

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал
№ 3(37)
июль – сентябрь 2018 г.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Е. В. Ломакин, Л. А. Максимова,
А. А. Маркин, Г. К. Михайлов, Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин,
В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин,
А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж
(Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

Адрес редакции и издательства: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://limit21.ru>

© ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева», 2018



Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

**ПРЕЗИДЕНТ САРАТОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА ИМ. Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО ЛЕОНИД ЮРЬЕВИЧ
КОССОВИЧ. К 70-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ**

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

15 октября 2018 г. исполняется 70 лет известному российскому ученому, доктору физико-математических наук, профессору, президенту Саратовского государственного университета Л.Ю. Коссовичу. Основными направлениями научной деятельности Л.Ю. Коссовича являются асимптотические методы теории упругости, колебания и распространение нестационарных волн, динамика тонкостенных упругих и вязкоупругих конструкций, биомеханика, одномерные и двумерные наноматериалы и наноструктуры. По результатам научно-исследовательской работы им опубликовано более 200 научных и учебно-методических работ, три монографии (одна из них, в соавторстве с профессором Ю.Д. Каплуновым, вышла в Великобритании). Под его руководством подготовлены и защищены 12 кандидатских и одна докторская диссертации.

Леонид Юрьевич Коссович, родился 15 октября 1948 г. в г. Саратове в семье военнослужащего. В 1956 г. начал обучение в средней школе №37 г. Саратова. В 1966 г. он окончил с серебряной медалью полный курс средней физико-математической школы №13 г. Саратова. В том же году поступил на первый курс механико-математического факультета Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (СГУ) и в 1971 г. получил диплом по специальности «Механика». После окончания университета Л.Ю. Коссович работает старшим инженером в лаборатории математических методов научно-исследовательского института геологии СГУ.

В 1973 г. он поступает в аспирантуру механико-математического факультета СГУ на кафедру теории упругости. Затем, с 1975 по 1978 гг. работает ассистентом кафедры вычислительной математики механико-математического факультета СГУ. В 1977 г. он защитил кандидатскую диссертацию «Некоторые вопросы динамической теории упругих оболочек переменной толщины» и получил ученую степень кандидата физико-математических наук.

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н., 2018

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Поступила 20.09.2018

С 1978 по 1989 гг. Л.Ю. Коссович работает в должности доцента кафедры математической кибернетики Саратовского госуниверситета. В 1982 г. его направляют на стажировку в Институт проблем механики АН СССР (г. Москва), где он занимается изучением асимптотических методов решения динамических задач теории упругости для тонких оболочек под руководством профессора А.Л. Гольденвейзера.

В 1984 г. Л.Ю. Коссович был переведен с должности доцента кафедры математической кибернетики на должность старшего научного сотрудника сроком на два года для завершения работы над докторской диссертацией. С этой же целью в 1984 г. был прикомандирован в Институт проблем механики АН СССР, где и защитил в 1989 г. диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по теме «Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек вращения».

Сразу после защиты докторской диссертации Л.Ю. Коссович был избран заведующим кафедрой теории упругости СГУ, переименованной позднее в кафедру математической теории упругости и биомеханики, в 1993 г. — деканом механико-математического факультета СГУ. В 1991 г. ему было присвоено ученое звание профессора. В 2003 г. Л.Ю. Коссович был избран на должность ректора СГУ.

Следует выделить наиболее крупные проекты, которые реализовывались под его руководством в данный период. В 2007 г. СГУ победил в конкурсе „Инновационные ВУЗы“, что положило начало новой миссии университета — инновационной деятельности (наряду с учебной, научной, исследовательской, воспитательной). В 2010 г. СГУ выиграл конкурс Программ развития инновационной инфраструктуры Минобрнауки на 2010–2012 гг.

В 2013 г. Л.Ю. Коссович был избран на должность президента СГУ. В это время успешно реализуются проект Фонда перспективных исследований „Разработка комплекса перспективных защитных и маскирующих материалов экипировки военнослужащего“ (2014–2017 гг.) и аванпроект „Обоснование исходных данных для разработки программно-аналитической системы обеспечения эффективного хирургического лечения патологий позвоночно-тазового комплекса“ (2016 г.). На базе СГУ в 2018 г. под его научным руководством началась реализация аванпроекта Фонда перспективных исследований „Обоснование возможности создания „умных“ терморегулирующих материалов экипировки“ и проекта „Разработка прототипа системы поддержки принятия врачебных решений в реконструктивной хирургии позвоночно-тазового комплекса“ (2018–2021 гг.). В настоящее время Л.Ю. Коссович со стороны СГУ руководит проектом по созданию серийного производства рулонных мембранных материалов, получаемых методом электроформования полимеров.

Главным своим учителем Л.Ю. Коссович считает выдающегося российского ученого, профессора А.Л. Гольденвейзера. Научные исследования Л.Ю. Коссовича в основном связаны с построением математических моделей нестационарных (в том числе динамических) волновых процессов в тонкостенных оболочках, основанных на использовании асимптотических методов. Эти исследования Л.Ю. Коссовича отражены в более чем ста научных публикациях и двух монографиях. С помощью указанных методов Л.Ю. Коссовичем были решены прикладные задачи, имеющие важное народнохозяйственное и оборонное значение. В основном эти задачи касались проблем излучения, поглощения и рассеяния волн в акустическом диапазоне. Вклад профессора Л.Ю. Коссовича в эту область механики был по достоинству оценен присуждением ему в 1998 г. Государственной премии РФ в области науки и техники за цикл работ „Фундаментальные проблемы теории тонкостенных конструкций“.

В настоящее время тематика научных исследований Л.Ю. Коссовича сконцентрирована в области расчета ударного воздействия на оболочечные конструкции, выявления краевого эффекта в подобного рода задачах, учета влияния диссипативных механизмов (таких как вязкость) на поведение и прочность оболочек. Значительное внимание он уделяет исследованиям в области биомеханики: проблемам эластичности стенок кровеносных сосудов, гидродинамике кровотока в патологически измененных сосудах и капиллярах, реологическому моделированию биоматериалов.

Профессор Л.Ю.Коссович — крупный организатор научной работы в России. Он является членом Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике; членом коллегии Министерства промышленности и энергетики Саратовской области; председателем диссертационного совета Д 212.243.10 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по научным специальностям: 01.02.04 — механика деформируемого твердого тела и 01.02.08 — биомеханика; почетным приглашенным профессором Брюнельского университета (г. Лондон, Великобритания); почетным доктором Башкирского государственного университета (г. Уфа); почетным профессором Западно-Казахстанского аграрно-технического университета имени Жангир хана (г. Уральск, Казахстан); депутатом Саратовской городской думы. В разные годы Л.Ю. Коссович являлся членом Общественного совета по профессиональному образованию при Комитете Государственной Думы по образованию и науке; являлся членом коллегии Министерства образования и науки Российской Федерации; членом Экспертного совета Председателя Военно-промышленной комиссии при Правительстве РФ

Плодотворный труд Л.Ю. Коссовича по достоинству отмечен государством и научным сообществом. Он удостоен Почетной грамоты Председателя Государственной Думы Федерального Собрания Российской Федерации за активную общественно-политическую деятельность (2009 г.); Благодарственного письма Полномочного представителя Президента Российской Федерации в Приволжском федеральном округе за большой вклад в развитие высшего профессионального образования, многолетний добросовестный труд в связи со 100-летием со дня основания университета (2009 г.); Патриаршей Грамоты, данной в благословение за усердные труды во славу Русской Православной Церкви (2009 г.); Ордена дружбы (2010 г.); Ордена Русской Православной церкви святителя Макария митрополита Московского III степени (2014 г.); звания почетный работник высшего профессионального образования (2011 г.).

Деятельность Л.Ю. Коссовича — ученого, педагога, организатора науки и образования в Саратовской области и в различных научных, научно-технических и экспертных советах, активная работа в диссертационных советах и редакциях научных журналов, наряду с его активным участием в подготовке высококвалифицированных научных кадров, без сомнения, имеют огромное значение для развития науки и техники в нашей стране.

Мы присоединяемся к поздравлениям и желаем Леониду Юрьевичу отменного здоровья, долгой активной творческой жизни и новых достижений в научной, педагогической и организационной деятельности.

**СПИСОК ИЗБРАННЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ
Л.Ю. КОССОВИЧА¹**

2008

Бокерия Л.А., Пирцхалаишвили З.К., Морозов К.М., Каменский А.В., Сальковский Ю.Е., Десятова А.С., Дзенис Ю.А., Коссович Л.Ю., Кириллова И.В., Гуляев Ю.П., Островский Н.В., Поляев В.О. Реконструкция сонной артерии человека заплатами из различных материалов (поиск оптимального материала для улучшения результатов пластики сонных бифуркаций) // *Анналы хирургии*, 2008. №2. С. 5–19.

Kamenskiy A.V., Pipinos I.I., Desyatova A.S., Salkovskiy Y.E., Kossovich L.Yu., Kirillova I.V., Bockeria L.A., Morozov K.M., Polyayev V.O. Finite element model of the patched human carotid // *Бюллетень НЦССХ им. А.Н. Бакулева РАМН Сердечно-сосудистые заболевания*, 2008. Т. 9. №56. С. 155.

Голубов Б.И., Кашин Б.С., Коссович Л.Ю., Сидоров С.П., Хромов А.П. 14-Я Саратовская зимняя школа „Современные проблемы теории функций и их приложения“, посвященная памяти академика П.Л. Ульянова (1928-2006) // *Вестник Российского фонда фундаментальных исследований*, 2008. №2(58). С. 22–24.

Коссович Л.Ю., Хромов А.П., Сидоров С.П. 14-Я Саратовская зимняя школа „Современные проблемы теории функций и их приложения“, посвященная памяти академика П.Л. Ульянова (1928–2006) // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*, 2008. Т. 8. №1. С. 76–77.

Коссович Л.Ю. Асимптотические методы в динамике оболочек при ударных воздействиях // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*, 2008. Т. 8. №2. С. 12–33.

Коссович Л.Ю. Международная конференция „XVIII Сессия международной школы по моделям механики сплошной среды“ // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*, 2008. Т. 8. №2. С. 85–87.

Kossovich L.Yu., Kirillova I.V. Dynamics of sheels under shock loading: An asymtotic approach / *Proceedings of the Ninth International conference on computational structures technology*. Athens. 2008. P. 1–20.

Kossovich L.Yu., Kirillova I.V., Gulaev Yu.P., Ivanov D.V., Kamenskiy A.V., Polgaev V.O., Ostrovskiy N.V., Morozov K.M. Mathematical Modelling of Human Carotid in Healthy, Affected or Post-Corrective Surgery Conditions / *Topical Problems in Solid Mechanics*. Elite Publishing House PVT. LTD., New Delhi, 2008. Pp. 235–250.

Коссович Л.Ю. Предисловие / В сборнике: *Инновационные методы и технологии в условиях новой образовательной парадигмы сборник научных трудов*. Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского; Е. Г. Елина (отв. ред.). Саратов, 2008. С. 10–12.

¹Работы располагаются в хронологическом порядке

2009

Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Гиперболические погранслои в составных цилиндрических оболочках // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, 2009. №3. С. 89–101.

Коссович Л.Ю. Саратовский государственный университет: традиции и инновации // Высшее образование в России, 2009. №12. С. 42–49.

Коссович Л.Ю., Кириллова И.В., Вениг С.Б. Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем // Высшее образование в России, 2009. №12. С. 61–66.

Коссович Л.Ю. Всероссийская конференция „III Сессия научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела“ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2009. Т. 9. №4-2. С. 149–152.

Kamenskiy A.V., Pipinos I.I., Desyatova A.S., Salkovskiy Yu.E., Kossovich L.Yu., Kirillova I.V., Bockeria L.A., Morozov K.M., Polgaev V.O., Lynch T.G., Dzenis Yu.A. Finite Element Model of the Patched Human Carotid // Vascular and Endovascular Surgery, 2009, Vol. 43. №6. Pp. 533–534.

Бокерия Л.А., Коссович Л.Ю., Морозов К.М., Кириллова И.В., Гуляев В.П., Каменский А.В., Десятова А.С. Выбор материала для пластики внутренней сонной артерии на основании числового анализа / В книге: Клиническая гемостазиология и гемореология в сердечно-сосудистой хирургии. Регионарная гемодинамика и микроциркуляция Министерство здравоохранения и социального развития Российской Федерации, Российская академия медицинских наук, Научный центр сердечно-сосудистой хирургии им. А.Н. Бакулева РАМН, Научное общество „Клиническая гемостазиология“. 2009. С. 40–41.

Коссович Л.Ю., Кириллова И.В., Вениг С.Б. Концентрация ресурсов // Аккредитация в образовании, 2009. №4(31). С. 99.

2010

Коссович Л.Ю., Сидоров С.П., Хромов А.П. 15-я Саратовская зимняя школа „Современные проблемы теории функций и их приложения“, посвященная 125-летию со дня рождения В.В. Голубева и 100-летию СГУ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2010. Т. 10. №3. С. 86–87.

Коссович, Л.Ю. Представляем книгу // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2010. Т. 10. №4. С. 65–68.

Коссович Л.Ю., Радаев Ю.Н. Профессор Дюис Данилович Ивлев (к 80-летию со дня рождения) // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2010. Т. 10. №4. С. 69–91.

Kossovich L.Yu., Salkovskiy Yu.E., Kirillova I.V. Electrospan Chitosan Nanofiber Materials as Born Dressing / IFMBE Proceedings Vol. 31. Singapore, Springer, 2010. Pp. 1212–1214.

Kossovich L.Yu., Kirillova I.V., Pavlova O., Salkovskiy Yu. Modelling of Hemodinamics and Mechanical Behaviour or Pathologically Tortuous Carotid Arteries / IFMBE Proceedings Vol. 31. Singapore, Springer, 2010. Pp. 860–862.

Kossovich L.Yu., Salkovskiy Y. Electrospan Nanofiber Structures for Advanced Nanocomposites // Proceedings of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology. Valencia, Spain, Civil-Comp Press, 2010. Paper 265, Pp. 1–9.

Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 280 с.

Коссович Л.Ю., Соловьев В.М., Кириллова И.В., Федорова А.Г. Моделирование живых систем с использованием высокопроизводительных вычислений / В сборнике: Телематика'2010 труды XVII Всероссийской научно-методической конференции. Российская академия наук, Национальный фонд подготовки кадров. 2010. С. 397–398.

2011

Дмитриев Ю.А., Сальковский Ю.Е., Коссович Л.Ю. Электроформование волокон из растворов хитозана с различным сроком хранения // Пластические массы, 2011. №7. С. 43–46.

Коссович Л.Ю., Юрко В.А., Кириллова И.В. Разложение решения задач теории упругости для полосы в ряд по модам // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2011. Т. 11. №2. С. 83–96.

Вильде М.В., Коссович Л.Ю. Асимптотическая модель дальнего поля волны Рэлея в многослойной пластине // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2011. Т. 11. №4. С. 74–86.

Коссович Л.Ю. Асимптотический анализ нестационарного напряженно-деформированного состояния тонких оболочек вращения при торцевых ударных воздействиях нормального типа // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011. №4–5. С. 2267–2268.

Козырева Е.В., Дмитриев Ю.А., Шиповская А.Б., Коссович Л.Ю. Оценка волокнообразующей способности хитозана по физико-химическим параметрам раствора полимера // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Химия. Биология. Экология, 2011. Т. 11, №1. С. 22–25.

Соловьев В.М., Коссович Л.Ю., Кириллова И.В. Моделирование живых систем с использованием высокопроизводительных вычислений / В сборнике: Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2011) Труды международной научной конференции. Ответственные за выпуск: Л.Б. Соколинский, К.С. Пан. 2011. С. 710.

2012

Вильде М.В., Коссович Л.Ю., Шевцова Ю.В. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая многослойной тонкой оболочки // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2012. Т. 12, №2. С. 56–64.

Ivanov D.V., Kossovich L.Yu., Salkovsky Y.E., „Biomechanics of the Willis Circle Arteries“, in B.H.V. Topping, (Editor), „Proceedings of the Eleventh International Conference on Computational Structures Technology“, Stirlingshire, UK, Civil-Comp Press, 2012. Paper 188. DOI: 10.4203/ccp.99.188

Kamenskiy A.V., Kirillova I.V., Kossovich L.Y., Salkovskiy Y.E., Dzenis Y.A., „Mechanically-Motivated Selection of Patching Material for the Patient-Specific Carotid Artery“, in B.H.V. Topping, (Editor), "Proceedings of the Eighth International Conference on Engineering Computational Technology Stirlingshire, UK, Civil-Comp Press, 2012. Paper 136. DOI: 10.4203/ccp.100.136

Ivanov D.V., Kossovich L.Yu., Salkovsky Y.E. Biomechanics of the Willis Circle Arteries / Proceedings of the Eleventh International Conference on Computational Structures Technology. Stirlingshire, UK, Civil-Comp Press, 2012. Paper 188. 2012. Pp. 1–15.

Kamenskiy A.V., Kirillova I.V., Kossovich L.Yu., Salkovsky Y.E. and Dzenis Y.A. Mechanically-Motivated Selection of Patching Material for the Patient-Specific Carotid Artery / Proceedings of the Eleventh International Conference on Computational Structures Technology. Stirlingshire, UK, Civil-Comp Press, 2012. Paper 136. 2012. Pp. 1–13.

Коссович Л.Ю., Кириллова И.В. Асимптотические методы в динамике оболочек вращения при ударных воздействиях нормального типа / В сборнике: VI сессия Научного совета РАН по механике Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова; под ред. Н.Ф. Морозов, М.Д. Старостенков, 2012. С. 18–20.

2013

Коссович Л.Ю., Голуб Ю.Г., Елина Е.Г. Национальный исследовательский университет в контексте модернизации образования // ALMA MATER (ВЕСТНИК ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ), 2013. №7. С. 6–10.

Ардазишвили Р.В., Вильде М.В., Коссович Л.Ю. Антисимметричные кромочные волны высшего порядка в пластинах // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2013. Т. 13. №1. С. 50–56.

Коссович Л.Ю., Морозов К.М., Павлова О.Е. Биомеханика сонной артерии человека с патологической извитостью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2013. Т. 13. №3. С. 76–82.

Коссович Л.Ю. На стыке наук // Финансы, 2013. №8. С. 62–64.

Коссович Л.Ю. Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского — будущее начинается сегодня // Русский инженер, 2013. №2(37). С. 28-29.

Kossovich L.Y., Kirillova I.V. Transit waves in shells of revolution under normal shock loading // Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics, Elite Publishing House Pvt Ltd, India. 2013. Pp. 186–200.

Коссович Л.Ю., Усонов Д.А. Научно-исследовательская работа — один из главных показателей эффективности деятельности вузов // Аккредитация в образовании, 2013. №3(63). С. 34–35.

2014

Ардазишвили Р.В., Вильде М.В., Коссович Л.Ю. Трехмерная поверхностная волна в полупространстве и кромочные волны в пластинах в случае смешанных граничных условий на поверхности распространения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физико-математические науки, 2014. №4(37). С. 53–64.

Kossovich E.L., Kirillova I.V., Kossovich L.Y., Safonov R.A., Ukrainskiy D.V., Apshtein S.A. Hybrid coarse-grained/atomistic model of „chitosan + carbon nanostructures“ composites // Journal of molecular modeling, 2014. Т. 20. №10. DOI: 10.1007/s00894-014-2452-9

Golyadkina A.A., Grishina O.A., Kirillova I.V., Kossovich L.Y., Chelnokova N.O. Biomechanical modeling of a human heart in normal and pathological states / Civil-Comp Proceedings, 2014. Т. 106.

Kossovich L.Y., Kirillova I.V., Kossovich E.L. Asymptotic models for flexural edge wave propagation in thin isotropic plates / Civil-Comp Proceedings, 2014. Т. 106.

Kossovich L., Golyadkina A., Kirillova I., Polienko A., Menishova L., Kossovich E., Morozov K. Biomechanical Modeling of the Left Ventricule of Human Heart with Postinfarction Aneurysm / CARDIOTECHNIX 2014, Proceedings of the 2nd International Congress on Cardiovascular Technologies, P. 36–41.

Kossovich L., Golyadkina A., Kirillova I., Morozov K., Kalinin A., Polienko A., Menishova L., Kossovich E. Patient-specific modeling of pathologically tortuous carotid artery / CARDIOTECHNIX 2014, Proceedings of the 2nd International Congress on Cardiovascular Technologies, P. 31–35.

Коссович Л.Ю., Кириллова И.В., Голядкина А.А., Полиенко А.В., Морозов К.М. Применение методов компьютерного моделирования в задачах сердечно-сосудистой хирургии / В сборнике: Компьютерные науки и информационные технологии Материалы Международной научной конференции. 2014. С. 174–175.

Менишова Л.Р., Коссович Л.Ю. Применение компьютерного моделирования при решении задач биомеханики толстого кишечника человека / В сборнике: Компьютерные науки и информационные технологии Материалы Международной научной конференции. 2014. С. 208–211.

2015

Ардазишвили Р.В., Вильде М.В., Коссович Л.Ю. Кромочные волны в пластинах с жестко защемленными лицевыми поверхностями при различных способах закрепления на торце // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2015. Т. 15. №2. С. 187–193.

Голубов Б.И., Кашин Б.С., Коссович Л.Ю., Сидоров С.П., Хромов А.П. Хроника научной жизни // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2015. Т. 15. №3. С. 357–359.

Ардазишвили Р.В., Вильде М.В., Коссович Л.Ю. Трехмерные фундаментальные кромочные волны в тонкой оболочке // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2015. №4(26). С. 109–124.

Golyadkina A.A., Kalinin A.A., Kirillova I.V., Kossovich E.L., Kossovich L.Y., Menishova L.R., Polienko A.V. Patient-specific system for prognosis of surgical treatment outcomes of human cardiovascular system / Proc. SPIE 9448, Saratov Fall Meeting 2014: Optical Technologies in Biophysics and Medicine XVI; Laser Physics and Photonics XVI; and Computational Biophysics, 94481F (March 19, 2015); DOI: 10.1117/12.2180033

Голядкина А.А., Иванов Д.В., Кириллова И.В., Коссович Е.Л., Павлова О.Е., Полиенко А.В., Сафонов Р.А. Биомеханика сонной артерии. Саратов, 2015. 174 с.

Коссович Л.Ю., Сафонов Р.А., Коссович Е.Л., Глуховской Е.Г., Донник А.М., Лукьянова В.О. Математическое моделирование технологии получения монослоев Ленгмюра-Блоджетт / В сборнике: Практическая биомеханика Материалы докладов Всероссийской конференции молодых ученых с международным участием. Ответственный редактор Л.Ю. Коссович. 2015. С. 103–104.

Сафонов Р.А., Коссович Л.Ю., Кириллова И.В., Шевцова М.С., Коссович Е.Л. Моделирование процесс накопления липопротеинов в стенках сосудов на ранних этапах атеросклероза / В сборнике: Практическая биомеханика Материалы докладов Всероссийской конференции молодых ученых с международным участием. Ответственный редактор Л.Ю. Коссович. 2015. С. 107–108.

Хайдарова Л.Р., Коссович Л.Ю., Голядкина А.А., Полиенко А.В. Применение метода конечных элементов для изучения механизма перистальтики толстого кишечника / В сборнике: Современные проблемы биомедицинской инженерии Сборник материалов Всероссийской молодежной научной конференции. 2015. С. 112–116.

Калинин А.А., Коссович Л.Ю. Способы исследования механических свойств биологических тканей / В сборнике: Практическая биомеханика Материалы докладов Всероссийской конференции молодых ученых с международным участием. Ответственный редактор Л.Ю. Коссович. 2015. С. 118–120.

Голядкина А.А., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю., Полиенко А.В., Челнокова Н.О. Биомеханика артерий мышечно-эластического типа / В сборнике: Актуальные проблемы механики сплошной среды Труды IV международной конференции. Институт механики НАН РА; Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. 2015. С. 134–138.

Донник А.М., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Биомеханический анализ пояснично-крестцового отдела позвоночника / В сборнике: Практическая биомеханика Материалы докладов Всероссийской конференции молодых ученых с международным участием. Ответственный редактор Л.Ю. Коссович. 2015. С. 15–16.

Коссович Е.Л., Сафонов Р.А., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю., Федьшин О.Я. Многомасштабное молекулярно-динамическое исследование механических свойств хитинхитозановых нанокмозитов / В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики сборник докладов. Составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров; ответственные редакторы: Д.А. Губайдуллин, А.И. Елизаров, Е.К. Липачев. 2015. С. 2005–2007.

Коссович Л.Ю., Кириллова И.В. Асимптотическая теория волновых процессов в тонких оболочках при ударных торцевых воздействиях тангенциального, изгибающего и нормального типов / В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики сборник докладов. Составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров; ответственные редакторы: Д.А. Губайдуллин, А.И. Елизаров, Е.К. Липачев. 2015. С. 2008–2010.

Коссович Л.Ю., Кириллова И.В., Голядкина А.А., Челнокова Н.О., Шевцова М.С., Сафонов Р.А., Калинин А.А. Биомеханика, гистоморфометрия и топология тканей артериальных сосудов человека / В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики сборник докладов. Составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров; ответственные редакторы: Д.А. Губайдуллин, А.И. Елизаров, Е.К. Липачев. 2015. С. 2011–2013.

Golyadkina A., Chelnokova N., Kirillova I., Kossovich L. Hystomorphological and biomechanical study of atherogenesis / В сборнике: IUTAM Symposium on Growing solids Symposium Materials. IPMech RAS; Edited by A. Manzhurov and N. Gupta. 2015. С. 28–31.

Хайдарова Л.Р., Коссович Л.Ю. Численное моделирование взаимодействия хирургических нитей и тканей толстой кишки / В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики сборник докладов. Составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров; ответственные редакторы: Д.А. Губайдуллин, А.И. Елизаров, Е.К. Липачев. 2015. С. 3960–3962.

Safonov R.A., Kossovich E.L., Kirillova I.V., Kossovich L.Yu., Fedyshin O.Ya., Donnik A.M. Molecular dynamics study of high density lipoprotein interaction with glycosialix layer of human arteries endothelial cells / В книге: Наночастицы, наноструктурные покрытия и микроконтейнеры: технология, свойства, применения Scientific program 6th International Conference. 2015. С. 54–55.

Хайдарова Л.Р., Коссович Л.Ю. Исследование влияния хирургических нитей на ткани толстой кишки / В сборнике: Практическая биомеханика Материалы докладов Всероссийской конференции молодых ученых с международным участием. Ответственный редактор Л.Ю. Коссович. 2015. С. 93–94.

2016

Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Эллиптический погранслои в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа // Вестник Санкт-петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, 2016. Т. 3. №1. С. 139–146.

Kossovich L.Yu., Kirillova I.V., Golyadkina A.A., Polienko A.V., Chelnokova N.O., Ivanov D.I., Murylev V.V. Patient-specific modeling of human cardiovascular system elements / Optical Elastography and Tissue Biomechanics III, edited by K.V. Larin, D.D. Sampson, Proc. of SPIE, 2016. Vol. 9710, 971014. DOI: 10.1117/12.2208426

Голядкина А.А., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю., Сафонов Р.А. Исследование механических свойств тканей позвонков / В книге: Современные проблемы механики сплошной среды тезисы докладов XVIII Международной конференции. Южный федеральный университет. 2016. С. 54.

Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Задача для эллиптического погранслоя в цилиндрической оболочке при ударных поверхностных воздействиях нормального типа / В книге: Современные проблемы механики сплошной среды тезисы докладов XVIII Международной конференции. Южный федеральный университет. 2016. С. 96.

Донник А.М., Калинин А.А., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Программные продукты медицинского назначения для планирования хирургического лечения (обзор) / В сборнике: Практическая биомеханика. Материалы докладов Всероссийской конференции молодых ученых с международным участием. Под ред. Л.Ю. Коссовича. 2016. С. 99–100.

2017

Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Уточненные уравнения эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа // Вестник Санкт-петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, 2017. Т. 4. №1. С. 113–120.

Fedonnikov A.S., Kovtun A.L., Kossovich L.Y., Kirillova I.V., Kolesnikova A.S., Norkin I.A. Preoperative planning software in vertebrology: issues and outlook // Russian Open Medical Journal, 2017. Vol. 6, №4. P. 1–6. DOI: 10.15275/rusomj.2017.0408

Kirillova I.V., Kossovich L.Y. Refined equations of elliptic boundary layer in shells of revolution under normal shock surface loading // Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics. 2017. Т. 50. No 1. Pp. 68–73. DOI: 10.3103/S1063454117010058

Safonov R.A., Golyadkina A.A., Kirillova I.V., Kossovich L.Y. Usage of CT data in biomechanical research // Proc. SPIE 10068, Imaging, Manipulation, and Analysis of Biomolecules, Cells, and Tissues XV, 100681O, 2017. DOI: 10.1117/12.2250881

Kudyashev A.L., Hominets V.V., Teremshonok A.V., Korostelev K.E., Nagorny E.B., Dol A.V., Ivanov D.V., Kirillova I.V., Kossovich L.Y. Biomechanical background for the formation of proximal junctional kyphosis after the transpedicular fixation of the lumbarian spine // Российский журнал биомеханики, 2017. Т. 21. №3. С. 270–278.

Fedonnikov A.S., Kovtun A.L., Kossovich L.Y., Kirillova I.V., Kolesnikova A.S., Norkin I.A. Preoperative planning software in vertebrology: issues and outlook // Russian open medical journal, 2017. Т. 6. №4. С. 408.

Лунева А.Д., Колесникова А.С., Ву Х.А., Сафонов Р.А., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Подбор весовых коэффициентов в рамках метода активных контуров для

создания твердотельных моделей костных систем / В сборнике: Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине 2017. Материалы Всероссийской школы-семинара. Под ред. Д.А. Усанова. 2017. С. 103–105.

Иванов Д.В., Доль А.В., Киреев С.И., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Трехмерная модель комплекса „РЕБРА–ПОЗВОНОЧНИК–ТАЗ“ / В сборнике: Практическая биомеханика материалы докладов Всероссийской конференции молодых ученых с международным участием, посвященной 100-летию физико-математического образования в Саратовском государственном университете. 2017. С. 18–19.

Лунева А.Д., Колесникова А.С., Ву Х.А., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю., Левченко К.К. Актуальность биомеханического моделирования в предоперационном планировании / В сборнике: Практическая биомеханика материалы докладов Всероссийской конференции молодых ученых с международным участием, посвященной 100-летию физико-математического образования в Саратовском государственном университете. 2017. С. 77–78.

Колесникова А.С., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Основные функциональные возможности системы предоперационного планирования MEDICAD / В сборнике: Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине 2017. Материалы Всероссийской школы-семинара. Под ред. Д.А. Усанова. 2017. С. 85–88.

Донник А.М., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю., Лихачев С.В., Норкин И.А. Биомеханическое моделирование фиксации груднопоясничного отдела позвоночника транспедикулярной системой / В сборнике: Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине — 2017 Материалы Всероссийской школы-семинара. Под ред. Д.А. Усанова. 2017. С. 91–92.

Колесникова А.С., Мазепа М.М., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Моделирование деформации колонного графена: размерный эффект / В сборнике: Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела 2017. С. 39–41.

2018

Kolesnikova A.S., Kirillova I.V., Kossovich L.Y. The deflection of a carbon composite carbon nanotube/graphene using molecular dynamics simulation // SPIE 10508, Reporters, Markers, Dyes, Nanoparticles, and Molecular Probes for Biomedical Applications X, 105080K (20 February 2018). DOI: 10.1117/12.2284640

Vu H.A., Safonov R.A., Kolesnikova A.S., Kirillova I.V., Kossovich L.Y. Method of active contour for segmentation of bone systems on bitmap images / Proc. SPIE 10497, Imaging, Manipulation, and Analysis of Biomolecules, Cells, and Tissues XVI, 104971S (20 February 2018). DOI: 10.1117/12.2284388

Колесникова А.С., Голядкина А.А., Коссович Л.Ю., Кириллова И.В. Системы поддержки принятия решения в травматологии и ортопедии / В сборнике: Достижения российской травматологии и ортопедии Материалы XI Всероссийского съезда травматологов-ортопедов. В 3-х томах. 2018. С. 154–156.

Лихачев С.В., Арсениевич В.Б., Зарецков В.В., Норкин И.А., Шульга А.Е., Донник А.М., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Биомеханическое моделирование хирургической реконструкции переходных зон грудного и поясничного отделов позвоночника / В сборнике: Достижения российской травматологии и ортопедии Материалы XI Всероссийского съезда травматологов-ортопедов. В 3-х тт. 2018. С. 216–220.

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ТЕОРИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ, СЛЕДУЮЩИЕ ИЗ ВАРИАЦИОННЫХ СИММЕТРИЙ ДЕЙСТВИЯ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются проблемы математического моделирования нелинейного гиперболического термоупругого континуума и вывода дивергентных законов сохранения в терминах физических теорий поля. Приводятся действие и плотность действия для гиперболического термоупругого континуума. В условиях трансляционных симметрий плотности действия конструируется тензор энергии–импульса. Выведены точные формы гамильтониана, вектора Умова–Пойнтинга, вектора псевдоимпульса и тензора напряжений Эшелби. Изучены масштабные симметрии действия и получены соответствующие законы сохранения.

Ключевые слова: термоупругость, микроструктура, поле, действие, ковариантность, закон сохранения, 4-ток, тензор энергии–импульса.

УДК: 539.374

1. Введение

Современные структурные и функциональные материалы проявляют физические свойства, которые невозможно описать в рамках классической механики сплошных сред. Например, поведение нематических жидких кристаллов, аномальный пьезоэлектрический эффект в кварце, дисперсия упругих волн, эффект “второго звука” и ряд других экспериментально наблюдаемых аномальных физических свойств. Поэтому разработка математических моделей процессов синтеза и эксплуатации материалов с нелинейными термомеханическими особенностями и описание их свойств является актуальной проблемой современной механики континуума. Математические теории сложных гиперболических континуумов могут быть построены в рамках формализма

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н., 2018

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radaev@ipmnet.ru, y.radaev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844-а)

Поступила 10.08.2018

теории поля [1-17]. Законы сохранения играют большую роль в математической физике; например, они служат для верификации результатов численного моделирования в качестве первых интегралов системы дифференциальных уравнений в частных производных, определяющих математическую модель. Кроме того, интегральная форма законов сохранения может быть использована при разработке метода конечных элементов и критериев физической корректности математической модели [18-20], а также в расчетах сильных разрывов физических полей.

Применение теории поля как инструмента математического моделирования приводит к естественным формулировкам определяющих соотношений и законов сохранения. В представляемой работе, опираясь на теорию Нетер [21] инвариантных вариационных функционалов относительно однопараметрических групп преобразований пространственно-временных координат и физических полей, конструируется тензор энергии-импульса, выводятся точные формы гамильтониана, вектора Умова-Пойнтинга, вектора псевдоимпульса и тензора напряжений Эшелби.

2. Интеграл действия. 4-вектор тока. Тензор энергии-импульса, гамильтониан, псевдоимпульс, тензор напряжений Эшелби

Формализм теории поля основан на математическом описании физических полей интегральным функционалом действия. Общая форма вариационного интеграла действия в заданной области 4-пространства-времени имеет вид

$$\mathcal{I} = \int \mathcal{L}(X^\beta, \varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k) d^4 X, \quad (1)$$

где φ^k — физические поля, \mathcal{L} — плотность Лагранжиана, $d^4 X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4$ — элементарный 4-объем в пространстве-времени.

Принцип наименьшего действия утверждает, что фактическое поле реализуется в пространстве-времени таким образом, что действие (1) минимально, т. е. для любых допустимых вариаций физических полей φ^k и неизменных координатах X^β справедливо следующее уравнение:

$$\delta \mathcal{I} = 0. \quad (2)$$

В этом случае можно получить классические уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^k)} = 0.$$

В общем случае закон сохранения (2) имеет следующую дивергентную 4-ковариантную форму

$$\partial_\beta J^\beta = 0,$$

где J^β — 4-вектор тока. Закон сохранения выполняется в силу уравнений поля, т. е. когда физические поля удовлетворяют уравнениям Эйлера-Лагранжа, и не может быть интерпретирован независимо от уравнений поля.

Используя конечные вариации $\delta^\nabla = \delta/\varepsilon$, 4-вектор тока на основании теории Нетер может быть получен в виде [4, 5]

$$J^\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \delta^\nabla \varphi^k + \left(\mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \right) \delta^\nabla X^\alpha, \quad (3)$$

если известны вариационные симметрии действия (1).

В наиболее важных случаях интегральная плотность действия \mathcal{L} инвариантна относительно сдвигов координат X^α . Очевидно, это имеет место, когда \mathcal{L} не зависит от переменных X^α явно. В этом случае можно без труда определить 4-вектор тока и 4-ковариантный тензор энергии–импульса и сформулировать соответствующие законы сохранения. Тензор энергии–импульса T_{α}^{β} ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$) определяется следующей формулой [4, 5]:

$$T_{\alpha}^{\beta} = \mathcal{L}\delta_{\alpha}^{\beta} - (\partial_{\alpha}\varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta}\varphi^k)}. \quad (4)$$

Компоненты тензора энергии–импульса естественным образом разделяются на 4 группы ($\lambda, \mu = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad T_{\lambda}^{\mu} &= \mathcal{L}\delta_{\lambda}^{\mu} - (\partial_{\lambda}\varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi^k)}, \\ \text{(ii)} \quad T_{4}^{\mu} &= \mathcal{L}\delta_{4}^{\mu} - (\partial_{4}\varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi^k)}, \\ \text{(iii)} \quad T_{\lambda}^{4} &= \mathcal{L}\delta_{\lambda}^{4} - (\partial_{\lambda}\varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{4}\varphi^k)}, \\ \text{(iv)} \quad T_{4}^{4} &= \mathcal{L}\delta_{4}^{4} - (\partial_{4}\varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{4}\varphi^k)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (i)–(iv) следует, что компоненты тензора энергии–импульса включают известные физические величины: $T_{4}^{4} = H$ — гамильтониан, $T_{4}^{\mu} = \Gamma^{\mu}$ — вектор Умова–Пойнтинга, $T_{\lambda}^{4} = P_{\lambda}$ вектор псевдоимпульса, $T_{\lambda}^{\mu} = -P_{\lambda}^{\mu}$ — тензор напряжений Эшелби.

Законы сохранения, соответствующие трансляционным симметриям действия, можно представить в форме квазилинейного уравнения

$$\partial_{\mu} T_{\lambda}^{\mu} = 0 \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4). \quad (6)$$

Уравнения (6) можно разделить на следующие симметричные канонические уравнения

$$-\dot{H} + \partial_{\mu}\Gamma^{\mu} = 0, \quad -\dot{P}_{\lambda} + \partial_{\mu}P_{\lambda}^{\mu} = 0. \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3) \quad (7)$$

Уравнения (7) — это уравнение баланса энергии и уравнение баланса псевдоимпульса соответственно.

3. Законы сохранения для гиперболического термоупругого поля

Лагранжиан связанного термоупругого поля в рамках 4×4 -формализма в *декартовой системе* координат можно представить как разность кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца ψ

$$\mathcal{L}(X_{\alpha}, \dot{x}_j, \dot{\vartheta}, \partial_{\alpha}x_j, \partial_{\alpha}\vartheta) = \frac{1}{2}\rho_{\text{R}}(X_{\alpha})\dot{x}_k\dot{x}_k - \psi(X_{\alpha}, \dot{\vartheta}, \partial_{\alpha}x_j, \partial_{\alpha}\vartheta). \quad (8)$$

Здесь ρ_{R} обозначает референциальную массовую плотность, x_j — переменные Эйлера, ϑ — поле температурного смещения, связанное с температурой θ уравнением $\theta = \dot{\vartheta}$. Уравнения поля, соответствующие лагранжиану (8), могут быть представлены в следующем виде

$$\partial_{\alpha}S_j^{\alpha} - \partial_{4}P_j = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \quad (9)$$

$$\partial_{\alpha}J_{\text{R}}^{\alpha} + \partial_{4}s = 0. \quad (10)$$

Здесь мы использовали следующие обозначения:

$$S_{;j}^{\alpha} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}x^j)}, \quad P_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_4x^j)}, \quad s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_4\vartheta)}, \quad j_{\text{R}}^{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}\vartheta)}. \quad (11)$$

Законы сохранения, соответствующие трансляционной инвариантности интеграла термоупругого действия, т.е. когда плотность лагранжиана не зависит от пространственных координат X_{β} ($\beta = 1, 2, 3$) и временной переменной записываются в форме

$$\partial_{\beta}(\mathcal{L}\delta_{\alpha}^{\beta} + S_{;j}^{\beta} \partial_{\alpha}x_j - j_{\text{R}}^{\beta} \partial_{\alpha}\vartheta) - (\rho_{\text{R}}\dot{x}_j \partial_{\alpha}x_j + s\partial_{\alpha}\vartheta) \cdot = 0, \quad (12)$$

$$\partial_{\beta}(S_{;j}^{\beta} \dot{x}_j - j_{\text{R}}^{\beta} \theta) + (\mathcal{L} - \rho_{\text{R}}\dot{x}_j \dot{x}_j - s\theta) \cdot = 0. \quad (13)$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3) \quad (14)$$

Первое уравнение в (12) является уравнением баланса псевдоимпульса термоупругого поля.

Второе уравнение в (12) путем замены плотности лагранжиана (8) может быть представлено как

$$\partial_{\beta} \left(S_{;j}^{\beta} v_j - j_{\text{R}}^{\beta} \theta \right) - \left(\frac{1}{2} \rho_{\text{R}} v_k v_k + \psi + s\theta \right) \cdot = 0. \quad (15)$$

Заметим, что для вывода закона сохранения (15) достаточно принять инвариантность интеграла термоупругого действия при трансляционных преобразованиях пространства–времени и выполнение уравнений поля (9).

Предполагая, что термоупругий континуум неоднороден, т.е. плотность лагранжиана явно зависит от лагранжевых координат X_{β} , но не зависит от временной переменной, получим

$$\partial_{\beta}^{\text{expl}} \mathcal{L} \neq 0 \quad (\beta = 1, 2, 3), \quad (16)$$

вместо закона сохранения мы имеем уравнение баланса

$$\partial_{\beta}(\mathcal{L}\delta_{\alpha}^{\beta} + S_{;j}^{\beta} \partial_{\alpha}x_j - j_{\text{R}}^{\beta} \partial_{\alpha}\vartheta) - (\rho_{\text{R}}\dot{x}_j \partial_{\alpha}x_j + s\partial_{\alpha}\vartheta) \cdot = \partial_{\beta}^{\text{expl}} \mathcal{L}. \quad (17)$$

Другие законы сохранения соответствуют однопараметрической группе масштабных преобразований [22-24] переменных Эйлера и Лагранжа

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{\alpha} &= X_{\alpha} + \varepsilon X_{\alpha}, \\ \tilde{x}_j &= x_j - \varepsilon x_j, \end{aligned} \quad (18)$$

где $x_4 = \vartheta$.

Инфинитизимальный оператор однопараметрической группы (18) находится в виде

$$\varsigma \cdot \partial = X_{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial X_{\gamma}} \right)_{\text{expl}} - x_k \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (19)$$

Инфинитизимальный оператор один раз продолженной группы (18) получается в форме

$$\varsigma_1 \cdot \partial = X_{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial X_{\gamma}} \right)_{\text{expl}} - x_k \frac{\partial}{\partial x_k} - 2(\partial_{\alpha}x_j) \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha}x_j)}. \quad (20)$$

Критерий инфинитизимальной инвариантности функционала действия выражается уравнением

$$X_\gamma \partial_\gamma^{\text{expl}} \mathcal{L} - 2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta x_j)} \right) \partial_\beta x_j + 4\mathcal{L} = 0. \quad (21)$$

Если термоупругий континуум однороден и лагранжиан инвариантен относительно сдвигов по времени, то любой лагранжиан, квадратично зависящий от градиентов $\partial_\beta x_j$, удовлетворяет критерию (21), а термоупругое поле имеет масштабные симметрии (18). В этом случае можно получить соответствующие законы сохранения с помощью теории Нетер. Таким образом, для термоупругой деформации и смещения температуры однородного гиперболического термоупругого континуума, удовлетворяющего уравнениям поля (9), справедлив следующий закон сохранения

$$\partial_\sigma J^\sigma = 0 \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4),$$

где 4-вектор тока может быть представлен в виде

$$J^\sigma = X_\sigma \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma x_k)} (-x_k - X_\gamma \partial_\gamma x_k) \quad (\sigma, \gamma = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2, 3, 4).$$

Окончательно, рассматриваемый закон сохранения можно получить в следующей дивергентной форме

$$\begin{aligned} \partial_\beta \left[(\mathcal{L} \delta_\alpha^\beta + S_{\cdot j}^{\beta \cdot} \partial_\alpha x_j - j_{\text{R}}^\beta \partial_\alpha \vartheta) X_\alpha + (S_{\cdot j}^{\beta \cdot} \dot{x}_j - j_{\text{R}}^\beta \theta) t + S_{\cdot j}^{\beta \cdot} x_j - \vartheta j_{\text{R}}^\beta \right] + \\ + [\mathcal{H} t - (\rho_{\text{R}} \dot{x}_j \partial_\alpha x_j + s \partial_\alpha \vartheta) X_\alpha - \rho_{\text{R}} \dot{x}_j x_j - s \vartheta] = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

с гамильтонианом поля, определяемым согласно

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \rho_{\text{R}} \dot{x}_k \dot{x}_k + \psi + s \vartheta.$$

Подводя итоги, заметим, что в рамках теоретико-полевого формализма определены все канонические физические переменные, относящиеся к теории связанной гиперболической термоупругости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. E. Green and P. M. Naghdi, *J. Therm. Stress*, 1992, Vol. 15, Pp. 253–264.
- [2] A. E. Green and P. M. Naghdi, *J. Elasticity*, 1993, Vol. 31, Pp. 189–208.
- [3] E. et F. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, Paris, 1909, p. 226.
- [4] V. A. Kovalev and Y. N. Radayev, *Elements of the Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants*, FIZMATLIT, Moscow, 2009, p. 156.
- [5] V. A. Kovalev and Y. N. Radayev, *Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics*, Saratov University Publisher, Saratov, 2010, p. 328.
- [6] V. A. Kovalev and Y. N. Radayev and D. A. Semenov, 2009, *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics*, Vol. 9, Iss. 5, Pp. 94–127.
- [7] V. A. Kovalev and Y. N. Radayev, *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, Vol. 12, Iss. 4, Pp. 71–79.
- [8] E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2014, Vol. 4(37), Pp. 85–97.

- [9] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, Vol. 14, Iss. 1, Pp.77–87.
- [10] E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, 2015, *Mat. Phys. and Mech.*, Vol. 23, Pp. 10-13.
- [11] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*, 2015, Vol. 3(25), Pp. 61–65.
- [12] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, 2015, *Ivestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics*, Vol. 15, Iss. 1, Pp. 79–89.
- [13] E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, On shock wave and weak wave surfaces in micropolar thermoelastic continuum, *Proceedings of the International conference Topical Problems of Continuum Mechanics*, 21-26 September 2015, Tsaghkadzor, Armenia, Erevan, National University of Architecture and Construction of Armenia Publishing, 2015, Pp. 444–448.
- [14] E. V. Murashkin, COMPATIBILITY CONDITIONS IN MICROPOLAR THERMOELASTICITY, J.M. Floryan, *Contributions to the Foundations of Multidisciplinary Research in Mechanics. Papers presented during the 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics ICTAM2016*, Montreal 22-26, 2016, 2016, Montreal, Canada, ICTAM, Pp. 2271–2272.
- [15] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, METAMATERIAL MODELS OF CONTINUUM MULTIPHYSICS, *Mechanics: Proceedings of the International School-Conference of Young Scientists*, 3-7 October 2016, Tsakhkadzor, Armenia, Erevan, National University of Architecture and Construction of Armenia Publishing, 2016, Pp. 160-163.
- [16] E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, On Thermodynamics of Wave Processes of Heat Transport, *Mechanics for Materials and Technologies*, Vol. 46, *Advanced Structured Materials*, Springer, 2017, Cham, eds. H. Altenbach and R. V. Goldstein and E. V. Murashkin, Pp. 363–376.
- [17] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, *JPCS*, 2017, 788(1), Pp. 012043.
- [18] T. G. Shepherd, 1990, *Advances in Geophysics*, Vol. 32, Pp. 287-338, doi:10.1016/S0065-2687(08)60429-X.
- [19] A. Kurganov and E. Tadmor, 2000, *Journal of Computational Physics*, Vol. 160, Iss. 1, Pp. 241-282, doi:10.1006/jcph.2000.6459
- [20] G. A. Sod, *Journal of Computational Physics*, Vol. 27, Iss. 1, 1978, Pp. 1-31, doi:10.1016/0021-9991(78)90023-2.
- [21] E. Noether, Invariante Variations probleme, *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Nachrichten. Mathematisch-Physikalische Klasse Heft, Weidmannsche Buchhandlung*, 1918, Vol. 2, Berlin, Pp. 235-257.
- [22] L. V. Ovsyannikov, *Group Analysis of Differential Equations*, Nauka, Moscow, 1978, p. 400.
- [23] N. H. Ibragimov, *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*, Springer, Dordrecht, 1985, p. 394.
- [24] N. H. Ibragimov, *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Chichester, 1999, p. 366.

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

**CONSERVATION LAWS FOR HYPERBOLIC THERMOELASTICITY
CORRESPONDING TO THE VARIATIONAL SYMMETRIES OF ACTION**

Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The mathematical modelling of hyperbolic thermoelastic continuum is carried out in terms of the field theory formalism. The action and the action density for the hyperbolic thermoelastic continuum are discussed. The energy–momentum tensor is constructed in virtue of translational symmetries of the action density. The Hamiltonian, the Umov–Poynting vector, the pseudomomentum vector and the Eshelby stress tensor are derived comprising the all physical quantities of the classical field theory. Scale symmetries of the action are investigated and the corresponding conservation laws are obtained.

Keywords: thermoelasticity, microstructure, field, action, covariance, conservation law, 4-current, energy–momentum tensor.

REFERENCES

- [1] A. E. Green and P. M. Naghdi, *J. Therm. Stress*, 1992, Vol. 15, Pp. 253–264.
- [2] A. E. Green and P. M. Naghdi, *J. Elasticity*, 1993, Vol. 31, Pp. 189–208.
- [3] E. et F. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, Paris, 1909, p. 226.
- [4] V. A. Kovalev and Y. N. Radayev, *Elements of the Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants*, FIZMATLIT, Moscow, 2009, p. 156.
- [5] V. A. Kovalev and Y. N. Radayev, *Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics*, Saratov University Publisher, Saratov, 2010, p. 328.
- [6] V. A. Kovalev and Y. N. Radayev and D. A. Semenov, 2009, *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics*, Vol. 9, Iss. 5, Pp. 94–127.
- [7] V. A. Kovalev and Y. N. Radayev, *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, Vol. 12, Iss. 4, Pp. 71–79.
- [8] E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2014, Vol. 4(37), Pp. 85–97.
- [9] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, Vol. 14, Iss. 1, Pp.77–87.
- [10] E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, 2015, *Mat. Phys. and Mech.*, Vol. 23, Pp. 10-13.
- [11] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*, 2015, Vol. 3(25), Pp. 61–65.

Murashkin Evgenii Valeryevich

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Ph.D., Senior Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

Radayev Yuri Nickolaevich

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

- [12] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, 2015, *Ivestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics*, Vol. 15, Iss. 1, Pp. 79–89.
- [13] E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, On shock wave and weak wave surfaces in micropolar thermoelastic continuum, *Proceedings of the International conference Topical Problems of Continuum Mechanics*, 21-26 September 2015, Tsaghkadzor, Armenia, Erevan, National University of Architecture and Construction of Armenia Publishing, 2015, Pp. 444–448.
- [14] E. V. Murashkin, COMPATIBILITY CONDITIONS IN MICROPOLAR THERMOELASTICITY, J.M. Floryan, *Contributions to the Foundations of Multidisciplinary Research in Mechanics. Papers presented during the 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics ICTAM2016*, Montreal 22-26, 2016, 2016, Montreal, Canada, ICTAM, Pp. 2271–2272.
- [15] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, METAMATERIAL MODELS OF CONTINUUM MULTIPHYSICS, *Mechanics: Proceedings of the International School-Conference of Young Scientists*, 3-7 October 2016, Tsakhkadzor, Armenia, Erevan, National University of Architecture and Construction of Armenia Publishing, 2016, Pp. 160-163.
- [16] E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, On Thermodynamics of Wave Processes of Heat Transport, *Mechanics for Materials and Technologies*, Vol. 46, *Advanced Structured Materials*, Springer, 2017, Cham, eds. H. Altenbach and R. V. Goldstein and E. V. Murashkin, Pp. 363–376.
- [17] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, *JPCS*, 2017, 788(1), Pp. 012043.
- [18] T. G. Shepherd, 1990, *Advances in Geophysics*, Vol. 32, Pp. 287-338, doi:10.1016/S0065-2687(08)60429-X.
- [19] A. Kurganov and E. Tadmor, 2000, *Journal of Computational Physics*, Vol. 160, Iss. 1, Pp. 241-282, doi:10.1006/jcph.2000.6459
- [20] G. A. Sod, *Journal of Computational Physics*, Vol. 27, Iss. 1, 1978, Pp. 1-31, doi:10.1016/0021-9991(78)90023-2.
- [21] E. Noether, Invariante Variations probleme, *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Nachrichten. Mathematisch-Physikalische Klasse Heft, Weidmannsche Buchhandlung*, 1918, Vol. 2, Berlin, Pp. 235-257.
- [22] L. V. Ovsyannikov, *Group Analysis of Differential Equations*, Nauka, Moscow, 1978, p. 400.
- [23] N. H. Ibragimov, *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*, Springer, Dordrecht, 1985, p. 394.
- [24] N. H. Ibragimov, *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Chichester, 1999, p. 366.

Ю. В. Немировский

ДОПРЕДЕЛЬНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ АРМИРОВАННЫХ БЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

Аннотация. Анализируются возможные общие соотношения для описания напряженно-деформированного состояния конструкций из гибридных армированных бетонов, как слоистых неоднородных конструкций с кусочно-непрерывными изменениями свойств за счет изменения структур армирования и физико-механических характеристик фазовых материалов. Применительно к стержневым конструкциям обсуждаются возможные и удобные для расчетов уравнения состояния. Дан обзор решений полученных с их помощью задач продольно-поперечного изгиба армированных балок разных сечений: однитаворных, двутаворных, трапецевидных, и в виде срезанного эллиптического пояса, а также исследование рационального распределения в них арматуры.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, гибридные армированные бетоны, слоисто-волоконистые конструкции, физико-механические характеристики, фазовые материалы, продольно-поперечный изгиб, стержневые конструкции, рациональное армирование.

УДК: 539.374

Теория создания современных гибридных армированных строительных сооружений с физико-механической точки зрения при математическом моделировании процессов деформирования и предельных состояний требует рассматривать их как неоднородные слоисто-волоконистые конструкции с непрерывным во времени изменением физико-механических свойств вследствие изменений внешних условий термосиловых воздействий и взаимодействия составляющих общую среду фазовых материалов. При этом следует выделять два различных типа таких комбинированных сред в конструкции: дисперсно-упрочненные среды матриц-бетонов и среды с выделенными направлениями усиления – армирующие среды. Последние проявляют неоднородные и анизотропные свойства в зависимости от степени укладки и направлений траекторий армирования. Такие среды с гетерогенными структурами обычно называют композитными

© Немировский Ю. В., 2018

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Кабинета Министров Чувашской Республики в рамках научного проекта № 17-41-210272.

Поступила 01.08.2018

материалами (КМ) и их поведение можно изучать на основе законов механики сплошных сред в случаях когда градиенты прикладываемых внешних нагрузок и температур на расстояниях порядка масштаба неоднородности δ столь незначителен, что ими можно пренебречь.

В этих условиях можно ввести представительный элемент среды с достаточно малым объемом V , характерный размер которого сравним с δ . После чего можно за счет осреднения по объему V перейти от исследования микронапряжений σ_{ij} к макронапряжениям $\langle \sigma_{ij} \rangle$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV. \quad (1)$$

Это позволяет при известных законах деформирования микронапряжений фазовых материалов построить закон деформирования соответствующего КМ [1-7].

В большинстве случаев такие закономерности можно построить опираясь на модели линейно-упругих или линейных упруго-вязких фазовых материалов с установлением определенных усредненных характеристик упругих жесткостей и вязких сопротивлений [8]. При малых уровнях нагрузок и температур использование такого подхода вполне приемлемо. Однако при средних и относительно высоких уровнях нагружения и нагрева в силу гетерогенности КМ и больших различий в особенностях деформирования фазовых материалов возникает необходимость учета их нелинейных свойств, что очень часто приводит к необходимости разработок специальных конечно-элементных программ для анализа поведения даже простейших микрообразцов из гибридных КМ.

Сложность прогнозирования термомеханического состояния заключается в том, что многие факторы оказывают существенное влияние на деформационные свойства КМ-бетонов: начальные технологические напряжения, термочувствительность фазовых материалов, химическая и климатическая чувствительность, пористость, состав бетонной смеси, температурный режим твердения и эксплуатации конструкций, скорость процессов деформирования, уровень водоцементного отношения, природа и структура расположения армирующих элементов. При разработке математической модели деформирования требуется проведение большой программы испытаний образцов-свидетелей соответствующих фазовых материалов в рамках широкого изменения влияющих факторов и испытаний изготовленных контролируемой единой технологии образцов-свидетелей КМ. Такая информация зачастую неизвестна для многих фазовых материалов. Чаще всего для них известны лишь модули упругости E_i , характеристики максимального упрочнения $(\sigma_{i*}, \varepsilon_{i*})$, разрушения $(\sigma_{i**}, \varepsilon_{i**})$ для i -го фазового материала. Поэтому при разработке аппроксимирующих зависимостей диаграмм деформирования следует исходить из максимально упрощенных и учитывающих основные наблюдаемые в экспериментах качественные свойства и количественно зафиксированные характеристики. Анализ многочисленных экспериментов на образцах армирующих волокон (металлических, пластиковых, базальтовых) при растяжении чаще всего дает практически линейную диаграмму, а при сжатии сильно нелинейную, бетоны – обладают тем же свойством [10,13–15,20].

Учитывая это, примем, как и в [5, 21] для всех фазовых материалов однонаправленного гибридного композита аппроксимации в виде кубических полиномов

$$\sigma_i = \sigma_i^0 + A_{1i}\bar{\varepsilon}_i + A_{2i}\bar{\varepsilon}_i^2 + A_{3i}\bar{\varepsilon}_i^3, \quad \bar{\varepsilon}_i = \varepsilon - \varepsilon_i^\theta, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

здесь σ_i^0 – начальные напряжения; ε_i^θ – температурные деформации; σ_i – напряжение в i -ом фазовом материале, ε – деформация; A_{1i}, A_{2i}, A_{3i} – параметры аппроксимации i -го фазового материала, зависящие в общем случае от температуры и скорости деформации. Эта зависимость справедлива в диапазоне деформирования

$$-\min(\varepsilon_{i*}^- - \varepsilon_i^\theta) \leq \varepsilon \leq \min(\varepsilon_{i*}^+ + \varepsilon_i^\theta), \quad (3)$$

где ε_{i*}^\pm – предельные деформации предразрушения i -го фазового материала при растяжении (+) и сжатии (-).

Тогда на основании структурной модели композита разработанной в [1] для однонаправленного микрокомпозита в условиях продольного растяжения - сжатия получим зависимость

$$\sigma = \sigma^0 + B_1\varepsilon + B_2\varepsilon^2 + B_3\varepsilon^3, \quad \sigma^0 = \sum_{i=1}^n \omega_i \left[\sigma_i^0 - A_{1i}\varepsilon_i^\theta - A_{2i}(\varepsilon_i^\theta)^2 - A_{3i}(\varepsilon_i^\theta)^3 \right], \quad (4)$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^n \omega_i \left[A_{1i} - 2A_{2i}\varepsilon_i^\theta + 3A_{3i}(\varepsilon_i^\theta)^2 \right], \quad B_2 = \sum_{i=1}^n \omega_i \left[A_{2i} - 3A_{3i}\varepsilon_i^\theta \right], \quad (5)$$

$$B_3 = \sum_{i=1}^n \omega_i A_{3i}, \quad \omega_0 + \sum_{i=1}^n \omega_i = 1,$$

здесь ω_0 – коэффициент пористости, ω_i – коэффициент заполнения i -го фазового материала.

Предполагается, что коэффициенты A_{1i}, A_{2i}, A_{3i} определены из проведенных экспериментов для образцов соответствующих фазовых материалов. Для этого необходимо располагать полными диаграммами растяжения-сжатия. При этом некоторые из коэффициентов в выражении (2) могут зануляться. Например, известно, что высокопрочные и высокомодульные волокна ведут себя практически как упруго-хрупкие. Следовательно, для такой фазы можно принять значения $A_{3i} = 0$ или $A_{2i} = A_{3i} = 0$.

Тогда для соответствующего фазового материала будем иметь зависимости

$$\sigma_i = \sigma_i^0 + A_{1i}\bar{\varepsilon}_i + A_{2i}\bar{\varepsilon}_i^2, \quad \bar{\varepsilon}_i = \varepsilon - \varepsilon_i^\theta, \quad (6)$$

или

$$\sigma_i = \sigma_i^0 + A_{1i}\bar{\varepsilon}_i. \quad (7)$$

Если все фазы вполне удовлетворительно описываются зависимостями (6), то для микрокомпозита диаграмма деформирования будет описываться зависимостью

$$\sigma = \sigma^0 + B_1\varepsilon + B_2\varepsilon^2, \quad (8)$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^n \omega_i \left[\sigma_i^0 - A_{1i}\varepsilon_i^\theta - A_{2i}(\varepsilon_i^\theta)^2 \right], \quad B_2 = \sum_{i=1}^n \omega_i A_{2i}, \quad \omega_0 + \sum_{i=1}^n \omega_i = 1. \quad (9)$$

В ряде случаев диаграммы фазовых материалов лучше аппроксимируются зависимостями

$$\sigma_i = \sigma_i^0 + A_i \bar{\varepsilon} + A_{2i} \varepsilon_i^{\beta_i}.$$

Тогда вместо (8) будем иметь для КМ

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \omega_i \left[\sigma_i^0 - A_{1i} \varepsilon_i^\theta \right] + \sum_{i=1}^n \omega_i \left[A_{1i} \varepsilon + A_{2i} (\varepsilon - \varepsilon_\theta^i)^{\beta_i} \right]. \quad (10)$$

Принимая $\omega_i = 0$ будем иметь соответствующие зависимости для соответствующих образцов матриц-бетонов. Бетон является ключевым элементом в функционировании армированных бетонных конструкций и в разработке математических расчетных моделей. В общем случае диаграмма растяжения-сжатия бетона имеет вид

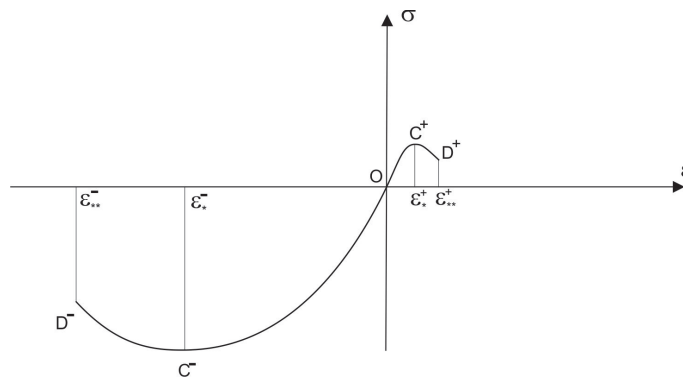


Рис. 1. Диаграмма расширения-сжатия бетона

где участок $C^{-}OC^{+}$ соответствует участку сохранения сплошности, участки разрушения $C^{+}D^{+}$ и $C^{-}D^{-}$ – участки нарушения сплошности за счет развития скрытых механизмов внутренней трещиноватости. Поэтому участок $C^{-}OC^{+}$ в расчетах будем считать предельно допустимым по деформациям для бетона при использовании модели механики сплошной среды, а деформации деформациями предразрушения.

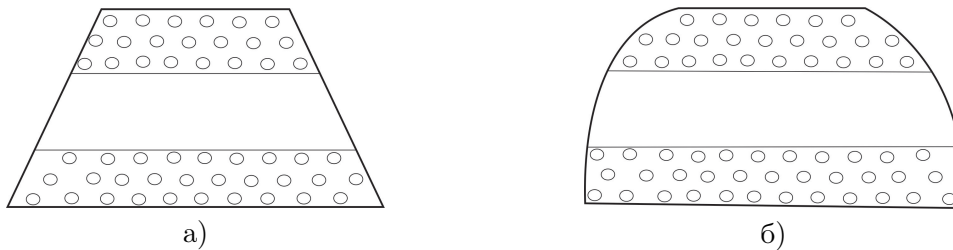


Рис. 2. Балки а) трапециевидного и б) эллиптического сечений.

Испытания многих марок бетонов на растяжение и сжатие показывают, что $\varepsilon_*^- \gg \varepsilon_*^+$ [10-20]. Поэтому чаще всего в целях упрощения методики расчетов в армированных и неармированных бетонных конструкциях считают, что бетон не сопротивляется растяжению, воспринимает только сжатие, что не позволяет рассматривать даже такие

простые задачи, как поперечный и продольно-поперечный изгиб балок произвольного поперечного сечения. В то же время современные тенденции совершенствования бетонных конструкций за счет введения в вяжущие суспензии полимерных и резино-подобных добавок (полимербетоны, каучукбетоны) приводит к увеличению предельно допустимых деформаций ε_*^+ . Поэтому аппроксимацию паспортной характеристики $\sigma = f(\varepsilon)$ следует определять на участке $-\varepsilon_*^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*^+$, сохраняя для нее по возможности простое математическое выражение. В работах [21-23] для бетона и железобетона была использована зависимость в форме (4) и с ее помощью решены задачи плоского продольно-поперечного изгиба балок трапециевидного и эллиптического сечений (рис. 2) при различных вариациях форм сечения и структур армирования.

Разработанный алгоритм позволяет в рамках единой расчетной методики рассматривать конструкции разных сечений: треугольных, прямоугольных, трапециевидных, эллиптических, круговых, полуэллиптических, эллиптический пояс с различными типами армирования и решать задачи рационального распределения арматуры.

Принимая во внимание существенно разный характер диаграмм деформирования бетона при растяжении и сжатии бетона их можно аппроксимировать различными, но сходными по виду зависимостями в зоне сжатия ($-\varepsilon_*^- \leq \varepsilon \leq 0$) и растяжении ($0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*^+$)

$$\sigma = p_1^+ \varepsilon + p_2^+ \varepsilon^2, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*^+, (p_1^+ > 0, \quad p_2^+ < 0), \quad (11)$$

$$\sigma = p_1^- \varepsilon + p_2^- \varepsilon^2, \quad -\varepsilon_*^- \leq \varepsilon \leq 0, (p_1^- > 0, \quad p_2^- > 0). \quad (12)$$

Подбор параметров p_1^\pm, p_2^\pm выполняется таким образом, чтобы расчетная модель (11), (12) наилучшим образом соответствовала данным эксперимента. Поскольку опубликованные данные конкретных испытаний обычно являются недостаточно полными, то для определения параметров могут быть применены следующие варианты необходимых условий [6].

Если выявлены начальные модули упругости $E_{об}^\pm$ и предельные напряжения σ_*^\pm , то будем иметь

$$\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = E_{об}^\pm, \quad \sigma^\pm (\pm\varepsilon_*^\pm) = \pm\sigma_*^\pm, \quad (13)$$

откуда получим

$$p_1^\pm = E_{об}^\pm, \quad p_2^\pm = \mp (E_{об}^\pm \varepsilon_*^\pm - \sigma_*^\pm) / (\varepsilon_*^\pm)^2. \quad (14)$$

Если начальные модули упругости не известны, то заменяя первое условие на равенство нулю касательных модулей в предельных точках (при растяжении и сжатии), получим

$$\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\pm\varepsilon_*^\pm} = 0, \quad \sigma^\pm (\pm\varepsilon_*^\pm) = \pm\sigma_*^\pm, \quad (15)$$

откуда

$$p_1^\pm = 2\sigma_*^\pm / \varepsilon_*^\pm, \quad p_2^\pm = \mp \sigma_*^\pm / (\varepsilon_*^\pm)^2. \quad (16)$$

Весьма распространенной является ситуация, когда по результатам испытаний модули упругости E_{o6}^{\pm} и пределы прочности σ_*^{\pm} , но не указаны значения ε_*^{\pm} . В этом случае примем $p_1^{\pm} = E_{o6}^{\pm}$ и согласно первому равенству из (15)

$$E_{o6}^{\pm} \pm 2p_2^{\pm} \varepsilon_*^{\pm} = 0, \quad (17)$$

и в соответствии со вторым равенством в (15)

$$\pm E_{o6}^{\pm} \varepsilon_*^{\pm} + p_2^{\pm} (\varepsilon_*^{\pm})^2 = 0. \quad (18)$$

После совместного решения этих равенств получим

$$\varepsilon_*^{\pm} = \pm 2\sigma_*^{\pm} / E_{o6}^{\pm}, \quad p_2^{\pm} = \mp E_{o6}^{\pm} / (4\sigma_*^{\pm}). \quad (19)$$

В четвертом варианте, используя условия прохождения аппроксимирующих кривых (11), (12) в области растяжения и сжатия через две опытные точки со значениями напряжений $\pm\sigma_i^{\pm}$ при деформациях $\pm\varepsilon_i^{\pm}$ ($i = 1, 2$) для параметров p_1^{\pm} , p_2^{\pm} получим выражения

$$p_1^{\pm} = [\sigma_1^{\pm} (\varepsilon_2^{\pm})^2 - \sigma_2^{\pm} (\varepsilon_1^{\pm})^2] / [\varepsilon_1^{\pm} \varepsilon_2^{\pm} (\varepsilon_1^{\pm} - \varepsilon_2^{\pm})],$$

$$p_2^{\pm} = [\sigma_1^{\pm} \varepsilon_2^{\pm} - \sigma_2^{\pm} \varepsilon_1^{\pm}] / [\varepsilon_1^{\pm} \varepsilon_2^{\pm} (\pm\varepsilon_1^{\pm} \mp \varepsilon_2^{\pm})].$$

Метод расчета армированных бетонных балок однотаврового и двутаврового сечений (рис. 3) при использовании аппроксимаций типа (11), (12) был использован в работах [24-27].

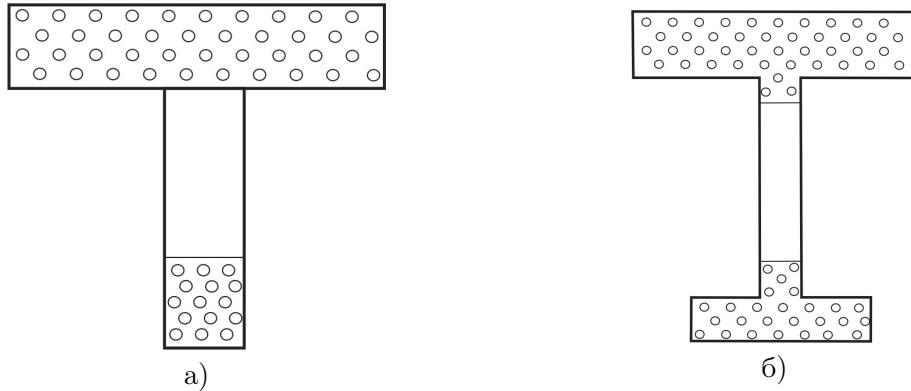


Рис. 3. Балки а) однотаврового и б) двутаврового сечений.

Традиционно решения задач поперечного и продольного изгиба железобетонных стержневых элементов получают для одномерных напряженных состояний учитывая лишь нормальные осевые напряжения и используя классические гипотезы Кирхгофа-Лява для описания деформированного состояния. Для достоверного расчета предразрушающих состояний армированных бетонных конструкций следовало бы использовать управления состояния фазовых материалов в виде общих нелинейных зависимостей между тензорами напряжений и деформаций с учетом свойств разносопротивляемости при растяжениях и сжатиях в разных направлениях. В общем

случае автору неизвестны такие зависимости. Поэтому анализ пространственных напряженно деформированных состояний можно осуществлять лишь при сравнительно малых уровнях нагрузок и температур, при которых все фазовые материалы будут оставаться упругими. Некоторые разработки в этом направлении проведены в [28-30].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Nemirovskii Yu. V. On the elastic-plastic behavior of reinforced layer // Intern. Journal of Mechanical Sciences. 1970. V. 12. P. 898–903
- [2] Nemirovskii Yu. V. Yield surfaces for reinforced concrete axisymmetric plates and shells // Archiwum Inzynierii Ladowej. 1974. V. XX. № 4. P. 575–590
- [3] Геннев Г. А., Киссюк В. Н., Тюпин Е. А. Теория пластичности бетона и железобетона. М.: Стройиздат, 1974. 316 с.
- [4] Немировский Ю. В., Пятаев С. Ф. Предельное термоупругое деформирование волокнистых композитов // Тр. IV Всерос. конф. «Безопасность и живучесть технических систем». Красноярск: КНИЦ СО РАН, 2012. Т. 1. С. 171–181.
- [5] Немировский Ю. В. Прогнозирование нелинейного деформирования гибридных композитных материалов // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела : материалы второй международной конференции, Казань, Россия, 8-11 декабря 2009 г. / [науч. ред. С. А. Кузнецов]. Казань : Казанский гос. ун-т, 2009
- [6] Немировский Ю. В. Проблемы и методы расчета и проектирования конструкций из армированного бетона // Известия Алтайского государственного университета. 2014. № 1-1 (81). С. 90–94
- [7] Немировский Ю. В., Янковский А. П. Численное моделирование нелинейно-наследственного поведения пространственно армированных композитных сред // Известия Алтайского государственного университета. Сер. Математики и механика. № 1/1. 2012. С.103–106
- [8] Карпенко Н. И., Круглов В. М., Соловьев Л. Ю. Нелинейное деформирование бетона и железобетона. Новосибирск : Изд-во Сиб. гос. ун-та путей сообщ., 2001. 275 с.
- [9] Горынин Г. Л., Немировский Ю. В. Прогнозирование жесткостных характеристик бетонов при умеренных нагрузках // Известия Алтайского государственного университета. 2014. № 1-1 (81). С. 144–146
- [10] Бондаренко В. М., Бондаренко С. В. Инженерные методы нелинейной теории железобетона. М.: Стройиздат, 1982. 287 с.
- [11] Прочность и жесткость железобетонных конструкций / Под ред. д-ра техн. наук проф. А. А. Гвоздева ; Госстрой СССР. Науч.-исслед. ин-т бетона и железобетона "НИИЖБ". Москва : Стройиздат, 1968. 231 с.
- [12] Плевков В. С., Колупаева С. Н., Кудяков К. Л. Расчетные диаграммы нелинейного деформирования базальтофибробетона при статических и кратковременных динамических воздействиях // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2016. № 3. С. 95–110
- [13] Fintel M. Handbook of concrete engineering. New York : Van Nostland Reinhold, 1975
- [14] ЕКБ-ФИП. Международные рекомендации для расчета и осуществления обычных и предварительно напряженных железобетонных конструкций (русский перевод). М.: НИИЖБ Госстроя СССР, 1970.

- [15] Цискарелли Г. Д. Сопротивление растяжению неармированных и армированных бетонов. М.: Государственное издательство по строительству и архитектуре, 1954. 152 с.
- [16] Безгодов И. М. О соотношениях прочностных и деформативных характеристик бетона при сжатии, растяжении и растяжении при изгибе // Бетон и железобетон. 2012. №2. С. 2–5
- [17] Михайлов В. В., Емельянов М. П., Дудолодов Л. С., Митасов В. М. Некоторые предложения по описанию диаграммы деформирования бетона при загрузении // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1984. № 2. С. 23–27.
- [18] Байков В. Н., Горбатов С. В., Димитров З. А. Построение зависимости между напряжениями и деформациями сжатого бетона по системе нормируемых показателей // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1977. №6. С.15–18.
- [19] Крусь Ю. А. Трансформирование диаграмм деформирования бетона при центральном сжатии и растяжении // Известие вузов. Строительство. 2012. №3. С. 121–126
- [20] Алмазов В. О., Забегаев А. В., Попов А. В., Расторгуев В. С. и др. Прогнозирование поведения железобетонных конструкций при сложных воздействиях природного и техногенного характера // Известие вузов. Строительство. 1994. №11. С. 10–15
- [21] Немировский Ю. В. Метод расчёта композитных стержневых систем из разномодульных материалов // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики : материалы V Всероссийской научной конференции (Томск, 3–5 октября, 2006 г.). Томск : Изд-во ТГУ, 2006. С. 288–290
- [22] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетона // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. 2015. №6. С. 5–13
- [23] Немировский Ю.В. Напряженно-деформированное состояние железобетонных трапециевидных и эллиптических балок // Wschodnioeuropejskie Czasopismo Naukowe (East European Scientific Journal). 2016. №.6. Ч.3. С. 151–161
- [24] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Нелинейное деформирование бетонных элементов при продольно-поперечном изгибе // Известие вузов. Строительство. 2013. №4. С. 3–12
- [25] Немировский Ю. В., Батурин А. А. Метод расчета деформативности и прочности однотавровых и двутавровых стержней // Известие вузов. Строительство. 2015. №10. С. 82–93
- [26] Немировский Ю. В., Гербер Ю. А. Второе предельное состояние двутавровых и однотавровых армированных балок из разносопротивляющихся материалов // Наука. Промышленность. Оборона : Труды XV Всероссийской научно-технической конференции (23-25 апр. 2014 г.). Новосибирск, 2014. С. 467–472
- [27] Немировский Ю. В., Батурин А. А. Расчет состояний предразрушения изгибаемых балок из разносопротивляющихся материалов // Труды НГАСУ. 2013. Т. 16. №.2 (56). С. 32–44
- [28] Горынин Г. Л., Немировский Ю. В. Деформирование слоистых анизотропных стержней в пространственной постановке. Продольно-поперечный изгиб и условие кромочной совместимости // Механика композиционных материалов. 2009. Т.45. №3. С. 379–410
- [29] Gorynin G. L., Nemirovskii Yu. V. Deformation of laminated anisotropic bars in the three-dimensional statement 1. Transverse-longitudinal bending and edge compatibility condition // Mechanics of Composite Materials. 2009. №1. P. 3-20

[30] Горынин Г. Л., Немировский Ю. В. GN-теория расчета композитной балки при изгибе. Общая теория // Известия вузов. Строительство. 2012. № 6. С.3–12

[31] Мадатян С. А. Арматура железобетонных конструкций. М.:Воентехлит, 2000. 256 с.

[32] Немировский Ю. В. Уравнение изгиба и устойчивости армированных оболочек и пластин из вязко-упругого материала // Динамика сплошной среды. Институт гидродинамики СО АН СССР. 1970. В. IV. С. 50

Yu. V. Nemirovskii

OPTIMUM DESIGN OF PLASTIC PLATES PIECEWISE UNDER LINEAR POTENTIALS

S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

Abstract. Possible general ratios for the description of the intense deformed condition of designs from the hybrid reinforced concrete as layered non-uniform designs with piecewise and continuous changes of properties due to change of structures of reinforcing and physicomaterial characteristics of phase materials are analyzed. In relation to rod designs the state equations, possible and convenient for calculations, are discussed. The review of solutions of the problems of longitudinally cross bend of the reinforced beams of different sections received with their help is given and in the form of the cut-off elliptic belt and also a research of rational distribution of fittings in them.

Keywords: the intense deformed state, the hybrid reinforced concrete, layered and fibrous designs, physicomaterial characteristics, phase materials, longitudinally cross bend, rod designs, rational reinforcing.

REFERENCES

- [1] Nemirovskii Yu. V. On the elastic-plastic behavior of reinforced layer // Intern. Journal of Mechanical Sciences. 1970. V. 12. P. 898–903
- [2] Nemirovskii Yu. V. Yield surfaces for reinforced concrete axisymmetric plates and shells // Archiwum Inzynierii Ladowej. 1974. V. XX. № 4. P. 575–590
- [3] Gennev G. A., Kissyuk V. N., Tyupin E. A. Teoriya plastichnosti betona i zhelezobetona. M.: Strojizdat, 1974. 316 s. (in Russian)
- [4] Nemirovskij YU. V., Pyataev S. F. Predel'noe termouprugoe deformirovanie voloknistyh kompozitov // Tr. IV Vseros. konf. «Bezopasnost' i zhivuchest' tekhnicheskikh sistem». Krasnoyarsk: KNC SO RAN, 2012. T. 1. S. 171–181 (in Russian)
- [5] Nemirovskij YU. V. Prognozirovanie nelinejnogo deformirovaniya gibridnyh kompozitnyh materialov // Problemy nelinejnoj mekhaniki deformiruемого tverdogo tela : materialy vtoroj mezhdunarodnoj konferencii, Kazan', Rossiya, 8-11 dekabrya 2009 g. / [nauch. red. S. A. Kuznecov]. Kazan' : Kazanskij gos. un-t, 2009 (in Russian)
- [6] Nemirovskij YU. V. Problemy i metody rascheta i proektirovaniya konstrukcij iz armirovannogo betona // Izvestiya Altajskogo gosudarstvennogo universiteta. 2014. № 1-1 (81). S. 90–94 (in Russian)
- [7] Nemirovskij YU. V., YAnkovskij A. P. CHislennoe modelirovanie nelinejno-nasledstvennogo povedeniya prostranstvenno armirovannyh kompozit'nyh sred // Izvestiya Altajskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematiki i mekhanika. № 1/1. 2012. С.103–106 (in Russian)
- [8] Karpenko N. I., Kruglov V. M., Solov'ev L. YU. Nelinejnoe deformirovanie betona i zhelezobetona. Novosibirsk : Izd-vo Sib. gos. un-ta putej soobshch., 2001. 275 s. (in Russian)

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

- [9] Gorynin G. L., Nemirovskij YU. V. Prognozirovanie zhestkostnyh karakteristik betonov pri umerennyh nagruzkah // Izvestiya Altajskogo gosudarstvennogo universiteta. 2014. № 1-1 (81). S. 144–146 (in Russian)
- [10] Bondarenko V. M., Bondarenko S. V. Inzhenernye metody nelinejnoj teorii zhelezobetona. M.: Strojizdat, 1982. 287 s. (in Russian)
- [11] Prochnost' i zhestkost' zhelezobetonnyh konstrukcij / Pod red. d-ra tekhn. nauk prof. A. A. Gvozdeva ; Gosstroj SSSR. Nauch.-issled. in-t betona i zhelezobetona "NIIZHB". Moskva : Strojizdat, 1968. 231 s. (in Russian)
- [12] Plevkov V. S., Kolupaeva S. N., Kudyakov K. L. Raschetnye diagrammy nelinejnogo deformirovaniya bazal'tofibrobetona pri staticheskikh i kratkovremennyh dinamicheskikh vozdeystviyah // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. 2016. № 3. S. 95–110 (in Russian)
- [13] Fintel M. Handbook of concrete engineering. New York : Van Nostland Reinhold, 1975 (in Russian)
- [14] EKB-FIP. Mezhdunarodnye rekomendacii dlya rascheta i osushchestvleniya obychnyh i predvaritel'no napryazhennyh zhelezobetonnyh konstrukcij (russkij perevod). M.: NIIZHB Gosstroya SSSR, 1970. (in Russian)
- [15] Ciskarelli G. D. Soprotivlenie rastyazheniyu nearmirovannyh i armirovannyh betonov. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo po stroitel'stvu i arhitekture, 1954. 152 s. (in Russian)
- [16] Bezgodov I. M. O sootnosheniyah prochnostnyh i deformativnyh karakteristik betona pri szhatii, rastyazhenii i rastyazhenii pri izgibe // Beton i zhelezobeton. 2012. №2. S. 2–5 (in Russian)
- [17] Mihajlov V. V., Emel'yanov M. P., Dudoladov L. S., Mitasov V. M. Nekotorye predpolozheniya po opisaniyu diagrammy deformirovaniya betona pri zagruzhennii // Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo i arhitektura. 1984. № 2. S. 23–27. (in Russian)
- [18] Bajkov V. N., Gorbatov S. V., Dimitrov Z. A. Postroenie zavisimosti mezhdru napryazheniyami i deformatsiyami szhatogo betona po sisteme normiruemyh pokazatelej // Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo i arhitektura. 1977. №6. S.15–18. (in Russian)
- [19] Krus' YU. A. Transformirovanie diagramm deformirovaniya betona pri central'nom szhatii i rastyazhenii // Izvestie vuzov. Stroitel'stvo. 2012. №3. S. 121–126 (in Russian)
- [20] Almazov V. O., Zabegaev A. V., Popov A. V., Rastorguev V. S. i dr. Prognozirovanie povedeniya zhelezobetonnyh konstrukcij pri slozhnyh vozdeystviyah prirodnogo i tekhnogennogo haraktera // Izvestie vuzov. Stroitel'stvo. 1994. №11. S. 10–15 (in Russian)
- [21] Nemirovskij YU. V. Metod raschyota kompozitnyh sterzhnevyyh sistem iz raznomodul'nyh materialov // Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoj mekhaniki : materialy V Vserossijskoj nauchnoj konferencii (Tomsk, 3–5 oktyabrya, 2006 g.). Tomsk : Izd-vo TGU, 2006. S. 288–290 (in Russian)
- [22] Nemirovskij YU. V., Boltaev A. I. Diagrammy deformirovaniya betonov i zhelezobetona // Vestnik BGTU im. V. G. Shuhova. 2015. №6. S. 5–13 (in Russian)
- [23] Nemirovskij YU.V. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie zhelezobetonnyh trapecevidnyh i ehllipticheskikh balok // Wschodnioeuropejskie Czasopismo Naukowe (East European Scientific Journal). 2016. №.6. CH.3. S. 151–161 (in Russian)
- [24] Mishchenko A. V., Nemirovskij YU. V. Nelinejnoe deformirovanie betonnyh ehlementov pri prodol'no-poperechnom izgibe // Izvestie vuzov. Stroitel'stvo. 2013. №4. S. 3–12 (in Russian)

[25] Nemirovskij YU. V., Baturin A. A. Metod rascheta deformativnosti i prochnosti odnotavrovyyh i dvutavrovyyh sterzhnej // Izvestie vuzov. Stroitel'stvo. 2015. №10. S. 82–93 (in Russian)

[26] Nemirovskij YU. V., Gerber YU. A. Vtoroe predel'noe sostoyanie dvutavrovyyh i odnotavrovyyh armirovannyh balok iz raznosoprotivlyayushchihsya materialov // Nauka. Promyshlennost'. Oborona : Trudy XV Vserossijskoj nauchno-tehnicheskoy konferencii (23-25 apr. 2014 g.). Novosibirsk, 2014. С. 467–472 (in Russian)

[27] Nemirovskij YU. V., Baturin A. A. Raschet sostoyanij predrazrusheniya izgibaemyh balok iz raznosoprotivlyayushchihsya materialov // Trudy NGASU. 2013. T. 16. №.2 (56). S. 32–44 (in Russian)

[28] Gorynin G. L., Nemirovskij YU. V. Deformirovanie sloistyyh anizotropnyh sterzhnej v prostranstvennoj postanovke. Prodol'no-poperechnyj izgib i uslovie kromochnoj sovmestimosti // Mekhanika kompozicionnyh materialov. 2009. T.45. №3. S. 379–410 (in Russian)

[29] Gorynin G. L., Nemirovskii Yu. V. Deformation of laminated anisotropic bars in the three-dimensional statement 1. Transverse-longitudinal bending and edge compatibility condition // Mechanics of Composite Materials. 2009. №1. P. 3-20

[30] Gorynin G. L., Nemirovskij YU. V. GN-teoriya rascheta kompozitnoj balki pri izgibe. Obshchaya teoriya // Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo. 2012. № 6. С.3–12 (in Russian)

[31] Madatyan S. A. Armatura zhelezobetonnyh konstrukcij. M.:Voentekhlit, 2000. 256 s. (in Russian)

[32] Nemirovskij YU. V. Uravnenie izgiba i ustojchivosti armirovannyh oboloček i plastin iz vyazko-uprugogo materiala // Dinamika sploshnoj sredy. Institut gidrodinamiki SO AN SSSR. 1970. V. IV. С. 50 (in Russian)

Д. А. Потянихин, Б. Н. Марьин

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ТРУБЧАТОЙ ЗАГОТОВКИ ПРИ РАЗДАЧЕ ПО ПУАНСОНУ СЕДЛОВИДНОЙ ФОРМЫ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

*Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре,
Россия*

Аннотация. В статье представлены результаты моделирования в программном комплексе ANSYS процесса раздачи торца тонкостенной трубчатой заготовки по жесткому пуансону седловидной формы. Задача решается в квазистатической постановке без учета температурных эффектов. Пуансон моделируется как абсолютно жесткое тело, заготовка считается выполненной из алюминиевого сплава АМг6М. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния трубчатой заготовки, исследовано утонение стенок в зависимости от геометрических параметров пуансона.

Ключевые слова: обработка материалов давлением, формообразование, ANSYS, конечно-элементное моделирование, деформации, напряжения, контактная задача.

УДК: 539.3,621.7

Введение. Трубопроводы являются очень распространенными и важными элементами конструкций в машиностроении. Одной существенной проблемой при их производстве являются дефекты сварочных швов в местах соединения магистральной и отводной труб [1]. Может оказаться, что электродный металл проникает внутрь трубопровода и уменьшает площадь сечения отводного канала (рис. 1, а). Одним из способов преодоления указанной проблемы оказывается создание соединительных патрубков, у которых один торец предварительно подвергнут технологической операции

© Потянихин Д. А., Марьин Б. Н., 2018

Потянихин Дмитрий Андреевич

e-mail: potyanikhin@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Марьин Борис Николаевич

e-mail: potyanikhin@mail.ru, доктор технических наук, профессор; профессор кафедры «Машиностроение и металлургия», Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМиМ ДВО РАН №007-00285-18-00

Поступила 20.08.2018

раздачи [2-7]. В этом случае сварочный шов переносится в область магистральной трубы и даже в случае появления дефекта площадь ее поперечного сечения изменяется незначительно (рис. 1, б).

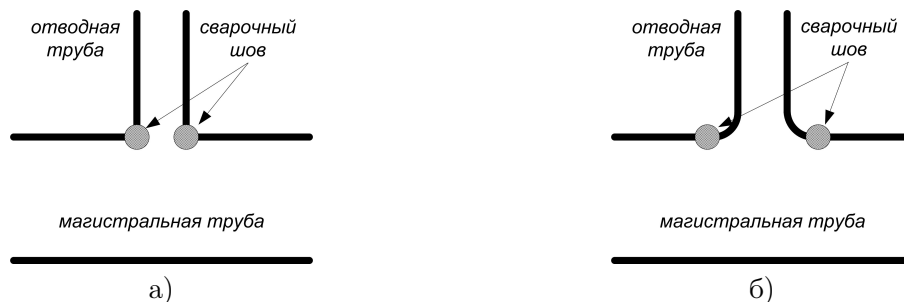


Рис. 1. Возможные дефекты сварочного шва при создании трубопровода: а) шов в области отводной трубы; б) шов в области магистральной трубы.

Однако необходимо учитывать, что ширина сварочного шва составляет порядка 1 мм. Поэтому крайне желательно, чтобы после раздачи форма патрубка максимально повторяла форму двух соединенных труб с выбранным радиусом сопряжения (рис. 2).

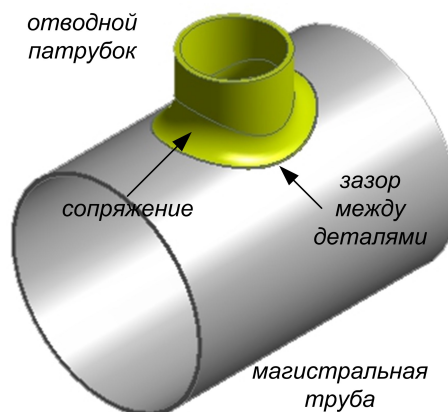


Рис. 2. Желаемая форма деформированного патрубка.

С этой целью в настоящей работе методами компьютерного моделирования изучается процесс формообразования соединительного патрубка в процессе раздачи цилиндрической трубчатой заготовки. Используется пуансон седловидной формы, форма которого обеспечивает производство патрубка как на рис. 2. Определяются остаточные напряжения и деформации, утонение стенок детали.

1. Геометрическая модель и граничные условия. На рис. 3 изображена геометрическая модель пуансона и трубчатой заготовки в разрезе, выполненная в САД-редакторе ANSYS DesignModeler. Длина заготовки $l = 40$ мм, внешний диаметр $d = 20$ мм, толщина стенки $h = 1$ мм. Сам пуансон получен как объединение прямого кругового цилиндра, соответствующего внутреннему объему отводной трубы, и половины

кругового цилиндра, соответствующего половине внутреннего объема магистральной трубы. Оси цилиндров пересекаются под прямым углом, поверхности сопряжены. Размеры пуансона представлены на чертежах сечений пуансона координатными плоскостями OXY и OYZ (рис. 4, а, б). Радиус сопряжения R варьировался от 3 до 6 мм с шагом 1 мм.

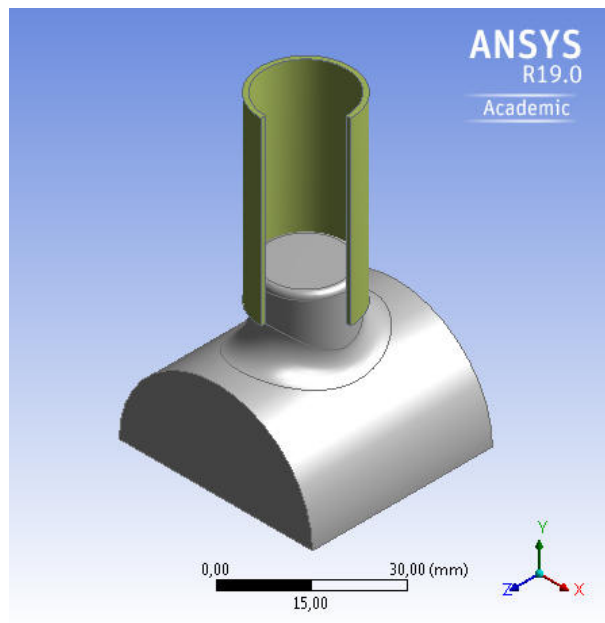


Рис. 3. Геометрическая модель трубчатой заготовки (в разрезе) и пуансона

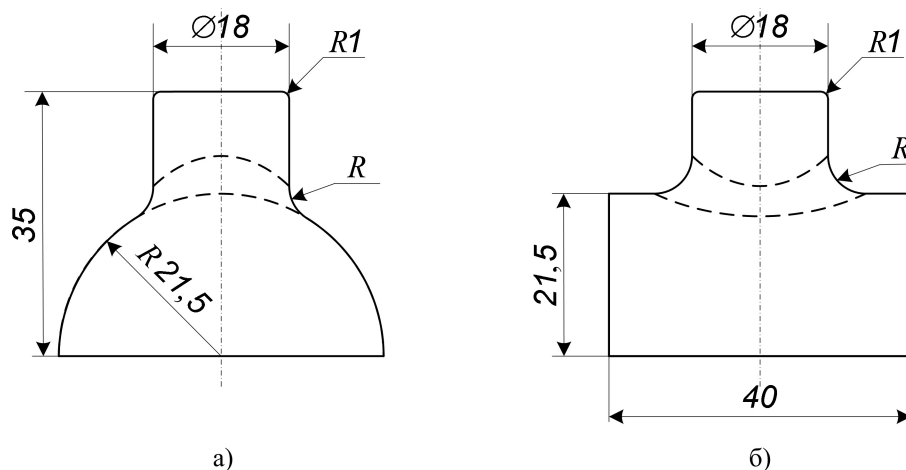


Рис. 4. Сечение пуансона плоскостями OXY (а) и OYZ (б).

Конечно-элементная модель представлена на рис. 5. Координатные плоскости OXY и OYZ являются плоскостями симметрии, поэтому в целях уменьшения размерности

задачи расчет производился на четверти геометрической модели. Пуансон считается абсолютно жестким телом, поэтому представляет интерес лишь его поверхность, контактирующая с заготовкой. При выполнении расчетов модель пуансона содержит один конечный элемент по толщине. Граничное условие соответствует его неподвижному закреплению. Следует отметить, что такие допущения не влияют на точность полученных результатов. Для сравнения решалась задача, где пуансон считался упругопластическим телом с геометрическими параметрами, представленными на рис. 3 и 4. Деформации пуансона оказались пренебрежимо малы, поэтому в дальнейшем было решено вовсе отказаться от их учета в пользу ускорения вычислений.

После дискретизации пуансон состоит из 1200 20-узловых элементов SOLID186 с промежуточными узлами [8]. Стенка трубы составлена из 4000 20-узловых элементов SOLID186. По толщине бралось 4 элемента. На поверхностях контакта коэффициент сухого трения считается равным 0,1. Контактная и целевая поверхности моделируются с использованием конечных элементов CONTA174 и TARGE170.

Верхний торец трубы подвергался перемещению в вертикальном направлении вниз. Величина перемещений s зависела от радиуса сопряжения: $s = R\pi/2$.

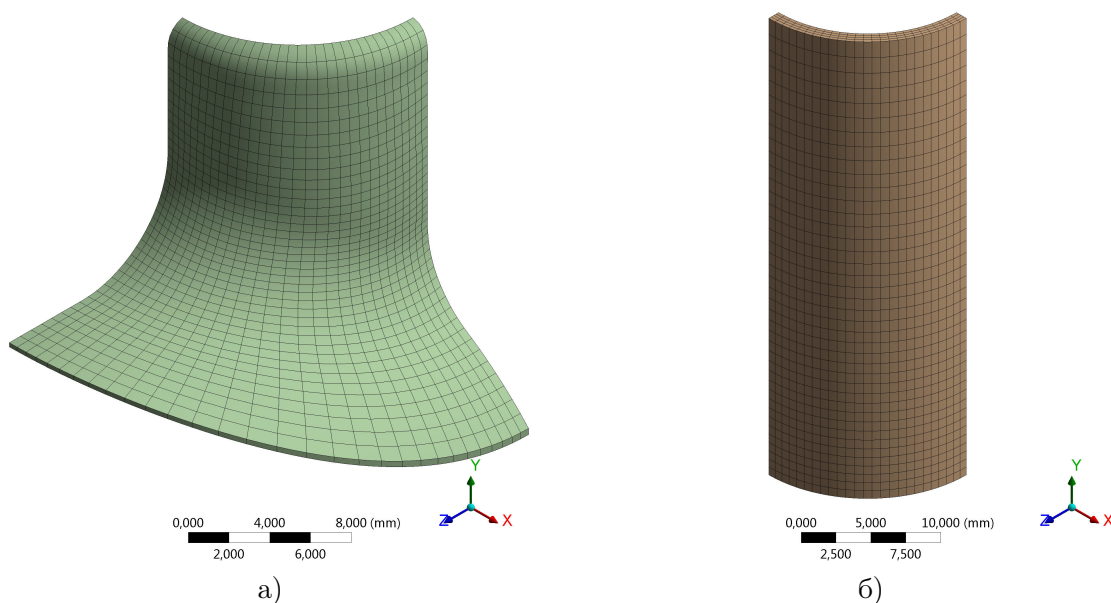


Рис. 5. Конечно-элементная модель пуансона (а) и заготовки (б).

Задача решается в модуле ANSYS Static Structural. Описание напряженно-деформированного состояния трубчатой заготовки производится с использованием упругопластической модели с линейным упрочнением [9,10]. Для разделения полных деформаций на обратимую и необратимую составляющие используется алгебраическое соотношение

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (1)$$

Упругие деформации связаны с напряжениями обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij}^e + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij}, \quad (2)$$

где σ_{ij} и ε_{ij}^e – компоненты тензоров напряжений и обратимых деформаций, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, δ_{ij} – символ Кронекера. Критерием появления пластических деформаций выбрано условие текучести Мизеса, которое в главных осях имеет вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2, \quad (3)$$

где σ_T – предел текучести материала при одноосном напряженном состоянии.

Труба считается выполненной из алюминиевого сплава АМг6М [11]. Параметры материала [11-13] $E = 7,1 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0,33$, $\sigma_T = 170$ МПа, модуль упрочнения $E_T = 71$ МПа, предел прочности $\sigma_B = 340$ МПа.

2. Результаты расчетов.

На рис. 6 показано распределение поля эквивалентных напряжений (по Мизесу)

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \left(\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right)^{1/2} \quad (4)$$

в детали в момент ее максимального вертикального перемещения для пуансонов с радиусами сопряжения от 3 до 6 мм. На рис. 7 остаточные поля напряжений $\sigma_{\text{ЭКВ}}$ для тех же геометрических параметров получены после извлечения остапки. Напряжения нигде не превышают предел прочности материала σ_B .

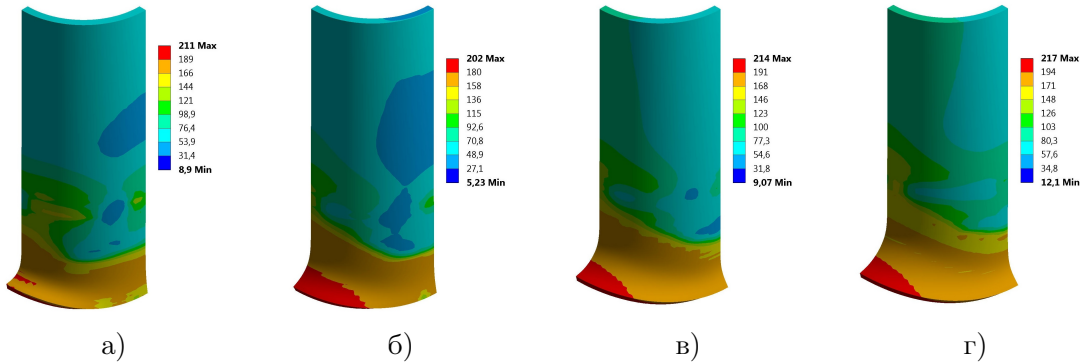


Рис. 6. Эквивалентные напряжения (по Мизесу) в момент максимального вертикального смещения: а) $R = 3$ мм; б) $R = 4$ мм; в) $R = 5$ мм; г) $R = 6$ мм.

Рис. 8 иллюстрирует поле остаточных упругих эквивалентных деформаций

$$\varepsilon_{\text{ЭКВ}}^e = \frac{1}{1 + \nu} \left(\frac{(\varepsilon_1^e - \varepsilon_2^e)^2 + (\varepsilon_2^e - \varepsilon_3^e)^2 + (\varepsilon_3^e - \varepsilon_1^e)^2}{2} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Наибольшее утонение стенок деформируемой детали достигается при наибольшем из рассматриваемых радиусов сопряжения $R = 6$ мм. На рис. 9 показана толщина стенок в плоскостях OYZ (а), OXY (б) и под 45° к ним (в). Максимальное утонение не превосходит 29 процентов.

Заключение. Результаты проведенных расчетов демонстрируют возможность создания соединительных патрубков из трубчатых заготовок, выполненных из алюминиевого сплава АМг6М, способом раздачи по жесткому пуансону седловидной формы.

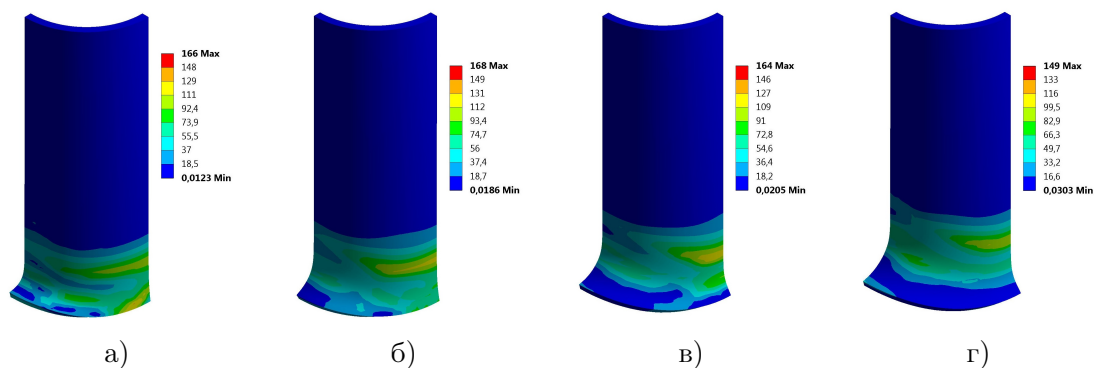


Рис. 7. Остаточные эквивалентные напряжения (по Мизесу) после извлечения инструмента: а) $R = 3$ мм; б) $R = 4$ мм; в) $R = 5$ мм; г) $R = 6$ мм.

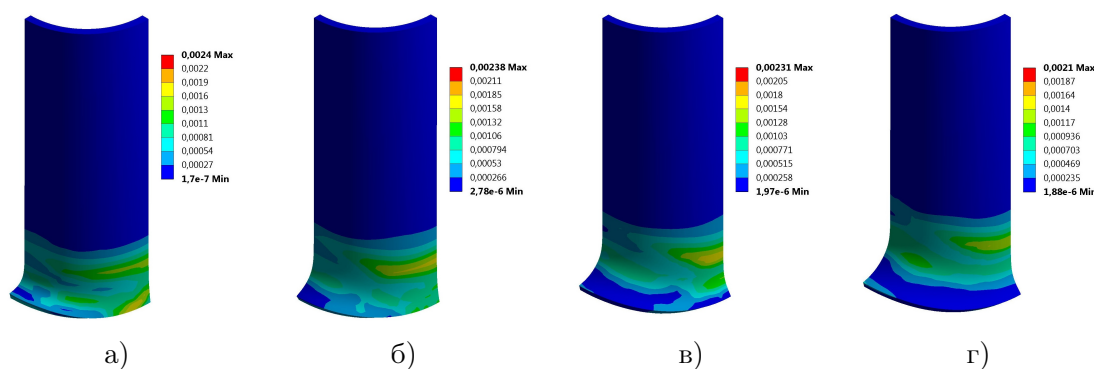


Рис. 8. Остаточные эквивалентные упругие деформации (по Мизесу) после извлечения инструмента: а) $R = 3$ мм; б) $R = 4$ мм; в) $R = 5$ мм; г) $R = 6$ мм.

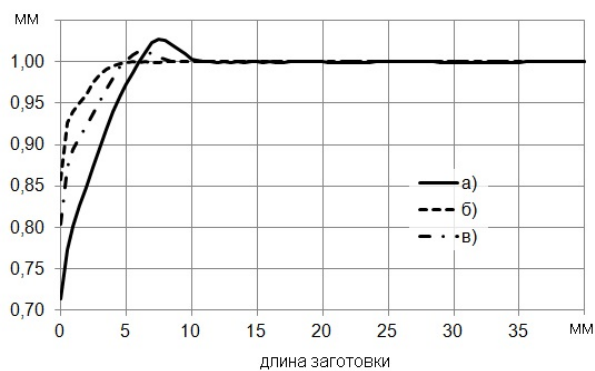


Рис. 9. Толщина стенки трубы после деформирования в плоскостях OYZ (а), OXY (б) и под 45° к ним (в).

Напряжения в детали не превосходят предела прочности материала. Зазор между патрубком и стенкой отверстия в магистральной трубе не превосходит 0,5 мм, следовательно, полностью перекрывается сварочным швом. Сварочный шов при этом, в случае дефекта, не уменьшит поперечное сечение отводной трубы. Таким образом, показана возможность создания соединительных патрубков для отводных труб в трубопроводах, не требующих дополнительной механической обработки, за одну технологическую операцию.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Марьин Б. Н., Ким В. А., Сысоев О. Е., Пхон Х. К., Мин К. Х. Анализ дефектов эксплуатируемых гидрогазовых систем трубопроводов // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2017. Т. 1. №1(29). С. 79–89.
- [2] Марьин Б. Н., Феоктистов С. И., Кольхалов Д. Г., Куриный В. В., Иванов И. Н. Исследование совмещенных процессов при изготовлении деталей летательных аппаратов // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2016. Т. 1. №2(26). С. 34-41.
- [3] Афанасьев А. Е., Каргин В. Р., Каргин Б. В. Компьютерный анализ процесса раздачи труб прессованием // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». 2016. Т. 8. №2. URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/22TVN216.pdf> (дата обращения: 25.10.2018).
- [4] Веселов А. А. Определение размеров концов труб после раздачи методом пластического деформирования // Морской вестник. 2012. №1. С. 15–16.
- [5] Непершин Р. И. Раздача тонкостенной трубы пуансоном с криволинейным профилем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №1. С. 80–88.
- [6] Сосенушкин Е. Н., Яновская Е. А., Хачатрян Д. В., Смолевич И. Е., Киндеров В. Ю. Моделирование операции раздачи трубных заготовок // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2013. №3. С. 618–631.
- [7] Яковлев С. С., Крылов Д. В. Математическая модель операции раздачи трубных заготовок из анизотропных материалов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2011. №1. С. 79–88.
- [8] Каплун А. Б., Морозов Е. М., Олферьева М. А. ANSYS в руках инженера: практическое руководство. М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 272 с.
- [9] Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Учебник для студентов вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М. : Машиностроение, 1975. 400 с.
- [10] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: В 2 т. Том 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тела. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. М. : Физматлит, 2002. 448 с.
- [11] Промышленные алюминиевые сплавы : Справочник / С. Г. Алиева, М. Б. Альтман, С. М. Амбарцумян и др.; Отв. редакторы Ф. И. Квасов, И. Н. Фридляндер. 2-е изд., перераб. и доп. М. :Металлургия, 1984. 527 с.
- [12] Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчет деталей машин на прочность. Руководство и справочное пособие. Изд. 3-е, перераб. и доп. Под ред. С. В. Серенсена. М. : Машиностроение, 1975. 488 с.
- [13] Таблицы физических величин: справочник / под ред. И. К. Кикоина. М. : АТОМИЗДАТ, 1976. 1100 с.

D. A. Potianikhin, B. N. Maryn

ON THE STRESS-STRAIN STATE OF A TUBULAR BLANK DURING EXPANSION BY SADDLE-SHAPED DIE

Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-na-Amure

Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure

Abstract. In this paper, the process of thin-walled tubular blank end expansion by saddle-shaped die is simulated in ANSYS software package. The problem is solved in a quasistatic formulation without taking into account temperature effects. The die is modeled as an absolutely rigid body, the workpiece is considered to be made of aluminum alloy AMg6M. The analysis of the stress-strain state of the tubular detail was carried out. Wall thinning was investigated depending on the geometrical parameters of the die.

Keywords: processing of materials by pressure, shaping, ANSYS, finite element simulation, deformations, stresses, contact problem.

REFERENCES

- [1] Mar'in B. N., Kim V. A., Sysoev O. E., Phon H. K., Min K. H. Analiz defektov ehkspluatiruemyh gidrogazovyh sistem truboprovodov // Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2017. T. 1. №1(29). S. 79–89. (in Russian)
- [2] Mar'in B. N., Feoktistov S. I., Kolyhalov D. G., Kurinyj V. V., Ivanov I. N. Issledovanie sovmeshchennyh processov pri izgotovlenii detalej letatel'nyh apparatov // Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2016. T. 1. №2(26). S. 34-41. (in Russian)
- [3] Afanas'ev A. E., Kargin V. R., Kargin B. V. Komp'yuternyj analiz processa razdachi trub pressovaniem // Internet-zhurnal «NAUKOVEDENIE». 2016. T. 8. №2. URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/22TVN216.pdf> (data obrashcheniya: 25.10.2018). (in Russian)
- [4] Veselov A. A. Opredelenie razmerov koncov trub posle razdachi metodom plasticheskogo deformirovaniya // Morskoj vestnik. 2012. №1. S. 15–16. (in Russian)
- [5] Nepershin R. I. Razdacha tonkostennoj truby puansonom s krivolinejnym profilem // Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin. 2010. №1. S. 80–88. (in Russian)
- [6] Sosenushkin E. N., YAnovskaya E. A., Hachatryan D. V., Smolovich I. E., Kinderov V. YU Modelirovanie operacii razdachi trubnyh zagotovok // Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki. 2013. №3. S. 618–631. (in Russian)
- [7] YAkovlev S. S., Krylov D. V. Matematicheskaya model' operacii razdachi trubnyh zagotovok iz anizotropnyh materialov // Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki. 2011. №1. S. 79–88. (in Russian)

Potianikhin Dmitrii Andreevich

e-mail: potyanikhin@mail.ru, Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Maryn Boris Nikolaevich,

e-mail: potyanikhin@mail.ru, Dr. Eng., Professor; Professor of Mechanical Engineering and Metallurgy Department, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

- [8] Kaplun A. B., Morozov E. M., Olfer'eva M. A. ANSYS v rukah inzhenera: prakticheskoe rukovodstvo. M. : Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2009. 272 s. (in Russian)
- [9] Malinin N. N. Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti. Uchebnik dlya studentov vuzov. Izd. 2-e, pererab. i dop. M. : Mashinostroenie, 1975. 400 s. (in Russian)
- [10] Ivlev D. D. Mekhanika plasticheskikh sred: V 2 t. Tom 2. Obshchie voprosy. Zhestkoplasticheskoe i uprugoplasticheskoe sostoyanie tela. Uprochnenie. Deformacionnye teorii. Slozhnye sredy. M. : Fizmatlit, 2002. 448 s. (in Russian)
- [11] Promyshlennye alyuminievye splavy : Spravochnik / S. G. Alieva, M. B. Al'tman, S. M. Ambarcumyan i dr.; Otv. redaktory F. I. Kvasov, I. N. Fridlyander. 2-e izd., pererab. i dop. M. :Metallurgiya, 1984. 527 s. (in Russian)
- [12] Serensen S. V., Kogaev V. P., SHnejderovich R. M. Nesushchaya sposobnost' i raschet detalej mashin na prochnost'. Rukovodstvo i spravochnoe posobie. Izd. 3-e, pererab. i dop. Pod red. S. V. Serensena. M. : Mashinostroenie, 1975. 488 s. (in Russian)
- [13] Tablicy fizicheskikh velichin: spravochnik / pod red. I. K. Kikoina. M. : ATOMIZDAT, 1976. 1100 s. (in Russian)

К. С. Бормотин, Вин Аунг

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ В ПРОЦЕССЕ ОБТЯЖКИ ПАНЕЛИ

Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Представлено моделирование технологии обтяжки на прессе для изготовления обшивок двойной кривизны. Точность формы детали зависит от точности вычисленной и изготовленной формы оснастки, задающей упреждающую форму панели. Упреждающая форма должна обеспечивать заданную остаточную кривизну панели после освобождения ее от силовой оснастки. Задача определения такой формы оснастки по заданной остаточной кривизне панели представляет собой обратную задачу. Разработаны математические модели и численные методы решения обратных задач формообразования монолитных панелей путем обтяжки на пуансоне. Алгоритмы, реализованные в MSC.Marc, позволяют вычислить необходимую форму пуансона. Рассмотрены результаты сходимости итерационных методов решения обратных задач.

Ключевые слова: обратная задача, вариационные принципы, метод конечных элементов, обтяжка, пружинение, итерационный метод.

УДК: 621.7.043, 519.853.6, 517.97, 539.37

Введение

В отечественном и зарубежном производстве самолетов в качестве деталей все больше применяются крупногабаритные монолитные панели, которые позволяют повысить прочность и жесткость конструкций с одновременным снижением массы и улучшением аэродинамических характеристик. Монолитные панели изготавливаются из

© Бормотин К. С., Вин Аунг, 2018

Бормотин Константин Сергеевич

e-mail: cvmi@knastu.ru, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры механики и анализа конструкций и процессов, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Вин Аунг

e-mail: winnaung53@gmail.com, аспирант, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-31-60038 мол_а_дк „Фундаментальные проблемы математического моделирования технологий формоизменения“), совета по грантам Президента РФ (проект МД-4117.2018.1 „Разработка математических моделей и численных методов решения задач оптимизации параметров оснастки для формообразования монолитных панелей“).

Поступила 10.08.2018

одной пластины или листа и могут иметь перепады толщин, вырезы, ребра жесткости. Задание аэродинамической формы таких монолитных панелей проводится процессами формообразования, осуществляющихся в режимах пластического деформирования [1,2,3].

Среди возможных технологических процессов для изготовления обшивок двойной кривизны можно отметить технологию обтяжки на прессе. В настоящее время обтяжным оборудованием с числовым программным управлением оснащены предприятия авиационной промышленности. Данное оборудование имеет широкие технологические возможности [4], в частности адаптируемость к различным формам. Автоматизированное формообразование деталей на прессе поперечной обтяжки FET требует разработку управляющей программы и электронной модели обтяжного пуансона. Программное обеспечение S3F-FET, поставляемое к данному оборудованию предоставляет информацию только о параметрах рабочих элементов пресса. Для моделирования процессов обтяжки в САЕ-системе вычисляются граничные условия траектории движения с помощью разработанной программы [5]. Предлагается гибридный метод моделирования процесса обтяжки, включающий предварительное моделирование по методу сечений и уточнение параметров методом конечных элементов [6]. Метод сечений реализован в программе S3F фирмы АСВ и позволяет получить следующие данные: рекомендуемое положение пуансона на столе пресса; программу для работы пресса (траектория движения зажимов); количество переходов; предварительно рассчитанные максимальные деформации в заготовке. С помощью обтяжного пресса FET отрабатывается технология изготовления детали из прессованного профиля методом изгиба с растяжением [7].

Траектория движения рабочих органов пресса (обтяжных губок) значительно зависит от размеров заготовки и параметров размещения пуансона на столе пресса. Рассмотрен метод анализа процесса изготовления деталей на прессах поперечной обтяжки типа FET, который позволяет еще на стадии технологической подготовки производства оптимизировать параметры для сокращения цикла отработки технологического процесса и исключения затрат на доработку технологической оснастки [8]. Для повышения устойчивости процесса обтяжки оболочек выпукло-вогнутой формы применяют заготовку с увеличенной шириной, которая охватывает закругленные вершины пуансона [9].

Развитие технических решений в способах формообразования не гарантирует получение высокой точности окончательной геометрической формы детали. Точность формы детали, полученной технологиями обработки материалов давлением при заданных параметрах процесса, зависит от точности вычисленной и изготовленной формы оснастки (пуансона), задающей упреждающую форму панели. Упреждающая форма должна обеспечивать заданную остаточную кривизну панели после освобождения ее от силовой оснастки. В связи с этим возникает обратная задача: определить форму оснастки, создающую такую упреждающую кривизну, которая обеспечивает заданную остаточную форму панели после разгрузки.

Вариационная формулировка обратных задачи формообразования и метод решения

Пусть $V \subset R^3$ — ограниченная область с достаточно регулярной границей S . Контактная поверхность пуансона с деформируемым обозначается через S_c . Область задания краевых смещений S_b . Обозначим через $u = (u_1, u_2, u_3)$, $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$,

$\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ — вектора текущих, остаточных перемещений деформируемого тела и вектора перемещений поверхности пуансона, $u, \tilde{u} \in [W_2^1(Q)]^3$, $\bar{u} \in [W_2^1(Q_c)]^3$, $Q = V \times [0 \leq t \leq T]$, $Q_c = S_c \times [0 \leq t \leq T]$, t — параметр деформирования. Точкой сверху обозначаются скорости перемещений \dot{u} , $\dot{\tilde{u}}$, $\dot{\bar{u}}$. Скалярное произведение в $L_2(S)$ имеет вид $(\cdot, \cdot)_S = \int_S \sum_{i=1}^3 u_i v_i dS$. Соответствующая этому скалярному произведению норма имеет вид $\|u\|_S = \sqrt{(u, u)_S} = \{\int_S \sum_{i=1}^3 u_i^2 dS\}^{1/2}$.

Обратная задача кинематического формообразования обтяжкой на пуансоне формулируется, аналогично [10–14], в виде квазистатического вариационного принципа в общей лагранжевой формулировке (TL) с функционалом:

$$J(\dot{u}, \dot{\tilde{u}}, \dot{\bar{u}}) = \frac{1}{2\varepsilon_1} [\|\dot{\bar{u}} - \dot{\bar{u}}^*\|_{S_c}^2 + \|\dot{u} - \dot{u}^*\|_{S_b}^2] + W_c + a(\dot{u}, \dot{u}) + a(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{u}}) + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\dot{\tilde{u}} - \dot{\tilde{u}}^*\|_S^2, \quad (1)$$

$$\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0,$$

где $\dot{\bar{u}}^*$, $\dot{\tilde{u}}^*$ — заданные остаточные скорости перемещений тела и контактные скорости перемещений точек пуансона; W_c — контактный потенциал, имеющий вид

$$W_c = - \int_{S_c} [p \cdot (\bar{u} - u) + p \cdot (\dot{\bar{u}} - \dot{u})] dS \quad (2)$$

либо

$$W_c = \int_{S_c} [\frac{1}{\varepsilon_n} g_n \dot{g}_n + \frac{1}{\varepsilon_t} g_t \dot{g}_t] dS, \varepsilon_n > 0, \varepsilon_t > 0, \varepsilon_n \rightarrow 0, \varepsilon_t \rightarrow 0, \quad (3)$$

p — вектор поверхностных контактных сил, действующих на S_c , $g_n = n \cdot (\bar{u} - u)$, $\dot{g}_n = n \cdot (\dot{\bar{u}} - \dot{u})$ — нормальный перехлест (взаимное проникновение по нормали к границе S_c) контактирующих частиц и его скорость, $g_t = \tau \cdot (\bar{u} - u)$, $\dot{g}_t = \tau \cdot (\dot{\bar{u}} - \dot{u})$ — касательный перехлест и его скорость, n — единичный вектор нормали к контактной поверхности, τ — единичный касательный вектор к контактной поверхности; потенциальные формы определяются в виде $a(\dot{u}, \dot{v}) = \int_V \frac{\partial E(\dot{u}_{i,j})}{\partial \dot{u}_{i,j}} \dot{v}_{i,j} dV$, $a(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}}) = \int_V \frac{\partial \tilde{E}(\dot{\tilde{u}}_{i,j})}{\partial \dot{\tilde{u}}_{i,j}} \dot{\tilde{v}}_{i,j} dV$, $E(\dot{u}_{i,j}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl} - c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl}^p + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{u}_{k,i} \dot{u}_{k,j}$, $\tilde{E}(\dot{\tilde{u}}_{i,j}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl} - c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl}^p + \frac{1}{2} \rho_{ij} \dot{u}_{k,i} \dot{u}_{k,j}$ [15], c_{ijkl} — компоненты симметричного тензора упругих констант, $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ — компоненты скоростей пластических деформаций ($\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$, $\lambda > 0$ — функция требующая опре-

деления, $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ — вектор в пространстве компонент девиатора тензора напряжений, направленный по нормали к поверхности текучести, уравнение $f = 0$ определяет поверхность в пространстве компонент девиатора тензора напряжений [15]), σ_{ij} , ρ_{ij} — компоненты текущего и остаточного второго тензора напряжений Пиола–Кирхгофа, $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}$ — компоненты скоростей текущих и остаточных деформаций Грина–Лагранжа, $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{k,i} u_{k,j} + u_{k,i} \dot{u}_{k,j})$, $\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{\tilde{u}}_{i,j} + \dot{\tilde{u}}_{j,i} + \dot{\tilde{u}}_{k,i} \tilde{u}_{k,j} + \tilde{u}_{k,i} \dot{\tilde{u}}_{k,j})$, \dot{u}_i , $\dot{\tilde{u}}_i$ — компоненты скоростей текущих и остаточных перемещений, $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Потенциалы W_c (2), (3) в квазистатических задачах представляют собой производные по t контактных потенциалов $W_c = - \int_{S_c} [p \cdot (\bar{u} - u)] dS$, $W_c = \int_{S_c} [\frac{1}{2\varepsilon_n} g_n^2 + \frac{1}{2\varepsilon_t} g_t^2] dS$, полученных наложением контактных условий на формулировку уравнений движения тел методом множителей Лагранжа и методом штрафных функций, соответственно,

[15,16] (n , τ приняты постоянными). При контакте тел возможно скольжение относительно друг друга и слипание. В первом случае должно выполняться ограничение $(\bar{u}^k - u^k) \cdot n = 0$ на S_c (т.е. потенциалы примут вид $W_c = - \int_{S_c} [p_n \cdot n \cdot (\bar{u} - u)] dS$ или $W_c = \int_{S_c} [\frac{1}{2\varepsilon_n} g_n^2] dS$), а контактные касательные силы определяются по контактными нормальным силам по закону трения Кулона. Во втором случае $-\bar{u}^k = u^k$ на S_c . При рассмотрении обратной задачи с функционалом в виде (1) предполагается, что в рассматриваемый момент t имеется контакт жесткого штампа с деформируемым телом, иначе данные потенциалы не должны входить в функционал.

Будем понимать под произвольным полем скоростей перемещений скорости перемещений с учетом условий, исключающие жесткое перемещение тела в задаче деформирования и разгрузки.

Для компонент скорости второго тензора напряжений Пиола–Кирхгофа выполняются определяющие соотношения

$$\dot{\sigma}_{ij} = c_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p), \quad \dot{\rho}_{ij} = c_{ijkl}(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p).$$

Стационарное значение вариации функционала (1), с учетом независимости \dot{u}_i , $\dot{\tilde{u}}_i$, дают два вариационных принципа: вариационный принцип задачи деформирования и упругой разгрузки (пружинения). Достаточными условиями единственности [15] решения задач деформирования и разгрузки с введенными потенциалами будут

$$\int_V \Delta \left(\frac{\partial E(\dot{u}_{i,j})}{\partial \dot{u}_{i,j}} \Delta \dot{u}_{i,j} dV \right) > 0, \quad \int_V \Delta \left(\frac{\partial \tilde{E}(\dot{\tilde{u}}_{i,j})}{\partial \dot{\tilde{u}}_{i,j}} \dot{\tilde{u}}_{i,j} dV \right) > 0, \quad (4)$$

для всех пар непрерывно дифференцируемых полей скоростей перемещений, принимающих заданные значения на границе. Здесь Δ означает разность соответствующих величин в любых двух различных формах деформации.

Аналогично работам [10,12] строится итерационный метод решения обратных задач в виде

$$A_1^k (\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{v} - \dot{u}^{k+1})_{S_c} + A_1^k (\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{v} - \dot{u}^{k+1})_{S_b} + \left(\frac{\partial W_c}{\partial \dot{u}^k}, \dot{v} - \dot{u}^{k+1} \right)_{S_c} + \left(\frac{\partial W_c}{\partial \dot{u}^k}, \dot{v} - \dot{u}^{k+1} \right)_{S_c} \\ + a(\dot{u}^k, \dot{v} - \dot{u}^{k+1}) + a(\dot{u}^k, \dot{v} - \dot{u}^*) + A_2^k (\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{v} - \dot{u}^*)_S = 0, \quad \forall \dot{v}, \quad \forall \dot{v}, \quad \forall \dot{v}, \quad (5)$$

где $A_1^k > 0$, $A_2^k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} A_1^k = \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} A_2^k = \infty$. Для потенциала (2), должно рассматриваться еще дополнительное уравнение $(\bar{u}^k - u^k, \dot{\lambda} - \dot{p}^{k+1})_{S_c} = 0 \quad \forall \dot{\lambda}$.

Пусть \dot{u}^k , \dot{u}^k , \dot{u}^k — решения контактной задачи деформирования и задачи разгрузки, $S = S_c \cup S_b$. Тогда итерационный процесс (5) решения обратной задачи формообразования представляется в виде

$$\dot{u}_i^{k+1} = \dot{u}_i^k + \alpha^k (\dot{u}_i^* - \dot{u}_i^k) \quad \text{на } S_c, \quad \dot{u}_i^{k+1} = \dot{u}_i^k + \alpha^k (\dot{u}_i^* - \dot{u}_i^k) \quad \text{на } S_b, \quad \alpha^k = \frac{A_2^k}{A_1^k}. \quad (6)$$

Действительно, если принять, что в данный момент времени имеется контакт жесткого тела с деформируемым и \dot{u}^k , \dot{u}^k , \dot{u}^k — решения контактной задачи деформирования и задачи разгрузки, то должны быть выполнены контактные условия. Пусть в (5) $\dot{v}_i = \dot{u}_i^{k+1} - \dot{u}_i^k + \dot{u}_i^k$, $\dot{v}_i = \dot{u}_i^{k+1} - \dot{u}_i^k + \dot{u}_i^k$, $\dot{v}_i = \dot{u}_i^* + \dot{u}_i^k - \dot{u}_i^k$, тогда

$$A_1^k (\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{u}^d)_{S_c} + A_1^k (\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{u}^d)_{S_b} + a(\dot{u}^k, \dot{u}^d) - a(\dot{u}^k, \dot{u}^d) - A_2^k (\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{u}^d)_S = 0, \quad (7)$$

где $\dot{u}_i^d = \dot{u}_i^k - \dot{u}_i^k$. Но $a(\dot{u}^k, \dot{u}^d) - a(\dot{u}^k, \dot{u}^d) \geq 0$ [10,14], тогда (7) примет вид

$$(\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{u}^d)_{S_c} + (\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{u}^d)_{S_b} - \frac{A_2^k}{A_1^k}(\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{u}^d)_S \geq 0.$$

При условии $S = S_c \cup S_b$, последнее неравенство можно представить

$$(\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{u}^d)_{S_c} + (\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{u}^d)_{S_b} - \frac{A_2^k}{A_1^k}(\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{u}^d)_{S_c} - \frac{A_2^k}{A_1^k}(\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{u}^d)_{S_b} \geq 0.$$

Это неравенство будет выполняться, если $(\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{u}^d)_{S_c} - \frac{A_2^k}{A_1^k}(\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{u}^d)_{S_c} \geq 0$,

$(\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{u}^d)_{S_b} - \frac{A_2^k}{A_1^k}(\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{u}^d)_{S_b} \geq 0$. Данные неравенства определяют операцию проектирования [17], поэтому приходим к итерационному процессу (6) в области S_c и S_b .

На основе теорем сходимости [10,11,14] можно показать сходимость и для данного итерационного метода при $0 < \alpha^k < 2$.

Основываясь на выводах [14], итерационный метод (6) для решения обратных задач формообразования обтяжкой по перемещениям может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \dot{u}_i^{k+1} &= \dot{u}_i^k + \alpha^k(\dot{u}_i^* - \dot{u}_i^k) + \beta^k(\dot{u}_i^k - \dot{u}_i^k) \quad \text{на } S_c, \\ \dot{u}_i^{k+1} &= \dot{u}_i^k + \alpha^k(\dot{u}_i^* - \dot{u}_i^k) + \beta^k(\dot{u}_i^k - \dot{u}_i^k) \quad \text{на } S_b, \end{aligned} \quad (8)$$

где $0 < \alpha^k < 2$, $\beta^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $i = 1, 2, 3$.

Применяя основные процедуры метода конечных элементов [15,16,18] к вариационным принципам задач деформирования под нагрузкой и разгрузкой, полученным из функционала (1), найдем систему линейных алгебраических уравнений двух задач

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(i-1)}, \quad {}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{K}}^{(i-1)} \Delta \widehat{\mathbf{U}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{R}}^{(i-1)}, \quad (9)$$

где ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}$, ${}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{K}}^{(i-1)}$ — матрицы касательной жесткости (в матрице ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}$ включены дополнительные элементы, образующиеся от контактных ограничений), ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(i-1)}$, ${}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{R}}^{(i-1)}$ — вектора внешних и внутренних сил. Верхние индексы величин $t + \Delta t$ указывают на момент времени, для которого она вычисляется. Верхние индексы величин $(i - 1)$ указывают на номер итерации при уточнении решения методом Ньютона-Рафсона. Решение следующего шага ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}$.

В результате решения первой задачи по заданным перемещениям, обеспечивающих прижатие заготовки к пуансону и растяжение, получаем деформированную модель с распределением напряжений и деформаций. Вторая задача на основе данных о начальных напряжениях и деформациях определяет перемещения разгрузки. После этого можно найти остаточные узловые перемещения $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} + \hat{\mathbf{U}}$.

Основные процедуры контактных задач включают метод множителей Лагранжа, метод штрафа [15,16] и непосредственный учет контактных ограничений. MSC.Marc делит контактные задачи на две области [19]; первое — когда деформируемое тело контактирует с жесткой поверхностью, а второе — когда деформируемое тело контактирует с другим деформируемым телом или с самим собой. Целевой узел на деформируемом теле не имеет ограничений, пока контакт не случился. В случае возникновения контакта узлы деформируемого тела принимают перемещения узлов жесткого контактного тела, т.е. контактные условия преобразуются в кинематические $u_{normal} = \bar{u} \cdot n$.

Численные результаты решения обратных задач.

Рассматривается задача расчета формы пуансона, создающей такую упреждающую кривизну панели при обтяжки, которая обеспечивает заданную остаточную форму после разгрузки. Моделирование формообразования панели двойной кривизны толщиной 2 мм проводится методом конечных элементов в MSC.Marc. Размеры заготовки 309x83 мм. Заготовка имеет свойства материала 1163T. Материал изотропен и его характеристики равны следующим значениям: модуль Юнга $E = 7000 \text{ кг/мм}^2$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$, предел текучести $\sigma_T = 29.85 \text{ кг/мм}^2$, модуль линейного упрочнения $\sigma_T = 200.75 \text{ кг/мм}^2$. Процесс деформирования, при условии утонения листа менее 20%, проходит в два этапа: прижатие заготовки к пуансону перемещениями (8) и растяжение панели. После разгрузки вычисленное поле остаточных перемещений панели используется в (8). Изменение геометрии пуансона проводится путем решения задачи деформирования поверхности по полю перемещений (8). Данные задачи решаются на каждой итерации, пока не обеспечится необходимая точность.

Итерационный метод реализован в системе MSC.Marc с помощью ряда пользовательских процедур [19]. Для подготовки расчетной модели с заданными граничными условиями и определения проекций контактных тел применялись пользовательские программы, разработанные в MSC.Patran. В результате расчета найдена геометрия пуансона, которая уменьшает отклонения заготовки от заданной формы после обтяжки и разгрузки (рис.1,2). На рис.1 представлена остаточная форма заготовки после обтяжки по заданной поверхности, на рис.2. — остаточная форма заготовки после обтяжки, полученной итерационным методом на 6 итерации. На рисунках представлена урезанная часть заготовки (выбраны элементы находящиеся непосредственно над поверхностью пуансона). В результате расчета отклонения от заданной геометрии уменьшились в 1.6 раз.

Для сравнения был произведен расчет итерационным методом (6) при $\alpha^k = 0$. Сходимость итерационных методов оценивалась по среднеквадратичной норме ($e_k = \frac{\xi_k}{\xi_1}$, $\xi_k = (\sum_S (\tilde{u}_3^k - \tilde{u}_3^*)^2)^{1/2}$, S - нижняя поверхность панели, k - номер итерации). Как видно, из рис.3 (сплошная линия расчет по (8), пунктирная – (6)) метод (8) дает устойчивое решение.

Моделирование обтяжки проводилось без дополнительных переходов с промежуточной термообработкой. Включение в модель процесса деформирования таких переходов возможно. Это обеспечит снижение остаточных напряжений и улучшит сходимость итерационного метода решения обратных задач.

При моделирование процесса обтяжки заготовки при кинематических нагрузках в системе MSC.Marc с учетом больших деформаций (Updated Lagrange) напряженно-деформированное состояние изменяется незначительно в сравнении с общей лагранжевой формулировкой (Total Lagrange), но в разработанном алгоритме решение задач разгрузки при Updated Lagrange некорректное.

Заключение

Обтяжные прессы с программным управлением обеспечивают реализацию различных схем формообразования оболочек. Выбор рациональных схем осуществляется в зависимости от геометрических параметров оболочки, предельного коэффициента обтяжки и типа обтяжного оборудования. Разработанный алгоритм предлагается для



Рис. 1. Остаточная конфигурация заготовки (сверху) после первой итерации в сравнении с заданной поверхностью.



Рис. 2. Остаточная конфигурация заготовки (сверху) после шестой итерации в сравнении с заданной поверхностью.

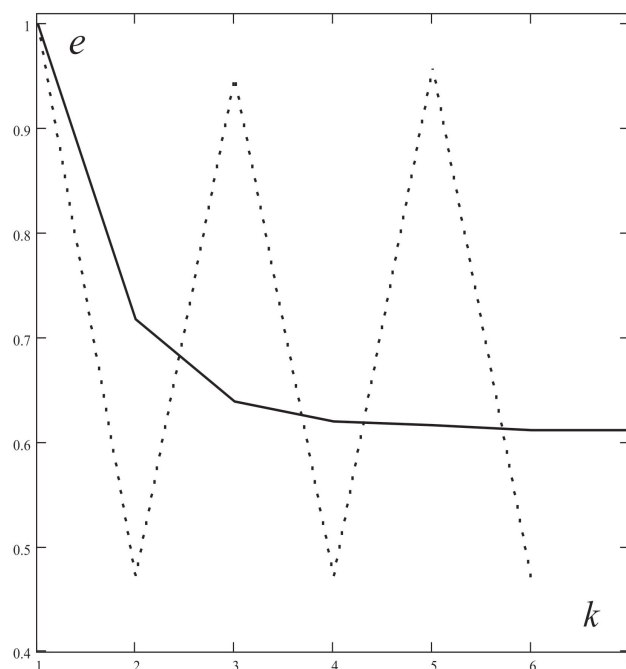


Рис. 3. График сходимости.

уточнения геометрии пуансона при формообразовании с известной технологией обтяжки. В рассмотренной задаче взят наиболее простой закон нагружения обшивки и он не оптимизировался.

Разработанные алгоритмы могут использоваться в промышленных приложениях, таких как формирование обшивок для самолетов, и позволить моделировать и эффективно оценивать параметры технологических процессов изготовления деталей.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аннин Б. Д., Олейников А. И., Бормотин К. С. Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // Прикладная механика и техническая физика. 2010. Т. 51. № 4. С. 155–165.

[2] Веричев С. Н., Горев Б. В., Банщикова И. А. Формообразование изгибом в режиме пластичности элементов самолетных конструкций // Обработка металлов. 2014. № 4(65). С. 85–93.

[3] Yan Yu, Wan Min, Wang Haibo, Huang Lin. Design and optimization of press bend forming path for producing aircraft integral panels with compound curvatures // Chinese Journal of Aeronautics. 2010. 23(2). P. 274–282.

[4] Молод М. В. Управление процессом формообразования обшивок на оборудовании с ЧПУ // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7. № 12-2. С. 62–64.

- [5] Крупский Р. Ф., Кривенок А. А., Станкевич А. В., Белых С. В., Мироненко В. В. Моделирование кинематики движения рабочих элементов обтяжного прессы FET // Вестник ИрГТУ. 2014. № 9(92). С. 40–44.
- [6] Мироненко В. В., Чеславская А. А., Белых С. В. Моделирование обтяжки летательных аппаратов с учётом эффектов, возникающих в зонах зажатия губками // Ученые записки КнАГТУ. 2014. № II-1(18). С. 13–18.
- [7] Крупский Р. Ф., Кривенок А. А., Станкевич А. В., Феоктистов С. И., Белых С. В. Формообразование профильных заготовок с помощью листового обтяжного прессы // Ученые записки КнАГТУ. 2013. № II-1(14). С. 4–8.
- [8] Белых С. В., Кривенок А. А., Мироненко В. В., Мишагин В. А. Определение положения пуансона в рабочем пространстве обтяжного прессы FET в процессе технологической подготовки производства // Вестник ИрГТУ. 2013. № 12(83). С. 36–40.
- [9] Михеев В. А. Устойчивость оболочек двойной кривизны в процессе формообразования обтяжкой // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2004. Т. 6. № 2. С. 408–413.
- [10] Бормотин К. С. Итеративный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 12. С. 2091–2099.
- [11] Бормотин К. С. Итеративный метод решения обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14. С. 141–148.
- [12] Бормотин К. С., Белых С. В., Вин Аунг. Математическое моделирование обратных задач многоточечного формообразования в режиме ползучести с помощью реконфигурируемого устройства // Вычислительные методы и программирование. 2016. Т. 17. С. 258–267.
- [13] Бормотин К. С., Тарануха Н. А. Математическое моделирование обратных задач формообразования с учетом неполной обратимости деформаций ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59. № 1. С. 161–170.
- [14] Бормотин К. С. Метод решения обратных задач неупругого деформирования тонкостенных панелей // Вычислительные методы и программирование. 2017. Т. 18. С. 359–370.
- [15] Коробейников С. Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск.: Изд-во СО РАН, 2000.
- [16] Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [17] Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
- [18] Bathe K. -J. Finite element procedures engineering analysis. – Prentice-Hall, Inc., Engewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [19] Marc 2016, Vol A: Theory and User Information, MSC.Software Corporation <http://www.mssoftware.com/product/marc>

K. S. Bormotin, Win Aung

METHOD OF SOLVING THE INVERSE PROBLEM IN THE PROCESS OF PANEL STRETCH-FORMING

Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk - on - Amur, Russia

Abstract. Modeling of the stretch-forming technology on a die for manufacturing of double curvature sheaths is presented. The precision of the part shape obtained depends on the accuracy of the computed and manufactured form of the tool (punch), which determines the anticipatory shape of the panel. The anticipatory shape should provide the given residual curvature of the panel after its release from the force tool. The problem of determining this form of the tool for a given residual curvature of the panel is an inverse problem. Mathematical models and numerical methods for solving inverse problems of shaping monolithic panels by stretch-forming on a die have been developed. The algorithms implemented in MSC.Marc allow to calculate the required punch shape. The results of iterative methods convergence for solving inverse problems are considered.

Keywords: inverse problem, variational principles, finite element method, stretch-forming, springback, iterative method.

REFERENCES

- [1] Annin B. D., Olejnikov A. I., Bormotin K. S. Modelirovanie processov formoobrazovaniya panelej kryla samoleta SSJ-100 // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2010. T. 51. № 4. S. 155–165. (in Russian)
- [2] Verichev S. N., Gorev B. V., Banshchikova I. A. Formoobrazovanie izgibom v rezhime plastichnosti ehlementov samoletnyh konstrukcij // Obrabotka metallov. 2014. № 4(65). S. 85–93. (in Russian)
- [3] Yan Yu, Wan Min, Wang Haibo, Huang Lin. Design and optimization of press bend forming path for producing aircraft integral panels with compound curvatures // Chinese Journal of Aeronautics. 2010. 23(2). P. 274–282.
- [4] Molod M. V. Upravlenie processom formoobrazovaniya obshivok na oborudovanii s CHPU // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2011. T. 7. № 12-2. S. 62–64. (in Russian)
- [5] Krupskij R. F., Krivenok A. A., Stankevich A. V., Belyh S. V., Mironenko V. V. Modelirovanie kinematiki dvizheniya rabochnih ehlementov obtyazhnogo pressa FET // Vestnik IrGTU. 2014. № 9(92). S. 40–44. (in Russian)
- [6] Mironenko V. V., Cheslavskaya A. A., Belyh S. V. Modelirovanie obtyazhki letatel'nyh apparatov s uchyotom ehffektov, vznikayushchih v zonah zazhatiya gubkami // Uchenye zapiski KnAGTU. 2014. № II-1(18). C. 13–18. (in Russian)

Bormotin Konstantin Sergeevich

e-mail: cvmi@knastu.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Assoc. Prof., Professor of the department of mechanics and analysis of structures and processes, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk - on - Amur, Russia.

Win Aung

e-mail: winnaung53@gmail.com, Graduate Student, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk - on - Amur, Russia.

- [7] Krupskij R. F., Krivenok A. A., Stankevich A. V., Feoktistov S. I., Belyh S. V. Formoobrazovanie profil'nyh zagotovok s pomoshch'yu listovogo obtyazhnogo pressa // Uchenye zapiski KnAGTU. 2013. № II-1(14). S. 4–8. (in Russian)
- [8] Belyh S. V., Krivenok A. A., Mironenko V. V., Mishagin V. A. Opredelenie polozheniya puansona v rabochem prostranstve obtyazhnogo pressa FET v processe tekhnologicheskoy podgotovki proizvodstva // Vestnik IrGTU. 2013. № 12(83). S. 36–40. (in Russian)
- [9] Miheev V. A. Ustojchivost' obolochek dvojnoj krivizny v processe formoobrazovaniya obtyazhkoj // Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk. 2004. T. 6. № 2. S. 408–413. (in Russian)
- [10] Bormotin K. S. Iterativnyj metod resheniya geometricheski nelinejnyh obratnyh zadach formoobrazovaniya ehlementov konstrukcij v rezhime polzuchesti // ZHurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki. 2013. T. 53. № 12. S. 2091–2099. (in Russian)
- [11] Bormotin K. S. Iterativnyj metod resheniya obratnyh zadach formoobrazovaniya ehlementov konstrukcij v rezhime polzuchesti // Vychislitel'nye metody i programirovanie. 2013. T. 14. S. 141–148. (in Russian)
- [12] Bormotin K. S., Belyh S. V., Vin Aung. Matematicheskoe modelirovanie obratnyh zadach mnogotochechnogo formoobrazovaniya v rezhime polzuchesti s pomoshch'yu rekonfiguriruемого ustrojstva // Vychislitel'nye metody i programirovanie. 2016. T. 17. S. 258–267. (in Russian)
- [13] Bormotin K. S., Taranuha N. A. Matematicheskoe modelirovanie obratnyh zadach formoobrazovaniya s uchetom nepolnoj obratimosti deformacij polzuchesti // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2018. T. 59. № 1. S. 161–170. (in Russian)
- [14] Bormotin K. S. Metod resheniya obratnyh zadach neuprugogo deformirovaniya tonkostennyh panelej // Vychislitel'nye metody i programirovanie. 2017. T. 18. S. 359–370. (in Russian)
- [15] Korobejnikov C. H. Nelinejnoe deformirovanie tverdyh tel. Novosibirsk.: Izd-vo SO RAN, 2000. (in Russian)
- [16] Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [17] Vasil'ev F. P. Metody optimizacii. M.: Faktorial Press, 2002.
- [18] Bathe K. -J. Finite element procedures engineering analysis. – Prentice-Hall, Inc., Engewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [19] Marc 2016, Vol A: Theory and User Information, MSC.Software Corporation <http://www.mssoftware.com/product/marc>

Е. Е. Абашкин, С. Г. Жилин, О. Н. Комаров, Н. А. Богданова

**ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООВОГО РЕЖИМА НА
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ
НЕРАЗЪЕМНОЙ МЕТАЛЛОКОНСТРУКЦИИ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ
ЭЛЕКТРОДУГОВОМ И АЛЮМОТЕРМИТНОМ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Предприятия, ориентированные на получение неразъемных металлоконструкций, характеризующихся долговременной эксплуатационной прочностью, обладают значительными конкурентными преимуществами при условии использования технологий, позволяющих сократить потребление ресурсов. К числу таких технологических решений можно отнести процесс получения сварного шва, образующегося за счет тепла, выделившегося в результате совместного электродугового и алюмотермического воздействий. Локальный нагрев обеспечивается подведением к зоне стыка поверхностей протяженного стержня-электрода (СЭ), выполненного в виде стальной оболочки с термитный порошковым наполнителем, состоящим из смеси оксида железа, восстановителя и легирующих компонентов. Материалы такой смеси являются, преимущественно, отходами предприятий машиностроительного и металлургического комплекса, что позволяет обеспечить их возврат в производство. Основной целью работы является экспериментальное определение параметров теплового режима, при которых достигаются требуемые прочностные характеристики неразъемного соединения. В работе представлены результаты эксперимента, в ходе которого определено влияние энергетического воздействия на напряженно-деформированное состояние и прочностные характеристики получаемых неразъемных соединений.

Ключевые слова: отходы машиностроения, электродуговое воздействие, алюмотермическая реакция, тепловой режим, зона термического влияния, напряженно-деформированное состояние, неразъемное соединение, разрыв, прочность

УДК: 621.791.620.17

Важной задачей для предприятий, специализирующихся на производстве металлоконструкций является получение качественной конкурентоспособной продукции за счет технологий, направленных на сокращение энергетических ресурсов и материалов, использование вторичного сырья. Одной из характеристик качества стальных неразъемных соединений и конструкций является способность сопротивляться статическим и динамическим нагрузкам, что определяет их долговременную эксплуатационную прочность. К числу таких технологических решений можно отнести процесс получения сварного шва, образующегося за счет тепла, выделившегося в результате совместного электродугового и алюмотермического воздействий [1]. В основе алюмотермитной составляющей процесса лежит экзотермическая окислительно-восстановительная реакция, в результате которой железо восстанавливается из окалина с получением, так называемой, термитной стали [2]. Исходными компонентами для термитной стали являются оксид железа, восстановитель, легирующие добавки или наполнители, смешанные в определенной пропорции. В качестве восстановителя применяют сплавы, содержащие алюминий [3], а наполнителями могут быть стружка черных металлов, ферросплавы, лигатуры и модификаторы, необходимые для доведения стали по химическому составу. Подобные смеси применяют для сварки железнодорожных рельсов. В таком процессе разовая порция расплава, полученного в результате алюмотермитной реакции, заполняет полость стыка торцевых частей рельсов и, после затвердевания, формирует их неразъемное соединение. Получение протяженных соединений при помощи термитной смеси, помещенной в сердечник порошковой проволоки представляется новым [4]. Такое соединение достигается в процессе автоматической сварки под слоем флюса, позволяющей получить экономию сварочных материалов и электроэнергии, обеспечить поставку металла в зону термического влияния. Ввиду новизны этого процесса сведения о прочностных и эксплуатационных характеристиках соединения весьма скудны. Таким образом, исследование условий формирования соединений, возможностей управления их свойствами путем регуляции параметров теплового воздействия и определения их предельных величин представляется актуальным. В ходе предварительно проведенных теоретических и экспериментальных исследований определено воздействие зоны термического влияния, образующейся при локальном

© Абашкин Е. Е., Жилин С. Г., Комаров О. Н., Богданова Н. А., 2018

Абашкин Евгений Евгеньевич

e-mail: abashkine@mail.ru, младший научный сотрудник Института машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Жилин Сергей Геннадьевич

e-mail: zhilin@imim.ru, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Комаров Олег Николаевич

e-mail: olegnikolaevitsch@rambler.ru, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Богданова Нина Анатольевна

e-mail: joyful289@inbox.ru, младший научный сотрудник Института машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Работа выполнена в рамках государственного задания № 007-00285-18-00

Поступила 15.07.2018

нагреве стыка металлических протяженных элементов, на картину деформации полученного неразъемного соединения [5, 6].

В ходе теоретического блока исследований изучена эволюция напряжений при быстром росте температуры на продольной прямой при нагреве и охлаждении материала до значений температуры окружающей среды. В результате проведения оценки уровня распределения по пластине остаточных напряжений отмечено, что высокий градиент температуры в зоне термического влияния приводит к появлению пластического течения, что, в свою очередь, определяет рост значений необратимых деформаций, зависящих от температуры [7]. При остывании зоны термического влияния может наблюдаться медленно протекающее (с обратным знаком) повторное пластическое течение в области необратимых деформации. Пластические деформации полностью не исчезают даже при медленном охлаждении и приводят к появлению нейтрального нагружения. Теоретическими исследованиями установлено, что наибольшие перемещения характерны для области упругопластической границы, где происходит падение напряжения. Проведенные расчеты позволяют прогнозировать деформацию неразъемного соединения, полученного автоматической сваркой под флюсом проволокой сплошного сечения. Однако получение реальной картины деформации и прочностных характеристик соединения, изготовленного при помощи сварки порошковой проволокой с термитным наполнителем, представляется затруднительным.

В результате практической части предварительных исследований установлена возможность получения неразъемного соединения, состоящего из стальных протяженных элементов за один проход сварочного электрода (СЭ), выполненного в виде порошковой проволоки с алюмотермическим наполнителем [8, 9]. При этом размер и структура зоны термического влияния формируются в результате локального нагрева от совместного электродугового и алюмотермического воздействий. Применение такой порошковой проволоки обеспечивает получение большей вязкости металла шва, чем при классическом методе сварки. Лучшие, в сравнении с традиционными, механические свойства металла зоны термического влияния, а также значения деформаций соединения, достигаются за счет уменьшения размеров зерен его структуры. Такие показатели достигаются при равных энергозатратах и режимах теплового воздействия на зону соединения стальных элементов в процессе использования порошковой проволоки с термитным наполнителем. Термитная смесь, использованная в порошковой проволоке, обеспечивает дополнительную регуляцию температуры и поставку электродного металла в зону стыка деталей.

Однако механизм формирования прочности материала зоны термического влияния и методы управляемого воздействия на этот параметр остаются малоизученными. Интерес представляет изучение возможностей управления прочностными характеристиками зоны стыка протяженных стальных деталей посредством совмещения энергий электродугового и алюмотермитного воздействий, в том числе при неблагоприятных условиях: без разделки кромок деталей и без подготовки сварочных материалов.

Таким образом, целью работы является изучение влияния теплового режима на напряженно-деформированное состояние элементов неразъемной металлоконструкции, полученной при электродуговом и алюмотермическом воздействиях.

В рамках поставленной цели решались следующие задачи:

— получение «за один проход» неразъемных соединений стальных протяженных элементов в условиях различного времени их пребывания в зоне локального нагрева

и изменяющихся электрических параметрах сварки под флюсом электродом в виде порошковой проволоки с алюмотермическим наполнителем;

— регистрация изменения зоны термического влияния соединения в зависимости от величины тепловой мощности локального нагрева;

— изучение напряженно-деформированного состояния материала шва неразъемного соединения в процессе определения его физико-механических свойств;

— на основании комплекса экспериментальных данных определение теплового режима воздействия на стыковую зону, удовлетворяющего критериям прочности и устойчивости к деформациям получаемого неразъемного соединения.

Автоматическую сварку стальных элементов под слоем флюса (АН-348) осуществляли устройством АДФ-1000-5Е. В качестве электрода использовали порошковую проволоку Ш 2,8 мм с термитным наполнителем, коэффициент заполнения которой составил $Kз \approx 0,4$. Алюмотермитный порошок получали смешиванием компонентов фракций 0,16 – 0,315 мм [10]: железной окалины (Fe_3O_4), алюминиевых сплавов, ферромарганца ФМн78(А), ферросилиция ФС50, электродного порошка ЭГ15. Соотношение компонентов в смеси регламентировалось содержанием элементов в ванне расплава, соответствующего низкоуглеродистым и низколегированным маркам сталей [11].

Получение неразъемных соединений сваркой в условиях производства осуществляют при различных режимах теплового воздействия, отличающихся скоростью перемещения СЭ и электрическими параметрами. Основными электрическими параметрами дуги, определяющими ее эффективную тепловую мощность q (кал/с), являются падение напряжения U (В) и сила тока I (А) [10]. Для определения эффективной тепловой мощности, учитывающей технологические условия расплавления металла в стыковой зоне целесообразно применять выражение, представляющее собой количество теплоты, введенное за единицу времени в металл изделия и затраченное на его нагрев:

$$q = 0,24UI\eta$$

где 0,24 – коэффициент перевода электрических величин в тепловые, кал/Вт с; η – эффективный коэффициент полезного действия (КПД) нагрева, который для процессов образования жидкой ванны металла под слоем флюса составляет 0,90 – 0,99 [10]. Величина η зависит от длины дуги и глубины ее проникновения в ванну. На эти параметры влияет удельная плотность СЭ, которая определяется коэффициентом ее заполнения [11]. При получении расплава часть энергии дуги концентрируется у расплавленного торца СЭ и в момент передачи теплоты от дуги к электродной капле поглощается жидким металлом. Тепло передается металлу основы, нагревая и расплавляя СЭ [12]. В результате, значение η возрастает пропорционально увеличению объема металла, поступающего в ванну с электродом, что достигается при использовании проволоки только сплошного сечения. Величина коэффициента заполнения сердечника порошковой проволоки ($Kз$) в большинстве случаев находится в диапазоне $0,15 < Kз < 0,4$ [13]. При этом, использование СЭ с высоким $Kз$ обеспечивает величину эффективного КПД нагрева $\eta = 0,9$. Таким образом, эффективная тепловая мощность дуги при использовании СЭ₁ несколько ниже, чем при использовании проволоки сплошного сечения (СЭ₂). В связи с отмеченным выше при получении экспериментальных неразъемных соединений применялись автоматические режимы, отличающиеся по основным параметрам от традиционного (табл.1). где 0,24 – коэффициент перевода электрических величин в тепловые, кал/Вт с; η – эффективный

коэффициент полезного действия (КПД) нагрева, который для процессов образования жидкой ванны металла под слоем флюса составляет 0,90 – 0,99 [10]. Величина η зависит от длины дуги и глубины ее проникновения в ванну. На эти параметры влияет удельная плотность СЭ, которая определяется коэффициентом ее заполнения [11]. При получении расплава часть энергии дуги концентрируется у расплавленного торца СЭ и в момент передачи теплоты от дуги к электродной капле поглощается жидким металлом. Тепло передается металлу основы, нагревая и расплавляя СЭ [12]. В результате, значение η возрастает пропорционально увеличению объема металла, поступающего в ванну с электродом, что достигается при использовании проволоки только сплошного сечения. Величина коэффициента заполнения сердечника порошковой проволоки (Кз) в большинстве случаев находится в диапазоне $0,15 < \text{Кз} < 0,4$ [13]. При этом, использование СЭ с высоким Кз обеспечивает величину эффективного КПД нагрева $\eta = 0,9$. Таким образом, эффективная тепловая мощность дуги при использовании СЭ₁ несколько ниже, чем при использовании проволоки сплошного сечения (СЭ₂). В связи с отмеченным выше при получении экспериментальных неразъемных соединений применялись автоматические режимы, отличающиеся по основным параметрам от традиционного (табл.1).

Таблица 1

Характеристики режимов формирования металла

Режим	I_i, A	U_i, B	$V_i, \text{м/ч}$	$q_i, \text{кал/с}$
0.1*	250	35	20	2,08
1**	200	35	10	1,52
2**	200	35	20	1,52
3**	250	35	10	1,89
4**	250	35	20	1,89
5**	300	35	10	2,27
6**	300	35	20	2,27
7**	250	40	20	2,16
8**	250	30	20	1,62
9**	250	35	30	1,89

где i – порядковый номер режима.

* режим № 0.1 (традиционный процесс автоматической наплавки под флюсом низкоуглеродистой стали СтЗсп) на АДФ с СЭ₂ марки Св-08ГС — является образцом-свидетелем для режима № 4 с аналогичными параметрами процесса, для которого при расчете q использован $\eta = 0,99$;

** при расчете q для случаев применения режимов №1–9 наплавка материала СЭ₁ (при условии $\text{Кз} = 0,4$) использовали значение $\eta = 0,9$.

Неразъемное соединение получали свариванием пластин с необработанными кромками из СтЗ толщиной (δ) 10 мм, шириной 150 мм и длиной 500 мм однократным тепловым воздействием на зону контакта, температуру в которой регулировали силой тока, напряжением и скорости перемещения сварочного электрода, $V(\text{м/ч})$. После охлаждения шва определяли его физико-механические свойства: прочность на разрыв, ударную вязкость. Испытания проводили с учетом требований ГОСТ 9454-78 (Металлы. Метод испытания на ударный изгиб при пониженных, комнатной и повышенных температурах), ГОСТ 1497-84. (Металлы. Методы испытаний на растяжение). Величину ударной вязкости определяли маятниковым копром типа МК, выполненным по

ГОСТ 10708-82. Напряжение и предел текучести образцов при растяжении определяли при помощи универсальной испытательной машины AG-X plus SHIMADZU при постоянной скорости перемещения захватов 0,05 мм/с. В табл. 2 приведены значения площади образующегося металла наплавки и ударной вязкости этого материала, полученных при различных режимах теплового воздействия в сравнении с образцом, полученным проволокой сплошного сечения.

Таблица 2

Сравнение площади, образующегося при различных режимах наплавляемого металла, и ударной вязкости полученных из него образцов

Параметр	Режим									
	0.1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Площадь металла шва, см ²	0,44	0,45	0,33	0,48	0,23	0,96	0,44	0,27	0,28	0,3
Ударная вязкость КСУ, Дж/см ²	34	47,8	36,4	66,7	52	102	50	44,4	42,9	67

Из табл. 2. видно, что значения КСУ всех образцов металла, полученных с применением порошковой проволоки с алюмотермитным наполнителем выше, чем при режиме 0.1. Наибольшими значениями ударной вязкости обладают образцы, полученные при режимах 3 и 9, т.е. при значениях тепловой мощности $q = 1,89$ кал/с. Сопоставляя данные табл.2, полученные по этим режимам с данными табл.1 можно сделать вывод, что при таких режимах время нахождения зоны стыка соединяемых пластин в расплаве металла существенной роли на показатель КСУ не оказывает. Интересным представляется факт достижения значения КСУ = 52 Дж/см² образцом, полученного на режиме 4 при значении площади образующегося металла равном 0,23 см².

На рис.1 представлены зависимости деформаций от напряжений, возникающих на штоке испытательной машины при разрыве образцов, полученных из металла шва при различных тепловых режимах при однократном проходе СЭ. На рис.2 представлена характеристика напряженно-деформированного состояния образца, полученного при тепловом режиме 5, отличающегося наибольшими значениями I и U, а также максимальным временем пребывания зоны стыка в ванне расплава ввиду минимальной скорости перемещения СЭ. По указанной выше причине эта графическая зависимость, характеризующаяся на порядок большими значениями деформаций, размещена на отдельной иллюстрации.

Из рис.1 видно, что прочность металла швов, полученных при показателях тепловой мощности, лежащих в интервале значений $1,52 \leq q \leq 1,62$ кал/с, не превышает 170 МПа, при значениях деформации не более 0,04 %. Кривые нагружения характеризуются упруго-пластическими зонами, что, в целом приводит к хрупкому разрушению. Очевидно, что такой тепловой мощности недостаточно для создания удовлетворительной прочности наплавленного материала шва, полученного «за один проход». При таких значениях внесенной тепловой мощности скорость сварки заметного влияния на прочностных характеристики образующегося металла не оказывает. Повышение тепловой мощности, в целом, приводит к увеличению прочностных характеристик металла шва. Так, при значениях $1,89 \leq q \leq 2,27$ кал/с прочность образцов при разрыве лежит в интервале значений $180 \leq \sigma_b \leq 400$ МПа. Кривые, построенные по результатам

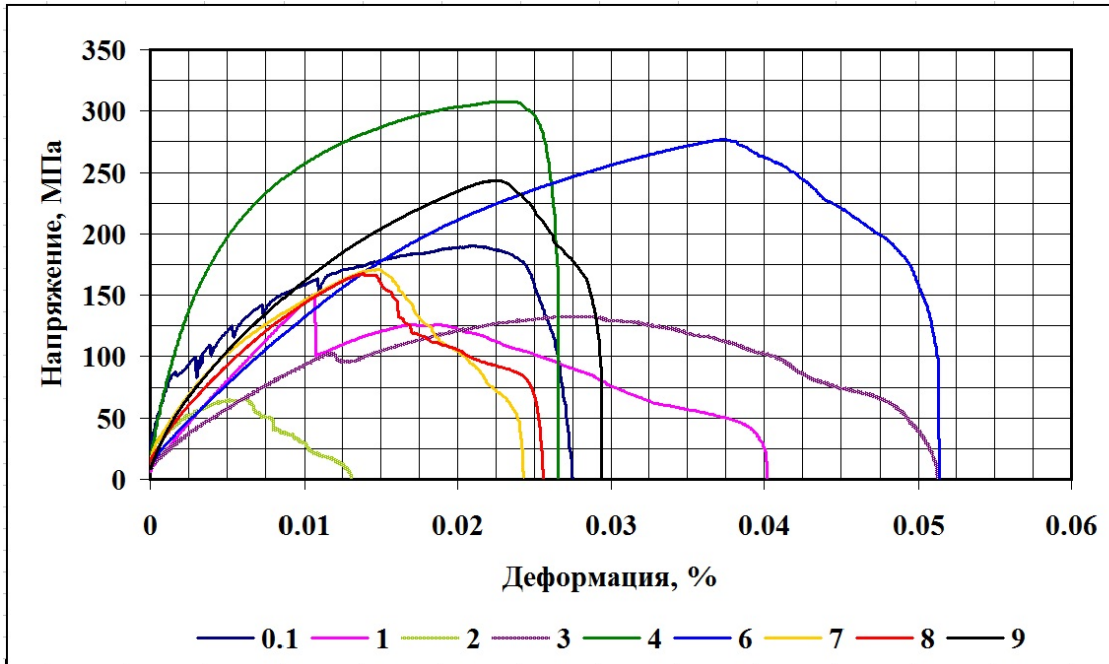


Рис. 1. Зависимости деформаций от напряжений, возникающих при разрыве образцов, полученных при тепловых режимах 0.1, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 и 9

испытания на разрыв образцов, полученных по режимам 3, 4, 6, 7 и 9 характеризуются упругопластическим нагружением. Характер нагружения образца 0.1, полученного с применением проволоки сплошного сечения пилообразный, со значениями $\sigma_b < 190$ МПа. Ширина зоны термического влияния образца, полученного при использовании проволоки сплошного сечения составила 10 мм.

Максимальной прочностью на разрыв обладают образцы, полученные при режиме 5 и скорости перемещения электрода 10 м/ч (рис.2), характеризующимся значением эффективной тепловой мощности дуги $q = 2,27$ кал/с и протяженным пластическим участком кривой нагружения. На рис.2. представлены зоны термического влияния образцов, полученных при режимах 0.1 и 5. Цифрами на рис.2. показаны структурные отличия материала в направлении от центра шва к периферии: 1 – металл шва; 2 – зона сплавления и участок перегрева; 3 – участок перекристаллизации и рекристаллизации; 4 – основной металл. Как видно из рис.2 максимальная протяженность зоны термического влияния, более чем в 1,7 раза превышает таковую, полученную с применением проволоки сплошного сечения. При такой тепловой мощности существенно увеличивается протяженность участков перегрева и рекристаллизации.

Образцы, полученные при режиме 4 и имеющие прочность $\sigma_b \approx 310$ МПа, при скорости перемещения электрода 20 м/ч, отличаются меньшей протяженностью зоны термического влияния (составляющей не более 1,1 от протяженности зоны термического влияния образцов, полученных при использовании проволоки сплошного

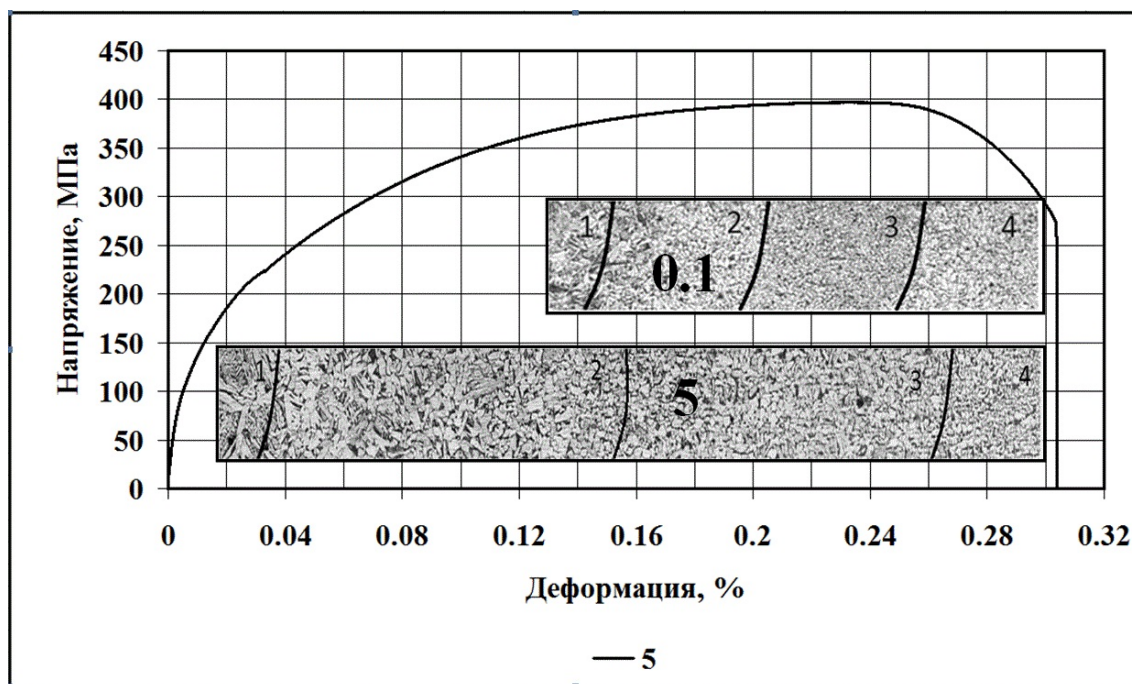


Рис. 2. Зависимость деформации от напряжения, возникающего при разрыве образца, полученного при тепловом режиме 5 и сравнение протяженности зон термического влияния образцов, полученных при использовании проволоки сплошного сечения при режиме 0.1 и проволоки с термитным наполнителем при режиме 5

сечения), а значит, по завершении релаксационных процессов будут иметь меньшую деформацию, что подтверждено экспериментальными данными [8].

Предел текучести образца, полученного при режиме 4 составил $\sigma_B = 197$ МПа, что, с учетом применяемого понижающего коэффициента, регламентируемого ГОСТ Р 52857.1-2007, соответствует нижнему пределу прочностных требований к СтЗсп согласно ГОСТ 535-2005.

Таким образом, по результатам исследований можно заключить:

- эффективная тепловая мощность дуги при использовании СЭ₁ несколько ниже, чем при использовании электрода в виде проволоки сплошного сечения СЭ₂;
- при меньшей площади образующегося в ходе наплавки металла проволокой порошковой с термитным наполнителем значения КСУ существенно выше, чем при использовании СЭ₂;
- в аспекте достижения максимальных прочностных характеристик наиболее предпочтительным представляется режим 4 получения наплавляемого металла электродом СЭ₁

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пат. 2454309 RU МПК В23К 35/368 Порошковая проволока/ И.Г. Сапченко, Е.Е. Абашкин. Оpubл. 2012. Бюл. №18

[2] Комаров О. Н., Жилин С. Г., Предеин В. В., Абашкин Е. Е., Попов А. В. Получение слэбовых заготовок из кипящей стали для прокатного производства методом металлотермии // Заготовительные производства в машиностроении. 2017. Т. 15. № 3. С. 136–140.

[3] Комаров О. Н. Влияние производственных факторов при алюмотермии на свойства получаемых отливок из экспериментальных сплавов // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре го-сударственного технического университета. 2018. № III-1(35). С.56–65

[4] Сапченко И. Г., Жилин С. Г., Комаров О. Н. Абашкин Е. Е. Свойства сварного шва, полученного из термитной шихты // Ученые записки КнАГТУ. 2012. № 1. С.100–105.

[5] Буренин А. А., Дац Е. П., Мурашкин Е. В. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2014. №2. С.124–131.

[6] Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. К расчёту неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // Вычислительная механика сплошных сред. Пермь: Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук (ИМСС УрО РАН). 2017. №3(10). С.245–259

[7] Абашкин Е. Е., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. Условие пластичности максимальных приведённых касательных напряжений в качестве средства расчётов эволюции плоских напряжённых состояний // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. № II - 1(34). 2018. С.51–62

[8] Абашкин Е. Е., Жилин С. Г., Комаров О. Н., Ткачева А. В. Влияние теплового режима совместного электродугового и алюмотермического воздействия на формирование структуры и свойств наплавляемого металла // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. 2018. Т. 20. № 2. С. 62–74.

[9] Абашкин Е. Е., Жилин С. Г., Комаров О. Н. Влияние упаковки компонентов термитного наполнителя порошковой проволоки на процессы электродугового переплава // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2018. Т.1. № 1(33). С.96–104.

[10] Абашкин Е. Е., Каинг М., Ткачева А. В. Температурные напряжения пластины // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4(30). С.24–33.

[11] Новохацкий В. А., Жуков А. А., Макарычев Ю. И. Малоотходная технология производства стальных отливок с экзотермическими прибылями. М.: Машиностроение, 1986. 64 с.

E. E. Abashkin, S. G. Zhilin, O. N. Komarov, N. A. Bogdanova

**THE INFLUENCE OF THERMAL MODE ON THE STRESS-DEFORMED
STATE ELEMENTS ONE-PEACE METAL-CONSTRUCTION OBTAINED IN
ELECTRIC ARC AND ALUMOTHERMAL IMPACT**

*Institute of Machinery and Metallurgy of Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences,
Komsomolsk-on-Amur, Russia*

Abstract. Enterprises focused on obtaining one-piece metal structures that characterize by long-term operational strength, have significant competitive advantages, provided technologies that reduce resource consumption are used. Among these technological solutions is the process of obtaining a weld seam, which is formed due to the heat released as a result of joint electric arc and aluminothermic influences. Local heating is provided by feed to the joint area the surfaces of an extended rod-electrode (SE) made in the form of a steel shell with a thermite powder filler that consist of a mixture of iron oxide, a reducing agent and alloying components. The materials of such a mixture are mainly waste from the enterprises of the machine-building and metallurgical complex, which makes it possible to ensure their return to production. The main purpose of the work is the experimental determination the parameters of the thermal mode, at which the required strength characteristics of an one-piece joint are achieved. In this work are presented results of the experiment in which the influence of the energy effect on the stress-strain state and the strength characteristics of the obtained one-piece joint is determined.

Keywords: mechanical engineering waste, electric arc impact, aluminothermic reaction, thermal mode, heat-affected zone, stress-strain state, one-piece joint, fracture, strength

REFERENCES

- [1] Pat. 2454309 RU MPK V23K 35/368 Poroshkovaya provoloka/ I.G. Sapchenko, E.E. Abashkin. Opubl. 2012. Byul. №18 (in Russian)
- [2] Komarov O. N., Zhilin S. G., Predein V. V., Abashkin E. E., Popov A. V. Poluchenie slyabovyh zagotovok iz kipyashchej stali dlya prokatnogo proizvodstva metodom metallotermii // Zagotovitel'nye proizvodstva v mashinostroenii. 2017. T. 15. № 3. S. 136–140. (in Russian)
- [3] Komarov O. N. Vliyanie proizvodstvennyh faktorov pri alyumotermii na svojstva poluchaemyh otlivok iz ehksperimental'nyh splavov // Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure go-sudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2018. № III-1(35). S.56–65. (in Russian)

Abashkin Evgenij Evgen'evich

e-mail: abashkine@mail.ru, Junior Researcher. Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia,

Zhilin Sergey Gennadevich

e-mail: zhilin@imim.ru, Ph. D., Assoc. Prof., Leading Researcher. Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia,

Komarov Oleg Nikolaevitsch

e-mail: olegnikolaevitsch@rambler.ru, Ph. D., Assoc. Prof., Leading Researcher. Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia,

Bogdanova Nina Anatolievna

e-mail: joyful289@inbox.ru, Junior Researcher. Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

- [4] Sapchenko I. G., ZHilin S. G., Komarov O. N., Abashkin E. E. Svoystva svarnogo shva, poluchennogo iz termitnoj shihty // Uchenye zapiski KnAGTU. 2012. № 1. S.100–105. (in Russian)
- [5] Burenin A. A., Dac E. P., Murashkin E. V. Formirovanie polya ostatochnyh napryazhenij v usloviyah lokal'nogo teplovogo vozdeystviya // Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tvyordogo tela. 2014. №2. S.124–131. (in Russian)
- [6] Burenin A. A., Tkacheva A. V., SHCHerbatyuk G. A. K raschyotu neustanovivshihsy temperaturnyh napryazhenij v uprugopla-sticheskih telah // Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred. Perm': Institut mekhaniki sploshnyh sred Ural'skogo otdeleniya Rossijskoj akademii nauk (IMSS UrO RAN). 2017. №3(10). S.245–259. (in Russian)
- [7] Abashkin E. E., Tkacheva A. V., SHCHerbatyuk G. A. Uslovie plastichnosti maksimal'nyh pri-vedyonnyh kasatel'nyh napryazhenij v kachestve sredstva raschyotov ehvolucii ploskih napryazhyonnyh sostoyanij // Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. № II - 1(34). 2018. S.51–62. (in Russian)
- [8] Abashkin E. E., ZHilin S. G., Komarov O. N., Tkacheva A. V. Vliyanie teplovogo rezhima sovmestnogo ehlektrodugovogo i alyumotermicheskogo vozdeystviya na formirovanie struktury i svoystv naplavlyaemogo metalla // Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mashinostroenie, materialovedenie. 2018. T. 20. № 2. S. 62–74. (in Russian)
- [9] Abashkin E. E., ZHilin S. G., Komarov O. N. Vliyanie upakovki komponentov termitnogo napolnitelya poroshkovej provoloki na processy ehlektrodugovogo pereplava // Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2018. T.1. № 1(33). S.96–104. (in Russian)
- [10] Abashkin E. E., Kaing M., Tkacheva A. V. Temperaturnye napryazheniya plastiny // Vestnik CHGPU im. I. YA. YAKovleva Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2016. № 4(30). S.24–33. (in Russian)
- [11] Novohackij V. A., ZHukov A. A., Makarychev YU. I. Maloothodnaya tekhnologiya proizvodstva stal'nyh otlivok s ehkzotermicheskimi pribylyami. M.: Mashinostroenie, 1986. 64 s. (in Russian)

В. М. Козин, Е. Г. Рогожникова

УВЕЛИЧЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ РЕЗОНАНСНОГО МЕТОДА РАЗРУШЕНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ЗА СЧЕТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

*Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет,
г. Комсомольск-на-Амуре, Россия*

Аннотация. Рассмотрена возможность увеличения резонансного метода разрушения ледяного покрова за счет использования интерференции, возбуждаемых изгибно-гравитационных волн, возникающих при одновременном движении нескольких судов на воздушной подушке (СВП). СВП движутся по ледяному покрову фронтом с постоянной скоростью. Экспериментально-теоретически исследуется влияние расстояния между нагрузками на напряженно-деформированное состояние ледяного покрова. Анализ проводится на основе решения дифференциального уравнения, описывающего вязко-упругие колебания ледяного покрова от действия движущейся нагрузки. Решение уравнения получено в интегральной форме. Экспериментальные исследования проведены в ледовом бассейне на естественном ледяном покрове.

Ключевые слова: Резонансный метод, ледяной покров, изгибно-гравитационные волны, разрушение, интерференция.

УДК: 532.526.2

Многие страны имеют замерзающие реки, омываются морями, которые в различной степени и на разные сроки покрываются льдом. Лед является серьезным препятствием на пути судоходства, осложняя, а иногда делая невозможной своевременную доставку грузов по назначению. Он также затрудняет разведку и добычу полезных ископаемых, огромные запасы которых содержатся в шельфовой зоне арктических морей и Антарктики. Для решения указанных ледотехнических проблем может быть использован резонансный метод разрушения ледяного покрова амфибийными суднами

© Козин В. М., Рогожникова Е. Г., 2018

Козин Виктор Михайлович

e-mail: kozinvictor@rambler.ru, доктор технических наук, профессор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия,

Рогожникова Елена Григорьевна

e-mail: steinbockh@mail.ru, кандидат технических наук, старший преподаватель, Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

на воздушной подушке (СВП), т.е. посредством возбуждения резонансных изгибно-гравитационных волн (ИГВ).

Сущность резонансного метода разрушения ледяного покрова, изложена в работах [3; 6] и заключается в возбуждении в ледяном покрове резонансных изгибно-гравитационных волн. Многие авторы занимались исследованием движения нагрузки по ледяному покрову [9-10, 13,15] или влияния периодической внешней нагрузки на колебания полубесконечной упругой пластины и полосы [11-12] как теоретически, так и экспериментально [14]. Использование ледяного покрова в качестве взлетно-посадочных полос исследовалось в работах [18-20].

В известных исследованиях рассматривалось движение одиночной нагрузки. Однако, при выполнении ледокольных работ одним СВП его параметры могут оказаться недостаточными для разрушения ледяного покрова заданной толщины. В таких случаях эффективность ледокольных работ можно повысить за счет одновременного использования нескольких судов, т.е. за счет интерференции возбуждаемых ими ИГВ. При этом наиболее интенсивное разрушение ледяного покрова будет происходить позади судов на расстоянии от них равном примерно $\lambda_p/4$ [6; 14; 7] (где λ_p – длина резонансных ИГВ [6]).

Данная работа посвящена исследованиям закономерностей напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при движении по нему двух нагрузок. Предварительно выполненные экспериментальные исследования с полунатурными и натурными СВП показали перспективность такого подхода (рис.1-2) [4].



Рис. 1. Спаренная работа СВП "КнАПИ-1" и "КнАПИ-2" при выходе на берег

Теоретические исследования влияния взаимного расположения СВП на параметры возбуждаемых ими ИГВ проводились на основании решения дифференциального уравнения малых колебаний плавающей вязко-упругой пластины под действием внешней нагрузки, которое можно записать в виде [9]:

$$\frac{Gh^3}{3} \left(1 - \tau_\phi u \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^4 w + \rho_2 g w + \rho_1 h u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho_2 u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -q, \quad (1)$$

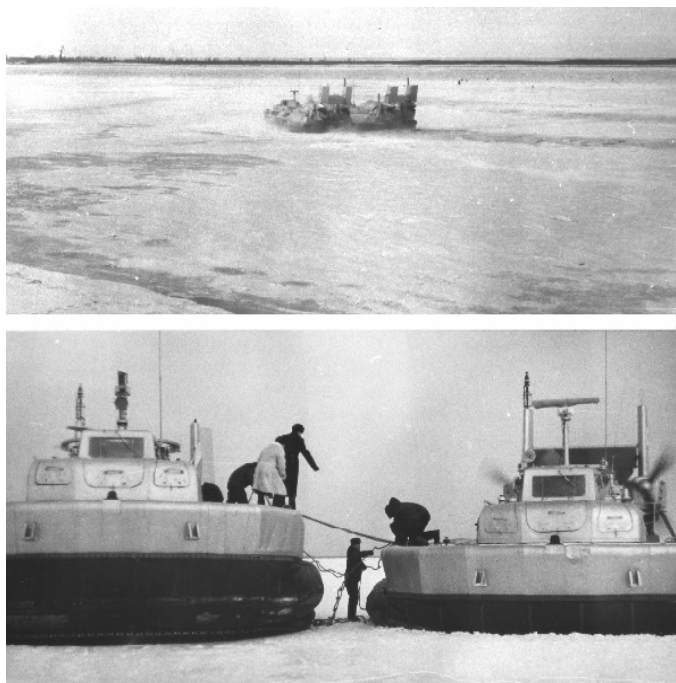


Рис. 2. Счаливание кораблей на воздушной подушке "Скат" для групповой работы по разрушению льда

где: $G = 0.5E/(1 + \nu)$ - модуль упругости льда при сдвиге; ν - коэффициент Пуассона; h - толщина ледяного покрова; τ_ϕ - время релаксации деформаций; w - прогиб льда; ρ_1, ρ_2 - плотность льда и воды; g - ускорение силы тяжести; ∇ - оператор набла; u - скорость движения нагрузки; q - система перемещающихся давлений; Φ - потенциал движения жидкости, удовлетворяющий уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$.

Выражение для w получено в виде [17]:

$$w(x, y) = \frac{4q_0}{\pi^2 \cdot \rho_2 \cdot u^2} \cdot \int_0^\infty \lambda^2 \cdot th(\lambda H) \times \int_0^\lambda \frac{\cos(y\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}) \sin(\alpha \frac{L_n}{2}) \sin(\frac{B_n}{2} \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2})}{\alpha(\lambda^2 - \alpha^2)(\zeta^2 + \eta^2)} \times (\cos(\alpha x) \cdot \zeta + \sin(\alpha x) \cdot \eta) d\alpha d\lambda, \quad (2)$$

где:

$$\eta = \frac{Gh^3 \lambda^5 th(\lambda H) \alpha \tau_\phi}{3\rho_2 u};$$

$$\zeta = -\frac{Gh^3 \lambda^5 th(\lambda H)}{3\rho_2 u^2} - \frac{g\lambda th(\lambda H)}{u^2} + \frac{\rho_1 h \alpha^2 \lambda th(\lambda H)}{\rho_2} + \alpha^2,$$

здесь: q_0 - интенсивность нагрузки; L_n - длина нагрузки; B_n - ширина нагрузки; H - глубина воды.

Работоспособность полученных зависимостей подтверждена путем сопоставления результатов теоретических расчетов с экспериментальными данными, полученными на упругих пленках [4; 7], в натуральных условиях [2; 8] и естественном льду в ледовом бассейне лаборатории «Ледотехника» Приамурского государственного университета имени Шолом-Алейхема.

Масштаб моделирования ИГВ в ледовом бассейне размерами $L \times B \times H = 10 \times 3 \times 1$ м $\lambda = 1:50$ был выбран исходя из его размеров, при этом длина бассейна обеспечивала

выход на стационарный режим движения моделей нагрузки [1]. Опыты проводились при глубине воды 1 м и толщине намораживаемого модельного льда 0.3 см.

Для определения суммарных теоретических прогибов ледяного покрова при движении по нему двух нагрузок использовались зависимости:

$$w_f(x, y) = w(x, y) + w(x, y - L_y),$$

здесь: L_y – расстояние между нагрузками при движении фронтом.

В качестве нагрузки использовалась схематизированная модель СВП «Мурена». Ее параметры составляли: $l_m = 0.60$ м; $b_m = 0.26$ м; $m_m = 0.85$ кг. Модель ледяного покрова в ледовом бассейне приготавливалась намораживанием естественного льда естественным холодом при температуре воздуха $t = - (9 - 16)^\circ\text{C}$, а его толщина составляла $h_m = 0.003$ м. Глубина бассейна в опытах составила 40 см. Расстояние между нагрузками изменялось от полного счаливания до расстояния $L_y = 0.65$ м. Дальнейшее увеличение расстояния между моделями было ограничено влиянием размеров бассейна на деформации модельного льда.

Расчеты были выполнены для полученных экспериментальных данных при параметрах льда: $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг/м}^3$; $h = 0.5$ м; $H = 20$ м; $E = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$.

На первоначальном этапе исследований с целью определения резонансной скорости были выполнены эксперименты по буксировке одной модели (рис. 3).



Рис. 3. Характер разрушения модельного льда.

На втором этапе исследований проводились эксперименты по движению двух моделей фронтом (рис. 4). Буксировка двух моделей осуществлялась с резонансной скоростью, которая, так же как и для одиночной нагрузки равна 2.2 м/с.

Результаты сопоставления экспериментальных и теоретических исследований движения двух нагрузок по ледяному покрову достаточно хорошо совпадают (рис. 5).

При выполнении ледокольных работ путем возбуждения ИГВ возникает вопрос – как оценить ледоразрушающую способность возбуждаемых ИГВ. Существуют различные критерии [16], в том числе и силовой.

Силовой критерий – теоретический уровень изгибных напряжений $2.1\sigma_u$, при достижении которого достигается полное разрушение льда при нагружении его резонансными ИГВ.

Устойчивые результаты расчётов позволяют в качестве критерия для оценки ледоразрушающих способностей СВП принять теоретическое значение максимальных

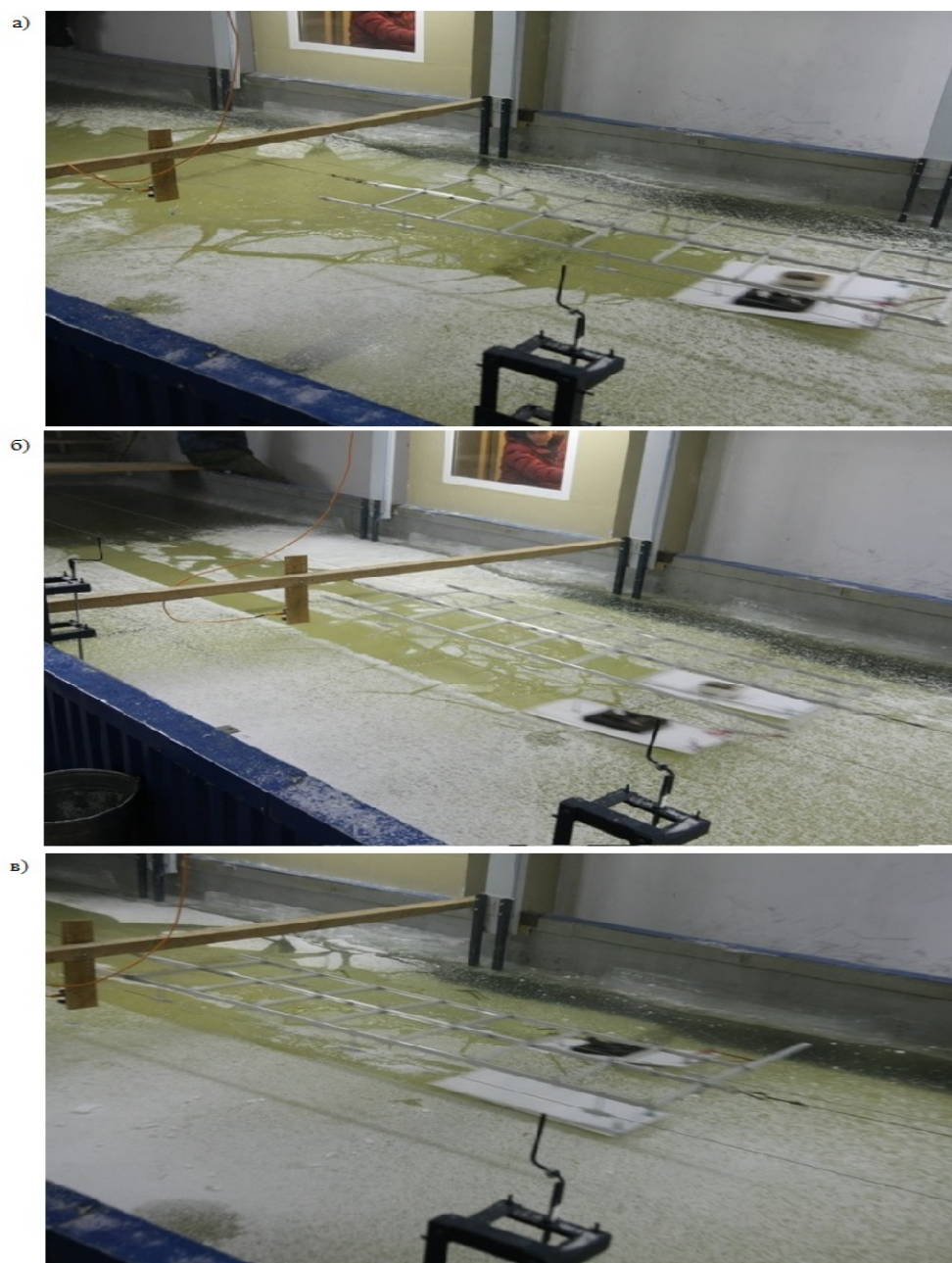


Рис. 4. Характер разрушения модельного льда толщиной $h_m=0.003$ м после прохождения моделей СВП массой $m_m=0.85$ кг с резонансной скоростью $u_m=2.2$ м/с: а – счаливание моделей; б – расстояние между моделями $L_y = 0.52$ м; в – расстояние между моделями $L_y = 0.65$ м.

изгибных напряжений, уровень которых соответствует началу полного разрушения льда за движущимся СВП. Т. е. если при движении СВП во льду возникают напряжения, максимальные теоретические значения которых оказываются равными или

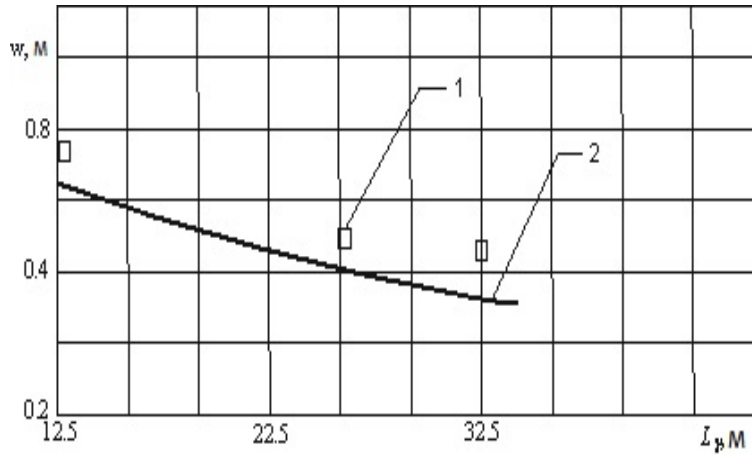


Рис. 5. Сопоставление результатов теоретических исследований с экспериментальными при движении одиночной нагрузки: 1 – экспериментальные исследования; 2 – теоретические исследования.

больше найденного σ_x , то за судном, возбуждающим такие ИГВ, будет происходить непрерывное полное разрушение ледяного покрова.

Средняя величина максимальных относительных напряжений $\bar{\sigma}_x$ определялась по формуле [16]:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x}{\sigma_u}, \quad (4)$$

где: при $\sigma_u = 1.2$ МПа (средний предел прочности пресноводного льда на изгиб во время экспериментов) $\bar{\sigma}_x$ составила 2.08, т.е. больше 2.

Максимальные нормальные по толщине пластины напряжения записываются в виде:

$$\sigma_x = \frac{6M_x}{h^2}, \quad (5)$$

где: M_x – изгибающий момент, определяемый как:

$$M_x = -\frac{Gh^3}{3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (w + \tau_\phi \frac{\partial w}{\partial t}) + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w + \tau_\phi \frac{\partial w}{\partial t}) \right).$$

В начале исследований были выполнены расчеты максимальных σ_x в зависимости от скорости движения одного СВП и определена резонансная скорость, а затем для двух.

Из рис.6 видно, что величина $\bar{\sigma}_x$ превышала значение в 2.1 раза, что соответствовало полному разрушению ледяного покрова, подтвержденному результатами экспериментальных исследований.

В результате экспериментально-теоретических исследований можно сделать следующие выводы:

1. Исследования показали целесообразность использования интерференции ИГВ, возбуждаемых двумя СВП при движении фронтом для повышения эффективности резонансного метода разрушения ледяного покрова.

2. Показана работоспособность использованных математических зависимостей при исследованиях напряженно-деформированного состояния ледяного покрова от возбуждаемых в нем ИГВ, что позволяет использовать силовой критерий и посредством теоретического прогноза разработать рекомендации для повышения ледоразрушающей способности группы СВП.

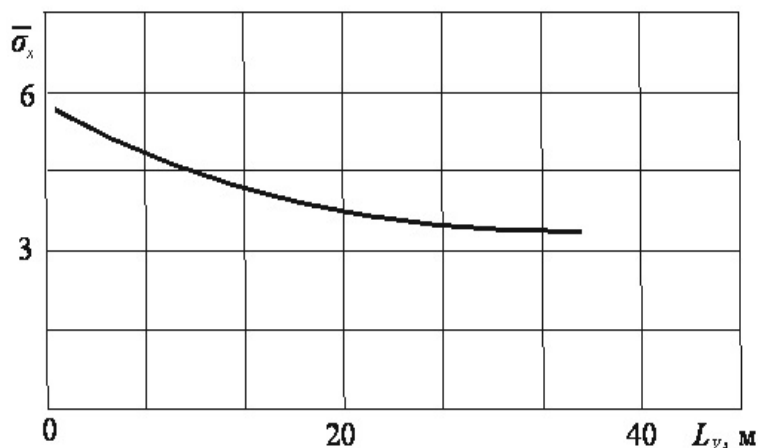


Рис. 6. Зависимость $\bar{\sigma}_x$ от расстояния между СВП при их движении фронтом

3. Использование СВП при движении «фронтом» достаточно перспективно, т.к. есть возможность существенно повысить эффективность резонансного метода разрушения ледяного покрова при его реализации группой, превышающей два и более судов.

Выполненная работа показывает целесообразность дальнейших исследований в области совершенствования ранее предложенного и оправдавшего себя резонансного метода разрушения ледяного покрова

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Земляк В. Л., Баурин Н. О., Курбацкий Д. А. // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. 2013. № 1 (12). С. 68–077.
- [2] Иванов К. Е., Кобеко П. П., Шульман А. Р. Деформация ледового покрова при движении грузов // Журнал технической физики. 1946. Т.1. С. 257–262.
- [3] Козин В. М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты. М.: Издательство «Академия Естествознания», 2007. 355 с.
- [4] Козин В. М., Жесткая В. Д., Погорелова А. В. и др. Прикладные задачи динамики ледяного покрова. М.: Издательство «Академия Естествознания», 2008. 330 с.
- [5] Козин В. М., Земляк В. Л. Лаборатория механики сплошных сред // Вестник ГОУ ВПО «КнАГТУ». Вып. 13 В 2 ч. Ч.1. 2009. С. 244–246.
- [6] Козин В. М., Земляк В. Л. Физические основы разрушения ледяного покрова резонансным методом. Комсомольск-на-Амуре: ИМиМ ДВО РАН, 2013. 250 с.
- [7] Козин В. М., Моделирование изгибно-гравитационных волн в сплошном ледяном покрове. // В кн.: Теория и прочность ледокольного корабля. Горький: Изд. ГПИ им. А.А. Жданова, 1982. Вып. 3. С. 35–38.
- [8] Песчанский И. С. Ледоведение и ледотехника. Х.: Гидрометеиздат, 1967. 467 с.
- [9] Погорелова А. В. Особенности волнового сопротивления СВПА при нестационарном движении по ледяному покрову // ПМТФ. 2008. Т.49. №1. С. 89–99.
- [10] Стурова И. В. Влияние топографии дна на нестационарное поведение упругой пластины, плавающей на мелководье // ПМТФ. 2008. Т.72. №4. С. 588–600.

- [11] Ткачева Л. А. Воздействие периодической нагрузки на плавающую упругую пластину // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. №2. С. 132–146.
- [12] Ткачева Л. А. Плоская задача о колебаниях плавающей упругой пластины под действием периодической внешней нагрузки // ПМТФ. 2004. Т.45. №3. С. 136–145.
- [13] Squire V. A., Hosking R. J., Kerr A. D. and Langhorne P. J. *Moving Loads on Ice Plates*: Kluwer Academic Publishers:Dordrecht, 1996.
- [14] Takizawa T. Response of a Floating Sea Ice Sheet to a Moving Vehicle // Proc. Fifth International Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symp. 1986. V.4. P.614–621.
- [15] Wang K, Hosking R. J. and Milinazzo F. Time-dependent response of a floating viscoelastic plate to an impulsively started moving load // J. Fluid Mech. 2004. V.521. P.295–317.
- [16] Козин В. М., Верещагин В. Ю., Верещагина А. С. Критерии оценки ледоразрушающей способности изгибно-гравитационных волн // Ученые записки КнГТУ. №4-1(24). 2015. С.95–104.
- [17] Козин В.М., Замляк В.Л., Рогожникова Е.Г., Повышение эффективности резонансного метода разрушения ледяного покрова при парном движении судов на воздушной подушке // ПМТФ. 2017. Т.58. №2. С.188–192.
- [18] Погорелова А. В., Козин В. М., Матюшина А. А. Исследование напряжённо-деформированного состояния ледяного покрова при взлёте и посадке на него самолёта // ПМТФ. 2015. Т. 56. №5. С.214–221.
- [19] Matiushina A. A., Pogorelova A. V., Kozin V. M. Effect of Shock Pulse Load on the Ice Cover During Landing of an Airplane // International Journal of Offshore and Polar Engineering. 2016. Vol.26. №1. P. 6–12.
- [20] Pogorelova A. V., Matiushina A. A., Kozin V. M. et al. Modeling of an Airplane Take-off and Landing on the Ice Cover in Variable Water Depth Conditions // Proc. of the 26th (2016) Int. Ocean and Polar Engineering Conf. Rhodos (Rodos), Greece, June 26 – July 1. 2016. P. 1187–1191.

V. M. Kozin, E. G. Rogozhnikova

**INCREASE IN OPPORTUNITIES OF A RESONANT METHOD OF
DESTRUCTION OF AN ICE COVER DUE TO USE OF AN INTERFERENCE
OF THE EXCITED FLEXURAL AND GRAVITATIONAL WAVES**

*Institute of Machinery and Metallurgy of Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences,
Komsomolsk-on-Amur, Russia*

Amur State University of Humanities and Pedagogy, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. The possibility of increasing the resonant method of the ice cover failure through the use of interference excited by flexural-gravitational waves arising from the simultaneous motion of several amphibian hovercrafts (AHC). AHCs move over the ice cover abreast. Experimental and theoretical study the influence of the distance between loads on the stress-strain state of the ice cover. The analysis is carried out on the basis of the solution of the differential equation describing the visco-elastic oscillations of the ice cover from the action of a moving load. Solution of the equation is obtained in integral form. Experimental studies were carried out in an ice basin on a natural ice sheet.

Keywords: Resonance method, ice cover, flexural gravity waves, failure, interference.

REFERENCES

- [1] Zemlyak V. L., Baurin N. O., Kurbackij D. A. // Vestnik Priamurskogo gosudarstvennogo universiteta im. SHolom-Alejhema. 2013. № 1 (12). S. 68–077. (in Russian)
- [2] Ivanov K. E., Kobeko P. P., SHul'man A. R. Deformaciya ledovogo pokrova pri dvizhenii грузов // ZHurnal tekhnicheskoy fiziki. 1946. T.1. S. 257–262. (in Russian)
- [3] Kozin V. M. Rezonansnyj metod razrusheniya ledyanogo pokrova. Izobreteniya i ehksperimenty. M.: Izdatel'stvo «Akademiya Estestvoznaniya», 2007. 355 s. (in Russian)
- [4] Kozin V. M., ZHestkaya V. D., Pogorelova A. V. i dr. Prikladnye zadachi dinamiki ledyanogo pokrova. M.: Izdatel'stvo «Akademiya Estestvoznaniya», 2008. 330 s. (in Russian)
- [5] Kozin V. M., Zemlyak V. L. Laboratoriya mekhaniki sploshnyh sred // Vestnik GOU VPO «KnAGTU». Vyp. 13 V 2 ch. CH.1. 2009. S. 244–246. (in Russian)
- [6] Kozin V. M., Zemlyak V. L. Fizicheskie osnovy razrusheniya ledyanogo pokrova rezonansnym metodom. Komsomol'sk-na-Amure: IMiM DVO RAN, 2013. 250 s. (in Russian)
- [7] Kozin V. M., Modelirovanie izgibno-gravitacionnyh voln v sploshnom ledyanom pokrove. // V kn.: Teoriya i prochnost' ledokol'nogo korablya. Gor'kij: Izd. GPI im. A.A. ZHdanova, 1982. Vyp. 3. C. 35–38.

Kozin Viktor Mikhaylovich

e-mail: kozinvictor@rambler.ru, Dr. Eng., Prof., Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia,

Rogozhnikova Elena Grigoryevna

e-mail: steinbockh@mail.ru, Ph. D., Senior Lecturer, Amur State University of Humanities and Pedagogy, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

- [8] Peschanskij I. S. Ledovedenie i ledotekhnika. H.: Gidrometeoizdat, 1967. 467 s. (in Russian)
- [9] Pogorelova A. V. Osobennosti volnovogo soprotivleniya SVPA pri nestacionarnom dvizhenii po ledyanomu pokrovu // PMTF. 2008. T.49. №1. S. 89–99. (in Russian)
- [10] Sturova I. V. Vliyanie topografii dna na nestacionarnoe povedenie uprugoj plastiny, plavayushchej na melkovod'e // PMTF. 2008. T.72. №4. S. 588–600. (in Russian)
- [11] Tkacheva L. A. Vozdejstvie periodicheskoy nagruzki na plavayushchuyu upruguyu plastinu // Izv. RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza. 2005. №2. S. 132–146. (in Russian)
- [12] Tkacheva L. A. Ploskaya zadacha o kolebaniyah plavayushchej uprugoj plastiny pod dejstviem periodicheskoy vneshnej nagruzki // PMTF. 2004. T.45. №3. S. 136–145. (in Russian)
- [13] Squire V. A., Hosking R. J., Kerr A. D. and Langhorne P. J. Moving Loads on Ice Plates: Kluwer Academic Publishers:Dordrecht, 1996. (in Russian)
- [14] Takizawa T. Response of a Floating Sea Ice Sheet to a Moving Vehicle // Proc. Fifth International Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symp. 1986. V.4. P.614–621.
- [15] Wang K, Hosking R. J. and Milinazzo F. Time-dependent response of a floating viscoelastic plate to an impulsively started moving load // J. Fluid Mech. 2004. V.521. R.295–317.
- [16] Kozin V. M., Vereshchagin V. YU., Vereshchagina A. C. Kriterii ocenki ledorazrushayushchej sposobnosti izgibno-gravitacionnyh voln // Uchenye zapiski KnGTU. №4-1(24). 2015. S.95–104. (in Russian)
- [17] Kozin V.M., Zamlyak V.L., Rogozhnikova E.G., Povyszenie ehffektivnosti rezonansnogo metoda razrusheniya ledyanogo pokrova pri parnom dvizhenii sudov na vozdushnoj podushke // PMTF. 2017. T.58. №2. S.188–192. (in Russian)
- [18] Pogorelova A. V., Kozin V. M., Matyushina A. A. Issledovanie napryazhyonno-deformirovannogo sostoyaniya ledyanogo pokrova pri vzlyote i posadke na nego samolyota // PMTF. 2015. T. 56. №5. S.214–221. (in Russian)
- [19] Matiushina A. A., Pogorelova A. V., Kozin V. M. Effect of Shock Pulse Load on the Ice Cover During Landing of an Airplane // International Journal of Offshore and Polar Engineering. 2016. Vol.26. №1. P. 6–12. (in Russian)
- [20] Pogorelova A. V., Matiushina A. A., Kozin V. M. et al. Modeling of an Airplane Take-off and Landing on the Ice Cover in Variable Water Depth Conditions // Proc. of the 26th (2016) Int. Ocean and Polar Engineering Conf. Rhodos (Rodos), Greece, June 26 – July 1. 2016. P. 1187–1191.

М. В. Петров, Т. Г. Федорова, Е. Г. Гоник, Н. Г. Пфаненштиль

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ
ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК,
ЗАПОЛНЕННЫХ СЫПУЧИМ МАТЕРИАЛОМ, ПРИ ИЗГИБЕ
ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ**

*Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия
Казанский филиал Российского государственного университета правосудия, г. Казань,
Россия*

Аннотация. Экспериментально изучено влияния геометрических параметров и сыпучего заполнителя на форму потери устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек и критическое значение поперечной нагрузки при изгибе. Исследуемые образцы выполнены из алюминиевых сплавов. Один торец оболочки жестко закреплен, а на другой торец прикладывалась вертикально направленная сила. Исследовались пустые и заполненные на 90% по объему сыпучим материалом оболочки. В качестве заполнителя использовался железный порошок ПЖ-5. В каждой серии экспериментов испытывались по 5-10 образцов. После статистической обработки экспериментальных данных построены графики зависимости перемещений нагружаемого торца оболочки от приложенной силы. Критическая нагрузка определялась методом точки перегиба, согласно которому нагрузка считается критической, если ее последующее малое приращение приводит к резкому увеличению прогиба оболочки. Установлено, что заполнение сыпучим материалом на 90% создает при изгибе оболочки давление на ее внутреннюю поверхность, которое препятствует образованию локальных вмятин и увеличивает значение критической нагрузки. Проведено сопоставление экспериментально полученных значений критического изгибающего момента для пустых оболочек с результатами аналитического решения других авторов, не учитывающего влияние длины на устойчивость оболочки. Показано, что аналитическое решение в этом случае дает завышенное значение изгибающего момента. Расхождение результатов расчетов и экспериментов по этому параметру может достигать 80%. Уточнение теоретических результатов требует решения задачи в трехмерной, геометрически и физически нелинейной постановке с привлечением численных методов и реализующих их программных комплексов.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, заполнитель, устойчивость, пластические деформации, эксперимент.

УДК: 539.3

Введение. Круговые цилиндрические оболочки применяются во многих областях техники в качестве основных элементов конструкций. Широкое распространение таких оболочек определяется прежде всего простотой изготовления и высокой прочностью при минимальном весе. В то же время форма цилиндрической оболочки опасна в отношении устойчивости. Различные аспекты потери устойчивости пустых тонкостенных оболочек теоретически и экспериментально изучались в работах [1] - [25]. Анализу потери устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочек, заполненных сыпучим материалом, посвящены работы [14], [16], [19] - [22]. Влияние геометрических параметров тонкостенных оболочек, заполненных сыпучим материалом, на устойчивость при изгибе экспериментально не исследовалось. Цель настоящей работы - экспериментальное изучение влияния размеров тонкостенных цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим материалом (железным порошком ПЖ-5), на форму потери устойчивости и значение критической поперечной нагрузки при изгибе. Экспериментальное исследование устойчивости тонкостенной оболочки. Схема установки для испытаний изображена на рис. 1. Экспериментальная установка состоит из жесткой стальной стенки (1), оправки (2), образца (3), двух полуколец (4), четырех болтов для крепления полуколец к жесткой стенке (5), индикатора часового типа ИЧ-10 (6), тензодатчиков с измерителем деформаций (7). Металлическая оправка (2), выточенная по внутреннему диаметру образца, жестко приваривалась к стенке (1). На оправку плотно насаживался один торец испытываемого образца (3) и на его наружную поверхность надевались полукольца (4), которые стягивались между собой и болтами (5) крепились к стальной стенке (1). Нагрузка F пошагово доводилась до критического значения, при котором происходила потеря устойчивости образца (3). Начальный шаг ΔF нагрузки задавался равным 10 Н и при приближении к критическому значению ΔF уменьшался до 1 Н. Вертикальное перемещение торца образца

© Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г., Пфаненштиль Н. Г., 2018

Петров Михаил Васильевич

e-mail: gimmaretrova20@gmail.com, доктор технических наук, доцент кафедры строительных конструкций, профессор, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Федорова Татьяна Георгиевна

e-mail: tanusha2884@mail.ru, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Гоник Екатерина Григорьевна

e-mail: katty.gonik@mail.ru, старший преподаватель кафедры строительных конструкций, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Пфаненштиль Надежда Георгиевна

e-mail: pfedorova83@mail.ru, кандидат исторических наук, доцент кафедры социально-гуманитарных наук, Казанский филиал Российского государственного университета правосудия, г. Казань, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-38-60051 мол_а_дк («Разработка вычислительных моделей и расчетно-экспериментальное исследование предельных состояний оболочечных конструкций при контактном взаимодействии с сыпучим наполнителем с учетом сложного нагружения, геометрической и физической нелинейности»).

Поступила 21.08.2018

(3) измерялось с помощью индикатора часового типа (6). Изготовлены образцы двух типов, отличающиеся материалом и геометрическими параметрами. Первый тип образцов был изготовлен глубокой вытяжкой из алюминиевого сплава 3004 в состоянии Н 19. Второй тип образцов был изготовлен точением на токарном станке за одну установку из трубы наружным диаметром 85 мм из алюминиевого сплава марки Д16Т. Образцы протачивались по внутренней и наружной поверхностям трубы. Размеры образцов приведены в таблице 1.

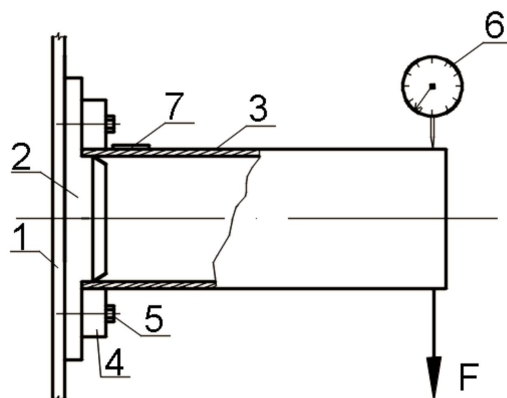


Рис. 1. Схема установки

Первый тип образцов					
Серия испытаний	Радиус R , мм	Толщина стенки h , мм	Длина L , мм	h/R	L/R
1	32,80	0,10	135	0,0030	4,12
2	32,80	0,10	270	0,0030	8,24
3	41,65	0,12	165	0,0029	3,96
Второй тип образцов					
4	41,20	0,42	171	0,0100	4,15
5	41,20	0,42	348	0,0100	8,30

Таблица 1.

Размеры образцов подбирались с учетом условий физического и геометрического подобия с большегабаритными автоцистернами, изготавливаемыми на заводе ЗАО «Чебоксарское предприятие «Сеспель» [26]. Коэффициенты подобия образцов и автоцистерн равны следующим значениям [27]:

$$\alpha_1 = \frac{R_{\min}}{R'_{\min}} = 36,59, \alpha_1 = \frac{R_{\max}}{R'_{\max}} = 36,40, \alpha_2 = \frac{L_{\max}}{L'_{\max}} = 37,00, \quad (1)$$

$$\alpha_2 = \frac{L_{\min}}{L'_{\min}} = 37,00, \alpha_3 = \frac{h_{\max}}{h'_{\max}} = 36,90, \alpha_3 = \frac{h_{\min}}{h'_{\min}} = 37,00. \alpha_3 = \frac{h}{h'} = 37,00$$

В (1) R_{\min} , R_{\max} , L_{\min} , L_{\max} , h_{\min} , h_{\max} , h относятся к размерам натуральных цистерн, а R'_{\min} , R'_{\max} , L'_{\min} , L'_{\max} , h'_{\min} , h'_{\max} , h' к модельным образцам. В соответствии с коэффициентами подобия (1) размеры натуральных цистерн должны быть следующими: $R = (1200 \div 1500)$ мм, $h = (3,7 \div 15,5)$ мм, $L = (6100 \div 10000)$ мм. Материалом автоцистерн должен быть алюминиевый сплав, тождественный материалу модельных образцов. Результаты экспериментов. В каждой серии экспериментов испытывались от 5 до 10 образцов. Статистически обработанные в соответствии с [28] результаты экспериментов приведены в таблице 2.

Серия испытаний	β степень заполнения образцов, %	Критическая сила (эксперимент) F_{cr} , кН	% увеличения для $\beta = 90\%$	Критический изгибающий момент (эксперимент), M_{cr}^{exp} , кН*м	Критический изгибающий момент (расчет) M_{cr}^{num} , кН*м	δ , %
1	0 (пустой)	0,153	40,5	0,021	0,0242	15,2
	90	0,215		0,029		
2	0	0,060	16,9	0,016	0,0242	51,2
	90	0,070		0,019		
3	0	0,262	30,2	0,043	0,0448	4,2
	90	0,341		0,056		
4	0	1,770	26,3	0,300	0,536	79
	90	2,235		0,382		
5	0	0,830	12,3	0,290	0,536	85
	90	0,932		0,324		

Таблица 2.

Статистически обработанные в соответствии с [28] результаты экспериментов приведены в таблице 2.

Фотографии образцов первой и пятой серий после испытаний показаны на рис.2 а, б. Зависимости прогиба U нагружаемого торца образцов первой и второй серии от поперечной силы F показаны на рис. 3. Статистическая обработка результатов измерений [28] показывает, что среднеквадратичная погрешность измерений перемещений равняется 0,01 мм. Относительная погрешность результатов измерений составляет 6,5 %.

По экспериментальным данным в начале нагружения происходило сплющивание образца в нижней сжатой зоне около заделки, которое исчезало после снятия нагрузки. Из рис. 3 видно, что зависимость $U(F)$ до потери устойчивости линейная. Это



Рис. 2. Форма оболочки после снятия нагрузки: а) образец серии 1 ($h/R=0,003$, $L/R=4,12$), б) образец серии 5 ($h/R=0,01$, $L/R=8,3$)

позволяет предположить, что на докритической стадии образец деформируется упруго. На закритической стадии изгиб оболочки сопровождается пластическим деформированием и приводит к образованию в этой зоне вмятины ромбовидной формы, перпендикулярно направленной к продольной оси оболочки. Дальнейшее выпучивание оболочки зависит от ее длины. На коротких оболочках (серии 1, 3 и 4) образуются вмятины на боковых поверхностях, направленные под углом к продольной оси (рис.2а). На длинных оболочках (серии 2 и 5) вмятины на боковых поверхностях отсутствуют. Таким образом, для длинных оболочек на закритической стадии деформирования реализуется "изгибная" форма с локальной вмятиной в зоне максимальных сжимающих продольных напряжений. Для коротких оболочек после достижения критической нагрузки сначала происходит выпучивание по "изгибной" форме, а затем реализуется "сдвиговая" форма выпучивания в зоне максимальных (по окружности) касательных

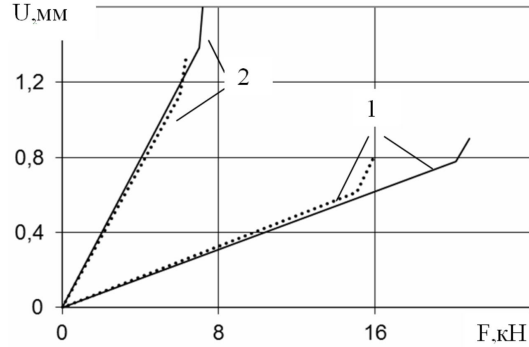


Рис. 3. Зависимость прогиба свободного торца образцов от поперечной силы: сплошные линии - для образцов с сыпучим материалом, пунктирные линии - для пустых образцов, 1 - образцы первой серии ($h/R = 0,003$, $L/R = 4, 12$), 2 - образцы второй серии ($h/R = 0,003$, $L/R = 8, 24$)

напряжений. Аналогичные результаты исследования формы потери устойчивости цилиндрических консольно закрепленных оболочек при изгибе поперечной силой получены в [13] на основе компьютерного моделирования. Как показали результаты проведенных экспериментов, сыпучий наполнитель практически не влияет на форму потери устойчивости оболочек.

Сопоставление экспериментальных и теоретических данных. Результаты испытаний пустых образцов сравнивались с результатами расчетов критического изгибающего момента для тонкостенной цилиндрической трубы по формуле, представленной в работах [1,5,29]:

$$M_{cr}^{num} \approx \frac{E \cdot R \cdot h^2}{\sqrt{1 - \nu^2}} \quad (2)$$

где E – модуль упругости материала оболочки; ν – коэффициент Пуассона. В таблице 2 приведены вычисленные по формуле (2) значения M_{cr}^{num} и их расхождение δ с результатами проведенных испытаний M_{cr}^{exp} .

$$\delta = (M_{cr}^{num} - M_{cr}^{exp}) \times 100 / M_{cr}^{exp} \quad (3)$$

Из таблицы 2 видно, что формула (2) в рассмотренных вариантах изгиба консольно закрепленной цилиндрической оболочки завышает значение критического изгибающего момента, что соответствует результатам экспериментальных исследований [5]. Расхождение δ результатов расчетов и экспериментов существенно зависит от размеров образца: с увеличением h/R и L/R этот параметр также увеличивается. Следует отметить, что с увеличением h/R влияние L/R на точность формулы (2) определения M_{cr}^{num} уменьшается. Сыпучий материал ПЖ-5 создает давление на внутреннюю поверхность, препятствующее образованию вмятин. Как видно из табл. 2 для заполненных порошком на 90% образцов критическая поперечная сила F_{cr} возросла на $(12,3 \div 40,5\%$. Измеренные продольные и окружные деформации в зоне потери устойчивости позволили посчитать осевое критическое напряжение σ_{cr} . Например, для пустых образцов первой серии $\sigma_{cr} = (45 \div 60)$ МПа. Максимальное критическое напряжение, подсчитанное по формуле из [13]:

$$\sigma_{cr}^{\max} = \frac{F_{cr} \cdot L}{\pi \cdot h \cdot R^2} \quad (4)$$

равно 61 МПа. Критическое напряжение, посчитанное по балочной теории изгиба и полученное в эксперименте, почти совпадают. Однако, по балочной теории изгиба нельзя определить критическое состояние. В работе [30] приводится эмпирическая формула определения критического продольного напряжения для пустых оболочек следующего вида:

$$\sigma_{cr} = \frac{0,35 \cdot E}{(1 - \mu^2)^{5/8}} \cdot \left(\frac{h}{R}\right)^{5/4} \cdot \frac{L}{R} \quad (5)$$

Согласно этой формуле для образцов первой серии σ_{cr} равно 75,3 МПа. Этот результат отличается от полученного нами в проведенных экспериментах критического напряжения на 25,3 %.

Закключение 1. Результаты экспериментов показывают, что для всех рассмотренных образцов сыпучий наполнитель слабо влияет на форму потери устойчивости, но увеличивает критическую нагрузку. Поэтому при проектировании цистерн теоретический анализ их устойчивости можно выполнять без учета загружаемого сыпучего материала, что упрощает постановку задачи и сокращает затраты вычислительных ресурсов. 2. С увеличением длины образца критическая поперечная нагрузка уменьшается, а с увеличением отношения h/R критическая нагрузка увеличивается. 3. Приближенная формула (2) завышает значение критического изгибающего момента. С увеличением h/R и L/R оболочки погрешность этой формулы возрастает. 4. Для уточнения теоретической оценки критической нагрузки, а также исследования формы потери устойчивости и закритического деформирования оболочки необходимо численное решение задачи в трехмерной, геометрически и физически нелинейной постановке с привлечением современных программных комплексов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Brazier L. G. On the flexure of thin cylindrical shells and other "Thin" Sections. Proceedings of the Royal Society, ser. A, vol. 116, № 773. 1927. P. 104–114.
- [2] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М. : Наука, 1967. 984 с.
- [3] Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М. : Наука, 1978. 360 с.
- [4] Саченков А. В. О локальной устойчивости оболочек. Изв. Казан, филиала АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1960. № 14. С. 35 – 42.
- [5] Ильгамов М. А. Экспериментальное исследование устойчивости консольно закрепленной цилиндрической оболочки под действием поперечной силы и внутреннего давления // Исследования по теории пластин и оболочек. – Изд-во Казанского ун-та. № 2. 1964. С. 186–191.
- [6] Коноплев Ю. Г. Экспериментальное исследование задачи о действии сосредоточенной силы на цилиндрическую оболочку // Исследования по теории пластин и оболочек. – Изд-во Казанского ун-та. 1966. № 4. С. 83–90.
- [7] Саченков А. В. Теоретико-экспериментальный метод исследования устойчивости пластин и оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. Вып. 6/7. Казань, 1970. С. 391–433.
- [8] Моссаковский В. И., Маневич Л. И., Мильцын А. М. Моделирование несущей способности цилиндрических оболочек. Киев : Наукова Думка, 1977. 141 с.

- [9] Пикуль В. В. Современное состояние теории оболочек и перспективы ее развития // Механика твердого тела. 2000. № 2. С. 153–168.
- [10] Li L.-Y., Kettle R. Nonlinear bending response and buckling of ring-stiffened cylindrical shells under pure bending // International Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39, № 3. P. 765–781.
- [11] Mathon C, Limam A. Experimental collapse of thin cylindrical shells submitted to internal pressure and pure bending // Thin-Walled Structure. 2006. Vol. 44. P. 39–50.
- [12] Бойко Д. В., Железнов Л. П., Кабанов В. В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости овальных цилиндрических оболочек при комбинированном нагружении изгибающим и крутящим моментами // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2007. № 3. С. 3–7.
- [13] Маневич А. И., Пономаренко Е. А., Прокопало Е. Ф. Устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек при изгибе поперечной силой. Сообщение 1. Теория // Проблемы прочности. 2013. № 1. С. 101–111.
- [14] Баженов В. Г., Кибец А. И., Петров М. В., Шошин Д. В. Численный анализ деформирования, потери устойчивости и закритического поведения большегабаритных емкостей для автомобильной транспортировки сыпучих грузов // Проблемы прочности и пластичности. 2008. Вып. 70. С. 88–96
- [15] Chen L., Doerich C. and Rotter J.M. A study of cylindrical shells under global bending in the elastic-plastic range // Steel Construction - Design and Research. 2008. Vol.1, № 1 . P. 59–65.
- [16] Баженов В. Г., Кибец А. И., Петров М. В., Федорова Т. Г., Шошин Д. В. Теоретическое и экспериментальное исследование потери устойчивости и закритического поведения тонкостенной цилиндрической оболочки при изгибе // Проблемы прочности и пластичности. 2009. Вып. 71. С. 77–83.
- [17] Houliara S., Karamanos S. Stability of long transversely-isotropic elastic cylindrical shells under bending // International Journal of Solids and Structures. 2010. V. 47. P. 10–24.
- [18] Rotter J. M., Sadowski A. J., Chen L. Nonlinear stability of thin elastic cylinders of different length under global bending // International Journal of Solids and Structures. 2014. V. 51. P. 2826–2839.
- [19] Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г. Экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных оболочек при чистом изгибе // Вестник Чувашия государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 119–125.
- [20] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G., Frolova I. A. Stability and supercritical behaviour of thin-walled cylindrical shell with discrete aggregate in bending // Materials Physics and Mechanics. 2016. Vol. 28. P. 16–20.
- [21] Баженов В. Г., Гоник Е. Г., Кибец А. И., Кибец Ю. И., Павленкова Ю. В., Петров М. В., Федорова Т. Г. Конечно-элементное решение задачи устойчивости и закритического поведения автоцистерн для транспортировки сыпучих грузов // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Т. 75. № 1. С. 56–62.
- [22] Bazhenov V. G., E. G. Gonik, A. I. Kibets, M. V. Petrov, and T. G. Fedorova. Stability and Supercritical Behavior of Large Size Tankers for Transportation of Loose Goods // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2015. Vol. 44, № 5. Pp. 422–427.

[23] Xu Z., Gardner L., Sadowski A.J. Nonlinear stability of elastic elliptical cylindrical shells under uniform bending // International Journal of Mechanical Sciences. 2017. Vol. 128–129. Pp. 593–606.

[24] Wang J., Sadowski A. J. Elastic imperfect tip-loaded cantilever cylinders of varying length // International Journal of Mechanical Sciences. 2018. Vol. 140. Pp. 200–210.

[25] Fajuyitan O. K., Sadowski A. J., Wadee M. A., Rotter J. M. Nonlinear behaviour of short elastic cylindrical shells under global bending // Thin-Walled Structures. 2018. Vol. 124. Pp. 574–587.

[26] https://www.sespe.com/catalog/podemnye_tsisterny/

[27] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М. : Наука, 1977. С. 440.

[28] Румшиский Л. З. Математическая обработка результатов экспериментов. М. : Наука, 1971. 192 с.

[29] Энциклопедический справочник "Машиностроение". Т. 1, книга 2-я. М. : Машигиз, 1947. 457 с.

[30] Вольмир А. С., Григорьев Ю. П., Станкевич А. И. Сопротивление материалов. М. : ДРОФА, 2007. 592 с.

M. V. Petrov, T. G. Fedorova, E. G. Gonik, N. G. Pfanenshti

**EXPERIMENTAL STUDY OF THE INFLUENCE OF THE GEOMETRIC
PARAMETERS ON THE STABILITY OF THIN-WALL CYLINDRICAL SHELLS
COMPLETED BY LOOSE MATERIAL, WITH THE CROSSING OF THE
TRANSVERSE STRING**

I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Kazan Branch of the Russian State University of Justice, Kazan, Russia

Abstract. The influence of geometric parameters and loose filler on the form of loss of stability of thin-walled cylindrical shells and the critical value of the transverse load during bending are studied experimentally. The test samples are made of aluminum alloys. One end of the shell is rigidly fixed, and the other end is applied vertically directed force. Empty and filled to 90 % by volume bulk shell material were investigated. As an aggregate, iron powder PZh-5 was used. In each series of experiments, 5-10 samples were tested. After the statistical processing of the experimental data, graphs of the dependence of the displacements of the loaded end of the shell on the applied force are plotted. The critical load was determined by the inflection point method, according to which the load is considered critical if its subsequent small increment leads to a sharp increase in the deflection of the shell. It is established that the filling of bulk material with 90 % creates, under the bending of the shell, pressure on its internal surface, which prevents the formation of local dents and increases the value of the critical load. The experimental values of the critical bending moment for empty shells are compared with the results of an analytical solution of other authors, which does not take into account the effect of length on the stability of the shell. It is shown that the analytical solution in this case gives an overestimated value of the bending moment. The discrepancy between the results of calculations and experiments on this parameter can reach 80 %. The refinement of the theoretical results requires the solution of the problem in three-dimensional, geometrically and physically nonlinear formulation involving numerical methods and implementing program complexes.

Keywords: cylindrical shell, aggregate, stability, plastic deformation, experiment.

Acknowledgments. The study was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research in the framework of the scientific project No. 16-38-60051 mol_a_dk.

REFERENCES

Petrov Mikhail Vasilyevich

e-mail: rimmapetrova20@gmail.com, Dr. Sci. Tech., Professor, I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Fedorova Tatyana Georgievna

e-mail: tanusha2884@mail.ru, Ph.D., Senior lecturer, I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Gonik Ekaterina Grigoryevna

e-mail: katya.gonik@mail.ru, Senior Lecturer, I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Pfanenshtil Nadezhda Georgievna

e-mail: nfeodorova83@mail.ru, Ph.D., , Assoc. Prof., Kazan Branch of the Russian State University of Justice, Kazan, Russia.

- [1] Brazier L. G. On the flexure of thin cylindrical shells and other "Thin" Sections. Proceedings of the Royal Society, ser. A, vol. 116, № 773. 1927. P. 104–114.
- [2] Vol'mir A. S. Ustojchivost' deformiruemyh sistem. M. : Nauka, 1967. 984 s. (in Russian)
- [3] Grigolyuk E.H. I., Kabanov V. V. Ustojchivost' obolochek. M. : Nauka, 1978. 360 s. (in Russian)
- [4] Sachenkov A. V. O lokal'noj ustojchivosti obolochek. Izv. Kazan, filiala AN SSSR. Ser.fiz.-mat. i tekhn. nauk. I960. № 14. S. 35 – 42. (in Russian)
- [5] Il'gamov M. A. EHksperimental'noe issledovanie ustojchivosti konsol'no zakreplennoj cilindricheskoj obolochki pod dejstviem poperechnoj sily i vnutrennego davleniya // Issledovaniya po teorii plastin i obolochek. – Izd-vo Kazanskogo un-ta. № 2. 1964. S. 186–191. (in Russian)
- [6] Konoplev YU. G. EHksperimental'noe issledovanie zadachi o dejstvii sosredotochennoj sily na cilindricheskuyu obolochku // Issledovaniya po teorii plastin i obolochek. – Izd-vo Kazanskogo un-ta. 1966. № 4. S. 83–90. (in Russian)
- [7] Sachenkov A. V. Teoretiko-ehksperimental'nyj metod issledovaniya ustojchivosti plastin i obolochek // Issledovaniya po teorii plastin i obolochek. Vyp. 6/7. Kazan', 1970. S. 391–433. (in Russian)
- [8] Mossakovskij V. I., Manevich L. I., Mil'cyn A. M. Modelirovanie nesushchej sposobnosti cilindricheskikh obolochek. Kiev : Naukova Dumka, 1977. 141 s. (in Russian)
- [9] Pikul' V. V. Sovremennoe sostoyanie teorii obolochek i perspektivy ee razvitiya // Mekhanika tverdogo tela. 2000. № 2. S. 153–168. (in Russian)
- [10] Li L.-Y., Kettle R. Nonlinear bending response and buckling of ring-stiffened cylindrical shells under pure bending // International Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39, № 3. P. 765–781.
- [11] Mathon C, Limam A. Experimental collapse of thin cylindrical shells submitted to internal pressure and pure bending // Thin-Walled Structure. 2006. Vol. 44. P. 39–50.
- [12] Bojko D. V., ZHeleznov L. P., Kabanov V. V. Issledovanie nelinejnogo deformirovaniya i ustojchivosti oval'nyh cilindricheskikh obolochek pri kombinirovannom nagruzhenii izgibayushchim i krutyashchim momentami // Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Aviacionnaya tekhnika. 2007. № 3. S. 3–7. (in Russian)
- [13] Manevich A. I., Ponomarenko E. A., Prokopalo E. F. Ustojchivost' ortotropnyh cilindricheskikh obolochek pri izgibe poperechnoj siloj. Soobshchenie 1. Teoriya // Problemy prochnosti. 2013. № 1. S. 101–111. (in Russian)
- [14] Bazhenov V. G., Kibec A. I., Petrov M. V., SHoshin D. V. CHislennyj analiz deformirovaniya, poteri ustojchivosti i zakriticheskogo povedeniya bol'shegabaritnyh emkostej dlya avtomobil'noj transportirovki sypuchih грузов // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2008. Vyp. 70. S. 88–96 (in Russian)
- [15] Chen L., Doerich C. and Rotter J.M. A study of cylindrical shells under global bending in the elastic-plastic range // Steel Construction - Design and Research. 2008. Vol.1, № 1 . P. 59–65.
- [16] Bazhenov V. G., Kibec A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G., SHoshin D. V. Teoreticheskoe i ehksperimental'noe issledovanie poteri ustojchivosti i zakriticheskogo povedeniya tonkostennoj cilindricheskoj obolochki pri izgibe // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2009. Vyp. 71. S. 77–83. (in Russian)

- [17] Houliara S., Karamanos S. Stability of long transversely-isotropic elastic cylindrical shells under bending // *International Journal of Solids and Structures*. 2010. V. 47. P. 10–24.
- [18] Rotter J. M., Sadowski A. J., Chen L. Nonlinear stability of thin elastic cylinders of different length under global bending // *International Journal of Solids and Structures*. 2014. V. 51. P. 2826–2839.
- [19] Petrov M. V., Fedorova T. G., Gonik E. G. Экспериментальное исследование устойчивости тонкостенных оболочек при чистом изгибе // *Vestnik CHuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. YA. YAKovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*. 2015. № 2 (24). S. 119–125. (in Russian)
- [20] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G., Frolova I. A. Stability and supercritical behaviour of thin-walled cylindrical shell with discrete aggregate in bending // *Materials Physics and Mechanics*. 2016. Vol. 28. P. 16–20.
- [21] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibec A. I., Kibec YU. I., Pavlenkova YU. V., Petrov M. V., Fedorova T. G. Кoneчно-элементное решение задачи устойчивости и закритического поведения автотанков для транспортировки сыпучих грузов // *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2013. T. 75. № 1. S. 56–62. (in Russian)
- [22] Bazhenov V. G., E. G. Gonik, A. I. Kibets, M. V. Petrov, and T. G. Fedorova. Stability and Supercritical Behavior of Large Size Tankers for Transportation of Loose Goods // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2015. Vol. 44, № 5. Pp. 422–427.
- [23] Xu Z., Gardner L., Sadowski A.J. Nonlinear stability of elastic elliptical cylindrical shells under uniform bending // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017. Vol. 128–129. Pp. 593–606.
- [24] Wang J., Sadowski A. J. Elastic imperfect tip-loaded cantilever cylinders of varying length // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018. Vol. 140. Pp. 200–210.
- [25] Fajuyitan O. K., Sadowski A. J., Wadee M. A., Rotter J. M. Nonlinear behaviour of short elastic cylindrical shells under global bending // *Thin-Walled Structures*. 2018. Vol. 124. Pp. 574–587.
- [26] https://www.sespe.com/catalog/podemnye_tsisterny/
- [27] Sedov L. I. *Metody podobiya i razmernosti v mekhanike*. M. : Nauka, 1977. S. 440. (in Russian)
- [28] Rumshiskij L. Z. *Matematicheskaya obrabotka rezul'tatov ehksperimentov*. M. : Nauka, 1971. 192 s. (in Russian)
- [29] *Энциклопедический справочник "Машиностроение"*. Т. 1, книга 2-я. М. : Mashgiz, 1947. 457 s. (in Russian)
- [30] Vol'mir A. S., Grigor'ev YU. P., Stankevich A. I. *Soprotivlenie materialov*. М. : DROFA, 2007. 592 s. (in Russian)

А. Н. Прокудин

ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Рассматривается упруговязкопластическое деформирование вращающегося тонкого диска в условиях плоского напряженного состояния. Деформации в диске принимаются малыми и аддитивно раскладываются на упругие и вязкопластические составляющие. Напряжения определяются упругими деформациями с помощью закона Гука. В качестве условия пластичности используется обобщение условия Мизеса, учитывающее вязкость материала. Определяющая система дифференциальных уравнений решается с помощью метода конечных разностей. Полученные результаты численных расчетов проиллюстрированы с помощью графиков.

Ключевые слова: вязкость, пластичность, вращающийся диск, метод конечных разностей

УДК: 539.374

Введение. Расчет упругопластического состояния вращающихся дисков представляет значительный теоретический интерес и имеет широкое практическое применение. Для решения данного класса задач обычно используется теория малых упругопластических деформаций вместе с условием пластичности Треска. В первых работах, например [1], рассматривалось идеальное пластическое течение в сплошном диске. Течение начинается в центре диска, где напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$, что позволяет получить распределение напряжений в пластической области напрямую из уравнения равновесия без рассмотрения перемещений. Однако, Гамер в [2] показал, что поле перемещений при использовании данного подхода оказывается разрывным на упругопластической границе. Годом спустя [3] Гамер привел корректное решение упругопластической задачи во вращающемся диске. При достижении критической скорости вращения в центре диска возникают две области пластического течения, внутренняя соответствует условию Треска в виде $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$, а внешняя — $\sigma_{\varphi\varphi} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$. С увеличением скорости вращения обе области одновременно продвигаются в сторону внешней границы диска. Аналогичная задача для вращающегося кольцевого диска и сплошного цилиндра также решена Гамером [4, 5]. В цикле работ Гювена [6–9] исследуется упругопластическое деформирование

© Прокудин А. Н., 2018

Прокудин Александр Николаевич

e-mail: sunbeam_85@mail.ru, кандидат технических наук, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМиМ ДВО РАН №007-00285-18-00

Поступила 15.07.2018

кольцевых дисков переменной толщины. Гювенем [10] также решена задача для вращающегося диска с жестким включением. В работе [11] упругопластическая задача для сплошного и кольцевого диска решается с помощью условия пластичности Мизеса и приведено сравнение с условием Треска. Установлено, что при одинаковой скорости вращения условие Треска предсказывает большую область пластического течения, при этом скорость, при которой диск полностью переходит в состояние пластичности для условия Мизеса оказывается выше. Статья [12] посвящена исследованию упругопластического деформирования в анизотропном диске. В работах [13, 14] рассматривается условие пластичности Друкера-Прагера, в которое, как известно, входит зависимость от среднего напряжения. Показано, что распределение напряжений в этом случае может значительно отличаться от условий Треска и Мизеса.

При высоких температурах на пластическое поведение металлов существенное влияние оказывает скорость приложения нагрузки. В отличие от исследования упругопластических и вязкоупругих деформаций, теме упруговязкопластического деформирования вращающихся дисков и цилиндров посвящено относительно небольшое число работ, среди которых можно отметить [15, 16]. В настоящей работе вязкопластическое течение во вращающемся диске исследуется с помощью обобщения условия Мизеса, которое учитывает эффект вязкости материала.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкий диск с внутренним и внешним радиусом a и b соответственно. Диск вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью $\omega(t)$. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z . Предполагаем, что имеет место осевая симметрия и плоское напряженное состояние ($\sigma_{zz} = 0$). Для удобства перейдем к безразмерной радиальной координате:

$$\beta = r/b, \delta = a/b, \delta \leq \beta \leq 1.$$

Вектор перемещений имеет две ненулевые компоненты: u_r и u_z . В дальнейшем компоненту u_r будем обозначать кратко u . Считаем, что полные деформации представляют собой сумму упругих e_{ij} и пластических деформаций p_{ij} :

$$e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \frac{u}{\beta}, \quad e_{zz} + p_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (1)$$

Напряжения (в безразмерном виде) связаны с упругими деформациями законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1-\nu^2)} (e_{rr} + \nu e_{\varphi\varphi}); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1-\nu^2)} (\nu e_{rr} + e_{\varphi\varphi}). \end{aligned} \quad (2)$$

где E — Модуль Юнга, σ_y — предел текучести, ν — коэффициент Пуассона.

Уравнение равновесия в диске имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\beta} = -\Omega\beta, \quad \Omega = \frac{\rho b^2 \omega^2}{\sigma_y}. \quad (3)$$

Используя соотношения (1) и (3) запишем уравнение равновесия через перемещения и пластические деформации:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{u}{\beta^2} = -\frac{\sigma_y}{E} (1-\nu^2) \Omega\beta + \frac{\partial p_{rr}}{\partial \beta} + \nu \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial \beta} + (1-\nu) \left(\frac{p_{rr} - p_{\varphi\varphi}}{\beta} \right). \quad (4)$$

Скорости пластических деформаций ε_{ij}^p определяются ассоциированным законом пластического течения:

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial p_{ij}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (5)$$

где λ — положительный множитель, Φ — пластический потенциал.

В качестве условия текучести воспользуемся модификацией условия Мизеса на случай вязкопластического течения:

$$\begin{aligned} \Phi \left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p \right) &= \left(s_{ij} - \frac{\eta}{\sigma_y} \varepsilon_{ij}^p \right) \left(s_{ji} - \frac{\eta}{\sigma_y} \varepsilon_{ij}^p \right) = \frac{2}{3}, \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}; \quad \varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}^p \delta_{ij}, \end{aligned}$$

где η — вязкость, s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений, ε_{ij}^p — компоненты девиатора тензора скоростей пластических деформаций.

Заметим, что при $\eta = 0$ используемое условие сводится к классическому условию Мизеса для идеальной пластичности.

Преобразуем условие текучести к виду:

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - Z (\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{\varphi\varphi}^p))^2 &+ (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} - Z (\varepsilon_{\varphi\varphi}^p - \varepsilon_{zz}^p))^2 + \\ &+ (\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - Z (\varepsilon_{zz}^p - \varepsilon_{rr}^p))^2 = 2, \end{aligned} \quad (6)$$

где $Z = \eta/\sigma_y$.

С помощью ассоциированного закона найдем выражения для скоростей пластических деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^p &= \frac{\lambda}{(1 + 3\lambda\eta)} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^p &= \frac{\lambda}{(1 + 3\lambda\eta)} (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}), \\ \varepsilon_{zz}^p &= -\frac{\lambda}{(1 + 3\lambda\eta)} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}). \end{aligned}$$

Подставим найденные выражения обратно в условие пластичности, найдем отсюда неизвестный множитель $\frac{\lambda}{(1+3\lambda\eta)}$, а также перейдем к безразмерной координате τ , в результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{rr}}{\partial \tau} &= \frac{1}{3} X \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}^2}} \right) (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}), \\ \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial \tau} &= \frac{1}{3} X \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}^2}} \right) (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}), \\ \frac{\partial p_{zz}}{\partial \tau} &= -\frac{1}{3} X \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}^2}} \right) (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}), \\ \tau &= \frac{t}{T}, \quad X = \frac{\sigma_y T}{\eta}, \end{aligned} \quad (7)$$

где T — продолжительность процесса.

Также для удобства введем величину: $\bar{\Sigma} = \Sigma/\sqrt{2}$.

Начальные напряжения и деформации в диске отсутствуют. Граничные условия:

$$\sigma_{rr}(\delta) = 0, \sigma_{rr}(1) = 0. \quad (8)$$

При определенной скорости вращения Ω_p на внутренней поверхности диска начинается вязкопластическое течение. Скорость вращения Ω_p можно найти из упругого решения (при $p_{ij} = 0$) уравнения (4). Получим:

$$\Omega_p = \frac{4}{3 + \nu + \delta^2(1 - \nu)} \quad (9)$$

При скорости вращения $\Omega \geq \Omega_p$ диск состоит из внутренней области пластического течения и внешней области чисто упругого деформирования. При критической скорости вращения Ω_{fp} диск полностью переходит в пластическое состояние.

Для решения уравнения (4) с учетом (7) и граничных условий (8) используется метод конечных разностей. Для проведения численных расчетов использовалась сетка, состоящая из 1000 узлов и 2500 шагов по времени.

Вращение диска происходит по закону (рис. 1):

$$\Omega(\tau) = \begin{cases} \frac{(\Omega_{max} + \Omega_p)}{2} + (\Omega_{max} - \Omega_p) \sin\left(2\pi\tau - \frac{\pi}{2}\right) & , 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ \Omega_{max} & , \frac{1}{2} < \tau \leq 1. \end{cases}$$

где Ω_{max} — максимальная скорость вращения диска.

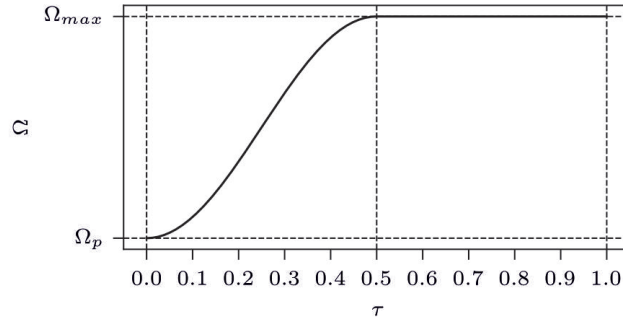


Рис. 1. Зависимость скорости вращения от времени.

Результаты. При проведении численных расчетов использовались следующие значения параметров: соотношение между внутренним и внешним радиусом диска: $\delta = 0.2$. Предел текучести: $\sigma_y = 2.5 \cdot 10^8$ Па. Модуль Юнга: $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па. Предел текучести (безразмерный): $\sigma_y/E \cong 0.00119$. Коэффициент Пуассона: $\nu = 0.3$. $X = \frac{\sigma_y T}{\eta} = 0.1$. $\Omega_{max} = 2.5 \cdot \Omega_p$.

На рис. 2 представлен график движения упругопластической границы. Положение границы $\beta = 1$ соответствует случаю, когда пластическое течение имеет место во всем диске. Видим, что при заданных параметрах диск полностью переходит в пластическое состояние примерно к середине процесса.

Перемещения u в диске представлены на рис. 3а. Следует отметить, что в начале процесса максимум перемещений имеет место на внешней границе диска, а в конце

— на внутренней. На рис. 3b показано эквивалентное напряжение по Мизесу $\bar{\Sigma}$. При этом значение $\bar{\Sigma} < 1$ говорит о том, что пластическое течение в данной точке еще не началось. После перехода в состояние полной пластичности и при постоянной скорости вращения напряжения в диске постепенно стабилизируются и далее пластическое деформирование происходит с постоянной скоростью.

Графики напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ и пластических деформаций p_{rr} и $p_{\varphi\varphi}$ изображены на рис. 4 и 5. Видим, что качественная картина тангенциальных напряжений существенно меняется со временем (рис. 4b), в то время как характер радиальных напряжений остается постоянным (рис. 4a). Максимальное значение пластических деформаций достигается на внутренней поверхности диска (рис. 5).

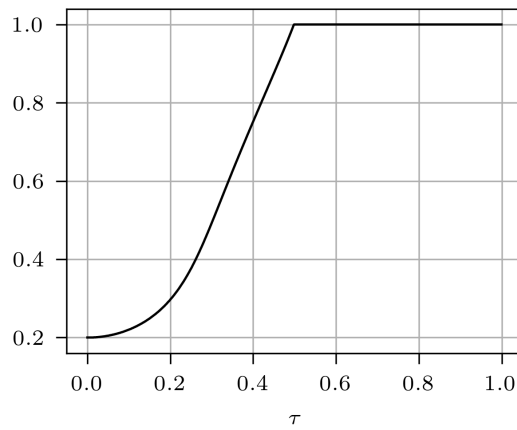


Рис. 2. Движение упругопластической границы в диске.

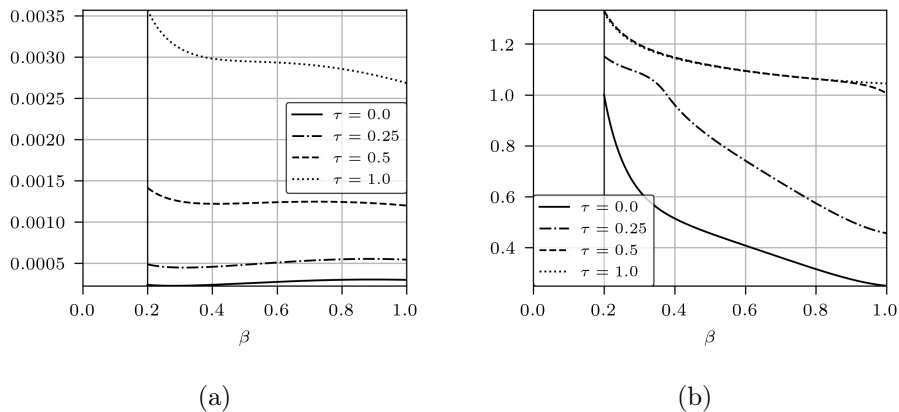


Рис. 3. Перемещения в диске u (a) и напряжения по Мизесу $\bar{\Sigma}$ (b).

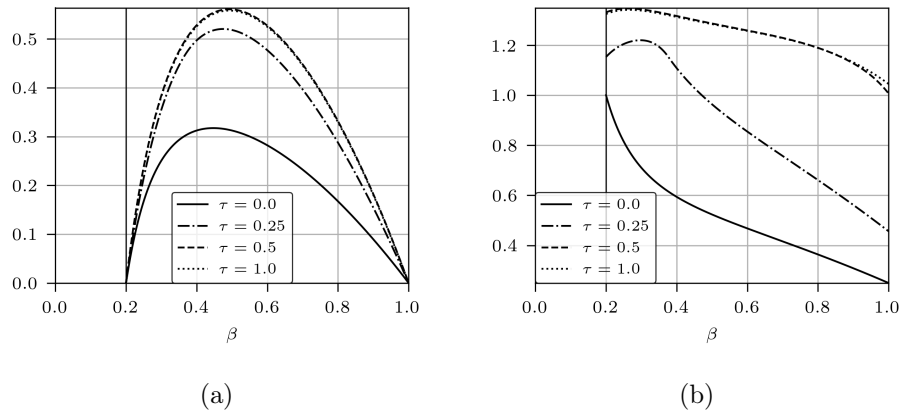


Рис. 4. Напряжения в диске σ_{rr} (а) и $\sigma_{\varphi\varphi}$ (б).

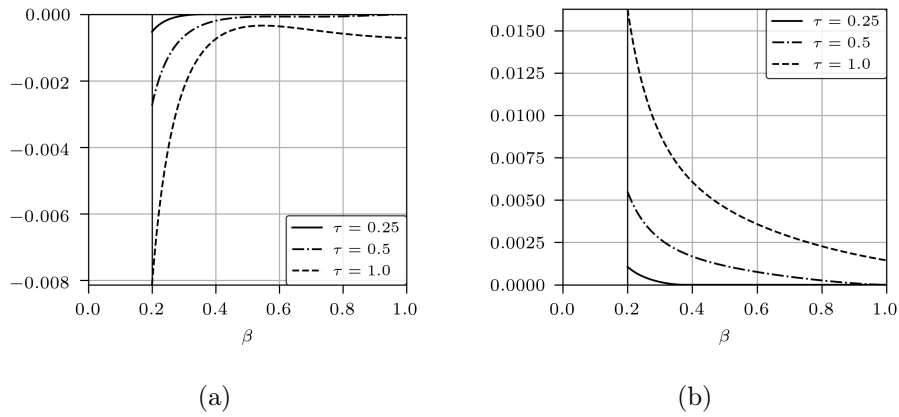


Рис. 5. Пластические деформации в диске p_{rr} (а), $p_{\varphi\varphi}$ (б).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids, Volume One, 2nd Edition, McGraw Hill, 1950. 572 p.
- [2] Gamer U. Tresca's Yield Condition and the Rotating Disk // Journal of Applied Mechanics. 1983. № 3 (50). P. 676–678.
- [3] Gamer U. Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk // Ingenieur-Archiv. 1984. № 5 (54). P. 345–354.
- [4] Gamer U. The Elastic-plastic stress distribution in the rotating annulus and in the annulus under external pressure // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1984. (64).
- [5] Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP. 1984. № 5 (35). P. 601–617.

- [6] Güven U. Elastic-plastic stress distribution in the rotating annular disk with variable thickness // *Archive of Applied Mechanics*. 1991. № 8 (61). P. 548–554.
- [7] Güven U. Elastic-plastic stresses in a rotating annular disk of variable thickness and variable density // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1992. № 2 (34). P. 133–138.
- [8] Güven U. Elastic-plastic annular disk with variable thickness subjected to external pressure // *Acta Mechanica*. 1992. № 1 (92). P. 29–34.
- [9] Güven U. On the stresses in an elastic-plastic annular disk of variable thickness under external pressure // *International Journal of Solids and Structures*. 1993. № 5 (30). P. 651–658.
- [10] Güven U. Elastic-Plastic Rotating Disk with Rigid Inclusion // *Mechanics of Structures and Machines*. 1999. № 1 (27). P. 117–128.
- [11] Rees D.W.A. Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1999. № 4 (79). P. 281–288.
- [12] Alexandrova N., Vila Real P.M.M. Deformation and Stress Analysis of an Anisotropic Rotating Annular Disk // *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. 2008. № 1 (9). P. 43–50.
- [13] Alexandrov S., Chung K., Jeong W. Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular disks of pressure-dependent material // *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2018. № 3 (46). P. 318–332.
- [14] Alexandrov S.E., Lomakin E.V., Jeng Y.-R. Effect of the pressure dependency of the yield condition on the stress distribution in a rotating disk // *Doklady Physics*. 2010. № 12 (55). P. 606–608.
- [15] Arya V.K. Analytical and finite element solutions of some problems using a viscoplastic model // *Computers & Structures*. 1989. № 4 (33). P. 957–967.
- [16] Kollmann F.G. Viscoplastic deformation of rotating thin-walled disks // *Nuclear Engineering and Design*. 1989. № 3 (114). P. 405–413.

A. N. Prokudin

VISCOPLASTIC FLOW IN THE ROTATING DISK*Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

Abstract. Elastoviscoplastic deforming of rotating thin disk under plane stress state is considered. Strains in the disk are assumed to be small and additively split up into elastic and viscoplastic parts. Stresses are determined by elastic strains using Hooke's law. Generalized Mises criteria considering viscosity of material is used. System of differential equations is solved by finite difference method. Obtained results of numerical computations are illustrated by figures.

Keywords: viscosity, plasticity, rotating disk, finite difference method

REFERENCES

- [1] Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids, Volume One, 2nd Edition, McGraw Hill, 1950. 572 p.
- [2] Gamer U. Tresca's Yield Condition and the Rotating Disk // Journal of Applied Mechanics. 1983. № 3 (50). P. 676–678.
- [3] Gamer U. Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk // Ingenieur-Archiv. 1984. № 5 (54). P. 345–354.
- [4] Gamer U. The Elastic-plastic stress distribution in the rotating annulus and in the annulus under external pressure // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1984. (64).
- [5] Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP. 1984. № 5 (35). P. 601–617.
- [6] Güven U. Elastic-plastic stress distribution in the rotating annular disk with variable thickness // Archive of Applied Mechanics. 1991. № 8 (61). P. 548–554.
- [7] Güven U. Elastic-plastic stresses in a rotating annular disk of variable thickness and variable density // International Journal of Mechanical Sciences. 1992. № 2 (34). P. 133–138.
- [8] Güven U. Elastic-plastic annular disk with variable thickness subjected to external pressure // Acta Mechanica. 1992. № 1 (92). P. 29–34.
- [9] Güven U. On the stresses in an elastic-plastic annular disk of variable thickness under external pressure // International Journal of Solids and Structures. 1993. № 5 (30). P. 651–658.
- [10] Güven U. Elastic-Plastic Rotating Disk with Rigid Inclusion // Mechanics of Structures and Machines. 1999. № 1 (27). P. 117–128.
- [11] Rees D.W.A. Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1999. № 4 (79). P. 281–288.
- [12] Alexandrova N., Vila Real P.M.M. Deformation and Stress Analysis of an Anisotropic Rotating Annular Disk // International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics. 2008. № 1 (9). P. 43–50.

Prokudin Aleksandr Nikolaevich

e-mail: prokudin@imim.ru, Ph. D., Leading Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

[13] Alexandrov S., Chung K., Jeong W. Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular disks of pressure-dependent material // *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2018. № 3 (46). P. 318–332.

[14] Alexandrov S.E., Lomakin E.V., Jeng Y.-R. Effect of the pressure dependency of the yield condition on the stress distribution in a rotating disk // *Doklady Physics*. 2010. № 12 (55). P. 606–608.

[15] Arya V.K. Analytical and finite element solutions of some problems using a viscoplastic model // *Computers & Structures*. 1989. № 4 (33). P. 957–967.

[16] Kollmann F.G. Viscoplastic deformation of rotating thin-walled disks // *Nuclear Engineering and Design*. 1989. № 3 (114). P. 405–413.

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич, В. В. Рудаков

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТИН ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Рассмотрено упругое поведение ортотропной пластины, моделирующей ламинированный композит, при нагружении её в плоскости, образованной двумя осями анизотропии материала. Используются определяющие соотношения, учитывающие нелинейную зависимость деформаций от напряжений. Получены зависимости компонент тензора деформаций от угла ориентации главных осей анизотропии в плоскости пластины. Проведено сравнение с известными решениями и экспериментальными данными.

Ключевые слова: нелинейные определяющие соотношения, анизотропные материалы, пластины, композиты

УДК: 539.3

Структура большого числа естественных и искусственных материалов обладает элементами симметрии, которые во многом определяют их физические свойства. В настоящее время широкое распространение получили композиционные материалы, обладающие существенной анизотропией свойств. Для расчёта и проектирования конструкций из композитных материалов общепринятыми являются модели двух уровней: микроскопического и феноменологического. Модели первого типа содержат элементы структурного анализа и основаны на представлении материала в виде упорядоченно или случайно расположенных в изотропной среде армирующих элементов. Такие модели рассматривались в работах [2, 6, 8]. Модели второго типа основаны на замене гетерогенного материала условной однородной анизотропной средой, эффективные свойства которой определяются на основе теории осреднения процессов в периодических [1, 6, 7] и непериодических [3] средах. Именно такого типа модель положена в основу методики расчёта анизотропных оболочек вращения в книге [5].

© Соколова М. Ю., Христич Д. В., Рудаков В. В., 2018

Соколова Марина Юрьевна

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Христич Дмитрий Викторович

e-mail: dmitrykhristich@ Rambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Рудаков Вадим Вячеславович

e-mail: rudakov93@mail.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 10.07.2018

В современной технике широко применяются элементы конструкций в виде пластин, которые изготавливаются из композиционных материалов путём укладки слоёв (волокон) под разными углами к границе пластины. Такие слои, как правило, имеют существенно различные упругие свойства во взаимно-перпендикулярных направлениях (вдоль волокон и поперёк волокон). Материал пластины, полученной из нескольких слоёв, оказывается анизотропным.

Рассмотрим квадратную ортотропную пластину, у которой одна ось анизотропии \mathbf{a}_3 перпендикулярна плоскости, а две другие \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 образуют угол φ со сторонами пластины (рис. 1). Направим оси Ox , Oy декартовой системы координат вдоль сторон пластины и рассмотрим одноосное растяжение пластины, заданное тензором напряжений $\mathbf{S} = t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$.

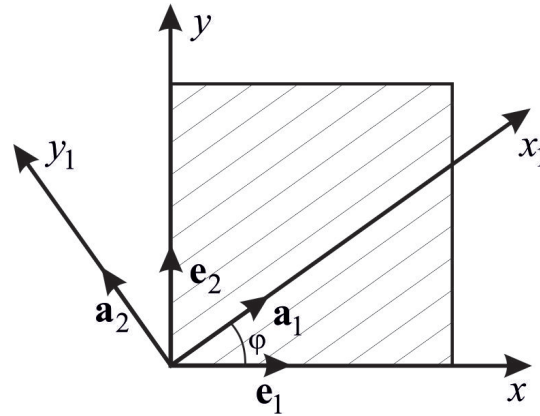


Рис. 1. Ориентация главных осей анизотропии пластины

Для описания деформированного состояния используем тензор деформаций Коши-Грина $\boldsymbol{\varepsilon}$. Тензору $\boldsymbol{\varepsilon}$ поставим в соответствие его векторный образ

$$\mathbf{e} = e_\alpha \mathbf{i}_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

в шестимерном декартовом пространстве с ортонормированным базисом \mathbf{i}_α . При произвольном ортогональном преобразовании векторных образов в шестимерном пространстве (вращении или отражении) длина векторных образов тензоров деформаций не изменяется, то есть сохраняет своё значение квадратичный инвариант, определяемый свёрткой $e^2 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$. Аналогично определяется вектор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, который является образом тензора напряжений \mathbf{S} .

Для описания механического отклика пластины на приложенное напряжение используем определяющие соотношения нелинейной теории упругости в виде

$$\mathbf{e} = \left(\mathbf{c} + \sum_{\alpha=0}^{m-1} c_\alpha (\mathbf{i}_\alpha \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{i}_\alpha + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{i}_\alpha) \mathbf{i}) \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1)$$

предложенные в работе [9]. В этих соотношениях в общем случае \mathbf{e} — вектор деформаций в шестимерном пространстве, $\boldsymbol{\sigma}$ — вектор напряжений в шестимерном пространстве, \mathbf{c} , c_α — константы материала, m — число линейных инвариантов для какого-либо материала, \mathbf{i} — единичный тензор, $\sigma_\alpha = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{i}_\alpha$ — линейные инварианты вектора напряжений, $t_{(\gamma)}^2 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Upsilon}_\gamma \cdot \boldsymbol{\sigma}$ — квадратичные инварианты вектора напряжений, которые определяются через базисные тензоры квадратичных инвариантных подпространств

Υ_γ [4], $\sigma_{(\gamma)} = \sigma \cdot \Omega_\gamma$ — проекция вектора напряжений в собственное подпространство Ω_γ . Для большинства материалов тензоры Υ_γ совпадают с базисными тензорами неодномерных собственных подпространств Ω_γ . Линейные и квадратичные инварианты вектора деформаций определяются аналогично.

При плоском напряжённом состоянии компоненты тензора \mathbf{S} связаны с компонентами вектора напряжений σ соотношениями [4]

$$S_{11} = \sqrt{2}\sigma_2, \quad S_{22} = \sqrt{3}\sigma_0 - \sqrt{2}\sigma_2. \quad (2)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(S_{11} + S_{22}), \quad \sigma_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}(S_{11} + S_{22}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_0, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{11} - S_{22}), \quad \sigma_3 = \sqrt{2}S_{12}. \end{aligned} \quad (3)$$

Компоненты тензора ε связаны с компонентами вектора деформаций \mathbf{e} соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{\sqrt{3}}e_0 - \frac{1}{\sqrt{6}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}}e_0 - \frac{1}{\sqrt{6}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{\sqrt{3}}e_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}e_1, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}e_3. \end{aligned} \quad (4)$$

В соотношениях (2)–(4) компоненты тензоров S_{ij} , ε_{ij} отнесены к главным осям анизотропии материала.

Ортотропный материал имеет три линейных инварианта

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})$$

и три квадратичных инварианта [4]

$$s_{(1)}^2 = e_3^2, \quad s_{(2)}^2 = e_4^2, \quad s_{(3)}^2 = e_5^2$$

или

$$s_{(1)}^2 = \varepsilon_{12}^2, \quad s_{(2)}^2 = \varepsilon_{23}^2, \quad s_{(3)}^2 = \varepsilon_{31}^2.$$

Тензор упругих постоянных \mathbf{c} для ортотропного материала имеет вид [4]

$$\mathbf{c} = c_{00}\mathbf{i}_{00} + 2c_{01}\mathbf{i}_{01} + 2c_{02}\mathbf{i}_{02} + c_{11}\mathbf{i}_{11} + 2c_{12}\mathbf{i}_{12} + c_{22}\mathbf{i}_{22} + c_{33}\mathbf{i}_{33} + c_{44}\mathbf{i}_{44} + c_{55}\mathbf{i}_{55},$$

где $\mathbf{i}_{\alpha\beta}$ — базисные тензоры второго ранга в шестимерном пространстве. В связи с этим определяющие соотношения (1) для ортотропного материала принимают форму

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= (c_{00}\sigma_0 + c_{01}\sigma_1 + c_{02}\sigma_2 + c_0(\sigma^2 + 2\sigma_0^2) + 2c_{11}\sigma_1\sigma_0 + 2c_{12}\sigma_2\sigma_0) \mathbf{i}_0 + \\ &+ (c_{01}\sigma_0 + c_{11}\sigma_1 + c_{12}\sigma_2 + c_1(\sigma^2 + 2\sigma_1^2) + 2c_{20}\sigma_0\sigma_1 + 2c_{22}\sigma_2\sigma_1) \mathbf{i}_1 + \\ &+ (c_{02}\sigma_0 + c_{12}\sigma_1 + c_{22}\sigma_2 + c_2(\sigma^2 + 2\sigma_2^2) + 2c_{30}\sigma_0\sigma_2 + 2c_{31}\sigma_1\sigma_2) \mathbf{i}_2 + c_{33}\sigma_3\mathbf{i}_3, \end{aligned}$$

где $\sigma^2 = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$. Учитывая соотношения (3), преобразуем выражение $\sigma^2 = \frac{3}{2}\sigma_0^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = S_{11}^2 + S_{22}^2 + 2S_{12}^2$. Тогда компоненты вектора деформаций примут вид

$$\begin{aligned} e_0 &= c_{00}\sigma_0 + c_{01}\sigma_1 + c_{02}\sigma_2 + c_0 \left(\frac{7}{2}\sigma_0^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \right) - \sqrt{2}c_1\sigma_0^2 + 2c_2\sigma_0\sigma_2, \\ e_1 &= c_{01}\sigma_0 + c_{11}\sigma_1 + c_{12}\sigma_2 - \sqrt{2}c_0\sigma_0^2 + c_1 \left(\frac{5}{2}\sigma_0^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \right) - \sqrt{2}c_2\sigma_0\sigma_2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$e_2 = c_{02}\sigma_0 + c_{12}\sigma_1 + c_{22}\sigma_2 + 2c_0\sigma_0\sigma_2 - \sqrt{2}c_1\sigma_0\sigma_2 + c_2 \left(\frac{3}{2}\sigma_0^2 + 3\sigma_2^2 + \sigma_3^2 \right), \quad e_3 = c_{33}\sigma_3.$$

Используя выражения (2)–(4), запишем связь между компонентами тензора деформаций и компонентами тензора напряжений в главных осях анизотропии $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= A_{11}S_{11} + A_{12}S_{22} + \alpha_1 (3S_{11}^2 + S_{22}^2 + 2S_{12}^2) + 2\alpha_2 S_{11}S_{22}, \\ \varepsilon_{22} &= A_{12}S_{11} + A_{22}S_{22} + \alpha_2 (S_{11}^2 + 3S_{22}^2 + 2S_{12}^2) + 2\alpha_1 S_{11}S_{22}, \\ \varepsilon_{33} &= A_{13}S_{11} + A_{23}S_{22} + \alpha_3 (S_{11}^2 + S_{22}^2 + 2S_{12}^2), \quad \varepsilon_{12} = c_{33}S_{12}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{3}c_{00} - \frac{\sqrt{2}}{3}c_{01} + \frac{2}{\sqrt{6}}c_{02} + \frac{1}{6}c_{11} - \frac{1}{\sqrt{3}}c_{12} + \frac{1}{2}c_{22}, \\ A_{12} &= \frac{1}{3}c_{00} - \frac{\sqrt{2}}{3}c_{01} + \frac{1}{6}c_{11} - \frac{1}{2}c_{22}, \\ A_{22} &= \frac{1}{3}c_{00} - \frac{\sqrt{2}}{3}c_{01} - \frac{2}{\sqrt{6}}c_{02} + \frac{1}{6}c_{11} + \frac{1}{\sqrt{3}}c_{12} + \frac{1}{2}c_{22}, \\ \alpha_1 &= \frac{c_0}{\sqrt{3}} - \frac{c_1}{\sqrt{6}} + \frac{c_2}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_2 = \frac{c_0}{\sqrt{3}} - \frac{c_1}{\sqrt{6}} - \frac{c_2}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_3 = \frac{c_0 + \sqrt{2}c_1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Связь между деформациями и напряжениями (6) записана в главных осях анизотропии $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

Для определения компонент тензора деформаций в декартовой системе координат Oxy необходимо выполнить переход от базиса главных осей анизотропии $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ к базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Компоненты тензора напряжений в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ имеют вид

$$S_{11} = t \cos^2 \varphi, \quad S_{22} = t \sin^2 \varphi, \quad S_{12} = \frac{1}{2}t \sin 2\varphi. \quad (7)$$

Компоненты тензора деформаций в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{11} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{12} \sin 2\varphi + \varepsilon_{22} \sin^2 \varphi, \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{11} \sin^2 \varphi - \varepsilon_{12} \sin 2\varphi + \varepsilon_{22} \cos^2 \varphi, \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{12} \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Зависимость деформаций пластины от величины приложенных напряжений t и угла φ ориентации главных осей анизотропии материала относительно сторон пластины определяется формулами (8), (6), (7).

На рисунках 2, 3 приведены графики зависимостей напряжения t от продольных ε_{xx} и поперечных ε_{yy} деформаций пластины при различных значениях угла φ .

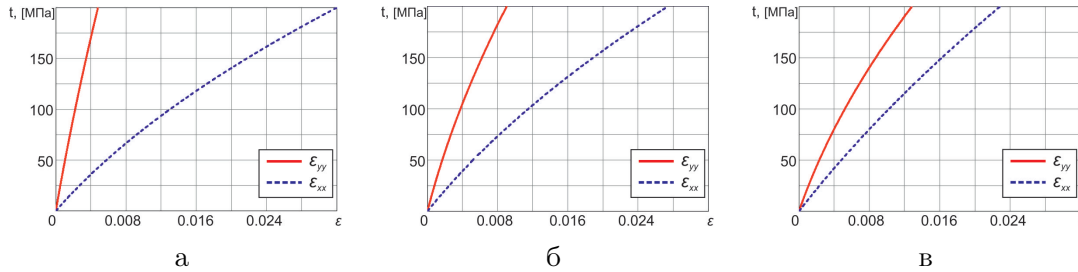


Рис. 2. Зависимости напряжений от продольных (ε_{xx}) и поперечных (ε_{yy}) деформаций при растяжении: а) $\varphi = 0$; б) $\varphi = \frac{\pi}{8}$; в) $\varphi = \frac{\pi}{4}$

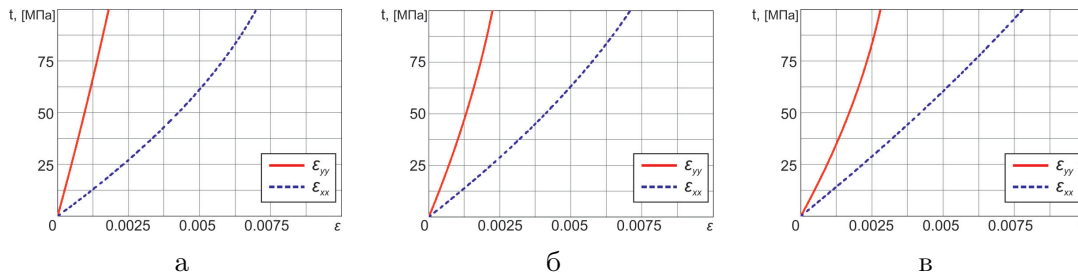


Рис. 3. Зависимости напряжений от продольных (ε_{xx}) и поперечных (ε_{yy}) деформаций при сжатии: а) $\varphi = 0$; б) $\varphi = \frac{\pi}{8}$; в) $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Графики на рисунках 2, 3 показывают, что использование определяющих соотношений в виде (1) позволяет описать нелинейную зависимость напряжений от деформаций в анизотропном материале, а также зависимость напряжённо-деформированного состояния от ориентации приложенной нагрузки относительно направлений главных осей анизотропии материала.

В статье [10] приведены экспериментальные и теоретические кривые зависимостей напряжений от продольных и поперечных деформаций образца из ламинированного композита при растяжении и сжатии под различными углами к волокнам. Рассмотренная в настоящей работе модель (1) может быть использована для описания поведения материала при одноосном нагружении, поэтому такие экспериментальные данные можно использовать для идентификации параметров модели c_0 , c_1 , c_2 , отвечающих за описание нелинейно-упругого поведения анизотропного материала. Анализ результатов, приведённых на рисунке 2, позволяет отметить, что полученные кривые качественно описывают известные экспериментальные данные при различных углах ориентации осей анизотропии. Модель, предложенная в работе [10] и основанная на использовании нелинейных соотношений для сдвигов, не описывает нелинейный характер зависимости напряжений от продольных и поперечных деформаций при растяжении (сжатии) вдоль осей анизотропии.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
- [2] Букетов А. В., Шоркин В. С. Определение и изменение механических свойств композитных материалов // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. 2010. № 5. С. 25-26.
- [3] Горбачёв В. И. Осреднение линейных задач механики композитов при непериодической неоднородности // *Известия РАН. Механика твёрдого тела*. 2001. № 1. С. 31-37.
- [4] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 320 с.
- [5] Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
- [6] Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
- [7] Победря Б. Е. Сложное нагружение слоистых композитов // *Известия РАН. Механика твёрдого тела*. 2001. № 1. С. 21-30.
- [8] Победря Б. Е. Эволюционная деструкция в механике композитов // *Известия РАН. Механика твёрдого тела*. 1997. № 2. С. 27-31.
- [9] Христич Д. В. Идентификация анизотропных материалов и моделирование процессов конечного деформирования гипопругих тел: дис. ... докт. физ.-мат. наук. Тула, 2014. 252 с.
- [10] Lomakin E. V., Fedulov B. N. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // *Meccanica*. 2015. Vol. 50. No. 6. P. 1527-1535.

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, V. V. Rudakov

A NONLINEAR MODEL OF PLATES MADE OF COMPOSITE MATERIALS

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. An elastic behavior of an orthotropic plate, which simulates a laminated composite, at loading in its plane, formed by two axes of anisotropy of the material, is considered. Constitutive relations, taking into account nonlinear strain-stress dependence, are used. Strain components dependences on the angle of orientation of main anisotropy axes in the plane of the plate are obtained. The comparison of received solution and both known ones and experimental data is carried out.

Keywords: nonlinear constitutive relations, anisotropic materials, plates, composites.

REFERENCES

- [1] Bakhvalov N. S., Panasenko G. P. Averaging of processes in periodical media. Moscow: Nauka, 1984. 352 p. (in Russian)
- [2] Buketov A. V., Shorkin V. S. Determination and change of mechanical properties of composite materials // Fundamental and applied problems of technics and technology. 2010. N. 5. P. 25-26. (in Russian)
- [3] Gorbachyov V. I. Averaging of linear problems of mechanics at non-periodic inhomogeneity // Mechanics of Solids. 2001. N. 1. P. 31-37. (in Russian)
- [4] Markin A. A., Sokolova M. Yu. Thermomechanics of Elastoplastic Deformation. Cambridge International Science Publishing, 2015. 325 p.
- [5] Obraztsov I. F., Vasil'ev V. V., Bunakov V. A. Optimal reinforcement of shells of revolution made of composite materials. Moscow: Mashinostroenie, 1977. 144 p. (in Russian)
- [6] Pobedrya B. E. Mechanics of composite materials. Moscow: MSU publ., 1984. 336 p. (in Russian)
- [7] Pobedrya B. E. Complicated loading of layered composites // Mechanics of Solids. 2001. N. 1. P. 21-30. (in Russian)
- [8] Pobedrya B. E. Evolutionary destruction in mechanics of composites // Mechanics of Solids. 1997. N. 2. P. 27-31. (in Russian)
- [9] Khristich D. V. Identification of anisotropic materials and modelling of processes of finite deforming of hypoelastic bodies: dis. ... doct. fiz.-mat. nauk. Tula, 2014. 252 p. (in Russian)
- [10] Lomakin E. V., Fedulov B. N. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. Vol. 50. No. 6. P. 1527-1535.

Sokolova Marina Yur'evna

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

Khristich Dmitrii Viktorovich

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

Rudakov Vadim Vyacheslavovich

e-mail: rudakov93@mail.ru, Postgraduate Student, Tula State University, Tula, Russia.

В. Г. Баженов, А. И. Кибец, М. В. Петров, Т. Г. Федорова, Е. Г. Гоник

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ВЫПУЧИВАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПОД
ДЕЙСТВИЕМ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ**

*Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний
Новгород, Россия*

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Приводятся результаты экспериментального исследования деформирования и потери устойчивости заполненных сыпучим материалом замкнутых цилиндрических оболочек. Анализируется влияние продольного ребра жесткости на упругопластическое выпучивание оболочки. Показано, что способ крепления ребра жесткости существенно влияет на величину критической нагрузки и закритическое деформирование оболочки.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, сыпучий наполнитель, подкрепление, упругопластический изгиб, устойчивость, критическая нагрузка, эксперимент.

УДК: 539.3

Цель настоящей работы - экспериментальное исследование влияния продольного ребра жесткости на величину критической нагрузки и закритическое формоизменение замкнутой цилиндрической оболочки с заполнителем при поперечном изгибе для верификации вычислительной модели больше габаритной емкости для транспортировки сыпучих материалов [13], основанной на методе конечных элементов и явной схеме интегрирования по времени типа "крест"[14] - [16]. Экспериментальная установка и методика испытаний. Экспериментальная установка представлена на рис.1 и включает в себя: домкрат (1), динамометр (2), нагружающее устройство (3), испытуемый образец (4) и индикатор часового типа (5). В соответствии с теорией подобия [17] и расчетами по балочной схеме [18] в качестве испытуемых образцов для верификации вычислительной модели [13] были выбраны стальные (Ст3) тонкостенные трубы с наружным диаметром $D = 160$ мм, толщиной стенки $h=0,75$ мм, длиной 2500 мм. Внутри трубы равномерно загружается речной песок массой $m=60$ кг. Труба с песком устанавливается по торцам на две шарнирные опоры. Расстояние между опорами $L = 2400$ мм. Поскольку труба под действием весовой нагрузки в этом случае не теряет устойчивость, к ней прикладываются дополнительные поперечные силы, которые создаются домкратом (отмечен цифрой 1 на рис.1) и передаются на оболочку через нагружающее устройство (3).

© Баженов В. Г., Кибец А. И., Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г., 2018

Баженов Валентин Георгиевич

e-mail: bazhenov@mech.unn.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Кибец Александр Иванович

e-mail: kibec@mech.unn.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Петров Михаил Васильевич

e-mail: gimmaretrova20@gmail.com, доктор технических наук, доцент кафедры строительных конструкций, профессор ФГБОУ ВО "Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова г. Чебоксары, Россия.

Федорова Татьяна Георгиевна

e-mail: tanusha2884@mail.ru, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций ФГБОУ ВО "Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова г. Чебоксары, Россия.

Гоник Екатерина Григорьевна

e-mail: katty.gonik@mail.ru, старший преподаватель кафедры строительных конструкций ФГБОУ ВО "Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова г. Чебоксары, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-38-60051 мол_а_дк («Разработка вычислительных моделей и расчетно-экспериментальное исследование предельных состояний оболочечных конструкций при контактном взаимодействии с сыпучим наполнителем с учетом сложного нагружения, геометрической и физической нелинейности»).

Поступила 01.08.2018

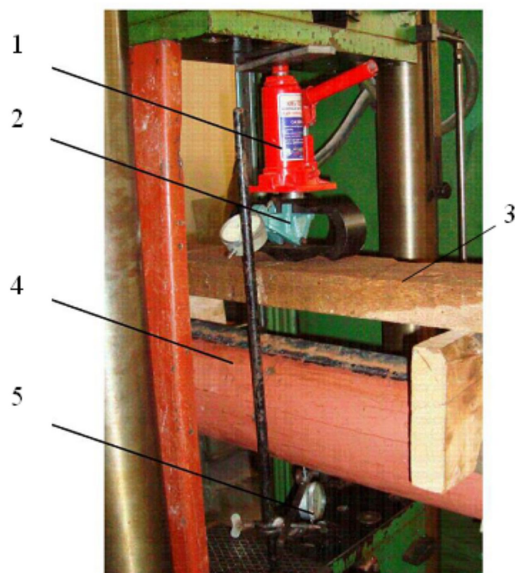


Рис. 1. Экспериментальная установка: 1 - домкрат, 2 - динамометр, 3 - нагружающее устройство, 4 - образец, 5 - индикатор часового типа.

Экспериментальное исследование поперечного изгиба замкнутой цилиндрической оболочки, заполненной песком, производится по следующей программе [19], [20]. После установки на опоры образец нагружается поперечными силами F , величина которых увеличивается с шагом $\Delta F = 0,5$ кН. По мере приближения к критическому значению ΔF уменьшается до 0,1 кН. На каждом шаге нагружения выполняются следующие операции: 1. индикатором часового типа ИЧ-10 замеряется прогиб на середине длины оболочки; 2. с помощью прямоугольной рамки с двумя индикаторами часового типа замеряются диаметры в горизонтальном и вертикальном направлении; 3. двумя тензодатчиками в продольном и окружном направлениях определяются деформации на середине длины образца в верхней и нижней точках; 4. осуществляется фотосъемка гофрообразования. Критическая нагрузка определялась методом точки перегиба [4], [13]. Согласно этому методу анализируется зависимость нагрузка - прогиб оболочки. Нагрузка считается критической, если ее последующее малое приращение приводит к резкому увеличению прогиба оболочки. Проведены 3 серии испытаний, в которых рассматривались: а) гладкая цилиндрическая оболочка, б) оболочка, усиленная продольным ребром жесткости, прикрепленным болтами через 100 мм, в) оболочка, соединенная с продольным ребром жесткости сплошным сварным швом в предполагаемой зоне потери устойчивости и прерывистым швом с шагом 100 мм вне этой зоны. Ребра жесткости выполнялись из стальных (СтЗсп ГОСТ 8509-93) уголков 25x25x4 мм. Ребро закрепляли двумя полочками на нагружаемой наружной поверхности образца. Длина ребра жесткости равнялась длине образца. В каждой серии испытывалось по 5 образцов. Результаты экспериментов. Результаты измерений, полученные после статистической обработки экспериментальных данных [21], приведены в таблице 1, где $F_{\text{крит}}$ - критическая нагрузка, $U_{\text{крит}}$ - прогиб в нижней точке

Номер	Испытуемый образец	$F_{\text{крит}}$, кН	$U_{\text{крит}}$, мм
1	гладкая оболочка	4,9	9,9
2	ребро жесткости прикреплено к оболочке болтами	5,0	7,6
3	ребро жесткости соединено с оболочкой сваркой	12,2	15,3

Таблица 3.

оболочки в ее среднем поперечном сечении, соответствующий критической нагрузке. На рис.2-4 изображены фотографии зон потери устойчивости гладкой оболочки, оболочки с ребром жесткости, прикрепленном болтами и сваркой, соответственно. Для этих же образцов на рис.5 приведены графики зависимости прогиба U в центре нижней поверхности оболочки от нагружающей силы F .

Анализ результатов экспериментов для гладкой оболочки показывает следующее. При смещении нагружающего устройства, примерно, на 10 мм в средней части нагружаемой поверхности цилиндрической оболочки образуется локальная поперечная вмятина. При дальнейшем нагружении длина вмятины увеличивается в окружном направлении, пока не достигнет, приблизительно, половины диаметра оболочки, после чего ее развитие прекращается. Последующее смещение нагружающего устройства приводит к расширению зоны потери устойчивости оболочки в окружном направлении за счет образования новых вмятин, расположенных в шахматном порядке относительно первой. На момент окончания нагружения на оболочке образовалось 5 гофр длиной 70-80 мм в окружном направлении (рис. 2).



Рис. 2. Образец без подкрепления (фрагмент центральной части оболочки после потери устойчивости)

Потеря устойчивости образцов подкрепленных при помощи болтов уголком происходит следующим образом. Сначала в оболочке между закреплениями образуются гофры в верхней части оболочки (рис.3). При последующем увеличении нагрузки происходит общая потеря устойчивости конструкции с захватом подкрепляющего элемента (уголка). Критическая нагрузка при таком креплении ребра жесткости практически не меняется (рис.5), но прогиб оболочки, при котором происходит потеря устойчивости, уменьшается, примерно, на 40 %.



Рис. 3. Форма потери устойчивости образца, усиленного уголком 25x25x4 мм (крепление болтами через 100 мм)

Если уголок приварен к оболочке, критическая нагрузка увеличивается в 2,5 раза и оболочка не испытывает больших формоизменений в рассмотренном диапазоне нагружения (рис.4).



Рис. 4. Образец, усиленный уголком 25x25x4 мм (крепление сваркой) после потери устойчивости/

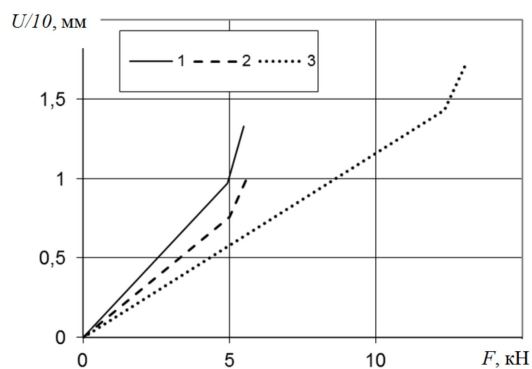


Рис. 5. Зависимость прогиба оболочки от нагрузки: 1 - гладкая оболочка, 2 - ребро жесткости прикреплено к оболочке болтами, 3 - ребро жесткости прикреплено к оболочке сваркой.

Закключение. Проведены экспериментальные исследования потери устойчивости и последующего упругопластического деформирования гладких и подкрепленных цилиндрических оболочек, заполненных песком. В ходе экспериментов регистрировались формоизменение оболочки, прогиб в характерных точках, значение изгибающей нагрузки. Показано, что условия крепления продольных ребер жесткости существенно влияют на величину критической силы и закритическое деформирование цилиндрической оболочки. Полученные экспериментальные данные могут быть использованы для верификации вычислительной модели большегрузной емкости для автомобильной транспортировки сыпучих грузов [13].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М. : Наука, 1967. 984 с.
- [2] Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М. : Машиностроение, 1978. 312 с.
- [3] Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М. : Наука, 1978. 360 с.
- [4] Абросимов Н. А., Баженов В. Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций: Монография. Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
- [5] Simitsen G. J. Buckling and Postbuckling of Imperfect Cylindrical Shell: A review // Applied Mechanics Reviews. 1986. V. 39. № 10. Pp. 1517–1524.
- [6] Теребушко О. И. Устойчивость и закритические деформации оболочек, подкрепленных редко расставленными ребрами // Расчет пространствен. конструкций. М. : Стройиздат, 1964. Вып. 9. С. 131 – 160.
- [7] Рябов В. М. Устойчивость подкрепленных поперечным набором цилиндрических оболочек при внешнем давлении и осевом сжатии // Расчет пространственных конструкций. М. : Стройиздат, 1969. Вып. 12. С. 156–167.
- [8] Выборнов В. Г., Коноплев И. Г., Коноплев Ю. Г. Экспериментальное исследование рационального подкрепления цилиндрических оболочек при действии локальных нагрузок // Исследования по теории пластин и оболочек. 1975. Вып. 11. С. 174–180.
- [9] Теребушко О. И. О влиянии параметров подкрепления на динамическую устойчивость цилиндрической оболочки // Прикладная механика. 1977. Т. 13. № 3. С. 10–16.
- [10] Кабанов В. В., Железнов Л. П., Фадеев В. Т. Исследование прочности и устойчивости подкрепленной круговой цилиндрической оболочки при неоднородном нагружении // Изв. ВУЗ Авиационная техника. 1990. № 2. С. 17–21.
- [11] Шарыпов Д. В. Устойчивость цилиндрической оболочки, подкреплённой шпангоутами // Вестник СПбГУ. 1998. № 4. С. 132–136.
- [12] Постнов В. А., Тумашик Г. А., Москвина И.В. Об устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки // Проблемы прочности и пластичности. 2007. №69. С. 18–23.
- [13] Баженов В. Г., Гоник Е. Г., Кибец А. И., Петров М. В., Федорова Т. Г. Устойчивость и закритическое поведение большегабаритных цистерн для транспортировки сыпучих грузов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015. № 5. С. 34–40.
- [14] Баженов В. Г., Гоник Е. Г., Кибец А. И., Шошин Д. В. Устойчивость и предельные состояния упругопластических сферических оболочек при статических и динамических нагружениях // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55. № 1. С. 13–22.

- [15] Баженов В. Г., Кибец А. И., Цветкова И. Н. Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1995. № 2. С. 20–26.
- [16] Баженов В. Г., Жестков М. Н., Замятин В. А., Кибец А. И. Математическое моделирование развития запроектной аварии внутри корпуса реактора на быстрых нейтронах // Вестник ПНИПУ. Механика. 2015. № 3. С. 5–14.
- [17] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. – 8-е изд., перераб. М. : Наука, 1977. 440 с.
- [18] Прочность. Устойчивость. Колебания // Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М. : Машиностроение, 1968. 567 с.
- [19] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G., Frolova I. A. Stability and supercritical behaviour of thin-walled cylindrical shell with discrete aggregate in bending // Materials Physics and Mechanics. 2016. V. 28. № 1–2. Pp. 16–20.
- [20] Гоник Е. Г., Кибец А. И., Петров М. В., Федорова Т. Г., Фролова И. А. Влияние аппроксимации диаграммы деформирования на критические нагрузки при поперечном изгибе цилиндрической оболочки // Проблемы прочности и пластичности. 2017. № 79. № 2. С. 169–181.
- [21] Румшиский Л. З. Математическая обработка результатов экспериментов. М. : Наука, 1971. 192 с.

V. G. Bazhenov, A. I. Kibets, M. V. Petrov, T. G. Fedorova, E. G. Gonik

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF THE ELASTIC PLASTIC EXPANSION OF CIRCLIN LINES WITH COLLECTOR UNDER ACTION OF CROSS-SIDED FORCES

Research Institute of Mechanics, N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia

I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. The results of an experimental study of deformation and loss of stability of closed cylindrical shells filled with loose material are presented. The effect of the longitudinal stiffener on elastoplastic buckling of the shell is analyzed. It is shown that the method of fastening the stiffener significantly affects the magnitude of the critical load and the supercritical deformation of the shell.

Keywords: cylindrical shell, loose filler, reinforcement, elastoplastic bending, stability, critical load, experiment.

REFERENCES

-
- Bazhenov Valentin Georgievich*
e-mail: bazhenov@mech.unn.ru, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher, Research Institute of Mechanics, N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia.
Kibets Alexander Ivanovich

- [1] Vol'mir A. S. Ustojchivost' deformiruemykh sistem. M. : Nauka, 1967. 984 s. (in Russian)
- [2] Alfutov N. A. Osnovy rascheta na ustojchivost' uprugih sistem. M. : Mashinostroenie, 1978. 312 s. (in Russian)
- [3] Grigolyuk E.H. I., Kabanov V. V. Ustojchivost' obolochek. M. : Nauka, 1978. 360 s. (in Russian)
- [4] Abrosimov N. A., Bazhenov V. G. Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnykh konstrukcij: Monografiya. N. Novgorod : Izd-vo NNGU, 2002. 400 s. (in Russian)
- [5] Simitsen G. J. Buckling and Postbuckling of Imperfect Cylindrical Shell: A review // Applied Mechanics Reviews. 1986. V. 39. № 10. Pr. 1517–1524.
- [6] Terebushko O. I. Ustojchivost' i zakriticheskie deformacii obolochek, podkreplennykh redko rasstavlennymi rebrami // Raschet prostranstven. konstrukcij. M. : Strojizdat, 1964. Vyp. 9. S. 131 – 160. (in Russian)
- [7] Ryabov V. M. Ustojchivost' podkreplennykh poperechnym naborom cilindricheskikh obolochek pri vneshnem davlenii i osevom szhatii // Raschet prostranstvennykh konstrukcij. M. : Strojizdat, 1969. Vyp. 12. S. 156–167. (in Russian)
- [8] Vybornov V. G., Konoplev I. G., Konoplev YU. G. EHksperimental'noe issledovanie racional'nogo podkrepleniya cilindricheskikh obolochek pri dejstvii lokal'nykh nagruzok // Issledovaniya po teorii plastin i obolochek. 1975. Vyp. 11. S. 174–180. (in Russian)
- [9] Terebushko O. I. O vliyanii parametrov podkrepleniya na dinamicheskuyu ustojchivost' cilindricheskoy obolochki // Prikladnaya mekhanika. 1977. T. 13. № 3. S. 10–16. (in Russian)
- [10] Kabanov V. V., ZHeleznov L. P., Fadeev V. T. Issledovanie prochnosti i ustojchivosti podkreplenoj krugovoj cilindricheskoy obolochki pri neodnorodnom nagruzhenii // Izv. VUZ Aviacionnaya tekhnika. 1990. № 2. S. 17–21. (in Russian)
- [11] SHarypov D. V. Ustojchivost' cilindricheskoy obolochki, podkreplyonnoj shpangoutami // Vestnik SPbGU. 1998. № 4. S. 132–136. (in Russian)
- [12] Postnov V. A., Tumashik G. A., Moskvina I.V. Ob ustojchivosti podkreplenoj cilindricheskoy obolochki // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2007. №69. S. 18–23. (in Russian)
- [13] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibec A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G. Ustojchivost' i zakriticheskoe povedenie bol'shegabaritnykh cistern dlya transportirovki sypuchih gruzov // Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin. 2015. № 5. S. 34–40. (in Russian)

e-mail: kibec@mech.unn.ru, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher, Research Institute of Mechanics, N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia.

Petrov Mikhail Vasilyevich

e-mail: rimmapetrova20@gmail.com, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Building Structures, Professor of I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Fedorova Tatyana Georgievna

e-mail: tanusha2884@mail.ru, Cand.Tech.Sci., the senior lecturer of faculty of building designs I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Gonik Ekaterina Grigoryevna

e-mail: katya.gonik@mail.ru, Senior Lecturer of the Department of Building Structures I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

[14] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibec A. I., Shoshin D. V. Ustojchivost' i predel'nye sostoyaniya uprugoplasticheskikh sfericheskikh obolochek pri staticheskikh i dinamicheskikh nagruzheniyah // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2014. T. 55. № 1. S. 13–22. (in Russian)

[15] Bazhenov V. G., Kibec A. I., Cvetkova I. N. Chislennoe modelirovanie nestacionarnykh processov udarnogo vzaimodejstviya deformiruemykh ehlementov konstrukcij // Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin. 1995. № 2. S. 20–26. (in Russian)

[16] Bazhenov V. G., Zhestkov M. N., Zamyatin V. A., Kibec A. I. Matematicheskoe modelirovanie razvitiya zaproektnoj avarii vnutri korpusa reaktora na bystrykh nejtronah // Vestnik PNIPU. Mekhanika. 2015. № 3. S. 5–14. (in Russian)

[17] Sedov L. I. Metody podobiya i razmernosti v mekhanike. – 8-e izd., pererab. M. : Nauka, 1977. 440 s. (in Russian)

[18] Prochnost'. Ustojchivost'. Kolebaniya //Spravochnik v trekh tomah. Tom 3. Pod red. I.A. Birgera i YA.G. Panovko. M. : Mashinostroenie, 1968. 567 s. (in Russian)

[19] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G., Frolova I. A. Stability and supercritical behaviour of thin-walled cylindrical shell with discrete aggregate in bending // Materials Physics and Mechanics. 2016. V. 28. № 1–2. Pr. 16–20.

[20] Gonik E. G., Kibec A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G., Frolova I. A. Vliyanie approksimacii diagrammy deformirovaniya na kriticheskie nagruzki pri poperechnom izgibe cilindricheskoy obolochki // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2017. № 79. № 2. S. 169–181. (in Russian)

[21] Rumshiskij L. Z. Matematicheskaya obrabotka rezul'tatov ehksperimentov. M. : Nauka, 1971. 192 s. (in Russian)

М. Каинг¹, С. А. Кузнецов², А. В. Ткачева³

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ЗАПРЕССОВАНИЯ ДИСКА В РАЗОГРЕТУЮ КРУГЛУЮ ПЛАСТИНУ

¹ Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре,
Россия

² ООО Торэкс – Хабаровск, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

³ Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. С помощью теории температурных напряжений моделируется процесс горячей посадки круглой пластины в кольцо. При этом материал кольца не равномерно разогрет и имеет на момент посадки, накопленные необратимые деформации. Из-за высокой температуры нагрева локальной области кольца учитываются зависимости предела текучести и упругих модулей от температуры.

Ключевые слова: упругость, пластичность, неустановившиеся температурные напряжения, кусочно-линейные пластические потенциалы, остаточные напряжения.

УДК: 539.374+ 539.224

Введение. Исследованию процесса горячей посадки посвящено большое количество работ [1-7]. В них описываются процессы, происходящие в материале сборки как обратимые, так и необратимые. Во всех расчетах охватываемая деталь цилиндрической формы (труба, кольцо) разогрета равномерно и не имеет необратимых деформаций на момент посадки. Но в современной практике часто используется индукционный разогрев охватываемой детали. Это диктуется требованиями технологичности операции сборки горячей посадкой. С помощью индукционных переносных устройств, помещаемых вовнутрь охватываемой детали, материал прогревается неравномерно

© Каинг М., Кузнецов С. А., Ткачева А. В., 2018

Каинг Муат

e-mail: mail@imim.ru, аспирант, Комсомольский – на – Амуре государственный университет, г. Комсомольск – на – Амуре, Россия.

Кузнецов Сергей Алексеевич

e-mail: mail@imim.ru, доктор физико-математических генеральный директор ООО "Торэкс – Хабаровск г. Комсомольск – на – Амуре, Россия.

Ткачева Анастасия Валерьевна

e-mail: 4nansi4@mail.ru, кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск – на – Амуре, Россия.

Поступила 01.08.2018

Работа выполнена в рамках государственного задания № 007-00285-18-00

с достаточно высокой температурой на такой поверхности детали. В данной работе с использованием теории температурных напряжений [8, 9] и теории пластического течения [10, 11] исследуется процесс горячей посадки пластины в кольцо, при этом материал кольца в момент посадки считается неравномерно разогретым и имеет накопленные в процессе разогрева необратимые деформации.

Исходные зависимости. Деформации e_{ij} полагаются малыми и складывающимися из обратимой e_{ij}^e и необратимой (пластической) составляющих e_{ij}^p :

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p \quad (1)$$

Упругие деформации вместе с температурой T задают напряжения σ_{ij} в материале

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - 3\alpha K (T - T_0)) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e \quad (2)$$

В (2) λ , μ , $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – упругие модули материала тела, α – коэффициент линейного расширения, T_0 – начальная (комнатная) температура, при которой осуществляется свободное состояние. Пластические деформации растут в условиях соответствия напряженных состояний поверхности $f(\sigma_{ij}, k) = 0$ нагружения в пространстве напряжений. В условиях принимаемого принципа максимума Мизеса [17] уравнение поверхности нагружения является пластическим потенциалом, поэтому следует ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{de_{ij}^p}{dt} = \phi \frac{\partial f(\sigma_{ij}, k)}{\partial \sigma_{ij}}; \quad \phi > 0 \quad (3)$$

В качестве поверхности нагружения здесь принимаем поверхность наклонной призмы Ивлева в пространстве главных напряжений

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = \frac{4}{3}k, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4)$$

Предел текучести k в (3) и (4) считаем зависимым от температуры

$$k = k_0 \tau(t)^2, \quad \tau(t) = (T_p - T)(T_p - T_0)^{-1}. \quad (5)$$

В (5) k_0 – предел текучести при температуре T_0 , T_p – температура плавления материала.

Отличие от классического случая температурных напряжений, описываемого зависимостями (2), когда в них λ , μ постоянные величины, свяжем с зависимостью последних от температуры [2]. Такие зависимости принимаем в их простейшем виде:

$$\begin{aligned} E(t) &= E_p - (E_p - E_0) \tau(t), \\ v(t) &= 0.5 - (0.5 - v_0) \tau(t), \\ \lambda &= vE(1+v)^{-1}(1-2v)^{-1}, \quad \mu = 0.5E(1+v)^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Замыкает эту систему единственное уравнение равновесия

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \quad (7)$$

Постанова задачи. К внутренней границе кольца с размерами $R \leq r \leq R_2$ подводится источник тепла, который, нагревая материал кольца, увеличивает его внутренний радиус до $r = R_1$, при этом температура на внутреннем радиусе достигает $T = 0.85T_p$ (T_p температура плавления материала). Процесс нагрева задается уравнением теплопроводности

$$T_{,t} = a(T_{,rr} + r^{-1}T_{,r}) - \chi(T - T_0) \quad (8)$$

с краевыми и начальными условиями

$$\begin{aligned} T_{,t}|_{r=R_1} &= q, \\ \psi_1 T_{,r}|_{r=R_2} &= \chi (T - T_0), \\ T|_{t=0} &= T_0. \end{aligned} \quad (9)$$

В (8) и (9) a – коэффициент температуропроводности, q – скорость подвода тепла, ψ_1 – коэффициент теплопроводности материала кольца, χ – коэффициент теплоотдачи от поверхности кольца в окружающую среду. Равенство $R = R_1$ достигается в некоторый момент времени $t = t_*$, являющийся моментом посадки кольца на круглую пластину, которая находится при температуре T_0 . Краевыми условиями для последующего процесса теплопроводности будут

$$\begin{aligned} T^{(1)}|_{r=R_1} &= T^{(2)}|_{r=R_1}, \\ \psi_2 T_{,r}^{(2)}|_{r=R_1} &= \psi_1 T_{,r}^{(1)}|_{r=R_1}, \\ \psi_1 T_{,r}^{(1)}|_{r=R_2} &= \chi (T_0 - T), \end{aligned} \quad (10)$$

где $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ температура кольца и пластины соответственно, ψ_1 – коэффициент теплопроводности материала пластины. Распределение температуры по сборке определяется численно без дополнительных трудностей в любой момент времени решением уравнения (8) с условиями (9) (до момента посадки) или (10) (после момента посадки). Далее считаем его известным (найденным). В предлагаемом алгоритме расчетов распределение температуры приходится вычислять на каждом последовательном временном шаге расчетов.

До начала нагрева предполагаем, что материал кольца не имеет необратимых деформаций и деформируется упруго. С ростом температуры растут и напряжения с деформациями, связь которых описывается законом Дюамеля – Неймана:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (4\mu (\lambda + \mu) u_{r,r} + 2\lambda\mu r^{-1} u_r - 6\mu K\theta) (\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (2\lambda\mu u_{r,r} + 4\mu (\lambda + \mu) r^{-1} u_r - 6\mu K\theta) (\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (11) в уравнение равновесия (7), получаем дифференциальное уравнение относительно перемещений u_r

$$\xi u_{r,rr} + \varsigma u_{r,r} + \omega u_r + \beta = 0, \quad (12)$$

где ξ , ς , ω , β некоторые функции от температуры и радиуса. В случае зависимости упругих модулей от температуры (6) они запишутся в виде

$$\begin{aligned} \xi &= 4\mu (\lambda + \mu) (\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \varsigma &= 4 (\mu^2 \lambda_{,r} + \mu_{,r} (\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)) (\lambda + 2\mu)^{-2} + 4\mu (\lambda + \mu) (\lambda + 2\mu)^{-1} r^{-1}, \\ \omega &= 2 (2\mu^2 \lambda_{,r} + \lambda^2 \mu_{,r}) (\lambda + 2\mu)^{-2} r^{-1} - 4\mu (\lambda + \mu) (\lambda + 2\mu)^{-1} r^{-2}, \\ \beta &= -\theta (8\mu^2 \lambda_{,r} + 2 (3\lambda^2 + 4\lambda\mu + 4\mu^2) \mu_{,r}) (\lambda + 2\mu)^{-2} - 6K\mu\theta_{,r} (\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

И тогда уравнение равновесия (12) можно решить на каждом временном шаге только численно, к примеру, разностным методом, используя граничные условия, моделирующие свободную границу на $r = R$ и $r = R_2$

$$\sigma_r|_{r=R} = 0, \quad \sigma_r|_{r=R_2} = 0. \quad (14)$$

В момент времени $t = t_1$ в материале кольца на свободной поверхности $r = R$ начинает выполняться условие пластического течения Ишлинского-Ивлева

$2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$ (рис. 1 б)). Здесь образуется продвигающаяся упругопластическая граница $r = n_1(t)$, которая разделит материал кольца на две области обратимо и пластически деформируемые. В области обратимого деформирования, как и прежде, напряжения и перемещения находятся из решения дифференциального уравнения равновесия (12) (13).

В области пластического течения $R \leq r \leq n_1(t)$ развиваются необратимые деформации $e_r^p, e_\varphi^p, e_z^p$, которые связаны между собой следствием, вытекающим из ассоциированного закона пластического течения:

$$e_r^p = e_z^p = -0.5e_\varphi^p \quad (15)$$

Закон Дюамеля – Неймана принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{r,r} - e_r^p) + 2\lambda\mu(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - 6\mu K\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (2\lambda\mu(u_{r,r} - e_r^p) + 4\mu(\lambda + \mu)(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - 6\mu K\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из выполняемого условия пластического течения и (15) и (16) находим необратимую деформацию

$$e_r^p = (u_{r,r}\mu + 1.5K\alpha\mu^{-1}(\lambda + 2\mu)k - 0.5r^{-1}u_r(3\lambda + 4\mu))(3\lambda + 5\mu)^{-1} \quad (17)$$

Подставляя (16) с учетом (17) в уравнение равновесия (7), получаем дифференциальное уравнение (12) с коэффициентами:

$$\begin{aligned} \xi &= 12\mu K(3\lambda + 5\mu)^{-1}, \\ \varsigma &= (4(9\lambda^2 + 12\lambda\mu + 10\mu^2)\mu_{,r} + 9\mu^2\lambda_{,r})(3\lambda + 5\mu)^{-2} + \\ &\quad + 12\mu K r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1}, \\ \omega &= ((18\lambda^2 + 24\lambda\mu + 20\mu^2)\mu_{,r} + 18\mu^2\lambda_{,r})r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-2} - \\ &\quad - 3\mu K r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1}, \\ \beta &= (\theta(18(\lambda\mu_{,r} - \mu\lambda_{,r}) - 3K r^{-1}) + 12k(\lambda\mu_{,r} - \mu\lambda_{,r}))(3\lambda + 5\mu)^{-2} + \\ &\quad + (4\mu k_{,r} - 6K\alpha''_{,r})(3\lambda + 5\mu)^{-1} + 6(\lambda + 2\mu)kr^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Перемещения, напряжения и деформации в условиях зависимости упругих модулей от температуры (6) на каждой временной итерации после начала необратимого деформирования определяются из численного решения уравнения равновесия (11), (17) и граничными условиями (13). В ходе решения равенство радиальных напряжений в материале кольца на упругопластической границе $r = n_1(t)$ выполняется без дополнительных условий.

На рис. 2 изображены распределения напряжений в материале алюминиевой пластины, обладающей следующими характеристиками: $a = 77,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\lambda = 40,384 \text{ ГПа}$, $\mu = 26,92 \text{ ГПа}$, $\alpha = 23,4 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$, $k_0 = 210 \text{ МПа}$, $T_p = 660^\circ\text{C}$, $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

После отвода источника тепла на свободной границе образуется разгружающая упругопластическая граница $r = n_2(t)$ (рис. 1 в)). Она довольно быстро достигает границы $r = n_1(t)$. В области разгрузки $R_1 \leq r \leq n_2(t)$ присутствуют накопившиеся необратимые деформации p_r, p_φ, p_z . Закон Дюамеля – Неймана (10) принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{r,r} - p_r) + 2\lambda\mu(r^{-1}u_r - p_\varphi) - 6\mu K\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (2\lambda\mu(u_{r,r} - p_r) + 4\mu(\lambda + \mu)(r^{-1}u_r - p_\varphi) - 6\mu K\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Это приводит к изменению коэффициентов (12) в уравнении равновесия (11). Они принимают вид:

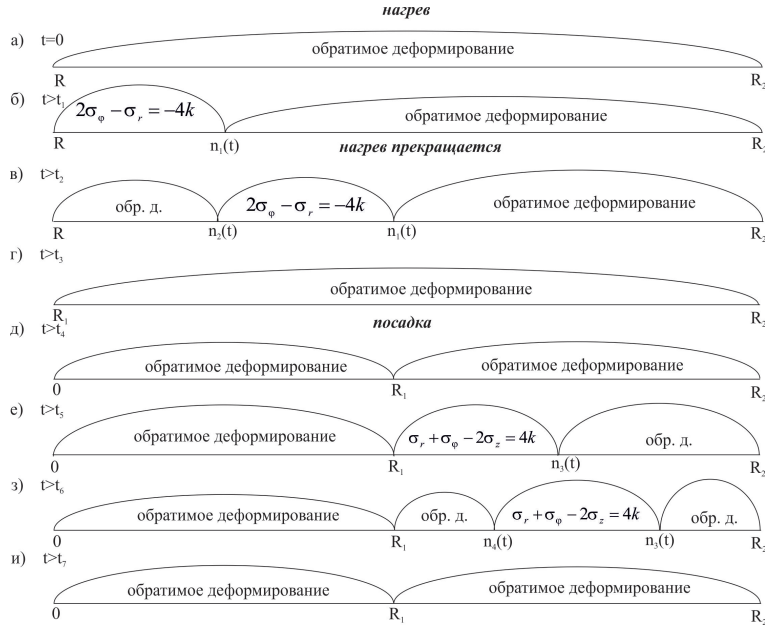


Рис. 1. Схема деформирования материала сборки

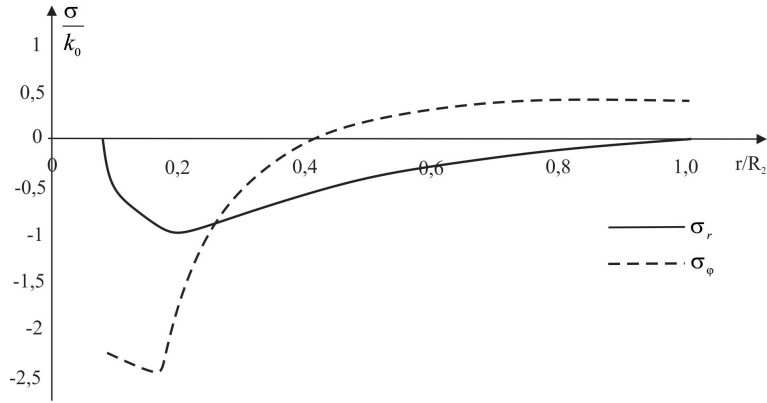


Рис. 2. Распределение напряжений в материале кольца до момента посадки

$$\begin{aligned}
 \xi &= 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\
 \varsigma &= 4(\mu^2\lambda_{,r} + \mu_{,r}(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2))(\lambda + 2\mu)^{-2} + 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}r^{-1}, \\
 \omega &= 2(2\mu^2\lambda_{,r} + \lambda^2\mu_{,r})(\lambda + 2\mu)^{-2}r^{-1} - 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}r^{-2}, \\
 \beta &= -\theta(8\mu^2\lambda_{,r} + 2(3\lambda^2 + 4\lambda\mu + 4\mu^2)\mu_{,r})(\lambda + 2\mu)^{-2} - 6K\mu\theta_{,r}(\lambda + 2\mu)^{-1} + \\
 &\quad + (4(-\lambda_{,r}\mu^2 - \mu_{,r}(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2))(\lambda + 2\mu)^{-2} - 2r^{-1}\mu)p_r + \\
 &\quad + 2(r^{-1}\mu - (2\lambda_{,r}\mu^2 + \mu_{,r}\lambda^2)(\lambda + 2\mu)^{-2})p_\varphi - \\
 &\quad - 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}p_{r,r} - 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}p_{\varphi,r}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Посадка. В момент $t = t_4$ посадки (рис. 1 д)) внутренний радиус кольца равняется внешнему радиусу круглой пластины $R_1 = R$. Материал обоих деформируется обратимо. Перемещения находятся из решения уравнения равновесия (19), при этом следует задать граничное условие равенства радиальных напряжений на границе контакта $r = R_1(t)$. Численно решается уравнение равновесия в области разгрузки (19) и в области обратимого деформирования (12).

Делая шаги по времени, замечаем, что в момент времени $t = t_5$, в материале кольца вновь теперь уже на границе сопряжения выполняется условие пластического течения Ишлинского-Ивлева $2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$. Здесь образуется упругопластическая граница $r = n_3(t)$ (рис. 1 е)), которая продвигается по материалу кольца. В области пластического течения $R_1 \leq r \leq n_3(t)$ присутствуют ранее накопленные необратимые деформации p_r, p_φ, p_z . От их значений будут развиваться новые необратимые деформации $e_r^p, e_\varphi^p, e_z^p$. В результате вышесказанного следует переписать соотношения (18)

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{r,r} - p_r - e_r^p) + 2\lambda\mu(r^{-1}u_r - p_\varphi - e_\varphi^p) - 6\mu K\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (2\lambda\mu(u_{r,r} - p_r - e_r^p) + 4\mu(\lambda + \mu)(r^{-1}u_r - p_\varphi - e_\varphi^p) - 6\mu K\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}.\end{aligned}\quad (21)$$

Необратимые деформации находятся из выполняемого условия пластического течения и следствия (14)

$$e_r^p = (u_{r,r}\mu + 1.5K\alpha\mu^{-1}(\lambda + 2\mu)k - 0.5r^{-1}u_r(3\lambda + 4\mu))(3\lambda + 5\mu)^{-1} - p_r \quad (22)$$

Уравнение равновесия (7) с учетом (20) и (21) принимает вид

$$\begin{aligned}\xi &= 12\mu K(3\lambda + 5\mu)^{-1}, \\ \varsigma &= (4(9\lambda^2 + 12\lambda\mu + 10\mu^2)\mu_{,r} + 9\mu^2\lambda_{,r})(3\lambda + 5\mu)^{-2} + \\ &\quad + 12\mu K r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1}, \\ \omega &= ((18\lambda^2 + 24\lambda\mu + 20\mu^2)\mu_{,r} + 18\mu^2\lambda_{,r})r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-2} - \\ &\quad - 3\mu K r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1}, \\ \beta &= (\theta(18(\lambda\mu_{,r} - \mu\lambda_{,r}) - 3K r^{-1}) + 12k(\lambda\mu_{,r} - \mu\lambda_{,r}))(3\lambda + 5\mu)^{-2} + \\ &\quad + (-4\mu k_{,r} - 6K\alpha_{,r})(3\lambda + 5\mu)^{-1} - 6(\lambda + 2\mu)k r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1} - \\ &\quad - ((36\lambda_{,r}\mu^2 + \mu_{,r}(36\lambda^2 + 48\lambda\mu + 40\mu^2))(3\lambda + 5\mu)^{-2})p_r - \\ &\quad - (6K r^{-1}\mu(3\lambda + 5\mu)^{-1})p_r - \\ &\quad - (3K\mu r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1})p_\varphi - \\ &\quad - ((\lambda_{,r}\mu^2 + \mu_{,r}(18\lambda^2 + 24\lambda\mu + 20\mu^2))(3\lambda + 5\mu)^{-2})p_\varphi - \\ &\quad - 12\mu K(3\lambda + 5\mu)^{-1}p_{r,r} - \mu(3\lambda + 5\mu)^{-1}p_{\varphi,r}.\end{aligned}\quad (23)$$

Напряжения и необратимые деформации находим, подставляя решение (23), полученное численно в соотношения (21) и (22).

В результате распределения температуры и последующего остывания рост необратимых деформаций замедляется, и на границе контакта образуется разгружающая упругопластическая граница $r = n_4(t)$ (рис. 1 з)), которая продвигаясь по материалу кольца, достигает в момент $t = t_7$ (рис. 1 и)) времени границу $r = n_3(t)$. Теперь материал сборки деформируется обратимо.

Остаточные напряжения. Когда температура во всем материале сборки станет равной комнатной, напряжения, перемещения и деформации далее со временем

меняться не будут, поэтому их называют остаточными. Уровень и распределение остаточных напряжений зависит от наличия необратимых деформаций в материале сборки и от начального распределения температуры во внешнем кольце. Как и необратимые деформации распределены в материале сборки, в нашем случае и начальная температура имеет свое распределение в материале кольца ($\theta(r) \neq 0$). В материале круглой пластины нет необратимых деформаций и $\theta = 0$. Что касается упругих модулей и предела текучести они принимают свои максимальные значения во всем материале и не изменяются по радиусу. Учитывая вышесказанное, подставив соотношения (11) в уравнение равновесия (7) найдем дифференциальное уравнение относительно перемещения.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) = \\ & = 1.5K (\lambda + \mu)^{-1} \theta_{,r} - 0.5 (\lambda + 2\mu) (r (\lambda + \mu))^{-1} (p_\varphi - p_r) - \\ & \quad - p_{r,r} - 0.5\lambda (\lambda + \mu)^{-1} p_{\varphi,r} \end{aligned} \quad (24)$$

Интегрируя (23) получаем соотношения для перемещений в материале пластины

$$u_r^{(1)} = 0.5rC_1^{(1)}(t) + r^{-1}C_2^{(1)}(t), \quad C_2 = 0 \quad (25)$$

и в материале кольца

$$\begin{aligned} u_r^{(2)} = & 0.25 (\lambda + \mu)^{-1} \left((\lambda + 2\mu) r \int_0^r \rho^{-1} (p_r(\rho) - p_\varphi(\rho)) d\rho \right) + \\ & + 0.25 (\lambda + \mu)^{-1} \left(3Kr^{-1} \int_0^r \rho (p_r(\rho) + p_\varphi(\rho)) d\rho \right) + \\ & 1.5K (\lambda + \mu)^{-1} \alpha (T_0 - T(r)) + 0.5rC_1^{(2)} + r^{-1}C_2^{(2)} \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя найденные перемещения в соотношения (11) запишем остаточные напряжения для пластины

$$\sigma_r^{(1)}(r) = 3\mu K w^{-1} C_1^{(1)}, \quad \sigma_\varphi^{(1)}(r) = 3\mu K w^{-1} C_1^{(1)} \quad (27)$$

для кольца

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)} = & 1.5K\mu (\lambda + \mu)^{-1} \left(\int_0^r \rho^{-1} (p_r(\rho) - p_\varphi(\rho)) d\rho \right) - \\ & - 1.5K\mu (\lambda + \mu)^{-1} \left(r^{-2} \int_0^r \rho (p_r(\rho) + p_\varphi(\rho)) d\rho \right) - \\ & - 3\mu K (\lambda + \mu)^{-1} r^{-2} \int_0^r \rho \theta(\rho) d\rho + 3\mu K w^{-1} C_1^{(2)} - 2\mu r^{-2} C_2^{(2)}, \\ \sigma_\varphi^{(2)} = & 1.5K\mu (\lambda + \mu)^{-1} \int_0^r \rho^{-1} (p_r(\rho) - p_\varphi(\rho)) d\rho + \\ & + 1.5K\mu (\lambda + \mu)^{-1} r^{-2} \int_0^r \rho (p_r(\rho) + p_\varphi(\rho)) d\rho - \\ & - 3K\mu (\lambda + \mu)^{-1} p_\varphi + 3\mu K (\lambda + \mu)^{-1} r^{-2} \int_0^r \rho \theta(\rho) d\rho + \\ & + 3\mu K w^{-1} C_1^{(2)} + 2\mu r^{-2} C_2^{(2)}. \end{aligned} \quad (28)$$

В (24) – (27) $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$ – коэффициенты интегрирования находятся из граничных условий:

$$u_r^{(1)} \Big|_{r=0} = 0, \quad \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=R_2} = 0,$$

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{r=R_1} = \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=R_1}, \quad u_r^{(1)} \Big|_{r=R_1} = u_r^{(2)} \Big|_{r=R_1}.$$

На рис. 3 показано распределение остаточных напряжений в материале сборки. Характеристики материала круглой пластины соответствуют характеристикам вышеописанного материала кольца.

Если предположить, что упругие модули достигают при высокой температуре значения, которое далее не изменяется, таким образом смоделировать фазовые переходы

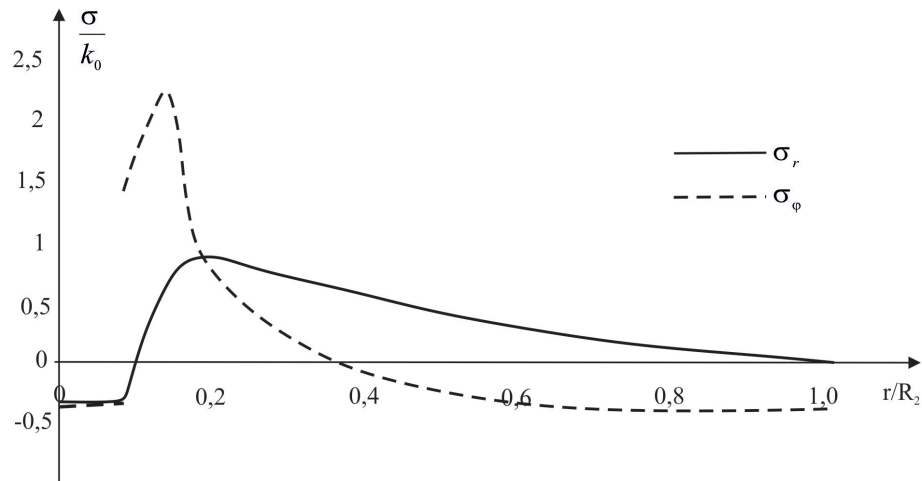


Рис. 3. Распределение остаточных напряжений в материале сборки

материала сборки, то распределение остаточных напряжений будет другим. Оно приведено на рис. 4. Если сравнить результаты вычислений приведенных на рис. 3 и рис. 4, то можно сделать вывод о том, что фазовые переходы в расчетах уменьшают уровень напряжений. Поэтому в источниках, посвященных горячей посадке рекомендовано не подвергать большим температурным воздействием охватываемую деталь.

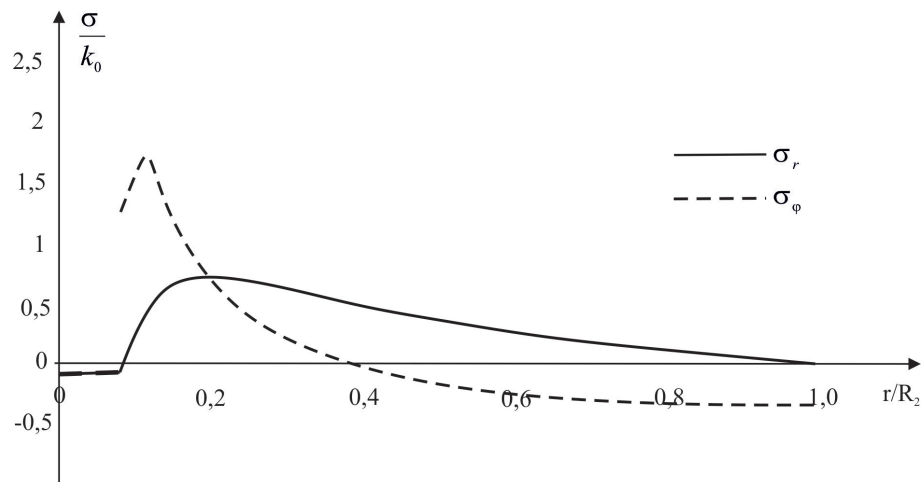


Рис. 4. Распределение остаточных напряжений в материале сборки

Работа выполнена при поддержке гранта №116/2018Д Минобрнауки Хабаровского края.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kovacs A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits. Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng. Vol. 40. №. 2. 1996. P. 103-112.

- [2] Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // *Acta Mechanica*. 1994. Vol. 103. P. 243–257.
- [3] Lippmann H. The effect of a temperature cycle on the stress distribution in a shrink fit // *Intern. J. Plast.* 1992. V. 8. P. 567–582.
- [4] Буренин А. А., Дац Е. П., Ткачева А. В. К вопросу математического моделирования процесса горячей посадки цилиндрических металлоизделий // *СибЖИМ*. 2014. Т. 17 №3. С. 40–47.
- [5] Дац Е. П., Петров М. Р., Ткачева А. В. Кусочно-линейные пластические потенциалы в задачах теории температурных напряжений о сборке горячей посадкой // *Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2015 №4(26). С. 163–179.
- [6] Дац Е. П., Ткачева А. В., Шпорт Р. В. Сборка конструкции «кольцо в кольце» способом горячей посадки // *Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2014. №4(22). С. 204–213.
- [7] Дац Е. П., Ткачева А. В. Технологические температурные напряжения в процессах горячей посадки цилиндрических тел при учете пластических течений // *ПМТФ*. 2016. Т.57 №3(337). С. 208–216.
- [8] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
- [9] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [10] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
- [11] Perzyna P., Sawezuk A. Problems of thermoplasticity. // *Nucl. Eng. Des.* 1973. Vol. 24, No. 1. P. 1–55.

M. Kaing¹, S. A. Kuznetsov², A. V. Tkacheva³

ON THE EVOLUTION OF TEMPERATURE STRESSES IN CONDITIONS OF THE DISLOCATION OF A DISK IN A HEATED ROUND PLATE

Komsomolsk - on - Amur State University, Komsomolsk - on - Amur, Russia

² *ООО Торекс - Khabarovsk, Komsomolsk - on - Amur, Russia*

Institute of Machine Science and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk - on - Amur, Russia

Abstract. Using the theory of temperature stresses, the process of hot insertion of a circular plate into a ring is simulated. In this case, the material of the ring is not heated evenly and has accumulated irreversible deformations at the time of planting. Due to the high temperature region of the ring, the dependence of the flow and elastic moduli on temperature is taken into account.

Keywords: elasticity, thermoplasticity, pipe, tube heating, residual stress condition of plasticity Ishlinskii-Ivleva

REFERENCES

- [1] Kovacs A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits. *Periodica Polytechnica*. Ser. Mech. Eng. Vol. 40. № 2. 1996. P. 103-112.
- [2] Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // *Acta Mechanica*. 1994. Vol. 103. P. 243–257.
- [3] Lippmann H. The effect of a temperature cycle on the stress distribution in a shrink fit // *Intern. J. Plast.* 1992. V. 8. P. 567–582.
- [4] Burenin A. A., Dac E. P., Tkacheva A. V. K voprosu matematicheskogo modelirovaniya processa goryachej posadki cilindricheskih metalloizdelij // *SibZHIM*. 2014. T. 17 №3. S. 40–47. (in Russian)
- [5] Dac E. P., Petrov M. R., Tkacheva A. V. Kusochno-linejnye plasticheskie potencially v zadachah teorii temperaturnyh napryazhenij o sborke goryachej posadkoj // *Vestnik CHGPU im. I.YA. YAKovleva*. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2015 №4(26). S. 163–179. (in Russian)
- [6] Dac E. P., Tkacheva A. V., SHport R. V. Sborka konstrukcii «kol'co v kol'ce» sposobom goryachej posadki // *Vestnik CHGPU im. I. YA. YAKovleva*. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2014. №4(22). S. 204–213. (in Russian)

Kaing Muat

e-mail: mail@imim.ru, Post - Graduate Student, Komsomolskii - na - Amure State University, Komsomolsk - na - Amure, Russia.

Kuznetsov Sergey Alekseevich

e-mail: mail@imim.ru, Genial Director of LLC "Torex - Khabarovsk Komsomolsk - na - Amure, Russia.

Tkacheva Anastasia Valerjevna

e-mail: 4nansi4@mail.ru, Ph. D., Research Assistant, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur, Russia.

[7] Dac E. P., Tkacheva A. V. Tekhnologicheskie temperaturnye napryazheniya v processah goryachej posadki cilindricheskikh tel pri uchete plasticheskikh techenij // PMTF. 2016. T.57 №3(337). S. 208–216. (in Russian)

[8] Ishlinskij A. YU., Ivlev D. D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: Fizmatlit, 2001. 704 s. (in Russian)

[9] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. Teoriya plastichnosti. Vladivostok: Dal'nauka, 1998. 528 s. (in Russian)

[10] Boli B., Uehjner Dzh. Teoriya temperaturnyh napryazhenij. M.: Mir, 1964. 517 s. (in Russian)

[11] Perzyna P., Sawezuk A. Problems of thermoplasticity. // Nucl. Eng. Des. 1973. Vol. 24, No. 1. P. 1–55.

Г. М. Севастьянов

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРУБЫ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Рассмотрены предельные состояния разномодульной цилиндрической трубы в момент зарождения пластического течения и в момент исчерпания несущей способности. Используются тензорно-линейная модель разномодульной теории упругости и ассоциированный с поверхностью текучести Мора – Кулона закон. В работе определены критические деформации, которые могут быть использованы при диагностике конструкций, эксплуатирующихся в условиях неизвестной внешней нагрузки.

Ключевые слова: разномодульная теория упругости, условие Мора – Кулона, предельные состояния, плоская упруго-пластическая задача.

УДК: 539.374

Геоматериалы, а также ряд конструкционных материалов (бетоны, чугуны) проявляют свойство разносопротивляемости сжатию и растяжению. Происходит это как на этапе упругого деформирования, так и в процессе необратимого изменения формы и объема. В области обратимых деформаций такое поведение среды описывается тем или иным вариантом разномодульной теории упругости (РМТУ). Этот раздел механики начал развиваться во второй половине XX века с работ Амбарцумяна, Хачатряна, Шапиро [1, 2]. Динамическим и статическим проблемам РМТУ посвящен ряд работ [3–8], в частности — [4], в которой отмечается комплексный характер распространения возмущений по среде, обладающей указанными свойствами. Наиболее простым способом описания качественных особенностей разномодульных материалов представляется использование квазилинейных теорий. Что касается пластического деформирования (или разрушения) таких материалов, то наиболее известными являются кусочно-линейное условие Мора – Кулона, а также гладкие условия Мизеса – Шлейхера и Друкера – Прагера, чувствительные к знаку среднего напряжения.

В настоящей работе будем рассматривать предельное равновесие конструкции в виде полого цилиндра, нагруженного на внешней поверхности, в момент начала пластического течения, а также предельное состояние исчерпания несущей способности такой конструкции, соответствующее полному развитию пластического течения.

© Севастьянов Г. М., 2018

Севастьянов Георгий Мамиевич

e-mail: akela.86@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМиМ ДВО РАН №007-00285-18-00.

Поступила 01.07.2018

Определяющая система уравнений сплошной среды в предположении малых деформаций включает:

– модель РМТУ

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}}, \quad W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \xi I_1 \sqrt{I_2}, \quad (1)$$

– уравнение равновесия

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

– аддитивное разделение полных деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \mathbf{p}, \quad 2\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T, \quad (3)$$

– ассоциированный с условием Мора – Кулона закон пластического течения

$$\Phi = (\sigma_1 - \sigma_3) + \vartheta (\sigma_1 + \sigma_3) - 2\kappa, \quad \mathbf{p} = \Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (4)$$

В формулах (1) – (4): $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Коши, W – упругий потенциал (использован потенциал РМТУ, предложенный в [3]), \mathbf{e} – тензор упругих деформаций с инвариантами $I_1 = \text{tr}(\mathbf{e})$, $I_2 = \text{tr}(\mathbf{e}^2)$, $\lambda, \mu, \xi > 0$ – упругие модули материала, ∇ – оператор Гамильтона, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор полных деформаций, \mathbf{p} – тензор необратимых (пластических) деформаций, \mathbf{u} – вектор перемещений, Φ – пластический потенциал, σ_1, σ_3 – собственные значения тензора напряжений (наибольшее и наименьшее по модулю соответственно), ϑ, κ – пластические константы материала, параметр κ имеет размерность напряжений, ϑ – безразмерный параметр, Λ – пластический множитель.

Будем искать две предельные величины: $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr1}$ – значение компоненты тензора деформаций на внутренней поверхности цилиндра, которое соответствует началу пластического течения, и $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr2} > \varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr1}$ – аналогичную величину, соответствующую полному развитию пластического течения и исчерпанию несущей способности конструкции. Эта величина – отношение радиального перемещения к радиусу – легко измерима и ее критические значения могут оказаться полезными при оценке прочности инженерных сооружений в геотехнике, гидротехнике и других областях.

На внутренней поверхности цилиндра отсутствуют радиальные напряжения, внешняя поверхность находится под действием некоторого давления.

Будем полагать, что точки среды испытывают чисто радиальное смещение, u_r – ненулевая компонента вектора перемещений. В этом случае все тензорные величины, входящие в определяющие соотношения (1) – (4) будут диагональными. Полагаем, что условие текучести (4) $\Phi = 0$ при нагружении впервые выполнится на внутренней свободной поверхности, как и в классической линейной теории упругости.

Модель (1) устанавливает между тензором напряжений Коши и тензором обратимых деформаций связь вида:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda I_1 \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{e} - \xi \left(\mathbf{1} \sqrt{I_2} + \mathbf{e} \frac{I_1}{\sqrt{I_2}} \right).$$

где $\mathbf{1}$ – единичный тензор.

Тогда

$$\frac{\sigma_{rr}}{e_{\varphi\varphi}} = \lambda(1 + \cot \psi) + 2\mu \cot \psi + \xi [\csc \psi + \cos \psi(1 + \cot \psi)], \quad (5)$$

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{e_{\varphi\varphi}} = \lambda(1 + \cot \psi) + 2\mu + 2\xi \cos \psi(1 + \cot \psi), \quad (6)$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{e_{\varphi\varphi}} = \lambda(1 + \cot \psi) + \xi \csc \psi,$$

$$\cot \psi = \frac{e_{rr}}{e_{\varphi\varphi}} < 0, \quad \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Отсюда следует $\sigma_{\varphi\varphi} < \sigma_{zz} < \sigma_{rr} \leq 0$, тогда в (4) $\sigma_1 = \sigma_{rr}$, $\sigma_3 = \sigma_{\varphi\varphi}$.

Появление пластической области характеризуется выполнением условия текучести (4) на границе $r = r_0$. Учитывая, что на этой поверхности $\sigma_{rr} = 0$, имеем

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r_0) = -\frac{2\kappa}{1-\vartheta}.$$

В момент наступления пластического течения значение тензора полных деформаций в точке среды совпадает со значением тензора упругих деформаций. Согласно (6)

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr1} = e_{\varphi\varphi}(r_0) = -\frac{2\kappa}{1-\vartheta} [\lambda(1 + \cot \psi_0) + 2\mu + 2\xi \cos \psi_0(1 + \cot \psi_0)]^{-1}, \quad (7)$$

где значение ψ_0 по (5) является корнем уравнения

$$\lambda(1 + \cot \psi_0) + 2\mu \cot \psi_0 + \xi [\csc \psi_0 + \cos \psi_0(1 + \cot \psi_0)] = 0. \quad (8)$$

При дальнейшем нагружении конструкции развивается пластическая область. Исчерпание несущей способности конструкции происходит в момент, когда пластическое течение возникает на внешней границе цилиндра $r = r_1$. При этом, согласно ассоциированному закону (4)

$$p_{\varphi\varphi} = -\Lambda(1 - \vartheta), \quad p_{rr} = \Lambda(1 + \vartheta) \quad (9)$$

и

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr2} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr1} + p_{\varphi\varphi}(r_0) = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr1} - (1 - \vartheta)\Lambda(r_0). \quad (10)$$

Таким образом, задача отыскания $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr2}$ сводится к указанию значения пластического множителя Λ на границе $r = r_0$ в тот момент, когда упругопластическая граница достигнет поверхности $r = r_1$.

Далее, учитывая, что компоненты тензора полных деформаций имеют вид $\varepsilon_{rr} = \partial u_r / \partial r$ и $\varepsilon_{\varphi\varphi} = u_r / r$, имеем

$$\frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial x} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad (11)$$

сделана замена $x = \ln(r/r_1)$.

Аддитивное разложение (3) полных деформаций на обратимую и необратимую составляющие $\varepsilon_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi}$, $\varepsilon_{rr} = e_{rr} + p_{rr}$ и формулы (9) позволяют записать (11) в виде

$$(1 - \vartheta) \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + 2\vartheta \Lambda = \frac{\partial e_{\varphi\varphi}}{\partial x} - e_{\varphi\varphi}(1 + \cot \psi), \quad (12)$$

здесь учтено $e_{rr} = e_{\varphi\varphi} \cot \psi$.

Тогда исходная задача сводится к интегрированию (12) с краевым условием $\Lambda|_{x=0} = 0$, так как в момент зарождения пластического течения на внешней границе цилиндра там еще отсутствуют необратимые деформации.

Представим (12) в следующем виде, сделав замену независимой переменной на монотонный параметр ψ :

$$(1 - \vartheta) \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2\vartheta \Lambda = \frac{\partial e_{\varphi\varphi}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - e_{\varphi\varphi}(1 + \cot \psi). \quad (13)$$

Для замыкания уравнения (13) необходимо знать функциональную зависимость $e_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi}(\psi)$, значение $\psi_1 = \psi|_{x=0}$, при котором $\Lambda = 0$, а также связь между $\partial \psi / \partial x$ и ψ . После интегрирования (13) требуется найти значение Λ при $\psi = \psi_0$.

Подставим выражения (5) и (6) в условие пластичности (4) $\Phi = 0$, имеем:

$$e_{\varphi\varphi} = 2\kappa \left[\frac{2\lambda\vartheta(1 + \cot \psi) - 2\mu(1 - \vartheta - (1 + \vartheta)\cot \psi) + \xi(1 + \vartheta)\csc \psi - \xi(1 - 3\vartheta)\cos \psi(1 + \cot \psi)}{1 - \vartheta} \right]^{-1}. \quad (14)$$

Значение $\psi|_{x=0}$ получим следующим образом. Рассматриваемая задача статически определима: в пластической области компоненты напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ связаны условием (4) $\Phi = 0$, откуда

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_{rr}(1 + \vartheta) - 2\kappa}{1 - \vartheta}, \quad (15)$$

и уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial x} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0$$

интегрируется с краевым условием $\sigma_{rr}|_{x=\ln(r_0/r_1)} = 0$:

$$\sigma_{rr} = \frac{\kappa}{\vartheta} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_0} e^x \right)^{\frac{2\vartheta}{1-\vartheta}} \right]. \quad (16)$$

Из (16) известна величина радиального напряжения на внешней поверхности трубы. С другой стороны, уравнения (5) и (14) позволяют выразить σ_{rr} через ψ . Тогда значение ψ на внешней поверхности трубы $\psi_1 = \psi|_{x=0}$ есть корень уравнения

$$e_{\varphi\varphi}(\psi_1) [(\lambda + \xi \cos \psi_1)(1 + \cot \psi_1) + 2\mu \cot \psi_1 + \xi \csc \psi_1] = \frac{\kappa}{\vartheta} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{\frac{2\vartheta}{1-\vartheta}} \right]. \quad (17)$$

Наконец

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial x} \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \psi} \right)^{-1} = (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}) \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \psi} \right)^{-1} = \frac{2}{1 - \vartheta} (\vartheta \sigma_{rr} - \kappa) \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \psi} \right)^{-1}. \quad (18)$$

Здесь использовано уравнение равновесия и равенство (15). Последнее соотношение с учетом (5) и (14) определяет $\partial \psi / \partial x$ как функцию ψ .

Таким образом, уравнение (13) с учетом (14) и (18) представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $\Lambda(\psi)$ с краевым условием $\Lambda(\psi_1) = 0$, где ψ_1 определяется по (17).

Нетрудно убедиться, что критические деформации могут быть представлены в виде

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr1} = -\frac{2}{1 - \vartheta} \frac{\kappa}{\xi} f_1 \left(\frac{\lambda}{\xi}, \frac{\mu}{\xi} \right),$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr1} = -\frac{2}{1 - \vartheta} \frac{\kappa}{\xi} \left[f_1 \left(\frac{\lambda}{\xi}, \frac{\mu}{\xi} \right) + f_2 \left(\frac{\lambda}{\xi}, \frac{\mu}{\xi}, \vartheta, \psi_1 \right) \right], \quad \psi_1 = \psi_1 \left(\frac{r_1}{r_0}, \vartheta \right).$$

Расчетные значения f_1 и f_2 при различных λ/ξ , μ/ξ для фиксированного значения пластического параметра $\vartheta = 1/2$ и геометрического параметра $r_1/r_0 = 2$ представлены на рисунке.

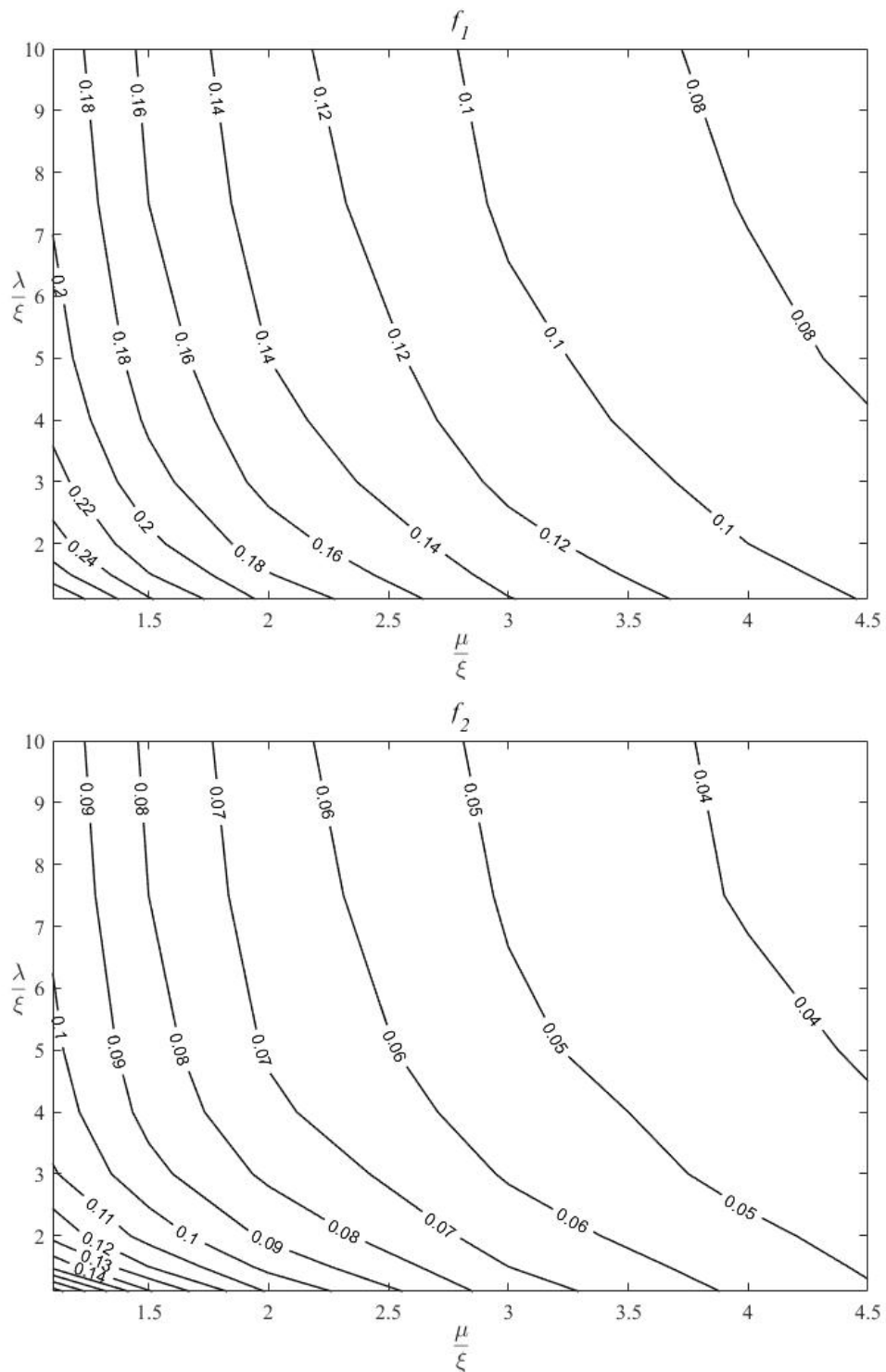


Рис. 1. К определению критических деформаций

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разнсопротивляющихся растяжению и сжатию // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. №2. С. 44–53.
- [2] Шапиро Г. С. О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. №2. С. 123–125.
- [3] Мясников В. П., Олейников А. И. Основные общие соотношения изотропно-упругой разнсопротивляющейся среды // Докл. АН СССР. 1992. Т. 332, №1. С. 57–60.
- [4] Маслов В. П., Мосолов П. П. Общая теория решения уравнений движения разномодульной упругой среды // Прикл. матем. и мех. 1985. Т. 49, вып. 3. С. 419–437.
- [5] Цвелодуб И. Ю. О разномодульной теории упругости // Прикл. мех. и техн. физ. 2008. Т. 49, №1. С. 157–164.
- [6] Буренин А. А., Ярушина В. М. К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: Сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. М.: Физматлит. 2006. С. 100–106.
- [7] Садовский В. М. Реологические модели разномодульных и сыпучих сред // Дальневост. матем. журн. 2003. Т. 4, №2. С. 252–263.
- [8] Дудко О. В., Лаптева А. А. К распространению возмущений по несжимаемой упругой среде с разномодульным сопротивлением сдвигу // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, №1. С. 21–28.

G. M. Sevastyanov

LIMIT STATES OF A BIMODULAR ELASTIC-PLASTIC PIPE

Institute of machinery and metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. The limiting states of a bimodular cylindrical tube at the moment of the initiation of plastic flow and at the moment of exhaustion of bearing capacity are considered. The tensor-linear model of the bimodular theory of elasticity and the yield condition of Mohr-Coulomb are used. The flow rule is given by an associated flow rule. The results are critical strain values, which can be used in the diagnosis of constructions operating in conditions of unknown external load.

Keywords: bimodular theory of elasticity, Mohr – Coulomb condition, limiting states, plane strain elastic-plastic problem.

REFERENCES

- [1] Ambarcumyan S. A., Hachaturyan A. A. Osnovnye uravneniya teorii uprugosti dlya materialov, raznosoprotivlyayushchihsya rastyazheniyu i szhatiyu // Inzh. zhurn. Mekhanika tverdogo tela. 1966. №2. S. 44–53. (in Russian)
- [2] SHapiro G. S. O deformatsiyah tel, obladayushchih razlichnym soprotivleniem rastyazheniyu i szhatiyu // Inzh. zhurn. Mekhanika tverdogo tela. 1966. №2. S. 123–125. (in Russian)
- [3] Myasnikov V. P., Olejnikov A. I. Osnovnye obshchie sootnosheniya izotropno-uprugoj raznosoprotivlyayushchejsya sredy // Dokl. AN SSSR. 1992. T. 332, №1. S. 57–60. (in Russian)
- [4] Maslov V. P., Mosolov P. P. Obshchaya teoriya resheniya uravnenij dvizheniya raznomodul'noj uprugoj sredy // Prikl. matem. i mekh. 1985. T. 49, vyp. 3. S. 419–437. (in Russian)
- [5] Cvelodub I. YU. O raznomodul'noj teorii uprugosti // Prikl. mekh. i tekhn. fiz. 2008. T. 49, №1. S. 157–164. (in Russian)
- [6] Burenin A. A., YArushina V. M. K modelirovaniyu deformirovaniya materialov, po-raznomu soprotivlyayushchihsya rastyazheniyu i szhatiyu // Problemy mekhaniki deformiruemykh tverdykh tel i gornyykh porod: Sb. st. k 75-letiyu E. I. SHemyakina. M.: Fizmatlit. 2006. S. 100–106. (in Russian)
- [7] Sadovskij V. M. Reologicheskie modeli raznomodul'nyh i sypuchih sred // Dal'nevost. matem. zhurn. 2003. T. 4, №2. S. 252–263. (in Russian)
- [8] Dudko O. V., Laptjeva A. A. K rasprostraneniyu vozmushchenij po neszhimaemoj uprugoj srede s raznomodul'nym soprotivleniem sdvigu // Sib. zhurn. industr. matem. 2013. T. 16, No1. S. 21–28. (in Russian)

Sevastyanov Georgiy Mamievich

e-mail: akela.86@mail.ru, Ph. D., Institute of machinery and metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Д. А. Потянихин, Е. М. Дубенко

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЗАКЛЕПОЧНОГО СОЕДИНЕНИЯ, ПОЛУЧЕННОГО С ПОМОЩЬЮ АЗОТНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ ЗАКЛЕПКИ

*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия
Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре,
Россия*

Аннотация. Рассматривается способ создания заклепочного соединения с помощью азотного охлаждения заклепок. В цилиндрическое отверстие в пластине, находящейся при комнатной температуре, помещается охлажденная до криогенной температуры заклепка. Нагреваясь до комнатной температуры, заклепка подвергается тепловому всестороннему расширению и создает посадку с натягом. Моделирование термомеханического поведения заклепочного соединения производится в конечно-элементном программном комплексе ANSYS. Решается несвязанная задача в осесимметричной постановке. На первом этапе находится распределение температуры в системе заклепка-пластина. Полученное температурное поле используется как параметр на втором этапе при решении деформационной задачи. Учитывается зависимость свойств материалов от температуры. Получены поля остаточных деформаций и остаточных напряжений в пластине и заклепке.

Ключевые слова: ANSYS, деформации, напряжения, конечно-элементное моделирование, термоупругопластичность, контактная задача, заклепочное соединение.

УДК: 539.3

Введение. Неразъемные заклепочные соединения находят широкое применение в машиностроении, в частности, в производстве летательных аппаратов. К соединениям предъявляются требования прочности, жесткости и герметичности в зависимости от их назначения, регламентируемые отраслевыми стандартами. Отверстия под заклепки в деталях получают продавливанием или сверлением. Поверхности таких отверстий

© Потянихин Д. А., Дубенко Е. М., 2018

Потянихин Дмитрий Андреевич

e-mail: potyanikhin@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Дубенко Екатерина Михайловна

e-mail: katerina.dubenko@bk.ru, студент, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМиМ ДВО РАН №007-00285-18-00

Поступила 10.08.2018

могут иметь дефекты в виде трещин, шероховатостей или острых кромок, что уменьшает герметичность и прочность соединения на срез. Одним из способов преодоления таких последствий поверхностных дефектов является горячая клепка. Стальную заклепку нагревают до 1100 °С и вставляют в отверстие соединяемых элементов. При остывании заклепка укорачивается и плотно стягивает соединяемые детали.

Однако в конструкциях из алюминиевых сплавов допускается только холодный способ клепки, при этом сплав заклепки и сплав соединяемых элементов должны быть близкими по химическому составу для предотвращения коррозии. В работе [1] предложен способ создания заклепочного соединения с помощью азотного охлаждения заклепок. В отверстия соединяемых элементов чуть меньшего диаметра, чем у заклепки, находящихся при комнатной температуре, помещают предварительно охлажденную в азоте заклепку. Нагреваясь до комнатной температуры, заклепка подвергается тепловому всестороннему расширению и создает посадку с натягом. Затем производится расклепывание обычным способом.

«Холодная» посадка в основных чертах подобна широко изученной и регламентированной горячей посадке. Однако метод горячей посадки предполагает возможность нагрева внешнего элемента сборки. При посадке заклепки в отверстие в пластине нагревать алюминиевый сплав запрещается. Поэтому натяг можно обеспечить, наоборот, охлаждением внутреннего элемента. Моделирование процесса «холодной» посадки заклепки проводилось в работе [2]. В статьях [3,4] изучалась горячая посадка кольца в кольцо. Также изучались процессы горячей посадки муфты на вал [5] и трубы на трубу [6]. В указанных работах учитывалась зависимость предела текучести от температуры.

В настоящем исследовании представлены результаты моделирования теплового расширения предварительно охлажденной в азоте заклепки, помещенной в отверстие пластины в конечно-элементном пакете ANSYS. Считается, что поверхность отверстия идеально гладкая, без дефектов. В рамках данной работы при моделировании использовались заклепки 3–8–Ан.Окс с плоско-скругленными головками с компенсаторами, изготовленные по ОСТ 1 34040–79 из сплава В65 [7]. В начальный момент времени заклепка имеет температуру кипения азота. Диаметр отверстия равен диаметру охлажденной заклепки. Учитывается теплообмен с окружающей средой. Материал пластины В65. Учитывается зависимость параметров материала от температуры.

Решение задачи производилось в два этапа в расчетной платформе конечно-элементного анализа ANSYS Workbench. Длительность процесса задавалась равной 5 с. Этого времени практически достаточно для установления теплового равновесия материала с окружающей средой. На первом этапе в модуле Transient Thermal решалась нестационарная температурная задача в системе заклепка–пластина с начальными и граничными температурными условиями. Результатом вычислений является нестационарное распределение поля температуры. Это температурное поле передавалось в качестве параметра в модуль нестационарного прочностного расчета Transient Structural.

1. Математическая модель и граничные в задаче о распределении температуры. На рис. 1 представлена геометрическая модель заклепки 3–8–Ан.Окс–ОСТ 1 34040-79 [7] (тело *I*) и пластины (тело *II*), выполненная в САД-редакторе ANSYS

DesignModeler. Заклепка и пластина считаются выполненными из алюминиевого сплава В65 [8]. Для решения задачи в осесимметричной постановке достаточно рассмотреть половину осевого сечения, ось заклепки AB является осью симметрии задачи. Толщина пластины 3 мм, диаметр 23 мм.

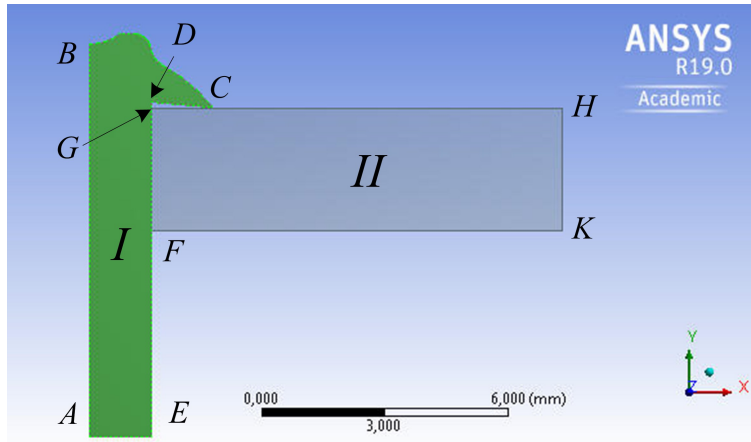


Рис. 1. Геометрическая модель системы «заклепка-пластина»

Внутри материала распределение температуры T описывается уравнением

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = (\lambda T_{,j})_{,j}, \quad (1)$$

где t – время. Плотность ρ , удельная теплоемкость c и коэффициент теплопроводности λ зависят от температуры. По повторяющемуся индексу здесь и далее производится суммирование.

В начальный момент времени заклепку, охлажденную до температуры $T_0^I = -196^\circ\text{C}$, помещают в цилиндрическое отверстие диаметром 3 мм в пластине, находящейся при комнатной температуре $T_0^{II} = T^e = 22^\circ\text{C}$. Предполагается, что диаметры заклепки и отверстия совпадают, и тела вступают в тепловой контакт. Такое предположение не противоречит реальности, потому что стандарт предполагает наличие отклонения диаметра заклепки до 0,04 мм в большую сторону. Значит, при криогенных температурах диаметры заклепки и отверстия действительно будут равны. В силу симметрии задачи граница AB рассматривается как теплоизолированная:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{AB} = 0. \quad (2)$$

Контактными поверхностями считаются ломаные линии $CDGF$ со стороны заклепки и CGF со стороны пластины. Теплообмен происходит по закону Ньютона-Рихмана:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{II} = \varkappa (T^{II} - T^I). \quad (3)$$

На всех оставшихся поверхностях теплоотдача также заданы условия третьего рода:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{I,II} = \varkappa_e (T^{I,II} - T^e). \quad (4)$$

В граничных условиях (3) и (4) κ – коэффициент теплопередачи на контактной поверхности, κ_e – коэффициент теплоотдачи с поверхности тела в окружающую среду, T^I и T^{II} – температура заклепки и пластины на соответствующей контактной границе в текущий момент времени.

Решая уравнение (1) с граничными условиями (2)–(4) методом конечных элементов в модуле нестационарного теплового анализа ANSYS Transient Thermal, получаем распределение поля температуры в зависимости от времени. При решении температурной задачи температурные деформации не учитываются и условия контакта сохраняются.

2. Математическая модель и граничные условия в задаче о распределении напряжений и деформаций. При решении задачи о распределении параметров напряженно-деформированного состояния в модуле ANSYS Transient Structural для разделения полных деформаций на обратимую и необратимую составляющие используется алгебраическое соотношение

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (5)$$

Упругие деформации связаны с напряжениями законом Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{ij}^e + \left(\frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon_{kk}^e - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha_T (T - T_0) \right) \delta_{ij}. \quad (6)$$

Здесь σ_{ij} и ε_{ij}^e – компоненты тензоров напряжений и обратимых деформаций, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, α_T – коэффициент линейного температурного расширения, δ_{ij} – символ Кронекера. Константы материала зависят от температуры. Температурные деформации считаются равными нулю при температуре $T_0 = 22^\circ\text{C}$. Критерием появления пластических деформаций выбрано условие текучести Мизеса, которое в главных осях имеет вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2, \quad (7)$$

где σ_T – предел текучести материала при одноосном напряженном состоянии, также зависящий от температуры. Для описания напряженно-деформированного состояния заклепки и пластины используется идеальная упруго-пластическая модель без упрочнения.

На рис. 2 приведена двумерная конечно-элементная сетка. Пластина составлена из 1340 плоских прямоугольных 8-узловых элементов PLANE183 с промежуточными узлами [9]. Каждый узел сеточной модели имеет две степени свободы (перемещения в направлении осей X и Y). Плоскость элемента PLANE183 не искривляется, а сам он применим для моделирования осесимметричных напряжений, поддерживает большие перемещения и большие деформации. Область заклепки состоит из 693 прямоугольных 8-узловых и треугольных 6-узловых элементов PLANE183.

В отличие от тепловой задачи, в механической задаче задается единственная контактная поверхность AB . Как будет видно из анализа решения, этот шаг абсолютно оправдан, так как при тепловом расширении головка заклепки отдалается от поверхности пластины. На общей границе задан коэффициент сухого трения 0,1. Контактная и целевая поверхности моделируются с применением контактных элементов CONTACT172 и TARGET169, соответственно, по 40 элементов каждого типа. Контакт учитывает поведение обоих тел как упругопластических.

На оси симметрии заклепки задан запрет радиальных перемещений (в направлении оси X). В точке K осевого сечения пластины (рис. 1) запрещены аксиальные перемещения (в направлении оси Y), что соответствует физической постановке задачи, при

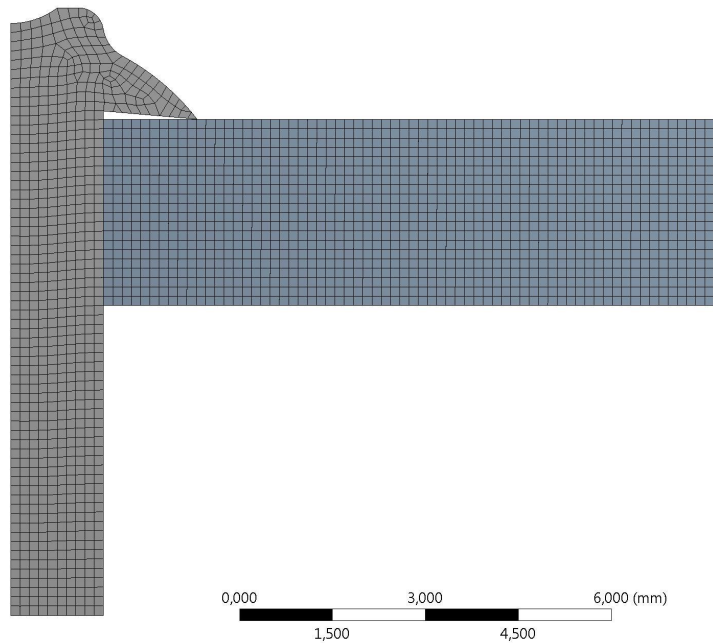


Рис. 2. Сеточная модель системы «заклепка-пластина»

которой пластина лежит на ровной поверхности, опираясь на нее нижним ребром. Таким образом, единственной причиной возникающих напряжений и деформаций является температурное расширение заклепки.

Результаты расчетов. В табл. 1 приведены значения теплофизических и механических коэффициентов сплава В65 в зависимости от температуры, которые использовались для вычислений [8,10,11]. Между крайними значениями они изменяются по линейному закону. Из-за недостатка информации о свойствах сплава В65 некоторые значения взяты из справочников для сплава Д16Т, также широко используемого в авиастроении.

Параметр	Температура, °С	
	-196	22
Модуль Юнга E , ГПа	51	44
Коэффициент Пуассона ν	0,33	0,31
Предел текучести, МПа	420	290
Плотность ρ , кг/м ³	2850	2800
Коэффициент температурного расширения α_T , °С ⁻¹	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$2,28 \cdot 10^{-5}$
Коэффициент теплопроводности λ , Вт/(м · °С)	61	120
Удельная теплоемкость c , Дж/(кг · °С)	376	755
Коэффициент теплопередачи κ , Вт/(м ² · °С)	10000	
Коэффициент теплоотдачи \varkappa , Вт/(м ² · °С)	1000	

Таблица 4. Механические и теплофизические свойства материалов

На рис. 3 показано распределение поля температуры в моменты времени 0,1 с, 0,5 с, 2 с и 5 с после возникновения теплового контакта. Видно, что температура в системе выравнивается достаточно быстро. Процесс деформирования рассматривается на протяжении 5 секунд. Этому моменту времени соответствуют все представленные ниже графики и изополя остаточных напряжений и деформаций.

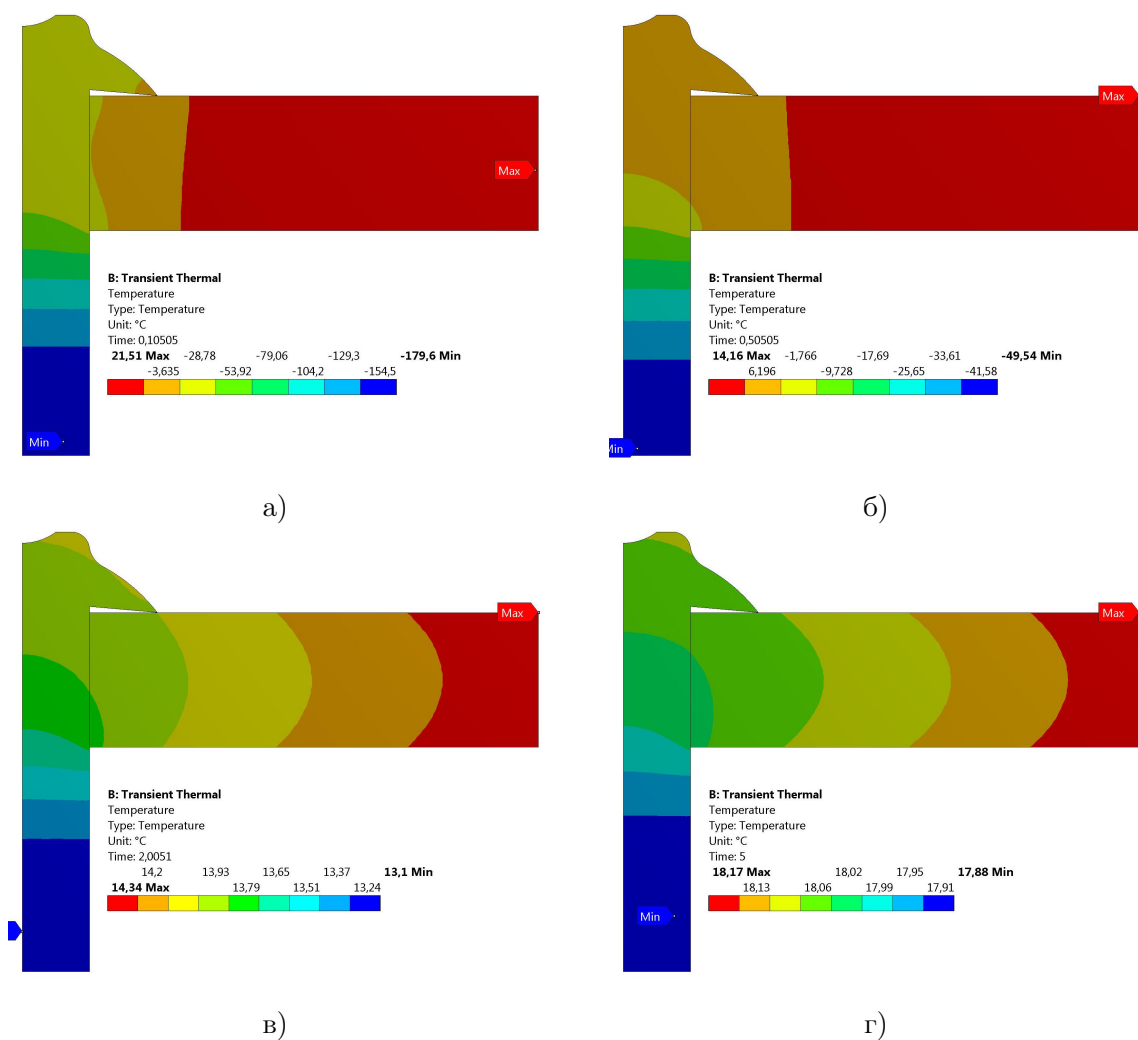


Рис. 3. Распределение температуры в моменты времени 0,1 с (а); 0,5 с (б); 2 с (в); 5 с (г).

На рис. 4 показано изменение температуры в зависимости от радиальной координаты в срединной поверхности пластины и соответствующем сечении заклепки на временном промежутке от 0,01 до 1 секунды.

Рис. 5 иллюстрирует поле остаточных эквивалентных упругих деформаций (по Мизесу)

$$\epsilon_{\text{ЭКВ}}^e = \frac{1}{1 + \nu} \left(\frac{(\epsilon_1^e - \epsilon_2^e)^2 + (\epsilon_2^e - \epsilon_3^e)^2 + (\epsilon_3^e - \epsilon_1^e)^2}{2} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

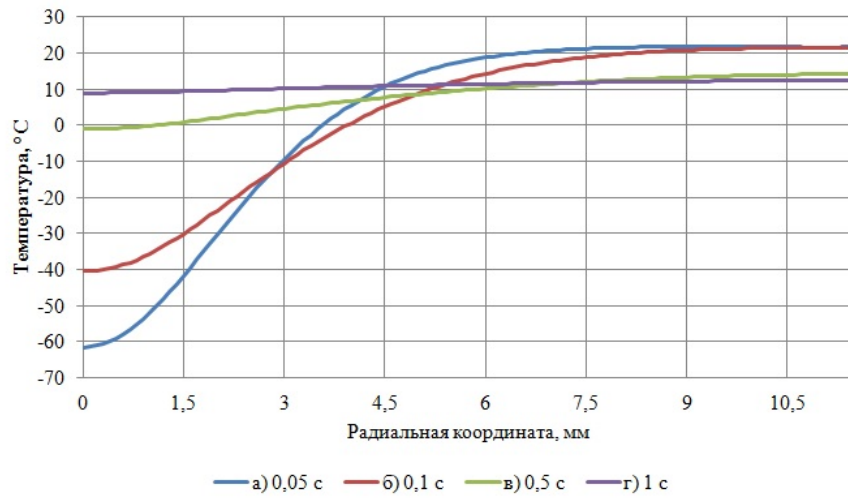


Рис. 4. Распределение температуры в заклепке и пластине на уровне срединной поверхности после установления теплового контакта: а) через 0,01 с; б) через 0,1 с; в) через 0,5 с; г) через 1 с.

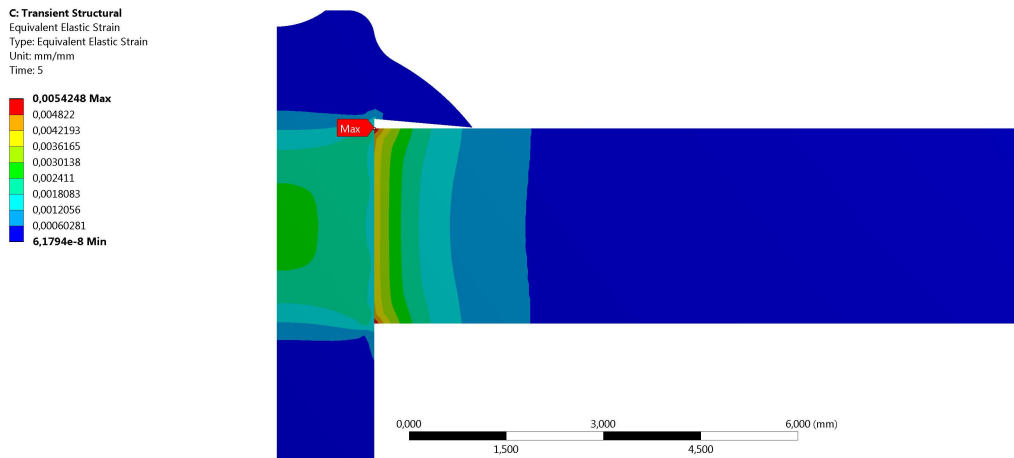


Рис. 5. Остаточные деформации (эквивалентные по Мизесу)

Пластические деформации в системе при заданных параметрах не возникают. На рис. 6 показано распределение остаточных эквивалентных напряжений (по Мизесу)

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \left(\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

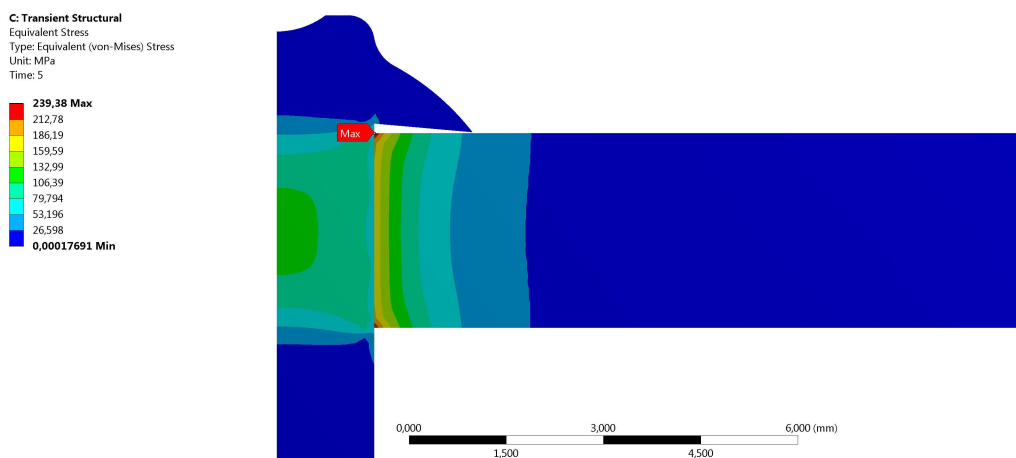


Рис. 6. Остаточные напряжения (эквивалентные по Мизесу)

На рис. 7 приведены графики радиальных перемещений заклепки и пластины для аксиальных координат, соответствующих верхней, нижней и срединной поверхностям пластины. По горизонтальной оси отложена радиальная координата в недеформированном состоянии. Графики перемещений нижней и верхней поверхностей практически не отличаются друг от друга. На границе двух тел графики имеют излом, свободная граница вследствие общего охлаждения тела смещается в отрицательном направлении.

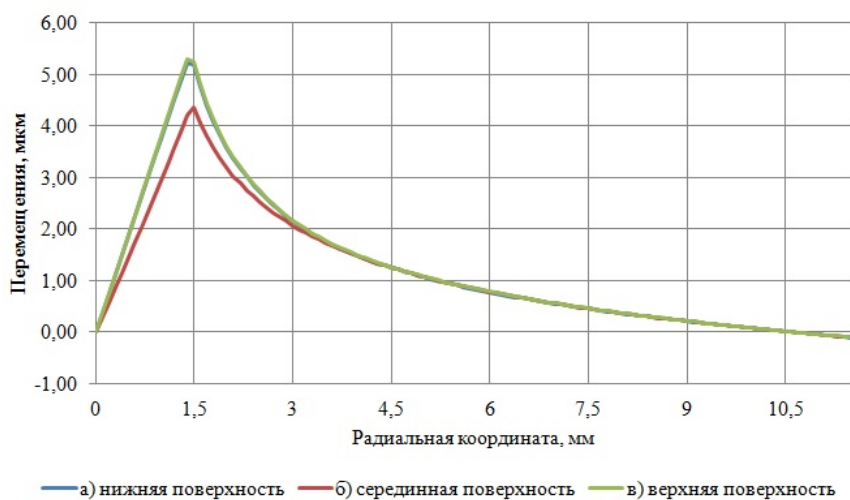


Рис. 7. Радиальные перемещения точек заклепки и пластины для аксиальных координат, соответствующих: а) нижней поверхности; б) верхней поверхности; в) срединной поверхности пластины.

Заключение. Методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS решена термомеханическая контактная задача о тепловом расширении предварительно

охлажденной заклепки, помещенной в цилиндрическое отверстие в пластине, находящейся при комнатной температуре. Постановка задачи максимально приближена к реальности, учитывается теплообмен металлических деталей с окружающей средой, а также зависимость теплофизических и механических параметров материала от температуры. Найдено нестационарное поле температуры, поля остаточных деформаций и остаточных напряжений в пластине и заклепке. Несмотря на то, что в постановке задачи предполагалось возникновение пластических деформаций в материале взаимодействующих тел, уровень возникающих напряжений оказался недостаточным для их появления. Остаточные напряжения и деформации в системе заклепка–пластина обеспечивают посадку с натягом, следовательно, соединение герметично. Значит, рассмотренный способ может оказаться полезным в технологической практике. Однако самым главным его недостатком является очень большая скорость теплообмена металлических деталей с окружающим воздухом. Следовательно, время между извлечением заклепки из жидкого азота и установкой в отверстие должно быть минимальным.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Патент 1718440 СССР, МПК В 21 J 15/02. Способ клепки заклепками с компенсатором / В. Д. Аксютин, Л. Г. Гладышева, Д. В. Плауцин; заявитель и патентообладатель Самарский филиал науч.-исслед. ин-та технологии и организации производства двигателей. № 4788888/27; заявл. 06.02.1990; опубл. 30.10.1994. 3 с.
- [2] Ткачева А. В., Соснин А. А. Математическое моделирование горячей посадки заклепки в отверстия // *Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций: материалы II Дальневосточной школы-семинара, Комсомольск-на-Амуре, 11-15 сент. 2017 г.* / редкол. : А. И. Евстигнеев (отв. ред.) и др. Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВО «КнАГТУ», 2017. С. 79–81.
- [3] Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally loaded shrink fit // *Acta Mech.* 1994. Vol. 103(1-4). P. 243–257.
- [4] Kovacs A. Residual stresses in thermally loaded shrink fits // *Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng.* 1996. Vol. 40, №2. P. 103–112.
- [5] Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. К расчету неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2017. Т. 10. №5. С. 245–259.
- [6] Дац Е. П., Ткачева А. В. Технологические температурные напряжения в процессах горячей посадки цилиндрических тел при учете пластических течений // *ПМТФ.* 2016. Т. 57. №3. С. 208–216.
- [7] ОСТ 1 34040-79. Заклепки с плоско-скругленной головкой с компенсатором.
- [8] Промышленные алюминиевые сплавы : *Справочник* / С. Г. Алиева, М. Б. Альтман, С. М. Амбарцумян и др.; Справочник; Отв. редакторы Ф. И. Квасов, И. Н. Фридляндер. 2-е изд., перераб. и доп. М. :Металлургия, 1984. 527 с.
- [9] Каплун А. Б., Морозов Е. М., Олферьева М. А. ANSYS в руках инженера: практическое руководство. М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 272 с.
- [10] Таблицы физических величин: справочник / под ред. И. К. Кикоина. М. : АТОМИЗДАТ, 1976. 1100 с.

[11] Физические величины: справочник / под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М. : ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ, 1991. 1232 с.

D. A. Potianikhin, E. M. Dubenko

CALCULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF A RIVET JOINT OBTAINED WITH NITROGEN COOLING OF A RIVET

Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Abstract. A method for creating a rivet connection using nitrogen cooling rivets is considered. A rivet cooled to a cryogenic temperature is placed in a cylindrical hole in a plate located at room temperature. During heating to room temperature, the rivet undergoes thermal expansion and creates a tight fit. Simulation of the thermomechanical behavior of a riveted joint is performed in the ANSYS finite-element software package. The uncoupled problem is solved in the axisymmetric formulation. At the first stage, the temperature distribution in the rivet-plate system is found. The obtained temperature field is used as a parameter in the second stage when deformation problem is solved. The dependence of the properties of materials on temperature is taken into account. The fields of residual deformations and residual stresses in the plate and rivet were obtained.

Keywords: ANSYS, deformations, stresses, finite element simulation, thermo-elastoplasticity, contact problem, rivet joint.

REFERENCES

[1] Patent 1718440 SSSR, MPK B 21 J 15/02. Sposob kleпки zaklepkami s kompensatorom / V. D. Aksyutin, L. G. Gladysheva, D. V. Plaucin; zayavitel' i patentoobladatel' Samarskij filial nauch.-issled. in-ta tekhnologii i organizacii proizvodstva dvigatelej. № 4788888/27; zayavl. 06.02.1990; opubl. 30.10.1994. 3 s. (in Russian)

[2] Tkacheva A. V., Sosnin A. A. Matematicheskoe modelirovanie goryachej posadki zakleпки v otverstiya // Fundamental'naya mekhanika v kachestve osnovy sovershenstvovaniya promyshlennyh tekhnologij, tekhnicheskikh ustrojstv i konstrukcij: materialy II Dal'nevostochnoj shkoly-seminara, Komsomol'sk-na-Amure, 11-15 sent. 2017 g. / redkol. : A. I. Evstigneev (otv. red.) i dr. Komsomol'sk-na-Amure : FGBOU VO «KnAGTU», 2017. S. 79–81. (in Russian)

[3] Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally loaded shrink fit // Acta Mech. 1994. Vol. 103(1-4). P. 243–257.

[4] Kovacs A. Residual stresses in thermally loaded shrink fits // Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng. 1996. Vol. 40, №2. P. 103–112.

Potianikhin Dmitrii Andreevich

e-mail: potyanikhin@mail.ru, Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Dubenko Ekaterina Mikhailovna

e-mail: katerina.dubenko@bk.ru, Master Student, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

[5] Burenin A. A., Tkacheva A. V., SHCHerbatyuk G. A. K raschetu neustanovivshihnya temperaturnyh napryazhenij v uprugoplasticheskikh telah // Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred. 2017. T. 10. №5. С. 245–259. (in Russian)

[6] Dac E. P., Tkacheva A. V. Tekhnologicheskie temperaturnye napryazheniya v processah goryachej posadki cilindricheskikh tel pri uchete plasticheskikh techenij // PMTF. 2016. T. 57. №3. С. 208–216. (in Russian)

[7] OST 1 34040-79. Zaklepki s plosko-skruglennoj golovkoj s kompensatorom. (in Russian)

[8] Alieva S. G. , Al'tman M. B., Ambarcumyan S. M. i dr. Promyshlennye alyuminievye splavy : Spravochnik; Otv. redaktory F. I. Kvasov, I. N. Fridlyander. 2-e izd., pererab. i dop. M. : Metallurgiya, 1984. 527 s. (in Russian)

[9] Kaplun A. B., Morozov E. M., Olfer'eva M. A. ANSYS v rukah inzhenera: prakticheskoe rukovodstvo. M. : Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2009. 272 s. (in Russian)

[10] Tablicy fizicheskikh velichin: spravochnik / pod red. I. K. Kikoina. M. : ATOMIZDAT, 1976. 1100 s. (in Russian)

[11] Fizicheskie velichiny: spravochnik / pod red. I. S. Grigor'eva, E. Z. Mejlihova. M. : EHNERGOATOMIZDAT, 1991. 1232 s. (in Russian)

В. М. Козин, Д. Ю. Кипин

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАВИСИМОСТИ ВЫСОТЫ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ ИХ РАСПРОСТРАНЕНИИ В СТОРОНУ БЕРЕГА ОТ УГЛА НАКЛОНА ДНА

*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия
Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет,
г. Комсомольск-на-Амуре, Россия*

Аннотация. В работе представлены результаты экспериментальных исследований зависимости высоты изгибно-гравитационных волн, возбуждаемых движущейся в сторону берега нагрузкой в ледяном покрове, от угла наклона дна. Приведены рекомендации по использованию угла наклона дна для повышения эффективности разрушения льда.

Ключевые слова: изгибно-гравитационные волны, высота волн, разрушение, резонансная скорость, наклон дна, движущееся нагрузка, моделирование.

УДК: 532.526.2

Важное значение для нашей страны имеют решения таких проблем, как: борьба с ледовыми осложнениями в виде заторов и зажоров на реках, текущих с юга на север; продление навигации на внутренних водных путях и пр. Использование для этих целей разработанного резонансного метода разрушения ледяного покрова (РМРЛ) [6] позволит снизить энергозатраты при их осуществлении. Его сущность заключается в следующем. При движении по льду нагрузки в последнем развивается система изгибно-гравитационных волн (ИГВ). Если скорость движения нагрузки близка к минимальной фазовой скорости этих волн, то возникает изгибно-гравитационный резонанс [6,7], т.е. амплитуда колебаний ледяного покрова резко возрастает вследствие того, что вода перестаёт поддерживать ледяной покров и лёд при определённых параметрах нагрузки начинает разрушаться с большей эффективностью по сравнению с существующими средствами и традиционными технологиями [5].

У нас в стране с явлением резонансного разрушения льда впервые столкнулись водители на Ладужской трассе "Дорога жизни", когда автомашины на резонансных

© Козин В. М., Кипин Д. Ю., 2018

Козин Виктор Михайлович

e-mail: kozinvictor@rambler.ru, доктор технических наук, профессор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Кипин Денис Юрьевич

e-mail: kipindenis@gmail.com, старший преподаватель, Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.



Рис. 1. Разрушение льда СВП "Скат" при выходе на берег

скоростях [6] проваливались под лёд. При этом прочность льда не вызывала сомнений, т.к. рядом с образовавшейся майной с меньшими скоростями проходили более загруженные машины. Позже сотрудниками Арктического и Антарктического научно-исследовательского института высказывалось предположение о возможности использования судов на воздушной подушке (СВП) для реализации РМРЛ после испытаний в 1962 г. СВП "Сормович" на Волге. Появление значительных деформаций льда при движении по нему нагрузки отмечалось и в процессе испытаний первых отечественных СВП проф. В.И. Левкова в 1932 г. [2]. Аналогичные наблюдения отмечались и в 1924 г. при эксплуатации ледяных железнодорожных переправ [1]. Однако, этим фактам не придавалось значения и работы в этом направлении не проводились. Поэтому до недавнего времени исследования резонансного увеличения амплитуд колебаний льда и разрушения вследствие этого ледяного покрова проводились с точки зрения их нежелательности [3].

С другой стороны, если использовать явление резкого возрастания амплитуд колебаний льда при движении нагрузок с определённой (резонансной) скоростью, то можно существенно снизить энергозатраты на разрушение ледяного покрова по сравнению с ледоколами и ледокольными приставками РМРЛ может осуществляться любым транспортным средством, обладающим способностью перемещаться по ледяному покрову с достаточной скоростью и возбуждающим ИГВ необходимой для разрушения льда амплитудой. С точки зрения эффективного использования и безопасности эксплуатации при реализации РМРЛ наиболее пригодны амфибийные СВП, ледоразрушающие качества которых исследовались в натуральных условиях. При этом во время проведения испытаний СВП "Скат" на реке Амур (1984 — 1987гг.) было обнаружено, что в случаях, когда ледяной покров не удавалось разрушить при движении судна с резонансной скоростью (вес судна был недостаточен для данной толщины льда), то кромка льда легко разрушалась при выходе судна на берег (рис. 1). Очевидно, что это связано с трансформацией параметров ИГВ при выходе на мелководье и с



Рис. 2. Проходы СВП вдоль береговой линии

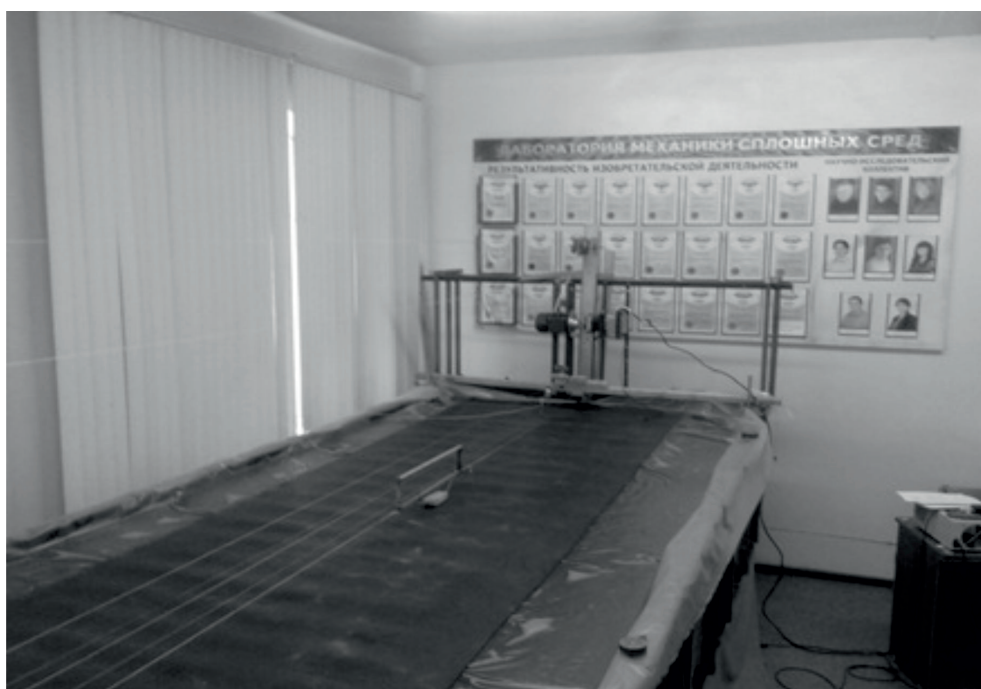


Рис. 3. Опытный бассейн лаборатории механики сплошных сред

их взаимодействием с отражёнными от берега волнами. После чего полоса разрушенного вдоль берега ледяного покрова расширялась за счёт последующих проходов СВП вдоль неё с резонансной скоростью, т.к. наличие свободной кромки значительно

уменьшает несущую способность ледяного покрова. Таким образом, лёд разрушался на большой площади (рис. 2).

Этот факт послужил основанием для более детальных исследований с целью изучения возможностей повышения эффективности РМРЛ за счёт использования подобных условий и вышеописанного маневрирования СВП.

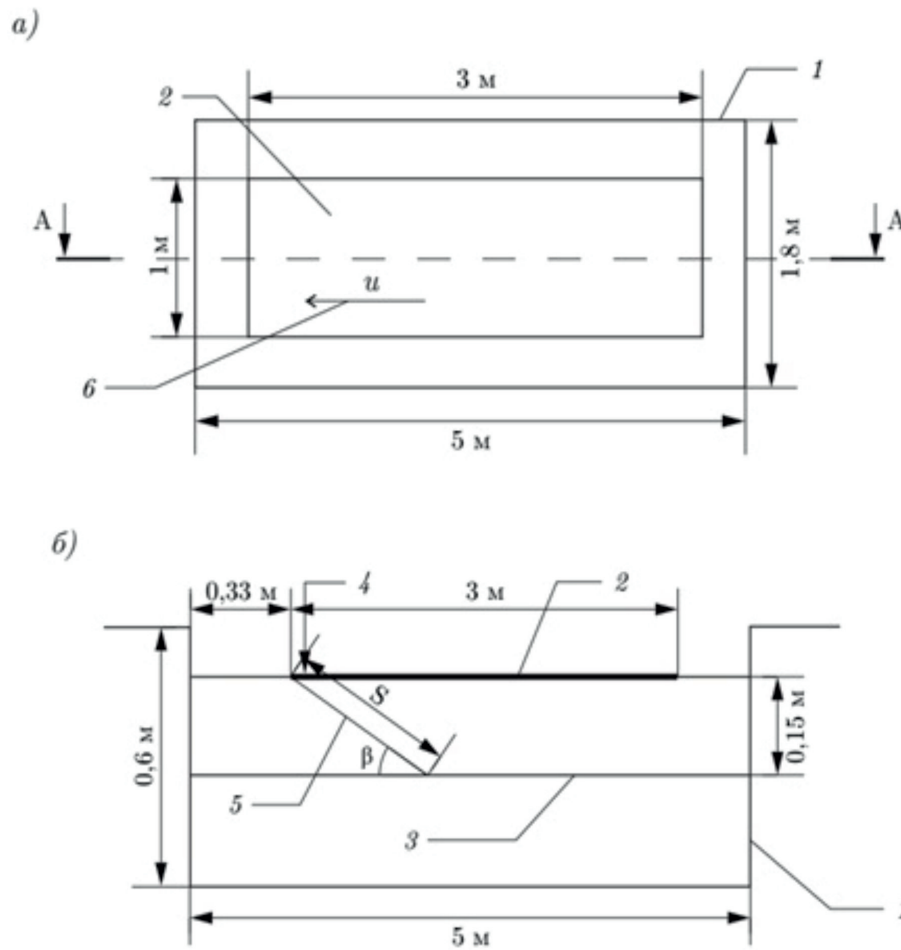


Рис. 4. Схема установки: а) — вид сверху, б) — сечение по А-А: 1 — чаша бассейна; 2 — модельный лёд; 3 — подвесное дно; 4 — место установки датчика; 5 — наклонное дно; 6 — направление движения нагрузки

Эксперименты проводились в опытовом бассейне ($L \times B \times H = 5,0 \times 1,9 \times 0,7$ м) лаборатории механики сплошных сред ФГБОУ ВО "Амурского гуманитарно-педагогического государственного университета" и в соответствии с известной методикой моделирования ИГВ в ледяном покрове [4].

Моделирование ледяного покрова осуществлялось с использованием модели неразрушаемого льда. В качестве модельного льда применялась листовая резина толщиной 2 мм, наиболее удовлетворяющая геометрическому масштабу и физико-механическим

характеристикам модельного материала. Значение модуля упругости резины определялось путем испытаний образцов материала на растяжение при различных скоростях нагружения на специальном стенде. Его среднее значение составило 6 МПа, что обеспечивало проведение модельных экспериментов в масштабе 1:500, т.е. в опытах моделировался ледяной покров толщиной 1 м. ИГВ возбуждались движущейся за счет буксировочной системы бассейна нагрузкой (моделью) массой 75,7 г и площадью основания 39,39 см² (рис. 3).

Исследования проводились при различных углах наклона дна β (10°, 20°, 30°) и при глубине акватории $H = 30$ м (после пересчёта на натуру). Наклонность дна моделировалась по схеме, представленной на рис. 4, где S — длина наклонного дна. Для 30° S составляла 0,3 м, для 20° — 0,44 м, для 10° — 0,86 м.

В процессе проведения экспериментов были получены зависимости относительной высоты ИГВ \bar{A} (где $\bar{A} = \frac{A}{\omega_p}$; A — высота волны; ω_p — статический прогиб модельного льда под нагрузкой) от относительных скоростей нагрузки χ (где $\chi = \frac{u}{\sqrt{gH}}$; u — скорость нагрузки; g — ускорение свободного падения) при различных углах наклона дна (рис. 5).

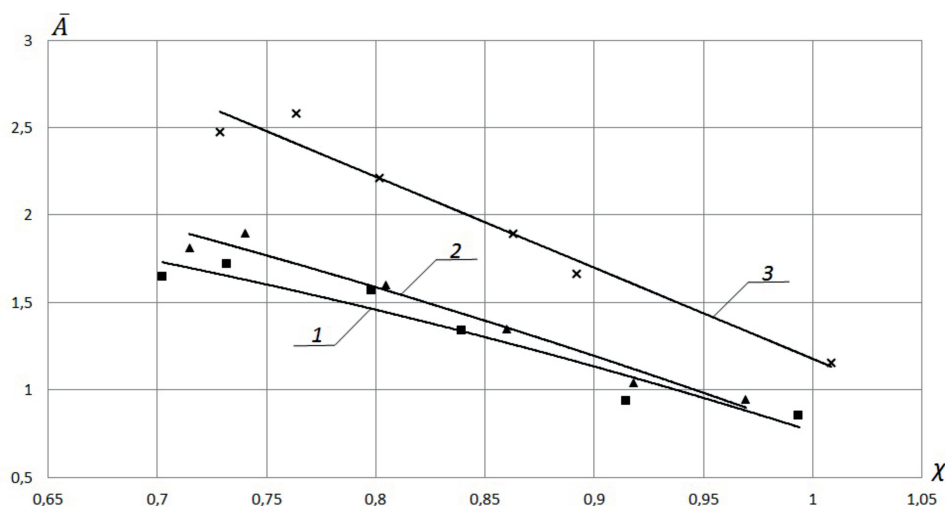


Рис. 5. Зависимость относительной высоты волны от относительной скорости движения нагрузки при различных углах наклона дна ($H = 30$ м), β , град: 1 (■) — $\beta = 10^\circ$; 2 (▲) — $\beta = 20^\circ$; 3 (×) — $\beta = 30^\circ$

На рис. 5 приведена зависимость высоты волны от скорости движения нагрузки при различных углах наклона дна. Как видно из графика, в области низких скоростей РМРЛ при выходе нагрузки на берег наиболее эффективен. При увеличении скорости нагрузки высота ИГВ начинает снижаться по сравнению с движением нагрузки без выхода на берег. Максимальная высота ИГВ наблюдается при угле наклона дна 30°. Уменьшение наклона дна ведёт к уменьшению высоты ИГВ.

Таким образом, для увеличения возможностей РМРЛ (в случаях, когда имеющееся СВП не способно разрушить ледяной покров при его движении с резонансной скоростью) следует найти участок акватории с крутым, но одновременно безопасным для

выхода СВП со льда, берегом. Затем на разных скоростях, близких к резонансным для средней глубины водоема на данном участке, сделать несколько выходов СВП на берег под прямым углом к береговой линии. Если масса СВП и давление в воздушной подушке окажутся достаточными для разрушения примерзшей к берегу кромки льда, то затем следует начинать движение по образовавшейся кромке льда с резонансной для соответствующих глубин скоростью. В результате за счет использования рельефа дна будет разрушен более толстый лёд т.е. повышена эффективность РМРЛ.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бернштейн С. А. Ледяная железнодорожная переправа (работа, теория и расчёт ледяного слоя) / Сборник НКПС, 1929. № 18. 42 с.
- [2] Жёсткая В. Д. Исследования возможностей разрушения ледяного покрова амфибийными судами на воздушной подушке резонансным методом. Владивосток : Дальнаука, 2003. 16 с.
- [3] Зуев В. А. Средства продления навигации на внутренних водных путях. Ленинград : Судостроение, 1986. 148 с.
- [4] Козин В. М. Моделирование изгибно-гравитационных волн в сплошном ледяном покрове // Теория и прочность ледокольного корабля. 1982. № 3. С.35–38.
- [5] Козин В. М. и др. Ледоразрушающая способность изгибно-гравитационных волн от движения объектов. Владивосток : Дальнаука, 2005. 191 с.
- [6] Козин В. М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова: Изобретения и эксперименты. Москва : Академия естествознания, 2007. 355 с.
- [7] Марченко А. Изгибно-гравитационные волны // Динамика волн на поверхности жидкости. 1999. С.65–111.

V. M. Kozin, D. Yu. Kipin

EXPERIMENTAL RESEARCH OF FLEXURAL AND GRAVITATIONAL WAVES

*Institute of Machinery and Metallurgy of Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences,
Komsomolsk-on-Amur, Russia*

Amur State University of Humanities and Pedagogy, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. The paper presents the results of experimental studies of the dependence of the height of flexural-gravity waves, excited by a load moving in the direction of the coast in the ice cover, on the angle of inclination bottom. Recommendations are given on the use of the angle of inclination of the bottom to improve the efficiency of ice destruction.

Keywords: flexural-gravitational waves, wave height, destruction, resonance speed, inclination bottom, moving load, modeling.

REFERENCES

- [1] Bernshtejn S. A. Ledyanaya zheleznodorozhnaya pereprava (rabota, teoriya i raschyot ledyanogo sloya) / Sbornik NKPS, 1929. № 18. 42 s. (in Russian)
- [2] ZHyostkaya V. D. Issledovaniya vozmozhnostej razrusheniya ledyanogo pokrova amfibijny-mi sudami na vozdushnoj podushke rezonansnym metodom. Vladivostok : Dal'nauka, 2003. 16 s. (in Russian)
- [3] Zuev V. A. Sredstva prodleniya navigacii na vnutrennih vodnyh putyah. Leningrad : Sudostroenie, 1986. 148 s. (in Russian)
- [4] Kozin V. M. Modelirovanie izgibno-gravitacionnyh voln v sploshnom ledyanom pokrove // Teoriya i prochnost' ledokol'nogo korablya. 1982. № 3. S.35–38. (in Russian)
- [5] Kozin V. M. i dr. Ledorazrushayushchaya sposobnost' izgibno-gravitacionnyh voln ot dvizheniya ob"ektov. Vladivostok : Dal'nauka, 2005. 191 s. (in Russian)
- [6] Kozin V. M. Rezonansnyj metod razrusheniya ledyanogo pokrova: Izobreteniya i ehksperimenty. Moskva : Akademiya estestvoznaniya, 2007. 355 s. (in Russian)
- [7] Marchenko A. Izgibno-gravitacionnye volny // Dinamika voln na poverhnosti zhidkosti. 1999. S.65–111. (in Russian)

Kozin Viktor Mikhailovich

e-mail: kozinvictor@rambler.ru, Dr. Eng., Prof., Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia,

Kipin Denis Yuryevich

e-mail: kipinden@gmail.com, Senior Lecturer, Amur State University of Humanities and Pedagogy, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

М. М. Алиев, С. В. Шафиева, О. Н. Волкова, О. А. Шипилова

РАЗРАБОТКА КРИТЕРИЕВ ПРОЧНОСТИ ИЗОТРОПНЫХ И АРМИРОВАННЫХ ПОЛИМЕРОВ МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ

Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск, Россия

Аннотация. В статье предложена методика получения критериев прочности полимерных материалов, обладающих свойством изотропии и армированных полимеров с ярко выраженной анизотропией. Рассматривается статический критерий для изотропных материалов Х. Альтенбаха – К. Туштева, а также предложенные авторами две зависимости между инвариантами напряжений, которые представлены в виде степенных рядов. Проведена экспериментальная проверка полученных критериев для изотропных полимеров и однонаправленных углепластиков.

Ключевые слова: критерий прочности, давление гидростатическое, полимер изотропный, материал композитный армированный, углепластик однонаправленный.

УДК: 539.4

Введение. При разработке феноменологических критериев прочности, построенных на основании выдвинутых теорий, как правило, не рассматриваются процессы деформирования и разрушения, сопровождаемые структурными изменениями. Например, часто принимается, что предельное условие перехода материала из прочного состояния к разрушенному состоянию можно выразить в виде математической зависимости первого инварианта тензора напряжений I_1 и второго инварианта девиатора тензора напряжений I_{D2} в сочетании с прочностными характеристиками материала.

© М. М. Алиев, С. В. Шафиева, О. Н. Волкова, О. А. Шипилова 2018

Алиев Мехрали Мирзали оглы

e-mail: mmaliev@rambler.ru, доктор технических наук, профессор, Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск, Россия.

Шафиева Светлана Владимировна

e-mail: shafieva_sv@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск, Россия.

Волкова Ольга Николаевна

e-mail: 9172850545@mail.ru, старший преподаватель, Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск, Россия.

Шипилова Ольга Александровна

e-mail: o.shipilova@rambler.ru, кандидат технических наук, доцент, Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск, Россия.

Поступила 10.08.2018

Существует ряд материалов, для которых предельная кривая, связывающая компоненты напряжения через указанные инвариантные параметры, аппроксимируется экспоненциальной зависимостью Х. Альтенбаха – К. Туштева [1].

Как показывают расчеты [1], если зависимость между I_1 и I_{D2} линейная в виде критерия Друккера – Прагера, то погрешность для некоторых видов изотропных полимеров может достигать до 25%. Более точные результаты можно получить по параболической кривой Баландина и экспоненциальной кривой [1].

В работах [2,3] предложен метод получения критериев прочности для изотропных материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, относящихся к композитным материалам, которые имеют возможность варьироваться и интерпретироваться различными кривыми.

Линейная, параболическая и другие формы критериев Друккера – Прагера, Баландина, Шлейхера – Боткина и другие, связывающие I_1 и I_{D2} с прочностными характеристиками материалов, в дальнейшем должны проверяться экспериментально.

Статический критерий прочности для изотропных полимеров, предложенный Х. Альтенбахом и К. Туштевым [1], имеет экспоненциальную форму и две введенные прочностные характеристики. Подобный подход разработки условий текучести пластичных материалов можно встретить в работах В.В. Соколовского [4], который принимал геометрическую интерпретацию условий текучести в виде синусоидальной линии и дуги циклоиды в координатной системе максимальных касательных напряжений и полусуммы максимальных и минимальных главных нормальных напряжений.

В последние годы проводились исследования, которые показали, что гидростатическое давление существенное влияние оказывает на полимерные, чем на материалы с более прочной структурой. Работы [5,6] так же показали, что механические свойства полимерных однонаправленных композитов сильно зависят от гидростатического давления.

В работе [7] были исследованы высокопрочные однонаправленные композитные материалы при действии продольного растяжения и наложенного высокого гидростатического давления. Испытанию подвергались кольцевые образцы. Результаты экспериментов показали, что продольный модуль упругости практически не зависит от величины гидростатического давления, а прочность при растяжении в направлении армирования этих материалов возрастает с увеличением давления до некоторого уровня. При дальнейшем повышении давления прочностные характеристики материалов уменьшаются. Виды разрушения также значительно зависят от величины наложенного гидростатического давления. На основе экспериментальных данных получена зависимость прочности от величины наложенного гидростатического давления.

Свойства материалов при растяжении и сжатии в условиях высокого гидростатического давления были также исследованы в работах [8,9]. Испытывались образцы трубчатой формы, а давление к материалу передавалось через жидкость (типа керосина или масла). Был отмечен важный эффект действия гидростатического давления – высокие поперечные напряжения увеличивают поверхностное сцепление, тем самым делая композит более устойчивым к разрушению. Гидростатическое давление может также снизить влияние дефектов в композитных материалах, таких как микротрещины, поры и отслоения путем их эффективного закрытия и увеличения объема работы, необходимой для роста трещин.

Приведенный анализ показывает, что сложность проведения экспериментов, а также работы по изготовлению образцов требует теоретической разработки зависимости

прочностных характеристик от всестороннего давления, исходя из результатов простых экспериментов.

1. Метод получения критериев прочности путем разложения в ряды

Пусть критерий прочности описывается кривой экспоненциальной формы

$$B - \xi = A \left(e^{\frac{\eta}{A}} - 1 \right). \quad (1)$$

Здесь A и B – постоянные, зависящие от характеристик прочности материала;

$\eta = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$ – полярная координата в девиаторной плоскости;

$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ – длина гидростатической оси, соответствующей направлению $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$; $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ – главные напряжения.

Преобразуем (1), разложив в ряд Тейлора и взяв в рассмотрение два члена ряда. В результате получим следующее выражение

$$\eta^2 + C(\eta + \xi) = D, \quad (2)$$

где $C = 2A$; $D = 2AB$.

Если рассмотреть три члена ряда, то выражение (1) примет вид

$$\eta^3 + \frac{\sqrt{C_1}}{b_0} \eta^2 + C_1(\eta + \xi) = D_1, \quad (3)$$

где $C_1 = 6A^2$; $D_1 = 6A^2B$; $b_0 = \eta \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Если зависимость между η и ξ будет иметь вид

$$\frac{B - \xi}{A} = \arcsin \frac{\eta}{A}, \quad (4)$$

то получим следующий критерий прочности [10]

$$\eta^3 + C_1(\eta + \xi) = D_1. \quad (5)$$

Постоянные, входящие в уравнения (2), (3) и (5) можно определить из двух простых испытаний материалов: на одноосное растяжение и одноосное сжатие.

Приняв при одноосном растяжении $\sigma_1 = \sigma_p$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, при одноосном сжатии $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma_c$, получим системы уравнений для нахождения постоянных A и B :

- для выражения (2)

$$\frac{1}{d_0} \sigma_p^2 + C(b_0 + e_0) \sigma_p = D, \quad (6)$$

$$\frac{1}{d_0} \sigma_c^2 + C(b_0 + e_0) \sigma_c = D, \quad (7)$$

где $d_0 = \frac{3}{2}$; $e_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

- для выражения (3)

$$b_0^3 \sigma_p^3 + b_0 \sqrt{C_1} \sigma_p^2 + C_1(b_0 + e_0) \sigma_p = D_1; \quad (8)$$

$$b_0^3 \sigma_c^3 + b_0 \sqrt{C_1} \sigma_c^2 + C_1(b_0 + e_0) \sigma_c = D_1; \quad (9)$$

- для выражения (5)

$$a_0\sigma_p^3 + C_1(b_0 + e_0)\sigma_p = D_1; \quad (10)$$

$$a_0\sigma_c^3 + C_1(b_0 + e_0)\sigma_c = D_1; \quad (11)$$

где $a_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

Здесь σ_p – предел прочности при растяжении; σ_c – предел прочности при сжатии.

Решением систем уравнений (6)–(7), (8)–(9) и (10)–(11) получаем значения постоянных материала.

Таким же образом можно представить другие кривые, соответствующие существующим экспериментам, результаты которых могут быть заимствованы из различных источников.

2. Применения метода разложения в ряды для критерия Х. Альтенбаха – К. Туштева

Используя методику получения полиномиальных критериев [2], приведем экспоненциальный критерий Х. Альтенбаха – К. Туштева

$$\eta + (\eta + k) \exp\left(\frac{\xi}{\xi_0} - 1\right) - k = 0 \quad (12)$$

к полиномиальному виду.

Преобразовывая (12), получим

$$\ln \frac{A - \eta}{A + \eta} = \frac{\xi}{B} - 1 \quad \text{при } A > \eta,$$

где $A = k$; $B = \xi_0$ – постоянные, зависящие от характеристик прочности материала.

После разложения в ряд Тейлора и математических преобразований с двумя членами ряда, получим

$$\eta^3 + 3A^2\eta + \frac{3A^3}{2B}\xi = \frac{3}{2}A^3. \quad (13)$$

Отсюда обнаруживаем, что, в отличие от [4], параметры ξ и имеют различные коэффициенты. Если оставить только один член ряда, то выражение (13) превращается в линейный критерий Друккера – Прагера. Постоянные, входящие в (13), также можно определить из испытаний материалов на одноосное растяжение и одноосное сжатие. Из выражения (13) получим следующие уравнения для нахождения постоянных A и

$$a_0\sigma_p^3 + 3b_0A^2\sigma_p + c_0\frac{A^3}{B}\sigma_p = d_0A^3, \quad (14)$$

$$a_0\sigma_c^3 + 3b_0A^2\sigma_c + c_0\frac{A^3}{B}\sigma_c = d_0A^3, \quad (15)$$

где $c_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Проведем сравнение характеристик k и ξ_0 для изотропных полимеров (результаты экспериментов взяты в [1] из работ других исследователей [11]): ПММА (полиметилметакрилат), эпоксидного связующего, эпоксидного компаунда и полиэфирного связующего, для трех случаев представления критерия Альтенбаха – Туштева: без разложения в ряд Тейлора (12), после разложения с двумя членами ряда (13) и после

разложения с тремя членами ряда (имеет пятую степень и здесь формула не приведена). Результаты сравнения приведены в таблице 1.

Полимер	До разложения в ряд, по [1]		После разложения (2 члена ряда)		После разложения (3 члена ряда)	
	k	ξ_0	k	ξ_0	k	ξ_0
ПММА	168,75	390,39	167,03	405	168,45	393,8
Эпоксидное связующее	179,04	235,63	176,7	245	178,52	238,2
Эпоксидный компаунд	55,51	77,28	54,8	81,1	55,36	78,12
Полиэфирное связующее	96,22	195,5	95,2	203	96,05	197,1

Как видно из таблицы 1, расхождение результатов между параметрами прочности критериев с двумя и тремя членами ряда незначительно. На рисунке 1 представлены предельные кривые для полиэфирного связующего, построенные по критерию Алтенбаха–Туштева и по критерию (2). С целью сравнения кривых было рассчитано их среднеквадратичное отклонение по отношению к экспериментальным данным. Получено, что отклонение для кривой, построенной по уравнению (2), составляет 4,76%, по уравнению (12) – 5,65%, по уравнению (13) – 6,25% и с тремя членами ряда – 4,59%.

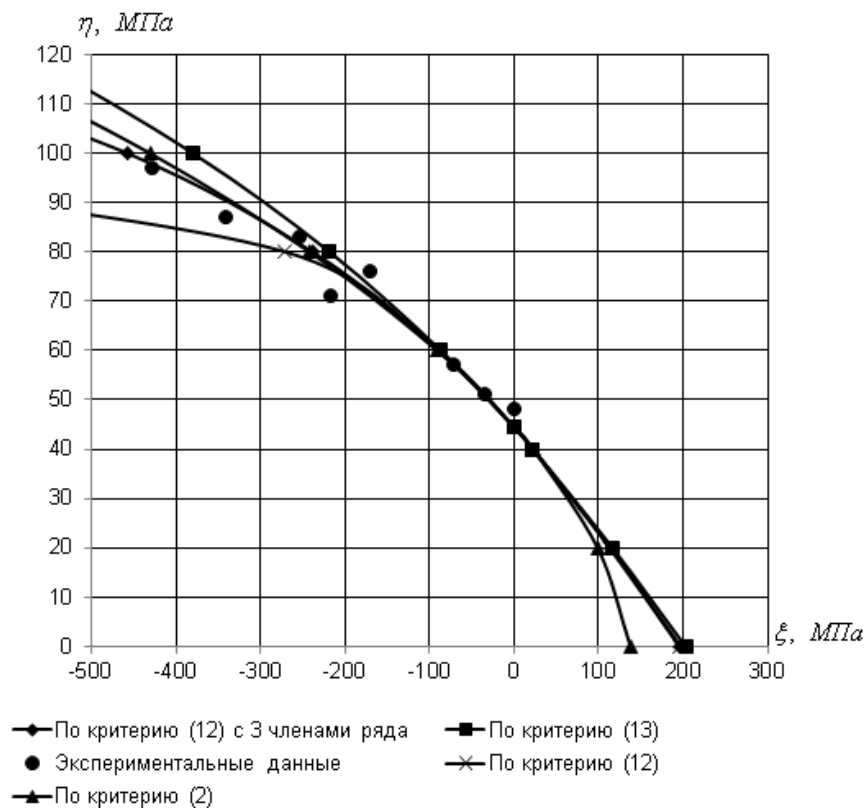


Рис. 1. Предельные кривые для полиэфирного связующего

Таким образом, расхождение между кривыми незначительно.

Целью разложения критериев (1), (4), (12) является приведение к традиционному виду зависимости между η и ξ , оценивание их по внешнему виду и на соответствие экспериментальным данным. Критерии прочности (1), (4) и (12) после разложения в ряды и взятии в рассмотрение одного, двух и т.д. членов ряда имеют различные степени η и ξ , входящих в исходные их виды.

Как известно, в практике проектирования широкое распространение получили критерии Друккера – Прагера и Баландина, имеющие линейную и параболическую зависимости между η и ξ . Критерий (12) – экспоненциальный. Такую же экспоненциальную зависимость имеет критерий (1), однако при взятии в рассмотрение двух членов ряда он имеет квадратичную форму.

Таким образом, при сравнении (2), (5) и (13) преимущество должен иметь критерий (2) из-за его квадратичности, если такой вид критерия удовлетворительно согласуется с экспериментами, не хуже чем (5) и (13), что и видно из рисунка 1.

3. Армированные композитные материалы

Напряженное состояние однонаправленно армированного композитного материала (например, углепластика) в условиях действия всестороннего давления является трехосным. Рассмотрим зависимость (4) в следующем виде

$$\frac{\eta}{A} = \sin \frac{B - \xi}{A} \quad \text{при} \quad \left| \frac{B - \xi}{A} \right| \leq 1. \quad (16)$$

При разложении правой части (16) в ряд Тейлора и рассмотрении двух первых членов ряда, получим критерий прочности в виде

$$\frac{\eta}{A} = m - \frac{1}{A} \left(1 - \frac{1}{2} m^2 \right) \xi - \frac{1}{6} m^3 - \frac{1}{2A^2} m \xi^2 + \frac{1}{6A^3} \xi^3, \quad (17)$$

где $m = \frac{B}{A}$.

Постоянные A и B могут быть определены из испытаний на одноосное растяжение вдоль направления армирования и на одноосное сжатие неармированного углепластика. При этом вводим допущение: при сжатии сжимающие напряжения воспринимаются скелетом углепластика.

На рисунке 2 представлены кривые зависимости прочности однонаправленно армированного углепластика от гидростатического давления по критерию (17) и по зависимости, полученной в работе [7], а также результаты экспериментов из этой же работы. Здесь p – гидростатическое давление.

Проведем также сравнение результатов экспериментальных данных, полученных в условиях растяжения и сжатия с наложенным гидростатическим давлением, и результатов, полученных исходя из критерия (17). На рисунках 2, 3 и 4 представлены кривые зависимости прочности материалов от гидростатического давления, соответствующие критерию (17), а также результаты экспериментов [7-9]. В условиях растяжения на экспериментальных кривых имелись участки как возрастания, так и уменьшения прочности. На рисунках 2 и 3 предельные кривые, соответствующие критерию (17), имеют зависимость, близкую к прямой, а согласно [7] – криволинейную, более точно описывающую эксперименты. Однако в области максимума имеет место наибольший разброс экспериментальных данных и, как отмечают авторы [7], равновероятны различные виды разрушения. Кривая, приведенная в работах [8,9], по результатам экспериментов на растяжение представляет собой практически прямую линию.

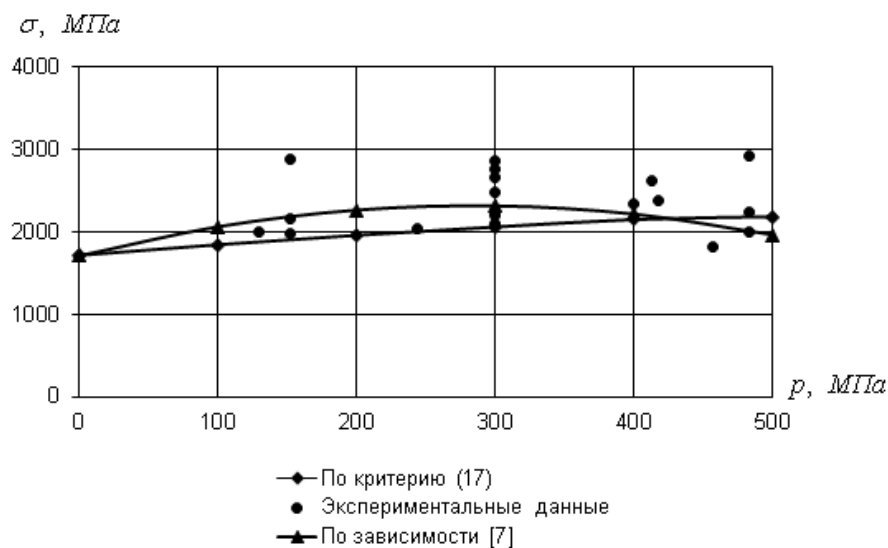


Рис. 2. Зависимость прочности углепластика от гидростатического давления при продольном растяжении

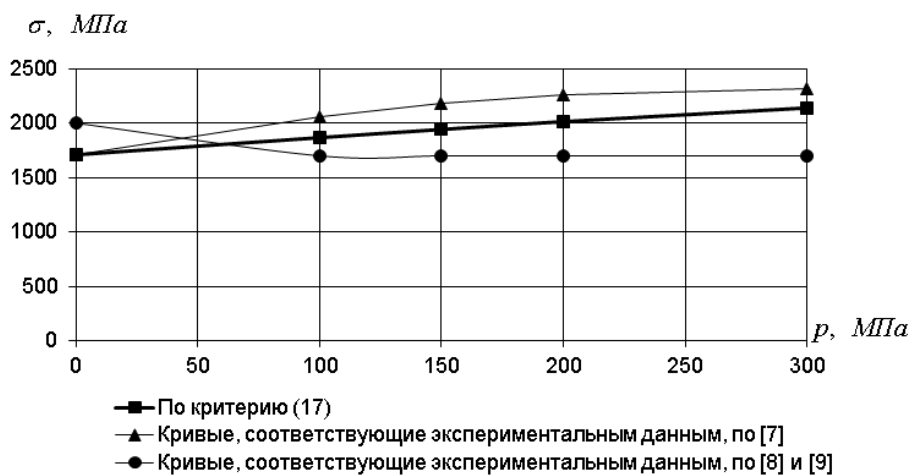


Рис. 3. Зависимость прочности углепластика с содержанием углерода 60% от гидростатического давления при продольном растяжении

При сравнении экспериментальных прочностных характеристик [8,9] при сжатии с характеристиками, соответствующими критерию (17), можно отметить, что предельные кривые по (17) достаточно точно соответствуют результатам экспериментов. При этом можно предположить, что причиной некоторого несоответствия является изменение механизма разрушения. Для таких видов армированных пластиков очевидно, что при большом давлении растяжение сопровождается интенсивным сдвигом, а при

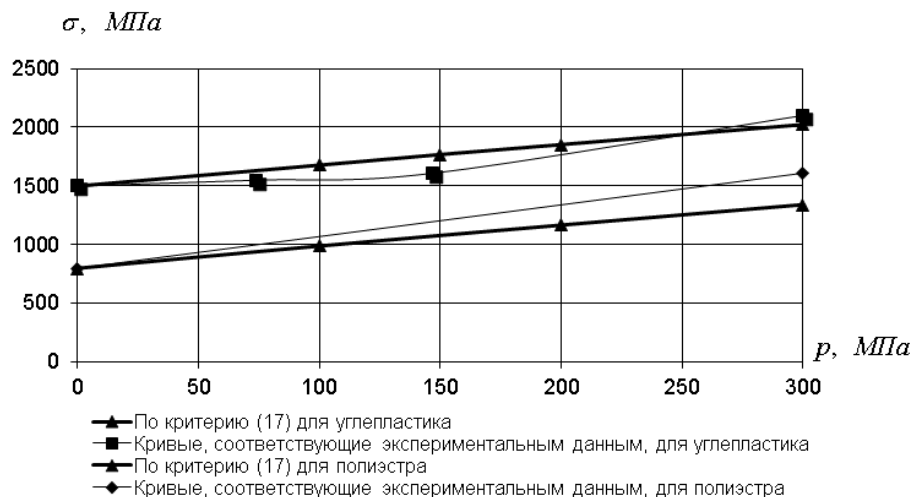


Рис. 4. Зависимость прочности углепластика с содержанием углерода 60% и полиэстера от гидростатического давления при сжатии

сжатии высокое давление упрочняет материал, начиная с первых шагов увеличения всестороннего давления.

Выводы. Критерии прочности, полученные в данной работе, можно использовать для оценки прочности изотропных полимеров и однонаправленно армированных пластиков, работающих в условиях высокого давления. Заимствованные из различных источников экспериментальные данные подтверждают достоверность этих критериев. Исследования показывают, что для изотропных полимеров удовлетворительные результаты можно получить, если применять экспоненциальные зависимости [1,2], а для армированных пластиков – кривые в виде синусоидальной зависимости, представленной разложением в ряды.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Альтенбах Х., Туштов К. Новый критерий статической прочности изотропных полимеров // *Механика композитных материалов*. 2001. Т. 37, № 5/6. С. 732–739.
- [2] Алиев М. М., Шафиева С. В., Каримова Н. Г. Критерии прочности и разрушения разнопрочных материалов с учетом влияния всестороннего давления // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2012. № 3 (13). С. 64–71.
- [3] Алиев М. М., Шафиева С. В. Новые полиномиальные критерии прочности для разнопрочных материалов // *Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева*. 2012. № 3. С. 87–91.
- [4] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [5] Shin E. S. and Pae K. D. Effects of Hydrostatic Pressure on In-Plane Shear Properties of Graphite / Epoxy Composites // *Journal of Composite Materials*. 1992a.
- [6] Sigley R. H., Wronski A. S. and Parry T. V. Tensile Failure of Pultruded Glass-Polyester Composites Under Superimposed Hydrostatic Pressure // *Composites Science and Technology*. 1991.

[7] Зиновьев П. А. Прочность однонаправленных композитов в условиях высокого гидростатического давления / П.А. Зиновьев, С.В. Цветков, Г.Г. Кулиш, Р.В. ванден Берг, Л. Ван Шепдайл // Механика композитных материалов. 2001. Т. 37, № 4. С. 451–462.

[8] Camponeschi E. T. Jr. Compression of Composite Materials: A Review in Composite Materials: Fatigue and Fracture // ASTM STP 1110, American Society for Testing Materials, Philadelphia, PA. 1991.

[9] Portelli G. B., Goetz D. P., Graske J. A. and Hine A. M. The Effect of Matrix Modulus on Lamina Compression Strength // Paper presented at the 37th International SAMPE Symposium and Exhibition, Society for the Advancement of Material and Process Engineering, Anaheim, CA. 1992.

[10] Алиев М. М., Каримова Н. Г. Вариант критерия прочности для изотропных полимеров // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. 2008. № 3 (62). С. 217–226.

[11] Ol'khovik O., Figovsky O. and Feigin V. Identification of static strength criteria // J. Mech. Behavior of Mater. 1996. Vol. 6, № 4. P. 301–308.

M. M. Aliev, S. V. Shafieva, O. N. Volkova, O. A. Shipilova

DEVELOPMENT OF THE CRITERIA OF STRENGTH OF ISOTROPIC AND REINFORCED POLYMERS BY THE METHOD OF DECOMPOSITION TO SERIES

Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk, Russia

Abstract. The article suggests a technique for obtaining strength criteria for polymeric materials that have the property of isotropy and reinforced polymers with pronounced anisotropy. We consider a static criterion for isotropic materials of H. Altenbach - K. Tushtev, as well as two relationships proposed by the authors between stress invariants, which are represented in the form of power series. The experimental verification of the obtained criteria for isotropic polymers and unidirectional carbon plastics has been carried out.

Keywords: strength criterion, hydrostatic pressure, isotropic polymer, composite reinforced material, unidirectional CFRP.

REFERENCES

Aliev Mekhrali Mirzali ogly

e-mail: mmaliev@rambler.ru, Dr. Sci. Eng., Professor, Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk, Russia.

Shafieva Svetlana Vladimirovna

e-mail: shafieva_sv@mail.ru, Ph.D. Eng., Assoc. Professor, Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk, Russia.

Volkova Olga Nikolaevna

e-mail: 9172850545@mail.ru, Senior Lecturer, Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk, Russia.

Shilova Olga Aleksandrovna

e-mail: o.shipilova@rambler.ru Ph.D. Eng., Assoc. Professor, Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk, Russia.

- [1] Al'tenbakh K.H., Tushtev K. Novyy kriteriy staticheskoy prochnosti izotropnykh polimerov // *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 2001. T. 37, № 5/6. S. 732–739. (in Russian)
- [2] Aliyev M. M., Shafiyeva S. V., Karimova N. G. Kriterii prochnosti i razrusheniya raznoprochnykh materialov s uchetom vliyaniya vsestoronnego davleniya // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*. 2012. № 3 (13). S. 64–71. (in Russian)
- [3] Aliyev M. M., Shafiyeva S. V. Novyye polinomial'nyye kriterii prochnosti dlya raznoprochnykh materialov // *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. A.N. Tupoleva*. 2012. № 3. S. 87–91. (in Russian)
- [4] Sokolovskiy V.V. *Teoriya plastichnosti*. M.: Vysshaya shkola, 1969. 608 s. (in Russian)
- [5] Shin E. S. and Pae K. D. Effects of Hydrostatic Pressure on In-Plane Shear Properties of Graphite / Epoxy Composites // *Journal of Composite Materials*. 1992a.
- [6] Sigley R. H., Wronski A. S. and Parry T. V. Tensile Failure of Pultruded Glass-Polyester Composites Under Superimposed Hydrostatic Pressure // *Composites Science and Technology*. 1991.
- [7] Zinov'yev P. A. Prochnost' odnonapravlennykh kompozitov v usloviyakh vysokogo gidrostaticheskogo davleniya / P.A. Zinov'yev, S.V. Tsvetkov, G.G. Kulish, R.V. vanden Berg, L. Van Shepdayl // *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 2001. T. 37, № 4. S. 451–462.
- [8] Camponeschi E. T. Jr. Compression of Composite Materials: A Review in Composite Materials: Fatigue and Fracture // ASTM STP 1110, American Society for Testing Materials, Philadelphia, PA. 1991. (in Russian)
- [9] Portelli G. B., Goetz D. P., Graske J. A. and Hine A. M. The Effect of Matrix Modulus on Lamina Compression Strength // Paper presented at the 37th International SAMPE Symposium and Exhibition, Society for the Advancement of Material and Process Engineering, Anaheim, CA. 1992. (in Russian)
- [10] Aliyev M. M., Karimova N. G. Variant kriteriya prochnosti dlya izotropnykh polimerov // *Vestnik SamGU – Yestestvennonauchnaya seriya*. 2008. № 3 (62). S. 217–226. (in Russian)
- [11] Ol'khovik O., Figovsky O. and Feigin V. Identification of static strength criteria // *J. Mech. Behavior of Mater.* 1996. Vol. 6, № 4. P. 301–308.

Ю. В. Немировский, А. В. Станиславович

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. Представлена математическая модель теплопроводности многослойных композитных пластин. Слои таких пластин могут быть набраны как из изотропных, так и из ортотропных материалов, таких как армированные волокнами, либо частицами композиционные материалы, сотовые структуры с различными параметрами армирования. Предложена методика аналитического решения стационарных и нестационарных задач теплопроводности для таких многослойных пластин.

Ключевые слова: теплопроводность, аналитические решения, композитные материалы, слоистые конструкции.

УДК: 536.21

1. Введение

Исследование различных проблем теплопроводности и теплопередачи играет важную роль при проектировании газотурбинных двигателей и установок, авиационной и ракетной техники [1; 2]. При этом помимо увеличения термического сопротивления по толщине стенок несущих и теплоотводящих конструкций требуется обеспечить достаточную прочность и жесткость при ограниченном весе таких конструкций. Одновременное выполнение таких требований может быть реализовано в подкрепленных конструкциях коробчатого типа или в трехслойных панелях с легкими алюминиевыми или стеклопластиковыми сотовыми наполнителями. Теплопроводность таких конструкций была исследована, например, в работах [3; 4]. В настоящее время разработаны технологии производства многослойных сотовых конструкций,

© Немировский Ю. В., Станиславович А. В., 2018

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiruy@bk.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Станиславович Алексей Вячеславович

e-mail: alexey.st@bk.ru, ведущий специалист, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Кабинета Министров Чувашской Республики в рамках научного проекта № 17-41-210272.

Поступила 01.08.2018

разделяющих среды с различными температурами. Все составляющие конструкцию слои могут состоять из различных материалов, иметь различные структурные параметры армирования, различную форму, плотность и взаимное расположение сот и, в связи с этим, могут позволять в широких пределах управлять температурным полем в направлении нормали к поверхности многослойной конструкции. Решение такой задачи нам неизвестно и должно быть основано на относительно разумных и простых гипотезах, позволяющих построить сравнительно простую расчетную модель, обеспечивающую возможность решения соответствующих задач управления тепловым полем и оптимизации.

2. Постановка задачи В общем случае распределение тепла в анизотропном теле описывается уравнением:

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\Lambda \nabla T) + f, \quad (1)$$

с начально-краевыми условиями

$$T|_{t=0} = \Phi_0, \quad \beta_1 \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} - \beta_2 T|_{\Gamma} = -\varphi(t). \quad (2)$$

При $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$ получим первую краевую задачу.

При $\beta_1 = \Lambda$, $\beta_2 = 0$ получим вторую краевую задачу.

При $\beta_1 = -\Lambda$, $\beta_2 = \alpha$, $\varphi(t) = \alpha T$ получим третью краевую задачу. Здесь ρ — плотность, C_v — объемная теплоемкость материала, Λ — тензор теплопроводности анизотропной среды, f — внутренний распределенный источник тепла, \mathbf{n} — внешняя нормаль к границе области Γ , α — коэффициент теплопередачи, $T_{\text{ср}}$ — температура окружающей среды при конвективном теплообмене.

В общем случае для анизотропной среды тензор теплопроводности имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Рассмотрим прямоугольную слоистую в направлении оси Oz композитную пластинку (рис. 1) толщины H , состоящую из N слоев постоянной толщины δ_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Примем все слои композиции либо ортотропными, либо изотропными. Структура каждого слоя является либо армированной тонкими волокнами композицией, либо армированной частицами, либо изотропной, что позволяет использовать модель теплопроводности из [5; 6; 7]. Граница между i -м и $(i+1)$ -м слоями имеет координату l_{zi} ($i = 1, 2, \dots, N-1$). На границе раздела i -го и $(i+1)$ -го слоев задаются условия идеального теплового контакта:

$$T^i|_{z=l_{zi}} = T^{i+1}|_{z=l_{zi}}, \quad \lambda_i \frac{\partial T^i}{\partial z} \Big|_{z=l_{zi}} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial z} \Big|_{z=l_{zi}} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1) \quad (4)$$

Здесь λ_i , λ_{i+1} — эффективные значения коэффициента теплопроводности i -го и $(i+1)$ -го слоев соответственно в направлении оси Oz в точках с координатой $z = l_{zi}$.

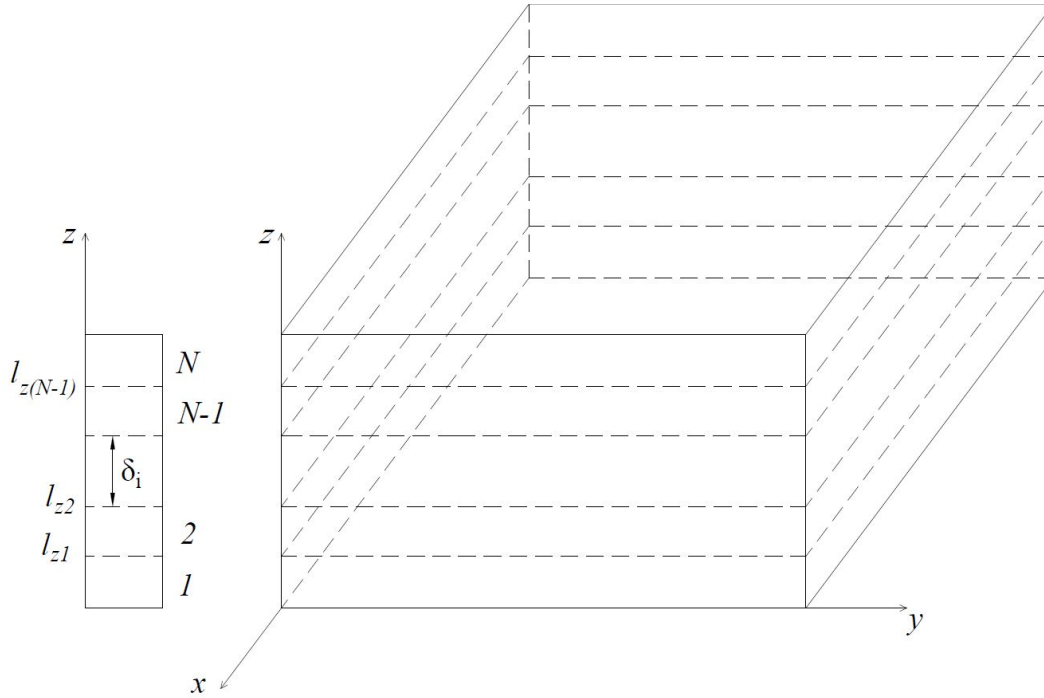


Рис. 1. Слоистая в направлении оси Oz прямоугольная пластинка.

Эффективные значения компонент тензора теплопроводности для рассматриваемой пластинки найдем по формулам [8]:

$$\Lambda_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k \Lambda_{ij}^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, \quad \Lambda_{33} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{\bar{\Omega}_k}{\Lambda_{33}^{(k)}} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Здесь $\Lambda_{ij}^{(k)}$ — эффективные значения компонент тензора теплопроводности k -го слоя, взятые из [6; 7],

$$\bar{\Omega}_k = \frac{c_\varepsilon^k \delta_k}{c_\varepsilon H},$$

c_ε^k — осредненное значение массовой теплоемкости k -го слоя, c_ε — осредненное значение массовой теплоемкости по всей пластинке [6].

Предполагая, что направление армирования во всех слоях либо совпадает, либо угол между направлениями армирования в различных слоях составляет $\pi/2$, получим ортотропный композитный материал (во втором случае путем переименования компонент тензора теплопроводности $\Lambda_{11} \rightarrow \tilde{\Lambda}_{22}$, $\Lambda_{22} \rightarrow \tilde{\Lambda}_{11}$).

Тогда тензор теплопроводности (3) преобразуется к виду:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{33} \end{pmatrix},$$

а выражения (5) примут вид:

$$\Lambda_{ii} = \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k \Lambda_{ii}^{(k)}, \quad i = 1, 2, \quad \Lambda_{33} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{\bar{\Omega}_k}{\Lambda_{33}^{(k)}} \right)^{-1}. \quad (6)$$

3. Методика решения

3.1 Одномерная стационарная задача. Распространение тепла вдоль плоскости слоев

Рассмотрение задачи теплопроводности многослойной композитной пластинки начнем со стационарной задачи, когда температурное поле не зависит от времени. Тогда в декартовых координатах уравнение теплопроводности (1), (2) запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y(y) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f(x, y, z) = 0, \quad (7)$$

$$\{0 \leq x \leq L_x; \quad 0 \leq y \leq L_y; \quad 0 \leq z \leq L_z\},$$

$$\left[\beta_{11}^x \frac{\partial T^i}{\partial x} - \beta_{21}^x T^i \right] \Big|_{x=0} = -\varphi_1^x, \quad \left[\beta_{12}^x \frac{\partial T^i}{\partial x} - \beta_{22}^x T^i \right] \Big|_{x=L_x} = -\varphi_2^x,$$

$$\left[\beta_{11}^y \frac{\partial T^i}{\partial y} - \beta_{21}^y T^i \right] \Big|_{y=0} = -\varphi_1^y, \quad \left[\beta_{12}^y \frac{\partial T^i}{\partial y} - \beta_{22}^y T^i \right] \Big|_{y=L_y} = -\varphi_2^y, \quad (8)$$

$$\left[\beta_{11}^z \frac{\partial T^0}{\partial z} - \beta_{21}^z T^0 \right] \Big|_{z=0} = -\varphi_1^z, \quad \left[\beta_{12}^z \frac{\partial T^N}{\partial z} - \beta_{22}^z T^N \right] \Big|_{z=L_z} = -\varphi_2^z.$$

Здесь и далее предполагается, что $\Lambda_{11} = \lambda_x$, $\Lambda_{22} = \lambda_y$, $\Lambda_{33} = \lambda_z$.

Решение задачи (7), (8) начнем с рассмотрения одномерного случая одномерного случая.

Положим

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = 0.$$

Такая ситуация может возникнуть, например, в случае, когда градиент температуры вдоль оси Ox много больше, чем вдоль осей Oy , Oz .

Тогда задача (7), (8) запишется в виде

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{dT}{dx} \right) + f(x, y, z) = 0, \quad \{0 \leq x \leq L\}, \quad (9)$$

$$\beta_{11} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} - \beta_{21} T \Big|_{x=0} = -\varphi_1, \quad \beta_{12} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} - \beta_{22} T \Big|_{x=L} = -\varphi_2. \quad (10)$$

Такая задача модельно может представлять собой, например, теплоотводящие элементы систем охлаждения.

Решение уравнения (9) путем двукратного интегрирования находится в виде

$$T(x) = C_1 K(x) - P(x) + C_2, \quad (11)$$

где

$$K(x) = \int [\lambda_x(x)]^{-1} dx, \quad P(x) = \int F(x) [\lambda_x(x)]^{-1} dx, \quad F(x) = \int f(x) dx,$$

а константы интегрирования C_1 , C_2 находятся из краевых условий (10) и записываются в виде:

$$C_1 = \frac{\beta_{21} [\beta_{12} P'_L - \beta_{22} P_L + \beta_{22} P_0] + \beta_{22} \varphi_1 - \beta_{22} \beta_{11} P'_0}{\beta_{21} [\beta_{12} K'_L - \beta_{22} K_L + \beta_{22} K_0] - \beta_{22} \beta_{11} K'_0},$$

$$C_2 = \frac{1}{\beta_{21}} [C_1 (\beta_{11} K'_0 - \beta_{21} K_0) - \beta_{11} P'_0 + \beta_{21} P_0 + \varphi_1].$$

Здесь нижний индекс при K , P означает точку в которой вычисляются значения функций $K(x)$, $P(x)$, штрих сверху означает производную, например $K'_L = K'(L)$.

3.2 Одномерная стационарная задача. Распространение тепла перпендикулярно плоскости слоев

В случае, когда градиент температуры вдоль оси Oz максимален:

$$\frac{\partial T}{\partial z} \gg \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} \gg \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (12)$$

целесообразно переписать задачу (7) – (8) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x^i \frac{\partial T^i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y^i \frac{\partial T^i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z^i \frac{\partial T^i}{\partial z} \right) + f_i(x, y, z) = 0, \quad (13)$$

$$\left[\beta_{11}^x \frac{\partial T^i}{\partial x} - \beta_{21}^x T^i \right] \Big|_{x=0} = -\varphi_1^x, \quad \left[\beta_{12}^x \frac{\partial T^i}{\partial x} - \beta_{22}^x T^i \right] \Big|_{x=Lx} = -\varphi_2^x, \quad (14)$$

$$\left[\beta_{11}^y \frac{\partial T^i}{\partial y} - \beta_{21}^y T^i \right] \Big|_{y=0} = -\varphi_1^y, \quad \left[\beta_{12}^y \frac{\partial T^i}{\partial y} - \beta_{22}^y T^i \right] \Big|_{y=Ly} = -\varphi_2^y, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\left[\beta_{11}^z \frac{\partial T^1}{\partial z} - \beta_{21}^z T^1 \right] \Big|_{z=0} = -\varphi_1^z, \quad \left[\beta_{12}^z \frac{\partial T^N}{\partial z} - \beta_{22}^z T^N \right] \Big|_{z=Lz} = -\varphi_2^z, \quad (15)$$

и дополнить ее условиями сопряжения слоев (4):

$$T^i \Big|_{z=l_{zi}} = T^{i+1} \Big|_{z=l_{zi}}, \quad \lambda_z^i \frac{\partial T^i}{\partial z} \Big|_{z=l_{zi}} = \lambda_z^{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial z} \Big|_{z=l_{zi}}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (16)$$

Учитывая (12), уравнения (13) – (14) можно переписать в виде:

$$\frac{d}{dz} \left(\lambda_z^i(z) \frac{dT^i}{dz} \right) + f_i(z) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

Уравнения (17) дополним краевыми условиями (15) – (16). Решение уравнений (17), получается в виде аналогичном (11):

$$T^i(z) = A_i K_i(z) - P_i(z) + B_i, \quad (18)$$

где

$$K_i(x) = \int [\lambda_z^i(z)]^{-1} dz, \quad P_i(z) = \int \frac{\int f_i(z) dz}{\lambda_z^i(z)} dz,$$

а значения констант A_i , B_i находятся из краевых условий (15) – (16).

3.3 Нестационарная задача

Рассмотрим прямоугольную слоистую в направлении оси Oz композитную пластинку (рисунок 1) толщины H , состоящую из N слоев постоянной толщины δ_i ($i =$

1, 2, ..., N). Примем допущение о независимости приведенных коэффициентов теплопроводности от в каждом слое от пространственных координат, а также о равенстве приведенных коэффициентов теплопроводности вдоль осей Ox , Oy :

$$\lambda_x^i = \lambda_y^i = \lambda^i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

Тогда уравнение теплопроводности (1), (2) запишется в виде:

$$\frac{\partial T^i}{\partial t} - \left(a_x^i \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^2} + a_y^i \frac{\partial^2 T^i}{\partial y^2} + a_z^i \frac{\partial^2 T^i}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{\rho_i C_{vi}} f(x, y, z, t), \quad (20)$$

$$\{0 \leq x \leq L_x; \quad 0 \leq y \leq L_y; \quad 0 \leq z \leq L_z\},$$

$$T^i(x, y, z, 0) = \Phi_{0i}(x, y, z), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (21)$$

$$\left[\beta_{11}^x \frac{\partial T}{\partial x} - \beta_{21}^x T \right] \Big|_{x=0} = -\varphi_1^x, \quad \left[\beta_{12}^x \frac{\partial T}{\partial x} - \beta_{22}^x T \right] \Big|_{x=L_x} = -\varphi_2^x, \quad (22)$$

$$\left[\beta_{11}^y \frac{\partial T}{\partial y} - \beta_{21}^y T \right] \Big|_{y=0} = -\varphi_1^y, \quad \left[\beta_{12}^y \frac{\partial T}{\partial y} - \beta_{22}^y T \right] \Big|_{y=L_y} = -\varphi_2^y, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (23)$$

$$\left[\beta_{11}^z \frac{\partial T}{\partial z} - \beta_{21}^z T \right] \Big|_{z=0} = -\varphi_1^z, \quad \left[\beta_{12}^z \frac{\partial T}{\partial z} - \beta_{22}^z T \right] \Big|_{z=L_z} = -\varphi_2^z, \quad (24)$$

с условиями сопряжения слоев (4). Здесь $a_k^i = \lambda_k^i / \rho_i C_{vi}$ ($k = \langle x \rangle, \langle y \rangle, \text{ или } \langle z \rangle$).

Решение задачи (20) – (24) будем искать с помощью метода конечных интегральных преобразований [8].

Для исключения координат x , y используем формулу перехода к изображениям (индекс i опущен):

$$\bar{T}(z, t) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} T(x, y, z, t) P(x, y) dy dx, \quad (25)$$

где $P(x, y)$ – ядро интегрального преобразования, являющееся решением задачи Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \mu^2 P(x, y) = 0, \quad (26)$$

$$\left[\beta_{11}^x \frac{\partial P}{\partial x} - \beta_{21}^x P \right] \Big|_{x=0} = 0, \quad \left[\beta_{12}^x \frac{\partial P}{\partial x} - \beta_{22}^x P \right] \Big|_{x=L_x} = 0 \quad (27)$$

$$\left[\beta_{11}^y \frac{\partial P}{\partial y} - \beta_{21}^y P \right] \Big|_{y=0} = 0, \quad \left[\beta_{12}^y \frac{\partial P}{\partial y} - \beta_{22}^y P \right] \Big|_{y=L_y} = 0. \quad (28)$$

Общее решение уравнения (26) имеет вид [9]:

$$P(x, y) = [C_{1x} \cos(\gamma x) + C_{2x} \sin(\gamma x)] [C_{1y} \cos(\eta y) + C_{2y} \sin(\eta y)]$$

Значения коэффициентов C_{1x} , C_{2x} , C_{1y} , C_{2y} определяются из однородных граничных условия (27), (28).

Обратное преобразование задается формулой:

$$T(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_{nm}(x, y)}{\|P_{nm}\|^2} \bar{T}(z, t), \quad (29)$$

где $\|P_{nm}\|^2$ – квадрат нормы функции $P(x, y)$.

Применяя преобразование (25) к задаче (20) – (24) и учитывая что $\mu^2 = \eta^2 + \gamma^2$ [9] получаем:

$$\frac{\partial \bar{T}^i}{\partial t} - \left(a^i \mu^2 \bar{T} + a_z^i \frac{\partial^2 \bar{T}^i}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{\rho_i C_{vi}} \bar{f}(z, t) + I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad (30)$$

$$\bar{T}^i(z, 0) = \bar{\Phi}_{0i}(z), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (31)$$

$$\left[\beta_{11}^z \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z} - \beta_{21}^z \bar{T}^i \right] \Big|_{z=0} = -\varphi_1^z, \quad \left[\beta_{12}^z \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z} - \beta_{22}^z \bar{T}^i \right] \Big|_{z=Lz} = -\varphi_2^z. \quad (32)$$

Здесь $a^i = \lambda^i / \rho_i C_{vi}$, I_1, I_2, I_3, I_4 – выражения определяемые из краевых условий (22) – (23),

$$\bar{f}_i(z, t) = \int_0^{Lx} \int_0^{Ly} f_i(x, y, z, t) P(x, y) dy dx,$$

$$\bar{\Phi}_{0i}(r, \mu) = \int_0^{Lx} \int_0^{Ly} \Phi_{0i}(x, y, z) P(x, y) dy dx.$$

Аналогичным методом исключим из уравнения (30) координату z . Положим:

$$\bar{\bar{T}}^i(t) = \frac{\lambda_z^i}{a_z^i} \int_{Lz(i-1)}^{Lzi} \bar{T}^i(z, t) W^i(z) dz.$$

Для исключения координаты z , вдоль которой свойства тела изменяются ступенчато воспользуемся формулой [10]:

$$\bar{\bar{T}}(t) = \sum_{i=1}^N \bar{\bar{T}}^i = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_z^i}{a_z^i} \int_{Lz(i-1)}^{Lzi} \bar{T}^i(z, t) W^i(z) dz. \quad (33)$$

Здесь $W^i(z)$ – ядро интегрального преобразования, являющееся решением задачи Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями:

$$\frac{d^2 W^i}{dz^2} + \zeta^2 W^i(z) = 0, \quad (34)$$

$$\left[\beta_{11}^z \frac{\partial W^i}{\partial z} - \beta_{21}^z W^i \right] \Big|_{z=0} = 0, \quad \left[\beta_{12}^z \frac{\partial W^i}{\partial z} - \beta_{22}^z W^i \right] \Big|_{z=Lz} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (35)$$

$$T^i|_{z=l_{zi}} = T^{i+1}|_{z=l_{zi}}, \quad \lambda_i \frac{\partial T^i}{\partial z} \Big|_{z=l_{zi}} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial z} \Big|_{z=l_{zi}} \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (36)$$

Общее решение уравнения (34) ищется в виде:

$$W^i(z) = C_{1i} \cos(\zeta x) + C_{2i} \sin(\zeta x), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Обратное преобразование задается в виде:

$$\bar{\bar{T}}^i(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W^i(z)}{\|W_n\|^2} \bar{\bar{T}}^i(t). \quad (37)$$

Применяя преобразование (33) к задаче (30) – (32), получаем:

$$\frac{d\bar{T}}{dt} + \xi^2 \bar{T} = \bar{f}(t) + \bar{G}, \quad (38)$$

$$\bar{T}(0) = \bar{\Phi}_0, \quad (39)$$

где $\xi^2 = \sum a_i \mu^2 + \varsigma^2$, \bar{G} определяется из краевых условий (4), (32) с учетом выражений I_1, I_2, I_3, I_4 из формулы (30),

$$\bar{f}(t) = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{a_i} \int_{Lz(i-1)}^{Lzi} \bar{f}_i(z, t) W(r) dz, \quad \bar{\Phi}_0 = \sum_{i=1}^N \int_{Lz(i-1)}^{Lzi} \bar{\Phi}_{0i}(z) W(r) dz.$$

Решение задачи (38), (39) ищется в виде

$$\bar{T}(t) = \bar{\Phi}_0 \exp(-\xi^2 t) + \bar{K}(t), \quad (40)$$

где $\bar{K}(t)$ – какое-то частное решение неоднородного уравнения (40).

Обратное преобразование по формулам (29), (37) дает нам решение исходной задачи (20) – (24) в виде тройного бесконечного ряда:

$$T^i(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{nm}^i(x, y) W_k^i(z)}{\|P_{nm}\|^2 \|W_m\|^2} \bar{T}(t). \quad (41)$$

Отметим, что если отказаться от допущения (19), то задача решается аналогичным образом с тем лишь исключением, что координаты x, y исключаются последовательно.

3.4 Случай тонких слоев

Для случая тонких слоев, когда

$$L_z \ll L_x, \quad L_z \ll L_y$$

задачу (20) – (24) можно упростить, аппроксимировав распределение температуры вдоль оси Oz по квадратичному закону [11]. Положим

$$T^i(x, y, z, t) = T_1^i(x, y, t) T_z^i(z),$$

где

$$T_z^i(z) = z^2 + b_i z + c_i.$$

Коэффициенты b_i, c_i находятся из краевых условий (4), (24). Далее, повторяя рассуждения (25) – (32) практически дословно, получим решение задачи (20) – (24) в виде аналогичном (41) за исключением того, что общее решение будет представлено в виде двойного ряда, а не тройного.

Заключение

Таким образом получена функциональная связь между структурными параметрами армирования (интенсивность и направление армирования в каждом из слоев композиции, удельное содержание каждого из слоев в многослойном пакете) и распределением температуры в теле, что позволяет поставить как задачу оптимального проектирования, так и задачу управления температурными полем внутри композитной пластинки путем варьирования структурных параметров армирования. Такие задачи особенно важны при конструировании систем охлаждения технических устройств и

особенно летательных аппаратов, где широко применяются композитные конструкции, позволяющие создавать требуемые условия теплообменников при минимальном расходе материала теплообменника или его весе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Авдучевский В. С. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической техни-ке. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1992. 528 с.
- [2] Иванов В. Л. Леонтьев А. И. Манушин Э. А. Осипов М. И Теплообменные аппараты и системы охлаждения газотурбинных и комбинированных установок: учебник для вузов. 2-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 592 с.
- [3] Марченко В. М. Температурные поля и напряжения в конструкциях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1965. 298 с.
- [4] Поварницын М. С. Исследование температурного поля в трехслойной пластине с сотовым наполнителем при несимметричном нагреве // Инженерно-физический журнал. 1961. № 10. Т. 4. С. 64–70.
- [5] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Влияние формы и расположения армирующих элементов на тепловые свойства композитов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: механика предельного состояния. 2015. № 4 (26). С. 3–24.
- [6] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Теплопроводность пакета полиармированных слоев // Вестник КемГУ. 2015. № 4 (64). Т. 3. С. 177–183.
- [7] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Моделирование теплопроводности гибридных бетонных композитных материалов // Международная конференция „Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе“, посвящённая дню рождения великого русского математика академика П. Л. Чебышёва: Тезисы. Сургут : ИЦ СурГУ, 2016. С. 247–248.
- [8] Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М: Высш. шк., 2001. 550 с.
- [9] Боголюбов А. Н. Кравцов В. В. Светников А. Г. Лекции по математической физике: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1993. 352 с.
- [10] Туголуков Е. Н. Решение задач теплопроводности методом конечных интегральных преобразований при автоматизированном проектировании технологического оборудования химической промышленности. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та., 2006. 116 с.
- [11] Немировский Ю. В. Янковский А. П. Теплопроводность однородных и композитных тонкостенных конструкций. Новосибирск: Изд-во «Арт-Авеню», 2008. 512 с.

Yu. V. Nemirovskii, A. V. Stanislavovich

SOME PROBLEMS OF THERMAL CONDUCTIVITY OF RECTANGULAR MULTILAYER COMPOSITE PLATES

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, the Siberian Branch RAS,
Novosibirsk, Russia*

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

Abstract. The paper presents the structural mathematical model of thermal conductivity of multilayer composite plates. Each layer of plate which is under consideration is either isotropic material or fi-ber composite or dispersion-strengthened composite or honeycomb composite structure. An analytical solution method for steady and non-steady heat conduction problem is proposed for specified plates.

Keywords: thermal conductivity, analytical solutions, composite materials, multilayer plates.

REFERENCES

- [1] Avduevskij V. S. Osnovy teploperedachi v aviacionnoj i raketno-kosmicheskoy tekhnike. 2-e izd. M.: Mashinostroenie, 1992. 528 s. (in Russian)
- [2] Ivanov V. L. Leont'ev A. I. Manushin EH. A. Osipov M. I Teploobmennye apparaty i sistemy ohlazhdeniya gazoturbinnih i kombinirovannyh ustanovok: uchebnik dlya vuzov. 2-e izd. M.: Izd-vo MGTU im. N. EH. Baumana, 2004. 592 s. (in Russian)
- [3] Marchenko V. M. Temperaturnye polya i napryazheniya v konstrukciyah letatel'nyh apparatov. M.: Mashinostroenie, 1965. 298 s. (in Russian)
- [4] Povarnicyn M. S. Issledovanie temperaturnogo polya v trekhslojnoj plastine s sotovym zapolnitelem pri nesimmetrichnom nagreve // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 1961. № 10. T. 4. S. 64–70. (in Russian)
- [5] Nemirovskij YU. V., Stanislavovich A. V. Vliyanie formy i raspolozheniya armiruyushchih ehlementov na teplovyje svojstva kompozitov // Vestnik CHuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. YA. YAKovleva. Seriya: mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2015. № 4 (26). S. 3–24. (in Russian)
- [6] Nemirovskij YU. V., Stanislavovich A. V. Teploprovodnost' paketa poliarmirovannyh sloev // Vestnik KemGU. 2015. № 4 (64). T. 3. S. 177–183. (in Russian)
- [7] Nemirovskij YU. V., Stanislavovich A. V. Modelirovanie teploprovodnosti gibridnyh betonnyh kompozitnyh materialov // Mezhdunarodnaya konferenciya „Matematika i informacionnye tekhnologii v neftegazovom kom-plekse“, posvyashchyonnaya dnyu rozhdeniya velikogo russkogo matematika akademika P. L. CHEbyshyova: Tezisy. Surgut : IC SurGU, 2016. S. 247–248. (in Russian)
- [8] Kartashov EH. M. Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdyh tel. M: Vyssh. shk., 2001. 550 s. (in Russian)

Nemirovskii Yuriy Vladimirovich

e-mail: nemiryury@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, the Siberian Branch RAS, Novosibirsk, Russia.

Stanislavovich Alexey Vyacheslavovich

e-mail: alexey.stv@bk.ru, Leading Specialist, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia.

[9] Bogolyubov A. N. Kravcov V. V. Svetnikov A. G. Lekcii po matematičeskoj fizike: Učeb. posobie. M.: Izd-vo MGU, 1993. 352 s. (in Russian)

[10] Tugolukov E. N. Reshenie zadach teploprovodnosti metodom konečnyh integral'nyh preobrazovanij pri avtomatizirovannom proek-tirovanii tekhnologičeskogo oborudovaniya himičeskoj promyš-lennosti. Tambov: Izd-vo Tamb. gos. tekhn. un-ta., 2006. 116 s. (in Russian)

[11] Nemirovskij YU. V. YAnkovskij A. P. Teploprovodnost' odnorodnyh i kompozitnyh tonkostennyh konstrukcij. Novosibirsk: Izd-vo «Art-Avenyu», 2008. 512 s. (in Russian)

Б. Г. Миронов, Ю. Б. Миронов

КРУЧЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ СЕЧЕНИЕМ

Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия

Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассмотрено кручение неоднородного цилиндрического стержня с эллиптическим сечением. Определено напряженное состояние стержня, построено поле характеристик основных соотношений, найдены линии разрыва напряжений.

Ключевые слова: Кручение, напряжение, пластичность, анизотропия, неоднородность.

УДК: 539.735

Кручение изотропных и анизотропных идеальнопластических стержней рассмотрено в работах [1]-[4]. Кручение неоднородных идеальнопластических стержней исследовано в [5]-[7].

Рассмотрим цилиндрический идеальнопластический стержень, ориентированный в прямоугольной системе координат xuz . Ось z направлена параллельно образующим стержня. Контур сечения стержня плоскостью $z = const$ есть эллипс: $\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} = 1$.

Предположим, что сечение стержня состоит из двух анизотропных областей, разделенных ломаной AOB (рис. 1).

Стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил. Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок.

Напряженное состояние стержня определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

условиями пластичности

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a_1^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b_1^2} = 1 \quad (2)$$

© Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. 2018

Миронов Борис Гурьевич

e-mail: mirovov.boris.21@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Миронов Юрий Борисович

e-mail: e-mail: mistifm@gmail.com, кандидат физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Поступила 16.09.2018

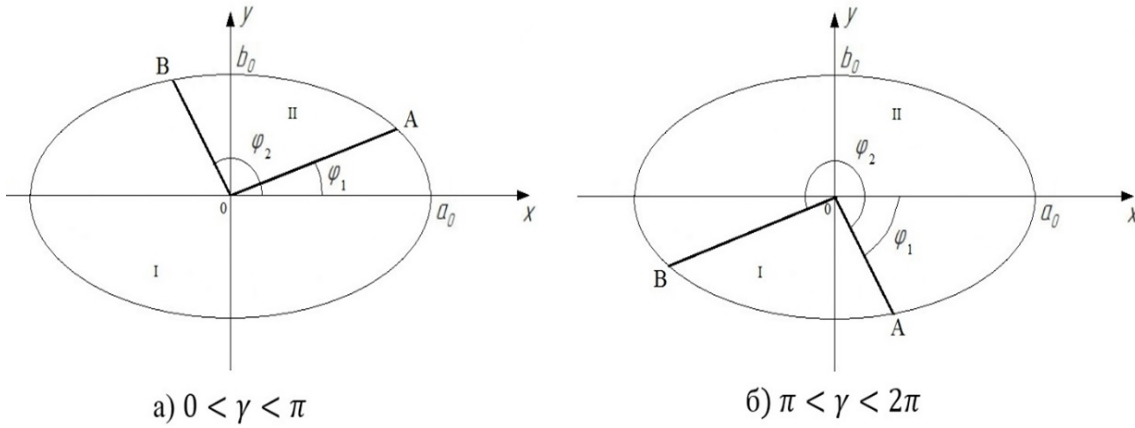


Рис. 1.

в области I,

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a_2^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b_2^2} = 1 \quad (3)$$

в области II,

уравнением равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

где $b_1 \leq b_2$, $a_1 \leq a_2$.

Согласно [3] характеристики соотношения (4) в каждой области есть прямые, ортогональные вектору градиента к кривым (2) и (3) соответственно. Вектор касательного напряжения

$$\bar{\tau} = \tau_{xz} \bar{i} + \tau_{yz} \bar{j}, \quad (5)$$

не меняется вдоль характеристик и направлен по касательной к контуру поперечного сечения стержня.

Пусть

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_0}{a_0}. \quad (6)$$

Тогда уравнение характеристик в обоих областях имеет вид

$$y = \frac{y_0}{x_0} x, \quad (7)$$

где

$$\frac{x_0^2}{a_0^2} + \frac{y_0^2}{b_0^2} = 1. \quad (8)$$

Вектор касательного напряжения $\bar{\tau}$ в областях I и II определяется соответственно соотношениями

$$\bar{\tau} = -\frac{a_1}{b_0} y_0 \bar{i} + \frac{b_1}{a_0} x_0 \bar{j}, \quad (9)$$

$$\bar{\tau} = -\frac{a_2}{b_0} y_0 \bar{i} + \frac{b_2}{a_0} x_0 \bar{j}. \quad (10)$$

На линии неоднородности AOB неизбежен скачок касательных напряжений. Поэтому при переходе через ломанную AOB вектор касательного напряжения $\vec{\tau}$, а соответственно и характеристики соотношения (4) меняют свое направление. А это приводит к дополнительным линиям разрыва напряжений AC , BC и CO области II (рис. 2а, 2б).

Пусть точка A имеет координаты (x_1, y_1) а точка $B - (x_2, y_2)$. Тогда

$$tg\varphi_1 = \frac{y_1}{x_1}, tg\varphi_2 = \frac{y_2}{x_2}, \tag{11}$$

где φ_1 – угол, образованный линией неоднородности OA с осью Ox , φ_2 – угол, образованный линией неоднородности OB с осью Ox . Предположим, что $0 < \gamma < 2\pi$, $\gamma = \varphi_2 - \varphi_1$

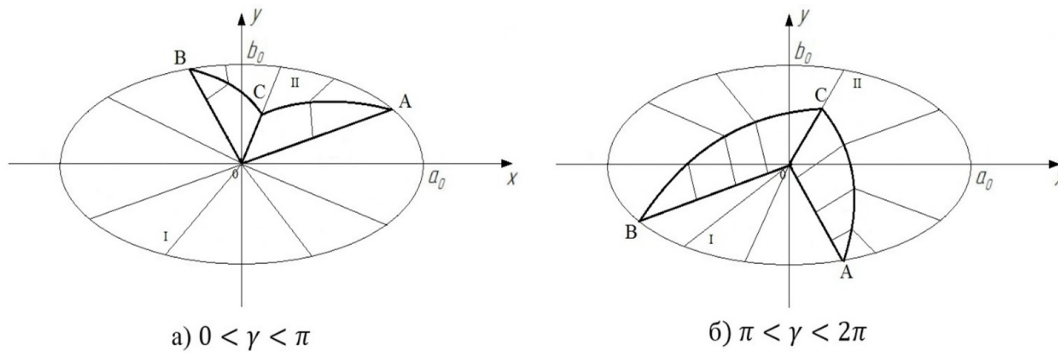


Рис. 2.

Тогда вектор касательного напряжения $\vec{\tau}_2$ в области, ограниченной замкнутой кривой $OACO$, определяется соотношением

$$\vec{\tau}_2 = \left(mx_1 - \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) \vec{i} + \left(\frac{b_1}{a_0} x_1 + m y_1 \right) \vec{j}, \tag{12}$$

где $m = \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{a_0} = \frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{b_0}$.

Характеристики в этой области задаются уравнением

$$b_2^2 \left(mx_1 - \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) x + a_2^2 \left(\frac{b_1}{a_0} x_1 + m y_1 \right) y = const. \tag{13}$$

Линия разрыва напряжений AC определяется из дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b_2 b_0 x}{\sqrt{b_0^2 x^2 + a_0^2 y^2}} - \left(\frac{b_1}{a_0} x_1 + m y_1 \right) \right) dx + \\ & + \left(\frac{a_2 a_0 y}{\sqrt{b_0^2 x^2 + a_0^2 y^2}} - \left(mx_1 - \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) \right) dy = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Согласно (14) уравнение линии разрыва напряжений AC имеет вид

$$\frac{b_2}{b_0} \sqrt{b_0^2 x^2 + a_0^2 y^2} - \left(\frac{b_1}{a_0} x_1 + m y_1 \right) x + \left(mx_1 - \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) y = a_0 (b_2 - b_1). \tag{15}$$

Вектор касательного напряжения $\vec{\tau}_2''$ в области, ограниченной замкнутой кривой $OBCO$, определяется соотношением

$$\vec{\tau}_2'' = \left(mx_2 - \frac{a_1}{b_0} y_2 \right) \vec{i} + \left(\frac{b_1}{a_0} - my_2 \right) \vec{j}. \quad (16)$$

Характеристики в этой области задаются уравнением

$$b_2^2 \left(-mx_2 - \frac{a_1}{b_0} y_2 \right) x + a_2^2 \left(\frac{b_1}{a_0} x_2 - my_2 \right) y = const. \quad (17)$$

Линия разрыва напряжений BC определяется из дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b_2 b_0 x}{\sqrt{b_0^2 x^2 + a_0^2 y^2}} + \left(-\frac{b_1}{a_0} x_2 + my_2 \right) \right) dx + \\ & + \left(\frac{a_2 a_0 y}{\sqrt{b_0^2 x^2 + a_0^2 y^2}} - \left(mx_2 + \frac{a_1}{b_0} y_2 \right) \right) dy = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Согласно (18) уравнение линии разрыва напряжений BC имеет вид

$$\frac{b_2}{b_0} \sqrt{b_0^2 x^2 + a_0^2 y^2} + \left(-\frac{b_1}{a_0} x_2 + my_2 \right) x - \left(mx_2 + \frac{a_1}{b_0} y_2 \right) y = a_0 (b_2 - b_1). \quad (19)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быковцев Г. И. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
- [2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
- [3] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4 С. 108–112.
- [4] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. О кручении цилиндрических анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 9 с. 150–155.
- [5] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964.
- [6] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. К вопросу о кручении призматических стержней с включением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 2 (32) с. 18–22.
- [7] Миронов Б.Г. О кручении цилиндрического неоднородного стержня с круговым сечением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. №3(33) с. 95–100.

B. G. Mironov, Yu. B. Mironov

TORSION OF A NON-UNIFORM CYLINDRICAL ROD WITH AN ELLIPTICAL SECTION

Federal State Institution of Education "Russian University of Transport Moscow, Russia

Moscow Technical University of Communication and Informatics, Moscow, Russia

Abstract. The torsion of an inhomogeneous cylindrical rod with an elliptic cross section is considered. The stress state of the rod was determined, the field of the characteristics of the main relations was constructed, the lines of stress rupture were found.

Keywords: torsion, stress, plasticity, anisotropy, inhomogeneity.

REFERENCES

- [1] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. *Teoriya plastichnosti*. Vlydivostok: Dal'nauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D. *Teoriya ideal'noj plastichnosti*. M.: Nauka, 1966. (in Russian).
- [3] Derevjannyh E. A., Mironov B. G. Ob obshhikh sootnoshenijah teorii kruchenija anizotropnyh sterzhnej // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva*. Serija: *Mehanika predel'nogo sostojaniya*. 2012. No. 4. P. 108–112. (in Russian).
- [4] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. O kruchenii cilindricheskikh anizotropnyh sterzhnej // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva*. Serija: *Mehanika predel'nogo sostojaniya*. 2011. No 9. P. 150–155. (in Russian).
- [5] Ol'shak V., Ryhlevskij Ja., Urbanovskij V. *Teoriya plastichnosti neodnorodnyh tel*. M.: Mir, 1964. 156 p. (in Russian).
- [6] Mironov B. G., Mironov Yu. B. About torsion of piecewise isotropic prismatic cores with inclusion // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva*. Serija: *Mehanika predel'nogo sostojaniya*. 2017. No 2. (32). P. 18–22. (in Russian).
- [7] Mironov B.G. O kruchenii tsilindricheskogo neodnorodnogo sterzhnya s krugovym secheniyem // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.YA. Yakovleva*. Seriya: *Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*. 2017. No 3(33). P. 95–100. (in Russian).

Mironov Boris Guryevich

e-mail: mironov.boris.21@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Federal State Institution of Education "Russian University of Transport Moscow, Russia.

Mironov Yuriy Borisovich

e-mail: mistifm@gmail.com, Ph. D., Moscow Technical University of Communication and Informatics (MTUCI), Moscow, Russia.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chgpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига, Латвия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Президент Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского Леонид Юрьевич Коссович. К 70-летию со дня рождения.....	5
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Законы сохранения в теориях гиперболической термоупругости, следующие из вариационных симметрий действия.....	18
<i>Немировский Ю. В.</i> Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций	26
<i>Потянихин Д. А., Марьин Б. Н.</i> О напряженно-деформированном состоянии трубчатой заготовки при раздаче по пуансону седловидной формы	38
<i>Бормотин, К. С., Вин Аунг</i> Метод решения обратной задачи в процессе обтяжки панели.....	47
<i>Абашкин Е. Е., Жилин С. Г., Комаров О. Н., Богданова Н. А.</i> Влияние теплового режима на напряженно-деформированное состояние элементов неразъемной металлоконструкции, полученных при электродуговом и алюмотермитном воздействиях	58
<i>Козин В. М., Рогожникова Е. Г.</i> Увеличение возможностей резонансного метода разрушения ледяного покрова за счет использования интерференции возбуждаемых изгибно-гравитационных волн	69
<i>Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г., Пфаненштиль Н. Г.</i> Экспериментальное изучение влияния геометрических параметров на устойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим материалом, при изгибе поперечной силой	79
<i>Прокудин А. Н.</i> Вязкопластическое течение во вращающемся диске	91
<i>Соколова М. Ю., Христин Д. В., Рудаков В. В.</i> Нелинейная модель пластин из композиционных материалов	100
<i>Баженов В. Г., Кибец А. И., Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г.</i> Экспериментальное исследование упругопластического выпучивания подкрепленных цилиндрических оболочек с наполнителем под действием поперечных сил.....	107
<i>Каинг М., Кузнецов С. А., Ткачева А. В.</i> Об эволюции температурных напряжений в условиях запрессовки диска в разогретую круглую пластину...	116
<i>Севастьянов Г. М.</i> Предельные состояния разномодульной упруго-пластической трубы	127

<i>Потянихин Д. А., Дубенко Е. М.</i> Расчет напряженно-деформированного состояния заклепочного соединения, полученного с помощью азотного охлаждения заклепки.....	134
<i>Козин В. М., Кипин Д. Ю.</i> Экспериментальные исследования зависимости высоты изгибно-гравитационных волн при их распространении в сторону берега от угла наклона дна.....	145
<i>Алиев М. М., Шафиева С. В., Волкова О. Н., Шипилова О. А.</i> Разработка критериев прочности изотропных и армированных полимеров методом разложения в ряды	152
<i>Немировский Ю. В., Станиславович А. В.</i> Некоторые задачи теплопроводности прямоугольных многослойных композитных пластин	162
<i>Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б.</i> Кручение неоднородного цилиндрического стержня с эллиптическим сечением.....	173
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	178
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	181
СОДЕРЖАНИЕ	183

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2018. № 3 (37)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 21.09.2018. Выход в свет 28.09.2018.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 17,75.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском отделе ФГБОУ ВО «Чувашский
государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38