

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал
№ 1(39)
январь – март 2019 г.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Е. В. Ломакин, Л. А. Максимова,
А. А. Маркин, Г. К. Михайлов, Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин,
В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин,
А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж
(Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

Адрес редакции и издательства: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1184

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2019

Б. Г. Миронов, Ю. Б. Миронов

К ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ СОСТАВНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия

Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе исследовано кручение анизотропного и составного стержней с эллиптическим сечением при условии пластичности Мизеса-Хилла. Получены интегралы, определяющие напряженное состояние анизотропного стержня, построено поле характеристик основных соотношений для анизотропного стержня при условии пластичности Мизеса-Хилла, получены соотношения вдоль характеристик, найдена огибающая семейства характеристик, определен предельный крутящий момент. Для составного стержня определено напряженное состояние, построено поле характеристик, получены соотношения вдоль характеристик и найдены линии разрыва напряжений.

Ключевые слова: напряжение, пластичность, условие пластичности, деформация, анизотропия, неоднородность.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.001

УДК: 539.735

Введение.

Кручение представляет собой один из видов деформации тел, характеризующийся взаимным поворотом его поперечных сечений под влиянием моментов, действующих в этих сечениях. Кручение стержней в инженерной практике встречается довольно часто, особенно в машиностроении. На кручение работают валы двигателей и станков, оси вагонов и локомотивов, винтовые пружины и т.п. Теория кручения изотропных и анизотропных стержней принадлежит к числу разработанных разделов теории идеального жесткопластического тела. Вместе с тем, исследований по теории кручения

© Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. 2019

Миронов Борис Гурьевич

e-mail: mirovov.boris.21@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Миронов Юрий Борисович

e-mail: mistifn@gmail.com, кандидат физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-41-210272.

Поступила 20.02.2019

неоднородных стержней недостаточно. В частности, исследования по теории кручения изотропных и анизотропных идеальных жесткопластических стержней представлены в работах [1]-[4]. Кручение неоднородных и составных стержней рассмотрены в работах [5]-[7]. Результаты, полученные в работе, могут быть применены в машиностроении при определении предельных нагрузок на стержень в результате кручения, при решении новых задач теории предельного состояния, при расчетах несущей способности различных тел и конструкций.

Основные результаты Рассмотрим цилиндрический стержень, контур L поперечного сечения которого есть эллипс (см. рис. 1а)

$$L : \frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} = 1. \quad (1)$$

Образующие стержня параллельны оси z . Предположим, что стержень состоит из анизотропного идеального жесткопластического материала. Стержень закручивается вокруг своей оси, боковая поверхность стержня свободна от нагрузок.

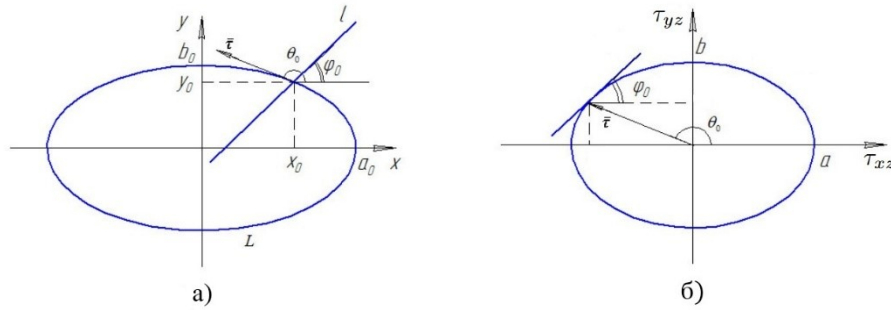


Рис. 1. Сечение анизотропного стержня с характеристикой и кривая текучести.

Напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется следующими значениями компонент напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Предположим, что условие пластичности задано в виде (см. рис. 1б)

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b^2} = 1, \quad (3)$$

а единственное уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Пусть точка $(x_0, y_0) \in L$, и через нее проходит характеристика l соотношения (4).

Согласно [3], [4] и [5] уравнение семейства характеристик l имеет вид

$$a^2 b_0^2 x_0 (y - y_0) - a_0^2 b^2 y_0 (x - x_0) = 0, \quad (5)$$

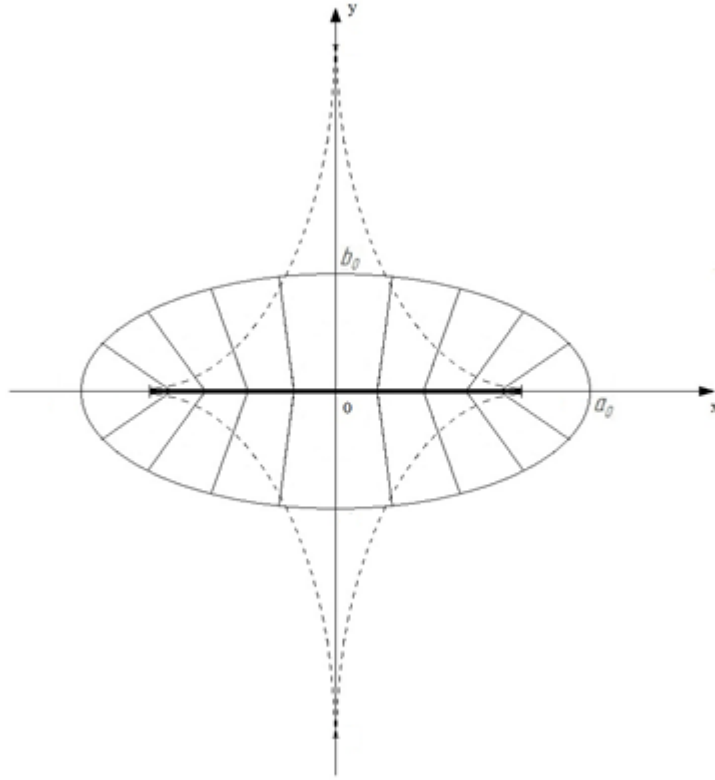


Рис. 2. Поле характеристик и огибающая.

а вдоль характеристик компоненты напряжения задаются в виде

$$\tau_{xz} = -\frac{a_0^2 a b y_0}{\sqrt{a_0^4 b^2 y_0^2 + b_0^4 a^2 x_0^2}}, \quad \tau_{yz} = \frac{b_0^2 a b x_0}{\sqrt{a_0^4 b^2 y_0^2 + b_0^4 a^2 x_0^2}}. \quad (6)$$

Семейство характеристик (5) имеет огибающую (см. рис. 2)

$$(a_0 b^2 x)^{\frac{2}{3}} + (b_0 a^2 y)^{\frac{2}{3}} = (a_0^2 b^2 - a^2 b_0^2)^{\frac{2}{3}}. \quad (7)$$

На рис. 2 характеристики нарисованы сплошными линиями, а огибающая характеристик – пунктирными. Отрезок EF есть линия разрыва напряжений.

В частности, если выполняется равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{a_0}{b_0}, \quad (8)$$

то соотношения (5) и (6) примут вид

$$y = \frac{y_0}{x_0} x \quad (9)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{a y_0}{b_0}, \quad \tau_{yz} = \frac{b x_0}{a_0}. \quad (10)$$

При этом огибающая (7) и линия разрыва напряжений EF вырождаются в начало координат.

Пусть

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (11)$$

Тогда

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad (12)$$

Положим

$$x_0 = \rho_0 \cos \varphi_0, \quad y_0 = \rho_0 \sin \varphi_0 \quad (13)$$

где

$$\rho_0 = \frac{a_0 b_0}{\sqrt{b_0^2 \cos^2 \varphi_0 + a_0^2 \sin^2 \varphi_0}}. \quad (14)$$

Согласно (11)-(49) соотношения (9), (10) примут вид

$$\varphi = \varphi_0 \quad (15)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{a_0 a \sin \varphi}{\sqrt{b_0^2 \cos^2 \varphi + a_0^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \tau_{yz} = -\frac{b_0 b \cos \varphi}{\sqrt{b_0^2 \cos^2 \varphi + a_0^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (16)$$

Предельный крутящий момент определим из соотношения

$$M = \iint (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) dx dy \quad (17)$$

где интегрирование берется по поперечному сечению стержня.

С учетом (11), (16) из соотношения (17) следует

$$M = \frac{2}{3} \pi a_0^2 b_0 b \quad (18)$$

Рассмотрим составной цилиндрический идеальный жесткопластический стержень. Контур сечения стержня плоскостью $z = \text{const}$ определяется соотношением (1).

Предположим, что сечение стержня состоит из двух анизотропных областей, разделенных прямой AB (см. рис. 3).

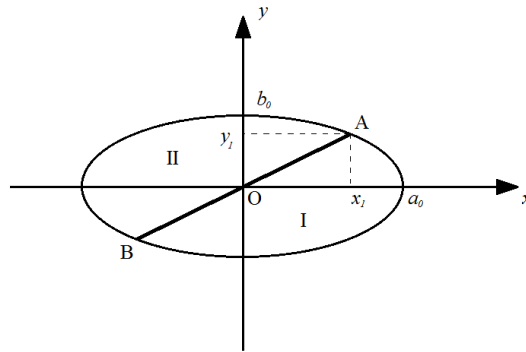


Рис. 3. Сечение составного стержня.

Стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил. Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок.

Напряженное состояние стержня определяется соотношениями (2), уравнением равновесия (4) и условиями пластичности

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a_1^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b_1^2} = 1 \quad (19)$$

в области I,

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a_2^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b_2^2} = 1 \quad (20)$$

в области II, где $b_1 \leq b_2$, $a_1 \leq a_2$

Согласно [3] характеристики соотношения (4) в каждой области есть прямые, ортогональные вектору градиента к кривым (19) и (20) соответственно.

Вектор касательного напряжения:

$$\vec{\tau} = \tau_{xz} \vec{i} + \tau_{yz} \vec{j}, \quad (21)$$

не меняется вдоль характеристик и направлен по касательной к контуру (1) поперечного сечения стержня.

Пусть

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_0}{a_0}. \quad (22)$$

Тогда уравнение характеристик в обеих областях имеет вид (14).

Согласно (10), вектор касательного напряжения $\vec{\tau}$ в областях I и II определяется соответственно соотношениями

$$\vec{\tau} = -\frac{a_1}{b_0} y_0 \vec{i} + \frac{b_1}{a_0} x_0 \vec{j}, \quad (23)$$

$$\vec{\tau} = -\frac{a_2}{b_0} y_0 \vec{i} + \frac{b_2}{a_0} x_0 \vec{j}. \quad (24)$$

На линии неоднородности неизбежен скачок касательных напряжений. Поэтому при переходе через линию AB вектор касательного напряжения $\vec{\tau}$, а соответственно и характеристики соотношения (4) меняют свое направление. А это приводит к дополнительным линиям разрыва напряжений области II (рис. 3), выходящим из точек A и B

Пусть точка A имеет координаты (x_1, y_1) а точка $B - (-x_1 - y_1)$. Тогда

$$tg\varphi_1 = \frac{y_1}{x_1}, \quad \rho_1 = \frac{a_0 b_0}{\sqrt{b_0^2 \cos^2 \varphi_1 + a_0^2 \sin^2 \varphi_1}} \quad (25)$$

где φ_1 – угол, образованный линией OA с осью Ox , ρ_1 – расстояние от точки O до точки A

Вектор касательного напряжения $\vec{\tau}_2^{\rightarrow}$ в области, ограниченной замкнутой кривой $OACO$, определяется соотношением

$$\vec{\tau}_2^{\rightarrow} = \left(\frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{b_0} x_1 - \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) \vec{i} + \left(\frac{b_1}{a_0} x_1 + \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{a_0} y_1 \right) \vec{j}. \quad (26)$$

Характеристики в этой области задаются уравнением

$$b_2^2 \left(\frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{b_0} x_1 - \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) x + a_2^2 \left(\frac{b_1}{a_0} x_1 + \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{a_0} y_1 \right) y = const \quad (27)$$

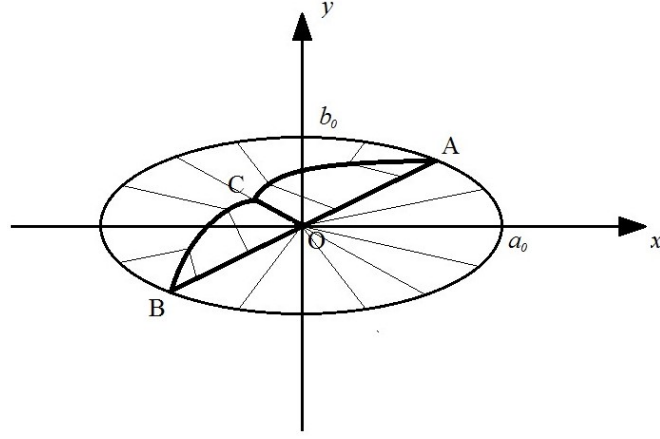


Рис. 4. Поле характеристик и линии разрыва напряжений.

Уравнение линии разрыва напряжений AC имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{b_2}{b_0} \sqrt{b_0^2 x^2 + a_0^2 y^2} - \left(\frac{b_1}{a_0} x_1 + \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{a_0} y_1 \right) x + \\ + \left(\frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{b_0} x_1 - \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) y = a_0 (b_2 - b_1). \end{aligned} \quad (28)$$

Вектор касательного напряжения $\vec{\tau}_2''$ в области, ограниченной замкнутой кривой $OBCO$, определяется соотношением

$$\vec{\tau}_2'' = \left(\frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{b_0} x_1 + \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) \vec{i} + \left(-\frac{b_1}{a_0} x_1 + \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{a_0} y_1 \right) \vec{j}. \quad (29)$$

Характеристики в этой области задаются уравнением

$$b_2^2 \left(\frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{b_0} x_1 + \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) x + a_2^2 \left(-\frac{b_1}{a_0} x_1 + \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{a_0} y_1 \right) y = const \quad (30)$$

Уравнение линии разрыва напряжений BC имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{b_2}{b_0} \sqrt{b_0^2 x^2 + a_0^2 y^2} + \left(\frac{b_1}{a_0} x_1 - \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{a_0} y_1 \right) x + \\ + \left(\frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{b_0} x_1 + \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) y = a_0 (b_2 - b_1). \end{aligned} \quad (31)$$

Точка C определяется из соотношений (33) и (36). Отрезок OC является линией разрыва напряжений. На рис. 4 характеристики основных соотношений нарисованы тонкими линиями, а линии разрыва напряжений – жирными.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Москва: Наука, 1966. 232 с.
- [3] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2012. №4(76). С. 108–112.
- [4] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. К вопросу о кручении анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2015. №1(22). С. 197–200.
- [5] Ольшак В., Рыхлевский Я. , Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. Москва: Мир, 1964.
- [6] Миронов Б. Г. О кручении цилиндрического неоднородного стержня с круговым сечением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. №3(33). С. 95–100.
- [7] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. К Кручение неоднородного цилиндрического стержня с эллиптическим сечением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 173–177.

B. G. Mironov, Yu. B. Mironov

ON THE THEORY OF TORSION OF COMPOSITE CYLINDRICAL RODS

Federal State Institution of Education «Russian University of Transport», Moscow, Russia

Moscow Technical University of Communication and Informatics, Moscow, Russia

Abstract. In the work, the torsion of anisotropic and composite rods is investigated. with elliptic section, subject to the von Mises-Hill plasticity. Received integrals determining the stress state of an anisotropic rod, a field of characteristics of the basic relations for an anisotropic rod is constructed under the condition of the Mises-Hill plasticity, we obtain relations along characteristics, found the envelope of the family of characteristics, defined ultimate torque for a composite rod, the stress is determined state, built field of characteristics, obtained ratios along characteristics and found the line break stress.

Keywords: stress, plasticity, plasticity condition, deformation, anisotropy, heterogeneity.

REFERENCES

- [1] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. The theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian)
- [2] Ivlev D. D. The theory of perfect plasticity. Moscow: Nauka, 1966. 232 p. (in Russian)
- [3] Derevyannyh E. A., Mironov B. G. On general relations of anisotropic torsion theory rods // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2012. №4 (76). P. 108–112. (in Russian)
- [4] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. On the question of torsion of anisotropic rods // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. №1 (22). P. 197–200. (in Russian)
- [5] Olshak V., Rykhlevsky Ya., Urbanovsky V. The theory of plasticity of inhomogeneous bodies. Moscow: Mir, 1964. (in Russian)
- [6] Mironov B. G. On the torsion of a cylindrical inhomogeneous rod with a circular section // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2017. №3 (33). P. 95–100. (in Russian)
- [7] Mironov B. G., Mironov Yu. B. K Torsion of a heterogeneous cylindrical rod with elliptical section // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2018. No. 3 (37). P. 173–177. (in Russian)

Mironov Boris Guryevich

e-mail: mironov.boris.21@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Federal State Institution of Education "Russian University of Transport Moscow, Russia.

Mironov Yuriy Borisovich

e-mail: mistifm@gmail.com, Ph. D., Moscow Technical University of Communication and Informatics (MTUCI), Moscow, Russia.

Ю. В. Немировский

РАЦИОНАЛЬНОЕ СОГЛАСОВАНИЕ СТРУКТУР АРМИРОВАНИЯ И ПОЛЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ОСЕВОМ НАГРУЖЕНИИ КОМПОЗИТНЫХ СТЕРЖНЕЙ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

Аннотация. Для композитных стержней с произвольными постоянными поперечными сечениями и кусочно-постоянными вдоль оси усиливающими структурами различной фазовой природы нагружаемых осевыми нагрузками, установлены общие зависимости между параметрами геометрических структур, физико-механических характеристик материалов и координатами приложения осевых нагрузок, обеспечивающих рациональное по сечению поле деформаций. На основании концепции слабейшего звена, сформулированы критерии определения первой (предельной упругой) и второй предельной нагрузки (нагрузки предразрушения).

Ключевые слова: композитные гибридные стержни, металло-пластики, бетоно-пластики, дерево-пластики, металло-керамические структуры, критерии предельных деформаций, предельные нагрузки.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.002

УДК: 539.374

Введение.

Прямолинейные стержни постоянного и переменного сечения широко используются в качестве опорных и соединительных элементов в различных отраслях машиностроения, авиа- и судостроения, в гражданских и промышленных строительных объектах. В процессе эксплуатации они подвергаются интенсивным кратковременным силовым, температурным, химическим и кинематическим воздействиям и силу производства однотипных серийных элементов к ним предъявляются повышенные требования надежной эксплуатации при кратковременных и длительных режимах. При

© Немировский Ю. В., 2019

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 17-41-210272, 19-01-00038.

Поступила 11.02.2019

современных экономических условиях эти требования практически не могут быть реализованы при использовании традиционных конструкционных материалов и поэтому в последние десятилетия активно развиваются технологии создания гибридных композиционных конструкций, в которых материалы различной физической природы могут работать совместно для достижения единой цели: длительной и надежной эксплуатации при разумных расходах на ее поддержание. В настоящее время разработаны простые технологические приемы склейки, сварки, наплавки, напыления тонких покрытий, высокотемпературной поверхностной обработки, химической пропитки, технологии производства дисперсно-упрочненных и направленно-армированных материалов на основе процессов склейки, выкладки или намотки тонких лент или волокон различной физической природы [1-27]. С технологической точки зрения на сегодняшний день можно сформировать без особых ограничений практически любые по форме гибридные конструкции из выбранных по физической природе типов материалов с заранее определенной топологией их расположения, однако при этом отсутствуют методы прогнозирования в заданных режимах эксплуатации возникающих полей внутреннего сопротивления и их изменений при изменении внешних полей воздействия и внутренней структуры. Для их разработки необходимо проводить серии контрольных испытаний образцов-свидетелей для каждого из входящих фазовых материалов, сформировать требования к последующим внешним температурно-силовым воздействиям, критерии предельного деформирования и критерии приемлимых качеств созданных конструкций (по экономическим, жесткостным и эксплуатационным ограничениям). На их основе необходимо устанавливать взаимосвязи между полями внешних воздействий, внутренних топологических структур расположения фазовых материалов и геометрическими параметрами форм созданных конструкций для установления наиболее рациональных режимов эксплуатации. Реализовать подобную программу исследований сегодня практически невозможно. Прежде всего потому, что для широкого класса материалов можно получить надежную информацию по их физико-механическим характеристикам лишь на основе испытаний однородных одномерных образцов свидетелей [1, 2, 6-13, 16-23, 26-28]. Поэтому мы рассмотрим сформулированную проблему для длинных гибридных стержней, нагружаемых осевыми нагрузками сжатия или растяжения.

1. Формулировка задачи и основные уравнения.

Рассмотрим призматический или цилиндрический гибридный стержень с площадью поперечного сечения $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$, где S_i – площадь поперечного сечения i -го фазового материала (изотропного, дисперсно-упрочненного, слоистого, слоисто-волокнистого) и будем связывать со стержнем систему декартовых координат x, y, z так, чтобы ось x проходила через точку образующей стержня параллельно линии осевого нагружения, а оси y и z находились в плоскости перпендикулярной оси нагружения (рис. 1а, 1б).

Предполагается, что все фазовые включения имеют формы цилиндров или призм с осями параллельными оси x , их физико-механические характеристики не зависят от координаты x , но могут зависеть от координат y, z , а поперечные размеры всех фазовых областей намного меньше длины рассматриваемого стержня. Будем считать, что при качественных технологических режимах изготовления, соединения фазовых материалов является идеальными (без пор и отслоений), так что при последующих нагружениях стержень деформируется как монолитная сплошная среда. Считаем также, что созданный стержень не подвергается на поверхности воздействию нормальных и

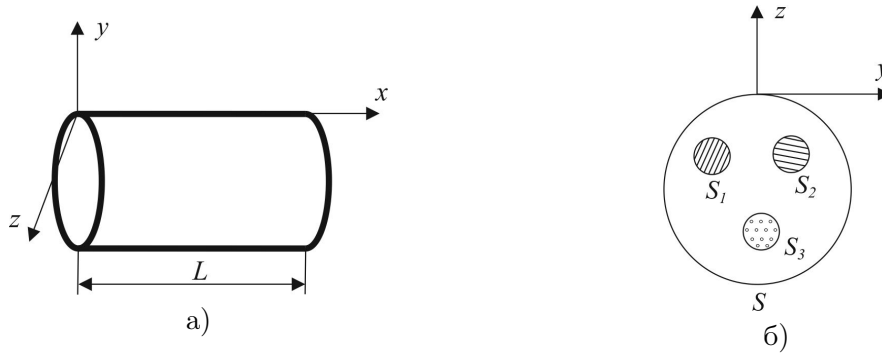


Рис. 1.

(или) касательных распределенных нагрузок. Как показывают многие расчеты и эксперименты, в этом случае все компоненты тензоров деформаций и напряжений будут существенно ниже компонентов осевой деформации ε_{xx} и осевого напряжения σ_{xx} во всех фазовых материалах.

Если ввести вектор перемещения точек на отчетной оси стержня

$$\vec{U}_0 = u_0(x)\vec{i} + v_0(x)\vec{j} + w_0(x)\vec{k}, \quad (1)$$

($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты осей выбранной системы координат), то пользуясь для рассматриваемого гибридного стержня традиционными и многократно проверенными экспериментально гипотезами Кирхгофа-Лява для осевой деформации получим выражение

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx}(x, y, z) = e_0(x) + \kappa_y z + \kappa_z y, \quad (2)$$

$$e(x) = \frac{du_0}{dx}, \quad \kappa_y = -\frac{d^2 w_0}{dx^2}, \quad \kappa_z = -\frac{d^2 v_0}{dx^2}, \quad w_0 = w_0(x). \quad (3)$$

Многие фазовые материалы ведут себя существенно по-разному в условиях растяжения и сжатия (армированные и неармированные бетоны, керамики, полимеры, дерево, модифицированные стали и цветные сплавы, армированные металлические сплавы). Некоторые приобретают свойства в процессе технологической переработки, некоторые проявляют и сохраняют их, как присущие по своей физической природе [1-23, 26-28].

Поэтому для i -го фазового материала будем использовать законы деформирования в форме

$$(\sigma_{xx})_i = A_i(x, y)\varepsilon + B_i(x, y)\varepsilon^2, \quad (4)$$

$A_i(x, y), B_i(x, y)$ – известные функции, а ε определяется по формулам (2), (3).

Поля напряжений (4) порождают в сечении стержня усилие N и моменты M_y, M_z внутреннего сопротивления

$$N = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} (\sigma_{xx})_i dydz = C_1 e + C_2 \kappa_y + C_3 \kappa_z + C_4 e^2 + C_5 \kappa_y^2 + C_6 \kappa_z^2 + \\ + C_7 \kappa_y \kappa_z + C_8 e \kappa_y + C_9 e \kappa_z, \quad (5)$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} (\sigma_{xx})_i z dydz = D_1 e + D_2 \kappa_y + D_3 \kappa_z + D_4 e^2 + D_5 \kappa_y^2 + D_6 \kappa_z^2 + \\ + D_7 \kappa_y \kappa_z + D_8 e \kappa_y + D_9 e \kappa_z, \quad (6)$$

$$M_z = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} (\sigma_{xx})_i y dydz = E_1 e + E_2 \kappa_y + E_3 \kappa_z + E_4 e^2 + E_5 \kappa_y^2 + E_6 \kappa_z^2 + \\ + E_7 \kappa_y \kappa_z + E_8 e \kappa_y + E_9 e \kappa_z, \quad (7)$$

где

$$C_1 = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} A_i(y, z) dydz, \quad C_2 = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} A_i(y, z) dydz, \\ C_3 = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} A_i(y, z) y dydz, \quad C_4 = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} B_i(y, z) dydz, \\ C_5 = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} B_i(y, z) z^2 dydz, \quad C_6 = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} B_i(y, z) y^2 dydz, \\ D_1 = C_2, \quad D_2 = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} A_i(y, z) z^2 dydz, \quad D_3 = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} A_i(y, z) y z dydz, \\ D_4 = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} B_i(y, z) z dydz, \quad D_5 = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} B_i(y, z) z^3 dydz, \\ D_6 = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} B_i(y, z) y z^2 dydz, \quad D_7 = 2 \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} B_i(y, z) y z^2 dydz, \\ D_8 = 2 \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} B_i(y, z) z^2 dydz, \quad D_9 = 2 \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} B_i(y, z) y z dydz, \quad (8)$$

$$E_1 = C_3, \quad E_2 = D_3, \quad D_3 = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} A_i(y, z) y^2 dydz, \quad E_4 = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} B_i(y, z) y dydz,$$

$$E_5 = D_6, \quad E_6 = \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} B_i(y, z) y^2 z dydz, \quad E_7 = 2 \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} B_i(y, z) y^2 z dydz,$$

$$E_8 = 2 \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} B_i(y, z) y z dydz, \quad E_9 = 2 \sum_{i=1}^n \int \int_{S_i} B_i(y, z) y^2 dydz,$$

Если внешняя осевая сила P проходит через в точку в поперечном сечении с координатами (ξ, η) , то будем иметь выражения

$$N = P, \quad M_z = P\xi, \quad M_y = P\eta. \quad (9)$$

Соотношения (1)-(8) устанавливают связи между полями внутренней структуры, формой конструкции, действующими внешними нагрузками, напряжениями и деформациями. Поскольку поля внутренней структуры и форма связанного гибридного стержня не могут быть изменены, то создание благоприятных изменений полей деформаций и внутренних напряжений возможно лишь за счет управления внешними нагрузками.

2. Дополнительные требования к рациональным структурам.

Как отмечалось выше в процессе технологической переработки в требуемое изделие многие конструкционные материалы приобретают значительно отличающиеся как качественно, так и количественно свойства в условиях растяжения и сжатия. Естественным требованием рациональных структур должно выступать требование сохранения знака деформаций. Это возможно если линии нулевой деформации будут реализованы при необходимом нагружении на контурных или законтурных образующих линий рассматриваемого стержня. Пусть $\Phi(y_t, z_t) = 0$ — уравнение образующих линии, а (y_t, z_t) ее параметрические координаты в некоторой точке. Если эта точка будет нейтральной точкой деформации, то для нее будем иметь

$$e + z_t \kappa_y + y_t \kappa_z = 0. \quad (10)$$

Учитывая это равенство и зависимости (2)-(9) после исключения амплитуды действующих нагрузок P получим выражения для координат ξ_t, η_t согласованной границы области приложения нагрузок, для которой деформации будут сохранять знак во всем сечении стержня

$$\xi_t = \frac{r_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_2^2}{p_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_2^2}, \quad \eta_t = \frac{s_1 + s_2 \xi_2 + s_3 \xi_2^2}{p_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_2^2}, \quad (11)$$

$$\xi_2 = \frac{\xi_z}{e}, \quad \xi_1 = \frac{\xi_y}{e}, \quad \xi_1 = \frac{1}{z_t} - \frac{y_t}{z_t} \kappa_2. \quad (12)$$

Коэффициенты $p_1, p_2, p_3, r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3$ зависят от внутренней структуры $C_1, \dots, C_9, D_1, \dots, D_9, E_1, \dots, E_9$, форму образующую контур (y_t, z_t) и не зависят от величины P прилагаемого усилия. Формулы для коэффициентов могут быть легко получены и не приводятся здесь в силу громоздкости.

Для установления предельных уровней допустимого нагружения и поиска рациональных структур армирования далее необходимо сформулировать дополнительные требования по условиям работы используемых материалов. Например, требование, чтобы все используемые материалы при нагружении работали в пределах упругости. Тогда в выражениях (4) для всех фазовых материалов следует принять все $V_i(x, y) = 0$ и с учетом этого упростить все последующие соотношения, в том числе — коэффициенты p_1, \dots, s_3 в условиях согласования. Затем сканируя по t сечение стержня и решая задачу определения минимально допустимой предельной упругой деформации $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_i^0)$, где ε_i^0 — предельно упругая деформация i -го фазового материала. И затем из первой из формул (9) определить первую предельную нагрузку P_0 (предельную нагрузку упругого деформирования).

Изменяя положение координат точки приложения осевой нагрузки с учетом условий согласования полей нагружения и параметров внутренних структур можно искать максимально возможное увеличение первой предельной нагрузки. Если хотя бы для одного материала при деформировании допускается требование $B_i(x, y) \neq 0$, то далее речь можно вести лишь о второй предельной нагрузке (нагрузке предразрушения) P^* , при которой в рамках концепции слабейшего звена по вышеописанной схеме в одном из неупруго деформирующихся материалов будет достигнута допустимая предельная деформация предразрушения ε^* . Следует подчеркнуть, что достижение первой или второй предельной нагрузки не означает прекращения его функционирования. За счет перераспределения полей напряжений и деформаций между фазовыми материалами он может еще долго и успешно функционировать в ходе развития начинающегося процесса разрушения. Однако эти проблемы требуют отдельное исследование.

Отметим здесь также, что при воздействии сжимающих нагрузок для стержней превышающих некоторую критическую длину исчерпание несущей способности может наступать при амплитудах нагрузок значительно меньших чем первая или вторая предельные нагрузки за счет потери устойчивости при упругих или неупругих деформациях. Приближенное решение соответствующей задачи можно получить, используя концепцию Р.Шенли о продолжающемся догружении в момент потери устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Цискарели Г. Д. Сопротивление растяжению неармированных и армированных бетонов. М.: Государственное издательство по строительству и архитектуре, 1954. 152 с.
- [2] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетона // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. 2015. № 6. С. 5–13.
- [3] Немировский Ю. В., Батулин А. А. Расчет состояний предразрушения изгибаемых балок из разносопротивляющихся материалов // Труды НГАСУ. 2015. Т. 16. № 2(56). С. 32–44.
- [4] Немировский Ю. В. Метод расчета композитных стержневых систем из разномодульных материалов / Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Материалы V Всероссийской научной конференции. Томск: Изд-во ТГУ, 2006. С. 288–290.
- [5] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Нелинейное деформирование бетонных элементов при продольно-поперечном изгибе // Известия вузов. Строительство. 2013. № 4. С. 3–12.
- [6] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С.26–37.
- [7] Карпенко Н. И., Круглов В. М., Соловьев Л. Ю. Нелинейное деформирование бетона и железобетона. Новосибирск: Издательство Сибирского государственного университета путей и сообщений, 2002. 275 с.
- [8] Алиев М. М., Каримова Н. Г. Вариант критерия прочности для изотропных полимеров // Вестник СамГУ. Естественно-научная серия. 2008. № 3(62). С. 217–226.
- [9] Альтенбах Х., Тушнев К. Новый критерий статического прочности изотропных полимеров // Механика композитных материалов. 2001. Т. 37. № 5/6. С. 732–739.

- [10] Алиев М. М., Шифиева С. В. Новые полиномиальные критерии прочности для разнопрочных материалов // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. 2012. № 3. С. 87–91.
- [11] Алиев М. М., Шафиева С. В., Волкова О. Н., Шипилова О. А. Разработка критериев прочности изотропных и армированных полимеров методом разложения в ряды // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 152–161
- [12] Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. Москва: Машгиз, 1958. 974 с.
- [13] Немировский Ю. В., Мищенко А. В., Вохмянин И. Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. Новосибирск: Наука, 2004. 188 с.
- [14] Король В. К., Гиллергог М. С. Основы производства многослойных материалов. М.: Металлургия, 1972. 277 с.
- [15] Немировский Ю. В. Второе предельное состояние однородных и композитных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 150–159
- [16] Лихарев К. К. Сопоставление характеристик материалов при одноосном растяжении и сжатии / Сб. Расчеты на прочность в машиностроении. М.: Машгиз, 1958
- [17] Конюшко Э. М. Исследование прочности термически обработанной стали при растяжении и сжатии // Вестник машиностроения. 1955. № 2.
- [18] Хрулев В. М. Технология и свойства композиционных материалов для строительства. Учебное пособие для строительного-технологического специальности вузов. Уфа: ТАУ, 2001. 168 с.
- [19] Кржижановский В. К., Бурлов В. В., Панаматченко А. Д., Крыжановская Ю. В. Технические свойства полимерных материалов. Учебно-справочное пособие / под ред. проф. В. К. Крыжановского. 2-е издание исправл. и дополн. СПб.: Профессия, 2005. 248 с.
- [20] Новиков В. У. Полимерные материалы для строительства. Справочник. М.: Высшая школа, 1995. 448 с.
- [21] Шалун Г. В., Сурженко Е. М. Слоистые пластинки. Л.: Химия, 1978. 232 с.
- [22] Крысин В. Н., Крысин М. В. Технологические процессы формирования, намотки и склеивания конструкций. М.: Химия, 1989. 246 с.
- [23] Калинин Э. Л., Саковцева М. Б. Выбор пластмасс для изготовления и эксплуатации изделия. Л.: Химия, 1987. 416 с.
- [24] Кардашов Д. А. Синтетические клеи. М.: Химия, 1968. 592 с.
- [25] Петрова А. П. Термостойкие клеи. М.: Химия, 1977. 200 с.
- [26] Соломатов В. И., Клюкин В. И., Кочнева Л. Ф. и др. Армополимер бетон в транспортном строительстве. М.: Транспорт, 1979. 232 с.
- [28] Баженов Ю. М. Бетнополимеры. М.: Стройиздат, 1983. 472 с.
- [29] Вигдорович А. И., Сагалаев Г. В., Поздняков А. А. Древесные композиционные материалы. Справочник, 2-е изд. М.: Машиностроение, 1991. 240 с.

Yu. V. Nemirovskii

RATIONAL COORDINATION OF REINFORCEMENT STRUCTURES AND DEFORMATION FIELDS UNDER AXIAL LOADING OF COMPOSITE RODS

S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

Abstract. For composite rods with arbitrary constant cross sections and piecewise constant along the axis of the reinforcing structures various phase nature loaded with axial loads, the general dependencies between the parameters of geometric structures, physico-mechanical characteristics of materials and coordinates of application of axial loads, ensuring a rational cross-section deformation field. Based on the concept of the weakest link, the criteria for determining the first (ultimate elastic) and the second ultimate load (pre-fracture load).

Keywords: composite hybrid rods, metal-plastic, concrete-plastic, wood-plastic, metal-ceramic structures, criteria for ultimate deformations, ultimate loads.

REFERENCES

- [1] Ciccarelli G. D. Tensile strength unreinforced and reinforced concrete. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo po stroitel'stve i arkhitekture, 1954. 152 p. (in Russian)
- [2] Nemirovsky Yu. V., Boltaev A. I. Diagram of deformation of concrete and reinforced concrete // Vestnik BGTU im. V. G. Shukhov. 2015. No. 6. P. 5–13. (in Russian)
- [3] Nemirovsky Yu. V., Baturin, A. A. calculation of the prefracture States of bendable beams of raznonapravlenymi materials // Proceedings of NGas. 2015. Vol. 16. № 2(56). P. 32–44. (in Russian)
- [4] Nemirovsky Yu. V. Method of calculation of composite rod systems from multi-modular materials / Fundamental and applied problems of modern mechanics: Proceedings of the V all-Russian scientific conference. Tomsk: TSU Publishing house, 2006. P. 288–290. (in Russian)
- [5] Mishchenko A. V., Nemirovsky Yu. V. Nonlinear deformation of concrete elements in longitudinal-transverse bending. Izvestiya vuzov. Construction. 2013. No. 4. P. 3–12. (in Russian)
- [6] Nemirovsky Yu. V. pre-Limit deformation of hybrid reinforced concrete structures. Vestnik Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2018. № 3(37). P. 26–37 (in Russian)
- [7] Karpenko N. I., Kruglov V. M., Soloviev L. Yu. Nonlinear deformation of concrete and reinforced concrete. Novosibirsk: publishing House of Siberian state University of Railways and communications, 2002. 275 p. (in Russian)
- [8] Aliyev M. M., Karimova N. G. Version of the strength criterion for isotropic polymers. Vestnik SamGU. Natural science series. 2008. № 3(62). P. 217–226. (in Russian)
- [9] H. Altenbach, Tustep K. a New criterion of the static strength of isotropic polymers // Mechanics of composite materials. 2001. Vol. 37. No. 5/6. P. 732–739. (in Russian)

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

- [10] Aliev, M. M., Safieva S. V. a New polynomial failure criteria for different materials // Vestnik Kazanskogo state technical University. A. N. Tupolev. 2012. No. 3. P. 87–91. (in Russian)
- [11] Aliyev M. M., Shafieva S. V., Volkova O. N., Shipilova O. A. Development of strength criteria for isotropic and reinforced polymers by the method of decomposition into series. Vestnik Chuvash state pedagogical University. I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2018. № 3(37). P. 152–161 (in Russian)
- [12] Ponomarev S. D., Biderman V. L., Likharev K. K. and others. strength Calculations in mashinostroeni. Vol. 2. Moscow: Mashgiz, 1958. 974 p. (in Russian)
- [13] Nemirovsky Yu. V., Mishchenko A. V., vokhmyanin I. T. Rational and optimal design of layered rod systems. Novosibirsk: Science, 2004. 188 p. (in Russian)
- [14] King, V. K., Hellerwork M. S. bases for the production of multilayer materials. M.: Metallurgy, 1972. 277 p. (in Russian)
- [15] Nemirovsky Yu. V. the Second limit state of homogeneous and composite beams. Vestnik Chuvash state pedagogical University. I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2009. No. 1. P. 150–159 (in Russian)
- [16] Likharev K. K. Comparison of materials characteristics under uniaxial tension and compression / SB. Strength calculations in mechanical engineering. M.: Mashgiz, 1958 (in Russian)
- [17] Konyushko Z. M. Study of the strength of heat-treated steel in tension and compression. Vestnik mashinostroeniya. 1955. No. 2. (in Russian)
- [18] Khrulev V. M. Technology and properties of composite materials for construction. Study guide for structural-technological specialties of higher education institutions. Ufa: TAU, 2001. 168 PP. (in Russian)
- [19] Krzhizhanovsky, V. K., Burlov V. V., Primachenko A. D., Kryzhanovskaya, Yu. V. Technical properties of polymeric materials. Training and reference manual / under the editorship of Professor V. K. Kryzhanovsky. 2nd edition corrected. SPb.: Profesiya, 2005. 248 p. (in Russian)
- [20] Novikov V. U. Polymeric materials for construction. Handbook. M.: Higher school, 1995. 448 p. (in Russian)
- [21] Shalun G. V., Surzhenko E. M. Layered plates. L.: Chemistry, 1978. 232 p. (in Russian)
- [22] Krysin V. N., Krysin M. V. Technological processes of formation, winding and gluing of structures. M.: Chemistry, 1989. 246 p. (in Russian)
- [23] Kalinichev E. L., Sakovtseva M. B. The choice of plastics for the manufacture and operation of the product. L.: Chemistry, 1987. 416 PP. (in Russian)
- [24] Kardashov D. A. Synthetic adhesives. M.: Chemistry, 1968. 592 p. (in Russian)
- [25] Petrov, A. P. Heat-Resistant adhesives. M.: Chemistry, 1977. 200 pp. (in Russian)
- [26] Solomatov V. I. Klyukin V. I., Kochneva L. F. and others Hermopolitan concrete in transportation construction. M.: Transport, 1979. 232 pp. (in Russian)
- [28] Bazhenov Yu. M. Concrete Polymers. M.: Stroizdat, 1983. 472 p. (in Russian)
- [29] Vigdorovich A. I., Sagalaev G. V., Pozdnyakov A. A. Wood composite materials. Handbook, 2nd ed. M.: Mechanical Engineering, 1991. 240 p. (in Russian)

В. А. Ковалев, Е. В. Мурашкин

О ПРИНЦИПЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ В ПРОБЛЕМАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СРЕД И МЕТАМАТЕРИАЛОВ

¹ *Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия*

² *Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, г. Москва, Россия*

УДК: 539.374

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.003

Аннотация. Настоящая работа посвящена формулировкам определяющих соотношений в диссипирующих деформируемых средах. Предполагается, что рассматриваемые в работе процессы деформирования отвечают термодинамическому принципу ортогональности. Использование принципа термодинамической ортогональности в современной континуальной механике физически и геометрически оправдано при моделировании процессов теплопроводности, массопереноса, теориях упругости, пластичности и ползучести.

Последовательное использование принципа ортогональности и законов Фурье и Фика при выводе определяющих уравнений в процессах тепло- и массопереноса приводит к классическим уравнениям теплопроводности и диффузии. В теории упругости на основе принципа ортогональности можно получить определяющие соотношения Мурнагана. В математических моделях идеально-пластического тела принцип термомеханической ортогональности связан с именем Ричарда вон Мизеса. Постулирование принципа в случае пластически деформируемого тела обеспечивает выпуклость поверхности текучести и существование ассоциированного с этой поверхностью закона пластического течения. При выводе определяющих уравнений для материалов проявляющих в процессах деформирования одновременно свойства медленного крипа (ползучести) и пластичности следует обращать внимание на ассоциированность используемых при таком подходе потенциалов. В качестве примеров использования принципа термомеханической ортогональности в работе предлагаются процедуры получения нелинейных определяющих соотношений в моделях пластического течения, ползучести, связанной термоупругости, теплопереноса третьего типа.

Ключевые слова: ортогональность, пластичность, ползучесть, уравнение баланса, теплоперенос, термоупругость, метаматериалы.

Введение Современная механика континуума сталкивается с трудностями в случае термодинамически корректного описания диссипативных сред. Чаще всего определяющие соотношения в математических моделях термомеханического поведения материалов со сложной реологией постулируются на основе эмпирических предположений без привлечения формализма неравновесной термодинамики [1]. Математическое описание процессов необратимого деформирования материалов (вязкоупругости, пластичности, ползучести, тепло-массопереноса) может быть проведено в рамках классического принципа термомеханической ортогональности [2].

Формулировка принципа термомеханической ортогональности, как вариант обобщения линейной теории Онзагера (L. Onsager), встречаются в работах Циглера (H. Ziegler) [3–5]. Дальнейшее развитие эти идеи получили в работах [2, 6, 7].

В представленной работе рассматриваются возможности использования принципа термомеханической ортогональности при построении континуальной механики сложных сред и метаматериалов.

1. Пластичность

Одним из важнейших применений принципа ортогональности термодинамических потоков и сил в математической теории пластичности [7] связано с именем Ричарда вон Мизеса (Richard Edler von Mises). Принцип максимума диссипации энергии Мизеса [7–10] является основным определяющим соотношением теории. Принятие принципа максимума диссипации энергии определяет геометрическую выпуклость поверхности текучести $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ ($\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши) в пространстве напряжений Хейга–Вестергаарда. Коллинеарность вектора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и градиента поверхности текучести в точках ее гладкости, также является следствием принципа Мизеса. Математическая формулировка коллинеарности указанных векторов в пространстве напряжений определяет основной определяющий закон теории пластического течения — ассоциированный с условием текучести $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$.

В случае обобщенного тела Прандтля поверхность текучести задается соотношением [7,8]

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \Phi \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right), \quad (1)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения; $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$; Φ — некоторая функция.

Для неплотно-связанных сред, как правило, принимается следующее линейное представление для функции Φ

$$\Phi(x) = C_1 + C_2 x, \quad (2)$$

© Ковалев В. А. Мурашкин Е. В., 2019

Ковалев Владимир Александрович

e-mail: vlad_koval@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания министерства науки и высшего образования РФ (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844-а).

Поступила 12.12.2018

где C_1, C_2 — определяющие пластические константы. Величина C_1 характеризует внутреннее сцепление материала, а C_2 — внутреннее трение. При использовании функции Φ вида (2) можно получить два важных предельных случая, соответствующих известным критериям пластичности.

При $C_2 = 0$ условие (1) преобразуется к хорошо известному кусочно-линейному условию пластичности Кулона–Треска–Сен-Венана, характеризующему критерий максимального касательного напряжения [8-10]

$$f = \max \{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} - 2k = 0; \quad (3)$$

где k — предел текучести материала при чистом сдвиге.

Равенство нулю коэффициента C_1 приводит к условию Мора

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = a^2, \quad (4)$$

где a — пластическая константа материала. Критерий Мора широко используется в строительстве и в горном деле применительно к рыхлым несвязным и связным горным породам, а также применительно к обломочным цементированным горным породам.

Интерес также представляет кусочно-линейное условие пластичности Ишлинского–Ивлева¹ или условие максимального приведенного напряжения

$$f = \max \{|\sigma_1 - \sigma|, |\sigma_2 - \sigma|, |\sigma_3 - \sigma|\} - \frac{4k}{3} = 0; \quad \sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 \quad (5)$$

Условия пластичности (3) и (5) можно интерпретировать как некоторую поверхность в пространстве напряжений Хейга–Вестергаарда. В частности, условия пластичности Кулона–Треска–Сен-Венана и Ишлинского–Ивлева в пространстве главных напряжений представляются в виде шестиугольных призм вписанных одна в другую рис. 1. При этом, гладкое условие пластичности Губера–Мизеса

$$f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 8k^2 = 0. \quad (6)$$

или условие октаэдрического напряжения оказывается цилиндром вписанным в призму Кулона–Треска–Сен-Венана и описанным около призмы Ишлинского–Ивлева.

Критерий пластического течения при условии выполнения принципа максимума Мизеса можно считать пластическим потенциалом, что приводит к формулировке ассоциированного закона пластического течения в качестве общего определяющего уравнения математической теории пластического течения связывающего инкременты необратимых деформаций dp_{ij} с компонентами тензора напряжений σ_{ij} соотношением

$$dp_{ij} = (d\xi) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad dp_{ij} = (d\xi_1) \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + (d\xi_2) \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (7)$$

Здесь $d\xi, d\xi_1, d\xi_2$ — неопределенные конститuentы Лагранжа, определяемые в ходе решения конкретной краевой задачи; f, f_1, f_2 — функции текучести.

2. Медленный крип

¹Условие пластичности Ишлинского–Ивлева не обладает ясной физической интерпретацией, присущей условию Кулона–Треска–Сен-Венана. Однако, имеется ряд серьезных аргументов в пользу его рассмотрения [10-16].

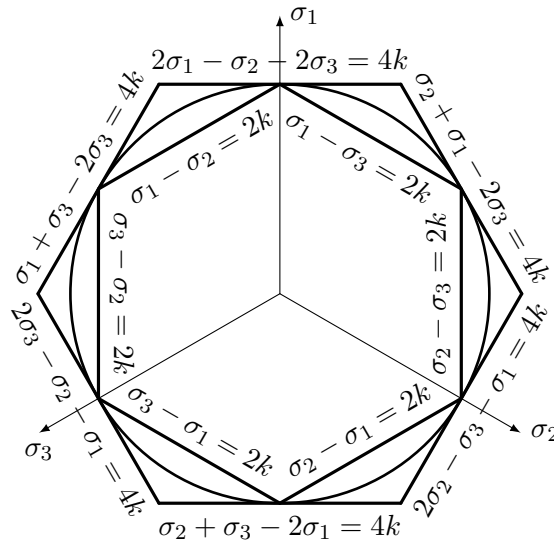


Рис. 1. Условия пластичности в проекции на октаэдрическую плоскость в пространстве главных напряжений. Окружность — условие пластичности Губера–Мизеса. Вписанный шестиугольник — условие пластичности Кулона–Треска–Сен-Венана. Описанный шестиугольник — условие пластичности Ишлинского–Ивлева

Ползучесть металлов при повышенных температурах не описывается линейными теориями. Эволюция деформированного состояния со временем при постоянном напряжении традиционно описывается кривыми ползучести, которые обычно состоят из трех участков ползучести, обычно состоящей из трех участков:

- (1) Неустановившаяся ползучесть, характеризующаяся постепенным уменьшением скорости деформации.
- (2) Установившаяся ползучесть, протекающая при постоянной скорости деформации.
- (3) Ускоренная ползучесть, главным признаком которой является возрастание скорости деформации и параллельное накопление повреждений, еще больше ускоряющее ползучесть.

При моделировании поведения материалов на этапе установившейся ползучести можно трактовать его как нелинейно вязкое. Однако, использование существующих нелинейных моделей затруднено отсутствием соответствующего математического аппарата. Особенно это характерно для стадии неустановившейся ползучести. В теории идеальной пластичности некоторый прогресс был достигнут на основе использования кусочно-линейных потенциалов скоростей деформаций. Д.Д. Ивлевым и Г.И. Быковцевым было замечено [10], что таким же способом может быть построена теория упругости и динамика вязкой жидкости. Г.И. Быковцевым [16] была указана подобная возможность для моделирования необратимого моделирования материалов.

Для составляющих тензора скоростей ползучих деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^c$ примем существование диссипативного потенциала $V(\sigma^{ij})$, тогда согласно принципу термомеханической ортогональности можем записать

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{\partial V(\sigma^{ij})}{\partial \sigma^{ij}}, \quad (8)$$

Потенциал $V(\sigma^{ij})$ в определяющем уравнении (8) можно выбрать воспользовавшись эмпирическими зависимостями. В таком случае наиболее распространенные, следующие [1,16,17]:

степенной закон ползучести Нортон–Бейли (F.H. Norton, 1929)

$$V(\sigma^{ij}) = B f^n(\sigma_{ij}). \quad (9)$$

Здесь B, n — параметры ползучести материала, B — скоростная характеристика, n — показатель нелинейности, f — функция напряжений.

экспоненциальная зависимость Людвига (P. Ludwik, 1909)

$$V(\sigma^{ij}) = B \exp(f(\sigma_{ij})). \quad (10)$$

закон гиперболического синуса Надаи (A. Nadai, 1938)

$$V(\sigma^{ij}) = B \operatorname{sh}(f(\sigma_{ij})). \quad (11)$$

степенной дробно-линейный закон Шестерикова (1984)

$$V(\sigma) = B \left(\frac{\sigma - \sigma_a}{\sigma_b - \sigma} \right)^n, \quad (12)$$

где σ_a — пороговое напряжение, характеризующего начало ползучести; σ_b — предел прочности.

При моделировании связанных свойств ползучести и пластичности следует учитывать необходимость ассоциировать функцию f в законе (5) с выбранным условием пластичности.

3. Ковариантные уравнения баланса

Описание напряженно-деформированного состояния термоупругого континуума будем проводить в лагранжевых отсчетных координатах. Конечные деформации континуума определяются преобразованием референциальной конфигурации в актуальную

$$x^k = x^k(X^\alpha, t). \quad (13)$$

Здесь обозначено: x^k — эйлеровы пространственные координаты, X^α — координаты той же точки тела в отсчетном (начальном) состоянии.

Тензоры конечных деформаций, соответствующие отображению (13) можно выразить через градиент деформации

$$x_\alpha^k = \nabla_\alpha \otimes x^k = \partial_\alpha x^k. \quad (14)$$

Здесь введено обозначение ∇_α для оператора (набла) Гамильтона в лагранжевой отсчетной конфигурации.

Выпишем систему определяющих дифференциальных балансовых уравнений нелинейной для случая связанного термоупругого тела третьего типа. Закон сохранения массы в локальной дифференциальной формулировке можно записать в виде

$$\dot{\rho} = 0. \quad (15)$$

Здесь и далее штрих слева от символа обозначает его значение в отсчетном состоянии. Уравнения баланса импульса в лагранжевых переменных имеет вид

$$\dot{\rho}\ddot{x}^k = \dot{\nabla}_\alpha S^{\alpha k}. \quad (16)$$

Здесь $S^{\alpha k} = J\sigma^{ik}X_i^\alpha$ обозначает первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа, при этом $\sigma^{ik} = J^{-1}S^{\alpha k}x_\alpha^i$ — тензор напряжений Коши, $J = \det[x_\alpha^k]$ — якобиан. Уравнения баланса внутренней энергии, следующее из второго закона термодинамики может быть получено в форме

$$\dot{\rho}\dot{u} = -\dot{\nabla}_\beta \dot{h}^\beta + S_k^\beta \dot{x}_\beta^k + \dot{\rho}q, \quad (17)$$

где u — плотность внутренней энергии, в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии, $\dot{h}^\alpha = Jh^k X_k^\alpha$ — компоненты отсчетного вектора потока тепла, вычисленного в единицу времени на единицу площади в референциальном состоянии, q — плотность объемных источников тепла. Уравнения баланса энтропии

$$\dot{\rho}\dot{s} = -\dot{\nabla}_\beta \dot{J}^\beta + \dot{\rho}\zeta + \dot{\rho}\xi, \quad (18)$$

где s — плотность энтропии, в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии; $\dot{J}^\alpha = J J^k X_k^\alpha$ — референциальный вектор потока энтропии, в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии; ζ — внешнее производство энтропии, ξ — внутреннее производство энтропии. Уравнение изменения энтропии (18) играет важную роль в неравновесной термодинамике.

Необратимость процессов накладывает ограничение на внутреннее производство энтропии

$$\xi \geq 0. \quad (19)$$

4. Связанная термоупругость

В качестве термодинамического базиса для моделирования поведения термоупругого континуума третьего типа GNIII можно выбрать [18–21]:

$$\vartheta, \quad \dot{\vartheta}, \quad \dot{\nabla}_\alpha \vartheta, \quad \dot{\nabla}_\alpha \dot{\vartheta}, \quad x_\alpha^k, \quad (20)$$

где ϑ — температурное смещение. Параметры рассматриваемого термодинамического состояния будем полагать независимыми тогда они образуют термодинамический базис. Выбор термодинамического базиса определяет идеологию конструирования разрешающей системы уравнений, составляющих математическую модель исследуемого материала.

Воспользовавшись аппаратом вариационного исчисления при учете дифференциальных уравнений (15)–(17) в качестве ограничений и использование температуры к роли множителя Лагранжа можно получить равенства соответствующих термодинамических переменных

$$\theta \dot{J}^\alpha = \dot{h}^\alpha, \quad \theta \zeta = q, \quad (21)$$

где θ — абсолютная температура.

Преобразуя систему уравнений (15)–(18) с помощью равенств (21) не сложно получить приведенное уравнение баланса энергии

$$-\dot{\rho}(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + S_k^\beta \dot{x}_\beta^k - \dot{J}^\beta \dot{\nabla}_\beta \theta = \theta \xi, \quad (22)$$

где $\psi = u - s\theta$ — объемная референциальная плотность свободной энергии Гельмгольца.

Отметим, что приведенное уравнение баланса энергии (22) справедливо для допустимых процессов при условии неотрицательного внутреннего производства энтропии

(19) и выполнении дифференциальных балансовых уравнений (15)–(18). Учитывая, что коэффициенты при переменных $\dot{\vartheta}$, $\nabla_\alpha \dot{\vartheta}$, \dot{x}_α^k должны быть равны нулю в представлении функции свободной энергии ψ в виде степенного ряда. Окончательно, можно заключить о независимости свободной энергии Гельмгольца от термодинамической переменной состояния $\nabla_\alpha \dot{\vartheta}$

$$\psi = \psi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_\alpha \vartheta, x_\alpha^k);$$

тогда, имеют место соотношения для энтропии и тензора напряжений:

$$s = -\frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial \dot{\vartheta}}}, \quad S_k^\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha^k}. \quad (23)$$

Внутреннее производство энтропии можно вычислить согласно соотношению

$$\theta \xi = - \left(J^\beta + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_\beta \vartheta} \right) \nabla_\beta \dot{\vartheta} - \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta}. \quad (24)$$

Соотношение (24) можно переписать приняв в расчет независимость свободной энергии от температурного смещения ϑ в явном виде

$$\theta \xi = - \left(J^\beta + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_\beta \vartheta} \right) \nabla_\beta \dot{\vartheta}. \quad (25)$$

5. Теплоперенос. Диссипативный потенциал

Функция диссипативного потенциала играет решающую роль в механике необратимых процессов. Определим диссипативный потенциал основываясь на принципе термодинамической ортогональности в следующем виде

$$\theta \xi = \mathcal{D} = \mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_\alpha \vartheta, x_\alpha^k, \nabla_\alpha \dot{\vartheta}). \quad (26)$$

Будем считать его функцией, зависящей термодинамической силы $-\nabla_\alpha \dot{\vartheta}$. Тогда, соответствующее определяющее уравнение в пространстве термодинамических сил, так что необратимая составляющая термодинамического потока $J^\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_\alpha \vartheta}$ будет ортогональна некоторой поверхности уровня диссипативного потенциала $\mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_\alpha \vartheta, x_\alpha^k, \nabla_\alpha \dot{\vartheta}) = \text{const}$. Причем, в тех точках, где заданная поверхность уровня будет гладкой можно записать соотношение градиентальности:

$$J^\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_\alpha \vartheta} = -\lambda^* \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_\alpha \dot{\vartheta}}, \quad (27)$$

или с другой стороны, выражая вектор потока энтропии в отсчетном состоянии

$$J^\alpha = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_\alpha \vartheta} - \lambda^* \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_\alpha \dot{\vartheta}}. \quad (28)$$

В уравнении 28 неопределенную конституенту λ^* можно вычислить воспользовавшись определяющим уравнением (26) для диссипативного потенциала \mathcal{D} по следующей формуле

$$\theta \xi = \mathcal{D} = \lambda^* (\nabla_\beta \dot{\vartheta}) \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_\beta \dot{\vartheta}},$$

или, выражая λ^* , окончательно получаем

$$\lambda^* = \frac{1}{(\overset{\vee}{\nabla}_\beta \dot{\vartheta}) \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \overset{\vee}{\nabla}_\beta \dot{\vartheta}}} \mathcal{D}. \quad (29)$$

Закон теплопроводности для термоупругого континуума типа GNIII можно выписать на основании принципа термодинамической, подстановкой (29) в соотношение (28), в виде

$$\overset{\vee}{J}^\alpha = -\frac{\partial \psi}{\partial \overset{\vee}{\nabla}_\alpha \vartheta} - \frac{\mathcal{D}}{(\overset{\vee}{\nabla}_\beta \dot{\vartheta}) \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \overset{\vee}{\nabla}_\beta \dot{\vartheta}}} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \overset{\vee}{\nabla}_\alpha \dot{\vartheta}}. \quad (30)$$

Справедливость неравенства $\xi \geq 0$ гарантируется выпуклостью поверхностей уровня $\mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \overset{\vee}{\nabla}_\alpha \vartheta, x_\alpha^k, \overset{\vee}{\nabla}_\alpha \dot{\vartheta}) = \text{const}$ в пространстве термодинамических сил.

Уравнение (30) по сути является определением закона теплопереноса в GNIII континууме. Отметим, что полученный закон удовлетворяет принципу ортогональности термодинамических потоков и сил. Полученные соотношения могут быть легко преобразованы на случай отсутствия внутренних источников производства энтропии в термоупруго деформируемой среде, т.е. при условии $\mathcal{D} = 0$ закон теплопереноса приобретает форму

$$\overset{\vee}{J}^\alpha = -\frac{\partial \psi}{\partial \overset{\vee}{\nabla}_\alpha \vartheta}, \quad (31)$$

что означает однозначное определение потока энтропии по свободной энергии Гельмгольца.

Классические модели связанных термоупругих сред GNI/СТЕ, основанные на законе теплопроводности Фурье, строятся в условиях принятия явной независимости свободной энергии ψ от температурного смещения ϑ и его градиента $\overset{\vee}{\nabla}_\alpha \vartheta$. В этом случае свободную энергию следует выписывать в виде

$$\psi = \psi(\dot{\vartheta}, x_\alpha^k).$$

Внутреннее производство энтропии, соответствующее моделям типа GNI/СТЕ следует принять в форме

$$\theta \xi = -\overset{\vee}{J}^\alpha \overset{\vee}{\nabla}_\alpha \dot{\vartheta}.$$

Окончательно, для вектора производства энтропии, можно получить уравнение, являющееся обобщением закона теплопереноса Фурье

$$\overset{\vee}{J}^\alpha = -\frac{\mathcal{D}}{(\overset{\vee}{\nabla}_\beta \dot{\vartheta}) \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \overset{\vee}{\nabla}_\beta \dot{\vartheta}}} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \overset{\vee}{\nabla}_\alpha \dot{\vartheta}}. \quad (32)$$

Отметим, что при моделировании термоупругого поведения типа GNIII деформируемых материалов с использованием принципа термодинамической ортогональности вектор потока энтропии согласно определяющему уравнению (30) зависит от двух эмпирических функций: свободной энергии Гельмгольца ψ и диссипативного потенциала \mathcal{D} . При этом возникает его естественное расщепление на две компоненты: обратимую

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \overset{\vee}{\nabla}_\alpha \vartheta}$$

и необратимую

$$-\frac{\mathcal{D}}{(\nabla_{\beta}\dot{\vartheta})}\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\nabla_{\beta}\dot{\vartheta}}\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\nabla_{\alpha}\dot{\vartheta}}.$$

Заключение

Подводя итоги, заметим, что использование принципа термомеханической ортогональности позволяет термодинамически корректно моделировать широкий круг термомеханических процессов, включая процессы тепло- и массопереноса, теории пластичности, ползучести и термоупругости. Приведены примеры наиболее используемых в расчетах поверхностей текучести для идеально пластических сред. Предложена методика получения определяющих соотношений теорий ползучести и выписаны некоторые формы диссипативных потенциалов для материалов, деформируемых в условиях установившейся ползучести. Продемонстрирован способ получения ковариантных форм балансовых уравнений для связанных термоупругих континуумов третьего типа. Для процессов теплопроводности указаны связи сопряженного потенциала рассеяния с термодинамическими силами и потоками. Предложенные выше методы построения математических моделей сложных сред успешно применялись при решении краевых задач упругопластичности [22], термоупругопластичности [23], вязкоупругопластичности [24], микрополярных сред [25].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Локощенко А. М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: МГИУ, 2007. 264 с.
- [2] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., Семенов Д. А. Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 4. Ч. 2. С. 94-128.
- [3] Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М.: Мир, 1966. 134 с.
- [4] Ziegler H. Proof of an orthogonality principle in irreversible thermodynamics // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 1970. Vol. 21. No. 6. P. 853–863.
- [5] Ziegler H. Discussion of some objections to thermomechanical orthogonality // Archive of Applied Mechanics. 1981. Vol. 50. No. 3. P. 149–164.
- [6] Жермен П. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. школа, 1983. 399 с.
- [7] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.
- [8] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности (2-е изд., перераб. и доп.). Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с. (ISBN 5-86465-366-7) (Электронная копия опубликована в электронной библиотеке системы федеральных образовательных порталов <http://window.edu.ru/window/library> (рег. N 63-01/0023).)
- [9] Радаев Ю. Н. О кинематических соотношениях, определяющих пространственное пластическое течение на грани и ребре призмы Кулона–Треска // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №6/1(46). 2006. С. 123-156.
- [10] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности // Владивосток: Дальнаука. 1998. 528 с.

- [11] Радаев Ю. Н. О дополнительном тензорном соотношении симметрии в математической теории пластичности // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. №3. 2007. С. 109–125.
- [12] Климов Д. М., Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. К 80-летию Д.Д. Ивлева // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. №2(8). Ч. 1. С. 5–38.
- [13] Радаев Ю. Н., Гудков В. А. О t -гиперболичности пространственных уравнений теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №3(37). 2005. С. 57–71. zbMATH: Zbl 1316.74011
- [14] Радаев Ю. Н. О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №6(56). 2007. С. 102–114.
- [15] Быковцев Г. И. Общие свойства уравнений нелинейной теории упругости при кусочно-линейных потенциалах // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 6. №. 3. С. 505.
- [16] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Непершин Р. И., Радаев Ю. Н., Сенашов С. И., Шемякин Е. И. Предельное состояние деформируемых твердых тел и горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 832 с.
- [17] Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Самарский ун-т, 2001.
- [18] Green A. E., Naghdi P.M. On undamped heat waves in an elastic solid // J. Thermal Stresses. 1992. Vol. 15. P. 253–264.
- [19] Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. Vol. 31. P. 189–208.
- [20] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.
- [21] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Связанная термомеханическая ортогональность в нелинейных моделях термоупругости третьего типа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 1(30) (2013), С. 207–214.
- [22] Ковтанюк Л. В., Мурашкин Е. В. Формирование полей остаточных напряжений у одиночных сферических включений в идеальной упругопластической среде // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. №. 1. С. 94–104.
- [23] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On a multi-physics modelling framework for thermo-elastic-plastic materials processing // Procedia Manufacturing. 2017. Vol. 7. С. 427–434.
- [24] Бажин А. А., Мурашкин Е. В. О ползучести и релаксации напряжений в окрестности микропоры в условиях гидростатического нагружения и разгрузки // Доклады Академии наук. 2012. Vol. 445. №. 6. С. 640–640.
- [25] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23. №. 1. P. 10–13.

V. A. Kovalev, E. V. Murashkin

**ON THE THERMOMECHANICAL ORTHOGONALITY PRINCIPLE FOR
PROBLEMS OF COMPLEX CONTINUA AND METAMATERIAL MODELING**

*Moscow City University of Management, Moscow, Russia
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

Abstract. The present study is devoted to formulations of constitutive equations for dissipative continua. The consistence of the principle of thermomechanical orthogonality and deformation processes is assumed. The application of orthogonality principle is physically and geometrically reasonable for simulation problems of plasticity, creep, elasticity and thermoconductivity.

Consequent applying of orthogonality principle and Furie's and Fick's laws for derivation of constitutive equations in heat and mass transfer leads to conventional equations of thermoconductivity and diffusion. The Murnaghan constitutive equations in elasticity can be obtain by the principle of thermomechanical orthogonality. This principle in the frameworks of mathematical plasticity theory akin to R. von Mises. The principle manifestation for plastic solids provides the convexity of yield surface and satisfaction of associated plastic flow rule. It should be noted that the creep and plastic potentials are need to be conjugated for coupled deformation processes. The procedure of constitutive equations derivations in frameworks of plastic flow, creep, coupled thermoelasticity, type-III thermoconductivity are discussed at present study as an example of the thermomechanical orthogonality principle application.

Keywords: orthogonality, plasticity, creep, balance equation, heat transfer, thermoelasticity, metamaterial.

REFERENCES

- [1] Lokoshchenko A.M. Modeling the process of creep and long-term strength of metals. M.: MGIU, 2007. 264 p. (in Russian)
- [2] Kovalev V.A., Radaev Yu.N., Semenov D.A. Bound dynamic problems of hyperbolic thermoelasticity // *Izv. Sarat. Un. New Ser. Maths. Mechanics. Computer science.* 2009. Vol. 9. I. 4. Part 2. P. 94–128. (in Russian)
- [3] Ziegler G. Extreme principles of thermodynamics of irreversible processes and continuum mechanics. M.: Mir, 1966. 134 p. (in Russian)
- [4] Ziegler H. Proof of the irreversible thermodynamics // *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*. 1970. Vol. 21. No. 6. P. 853–863.
- [5] Ziegler H. Discussion on thermomechanical orthogonality // *Archive of Applied Mechanics*. 1981. Vol. 50. No. 3. P. 149–164.
- [6] Germain P. Course of continuum mechanics. M.: Higher. school, 1983. 399 p. (in Russian)
- [7] Radaev Yu. N. The spatial problem of the mathematical theory of plasticity. Samara: Publishing House of Samara State University, 2004. 147 p. (in Russian)
- [8] Radaev Yu. N. The spatial problem of the mathematical theory of plasticity (2nd ed., pererabot and add.). Samara: Publishing House of Samara State. University, 2006. 340 p. (ISBN 5-86465-366-7) (The electronic copy is published in the electronic library of the federal educational system portals <http://window.edu.ru/window/library> (reg. N 63-01 / 0023).) (in Russian)

Kovalev Vladimir Alexandrovich

e-mail: vlad_koval@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow City University of Management, Moscow, Russia.

Murashkin Evgenii Valeryevich

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

- [9] Radaev Yu. N. On the kinematic relations that determine the spatial plastic flow on the verge and edge of the Coulomb prism - Tresca // Herald of the Samara State university. Natural science series. No. 6/1 (46). 2006. P. 123–156.
- [10] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. The theory of plasticity // Vladivostok: Dal'nauka. 1998. 528 p. (in Russian)
- [11] Radaev Yu. N. On the additional tensor relation of symmetry in mathematical plasticity theory // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. № 3. 2007. P. 109–125. (in Russian)
- [12] Klimov D. M., Kovalev V. A., Radaev Yu. N. On the 80th anniversary of D. D. Ivleva // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. №2 (8). V. 1. P. 5–38. (in Russian)
- [13] Radaev Yu. N., Gudkov V. A. On the t -hyperbolicity of the spatial equations of the theory plasticity // Bulletin of the Samara State university. Natural science series. No. 3 (37). 2005. P. 57–71. zbMATH: Zbl 1316.74011 (in Russian)
- [14] Radaev Yu. N. On the relations of Ishlinsky permutability in the mathematical theory of plasticity // Bulletin of the Samara State University. Natural science series. No. 6 (56). 2007. P. 102–114. (in Russian)
- [15] Bykovtsev G. I. General properties of the equations of the nonlinear theory of elasticity with piecewise linear potentials // Applied Mathematics and Mechanics. 1996. V. 6. No. 3. P. 505. (in Russian)
- [16] Ivlev D. D., Maksimova L. A., Nepershin R. I., Radaev Yu. N., Senashov S. I., Shemyakin E. I. The limiting state of deformable solids and rocks. M.: FIZMATLIT, 2008. 832 p. (in Russian)
- [17] Astafiev V. I., Radaev Yu. N., Stepanova L. V. Nonlinear Fracture Mechanics. Samara: Samara University, 2001.
- [18] Green A. E., Naghdi P. M. On undamped heat waves in an elastic elastic // J. Thermal Stresses. 1992. Vol. 15. P. 253–264.
- [nineteen] Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. Vol. 31. P. 189–208.
- [20] Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov: Publisher Sarat. Un-ta, 2010. 328 p.
- [21] Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Associated thermomechanical orthogonality in nonlinear models of thermoelasticity of the third type // Vestn. Himsel. state tech. un-that. Ser. Phys.-mat. Sciences. 2013. 1(30). P. 207–214. (in Russian)
- [22] Kovtanyuk L., Murashkin E. Formation of residual stress fields in single spherical inclusions in an ideal elastoplastic medium // Izv. RAN. Solid mechanics. 2009. No. 1. P. 94–104. (in Russian)
- [23] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On a multi-physics modeling processing // Thermal-elastic-plastic materials processing. 2017. Vol. 7. P. 427–434.
- [24] Bazhin A. A., Murashkin E. V. On creep and stress relaxation in the vicinity of a micropore under hydrostatic loading and unloading conditions // Reports of the Academy of Sciences. 2012. Vol. 445. No. 6. P. 640–640. (in Russian)
- [25] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23. No. 1. P. 10–13.

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Аннотация. В статье рассмотрены уравнения анизотропной теории пластического течения в пространственном случае. На основе группы непрерывных преобразований, допускаемой системой, построено инвариантное решение. В случае однородного напряженного состояния найдено новое поле скоростей. Это поле имеет функциональный произвол.

Ключевые слова: теория пластичности, анизотропия.

УДК: 539.374

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.004

Введение. Большинство используемых в производстве материалов в большей или меньшей степени обладают анизотропными свойствами. Поэтому изучение уравнений, описывающих поведение таких материалов, является важной и актуальной задачей. Системы дифференциальных уравнений, описывающие поведение анизотропных пластических материалов являются очень сложными для исследования. Анизотропия приводит к тому, что уменьшается количество симметрий, допускаемых этими уравнениями, и это сразу приводит к уменьшению количества инвариантных решений, которые можно найти для этих систем. А так, как правило, только такие решения мы и умеем строить, то и не удивительно, что известных точных решений для этих уравнений так мало. Поэтому любое новое решение, построенное для таких уравнений, обладает значительной ценностью. В предлагаемой работе построены поля скоростей для однородного напряженного состояния. Показано, что эти поля скоростей имеют функциональный произвол. Авторы надеются, что именно этот произвол позволит удовлетворять кинематическим граничным условиям, которые возникают в различных технологических и научных задачах.

© Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., 2019

Сенашов Сергей Иванович

e-mail: sen@sibsau.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Савостьянова Ирина Леонидовна

e-mail: savostyanova@sibsau.ru, кандидат педагогических наук, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Поступила 16.01.2019

Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений, описывающих пластическое течение среды Мизеса в анизотропном случае [1]

$$\partial_i \sigma_{ij} = 0, i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

$$a_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + a_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + a_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2a_{12}\sigma_{12}^2 + 2a_{13}\sigma_{13}^2 + 2a_{23}\sigma_{23}^2 = 1.$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, a_{ij} — параметры, характеризующие текущее состояние анизотропии. По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Компоненты тензора скоростей деформации e_{ij} связаны с компонентами тензора напряжений соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda e_{11} &= \lambda \partial_1 u = a_{22}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) + a_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22}), \\ \lambda e_{22} &= \lambda \partial_2 v = a_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + a_{33}(\sigma_{22} - \sigma_{11}), \\ \lambda e_{33} &= \lambda \partial_3 w = a_{11}(\sigma_{33} - \sigma_{22}) + a_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11}), \\ \lambda e_{12} &= \lambda(\partial_2 u + \partial_1 v) = 2a_{12}\sigma_{12}, \\ \lambda e_{13} &= \lambda(\partial_3 u + \partial_1 w) = 2a_{13}\sigma_{13}, \\ \lambda e_{23} &= \lambda(\partial_3 v + \partial_2 w) = 2a_{23}\sigma_{23}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости, λ — неотрицательная функция.

Известно, что система уравнений (1),(2) допускает группу непрерывных преобразований, которая порождается следующими операторами [2]:

$$\begin{aligned} X_i &= \partial_i, i = 1, 2, 3, X_4 = \partial_u, X_5 = \partial_v, X_6 = \partial_w, \\ X_7 &= x_1 \partial_v - x_2 \partial_u, X_8 = x_3 \partial_u - x_1 \partial_w, \\ X_9 &= x_2 \partial_w - x_3 \partial_v, X_{10} = x_i \partial_i, \\ X_{11} &= u \partial_u + v \partial_v + w \partial_w, X_{11} = \partial_{\sigma_{11}} + \partial_{\sigma_{22}} + \partial_{\sigma_{33}} \end{aligned} \quad (3)$$

В [2] приведены некоторые точные решения, построенные на основе алгебры Ли L_{14} (3) для системы уравнений (1),(2).

Решение уравнений. Построим еще одно инвариантное решение. Будем искать его в виде

$$\begin{aligned} u &= f_1(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d), \\ v &= f_2(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d), \\ w &= f_3(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d) \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь a, b, c, d — произвольные постоянные, f — искомые гладкие функции.

Замечание. Это решение инвариантно относительно одномерной подалгебры, порождаемой оператором $X_1 + X_2 + X_3$, при условии что

$$a + b + c = 0. \quad (5)$$

Подставляя (4) в уравнения (1), (2) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, относительно переменной $t = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d$. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_t(a\sigma_{11} + b\sigma_{12} + c\sigma_{13}) &= 0, \\ \partial_t(a\sigma_{12} + b\sigma_{22} + c\sigma_{23}) &= 0, \\ \partial_t(a\sigma_{13} + b\sigma_{23} + c\sigma_{33}) &= 0, \\ \lambda a \partial_t f_1 &= a_{22}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) + a_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22}), \\ \lambda b \partial_t f_2 &= a_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + a_{33}(\sigma_{22} - \sigma_{11}), \\ \lambda \partial_t(a f_2 + b f_1) &= 2a_{12}\sigma_{12}, \\ \lambda \partial_t(a f_3 + c f_1) &= 2a_{13}\sigma_{13}, \lambda \partial_t(b f_3 + c f_2) = 2a_{23}\sigma_{23} \end{aligned} \quad (6)$$

Из системы (6) следует, что

$$\begin{aligned} a\sigma_{11} + b\sigma_{12} + c\sigma_{13} &= const, \\ a\sigma_{12} + b\sigma_{22} + c\sigma_{23} &= const, \\ a\sigma_{13} + b\sigma_{23} + c\sigma_{33} &= const. \end{aligned} \quad (7)$$

Наиболее простое напряженное состояние, удовлетворяющее (7) и условию пластичности – однородное напряженное состояние, т.е. такой случай, когда все компоненты тензора напряжений постоянны.

Замечание. Для изотропной пластической среды соответствующие поля скоростей построены в работах [3,4].

Условие (5), в этом случае соответствует условию несжимаемости материала. Несложно показать, что однородное напряженное состояние реализуется только в случае, когда

$$f = f_1 = Af_2 = Bf_3,$$

где A, B – постоянные, f – гладкая функция. Условие (5), в силу произвольности постоянных, переходит теперь в условие

$$a + Ab + Bc = 0.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - \sigma_{33} &= \lambda(a(a_{11} + a_{22}) + Aba_{33}) \Delta^{-1}, \\ \sigma_{22} - \sigma_{33} &= \lambda(Ab(a_{22} + a_{33}) + aa_{33}) \Delta^{-1}, \\ \sigma_{11} - \sigma_{22} &= \lambda(Ab(a_{22}) - aa_{11}) \Delta^{-1}, \\ \Delta &= a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33}, \\ 2a_{12}\sigma_{12} &= \lambda(b + aA), \\ 2a_{13}\sigma_{13} &= \lambda(c + aB), \\ 2a_{23}\sigma_{23} &= \lambda(bB + cA). \end{aligned}$$

Заключение. В работе построено поле скоростей, соответствующее однородному напряженному состоянию. Это поле содержит произвольную гладкую функцию. Это еще раз подтверждает тот факт, что каждому напряженному состоянию отвечает несколько полей скоростей, в данном случае – бесконечно много.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956. 407 с.
- [2] Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск., Наука, 1985. 142 с.
- [3] Прагер В. Трехмерное пластическое течение при однородном напряженном состоянии. // Механика: Сб. переводов и обзоров иностр. лит., 1958. №3. С. 23–27.
- [4] Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Новые трехмерные пластические течения, соответствующие однородному напряженному состоянию // Сибирский журнал индустриальной математики. – Новосибирск., 2019. (в печати)

S. I. Senashov, I. L. Savostyanova

EXACT SOLUTIONS OF THE EQUATIONS OF ANISOTROPIC THEORY OF PLASTICITY

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. The equations of anisotropic theory of plastic flow in the spatial case are considered. Based on the group of continuous transformations allowed by the system, we constructed an invariant solution. In the case of a homogeneous stress state, a new velocity field is found. This field has functional arbitrariness.

Keywords: theory of plasticity, anisotropy.

REFERENCES

- [1] Hill R. Mathematical theory of plasticity. M. , Gostehizdat, 1956. 407 p. (in Russian)
- [2] Annin B. D., Bytoev V. O., Senashov S. I. Group properties of equations of elasticity and plasticity. Novosibirsk , Nauka, 1985. 142 p. (in Russian)
- [3] Prager V. Three-Dimensional plastic flow at a uniform stress state // Mechanics: Collection of translations and reviews of foreign literature. , 1958. №3. P. 23–27.(in Russian)
- [4] Senashov S. I., Savostyanova I. L. New three-dimensional plastic flows corresponding to a homogeneous stress state // Siberian journal of industrial mathematics. Novosibirsk. , 2019. (in print)

Senashov Sergei Ivanovich

e-mail: sen@sibsau.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology , Krasnoyarsk, Russia.

Savostyanova Irina Leonidovna

e-mail: savostyanova@sibsau.ru, Ph.D. in Pedagogy, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology , Krasnoyarsk, Russia.

О. Е. Сысоев¹, К. К. Кахоров¹, Е. О. Сысоев¹

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК С РАЗНЫМИ МОДУЛЯМИ УПРУГОСТИ

¹Комсомольск-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. В статье рассматривается теоретический расчет цилиндрической тонкостенной оболочки из бетона различных классов с разными модулями упругости. Конструкции в форме цилиндрической оболочки широко применяются при строительстве гидротехнических объектов, АЭС, стадионов и других большепролетных сооружений. Во время эксплуатации таких объектов на них воздействуют ветровые и снеговые нагрузки, от действия которых в том числе возникают вынужденные колебания. Наложение собственных колебаний тонкостенных оболочек и вынужденных колебаний от внешних нагрузок, которое не было учтено проектировщиком или появилось неправильными работами в ходе строительства, может приводить к аварийным ситуациям. Кроме теоретического расчета цилиндрической замкнутой тонкостенной железобетонной оболочки также приводится практическая её часть, где показано, как происходит вынужденное колебание в разных по классу бетонах и как влияет класс бетона на частотный спектр вынужденных колебаний.

Ключевые слова: цилиндрическая тонкостенная оболочка, напряженно-деформированное состояние, колебания, модуль упругости.

УДК: 624.074.434

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.005

При строительстве зданий и сооружений все чаще используются конструкции оболочной формы, что придаёт архитектуре городской среды совершенно новый облик и позволяет перекрывать большие пролеты без промежуточных опор. Но при этом

© Сысоев О. Е., Кахоров К. К., Сысоев Е. О., 2019

Сысоев Олег Евгеньевич

e-mail: fks@mail.ru, доктор технических наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Кахоров Комилдэжон Кохорович

e-mail: comil07@mail.ru, аспирант, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Сысоев Евгений Олегович

e-mail: fks@mail.ru, кандидат экономических наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Поступила 20.11.2018

во время эксплуатации оболочка будет воспринимать серьёзные циклические воздействия от длительной снеговой и ветровой нагрузки, и это будет вызывать её вынужденные колебания.

Тонкостенные оболочные конструкции из железобетона обладают достаточно высокой жёсткостью, но при длительной эксплуатации происходит процесс ползучести бетона, что может привести к потере устойчивости оболочки, т.е. происходит изменение напряженно-деформированного состояния [1].

Для анализа прочности бетона оболочек используется условие прочности (группы критерий прочности) теории Кулона–Мора как наиболее приемлемой:

$$\sigma_1 - \frac{R_{bt}}{R_b} \sigma_3 \leq \sigma_{\text{доп}}, \quad (1)$$

где σ_1, σ_3 — главные напряжения при $z = -h/2$, которая находится на верхней части оболочки, т.к. при поперечной нагруженности оболочки работают на сжатие (рис. 1).

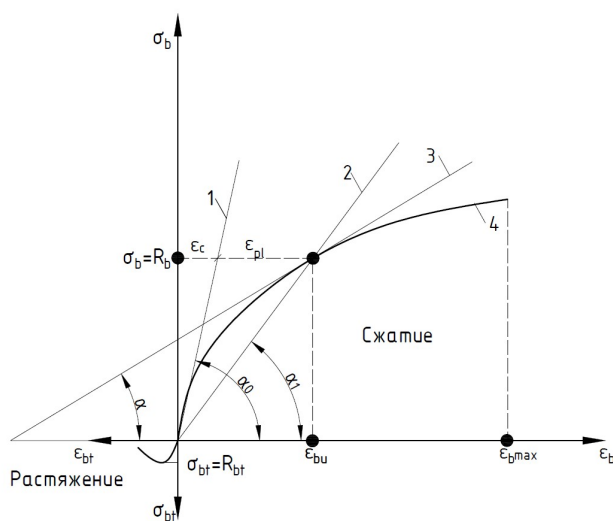


Рис. 1. Диаграмма напряжения и деформации бетона при сжатии: 1 — упругие деформации; 2 — секущая деформация; 3 — касательная деформация; 4 — полные деформации

Допускаемое напряжение $\sigma_{\text{доп}}$ может быть вычислено по следующему уравнению:

$$\sigma_{\text{доп}} = \frac{R_{bt}}{k},$$

где обобщённый коэффициент запаса прочности k принимается равным $k = 2$.

С помощью следующей формулы можно найти значения безразмерного напряжения:

$$\bar{\sigma} = \frac{a^{-2} \cdot \sigma}{E}. \quad (2)$$

Чаще всего для изготовления большепролетных конструкций, а именно тонкостенной оболочки используются бетоны, обладающие высокой прочностью (табл. 1).

Начальный модуль упругости бетона при сжатии E_b соответствует лишь упругим деформациям:

$$E_b = \text{tg } \alpha. \quad (3)$$

Таблица 1

Класс бетона	Модуль упругости бетона E , МПа	Допустимое напряжение, $\bar{\sigma}$
B60	$4 \cdot 10^4$	7,4
B55	$3,8 \cdot 10^4$	7,2
B40	$3,6 \cdot 10^4$	7,0
B30	$3,25 \cdot 10^4$	6,65

В зависимости от $\sigma - \varepsilon$ нелинейная и модуль полных деформаций, включая ползучесть — переменный геометрический — определяется тангенсом угла наклона касательной к кривой деформаций. Из этого выражения можно получить следующее уравнение:

$$E'_b = \frac{d\sigma_b}{d\varepsilon_b} = p \operatorname{tg} \alpha. \quad (4)$$

С помощью уравнения (4) и диаграммы деформации бетона (рис. 2) можно определить нелинейную величину модуля упругости.

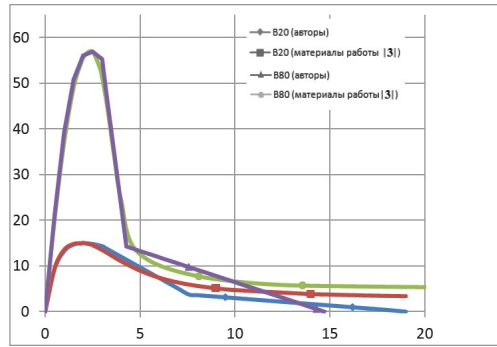


Рис. 2. Сравнение диаграмм деформирования бетона B20 и B80

Из работ [4] можно выяснить, что исследование высокопрочного бетона дает нам хороший результат, что дает нам рассмотреть в следующем примере.

В примере рассматривается цилиндрическая оболочка замкнутой формы (рис. 3), вследствие чего углы кручения, т.е. поворота $\partial w^z / \partial x$, $\partial w^z / \partial y$ будут связаны с прогибом, которые значительно превышают значения производных $\partial u^z / \partial x$, $\partial u^z / \partial y$, относящихся к деформациям. Также будем полагать, что квадратные производные $(\partial w^z / \partial x)^2$ одного порядка с составляющими $\partial u^z / \partial x$, $\partial v^z / \partial y$. В результате получим следующие зависимости:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5)$$

На основе соотношений (3) получим следующее уравнение совместности или неразрывности деформации в средней части поверхности оболочки:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (6)$$

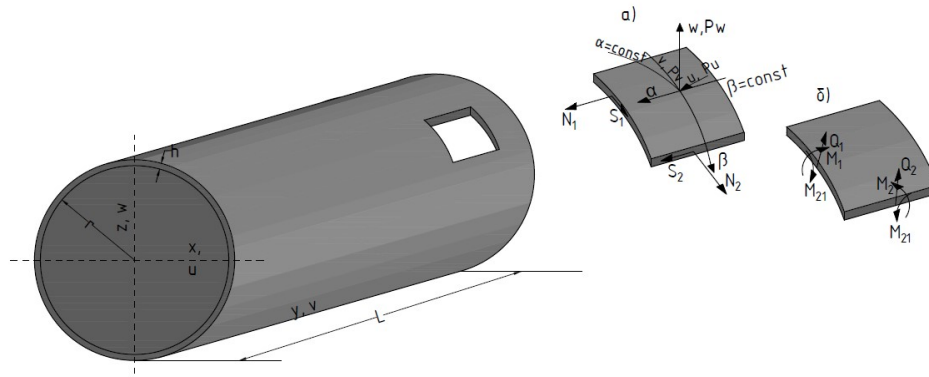


Рис. 3. Геометрия НДС цилиндрической оболочки замкнутой формы и внутренние усилия

Указанные на рис. 3 внутренние усилия и моменты в произвольной оболочке, которые являются компонентами полного моментного напряжённого состояния.

Будем считать, что соотношения, связывающие усилия и момент с деформациями, при колебаниях лежат в пределах упругого состояния, т.е., выполняется закон Гука, что дает погонным, нормальным значениям, N_2 и касательное усилия T , связанные с уравнениями деформации в средней части поверхности в зависимости:

$$N_1 = \frac{Eh}{1 - \mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \quad N_2 = \frac{Eh}{1 - \mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \quad T = Gh\gamma = \frac{Eh}{2(1 + \mu)}\gamma, \quad (7)$$

где E — модуль Юнга; G — модуль сдвига; μ — коэффициент Пуассона.

С учетом представленных зависимостей деформаций смещений и напряжений запишем связь между усилиями, действующими в срединном слое оболочки, и перемещениями:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) \right], \\ N_2 &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right], \\ T &= \frac{Eh}{2(1 + \mu)} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Погонные изгибающие моменты M_1 , M_2 равны:

$$M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_2 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (9)$$

где $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$ — цилиндрическая жесткость оболочки.

В следующем уравнении отметим движения тонких оболочек, физические и геометрические характеристики теории оболочек лежат на основе формирования геометрических уравнений движения оболочки. Во многих случаях динамические процессы в оболочке можно рассматривать без учета распространения упругих волн [1, 3]. Из этого пренебрежения тангенциальными силами инерции для исключения пересекающихся сил в какой-нибудь части оболочки можно определить с помощью следующего

выражения — уравнения моментов, которые приводят к уравнению проекций всех сил, направленные нормальной силы к срединной точки поверхности оболочки:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2 \left[\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (10)$$

где ρ — плотность материала; t — время.

Для расчетов свободных колебаний центрических замкнутых оболочек воспользуемся следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (11)$$

Уравнение, которое получили после преобразования (11), является одним из основных при решении данных задач, с помощью которого мы можем определить динамические характеристики упругих цилиндрических оболочек, а также при исследовании взаимодействия форм колебаний. Эти уравнения, полученные Маргерром, являются обобщением на случай криволинейной поверхности уравнений Кармана для упругих оболочек [5, 6].

Подставляем выражение модуля упругости при изменении НДС, т.е. на границе нелинейности бетона, уравнение (11) преобразуется к следующему виду:

$$\omega = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nabla^4 \frac{D}{h} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{1}{E'} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (12)$$

Для построения графика зависимости модули упругости на частоту колебания использовано теоретические модули упругости из справочника, где видно, как изменяется чистота колебания от прочности бетона, и тем самым можно понять, что чем прочнее бетон, тем меньше колебания в самой конструкции. Поэтому, как сказано выше, для изделия большепролетных конструкций используется высокопрочные бетоны для обеспечения долговечности в эксплуатации здания или сооружения.

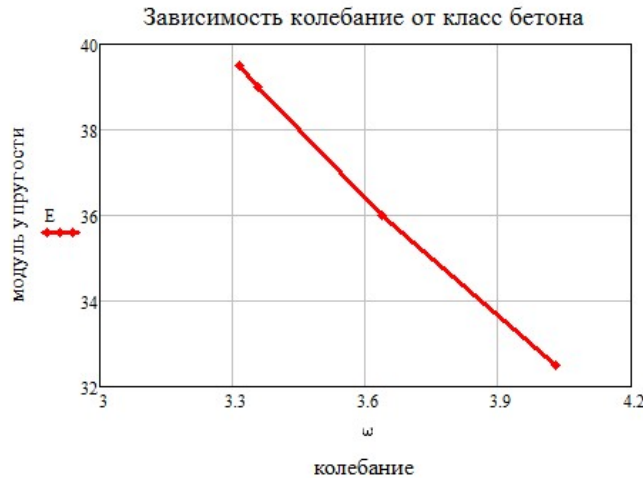


Рис. 4. График зависимости частоты колебания ω (МГц) от модуля упругости E (МПа $\times 10^3$)

Из рис. 4 можно определить, что с ростом величины модуля упругости уменьшается частота колебания в конструкции замкнутой тонкостенной оболочки.

Для исследование вынужденных колебаний цилиндрической тонкостенной оболочки в лаборатории строительных конструкций ФГБОУ ВО КнАГУ были проведены испытания тонкостенных железобетонных оболочек замкнутой и разомкнутой формы с разными классами бетона. В ходе испытаний получены результаты, отраженные на рис. 5.

Из результата анализа спектра вынужденных колебаний замкнутой оболочки можно видеть, что с ростом значения модуля упругости (класса бетона) в расстояние низких и больших частот колебаний 10–460 Гц почти затухает, также значительно уменьшается колебание в среднем диапазоне 460 Гц — 6,4 кГц. Границы низких и больших частот — это негативная область работы конструкции, которые с ростом класса бетона уменьшаются их значения, что способствует на устойчивость конструкции в целом.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Байков В. Н., Хайпе Эрхард, Рауэ Эрих. Проектирование железобетонных тонкостенных пространственных конструкций. М.: Стройиздат, 1990. 232 с.
- [2] Антуфьев Б. А. Колебания неоднородных тонкостенных конструкций: монография. М.: Изд-во МАИ, 2011. 176 с.
- [3] Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
- [4] Дзюба В. А., Глушкова Ю. С. Применение составной функции диаграммы сжатого бетона для деформационной оценки конструкций // Ученые записки КнАГТУ. 2014. № II-2. С. 109–114.
- [5] Сысоев О. Е., Добрышкин А. Ю., Кахоров К. К., Нейн С. Н. Современные испытательные стенды для бесконтактного исследования свободных колебаний замкнутых и разомкнутых цилиндрических оболочек // Ученые записки КнАГТУ. 2017. С. 110–118.
- [6] Сысоев О. Е., Кахоров К. К. Факторы, влияющие на разрушение зданий оболочечного типа // Региональные аспекты развития науки и образования в области архитектуры, строительства, землеустройства и кадастров в начале III тысячелетия: мат. Междунар. науч.-практ. конф. — 2017. — С. 55–60.
- [7] Сысоев О. Е., Добрышкин А. Ю., Нейн Сит Ньянг, Кахоров К. К. Определение состояния конструкций, расчет оболочек, строительных материалов «ОСКРО-СМ2017» // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2017613622. Заявка 2016662970 от 28.11.2016. Приоритет от 22.03.2017.
- [8] Сысоев О. Е., Добрышкин А. Ю., Нейн С. Н. Влияние присоединенной массы на вынужденные колебания разомкнутых оболочек // Ученые записки КнАГТУ. 2016. № 3.
- [9] Серёгин С. В., Сысоев О. Е. Свободные колебания тонкой круговой цилиндрической оболочки, ослабленной отверстием // Тез. докл. 2-й междунар. конф. «Живучесть и конструкционное материаловедение» (SSMS-2014, 21–23 октября 2014 г., ФГБУН «Институт машиноведения им. А. А. Благонравова» РАН, Москва). С. 66.

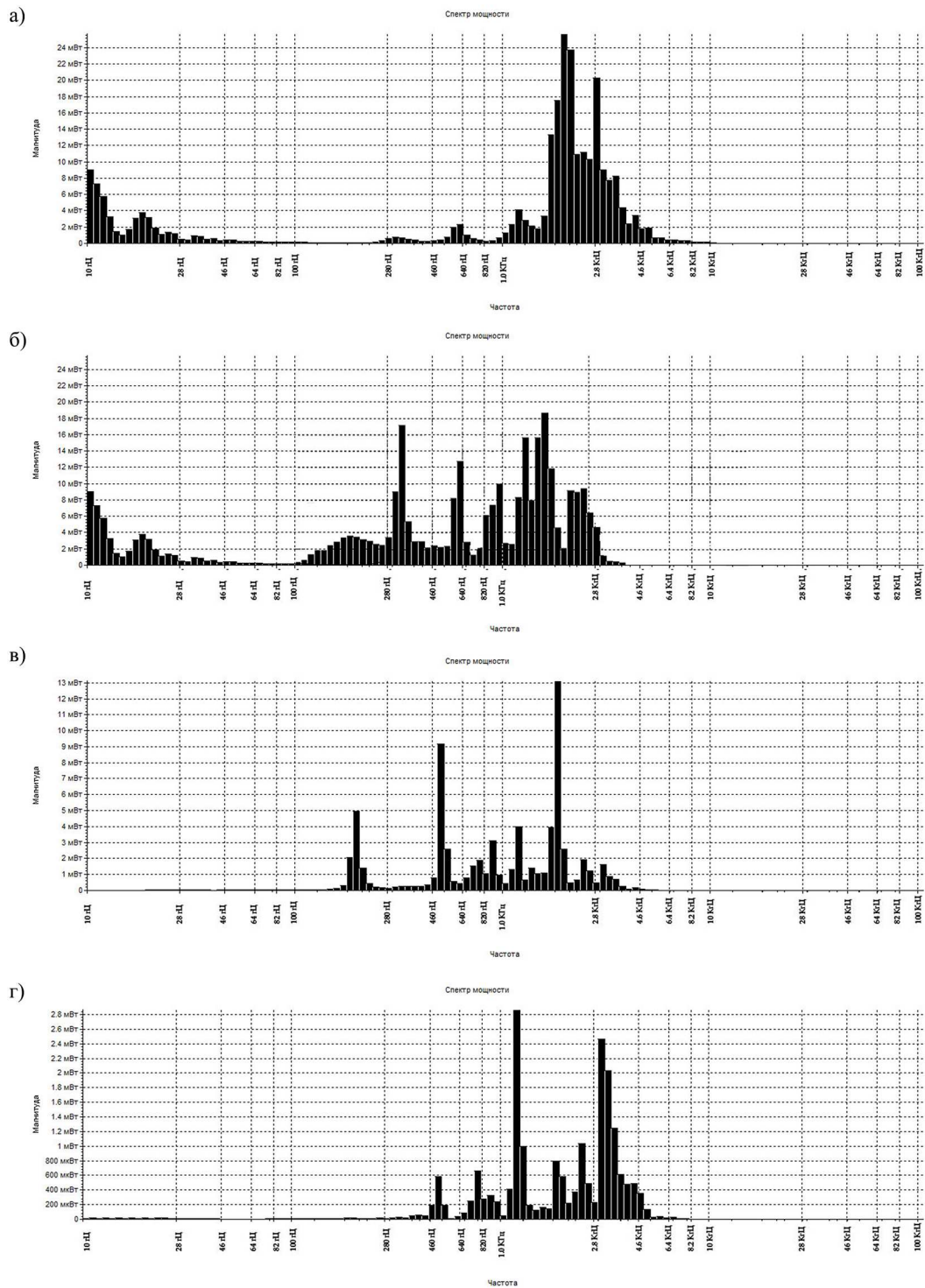


Рис. 5. Частотный спектр вынужденных колебаний замкнутой оболочки от класса бетона: а) В15; б) В20; в) В30; г) В35

O. Ye. Sysoev¹, K. Q. Qahorov¹, Y. O. Sysoev¹

THEORETICAL CALCULATION OF VIBRATIONS OF THIN-WALL FERRO-CONCRETE SHELLS WITH DIFFERENT MODULES OF ELASTICITY

¹*Komsomolsk-on-Amur of State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

Abstract. The article presents a theoretical calculation of the cylindrical thin-walled shell of concrete of different classes with different modules of elasticity. Constructions in the form of a cylindrical shell are widely used in the construction of hydraulic facilities, nuclear power plants, stadiums and other large-span structures. During the operation of such facilities, they are affected by wind and snow loads, including the work of equipment from the action of which there are forced oscillations. Imposing of own oscillations of thin-walled shells and forced vibrations from external loads, which are not taken into account by the designer or incorrect works during construction, which lead to emergency situations. In addition to the theoretical calculation of a cylindrical closed thin-walled reinforced concrete shell, a practical part of it is also given where it is shown how the forced oscillation occurs in different concrete classes and how the concrete class affects the Frequency spectrum of the forced oscillations.

Keywords: cylindrical thin-walled shell, stress-strain state, vibrations, modulus of elasticity.

REFERENCES

- [1] Baykov V. N., Hyip Erhard, Raue Erich. Design of reinforced concrete thin-walled spatial structures. M.: Stroyizdat, 1990. 232 p. (in Russian)
- [2] Antuf'ev B. A. Vibrations of inhomogeneous thin-walled structures: monograph. Moscow: Publishing house MAI, 2011. 176 p. (in Russian)
- [3] Vlasov V. Z. General theory of shells and its applications in engineering. M.-L.: Gostekhizdat, 1949. 784 p. (in Russian)
- [4] Dzuba V. A., Glushkov Y. S. Application of a composite function diagram of compressed concrete for the deformation estimation of structures // Scientific notes of KnASTU. — Komsomolsk-on-Amur: KnAGTU FSBI HPE, 2014. No II-2. P. 109–114. (in Russian)
- [5] Sysoev O. E., Dobryshkin A., Qahorov K. Q., Nyain S. Modern test stands for non-contact study of free oscillations of closed and open cylindrical shells // Scientific notes of KnASTU. Komsomolsk-on-Amur: KnAGTU, 2017. P. 110–118. (in Russian)
- [6] Sysoev O. E., Qahorov K. Q. The Factors influencing destruction of buildings of shell type // In the collection: Regional aspects of development of science and education in the field of architecture, construction, land management and cadastres at the beginning of III

Sysoev Oleg Evgenyevich

e-mail: fks@mail.ru, Doctor of Engineering, associate Professor, Komsomolsk-on-Amur of State University, Russia

Qahorov Komiljon Qahorovich

e-mail: comil07@mail.ru, graduate student, Komsomolsk-on-Amur of State University, Russia

Sysoev Evgeniy Olegovich

e-mail: fks@mail.ru, Candidate of Economic Sciences, associate Professor, Komsomolsk-on-Amur of State University, Russia

Millennium. Materials of the International scientific-practical conference. 2017. P. 55–60. (in Russian)

[7] Sysoev O. E., Dobrishkin A., Nyain S., Qahorov K. Q. To determine the condition of structures, calculation of shells of building materials "OCKPOCM2017" // Registration Certificate for computer program No 2017613622. Application 2016662970 from 28.11.2016. Priority from 22.03.2017. (in Russian)

[8] Sysoev O. E., Dobryshkin A., Nyain S. Influence of attached-tion of mass and forced oscillations of open shells // Scientific notes of KnASTU. 2016. No 3. (in Russian)

[9] Seregin S. V., Sysoev O. E. Free oscillations of a thin circular cylindrical shell weakened by a hole // Abstracts of the reports of the 2nd international conference "Survivability and structural materials science" (SSMS-2014, October 21-23, 2014) of the Federal state budgetary institution of science of the Institute of mechanical engineering A. A. Blagonravova Russian Academy of Sciences. Moscow. P. 66. (in Russian)

Н. В. Минаева

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНИЧЕСКОЙ ТРУБЫ МЕТОДОМ ВОЗМУЩЕНИЙ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Проведено исследование напряженно-деформированного состояния толстостенной конической трубы по теории малых деформаций при степенном упрочнении. Найдено решение, описывающее состояние трубы, методом малого параметра с точностью до величин второго порядка малости.

Ключевые слова: степенное упрочнение, коническая труба, малый параметр, сходимость.

УДК: 539.3

DOI: 10.26293/chgru.2019.39.1.006

Рассмотрим коническую трубу, находящуюся под действием внутреннего давления p . Ее внешний и внутренний контуры поперечного сечения в цилиндрической системе координат характеризуются функциями $r = a + k_1 f_1(Z)$ и $r = b + k_2 f_2(Z)$.

Напряженно-деформированное состояние трубы из несжимаемого материала при степенном упрочнении описывается решением следующей системы уравнений [1-3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} &= 0 \\ \sigma_\rho - \sigma_\theta &= \frac{2}{3} A e_i^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho} \right) \\ \sigma_\rho - \sigma_z &= \frac{2}{3} A e_i^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{\rho z} &= \frac{1}{3} A e_i^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

где $\rho = \frac{r}{b}$, $z = \frac{Z}{b}$, $e_i = \sqrt{2/3}((e_z - e_\theta)^2 + (e_z - e_\rho)^2 + (e_\theta - e_\rho)^2 + \frac{3}{2}(e_{\rho z}^2 + e_{\rho\theta}^2 + e_{z\theta}^2))^{1/2}$.

Поступила 10.01.2019

© Минаева Н. В., 2019

Минаева Надежда Витальевна

e-mail: nminaeva@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия

Граничные условия будут такими:

$$\begin{aligned} \sigma_n|_{\rho=\Psi_1(z)} &= -p; & \tau_n|_{\rho=\Psi_1(z)} &= 0 \\ \sigma_n|_{\rho=\Psi_2(z)} &= 0; & \tau_n|_{\rho=\Psi_2(z)} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь функции $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ определяют контур поперечного сечения в деформированном состоянии. Если считать форму сечения близкой к круговому кольцу на всем протяжении трубы, т.е. $k_1 = k_2 = 0$, то задача (1),(2) допускает решение [1, 2]

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^0 &= \frac{\alpha^{2m}(1 - \rho^{2m})}{\rho^{2m}(1 - \alpha^{2m})}p; & \sigma_\theta^0 &= \frac{\alpha^{2m}((2m - 1) + \rho^{2m})}{\rho^{2m}(1 - \alpha^{2m})}p; & \tau_{\rho z}^0 &= 0 \\ u^0 &= -\frac{c}{\rho}; & w^0 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha = \frac{a}{b}$, $c = \frac{3m}{2A} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^{m-1} p$.

Это решение можно использовать в качестве приближенного, если решение исходной задачи непрерывно зависит от функций $f_i(z)$ при $f_1(z) = f_2(z) = 0$. Для анализа подобной непрерывности, согласно [4-6], построим задачу относительно вспомогательных функций ζ_i . Она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sigma_\rho^0 + \zeta_1)}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho^0 + \zeta_1 - \sigma_\theta^0 - \zeta_2}{\rho} + \frac{\partial(\tau_{\rho z}^0 + \zeta_3)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(\sigma_z^0 + \zeta_4)}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}^0 + \zeta_3}{\rho} + \frac{\partial(\tau_{\rho z}^0 + \zeta_3)}{\partial \rho} &= 0 \\ \sigma_\rho^0 + \zeta_1 - \sigma_\theta^0 - \zeta_2 &= \frac{2}{3} A e_i^{m-1} \left(\frac{\partial(u^0 + \zeta_5)}{\partial \rho} - \frac{u^0 + \zeta_5}{\rho} \right) \\ \sigma_\rho^0 + \zeta_1 - \sigma_z^0 - \zeta_4 &= \frac{2}{3} A e_i^{m-1} \left(\frac{\partial(u^0 + \zeta_5)}{\partial \rho} - \frac{\partial(w^0 + \zeta_6)}{\partial z} \right) \\ \tau_{\rho z}^0 + \zeta_3 &= \frac{1}{3} A e_i^{m-1} \left(\frac{\partial(u^0 + \zeta_5)}{\partial z} + \frac{\partial(w^0 + \zeta_6)}{\partial \rho} \right) \\ \frac{\partial(u^0 + \zeta_5)}{\partial \rho} + \frac{u^0 + \zeta_5}{\rho} + \frac{\partial(w^0 + \zeta_6)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} e_i &= \sqrt{2/3} \left(2 \left(\frac{\partial w^0}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_6}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u^0}{\partial \rho} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial \rho} \right)^2 + 2 \left(\frac{u^0}{\rho} + \frac{\zeta_5}{\rho} \right)^2 - \right. \\ &- 2 \left(\frac{\partial w^0}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_6}{\partial z} \right) \left(\frac{u^0}{\rho} + \frac{\zeta_5}{\rho} \right) - 2 \left(\frac{\partial w^0}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_6}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial u^0}{\partial \rho} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial \rho} \right) - \\ &\left. - 2 \left(\frac{u^0}{\rho} + \frac{\zeta_5}{\rho} \right) \left(\frac{\partial u^0}{\partial \rho} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial \rho} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u^0}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial z} + \frac{\partial w^0}{\partial \rho} + \frac{\partial \zeta_6}{\partial \rho} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma_n + \zeta_n)|_{\rho=\Psi_1(z)} &= -p; & (\tau_n + \zeta_\tau)|_{\rho=\Psi_1(z)} &= 0 \\ (\sigma_n + \zeta_n)|_{\rho=\Psi_2(z)} &= 0; & (\tau_n + \zeta_\tau)|_{\rho=\Psi_2(z)} &= 0 \end{aligned}$$

Для того, чтобы решение исходной задачи (1), (2) непрерывно зависело от $f_i(z)$, необходимо, чтобы однородная линеаризованная задача, полученная из (4), имела только тривиальное решение.

После линеаризации по ζ_i , с учетом (3), (4) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta_1}{\partial \rho} + \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\rho} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \zeta_4}{\partial z} + \frac{\zeta_3}{\rho} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial \rho} &= 0 \\
\zeta_1 - \zeta_2 &= a_1 \rho^{-2(m-1)} \left(\frac{\partial \zeta_5}{\partial \rho} - \frac{\zeta_5}{\rho} \right) \\
\zeta_1 - \zeta_4 &= a_2 \rho^{-2(m-1)} \left(\frac{c(m-1) + 2}{2} \frac{\partial \zeta_5}{\partial \rho} - \frac{c(m-1)}{2\rho} \zeta_5 - \frac{\partial \zeta_6}{\partial z} \right) \\
\zeta_3 &= a_3 \rho^{-2(m-1)} \left(\frac{\partial \zeta_5}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_6}{\partial \rho} \right) \\
\frac{\partial \zeta_5}{\partial \rho} + \frac{\zeta_5}{\rho} + \frac{\partial \zeta_6}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

при $\rho = 1$ и $\rho = \alpha$

$$\begin{aligned}
\zeta_1 - \frac{2m\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}} \rho^{-2m-1} p \zeta_5 &= 0 \\
\zeta_3 - \frac{m\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}} \rho^{-2m} p \frac{\partial \zeta_5}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{6}$$

где $a_1 = a_2(c(m-1) + 1)$; $a_2 = 2a_3$; $a_3 = \frac{A}{3}(2c)^{\frac{m-1}{2}}$.

Следуя [1,2] решение задачи (5) ищем в виде:

$$\zeta_5 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z}; \quad \zeta_6 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \tag{7}$$

В результате подстановки (6) в (5) была найдена функция Ψ :

$$\Psi = C_1 \rho^2 z^2 + C_2 z^2 + C_3 \rho^{2m+2} + C_4 \rho^{2m} \tag{8}$$

Для того, чтобы решение исходной задачи (1), (2) непрерывно зависело от $f_i(z)$ при $f_i(z) = 0$, нужно, чтобы задача (5),(6) имела только тривиальное решение. В результате подстановки функций ζ_i , найденных через (8), было получено условие нетривиальности решения (5),(6) в виде:

$$\begin{aligned}
2(a_{31} - \alpha^2 a_{42})(a_{12} - a_{22}) + 2a_{21}(\alpha^{2m} - 1)(a_{42}\alpha - a_{31}) + \\
+(1 - \alpha^2)a_{21}(a_{22}\alpha^{2m} - a_{12}) = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

где $a_{12} = 2 \left(\frac{a_1}{m} + 2mp \frac{\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}} \right)$; $a_{12} = p \frac{4m}{1 - \alpha^{2m}}$; $a_{22} = 2a_1 \frac{\alpha^{-2m}}{m} + \frac{a_{21}}{2\alpha^2}$; $a_{31} = -2(a_3 + \frac{a_{21}}{4}\alpha^{2m})$; $a_{42} = -2a_3\alpha^{-2m+2} - \frac{a_{21}}{2}$.

Наименьший корень уравнения (9) обозначим через p^* . Таким образом, если внутреннее давление таково, что $p < p^*$, то решение задачи (1),(2) будет непрерывно зависеть от f_i при $f_i = 0$.

Пусть отклонение поперечного сечения от кругового кольца задано с точностью до малых параметров $\delta_1 = \frac{k_1}{b}$ и $\delta_2 = \frac{k_2}{b}$. В подобных задачах широко используется метод малого параметра [2, 7, 8]. В случае, если $p < p^*$ решение будет аналитическим по δ_1, δ_2 в окрестности точки $\delta_1 = \delta_2 = 0$, и его можно искать в виде сходящихся рядов:

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho = \sum_0^\infty \sigma_\rho^{ij} \delta_1^i \delta_2^j, \quad \sigma_\theta = \sum_0^\infty \sigma_\theta^{ij} \delta_1^i \delta_2^j, \quad \dots, \quad w = \sum_0^\infty w^{ij} \delta_1^i \delta_2^j, \\
\sigma_\rho^{00} = \sigma_\rho^0; \quad \sigma_\theta^{00} = \sigma_\theta^0; \quad \dots, \quad w^{00} = w^0
\end{aligned} \tag{10}$$

В результате подстановки (10) в (1),(2) были получены задачи для компонент приближений. Системы уравнений для первого приближения имеют вид аналогичный (5), где вместо ζ_i подставлены соответствующие напряжения и перемещения. Граничные условия будут такими:

для компонент с индексом "10"
при $\rho = 1$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{10} - \frac{2m\rho\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}}\rho^{-2m-1}u^{10} &= 0; \\ \tau_{\rho z}^{10} - \frac{m\rho\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}}\rho^{-2m}\frac{\partial u^{10}}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{11}$$

при $\rho = \alpha$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{10} - \frac{2m\rho\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}}\rho^{-2m-1}(u^{10} + f_1(z)) &= 0; \\ \tau_{\rho z}^{10} - \frac{m\rho\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}}\rho^{-2m}\left(\frac{\partial u^{10}}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) &= 0\end{aligned}$$

для компонент с индексом "01"
при $\rho = 1$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{01} - \frac{2m\rho\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}}\rho^{-2m-1}(u^{01} + f_2(z)) &= 0; \\ \tau_{\rho z}^{01} - \frac{m\rho\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}}\rho^{-2m}\left(\frac{\partial u^{01}}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) &= 0\end{aligned}\tag{12}$$

при $\rho = \alpha$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{01} - \frac{2m\rho\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}}\rho^{-2m-1}u^{01} &= 0; \\ \tau_{\rho z}^{01} - \frac{m\rho\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}}\rho^{-2m}\frac{\partial u^{01}}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

Поскольку с точностью до обозначений система уравнений совпадает с (5), то для определения приближений также воспользуемся функциями Ψ^{10} и Ψ^{01} . Их вид будет следующий

$$\begin{aligned}\Psi^{10} &= N_1\rho^2z^2 + N_2z^2 + N_3\rho^{2m+2} + N_4\rho^{2m} \\ \Psi^{01} &= M_1\rho^2z^2 + M_2z^2 + M_3\rho^{2m+2} + M_4\rho^{2m}\end{aligned}\tag{13}$$

В результате были найдены компоненты первого приближения

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{10} &= 2\frac{a_1}{m}N_1\rho^{-2m}z + 8a_3m(m+1)N_3z; \\ \sigma_\theta^{10} &= 2\frac{a_1}{m}N_1\rho^{-2m}z - 4a_1N_2\rho^{-2m-4}z + 8a_3m(m+3)N_3z; \\ \tau_{\rho z}^{10} &= 2a_3(-N_1\rho^{-2m+3} - N_2\rho^{-2m+1} + 2m(m+1)N_3\rho + 2m(m-1)N_4\rho^{-1}); \\ \sigma_z^{10} &= -4a_3((m-2)N_1\rho^{-2m+2} + (m-1)N_2\rho^{-2m} + 2m(m+1)N_3)z; \\ u_z^{10} &= -2N_1\rho z - 2N_2\rho^{-1}z; \\ w^{10} &= 2N_1z^2 + 2(m+1)N_3\rho^{2m} + 2mN_4\rho^{2m-2}\end{aligned}\tag{14}$$

Приближения "01" имеют вид аналогичный (14). Константы N_i , M_i находим, подставляя в граничные условия (11), (12). Для частного случая функций $f_1(z) = f_2(z) =$

= z системы для для определения констант будут следующими:

$$\begin{aligned} a_{11}N_1 + a_{12}N_2 + a_{13}N_3 + a_{14}N_4 &= 0 \\ a_{21}N_1 + a_{22}N_2 + a_{23}N_3 + a_{24}N_4 &= -\frac{m}{1-\alpha^{2m}}p \\ a_{31}N_1 + a_{32}N_2 + a_{33}N_3 + a_{34}N_4 &= 0 \\ a_{41}N_1 + a_{42}N_2 + a_{43}N_3 + a_{44}N_4 &= \frac{2m}{(1-\alpha^{2m})\alpha}p \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a_{11}M_1 + a_{12}M_2 + a_{13}M_3 + a_{14}M_4 &= -\frac{m\alpha^{2m}}{1-\alpha^{2m}}p \\ a_{21}M_1 + a_{22}M_2 + a_{23}M_3 + a_{24}M_4 &= 0 \\ a_{31}M_1 + a_{32}M_2 + a_{33}M_3 + a_{34}M_4 &= \frac{2m\alpha^{2m}}{1-\alpha^{2m}}p \\ a_{41}M_1 + a_{42}M_2 + a_{43}M_3 + a_{44}M_4 &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

где $a_{11} = \alpha^{2m}a_{21}$, $a_{13} = 2a_{33}$, $a_{14} = 0$, $a_{23} = 2a_{13}$, $a_{24} = 0$, $a_{32} = a_{31}$, $a_{33} = a_{34} = 4a_3m(m-1)$, $a_{41} = \alpha a_{42}$, $a_{43} = \alpha a_{33}$, $a_{44} = \alpha^{-1}a_{34}$.

Вид постоянных не приводится из-за их громоздкости.

Таким образом, найдено решение задачи (1),(2) с точностью до величин второго порядка малости:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \sigma_\rho^0 + \sigma_\rho^{10}\delta_1 + \sigma_\rho^{01}\delta_2, \\ \sigma_\theta &= \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta^{10}\delta_1 + \sigma_\theta^{01}\delta_2, \\ \tau_{\rho z} &= \tau_{\rho z}^{10}\delta_1 + \tau_{\rho z}^{01}\delta_2, \\ \sigma_z &= \sigma_z^0 + \sigma_z^{10}\delta_1 + \sigma_z^{01}\delta_2, \\ u &= u^0 + u^{10}\delta_1 + u^{01}\delta_2, \\ w &= w^{10}\delta_1 + w^{01}\delta_2 \end{aligned}$$

В качестве оценки погрешности найденного результата можно использовать какую-либо из оценок ряда Тейлора.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д. Упругопластическое состояние конической трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник МГУ. 1958. №2. С. 47–56.
- [2] Ивлев Д. Д. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
- [3] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластических деформаций. М.: Наука, 1978. 208 с.
- [4] Зачепа В. Р., Сапронов Ю. И. Локальный анализ фредгольмовых уравнений. Воронеж: Изд-во Воронежск. госунивер., 2002. 185 с.
- [5] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
- [6] Минаева Н. В. Метод возмущений в механике деформируемых тел. М.: Научная книга, 2002. 156 с.
- [7] Артемов М. А., Ковалев А. В., Спорыхин А. Н. Метод возмущений в одном классе упругопластических задач с произвольным упрочнением // ВГУ. Воронеж, 1995. 30 с. – Деп в ВИНТИ 14.03.96 №685–695.
- [8] Ибрагимов В. А., Нафагин В. А. Метод разложения по параметру нагружения в упругопластических задачах для упрочняющихся тел // Теор. и прикл. механика. 1986. №13. С. 3–7

N. V. Minaeva

**THE INVESTIGATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF A CONICAL
TUBE BY PERTURBATION METHOD**

Voronezh State University, Russia

Abstract. We conducted a study of the stress-strain state of a thick-walled conical tube on the theory of small deformations under power hardening. We found a solution describing the state of the pipe by a small parameter method up to the second order of magnitude of smallness.

Keywords: power-law hardening, conical tube, small parameter, convergence

REFERENCES

- [1] Ivlev D. D. Elastic-plastic state of the conical tube under the action of internal pressure // Vestnik MSU. 1958. №2 P. 47–56.
- [2] Ivlev D. D. Theory of hardening of the plastic body. M.: Nauka, 1971. 232p.
- [3] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. M.: Nauka, 1978. 208 p.
- [4] Zacapa R. V, Sapronov Yu. I. The local analysis fredholmian equations. Voronezh: publishing house of VSU, 2002. 185 p.
- [5] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the theory of functions and functional analysis. M.: Nauka, 1976. 542 p.
- [6] Minaeva N. V. The perturbation Method in mechanics of deformable bodies. M. : Nauchnaya kniga, 2002. 156 p.
- [7] Artyomov M. A., Kovalev A. V., Sporykhin A. N. The perturbation method in the same class of elastic-plastic tasks with arbitrary hardening / M.A.Artyomov, // VSU. Voronezh, 1995. 30 p. Dep. VINITI 14.03.96 №685–695.
- [8] Ibragimov V. A., Nefagin V. A. The decomposition method according to the loading parameter in elasto-plastic problems for hardening bodies // Th. and appl. mechanics. 1986. №13. P. 3–7

Minaeva Nadezhda Vitalevna

e-mail: minaeva@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

С. О. Фоминых¹

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В УПРУГОЙ ОБЛАСТИ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ И АНИЗОТРОПИИ ПО МИЗЕСУ–ХИЛЛУ

¹ Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Рассматривается двуслойная анизотропная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления. Предполагается, что материал, обладающий свойствами анизотропии по Мизесу–Хиллу, примыкает к внутренней части трубы (первый слой), второй слой обладает свойствами трансляционной анизотропии. Определены напряженное состояние трубы в упругой области, граница упругопластической зоны.

Ключевые слова: анизотропия, трансляционная анизотропия, анизотропия по Хиллу, труба, напряжение, упругая область.

УДК: 539.374

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.007

Рассмотрим двуслойную толстостенную трубу, обозначим a , b — внутренний и внешний радиусы трубы, величина c определяет границу слоев трубы (рис. 1). Предпола-

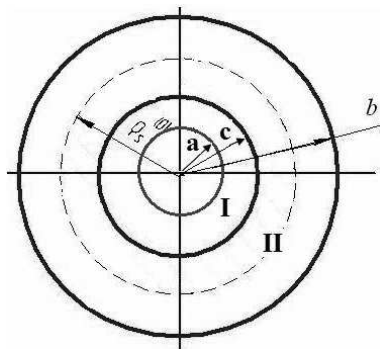


Рис. 1.

© Фоминых С. О., 2019

Фоминых Светлана Олеговна

e-mail: ermakovaso@gambler.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.01.2019

гается, что материал, обладающий свойствами анизотропии по Мизесу–Хиллу, при-
мыкает к внутренней части трубы (первый слой), второй слой обладает свойствами
трансляционной анизотропии.

Согласно [1] условия пластичности в полярных координатах имеют вид:

– в первой, внутренней области I ($a < \rho < c$, см. рис. 1):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right)^2 \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + (\tau_{\rho\theta}^p)^2 \left[\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + \\ & + \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right) \tau_{\rho\theta}^p [A-B] \sin 4\theta - K_1^2 = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

– во внешней области II ($c < \rho < b$):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \right)^2 + \tau_{\rho\theta}^2 - 2R \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \right) \cos(2\theta + \mu) - \\ & - 2\tau_{\rho\theta}^{(p)} R \sin(2\theta + \mu) + R^2 - 1 = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $A, B, K_1, K_2, k_1, k_2, k_3 = \text{const}$,

$$R = \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + k_3^2}, \quad \frac{k_1 - k_2}{2R} = \cos \mu, \quad \frac{k_3}{R} = \sin \mu.$$

Величины, имеющие размерность длины, отнесены к некоторой характерной длине.
В качестве характерной длины выберем радиус упругопластической зоны ρ_s^0 в исход-
ном нулевом приближении. Обозначим $a/\rho_s^0 = \alpha$, $b/\rho_s^0 = \beta$, ρ – текущий радиус.

Напряженное состояние в пластической области полностью определено [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)p} &= -R' \left[\frac{c}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu) + \\ & + K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \cos 4\theta, \\ \sigma_\theta^{(1)p} &= -R' \left[\frac{c}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) + 1 \right] \cos(2\theta + \mu) + \\ & + K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \frac{1}{8} \right] \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)p} &= R' \left[\frac{c}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) - 1 \right] \sin(2\theta + \mu) + \\ & + K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left(\sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - \frac{1}{4} \right] \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

На границе пластической зоны при $\rho = 1$ из (3) следует

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)p} &= R' \cos \mu \left[-c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) + 1 \right] \cos 2\theta + \\ & + R' \sin \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \sin 2\theta + \\ & + K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)p} &= R' \cos \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \sin 2\theta + \end{aligned} \quad (4)$$

$$+R' \sin \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \cos 2\theta + \\ +K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left(\sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - \frac{1}{4} \right] \sin 4\theta.$$

В дальнейшем запишем соотношения (4) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(1)p} &= a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta + a_4'' \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)p} &= a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta + b_4''' \sin 4\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} a_2'' &= R' \cos \mu \left[-c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) + 1 \right], \\ b_2'' &= R' \sin \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\ a_4'' &= K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right], \\ a_2''' &= R' \sin \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\ b_2''' &= R' \cos \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\ b_4''' &= K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left(\sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - \frac{1}{4} \right]. \end{aligned}$$

Внешняя часть трубы свободна от усилий:

$$\sigma_{\rho}^{(1)e} = \tau_{\rho\theta}^{(1)e} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \beta. \quad (6)$$

Компоненты напряжения $\sigma_{\rho}^{(1)}$, $\tau_{\rho\theta}^{(1)}$ на границе пластической зоны равны между собой:

$$\sigma_{\rho}^{(1)p} = \sigma_{\rho}^{(1)e}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(1)p} = \tau_{\rho\theta}^{(1)e} \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (7)$$

Из условий (6), (7), согласно (4) определяются компоненты напряжения в упругой области.

Согласно формулам (VI) и (VIII), приведенным в [1], возможны различные случаи соотношения коэффициентов:

1) положим, что на границе упругопластической области имеет место (5) при

$$\begin{aligned} a_2'' &= -R' \cos \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\ b_2'' &= R' \sin \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\ b_2''' &= a_4''' = a_2''' = b_4''' = 0, \end{aligned}$$

тогда напряжения будут определяться

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(1)e} &= \left(\frac{1}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) R' \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu), \\ \sigma_{\theta}^{(1)e} &= -\frac{1}{\rho^4} R' \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu), \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= \left(\frac{1}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) R' \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \sin(2\theta + \mu); \end{aligned} \quad (8)$$

2) положим, что на границе упругопластической области имеет место (5) при

$$\begin{aligned} a_2''' &= R' \sin \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\ b_2''' &= R' \cos \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\ a_2'' &= b_2'' = a_4'' = b_4'' = 0, \end{aligned}$$

тогда напряжения будут определяться

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)e} &= \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) R' \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu), \\ \sigma_\theta^{(1)e} &= -\frac{2}{\rho^4} R' \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu), \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) R' \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \sin(2\theta + \mu); \end{aligned} \quad (9)$$

3) положим, что на границе упругопластической области имеет место (5) при

$$\begin{aligned} a_4'' &= K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right], \\ b_4''' &= K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left(\sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - \frac{1}{4} \right], \\ a_2'' &= b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0, \end{aligned}$$

тогда напряжения будут определяться

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)e} &= \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4} \right) \left(K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \right) \cos 4\theta, \\ \sigma_\theta^{(1)e} &= \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \left(K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \right) \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \left\{ -K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left(\sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - \frac{1}{4} \right] \right\} \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Результирующие напряжения в упругой области определяются как сумма напряжений (8)–(10):

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)e} &= R' \left\{ \left(\frac{3}{\rho^4} - \frac{4}{\rho^2} \right) (c \cos(\sqrt{3} \ln c) - 1) + \frac{\sqrt{3}}{\rho^4} c \sin(\sqrt{3} \ln c) \right\} \cos(2\theta + \mu) + \\ &\quad + \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4} \right) \left\{ K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \right\} \cos 4\theta, \\ \sigma_\theta^{(1)e} &= -R' \left[\frac{\sqrt{3}c}{\rho^4} (\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln c) + \sin(\sqrt{3} \ln c)) - \frac{3}{\rho^4} \right] \cos(2\theta + \mu) + \\ &\quad + \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \left\{ K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \right\} \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= R' \left[c \left(\left(\frac{3}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) (\cos(\sqrt{3} \ln c) - 1) + \frac{\sqrt{3}}{\rho^4} \sin(\sqrt{3} \ln c) \right) \right] \sin(2\theta + \mu) + \\ &\quad + \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \left\{ -K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left\{ \sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right\} - \frac{1}{4} \right] \right\} \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Из [2] получим

$$\left. \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)p}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = 2K_2c, \quad \left. \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = -2K_2,$$

тогда для определения границы раздела упругопластической области в первом приближении будем иметь

$$\rho_s^{(I)} = \frac{\sigma_{\theta}^{(I)p} - \sigma_{\theta}^{(I)e}}{\frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)p}}{d\rho}} = \frac{1}{2K_2(1+c)} (\sigma_{\theta}^{(I)e} - \sigma_{\theta}^{(I)p}),$$

откуда

$$\rho_s^{(I)} = \frac{1}{K_2(1+c)} \times \left\{ -R' \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 2 \right] \cos(2\theta + \mu) + K_1 \cos 4\theta \right\}. \quad (12)$$

Таким образом, напряженное состояние в упругой (11) области полностью определено, изменение границы раздела упругой и пластической областей определяется из соотношения (12).

На рис. 2,а изображена упругопластическая граница в нулевом $\rho_s^{(0)}$ и в первом ρ_s' приближениях при $d_1 = 0,1$; $\delta = 0,1$; $K_1 = 1,2$; $K_2 = 1,3$; $(k_1 - k_2)/2 = 0,3$; $k_3 = 0$; $c = 0,7$, а на рис. 2,б — при $d_1 = 0,1$; $\delta = 0,1$; $K_1 = 1,2$; $K_2 = 1,3$; $(k_1 - k_2)/2 = 0$; $k_3 = 0,25$; $c = 0,7$.

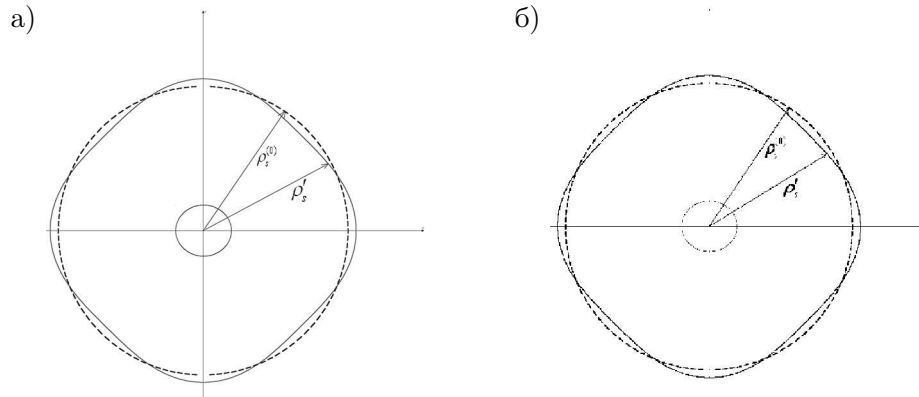


Рис. 2. Упругопластическая граница в нулевом $\rho_s^{(0)}$ и в первом ρ_s' приближениях: а) при $\mu = 0^\circ$, $k_1 = k_2 + 2R$; б) при $\mu = 90^\circ$, $k_1 = k_2$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
 [2] Фоминых С. О. Определение напряженного состояния в пластической области толстостенной трубы при условии пластичности трансляционной анизотропии и анизотропии по Мизесу–Хиллу // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 4(38). С. 90–95.

S. O. Fominykh¹

TENSION DETERMINATION IN THE ELASTIC AREA OF A THICKWALLED PIPE ON CONDITION OF TRANSMITTING ANISOTROPY AND MISES–HILL ANISOTROPY PLASTICITY

¹*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.*

Abstract. The bilayer anisotropic thick-walled pipe under the action of internal pressure is considered in the article. It is assumed that a material with Mises–Hill anisotropy properties is adjacent to the inside of the pipe (first layer), the second layer has translational anisotropy properties. The stress state of the pipe in the elastic region, the boundary of the elastoplastic zone are determined here.

Keywords: anisotropy, translational anisotropy, Hill anisotropy, pipe, stress, elastic region.

REFERENCES

- [1] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of an elastoplastic body. M.: Nauka, 1978. 208 p. (in Russia)
- [2] Fominykh S. O. Determination of the stress state in the plastic region of a thick-walled tube under the condition of translational anisotropy and Mises–Hill anisotropy plasticity // Bulletin of ChGPU them. I. Ya. Yakovlev. Series: Limit state mechanics. 2018. № 4(38). P. 90–95. (in Russia)

Fominykh Svetlana Olegovna

e-mail: ermakovaso@rambler.ru, Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Russia

И. В. Злобина

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С КОНСТРУКЦИЯМИ ИЗ ОТВЕРЖДЕННОГО УГЛЕПЛАСТИКА СО ВСТРОЕННЫМИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ В ОБЪЕМЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

*Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия,
г. Саратов, Россия*

Аннотация. Проведен анализ тенденций развития авиационной техники различного назначения, показавший расширение применения в ее несущих конструкциях полимерных композиционных материалов (ПКМ), армированных углеродными волокнами с комбинированной структурой, содержащей распределенные в объеме металлические элементы, в частности – сотовые заполнители. Отмечено, что при этом ярко выраженная анизотропия физико-механических свойств таких конструкций из различных по химическому составу и свойствам материалов затрудняет маневрирование летательных аппаратов с большими перегрузками вследствие различной устойчивости к динамическим нагрузкам, действующим в различных направлениях. Особенно важно обеспечение прочности конструкций из ПКМ, при действии изгибающих и сдвиговых нагрузок. Показано на примере выполненных ранее авторами исследований, что проблема повышения прочностных характеристик ПКМ может быть решена путем их квазиструктурирования в СВЧ электромагнитном поле. С целью выявления возможности упрочняющей СВЧ обработки конструкций из ПКМ со встроенными сотовыми металлическими панелями, наиболее распространенных в современной и перспективной авиационной технике, выполнены экспериментальные исследования распределения плотности потока энергии микроволнового излучения частотой 2450 МГц в ближней зоне, прошедшего через ПКМ и отраженного от его поверхности. Сравнивались отвержденный ПКМ, армированный углеродными волокнами, ПКМ со встроенными сотовыми элементами и конструкционный диэлектрический материал на примере полипропилена РР. Установлено, что плотность отраженного полипропиленом толщиной 7 мм потока СВЧ энергии составляет 1,42% падающего потока, для отвержденного углепластика толщиной 7 мм этот показатель равен 9,9%. От конструкции с сотовым элементом, расположенным между двумя пластинами отвержденного углепластика толщиной по 3 мм отражается менее 1% потока СВЧ энергии. При этом прошедший через преграду поток СВЧ энергии составляет соответственно для углепластика и сотовой конструкции (85-86)% и (75-76)%. Таким образом, наличие встроенных сотовых элементов в конструкции из армированных углеродными волокнами ПКМ не приводит к повышенному отражению СВЧ электромагнитного поля, а, напротив, меньше, чем наблюдается у обычных конструкций из ПКМ. Это позволяет выполнять упрочняющее квазиструктурирование подобных изделий и повысить их эксплуатационные параметры.

Ключевые слова: полимерные композиционные материалы, армирующие углеродные волокна, встроенные распределенные металлические структуры, сотовые элементы, микроволновое излучение, плотность потока энергии, отражение, поглощение.

УДК: 621-039-419; 620.22-419; 537.868

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.008

Введение. Конструкционные элементы авиационной техники различного назначения, в частности, беспилотных и дистанционно пилотируемых летательных аппаратов в последнее время изготавливаются из полимерных композиционных материалов (ПКМ) типа углепластиков, состоящих из полимерной матрицы и армирующей структуры из определенным образом ориентированных углеродных волокон. По данным аналитических обзоров и научных публикаций объем мирового рынка углепластиков достигнет к 2022 году 23,55 млрд. долл. [1, 2]. В тоже время, полимерные композиционные материалы, армированные волокнами, характеризуются малой прочностью по изгибу и межслоевому сдвигу, определяемой видом и ориентацией армирующих компонентов [3, 4], что вызывает необходимость усиления конструкции в опасных участках [5, 6], но при этом приводит к увеличению веса. Для изделий авиационно-космической техники, особенно для высокоманевренных и скоростных объектов, увеличение веса силовых конструкций и обшивки не желательно, а в ряде случаев - недопустимо. Известные методы улучшения характеристик изделий из ПКМ, в частности – прочности, заключающиеся в использовании волокон повышенного качества, применении новых составов связующего (матрицы), совершенствовании технологий формирования и отверждения композиций [7], не учитывают влияния технологической наследственности операций последующей обработки на окончательные характеристики готового изделия. Внедрение новых методов в структуру действующих технологий подготовки волокон, препрегов, выкладки композиций и т.п. операций сопряжено с большими затратами, связанными с перестройкой отлаженных технологий.

Изложенное делает актуальным изыскание альтернативных методов повышения качества изделий из ПКМ.

Постановка задачи. Для увеличения прочности изделий из ПКМ и повышения равномерности ее значений в различных участках конструкции целесообразно применение методов кратковременного воздействия на протекающий процесс синтеза или на структуру готового изделия как внешней операции без вмешательства в существующую технологию. К таким методам можно отнести воздействие СВЧ электромагнитного поля в качестве модифицирующей операции.

© Злобина И. В., 2019

Злобина Ирина Владимировна

e-mail: irinka_7_@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия.

Исследования выполнены при поддержке гранта РНФ № 18-79-00240 «Раскрытие механизма взаимодействия микроволнового излучения с отвержденными полимерными композиционными материалами на основе углеродных волокон в сочетании с внедренными в поверхностный слой связанными металлическими элементами, периодически распределенными в плоскости армирования наполнителем, применительно к конструкционным элементам авиационных робототехнических комплексов».

Поступила 10.12.2018

Анализ материалов отечественных и зарубежных научных публикаций [8-10] показывает, что наибольшее внимание в развитии исследований в области сверхвысокочастотной обработки диэлектрических материалов уделяется применению микроволновых технологий нагрева с целью замещения существующих технологий термообработки композиций на стадии их формирования и отверждения, что не устраняет негативного влияния на внутренние напряжения, возникающие в процессе размерной обработки и сборки изделий. Математическое моделирование процессов взаимодействия СВЧ электромагнитного поля с диэлектриками и их композициями, а также исследования структуры касались также в основном материалов до их отверждения с СВЧ воздействием на сформированную композицию в вязко-текучем состоянии или на исходные волокна [11, 12], что не учитывало изменений структуры на последующих стадиях процесса изготовления изделий. Нами были получены положительные результаты по увеличению прочностных характеристик отвержденных ПКМ, армированных углеродными волокнами, подвергнутых воздействию СВЧ электромагнитного поля среднего уровня мощности в течение 2-3 минут [13-15].

Однако, в современной и перспективной авиации основной объем несущих элементов из ПКМ имеет сложную конструкцию, состоящую из внешних и внутренних панелей из углепластика с расположенными между ними сотовыми структурами из алюминиевого или другого легкого и прочного сплава. Металлы и их сплавы являются хорошими отражателями сверхвысокочастотных волн, в том числе применяемого в технологических целях частотного диапазона, что позволяет предположить возникновение определенных трудностей в реализации разрабатываемого нами технологического метода упрочняющего модифицирования отвержденных ПКМ в СВЧ электромагнитном поле вследствие предполагаемого экранирующего эффекта сотовых заполнителей.

Целью исследований явилось сравнительное изучение доли отраженного и поглощенного микроволнового излучения монолитными и содержащими сотовые структуры ПКМ для обоснования возможности упрочняющей обработки последних.

Методика исследований и аппаратура. В экспериментах исследовали образцы из отвержденного армированного углеродным волокном композита типа ВКУ. Использовали монолитные образцы в виде пластин толщиной 7 мм размерами 200x200 мм и образцы с сотовым заполнителем толщиной 15 мм, расположенным между пластинами ВКУ толщиной 3 мм. Поперечные размеры образцов с сотовыми заполнителями были аналогичными образцам из монолитного ПКМ. Эксперименты проводили с использованием специальной СВЧ установки “Жук-2-02” (ООО “АгроЭкоТех” г. Обнинск Калужской обл.) с излучателем рупорного типа (рис. 1а). Частота электромагнитного поля составляла 2450 МГц, мощность магнетрона – 1200 Вт. Уровни отраженного от поверхности образцов и прошедшего через образец микроволнового излучения оценивали по плотности потока энергии при помощи электронного прибора ПЗ-33М (рис. 1б) с экспозицией 1 минута. В процессе измерений антенну прибора устанавливали на штативе на уровне оси излучающего рупора согласно схеме, представленной на рис. 2.

Установка была модернизирована путем размещения в рабочей зоне трехкоординатного предметного стола для закрепления и фиксированного изменения положения образцов относительно излучающего рупора. Измерения осуществляли последовательно в 8-и точках, указанных на схеме Рис. 2 а, в каждой точке измерения повторяли по три раза. Предварительно для определения плотности потока энергии в нулевой точке, лежащей на оси излучающего рупора в плоскости его раскрытия, осуществляли

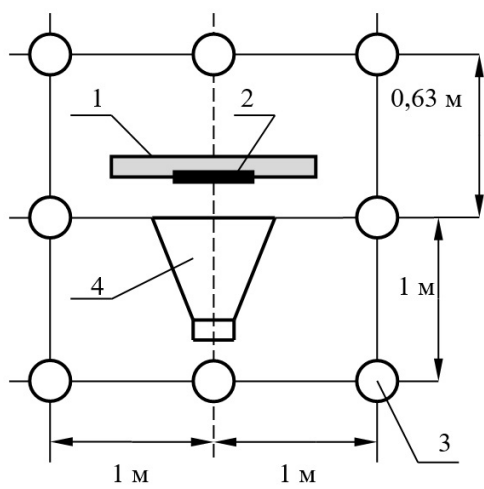


а)



б)

Рис. 1. Оборудование для выполнения исследований: СВЧ установка «Жук-2-02» (а), электронный измеритель плотности потока энергии ПЗ-33М с антенной на штативе (б)



а)



б)

Рис. 2. Схема исследований. Расположение измерительной антенны относительно излучающего рупора (а), внешний вид зоны измерений (б) 1 – стол из полипропилена РР, 2 – образец, 3 – измерительная антенна, 4 – излучающий рупор

измерения на расстояниях, равных 0,5; 1,0 и 2,0 м от плоскости раскрытия излучающего рупора. Путем экстраполяции графика (рис. 3) определяли плотность потока энергии в нулевой точке. Для сравнения осуществляли измерения плотности потока энергии при взаимодействии микроволнового излучения с полипропиленом РР, из которого изготовлен предметный стол экспериментальной установки.

Результаты и обсуждение График изменения плотности потока энергии в зависимости от расстояния до плоскости раскрыва излучающего рупора представлен на рис. 3. Путем экстраполяции средних значений определено, что в нулевой точке значение данного параметра достигают 145000 мкВт/см^2 .

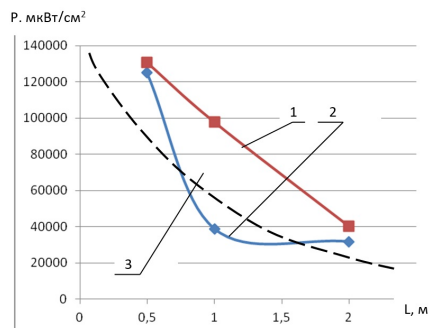


Рис. 3. Изменение максимального (1) и среднего (2) уровня плотности потока энергии СВЧ электромагнитного поля с расстоянием до плоскости раскрыва излучающего рупора. 3 – кривая интерполяции графика (2).

На рис. 4-5 представлено распределение среднего уровня плотности потока энергии в точках измерения параметра и теоретически определенного уровня в точке 0.

Плотность потока энергии, прошедшего через исследуемый материал и измеренного по оси излучающего рупора, составила для полипропилена 129917 мкВт/см^2 , для монолитного углепластика типа ВКУ - 123859 мкВт/см^2 , для трехслойного композита с промежуточным сотовым наполнителем - 110420 мкВт/см^2 . При этом в задней зоне величина данного параметра оказалась одинаковой для всех исследованных материалов - 723 мкВт/см^2 . Существенные отличия отмечены в уровнях плотности потока энергии, отраженного от поверхности материала. В плоскости раскрыва рупора их значения соответственно составили: 2066 , $8900-5100$ и 1249 мкВт/см^2 . В задней зоне плотность отраженного потока энергии составила: $3293-2114$, 14336 и 1223 мкВт/см^2 . В передней зоне плотность отклоненного при прохождении через материал потока энергии составила: $7191-3588$, $5800-3100$ и $1450-1500 \text{ мкВт/см}^2$. С учетом полученных данных допустив отсутствие других потоков энергии можно отметить, что полипропиленом РР поглощается при времени экспозиции, равном 1 минуте, энергия, равная 12383 мкВт/см^2 , монолитным углепластиком типа ВКУ - 6805 мкВт/см^2 . Материал с металлическим сотовым наполнителем поглощает до 33357 мкВт/см^2 подведенной энергии СВЧ электромагнитного поля, или почти 23%. В тоже время для монолитного ПКМ этот показатель не превышает 4,7%.

Сравнивая плотность отраженного потока энергии СВЧ электромагнитного поля можно отметить, что для полипропилена данный показатель составляет 1,42% падающего потока, для отвержденного углепластика ВКУ - 9,9%. От конструкции с сотовым элементом, расположенным между двумя пластинами отвержденного углепластика ВКУ отражается менее 1% потока СВЧ энергии. При этом прошедший через преграду поток СВЧ энергии составляет соответственно для углепластика и сотовой конструкции (85-86)% и (75-76)%. Различие в уровнях отраженного и поглощенного потоков энергии для монолитного углепластика и углепластика с сотовым

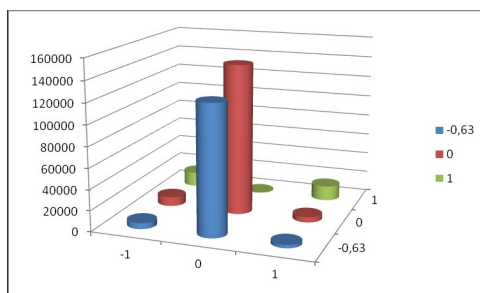


Рис. 4. Распределение плотности потока энергии СВЧ электромагнитного поля, измеренного в передней и задней ближней зоне излучающего рупора при микроволновом облучении монолитного углепластика типа ВКУ

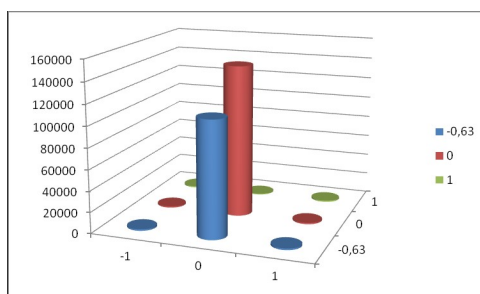


Рис. 5. Распределение плотности потока энергии СВЧ электромагнитного поля, измеренного в передней и задней ближней зоне излучающего рупора при микроволновом облучении углепластика типа ВКУ со встроенным между слоями сотовым металлическим элементом

заполнителем может быть связано со сложной картиной внутреннего переотражения прошедшего через относительно тонкий внешний слой ПКМ потока в сотовых ячейках, приводящего к преимущественному распределению последнего в своеобразной камере-резонаторе, образованной двумя слоями углепластика. В монолитном ПКМ такого внутреннего переотражения не происходит и действует обычный механизм отражения и преломления электромагнитных волн, падающих на границу раздела двух сред.

Таким образом, наличие встроенных сотовых элементов в конструкции из армированных углеродными волокнами ПКМ не приводит к повышенному отражению СВЧ электромагнитного поля, а, напротив, меньше, чем наблюдается у обычных конструкций из ПКМ. Это позволяет выполнять упрочняющее квазиструктурирование в СВЧ электромагнитном поле подобных изделий и повысить их эксплуатационные параметры.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кошкин Р. П. Основные направления развития и совершенствования беспилотных авиационных систем [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://spmagazine.ru/420>.

[2] Мирный М. Мировой рынок углепластиков достигнет отметки в 23 млрд к 2022 году [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://mplast.by/novosti/2016-04-29-mirovoy-ryinok-ugleplastikov-dostignet-otmetki-v-23-mlrd-k-2022-godu/>.

[3] Каблов Е. Н. Материалы и химические технологии для авиационной техники // Вестник Российской академии наук. 2012. Т. 82. №6. С. 520–530.

[4] Композитный мир 2011 спецвыпуск – Авиация и космос: Издательский дом «Мир композитов», 36 с. www.kompromir.ru.

[5] Садовская Т. Г., Лукина Е. А. Проблемы и перспективы реализации политики импортозамещения при формировании производственной кооперации по применению композиционных материалов в отечественном гражданском авиастроении на примере ОАО «Объединенная авиастроительная корпорация» // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. Вып. 11. С. 1-12. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://engjournal.ru/catalog/indust/hidden/1221.html>

[6] Гуняев Г. М., Кривонос В. В., Румянцев А. Ф. и др. Полимерные композиционные материалы в конструкциях летательных аппаратов // Конверсия и машиностроение. № 4, 2004. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : www.viam.ru/public.

[7] Гусева Р. И., Производство изделий из ПКМ в самолетостроении: учеб. пособие. Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО «КНАГТУ», 2013. 135 с.

[8] Архангельский Ю. С. Справочная книга по СВЧ-электротермии: справочник. Саратов : Научная книга, 2011. 560 с.

[9] Коломейцев В. А., Кузьмин Ю. А., Никуйко Д. Н., Семенов А. Э. Экспериментальные исследования уровня неравномерности нагрева диэлектрических материалов и поглощенной мощности в СВЧ устройствах резонаторного типа // Электромагнитные волны и электронные системы, 2013. Т. 18. № 12. С. 25–31.

[10] Estel L., Lebaudy Ph., Ledoux A., Bonnet C., Delmotte M. Microwave assisted blow molding of polyethylene-terephthalate (PET) bottles // Proceedings of the Fourth World Congress on Microwave and Radio Frequency Applications. 2004. № 11. P. 33.

[11] Комаров В. В. Формулировки математических моделей процессов взаимодействия электромагнитных волн с диссипативными средами в СВЧ-нагревательных системах // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2010. Т. 13. № 4. С. 57-63.

[12] Studentsov V. N., Pyataev I. V. Effect of vibration in Processes of structure Formation in Polymers // Russian Journal of Applied Chemistry. 2014. Vol. 87. №3. P. 352–354.

[13] Zlobina I. V., Bekrenev N. V., The influence of electromagnetic field microwave on physical and mechanical characteristics of CFRP (carbon fiber reinforced polymer) structural // Solid State Phenomena. 2016. V. 870. P. 101–106.

[14] Злобина И. В., Бекренев Н. В., Павлов С. П. Прочностные испытания модифицированных в СВЧ электромагнитном поле композиционных материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 3 (33). С. 42–57.

[15] Zlobina I. V., Bekrenev N. V. The Influence of Microwave Electromagnetic Field on Mechanical Properties of Composite Materials // Научные технологии. 2016. Т. 17. № 2. С. 25-30.

I. V. Zlobina

**STUDY OF THE INTERACTION OF MICROWAVE ELECTROMAGNETIC
FIELDS WITH STRUCTURES FROM THE CURED CFRP WITH EMBEDDED
DISTRIBUTED IN VOLUME OF METAL ELEMENTS**

Yuri Gagarin Saratov state technical University, Saratov, Russia

Abstract. The analysis of trends in the development of aviation technology for various purposes, showed the expansion of its application in the load-bearing structures of polymer composite materials (PCM), reinforced with carbon fibers with a combined structure containing distributed in the volume of metal elements, in particular – honeycomb fillers. It is noted that the pronounced anisotropy of physical and mechanical properties of such structures of different chemical composition and properties of materials makes it difficult to maneuver aircraft with large overloads due to different resistance to dynamic loads acting in different directions. It is especially important to ensure the strength of structures made of PCM, under the action of bending and shear loads. It is shown by the example of studies carried out earlier by the authors that the problem of increasing the strength characteristics of PCM can be solved by their quasi-structuring in the microwave electromagnetic field. In order to identify the possibility of strengthening microwave processing of structures made of PCM with built-in honeycomb metal panels, the most common and modern and advanced aviation technology, experimental studies of the distribution of the energy flux of microwave radiation with a frequency of 2450 MHz in the near zone, passed through the PCM and reflected from its surface. The hardened PCM reinforced with carbon fibers, PCM with built-in honeycomb elements and structural dielectric material on the example of PP polypropylene were compared. It was found that the density of the reflected 7 mm thick polypropylene microwave energy flow is 1.42. Thus, the presence of built-in cellular elements in the structure of carbon fiber reinforced PCM does not lead to an increased reflection of the microwave electromagnetic field, but, on the contrary, less than is observed in conventional designs of PCM. This makes it possible to perform hardening quasi-structuring of such products and increase their operating parameters.

Keywords: Polymer composite materials, reinforcing carbon fibers embedded distributed metal structure, cellular elements, microwave radiation, energy flux density, reflection, absorption.

REFERENCES

- 1] Koshkin P. P. Main directions of development and improvement of unmanned aircraft systems [Electronic resource]. - Access mode: <http://spmagazine.ru/420>. (in Russian).
- 2] Mirny M. The global market of carbon fiber plastics will reach 23 billion by 2022 [Electronic resource]. - Access mode: <https://mplast.by/novosti/2016-04-29-mirovoy-rinok-ugleplastikov-dostignet-otmetki-v-23-mlrd-k-2022-godu/>. (in Russian).
- 3] Kablov E. N. Materials and chemical technologies for aviation technology // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. 2012. T. 82. №6. Pp. 520–530. (in Russian).
- 4] Composite World 2011 special issue - Aviation and Space: World of Composites Publishing House, 36 p. [www: kompomir.ru](http://www.kompomir.ru). (in Russian).
- 5] Sadovskaya T. G., Lukin E. A. Problems and prospects of implementing the policy of import substitution in the formation of industrial cooperation on the use of composite materials in the domestic civil aircraft industry as an

Zlobina Irina Vladimirovna, Cand. Sci. Tech., Assoc. Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia.

example of United Aircraft Building Corporation // Engineering Journal: Science and Innovation. 2014. Vol. 11. P. 1-12. [Electronic resource]. - Access mode: <http://engjournal.ru/catalog/indust/hidden/1221.html>. (in Russian).

[6] Gunyaev G. M., Krivonos V. V., Rumyantsev A. F. et al. Polymer composite materials in the structures of aircraft / G. M. Gunyaev, // Conversion and engineering. Number 4, 2004. [Electronic resource]. - Access mode: www.viam.ru/public. (in Russian).

[7] Guseva R. I. Manufacture of articles from PCM in aircraft construction: studies. manual Komsomolsk-on-Amur: KNAGTU, 2013. 135 p. (in Russian).

[8] Arkhangel'sky Yu. S. Reference book on microwave electrothermal: a reference book. Saratov: Scientific book, 2011. 560 p. (in Russian).

[9] Kolomeitsev V. A., Kuzmin Yu. A., Nikuiko D. N., Semenov A. E. Experimental studies of the level of uneven heating of dielectric materials and the absorbed power in microwave devices of a resonator type // Electromagnetic Waves and Electronic Systems, 2013. V. 18. No. 12. P. 25–31. (in Russian).

[10] Estel L., Lebaudy Ph., Ledoux A., Bonnet C., Delmotte M. Microwave, Polyethylene terephthalate (PET) bottles // Proceedings of the Fourth World Congress. 2004. No. 11. R. 33.

[11] Komarov V. V. Formulations of mathematical models of the processes of interaction of electromagnetic waves with dissipative media in microwave heating systems // Physics of wave processes and radio engineering systems. 2010. Vol. 13. No. 4. P. 57–63. (in Russian).

[12] Studentsov V. N., Pyataev I. V. The effect of vibration in polymers / Russian Journal of Applied Chemistry, 2014, vol. 87, No. 3, pp p 352-354.- Pleiades Publishing, Ltd. 2014

[13] Zlobina I. V., Bekrenev N. V. The carbon fiber-reinforced polymer mechanical structure of the carbon fiber-reinforced polymer structural // Solid State Phenomena. 2016. V. 870, p.p. 101–106.

[14] Zlobina I. V., Bekrenev N. V., Pavlov S. P. Strength tests of composite materials modified in a microwave electromagnetic field // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2017. No. 3 (33). Pp. 42-57. (in Russian).

[15] Zlobina I. V., Bekrenev N. V. The Influence of Microwave Electromagnetic Field Effects // High technology. 2016. V. 17. № 2. P. 25–30.

А. В. Ткачева

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СФЕРЕ, ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Работа посвящена решению задачи температурного деформирования сферы, материал которой в результате образования необратимых деформаций, упрочняется. Условие наступления пластического течения – условие Терска-Сен-Венана, в котором предел текучести зависит от температуры. Приводится сравнение картин напряжений, полученных в условии упрочнения материала и без его упрочнения.

Ключевые слова: упрочнение, упругость, пластичность, условие Терска-Сен-Венана, сфера, температурные напряжения.

УДК: 539.374+539.224

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.009

Введение. В результате неравномерных температурных воздействий большинство металлов могут упрочняться. Это особенно заметно, когда воздействие оказывается циклическим, и обретенные на первом цикле необратимые деформации препятствуют дальнейшему росту напряжений на последующих циклах нагружения. Теория пластического течения широко изучена и распространена [1,2], но остается не учтенным влияние упрочнения на численное решение простой задачи теории температурных напряжений [3,4].

В этой работе рассмотрим самую простейшую задачу о нагреве сферы, изготовленной из упрочняющегося упругопластического материала. Подобные работы проводились ранее [5], но в них упрочнение материала отсутствовало. Gamer U. [6] удалось решить задачу в условиях постоянства предела текучести от температуры, но сравнений решений температурной задачи с упрочнением и без упрочнения проведено не было. Поэтому в данной работе сравним решения температурной задачи, в которой учитывались и не учитывались упрочняющие свойства металла.

Постановка задачи. В сферической системе координат r, φ, ϕ при комнатной температуре T_0 находится сфера, изготовленная из упругопластического материала

Поступила 10.02.2019

© Ткачева А. В., 2019

Ткачева Анастасия Валерьевна

e-mail: 4nansi4@mail.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск – на – Амуре, Россия.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ "Модели и методы теории термоупруго-пластичности в условиях неустановившейся температуры"17-01-00507 А

радиуса R , к поверхности ее подводится источник тепла такой, что температура на поверхности растет по закону

$$T|_{r=R} = T_* (1 - e^{-at}), \quad (1)$$

где T_* – заданная температура, a – температуропроводность, t – время. В центре сферы тепловой поток отсутствует

$$T_{,r} = 0, \quad (2)$$

где запятая обозначает производную по соответствующей координате, стоящей после запятой.

Температура по всему материалу сферы распространяется по закону

$$T_{,t} = ar^{-2} (r^2 T_{,r})_{,r} \quad (3)$$

Полагая, что задача о распространении температуры (1), (2), (3) решена, перейдем к механической задаче.

Считаем, что деформации $d_{ij}i, j = (r, \varphi, z)$ в материале малыми и состоящими из обратимой e_{ij}^e и необратимой e_{ij}^p составляющих

$$\begin{aligned} d_r &= e_r^e + e_r^p, & d_\varphi &= e_\varphi^e + e_\varphi^p, & d_\phi &= e_\phi^e + e_\phi^p, \\ d_r &= u_{,r}, & d_\varphi &= d_\phi = u_r r^{-1}, \end{aligned}$$

где u_r – перемещения.

Предположим, что в начальный момент времени необратимых деформаций в материале сферы нет, а обратимые деформации связаны с напряжениями и температурой законом Дюамеля – Неймана.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= w u_{,r} + 2\lambda r^{-1} u_r - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= (w + \lambda) r^{-1} u_r + \lambda u_{,r} - K\theta, \\ \sigma_\theta &= \sigma_\varphi, \quad w = \lambda + 2\mu, \end{aligned} \quad (4)$$

где σ – напряжения, λ и μ – параметры Ламе, K – модуль всестороннего сжатия, $\theta = \alpha(T - T_0)$, α – коэффициент теплового расширения.

Подставляя (4) в единственное нетривиальное уравнение равновесия, записанное в сферических координатах

$$\sigma_{r,r} + 2r^{-1} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \quad (5)$$

получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$u_{r,rr} + 2(u_r)_{,r} = Kw^{-1}\theta_{,r} \quad (6)$$

Из (6) находим перемещения

$$\begin{aligned} u_r &= w^{-1}K\Theta(-2, 0, r) + rC_1^{(1)} + r^{-1}C_2^{(1)}, \\ \Theta(d, l, r) &= r^d \int_l^r \rho^{-d} \theta(\rho, t) d\rho, \end{aligned} \quad (7)$$

где $C_1^{(1)}$ и $C_2^{(1)}$ – коэффициенты интегрирования (функции времени), определяются из граничных условий

$$u_r|_{r=0} = 0, \quad \sigma_r|_{r=R} = 0 \quad (8)$$

В (4) подставим (7) получим напряжения, действующие до момента пластического течения

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -4K(rw)^{-1}\Theta(-2, 0, r) + 3KC_1^{(1)}(t), \\ \sigma_\varphi &= 2K\mu(rw)^{-1}\Theta(-2, 0, r) - 2K\mu w^{-1}\theta(r, t) + 3KC_1^{(1)}(t).\end{aligned}\quad (9)$$

Пластическое течение. Рост напряжений в упругопластическом материале не бесконечен и ограничен поверхностью нагружения, при достижении которой наступит пластическое течение и образуются растущие необратимые деформации. В качестве поверхности нагружения примем призму Треска, записанную в виде:

$$(\sigma_r - \eta_0 e_r^p) - (\sigma_\varphi - \eta_0 e_\varphi^p) = 2k, \sigma_\phi = \sigma_\varphi \quad (10)$$

где η_0 – коэффициент упрочнения материала.

В самом начале наступления пластического течения условие Треска $\sigma_r - \sigma_\varphi = 2k$ начинает выполняться на свободной поверхности $r = R$. Здесь зарождается продвигающаяся упругопластическая граница $m(t)$, которая разделит материал на две области. В области $0 \leq r \leq m(t)$ материал упруго деформируется и напряжения находятся по соотношениям (7) и (9).

Используя следствие из ассоциированного закона пластического течения $e_\varphi^p = e_\phi^p$ и условия пластической несжимаемости $e_r^p + e_\varphi^p + e_\phi^p = 0$, запишем

$$e_\varphi^p = -0.5e_r^p \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10) получим

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = 2k(1 + \eta e_r^p), \eta = \eta_0/k. \quad (12)$$

Запишем закон Дюамеля-Неймана для области пластического течения

$$\begin{aligned}\sigma_r &= w(u_{r,r} - e_r^p) + 2\lambda(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= (w + \lambda)(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) + \lambda(u_{r,r} - e_r^p) - K\theta.\end{aligned}\quad (13)$$

Уравнение равновесия (5) с учетом (13) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_r}{r}\right) = \frac{K}{w}\frac{\partial \theta}{\partial r} - 2\frac{\mu}{w}\left(\frac{\partial e_r^p}{\partial r} + 3\frac{e_r^p}{r}\right) \quad (14)$$

Интегрируя (14), находим соотношения для перемещений. Из (12) непосредственно определяем необратимую деформацию e_r^p .

$$\begin{aligned}u_r &= rC_1^{(2)} + C_2^{(2)}\left(2\mu rw^{-1}\int_{m_1}^r \rho^{-1}f_2(\rho)d\rho + r^{-2}\right) + \\ &+ w^{-1}\left(K\Theta(-2, m_1, r) + 2\mu r\int_{m_1}^r \rho^{-1}f_2(\rho)d\rho\right), \\ \sigma_r &= 3KrC_1^{(2)} + (6K\mu w^{-1}f_1(r) - 4\mu r^{-3})C_2^{(2)} \\ &+ 2K\mu w^{-1}\left(-2r^{-1}\Theta(-2, m_1, r) + 3\int_{m_1}^r \rho^{-1}f_2(\rho)d\rho\right), \\ e_r^p &= C_2^{(2)}f_1(r) + f_2(r), \\ f_1(r) &= -6\mu r^{-3}(2\eta k + 3K\mu w^{-1}), \\ f_1(r) &= (2\eta k + 3K\mu w^{-1})(2K\mu w^{-1}(\theta - 3r^{-1}\Theta(-2, m_1, r)) - 2k)\end{aligned}\quad (15)$$

Распределения напряжений в материале сферы с учетом упрочнения и без учета упрочнения изображены на рис. 1.

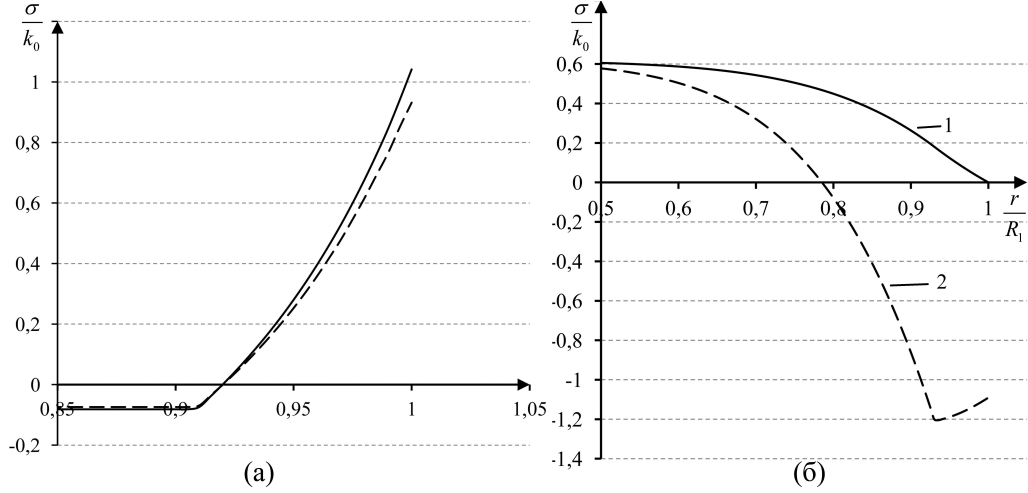


Рис. 1. Распределения напряжений в материале сферы до начала разгрузки а) с упрочнением, б) без упрочнения, прямая линия σ_r , штриховая – σ_φ .

Разгрузка. При отводе источника тепла на поверхности сферы пластическая деформация перестает расти, что означает начало разгрузки. Образуется разгружающая упругопластическая граница $n(t)$. В области разгрузки $n(t) \leq r \leq R$ необратимые деформации e_r^p, e_φ^p перейдут в остаточные p_r, p_φ , а закон Дюамеля-Неймана примет вид

$$\begin{aligned}\sigma_r &= w(u_{r,r} - p_r) + 2\lambda(r^{-1}u_r - p_\varphi) - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= (w + \lambda)(r^{-1}u_r - p_\varphi) + \lambda(u_{r,r} - p_r) - K\theta.\end{aligned}$$

Уравнения равновесия так же переписется

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_r}{r}\right) = \frac{K}{w}\frac{\partial \theta}{\partial r} - 2\frac{\mu}{w}\left(\frac{\partial p_r}{\partial r} + 3\frac{p_r}{r}\right) \quad (16)$$

Интегрируя (16), находим напряжения и перемещения в области разгрузки.

$$\begin{aligned}u_r &= K(w)^{-1}\Theta(-2, n, r) - 2\mu w^{-1}\Psi(1, m, r) + C_1^{(3)}r^3 + r^{-2}C_2^{(3)}, \\ \sigma_r &= -4\mu K(wr)^{-1}\Theta(-2, n, r) + 2\mu K(rw)^{-1}\Psi(1, m, r) + C_1^{(3)}K - 4\mu r^{-3}C_2^{(3)}, \\ \sigma_\varphi &= 2\mu K(wr^3)^{-1}\Theta(-2, n, r) - 2\mu K\theta w^{-1} + 6\mu K(rw)^{-1}\Psi(1, m, r) + \\ &\quad + \mu(2\mu - \lambda)w^{-1}p_r + KC_1^{(3)} + 2\mu r^{-3}C_2^{(3)} \\ \Psi(1, m, r) &= r \int_m^r \rho^{-1}p_r(\rho) d\rho.\end{aligned} \quad (17)$$

Начиная с момента образования границы $n(t)$, материал сферы условно поделен на три области $0 \leq r \leq m(t)$, $m(t) \leq r \leq n(t)$ и $n(t) \leq r \leq R$, где напряжения и перемещения находятся из соотношений (7), (9), (15), (17). В этих соотношениях существуют коэффициенты интегрирования $C_1^1, C_2^1, C_1^2, C_2^2, C_1^3, C_2^3$, которые находятся из граничных условий, моделирующих непрерывность радиального напряжения и перемещения на упругопластических границах $n(t), B(t)$ и условий (8).

Повторное пластическое течение. При достаточно большой температуре нагрева и полной разгрузке возможно повторное пластическое течение. Это связано с

выполнением на свободной поверхности сферы $r = R$ условия $\sigma_r - \sigma_\varphi = 2k$, что приводит к образованию новой упругопластической границы $n_2(t)$. Соотношения для напряжений определяются по ранее описанному принципу, только следует учесть, что перепишется закон Дюамеля-Неймана

$$\begin{aligned}\sigma_r &= w(u_{r,r} - e_r^p - p_r) + 2\lambda(r^{-1}u_r - e_\varphi^p - p_\varphi) - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= (w + \lambda)(r^{-1}u_r - e_\varphi^p - p_\varphi) + \lambda(u_{r,r} - e_r^p - p_r) - K\theta,\end{aligned}$$

и уравнение равновесия

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_r}{r}\right) = \frac{K}{w}\frac{\partial \theta}{\partial r} - 2\frac{\mu}{w}\left(\frac{\partial e_r^p}{\partial r} + 3\frac{e_r^p}{r}\right) - 2\frac{\mu}{w}\left(\frac{\partial p_r}{\partial r} + 3\frac{p_r}{r}\right).$$

Перемещения, напряжения и пластическая деформация в области повторного пластического течения $n_2(t) \leq r \leq R$ с учетом упрочнения материала вычисляются из соотношений.

$$\begin{aligned}e_r^p &= C_2^{(4)}f_3 + f_4, \\ u_r &= w^{-1}\left(K\Theta(-2, n_2, r) + 2\mu\left(\int_{n_2}^r \rho^{-1}f_4(\rho) d\rho + \Psi(1, n_2, r)\right)\right) + \\ &\quad + C_1^{(4)}r + C_2^{(4)}r^{-2}, \\ \sigma_r &= 2K\mu w^{-1}\left(-2r^{-1}\Theta(-2, n_2, r) + 3\left(\int_{n_2}^r \rho^{-1}f_4(\rho) d\rho + r^{-1}\Psi(1, n_2, r)\right)\right) + \\ &\quad + 3KrC_1^{(4)} + \mu(6Kw^{-1}f_3 - 4r^{-3})C_2^{(4)}, \\ f_3 &= -6\mu r^{-3}(-2\eta k + 3K\mu w^{-1})^{-1}, \\ f_4 &= (-2\eta k + 3K\mu w^{-1})^{-1}(K\mu w^{-1}(2\theta - 6r^{-1}\Theta(-2, n_2, r) - 3p_r) + 2k).\end{aligned}\quad (18)$$

С момента времени, обусловленного зарождением границы $n_2(t)$, материал сферы условно разделен на три области: две области упругого деформирования $0 \leq r \leq m$, $m \leq r \leq n_2(t)$ и область повторного пластического течения $n_2(t) \leq r \leq R$. Напряжения и перемещения определяются соотношениями (7), (9), (18), (17), в которых коэффициенты интегрирования $C_1^1, C_2^1, C_1^3, C_2^3, C_1^4, C_2^4$ находятся из граничных условий, моделирующих непрерывность радиальных напряжений и перемещений на границах m и $n_2(t)$ и условий (8).

Остаточные напряжения. В результате полного остывания материала сферы рост необратимых деформаций падает. К необратимым деформациям p_r прибавятся деформации, образованные на втором пластическом течении. Остаточные перемещения и напряжения находятся из соотношений (7) и (9) и (17), в которых температурные функции равны нулю. Коэффициенты интегрирования $C_1^1, C_2^1, C_1^3, C_2^3$, как и ранее, определяются из граничных условий. Результат решения задачи приведен на рис. 2 и рис. 3. Сравним решения задачи, полученные при учете упрочняющих свойств упругопластического материала и без его учета. Без повторного пластического течения остаточные напряжения мало различимы и на рисунке 2 это хорошо видно. В случае прохождения повторного пластического течения остаточные напряжения достаточно отличаются (рис. 3), причем во всем материале, а не в конкретной области. Остаточные напряжения меньше в расчетах с упрочнением, что подтверждается теорией упрочнения.

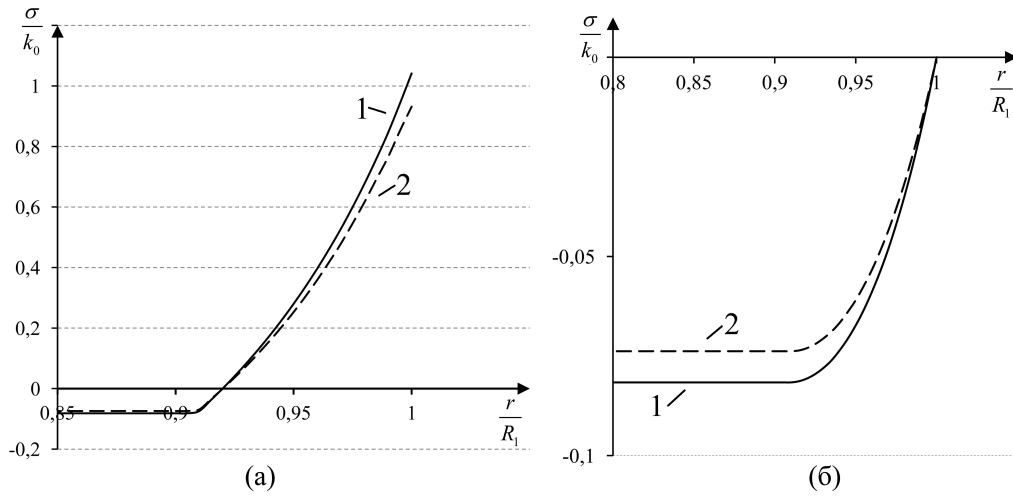


Рис. 2. Распределения остаточных напряжений в материале сферы, в котором повторного пластического течения не было а – σ_φ , б – σ_r ; (1– без упрочнения, 2 – с упрочнением упрочнения)

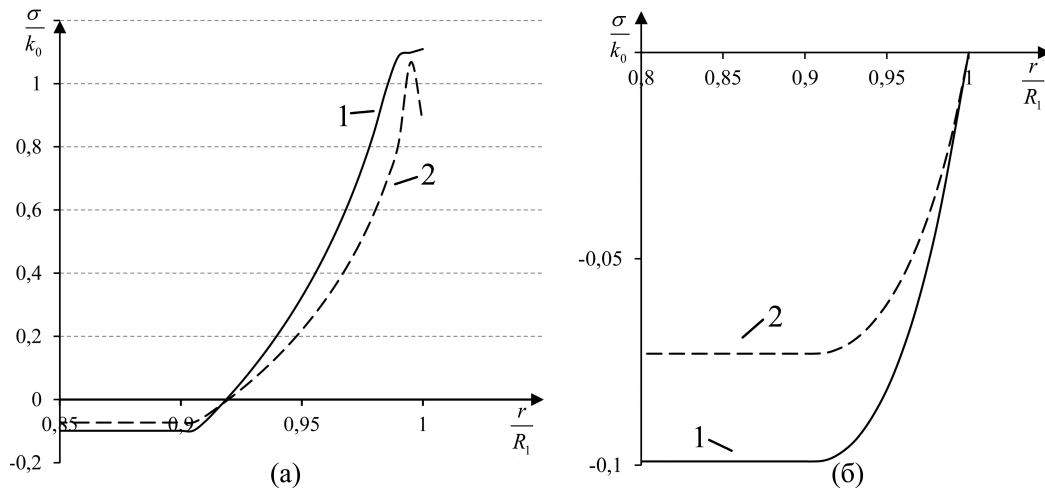


Рис. 3. Распределения остаточных напряжений в материале сферы а – σ_φ , б – σ_r ; (1– без упрочнения, 2 – с упрочнением упрочнения)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М: Мир. Т.2. 1969. 864 с. [2] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с. [3] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматлит, 1963. 252 с.
 [4] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 512 с.

[5] Буренин А. А., Дац Е. П., Мурашкин Е. В. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия // Изв. РАН МТТ. 2014. Р. 124–131.

[6] Gamer U. Elastic-Plastic deformation of centrally heated disk / Journal of Thermal Stresses. Copyright 1985 P. 41–51.

A. V. Tkacheva

TEMPERATURE STRESSES IN A SPHERE MADE OF A HARDENING MATERIAL

Institute of Machine Science and Metallurgy FEB RAS

Abstract. The work is devoted to solving the problem of temperature deformation of a sphere, the material of which is strengthened as a result of the formation of irreversible deformations. The condition for the onset of plastic flow is the Tersk-Saint-Venant condition, in which the yield strength depends on temperature. A comparison of stress patterns obtained in the condition of material hardening and without hardening it is given.

Keywords: hardening, elasticity, plasticity, Tersk-Saint-Venant condition, sphere, thermal stresses.

REFERENCES

- [1] Nadai A. Plasticity and destruction are observed bodies. M: Peace. V.2. 1969. 864 p. [2] Rabotnov Yu. N. Mechanics of a deformable solid. Moscow: Science, 1979. 744 p. [3] Parkus G. Unsteady thermal stresses. Moscow: Fizmatlit, 1963. 252 p. [4] Boli B. , Weiner J. Theory of thermal stresses. Moscow: Mir, 1964. 512 p. [5] Burenin A. A. , Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of polar residual stresses under local thermal conditions // Izv. RAS MTT. 2014. P. 124–131. [6] Gamer U. Elastic-Plastic deformation of centrally heated disk // Journal of Thermal Stresses. Copyright 1985 P. 41–51.

Tkacheva Anastasia

e-mail: 4nansi4@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Research Assistant, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur, Russia.

В. Ю. Травин, Н. Д. Тутышкин

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

АО НПО «Сплав», г. Тула, Россия

Аннотация. Приводятся анализ и моделирование процессов вытяжки осесимметричных изделий. Рассматриваются физико-механические аспекты и критерии пластической повреждаемости. При вытяжке с утонением стенки не происходит заметного изменения диаметра заготовки. Поэтому, деформация осесимметричной оболочки в окружном направлении мала по сравнению с линейными деформациями изменения длины и толщины оболочки. Это обстоятельство позволяет принимать при вытяжке с утонением условие плоской деформации.

Ключевые слова: макроуровень, мезоуровень, деформации, дефекты, повреждаемость, разрушение.

УДК: 539.214:669.14

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.010

Вытяжка с утонением стенки применяется для изготовления осесимметричных деталей, типа оболочек и корпусов. Особенностью напряженно-деформированного состояния (НДС) при вытяжке с утонением является наличие значительных по величине нормальных напряжений, на контактных поверхностях с деформирующим инструментом: матрицей и пуансоном [1].

При вытяжке с утонением стенки пластическая область деформации мала, по сравнению с размерами заготовки, и на протяжении почти всего процесса деформирования ограничена в осевом направлении с обеих сторон недеформируемыми участками стенок заготовки. Для примера на рис.1 показана схема вытяжки цилиндрической оболочки.

© Травин В. Ю., Тутышкин Н. Д., 2019

Травин Вадим Юрьевич

e-mail: mail@splav.org, кандидат технических наук, зам Генерального конструктора, АО НПО «Сплав», г. Саратов, Россия.

Тутышкин Николай Дмитриевич

e-mail: Nikolai.Tutyshkin@mail.ru, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 14.11.2018

Перемещение заготовки относительно матрицы в направлении движения пуансона приводит к тому, что силы трения, действующие на контактной поверхности заготовки с пуансоном, имеют направление, противоположное перемещению пуансона. На контактных поверхностях, кроме касательных, действуют и сжимающие нормальные напряжения. В осевом направлении возникают растягивающие напряжения, вызванные давлением пуансона на донную часть заготовки.

Так как вытяжка с утонением стенки ведется обычно в условиях хорошей смазки (коэффициент трения Кулона $\mu < 0,2$), а нормальные напряжения на контактных поверхностях не превышают напряжения текучести, то касательные напряжения на контактных поверхностях значительно меньше предела текучести при сдвиге. В этих условиях нормальное напряжение на контактной поверхности незначительно отличается по величине от главного.

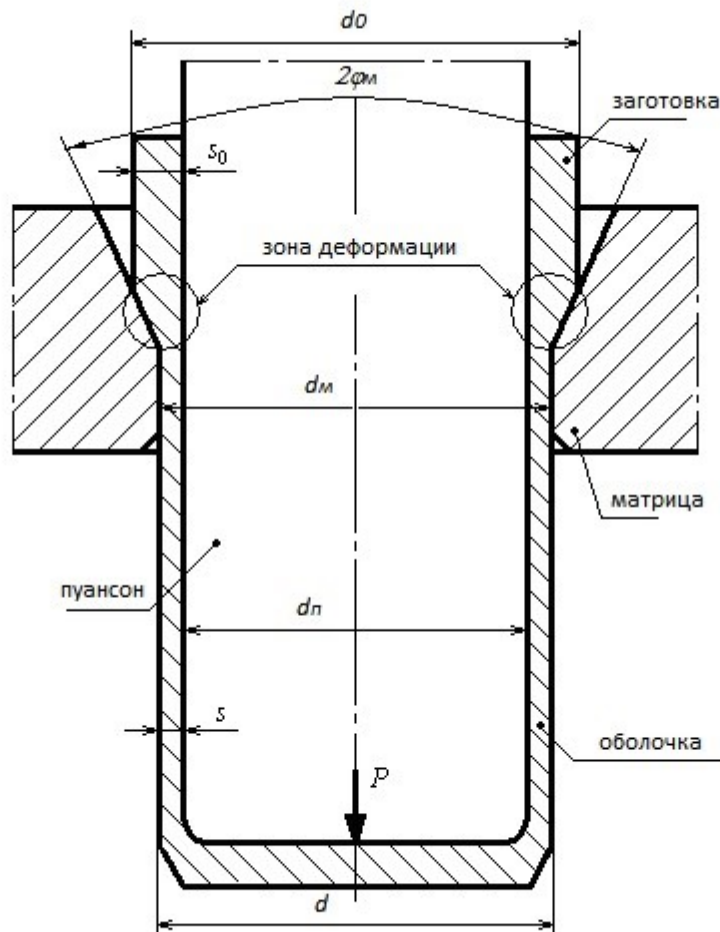


Рис. 1. Схема процесса вытяжки цилиндрической оболочки

Систематизированные исследования показали, что повреждаемость деформируемого материала на операциях вытяжки оказывает существенное влияние на её технологические параметры [2-5]. Экспериментальные исследования показывают, что повреждаемость материала в зонах интенсивной деформации существенно зависит от истории деформации и напряженного состояния. Моделирование повреждаемости на вытяжных операциях существенно расширяет применение экспериментальных данных в технологических расчетах.

Рассмотрим процесс вытяжки с утонением стенки цилиндрической оболочки (рис. 1). Технологическая сила (P) передается пуансоном на донную часть оболочки и вызывает растягивающие осевые напряжения в стенках детали. Поэтому в процессе вытяжки материал испытывает преобладающие растягивающие деформации в состоянии пластичности. Это обстоятельство позволяет прогнозировать деформационную повреждаемость получаемых деталей при вытяжке с использованием полученных экспериментальных результатов при одноосном пластическом растяжении опытных образцов. Основополагающие результаты, представленные в работе [6], подтверждают возможность использования экспериментально определенных материальных функций повреждаемости и пластического разрушения материала в процессах пластического формоизменения с непропорциональным нагружением и переменным параметром трехосности напряженного состояния.

В настоящей статье используется методика расчета накопленных деформаций при перемещении частиц материала вдоль траекторий в пластической области, основанная на отображении линий тока в плоскости скоростей течения. Эта методика позволяет установить распределение повреждаемости по толщине стенки готовой детали. Для расчета напряжений (и параметра трехосности напряженного состояния) в узловых точках пластической области решается краевая задача в смешанном виде, когда на контактной поверхности деформирующего инструмента (пуансона и матрицы) задаются напряжения в неявном виде, в виде связи между касательным и нормальным напряжениями.

Анализ процесса вытяжки с утонением стенки цилиндрической оболочки включает следующие этапы: формулировка основных уравнений и постановка краевых условий; определение напряжений и скоростей пластического течения; расчет накопленных деформаций и пластической повреждаемости материала.

Основные уравнения и граничные условия. При вытяжке цилиндрических деталей реализуется в общем случае осесимметричное НДС. Для полного представления об осесимметричном НДС достаточно определить, во-первых, поле напряжений и, во-вторых, поле скоростей пластического течения в одном меридиональном сечении деформируемого тела. При вытяжке с утонением цилиндрической оболочки с соотношениями ее толщины (s) и диаметра (d) $s/d \leq 0.05$ деформированное состояние является плоским, так как окружная деформация очень мала. Это обстоятельство позволяет свести задачу осесимметричной деформации цилиндрической тонкостенной оболочки к более частной задаче плоской деформации, то есть использовать частную форму для описания НДС в плоской системе декартовых координат x, y , (рис. 2) дифференциальными уравнениями равновесия (1), условием текучести Мизеса (2), условием соосности девiatorов скорости деформации $\dot{\epsilon}_{ij}$ и напряжения s_{ij} (3) и условием несжимаемости (4):

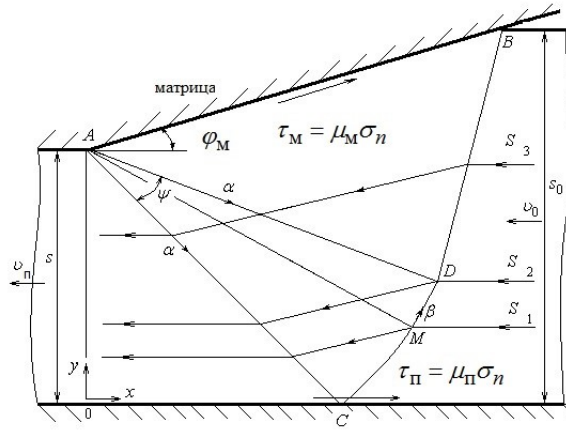


Рис. 2. Схема пластической области (краевые условия, поле линий скольжения и траектории движения частиц материала) для исходных данных: $s_0/s = 1.6$, $\varphi_M = 18^\circ$, $\mu_n = 0.1$, $\mu_M = 0.09$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 4\tau_s^2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_x / \partial x - \partial v_y / \partial y}{\partial v_x / \partial y + \partial v_y / \partial x} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Параметрическое представление компонент напряжений

$$\sigma_x = \sigma - \tau_s \sin 2\delta, \quad \sigma_y = \sigma + \tau_s \sin 2\delta, \quad \tau_{xy} = \tau_s \cos 2\delta \quad (5)$$

приводит уравнения (1) – (4) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2\tau_s \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \cos 2\delta + \frac{\partial \delta}{\partial y} \sin 2\delta \right) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2\tau_s \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \sin 2\delta - \frac{\partial \delta}{\partial y} \cos 2\delta \right) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \operatorname{tg} 2\delta = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

Системы уравнений в напряжениях (6) и скоростях (7) относятся к гиперболическому типу и имеют по два попарно совпадающих семейства характеристических линий, описываемых дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg} \delta \quad (\text{характеристики семейства } \alpha), \\ \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{ctg} \delta \quad (\text{характеристики семейства } \beta), \end{aligned} \quad (8)$$

где параметр δ представляет собой угол между осью x и касательной к характеристической линии семейства α в каждой точке пластической области материала.

Характеристические линии совпадают с линиями скольжения и образуют в пластической области сетку взаимно ортогональных, вообще говоря, криволинейных линий α , β . Уравнения (6) и (7) в системе криволинейных координат α , β имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} d\sigma - 2\tau_s d\delta &= 0, & (\text{вдоль линий } \alpha), \\ d\sigma + 2\tau_s d\delta &= 0, & (\text{вдоль линий } \beta). \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} dv_\alpha - v_\beta d\delta &= 0, & (\text{вдоль линий } \alpha), \\ dv_\beta + v_\alpha d\delta &= 0, & (\text{вдоль линий } \beta). \end{aligned} \quad (10)$$

Соотношения в напряжениях (9) в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \sigma/2\tau_s - \delta &= \xi(\beta), & (\text{вдоль линий } \alpha), \\ \sigma/2\tau_s + \delta &= \eta(\alpha), & (\text{вдоль линий } \beta), \end{aligned} \quad (11)$$

известны как интегралы пластичности Генки, а соотношения в скоростях (10) – как соотношения Гейрингер. Параметры $\xi(\beta)$, $\eta(\alpha)$ в соотношениях (11) определяются из граничных условий. Осредненное значение предела текучести при сдвиге τ_s в соотношениях (11) можно определить из условия равенства плотности энергии пластического формоизменения упрочняемого материала и принимаемой модели идеально жестко-пластического материала.

Для определения НДС необходимо построить по уравнениям (8) поле линий скольжения в пластической области и определить в узловых точках по соотношениям (11) параметры напряжений $\sigma/2\tau_s$, δ и по соотношениям (10) компоненты скорости течения v_α , v_β . Решение уравнений (8) и (11) должно удовлетворять граничным условиям на контакте деформируемого материала с пуансоном и матрицей, которые обусловлены силами трения:

$$\tau_k = \mu\sigma_n, \quad (12)$$

где τ_k , σ_n – касательное напряжение и нормальное давление на контакте; μ – коэффициент трения.

В результате соотношения (11) отображают линии скольжения в плоскости σ , τ по следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\tau_s} &= \cos 2 \left[\frac{\sigma}{2\tau_s} - \xi(\beta) \right], & (\text{линии скольжения } \alpha) \\ \frac{\tau}{\tau_s} &= \cos 2 \left[-\frac{\sigma}{2\tau_s} + \eta(\alpha) \right], & (\text{линии скольжения } \beta). \end{aligned} \quad (13)$$

Определение напряжений и скоростей пластического течения. Расчёт НДС (см. табл. 1) проводится для следующих исходных данных (рис. 1): материал заготовки – чистая листовая медь (99.97%); наружный диаметр и толщина стенки исходной заготовки $d_0 = 20.80$ мм, $s_0 = 1.0$ мм; рабочий диаметр пуансона и матрицы $d_{\text{П}} = 18.72$ мм, $d_{\text{М}} = 19.96$ мм; угол рабочего конуса матрицы $2\varphi_{\text{М}} = 36^\circ$; коэффициент трения на контактной поверхности пуансона и матрицы $\mu_{\text{П}} = 0.1$, $\mu_{\text{М}} = 0.09$.

В таблице приведены значения среднего напряжения (отнесенного к пределу текучести при сдвиге) σ/τ_s , параметра трехосности напряженного состояния $\bar{\sigma}$ и параметрического угла δ в узловых точках, расположенных на границе пластической области.

На рис. 2 показано соответствующее поле линий скольжения, включая границы пластической области. Вдоль прямолинейных отрезков линий скольжения, согласно соотношениям (11), среднее напряжение остается постоянным; поэтому $\sigma_C = \sigma_A$, $\sigma_D = \sigma_B$ (см. табл.1).

Таблица 1. Значения параметров напряжений и скоростей пластического течения в граничных узловых точках

Узловые точки	σ/τ_s	$\bar{\sigma}$	δ	v_x/v_0	v_y/v_0	v_α/v_0	v_β/v_0
A	0.012	0.009	- 0.834	-1.61	0	-1.08	-1.18
B	- 0.686	- 0.396	- 0.387	-1.00	0	-0.97	-0.35
C	0.012	0.009	- 0.834	-1.28	-0.30	-0.72	-1.18
D	- 0.686	- 0.396	- 0.387	-1.15	-.38	-0.97	-0.75

Установленное поле линий скольжения α , β определяет границы пластической области AC и BDC в меридиональном сечении детали. Поле траекторий максимальных касательных напряжений $\tau_{\alpha\beta}$ позволяет определить с помощью уравнений (10) поле скоростей пластического течения (рис. 3). Поле скоростей пластического течения отображает узловые точки сетки материальных линий, совпадающих с линиями скольжения α , β . Это отображение позволяет найти вектор скорости \vec{v} и его составляющие v_x , v_y (или v_α , v_β) для каждой узловой точки пластической области. Например, радиус-вектор отображенной точки m является вектором скорости \vec{v}_M материальной частицы, совпадающей с точкой M поля линий скольжения, а его составляющие – компонентами скорости $v_{\alpha M}$, $v_{\beta M}$. Поле скоростей соответствует краевому условию на контакте с матрицей: $v_x = -v_M \cos \phi_M$, $v_y = -v_M \sin \phi_M$, где $v_M = v_0 \cos \delta_D / v_0 \cos \delta_D / \cos(\phi_M - \delta_D)$ – модуль вектора скорости материала на контакте с матрицей, а также условию сплошности материала для принятой схемы плоской деформации: $v_0 = (s_0/s)/v_{II}$.

Граничные линии BDC и AC являются линиями разрыва скорости. При пересечении частицами материала граничных линий их скорость изменяется скачком, причем разрыв испытывает касательная составляющая скорости по отношению к направлению границы: $\Delta v_\tau = v_\tau^+ - v_\tau^-$, где v_τ^- , v_τ^+ – значения касательной составляющей скорости по обе стороны от границы. Физически линии разрыва скорости представляют собой тонкий пластический слой, в котором касательная скорость материала v_τ сильно изменяется по толщине слоя, а нормальная скорость v_n постоянна (ее изменение привело бы к появлению трещины).

Поле скоростей течения позволяет построить траектории движения частиц деформируемого материала. Произвольная линия тока s_T (проходящая через некоторую точку M на граничной линии BDC) будет отображаться в плоскости скоростей ее годографом $btca$. Точка b определяет скорость частицы v_0 до входа в пластическую область, точка t определяет ее скорость после пересечения граничной линии BDC , отрезок tc соответствует непрерывному изменению скорости при перемещении частицы в пределах центрированного веера ABC , точка a определяет скорость v_{II} после пересечения граничной линии AC . Годограф линий тока позволяет провести расчет накопления деформации частицами материала при их перемещении в пластической области.

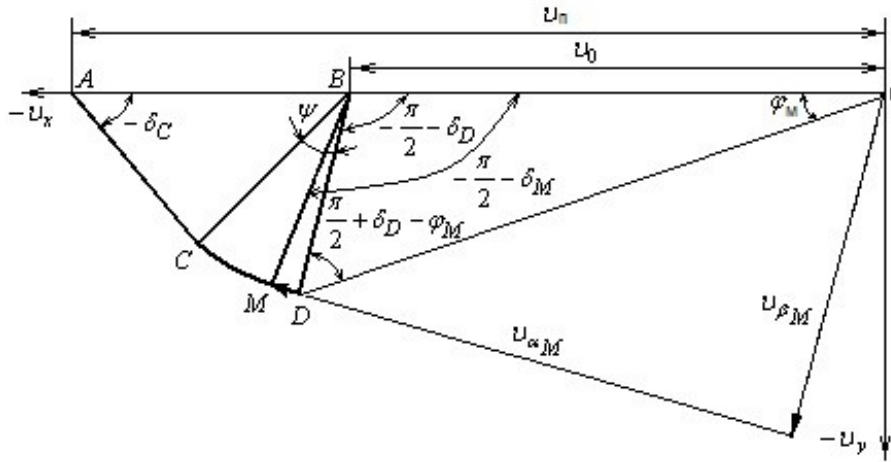


Рис. 3. Поле скоростей пластического течения

Накопленные деформации и пластическая повреждаемость материала. Интенсивность деформаций сдвига соответствует физическому сдвиговому механизму пластической деформации и оказывается удобной при изучении процессов пластического течения металлов методом линий скольжения и процесса развития повреждаемости порами в направлении полос скольжения [7].

В рассматриваемом процессе вытяжки материал накапливает пластическую деформацию, согласно годографу линии тока, следующим образом. Сначала, при пересечении граничной линии разрыва скорости BDC , материал получает “скачок” приращения деформации $\Delta\Lambda_{BDC}$. Далее, перемещение частицы в пределах пластической области ABC отображается отрезком mc годографа линии тока (рис. 3). Это позволяет определить приращение накопленной деформации $\Delta\Lambda_{ABC}$ в пластической области ABC (до пересечения граничной линии AC). Наконец, при пересечении граничной линии разрыва скорости AC на выходе из пластической области, материал получает “скачок” приращения деформации $\Delta\Lambda_{AC}$.

Суммарная накопленная частицами материала деформация

$$\varepsilon_i = \Lambda / \sqrt{3} = (\Delta\Lambda_{BDC} + \Delta\Lambda_{ABC} + \Delta\Lambda_{AC}) / \sqrt{3}. \quad (14)$$

Прогнозирование деформационной повреждаемости материала готовой детали проводилось на базе численного интегрирования определяющей зависимости

$$\omega = \int_0^{\Lambda} \frac{d\bar{\varepsilon}_{ii}(\Lambda)}{\bar{\varepsilon}_{ii \text{ кр}}(\Lambda_{\text{пр}})}, \quad (15)$$

для нормированной меры повреждаемости ω [8]. Входящие в интегральное соотношение (15) материальные функции $\bar{\varepsilon}_{ii}(\Lambda)$ и $\bar{\varepsilon}_{ii \text{ кр}}(\Lambda_{\text{пр}})$ были ранее определены для разных материалов, в том числе для чистой меди. Входящая в зависимость (15) предельная деформация $\Lambda_{\text{пр}}$ зависит от параметра трехосности напряженного состояния $\bar{\sigma}$ и определяется по экспериментальной диаграмме пластичности $\Lambda_{\text{пр}}(\bar{\sigma})$, построенной

для изучаемых материалов. Экспериментальные зависимости $\Lambda_{\text{пр}}(\bar{\sigma})$ вполне удовлетворительно описываются экспоненциальной функцией $\Lambda_{\text{пр}} = B \exp[-c(\bar{\sigma})]$, где B , c – параметры, определяемые по экспериментальной кривой $\Lambda_{\text{пр}}(\bar{\sigma})$.

В рассматриваемом процессе вытяжки материал накапливает пластическую повреждаемость следующим образом: сначала, при пересечении граничной линии разрыва скорости BDC , где материал получает “скачок” приращения эквивалентной деформации $\Delta\varepsilon_{iBDC} = \Delta\Lambda_{BDC}/\sqrt{3}$; далее, в пределах пластической области ABC ($\Delta\varepsilon_{iABC}$) и при пересечении граничной линии разрыва скорости AC на выходе из пластической области ($\Delta\varepsilon_{iAC}$). Накапливаемая повреждаемость, в соответствии с представленной схемой деформации имеет вид:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega_{BDC} + \Delta\omega_{ABC} + \Delta\omega_{AC},$$

где ω_0 – поврежденность материала в состоянии поставки.

На рис. 4 показаны зависимости меры повреждаемости ω от интенсивности деформаций для траекторий движения частиц материала с начальной координатой $y_0/s_0 = 0.2; 0.32; 0.67$.

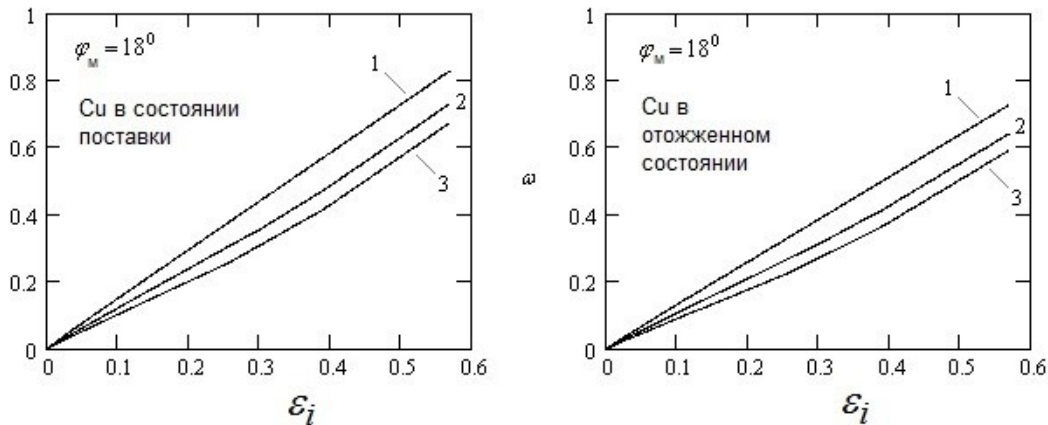


Рис. 4. Зависимость повреждаемости от интенсивности деформаций

Чистая листовая медь после рекристаллизационного отжига проявляет большую пластичность, чем в состоянии поставки. Соответственно материал готовой оболочки из отожженной меди будет иметь меньшую поврежденность ($\omega = 0.59...0.73$) по сравнению с оболочкой из меди в состоянии поставки ($\omega = 0.67...0.82$). Существенно также, что вдоль различных траекторий движения частиц накопление поврежденности происходит неравномерно и с разной интенсивностью. Это обстоятельство приводит к неравномерному распределению конечной поврежденности по толщине стенок готовой оболочки.

Рассмотрим возможность появления стадии коалесценции пор в пластической области. На рис. 5 приведены зависимости повреждаемости в начале коалесценции (слияния) пор (ω_c) от параметра трехосности напряженного состояния $\bar{\sigma}$ при растяжении медных образцов с различной начальной объемной фракцией пор (f_0).

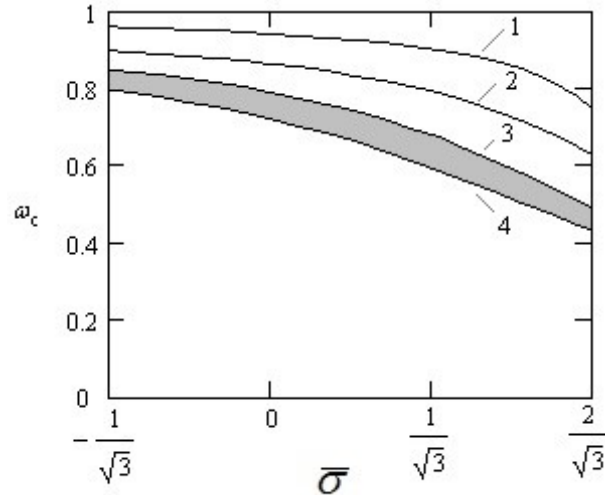


Рис. 5. Зависимость повреждаемости в начале коалесценции пор ω_c от параметра $\bar{\sigma}$ при растяжении медных образцов с различной начальной объемной фракцией пор (f_0): 1 – для сплошных образцов с $f_0 = 0.002$; 2 – для сплошных образцов с $f_0 = 0.03$; полоса между 3 и 4 – для образцов с искусственными дефектами с $f_0 = 0.4 \dots 0.45$

Зависимости $\omega_c(\bar{\sigma})$ построены на основе литературных данных по пластической повреждаемости медных образцов. Опыты в интервале повышенных значений параметра $\bar{\sigma} = [1; 2]$ проводились с насеченными образцами [9]. Исходя из экспериментальных данных, можно предположить, что коалесценция развивается от локализации мезоскопического пластического сдвига до режима утонения перемычек между порами, сопровождаемого пластической локализацией растяжения. Эта гипотеза подтверждается наблюдением стадии коалесценции, связанной с образованием микрополос сдвига [9] и обосновывает известный критерий начала коалесценции пор Броуна и Эмбери, основанный на явном мезомеханическом подходе. Зависимость $\omega_c(\bar{\sigma})$ вполне удовлетворительно аппроксимируется функцией следующего вида:

$$\omega_c = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(K(\bar{\sigma}) - C),$$

где K и C – параметры, рассматриваемые как функции объемной фракции пор f_0 материала в исходном состоянии.

В рассматриваемом процессе вытяжки с начальной объемной фракцией пор $f_0 = 0.002$ и реализуемого НДС ($\bar{\sigma} = -1.188 \dots 0.021$) стадия коалесценции должна начаться при поврежденности $\omega_c = 0.80 \dots 0.85$. Прогнозируемые значения поврежденности материала готовой оболочки, $\omega = 0.68 \dots 0.83$ – для чистой меди в состоянии поставки и $\omega = 0.59 \dots 0.73$ – для отожженной меди (рис. 5), меньше величины $\omega_c = 0.80 \dots 0.85$. Следовательно, в рассматриваемом процессе вытяжки стадия коалесценция пор не наступит. Материал готовой оболочки будет иметь качественную микроструктуру, без полостных дефектов, образующихся в результате слияния пор.

Рассмотрим возможность снижения уровня деформационной повреждаемости материала готовой оболочки применением вытяжной матрицы с малым углом ($\varphi_M =$

12°...13°) рабочего конуса. Пластическая область в зоне деформации будет в этом случае иметь значительно большую протяженность. Это приводит к «смещению» напряженного состояния в область отрицательных значений параметра $\bar{\sigma}$ и, соответственно, к большей предельной деформации ($\Lambda_{пр}$), по сравнению с вытяжкой через матрицы с большим углом рабочего конуса. Поле скоростей пластического течения является более равномерным и приводит к более равномерному нарастанию накопленных деформаций. Применение вытяжной матрицы с малым углом снижает поврежденность материала в состоянии поставки от значений $\omega = 0.67...0.82$ до уровня $\omega = 0.52...0.62$. Применение этой матрицы для отожженного материала позволяет достичь минимального уровня поврежденности готовой оболочки $\omega = 0.45...0.55$. Естественно, что и при вытяжке оболочки через матрицу с малым углом конусности стадия коалесценции пор не наступит и материал готовых изделий будет иметь вполне качественную микроструктуру.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ренне И. П., Рогожин В. Н., Кузнецов В. П., Тутьшкин Н. Д. Вытяжка с утонением стенки. Тула, 1970. – 141 с.
- [2] Тутьшкин Н. Д. Кинетический подход к анализу и проектированию интенсивных процессов обработки давлением изделий с прогнозируемыми свойствами // Тульский политехнический ин-т. Тула, 1991. 32 с.: ил. Библиогр. назв. Деп. в ВНИИТЭМР 12.03.91., № 10.
- [3] Тутьшкин Н. Д. Теоретические основы и проектирование интенсивных процессов обработки давлением изделий с прогнозируемыми свойствами: Диссертация докт. техн. наук – Защищена 24.05.94; утв. 09.12.94; 05940001392. Тула, 1993. 459 с.
- [4] Тутьшкин Н. Д., Ефремова Н. Е., Травин В. Ю., Хавов В. Б. Структурные параметры деформируемых материалов при обработке давлением. Тула: Тул. гос. ун-т. 1997. 24 с.: ил. Библиогр.: 18 назв. – Деп. в ВИНТИ 01.12.97, № 3503 В97.
- [5] Травин В. Ю. Анализ повреждаемости деформируемого материала и степеней деформации на операциях вытяжки // Теория, технология, оборудование и автоматизации обработки металлов давлением и резанием. Тула: Тул. гос. ун-т, 1999. Вып. 2. С. 189 – 194.
- [6] Zapara M. A., Tutyshkin N. D., Muller W. H., Wille R. A study of ductile damage and failure of pure copper. Part II: Analysis of the deep drawing process of a cylindrical shell // Technische Mechanik. 2012. V. 32. P. 631–648.
- [7] Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твердых тел. М.: Металлургия, 1971. 264 с.
- [8] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [9] Pardoen T., Doghri I., Delannay F. Experimental and numerical comparison of void growth models and void coalescence criteria for the prediction of ductile fracture in copper bars // Acta Mater. 1998. V. 46. P. 541-552.

W. Y. Travin, N. D. Tutyshkin

EXPERIMENTAL ANALYSIS OF DEFORMATION DAMAGE

Tula State University, Tula, Russia

AO NPO «Splav», Tula, Russia

Abstract. The analysis and modeling of processes of drawing of axisymmetric products. Deals with physical and mechanical aspects and criteria plastic power-demote. When drawing with wall thinning there is no noticeable change in diameter of the workpiece. Therefore, the deformation of an axisymmetric shell in the circumferential direction is small compared to the linear strain change in the length and thickness of the shell. This circumstance allows to make when the hood with thinning the plane strain condition.

Keywords: macro-level, meso-level, deformations, defects, damage, destruction

REFERENCES

- [1] Renne I. P., Rogozhin V. N., Kuznetsov V. P., Tutyshkin N. D. Hood with wall thinning. Tula, 1970. 141 p.
- [2] Tutyshkin N. D. Kinetic approach to the analysis and design of intensive processes of pressure treatment of products with predictable properties // Tula Polytechnic Institute. Tula, 1991. 32 pp., Ill. – Bibliography name Dep. in VNIITEMR 12.03.91., № 10.
- [3] Tutyshkin N. D. Theoretical foundations and design of intensive processes processing by pressure of products with predicted properties: the Dissertation of the Dr. tech. Sciences – Protected on 24.05.94; approved 09.12.94; 05940001392. Tula, 1993. 459 s.
- [4] Tutyshkin N. D., Efremova N. E., Travin V. Yu., Havov V. B. Structural parameters of deformable materials during pressure treatment. Tula: Toole. state Univ., 1997. 24 pp., Ill. Bibliogr. : 18 titles. Dep. in VINITI 01.12.97, No. 3503 B97.
- [5] Travin V. Yu. Analysis of the damage to the deformable material and degrees deformations on drawing operations // Theory, technology, equipment and automation of metal forming and cutting. Tula: Tul. state Univ., 1999. Vol. 2. p. 189–194.
- [6] Zapara M. A., Tutyshkin N. D., Muller W. H., Wille R. A study of ductile damage and failure of pure copper – Part II: Analysis of the cylindrical shell // Technische Mechanik. 2012. v. 32. P. 631–648.
- [7] Ekobori T. Physics and mechanics of destruction and strength of solid bodies / T. Ekobori. M. : Metallurgy, 1971. 264 p.
- [8] Kachanov L. M. Foundations of the theory of plasticity. M. : Science, 1969. 420 p.
- [9] Pardoen T., Doghri I. , Delannay F. Experimental and numerical comparison of void growth models and void coalescence criteria for ductile fracture in copper bars // Acta Mater. 1998. v. 46. P. 541–552.

Travin Wadim Yurievich, Ph. D., AO NPO «Splav», Tula, Russia.

Tutyshkin Nikolai Dmitrievich

e-mail: nikolai.tutyshkin@mail.ru, Dr. Sci. Eng., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ, ДЕФОРМАЦИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток, Россия

Аннотация. Изучается деформирование вращающегося диска с изменяющейся скоростью в условиях ползучести. В рамках теории течения получены дифференциальные уравнения, позволяющие рассчитать поля напряжений, деформаций, перемещений и скоростей. Для решения данных уравнений использован конечно-разностный метод. В качестве потенциала ползучести используется потенциал Мизеса.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, вращающийся диск, теория течения

УДК: 539.374

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.011

Вращающиеся диски являются важнейшими деталями многих машин и устройств, которые применяются в машиностроении, авиастроении, турбиностроении. Поэтому расчеты вращающихся дисков на прочность проводятся неоднократно и являются предметом многих публикаций, данной проблеме посвящено множество статей [1-10] и монографий [12-15]. В большинстве случаев диски работают в условиях, приводящих к накоплению необратимых деформаций, в том числе и деформаций ползучести. Наиболее распространенным методом учета деформаций пластичности и ползучести является использование деформационных теорий и итерационных процессов последовательных приближений упругих задач [10, 14, 15]. Однако это не позволяет исследовать напряженное состояние вращающихся дисков, работающих при изменяющихся

© Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., 2019

Бегун Александра Сергеевна

e-mail: asustinova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Ковтанюк Лариса Валентиновна

e-mail: lk@iasp.dvo.ru, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-01-00038-А „Учет теплофизических и реологических эффектов при интенсивном формоизменении материалов и упругом последствии“).

Поступила 10.01.2019

режимах эксплуатации. В работе [1] выполнен расчет вращающегося диска с использованием степенного закона ползучести и соответствующего закона течения для различных потенциалов ползучести. Ползучесть вращающихся дисков из функционально-градиентных материалов исследуется в работах [4-7]. Расчеты в указанных работах проводятся при фиксированной скорости вращения диска.

В настоящей работе изучается напряженно-деформированное состояние вращающегося диска в условиях ползучести при изменяющейся скорости вращения.

Модельные соотношения. Решение задачи будем искать в рамках малых деформаций. Когда в среде есть необратимые деформации, компоненты полных деформаций d_{ij} определяются как суммы обратимых e_{ij} и необратимых (в данном случае деформаций ползучести) p_{ij} составляющих

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (1)$$

где u_i — компоненты вектора перемещений, x_j — координаты точки среды.

Напряжения в среде определяются обратимыми деформациями и связаны с ними законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (2)$$

В соотношениях (2) λ, μ — коэффициенты Ламе.

Диссипативный механизм деформирования связан с накоплением необратимых деформаций. Для конкретизации этого механизма воспользуемся теорией течения. Скорость необратимых деформаций ε_{ij}^v определим в виде

$$\varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}, \quad V(\sigma_{ij}) = B \Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (3)$$

Здесь $V(\sigma_{ij})$ — потенциал ползучести, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений, B и n являются параметрами ползучести. Σ зададим следующим образом

$$\Sigma = \sqrt{3/2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2}, \quad (4)$$

где $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$.

Постановка задачи. Деформирование до начала пластического течения. Рассмотрим кольцевой диск с внутренним радиусом $r = r_0$ и внешним радиусом $r = R$, который вращается с угловой скоростью $\omega(t)$ (Рис. 1). Считаем, что реализуется плоское напряженное состояние, в случае осевой симметрии отличными от нуля остаются компоненты напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$ и $\sigma_{r\varphi}$. Для диска со свободными внешней и внутренней поверхностью граничные условия запишутся в виде:

$$\sigma_{rr}|_{r=r_0} = \sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0. \quad (5)$$

для диска с жестким включением

$$u_r|_{r=r_0} = 0, \quad \sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0. \quad (6)$$

В начальный момент времени считаем, что напряжения и деформации в материале отсутствуют.

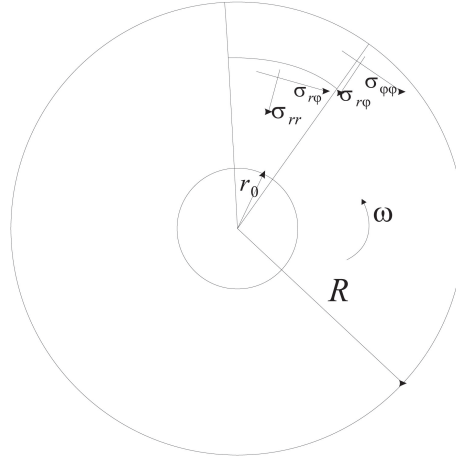


Рис. 1. Вращающийся диск

Отличными от нуля компонентами полных деформаций остаются следующие:

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad d_{r\varphi} = e_{r\varphi} + p_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad (7)$$

$$d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}.$$

Напряжения связаны с обратимыми деформациями законом Гука (2), для отличных от нуля компонент получим

$$\sigma_{rr} = \frac{2\lambda\mu(e_{rr} + e_{\varphi\varphi})}{\lambda + 2\mu} + 2\mu e_{rr}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2\lambda\mu(e_{rr} + e_{\varphi\varphi})}{\lambda + 2\mu} + 2\mu e_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu e_{r\varphi}. \quad (8)$$

Компоненты тензора скоростей обратимых деформаций определяются по формулам

$$\varepsilon_{rr}^e = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{rr} - \lambda\dot{\sigma}_{\varphi\varphi}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^e = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{\varphi\varphi} - \lambda\dot{\sigma}_{rr}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^e = \frac{\dot{\sigma}_{r\varphi}}{2\mu}. \quad (9)$$

Здесь и далее $(\dot{})$ обозначена производная по времени.

Для определения скоростей необратимых деформаций воспользуемся законом ползучести (3). В случае выбора Σ в виде (4) имеем

$$\varepsilon_{rr}^\nu = \frac{1}{2} B n (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^\nu = \frac{1}{2} B n (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}) Q^{\frac{n}{2}-1},$$

$$\varepsilon_{zz}^\nu = -\frac{1}{2} B n (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^\nu = \frac{3}{2} B n \sigma_{r\varphi} Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad (10)$$

$$Q = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2.$$

При вращении диска с изменяющейся скоростью на каждую точку диска помимо центробежного ускорения $r\omega^2$ будет действовать вращательное ускорение $r\frac{d\omega}{dt}$. Тогда на диск будут действовать две системы инерционных сил, связанные с наличием центробежного и вращательного ускорений. Следовательно, уравнения

равновесия в рассматриваемом случае запишутся в виде

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho r \omega^2, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = \rho r \frac{d\omega}{dt}. \quad (11)$$

Интегрируя второе уравнение (11) при граничном условии (5) найдем

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{\rho}{4} \frac{d\omega}{dt} \left(r^2 - \frac{R^4}{r^2} \right). \quad (12)$$

Используя зависимости для деформаций (7), найдем

$$r \frac{\partial d_{\varphi\varphi}}{\partial r} + d_{\varphi\varphi} - d_{rr} = 0. \quad (13)$$

Для скоростей деформаций в этом случае следует соотношение

$$r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^e}{\partial r} + r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^p}{\partial r} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^e + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p - \varepsilon_{rr}^e - \varepsilon_{rr}^p = 0. \quad (14)$$

Введение функции напряжений $\varphi(r, t)$ в виде

$$\sigma_{rr} = \frac{\varphi}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \rho \omega^2 r^2. \quad (15)$$

позволяет удовлетворить первому уравнению равновесия.

Подставляя последние зависимости, соотношения для скоростей обратимых и необратимых деформаций (9) и (10) соответственно в уравнение (14), получим дифференциальное уравнение для определения функции напряжений $\varphi(r, t)$

$$\begin{aligned} & \frac{r^3(7\lambda + 6\mu)\rho\omega^2 + 2(\lambda + \mu) \left(r \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + r \frac{\partial^3 \varphi}{\partial^2 r \partial t} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}{2r\mu(3\lambda + 2\mu)} + \\ & + \frac{Bn \left(7r^2\rho\omega^2 - \frac{2\varphi}{r} + 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) \right)}{2} \left[Q(\varphi(r, t), r, t) \right]^{\frac{n}{2}-1} + \\ & + r \frac{Bn}{2} \left(2 \left(r^2\rho\omega^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{\varphi}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(Q(\varphi(r, t), r, t) \right)^{\frac{n}{2}-1} \right], \\ Q(\varphi(r, t), r, t) & = \frac{\varphi^2}{r^2} - \frac{\varphi}{r} \left(r^2\rho\omega^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \left(r^2\rho\omega^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + 3 \left(\frac{\rho}{4} \frac{\partial \omega}{\partial t} \left(r^2 - \frac{R^2}{r^2} \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Данное уравнение может быть проинтегрировано численно с использованием конечно-разностной схемы при граничных и начальных условиях для диска со свободными внешней и внутренней поверхностью:

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad \varphi(r_0, t) = 0, \quad \varphi(R, t) = 0; \quad (17)$$

для диска с жестким включением:

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad \varphi(R, t) = 0, \quad (18)$$

на внутренней поверхности $r = r_0$

$$\begin{aligned} & 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \Big|_{r=r_0} + 2\rho r_0^2 \omega(t) \omega'(t) \right) - \frac{\lambda}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{r=r_0} + \\ & + \mu(3\lambda + 2\mu) Bn \left(2 \left(r_0^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right) - \frac{\varphi(r_0)}{r_0} \right) \left[Q(\varphi(r_0, t), r_0, t) \right]^{\frac{n}{2}-1} = 0. \end{aligned}$$

По найденной функции $\varphi(r, t)$ находятся напряжения $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$, обратимые $e_{rr}, e_{\varphi\varphi}$ и необратимые $p_{rr}, p_{\varphi\varphi}$ деформации. Компонента перемещений u_r находится из известных деформаций: $u_r = r(e_{rr} + p_{rr})$. Для определения компоненты перемещений u_φ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} = 2(e_{r\varphi} + p_{r\varphi}), \quad e_{r\varphi} = \frac{\rho}{8\mu} \frac{d\omega}{dt} \left(r^2 - \frac{R^4}{r^2} \right), \quad p_{r\varphi} = \int_0^t \varepsilon_{r\varphi}^p dt$$

при граничном условии

$$u_\varphi \Big|_{r=r_0} = r_0 \sin \theta(t), \quad \theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt.$$

Изменение угловой скорости зададим в виде: в промежутке времени $0 \leq t \leq t_1$ возрастает, затем при $t_1 \leq t \leq t_2$ поддерживается постоянной, и далее уменьшается до нуля $t_2 \leq t \leq t_3$. Для примера, выберем линейные законы возрастания и уменьшения угловой скорости

$$\omega(t) = \begin{cases} \alpha t, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \alpha t_1, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ \alpha t_1 - \beta(t - t_2), & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases} \quad (19)$$

Расчеты проводились в безразмерных переменных

$$\tilde{r} = \frac{r}{R}, \quad \tau = t\sqrt{\alpha}, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu}, \quad \tilde{u}_i = \frac{u_i}{R}$$

при значении постоянных

$$\lambda = 79.61 \text{ ГПа}, \quad \mu = 119.42 \text{ ГПа}, \quad B = 3.5 \cdot 10^{-25} c^{-1} \text{ Па}^{n-1}, \quad n = 3, \quad \rho = 8000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$\frac{r_0}{R} = 0.2, \quad \alpha = 400 c^{-2}, \quad \beta = 200 c^{-2}.$$

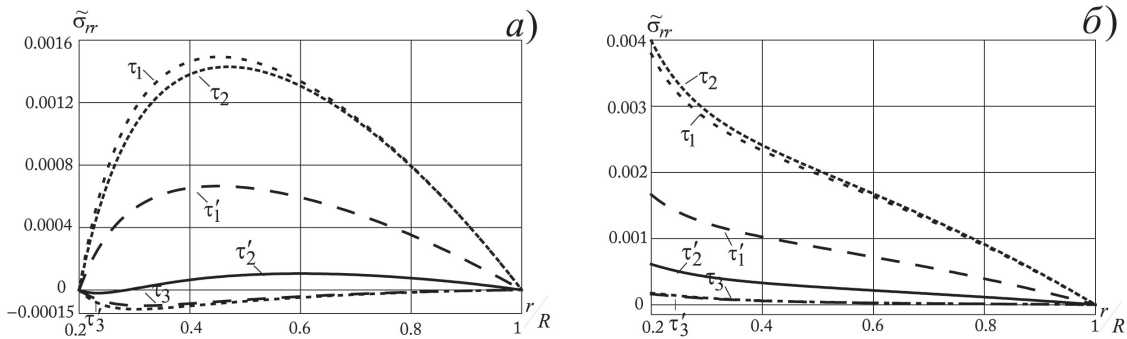


Рис. 2. Распределение напряжений σ_{rr} в зависимости от радиуса

На рис.2-4 показано распределение напряжений в зависимости от радиуса в различные моменты времени ($0 < t'_1 < t_1$, t_1 , t_2 , $t_2 < t'_2 < t_3$, t_3 , $t'_3 > t_3$), на рис.5 — распределение перемещения u_r . Изменение необратимых деформаций с течением

времени приведено на рис.6 и рис.7. На всех рисунках а) — диск со свободными поверхностями, б) — диск с включением.

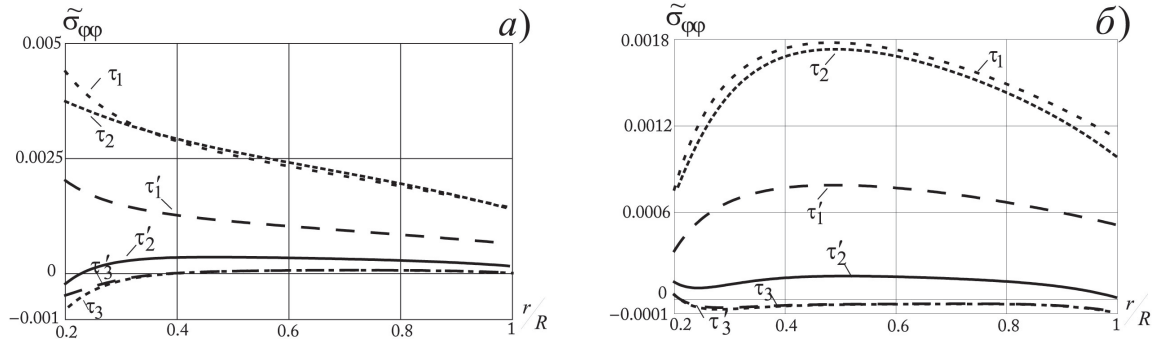


Рис. 3. Распределение напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ в зависимости от радиуса

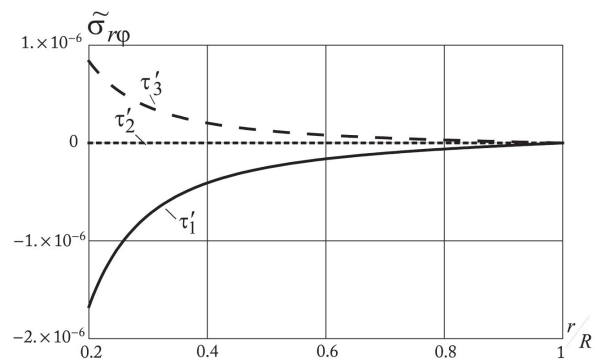


Рис. 4. Распределение напряжений $\sigma_{r\varphi}$ в зависимости от радиуса

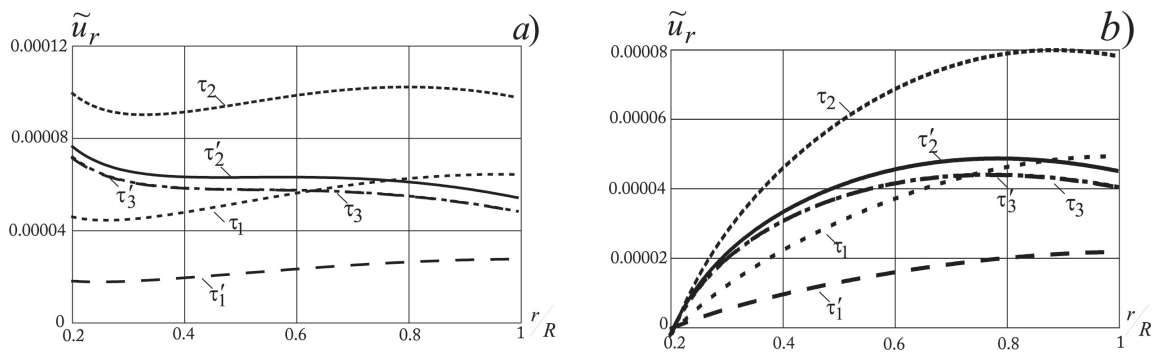
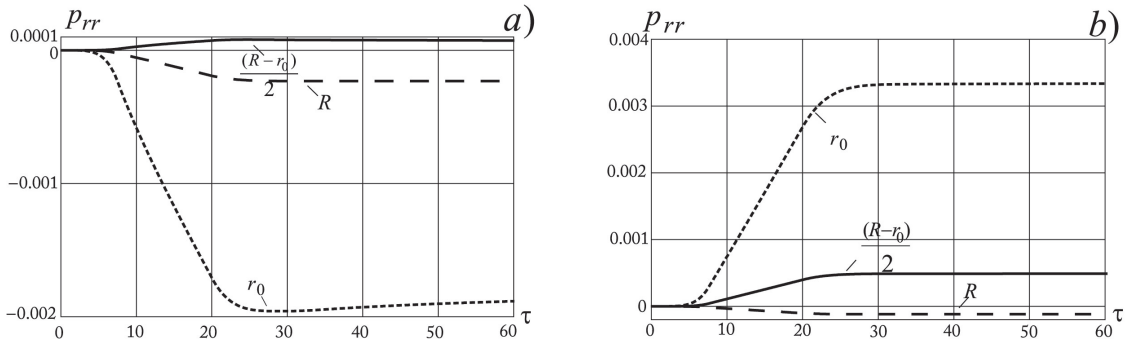
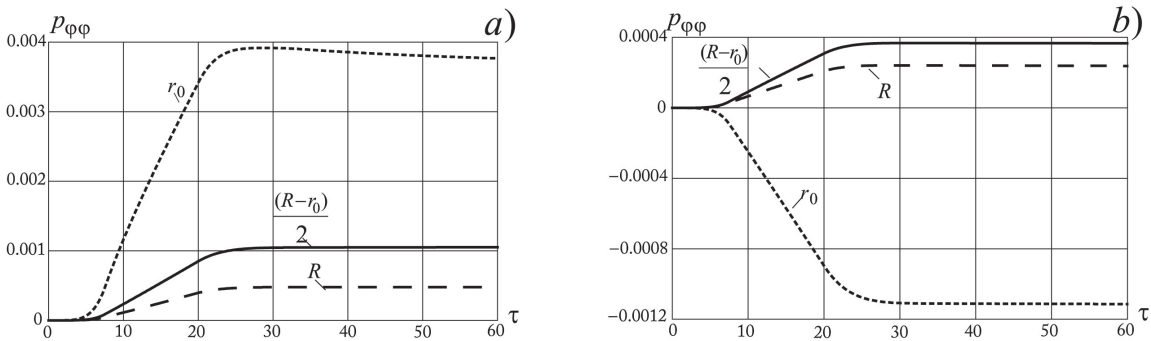


Рис. 5. Распределение перемещений u_r

Рис. 6. Изменение необратимых деформаций p_{rr} с течением времениРис. 7. Изменение необратимых деформаций $p_{\varphi\varphi}$ с течением времени

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Wahl A. M. A Comparison of Flow Criteria Applied to Elevated Temperature Creep of Rotating Disks with Consideration of the Transient Condition / In: Hoff N.J. (eds) Creep in Structures. IUTAM Symposia (International Union of Theoretical and Applied Mechanics). Springer, Berlin, Heidelberg. 1962. P. 195–214.
- [2] Gupta S. K., Pankaj T. Creep transition in a thin rotating disc with rigid inclusion / Defence Science Journal. 2007. 57(2). P. 185–195.
- [3] Gupta S. K., Sonia T. P. Creep Transition in a thin Rotating Disc of variable density / Defence Sci. Journal. 2000. Vol. 50. P. 147–153.
- [5] Tania Bose, Minto Rattan Modeling Creep Behavior of Thermally Graded Rotating Disc / Differential Equations and Dynamical Systems. 2017. P. 1–14.
- [6] Gupta V. K., Singh S. B., Chandrawat H. N., Ray S. Creep behavior of a rotating functionally graded composite disc operating under thermal gradient / Metallurg. Mater. Trans. 2004. 35A. P. 1381–1391.
- [7] Rattan M., Chamoli N., Singh S. B. Creep analysis of an isotropic functionally graded rotating disc / Int. J. Contemp. Math. Sci. 2010. 5(9). P. 419–431.
- [8] Rattan M., Singh S. B., Ray S. Effect of stress exponent on steady state creep in an isotropic rotating disc / Bull. Calcutta Math. Soc. 2009. 101(6). P.559–570.

- [9] Nyashin Y., Shishlyaev V. Analytic Creep Durability of Rotating Uniform Disks / International Journal of Rotating Machinery. 1998. Vol. 4. No. 4. P. 249–256.
- [10] Bayat M., Sahari B. B., Saleem M., Aidi Ali, Wong S. V. Bending analysis of a functionally graded rotating disk based on the first order shear deformation theory // Applied Mathematical Modeling. 2009. 33. P. 4215–4230
- [11] Немировский Ю. В., Янковский А. П. Оценка предельной скорости вращения искривленных металлокомпозитных дисков в условиях ползучести // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. №2. С. 102–111
- [12] Костюк А. Г. Динамика и прочность турбомашин. М.: Издательский дом МЭИ, 2007. 476 с.
- [13] Левин А. В. Рабочие лопатки и диски паровых турбин. М.: Госэнергоиздат, 1963. 624 с.
- [14] Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
- [15] Демьянушко И. В., Биргер И. А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.

A. S. Begun, L. V. Kovtanuk

CALCULATION OF STRESSES, STRAINS AND DISPLACEMENTS IN A ROTATING DISK UNDER CREEP CONDITIONS

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Abstract. Deforming of a rotating disk with a changing velocity under creep are studied. In the context of the flow theory, differential equations are obtained to calculate the fields of stresses, strains, displacements and velocities. To solve these equations, a finite difference method was used. The Mises potential is used as the creep potential.

Keywords: elasticity, creep, rotating disk, flow theory

REFERENCES

- [1] Wahl A. M. A Comparison of Flow Criteria Applied to Elevated Temperature Creep of Rotating Disks with Consideration of the Transient Condition / In: Hoff N.J. (eds) Creep in Structures. IUTAM Symposia (International Union of Theoretical and Applied Mechanics). Springer, Berlin, Heidelberg. 1962. P.195–214.
- [2] Gupta S. K., Pankaj T. Creep transition in a thin rotating disc with rigid inclusion / Defence Science Journal. 2007. 57(2). P. 185-195.
- [3] Gupta S. K., Sonia T. P. Creep Transition in a thin Rotating Disc of variable density / Defence Sci. Journal. 2000. Vol. 50. P.147–153.
- [5] Tania Bose, Minto Rattan Modeling Creep Behavior of Thermally Graded Rotating / Differential Equations and Dynamical Systems. 2017. P. 1–14.
- [6] Gupta V. K., Singh S. B., Chandrawat H. N., Ray S. Creep behavior of a rotating functionally graded composite disc operating under thermal gradient / Metallurg. Mater. Trans. 2004. 35A. P. 1381–1391.
- [7] Rattan M., Chamoli N., Singh S. B. Creep analysis of an isotropic functionally graded rotating disc / Int. J. Contemp. Math. Sci. 2010. 5(9). P. 419–431.
- [8] Rattan M., Singh S. B., Ray S. Effect of stress exponent on steady state creep in an isotropic rotating disc / Bull. Calcutta Math. Soc. 2009. 101(6). P. 559–570.
- [9] Nyashin Y., Shishlyaev V. Analytic Creep Durability of Rotating Uniform Disks / International Journal of Rotating Machinery. 1998. Vol. 4. No. 4. P. 249–256.
- [10] Bayat M., Sahari B. B., Saleem M., Aidy Ali, Wong S. V. Bending analysis of a functionally graded rotating disk based on the first order shear deformation theory / Applied Mathematical Modeling. 2009. 33. P. 4215–4230

Begun Aleksandra Sergeevna

e-mail: asustinova@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Junior Researcher of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Kovtanuk Larisa Valentinovna

e-mail: lk@iacp.dvo.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

- [11] Nemirovskiy Yu. V., Yankovskii A. P. The estimation of the maximum rotation speed of deformed metal-composite disks in creep conditions / Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. №2. P. 102–111 (in Russian)
- [12] Kostyuk A. G. Dynamics and strength of turbomachines. M.: Publishing House MEI, 2007. 476 p. (in Russian)
- [13] Levin A. V. Working blades and wheels of steam turbines. M.: Gosenergoizdat, 1963. 624 p. (in Russian)
- [14] Malinin N. N. Applied theory of plasticity and creep. M.: Mashinostroenie, 1975. 400 p. (in Russian)
- [15] Demianushko I. V., Birger I. A. Calculation of the strength of rotating disks. M.: Mashinostroenie, 1978. 247 p. (in Russian)

С. В. Матвеев, А. Н. Матвеева, С. В. Тихонов

РАВНОМЕРНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ ТОНКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ, ПРИ УСЛОВИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТРЫВУ

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе рассматривается упругопластическое состояние многослойной тонкой пластины с эллиптическим отверстием. Пластина подвергается равномерному растяжению. Материал слоев пластины различен и имеет разные свойства анизотропии и сопротивления отрыву. В работе определено наряженное состояние пластины и найдена граница между упругой и пластической областями.

Ключевые слова: пластичность, упругость, линеаризация, напряжение, отрыв, анизотропия

УДК: 539.374

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.012

Рассмотрим многослойную бесконечную кольцевую пластину с эллиптическим отверстием. В качестве границ перехода между слоями материала примем окружности радиуса r_i (рис. 1), оси которых совпадают с осями эллипса. Материал всех слоев примем анизотропным, идеальнопластическим. Константу отрыва для i -го слоя пластины обозначим p_i . Пластина находится в состоянии равномерного растяжения.

Следуя идеям Хилла [1], учитывая [2] условие пластичности для материала i -го слоя пластины примем в виде

$$(A_i\sigma_x - p_i)(B_i\sigma_y - p_i) - C_i\tau_{xy}^2 = 0, \quad (1)$$

© Матвеев С. В., Матвеева А. Н., С. В. Тихонов 2019

Матвеев Сергей Владимирович

e-mail: sergio2100@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матвеева Алена Николаевна

e-mail: goshtova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 15.01.2019

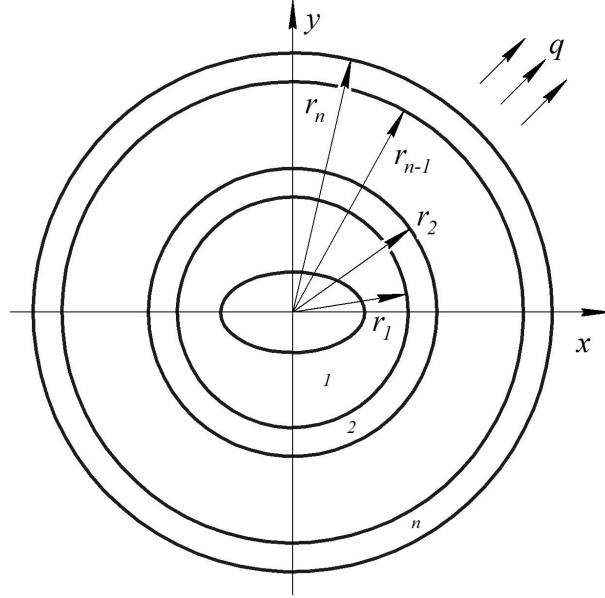


Рис. 1.

где A_i, B_i, C_i – константы определяющие анизотропию материала слоя i , p_i – константа сопротивления отрыву области i .

Запишем уравнение контура эллиптического отверстия

$$\frac{x^2}{a^2(1+\varepsilon)^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon)^2} = 1. \quad (2)$$

Перейдем к полярной системе координат, при этом уравнение эллипса примет вид

$$\rho = \frac{\alpha(1-\delta^2 d_1^2)}{\sqrt{1-2\delta d_1 \cos 2\theta + \delta^2 d_1^2}} = \alpha \left[-1 + \delta d_1 \cos 2\theta - \frac{3}{4} \delta^2 d_1^2 (1 - \cos 4\theta) + \right. \\ \left. + \frac{5}{8} \delta^3 d_1^3 (\cos 2\theta + \cos 6\theta) \right] + \dots, \quad \rho = \frac{1}{\rho_s}, \quad \alpha = \frac{a}{\rho_s}. \quad (3)$$

Для записи выражения (1) в полярной системе координат $\rho\theta$ воспользуемся соотношениями (4).

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (1) и (4) получим

$$\begin{aligned} &A_i B_i (\sigma_\rho + \sigma_\theta)^2 - (\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 \left(\frac{A_i B_i + C_i}{2} + \frac{A_i B_i - C_i}{2} \cos 4\theta \right) - \\ &- 2\tau_{\rho\theta}^2 (A_i B_i + C_i + (C_i - A_i B_i) \cos 4\theta) - 2\tau_{\rho\theta} (\sigma_\rho - \sigma_\theta) \times \\ &\times (A_i B_i - C_i) \sin 4\theta - 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta) (A_i - B_i) p_i \cos 2\theta - \\ &- 4\tau_{\rho\theta} (A_i - B_i) p_i \sin 2\theta - 2(\sigma_\rho + \sigma_\theta) (A_i + B_i) p_i = -4p_i^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение будем искать с помощью метода возмущения по малому параметру, для этого перейдем к безразмерным величинам. Все компоненты напряжения отнесем к

пределу текучести k_0 , величины определяющие геометрические размеры пластины отнесем некоторой линейной величине ρ_s^0 .

$$A_i = 1 + \delta a_i, \quad B_i = 1 + \delta b_i, \quad C_i = 1 + \delta c_i, \quad \alpha_i = \frac{r_i}{\rho_s^0}, \quad (6)$$

где a_i, b_i, c_i – константы анизотропии, r_i – радиусы границ слоев, δ – малый безразмерный параметр.

В исходном нулевом приближении при $\delta = 0$, $A_i = B_i = C_i = 1$ соотношение (5) имеет вид

$$(\sigma_{\rho i} - p_i)(\sigma_{\theta i} - p_i) - \tau_{\rho\theta i}^2 = 0, \quad p_i = const. \quad (7)$$

Решение будем искать аналогично работам [3-8], полагая

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(I)} + \delta^2 \sigma_{ij}^{(II)} + \dots \quad (8)$$

Примем

$$\tau_{\rho\theta i}^{(0)} = 0. \quad (9)$$

Припишем компонентам напряжения в пластической зоне индекс “ p ” наверху, а упругой – индекс “ e ” наверху.

В нулевом приближении из (5 – 9) получим

$$\sigma_{\theta i}^{(0)p} = p_i. \quad (10)$$

Уравнения равновесия запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho}^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{\rho}^{(i)} - \sigma_{\theta}^{(i)}}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}^{(i)}}{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

В исходном нулевом приближении выражения (11) с учетом (8 – 10), примут вид

$$\frac{d\sigma_{\rho i}^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho i}^{(0)} - \sigma_{\theta i}^{(0)}}{\rho} = 0. \quad (12)$$

Из соотношений (10), (12) определим компоненты напряжения $\sigma_{\rho}^{(0)p}$ для i -го слоя

$$\sigma_{\rho i}^{(0)p} = p_i - \frac{C_{1i}}{\rho}. \quad (13)$$

Учитывая, что контур отверстия свободен от усилий, $\sigma_{\rho 1} = 0$ при $\rho = \alpha_0$, определим константу C_1 .

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = p_1 \left(1 - \frac{\alpha}{\rho} \right). \quad (14)$$

Компоненты напряжения для первой области в пластической области в нулевом приближении имеют вид

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = p_1 \left(1 - \frac{\alpha_0}{\rho} \right), \quad \sigma_{\theta 1}^{(0)p} = p_1, \quad \tau_{\rho\theta 1}^{(0)p} = 0. \quad (15)$$

Условия сопряжения на границах областей в нулевом приближении имеет вид

$$\sigma_{\rho i-1}^{(0)p} = \sigma_{\rho i}^{(0)p}, \quad \text{при } \rho = \alpha_i - 1. \quad (16)$$

Из (9), (10), (14) получим компоненты напряжений для i -го слоя в нулевом приближении

$$\sigma_{\rho i}^{(0)p} = p_i \left(1 - \frac{\alpha_{i-1}}{\rho} \right) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{p_j (\alpha_j - \alpha_{j-1})}{\rho}. \quad (17)$$

Линеаризуя выражение (5) с учетом (6) (8), с учетом (9), (15), (17) имеем

$$\begin{aligned} \sigma'_{\theta i} = & \frac{a_i + b_i - c_i}{8} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{p_j (\alpha_j - \alpha_{j-1})}{\rho} - p_i \frac{\alpha_{i-1}}{\rho} \right) \cos 4\theta + \frac{1}{2} (a_i - b_i) p_i \cos 2\theta \\ & - \frac{a_i + b_i - c_i}{8} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{p_j (\alpha_j - \alpha_{j-1})}{\rho} - p_i \frac{\alpha_{i-1}}{\rho} \right) - \frac{1}{2} (a_i - b_i) p_i. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнениям равновесия (11) удовлетворим, полагая

$$\sigma'_{\rho n} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi'_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi'_i}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi'_i}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta n} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi'_i}{\partial \theta} \right). \quad (19)$$

Подставляя в (18) выражения (19), получим

$$\frac{\partial^2 \Phi'_i}{\partial \rho^2} = \frac{a_i + b_i - c_i}{8\rho} \cos 4\theta + \frac{1}{2} (a_i - b_i) p_i \cos 2\theta \Omega - \frac{a_i + b_i - c_i}{8\rho} \Omega - \frac{1}{2} (a_i + b_i) p_i, \quad (20)$$

где $\Omega = \sum_{j=1}^{i-1} p_j (\alpha_j - \alpha_{j-1}) - p_i \alpha_{i-1}$.

Решение уравнения (20) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Phi'_i = & \frac{a_i + b_i - c_i}{8} \rho (\ln \rho - 1 + C_1 \rho + C_2) \Omega \cos 4\theta + \\ & + \left(\frac{1}{4} (a_i - b_i) p_i \rho^2 + C_3 \rho + C_4 \right) \cos 2\theta - \\ & - \frac{a_i + b_i - c_i}{8} \Omega \rho \ln \rho + \left(\frac{a_i + b_i - c_i}{8} \Omega + C_5 \right) \rho - \frac{1}{4} (a_i - b_i) p_i \rho^2 + C_6. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя (21) в уравнения (11) определим выражения для компонент напряжений в пластической области для первого приближения

$$\begin{aligned} \sigma'_{\rho n} = & \left[\frac{a_i + b_i - c_i}{8} \Omega \frac{16 - 15 \ln \rho}{\rho} - \frac{15 C_1}{\rho} - \frac{16 C_2}{\rho^2} \right] \cos 4\theta - \\ & - \left[\frac{1}{2} (a_i - b_i) p_i + \frac{3 C_3}{\rho} + \frac{4 C_4}{\rho^2} \right] \cos 2\theta - \\ & - \frac{a_i + b_i - c_i}{8} \frac{\ln \rho}{\rho} \Omega - \frac{1}{2} (a_i + b_i) p_i + \frac{C_5}{\rho} \\ \tau'_{\rho\theta} = & \left[\frac{a_i + b_i - c_i}{8} \Omega \frac{1}{\rho} - \frac{4 C_2}{\rho^2} \right] \sin 4\theta + \left[\frac{1}{2} (a_i - b_i) p_i - \frac{2 C_4}{\rho^2} \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (22)$$

Контур отверстия свободен от усилий, с учётом выражения (3) на нём будут справедливы соотношения

$$\sigma'_{\rho 1} = -p_1 d_1 \cos 2\theta, \quad \tau'_{\rho\theta 1} = -p_1 d_1 \sin 2\theta \quad \text{при } \rho = \alpha_0. \quad (23)$$

Из (22), (23) определим константы для первого слоя

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{p_0 \alpha \ln \alpha}{8} (a + b - c), & C_2 &= -\frac{p_0 \alpha^2}{8} (a + b - c), \\
C_3 &= -\frac{p_0 \alpha}{2} (a - b) + \frac{p_0 d_1}{3} (1 - 4\alpha), & C_4 &= \frac{\alpha^2 p_0}{4} (a - b) + \alpha^2 p_0 d_1, \\
C_5 &= \frac{p_0 \alpha}{2} (a - b) - \frac{p_0 \alpha \ln \alpha}{8} (a + b - c).
\end{aligned} \tag{24}$$

Выражения для компонент напряжения в пластической зоне для первого слоя в первом приближении согласно (22), (24) примут вид

$$\begin{aligned}
\sigma'_{\rho 1} &= \alpha_0 p_1 (a + b - c) \left[\frac{15 \ln \rho}{8\rho} - \frac{16 + 15 \ln \alpha_0}{8\rho} + \frac{2\alpha_0}{\rho^2} \right] \cos 4\theta - \\
&\quad - \left[\frac{p_1 (a-b)}{2} \left(1 - \frac{3\alpha_0}{\rho} + \frac{2\alpha_0^2}{\rho^2} \right) + p_1 d_1 \left(\frac{1-4\alpha_0}{\rho} + \frac{4\alpha_0^2}{\rho^2} \right) \right] \cos 2\theta + \\
&\quad + \frac{p_1 \alpha_0 \ln \alpha_0}{8\rho} c - p_1 (a + b) \left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha_0}{2\rho} \right] + \frac{\alpha_0 p_1}{8\rho} (a + b - c) \ln \frac{\rho}{\alpha_0}, \\
\sigma'_{\theta 1} &= -\frac{\alpha_0 p_1}{8\rho} (a + b - c) \cos 4\theta + \frac{p_1 (a-b)}{2} \cos 2\theta - \frac{p_1 (a+b)}{2} + \frac{\alpha_0 p_1}{8\rho} (a + b - c), \\
\tau'_{\rho\theta 1} &= -\frac{\alpha_0 p_1}{2\rho} (a + b - c) (1 - \alpha_0^2) \sin 4\theta + \left[\frac{p_1 (a-b)}{2} \times \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{\rho^2} \right) - \frac{2p_1 d_1 \alpha_0^2}{\rho^2} \right] \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{25}$$

Условия сопряжения на границе областей имеет вид

$$\sigma'_{\rho i} = \sigma'_{\rho i-1} \quad \tau'_{\rho\theta i} = \tau'_{\rho\theta i-1} \quad \text{при} \quad \rho = \alpha_{i-1}. \tag{26}$$

Зная компоненты напряжения в первой области (25), из выражений (22) и условий сопряжения (26) можно определить значения коэффициентов $C_1^{(n)}$ $C_2^{(n)}$ $C_3^{(n)}$ $C_4^{(n)}$ $C_5^{(n)}$.

$$\begin{aligned}
C_1^{(i)} &= -\frac{a_1 + b_1 - c_1}{15} \alpha_0 p_1 \left[16 (2 - \alpha_0^2) + \frac{15}{8} \ln (\alpha_0 \alpha_1) + 2 \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right] - \\
&\quad - \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{a_i + b_i - c_i}{8} \ln \left(\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \right) \Omega \right) - \frac{a_i + b_i - c_i}{8} \Omega \ln \alpha_{i-1}, \\
C_2^{(i)} &= \frac{p_1 \alpha_0 \alpha_1}{8} (a_1 + b_1 - c) (1 - \alpha_0^2) + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{a_i + b_i - c_i}{8} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) \Omega \right) + \frac{a_i + b_i - c_i}{8} \alpha_{i-1} \Omega, \\
C_3^{(i)} &= \frac{p_1 d_1}{3} (1 - 4\alpha_0) + (a_1 - b_1) p_1 \alpha_1 \left(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right) \left(2 - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} (a_i - b_i) p_i (\alpha_{i-1} - \alpha_i) - \frac{a_i - b_i}{2} p_i \alpha_{i-1}, \\
C_4^{(i)} &= -\frac{p_1 (a_1 - b_1)}{4} (\alpha_1^2 - \alpha_0^2) + p_1 d_1 \alpha_0^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{(a_i - b_i) p_i}{4} (\alpha_{i-1}^2 - \alpha_i^2) \right) + \frac{(a_i - b_i) p_i}{4} \alpha_{i-1}^2, \\
C_5^{(i)} &= \frac{p_1 \alpha_0 \ln \alpha_0}{8} c_1 + \frac{\alpha_0 p_1 (a_1 + b_1 - c_1)}{8} \ln \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} (p_i (a_i + b_i) (\alpha_{i-1} - \alpha_i)) + \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{(a_i + b_i + c_i)}{8} \ln \left(\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \right) \Omega \right) + \frac{a_i + b_i + c_i}{8} \ln \alpha_{i-1} + \frac{1}{2} (a_i + b_i) p_i \alpha_{i-1}.
\end{aligned}$$

Упругое решение в первом приближении можно определить согласно [8]. Ввиду громоздкости расчетов в данной работе это решение опустим.

Полученное решение соответствует результатам работ [9–11], при изменении количества слоев и формы отверстия.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956, 408 с.
- [2] Matveeva A. N., Matveev S. V., Tikhonov S. V., Mishin P. V., Alatiyev S. S., Akimov A. P. On limit statically determinated detachment conditions for compressible anisotropic material // Journal of Physics: Conference Series 1. Сер. "1st International Conference on Physics, Mathematics and Statistics, ICPMS 2018" 2018. 012037.
- [3] Роштова А. Н. О плоском напряженном состоянии анизотропного идеальнопластического материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2007. Т.1. № 3. С. 19-22.
- [4] Роштова А. Н. Об общих предельных условиях при отрыве для сжимаемых анизотропных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 2. С. 131.
- [5] Матвеев С. В. Матвеева А. Н., Тихонов С. В. Деформированное состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двусном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. №1(27). С. 105-114.
- [6] Кержаев А. П. Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2 (16). С. 71–81.
- [7] Кузнецов П. Н. Упругопластическое состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленной включениями, ограниченными эксцентрическими окружностями, при двусном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1 (6). С. 134-141.
- [8] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела – М. : Наука, 1978. 208 с.
- [9] Роштова А. Н. Растяжение упругопластической анизотропной тонкой пластины, ослабленной круговым отверстием // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. 2007. № 3(55). С. 22–27.
- [10] Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Рыбакова Т. И. Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4 (34). С. 59–65.
- [11] Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Тихонов С. В. Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины с круговым отверстием, подкрепленной включением, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4 (34). С. 95–103.

S. V. Matveev, A. N. Matveeva, S. V. Tikhonov

**UNIFORM STRETCHING OF A THIN ANISOTROPIC PLATE WITH A
CIRCULAR APERTURE BACKED UP BY INCLUSION, UNDER THE
CONDITION OF RESISTANCE TO SEPARATION**

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. The paper deals with the elastoplastic state of a multilayer thin plate with an elliptical hole. The plate is subjected to uniform stretching. Material The plate layers are different and have different anisotropy properties and resistance to tearing. In the work determined the dressed state of the plate and The boundary between the elastic and plastic regions is found.

Keywords: plasticity, elasticity, linearization, stress, separation, anisotropy

REFERENCES

- [1] Hill R. Mathematical theory of plasticity. M.: Gostekhizdat, 1956, 408 p.
- [2] Matveeva A. N., Matveev S. V., Tikhonov S. V., Mishin P. V., Alatirev S. S., Akimov A. P. On limit statically determinated detachment conditions for compressible anisotropic material // Journal of Physics: Conference Series 1. Ser. "1st International Conference on Physics, Mathematics and Statistics, ICPMS 2018"2018. 012037.
- [3] Roshtova A. N. On the plane stress state of anisotropic idealoplastic material //Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2007. V. 1. Number 3. P. 19–22.
- [4] Roshtova A. N. On general limiting conditions for separation for compressible anisotropic media // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2007. No. 2. P. 131.
- [5] Matveev S.V. Matveeva A.N., Tikhonov S.V. Deformed state an anisotropic plane weakened by a hole, supported by the inclusion, bounded by an eccentric circle, with biaxial stretching // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2016. №1 (27). P. 105–114.
- [6] Kerzhayev A. P. The elastoplastic state of a two-layer thick-walled pipe, under the influence of internal pressure during translational anisotropy // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2013. № 2 (16). P. 71–81.

Matveev Sergey Vladimirovich

e-mail: sergio2100@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary.

Matveeva Alena Nikolaevna

e-mail: roshtova@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary.

Tikhonov Sergey Vladimirovich

e-mail: strangcheb@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary.

[7] Kuznetsov P. N. The elastoplastic state of an inhomogeneous plane, weakened by a circular hole, supported by inclusions, limited eccentric circles, with biaxial stretching // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2009. № 1 (6). P. 134–141.

[8] Ivlev D. D., Ershov L. V. The perturbation method in the theory of an elastoplastic body - M.: Science, 1978. 208 p.

[9] Roshtova A. N. Stretching of an elastoplastic anisotropic thin plate weakened by a circular hole // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2007. № 3 (55). P. 22–27.

[10] Matveev S. V., Matveeva A. N., Rybakova T. I. Uniform stretching of a thin anisotropic plate, weakened by an elliptical hole, under the condition of resistance to separation // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2017. № 4 (34). P. 59–65.

[11] Matveev S. V., Matveeva A. N., Tikhonov S. V. Uniform stretching of a thin anisotropic plate with a circular hole, supported by the inclusion, provided resistance to tearing. Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2017. № 4 (34). P. 95–103.

А. В. Никитин¹

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СОСТАВНОЙ ПОЛОСЫ

¹Чебоксарский институт (ф) Московского Политехнического университета, г. Чебоксары, Россия.

Аннотация. В работе [2] рассмотрена краевая задача для полуполосы длинные стороны которой зашпелены, т.е. перемещения равны нулю, а на торце заданы напряжения. Решение было построено в виде разложений по функциям Фадля–Папковича. В данной статье рассматривается бесконечная полоса, склеенная из полос с различными модулями упругости. Вдоль линии склеивания выполняются равенства напряжений и перемещений внешней и внутренних полос. Для решения задачи применяется метод начальных функций [1]. Несобственные интегралы, приведённые в конце статьи, являются формулами для определений напряжений и перемещений.

Ключевые слова: метод начальных функций, интегральное преобразование Фурье, составная полоса.

УДК: 539.3

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.013

Рассматривается бесконечная полоса (рис. 1) в случае симметричной деформации $\{P: |y| \leq 1, |x| < \infty\}$. С помощью индекса «а» обозначим параметры внутренней полосы $\{P^a: |y| \leq a, |x| < \infty\}$. Положим, что модули упругости полос различны: G^a и G . Полосы непрерывно склеены так, что вдоль линий склеивания $y = \pm a$ выполняются равенства

$$u^a(x) = u(x), \quad v^a(x) = v(x), \quad \sigma_y^a(x) = \sigma_y(x), \quad \tau_{xy}^a(x) = \tau_{xy}(x), \quad (1)$$

где u, v — соответственно продольное (вдоль полосы) и поперечное перемещения.

Перейдем к обозначениям, принятым в методе начальных функций [1]:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= Gu(x, y), & V(x, y) &= Gv(x, y), \\ Y(x, y) &= \sigma_y(x, y), & X(x, y) &= \tau_{xy}(x, y), \\ U^a(x, y) &= G^a u^a(x, y), & V^a(x, y) &= G^a v^a(x, y), \\ Y^a(x, y) &= \sigma_y^a(x, y), & X^a(x, y) &= \tau_{xy}^a(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

© Никитин А. В., 2019

Никитин Андрей Витальевич

e-mail: ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чебоксарский институт (ф) Московского Политехнического университета, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 15.01.2019

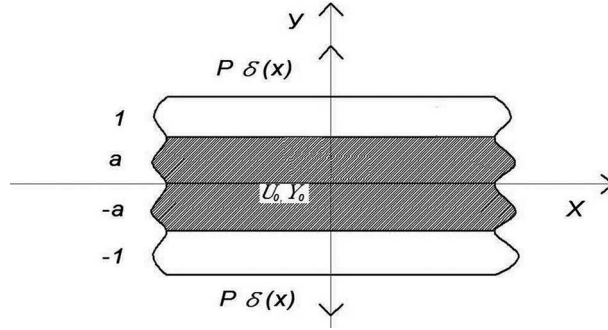


Рис. 1. Бесконечная составная полоса

Обозначим $K = G^a/G$ и запишем равенства (1) в виде

$$U^a(x) = KU(x), \quad V^a(x) = KV(x), \quad Y^a(x) = Y(x), \quad X^a(x) = X(x). \quad (3)$$

Положим, что граничные условия на сторонах $y = \pm 1$ имеют вид

$$Y(x, \pm 1) = P\delta(x), \quad X(x, \pm 1) = 0. \quad (4)$$

Удовлетворим граничным условиям (4) с помощью зависимостей метода начальных функций и, учитывая, что в силу симметрии задачи начальные функции $V_0(x) = X_0(x) = 0$, получим

$$\begin{aligned} U(x, a) &= L_{UU}(\alpha, a)U_0(x) + L_{UY}(\alpha, a)Y_0(x), \\ V(x, a) &= L_{VU}(\alpha, a)U_0(x) + L_{VY}(\alpha, a)Y_0(x), \\ Y(x, a) &= L_{YU}(\alpha, a)U_0(x) + L_{YY}(\alpha, a)Y_0(x), \\ X(x, a) &= L_{XU}(\alpha, a)U_0(x) + L_{XY}(\alpha, a)Y_0(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $L_{UU}(\alpha, a)$ и т.д. — дифференциальные операторы метода начальных функций, в которых $\alpha = d/dx$ — операция дифференцирования.

Используя формулы (5) как начальные для внешней полосы, удовлетворим с помощью метода начальных функций граничным условиям (4). В итоге получим систему из двух дифференциальных уравнений бесконечного порядка относительно начальных функций $Y_0(x)$ и $U_0(x)$:

$$L_{YU}^1(\alpha)U_0(x) + L_{YY}^1(\alpha)Y_0(x) = P\delta(x), \quad L_{XU}^1(\alpha)U_0(x) + L_{XY}^1(\alpha)Y_0(x) = 0. \quad (6)$$

В формулах (6)

$$\begin{aligned} L_{YU}^1(\alpha) &= K [L_{YU}(\alpha, 1-a)L_{UU}(\alpha, a) + L_{YV}(\alpha, 1-a)L_{VU}(\alpha, a)] + \\ &\quad + L_{YY}(\alpha, 1-a)L_{YU}(\alpha, a) + L_{YX}(\alpha, 1-a)L_{XU}(\alpha, a), \\ L_{YY}^1(\alpha) &= K [L_{YU}(\alpha, 1-a)L_{UY}(\alpha, a) + L_{YV}(\alpha, 1-a)L_{VY}(\alpha, a)] + \\ &\quad + L_{YY}(\alpha, 1-a)L_{YY}(\alpha, a) + L_{YX}(\alpha, 1-a)L_{XY}(\alpha, a), \\ L_{XU}^1(\alpha) &= K [L_{XU}(\alpha, 1-a)L_{UU}(\alpha, a) + L_{XV}(\alpha, 1-a)L_{VU}(\alpha, a)] + \\ &\quad + L_{XY}(\alpha, 1-a)L_{YU}(\alpha, a) + L_{XX}(\alpha, 1-a)L_{XU}(\alpha, a), \\ L_{XY}^1(\alpha) &= K [L_{XU}(\alpha, 1-a)L_{UY}(\alpha, a) + L_{XV}(\alpha, 1-a)L_{VY}(\alpha, a)] + \\ &\quad + L_{XY}(\alpha, 1-a)L_{YY}(\alpha, a) + L_{XX}(\alpha, 1-a)L_{XY}(\alpha, a). \end{aligned} \quad (7)$$

Искомые выражения для напряжений и перемещений имеют вид:

$$U^a(x, y) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} [L_{UU}(-i\lambda, y)U_0(-i\lambda) + L_{UY}(-i\lambda, y)Y_0(-i\lambda)] \sin(\lambda x) d\lambda,$$

$$U(x, y) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} [L_{UU}^*(-i\lambda, y)U_0(-i\lambda) + L_{UY}^*(-i\lambda, y)Y_0(-i\lambda)] \sin(\lambda x) d\lambda,$$

$$V^a(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [L_{VV}(-i\lambda, y)U_0(-i\lambda) + L_{VY}(-i\lambda, y)Y_0(-i\lambda)] \cos(\lambda x) d\lambda,$$

$$V(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [L_{VV}^*(-i\lambda, y)U_0(-i\lambda) + L_{VY}^*(-i\lambda, y)Y_0(-i\lambda)] \cos(\lambda x) d\lambda,$$

$$\sigma_x^a(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A_U(-i\lambda, y)U_0(-i\lambda) + A_Y(-i\lambda, y)Y_0(-i\lambda)] \cos(\lambda x) d\lambda,$$

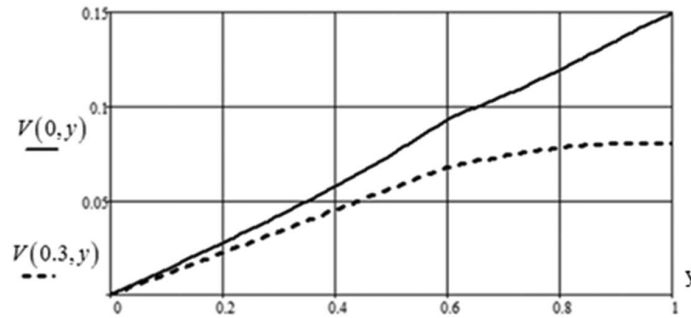


Рис. 2. Распределения поперечных перемещений $V(x, y)$ в сечениях $x = 0$ и $x = 0,3$

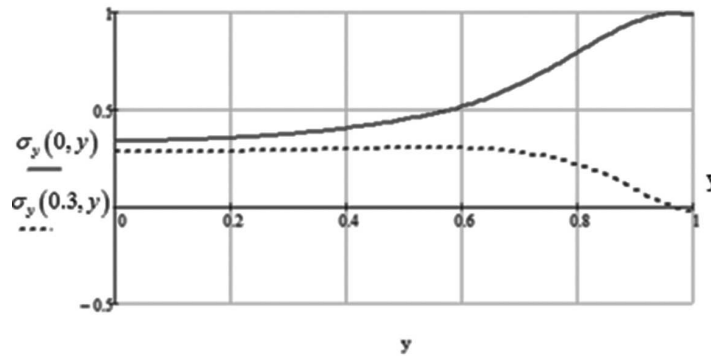


Рис. 3. Распределения напряжений $\sigma_y(x, y)$ в сечениях $x = 0$ и $x = 0,3$

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A_U^*(-i\lambda, y)U_0(-i\lambda) + A_Y^*(-i\lambda, y)Y_0(-i\lambda)] \cos(\lambda x) d\lambda, \\ Y^a(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [L_{YU}(-i\lambda, y)U_0(-i\lambda) + L_{YY}(-i\lambda, y)Y_0(-i\lambda)] \cos(\lambda x) d\lambda, \\ Y(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [L_{YU}^*(-i\lambda, y)U_0(-i\lambda) + L_{YY}^*(-i\lambda, y)Y_0(-i\lambda)] \cos(\lambda x) d\lambda, \\ X^a(x, y) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} [L_{XU}(-i\lambda, y)U_0(-i\lambda) + L_{XY}(-i\lambda, y)Y_0(-i\lambda)] \sin(\lambda x) d\lambda, \\ X(x, y) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} [L_{XU}^*(-i\lambda, y)U_0(-i\lambda) + L_{XY}^*(-i\lambda, y)Y_0(-i\lambda)] \sin(\lambda x) d\lambda. \end{aligned}$$

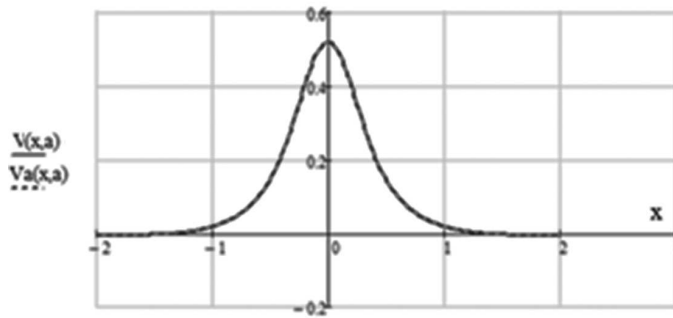


Рис. 4. Распределения поперечных перемещений $V(x, a)$, $V^a(x, a)$ на стыке полос

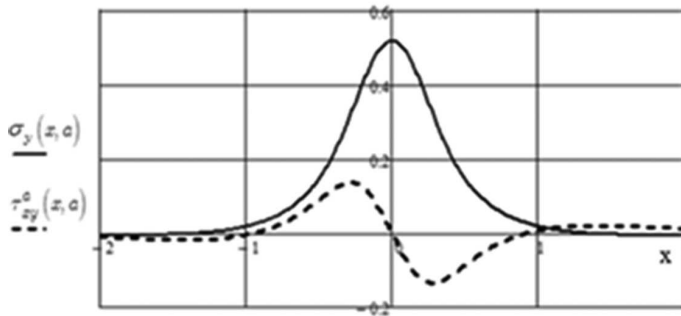


Рис. 5. Распределения нормальных $\sigma_y(x, a)$ и касательных $\tau_{xy}^a(x, a)$ напряжений на стыке полос

На рис. 2–5 приведены результаты распределений перемещений и напряжений в разных сечениях. Считалось, что $a = 0,6$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М.: Стройиздат, 1975. 224 с.
- [2] Никитин А. В., Коваленко М. Д. Полуполоса, защемленная по продольным сторонам. Точное аналитическое решение // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. №4(22). С. 193–203.

A. V. Nikitin¹

ON THE DETERMINATION OF THE STRESS-DEFORMED STATE OF THE COMPOSITE STRIP

¹*Cheboksary Institute (f) of Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia.*

Abstract. In work [2] the boundary value problem for the half-strip whose long sides are clamped, i.e. the displacements are equal to zero, and the stresses are set at the end. The solution was constructed in the form of decompositions by Fadl–Papkovich functions. In this paper, we consider an infinite strip glued together from strips with different elastic modules. Along the bonding line are equal stresses and displacements of the outer and inner bands. The method of initial functions [1] is used to solve the problem. Improper integrals given at the end of the article are formulas for determining stresses and displacements.

Keywords: initial function method, Fourier integral transform, composite strip.

REFERENCES

- [1] Vlasov V. V. The method of initial functions in the problems of the theory of elasticity and structural mechanics. M.: Stroizdat, 1975. 224 p. (in Russia)
- [2] Nikitin A. V., Kovalenko M. D. Polomolok, clamped on the longitudinal sides. Exact analytical solution // Bulletin of Chuvash state pedagogical University named I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2014. №4(22). P. 193–203. (in Russia)

Nikitin Andrej Vitaljevich

e-mail: ligalas5@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Associate Professor, Cheboksary Institute (f) of Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chgpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига, Латвия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Мионов Б. Г., Мионов Ю. Б.</i> К теории кручения составных цилиндрических стержней	3
<i>Немировский Ю. В.</i> Рациональное согласование структур армирования и полей деформаций при осевом нагружении композитных стержней	11
<i>Ковалев В. А., Мурашкин Е. В.</i> О принципе термомеханической ортогональности в проблемах моделирования сложных сред и метаматериалов	20
<i>Сенашов С. И., Савостьянова И. Л.</i> Точные решения уравнений анизотропной теории пластичности	32
<i>Сысоев О. Е., Кахоров К. К., Сысоев Е. О.</i> Теоретический расчет колебаний тонкостенных железобетонных оболочек с разными модулями упругости	36
<i>Минаева Н. В.</i> Исследование напряженно-деформированного состояния конической трубы методом возмущений	45
<i>Фоминых С. О.</i> Определение напряженного состояния в упругой области толстостенной трубы при условии пластичности трансляционной анизотропии и анизотропии по Мизесу–Хиллу	51
<i>Злобина И. В.</i> Исследование взаимодействия СВЧ электромагнитного поля с конструкциями из отвержденного углепластика со встроенными распределенными в объеме металлическими элементами	57
<i>Ткачева А. В.</i> Температурные напряжения в сфере, изготовленной из упрочняющегося материала	66
<i>Травин В. Ю., Тутышкин Н. Д.</i> Моделирование процессов осесимметричного пластического формоизменения	73
<i>Бегун А. С., Ковтанюк Л. В.</i> Расчет напряжений, деформаций и перемещений во вращающемся диске в условиях ползучести	84
<i>Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Тихонов С. В.</i> Равномерное растяжение многослойной тонкой анизотропной пластины с эллиптическим отверстием, при условии сопротивления отрыву	94
<i>Никитин А. В.</i> Об определении напряженно-деформированного состояния составной полосы	102
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	107
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	110
СОДЕРЖАНИЕ	112

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2019. № 1 (39)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 22.03.2019. Выход в свет 29.03.2019.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 16,9.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском отделе Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38