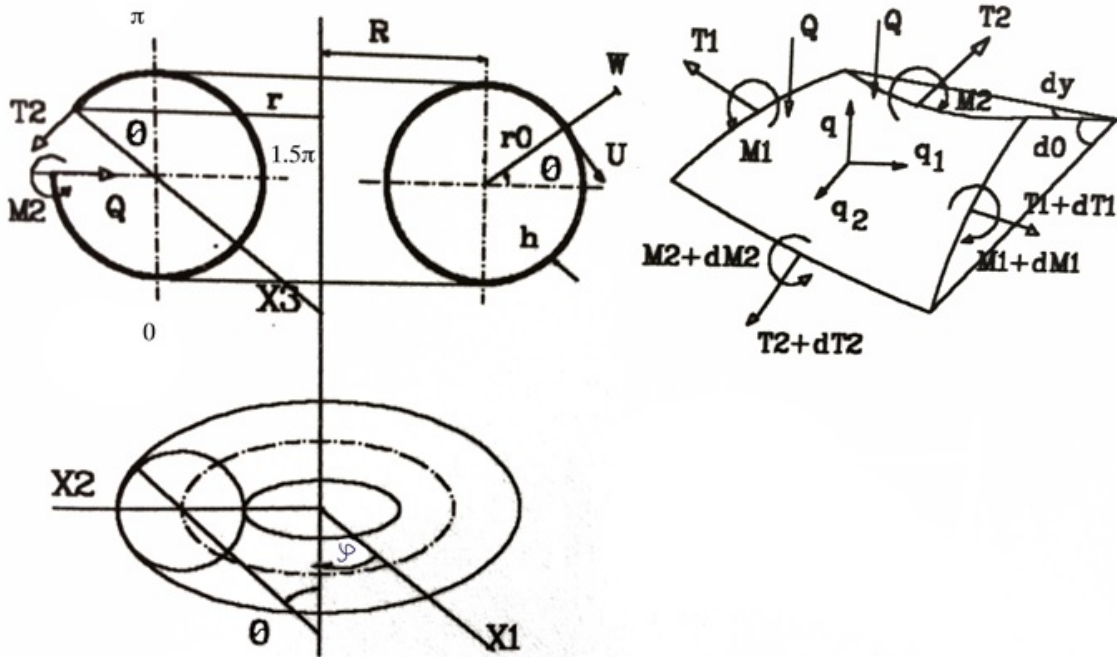


Рис. 1.

Введем декартову систему координат X_1, X_2, X_3 , а также тороидальную систему координат r, θ, φ .

Запишем параметрические уравнения:

$$r = R + r_0 \cos \theta, \quad X_1 = r \cos \varphi, \quad X_2 = r \sin \varphi, \quad X_3 = r_0 \sin \theta. \quad (1)$$

Параметры Ляме H_1, H_2 вычислим по формулам,

$$\begin{aligned}
H_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_3}{\partial \theta}\right)^2}, & H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_3}{\partial \varphi}\right)^2}, \\
\frac{\partial X_1}{\partial \theta} &= -r_0 \sin \theta \cos \varphi, & \frac{\partial X_2}{\partial \theta} &= -r_0 \sin \theta \sin \varphi, & \frac{\partial X_3}{\partial \theta} &= r_0 \cos \theta, \\
\frac{\partial X_1}{\partial \varphi} &= -(R + r_0 \cos \theta) \sin \varphi, & \frac{\partial X_2}{\partial \varphi} &= (R + r_0 \cos \theta) \cos \varphi, & \frac{\partial X_3}{\partial \varphi} &= 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Откуда, получим выражения для H_1 и H_2 :

$$H_1 = r_0, \quad H_2 = r. \tag{3}$$

Замкнутость оболочки по координате φ , независимость коэффициентов дифференциальных уравнений равновесия для оболочек вращения от угла φ , периодичность искомых и заданных величин позволяют применить метод разделения переменных и рассматривать соотношения теории тонких оболочек в ОДУ.

Запишем основные соотношения моментной теории оболочек в ОДУ для случая осесимметричного напряженно-деформированного состояния [1], [2].

$$\begin{aligned}
\nu &= -R_0^{-1} \left(\frac{d\omega}{d\theta} - u \right) - \text{угол поворота нормали}; \\
\varepsilon_\theta &= R_0^{-1} \left(\frac{du}{d\theta} + \omega \right) - \text{окружная деформация}; \\
\varepsilon_\varphi &= (R_\varphi \sin \theta)^{-1} (u \cos \theta + \omega \sin \theta) - \text{меридиональная деформация}; \\
\kappa_\varphi &= - \left(\frac{\cos \theta}{R_\theta R_\varphi \sin \theta} \right) \left(\frac{d\omega}{d\theta} - u \right) - \text{меридиональный изгиб}; \\
\kappa_\theta &= -R_\theta^{-1} \frac{d\omega}{d\theta} - \text{окружной изгиб}; \\
R_0 &= H_1, \quad R_\varphi = \frac{H_2}{\sin \theta} - \text{радиусы кривизны}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Считая положительным направлением отсчета угла θ от оси X примем величину $r = R + r_0 \sin \theta$. Для упрощения выкладок, примем $r_0=1$. Ввиду того, что оболочка замкнута по координате φ , разрешающую систему уравнений построим исходя из координаты θ . Изменению координаты θ соответствует изменение дуги $S = r\theta$, тогда

$$r = R + \sin \theta, \quad dS = d\theta. \tag{5}$$

С учетом введенных обозначений, перепишем следующие величины, входящие в (4)

$$\begin{aligned}
\nu &= \left(\frac{d\omega}{ds} + u \right), & \varepsilon_\theta &= \left(\frac{du}{ds} + \omega \right), & \varepsilon_\varphi &= r^{-1} (u \cos \theta + \omega \sin \theta), \\
\kappa_\varphi &= \left(\frac{\cos \theta}{\nu r} \right), & \kappa_\theta &= -\frac{d\nu}{ds}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Повороты краев оболочки, совпадающих соответственно с координатами θ и φ характеризуются углами поворота нормали ν и ψ , и выражаются через перемещения u, v, ω . Усилия возникающие в произвольном элементе оболочки, характеризуются величинами $T_1, T_2, M_1, M_2, Q, T, H$. Положительные направления усилий показаны на рис.1

Уравнения равновесия произвольного элемента оболочки:

$$\begin{aligned}
&\frac{dR_\varphi \sin \theta T_2}{d\theta} + kR_\theta T - R_\theta \cos \theta T_1 + \frac{dR_\varphi \sin \theta M_2}{R_\theta d\theta} + 2kH - \cos \theta M_1 = -R_\theta R_\varphi \sin \theta q_2, \\
&-kR_\theta T_1 + \frac{(R_\varphi \sin \theta)^{-1} d(R_\varphi \sin \theta)^2}{d\theta} T + \\
&+ R_\varphi^{-1} \left(-kR_\theta M_1 + \frac{2R_\varphi dH}{d\theta} + 2 \cos \theta (R_\theta + R_\varphi) H \right) = -R_\varphi R_\theta \sin \theta q_1, \\
&\frac{T_1}{R_\varphi} + \frac{T_2}{R_\theta} - (R_\varphi R_\theta \sin \theta)^{-1} \left\{ d/d\theta \left[\frac{dR_\varphi \sin \theta M_2}{R_\theta d\theta} + kH - \cos \theta M_1 \right] + \right. \\
&\left. + (R_\varphi \sin \theta)^{-1} \left[-k^2 R_\theta M_1 + (k/R_\varphi \sin \theta) d(R_\varphi \sin \theta)^2 H/d\theta \right] \right\} = q_3.
\end{aligned} \tag{7}$$

Для осесимметричной задачи НДС можно положить

$$v = 0, \quad T = 0, \quad H = 0, \quad \psi = 0, \quad k = 0. \quad (8)$$

Уравнения (7) и упрощения (8) с учетом (5) для тороидальной оболочки дают следующую систему уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{dT_2}{ds} - r_0 \cos \theta T_1 + \frac{dM_2 r}{ds} - \cos \theta M_1 &= 0, \\ \frac{T_2}{r} + \frac{T_1 \sin \theta}{r} - r^{-1} \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{dM_2 r}{ds} - \cos \theta M_1 \right] \right\} &= q_3, \\ r^{-1} \left\{ \frac{dM_2 r}{ds} - \cos \theta M_1 \right\} &= Q. \end{aligned} \quad (9)$$

Из последнего уравнения (9) выразим величину M_2 :

$$\frac{dM_2 r}{ds} = Qr + M_1 \cos \theta. \quad (10)$$

Тогда во втором уравнении (9) получим

$$\frac{T_2}{r_0} + \frac{T_1 \sin \theta}{r} - r^{-1} \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{dM_2 r}{ds} - \cos \theta M_1 \right] \right\} = q_3,$$

или

$$T_2 + \frac{T_1 \sin \theta}{r} - \frac{r^{-1} dQr}{ds} = q_3,$$

откуда получим

$$\frac{dQr}{ds} = T_2 r + T_1 \sin \theta - q_3 r. \quad (11)$$

Из первого уравнения системы (9) имеем:

$$\frac{dM_2 r}{ds} = M_1 \cos \theta + r_0 T_1 \cos \theta - q_3 r,$$

тогда с учетом (10) можем записать

$$M_1 \cos \theta + r_0 T_1 \cos \theta - \frac{dT_2 r}{ds} = Qr + M_1 \cos \theta,$$

или

$$\frac{dT_2 r}{ds} = T_1 \cos \theta - Qr. \quad (12)$$

Для определения остальных неизвестных запишем уравнения связи между усилиями и деформациями, устанавливаемыми соотношениями обобщенного закона Гука. В указанных соотношениях не будем учитывать лишь компоненты температурных деформаций. Согласно линейной теории тонких оболочек, имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} T_1 &= Eh / (1 - \mu^2) [\varepsilon_\varphi + \mu \varepsilon_\theta], & T_2 &= Eh / (1 - \mu^2) [\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_\varphi], \\ M_1 &= D (\kappa_\varphi + \mu \kappa_\theta), & M_2 &= D (\kappa_\theta + \mu \kappa_\varphi), & D &= Eh^3 / (12 [1 - \mu^2]). \end{aligned} \quad (13)$$

Из этих соотношений можно получить:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta &= 1/Eh(T_2 - \mu T_1), & \varepsilon_\varphi &= 1/Eh(T_1 - \mu T_2), \\ \kappa_\theta &= 12/Eh^3(M_2 - \mu M_1), & \kappa_\varphi &= 12/Eh^3(M_1 - \mu M_2).\end{aligned}$$

Используя соотношения для κ , а также учитывая (6) можем записать:

$$M_1 - \mu M_2 = Eh^3 \cos \theta \nu / r.$$

Аналогично, с учетом (6) можем записать

$$M_2 - M_1 = -Eh^3 d\nu/ds, \quad (14)$$

$$M_1 = -Eh^3/12 \cdot \nu \cos \theta / r + \mu M_2 r / r. \quad (15)$$

Заменяя в соотношении (14) M_1 его значением из (15) получим следующее равенство,

$$d\nu/ds = -\nu \mu \cos \theta / r + M_2 r / Dr. \quad (16)$$

Снова используя соотношения (6) запишем выражения для производных перемещений u , ω :

$$d\omega/ds = u - \nu, \quad du/ds = \varepsilon_\theta - \omega. \quad (17)$$

Из уравнений (1.14) выразим величину $\mu T_1 : \mu T_1 = T_2 - \varepsilon_\theta Eh$; $\mu T_1 = \mu \varepsilon_\varphi Eh + \mu T_2$. Откуда, учитывая ε_φ из (1.7) получим:

$$\varepsilon_\varphi = (u \cos \theta + \omega \sin \theta) / r, \quad du/ds = T_2 (1 - \mu^2) / Eh - \mu / r (u \cos \theta + \omega \sin \theta). \quad (18)$$

Для определения последнего неизвестного задачи, необходимо выразить значение усилия T_1 через остальные неизвестные задачи:

$$T_1 = Eh\varepsilon_\varphi + \mu T_2, \quad T_1 = 1/r (u \cos \theta + \omega \sin \theta) + \mu T_2. \quad (19)$$

Таким образом, получилась замкнутая относительно переменных задачи система шести дифференциальных уравнений – (10) – (12), (16) – (18) и двух уравнений связи для определения величин M_1 , T_1 соответственно – (1.16) и (1.20). Для постановки краевых условий, рассмотрим внешнюю и внутреннюю образующие тора. Угол θ отсчитывается от π до 2π (внутренняя образующая тора) и от 0 до π (внешняя образующая тора). Точки $0(2\pi)$, π считаются «полюсными» точками тора. Закрепив оболочку в этих точках от перемещений по оси ординат, можем сформулировать следующие геометрические краевые условия:

$$Q = 0, \quad \nu = 0, \quad u = 0. \quad (20)$$

В дальнейшем, для удобства вычислений, произведем замену переменных задачи следующим образом: заменим произведение окружного усилия T_2 , окружного момента M_2 , перерезывающей силы Q на радиус параллельного круга r , переменными X_1, X_2, X_3 соответственно; величины угла поворота нормали ν , нормального перемещения ω , касательного перемещения u , соответственно на X_4, X_5, X_6 . Теперь можно сформулировать постановку задачи для гладкой круговой тороидальной оболочки, в случае ее нагружения равномерным внутренним давлением, в виде уравнений (10) – (18) с

краевыми условиями (20). Вектор напряженно-деформированного состояния в любой точке оболочки $\{X\}$, имеет следующие компоненты

$$X_1 = T_2 r, \quad X_2 = M_2 r, \quad X_3 = Q r, \quad X_4 = \nu, \quad X_5 = \omega, \quad X_6 = u.$$

Тогда в матричном виде система разрешающих уравнений запишется так,

$$dX/d\theta = [A(\theta)]\{X\} + F(\theta), \quad \text{при} \quad \theta = 0(2\pi), \quad \pi, \quad X_3 = X_4 = X_5 = 0. \quad (21)$$

Выпишем коэффициенты матрицы A краевой задачи (21)

$$\begin{array}{cccccc} \mu \cos \theta / r & 0 & -1 & 0 & Eh \cos \theta \sin \theta / r & Eh \cos^2 \theta / r \\ 0 & -\mu \cos \theta / r & 1 & Eh^3 \cos^2 \theta & 0 & 0 \\ (r + \mu \cos \theta) / r & 0 & 0 & 0 & Eh \sin^2 \theta / r & Eh \sin \theta \cos \theta / r \\ 0 & 1 / Dr & 0 & -\mu \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ (1 - \mu^2) / Ehr & 0 & 0 & 0 & -\mu \sin \theta / r & -\mu \cos \theta / r \end{array}$$

Компоненты вектора $F^T = \{0, 0, -qr, 0, 0, 0\}$.

Численное решение.

Краевая задача (21) неразрешима аналитически, но ее решение может быть получено численным методом. На практике, при расчёте гладких оболочек, хорошо зарекомендовал себя метод ортогональной прогонки, предложенный Н. Годуновым. Он основан на решении встречных задач Коши, с последующим решением СЛАУ модифицированным методом Гаусса. Метод позволяет минимизировать ошибки округления, так как позволяет использовать модификацию путём ортогонализации и ортонормирования решения в выбранных, либо во всех точках интервала интегрирования. Однако, вопрос сходимости метода полностью зависит от числа выбранных шагов и не может управляться автоматически. С другой стороны, свойством автоматического контроля сходимости обладает метод отложенной коррекции, построенный на основе метода конечных разностей с последующим решением итерационным методом Ньютона. Метод был предложен М. Перейра в работе [4], существует в исходных кодах для ранних диалектов языка программирования FORTRAN, а также адаптирован в математической библиотеке NAG и входит в ее состав (пробную версию можно получить на сайте www.nag.com). В этом случае, сходимость метода отложенной коррекции определяется сходимостью метода Ньютона, с автоматическим изменением числа шагов сетки и контролем соответствующей погрешности.

На основе безмоментной теории, Феплем [1] было получено выражения для окружного усилия в торе T_2 , при соблюдении соотношения $R = (2 - 3)r_0$, оно хорошо подтверждается на практике,

$$T_2 = qr_0 [1 + 0.5k \sin \theta] / (1 + k \sin \theta), \quad k = r_0 / R. \quad (22)$$

Величину (2.1) будем использовать в качестве тестовой, приняв нагрузку $q = 1$ мПа, $r_0 = 1$. Ниже приведены результаты расчёта краевой задачи, для определения окружного усилия T_2 методом отложенной коррекции, для различных значений R , толщины оболочки $h = 0.0012$ м. Параметры численного решения выбирались соответствующим диапазоном применимости безмоментного решения Фепля. В частности,

для одинаковых значений величины R . Точность, принятая для метода отложенной коррекции, $\text{TOL}=1 \times 10^{-4}$. Решение Фепля показано прерывным синим.

Внешняя образующая тора, $\theta \in [0, \pi]$, $R = 2$ м.



Рис. 2.

Внутренняя образующая тора: $\theta \in [\pi, 2\pi]$, $R = 2$ м.



Рис. 3.

Для случая $R = 3$ м, принята аналогичная требуемая точность, $\text{TOL}=1 \times 10^{-4}$.

Внешняя образующая тора, $\theta \in [0, \pi]$, $R = 3$ м.

Внутренняя образующая тора: $\theta \in [\pi, 2\pi]$, $R = 3$ м.

Исходя из графиков распределения окружного усилия, при расчете НДС тора, можно считать его безмоментным, исключая окрестность полюсных точек. В полюсных точках, НДС тора незначительно отличается от безмоментного, хотя усилия в них не превышают максимальных значений, определяемых по формуле (22) на практике.

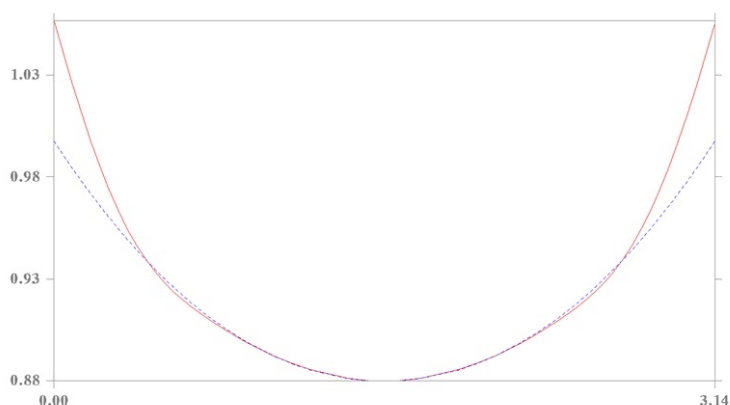


Рис. 4.

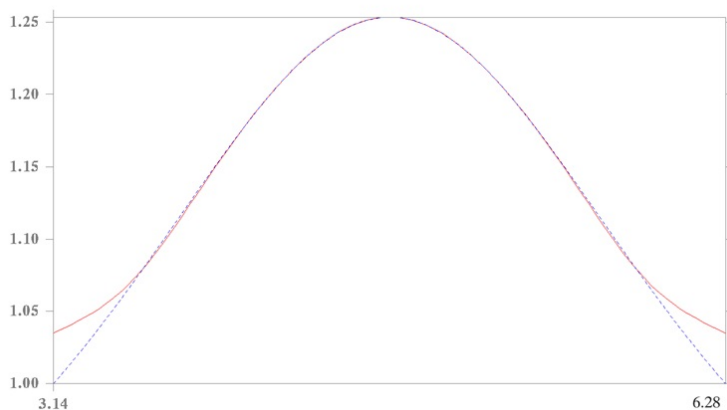


Рис. 5.

Выводы Как видно, моментная постановка и последующее численное решение дают несколько завышенное значение окружного усилия T_2 в полюсах тора, по сравнению с безмоментной постановкой. Поэтому НДС гладкого тора нельзя считать безмоментным. Однако, в моментной постановке, значения окружных усилий существенно сказываются только в полюсных точках тора. При этом, для значения $R = 3$ в формуле (22) получаемое решение, в целом, удовлетворительно согласуется с решением Фепля. Сходимость к решению Фепля, в этом случае, оценивается среднеквадратичной ошибкой

$RMS = 2.3 \times 10^{-3}$ для внутренней образующей тора, $RMS = 1.4 \times 10^{-3}$ для внешней. Максимальные усилия, возникающие от действия равномерного внутреннего давления, соответствуют решению Фепля, и наблюдаются на внутренней образующей тора. Существует соблазн, заключающийся в использовании решения в виде «симметрии» верхней и нижней половин оболочки, при котором необходимо решать всего одну краевую задачу: либо для верхней, либо для нижней половины тора. Однако, как показал

анализ литературы, его применение на практике оказывается затруднительным, так как наталкивается на трудности вычислительного характера. Численное решение хорошо согласуется с решением Фепля только в начале интервала интегрирования. При дальнейшем увеличении интервала интегрирования, в окрестности полюсных точек, приходится значительно измельчать шаг, что приводит к неоправданному росту численного решения. Такой же результат дает и метод отложенной коррекции. Поэтому численное решение в «симметричной» постановке, скорее всего, обусловлено поведением самого решения, в окрестности полюсных точек тора.

Таким образом, определение НДС тора путем решения двух краевых задач (несимметричная постановка) является наиболее приемлемым.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бидерман В. Л. Статика тонкостенных конструкций. Библиотека расчетчика. Москва: Машиностроение, 1977. 319 с.

[2] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. Т. 1. Москва: Машиностроение, 1978. 831 с.

[3] Пухлий В. А. Об одной краевой задаче для упругого изгиба трубопроводов гидротехнических сооружений и АЭС // Теория Механизмов и Машин. 2014. Т. 12. №2(24).

[4] H. В. Keller, V. Pereyra. Difference methods and deferred correction for ordinary boundary value problems. SIAM. 1979. V. 16. No. 2.

[5] NAG Library Manual, The Numerical Algorithms Group Ltd. Oxford. UK 2012.

M. S. Maxutov, V. A. Kadyrov

THE MOMENT-LESS STATE OF TOROIDAL SHELL BY THE INTERNAL PRESSURE DEFORMING

Moscow State University of Humanities and Economics, Moscow, Russia

Abstract. The problem of determining the stress-strain state of a toroidal shell, loaded with uniform internal pressure, and determined by the membrane theory is refined. A system of ordinary differential equations describing the stress-strain state of a torus based on the moment theory of shells is proposed. A numerical solution of the boundary value problem of the stress-strain state of the torus is written out, its analysis is carried out.

Keywords: stress-strain state, forces, displacements, moment theory of shells, torus, sweep method, delayed correction method.

REFERENCES

- [1] Biderman V. L. Statika tonkostennykh konstrukcij. Biblioteka raschetchika. Moskva: Mashinostroenie, 1977. 319 s. (in Russian)
- [2] Prochnost', ustojchivost', kolebaniya. Spravochnik. T. 1. Moskva: Mashinostroenie, 1978. 831 s. (in Russian)
- [3] Puhlij V. A. Ob odnoj kraevoj zadache dlya uprugogo izgiba truboprovodov gidrotekhnicheskikh sooruzhenij i AEHS // Teoriya Mekhanizmov i Mashin. 2014. T. 12. №2(24). (in Russian)
- [4] H. B. Keller, V. Pereyra. Difference methods and deferred correction for ordinary boundary value problems. SIAM. 1979. V. 16. No. 2.
- [5] NAG Library Manual, The Numerical Algorithms Group Ltd. Oxford. UK 2012.

Maksyutov Malik Sabitovich,
e-mail: mmaxutov@icloud.com, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, Moscow State University of Humanities and Economics, Moscow, Russia.
Kadimov Vagid Ahmedovich,
e-mail: vkadymov@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow State University of Humanities and Economics, Moscow, Russia.

О. П. Ткаченко

РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗОГНУТОГО ТРУБОПРОВОДА

Вычислительный центр ДВО РАН, г. Хабаровск

Аннотация. Выведены разрешающие уравнения для математической модели напряженно-деформированного состояния трубопровода с криволинейным профилем. Эта модель основана на теории моментных оболочек Власова. Предложен метод приближенного решения уравнений математической модели на основе последовательного асимптотического разложения неизвестных функций в ряды по малому параметру и представления коэффициентов разложений в виде рядов Фурье. Посредством этих методов была получена одномерная постановка задачи. Приведены численные ограничения на параметры в уравнениях оболочки, при которых возможно такое преобразование задачи. Получены одномерные уравнения математической модели трубопровода в двух различных формулировках. Найдены условия, при которых математическая модель имеет наиболее простой вид в рамках поставленной задачи.

Ключевые слова: изогнутый трубопровод, теория оболочек, гидроупругость, асимптотические ряды

УДК: 539.384.6+517.955.8

Введение. Цельнометаллические изогнутые трубы часто встречаются в постановках как прикладных, так и фундаментальных задач механики. Например, в [1] изучена динамика подводного изогнутого трубопровода под влиянием внутреннего потока жидкости и натяжения верхнего конца трубы. Как правило, длинные трубы моделируются в рамках теории стержней. Современная математическая модель с учетом нелинейного растяжения построена и изучена в [2].

Очевидно, что для повышения детализации описания напряженно-деформированного состояния (НДС) в изогнутой трубе можно воспользоваться математической моделью трубы как оболочки. Наиболее близкая модель в данном случае – моментная тороидальная оболочка, описанная В.В. Новожиловым [3]. Обобщенное решение задачи определения перемещений в этой оболочке при симметричной и несимметричной нагрузке получено в [4]. Решения, приведенные в [3, 4], основаны на теории функций комплексного переменного и используют симметрию тороидальной оболочки.

© Ткаченко О. П., 2018

Ткаченко Олег Павлович

e-mail: olegt1964@gmail.com, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Вычислительный центр ДВО РАН, г. Хабаровск.

Поступила 10.11.2017

Обобщенный подход, основанный на разложениях в ряды Фурье, представлен в [5]. Авторы [5] ограничились анализом зависимости продольного напряжения от меридионального угла, доказав хорошую согласованность теоретических и экспериментальных результатов.

Нами была построена математическая модель подземного изогнутого трубопровода как полубезмоментной оболочки, выполнен ее асимптотический и численный анализ [6]. Позднее, на основе фундаментального труда [7], построена математическая модель трубопровода как моментной оболочки с учетом специальной геометрии изогнутой трубы [8].

Здесь для математической модели [8] выводятся разрешающие уравнения. Выполняется анализ этих уравнений, в результате которого получены две одномерные формы разрешающих уравнений. Устанавливаются условия применимости полученных математических моделей. Исследуется связь двух формулировок одномерных уравнений и условия их взаимного перехода.

1. Механическая модель и предположения. Ниже суммируются основные теоретические положения, изложенные в нескольких статьях, в частности в [6, 8]. Сформулирована постановка задачи механики трубопровода и описана геометрия механической системы.

Рассматривается задача расчета НДС трубопровода. Пусть металлическая протяженная труба имеет изгиб осевой линии, такой, что осевая линия трубы Γ является плоской кривой: $\Gamma = \{x, y | x = x_0(s), y = y_0(s)\}$. Неизвестными являются напряжения и деформации трубы под действием заданного давления внутреннего потока жидкости и влияния внешней среды.

Обозначим геометрические параметры: s – длина дуги вдоль осевой линии; θ, R – полярные координаты в поперечном сечении; ρ_0, κ – радиус кривизны и кривизна осевой линии, соответственно; R_0, h – радиус и толщина стенки трубы; A, B – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности трубы; k_1, k_2 – главные кривизны срединной поверхности.

Введем системы координат: глобальная декартова система отсчета $(Oxyz)$, адаптированная к трубе криволинейная система координат $(Os\theta R)$. Функции A, B, k_1, k_2 для этих систем координат найдены в [6].

Также обозначим: u, v, w – компоненты вектора перемещений вдоль s, θ, R , соответственно. Соответствующие безразмерные переменные и неизвестные:

$\zeta = s/\ell, r = R/R_0, \theta = \theta; u' = u/R_0, v' = v/R_0, w' = w/R_0$. Здесь ℓ – характерный продольный масштаб.

В рамках изучаемых задач малы параметры:

$$\begin{cases} h^* = h/R_0 \ll 1, \\ \lambda = R_0 \max |\kappa| \ll 1. \end{cases} \quad (1)$$

В книгах [3, 9] указаны ограничения на величину h^* , от $h^* \leq 1/20$ до $h^* \leq 1/5$, в зависимости от условий задачи. Оценки погрешности для различных h^* выполнены в [10]. На основе выводов, сделанных в [7], предположим, что

$$h^* \leq 0.05.$$

Для малого параметра кривизны предположим:

$$\lambda \leq 0.01.$$

2. Разрешающие уравнения математической модели. Математическая модель НДС стенки трубы построена в [8]. Система уравнений модели выведена на основе метода построения теории оболочек, предложенного в [7], и главными неизвестными в ней являются первый инвариант тензора деформаций и линейное кручение стенки.

В уравнения модели [8] подставим выражения для искомых функций через перемещения стенки оболочки во введенных выше криволинейных координатах, и получим систему разрешающих уравнений в перемещениях:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial s} \right) + \frac{1}{R_0} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\left(k_1 + \frac{1}{R_0} \right) w \right) + \frac{h^2}{12} \left(k_1 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 1/R_0 \right) \frac{\partial}{\partial s} \left[-\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{A^3} \frac{\partial A}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{1}{AR_0^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial k_1}{\partial s} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_1}{\partial \theta} \frac{v}{R_0} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(k_1^2 + \frac{1}{R_0^2} \right) w \right] + \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{R_0^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - k_1 \left(\frac{\partial k_1}{\partial s} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_1}{\partial \theta} \frac{v}{R_0} \right) + \frac{k_1}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial s} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{k_1}{AR_0^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \left(k_1^3 + \frac{1}{R_0^3} \right) w \right] \right\} - \frac{1-\nu}{R_0} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{u}{AR_0} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{h^2}{12} k_1 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\left(\frac{1}{R_0} - k_1 \right) \left[\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{u}{AR_0} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right] \right) + \right. \\
& \left. + \frac{h^2}{24} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k_1 R_0 - 1}{R_0} \left[\frac{1}{R_0^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{k_1}{A} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{u}{AR_0^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{1}{AR_0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] \right) \right\} + \\
& \left. + (1-\nu) \left(\frac{k_1}{R_0} u - \frac{k_2}{A} \frac{\partial w}{\partial s} \right) = -\frac{1-\nu^2}{Eh} X; \tag{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{AR_0} \frac{\partial A}{\partial \theta} + \left(k_1 + \frac{1}{R_0} \right) w \right) + \frac{h^2}{12} \left(k_1 + \frac{1}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{A^3} \frac{\partial A}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{1}{AR_0^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial k_1}{\partial s} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_1}{\partial \theta} \frac{v}{R_0} - \left(k_1^2 + \frac{1}{R_0^2} \right) w \right] + \right. \\
& \left. + \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{R_0^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - k_1 \left(\frac{\partial k_1}{\partial s} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_1}{\partial \theta} \frac{v}{R_0} \right) + k_1 \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial s} \right) + \frac{1}{AR_0^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(k_1^3 + \frac{1}{R_0^3} \right) w \right] \right\} + \frac{1-\nu}{A} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{u}{AR_0} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{h^2}{12R_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(\left(\frac{1}{R_0} - k_1 \right) \left[\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{u}{AR_0} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right] \right) + \right. \\
& \left. + \frac{h^2}{24} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{k_1 R_0 - 1}{R_0} \left(\frac{1}{R_0^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{k_1}{A} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{u}{AR_0^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{1}{AR_0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right) \right] \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \nu) \frac{k_1}{R_0} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = - \frac{1 - \nu^2}{Eh} Y, \quad (3) \\
& - \left(k_1 + \frac{1}{R_0} \right) \cdot \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{AR_0} \frac{\partial A}{\partial \theta} + \left(k_1 + \frac{1}{R_0} \right) w \right) - \\
& - \frac{h^2}{6} \left\{ \frac{1}{2} \left(k_1 + \frac{1}{R_0} \right) \left[\frac{1}{R_0^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - k_1 \left(\frac{\partial k_1}{\partial s} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_1}{\partial \theta} \frac{v}{B} \right) + k_1 \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial s} \right) + \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{AR_0^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] + \left(k_1^3 + \frac{1}{R_0^3} \right) w \right] + \frac{k_1}{R_0} \left[\frac{1}{A^3} \frac{\partial A}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \right. \\
& - \left. \frac{1}{AR_0^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial k_1}{\partial s} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_1}{\partial \theta} \frac{v}{R_0} - \left(k_1^2 + \frac{1}{R_0^2} \right) w \right] \left. \right\} + \frac{h^2}{12} \frac{1}{AR_0} \times \\
& \times \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{AR_0} \frac{\partial A}{\partial \theta} + \left(k_1 + \frac{1}{R_0} \right) w \right) \right] + \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{R_0}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left[- \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{A^3} \frac{\partial A}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{1}{AR_0^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial k_1}{\partial s} \frac{u}{A} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\partial k_1}{\partial \theta} \frac{v}{R_0} - \left(k_1^2 + \frac{1}{R_0^2} \right) w \right] \right] - (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{k_1}{A} \frac{\partial w}{\partial s} \right) - (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{k_1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial s} - \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{u}{AR_0} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{Ak_1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{AR_0} \frac{\partial A}{\partial \theta} + \left(k_1 + \frac{1}{R_0} \right) w \right) + \right. \\
& + \frac{A}{R_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(- \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{A^3} \frac{\partial A}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{1}{AR_0^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial k_1}{\partial s} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_1}{\partial \theta} \frac{v}{R_0} - \right. \\
& - \left. \left. \left(k_1^2 + \frac{1}{R_0^2} \right) w \right) \right] - \frac{1 - \nu}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \theta} Ak_1 \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1 - \nu}{2R_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial s} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{u}{AR_0} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) \left. \right\} + \\
& + \frac{h^2 (1 - \nu)}{12} \frac{1}{AR_0} \left[\frac{\partial}{\partial s} (k_1^2 u) + \frac{\partial}{\partial \theta} (AKk_2 v) \right] + \\
& + \frac{1 - \nu}{AR_0} \left[2Ak_1 w + \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \theta} (Ak_1 v) \right] = - \frac{1 - \nu^2}{Eh} Z. \quad (4)
\end{aligned}$$

В выбранной криволинейной системе координат выполнены соотношения:

$$A = 1 + R_0 \kappa \sin \theta, \quad B = R_0; \quad k_1 = \frac{\kappa \sin \theta}{1 + \kappa R_0 \sin \theta}, \quad k_2 = \frac{1}{R_0}. \quad (5)$$

Система уравнений (2)-(5), дополненная выражениями для плотностей внешних сил X , Y , Z (см. [6, 8]), является замкнутой относительно искомых функций системой уравнений.

Здесь обозначено: E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона материала трубы;

$$E^* = E/(1 - \nu^2), \quad \varepsilon^2 = h^2/12, \quad \alpha = R_0/\ell, \quad f = \kappa/\max|\kappa|.$$

После перехода к безразмерным переменным u' , v' , w' , пренебрежения величиной h^{*2} по сравнению с единицей, и отбрасывания слагаемых второго порядка малости по λ были получены упрощенные разрешающие уравнения для трубопровода как моментной оболочки.

3. Метод редукции уравнений оболочки к одномерной постановке задачи. Безразмерные функции решений (2)-(4) были разложены в ряды по малому параметру:

$$u' = u^0 + \lambda u^1 + O(\lambda^2), v' = v^0 + \lambda v^1 + O(\lambda^2), w' = w^0 + \lambda w^1 + O(\lambda^2).$$

Затем каждая неизвестная функция f , ввиду ее периодичности по угловой координате [3], была представлена в виде ряда Фурье:

$$f = f_0 + f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta + \dots$$

В итоге приближенное решение уравнений (3)-(5) имеет вид:

$$\begin{aligned} u'(\zeta, \theta) &= u_0^0(\zeta) + u_1^0(\zeta) \sin \theta + u_2^0(\zeta) \cos \theta + \lambda u_0^1(\zeta) + \lambda u_1^1(\zeta) \sin \theta + \lambda u_2^1(\zeta) \cos \theta + O(\lambda^2), \\ v'(\zeta, \theta) &= v_0^0(\zeta) + v_1^0(\zeta) \sin \theta + v_2^0(\zeta) \cos \theta + \\ &+ \lambda v_0^1(\zeta) + \lambda v_1^1(\zeta) \sin \theta + \lambda v_2^1(\zeta) \cos \theta + O(\lambda^2), \end{aligned} \quad (6)$$

$$w'(\zeta, \theta) = w_0^0(\zeta) + w_1^0(\zeta) \sin \theta + w_2^0(\zeta) \cos \theta + \lambda w_0^1(\zeta) + \lambda w_1^1(\zeta) \sin \theta + \lambda w_2^1(\zeta) \cos \theta + O(\lambda^2).$$

В таком же виде представлены X , Y , Z .

При математическом моделировании трубы как полубезмоментной оболочки ранее [11] нами использовались представления для решений:

$$\begin{aligned} u'(\zeta, \theta) &= u_0^0(\zeta) + \lambda u_1^1(\zeta) \sin \theta + \lambda u_2^1(\zeta) \cos \theta + O(\lambda^2), \\ v'(\zeta, \theta) &= v_0^0(\zeta) + \lambda v_1^1(\zeta) \sin \theta + \lambda v_2^1(\zeta) \cos \theta + O(\lambda^2), \\ w'(\zeta, \theta) &= w_0^0(\zeta) + \lambda w_1^1(\zeta) \sin \theta + \lambda w_2^1(\zeta) \cos \theta + O(\lambda^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Ниже для общей моментной оболочки получены редуцированные одномерные формулировки уравнений как для представления (6), так и для (7), и найдены условия, при которых допустимо представление (7), которое сильнее упрощает задачу.

4. Редуцированная форма уравнений математической модели. В результате подстановки (6) получим систему из восемнадцати дифференциальных уравнений для восемнадцати неизвестных, используя стандартный метод приравнивания коэффициентов. Нижним индексом ζ обозначено дифференцирование. Уравнения сгруппированы по порядку малого параметра.

Нулевое по λ приближение:

$$\alpha^2 u_{0\zeta\zeta}^0 + \alpha \nu w_{0\zeta}^0 - \varepsilon^2 \alpha^3 w_{0\zeta\zeta\zeta}^0 + X_0^0 / E^* h^* = 0;$$

$$\frac{1-\nu}{2} \alpha^2 v_{0\zeta\zeta}^0 + Y_0^0 / E^* h^* = 0; \quad (8)$$

$$w_0^0 + \nu \alpha u_0^0 + \varepsilon^2 [\alpha^4 w_{0\zeta\zeta\zeta\zeta}^0 - \alpha^3 u_{0\zeta\zeta\zeta}^0] - Z_0^0 / E^* h^* = 0;$$

$\lambda^0 \sin \theta$:

$$\begin{aligned} \alpha^2 u_{1\zeta\zeta}^0 + \alpha \nu w_{1\zeta}^0 - \frac{1+\nu}{2} \alpha v_{2\zeta}^0 - \frac{1-\nu}{2} u_1^0 - \varepsilon^2 \alpha^3 w_{1\zeta\zeta\zeta}^0 + X_1^0/E^* h^* &= 0, \\ \frac{1-\nu}{2} \alpha^2 v_{1\zeta\zeta}^0 - v_1^0 - \frac{1+\nu}{2} \alpha u_{2\zeta}^0 - w_2^0 + \varepsilon^2 \alpha^2 \frac{3-\nu}{2} w_{2\zeta\zeta}^0 + Y_1^0/E^* h^* &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$w_1^0 - v_2^0 + \nu \alpha u_{1\zeta}^0 + \varepsilon^2 \left[\alpha^4 w_{1\zeta\zeta\zeta\zeta}^0 - 2\alpha^2 w_{1\zeta\zeta}^0 - \alpha^2 \frac{\nu-3}{2} v_{2\zeta\zeta}^0 - \alpha^3 u_{1\zeta\zeta\zeta}^0 \right] - Z_1^0/E^* h^* = 0;$$

$\lambda^0 \cos \theta$:

$$\begin{aligned} \alpha^2 u_{2\zeta\zeta}^0 + \alpha \nu w_{2\zeta}^0 + \frac{1+\nu}{2} \alpha v_{1\zeta}^0 - \frac{1-\nu}{2} u_2^0 - \varepsilon^2 \alpha^3 w_{2\zeta\zeta\zeta}^0 + X_2^0/E^* h^* &= 0, \\ \frac{1-\nu}{2} \alpha^2 v_{2\zeta\zeta}^0 - v_2^0 + \frac{1+\nu}{2} \alpha u_{1\zeta}^0 + w_1^0 - \varepsilon^2 \alpha^2 \frac{3-\nu}{2} w_{1\zeta\zeta}^0 + Y_2^0/E^* h^* &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$w_2^0 + v_1^0 + \nu \alpha u_{2\zeta}^0 + \varepsilon^2 \left[\alpha^4 w_{2\zeta\zeta\zeta\zeta}^0 - 2\alpha^2 w_{2\zeta\zeta}^0 + \alpha^2 \frac{\nu-3}{2} v_{1\zeta\zeta}^0 - \alpha^3 u_{2\zeta\zeta\zeta}^0 \right] - Z_2^0/E^* h^* = 0;$$

Первое по λ приближение:

$\lambda \cdot 1$:

$$\begin{aligned} \alpha^2 u_{0\zeta\zeta}^1 + \alpha \nu w_{0\zeta}^1 - \varepsilon^2 \alpha^3 w_{0\zeta\zeta\zeta}^1 - \alpha^2 f u_{1\zeta\zeta}^0 - \frac{\alpha^2}{2} f_{\zeta} u_{1\zeta}^0 + \\ + \frac{\alpha}{2} f_{\zeta} (v_2^0 + w_1^0) + \frac{\alpha}{2} [(1-\nu) f + \varepsilon^2 \alpha^2 f_{\zeta\zeta}] w_{1\zeta}^0 + ((1-\nu) f + \varepsilon^2 \alpha^2 f_{\zeta\zeta}) \frac{1}{2} u_1^0 + \\ + \alpha f v_{2\zeta}^0 + \varepsilon^2 \alpha^3 (2f_{\zeta} w_{1\zeta\zeta}^0 + 1.5 f w_{1\zeta\zeta\zeta}^0) + X_0^1/E^* h^* &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{2} \alpha^2 v_{0\zeta\zeta}^1 - \frac{1-\nu}{2} \alpha^2 f v_{1\zeta\zeta}^0 + \frac{\nu-1}{4} \alpha^2 f_{\zeta} v_{1\zeta}^0 + \frac{1-\nu}{2} f v_1^0 + \frac{\nu-1}{2} \alpha f u_{2\zeta}^0 + \frac{\nu-1}{4} \alpha f_{\zeta} u_2^0 + \\ + \frac{1-\nu}{2} f w_2^0 + \varepsilon^2 \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{1-\nu}{2} f_{\zeta} w_{2\zeta}^0 + \nu f w_{2\zeta\zeta}^0 \right] + Y_0^1/E^* h^* &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} -w_0^1 - \nu f w_1^0 - \nu \alpha u_{0\zeta}^1 + \varepsilon^2 (-0.5 f + \alpha^2 f_{\zeta\zeta}) v_2^0 - \frac{\alpha}{2} [(1-\nu) f - \varepsilon^2 \alpha^2 f_{\zeta\zeta}] u_{1\zeta}^0 + \varepsilon^2 [-\alpha^4 w_{0\zeta\zeta\zeta\zeta}^1 + \\ + \alpha^3 u_{0\zeta\zeta\zeta}^1 + 2\alpha^4 f w_{1\zeta\zeta\zeta\zeta}^0 + 3\alpha^4 f_{\zeta} w_{1\zeta\zeta\zeta}^0 + \left(\frac{\nu-3}{2} f + 2\alpha^2 f_{\zeta\zeta} \right) \alpha^2 w_{1\zeta\zeta}^0 + \\ + \left(\frac{\nu-2}{2} f_{\zeta} + \frac{\alpha^2}{2} f_{\zeta\zeta\zeta} \right) \alpha^2 w_{1\zeta}^0 + \alpha^2 \frac{5-\nu}{2} f v_{2\zeta\zeta}^0 + \alpha^2 \frac{11-\nu}{4} f_{\zeta} v_{2\zeta}^0 - \\ - 1.5 \alpha^3 f u_{1\zeta\zeta\zeta}^0 - \alpha^3 f_{\zeta} u_{1\zeta\zeta}^0 - \frac{\alpha}{4} [f_{\zeta} - 2\alpha^2 f_{\zeta\zeta\zeta}] u_1^0] + Z_0^1/E^* h^* &= 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$\lambda \cdot \sin \theta$:

$$\begin{aligned} \alpha^2 u_{1\zeta\zeta}^1 + \alpha \nu w_{1\zeta}^1 - \varepsilon^2 \alpha^3 w_{1\zeta\zeta\zeta}^1 - \frac{1+\nu}{2} \alpha v_{2\zeta}^1 - \frac{1-\nu}{2} u_1^1 - 2\alpha^2 f u_{0\zeta\zeta}^0 - \alpha^2 f_{\zeta} u_{0\zeta}^0 + \\ + \alpha f_{\zeta} w_0^0 + \alpha [(1-\nu) f + \varepsilon^2 \alpha^2 f_{\zeta\zeta}] w_{0\zeta}^0 &= 0 \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{1-\nu}{2} f + \varepsilon^2 \alpha^2 f_{\zeta\zeta} \right) u_0^0 + \varepsilon^2 \alpha^3 (4f_{\zeta} w_{0\zeta\zeta}^0 + 3f w_{0\zeta\zeta\zeta}^0) + X_1^1/E^* h^* = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{2} \alpha^2 v_{1\zeta\zeta}^1 - v_1^1 - \frac{1+\nu}{2} \alpha u_{2\zeta}^1 - w_2^1 + \varepsilon^2 \alpha^2 \frac{3-\nu}{2} w_{2\zeta\zeta}^1 - (1-\nu) \alpha^2 f v_{0\zeta\zeta}^0 + \\ + \frac{\nu-1}{2} \alpha^2 f_{\zeta} v_{0\zeta}^0 - \nu f v_0^0 + Y_1^1/E^* h^* = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} -w_1^1 + v_2^1 - \nu \alpha u_{1\zeta}^1 - (2\nu f - \varepsilon^2 \alpha^2 f_{\zeta\zeta}) w_0^0 - [(1-\nu) f - \varepsilon^2 \alpha^2 f_{\zeta\zeta}] \alpha u_{0\zeta}^0 + \varepsilon^2 [-\alpha^4 w_{1\zeta\zeta\zeta\zeta}^1 + \\ + 2\alpha^2 w_{1\zeta\zeta}^1 + \frac{\nu-3}{2} \alpha^2 v_{2\zeta\zeta}^1 + \alpha^3 u_{1\zeta\zeta\zeta}^1 + 4\alpha^4 f w_{0\zeta\zeta\zeta\zeta}^0 + 6\alpha^4 f_{\zeta} w_{0\zeta\zeta\zeta}^0 - \\ - [(1-\nu) f - 4\alpha^2 f_{\zeta\zeta}] \alpha^2 w_{0\zeta\zeta}^0 + (\nu f_{\zeta} + \alpha^2 f_{\zeta\zeta\zeta}) \alpha^2 w_{0\zeta}^0 - \\ - 3\alpha^3 f u_{0\zeta\zeta\zeta}^0 - 2\alpha^3 f_{\zeta} u_{0\zeta\zeta}^0 - \frac{\alpha}{2} [(1+\nu) f_{\zeta} - 2\alpha^2 f_{\zeta\zeta\zeta}] u_0^0] + Z_1^1/E^* h^* = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

$\lambda \cdot \cos \theta$:

$$\begin{aligned} \alpha^2 u_{2\zeta\zeta}^1 + \alpha \nu w_{2\zeta}^1 - \varepsilon^2 \alpha^3 w_{2\zeta\zeta\zeta}^1 + \frac{1+\nu}{2} \alpha v_{1\zeta}^1 - \frac{1-\nu}{2} u_2^1 + \\ + \alpha f_{\zeta} v_0^0 + \frac{3-\nu}{2} \alpha f v_{0\zeta}^0 + X_2^1/E^* h^* = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{2} \alpha^2 v_{2\zeta\zeta}^1 - v_2^1 + \frac{1+\nu}{2} \alpha u_{1\zeta}^1 + w_1^1 - \varepsilon^2 \alpha^2 \frac{3-\nu}{2} w_{1\zeta\zeta}^1 + \frac{\nu-3}{2} \alpha f u_{0\zeta}^0 + \frac{\nu-1}{2} \alpha f_{\zeta} u_0^0 + f w_0^0 + \\ + \varepsilon^2 \frac{\alpha^2}{2} [(3-\nu) f_{\zeta} w_{0\zeta}^0 + (7-\nu) f w_{0\zeta\zeta}^0] + Y_2^1/E^* h^* = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} -w_2^1 - v_1^1 - \nu \alpha u_{2\zeta}^1 - (\nu f - 2\varepsilon^2 \alpha^2 f_{\zeta\zeta}) v_0^0 + \varepsilon^2 \left[-\alpha^4 w_{2\zeta\zeta\zeta\zeta}^1 + 2\alpha^2 w_{2\zeta\zeta}^1 - \frac{\nu-3}{2} \alpha^2 v_{1\zeta\zeta}^1 + \right. \\ \left. + \alpha^3 u_{2\zeta\zeta\zeta}^1 + \alpha^2 \frac{\nu+3}{2} f v_{0\zeta\zeta}^0 + \alpha^2 \frac{\nu+7}{2} f_{\zeta} v_{0\zeta}^0 \right] + Z_2^1/E^* h^* = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Систему (8)-(10) называем системой уравнений нулевого приближения, систему (11)-(19) – системой уравнений первого приближения. Видно, что подсистема уравнений первого приближения (14)-(19) разделяется на две подсистемы, которые могут быть решены независимо друг от друга: (14, 16, 18) и (15, 17, 19). В отличие от [11], новая система уравнений получена для моментной оболочки.

Дальнейшее упрощение уравнений математической модели возможно, если решение представимо в виде (7). Из уравнений (8)-(19) следует, что необходимым условием применимости (7) являются равенства:

$$X_1^0 = X_2^0 = 0, \quad X_0^1 = 0; \quad Y_1^0 = Y_2^0 = 0, \quad Y_0^1 = 0; \quad Z_1^0 = Z_2^0 = 0, \quad Z_0^1 = 0. \quad (20)$$

В этом случае математическая модель состоит из уравнений (8), (14)-(19), вид которых не изменяется, поскольку в них не входят обращающиеся в нуль функции

$$u_1^0 = u_2^0 = 0, \quad u_0^1 = 0; \quad v_1^0 = v_2^0 = 0, \quad v_0^1 = 0; \quad w_1^0 = w_2^0 = 0, \quad w_0^1 = 0. \quad (21)$$

Очевидно, что для выполнения (21) необходимо, чтобы система уравнений для этих функций (9), (10), (11)-(13) была дополнена однородными краевыми условиями.

Итак, установлены необходимые условия (20), (21) допустимости представления (7) для решения уравнений математической модели (2)-(4).

Физически вид решения (7) означает, что осевая линия трубы не выходит из своей начальной плоскости, а в нулевом приближении труба ведет себя как прямолинейная и цилиндрическая.

Заключение. Решены задачи, перечисленные во Введении:

- для математической модели напряженно-деформированного состояния изогнутого трубопровода в предположении (1) выведены разрешающие уравнения (2)-(4);
- Предложен вид приближенного решения (6) разрешающих уравнений, основанный на сочетании асимптотического разложения по малому параметру λ (1), и последующего представления коэффициентов разложения в виде рядов Фурье;
- получены одномерные уравнения математической модели трубопровода в двух различных формулировках;
- найдены условия (20), (21), при которых возможно дальнейшее упрощение одномерных уравнений математической модели, а решение полной задачи для оболочки выражается формулами (7).

Возникла новая гипотеза о достаточности условий (20), (21) для применимости упрощенного представления решений (7). В линейном случае, при условии существования классического решения исходной задачи после наложения краевых условий, доказательство представляется очевидным и следует из единственности решения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Athisakul Ch., Monprapussorn T., Pulngern T., Chuchepsakul S. The Effect of Axial Extensibility on Three-Dimensional Behavior of Tensioned Pipes/Risers Transporting Fluid // Proceedings of the Eighth (2008) ISOPE Pacific/Asia Offshore Mechanics Symposium. Bangkok, Thailand: ISOPE, 2008. P. 97–104.

[2] Bashurov V. V., Vaganova N. A., Kropotov A. I., Pchelintsev M. V., Skorkin N. A., Filimonov M. Yu. Nonlinear model of a pipeline in a gravity field with an ideal fluid moving through it // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol. 53. № 1. P. 43–48. doi: 10.1134/S0021894412010063

[3] Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2010. 380 с.

[4] Xia Zi-Hui, Zhang Wei. The general solution of thin-walled toroidal shells with various boundary conditions and subjected to arbitrary loadings // Ingenieur-Archiv. 1987. Vol. 57. P. 166–174.

[5] Madureira L. R., Melo F. Q. A mixed formulation for stress analysis of curved pipes with tangent terminations under in-plane forces // Int. J. Mech. Mater. Des. 2008. Vol. 4. P. 221–227. doi: 10.1007/s10999-008-9074-2

[6] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Numerical modeling of the fluid-filled pipelines in viscous medium // AIP Conference Proceedings. 2016. Vol. 1738. № 030036. doi: 10.1063/1.4951792

[7] Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Издательство АН СССР, 1962. Т. 1. С.15–439.

[8] Tkachenko O. P. Construction of the mathematical model of complex pipeline with variable geometry // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 165. P. 1261–1274. doi: 10.1016/j.proeng.2016.11.849

[9] Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высш. школа, 1982. 264 с.

[10] Константинов М.В. Количественная оценка погрешности математической модели Власова для пологой сферической оболочки // *Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* 2014. № 12. С. 858–877. doi: 10.7463/1214.0738649

[11] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Approximate Solution to the Nonlinear Problem of an Underground Pipeline Deformation // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2012. Vol. 6. № 1. P. 100–110. doi: 10.1134/S1990478912010115

O. P. Tkachenko

THE RESOLVING EQUATIONS OF THE MATHEMATICAL MODEL OF CURVED PIPELINE

Computing Center of Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Khabarovsk

Abstract. The resolving equations for mathematical model of the stress-strain state of a pipeline with a curvilinear profile were derived. This model is based on Vlasov's theory of moment shells. A method is proposed for approximate solution of equations of a mathematical model on the basis of a sequential asymptotic expansion of unknown functions into series in a small parameter and representations of the expansion coefficients in the form of Fourier series. By means of these transformations, the system of equations of the mathematical model was reduced to a one-dimensional form. Numerical constraints on the parameters in the shell equations are given at which such a reduction of the formulation of the problem is possible. One-dimensional equations of the mathematical model of the pipeline in two different formulations are obtained. Conditions are found under which the mathematical model has the simplest form in the framework of the problem formulated.

Keywords: bent pipeline, shell theory, hydroelasticity, asymptotical series

REFERENCES

- [1] Athisakul Ch., Monprapussorn T., Pulngern T., Chuchepsakul S. The Effect of Axial Extensibility on Three-Dimensional Behavior of Tensioned Pipes/Risers Transporting Fluid // Proceedings of the Eighth (2008) ISOPE Pacific/Asia Offshore Mechanics Symposium. – Bangkok, Thailand: ISOPE, 2008. – P. 97–104.
- [2] Bashurov V. V., Vaganova N. A., Kropotov A. I., Pchelintsev M. V., Skorkin N. A., Filimonov M. Yu. Nonlinear model of a pipeline in a gravity field with an ideal fluid moving through it // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2012. – Vol. 53. – № 1. – P. 43–48. – doi: 10.1134/S0021894412010063
- [3] Novozhilov V. V. Thin Shell Theory. – SPb.: SPBU Publishing, 2010. – 380 p. (in Russian)
- [4] Xia Zi-Hui, Zhang Wei. The general solution of thin-walled toroidal shells with various boundary conditions and subjected to arbitrary loadings // Ingenieur-Archiv. – 1987. – Vol. 57. – P. 166–174.
- [5] Madureira L. R., Melo F. Q. A mixed formulation for stress analysis of curved pipes with tangent terminations under in-plane forces // Int. J. Mech. Mater. Des. – 2008. – Vol. 4. – P. 221–227. – doi: 10.1007/s10999-008-9074-2
- [6] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Numerical modeling of the fluid-filled pipelines in viscous medium // AIP Conference Proceedings. – 2016. – Vol. 1738. – № 030036. – doi: 10.1063/1.4951792
- [7] Vlasov V. Z. General theory of shells and its applications in engineering. Selected works. V.1. – M.: RAS, 1962. – P. 15–439. (in Russian)

Tkachenko Oleg Pavlovich

e-mail: olegt1964@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Leading Researcher, Computing Center of Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Khabarovsk 680000, Kim-Yu-Chen st. 65.

[8] Tkachenko O. P. Construction of the mathematical model of complex pipeline with variable geometry // *Procedia Engineering*. – 2016. – Vol. 165. – P. 1261–1274. – doi: 10.1016/j.proeng.2016.11.849

[9] Samul V. I. *Bases of the theory of elasticity and plasticity*. – M.: Higher school, 1982. – 264 p. (in Russian)

[10] Konstantinov M. V. Vlasov Mathematical Model Inaccuracy Quantitative Assessment for a Shallow Spherical Shell // *Science and Education of the Bauman MSTU*. – 2014. – № 12. – P. 858–877. – doi: 10.7463/1214.0738649 (in Russian)

[11] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Approximate Solution to the Nonlinear Problem of an Underground Pipeline Deformation // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. – 2012. – Vol. 6. – № 1. – P. 100–110. – doi: 10.1134/S1990478912010115

Н. В. Минаева, А. А. Сизиков

О ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ УПРУГОПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Аннотация. Рассмотрена прямоугольная пластина на упругом основании, сжатая в своей плоскости и нагруженная поперечной нагрузкой. Найдено условие, определяющее границу области непрерывной зависимости решения, описывающего прогиб пластины, от параметров поперечной нагрузки и жесткости постели. Она также будет границей адекватности выбранной математической модели.

Ключевые слова: линейная упругость, пластина, винклеровское основание, непрерывная зависимость.

УДК: 539.3

Прямоугольные пластины с переменными параметрами используются в различных отраслях промышленности. Поперечно нагруженная прямоугольная пластина, опирающаяся на упругое основание, применяется, например, при моделировании покрытий автомобильных дорог, мостов или взлетно-посадочных полос аэродромов. Для исследования прочности и несущей способности таких конструкций требуется знание их напряженно-деформированного состояния. В аналитической форме решение удается получить для ограниченного числа краевых задач [1, 2]. В связи с этим широко применяются различного рода приближенные методы [3-6]. В [7] представлен комплекс аналитических решений, отражающих действие на пластины переменной толщины сложных нагрузок. Проводится расчет фундаментных плит переменной толщины с учетом податливости упругого основания. В работах [8, 9] было изучено влияние напряжений на скорость коррозии, которая считалась линейной функцией интенсивности напряжений.

Как известно, одним из основных условий корректности постановки задачи является требование непрерывной зависимости решения от исходных данных [10]. Поскольку в результате реальной эксплуатации параметры конструкции могут отличаться от расчетных значений, то необходимо изучение подобной проблемы. К исследованиям

© Минаева Н. В., Сизикова А. А. 2017

Минаева Надежда Витальевна

e-mail: minaeva@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия,

Сизиков Андрей Александрович

e-mail: minaeva@yandex.ru, магистрант факультета прикладной математики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия.

Поступила 11.11.2017

по этому направлению можно отнести работы по изучению устойчивости формы для различного рода пластин и оболочек. В них рассмотрены тонкостенные конструкции на упругом основании при сжатии [2,12-14], комбинированном нагружении [11]. Получены формы потери устойчивости, а также проведено сравнение полученных в численном расчете критических нагрузок с экспериментальными данными [12]. В работе [13] изучаются формы потери устойчивости однородно сжатой пластины на мягком упругом основании на основе анализа энергии начальной послекритической деформации. Исследование упругой устойчивости бесконечной неоднородной тонкой пластинки, лежащей на упругом основании, в плоскости сжатия проведено в [14]. Здесь константы жесткости зависят от координат в направлении толщины пластины.

В настоящей работе рассматривается проблема непрерывной зависимости решения, определяющего прогиб пластины, от параметров, характеризующих поперечную нагрузку и жесткость основания. Реакция основания описывается однопараметрической моделью, основанной на гипотезе Винклера. Пластина находится в условиях всестороннего сжатия (рис. 1). Одна пара кромок жестко защемлена, а другая шарнирно оперта.

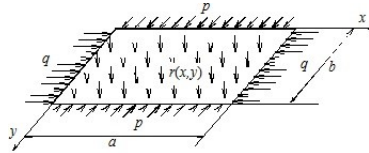


Рис. 1.

Согласно линейной теории жестких пластин, функция u , описывающая форму изогнутой пластины, является решением краевой задачи (в безразмерных переменных) [1, 2]:

$$\begin{aligned} \nabla^4 u(x, y) + q \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - r + ku &= 0 \\ u(0, y) = u(l, y) = u(x, 0) = u(x, 1) &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть при $r(x, y) = r_0(x, y)$ и $k = k_0$ задача (1) имеет решение

$$u(x, y) = u_0(x, y) \quad (2)$$

Оно будет характеризовать прогиб рассматриваемой пластины, если функция u непрерывно зависит от $r(x, y)$ и k при $r(x, y) = r_0(x, y)$, $k = k_0$. Для исследования этой зависимости, согласно [15, 16], необходимо построить вспомогательную задачу относительно $\zeta(x, y)$, определяемую следующим образом:

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \zeta(x, y) \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и учитывая, что (2) – решение, получаем задачу для $\zeta(x, y)$:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \zeta(x, y) + q \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + k_0 \zeta &= 0 \\ \zeta(0, y) = \zeta(l, y) = \zeta(x, 0) = \zeta(x, 1) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} \Big|_{y=1} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Основным условием непрерывной зависимости $u(x, y)$ от $r(x, y)$ и k является требование существования только тривиального решения у линеаризованной задачи, соответствующей (3). Будем искать ее решение в виде [1]

$$\zeta = Y(y) \sin m\pi x \quad (4)$$

В этом случае часть граничных условий удовлетворяется. Для $Y(y)$ имеем следующую задачу:

$$\begin{aligned} Y^{(4)} - 2a_1 Y'' + a_2 Y &= 0 \\ Y(0) = Y(1) = Y'(0) = Y'(1) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $a_1 = \gamma^2 - p/2$, $a_2 = \gamma^2 (\gamma^2 - q) + k_0$, $\gamma = \left(\frac{\pi m}{l}\right)$.

Корни соответствующего характеристического уравнения будут такими:

$$\lambda_i = \pm \sqrt{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - a_2}}, \quad i = 1, \dots, 4$$

Поскольку вид общего решения дифференциального уравнения из (5) зависит от значений λ_i , то, анализируя различные случаи, получаем ($p > 0$, $q > 0$, т.к. пластина находится при сжатии):

1. при $0 < p < 2\gamma^2$ и $-\frac{p^2}{4\gamma^2} + p + \frac{k_0}{\gamma^2} < q < \gamma^2 + \frac{k_0}{\gamma^2}$:

$$Y(y) = C_1 \cosh(\lambda_1 y) + C_2 \sinh(\lambda_1 y) + C_3 \cosh(\lambda_2 y) + C_4 \sinh(\lambda_2 y) \quad (6)$$

2. при $p < 2\gamma^2(1 + \sqrt{1 + k_0/\gamma^4})$ и $0 < q < -\frac{p^2}{4\gamma^2} + p + \frac{k_0}{\gamma^2}$:

$$\begin{aligned} Y(y) = C_1 \cosh(\alpha y) \cos(\beta y) + C_2 \sinh(\alpha y) \cos(\beta y) + \\ + C_3 \cosh(\alpha y) \sin(\beta y) + C_4 \sinh(\alpha y) \sin(\beta y), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{a_2 - a_1 \sqrt{a_2}}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{a_2 + a_1 \sqrt{a_2}}{2}},$$

3. при $p > 2\gamma^2$ и $-\frac{p^2}{4\gamma^2} + p + \frac{k_0}{\gamma^2} < q < \gamma^2 + \frac{k_0}{\gamma^2}$:

$$Y(y) = C_1 \cos(\beta_1 y) + C_2 \sin(\beta_1 y) + C_3 \cos(\beta_2 y) + C_4 \sin(\beta_2 y), \quad (8)$$

$$\beta_1 = \sqrt{|a_1 - \sqrt{a_1^2 - a_2}|}, \quad \beta_2 = \sqrt{|a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_2}|},$$

4. при $q > \gamma^2 + \frac{k_0}{\gamma^2}$:

$$Y(y) = C_1 \cosh(\lambda_1 y) + C_2 \sinh(\lambda_1 y) + C_3 \cos(\beta_1 y) + C_4 \sin(\beta_1 y). \quad (9)$$

Для каждого из (6)-(9) были построены системы, определяющие C_i :

1.

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_3 &= 0, \\
 \lambda_1 C_2 + \lambda_2 C_4 &= 0, \\
 C_1 \cosh \lambda_1 + C_2 \sinh \lambda_1 + C_3 \cosh \lambda_2 + C_4 \sinh \lambda_2 &= 0, \\
 C_1 \lambda_1 \sinh \lambda_1 + C_2 \lambda_1 \cosh \lambda_1 + C_3 \lambda_2 \sinh \lambda_2 + C_4 \lambda_2 \cosh \lambda_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

2.

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 0, \\
 \alpha C_2 + \beta C_3 &= 0, \\
 C_1 \cosh \alpha \cos \beta + C_2 \sinh \alpha \cos \beta + C_3 \cosh \alpha \sin \beta + C_4 \sinh \alpha \sin \beta &= 0, \\
 C_1(\alpha \sinh \alpha \cos \beta - \beta \cosh \alpha \sin \beta) + C_2(\alpha \cosh \alpha \cos \beta - \beta \sinh \alpha \sin \beta) + \\
 + C_3(\alpha \sinh \alpha \sin \beta + \beta \cosh \alpha \cos \beta) + C_4(\alpha \cosh \alpha \sin \beta + \beta \sinh \alpha \cos \beta) &= 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

3.

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_3 &= 0, \\
 \beta_1 C_2 + \beta_2 C_4 &= 0, \\
 C_1 \cos \beta_1 + C_2 \sin \beta_1 + C_3 \cos \beta_2 + C_4 \sin \beta_2 &= 0, \\
 -\beta_1 C_1 \sin \beta_1 + \beta_1 C_2 \cos \beta_1 - \beta_2 C_3 \sin \beta_2 + \beta_2 C_4 \cos \beta_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

4.

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_3 &= 0, \\
 \lambda_1 C_2 + \beta_1 C_4 &= 0, \\
 C_1 \cosh \lambda_1 + C_2 \sinh \lambda_1 + C_3 \cos \beta_1 + C_4 \sin \beta_1 &= 0 \\
 C_1 \lambda_1 \sinh \lambda_1 + C_2 \lambda_1 \cosh \lambda_1 - \beta_1 C_3 \sin \beta_1 + \beta_1 C_4 \cos \beta_1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

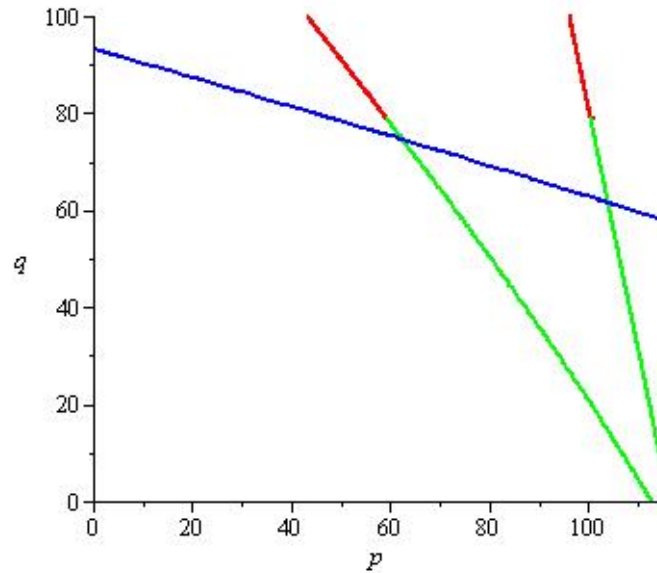


Рис. 2. $D = 0.1465$ МН·м, $l = a/b = 1$, $\delta = h/b = 0.02$, $\mu = 0.3$, $k_0 = 685.2$

в поле сартіон указывается заголовок рисунка

Согласно (10)-(13), условие нетривиальности решения вспомогательной задачи (3) имеет вид:

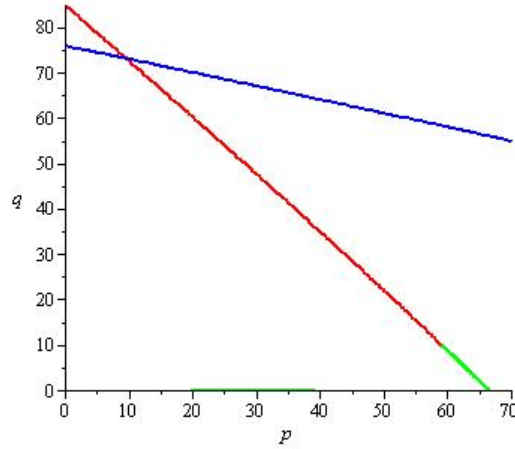


Рис. 3.

при $0 < p < 2\gamma^2$ и $-\frac{p^2}{4\gamma^2} + p + \frac{k_0}{\gamma^2} < q < \gamma^2 + \frac{k_0}{\gamma^2}$

$$2\lambda_1\lambda_2(1 - \cosh \lambda_1 \cosh \lambda_2) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sinh \lambda_1 \sinh \lambda_2 = 0 \quad (14)$$

при $0 < p < 2\gamma^2(1 + \sqrt{1 + k_0/\gamma^4})$ и $0 < q < -\frac{p^2}{4\gamma^2} + p + \frac{k_0}{\gamma^2}$

$$\alpha^2 \sin^2 \beta - \beta^2 \cosh^2 \alpha = 0 \quad (15)$$

при $p > 2\gamma^2$ и $-\frac{p^2}{4\gamma^2} + p + \frac{k_0}{\gamma^2} < q < \gamma^2 + \frac{k_0}{\gamma^2}$

$$2\beta_1\beta_2(1 - \cos \beta_1 \cos \beta_2) - (\beta_1^2 + \beta_2^2) \sin \beta_1 \sin \beta_2 = 0 \quad (16)$$

при $0 < p$ и $q > \gamma^2 + \frac{k_0}{\gamma^2}$

$$2\lambda_1\beta_1(1 - \cosh \lambda_1 \cos \beta_1) + (\lambda_1^2 - \beta_1^2) \sinh \lambda_1 \sin \beta_1 = 0 \quad (17)$$

С точностью до обозначений (17) совпадает с результатом, полученным в [2], если положить $p = 0$ и $k_0 = 0$.

Таким образом, если параметры пластины и сжимающих усилий таковы, что соответствующая им точка лежит внутри области, ограниченной линией (14)-(17), то решение (2) непрерывно зависит от $r(x, y)$ и k при $r(x, y) = r_0(x, y)$, $k = k_0$.

Например, для стальной ($E = 0.2 \cdot 10^6$ МПа) квадратной пластины с коэффициентом жесткости основания $k = 100$ МПа/м линия (14)-(17) в пространстве параметров внешних воздействий имеет вид (рис. 2):

Значения $p_* = 112.88$ ($q = 0$) и $q_* = 93.197$ ($p = 0$) совпадают с результатами из [3].

Если рассмотреть такую же пластину, но без упругого подкрепления ($k = 0$), то область непрерывной зависимости будет следующей (рис.3):

При равных сжимающих усилиях непрерывная зависимость нарушается при $p = q = 37,74$, что совпадает со значениями из [4]. Если силы приложены только вдоль шарнирно закрепленных краев ($p = 0$), то при $q < 75.87$ решение (2) приближенно описывает прогиб пластины. Этот результат согласуется с [2]. Для случая сжатия вдоль шарнирно закрепленных краев ($q = 0$), получаем аналогичный вывод при $p < 66.57$. В работе [4] для этого случая найдено значение $p_* = 66.55$.

Если пластина удлинена вдоль оси x ($a \gg b$) и сжата вдоль длинной стороны ($p = 0$), то получаем, например, что при $\frac{a}{mb} = 0.662$ непрерывная зависимость будет нарушаться при $q \geq 68.81$. Это соответствует результатам из [2], где $q_* = 68.72$.

Таким образом, если параметры нагрузок и пластины таковы, что соответствующая им точка лежит вне области, ограниченной (14)-(17), то непрерывная зависимость решения $u(x, y)$ от $r(x, y)$ и k нарушается, и (2) уже не будет приближенно описывать поведение рассматриваемой пластины. В подобных случаях необходимо проводить исследования на основе другой математической модели, а не (1).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М., 1963. 636 с.
- [2] Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
- [3] Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 432 с.
- [4] Ушаков А. Ю. Расчет тонких упругих пластинок при действии продольных сжимающих сил на устойчивость методом начальных функций // Промышленное и гражданское строительство. 2014. №10. С.55–57.
- [5] Jones R., Mazumdar J. A note on behavior of plates on an elastic foundation // Journal of Applied Mechanics. Transactions of the ASME. 1980. Vol. 47. pp. 191–192.
- [6] Li Z., Yang T., Luo W. An Improved Model for Bending of Thin Viscoelastic Plate on Elastic Foundation // Natural Science. 2009. №1. pp. 120–123. doi: 10.4236/ns.2009.12014.
- [7] Коренева Е. Б. Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практические приложения. М., 2009. 296 с.
- [8] Долинский В. М. Расчет элементов конструкций, подверженных равномерной коррозии // Исследования по теории оболочек. Казань. 1976. №7. С. 37–42
- [9] Pronina Y. Analytical solution for the general mechanochemical corrosion of an ideal elastic-plastic thick-walled tube under pressure // International Journal of Solids and Structures. 2013. V. 50. № 22–23. P. 3626–3633.
- [10] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 376 с.
- [11] Гусев А. М., Иванов В. А. Устойчивость пластин на упругом основании при комбинированном нагружении // Труды семинара по теории оболочек. Вып. 5. 1974. С. 136–142.
- [12] Кургузов В. Д., Демешкин А. Г. Экспериментальное и теоретическое исследование потери устойчивости узких тонких пластин на упругом основании при сжатии // ПМТФ. 2016. №3. С. 121–128
- [13] Морозов Н. Ф. О формах потери устойчивости сжатой пластины на упругом основании // Изв. РАН МТТ. 2012. № 6. С. 30–36.
- [14] Morimoto T., Tanigawa Y. Elastic stability of inhomogeneous thin plates on an elastic foundation // Arch Appl Mech. 2007. №77. P. 653–674. doi:10.1007/s00419-007-0117-1
- [15] Darinskii V. M., Sapronov Y. I. and Tsarev S. L. // J. Math. Sci. 2007. № 145. pp. 5311–5453.
- [16] Минаева Н. В., Морозов Ю. Г. Исследование продольно-поперечного изгиба упругой прямоугольной пластины // Изв. ВУЗОВ. Машиностроение. 2007. №5. С. 19–22.

N. V. Minaeva, A. A. Sizikov

**THE INVESTIGATION OF STATE OF AN ELASTIC RECTANGULAR PLATE
ON AN ELASTIC SUBSTRUCTURE**

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. We investigated the bending of a homogeneous plate compressed in its plane and is loaded with transverse load. We found the condition of continuous dependence of the function of the deflection parameters of stiffness Winkler's base and transverse forces. It is also a border of the adequacy of the selected model.

Keywords: linear elasticity, plate, Winkler's base, continuous dependence.

REFERENCES

- [1] Timoshenko S. P., Vojnovskij-Kriger S. *Plastiny i obolochki*. M., 1963. 636 s. (in Russian)
- [2] Vol'mir A. S. *Ustojchivost' uprugih sistem*. M.: Fizmatgiz, 1963. 880 s. (in Russian)
- [3] Vlasov V. Z., Leont'ev N. N. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii*. M. : Fizmatgiz, 1960. 432 c. (in Russian)
- [4] Ushakov A. YU. *Raschet tonkih uprugih plastinok pri dejstvii prodol'nyh szhimayushchih sil na ustojchivost' metodom nachal'nyh funkcij // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*. 2014. №10. S.55–57. (in Russian)
- [5] Jones R., Mazumdar J. *A note on behavior of plates on an elastic foundation // Journal of Applied Mechanics. Transactions of the ASME*. 1980. Vol. 47. pp. 191–192.
- [6] Li Z., Yang T., Luo W. *An Improved Model for Bending of Thin Viscoelastic Plate on Elastic Foundation // Natural Science*. 2009. №1. pp. 120–123. doi: 10.4236/ns.2009.12014.
- [7] Koreneva E. B. *Analiticheskie metody rascheta plastin peremennoj tolschchiny i ih prakticheskie prilozheniya*. M., 2009. 296 s. (in Russian)
- [8] Dolinskij V. M. *Raschet ehlementov konstrukcij, podverzhennyh ravnomernoj korrozii // Issledovaniya po teorii obolochek. Kazan'*. 1976. №7. S. 37–42. (in Russian)
- [9] Pronina Y. *Analytical solution for the general mechanochemical corrosion of an ideal elastic-plastic thick-walled tube under pressure // International Journal of Solids and Structures*. 2013. V. 50. № 22–23. P. 3626–3633.
- [10] Vladimirov V. S. *Uraveniya matematicheskoy fiziki*. M. : Nauka, 1976. 376 s. (in Russian)
- [11] Gusev A. M., Ivanov V. A. *Ustojchivost' plastin na uprugom osnovanii pri kombinirovannom nagruzhenii // Trudy seminarov po teorii obolochek. Vyp. 5*. 1974. S. 136–142. (in Russian)
- [12] Kurguzov V. D., Demeshkin A. G. *Ehksperimental'noe i teoreticheskoe issledovanie poteri ustojchivosti uzkih tonkih plastin na uprugom osnovanii pri szhatii // PMTF*. 2016. №3. S. 121–128. (in Russian)

Minaeva Nadezhda Vitalevna

e-mail: minaeva@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Sizikov Andrey Aleksandrovich

e-mail: minaeva@yandex.ru, graduate Voronezh State University, Voronezh, Russia

- [13] Morozov N. F. O formah poteri ustojchivosti szhatoj plastiny na uprugom osnovanii // *Izv. RAN MTT*. 2012. № 6. S. 30–36. (in Russian)
- [14] Morimoto T., Tanigawa Y. Elastic stability of inhomogeneous thin plates on an elastic foundation // *Arch Appl Mech*. 2007. №77. P. 653–674. doi:10.1007/s00419-007-0117-1
- [15] Darinskii B. M., Sapronov Y. I. and Tsarev S. L. // *J. Math. Sci*. 2007. № 145. pp. 5311–5453.
- [16] Minaeva N. V., Morozov YU. G. Issledovanie prodol'no-poperechnogo izgiba uprugoj pryamougol'noj plastiny // *Izv. VUZOV. Mashinostroenie*. 2007. №5. S. 19–22. (in Russian)

Г. Е. Чекмарев, П. Н. Кузнецов

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО УПРОЧНЕНИЯ НА ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ПЛОСКОЙ ПОЛОСЫ

Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары

Аннотация. В работе [1] получено условие пластичности для одной плоской двухэлементной динамической модели. В данной статье исследовано возмущение развитого течения одноосного растяжения плоской полосы, вышедшей на режим идеально пластического состояния при отсутствии и при наличии начальных микронапряжений.

Ключевые слова: пластичность, упругость.

УДК: 539.374

Пусть

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x^0 + \sigma'_x, & s_x &= s_x^0 + s'_x, \\ \sigma_y &= \sigma_y^0 + \sigma'_y, & s_y &= s_y^0 + s'_y, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^0 + \tau'_{xy}, & s_{xy} &= s_{xy}^0 + s'_{xy}.\end{aligned}$$

Линеаризуя условия пластичности [1] получим для невозмущенного состояния

$$[(\sigma_x^0 - \sigma_y^0) - (s_x^0 - s_y^0)]^2 + 4(\tau_{xy}^0 - s_{xy}^0)^2 = 4k_1^2, \quad (1)$$

$$(s_x^0 - s_y^0)^2 + 4(s_{xy}^0)^2 = 4k_2^2, \quad (2)$$

и для возмущенного

$$[(\sigma_x^0 - \sigma_y^0) - (s_x^0 - s_y^0)] [(\sigma'_x - \sigma'_y) - (s'_x - s'_y)] + 4(\tau_{xy}^0 - s_{xy}^0) (\tau'_{xy} - s'_{xy}) = 0, \quad (3)$$

$$(s_x^0 - s_y^0)(s'_x - s'_y) + 4s_{xy}^0 s'_{xy} = 0.$$

Линеаризация условия ассоциированного закона течения, дает:
для внешнего элемента

$$\begin{aligned}de_x^0 &= -de_y^0 = 2d\lambda^0 [(\sigma_x^0 - \sigma_y^0) - (s_x^0 - s_y^0)], & de_{xy}^0 &= 4d\lambda^0 (\tau_{xy}^0 - s_{xy}^0), \\ de'_x &= -de'_y = 2d\lambda^0 [(\sigma'_x - \sigma'_y) - (s'_x - s'_y)] + 2d\lambda' [(\sigma_x^0 - \sigma_y^0) - (s_x^0 - s_y^0)],\end{aligned} \quad (4)$$

©Чекмарев Г. Е., Кузнецов П. Н. 2017

Чекмарев Георгий Евгеньевич

e-mail: chekmarevge@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Кузнецов Павел Николаевич

e-mail: kuznesov_pn@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Поступила 22.11.2017

$$de'_{xy} = 4d\lambda^0 (\tau'_{xy} - s'_{xy}) + 4d\lambda' (\tau_{xy}^0 - s_{xy}^0);$$

для внутреннего элемента

$$\begin{aligned} d\chi_x^0 &= -d\chi_y^0 = 2d\mu^0 (s_x^0 - s_y^0), d\chi_{xy}^0 = 4d\mu^0 s_{xy}^0, \\ d\chi'_x &= -d\chi'_y = 2d\mu^0 (s'_x - s'_y) + 2d\mu' (s_x^0 - s_y^0), \\ d\chi'_{xy} &= 4d\mu^0 s'_{xy} + 4d\mu' s_{xy}^0. \end{aligned} \quad (5)$$

Откуда получим следующие соотношения

$$e_x - \chi_x = \frac{1}{2c} (s_x - s_y), e_y - \chi_y = \frac{1}{2c} (s_y - s_x), e_{xy} - \chi_{xy} = \frac{1}{c} s_{xy}.$$

Линеаризация которых приводит к формулам

$$\begin{aligned} e_x^0 - \chi_x^0 &= -(e_y^0 - \chi_y^0) = \frac{1}{2c} (s_x^0 - s_y^0), e_{xy}^0 - \chi_{xy}^0 = \frac{1}{c} s_{xy}^0, \\ e'_x - \chi'_x &= -(e'_y - \chi'_y) = \frac{1}{2c} (s'_x - s'_y), e'_{xy} - \chi'_{xy} = \frac{1}{c} s'_{xy} \end{aligned} \quad (6)$$

1. Пусть

$$\sigma_x^0 \neq 0, \quad s_x^0 \neq 0, \quad \chi_x \neq 0, \quad \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = 0, \quad s_y^0 = 0, \quad \chi_y^0 = \chi_{xy}^0 = 0; \quad (7)$$

тогда из (1), (2) будем иметь

$$\sigma_x^0 - s_x^0 = 2k_1, s_x^0 = 2k_2, \sigma_x^0 = 2k_1 + s_x^0 = 2(k_1 + k_2), \quad (8)$$

а из (3), (4)

$$(\sigma'_x - \sigma'_y) - (s'_x - s'_y) = 0, s'_x - s'_y = 0, \sigma'_x - \sigma'_y = 0$$

и, следовательно, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} = 0, \\ \sigma'_x - \sigma'_y = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Полученная система уравнений совпадает с уравнениями для идеально пластического течения, рассмотренного в работе [2]. Получили статически определимую задачу.

Рассмотрим кинематику среды.

Из (5)-(9) имеем

$$\begin{aligned} de_x^0 &= 2d\lambda^0 (\sigma_x^0 - s_x^0) = 4k_1 d\lambda^0 = dT, dT = de_x^0, \\ d\chi_x^0 &= 2d\mu^0 s_x^0 = 4k_2 d\mu^0, \\ e_x^0 - \chi_x^0 &= \frac{1}{2c} s_x^0 = \frac{k_2}{c} \end{aligned} \quad (10)$$

Дальнейшие преобразования дают

$$de_x^0 = d\chi_x^0, 4k_1 d\lambda^0 = 4k_2 d\mu^0 = dT, d\lambda^0 = \frac{dT}{4k_1}, d\mu^0 = \frac{dT}{4k_2}$$

и

$$de'_{xy} - d\chi'_{xy} = \frac{1}{c} ds'_{xy} \quad (11)$$

Так как в силу (10) и (11) $de'_{xy} = 4d\lambda^0 (\tau'_{xy} - s'_{xy}) = \frac{dT}{k_1} (\tau'_{xy} - s'_{xy})$ и $d\chi'_{xy} = 4s'_{xy}d\mu^0 = s'_{xy} \frac{dT}{k_2}$, то (11) запишется в виде

$$\frac{dT}{k_1} (\tau'_{xy} - s'_{xy}) - \frac{dT}{k_2} s'_{xy} = \frac{1}{c} ds'_{xy}. \quad (12)$$

Что приводит к неоднородному линейному дифференциальное уравнение первого порядка относительно s'_{xy}

$$\frac{ds'_{xy}}{dT} + c \left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] s'_{xy} = \frac{c\tau'_{xy}}{k_1},$$

где τ'_{xy} – известная функция не зависящая от T .

Для решения его воспользуемся методом вариации произвольных постоянных

$$s'_{xy} = C(T) \exp(-aT), \quad a = - \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right),$$

$$C'(T) \exp(-aT) = \frac{c\tau'_{xy}}{k_1}, \quad C(T) = \frac{-\tau'_{xy} \exp(aT)}{ak_1} + C_1, \quad C_1 - const,$$

$$s'_{xy} = \frac{c\tau'_{xy}}{ak_1} + C_1 \exp(-aT).$$

Константу C_1 определим из условия, что при $T = 0$, $e'_{xy} = \chi'_{xy} = s'_{xy} = 0$, тогда $0 = \frac{c\tau'_{xy}}{ak_1} + C_1, C_1 = -\frac{c\tau'_{xy}}{ak_1}$ и

$$s'_{xy} = \frac{c}{ak_1} \tau'_{xy} [1 - \exp(-aT)]. \quad (13)$$

Подставив (13) в (12), получим $k_1 \frac{de'_{xy}}{dT} = \tau'_{xy} - \frac{c\tau'_{xy}}{ak_1} [1 - \exp(-aT)]$

$$k_1 \frac{de'_{xy}}{dT} = \tau'_{xy} \left[\left(1 - \frac{c}{ak_1} \right) + \frac{c}{ak_1} \exp(-aT) \right], \quad \frac{k_1}{\tau'_{xy}} e'_{xy} = \left(1 - \frac{c}{ak_1} \right) T - \frac{c}{a^2 k_1} \exp(-aT) + C_2.$$

Так как при $T = 0$, $e'_{xy} = 0$, то

$$C_2 = \frac{c}{a^2 k_1}.$$

Переходя к перемещениям, получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{k_1}{\tau'_{xy}} e'_{xy} = \left(1 - \frac{c}{ak_1} \right) T + \frac{c}{a^2 k_1} (1 - \exp(-aT)), \\ e'_x + e'_y = 0 \end{cases}$$

относительно u', v' , где $e'_x = \frac{\partial u'}{\partial x}$, $e'_y = \frac{\partial v'}{\partial y}$, $e'_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right)$.

Удовлетворив с помощью замены $u' = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v' = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ условие не сжимаемости $e'_x + e'_y = 0$, $\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$, получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \tau'_{xy} \Phi(T), \quad (14)$$

где

$$\Phi(T) = \frac{k_1}{2} \left(\left(1 - \frac{c}{ak_1} \right) T + \frac{c}{a^2 k_1} (1 - \exp(-aT)) \right).$$

Представив функцию ψ в виде $\psi = \varphi(x, y)\Phi(T)$, из (13) и (14) получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \tau'_{xy}. \quad (15)$$

С помощью функции Эри $\sigma'_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $\sigma'_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\tau'_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ уравнения равновесия могут быть сведены к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Характер решения для компонент τ'_{xy} имеет вид согласно [3]:

$$\tau'_{xy} = f_1(x + y) + f_2(x - y).$$

Таким образом, уравнение (15) преобразуется в форму

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f_1(x + y) + f_2(x - y). \quad (16)$$

Которое в дальнейшем может быть преобразовано к виду

$$4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad \xi = x + y, \eta = x - y. \quad (17)$$

Из (16) и (17) имеем

$$\varphi = \bar{f}_1(\xi)\eta/4 + \bar{f}_2(\eta)\xi/4 + \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta), \quad (18)$$

где черта наверху означает интеграл по аргументу.

Согласно (18) все искомые компоненты деформации могут быть определены.

Для рассмотренного случая возмущения развитого течения одноосного растяжения плоской полосы, вышедшей на режим идеально пластического состояния материала, предварительное упрочнение не сказывается на характере возмущенного напряженного состояния идеально пластического тела. Компоненты возмущений перемещений зависят от характера упрочнения.

2. Предположим далее, что имеет место одноосное растяжение

$$\sigma_x^0 \neq 0, \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = 0. \quad (19)$$

Предполагаем при этом, что имеют место внутренние напряжения

$$s_x^0 \neq 0, s_y^0 \neq 0, s_{xy}^0 \neq 0. \quad (20)$$

Примем исходное состояние за начальное и положим

$$e_x^0 = e_y^0 = e_{xy}^0 = 0, \chi_x^0 = \chi_y^0 = \chi_{xy}^0 = 0. \quad (21)$$

Из (4), (21) имеем

$$d\lambda^0 = 0, d\mu^0 = 0.$$

Приравнивая de_{ij} , $d\chi_{ij}$ к e'_{ij} , χ'_{ij} , получим

$$\begin{aligned} e'_x &= -e'_y = 2d\lambda' [\sigma_x^0 - (s_x^0 - s_y^0)], \\ e'_x + e'_y &= 0, e'_{xy} = -4d\lambda' s_{xy}^0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \chi'_x &= 2d\mu' (s_x^0 - s_y^0), \chi'_y = -2d\mu' (s_x^0 - s_y^0), \\ \chi'_x + \chi'_y &= 0, \chi'_{xy} = 4d\mu' s_{xy}^0. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma'_x - \sigma'_y) - (s'_x - s'_y)}{4(\tau'_{xy} - s'_{xy})} &= \frac{s^0_{xy}}{\sigma^0_x - (s^0_x - s^0_y)} = A, \\ (\sigma'_x - \sigma'_y) - (s'_x - s'_y) - 4A(\tau'_{xy} - s'_{xy}) &= 0, \quad A = \text{const.} \end{aligned} \quad (24)$$

Из (2) находим

$$\begin{aligned} -\frac{s'_x - s'_y}{4s'_{xy}} &= \frac{s^0_{xy}}{s^0_x - s^0_y} = B, \\ s'_x - s'_y + 4Bs'_{xy} &= 0, \quad B = \text{const.} \end{aligned} \quad (25)$$

Из (22), (23) следует

$$\begin{aligned} \frac{e'_{xy}}{e'_x - e'_y} &= \frac{-s_{xy}^0}{\sigma^0_x - (s^0_x - s^0_y)} = -A, \quad e'_{xy} + A(e'_x - e'_y) = 0, \\ \frac{\chi'_x - \chi'_y}{\chi'_{xy}} &= \frac{s^0_x - s^0_y}{s^0_{xy}} = \frac{1}{B}, \quad B(\chi'_x - \chi'_y) - \chi'_{xy} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (24), (25) имеем

$$\begin{cases} s'_x - s'_y - 4As'_{xy} = \sigma'_x - \sigma'_y - 4A\tau'_{xy}, \\ s'_x - s'_y + 4Bs'_{xy} = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Систему линейных алгебраических уравнений (26) относительно $s'_x - s'_y$ и s'_{xy} решаем по формулам Крамера

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -4A \\ 1 & 4B \end{vmatrix} = 4(A + B), \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \sigma'_x - \sigma'_y - 4A\tau'_{xy} & -4A \\ 0 & 4B \end{vmatrix} = 4B(\sigma'_x - \sigma'_y - 4A\tau'_{xy}), \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & \sigma'_x - \sigma'_y - 4A\tau'_{xy} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(\sigma'_x - \sigma'_y - 4A\tau'_{xy}), \\ s'_x - s'_y &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{B(\sigma'_x - \sigma'_y - 4A\tau'_{xy})}{A + B}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$s'_{xy} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{\sigma'_x - \sigma'_y - 4A\tau'_{xy}}{4(A + B)}. \quad (29)$$

Из (6) получим

$$\begin{cases} \chi'_x - \chi'_y = e'_x - e'_y - \frac{1}{c}(s'_x - s'_y), \\ \chi'_{xy} = e'_{xy} - \frac{1}{c}s'_{xy}. \end{cases} \quad (30)$$

Из (26) - (30) имеем

$$\begin{aligned} \frac{e'_{xy} - \frac{1}{c}s'_{xy}}{e'_x - e'_y - \frac{1}{c}(s'_x - s'_y)} &= B, \\ e'_{xy} - \frac{1}{c}s'_{xy} &= B(e'_x - e'_y) - \frac{B}{c}(s'_x - s'_y). \end{aligned} \quad (31)$$

Подставляя (28), (29) в (31), получим

$$e'_{xy} - B(e'_x - e'_y) = -\frac{(1 + 4B^2)}{4c(A + B)}(\sigma'_x - \sigma'_y - 4A\tau'_{xy}). \quad (32)$$

Для связи между компонентами тензора деформации и компонентами перемещений воспользуемся формулами Коши

$$e'_x = \frac{\partial u'}{\partial x}, e'_y = \frac{\partial v'}{\partial y}, e'_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right). \quad (33)$$

Переходя от компонент деформации к компонентам перемещений и, присоединяя к ним уравнения равновесия, получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} + 2A \left(\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) - B \left(\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = -\frac{(1+4B^2)}{4c(A+B)} (\sigma'_x - \sigma'_y - 4A\tau'_{xy}).$$

Система уравнений (34) является системой пяти уравнений относительно пяти неизвестных $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}, u', v'$.

Уравнение не сжимаемости (третье в системе) удовлетворим с помощью замены

$$u' = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, v' = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (35)$$

Из формул Коши с использованием (35) следует, что

$$e'_x = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, e'_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, e'_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right). \quad (36)$$

Из (33), (36) получаем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 4A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (37)$$

Решением уравнения (37) является функция ψ вида

$$\psi = \psi(x + ay),$$

откуда

$$\begin{aligned} 1 - 4Aa - a^2 = 0, \quad a_{1,2} = -2A \pm \sqrt{4A^2 + 1}, \\ \psi = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(x + a_1y) + f_2(x + a_2y). \end{aligned}$$

Уравнения равновесия удовлетворим с помощью замены с использованием функции Эри (аналогично тому, как это сделано в п.1).

В результате получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 4A \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = F_1(x + a_1y) + F_2(x + a_2y), \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(x + a_1y) &= \frac{8c(B+A)^2 a_1}{1+4B^2} f_1''(x + a_1y), \\ F_2(x + a_2y) &= \frac{8c(B-A)^2 a_2}{1+4B^2} f_2''(x + a_2y). \end{aligned}$$

Уравнение (38) имеет те же характеристики, что и (37).

Произведем замену переменных

$$\xi = x + a_1 y, \eta = x + a_2 y,$$

вычислим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = a_1 \frac{\partial U}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial U}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + (a_1 + a_2) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + a_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = a_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2a_1 a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + a_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}. \quad (41)$$

Подставляя (39) - (41) в (38), получим

$$[2 - 2a_1 a_2 - 4A(a_1 + a_2)] \frac{\partial U^2}{\partial \xi \partial \eta} = F_1(\xi) + F_2(\eta). \quad (42)$$

Из (42) найдем

$$U = D [\eta f_1'(\xi) + \xi f_2'(\eta)] + \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta).$$

где

$$D = \frac{2c(B + A)^2}{(1 + 4A^2)(1 + 4B^2)}.$$

Используя выражения для частных производных

$$\frac{\partial U}{\partial x} = D [f_1'(\xi) + \eta f_1''(\xi) + f_2'(\eta) + \xi f_2''(\eta)] + \varphi_1'(\xi) + \varphi_2'(\eta),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = D [a_2 f_1'(\xi) + a_1 \eta f_1''(\xi) + a_1 f_2'(\eta) + a_2 \xi f_2''(\eta)] + a_1 \varphi_1'(\xi) + a_2 \varphi_2'(\eta),$$

определим компоненты напряжений

$$\sigma_y' = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \varphi_1''(\xi) + \varphi_2''(\eta) + D [2f_1''(\xi) + \eta f_1'''(\xi) + 2f_2''(\eta) + \xi f_2'''(\eta)], \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x' &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = a_1^2 \varphi_1''(\xi) + a_2^2 \varphi_2''(\eta) + \\ &+ D [2a_1 a_2 f_1''(\xi) + a_1^2 \eta f_1'''(\xi) + 2a_1 a_2 f_2''(\eta) + a_2^2 \xi f_2'''(\eta)], \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}' &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -a_1 \varphi_1''(\xi) - a_2 \varphi_2''(\eta) - \\ &- D [(a_1 + a_2) f_1''(\xi) + a_1 \eta f_1'''(\xi) + (a_1 + a_2) f_2''(\eta) + a_2 \xi f_2'''(\eta)]. \end{aligned} \quad (45)$$

Выражения (43)–(45) определяют напряженное состояние.

Наличие начальных внутренних микронапряжений определяет эффекты анизотропного поведения материала, вышедшего на режим идеально пластического состояния.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чекмарев Г. Е. Об одной динамической модели упрочняющегося материала и условии пластичности для нее. VIII всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела. Сб. статей по материалам конференции: Чебоксары, 2014. С. 209–222.

[2] Максимова Л. А. О линеаризованных уравнениях пространственных течений идеально пластических тел // ДАН РАН. 1998. Т.385. №6. С. 772–772.

[3] Владимиров В. С., Жариков В. В. Уравнения математической физики. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000. 400 с.

G. E. Chekmarev, P. N. Kuznecov

ON THE EFFECT OF PRELIMINARY HARDENING ON THE PLASTIC FLOW OF A FLAT STRIP

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. In [1] the plasticity condition was obtained for one flat two-element dynamic model. In this paper, we investigate the perturbation of the developed flow of a uniaxial stretching of a flat strip that went to the ideal plastic state in the absence and in the presence of initial microstresses.

Keywords: plasticity, elasticity.

REFERENCES

- [1] Chekmarev G. E. Ob odnoj dinamicheskoj modeli uprochnyayushchegosya materiala i uslovii plastichnosti dlya nee. VIII vserossijskaya konferenciya po mekhanike deformiruemogo tverdogo tela. Sb. statej po materialam konferencii: Cheboksary, 2014. С. 209–222. (in Russian)
- [2] Maksimova L. A. O linearizovannyh uravneniyah prostranstvennyh techenij ideal'no plasticheskikh tel // DAN RAN. 1998. T.385. №6. S. 772–772. (in Russian)
- [3] Vladimirov V. S., ZHarikov V. V. Uravneniya matematicheskoi fiziki. M. : FIZMATLIT, 2000. 400 s. (in Russian)

Chekmarev Gorgiy Evgenjevich

e-mail: chekmarevge@mail.ru, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Kuznecov Pavel Nikolaevich

e-mail: kuznecov_pn@mail.ru, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Ю. В. Немировский

ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. Исследована модель термопластического квазистатического и динамического формования круглых и кольцевых пластин из идеально-пластического материала. Учитывается термочувствительность свойств материала и предполагается, что поле температур зависит только от времени и радиальной координаты. Исследуется средний продольно-поперечный изгиб пластины при использовании гипотез Киргофа-Лява, условия пластичности Треска и ассоциированного с ним закона пластического состояния. Получены общие разрешающие системы уравнений при реализации в пластине различных комбинаций пластических режимов, проведено частичное интегрирование для различных кольцевых зон пластичности и сформулированы условия сопряжения на границах этих зон. Полное решение ряда иллюстративных примеров и анализ результатов расчета предполагается провести во второй части статьи.

Ключевые слова: круглые и кольцевые пластины-заготовки, квазистатическое и динамическое нагружение, термический нагрев, идеально-пластические материалы, условие пластичности, ассоциированный закон пластического деформирования, термочувствительность пределов текучести, продольно-поперечный изгиб.

УДК: 539.3

Исследование процессов формования изделий и элементов тонкостенных конструкций в условиях воздействия статических и динамических нагрузок на основе модели жестко-пластического тела уже достаточно давно используется в практике теоретических решений технологических задач теории пластичности [1] – [5]. С целью более эффективного решения практических проблем технологического формования конструкций было предложено наряду с механическими воздействиями активно подключать температурные воздействия [6]. Воздействие переменной температуры на формируемую деталь приводит к появлению в ней дополнительных напряжений, а высокий уровень нагрева существенно изменяет механические характеристики материала: как правило, понижается модуль упругости, предел текучести, характеристики упрочнения и

© Немировский Ю. В., 2017
Немировский Юрий Владимирович
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №17-41-210272).

Поступила 10.07.2017

вязкости и увеличивает степень допустимой деформативности, что создает благоприятные условия для процессов формоизменения. К сожалению, эти вопросы остаются в литературе слабо освещенными. В данной работе применительно к круглым пластинам анализируется характер их пластического деформирования при совместном воздействии силового и температурного поля. Исследуются области наиболее благоприятных воздействий на заготовку.

Основные гипотезы и уравнения. Рассматривая тонкие круглые пластины в условиях осесимметричного термосилового нагружения, закрепления и пологого продольно-поперечного изгиба, будем использовать при получении связей между деформациями и перемещениями традиционные зависимости Киргофа-Лява [1], [7]:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2, \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (1)$$

$$e_r = \varepsilon_r + z\chi_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} \quad (2)$$

$$e_\theta = \varepsilon_\theta + z\chi_\theta = \frac{u}{r} - \frac{z}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \quad (3)$$

$$-\frac{h(r)}{2} \leq z \leq \frac{h(r)}{2} \quad (4)$$

здесь u, ω - компоненты вектора смещения точек срединной поверхности; $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ - компоненты деформации срединной поверхности; χ_r, χ_θ - компоненты кривизны изогнутой поверхности; z - координата вдоль нормали к этой поверхности; $h(r)$ - толщина пластинки.

Возникающие в процессе деформирования радиальные σ_r и окружные σ_θ напряжения порождают в пластинке внутренние усилия N_r, N_θ, Q_r и изгибающие моменты M_r, M_θ , которые, как известно [1], [7] должны подчиняться уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rN_r) - N_\theta = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$d(r\beta N_r) + d(rQ_r) = \left[q(r, t) + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right] r dr \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_r) - M_\theta = -rQ_r \quad (7)$$

здесь t - время, $\beta = \frac{\partial \omega}{\partial r}$.

После интегрирования уравнения (6) получим:

$$Q_r = N_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \int \left[q(r, t) + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right] r dr + \frac{C_1}{r} \quad (8)$$

здесь C_1 - постоянная интегрирования.

Для сплошных пластинок (без отверстия) величину C_1 можно определить из требования ограниченности сил N_r, Q_r в точке $z = 0$. Тогда будем иметь:

$$Q_r = N_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \int_0^r \left[q(r, t) + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right] r dr \quad (9)$$

Уравнение (8) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_r) - M_\theta + rN_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \int_0^r \left[q(r,t) + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right] r dr \quad (10)$$

В случае кольцевой пластинки с заданными на одном из контуров (внутреннем или внешнем) усилия N_r или Q_r постоянная C_1 должна быть определена из требования выполнимости этого условия.

Условие пластичности и закон пластического течения. Будем рассматривать пластическую деформацию заготовки нагружаемой распределенной поперечной нагрузкой $q(r,t)$, равномерным контурным усилием $N_r(a,t) = N_0(t)$ и нагреваемой равномерной по толщине температурой $T(r,t)$, и будем считать, что предел текучести материала заготовки, зависит от температуры, и не зависит от деформации или скорости деформации, при заданных уровнях силовых нагрузок пластичность возникает при превышении уровня начального поля температур $T_0(r)$. Это позволяет использовать подходы и методы решения задач успешно применявшиеся в теории предельного равновесия пластин при отсутствии температуры [1],[2],[4],[5],[8]. В качестве условия пластичности воспользуемся известной призмой Треска–Сен-Венана которая в интересующей нас плоскости напряжений σ_r, σ_θ будет описываться неравенством:

$$|\sigma_\theta - \sigma_r| \leq \sigma_s(T) \text{ при } \sigma_r \sigma_\theta \leq 0; \quad |\sigma_\theta| \leq \sigma_s(T), |\sigma_r| \leq \sigma_s(T) \text{ при } \sigma_r \sigma_\theta > 0 \quad (11)$$

и граница ее определяет шестиугольник ABCDEF на рис.1.

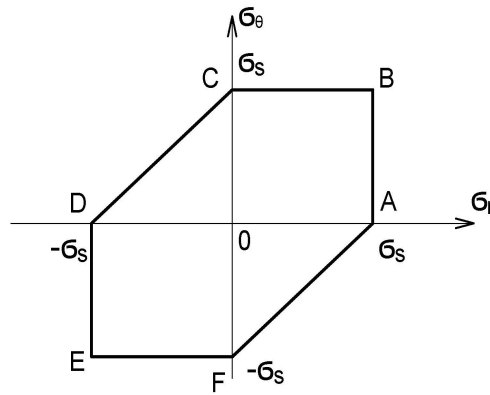


Рис.1

Достижение пластического состояния соответствует реализации знаков равенства в (11). Таким образом, в деформируемой пластинке могут возникать участки, соответствующие различным сторонам или вершинам шестиугольника Треска на рис.1.

Закон пластического течения, связанный с используемым условием текучести требует, чтобы вектор скорости пластического деформирования $(\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2)$ развивался по направлению внешней нормали к поверхности текучести. Таким образом, для гладких участков кривой текучести будем иметь:

$$\dot{\epsilon}_i = \lambda^{(n)} \frac{\partial f^{(n)}(\sigma_1, \sigma_2, T)}{\partial \sigma_i} + \left[\alpha [(T(r,t) - T_0(r))] \right] \quad (12)$$

$$i = z, \theta; n = 1, 2, 3, \dots$$

где $\alpha = \alpha(T)$ - коэффициент линейного расширения материала; $T_0(r)$ - температура тела в допредельном состоянии; $T(r, t)$ - текущая температура в состоянии пластического деформирования; $\lambda^{(n)}$ - неопределенный положительный множитель, соответствующий n -му гладкому участку кривой текучести.

Так как пластическое течение развивается непрерывно, то вектор скорости пластической деформации для пластических состояний соответствующих вершинам многоугольника текучести должен занимать любое положение между нормальными к сторонам n и $n + 1$ образующим данную вершину. В результате будем иметь:

$$\dot{\epsilon}_i = \lambda_1^{(n)} \frac{\partial f^{(n)}(\sigma_1, \sigma_2, T)}{\partial \sigma_i} + \lambda_2^{(n)} \frac{\partial f^{(n+1)}(\sigma_1, \sigma_2, T)}{\partial \sigma_i} + \left[\alpha[(T(r, t) - T_0(r))] \right] \quad (13)$$

Множители $\lambda_1^{(n)}$ и $\lambda_2^{(n)}$ связаны между собой следующим образом:

$$\lambda_1^{(n)} = (1 - \mu^{(n)})\nu^{(n)}, \quad \lambda_2^{(n)} = \mu^{(n)}\nu^{(n)} \quad (14)$$

$$0 \leq \mu^{(n)} \leq 1$$

где $\nu^{(n)}$ совпадает с множителем $\lambda^{(n)}$ или $\lambda^{(n+1)}$ из напряженных состояний отвечающих гладким участкам функции текучести $f^{(n)} = 0$ или $f^{(n+1)} = 0$ будет ли $\mu^{(n)}$ равно нулю или единице. При использовании условия пластичности Треска пластинка-заготовка при деформировании разбивается на кольцевые зоны а пределах которых основные уравнения могут быть относительно легко проинтегрированы, что позволяет довести анализ до простых инженерных формул и избежать громоздких и объемных вычислительных процедур. Скорость рассеяния механической энергии при пластической деформации рассматриваемой пластины равна:

$$D = \sum_{i=1}^2 \sigma_i \dot{\epsilon}_i = \lambda^{(n)} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \sigma_i} \sigma_i = \lambda^{(n)} \sigma_s(T)x, \quad (x = \pm 1)$$

Таким образом множитель $\lambda^{(n)}$ пропорционален удельной скорости рассеяния механической энергии.

Связь между усилиями, моментами деформациями и искривлениями пластинки при термопластическом изгибе.

Для получения замкнутой разрешающей системы уравнений необходимо получать соотношения между кинематическими и механическими характеристиками и температурой в пластически деформирующейся заготовке при любых комбинациях возможных пластических режимов. Используя методологию анализа возможных пластических режимов в оболочках вращения [8] для рассматриваемых круглых пластин можно установить, что в пластинах, деформирующихся в условиях рассмотренных термосиловых воздействий возможно существование пластичных режимов в виде пар параллельных сторон (BC, EF) , (CD, FA) и им симметричным на рис.1 или троек угловых режимов (B, C, D) , (C, D, E) и им симметричным. Усилия N_r, N_θ и изгибающие

моменты M_r, M_θ определяются выражениями:

$$N_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r dz, \quad N_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta dz \quad M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z dz, \quad M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta z dz \quad (15)$$

Пусть некоторый слой по толщине пластинки $z_1 \leq z \leq z_2$ находится в состоянии BC (рис.1). Тогда закон пластического течения имеет вид:

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_r + z\dot{\chi}_r - \left[\alpha\dot{T} + \dot{\alpha}(T - T_0) \right] = 0, \quad \dot{\epsilon}_\theta > 0 \quad (16)$$

Рассматривая (16) как полином первой степени по z , получим:

$$\dot{\epsilon}_r = \alpha\dot{T} + \dot{\alpha}(T - T_0) = 0, \quad \dot{\chi}_r > 0 \quad (17)$$

Отсюда, используя кинематические формулы (1), (2) после интегрирования получим:

$$\dot{\omega} = \dot{C}_1(t)r + \dot{C}_2(t); \quad \dot{u} = \dot{C}_1 C_1 r + \int \frac{d(\alpha(T - T_0))}{dt} dr + C_3(t) \quad (18)$$

здесь $\dot{C}_1, \dot{C}_2, \dot{C}_3$ - константы интегрирования по r .

В силу равенств (17), и непрерывности развития пластических деформаций по толщине пластины в оставшихся слоях должно быть $\dot{\epsilon}_r = 0$, что по закону течения соответствует стороне EF на рис.1. Таким образом по толщине пластины могут реализоваться два состояния:

Состояние BC :

$$\sigma_\theta = \sigma_\zeta(T), \quad \dot{\epsilon}_r = 0, \quad 0 \leq \sigma_r \leq \sigma_\theta, \quad \dot{\epsilon}_\theta > 0 \quad (19)$$

$$z_0 \leq z \leq \frac{h}{2}$$

И состояние EF :

$$\sigma_\theta = -\sigma_\zeta, \quad \dot{\epsilon}_r = 0, \quad \sigma_\theta \leq \sigma_r \leq 0, \quad \dot{\epsilon}_\theta = 0 \quad (20)$$

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq z_0$$

где $z_0 = z_0(r)$ - граница раздела состояний BC и EF .

В этом случае будем иметь:

$$N_\theta = -2z_0\sigma_\zeta(T), \quad M_\theta = \sigma_\zeta(T) \left(\frac{h^2}{4} - z_0^2 \right), \quad (21)$$

$$-\sigma_\zeta(T) \left(z_0 + \frac{h}{2} \right) \leq N_r \leq \sigma_\zeta(T) \left(\frac{h}{2} - z_0 \right), \quad M_\theta \geq 0, \quad 0 \leq M_r \leq \sigma_\zeta(T) \left(\frac{h^2}{4} - z_0^2 \right)$$

Если по толщине пластинки реализуется только состояние BC , то получим:

$$0 \leq N_r \leq \sigma_\zeta(T)h(r), \quad M_\theta = 0, \quad N_\theta = \sigma_\zeta(T)h \quad (22)$$

Исключая в (21) z_0 получим условие пластичности, связывающее момент M_θ и усилие N_θ :

$$M_\theta = \frac{\sigma_\zeta(T)}{4} \left[h^2 - \frac{N_\theta^2}{\sigma_\zeta^2(T)} \right], \quad h = h(r) \quad (23)$$

Поверхность $z_0(r)$ определяется равенством:

$$z_0 = - \frac{\dot{\varepsilon}_\theta - \alpha \dot{T}(r, t) - \dot{\alpha}[T(r, t) - T_0(r)]}{\dot{\chi}_\theta}$$

или через скорости \dot{u} , $\dot{\omega}$:

$$z_0 = \frac{\dot{u} - r[\alpha \dot{T} - \dot{\alpha}(T - T_0)]}{\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r}} \quad (24)$$

Таким образом, для данного режима определение основных характеристик (усилий, моментов, нейтральной поверхности z_0 сводится к нахождению скоростей перемещений \dot{u} , $\dot{\omega}$. Для определения последних существуют два дифференциальных уравнения равновесия для сил и моментов. Третья главная деформация, характеризующая скорость изменения толщины пластинки определяется из условия несжимаемости:

$$\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\theta + \dot{\varepsilon}_n = 3[\alpha(T(r, t) - T_0)] \quad (25)$$

Аналогичным образом, можно показать что, если по толщине пластины реализуются режимы *CB* и *FA*, то будут справедливы зависимости:

$$\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\theta - 2[\alpha \dot{T}(r, t) - \dot{\alpha}(T(r, t) - T_0(r))] = 0 \quad (26)$$

$$\dot{\chi}_r + \dot{\chi}_\theta = 0$$

$$\omega = C_1 \ln r + C_2 \quad (27)$$

$$ru = -\frac{C_1^2}{2} \ln r + 2 \int \alpha(T - T_0) r dr + C_3$$

$$N_\theta = N_r - 2z_0 \sigma_\zeta(T); \quad M_\theta = M_r + \sigma_\zeta(T) \left(\frac{h^2}{4} - z_0^2 \right) \quad (28)$$

$$M_\theta = M_r + \sigma_\zeta(T) \left[\frac{h^2}{4} - \frac{(N_r - N_\theta)^2}{4\sigma_\zeta^2(T)} \right] \quad (29)$$

$$z_0 = \frac{\dot{u} - r[\alpha(T - T_0)]'}{\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r}} \quad (30)$$

$$-h\sigma_\zeta(T) \leq N_\theta - N_r \leq h\sigma_\zeta(T)$$

$$0 \leq M_\theta - M_r \leq \sigma_\zeta(T) \frac{h^2}{4} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} < 0, \quad \frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial r^2} > 0 \quad (32)$$

Ситуация, соответствующая неравенствам (31) может возникать вблизи заделанного контура заготовки, когда этот край не движется и не поворачивается. Можно показать, что в рамках рассматриваемых осесимметричных поверхностных нагрузок и равномерных по толщине нагревов одновременная реализация пластического деформирования, соответствующая стороне и вершине шестиугольника пластичности, невозможна. В пластине могут реализоваться пластические состояния, соответствующие соседним вершинам шестиугольника. Предположим, что некоторый слой $z_1 \leq z \leq \frac{z}{2}$ находится в состоянии *B*. Тогда закон течения будет иметь вид:

$$\dot{\epsilon}_r = \lambda_1 = -(1 - \mu)\nu_1 > 0, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \lambda_2 = \mu_1\nu_1 > 0 \quad (33)$$

или

$$\mu_1 \dot{\epsilon}_r - (1 - \mu) \dot{\epsilon}_\theta = 0 \quad (34)$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\varsigma(T)$$

здесь μ_1 - неизвестная искомая величина, которая для состояния *B* принимает вид:

$$\mu_1 = \frac{\dot{\epsilon}_\theta}{\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta} = \frac{\dot{\epsilon}_\theta + z\dot{\chi}_\theta - [\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + z(\dot{\chi}_r + \dot{\chi}_\theta) - 2[\alpha(T - T_0)]'} \quad (35)$$

$$\forall z \in \left[z_1, \frac{h}{2} \right]$$

Аналогично можно записать законы пластических течений в других вершинах.

$$C : \dot{\epsilon}_r = -\lambda_2 = \mu_2\nu_2; \quad \dot{\epsilon}_\theta = \lambda_1 + \lambda_2 = \nu_2; \quad \mu_2 = -\frac{\dot{\epsilon}_r}{\dot{\epsilon}_\theta} \quad (36)$$

$$D : \dot{\epsilon}_r = -\lambda_1 - \lambda_2 = \nu_3; \quad \dot{\epsilon}_\theta = \lambda_1 = (1 - \mu_3)\nu_3; \quad \mu_3 = \frac{\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta}{\dot{\epsilon}_r} \quad (37)$$

$$E : \dot{\epsilon}_r = -\lambda_1 = (1 - \mu_4)\nu_4; \quad \dot{\epsilon}_\theta = \lambda_2 = \mu_4\nu_4; \quad \mu_4 = \frac{\dot{\epsilon}_\theta}{\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta} \quad (38)$$

$$(0 \leq \mu_j \leq 1, \quad j = 1, 2, 3, 4)$$

Равенства (36)-(38) можно записать в форме:

$$\mu_2(z) = -\frac{\dot{\epsilon}_r + z\dot{\chi}_r - [\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\epsilon}_\theta + z\dot{\chi}_\theta - [\alpha(T - T_0)]'} \quad (39)$$

$$\mu_3(z) = \frac{\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + z(\dot{\chi}_r + \dot{\chi}_\theta) - 2[\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\epsilon}_r + z\dot{\chi}_r - [\alpha(T - T_0)]'} \quad (40)$$

$$\mu_4(z) = \frac{\dot{\epsilon}_\theta + z\dot{\chi}_\theta - [\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + z(\dot{\chi}_r + \dot{\chi}_\theta) - 2[\alpha(T - T_0)]'} \quad (41)$$

Так как скорости деформаций $\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\theta$ - линейны по z , то в общем случае распределение пластических состояний - вершин может быть следующим:

Состояние *C* ($z_2(r) \leq z \leq z_1(r)$):

$$\dot{\epsilon}_\theta > 0, \quad \dot{\epsilon}_r \leq 0, \quad \sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varsigma(T),$$

μ_2 определяется по формуле (39).

Состояние D ($z_3(r) \leq z \leq z_2(r)$):

$$\dot{\epsilon}_\theta \geq 0, \dot{\epsilon}_r < 0, \sigma_r = -\sigma_\zeta(T), \sigma_\theta = 0,$$

μ_3 определяется по формуле (40).

Состояние E ($-\frac{h}{2} \leq z \leq z_3(r)$):

$$\dot{\epsilon}_\theta < 0, \dot{\epsilon}_r < 0, \sigma_r = \sigma_\theta = -\sigma_\zeta(T),$$

μ_4 определяется по формуле (41).

В соответствии с рассмотренным полем напряжений для этих угловых режимов получим выражения усилий и моментов:

$$N_r = - \int_{-h/2}^{z_3} \sigma_\zeta dz - \int_{z_3}^{z_2} \sigma_\zeta dz + \int_{z_1}^{h/2} \sigma_\zeta dz = -\sigma_\zeta(T)(z_1 + z_2) \quad (42)$$

$$N_\theta = -\sigma_\zeta(T)(z_2 + z_3) \quad (43)$$

$$M_r = \frac{\sigma_\zeta(T)}{2} \left[\frac{h^2}{2} - z_2^2 - z_1^2 \right] \geq 0 \quad (44)$$

$$M_\theta = \frac{\sigma_\zeta(T)}{2} \left[\frac{h^2}{2} - z_2^2 - z_1^2 \right] \geq 0 \quad (45)$$

Так как $-\frac{h}{2} \leq z_1 \leq \frac{h}{2}$, $-\frac{h}{2} \leq z_2 \leq \frac{h}{2}$, $-\frac{h}{2} \leq z_3 \leq \frac{h}{2}$, то:

$$-\sigma_\zeta(T)h(r) \leq N_r \leq \sigma_\zeta(T)h(r), \quad -\sigma_\zeta(T)h \leq N_\theta \leq \sigma_\zeta(T)h(r) \quad (46)$$

Границы z_1 и z_3 находим, соответственно, из условий $\dot{\epsilon}_r(z_1) = 0$, $\dot{\epsilon}_\theta(z_3) = 0$:

$$z_1 = - \frac{\dot{\epsilon}_r - [\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\chi}_r} \quad (47)$$

$$z_3 = - \frac{\dot{\epsilon}_\theta - [\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\chi}_\theta} \quad (48)$$

Поскольку граница z_2 разделяет состояния C и D , то для нее $[\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta]_{z=z_2}$, следовательно:

$$z_2 = - \frac{\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta - 2[\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\chi}_r + \dot{\chi}_\theta} \quad (49)$$

Таким образом, в случае реализации угловых режимов поиск всех неизвестных величин сведется к отысканию компонентов вектора перемещений u и ω . При этом для таких состояний необходимо соблюдать ограничения на величины $0 \leq \mu_j \leq 1$, ($j = 1, 2, 3, 4$), которые с помощью кинематических соотношений можно привести к виду:

$$\text{для } \forall z \in \left[z_1, \frac{h}{2} \right]$$

$$\dot{u} - z \frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial r^2} \geq r[\alpha(T - T_0)]'$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} - z \frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial r^2} > [\alpha(T - T_0)]' \quad (50)$$

для $\forall z \in [z_2, z_1]$:

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} - z \frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial r^2} \leq [\alpha(T - T_0)]' \quad (51)$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} + \frac{\dot{u}}{r} - z \left(\frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} \right) > 2[\alpha(T - T_0)]'$$

для $\forall z \in [z_3, z_2]$:

$$\dot{u} - z \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} \geq [\alpha(T - T_0)]' \quad (52)$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} + \frac{\dot{u}}{r} - z \left(\frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} \right) \leq 2[\alpha(T - T_0)]'$$

и для $\forall z \in [-\frac{h}{2}, z_3]$:

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} - z \frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial r^2} < [\alpha(T - T_0)]' \quad (53)$$

$$\dot{u} - z \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} < r[\alpha(T - T_0)]'$$

Точка и штрих обозначают частную производную по времени t .

Эти неравенства эквивалентны требованию закона пластического течения, чтобы неопределенные множители λ_1, λ_2 были положительными. Если предположить, что по толщине пластины реализуется другая комбинация угловых режимов, например:

при $z_1 \leq z \leq \frac{h}{2}$ – режим C :

$$\dot{e}_\theta > 0, \dot{e}_r \leq 0, \sigma_r = 0, \sigma_\theta = \sigma_\varsigma(T)$$

при $z_2 \leq z \leq z_1$ – режим D :

$$\dot{e}_\theta \geq 0, \dot{e}_r < 0, \sigma_r = -\sigma_\varsigma(T), \sigma_\theta = 0$$

при $z_3 \leq z \leq z_2$ – режим E :

$$\dot{e}_\theta \leq 0, \dot{e}_r \leq 0, \sigma_r = -\sigma_\varsigma(T) = \sigma_\theta$$

при $-\frac{h}{2} \leq z \leq z_3$ – режим F .

то проводя аналогичные рассуждения можно получить иные зависимости и неравенства. Например, для усилий и моментов получим выражения:

$$N_r = \sigma_\varsigma(T)(z_3 - z_1), \quad N_\theta = -\sigma_\varsigma(T)(z_2 + z_1) \quad (54)$$

$$M_r = \frac{\sigma_\varsigma(T)}{2}(z_3^2 - z_1^2), \quad M_\theta = \frac{\sigma_\varsigma(T)}{2} \left(\frac{h^2}{2} - z_2^2 + z_1^2 \right)$$

где

$$z_1 = -\frac{\dot{e}_r + \dot{e}_\theta - 2[\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\chi}_r + \dot{\chi}_\theta},$$

$$z_2 = -\frac{\dot{\varepsilon}_\theta - [\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\chi}_\theta}, \quad (55)$$

$$z_3 = -\frac{\dot{\varepsilon}_r - [\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\chi}_r}.$$

Реализация различных пластических режимов в пластике будет меняться в зависимости от изменения условий ее закрепления, характера изменения температурного поля и механических нагрузок. Поэтому дальнейшее углубление в анализе реализации возможных пластических нагрузок целесообразнее проводить для конкретных условий технологического деформирования заготовок. Если поле напряжений во всей пластинке реализуется в одном типе пластических режимов, то нахождение всех интересующих нас величин: усилий, моментов, перемещений и границ разделов пластических состояний по толщине не представляет большого труда. Однако, как правило, пластинка делится на кольцевые зоны, каждая из которых находится в различном пластическом состоянии и границы этих зон заранее неизвестны.

Условия сопряжения между различными пластическими кольцевыми областями. С целью определения кольцевых границ различных пластических состояний, выделим окружность, разделяющую два различных пластических состояния и рассмотрим соотношения между различными механическими величинами по обе стороны от этой окружности.

Из условия локального равновесия следует что при переходе через границу L непрерывными должны быть усилие N_r , изгибающий момент M_r и перерезывающее усилие Q_r . Условие сплошности пластинки требует непрерывности перемещений u, ω и углов поворота $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ на всех окружностях, кроме окружности, для которой $|\sigma_r| = \sigma_c(T)$ - шарнирной окружности - на которой $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ может терпеть разрыв. В общем случае для решения задачи в каждой области необходимо определить функции $u, \omega, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_h, \chi_r, \chi_\theta, z_0, M_r, M_\theta, Q_r, N_r, N_\theta$ и λ .

Для их нахождения служат выписанные выше кинематические соотношения, уравнение несжимаемости, закон пластического деформирования, усилия и моменты выраженные через поверхности разрыва пластических состояний z_{0j} , выражения z_{0j} через кинематические характеристики и уравнения равновесия. Появляющиеся при интегрировании в каждой пластической зоне константы интегрирования должны определяться из условий на границах сопряжения и заданных граничных условий на внутреннем и наружном контуре пластины. Ясно, что детальное описание соответствующих процедур можно провести при решении конкретных задач, которые будут рассмотрены во второй части этой статьи в следующем номере.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978.
- [2] Комаров К. Л., Немировский Ю.В. Динамика жестко-пластических элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1984. 232 с.
- [3] Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамика сопротивления плоских пластических преград. Новосибирск: ГЕО, 2009. 311 с.
- [4] Гопкинс Г., Прагер В. Несущая способность круглых пластинок. М.:И.Л., 1955. С.100-113.
- [5] Gleisal Plastic deformations of circular diaphragms under pressure //J.Appl.Meran. Ser.E. 1948. V.15, No 3.
- [6] Шевченко Ю. Н. Пространственные задачи термопластичности. Киев: Наукова думка, 1980.
- [7] Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Физматлит,1956.
- [8] Онат Е., Прагер В. Предельное равновесие оболочек вращения. Сб.перев. Механика, М.:И.Л., 1955. С.107–119.
- [9] Проблемы высоких температур в авиационных конструкциях. Сб.статей под ред. Г.В. Ужика. Москва:И.Л., 1967. 595 с.

Yu. V. Nemirovskii

THERMOPLASTIC BEND OF ROUND PLATES

Institute of Theoretical and Applied Mechanics S.A.Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

Abstract. The model of thermoplastic quasistatic and dynamic formation of round and ring plates from ideal and plastic material is investigated. The thermosensitivity of properties of material is considered and it is supposed that the field of temperatures depends only on time and radial coordinate. The average longitudinally cross bend of a plate at an ospolzovaniye of hypotheses is investigated Kirgofa-Lyava, conditions of plasticity of the Crash and the law of a plastic state associated with him. The general allowing systems of the equations at realization in a plate of various combinations of the plastic modes are received, partial integration for various ring zones of plasticity is carried out and interface conditions on borders of these zones are formulated. The full solution of a number of illustrative examples and the analysis of results of calculation is supposed to be carried out in the second part of article.

Keywords: round and ring plates preparations, quasistatic and dynamic loading, thermal heating, ideal and plastic materials, plasticity condition, the associated law of plastic deformation, thermosensitivity of limits of fluidity, longitudinally cross bend.

REFERENCES

- [1] Erhov M. I. Teoriya ideal'no plasticheskikh tel i konstrukcij. M.: Nauka, 1978. (in Russian)
- [2] Komarov K. L., Nemirovskij YU.V. Dinamika zhestko-plasticheskikh ehlementov konstrukcij. Novosibirsk: Nauka, 1984. 232 s. (in Russian)
- [3] Nemirovskij YU. V., Romanova T. P. Dinamika soprotivleniya ploskih plasticheskikh pregrad. Novosibirsk: GEO, 2009. 311 s. (in Russian)
- [4] Gopkins G., Prager V. Nesushchaya sposobnost' kruglyh plastinok. M.:I.L., 1955. C.100-113. (in Russian)
- [5] Gleisal Plastic deformations of circular diaphragms under pressure //J.Appl.Meran. Ser.E. 1948. V.15, No 3.
- [6] SHEvchenko YU. N. Prostranstvennyye zadachi termoplastichnosti. Kiev: Naukova dumka, 1980. (in Russian)
- [7] Vol'mir A. S. Gibkie plastinki i obolochki. M.: Fizmatlit, 1956. (in Russian)
- [8] Onat E., Prager V. Predel'noe ravnovesie oblochek vrashcheniya. Sb.perev. Mekhanika, M.:I.L., 1955. C.107-119. (in Russian)
- [9] Problemy vysokih temperatur v aviacionnyh konstrukciyah. Sb.statej pod red. G.V. Uzhika. Moskva:I.L., 1967. 595 s. (in Russian)

Nemirovsky Yuri Vladimirovich

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S.A.Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia.

Б. Г. Миронов

О КРУЧЕНИИ КУСОЧНО-АНИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Московский государственный гуманитарно-экономический университет,
г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассмотрено кручение кусочно-анизотропного цилиндрического стержня с эллиптическим сечением. Определено напряженное состояние стержня, найдены линии разрыва напряжений, построено поле характеристик.

Ключевые слова: кручение, напряжение, пластичность, предел текучести.

УДК: 539.735

Кручение изотропных и анизотропных идеальнопластических стержней рассмотрено в работах [1]-[4]. Кручение неоднородных идеальнопластических стержней исследовано в [5]-[7].

Рассмотрим цилиндрический идеальнопластический стержень, ориентированный в прямоугольной системе координат $x y z$. Ось z направлена параллельно образующим стержня. Контур сечения стержня плоскостью $z = const$ есть эллипс: $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$.

Предположим, что сечение стержня состоит из двух анизотропных областей, разделенных хордой AB : $y = 0$ (рис. 1).

Стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил. Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок.

Напряженное состояние стержня определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

условиями пластичности

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a_1^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b_1^2} = 1 \quad (2)$$

© Миронов Б. Г., 2017
Миронов Борис Гурьевич
e-mail: mironov.boris.21@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики, Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-210272).

Поступила 12.10.2017

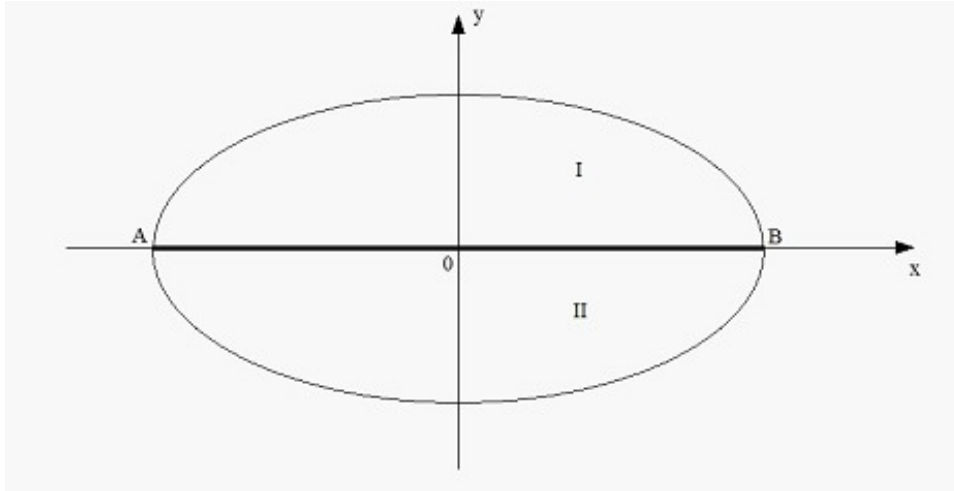


Рис. 1.

в области I,

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a_2^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b_2^2} = 1 \quad (3)$$

в области II,
уравнением равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

где $b_1 < b_2$.

Согласно [3] характеристики соотношения (4) в каждой области есть прямые, ортогональные вектору градиента к кривым (2) и (3) соответственно. Вектор касательного напряжения:

$$\bar{\tau} = \tau_{xz} \bar{i} + \tau_{yz} \bar{j}, \quad (5)$$

не меняется вдоль характеристик и направлен по касательной к контуру поперечного сечения стержня.

Пусть

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{d}{c}. \quad (6)$$

Тогда уравнение характеристик в обоих областях имеет вид:

$$y = \frac{y_0}{x_0} x, \quad (7)$$

где

$$\frac{x_0^2}{c^2} + \frac{y_0^2}{d^2} = 1. \quad (8)$$

На линии неоднородности AB неизбежен скачок касательных напряжений. Поэтому при переходе через кривую AB вектор касательного напряжения $\bar{\tau}$, а соответственно и характеристики соотношения (4) меняют свое направление. А это приводит к дополнительным линиям разрыва напряжений AC и CB области II (рис. 2).

Уравнение линии разрыва напряжений AC и CB имеет вид соответственно

$$b_2\sqrt{d^2x^2 + c^2y^2} - d\left(b_1x + \sqrt{b_2^2 - b_1^2}y\right) = (b_2c - b_1)d, \quad (9)$$

$$b_2\sqrt{d^2x^2 + c^2y^2} + d\left(b_1x - \sqrt{b_2^2 - b_1^2}y\right) = (b_2c - b_1)d. \quad (10)$$

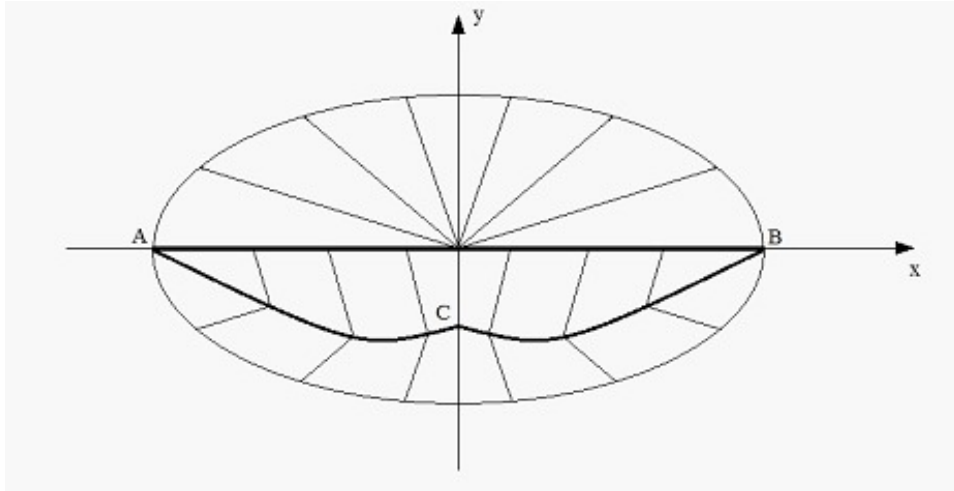


Рис. 2.

На рис. 2 линии разрыва напряжений нарисованы жирными линиями, а характеристики – тонкими линиями.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быковцев Г. И. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
- [2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
- [3] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4 С. 108–112.
- [4] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. К вопросу о кручении анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1(23). С. 197–200.
- [5] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964.
- [6] Миронов Б.Г., Миронов Ю.Б. К вопросу о кручении призматических стержней с включением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. №2(32). С. 18–22.
- [7] Миронов Б.Г. О кручении цилиндрического неоднородного стержня с круговым сечением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. №3(33). С. 95–100.

B. G. Mironov

ABOUT TORSION OF PIECEWISE ANISOTROPIC CYLINDRICAL CORES

Moscow State Humanitarian and Economic University, Moscow, Russia

Abstract. In work torsion of a piecewise anisotropic cylindrical core with a cut in the form of an ellipse is considered. Tension of a core is defined, lines of a rupture of tension are found, the field of characteristics is built.

Keywords: torsion, tension, plasticity, fluidity limit.

REFERENCES

- [1] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. *Teorija plastichnosti. Vlydivostok: Dal'nauka*, 1998. 528 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D. *Teorija ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka*, 1966. (in Russian).
- [3] Derevjannyh E. A., Mironov B. G. Ob obshhijh sootnoshenijah teorii kruchenija anizotropnyh sterzhnej // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija*. 2012. No. 4. P. 108–112. (in Russian).
- [4] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. To the question of torsion of an anisotropic core // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija*. 2015. No. 1(23). P. 197–200. (in Russian).
- [5] Ol'shak V., Ryhlevskij Ja., Urbanovskij V. *Teorija plastichnosti neodnorodnyh tel. M.: Mir*, 1964. 156 p. (in Russian).
- [6] Mironov B. G., Mironov Yu. B. About torsion of piecewise isotropic prismatic cores with inclusion // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija*. 2017. No. 2(32). P. 18–22. (in Russian).
- [7] Mironov B. G. About torsion of heterogeneous cylindrical cores with a circular cut // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija*. 2017. No 3 (33). P. 95 – 100. (in Russian)

Mironov Boris Guryevich

e-mail: mironov.boris.21@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow State Humanitarian and Economic University, Moscow, Russia.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@gmail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@inbox.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матченко Николай Михайлович (eks_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chgpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marusbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига, Латвия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стил `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Немировский Ю. В.</i> Моделирование и расчет деформирования геовеббетонных мостовых конструкций и воздушных эстакадных дорог.....	3
<i>Манцыбора А. А., Полоник М. В.</i> К проблеме учета экспериментальных данных и численных расчетов при моделировании процесса истирания зернистых композитов	10
<i>Прокопьев В. И., Жданова Т. В., Кушихов Б. С.</i> Моделирование напряженно-деформированного состояния железнодорожного колеса и рельса при контакте .	19
<i>Плотников А. Н.</i> Расчет каменной кладки на центральное сжатие как квазиоднородного сплошного упругопластичного тела.....	30
<i>Русина Е. Ю.</i> Об определении упругопластических границ в тонкой упругопластической конструкции с включением.....	36
<i>Левина Л. В., Новикова О. С., Пеньков В. Б., Поликарпов М. В.</i> Оптимизация облегченных элементов крепления при варьировании геометрических параметров	45
<i>Петров М. В., Гоник Е. Г., Федорова Т. Г.</i> Устойчивость при изгибе тонкостенных оболочек, заполненных различными сыпучими материалами.....	52
<i>Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Рыбакова Т. И.</i> Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием, при условии сопротивления отрыву.....	59
<i>Кадымов В. А.</i> Пластические течения в тонком слое с неоднородными свойствами по толщине.....	66
<i>Абрамов Л. М., Маклакова С. Н., Галкина М. А., Гультияев В. И.</i> О назначении допусков на линейные размеры и форму кубических и призматических бетонных образцов при испытаниях на сжатие.....	74
<i>Спорыхин А. Н.</i> Об одном вопросе в теории анизотропных пластических тел .	82
<i>Сенашов С. И., Савостьянова И. Л.</i> О предельном состоянии анизотропных деформируемых тел.....	85
<i>Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Тихонов С. В.</i> Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины с круговым отверстием, подкрепленной включением, при условии сопротивления отрыву	95
<i>Максютов М. С., Кадымов В. А.</i> О безмоментном напряженно-деформированном состоянии гладкого тора, нагруженного равномерным внутренним давлением	104

<i>Ткаченко О. П.</i> Разрешающие уравнения математической модели изогнутого трубопровода	114
<i>Минаева Н. В., Сизиков А. А.</i> О продольно-поперечном изгибе упругоупрочненной пластины	125
<i>Чекмарев Г. Е., Кузнецов П. Н.</i> К вопросу о влиянии предварительного упрочнения на пластическое течение плоской полосы	133
<i>Немировский Ю. В.</i> Термопластический изгиб круглых пластин	142
<i>Миронов Б. Г.</i> О кручении кусочно-анизотропного цилиндрического стержня .	154
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	158
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	161
СОДЕРЖАНИЕ	163

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2017. № 4 (34)**

Отв. за выпуск: А. В. Балашникова

Технические редакторы: А. В. Балашникова, Е. В. Мурашкин, С. В. Тихонов

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова

Макет: А. В. Балашникова

Подписано в печать 23.12.2017. Выход в свет 30.12.2017.
Формат 70х100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 17,75.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском отделе ФГБОУ ВО «Чувашский
государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38