

**ВЕСТНИК**  
**ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО**  
**ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**  
**им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**  
**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**  
**№ 1(4) • 2008**

ББК 95.4; 22.251  
Ч-823

Учредитель

ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Главный редактор Г. Н. Григорьев

Учредители серии

Г. Н. Григорьев, Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Г. П. Черепанов, Е. И. Шемякин,  
А. А. Шуканов.

Редакционная коллегия:

Ивлев Д. Д. – ответственный редактор,  
Максимова Л. А., Матченко Н. М., Миронов Б. Г. – зам. ответственного редактора,  
Тихонов С. В. – ученый секретарь,  
Баженов В. Г., Буренин А. А., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Каюмов Р. А., Климов Д. М.,  
Ломакин Е. В., Маркин А. А., Манжиров А. В., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р. И.,  
Победря Б. Е., Радаев Ю. Н., Редкозубов С. А., Сенашов С. И., Спорыхин А. Н., Трещев А. А.,  
Хромов А. И., Шашкин А. И., Шемякин Е. И.

Международный совет

Амензаде Р. Ю. (Азербайджан), Варданян С. В. (Армения), Мирсалимов В. М. (Азербайджан),  
Тамуж В. П. (Латвия), Черепанов Г. П. (США), Чигарев А. В. (Белоруссия).

ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»  
428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.  
Тел.: (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19

© ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2008

*Светлой памяти  
Геннадия Ивановича Быковцева,  
доктора физико-математических наук,  
профессора*

*к 70-летию со дня рождения*

4.01.1938–7.3.1994



**Г. И. Быковцев. Самара. Волга**

*Горбенко О. Д., Мяснянкин Ю. М., Семькина Т. Д.*

## **СЛОВО О Г. И. БЫКОВЦЕВЕ. ВОРОНЕЖ**

*(Воронежский государственный университет)*

Исполняется 70 лет со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Геннадия Ивановича Быковцева, значительную часть своей жизни посвятившего Воронежскому университету. С его именем связано рождение и становление одного из самых престижных факультетов нашего университета – факультета прикладной математики, информатики и механики.

Геннадий Иванович Быковцев родился г. Новый Оскол Белгородской области в рабочей семье. После окончания средней школы поступил на математико-механический факультет Воронежского университета и сразу, по окончании университетского курса в 1960 году, был принят в аспирантуру. Его научным руководителем становится заведующий кафедрой теории упругости и пластичности Воронежского университета доктор физико-математических наук, профессор Дюис Данилович Ивлев. Эту встречу на своем творческом пути Геннадий Иванович всегда называл главным, определяющим событием в своей судьбе. Воспитанник научной школы Московского госуниверситета им. М. Ломоносова, молодой, но уже широко известный своими научными результатами профессор Д. Д. Ивлев заметил талантливую юношу, с первых дней общения с ним сумел оценить его потенциал и всячески способствовал развитию его творческой активности. Вскоре Геннадий Иванович становится сотрудником кафедры. На научных семинарах, на защитах студенческих курсовых и дипломных работ Г. И. Быковцев не оставался безучастным или равнодушным слушателем. Он умел быстро вникнуть в сущность проблемы, в самых сложных вопросах найти наглядные аналогии, в сложных дифференциальных уравнениях увидеть отражаемые ими реальные процессы. А защита курсовых и дипломных работ была испытанием не только для студентов, но и для их научных руководителей: Геннадий Иванович быстро замечал упущенную в решении задачи тонкость, которая могла привести к ошибкам в результатах.

В возрасте 25 лет Г. И. Быковцев становится кандидатом наук. Его диссертация опиралась на публикации автора в Докладах и Известиях АН СССР. В 1965 году, в 27 лет, Геннадий Иванович избирается заведующим кафедрой теоретической механики и гидроаэродинамики Воронежского университета, после чего ему предоставляется исключительная для кандидата наук возможность открыть собственную аспирантуру. В этот период впервые проявляется организаторский талант молодого ученого, создателя и лидера научного коллектива. Он становится одним из главных помощников Д. Д. Ивлева в руководстве еженедельным Воронежским городским семинаром по механике, организует семинар для аспирантов и студентов-старшекурсников. Удивительной притягательной силой обладал он для творческой молодежи. В то же время он



**Г. И. Быковцев. Студент. Воронеж.**

успевает налаживать связи с производством, заключает серию интересных хозяйственных договоров и становится их научным руководителем. Сам Геннадий Иванович основным своим достижением этого периода считал создание и оснащение вычислительного центра Воронежского госуниверситета. Дело в том, что Г. И. Быковцев, обладая широким кругозором во многих смежных научных направлениях и технологиях, не замыкался в узких рамках какой-либо одной научной тематики. Он был одним из первых в университете, кто сумел заглянуть в далекую перспективу, увидеть прогрессивное влияние информатики и вычислительной техники на развитие науки и самого общества. Благодаря инициативам Г. И. Быковцева электронная вычислительная техника начала активно внедряться в научные исследования и в университетский учебный процесс.

В 1969 году Геннадий Иванович защищает в Московском госуниверситете докторскую диссертацию. В этом же году, главным образом благодаря усилиям Г. И. Быковцева, в Воронежском университете открывается факультет прикладной математики и механики, и он становится его первым деканом. В этом же году на новом факультете создается кафедра технической кибернетики и теории автоматического регулирования и Геннадий Иванович становится ее первым заведующим. Наконец, в Воронежском госуниверситете при деятельном организационном участии Геннадия Ивановича начинает работу научно-исследовательский Институт математики. Неформальным лидером отдела механики стал Г. И. Быковцев. Если проанализировать список его научных работ, то период с 1969 по 1973 г. следует признать наиболее продуктивным. Именно в это время вышла из печати популярная в научной среде монография "Теория упрочняющегося пластического тела", подготовленная вместе с Д. Д. Ивлевым. Сохранившиеся в архивах протоколы заседаний ученого совета университета четко фиксируют ступени роста молодого ученого, его растущий авторитет и признание

в нем лидера. В марте 1973 года проф. Г. И. Быковцев был включен в проблемный совет университета по внедрению в научные исследования и в учебный процесс электронной вычислительной техники. В апреле этого же года на заседании ученого совета университета Г. И. Быковцев избирается в состав конкурсной комиссии по избранию на педагогические должности.

В этот период Г. И. Быковцев отдает много сил Воронежскому университету: административная работа, связанная с руководством кафедрой и факультетом, руководство научной работой аспирантов и дипломников, собственные научные исследования, хозяйственная работа. Следует отметить еще одно качество ученого – высокую требовательность к себе и коллегам при проведении занятий со студентами. Характерен случай, имевший место в эти годы. Посетив занятие одного из молодых кандидатов наук, Геннадий Иванович по прошествии двух дней вручил ему несколько исписанных мелким почерком листов бумаги – «Так надо читать лекцию по этой теме!». При этом Геннадий Иванович был скромным человеком, а в некоторых вопросах и весьма наивным, он не искал покровителей среди вышестоящих руководителей, не налаживал личных связей с «нужными» людьми, ему иногда недоставало гибкости и дипломатичности в решении производственных вопросов. Этим воспользовались его недоброжелатели: под прикрытием парткома университета они развернули широкую кампанию по вытеснению Г. И. Быковцева из университета. Весьма показательный факт: в марте и апреле ученый совет университета включает профессора Г. И. Быковцева в проблемную и конкурсную комиссии, а на майском заседании того же совета его освобождают от занимаемой должности, не рекомендуют использовать на преподавательской работе и даже ходатайствуют перед ВАКом о лишении звания профессора. Не принял Геннадий Иванович такой выпад, ушел от бесплодной борьбы и осенью 1973 года переехал в Куйбышев (Самару).

Но даже находясь вдали от отторгнувшего его университета, Геннадий Иванович не оставил без внимания своих воронежских аспирантов, регулярно приезжал в Воронеж для проведения консультаций, продолжал осуществлять научное руководство аспирантами и всех довел до защиты диссертации.

Уход Г. И. Быковцева из университета не мог не отразиться на жизни созданного им факультета. Потеря лидера в научной среде всегда чувствительна. Затих городской семинар по механике, прекратились визиты в Воронеж ученых из других научных центров страны. Долгое время оставалась напряженной и психологической атмосфера на факультете – далеко не все согласились с решением руководства университета, некоторые сотрудники, отдавшие годы работы университету, вынуждены были уйти на другую работу. Без сомнения, акция, совершенная в 1973 года в отношении Г. И. Быковцева, нанесла серьезный урон деятельности факультета в целом, его авторитету в городе и в стране. Это был серьезный удар по научно-исследовательской работе на факультете. Можно только догадываться, какую боль нанес разрыв с университетом самому Геннадию Ивановичу. Но жизнь продолжалась, и те, кто не изменил своего доброго отношения к Г. И. Быковцеву, продолжали поддерживать контакты с ним и научное сотрудничество.

Геннадий Иванович оставил добрый след в сердцах тех, кто был рядом с ним, с кем он создавал новый факультет, кто сотрудничал с ним в научных исследованиях. Многие ученики и коллеги профессора Г. И. Быковцева, которые в настоящее время трудятся в вузах Воронежа, Самары, Владивостока и других городов, с теплотой

вспоминают о нем.

Недавно ученый совет факультета ПММ Воронежского университета обратился в ученый совет университета с предложением о пересмотре упомянутого выше решения ученого совета 1973 года, признании его ошибочным и отмене этого решения. Дело чести Воронежского университета – вернуть ученому доброе имя.

г. Воронеж

Поступила: 17 декабря 2007 г.



Справа налево: Ю. М. Мяснякин, Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев, В. В. Дудукаленко, А. Н. Спорыхин, В. А. Баскаков, В. М. Суязов. Воронеж



Семинар. Среди участников справа налево: Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев, В. А. Жалнин, А. В. Чигарев, Н. Д. Вервейко, А. Н. Спорыхин, В. В. Дудукаленко, Б. И. Легеня, Б. Н. Подболотов. Воронеж





**Г. И. Быковцев. Самара**



**Г. И. Быковцев. На втором плане М. Т. Алимжанов, А. Н. Спорыхин. Самара**

### **К 70-ЛЕТИЮ Г. И. БЫКОВЦЕВА. САМАРА**

4 января 2008 г. исполняется 70 лет со дня рождения известного российского ученого, доктора физико-математических наук, профессора Геннадия Ивановича Быковцева. Ему принадлежат фундаментальные результаты во многих областях механики. Вклад Г. И. Быковцева состоит из более 100 научных работ<sup>1</sup> по проблемам математической теории пластичности, механики композитных материалов, газовой динамики, теории кавитации, разработки новых измерительных устройств. Ряд результатов Г. И. Быковцева имеет фундаментальный характер для всей механики деформируемого твердого тела. Значительный вклад также внесен им в разработку и создание народно-хозяйственных изделий спецназначения, за что он получил 14 авторских свидетельств. С его именем связаны становление и развитие научной школы механики идеально-пластических тел и конструкций в Воронеже, Самаре, Владивостоке. Им было подготовлено 40 кандидатов наук, 7 его учеников стали докторами наук. В настоящее время они продолжают работу в рамках его научной школы. Г. И. Быковцев относился к той редкой категории ученых, для которых занятие наукой было смыслом и образом жизни.

Геннадий Иванович Быковцев родился 4 января 1938 г. в городе Новом Осколе Белгородской области. Его отец, Быковцев Иван Петрович, 1898 г. рождения до и после революции был рабочим. Мать, Быковцева (Самарокова) Мария Никитична, 1906 г. рождения, всю свою жизнь посвятила семье. Его брат, Быковцев Сергей Иванович, 1925 г. рождения, работал учителем средней школы в г. Ташкенте, второй брат – Быковцев Алексей Иванович, 1928 г. рождения, погиб в 1969 г. во время аварии на буровой вышке.

До 1955 г. Г. И. Быковцев проживал в городе Новом Осколе, где в 1955 г. окончил Новооскольскую среднюю школу. После окончания школы он переезжает в г. Воронеж и поступает на математико-механический факультет Воронежского государственного университета им. Ленинского комсомола, который заканчивает в 1960 г., получив диплом по специальности механика. По распределению Г. И. Быковцев был оставлен в аспирантуре Воронежского госуниверситета, в которой он обучался лишь один год, так как в связи с необеспеченностью университета преподавательскими кадрами был в 1961 г. переведен на должность ассистента кафедры теории упругости и пластичности, а затем в 1963 г. – старшего преподавателя. В 1963 г. Г. И. Быковцев защитил кандидатскую диссертацию "Некоторые вопросы теории идеально-пластических анизотропных сред", получив ученую степень кандидата физико-математических наук. Защита состоялась 15 ноября 1963 г. в совете при Воронежском государственном университете. Председательствовал на защите ректор Воронежского университета. В 1964 г. он

---

<sup>1</sup> Среди них две монографии: «Теория упрочняющегося пластического тела» (в соавторстве с Д. Д. Ивлевым, 1971 г.), «Теория пластичности» (в соавторстве с Д. Д. Ивлевым, 1998 г.).

работает в должности доцента кафедры теории упругости и пластичности. В 1965 г., в возрасте 27 лет, он был избран заведующим кафедрой теоретической механики Воронежского госуниверситета, после чего ему предоставляется исключительная для кандидата наук возможность открыть собственную аспирантуру. В 1966 г. его утверждают в ученом звании доцента. В 1969 г. Геннадий Иванович защищает в совете при МГУ докторскую диссертацию "Исследование свойств уравнений статики и динамики пластически деформируемых сред". 28 ноября 1969 г. Г. И. Быковцеву присуждается ученая степень доктора физико-математических наук. В этом же году по инициативе и при активном участии Г. И. Быковцева в Воронежском университете создается факультет прикладной математики и механики. 22 апреля 1970 г. он был утвержден в ученом звании профессора по кафедре теоретической механики. В 1971 г. Г. И. Быковцев вступает в КПСС. Благодаря усилиям Г. И. Быковцева, в Воронежском университете был создан факультет прикладной математики и механики, и он становится его первым деканом (с 1969 г. по 1971 г. он работает в должности декана факультета прикладной математики и механики). С 1970 г. по май 1973 г. он заведует кафедрой технической кибернетики и автоматического регулирования, будучи также профессором этой кафедры, и является научным руководителем Вычислительного центра ВГУ. В марте 1973 г. проф. Г. И. Быковцев был включен в проблемный совет университета по внедрению в научные исследования и учебный процесс электронной вычислительной техники. Сохранившиеся в архивах протоколы заседаний ученого совета Воронежского госуниверситета четко фиксируют ступени роста молодого ученого, его растущий авторитет и признание в научной среде.

Становление Г. И. Быковцева как ученого неразрывно связано с именем выдающегося российского ученого, профессора Дюиса Даниловича Ивлева<sup>2</sup>. Встречу с Дюисом Даниловичем Ивлевым на своем жизненном и творческом пути Геннадий Иванович всегда называл главным, определяющим событием в своей судьбе. Г. И. Быковцев органично вписался в созданный Д. Д. Ивлевым научный коллектив, и впоследствии сам оказал сильное влияние на развитие механики деформируемого твердого тела в ВГУ.

Г. И. Быковцев отдал много сил Воронежскому университету: административная работа, связанная с руководством кафедрой и факультетом, руководство научной работой аспирантов и дипломников, собственные научные исследования, хозяйственная работа.

В мае 1973 г. Совет ВГУ освобождает Г. И. Быковцева от должности заведующего кафедрой с рекомендацией не использовать его на преподавательской работе. Воронежский гос. университет направляет в ВАК СССР ходатайство о лишении Г. И. Быковцева ученого звания профессора. В октябре 1973 г. он переводится в Куйбышевское конструкторское бюро автоматических систем на должность начальника отдела, где работает до 1978 г., заведывая параллельно, начиная с сентября 1974 г. кафедрой теоретической механики и аэрогидромеханики в Куйбышевском (в настоящее время Самарском) госуниверситете<sup>3</sup>. Несмотря на такой крутой поворот в своей жизни,

---

<sup>2</sup> Научная биография Д. Д. Ивлева и обзор его научного творчества, включая библиографию его важнейших работ, имеются в статье: Радаев Ю. Н. К 75-летию Д. Д. Ивлева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия.

<sup>3</sup> Укажем еще на одну деталь: с февраля по сентябрь 1974 г. Г. И. Быковцев работает в должности старшего преподавателя кафедры теоретической механики и аэрогидромеханики.

Геннадий Иванович не оставил без внимания своих воронежских аспирантов, регулярно приезжал в Воронеж для проведения консультаций и продолжал осуществлять научное руководство аспирантами, доведя всех до защиты диссертационных работ. Без сомнения, акция, совершенная в 1973 г. в отношении Г. И. Быковцева, нанесла серьезный урон научному потенциалу ВГУ, да и всему научному сообществу<sup>4</sup>.

В 1978 г. Г. И. Быковцев полностью переходит на работу в Куйбышевский госуниверситет, заведя до 1987 г. кафедрой механики твердого деформируемого тела. В Куйбышевском госуниверситете Г. И. Быковцев создал научную школу по механике деформируемого твердого тела. Со свойственной ему самоотдачей он погрузился в организацию учебного и научно-исследовательского процесса. В тот период быстрыми темпами развивались кафедры механико-математического факультета, закупалось новое оборудование, вводились в эксплуатацию новые современные экспериментальные установки и, самое главное, – наращивался кадровый потенциал, который и три десятилетия спустя обеспечивает высокое качество подготовки специалистов высшей квалификации по многим направлениям современной математики и механики. Он организует научный семинар высочайшего уровня по уравнениям в частных производных и смешанным проблемам физики и техники, из слушателей которого впоследствии сформировалось ядро научной школы Г. И. Быковцева в Самаре.<sup>5</sup> Он читает ряд лекционных курсов по уравнениям математической физики, математической теории пластичности, реологическим моделям сплошных сред, численным методам теории оптимального управления. Много работает над теорией пространственной задачи математической теории пластичности, развивает лучевой метод решения пространственных задач для квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных, разрабатывает механику упругопластических тел при конечных деформациях, начинает интересоваться теорией ползучести, механикой растущих деформируемых тел.

Научные исследования и преподавание математической теории пластичности в Самарском государственном университете напрямую связано с именем Г. И. Быковцева.<sup>6</sup> Для него всегда было характерно сочетание собственно механического содержания

---

<sup>4</sup> Недавно, насколько нам известно, ученый совет факультета ПММ Воронежского университета обратился в ученый совет университета с предложением о пересмотре упомянутого выше решения ученого совета от 1973 г., признании его ошибочным и отмене этого решения.

<sup>5</sup> Семинар начал свою работу в феврале 1974 г. В характеристиках того времени отмечалось, что Г. И. Быковцев "с февраля 1974 г. руководит общегородским научным семинаром по уравнениям математической физики и родственным проблемам механики сплошной среды, в котором участвуют преподаватели вузов, сотрудники промышленных предприятий, КБ и НИИ. Регулярная, интересно поставленная работа этого семинара привела к активизации научных исследований в области механики."

<sup>6</sup> В Самарском государственном университете на кафедре механики сплошных сред в течение трех десятилетий проводятся исследования в рамках научного направления, вектор которого был задан Д. Д. Ивлевым в работах по теории пространственной задачи математической теории пластичности конца 50-х годов и Г. И. Быковцевым в работах середины 60-х годов по механике упрочняющегося пластического тела. Результаты научных исследований и практика преподавания теории пластичности в Самарском государственном университете нашли отражение в недавно изданной книге: Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. 2-е изд. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с.

теории пластичности с глубоким и изящным математическим исследованием гиперболических задач для дифференциальных уравнений в частных производных, к которым приводит изучение полей напряжений и скоростей деформаций в зонах пластического течения. Такой синтез требовал также особого курса по теории дифференциальных уравнений в частных производных математической физики, в котором излагались такие редко освещаемые в современной учебной литературе темы, как условия совместности на поверхностях разрывов Адамара-Томаса, общая теория характеристик для нелинейных уравнений первого и второго порядков, метод каскадного интегрирования Лапласа, метод тангенциального преобразования, метод фазового преобразования. Его лекционным курсам был присущ высочайший теоретический и методический уровень, они отличались глубиной содержания, оригинальностью подхода при освещении сложных вопросов, стройностью и строгостью изложения, стремлением выйти за рамки традиционных схем изложения, учесть современные тенденции развития науки.

Г. И. Быковцев был одним из тех, кто стоял у истоков становления Самарского госуниверситета как центра науки и образования Поволжского региона. Г. И. Быковцев был одним из инициаторов проведения школ-симпозиумов по механике твердого деформируемого тела в г. Куйбышеве в июле 1974 г. и 1975 г., собравших более ста участников каждая из различных городов и республик СССР, а также в подготовке издания научных трудов по материалам указанных школ. Как ученый, Геннадий Иванович Быковцев отличался искрометным умением мгновенно понять, осмыслить, оценить, а потом уже принять или отвергнуть обсуждаемую научную идею или проект. Он умел радоваться научным успехам, и своим собственным, и своих учеников и коллег. Не удивительно, что именно за Геннадием Ивановичем шли люди. Он был в состоянии вести за собой научные коллективы, увлекая их своими научными идеями. Такой вот удивительной притягательной силой он обладал. Г. И. Быковцев стоял у истоков создания кандидатского диссертационного совета по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела при Куйбышевском госуниверситете. Этот совет проработал более двух десятков лет и был важным элементом в системе формирования научной школы в Самаре.

В 1987 г. Г. И. Быковцев принимает предложение переехать в г. Владивосток для работы в Дальневосточном отделении АН СССР, где до своей смерти в марте 1994 г. работает заместителем директора Института автоматики и процессов управления ДВО РАН (ИАПУ ДВО РАН). Решение о переезде для Г. И. Быковцева, по видимому, было совсем не простым. Однако после всестороннего анализа сложившейся ситуации он принимает соответствующее решение.<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup> Немаловажную роль здесь сыграло принятое ректоратом Куйбышевского госуниверситета и ученым советом механико-математического факультета о закрытии набора студентов по специальности "механика", несмотря на стабильное состояние этой специальности и имеющийся конкурс при наборе студентов. Сейчас трудно оценивать рациональные доводы в пользу такого решения. Особенно если учитывать смутное время 90-х. Набор студентов по специальности "механика" был возобновлен в конце 80-х, затем в начале 90-х снова прекращен. Все это не могло не сказаться на развитии научно-исследовательской работы по всем тем направлениям механики, которые в 70-е годы сложились в Куйбышевском университете. В 90-е годы Самарский госуниверситет проходил сложную стадию структурной перестройки в соответствии с принятой "Концепцией развития Самарского государственного университета как центра науки, образования и культуры Поволжского

Г. И. Быковцев был ученым с очень широким кругозором и интересовался многими направлениями современной механики сплошных сред. Однако наибольший вклад был внесен им в развитие математической теории пластичности. Мы остановимся подробнее на результатах, полученных Г. И. Быковцевым в области трехмерной задачи математической теории пластичности.

Теория идеальной пластичности, основанная на ассоциированном законе течения, преодолевая трудности начального периода развития, относящегося к 70-м годам XIX в., в 50-е годы XX в. сформировалась как важнейшее самостоятельное направление механики деформируемого твердого тела. Простота и логическая завершенность теории идеального пластического тела, позволяющие причислить ее к классическим теориям, обеспечивают возможность ее применения к прикладным задачам механики. Основным объектом математического исследования в теории пластичности являются нелинейные гиперболические системы дифференциальных уравнений в частных производных и краевые задачи для них, сформулированные для областей с неизвестными границами. Математическая теория пластичности имеет важные приложения во многих областях техники (оценка прочности и несущей способности конструкций, обработка металлов), в геофизике и геологии. Свое важнейшее применение математическая теория пластичности находит в нелинейной механике разрушения. Именно с помощью методов теории пластичности удается провести анализ напряженно-деформированного состояния у вершины трещины с локализованной зоной пластического течения. Ясно, что анализ проблем разрушения только с позиций общих представлений механики сплошных сред и теории идеальной пластичности без привлечения дополнительных физических представлений не дает возможности объяснить все факты, относящиеся к явлению разрушения. Тем не менее анализ картины разрушения на основе систем скольжения и описания разрывов в твердых телах (имеются в виду разрывы касательной составляющей скорости, т.е. разрывы скольжения) в духе Адамара–Томаса уже давно доказал свою плодотворность.

Первая математическая теория пластичности была создана Сен-Венаном (B. Saint-Venant, 1870 г.) на основе гипотезы о пропорциональности девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций при условии текучести Треска.<sup>8</sup> Сен-Венаном на основании опытов Треска по истечению металлов через

---

региона". В 2001 г. Самарский госуниверситет объявил о начале набора студентов по специальности "механика". Ректорат Самарского госуниверситета принял также комплекс мер для восстановления научного потенциала университета в этом направлении, воссоздания экспериментальной базы и вычислительного кластера, совершенствования и развития учебного процесса, подготовки специалистов высшей квалификации в области механики деформируемого твердого тела и механики жидкости и газа. Была, по существу, на новой основе организована кафедра механики сплошных сред, которая унаследовала традиции и научную школу Г. И. Быковцева. Эти меры позволили к настоящему времени, в целом, преодолеть разрушительное влияние на науку периода реформ 90-х и обеспечить преемственность развития научной школы Г. И. Быковцева в Самаре. Успешно и быстрыми темпами развиваются научные исследования по современным разделам механики деформируемого твердого тела: теории поля и вариационных симметрий, теории идеальной пластичности и упрочняющихся тел, групповому анализу дифференциальных уравнений механики сплошных сред, механике трещин и разрушения, механике поврежденности, связанной нелинейной термовязкоупругости.

<sup>8</sup> De Saint-Venant B. Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps

отверстия было предложено условие пластичности, заключающееся в том, что пластическое состояние наступает, как только максимальное касательное напряжение достигает некоторого определенного предельного значения. Впрочем, идея такого условия принадлежит Кулону и была высказана им в работе "О применении правил максимума и минимума к некоторым вопросам статики, имеющим отношение к архитектуре", представленной во Французскую Академию наук в 1773 г.<sup>9</sup> В этой работе Кулон указывает на то, что разрушение сжатой призмы происходит в результате скольжения одной ее части относительно другой по некоторой плоскости, составляющей угол в сорок пять градусов с направлением сжатия. Скольжение возникает при достижении составляющей сжимающей силы в указанной плоскости предельной величины, достаточной для преодоления обусловленного сцеплением сопротивления скальванию по этой плоскости.<sup>10</sup>

Сен-Венан рассматривал задачу о пластическом плоском деформированном состоянии и шел по пути обобщения уравнений движения вязкой жидкости Навье-Стокса, опираясь на гидродинамическое представление о течении металлов. Сен-Венан ограничился исследованием плоского деформированного состояния и поэтому его теория нуждалась в дальнейшем обобщении на случай трехмерного состояния. Соответствующее обобщение было сразу же выполнено: уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности впервые были получены Леви (M. Levy, 1871 г.). Статьи Сен-Венана и Леви<sup>11</sup> появились одна за другой в *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* за 1871 г. Леви принял в качестве условия текучести уравнение грани призмы Кулона-Треска и присоединил в качестве определяющего уравнение, выражающее пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций.<sup>12</sup> Теория Леви, поскольку она основана на «неассоциированном» законе пластического течения, не нашла применения и представляет ныне лишь исторический интерес, отчетливо указывая на то, что на ранних этапах развития математической теории пластичности условие пластичности и определяющий закон течения рассматривались совершенно независимо друг от друга.

Длительное время уравнения пространственной задачи оставались неизученными. И в настоящее время теория трехмерной задачи математической теории пластичности

---

solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état // *Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences*, 1870, t. 70, pp. 473-480;

De Saint-Venant B. *Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état* // *Liouville J. d. Math. Pures et Appl. Ser. II*, 1871, t. 16, pp. 308-316, 373-382.

<sup>9</sup> Coulomb C.A. *Essay sur l'application des règles de maximes et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture* // *Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'académie Royale des Sciences, Année 1773*. Paris, de l'imprimerie Royale, 1776.

<sup>10</sup> Очерк, посвященный исследованиям Кулона в области механики, имеется в книге: Тимошенко С. П. *История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений*. М. : Гостехтеоретиздат, 1957. С. 62-70.

<sup>11</sup> Оригинальная работа: Levy M. *Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état* // *Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences*, 1870, t. 71, pp. 1323-1325.

<sup>12</sup> В настоящее время закон течения, устанавливающий пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций, называют законом Леви-Мизеса.

далека от завершения. Имеется весьма ограниченный круг методов и результатов, которые проливали бы свет на свойства пространственного пластического напряженно-деформированного состояния. Оценивая состояние пространственной задачи теории идеальной пластичности Л. Прандтль (L. Prandtl) в 1921 г. указывал, что для разработки пространственной задачи до сих пор еще не найдено надлежащего пути и пока, пожалуй, имеется мало перспектив ее решения.

Пространственная задача в общем случае при условии пластичности Мизеса (R. von Mises) и ассоциированным с ним законом течения Леви-Мизеса является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболичны. Так, система уравнений пространственной и осесимметричной задачи теории идеальной пластичности при условии пластичности Мизеса, вообще говоря, не имеет вещественных характеристических направлений. Точнее говоря, уравнения пространственной задачи либо полностью эллиптически (т.е. не существует действительных характеристических направлений), либо (если в рассматриваемой точке медианная главная скорость пластической деформации равна нулю) имеется только два поверхностных характеристических элемента, совпадающих с площадками максимального касательного напряжения. Все это свидетельствует о том, что в подавляющем большинстве пространственных состояний, описываемых согласно условию пластичности Мизеса и ассоциированному с ним закону течения Леви-Мизеса, действительные характеристики отсутствуют.<sup>13</sup> Все это не оставляет шансов обобщить методы интегрирования, развитые ранее для плоской задачи, соотношения которой формально статически определимы и гиперболичны, что в конце концов и позволяет построить теорию полей скольжения, адекватно представляющую сдвиговой механизм пластического течения.

Поверхности и линии скольжения не являются только математическим понятием. Они существуют в действительности и их можно выявить травлением отполированной поверхности или разреза деформированного металла. Фигуры скольжения часто появляются в виде узоров с правильной лучистой симметрией на поверхностях или на разрезах твердых тел, испытавших деформации за пределом упругости. Линии скольжения (линии сдвигов) играют чрезвычайно важную роль как в теоретических, так и в прикладных исследованиях напряженного состояния пластически деформированного тела. Геометрия линий скольжения во многих случаях вполне определяет напряженное состояние, и такое напряженное состояние реализуется в условиях предельного равновесия тела. На этот факт, по-видимому, впервые указал Д. К. Чернов.<sup>14</sup> Фигуры

---

<sup>13</sup> Как представляется, задача поиска такой математической теории идеальной пластичности, которая приводила бы в зоне пластического течения к соотношениям гиперболического типа для произвольных пространственных состояний, по-прежнему сохраняет свою актуальность, поскольку при использовании условий пластичности, отличных от условия пластичности Кулона-Греска, для огромного большинства пространственных состояний уравнения теории пластичности не имеют вещественных характеристических направлений. Не спасает положения учет упругих деформаций и различных гипотез упрочнения. Все равно для абсолютного большинства пространственных состояний соответствующие уравнения эллиптически. Аналогичное заключение остается справедливым и для теории малых упругопластических деформаций, и для редко применяемых в настоящее время "неассоциированных" законов пластического течения.

<sup>14</sup> Дмитрий Константинович Чернов (1839–1921 гг.) – великий русский инженер и ученый, основатель металлографии, разработавший учение о кристаллах и кристаллографии, создатель научных основ обработки металлов давлением. Как ученый Д. К. Чернов оставался вне поля зрения офици-



скольжения, которые наблюдались Д. К. Черновым при различных схемах нагружения (например, при растяжении плоских образцов, при пробивке круглых отверстий), воспроизводятся (с указанием на оригинальную работу Д. К. Чернова 1885 г.) в известной монографии: Фридман Я. Б. Механические свойства металлов. М. : Оборонгиз, 1952. 556 С. (см. вклейку, С. 103). Значительно позже линии скольжения стали исследоваться за рубежом. Сейчас при исследовании пластического напряженного состояния широко пользуются представлениями о линиях и поверхностях скольжения, подчиняющихся поразительному закону, установленным математиками и инженерами в начале XX столетия.<sup>15</sup>

Распространение математического аппарата гиперболических уравнений, описывающего плоское течение идеально пластического материала на общий трехмерный случай, явилось предметом целого ряда исследований.

В 1909 г. Хаар и Карман (A. Naag, Th. von Karman) выдвинули условие полной пластичности,<sup>16</sup> которое, по существу, устанавливает соответствие напряженного состояния ребру призмы Кулона-Треска,<sup>17</sup> и оказалось, что соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии полной пластичности являются статически определенными.

В 1923 г. Генки (H. Hencky) предложил использовать условие полной пластичности Хаара-Кармана в случае осесимметричного напряженного состояния, что привело его к статически определенной системе уравнений равновесия, которая, как он установил, оказывается гиперболической. Позднее уравнения осесимметричной задачи с условием текучести Кулона-Треска исследовались Р. Шилдом (R. T. Shield, 1957) для ребер и граней призмы Кулона-Треска.<sup>18</sup>

В 1944 г. А. Ю. Ишлинский исследовал осесимметричную задачу теории пластичности, предполагая выполнение условия полной пластичности Хаара-Кармана, доказав статическую определенность и гиперболичность основных уравнений.<sup>19</sup> С помощью численного метода в этой же работе было получено решение задачи о вдавливании твердого шарика в идеально пластическую среду. Решение А. Ю.

---

альной русской науки, даже когда его заслуги в области металлургии и металловедения были признаны всем миром. Его биография и список научных трудов опубликованы в книге: Гумилевский Л. И. Чернов. (Научн. ред. проф. И. Я. Конфедератов.) М. : Молодая гвардия, 1975. 208 с.

<sup>15</sup> Применение математической теории пластичности и концепции скольжения к задачам геологии и геофизики читатель может найти в монографиях: Надаи А. Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М., Л. : ОНТИ, 1936. 280 с.; Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М. : Изд-во Мир, 1969. 864 с.

<sup>16</sup> Оригинальная работа: Naag A., Karman Th. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien // Nachr., kgl. Ges. Wiss. Gött. Math.-phys. Kl., 1909. H. 2. S. 204-218.

<sup>17</sup> Сформулируем ту же самую мысль, но в более отчетливой форме: состояние полной пластичности описывается в рамках условия пластичности Кулона-Треска и соответствует ребру призмы Кулона-Треска. Ясно, что состояние полной пластичности может быть описано также в рамках условия пластичности Мизеса. Однако в этом случае ассоциированный с условием пластичности Мизеса закон течения приводит к неправильно определенной системе кинематических уравнений.

<sup>18</sup> Shield R. T. On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. Lond. 1955. V. 233A. No. 1193. P. 267-287.

<sup>19</sup> Ишлинский А. Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля // Прикл. матем. и механика. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201-224.

Ишлинского вызвало критические замечания Р. Хилла (R. Hill), полагавшего, что "такие вычисления имеют небольшое или не имеют никакого значения, так как гипотеза Хаара-Кармана для металлов физически нереальна и она вводит ошибку неизвестной величины" (см.: Хилл Р. Математическая теория пластичности. М. : Гостехтеоретиздат, 1956. С. 321). Свои возражения Хилл основывал на невозможности в рамках теории течения Леви-Мизеса определить связанного с распределением напряжений, удовлетворяющим условию полной пластичности, поле скоростей из-за неправильной определенности (переопределенности) системы соотношений кинематики. Выход из сложившейся ситуации, как показало последующее развитие математической теории пластичности, состоял в последовательном использовании гипотезы Хаара-Кармана и замене закона течения Леви-Мизеса на *обобщенный* ассоциированный с условием пластичности Кулона-Треска закон течения.

Соотношения пространственной задачи теории пластичности, когда, аналогично условию полной пластичности Хаара-Кармана, имеется два соотношения между главными напряжениями, были предложены и проанализированы А. Ю. Ишлинским в 1946 г. (Ишлинский А.Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости // Уч. зап. МГУ. Механика. 1946. Вып. 117. С. 90-108; см. также: Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Т. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М. : Наука, 1986. С. 62-83, где на С. 80 приводится полная система уравнений для пространственной задачи математической теории пластичности в рамках гипотезы полной пластичности Хаара-Кармана), который использовал определяющие зависимости в форме соотношений перестановочности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций,<sup>20</sup> следующие из *обобщенного* ассоциированного закона пластического течения в случае течения на ребре призмы Кулона-Треска и не предполагающие столь жестких ограничений на скорости пластических деформаций, устанавливаемые традиционным для того времени требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений. Впервые, в явной форме он указал на необходимость при построении теории пространственной задачи *двух* условий пластичности, уравнения несжимаемости и условий соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, которые он принял в форме трех уравнений, следующих из перестановочности этих тензоров. В своей работе А. Ю. Ишлинский пишет: "Согласно предлагаемой теории идеальной пластичности два главных напряжения должны быть непременно равны друг другу, а третье отличаться от них на удвоенное критическое значение  $2k$ . Таким образом для пространственной задачи пластичности имеют место два соотношения между главными напряжениями, подобно гипотезе полной пластичности Хаара и Кармана. Этим предлагаемая теория отличается от теорий Леви и Мизеса, в которых принимается единственное соотношение." Таким образом, А. Ю. Ишлинский отказался от "неассоциированного" определяющего закона Леви и дал корректное обобщение теории течения Сен-Венана на трехмерный случай. Пространственные соотношения Ишлинского полностью сохраняют свое значение в современной математической теории пластичности и их можно использовать при постановке и решении задач теории идеальной пластичности, поскольку они являются следствиями обобщенного ассоциированного

---

<sup>20</sup> А. Ю. Ишлинский называл эти зависимости условиями соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций.

закона течения в случае течения на ребре призмы Кулона-Треска.<sup>21</sup>

Результаты А. Ю. Ишлинского предвосхитили исследования Д. Д. Ивлева в области пространственной задачи математической теории пластичности,<sup>22</sup> в которых было показано фундаментальное значение условия полной пластичности Хаара-Кармана для всей теории пластичности и был развит соответствующий вариант теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Кулона-Треска) и *обобщенный* ассоциированный закон пластического течения.

Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращение пластических деформаций в пространстве главных напряжений, только в *регулярных* точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или конической особенности на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой предложено Койтером (W. T. Koiter) в 1953 г.<sup>23</sup> Это обобщение основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа гладких поверхностей текучести, каждая из гладких поверхностей текучести дает аддитивный вклад (с соответствующим неопределенным множителем) в величину приращения пластической деформации.

Обобщенный ассоциированный закон течения, сформулированный на основе условия пластичности Треска, устанавливает, что пластические деформации появляются в результате сдвига (скольжения) на тех площадках, где касательные напряжения по абсолютной величине достигают предельно возможного значения, причем скольжение происходит в направлении действия максимального касательного напряжения так, что оно совершает положительную работу.

То обстоятельство, что на ребре призмы Кулона-Треска обобщенный ассоциированный закон течения не предписывает ориентацию вектора, представляющего в пространстве главных напряжений тензор приращений пластических деформаций, имеет принципиально важное значение: для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона-Треска, пластическое течение имеет наибольшую свободу, и именно поэтому возрастает вероятность построить решения ряда важнейших прикладных задач, привлекая схему полной пластичности Хаара-Кармана.<sup>24</sup> Ясно, что напряженные

---

<sup>21</sup> По этому поводу см.: Радаев Ю. Н. О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 6(56). 2007. С. 102-114.

<sup>22</sup> Ивлев Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статике сыпучих сред // Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 90-96; Ивлев Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. 3. С. 546-549.

<sup>23</sup> Koiter W. T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic material with a singular yield surface // Quart. Appl. Math. V. 11. 3. 1953. P. 350-354.

<sup>24</sup> Эта гипотеза (по крайней мере в пространственном варианте) принадлежит Д. Д. Ивлеву. Применительно к осесимметричной задаче точно такая же мысль высказывалась в работе 1957 г. Шилдом, который ясно указал на то обстоятельство, что условие полной пластичности Хаара-Кармана, когда окружное главное напряжение равно одному из главных меридиональных напряжений, должно иметь большое значение для решения осесимметричных задач. Свою работу он

состояния, соответствующие граням призмы Треска, могут реализовываться лишь в исключительных случаях, поскольку при этом имеется весьма сильное кинематическое ограничение: одна из главных скоростей пластических деформаций должна быть равна нулю.

В работах Д. Д. Ивлева было установлено, что при условии полной пластичности (т.е. когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона-Треска) уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности являются статически определенными и принадлежат к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностным элементам уравнений статики при этом образуют конус, касающийся площадок максимальных касательных напряжений, построенных в вершине конуса. Характеристическими будут также поверхностные элементы, нормали к которым ортогональны главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Кинематические уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона-Треска, также гиперболически и имеют точно такие же директоры характеристических поверхностных элементов, как и статические уравнения.

В 1966 г. Г. И. Быковцев исследует кинематику пространственного идеально пластического течения на поверхностях максимальной скорости сдвига.<sup>25</sup> Им было доказано, что скольжения на указанной поверхности (сильные разрывы приращений перемещений) могут происходить только вдоль асимптотических направлений, если поверхность максимальной скорости сдвига имеет отрицательную Гауссову кривизну.<sup>26</sup> Следовательно, сдвиговое пластическое течение вблизи поверхности максимальной скорости сдвига (отрицательной Гауссовой кривизны) реализуется как результат микроскольжений в асимптотических направлениях. Поэтому результатом такого рода необратимого деформирования должны быть мозаичные узоры, составленные из отрезков линий микроскольжения, ориентированных в асимптотических направлениях.

В 1971 г. Д. Д. Ивлев и Г. И. Быковцев предприняли исследование общих соотношений теории пластичности как идеального, так и упрочняющегося тела, как с учетом упругих деформаций, так и без их учета, на предмет их классификации, определения характеристических поверхностей и поверхностей разрыва скоростей, скоростей деформаций и напряжений.<sup>27</sup> Полученные ими результаты устанавливают, что (1) дифференциальные уравнения теории устойчивого упрочняющегося упругопластического тела не имеют действительных характеристик, т.е. эллиптичны; (2) если в качестве критерия текучести взят критерий, отличный от критерия текучести

---

рассматривал как одно из свидетельств в пользу этого условия.

<sup>25</sup> См. : Быковцев Г. И., Мяснянкин Ю. М. О поверхностях скольжения в трехмерных жесткопластических телах // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. 6. С. 1260-1262; Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д., Мяснянкин Ю. М. О кинематических соотношениях на поверхностях скольжения в идеальных жесткопластических телах // Прикл. матем. и механика. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 623-631.

<sup>26</sup> Известно, что поверхность отрицательной Гауссовой кривизны даже локально имеет довольно сложную форму: любая окрестность точки поверхности отрицательной Гауссовой кривизны имеет седлообразную форму и делится асимптотическими направлениями на четыре части, причем две из них являются вогнутыми и две выпуклыми.

<sup>27</sup> См. : Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М. : Наука, 1971. 232 с.

Треска, то для большинства пространственных состояний дифференциальные уравнения теории идеально упругопластического тела эллиптически.

В 70-е годы Г. И. Быковцев продолжает развивать теорию пространственных уравнений идеальной пластичности, предложенных Д. Д. Ивлевым. С помощью геометрических условий совместности Адамара-Томаса им были исследованы общие свойства уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности для напряжений и скоростей при условии пластичности Кулона-Треска и состояниях, соответствующим ребру поверхности текучести. Найдены уравнения для интенсивностей слабых разрывов напряжений и скоростей деформаций. Выведены рекуррентные соотношения для лучевых разложений на характеристических поверхностях. Он предлагает новый оригинальный метод построения решений жесткопластических задач путем введения особых линий. Затем получает решения в окрестности особой линии, аналогичные разложениям в лучевые ряды. Все эти результаты позволили ему подробно изучить постановки основных краевых задач для пространственных состояний идеально пластических тел, решение которых должно было вскрыть особенности пространственного напряженно-деформированного состояния. Зная о формальной статической определимости пространственных задач для состояний, соответствующих ребру призмы Кулона-Треска, можно сначала ограничиться рассмотрением граничных условий для напряжений.<sup>28</sup> В отличие от плоской и осесимметричной задачи теории идеальной пластичности, формулировка граничных условий и постановка краевых задач в пространственном случае не являются столь простыми даже в простейшем случае свободной граничной поверхности, которая во всех практически важных случаях оказывается характеристической. Остается неопределенной ориентация вектора, указывающего главное направление, соответствующее наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению. В уравнениях осесимметричного и плоского деформированного состояния теряется специфика трехмерных уравнений: на свободной границе ориентация этого вектора становится вполне определенной, а его векторные линии перестают быть характеристическими. Заметим, что при формулировке граничных условий в напряжениях в пространственном случае все еще остается много неясных вопросов. Так, совсем недавно было установлено, что в случае свободной граничной поверхности векторное поле, указывающее главные направления, соответствующие наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению, является поверхностно безвихревым, и поэтому его векторные линии являются геодезическими.

Проблематика пространственной задачи математической теории пластичности красной нитью проходит через все научное творчество Г. И. Быковцева. В разные годы он периодически к ней возвращается. Классическое и достаточно полное изложение вопросов, относящихся к пространственной задаче теории идеальной пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона-Треска, имеется в монографии Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток : Дальнаука, 1998. 528 С. (особенно гл. 5, С. 205-246), изданной уже после безвременной кончины Г.

---

<sup>28</sup> Граничному условию в напряжениях, если для него выполняется естественное ограничение о не выходе за предел текучести, всегда можно удовлетворить, подбирая для этого напряжения, характеризующиеся условием "полной пластичности". Это обстоятельство является дополнительным свидетельством в пользу того, что многие основные пространственные краевые задачи могут быть поставлены и решены в рамках схемы "полной пластичности".

И. Быковцева.

Кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета в настоящее время продолжает проводить активную научно-исследовательскую работу в направлении, определенном Д. Д. Ивлевым и Г. И. Быковым в их работах по теории пространственной задачи математической теории пластичности. В публикациях сотрудников кафедры удалось дать полное и систематическое изложение методов и результатов, связанных с исследованием трехмерных уравнений математической теории пластичности в изостатической координатной сетке, делая акцент на новых общих методах, которые обеспечивают решение прикладных задач механики деформируемого твердого тела. В последние годы удалось получить целый спектр новых результатов, касающихся трехмерных уравнений математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести.

- Найдена замечательная инвариантная векторная форма уравнений равновесия, позволяющая исследовать геометрию поля главных направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному напряжению, и сделать заключение о расслоенности поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению.

- Дана классификация решений трехмерных статических уравнений в зависимости от завихренности указанного поля главных направлений.

- Указаны инварианты, сохраняющие свои значения вдоль линий главных напряжений.

- Установлена возможность отделения одной из изостатических координат, поверхности уровня которой как раз и являются слоями поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению.

- С помощью новых подходов проведен анализ плоской и осесимметричной задачи. Он выполнен с использованием аппарата производящих функций.

- Дан анализ трехмерных уравнений математической теории пластичности для напряжений и деформаций в триортогональных изостатических координатах. Явно указаны системы независимых уравнений совместности приращений деформаций в изостатических координатах. Определены условия, достаточные для того, чтобы при выполнении трех независимых уравнений совместности удовлетворялись три оставшихся уравнения совместности.

- Разработаны вопросы классификации и построения максимально простых нормальных форм системы дифференциальных уравнений в частных производных, которой должны удовлетворять функции, определяющие переход от декартовой системы координат к канонической изостатической криволинейной координатной системе. Эта система уравнений является существенно нелинейной. Поиск характеристик указанной системы осуществлен с помощью определения замены независимых переменных в уравнениях в частных производных трехмерной задачи теории идеальной пластичности (для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона-Треска) с целью приведения этих уравнений к максимально простой нормальной форме Коши. Точно сформулирован интуитивно понятный критерий *максимальной простоты* нормальной формы Коши и доказана возможность его конструктивного применения к исследуемым уравнениям.

- Исследованы автомодельные решения осесимметричной задачи математической

теории пластичности и получены новые автомодельные решения, обобщающие известные решения Шилда.

• Проведен групповой анализ уравнений осесимметричной и пространственной задачи, сформулированных в изостатической системе координат. Построены новые инвариантно-групповые решения, являющиеся следствием высокой степени симметричности пространственных уравнений.

Г. И. Быковцев прожил короткую, но яркую жизнь. Научный вклад Г. И. Быковцева в механику деформируемого твердого тела всегда будет служить непревзойденным образцом оригинального научного творчества. Память о талантливом ученом и педагоге, замечательном человеке Геннадии Ивановиче Быковцеве навсегда сохранится в сердцах тех, кто знал его и работал рядом с ним.

#### СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ Г. И. БЫКОВЦЕВА<sup>29</sup>

##### 1960

1. О сжатии пластического слоя жесткими шероховатыми плитами с учетом сил инерции // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1960. 6. – С. 140–142.

##### 1961

2. Об определении предельной нагрузки тел, вдавливаемых в пластическую среду // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1961. 1. – С. 173–174 (совместно с Д. Д. Ивлевым).
3. О распространении возмущений в среде с нелинейной связью напряжения деформации // Журнал прикл. мех. и технич. физики. – 1961. Вып. 4. – С. 102–108.
4. О кручении призматических стержней из анизотропного идеально-пластического материала // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1961. 3. – С. 151–157.
5. О поле скоростей при вдавливании плоского штампа в пластическое полупространство // Прикл. матем. и механика. – 1961. – Т. 25. Вып. 3. – С. 552–553.

##### 1962

6. О волочении полосы через криволинейную матрицу в условиях плоской деформации // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1962. – 1. – С. 144–148.

##### 1963

7. О плоской деформации анизотропных идеально-пластических тел // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1963. – 2. – С. 66–74.

##### 1964

8. О сжатии анизотропно упрочняющегося слоя шероховатыми плитами // ДАН СССР. – 1964. – Т. 157. 1. – С. 66–68.
9. О предельном равновесии анизотропных пластин и оболочек вращения // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1964. – 6. – С. 69–77.
10. К теории осесимметричного состояния идеально-пластического материала // Журнал

---

<sup>29</sup> Подготовлен к печати Д.А. Семеновым. Работы располагаются в хронологическом порядке.

прикл. мех. и технич. физики. – 1964. Вып. 5. – С. 102–108 (совместно с Д. Д. Ивлевым и Т. Н. Мартыновой).

11. О функциях нагружения анизотропно упрочняющегося пластического материала // Прикл. матем. и механика. – 1964. – Т. 28. Вып. 4. – С. 794–797 (совместно с В. В. Дудукаленко и Д. Д. Ивлевым).
12. О вязко-пластическом течении круглых пластин и оболочек вращения // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1964. – 6. – С. 68–76 (совместно с Т. Д. Семькиной).
13. К теории волочения жестко-пластической полосы через криволинейные матрицы // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1964. – 3. – С. 113–116 (совместно с Ю. М. Мяснянкиным).
14. О следствиях постулата Друккера для анизотропных идеально-пластических сред // Прикл. матем. и механика. – 1964. – Т. 28. Вып. 2. – С. 356–360.
15. О вязко-пластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления // Журнал прикл. мех. и технич. физики. – 1964. Вып. 4. – С. 94–96 (совместно с А. Д. Чернышовым).

#### 1965

16. О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1965. – 1. – С. 56–63 (совместно с Д. Д. Ивлевым и Т. Н. Мартыновой).

#### 1966

17. О распространении волн в упруго-вязко-пластической среде // Инж. журн. МТТ. – 1966. Вып. 4. – С. 111–123 (совместно с Н. Д. Вервейко).
18. О поверхностях скольжения в трехмерных жестко-пластических телах // ДАН СССР. – 1966. – Т. 167. 6. – С. 1260–1262 (совместно с Ю. М. Мяснянкиным).
19. Кинематические соотношения на поверхностях максимального сдвига // В кн.: Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. – М.: Наука, 1966. – С. 52–55.
20. О распространении волн в упруго-пластических телах при кусочно-линейных условиях пластичности // Сб.: Материалы Всес. симпоз. по распротр. упруго-пластич. волн в сплошных средах. Баку: АН АзербССР, 1966. – С. 72–82 (совместно с Д. Д. Ивлевым и Т. Н. Мартыновой).

#### 1967

21. О волнах ускорений в идеальных упруго-пластических телах // Инж. журн. МТТ. – 1967. Вып. 1. – С. 102–110 (совместно с Л. Д. Кретовой).
22. О соотношениях на поверхностях разрыва напряжений в трехмерных идеальных жестко-пластических телах // ДАН СССР. – 1967. – Т. 177. 5. – С. 1039–1042 (совместно с Д. Д. Ивлевым и Ю. М. Мяснянкиным).
23. О распространении волн в трехмерных упруго-пластических телах при условии полной пластичности // Инж. журн. МТТ. – 1967. Вып. 3. – С. 13–20 (совместно с А. А. Калужиним и Л. Д. Кретовой).

#### 1968

24. О соотношениях на поверхностях разрыва напряжений в трехмерных идеальных жестко-пластических телах // Прикл. матем. и механика. – 1968. – Т. 32. Вып. 3. – С. 472–477



(совместно с Д. Д. Ивлевым и Ю. М. Мяснянкиным).

25. О напряженном состоянии в полимеризующихся средах // Инж. журн. МТТ. – 1968. Вып. 5. – С. 91–93 (совместно с М. С. Чирко).
26. О кинематических соотношениях на поверхностях скольжения в идеальных жесткопластических телах // Прикл. матем. и механика. – 1968. – Т. 32. Вып. 4. – С. 623–631 (совместно с Д. Д. Ивлевым и Ю. М. Мяснянкиным).

#### 1969

27. Исследование пульсаций каверны в вихре // Труды Акустического института АН СССР. – 1969 (совместно с Г. И. Кузнецовым).

#### 1970

28. О динамическом деформировании пластин из нелинейного вязко-пластического материала // Тр. VII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука. – 1970. – С. 13–16 (совместно с Н. А. Автomeенко и Т. Д. Семькиной).
29. О движении со сверхзвуковой скоростью ступенчатой нагрузки по упруго-вязко-пластическому полупространству // Тр. НИИ мат. Воронеж. ун-та. – 1970. Вып. 2. – С. 59–70 (совместно с Н. Д. Вервейко, Н. М. Зиновьевым и С. А. Приваловым).
30. Отражение сдвиговой волны граничной плоскостью, свободной от напряжений // Материалы IV Всесоюзного симпозиума по распространению упругих и упруго-пластических волн, Кишинев. – 1970 (совместно с Н. Д. Вервейко).

#### 1971

31. Об отражении плоско-поляризованной волны от свободной поверхности в упрочняющейся упруго-пластической среде // Прикл. матем. и механика. – 1971. – Т. 35. Вып. 1. – С. 71–79 (совместно с В. А. Баскаковым).
32. Об уточнении теории предельного равновесия оболочек вращения // Прикл. мех. – 1971. – Т. 7. 4. – С. 28–34 (совместно с Ю. П. Листровой и Г. А. Мурлиной).
33. Теория упрочняющегося пластического тела. – М.: Наука, 1971. – 232 С. (совместно с Д. Д. Ивлевым).
34. О деформировании конструкций из нелинейного вязко-пластического материала // Сб. научн. тр. Фак. прикл. мат. и мех. Воронеж. ун-та. – 1971. Вып. 1 – С. 13–20 (совместно с Н. А. Автomeенко, и Т. Д. Семькиной).
35. Расчет оболочек вращения с учетом уточненных гипотез Кирхгофа–Лява // Прикл. механика. – 1971. Вып. 4 (совместно с Ю. П. Листровой, и Г. А. Мурлиной).
36. О температурных напряжениях в стеклопластиках и армированных средах // Сб. научн. тр. Фак. прикл. мат. и мех. Воронеж. ун-та. – 1971. Вып. 1. – С. 1–12 (совместно с В. А. Александровым и Нго Тхань Фонг).

#### 1972

37. О распространении ударных волн в упруго-пластических средах // Прикл. матем. и механика. – 1972. – Т. 36. Вып. 1. – С. 106–116 (совместно с Л. Д. Кретовой).
38. Волны ускорений в идеальном газе // Тр. НИИ мат. Воронеж. ун-та. – 1972. Вып. 6. – С. 37–41 (совместно с Л. А. Бабичевой).
39. Об одной модели теории армированных сред // Сб. : Мех. сплошн. среды и родств. пробл.

анализа. М. : Наука, 1972. – С. 103–110 (совместно с Нго Тхань Фонг).

#### 1973

40. Лучевой метод решения динамических задач в вязко-упруго-пластических материалах // Прикл. матем. и механика. – 1973. – Т. 37. Вып. 1. – С. 145–156 (совместно с Л. А. Бабичевой и Н. Д. Вервейко).
41. Применение метода характеристик к решению задачи о движении ступенчатой нагрузки // Сб.: Распространение упругих и упруго-пластических волн. Алма-Ата : Наука, 1973. – С. 82–94 (совместно с Н. Д. Вервейко и Н. М. Зиновьевым).

#### 1975

42. О пульсации сферического пузырька в несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1975. 2. – С. 153–155 (совместно с Г. С. Разреновым).
43. О теоремах единственности в теории течения пластических сред // Сб., посвящ. 60-летию акад. Ю. Н. Работнова. М. : Наука, 1975.
44. О теоремах единственности в теории течения упрочняющихся упруго-пластических тел // Сб.: Мех. деформир. тел и констр. М. : Машиностроение, 1975. – С. 84–91.

#### 1976

45. Об условиях совместности на поверхностях разрывов // Сб.: Мех. деформир. тверд. тела. Куйбышев, 1976. Вып. 2. – С. 21–26 (совместно с Н. П. Бестужевой и В. Н. Дуровой).
46. Распространение поверхностных волн и поверхностная неустойчивость в упругих телах // Сб. статей по прикладной математике и механике: Мех. деформир. сред. Куйбышев, 1976. – С. 77–88 (совместно с Н. П. Бестужевой и В. Н. Дуровой).

#### 1977

47. Волны сильного разрыва на поверхности пластически деформирующегося тела // Сб.: Мех. деформир. тверд. тела. Куйбышев, 1977. – С. 65–69 (совместно с Н. П. Бестужевой и В. Н. Дуровой).
48. Свойства уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности // Сб.: Мех. деформир. сред. Куйбышев, 1977. Вып. 2. – С. 33–68 (совместно с И. А. Власовой).

#### 1978

49. Лучевой метод решения уравнений газовой динамики // Прикл. мех. – 1978. – Т. 14. 9. – С. 118–124 (совместно с В. Н. Дуровой).

#### 1979

50. Плоская деформация идеальных жесткопластических тел с учетом изменения границ // Изв. АН СССР. МТТ. – 1979. 2. – С. 71–78 (совместно с А. И. Хромовым).
51. Особые линии и поверхности в пространственных течениях идеальных жесткопластических сред // Сб.: Динамика сплошн. среды. Новосибирск, 1979. Вып. 1. – С. 31–36 (совместно с И. А. Власовой).

#### 1980

52. О построении теории течения упругопластических сред при конечных деформациях // ДАН УзССР. – 1980. 4. – С. 18–21 (совместно с О. Л. Сыгуровой).

#### 1981

53. Применение метода возмущений к теории кручения упругопластических стержней // Прикл. матем. и механика. – 1981. – Т. 45. Вып. 5. – С. 932–939 (совместно с Ю. Д.

Цветковым).

54. К исследованию нестационарных поверхностных волн в нелинейно-упругих средах // Прикл. мех. – 1981. – Т. 17. 12. – С. 27–33 (совместно с Н. П. Бестужевой и В. Н. Дуровой).
55. Плоская задача о вдавлении жесткого штампа в идеальное жесткопластическое полупространство // Изв. АН СССР. МТТ. – 1981. – С. 47–52 (совместно с А. И. Хромовым).

**1982**

56. Об одной модели разрушения в идеально упругопластических средах // Пробл. прочности. – 1982. Вып. 3. – С. 72–75 (совместно с Л. Г. Лукашевым и С. Л. Степановым).

**1983**

57. Об одной закономерности в ползучести металлов // ДАН СССР. – 1983. – Т. 273. 5. – С. 1080–1082 (совместно с В. И. Гореловым).

**1984**

58. Автомодельные решения уравнений динамики идеального упругопластического тела при условии пластичности Треска // Журнал прикл. мех. и технич. физики. – 1984. Вып. 6. – С. 148–156 (совместно с В. В. Колокольчиковым и П. Н. Сыгуровым).

**1985**

59. Феноменологическое построение кинетических уравнений теории ползучести // ДАН СССР. – 1985. – Т. 283. 1. – С. 5–61 (совместно с В. И. Гореловым).
60. Акустическое поле направленного источника в океанических волноводах // ДАН СССР. – 1985. – Т. 280. 1. – С. 57–59 (совместно с Г. И. Кузнецовым и А. Н. Степановым).

**1986**

61. Движение со сверхзвуковой скоростью ступенчатой нагрузки по полупространству с изменяющимися упругими модулями // Изв. АН Арм.ССР. Мех. – 1986. – Т. 39. 2. – С. 49–56 (совместно с А. В. Колокольчиковым и В. В. Колокольчиковым).
62. Оценка прочности сцепления анизотропной оболочки при взаимодействии ее с неоднородно-стареющим вязкоупругим цилиндром // Сб.: Анал. и числ. методы решения краевых задач пластич. и вязкоупругости. Свердловск, 1986. – С. 21–26 (совместно с А. С. Лукановым).

**1987**

63. Двумерная задача нагружения упругопластической плоскости, ослабленной отверстием // Прикл. матем. и механика. – 1987. – Т. 51. Вып. 2. – С. 314–322 (совместно с Ю. Д. Цветковым).
64. Импульсное нагревание полупространства с учетом термоупругого сопряжения и конечной скорости распространения тепла // Изв. АН СССР. МТТ. – 1987. – 2. – С. 101–107 (совместно с А. Г. Шаталовым).

**1988**

65. Построение кинетических уравнений теории ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. – 1988. 1. – С. 147–157 (совместно с О. И. Бережной и В. И. Гореловым).

**1989**

66. Модель упрочняющейся среды, имеющей различные законы упрочнения при растяжении и сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. – 1989. – 2. – С. 146–151 (совместно с Т. Б. Лавровой).

**1990**

67. Конечные деформации упругопластических сред // ДАН СССР. – 1990. – Т. 311. 1. – С. 59–62 (совместно с А. В. Шитиковой).

**1994**

68. Кусочно-линейные потенциалы в нелинейной механике // ДАН РАН. – 1994. – Т. 335. 3. – С. 310–312 (совместно с Н. Г. Быковцевой).

**1996**

69. Общие свойства уравнений нелинейной теории упругости при кусочно-линейных потенциалах // Прикл. матем. и механика. – 1996. – Т. 60. Вып. 3. – С. 505–515.
70. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // ДАН РАН. – 1996. – Т. 347. 2. – С. 199–201 (совместно с А. А. Бурениным и Г. И. Ковтанюк).

**1998**

71. Теория пластичности. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 С. (совместно с Д. Д. Ивлевым).<sup>30</sup>

**2002**

72. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: Сборник статей. – Владивосток : Дальнаука, 2002. – 566 с.<sup>31</sup>

г. Самара

Поступила: 2 октября 2007 г.

---

<sup>30</sup> Эта монография вышла в свет после безвременной кончины Геннадия Ивановича Быковцева. Наряду с известными результатами, монография содержит ряд новых результатов в области теории идеальной пластичности, принадлежащих Г. И. Быковцеву.

<sup>31</sup> Это издание включает наиболее значимые научные работы Г. И. Быковцева разных лет. В настоящее время в Самарском государственном университете готовится к печати двухтомное собрание сочинений Г. И. Быковцева, наиболее полно отражающее его выдающийся вклад в механику деформируемого твердого тела.

### **УЧИТЕЛЬ. САМАРА**

В декабре 2007 года Быковцеву Геннадию Ивановичу исполнилось бы 70 лет. Значение его личности и вклада в науку о механике еще подлежит осмыслению.

Его научную деятельность условно можно разделить на три этапа: Воронежский, Самарский и Дальневосточный. Воронежский период во многом определялся его работой с патриархом теории пластичности в России – Дюисом Даниловичем Ивлевым, и может быть оценен только им и его учениками в г. Воронеж.

Мое личное знакомство с Геннадием Ивановичем носило во многом фатальный характер. Впервые я услышал о нем в 1972 году в самолете Самара-Воронеж от выпускника Воронежского государственного университета факультета прикладной математики и механики, первым деканом которого был Быковцев Г. И. Он сообщил мне, что в Самару переезжает молодой талантливый профессор, очаровавший своих студентов. Уже в то время о нем ходили легенды. Через полгода в Самарской газете появилось объявление о семинаре по уравнениям в частных производных и смежным проблемам физики и техники, одним из организаторов которого был Быковцев Г. И. Этот семинар собирал до пятидесяти слушателей и был в определенном смысле знаковым событием – таких по научному уровню семинаров в Самаре раньше не было. Именно из его слушателей образовалась группа ведущих в настоящее время ученых-механиков в г. Самара. Нам же, молодым специалистам, это событие казалось обычным. И только спустя годы мы поняли, что такие семинары бывают не часто, и нам повезло – мы слушали Ученого. Непосредственное знакомство с Геннадием Ивановичем произошло при моем переходе на работу в Конструкторское бюро автоматических систем в г. Самара, где начальником вычислительного центра в это время работал Быковцев Г. И. Работа с ОКБ г. Самара не была случайностью и фактически все ведущие научно-технические организации приглашали его для консультаций. Здесь необходимо отметить длительное и плодотворное сотрудничество с ЦСКБ «Прогресс» и ВНИИТ нефть. Посуществу его переезд в г. Владивосток также был связан с продолжением исследований по акустике океана.

Реперной точкой создания Самарской научной школы профессора Быковцева Г. И. стало начало его руководства кафедрой механики деформируемого твердого тела в Самарском государственном университете. Его отличительной чертой, как научного руководителя, были доброжелательность, доступность и абсолютное отсутствие снобизма. В течение всей своей работы рядом с ним я видел внимание и поддержку людей, искренне занимающихся научными исследованиями: аспирантов, научных работников и инженеров. Это внимание и поддержка всегда имели результат.

Его дом всегда был открыт и здесь невозможно не отметить ту роль, которую сыграла в его адаптации к Самарскому бытию супруга Тамара Семеновна. Ее терпение и доброжелательность по отношению к ученикам Геннадия Ивановича во многом

определили их искреннее отношение к Учителю. Именно в этом доме происходило их знакомство с ведущими учеными, определяющими в настоящее время развитие механики в России.

Своим ученикам Геннадий Иванович говорил: «... я должен «вбить» в вас свою «идеологию»...». Это в начале вызывало недоумение. Но потом он проговорился: «... когда о какой-то проблеме много думаешь, почему-то обязательно приходят идеи». Заниматься научной деятельностью для него было образом жизни и у тех учеников, кто принял его идеологию как образ жизни, тоже появились ученики, и поэтому школа профессора Быковцева Г. И. продолжает существовать и развиваться в гг. Воронеж, Самара, Владивосток, Комсомольск-на-Амуре...

Научная школа профессора Быковцева Г. И.  
в г. Самара

Научный руководитель кандидатов наук: Власова И. А. – к.ф.-м.н., Зебриков В. П. – к.ф.-м.н., Колокольчиков А. В. – к.ф.-м.н., Луканов А. С. – к.ф.-м.н., Морозов В. Т. – к.ф.-м.н., Осипов М. Н. – к.ф.-м.н., Рычков В. – к.ф.-м.н., Сиников В. М. – к.ф.-м.н., Степанов А. Н. – к.ф.-м.н., Степанов С. Л. – к.ф.-м.н., Сыгуров П. Н. – к.ф.-м.н., Фофанов Ю. В. – к.ф.-м.н., Хромов А. И. – к.ф.-м.н., Цветков Ю. Д. – к.ф.-м.н., Шаталов А. Г. – к.ф.-м.н.

Научный консультант докторов наук: Астафьев В. И. – д.ф.-м.н., Горелов В. И. – д.т.н., Козий С. И. – д.т.н., Степанов А. И. – д.ф.-м.н., Сыгуров П. Н. – д.ф.-м.н., Хромов А. И. – д.ф.-м.н.

Выпускники кафедры МДТТ (студенты, аспиранты, докторанты): Анисимов В. И. – к.ф.-м.н., Бондарев Е. Н. – к.ф.-м.н., Бондаренко В. В. – к.ф.-м.н., Глушечков В. С. – к.ф.-м.н., Гордиенко И. П. – к.ф.-м.н., Ермоленко Г. Ю. – к.ф.-м.н., Крутов А. Н. – к.ф.-м.н., Логинов О. А. – к.ф.-м.н., Лернер М. М. – к.ф.-м.н., Лысач Н. Н. – к.ф.-м.н., Лычов С. А. – к.ф.-м.н., Макарова И. С. – к.ф.-м.н., Молчанова А. В. – к.ф.-м.н., Пастухов В. А. – к.ф.-м.н., Подхонов А. С. – к.ф.-м.н., Радаев Ю. Н. – д.ф.-м.н., Радченко В. П. – д.ф.-м.н., Сараев Л. А. – д.ф.-м.н., Смыслов А. Ю. – к.ф.-м.н., Шапошников Ю. Н. – к.ф.-м.н., Ширяева Л. К. – к.ф.-м.н., Федичев А. Ф. – к.ф.-м.н.

г. Самара

Поступила: 12 декабря 2007 г.

**Г. И. БЫКОВЦЕВ И ДАЛЬНЕВОСТОЧНАЯ МЕХАНИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ.  
ВЛАДИВОСТОК**

*(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН)*

Всего шесть с небольшим лет (1987 – 1994 гг.) проработал Геннадий Иванович Быковцев на Дальнем востоке. Но масштаб этой личности в современной механике деформирования таков, что развитие данной науки на Дальнем востоке естественно делится на период до приезда Г. И. Быковцева и последующий. В первый период развивались главным образом исследования, связанные с прочностью сооружений. В качестве теоретической основы судостроения развивалась теория упругих пластин и оболочек (проф.: Н. В. Барабанов, К. П. Горбачев, В. В. Пикуль), включая теорию мягких оболочек (проф.: Б. И. Друзь, Г. А. Лаврушин). Строительное производство и особенно гидротехническое строительство требовало от инженеров новых подходов в расчетах элементов конструкций при воздействии на них ледовых нагрузок (проф.: Н. Г. Храпатый, А. Т. Беккер), оползней (проф. П. А. Аббасов). Целый ряд интересных прикладных результатов был получен инженерами-технологами в оптимизации режимов литейного производства (проф.: Ри Хоссен, А. И. Евстигнеев), обработки металлов давлением и резанием (проф.: Ю. Г. Кабалдин, Б. Н. Марьин), в материаловедении (проф.: А. Д. Верхотуров, А. А. Попович). Такое перечисление можно было бы продолжить, но принципиален факт, состоящий в том, что по приезду Г. И. Быковцева, В. П. Мясникова, В. П. Коробейникова, Г. П. Черепанова, а вместе с ними целого ряда молодых ученых из европейской части России в 1987 году на Дальний восток в регионе начинает развиваться ряд новых направлений фундаментальной механики. Именно с 1987 года отсчитывают становление Дальневосточной школы фундаментальной и прикладной механики. Заслуга Г. И. Быковцева в этом первостепенна. Именно приехавшие с ним его ученики А. А. Буренин, В. В. Катрахов, А. И. Хромов защищают первые докторские диссертации, а В. А. Рычков, Ю. В. Фофанов, А. П. Наумкин – первые кандидатские диссертации во впервые организованном на Дальнем востоке диссертационном совете по защите докторских диссертаций по механике. Остановимся на некоторых направлениях в механике деформирования, развиваемых на Дальнем востоке, у истоков становления которых стоял Геннадий Иванович.

На разных конференциях по механике приходилось слышать, что Быковцев Г. И. является специалистом в динамике деформирования упругопластических материалов. Это не совсем верно; правильнее следовало бы сказать, что это направление было для Геннадия Ивановича одним из приоритетных, но только одним из... Вполне естественно, что данное направление начинает свое развитие на Дальнем востоке. Закономерностям распространения слабых волн в материалах, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, посвящается кандидатская диссертация А. П. Наумкина, особенностям распространения граничных возмущений по необратимо сжимаемым упругопластическим телам – кандидатская диссертация В. А. Рычкова. Примечательна в этой связи публикация [3],

которая появилась спустя два года после того, как Геннадий Иванович ушел из жизни. Совершенно понятно, что текст статьи написан без Геннадия Ивановича, но ее название оставлено в той редакции, как он его написал. Более важным является то обстоятельство, что основное фундаментальное содержание данной научной работы всецело базируется на идеях Геннадия Ивановича. Он был убежден, что распространение в деформируемом теле поверхностей диссипативных разрывов не должно сказываться на доказательстве теоремы единственности, а термодинамический принцип максимума Мизеса может быть переформулирован применительно к диссипативному процессу на поверхностях разрывов. Данная экстремальность процесса в переходном слое ударной волны заставляет считать неизменными главные направления тензора напряжений, что в свою очередь позволяет записать условие существования возможных диссипативных разрывов. Во время защиты кандидатской диссертации Е.А. Герасименко «Метод построения лучевых разложений решений краевых задач нелинейной динамической теории упругости» (2007 г.) официальный оппонент, чл.-корр. РАН М.А. Гузев специально подчеркнул определяющую роль профессора Быковцева Г.И. в том, что на Дальнем востоке имеется исследовательский коллектив, уникальный в своей квалификации в математическом аппарате рекуррентных условий совместности на движущихся поверхностях разрывов, без которого невозможно развитие нелинейной динамики деформирования и теории пластичности при гиперболичности определяющей системы уравнений. Всем известны добавления в монографиях [10, 12], вводящие в математический аппарат построения лучевых разложений решений за поверхностями разрывов. Они начинаются введением поверхностей разрывов, заданием их в параметрической форме

$$x_i = x_i(y^1, y^2, t),$$

где  $x_i$  - прямоугольные декартовы координаты точек поверхности. Но иногда, как известно, предпочтительнее решать задачу в криволинейной системе координат. Как изменятся рекуррентные зависимости Г. И. Быковцева между разрывами производных функций на данных поверхностях в этом случае? Ответ на этот вопрос был дан совсем недавно именно Е. А. Герасименко [11]. Теперь теорию рекуррентных условий совместности разрывов на движущихся поверхностях, начало которой положил еще Адамар и фундаментально развили Т. Томас, Р. Хилл и Г. И. Быковцев, можно считать завершенной.

Другим направлением, о котором здесь в связи с Г. И. Быковцевым нельзя не упомянуть, является развитие теории больших упругопластических деформаций. Если полные деформации являются опытно измеряемыми, то их деление на необратимую и обратимую составляющие, которые невозможно измерить в экспериментах, в любой математической модели упругопластического деформирования неизбежно оказывается произволом исследователя, который конструирует данную математическую модель. В результате многочисленных обсуждений на семинарах в Институте автоматизации и процессов управления ДВО РАН было выработано мнение, что в этом случае следует поступать в согласии с формализмом неравновесной термодинамики. Если мы объявляем тензоры обратимых и необратимых деформаций в качестве параметров состояния, то обязаны сформулировать для них соответствующие уравнения изменения (переноса). Желательные для нас свойства данных составляющих полных деформаций возможно гипотетически заложить именно на этом этапе построения уравнений изменения. Разделение полных деформаций на составляющие явится следствием принятых уравнений переноса. Результатом таких обсуждений явились научные статьи [2; 6; 13]. Плодотворность такого под-



хода демонстрируется целым рядом публикаций [1; 4; 5] Дальневосточных механиков, посвященных решению в рамках данной математической модели конкретных краевых задач создаваемой на такой основе теории.

Из Куйбышева (Самары) во Владивосток Геннадий Иванович перенес свою увлеченность теорией ползучести, которой заразился в результате тесного общения и совместной работы с такими замечательными самарскими учеными, как В. И. Астафьев, В. И. Горелов, Ю. П. Самарин, В. П. Радченко. Совместная работа с Виктором Ивановичем Гореловым продолжалась и в то время, когда Г. И. Быковцев находился во Владивостоке; готовилась к защите докторская диссертация В. И. Горелова. Интересную диссертацию защитил Ю. В. Фофанов. В ней на основе обработки многочисленных экспериментальных результатов средствами специально созданного программного комплекса определялись аналитически уравнения связи « деформация ползучести или скорость деформации ползучести – напряжения » [14], в качестве аппроксимации экспериментальных зависимостей. В частности, в результате таких построений следуют известные законы ползучести. Известно, что ползучесть реальных конструкционных материалов может описываться только нелинейными теориями. Отсюда трудности в адекватном математическом аппарате. Замечательным в этой связи является предложение Геннадия Ивановича о моделировании консервативной составляющей деформирования с помощью потенциалов деформаций, зависящих от кусочно-линейных инвариантов напряжений [7; 9]. Таким способом оказалось возможным применить в теории неустановившейся ползучести хорошо разработанный математический аппарат теории идеальной пластичности [8]. К сожалению, закончить эту работу он не успел. Это был последний незаконченный текст, который остался на его рабочем столе. Заканчивать эту работу пришлось В. М. Ярушиной.

Своим первым ученикам во Владивостоке (К. Калинин, Н. Дегтярева), студентам базовой кафедры ДВГТУ в ИАПУ ДВО РАН он поставил все же задачи, связанные с жесткопластическим анализом. Впоследствии, после смерти Г.И. Быковцева, это направление вместе с А. И. Хромовым переместилось в г. Комсомольск-на-Амуре. Именно в Комсомольске-на-Амуре были воплощены идеи Геннадия Ивановича, связанные с уточненными постановками и новыми методами решения в задачах квазистатического деформирования жесткопластических тел. Определяющая заслуга в этом принадлежит профессору А. И. Хромову и его ученикам (Ю. Егорова, О. Козлова, А. Буханько, А. Лошманов, Я. Григорьев).

С сожалением приходится вспоминать и о несделанном из-за того, что вдруг не стало в 1994 г. движущей силы, которой являлся Геннадий Иванович. Не получила своего развития экспериментальная база научных исследований и наметившиеся инженерно-технические разработки. К 1994 г. в ИАПУ ДВО РАН усилиями М. Н. Осипова и А. И. Царева при непосредственном руководстве Г. И. Быковцева была создана экспериментальная лаборатория с лучшей на то время на Дальнем востоке оптоэлектронной установкой, которая работала в комплексе с разрывной машиной и компьютером. На этой установке были получены голограммы процессов разрушения элементов металлоконструкций, проводилась обработка многочисленных экспериментальных данных и формулирование на такой основе общетеоретических выводов. Теперь в ИАПУ ДВО РАН отсутствует и магнитоимпульсная установка, и оптический стол, и даже разрывная машина. На фотографиях лишь остался конверсионный АН-24, оборудованный воздушной подушкой и приспособляемый таким образом в качестве транспортного средства для труднодоступных районов Дальнего востока и Севера России. Эту работу по использованию отслу-

живших свой срок воздушных транспортных средств проводил в ИАПУ ДВО РАН при деятельной поддержке Геннадия Ивановича замечательный инженер, к.т.н. В. В. Игнатьев. Такие не получившие своего развития начинания заместителя директора ИАПУ ДВО РАН по науке можно было бы продолжать и продолжать.

Как-то за общим чаем молодой сотрудник лаборатории удивился: «Каким же интересным человеком должен был быть Геннадий Иванович, если Вы вспоминаете его практически на каждом семинаре и при каждом чаепитии?». Рассказать, что значило для меня каждодневное общение с Геннадием Ивановичем, как деловое, так и бытовое, конечно невозможно. В этой связи приведу лишь два случая. Год 1974, назначено время защиты моей кандидатской диссертации, но первый оппонент в назначенный срок не может приехать из-за болезни. В то время существовала практика назначения дополнительных оппонентов, но в Воронеже нет докторов наук по механике деформируемого твердого тела. Защита срывается. Сейчас-то я понимаю, сколь нагло я поступал в юности, но я звоню своему бывшему декану в г. Куйбышев и прошу приехать его и выступить дополнительным оппонентом по моей диссертации. И что же? Почертыхавшись, Геннадий Иванович назначает мне встречу в семь утра 26.03 в день защиты в г. Воронеже, выступит на Совете – так я стал кандидатом наук.

Год 1969. Молодой доктор наук Г. И. Быковцев читает четвертому курсу матмеха специальности «механика» курс теории пластичности. Июнь – экзамен. И Воронеж, и Куйбышев, и Владивосток знают, насколько добрым был Геннадий Иванович на экзаменах. А тут экзамен сдает его группа, которую он знает с первого курса. Готовлюсь и жду свою пятерку. Но тут дополнительный вопрос: «Как различается сетка линий скольжения в решениях Прандтля и Хилла?». Честно признаюсь, что не читал, так как эта лекция была прочитана между первым и девятым мая, когда я устроил себе дополнительные каникулы. Вижу, как Геннадий Иванович ходит по аудитории, заводя себя, попутно объясняя мне, как это интересно – неединственность в решении. Наконец, чуть ли не единственный в группе, я получаю удовлетворительно. Март 1970 г. Вызывают в деканат и зам. декана сообщает мне о решении оставить меня в аспирантуре ВГУ и спрашивает моего согласия. В то время рекомендацию в аспирантуру вполне можно было рассматривать как подарок судьбы. Мне совестно было говорить сокурсникам об этом, так как я не считал себя исключительно достойным такой милости. Вот и предварительное распределение. Декан Г. И. Быковцев листает мои документы, наталкивается на злополучную тройку и восклицает: «Какая может быть аспирантура с тройкой по пластичности!». Мне предлагается выбрать место распределения. Как же я удивился, что спустя три дня на основном распределении в кабинете ректора ВГУ при моем появлении там сообщается, что общественность факультета ходатайствует о моем оставлении в аспирантуре ВГУ. Безусловно, Геннадий Иванович и не собирался пересматривать ранее принятое решение и данную тройку полагал недоразумением. Но помучиться заставил... Об этой тройке Геннадий Иванович рассказывал даже студентам во Владивостоке. Говорил, что ваш заведующий кафедрой после этой тройки не написал ни одной научной статьи по пластичности. Теперь я мог бы доложить, что такие статьи я написал, причем первые из них являются совместными с Геннадием Ивановичем, пусть и после его совершенно безвременного ухода.

Мне удивительно везло с учителями. И в школе, и в университете и в процессе послеуниверситетского образования. К примеру, до сих пор удивляюсь оригинальности научного мышления моего научного руководителя профессора Александра Даниловича Чернышова, другого подобного мышления не встретил за всю свою деятельность на на-

учном поприще. Геннадий Иванович Быковцев же отличался искрометным умением мгновенно понять, осмыслить, оценить и потом уже принять или отвергнуть любую идею, любой проект. Он умел радоваться научным успехам, и своим, и коллег. Именно радоваться... Не удивительно, что именно за Геннадием Ивановичем на Дальний восток России переехала большая группа его учеников и соратников: А. И. Хромов, Ю. В. Фофанов, В. А. Рычков, М. Н. Осипов, А. Г. Быковцев, В. В. Игнатъев, А. П. Наумкин, А. В. Наумов из Самары, В. В. Катрахов, А. А. Буренин, С. М. Ситник, Н. И. Лободин, А. И. Сазонов из Воронежа, В. И. Одинокоев из Екатеринбурга. Не знаю другого ученого, способного так перемещать целые коллективы за собой. Решение о переезде для каждого из нас было совсем не простым. «Бросают и уезжают на самый Дальний восток те, у кого здесь не складывается, но у тебя кафедра, перспективы, договора, наша полная поддержка. Не понимаю...», – говорил мне тогдашний ректор ВИСИ, проф. А. М. Болдырев. Но ехали мы не за комфортом, не за степенями и званиями (их получение было predetermined естественным ходом событий и нашей работой), ехали мы для того, чтобы быть рядом с Геннадием Ивановичем. Такой вот удивительной притягательной силой он обладал. Он буквально заражал окружающих своей увлеченностью и они, в том случае, когда способны принять подобные бактерии, тотчас же становились его единомышленниками. Статья [3], там длинная цепочка преобразований, время к полуночи, а мы не можем получить прогнозируемое. Убегаю на последний автобус. Вхожу домой и слышу: «Позвони Геннадию Ивановичу, просил.» «Как же мы не догадались, надо поступать так и так... Все получается. До утра.» Таким и только таким знал я его в совместной работе. Но если он был в чем то убежден сдвинуть его с такого убеждения было ой как не просто. Однажды для этой цели мне пришлось написать и отпечатать текст в 20-30 страниц и слезно упросить его прочитать. Не хотел ни читать, ни слушать. «К чему читать эту белиберду, когда я не раз об этом думал и это не так». Уговорил, прочитал и утром возвращая текст, смущенно: «Молодец...» Как же следует благодарить судьбу за эти шесть лет счастливых наполненных смыслом и каждодневным комфортным, увлеченным общением с обожаемым, но таким доступным Учителем моих шесть лет. Это я начало 90-х называю счастливыми и благодарю судьбу.

г. Владивосток

Поступила: 19 декабря 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Буренин, А. А.* Вискозиметрическое течение упруговязкопластического материала между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. С. Устинова // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 18 – 25.
2. *Буренин, А. А.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк. // Докл. акад. наук. – 1996. – Т. 347. – № 2. – С. 199 – 201.
3. *Буренин, А. А.* Поверхности разрывов скоростей в динамике необратимо сжимаемых сред / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, В. А. Рычков // Проблемы механики сплошной среды. Сборник к 60-летию В.П. Мясникова. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН. 1996. – С. 116 – 127.
4. *Буренин, А. А.* Продавливание упруговязкопластического материала между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. Л. Мазелис // ПММ. – Т. 70. – Вып. 3. – С. 481 – 489.

5. *Буренин, А. А.* Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, М. В. Полоник // ПММ. – 2003. – Т. 67. – Вып. 2. – С. 316 – 325.
6. *Быковцев, Г. И.* Конечные деформации упругопластических сред / Г. И. Быковцев, А. В. Шитиков // ДАН СССР. – 1990. – Т. 311. – № 1. – С. 59 – 62.
7. *Быковцев, Г. И.* Кусочно-линейные потенциалы в нелинейной механике / Г. И. Быковцев, Н. Г. Быковцева // ДАН. – 1994. – Т. 335. – № 3. – С. 310 – 312.
8. *Быковцев, Г. И.* Об особенностях модели неустановившейся ползучести, основанной на использовании кусочно-линейных потенциалов / Г. И. Быковцев, В. М. Ярушина // В сб: Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций к 60-летию со дня рожд. проф. Г. И. Быковцева. – Владивосток: Дальнаука. – 1998. – С. 9 – 26.
9. *Быковцев, Г. И.* Общие свойства уравнений теории упругости при кусочно-линейных потенциалах / Г. И. Быковцев // ПММ. – 1996. – Т. 60. – № 3. – С. 505 – 515.
10. *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 с.
11. *Герасименко, Е. А.* Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях / Е. А. Герасименко, В. Е. Рагозина // Дальневосточный математический журнал. – Владивосток: Дальнаука. – 2004. – Т. 5. – № 1. – С. 100 – 109.
12. *Ивлев, Д. Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – М.: Наука, 1971. – 232 с.
13. *Мясников, В. П.* Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях / В. П. Мясников // Вестник ДВО РАН. – 1996. – № 4. – С. 8 – 13.
14. *Фофанов, Ю. В.* Построение аппроксимаций экспериментальных данных для ползучести металлов / Ю. В. Фофанов // В сб.: Прикладные задачи механики деформируемых сред. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН. – 1991. – С. 59 – 66.

**ПАМЯТИ Г. И. БЫКОВЦЕВА**

*(Международный Университет Флориды, США)*

Геннадий Иванович Быковцев – мой близкий друг почти четверть века. Анализ его биографии и достижений убедительно доказывает, что он был незаурядным человеком и выдающимся высокоталантливым ученым.

Геннадий Иванович окончил мехмат Воронежского университета круглым отличником (его научным руководителем был проф. Д. Д. Ивлев) – в эпоху Хрущева, Гагарина и Быковского. Был великолепным спортсменом "выбегал" из 11 секунд на 100 метров, что тогда удавалось лишь нескольким десяткам спринтеров СССР. Спортивная целеустремленность осталась у него на всю жизнь. В 29 лет в Московском университете защитил докторскую диссертацию по физико-математическим наукам. В столь раннем возрасте такое удалось достичь лишь нескольким ученым за всю историю государства российского. Тут же стал деканом знаменитого физико-математического факультета Воронежского университета<sup>1</sup>; того самого факультета, в котором работали в это время выдающиеся математики и механики; М. А. Красносельский, С. Г. Крейн и Д. Д. Ивлев. Близко зная Геннадия Ивановича, могу с уверенностью сказать, что если бы таким парням, каким был он, достался руль государственного правления в те времена, Россия не была бы сейчас в таком униженном состоянии, когда она пытается играть в чужую игру. (Стремление России к долларовому богатству смехотворно: если она накопит даже один триллион наличных долларов, что невероятно трудно, все равно это будет меньше того, что имеет, например, крупная частная американская строительная компания одна из десятка аналогичных компаний Долларовая масса в США возрастает, по моим оценкам, не менее чем на один триллион в год – только за счет процентов). Тогда – в эпоху Брежнева, Высоцкого и Сахарова – правили бал космополитные бездарности, подобные Брежневу и Горбачеву, а таланты молодых людей типа Геннадия Ивановича были не ко двору. И сейчас будущая перспектива России весьма печальна, пока к власти не придут молодые отчаянные ребята со смелыми и кардинальными решениями. (Один из высокопоставленных деятелей в прежнем правительстве Горбачева недавно признался мне, что вариант распада России на несколько десятков самостоятельных государств – областей – оценивался многими как положительное развитие событий!).

Геннадий Иванович был кристально-честным человеком и настоящим русским патриотом интеллектуалом. Около 12 лет он руководил кафедрой механики в Самарском

---

<sup>1</sup> Г. И. Быковцев был организатором и деканом ф-та ПММ, авторский текст оставлен без изменений.

университете (которой сейчас руководит его ученик, проф. В. И. Астафьев<sup>2</sup>), а последние семь лет был научным руководителем (зам директора по науке) крупного института Российской академии наук во Владивостоке. По своему характеру Геннадий Иванович был истинно русским самородком: чрезвычайно непритязательным и неприхотливым, способным вынести любые трудности, не сгибаясь; принципиальным в поисках истины и блестяще-одаренным природой. Не каждый смог вынести унижения русской жизни, а он смог.

США, Флорида, март 1994 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов, Г. П.* Памяти Г. И. Быковцева / Г. П. Черепанов // Современные проблемы механики и прикладной математики. Сборник. Воронежская школа «Современные проблемы механики и прикладной математики», к 60-летию со дня рождения профессора Г. И. Быковцева. – Воронеж. : ВГУ. – 1998. – 304 с.

---

<sup>2</sup> В настоящее время заведующим кафедрой механики сплошных сред СамГУ является проф. Ю. Н. Радаев. Проф. В. И. Астафьев возглавляет кафедру безопасности информационных систем, декан механико-математического ф-та СамГУ.

## **ЧЕРНЫЕ СТРАНИЦЫ**

*(Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева)*

Пишу эти заметки, потому что прецедент, созданный в Воронежском университете в 1973 году прочно вошел в историю этого университета, историю факультета прикладной математики и механики (ф-т ПММ), историю нашей механики.

Время окончательных суждений, по видимому, еще не наступило, и она, история эта, остается поводом для размышлений: какие силы и почему могли сотворить все случившееся.

Мне кажется, что здесь приложимы слова Ф. И. Тютчева, сказанные им, разумеется, по другому поводу, но там и здесь есть что-то общее: «До сих пор это явление не было достаточно подробно исследовано... Это происходит не только вследствие недоразумения, глупости, неправильного понимания или суждения. Корень этого явления глубже и еще неизвестно, докуда он доходит».

Начну по порядку. В Воронежском университете на математико-механическом факультете я приступил к работе в конце 1959 года. Тогда я и познакомился с Геннадием Ивановичем Быковцевым, который учился на 5 курсе. В то время математическая теория пластичности переживала период бурного развития. В США, в Брауновском университете, работала школа Прагера, в Англии – Хилла, в Голландии – Койтера, в Польше – Ольшева. У нас пластичностью занимались в Москве, Санкт-Петербурге, Туле, Твери, Новосибирске, Екатеринбурге, Риге, Вильносе, на Украине, в Киргизии (М. Леонов), разумеется, мы в Воронеже и т. д.

Я работал во времена великого ректора Воронежского университета Бориса Ивановича Михантьева. Обстановка в университете и на факультете была благоприятной, на факультете тон задавали М. А. Красносельский и В. И. Соболев, С. Г. Крейн появился в университете на несколько лет позднее, он перешел в ВГУ из лесотехнического института. Деканом был В. В. Покорный – отец Юлия Покорного. Под меня была создана кафедра теории упругости и пластичности, открыта аспирантура, проводились семинары, читались спецкурсы, выполнялись курсовые и дипломные работы и т. д. Через три года состоялись первые защиты кандидатских диссертаций, вначале защитили Г. И. Быковцев и И. Д. Легеня, потом В. В. Дудукаленко, В. А. Жалнин, Ю. П. Листрова, процесс пошел. Защиты происходили здесь же в Воронежском университете. К нам по приглашению приезжали многие известные ученые в нашей области, особо тесные отношения у нас установились с Тульской школой механиков, которую возглавлял незабвенный Леонид Александрович Толоконников. Из Санкт-Петербурга неоднократно приезжал К. Ф. Черных. Я сравнительно недолго пробыл в Воронеже – в середине 1966 года переехал в Москву, на «хозяйстве» за главного остался Г. И. Быковцев. Уже к этому времени он превратился в яркого, талантливого многообещающего ученого. С Воронежом, с научным кол-

лективом связей я не терял, с Геннадием Ивановичем поддерживал самые дружеские отношения.

Еще до моего отъезда из Воронежа в ВГУ произошла смена руководства. Б. И. Михантьев по собственному желанию ушел в отставку и ректором стал профессор-химик Валентин Пименович Мелешко. У Валентина Пименовича был свой стиль руководства, свои приоритеты, но к школе механиков он относился хорошо, а к Геннадию Ивановичу даже очень хорошо.

Создание факультета ПММ в 1969 году – заслуга Г. И. Быковцева и В. П. Мелешко. Математики в большинстве не поддерживали идею разделения факультета, одни высказывались против, другие занимали сдержанную позицию, но нашлись и те, кто перешел на новый факультет. Сам я к этому времени отошел от дел в ВГУ и если бы Г. И. обратился ко мне за советом, то скорее всего идею разделения факультета я бы не поддержал. По видимому, Г. И. это «вычислил», я был поставлен перед совершившимся фактом: факультет был создан. В дальнейшем я убедился в правоте решения Г. И. и В. П. о целесообразности создания факультета ПММ.

В 1972 году ситуация в ВГУ резко изменилась: ректор В. П. Мелешко был снят. У меня это событие ассоциируется с тем, как Н. С. Хрущев снял маршала Г. И. Жукова с поста министра обороны. Я помню, смотрел по телевизору, как трогательно руководство провожало на вокзале Жукова в командировку в Югославию, были объятия и поцелуи, Жуков уехал, а пока он ехал до Югославии, за это время, его сняли. Что-то подобное произошло в Воронеже. Историки Воронежского университета могли бы детально и документировано описать события, но пока таких описаний я не видел.

Для В. П. Мелешко это было ударом, ректором стал профессор Н. А. Плаксенко.

Весной 1973 г. я узнал, что положение вокруг Г. И. стало тревожным, что им занимают партийные органы и т.д., я поехал в Воронеж. Г. И. рассказал мне, что у него произошел семейный скандал. Жил он тогда в малогабаритной проходной двухкомнатной квартире с женой, дочерью и тещей, вернулся поздно, возник скандал, народ был непосредственный и темпераментный, вызвали милицию, и его из дома забрали в отделение. В отделении отнеслись к происшедшему с пониманием, народ, в общем-то, в Воронеже свой, российский, не такие виды видели, обещали, что никуда дело не пойдет.

Информация просочилась, по видимому, из семьи, жена Г. И. работала тут же в университете в учебной части. Народ, повторяю, был непосредственный и темпераментный, о последствиях не думали, если и думали, то в последнюю очередь. Но как бы то ни было, сейчас это не играет никакого значения.

В университете зашевелилось дней через десять после злополучного события. Наверное, проверяли информацию, решали как быть. А далее события начали развиваться стремительно. Состоялось партбюро, затем партком, на котором ни много, ни мало постановили исключить Г. И. из партии. Всем, кто наблюдал за этим, было видно, что активную, ведущую роль (если не считать тех, кто остался в тени) играет доцент Адольф Листров при поддержке секретаря партбюро М. Г. Златомрежевой, секретаря парткома М. В. Гончарова и ректора Н. А. Плаксенко. Я встретился с Листровым, встреча была один на один. Я попросил объяснить происходящее. Его ответ состоял из двух частей. Он сказал мне в том духе, что они знают, что я много сделал, в том числе для его семьи, они понимают, что я отрицательно отношусь к происходящему, я могу как угодно реагировать, они все вытерпят (это была первая часть), а дальше дословно: *мы все продумали, мы пойдем до конца*. Эти слова, повторяю, привожу дословно, 100%. Стоит вдуматься в эти



слова: *мы* – кто такие *мы*? *мы все продумали*. – что *мы* продумали?; *мы пойдем до конца*, до какого конца *мы* собрались дойти и будет ли конец у этой истории?

Я был в Воронеже, когда в связи с делом Г. И. Быковцева по поручению Минвуза (главк университетов тогда возглавлял Л. А. Серафимов) из Ленинграда приехала комиссия в составе: К. Ф. Черных и Н. Г. Баринов – декан факультета ЛГУ, для того, чтобы дать заключение, насколько я понял, о состоянии морального облика Г. И. и воронежской школы механиков. Черных неоднократно бывал по нашему приглашению в Воронеже, секретов от него не было и, по видимому, те, кому было надо, сочли его «специалистом» по данному вопросу. Баринов никогда с нашей школой не соприкасался и после мы его не видели. Черных и Баринов знали, что я в Воронеже, они меня видели, как и я их, но, по видимому, в целях объективности (?) работы комиссии контактов со мной в этот приезд они иметь не пожелали. С Бариновым я так и не познакомился. Заключение Черныха и Баринова сыграло свою положенную роль<sup>1</sup>. Позднее Черных говорил мне: я не думал, если бы я знал, что для Г. И. это так получится. Если бы захотел знать, я еще тогда бы сказал, чем все это кончится, но тогда общение со мной, *мы все продумали*, по видимому, не входило в повестку дня.

Райком не согласился с парткомом, Г. И. исключен из партии не был, по партийной линии ограничили строгим выговором. Дело пошло в Совет университета. Привожу полный текст решения Совета.

## Р Е Ш Е Н И Е

Совета Воронежского госуниверситета от 25 мая 1973 г,  
"О ходе выполнения Постановления ЦК КПСС от 16 мая 1972 г.  
"О мерах по усилению борьбы против пьянства и алкоголизма"  
в коллективе университета и мерах по улучшению дисциплины труда

Заслушав и обсудив доклад проректора Г. Ф. Горского, ученый совет отмечает, что коллективы кафедр, факультетов, НИИ, хозяйственных подразделений университета провели недостаточную работу по выполнению требований постановления ЦК КПСС о решительной борьбе против пьянства и алкоголизма, повышению эффективности общественного и административного воздействия на лиц, злоупотребляющих алкоголем.

---

<sup>1</sup> Я не читал заключения комиссии Черныха – Баринова, с ним меня, естественно, не ознакомили. В архивах пока обнаружить это заключение не удалось. Возможно, оно не сохранилось, впрочем, «рукописи не горят»? Может быть, когда-нибудь и обнаружится, как обнаружилось черновики стенограммы по делу Н. Н. Лузина. Там, где стенограммы должны были храниться, – там их не оказалось. От тех, кто читал заключение комиссии Черныха – Баринова, известно, что оно неблагоприятное для Г. И. и воронежской школы механиков. По-видимому, *мы все продумали*, знали заранее, каким будет заключение, дело было очень серьезным: что бы не решили в ВГУ, при благоприятном для Г. И. заключении комиссии Минвуз не смог бы дать делу ход, действовать надо было с запасом прочности. Не сомневаюсь, что состав комиссии был согласован между Л. А. Серафимовым и руководством ВГУ.

В 1972 году в медвытрезвителе побывало 36 человек рабочих и служащих, а за 4 месяца 1973 года – 18 человек, в том числе 6 человек из профессорско-преподавательского состава (проф. Быковцев Г. И., доценты Смирнов А. А., Икорский П. И., Серебряков Е. Б., Анохин В. З., ассистент Макеев А. И.).

За этот же период были доставлены в вытрезвитель и отделы милиции за различные проступки и правонарушения 42 человека студентов.

Наибольшее число нарушений и пьянства среди студентов зарегистрировано на физическом факультете – 18 случаев ( декан Л. Н. Сухотин), факультете ПММ – 6 случаев (декан В. А. Жалнин), математическом факультете – 4-случая. Несколько студентов привлечено к уголовной ответственности.

В коллективе имеют место дисциплинарные проступки (36 случаев), многочисленные факты нарушения учебной, трудовой дисциплины, ассистент Макеев А. И.).

На ряде кафедр, факультетов, НИИ вокруг нарушителей дисциплины и пьяниц не создано атмосферы строгой и справедливой требовательности, взыскательности, карательная практика не соответствует тяжести содеянного, наблюдаются случаи неоправданного либерализма.

Ученый совет постановляет:

1. Одобрить меры ректората и общественных организаций, направленные на усиление дисциплины и ответственности,
2. Обязать руководителей кафедр, факультетов, НИИ, подразделений осуществить комплекс мер, направленных на безусловное выполнение требований постановления ЦК КПСС от 16 мая 1972 г. Рассматривать каждый случай пьянства и правонарушений как чрезвычайное происшествие со всеми вытекающими последствиями, не допускать либерализма в оценке совершившихся фактов и формального рассмотрения дел о виновных.
3. Отстранить профессора Г. И. Быковцева от обязанностей заведующего кафедрой, рекомендовать ректорату не использовать его на преподавательской работе. Просить ВАК рассмотреть вопрос о лишении его звания профессора за допущенное аморальное поведение.
4. Рекомендовать советам юридического и химического факультетов рассмотреть вопрос о возможности дальнейшего использования на педагогической работе доцентов П. И. Икорского и В. З. Анохина.
5. Данное решение обсудить на заседаниях факультетских советов и советов НИИ, на производственных совещаниях всех подразделений.

Что можно сказать по этому поводу? Решение говорит само за себя. Больше года прошло прежде чем в ВГУ решили откликнуться на историческое постановление. *Карательная практика*, до сих пор я думал, что карательная практика дело карательных органов, но не университетов. Г. И. Быковцев в вырезатель не доставлялся, по видимому, для *мы все продумали* так было удобнее. П. И. Икорский и В. З. Анохин, насколько мне известно, продолжили благополучно трудиться в ВГУ.

Листаю личное дело Г. И. Быковцева в ВГУ, оно сохранилось. *Дело. Быковцев Геннадий Иванович. Доцент кафедры теории упругости и пластичности. Начато 20 октября 1961 г. Окончено 5 октября 1973 г. На 59 листах.* Все листы сохранились. Карьерный рост. Характеристики, одна лучше другой. Благодарности, одна, другая, следующая. Одна из них, лист 34: *Выписка из приказа Министра высшего и среднего специального образования РСФСР от 22 мая 1968 г. «Об объявлении благодарности преподавателям, рабочим и служащим Воронежского государственного университета». В связи с 50-летием Воронежского государственного университета: приказываю: За долголетнюю и плодотворную работу в университете объявить благодарность: Быковцеву Г. И. – кандидату физико-математических наук, доценту, заведующему кафедрой теоретической механики. п.п. Столетов. п.п. Верно – подпись.* Лист 55, из характеристики: *Гов. Быковцев Геннадий Иванович честен, принципиален, отзывчив, требователен к себе и товарищам, пользуется деловым авторитетом и уважением в коллективе. Ректор, секретарь парткома, председатель месткома.* Копию удостоверяет 21/VI-72 г. нач. ОК М. Грачева, я ее хорошо помню, когда я появился в ВГУ, она уже работала. До сих пор в Деле никаких взысканий. Следующий лист 56 – *Выписка из протокола № 4 заседания совета ВГУ от 25.05.73 г. Слушали: О ходе выполнения постановления ЦК КПСС «О мерах по усилению борьбы против пьянства и алкоголизма» в коллективе университета и мерах по укреплению трудовой дисциплины. Постановили: За допущенное аморальное поведение отстранить профессора Быковцева Г. И. от обязанностей заведующего кафедрой технической кибернетики и автоматического регулирования. (Результаты тайного голосования: за 33, против 3, недействительных бюллетеней 1). Выписка верна: подпись.* Нашлись все-таки люди в ВГУ, не поддавшиеся прессу парткома и демагогии. Хоть какой-то просвет.

Лист 57 – *Выписка из приказа № 2/600 – ОК от 30.05.73 г. За допущенное аморальное поведение профессора Быковцева Геннадия Ивановича с 28.05.73 г. освободить от обязанностей зав. кафедрой технической кибернетики и автоматического регулирования с оставлением в должности профессора той же кафедры. Основание: выписка из протокола № 4 заседания Ученого совета ВГУ от 25.05.73 г. Выписка верна п.п. Ректор ВГУ, проф. Н. А. Плаксенко, секретарь – подпись.* А как же с рекомендацией Совета не использовать Г. И. на преподавательской работе? Лист 58 – *Выписка из приказа № 2/1350 – ОК ректора ВГУ от 05.10.73 г. Профессора Быковцева Геннадия Ивановича с 05.10.73 г. освободить от занимаемой должности в связи с переводом на работу в Куйбышевское конструкторское бюро автоматических систем. Основание: заявление, письмо № 1001/12 от 6/IX-73 г. п.п. ректор ВГУ, проф. Н. А. Плаксенко.* К этому времени ВАК уже лишил Г. И. звания профессора. Никаких документов, на основе которых было принято решение Совета ВГУ от 25.05.73 г., в личном деле нет.

Читаю протокол партсобрания факультетов ПММ и ПМ и АСУ от 18 мая 73 г., оно на трех страницах, посвящено обсуждению Г. И. Быковцева.

Из выступления А. Т. Листрова: *Письмо, полученное сейчас от жены тов. Быковцева Г. И. Нины Алексеевны, написано под давлением в очень тяжелом положении: готовится к защите диссертация, а в доме такие скандалы. Но если бы она была виновна, то она пришла бы на собрание и рассказала бы все.* «А из зала кричат: давай подробности». На партбюро решено ограничиться партвзысканием. О рекомендации лишить Г. И. звания профессора речи нет. Возможно с течением времени все сохранившиеся архивные документы, связанные с этим делом, имеющим по моему убеждению важное значение для нашего научного сообщества, будут опубликованы.

Очевидно, что по сути все решение всей мощью было направлено против Г. И. Быковцева с целью сломать и унижить самого молодого и одного из самых талантливых профессоров Воронежского университета. Кто за это должен ответить?

События развивались так. В ВАКе сохранилась учетная карточка № 185431 Г. И. Быковцева. В ней отмечено, что 21.09.73 г. Президиум ВАК (приказ № 87596) постановил лишить Г. И. Быковцева ученых званий доцента и профессора. Так что первоначальное решение о лишении звания профессора было перевыполнено: лишили не только звания профессора, но и доцента. Здесь же есть запись о восстановлении Г. И. в звании профессора ВАК: 17.09.78 №35 приказ 004371 (так в записи). Унижение по факту продолжалось пять лет, а травма – такие травмы не проходят.

Пожалуй, впервые в печатном виде эта история освещена в сборнике [5]: *столь уверенная поступь молодого ученого не могла не задеть извечную российскую бюрократию, уж больно неуютно ей было рядом с ним. В отличие от него у нее было время, чтобы тщательно накопить «материал», выждать подходящий момент и нанести неожиданный укол. Не принял Геннадий Иванович такой выпад, ушел от скорее всего бесплодной борьбы.*

Объяснение причин что-то вроде классовой борьбы. На мой взгляд, дело не в российской бюрократии. Верно, что российская бюрократия позволяла собой манипулировать, но корень дела не в ней. Илья Глазунов (А и Ф, №40, 2004) написал: *история – это борьба рас и религий и никакой классовой борьбы, как утверждал Карл (Мордухай) Маркс.* Тезис Глазунова вносит в объяснение исторического процесса некие иррациональные составляющие, которые в конечном итоге выливаются в определенные следствия. Зависть и ненависть? Допустим. Но откуда берутся зависть и ненависть? Что за этим стоит?

Наверное, любой руководитель должен быть в курсе того, что оставил его предшественник. На мой взгляд, Н. А. Плаксенко оставил тяжелое наследство. К сожалению, за 34 года три ректора ВГУ не сочли необходимым вернуться к этому вопросу и передавали этот позорный груз, как эстафету, друг другу. Недавно избранный, один из самых молодых ректоров ВГУ Владимир Тихонович Титов решительно, без колебаний перевернул эту позорную страницу. Могли ли его предшественники поступить таким образом ?, – сомневаюсь, но это мои личные сомнения. Факт остается фактом, они этого не сделали и это остается с ними.

Выписка из решения Совета Воронежского университета  
от 28.12.2007 г.

о. Г. И. Быковцеве

Принимая во внимание предложение Совета факультета ПММ, и заслушав выступление декана факультета ПММ профессора А. И. Шашкина, Совет постановляет:

Учитывая большой личный вклад Г. И. Быковцева в создание и становление факультета ПММ, формирование его научно-педагогических кадров, в развитие научных исследований на факультете, заметное положительное влияние на процесс внедрения информационных (компьютерных) технологий в масштабах университета, и предвзятость решения о лишении его ученого звания профессора, в целях восстановления исторической справедливости

1. Отменить решение Совета ВГУ от 25 мая 1973 года о лишении Г. И. Быковцева ученого звания профессора.
2. Поручить декану А. И. Шашкину информировать общественность университета о принятом решении.
3. Опубликовать в "Вестнике ВГУ - серия "Математика и физика" статью о Г. И. Быковцеве.

В одной статье, публикуемой в этом журнале, говорится, что дело чести Воронежского университета вернуть ученому доброе имя. У меня другое мнение. Геннадий Иванович Быковцев доброе имя не терял. Это позорное дело нанесло большой урон доброму имени Воронежского университета, рад, что Воронежский университет на правильном пути возвращения доброго имени.

Каждый вправе иметь свое мнение, в том числе и об этой истории, выскажу свое: стыдно, господа.

г. Чебоксары

Поступила: 21 февраля 2008 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д. Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – М. : Наука, 1971. – 231 с.
2. *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
3. *Быковцев, Г. И.* Избранные проблемные вопросы механики деформирования сред. Сборник статей. – Владивосток : Дальнаука, 2002. – 566 с.
4. **Современные проблемы механики и прикладной математики.** Воронежская школа (Воронеж 21-29.04.1998), тезисы докладов. К 60-летию со дня рождения профессора Г. И. Быковцева. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 1998. – 304 с.
5. **Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций.** Сборник статей. К 60-летию профессора Г. И. Быковцева. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 244 с.
6. **Прикладные задачи механики сплошных сред.** Межвузовский сборник научных трудов. К 60-летию со дня рождения профессора Г. И. Быковцева. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 1999. – 351 с.
7. **Современные проблемы механики и прикладной математики.** Сборник трудов межвузовской школы-семинара (Воронеж 17-19.09.2007). К 70-летию профессора Г. И. Быковцева. – Воронеж : Научная книга, 2007. – 370 с.

8. Юбилейная школа-семинар «Проблемы современной механики деформируемого твердого тела и прикладной математики», к 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Геннадия Ивановича Быковцева (Самара. 29.01-02.02.2008). Самара : Изд-во СамГУ, 2008. – 92 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ  
ФУНКЦИЙ

(Московский государственный горный университет,  
Смоленская государственная сельскохозяйственная академия)

**1. Основные определения и обозначения.**

Пусть  $L$  – простая замкнутая кривая Ляпунова, т.е. для неё выполняется условие: касательная к кривой образует с постоянным направлением угол, удовлетворяющий условию Гёльдера относительно дуги в кривой. Контур  $L$  разбивает плоскость комплексного переменного  $z = x + iy$  на две области, конечную и бесконечную. Будем полагать, что конечная область ( $D^+$ ) содержит точку  $z = 0$ . Бесконечную область обозначим через  $D^-$ . Для многих краевых задач важно определить положительное направление обхода контура. Условимся считать положительным такой обход контура, при котором контур остаётся справа. Таким образом, для конечной области положительным направлением будет направление движения против часовой стрелки, для бесконечной области – движение по часовой стрелке.

Все дальнейшие рассуждения будут вестись для функций, принадлежащих классу Гёльдера с показателем  $\mu$  на контуре  $L(H_\mu(L))$ . Напомним, что норма в пространстве Гёльдера определяется следующим образом:

$$\|\rho\|_{H_\mu} = \max_{t \in L} |\rho(t)| + \sup_{\tau, t \in L} \frac{|\rho(\tau) - \rho(t)|}{|\tau - t|^\mu} \quad (0 < \mu \leq 1). \quad (1)$$

Основное внимание в работе будет уделено краевым задачам для бианалитических функций и их приложению к решению основных задач плоской теории упругости в области линейных деформаций.

Определение 1. Функция  $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  комплексной переменной  $z = x + iy$  называется бианалитической в некоторой области  $D$ , если она в  $D$  имеет непрерывные частные производные по  $x$  и  $y$  до порядка 2 включительно и удовлетворяет там уравнению:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

где  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  – дифференциальный оператор Коши-Римана.

Определение 1 принадлежит П. Буратти. Существуют и другие эквивалентные определения бианалитической функции.

Определение 1'. Функция  $F^+(z)$  называется бианалитической в конечной области  $D^+$ , если она представима в виде:

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z), \quad (3)$$

где  $\varphi_0^+(z)$  и  $\varphi_1^+(z)$  – аналитические в области  $D^+$  функции,  $\bar{z} = x - i \cdot y$ .

Функция  $F^-(z)$  называется бианалитической в бесконечной области  $D^-$ , если она представлена в виде:

$$F^-(z) = \varphi_0^-(z) + \bar{z} \cdot z^{-2} \cdot \varphi_1^-(z), \quad (4)$$

где  $\varphi_0^-(z)$  и  $\varphi_1^-(z)$  – аналитические в области  $D^-$  функции.

Как видно из определений 1 и 1' бианалитические функции являются естественным обобщением аналитических функций.

Своим рождением бианалитические функции обязаны работам Г. В. Колосова и Н. И. Мухелишвили (см., например [6], [8]).

Известно, что в случае плоской деформации напряжённое состояние в любой точке упругого тела полностью определяется тремя напряжениями  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{x,y}$ , которые удовлетворяют двум уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

и условию совместимости:

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (5^*)$$

где  $\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$  – оператор Лапласа.

Систему уравнений (5) и (5\*) можно свести к одному дифференциальному уравнению 4-й степени в частных производных:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0. \quad (6)$$

Здесь  $U(x, y)$  – функция Эри, связанная с напряжениями соотношениями:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad \tau_{x,y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

К непосредственному решению уравнения (6) прибегают достаточно редко, поскольку это весьма трудоёмкое занятие. Гораздо проще искать функцию  $U(x, y)$  исходя из некоторых контурных (краевых) условий. Традиционно различают две основные краевые задачи теории упругости:

1. Определить упругое равновесие тела, когда на контуре  $L$  заданы внешние усилия  $X_n$  и  $Y_n$  ( $n$  – внешняя нормаль к контуру).
2. Определить упругое равновесие тел, если на контуре  $L$  заданы смещения  $U(S)$ ,  $V(S)$ .

Существуют также многочисленные смешанные задачи, в которых комбинируются различные краевые условия, например на одной части контура задаются напряжения, на другой части смещения. Следует отметить, что таких условий обязательно два.



В работах Н. И. Мусхелишвили ([8], [9]) было показано, что решением эллиптического дифференциального уравнения (6) является бигармоническая функция вида

$$U(x, y) = \operatorname{Re}(F(z)) = \operatorname{Re}(\varphi_0(x) + \bar{z}\varphi_1(z)). \quad (7)$$

В случае первой основной задачи теории упругости граничные условия примут вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\int_0^s Y_n dS, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\int_0^s X_n dS \quad (8)$$

или с учётом соотношений (7):

$$\begin{aligned} \varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) + \varphi_1(t) &= -\overline{\varphi_1'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) + \varphi_1(t)} + q_1(t), \\ \varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) - \varphi_1(t) &= \overline{\varphi_1'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)} + q_2(t), \end{aligned} \quad (8')$$

$$\text{где } q_1(t) = -2\int_0^s Y_n dS, \quad q_2(t) = 2\int_0^s X_n dS.$$

Краевое условие (8') можно трактовать как обобщение известных задач Гильберта и Дирихле на классе бианалитических функций.

Напомним, что задачей Гильберта для аналитических функций называется задача поиска неизвестной аналитической функции  $\Phi(z)$  в некоторой области  $D$  по краевому условию:

$$\Phi(t) = G(t)\overline{\Phi(t)} + g(t), \quad t \in L, \quad (9)$$

где  $G(t)$ ,  $g(t)$  – известные функции класса Гёльдера.

$G(t)$  обычно называют коэффициентом задачи.

В начале пятидесятых годов двадцатого века Ф. Д. Гаховым были сформулированы основные краевые задачи для бианалитических функций и их обобщений – полианалитических функций, которые с одной стороны обобщали основные задачи теории аналитических функций (задачи Гильберта, Римана, Газемана), с другой стороны основывались на задачах плоской теории упругости (см., например, [4]). К настоящему времени общая теория таких задач и соответствующих им сингулярных интегральных уравнений практически построена (см. [13], [14] и приведённую в них библиографию).

При решении краевых задач для бианалитических функций выяснилось одно интересное обстоятельство. В теории краевых задач для аналитических функций для одно- и двухсвязных областей справедливо то, что все основные задачи в случае нулевого индекса коэффициента всегда имеют единственное решение.

Для краевых задач на классе бианалитических функций такого факта не удалось установить. При анализе было установлено, что одна из причин подобного состоит в том, что для бианалитических функций не выполняется одно из основных положений теории аналитических функций, а именно – теорема единственности.

## 2. Теорема единственности для бианалитических функций.

В теории аналитических функций хорошо известен тот факт, что если аналитическая функция обращается в ноль на некотором контуре плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , то она является тождественным нулём на всей плоскости.

Такое утверждение (и аналогичные ему) называется теоремой единственности аналитической функции. С точки зрения краевых задач можно утверждать, что задача  $\Phi(t) = 0, t \in L$  не имеет нетривиальных решений.

Для бианалитической функции такое утверждение неверно.

Рассмотрим, например функцию  $F(z) = 1 - z \cdot \bar{z}$ . Данная функция обращается в ноль на единичной окружности  $\Gamma$  ( $\Gamma: \sigma \in F, \sigma \cdot \bar{\sigma} = 1$ ), однако не является тождественным нулём на всей плоскости комплексного переменного.

Таким образом, краевая задача для бианалитических функций

$$F(t) = 0, t \in L \quad (10)$$

может иметь нетривиальное решение.

В краевой задаче (10) имеется только одно условие, а для однозначного решения необходимо два независимых условия.

Как задать эти условия? Очевидно, что возможны различные варианты. Рассмотрим один из них.

Пусть некоторая бианалитическая функция обращается в ноль на двух окружностях, одна из которых имеет радиус  $R_1 = 1$ , а другая –  $0 < R_2 < 1$ .

Расположены окружности так, как показано на рисунке 1.

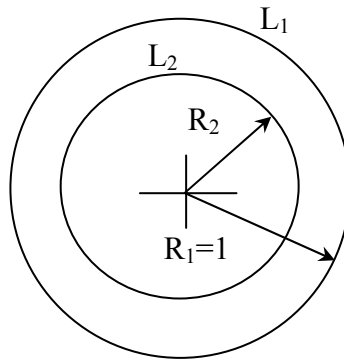


Рис. 1.

Запишем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} F(t_1) &= 0, t_1 \in L_1, \\ F(t_2) &= 0, t_2 \in L_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Воспользовавшись представлением (3) получим:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t_1) + \bar{t}_1 \varphi_1(t_1) &= 0, \\ \varphi_0(t_2) + \bar{t}_2 \varphi_1(t_2) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что на окружностях  $L_1$  и  $L_2$  выполняются условия:

$$\bar{t}_1 = \frac{1}{t_1}, \quad \bar{t}_2 = \frac{R_2^2}{t_2}. \quad (13)$$

Пусть

$$\begin{aligned}\varphi_0(z) &= a_0^0 + a_1^0 z + a_2^0 z^2 + \dots + a_n^0 z^n + \dots, \\ \varphi_1(z) &= a_0^1 + a_1^1 z + a_2^1 z^2 + \dots + a_n^1 z^n + \dots\end{aligned}\tag{14}$$

Тогда, учитывая условия (13) получим, что для соблюдения краевых условий необходимо и достаточно, чтобы выполнялись требования:

$$\begin{cases} a_0^1 = 0 \\ \begin{cases} a_0^0 + a_1^1 = 0 \\ a_0^0 + R_2^2 a_1^1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a_1^0 + a_2^1 = 0 \\ a_1^0 + R_2^2 a_2^1 = 0 \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} a_{n-1}^0 + a_n^1 = 0 \\ a_{n-1}^0 + R_2^2 a_n^1 = 0 \end{cases} \\ \dots \end{cases}\tag{15}$$

Поскольку

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & R_2^2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то условие (15) равносильно тому, что  $\varphi_0(z) = 0$  и  $\varphi_1(z) = 0$ , т.е.  $F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z} \varphi_1(z) \equiv 0$ .

Таким образом доказано утверждение.

**Теорема 1.** Если бианалитическая функция обращается в ноль на двух концентрических окружностях, то она тождественно равна нулю.

Доказанное утверждение – один из возможных аналогов теоремы единственности для аналитических функций на классе бианалитических функций.

Всяких ли два контура будут полностью определять бианалитическую функцию? Вопрос достаточно сложный и требует дополнительных исследований.

### 3. Основные задачи плоской теории упругости на двух контурах.

В данном пункте постараемся найти применение Теоремы 1 в задачах теории упругости.

Предположим, что однородное изотропное тело занимает область  $D$ , представляющую собой внутренность единичного круга (см. рис. 2). Положим также, что на контуре  $L$  известна всего одна составляющая внешних усилий, прикладываемых к телу, например  $Y_n$ .

Требуется определить деформацию тела.

Очевидно, что в такой постановке задача имеет неоднозначное решение. Граничное условие в данном случае имеет вид:

$$\varphi_0'(t_1) + \bar{t}_1 \varphi_1'(t_1) + \varphi_1(t_1) = \overline{\varphi_0'(t_1) + \bar{t}_1 \varphi_1'(t_1) + \varphi_1(t_1)} + g_1(t_1), \quad t_1 \in L_1.$$

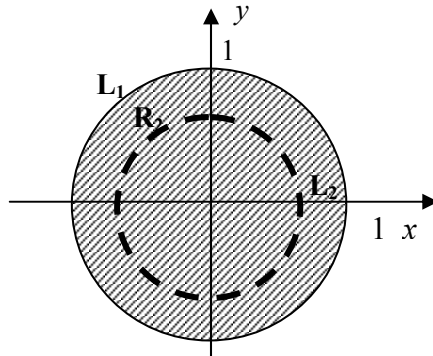


Рис. 2

Предположим, что нагрузки  $Y_n$  удалось определить не только на внешнем контуре  $L_1$ , но и на контуре  $L_2$  ( $L_2: t_2 \in L_2 \Rightarrow \bar{t}_2 \cdot t_2 = R_2^2, 0 < R_2 < 1$ ), который можно мысленно вырезать в единичном круге. В этом случае получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \varphi_0'(t_1) + \bar{t}_1 \varphi_1'(t_1) + \varphi_1(t_1) &= \overline{\varphi_0'(t_1) + \bar{t}_1 \varphi_1'(t_1) + \varphi_1(t_1)} + g_1(t_1), \\ \varphi_0'(t_2) + \bar{t}_2 \varphi_1'(t_2) + \varphi_1(t_2) &= \overline{\varphi_0'(t_2) + \bar{t}_2 \varphi_1'(t_2) + \varphi_1(t_2)} + g_2(t_2). \end{aligned} \quad (16)$$

Чтобы доказать, что система уравнений (16) однозначно определяет бианалитическую функцию и, следовательно, напряжённое состояние тела, докажем, что соответствующая однородная система имеет только тривиальное решение.

Сразу заметим, что движение тела как единичного целого, т.е. равномерное прямолинейное движение, не влияет на напряжённое состояние. Поэтому для упрощения преобразований без ограничения общности рассуждений можно положить:

$$\varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_1(0) = 0. \quad (17)$$

Введём обозначения:

$$\psi(z) = \varphi_0'(z) + \varphi_1(z), \quad \varphi(z) = \varphi_1'(z).$$

Получим из (16) следующую однородную систему:

$$\begin{aligned} \psi(t_1) + \bar{t}_1 \cdot \varphi(t_1) &= \overline{\psi(t_1) + \bar{t}_1 \cdot \varphi(t_1)}, \\ \psi(t_2) + \bar{t}_2 \cdot \varphi(t_2) &= \overline{\psi(t_2) + \bar{t}_2 \cdot \varphi(t_2)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Положим

$$\begin{aligned} \psi(z) &= b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots, \\ \varphi(z) &= c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \end{aligned}$$

Поскольку на контурах выполняются условия  $\bar{t}_1 = \frac{1}{t_1}$ ,  $\bar{t}_2 = \frac{R_2^2}{t_2}$ , то

$$\begin{aligned} \overline{\psi(t_1)} &= \bar{b}_1 \cdot t_1^{-1} + \bar{b}_2 \cdot t_1^{-2} + \dots + \bar{b}_n \cdot t_1^{-n} + \dots, \\ t_1 \cdot \overline{\varphi(t_1)} &= \bar{c}_1 + \bar{c}_2 \cdot t_1^{-1} + \dots + \bar{c}_n \cdot t_1^{-n+1} + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\psi(t_2)} &= \overline{b_1} \cdot R_2^2 \cdot t_2^{-1} + \dots + \overline{b_n} \cdot R_2^{2n} \cdot t_2^{-n} + \dots, \\ t_2 \cdot \overline{\varphi(t_2)} &= \overline{c_1} \cdot R_2^2 + \overline{c_2} \cdot R_2^4 \cdot t_2^{-1} + \dots + \overline{c_n} \cdot R_2^{2n} \cdot t_2^{-n+1} + \dots\end{aligned}\quad (19)$$

Система краевых задач (18) равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} c_1 = \overline{c_1} \\ c_1 = \overline{c_1} \cdot R_2 \\ b_1 + c_2 = 0 \\ b_1 + R_2^2 \cdot c_2 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ b_{n-1} + c_n = 0 \\ b_{n-1} + R_2^2 \cdot c_n = 0. \end{cases}\quad (20)$$

Отсюда следует, что

$$\psi(z) = 0, \quad \varphi(z) = 0. \quad (21)$$

Следовательно,

$$\varphi_1'(z) = 0, \quad \varphi_1(z) = -\varphi_0'(z) = \text{const}. \quad (22)$$

В силу сделанных предположений:  $F(z) = \varphi_0(z) + \overline{z} \varphi_1(z) \equiv 0$ .

Значит система краевых задач (16) однозначно определяет напряжённое состояние упругого однородного изотропного тела.

Данный результат можно было получить и с помощью теории краевых задач для аналитических функций.

Рассмотрим следующие аналитические функции:

$$\begin{aligned}\Phi_1^+(z) &= \varphi_0'(z) \cdot z + \varphi_1'(z) + \varphi_1(z) \cdot z, \\ \Phi_2^+(z) &= \varphi_0'(z) \cdot z + R_2^2 \varphi_1'(z) + \varphi_1(z) \cdot z.\end{aligned}\quad (23)$$

Доопределим их на всю плоскость комплексного переменного по формулам:

$$\Phi_1^-(z) = \overline{\Phi_1^+\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad \Phi_2^-(z) = \overline{\Phi_2^+\left(\frac{1}{z}\right)}. \quad (24)$$

Тогда однородная задача (16) примет вид:

$$\begin{cases} \Phi_1^+(t_2) = \Phi_1^-(t_1), \\ \Phi_2^+(t_2) = \Phi_2^-(t_2). \end{cases}\quad (23)$$

Система (22) представляет собой две однородные задачи о скачке для аналитических функций. Данные задачи (см. [4]) имеют только тривиальное решение. Следовательно,

$$\begin{cases} \varphi_0'(z) \cdot z + \varphi_1'(z) + \varphi_1(z) \cdot z = 0, \\ \varphi_0'(z) \cdot z + R_2^2 \varphi_1'(z) + \varphi_1(z) \cdot z = 0. \end{cases}$$

Отсюда,  $\varphi_1'(z) = 0, \quad \varphi_0'(z) = -\varphi_1(z) = \text{const}$ .

Рассуждая аналогично получим, что напряжённое состояние тела однозначно определяется одной компонентой внешних усилий, заданной на двух концентрических окружностях.

#### 4. Заключение.

В пункте 3 была доказана связь между теоремой единственности для бианалитических функций и основными задачами плоской теории упругости изотропного тела.

В заключении остановимся на перспективах «эксплуатации» данной связи.

1. Указанная связь с теоретической точки зрения даёт возможность поставить принципиально новые краевые задачи для бианалитических функций и их обобщений. В подобного рода задачах недоопределённость в смысле краевых коэффициентов покрывается информацией о поведении искомой функции на различных контурах.

2. В работе рассмотрен только случай концентрических окружностей. Следующим шагом должен быть переход к областям, на которые можно отобразить круг рациональными функциями.

3. Сразу возникает вопрос, любые ли два различных контура могут однозначно определить бианалитическую функцию? Если нет, то можно ли провести некоторую классификацию?

На наш взгляд это наиболее сложная задача, которая перекликается с известной проблемой Хеймана, которая ещё далека от решения.

4. С практической точки зрения напрашивается численный эксперимент по проверке предложенной теории, который авторы намерены представить в недалёком будущем.

г. Москва

Поступила: 13 декабря 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Балк, М. Б. Полианалитические функции и их обобщения / М. Б. Балк // Итоги науки и техники ВИНТИ : Сер. Совр. Проб. матем. Фунд. напр. – М: ВИНТИ. – 1991. – Т. 85. – С. 187-246.
2. Ганин, М. П. Краевые задачи для полианалитических функций / М. П. Ганин // Докл. АН СССР. – 1951. – Т.75. – № 6. С. 921-924.
3. Ганин, М. П. Краевые задачи для полианалитических функций / М. П. Ганин // Докл. АН СССР. – 1951. – Т.80. – №3. – С.313-316.
4. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Гахов Ф. Д. – М: Наука, 1977. – 640 с.
5. Каландия, А. И. Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия.– М: Наука, 1973. – 303 с.
6. Колосов, Г. В. Применение комплексной переменной к плоской задаче теории упругости / Г. В. Колосов. – Л. – М. : ГТТИ, 1939. – 224 с.
7. Михлин, С. Г. Интегральные уравнения / С. Г. Михлин. – М. – Л., 1949. – 378 с.
8. Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
9. Мухелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
10. Редкозубов, С. А. Задача Карлемана для полианалитических функций в теории упругости для областей сложной формы / С. А. Редкозубов, А. В. Юденков // Проблемы механики деформируемых тел и

горных пород. Сб. статей под ред. академика РАН А.Ю.Ишлинского, М.: Из-во МГГУ. – 2001. – С. 263-270.

11. *Савин, Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – Киев: «Наукова думка», 1975. – 887 с.

12. *Черепанов, Г. П.* Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости / Г. П. Черепанов // Прикл. матем. и механ. – 1962. – Т. 26. – № 5. – С. 902-912.

13. *Юденков, А. В.* Краевые задачи со сдвигом для полианалитических функций и их приложения к вопросам статической теории упругости / А. В. Юденков. – Смоленск : «Смядынь», 2002. – 268 с.

14. *Юденков, А. В.* Краевые задачи и системы сингулярных интегральных уравнений на основе математической модели процесса линейной деформации изотропного тела / А. В. Юденков, Л. П. Римская, А. П. Юденкова. – Смоленск : ФГОУ ВПО «Смоленский сельскохозяйственный институт». – 118 с.

**ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ**  
**НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК**

*(Бакинский государственный университет)*

Тонкостенные оболочечные конструкции находят широкое применение в различных областях современной техники – авиастроении, судостроении, ракетной технике, нефтяном машиностроении и т.д. К настоящему времени фундаментальные результаты в этой области отражены в многочисленных монографиях и статьях [1; 5 – 7].

Однако, в последние годы в связи с запросами инженерной практики (повышение требований к надежности несущих конструкций, вопросы оптимального проектирования и снижения веса) возникла необходимость дальнейшего развития теории и методов расчета оболочечных конструкций, учитывающих все усложняющиеся условия их эксплуатации, использование композитных материалов и направленных на преодоление трудностей математического и вычислительного характера. Здесь одним из таких важных аспектов является развитие приближенных, в частности вариационных методов.

В публикуемой статье, в геометрически нелинейной постановке, разработан вариационный принцип, на основе которого могут быть исследованы задачи определения напряженно-деформированного состояния неоднородных по толщине тонкостенных упругих анизотропных элементов конструкций (оболочек, пластинок).

Заметим, что учет геометрической нелинейности позволяет с полным основанием считать возможным применять сформулированный вариационный метод к задачам устойчивости и выпучивания оболочек.

1. «Оболочечный» вариационный принцип получим исходя из трехмерной теории упругости неоднородного анизотропного тела. В начале неоднородность будем интерпретировать в виде идеализации непрерывного изменения физико-механических свойств от точки к точке. Рассмотрим равновесие гетерогенной анизотропной среды, которая занимает в трехмерном евклидовом пространстве с криволинейными координатами  $x^\gamma$  область  $V$ , ограниченную достаточно гладкой поверхностью  $S$ . Тогда для геометрически нелинейной теории оно описывается следующей краевой задачей:

$$\nabla_j \left\{ \sigma^{ij} \left( \delta_i^k + \nabla_i u^k \right) \right\} = 0, \quad \forall x^\gamma \in V \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{ij}^\vee = C_{ijkl} \left( x^\gamma \right) \sigma^{kl}, \quad \forall x^\gamma \in V \quad (1.2)$$

$$2\varepsilon_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k, \quad \forall x^\gamma \in V \quad (1.3)$$

$$\bar{u}_k = u_k, \quad \forall x^\gamma \in S_2 \quad (1.4)$$

$$\bar{T} = \sigma^{ij} n_j \left( \delta_i^k + \nabla_i u^k \right). \quad \forall x^\gamma \in S_1 \quad (1.5)$$



Здесь применены обычные обозначения:  $\varepsilon_{ij}$  – ковариантные компоненты тензора конечной деформации,  $\varepsilon_{ij}^\vee$  – значения деформации, определяемые физическим законом,  $\sigma^{ij}$  – контравариантные составляющие тензора напряжений,  $\delta_i^k$  – тензор Кронекера,  $u_i$  и  $u^i$  соответственно ковариантные и контравариантные составляющие вектора перемещения,  $\bar{u}_k$  и  $\bar{T}^k$  – заданные на границе компоненты вектора перемещения и усилия,  $\nabla_j$  – оператор ковариантного дифференцирования,  $n_j$  – единичный вектор нормали, а  $S = S_1 \cup S_2$ . Краевую задачу (1.1) – (1.5) можно сформулировать с помощью вариационной теоремы следующим образом: стационарное значение функционала

$$\delta R = 0 \quad (1.6)$$

где

$$R = \int_V \left\{ \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\sigma}^{ij} + \frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^k \nabla_j \dot{u}_k - \frac{1}{2} C_{ijkl} \dot{\sigma}^{kl} \dot{\sigma}^{ij} \right\} dV - \int_{S_1} \dot{T}^i \dot{u}_i ds - \int_{S_2} (\dot{u}_i - \dot{\bar{u}}_i) \dot{T}^i ds \quad (1.7)$$

при условиях (1.2) и (1.3) в качестве уравнений Эйлера приводит к уравнениям (1.1) и граничным условиям (1.4) и (1.5). За независимые варьируемые величины принимаются  $\dot{\sigma}^{ij}$  и  $\dot{u}_i$ , а точкой сверху обозначается дифференцирование по некоторому параметру, характеризующему процесс нагружения. Доказательство данной теоремы аналогично [4] и поэтому здесь не приводится. Необходимо отметить, что уравнения равновесия (1.1) и физические соотношения (1.2) при варьировании получаются независимо друг от друга. Этот факт и предопределяет справедливость модификации функционала (1.7) для построения вариационного принципа теории неоднородных по толщине оболочек.

Сформулированная краевая задача (1.1) – (1.5) и эквивалентный ей вариационный принцип (1.7) носят формальный характер. Поэтому к ним следует относиться с осторожностью в том смысле, что в трехмерной постановке линейный закон Гука, строго говоря, справедлив только в случае малых деформаций. Однако здесь это допущение сделано сознательно, так как нашей конечной целью является построение двумерного функционала, описывающего нелинейное напряженно-деформируемое состояние тонкостенных линейно-упругих оболочек, относительно которых такой подход правомерен.

2. Для осуществления перехода от трехмерной системы координат к двумерной в начале установим модель, представляющую в теоретических исследованиях реальные оболочки. Для этого необходимо сделать ряд допущений. При этом если за  $z$  принять координату  $x^3$  а под  $x^1$  и  $x^2$  – соответственно криволинейные координаты срединной поверхности, то в основу предлагаемой здесь теории неоднородных тонкостенных оболочек ставятся следующие предположения:

а) ограничимся рассмотрением «жестконеоднородной» оболочки, для которой можно принять силовую гипотезу о незначительности нормального напряжения  $\sigma^{33}$  ( $\sigma^{33} \approx 0$ ) [3];

б) будем использовать гипотезы плоских сечений Кирхгофа – Лява;

в) учитывается нелинейность перемещения только в направлении нормали к поверхности оболочки.

Теперь перемещения произвольных точек оболочки, считая их меняющимися вдоль толщины  $z$  по линейному закону, запишем в виде:

$$\tilde{u}_\alpha(x^1, x^2, x^3) = u_\alpha(x^1, x^2) + z\psi_\alpha(x^1, x^2). \quad (2.1)$$

Что касается перемещения  $\tilde{u}_3$ , то примем

$$\tilde{u}_3(x^1, x^2, x^3) = w(x^1, x^2). \quad (2.2)$$

Будем считать, что греческие индексы принимают значения 1 и 2,  $u_\alpha$  и  $w$  – перемещения точек срединной поверхности вдоль координатных линий  $x^1$ ,  $x^2$  и нормали соответственно, а  $\psi_\alpha$  – компоненты вектора сдвига по соответствующим координатным линиям. Отметим, что в выражениях (2.1), (2.2) и далее величины, отмеченные со знаком  $\sim$  отнесены к любой эквидистантной поверхности, а без него – только к срединной поверхности. Пользуясь допущением б), для функции  $\psi_\alpha$  запишем

$$\psi_\alpha = -(\nabla_\alpha w + b_{\alpha\gamma} u^\gamma), \quad (2.3)$$

где  $\nabla_\alpha$  – двумерный оператор ковариантного дифференцирования,  $b_{\alpha\beta}$  – коэффициенты второй квадратичной формы. Теперь, учитывая последнюю формулу, равенство (2.1) перепишем в виде

$$\tilde{u}_\alpha = u_\alpha - z(\nabla_\alpha w + b_{\alpha\gamma} u^\gamma) \quad (2.4)$$

Подставляя выражения для перемещений (2.4) и (2.2) в общую формулу для определения компонент тензора конечной деформации, принимая гипотезу в) и пренебрегая членами, содержащими  $z^2$ , как малыми высшего порядка, для деформаций произвольной точки эквидистантной поверхности получим следующие выражения:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + z\mathcal{G}_{\alpha\beta}. \quad (2.5)$$

Здесь  $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$  – коэффициенты кривизны срединной поверхности. При этом входящие в формулу (2.5) величины  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  и  $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$  могут быть записаны в следующей форме:

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha - 2b_{\alpha\beta} w + b_{\alpha\gamma}^\gamma b_{\beta\gamma} w^2 + \nabla_\alpha w \nabla_\beta w, \quad (2.6)$$

$$2\mathcal{G}_{\alpha\beta} = -\nabla_\alpha (b_{\beta\gamma} u^\gamma) - \nabla_\beta (b_{\alpha\gamma} u^\gamma) - 2\nabla_\alpha \nabla_\beta w. \quad (2.7)$$

В рассматриваемой «жестконеоднородной» модели оболочки (допущение а)), принимая во внимание линейный характер изменения напряжений по толщине, компоненты контравариантного тензора напряжений могут быть представлены как

$$\tilde{\sigma}^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta} + z\sigma_*^{\alpha\beta}. \quad (2.8)$$

Учитывая теперь, что величина  $z$  меняется в пределах всей толщины оболочки, усилия  $N^{\alpha\beta}$  и моменты  $M^{\alpha\beta}$  определим через компоненты тензора напряжений посредством формул:

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-h}^h \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} dz, \quad M^{\alpha\beta} = \int_{-h}^h \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} z dz, \quad (2.9)$$

в которых  $2h$  – толщина оболочки.

Подставляя значения (2.8) в формулы (2.9), находим

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-h}^h \left\{ \sigma^{\alpha\beta} + z \sigma_*^{\alpha\beta} \right\} dz = \sigma^{\alpha\beta} \int_{-h}^h z dz = 2h \sigma^{\alpha\beta},$$

$$M^{\alpha\beta} = \int_{-h}^h \left\{ \sigma^{\alpha\beta} + z \sigma_*^{\alpha\beta} \right\} z dz = \frac{2}{3} h^3 \sigma^{\alpha\beta}.$$

В силу полученных равенств компоненты тензора напряжений через компоненты усилий и моментов запишутся следующими выражениями:

$$\tilde{\sigma}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2h} N^{\alpha\beta} + \frac{3}{2h^3} z M^{\alpha\beta}. \quad (2.10)$$

3. Выделив переменную  $z$  и выписав все необходимые соотношения принятой теории тонких оболочек, перейдем к преобразованию объемного интеграла функционала (1.7) в поверхностный интеграл «оболочечного» функционала. Для осуществления соответствующих выкладок, будем исходить из условия, что

$$dV = ds dz,$$

где  $ds$  – элементарная площадь срединной поверхности оболочки.

С учетом вышесказанного, первый объемный интеграл запишется как

$$\int_V \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\sigma}^{ij} dV = \int_{-h}^h \int_S \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} dz ds.$$

Так как на основании выражения (2.5) имеем, что

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + z \dot{\varrho}_{\alpha\beta},$$

то дальнейшее преобразование этого члена будет следующим

$$\int_{-h}^h \int_S \left\{ \left( \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + z \dot{\varrho}_{\alpha\beta} \right) \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} \right\} ds dz = \int_S \left\{ \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} \left( \int_{-h}^h \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} dz \right) + \dot{\varrho}_{\alpha\beta} \left( \int_{-h}^h \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} z dz \right) \right\} ds.$$

Здесь, принимая во внимание равенства (2.8), преобразованный первый член функционала (1.7) запишем в окончательной форме

$$\int_V \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\sigma}^{ij} dV = \int_S \left\{ \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} \dot{N}^{\alpha\beta} + \dot{\varrho}_{\alpha\beta} \dot{M}^{\alpha\beta} \right\} ds. \quad (3.1)$$

Преобразования второго члена функционала (1.7) через параметры эквидистантной поверхности проводится следующим образом:

$$\int_V \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^k \nabla_j \dot{u}_k dV = \int_{-h}^h \left\{ \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} \left[ b_\alpha^\gamma b_{\beta\gamma} \dot{w}^2 + \nabla_\alpha \dot{w} \nabla_\beta \dot{w} \right] \right\} ds dz$$

Далее, представляя тензор напряжения согласно формулам (2.10), пренебрегая членами, содержащими  $z^2$ , как малыми высшего порядка и учитывая, что произведения

продольных усилий на перемещения значительно превышают значения произведений моментов на соответствующие им обобщенные перемещения, находим, что

$$\int_V \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^k \nabla_j \dot{u}_k dV = \int_S \left\{ N^{\alpha\beta} \left[ b_\alpha^\gamma b_{\beta\gamma} \dot{w}^2 + \nabla_\alpha \dot{w} \nabla_\beta \dot{w} \right] \right\} ds. \quad (3.2)$$

Теперь, аналогично приведенным выше рассуждениям и вычислениям, дадим преобразование третьего члена функционала

$$\int_V C_{ijkl} \dot{\sigma}^{ij} \dot{\sigma}^{kl} dV = \int_S \left\{ C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(0)} \dot{N}^{\alpha\beta} \dot{N}^{\gamma\eta} + 2C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(1)} \dot{N}^{\alpha\beta} \dot{M}^{\gamma\eta} + C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(2)} \dot{M}^{\alpha\beta} \dot{M}^{\gamma\eta} \right\} ds. \quad (3.3)$$

Здесь для краткости записи введены следующие обозначения

$$C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(0)} = \frac{1}{4h^2} \int_{-h}^h C_{\alpha\beta\gamma\eta} dz; \quad C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(1)} = \frac{3}{4h^4} \int_{-h}^h C_{\alpha\beta\gamma\eta} z dz; \quad C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(2)} = \frac{9}{4h^6} \int_{-h}^h C_{\alpha\beta\gamma\eta} z^2 dz. \quad (3.4)$$

Назовем  $C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(0)}$ ,  $C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(1)}$ ,  $C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(2)}$  приведенными механическими характеристиками соответственно нулевого, первого и второго порядка.

Допустим теперь, что неоднородная по толщине оболочка многослойна и составлена из  $n$  чередующихся различных по толщине слоев, которые жестко связаны между собой\* общими поверхностями параллельными срединной поверхности оболочки, с различными упругими характеристиками  $C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(k+1)}$  [ $k=0,1,\dots,(n-1)$ ]. Толщину каждого слоя обозначим через  $\delta_k$ . Таким образом

$$\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k = 2h,$$

а  $\delta_0$  принимается равным нулю. В этом случае для вычисления коэффициентов (3.4) введем обозначения

$$s_k = -h + \sum_{j=0}^k \delta_j, \quad s_{k+1} = -h + \sum_{j=0}^{k+1} \delta_j = s_k + \delta_{k+1}.$$

Тогда для величин  $C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(0)}$ ,  $C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(1)}$  и  $C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(2)}$  получим следующие выражения

$$C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(0)} = \frac{1}{4h^2} \sum_{k=0}^{n-1} C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(k+1)} \int dz; \quad C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(1)} = \frac{3}{4h^4} \sum_{k=0}^{n-1} C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(k+1)} \int z dz; \quad C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(2)} = \frac{9}{4h^6} \sum_{k=0}^{n-1} C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(k+1)} \int z^2 dz.$$

В последних формулах интегрирование по  $z$  ведется от  $s_k$  до  $s_k + \delta_{k+1}$ .

**4.** Таким образом, функционал для решения задач теории неоднородных по толщине оболочек с учетом геометрической нелинейности принимает вид

$$R = \int_S \left\{ \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} \dot{N}^{\alpha\beta} + \dot{\varrho}_{\alpha\beta} \dot{M}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} N^{\alpha\beta} \left( b_\alpha^\gamma b_{\beta\gamma} \dot{w}^2 + \nabla_\alpha \dot{w} \nabla_\beta \dot{w} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(0)} \dot{N}^{\alpha\beta} \dot{N}^{\gamma\eta} + 2C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(1)} \dot{N}^{\alpha\beta} \dot{M}^{\gamma\eta} + C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(2)} \dot{M}^{\alpha\beta} \dot{M}^{\gamma\eta} \right) \right\} ds - R_L, \quad (4.1)$$

\* в этом предположении справедлива гипотеза Кирхгофа-Лява.

где [2]

$$R_L = \int_{L_1} \left[ (\dot{T}_*^\alpha - b_\alpha^\gamma \dot{P}_*^\alpha) \dot{u}_\alpha + (\dot{T}_*^3 + \overline{n_\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\beta}}) \dot{w} - \overline{P_*^\alpha} \nabla_\alpha \dot{w} \right] dl + \\ + \int_{L_2} \left\{ (\dot{u}_\alpha - \dot{\bar{u}}_\alpha) (\dot{T}_*^\alpha - b_\alpha^\gamma \dot{P}_*^\alpha) + (\dot{w} - \dot{\bar{w}}) \left[ \dot{T}_*^3 + (n_\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\beta}) \right] - \right. \\ \left. - (\nabla_\alpha \dot{w} - \nabla_\alpha \dot{\bar{w}}) \dot{P}_*^\alpha \right\} dl,$$

контурный интеграл, не зависящий от физических соотношений и соответствующий принятой гипотезе Кирхгофа-Лява. Здесь

$$T_*^\alpha = N^{\alpha\beta} n_\beta; \quad T_*^3 = N^{\beta\gamma} n_\beta \nabla_\gamma w; \quad P_*^\alpha = M^{\beta\alpha} n_\beta,$$

$L_1$  – часть контура, где заданы усилия и моменты, а на оставшейся части  $L_2$  – перемещения,  $n_\beta$  – косинусы нормали к контуру, а  $\dot{u}^\alpha$ ,  $\dot{w}$ ,  $\dot{N}^{\alpha\beta}$  и  $\dot{M}^{\alpha\beta}$  – независимые варьируемые величины.

Применяя известную процедуру, не трудно получить уравнения Эйлера для функционала (4.1). Они определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (e_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(0)} N^{\gamma\eta} - C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(1)} M^{\gamma\eta})^\bullet &= 0, \\ (\mathfrak{g}_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(1)} N^{\gamma\eta} - C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(2)} M^{\gamma\eta})^\bullet &= 0, \\ (\nabla_\alpha N^{\alpha\gamma} + b_\alpha^\gamma \nabla_\beta M^{\alpha\beta})^\bullet &= 0, \\ [N^{\alpha\beta} (b_{\alpha\beta} w - b_\alpha^\gamma) + \nabla_\beta (N^{\alpha\beta} \nabla_\alpha w) + \nabla_\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\beta}]^\bullet &= 0, \\ (n_\beta N^{\gamma\beta} - b_\alpha^\gamma n_\beta M^{\alpha\beta} - \overline{T_*^\gamma} + b_\alpha^\gamma \overline{P_*^\alpha})^\bullet &= 0, \quad \forall l \in L_1, \\ (n_\beta N^{\alpha\beta} \nabla_\alpha w + n_\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\beta} - \overline{T_*^3} - \overline{n_\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\beta}})^\bullet &= 0, \quad \forall l \in L_1, \\ (M^{\alpha\beta} n_\beta - \overline{P_*^\alpha})^\bullet &= 0, \quad \forall l \in L_1, \\ (u_\alpha - \bar{u}_\alpha)^\bullet &= 0, \quad \forall l \in L_2, \\ (w - \bar{w})^\bullet &= 0, \quad \forall l \in L_2, \\ (\nabla_\alpha w - \nabla_\alpha \bar{w})^\bullet &= 0, \quad \forall l \in L_2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Полученная система (4.2) является дифференциальной относительно параметра, характеризующего процесс нагружения. Проинтегрировав её в предположении, что напряженное состояние в начале нагружения отсутствует, окончательно запишем:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(0)} N^{\gamma\eta} + C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(1)} M^{\gamma\eta}, \\ \mathfrak{g}_{\alpha\beta} &= C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(1)} N^{\gamma\eta} + C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(2)} M^{\gamma\eta}, \\ \nabla_\alpha N^{\alpha\gamma} + b_\alpha^\gamma \nabla_\beta M^{\alpha\beta} &= 0, \\ N^{\alpha\beta} (b_\alpha^\gamma b_{\beta\gamma} w - b_{\alpha\beta}) - \nabla_\beta (N^{\alpha\beta} \nabla_\alpha w) - \nabla_\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\beta} &= 0, \end{aligned}$$

при следующих граничных условиях

$$u_\alpha = \bar{u}_\alpha, \quad w = \bar{w}, \quad \nabla_\alpha w = \nabla_\alpha \bar{w}, \quad \forall l \in L_2,$$

$$T_*^\alpha = \bar{T}_*^\alpha, \quad T_{**}^3 = \bar{T}_{**}^3, \quad P_*^\alpha = \bar{P}_*^\alpha, \quad \forall l \in L_1.$$

С получением выше выписанных соотношений, доказательство вариационной теоремы для неоднородных по толщине и многослойных тонких упругих анизотропных оболочек можно считать завершенным.

В заключении более определенно отметим сущность предложенного вариационного метода. Особенностью предложенного функционала является то, что он сформулирован в скоростях. Если построить аналогичный функционал Рейснера, то применение численных методов, например метода Рунге, приведет к решению системы нелинейных алгебраических уравнений или системы трансцендентных уравнений, реализация которых на ЭВМ весьма затруднительна. Применение же аналогичного приближенного метода в данном случае приводит к решению задачи Коши для системы квазилинейных дифференциальных уравнений, численная реализация которой значительно проще.

г. Баку

Поступила: 08 февраля 2008 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Абовский, Н. П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н. П. Абовский, Н. П. Андреев, А. П. Деруга – М. : Наука, 1978. – 288 с.
2. *Ализаде, А. Н.* О применении вариационной теоремы Дж. Л. Сендерса, Х. Г. Мак-комба, Ф. Р. Шлехте к тонким оболочкам / А. Н. Ализаде, Р. Ю. Амензаде // Уч. записки МВ и ССО Азерб. ССР. сер. физ-мат. наук. – 1976. – № 6. – С. 82–88.
3. *Амензаде, Р. Ю.* Вариационный принцип теории неоднородных оболочек при облучении / Р. Ю. Амензаде, А. Н. Ализаде, И. Н. Преображенский // Механика твердого тела. – 1988. – №2, – с. 151–155.
4. *Васидзу, К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу – М. : Мир, 1987, – 542 с.
5. *Вольмир, А. С.* Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир – М. : Наука, 1987. – 984 с.
6. *Галимов, К. З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек / К. З. Галимов – Казань : Изд-во КГУ, 1975. – 325 с.
7. *Гольденвейзер, А. П.* Теория упругих тонких оболочек / А. П. Гольденвейзер – М. : Наука, 1976. – 512 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В  
ЗАДАЧАХ ИМПУЛЬСНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ  
ПЛАСТИН ПРИ МАЛЫХ И БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

*(Научно-исследовательский институт механики  
Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского)*

В работе исследование проводится на основе сравнительного анализа результатов численного решения задач изгиба пластин в различных постановках. В качестве определяющих соотношений используются упругопластическая и жесткопластическая модели материалов без упрочнения в геометрически линейной и нелинейной постановке. Решение задач изгиба осуществляется на основе моментной и безмоментной модели теории оболочек типа Тимошенко.

**Введение.** Аналитическим и численным методам расчета жесткопластических конструкций (балки, пластины и оболочки) посвящены многие работы [3–6]. Однако, вопросы применимости жесткопластических моделей при расчете тонкостенных металлических конструкций, обладающих в реальности упругопластическими свойствами, мало изучены. Для применимости жесткопластической модели необходимо, чтобы энергия упругого деформирования была на порядок меньше работы пластического деформирования и деформации должны быть на порядок больше предела текучести. Например, для сталей пластические деформации должны превышать 1%, для алюминиевых сплавов – 3%. При таких деформациях тонкостенных конструкций, особенно балок и пластин, необходимо учитывать геометрически нелинейные эффекты деформирования, которые в известных авторах публикациях по жесткопластическому анализу не учитываются [3–6]. Данная работа посвящена численному исследованию динамического деформирования круглых пластин при малых и больших прогибах в геометрически линейной и нелинейной постановках с использованием упругопластической и жесткопластической моделей деформирования. Применяемый численный метод [1;2] прошел многолетнюю верификацию на широком классе задач динамики тонкостенных конструкций.

1. Численное решение задач проводится в осесимметричной постановке. Пластина или оболочка рассматриваются в общей декартовой системе координат  $rOz$ . Кроме того, вводится местный базис  $s, \xi$ , связанный с деформируемой срединной поверхностью. Общая и местная система координат связаны соотношениями  $s = r\psi_z - z\psi_r$ ,  $\xi = r\psi_r + z\psi_z$ , где  $\psi_r = -\partial z / \partial s$ ,  $\psi_z = \partial r / \partial s$  – направляющие косинусы нормали. Процесс нагружения разбивается на этапы. В пределах каждого этапа приращения перемещений и деформаций полагаются малыми. Текущая геометрия пластины, которая в процессе деформирования превращается в оболочку, представляется в виде:

$$r = r^H + u_r; \quad z = z^H + u_z; \quad ds = \sqrt{(dr)^2 + (dz)^2},$$

где  $r^H = r^H(s)$ ,  $z^H = z^H(s)$  – начальная геометрия,  $u_r = u_r(s, t)$ ,  $u_z = u_z(s, t)$  – перемещения,  $t$  – время. Толщина пластины изменяется во времени  $h = h(s, t)$ . Согласно теории Тимошенко скорости перемещений задаются в виде:

$$\dot{u}_s(s, \xi, t) = \dot{u}_s(s, t) + \xi \dot{\varphi}(s, t); \quad \dot{u}_\xi(s, \xi, t) = \dot{u}_\xi(s, t),$$

где  $\dot{\varphi}(s, t)$  – угловая скорость поворота поперечного сечения, которая складывается из скорости поворота нормали  $\dot{\psi}(s, t)$  и скорости сдвига  $\dot{\gamma}(s, t)$ .

Выражения для скоростей деформации учитывают влияние больших безмоментных деформаций на деформации изгиба:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ii} &= \dot{e}_{ii}^0 + \xi \dot{\chi}_{ii} \quad (i=1,2), \quad \dot{e}_{ii}^0 = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial s} \psi_z - \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial s} \psi_r; \quad \dot{e}_{22}^0 = \frac{\dot{u}_r}{r}, \\ \dot{\chi}_{11} &= \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} (\dot{e}_{33}^0 - \dot{e}_{11}^0), \quad \dot{\chi}_{22} = \frac{\dot{\varphi}}{r} \psi_z - \frac{\dot{e}_{33}^0 - \dot{e}_{22}^0}{r} (\psi_r - \psi_r^H), \\ \dot{\gamma}^0 &= \dot{\varphi} + \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial s} \psi_r + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial s} \psi_z, \quad 2e_{12} = \dot{\gamma}^0 \left[ 1 - \left( \frac{2\xi}{h} \right)^2 \right], \quad \psi_r^H = -\frac{\partial z^H}{\partial s^H}. \end{aligned} \quad (1)$$

Полные деформации  $e_{ij}(i, j=1,2,3)$  определяются интегрированием скоростей деформаций по времени, что дает в результате логарифмические деформации. В [2] показана аддитивность упругих  $e_{ij}^y$  и пластических  $e_{ij}^{nl}$  компонент. Напряжения  $\sigma_{ij}$  связаны с упругими деформациями законом Гука. Пластические деформации определяются вариантом теории течения с нелинейным изотропным упрочнением:

$$e_{ij}^{nl} = \int_0^t \dot{e}_{ij}^{nl} dt; \quad \dot{e}_{ij}^{nl} = \lambda S_{ij}; \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0; \quad \sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad (2)$$

$$S_{ij} S_{ij} = \frac{2}{3} \sigma_u; \quad \sigma_u = \sigma_u(\kappa); \quad \kappa = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \sqrt{\dot{e}_{ij}^{nl} \dot{e}_{ij}^{nl}} dt.$$

Скалярная функция модели  $\sigma_u(\kappa)$  определяется истинной диаграммой деформирования материала.

Вариационные уравнения движения пластины (оболочки) [2] следует из принципа возможных скоростей Журдена:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left\{ \left[ N_1 \psi_z + Q \psi_r - 2M_1 \psi_z \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{M_2 (\psi_r - \psi_r^H)}{r} \psi_z \right] \frac{\delta \dot{u}_r}{\partial s} + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{N_2}{r} - \frac{M_1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{2M_2 (\psi_r - \psi_r^H)}{r^2} + \rho h \ddot{u}_r \right] \delta \dot{u}_r \right\} r ds - (r P_r \delta \dot{u}_r)_{s=0,L} = 0; \quad (3) \end{aligned}$$



$$\int_0^L \left[ Q\psi_z - N_1\psi_r + 2M_1\psi_r \frac{\partial\varphi}{\partial s} - \frac{M_2(\psi_r - \psi_r'')}{r}\psi_r \right] \frac{\delta\dot{u}_z}{\partial s} + \rho h \ddot{u}_z \delta\dot{u}_z \Big\} r ds - (rP_z \delta\dot{u}_z)_{s=0,L} = 0;$$

$$\int_0^L \left[ M_1 \frac{\delta\partial\dot{\varphi}}{\partial s} + \left( \frac{M_2}{r}\psi_z + Q + \frac{\rho h^3}{12}\ddot{\varphi} \right) \delta\dot{\varphi} \right] r ds - (rM\delta\dot{\varphi})_{s=0,L} = 0.$$

Здесь  $L$  – длина пластины;  $\rho$  – плотность материала;  $N_1, N_2, Q, M_1, M_2$  – внутренние усилия и моменты;  $P_r = P_r(t), P_z = P_z(t), M = M(t)$  – внешние силы и моменты, действующие на контуре пластины  $s = 0, L$ .

Для численного решения задачи применяется вариационно-разностный метод и явная схема «крест» [1]. Скорости перемещений и деформаций вычисляются в моменты времени  $t^{k+1/2}$ , а геометрия и напряженно-деформированное состояние – в целочисленные моменты времени  $t^{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Рекуррентные формулы для подсчета на  $\Delta t^{k+1}$  шаге скоростей перемещений, новой геометрии и толщины представляются в виде:

$$\begin{aligned} (\dot{u}_r)_i^{k+1/2} &= (\dot{u}_r)_i^{k-1/2} + (\Phi_r)_i^k \frac{\Delta t^{k+1} + \Delta t^k}{2(\Phi_M)_i^k}; \quad (u_r)_i^{k+1} = (u_r)_i^k + (\dot{u}_r)_i^{k+1/2} \Delta t^{k+1}; \\ (\dot{u}_z)_i^{k+1/2} &= (\dot{u}_z)_i^{k-1/2} + (\Phi_z)_i^k \frac{\Delta t^{k+1} + \Delta t^k}{2(\Phi_M)_i^k}; \quad (u_z)_i^{k+1} = (u_z)_i^k + (\dot{u}_z)_i^{k+1/2} \Delta t^{k+1}; \\ (\dot{\varphi})_i^{k+1/2} &= (\dot{\varphi})_i^{k-1/2} + (\Phi_\varphi)_i^k \frac{\Delta t^{k+1} + \Delta t^k}{2(\Phi_J)_i^k}; \quad \varphi_i^{k+1} = \varphi_i^k + \dot{\varphi}_i^{k+1/2} \Delta t^{k+1}; \\ h_{i+1/2}^{k+1} &= h_{i+1/2}^k \left[ 1 + \Delta e_{33}^0 + \frac{(\Delta e_{33}^0)^2}{2} \right], \quad \Delta e_{33}^0 = (\dot{e}_{33}^0)_{i+1/2}^{k+1/2} \Delta t^{k+1}. \end{aligned}$$

Здесь  $i = \overline{1, N}$  – узлы разностной сетки;  $\Phi_r, \Phi_z, \Phi_\varphi, \Phi_M, \Phi_J$  – обобщенные силы, массы и моменты инерции.

Выше описана моментная модель деформирования пластин и оболочек с учетом геометрической и физической нелинейности. Для того чтобы получить безмоментную модель необходимо в уравнениях движения (3) не учитывать перерезывающую силу, т.е. положить  $Q = 0$ . При решении задач в геометрически линейной постановке уравнения формулируются в метрике исходного состояния.

**2.** Рассматривалась задача изгиба круглой пластины, закрепленной по контуру с помощью шарнирно неподвижной опоры. На пластину действует импульс начальной скорости равномерно распределенный по поверхности. Геометрические характеристики пластины: радиус пластины  $R = 1\text{м}$ , толщина пластины  $h_1 = 0.04\text{м}, h_2 = 0.2\text{м}$ .

Для описания свойств материала рассматривались упругопластическая и жесткопластическая модель без упрочнения. Для этого в законе Гука при упругопластической постановке модуль Юнга принимался  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{МПа}$ , коэффициент Пуансона –  $\nu = 0.3$ , при жесткопластической постановке модуль Юнга увеличивался в

1000 раз. Для моделирования идеальной пластичности в уравнениях (2) в качестве  $\sigma_u(\kappa)$  задавалась линейная функция с малым линейным упрочнением, так как при отсутствии упругого участка и упрочнения разрешающая система уравнений теряет свойства гиперболичности и численная схема счета становится неустойчивой.

На рисунках 1–3 представлены результаты численного решения задачи в различных постановках и введены обозначения:

- «У.П.Н.» – упругопластическая моментная модель в геометрически нелинейной постановке;
- «Ж.П.Н.» – жесткопластическая моментная модель в геометрически нелинейной постановке;
- «У.П.Л.» – упругопластическая моментная модель в геометрически линейной постановке;
- «Ж.П.Л.» – жесткопластическая моментная модель в геометрически линейной постановке;
- «У.П.Н. (Б.М.)» – упругопластическая безмоментная модель в геометрически нелинейной постановке;
- «Ж.П.Н. (Б.М.)» – жесткопластическая безмоментная модель в геометрически нелинейной постановке;

На рисунках 1, 2 приведены максимальные прогибы пластин ( $\max u_z/R$ , где  $u_z$  – прогиб пластины,  $R$  – радиус пластины) соответственно для толщин  $h_1 = 0.04\text{м}$ . и  $h_2 = 0.2\text{м}$  в зависимости от начальной скорости  $v_z^0$ . Пунктирной линией представлены результаты расчетов в упругопластической постановке, сплошной линией – в жесткопластической постановке.

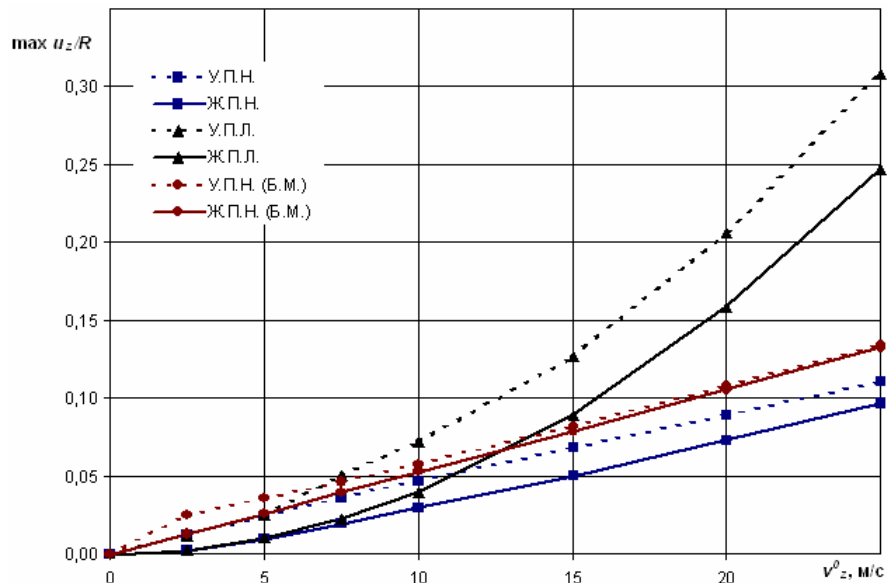


Рис. 1

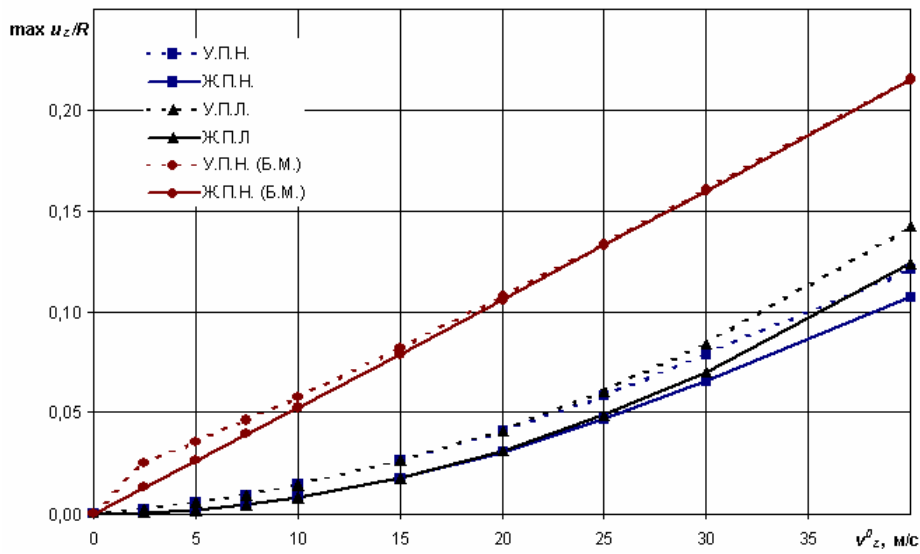


Рис. 2

На рис. 3 приведены прогибы пластины с толщиной  $h_1 = 0.04\text{м}$  при начальной скорости  $v_z^0 = 25\text{м/с}$ . Введены обозначения:  $u_z$  – прогиб пластины,  $r$  – текущая радиальная координата,  $R$  – радиус пластины. Пунктирной линией представлены результаты расчетов в упругопластической постановке, сплошной линией – в жесткопластической постановке.

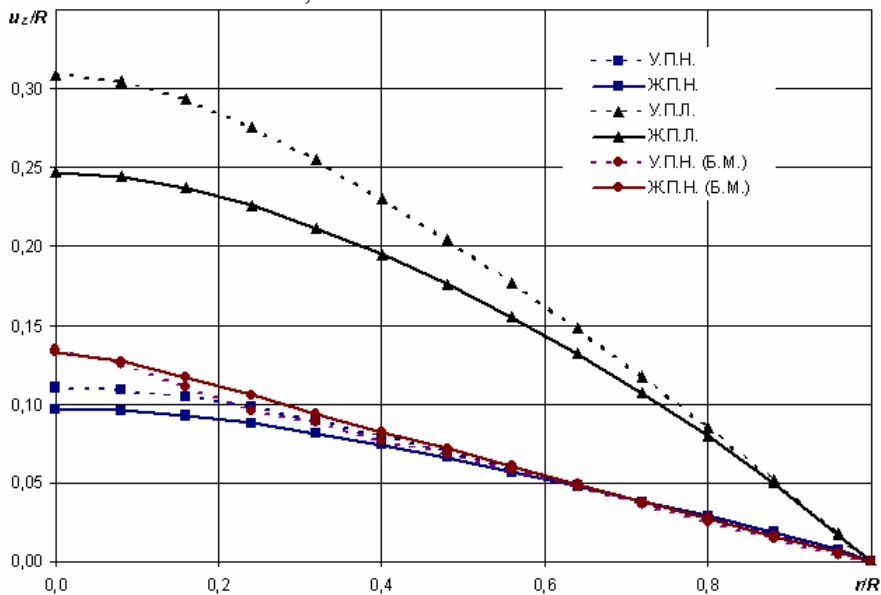


Рис. 3

Из рис. 1, 2 видно, что при малых прогибах жесткопластическое решение существенно отличается от упругопластического из-за неучета упругих свойств материала. В дальнейшем результаты начинают сближаться, но проявляются различия между линейной и нелинейной постановкой. Различия раньше проявляются для тонких пластин и быстро растут при прогибах превышающих  $0.02R$ . Безмоментные решения в

упругопластической и жесткопластической постановках различаются менее чем на 5% при прогибах более  $0.05R$ .

**Заключение.** Из проведенных исследований следует, что жесткоидеальнопластический анализ неприменим для оценки напряженно-деформированного состояния динамически нагруженных пластин при малых прогибах и деформациях. Рамки его применимости расширяются в случае, когда напряженно-деформированное состояние близко к безмоментному, но при этом необходимо решать задачу в геометрически нелинейной постановке. Задачи подобного рода встречаются, например, при моделировании технологических процессов импульсной обработки тонкостенных заготовок, для которых характерны большие формоизменения и немалые деформации.

г. Нижний Новгород

Поступила: 25 декабря 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Баженов, В. Г.* Большие деформации оболочек вращения с учетом моментности напряженного состояния / В. Г. Баженов, В. К. Ломунов // Прикл. проб. проч. и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем: Всесоюз. Межвуз. сб. Горьк. ун-т. – 1983. – С. 55–63.
2. *Баженов, В. Г.* Исследование упругопластического выпучивания оболочек вращения при ударном нагружении / В. Г. Баженов, В. К. Ломунов // Прикл. проб. проч. и пластичности. Всесоюз. Межвуз. сб. Горьк. ун-т. – 1975. – Вып.2. – С. 44–50.
3. *Гопкинс* Динамика пластической круглой пластинки / Гопкинс, Прагер // Механика. – 1955. – Вып.3. – С. 112-122.
4. *Ерхов, М. И.* Теория идеальнопластических сред и конструкций / М. И. Ерахов. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
5. *Комаров, К. Л.* Динамика жесткопластических элементов конструкций / К. Л. Комаров, Ю. В. Немировский. – Новосибирск. : Наука. Сиб. отд-ние, 1984. – 320 с.
6. *Немировский, Ю. В.* Вязкопластическая динамика изотропных пластин переменной толщины при действии нагрузок взрывного типа / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // ПМТФ. – 2007. – т.48. – №2. – С. 123–134.
7. *Садовский, В. М.* Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред / В. М. Садовский. – М. : Наука. Физматлит, 1997. – 208 с.

**ОБ УЧЁТЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ СРЕДЫ ПРИ ЕЁ  
ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ  
КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ**

(Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН)

Прямолинейные движения вязкопластической среды изучались неоднократно [4;5;7;9;10]. Влияние упругих свойств среды на параметры подобных движений оказалось возможным учесть только в рамках теории больших деформаций. Именно на такой основе были получены первые решения некоторых модельных задач [3;6;8] о прямолинейных движениях упруговязкопластических сред с последующей разгрузкой. В настоящей заметке построим точное аналитическое решение краевой задачи теории больших упруговязкопластических деформаций о движении среды в зазоре между коаксиальными цилиндрическими поверхностями, когда внешняя из них неподвижна, а внутренняя движется первоначально ускоренно с последующей равнозамедленной остановкой. Указывается характер движения упругопластических границ и рассчитываются остаточные напряжения в материале.

**1. Основные модельные соотношения.** Для решения поставленной задачи воспользуемся моделью больших упругопластических деформаций, предложенной в [2;9]. В декартовой прямоугольной системе пространственных эйлеровых координат  $x_i$  компоненты обратимой (упругой)  $e_{ij}$  и необратимой (пластической)  $p_{ij}$ , не измеримых в опытах составляющих тензора деформаций Альманси  $d_{ij}$  определяются дифференциальными уравнениями изменения (переноса) в форме

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} \left( (\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik}) e_{kj} + e_{ik} (\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj}) \right), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik} \varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \\ \frac{Dn_{ij}}{Dt} &= \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik} n_{kj} + n_{ik} r_{kj}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j} v_j, \\ z_{ij} &= A^{-1} \{ B^2 (\varepsilon_{ik} e_{kj} - e_{ik} \varepsilon_{kj}) + B (\varepsilon_{ik} e_{ks} e_{sj} - e_{ik} e_{ks} \varepsilon_{sj}) + e_{ik} \varepsilon_{ks} e_{st} e_{ij} - e_{ik} e_{ks} \varepsilon_{st} e_{ij} \}, \quad (1.1) \\ A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3} E_1^3 + \frac{1}{3} E_3, \quad B = 2 - E_1, \\ E_1 &= e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij} e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij} e_{jk} e_{ki}, \quad r_{ij} = w_{ij} + z_{ij}, \quad w_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}). \end{aligned}$$

В соотношениях (1.1)  $u_i, v_i$  – компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды, символом  $\frac{D}{Dt}$  обозначена объективная производная тензоров по времени, источник  $\varepsilon_{ij}^p$  в уравнении изменения тензора  $p_{ij}$  следует, как и в классической теории, называть компонентами тензора скоростей пластических деформаций,  $r_{ij}$  – тензор вращений, компоненты которого в своей нелинейной части  $z_{ij}$  зависят от обратимых деформаций и скоростей деформирования. Согласно уравнениям (1.1) в условиях разгрузки ( $\varepsilon_{ij}^p = 0$ ) компоненты тензора необратимых деформаций  $p_{ij}$  изменяются как при жестком перемещении тела. Компоненты тензора полных деформаций Альманси  $d_{ij}$  через его составляющие  $e_{ij}$  и  $p_{ij}$  представляются в виде

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}. \quad (1.2)$$

Напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями и, следуя законам термодинамики, для несжимаемой среды связаны с ними зависимостями

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj})$$

при  $p_{ij} \equiv 0$ ,

$$\sigma_{ij} = -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - 2e_{kj}) \quad (1.3)$$

при  $p_{ij} \neq 0$ .

В данных зависимостях  $p$  и  $p_1$  – добавочные гидростатические давления. Считая среду изотропной, упругий потенциал  $W$  примем в виде

$$W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 + \dots, \quad (1.4)$$

$$J_k = \begin{cases} L_k & \text{при } p_{ij} = 0 \\ I_k & \text{при } p_{ij} \neq 0 \end{cases}, \quad L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki},$$

$$I_1 = e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \quad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns}.$$

Здесь  $\mu, b, \chi$  – упругие модули среды, а выбор инвариантов  $I_1, I_2$  тензора обратимых деформаций в виде (1.4) обеспечивает предельный переход от второй зависимости (1.3) к первой при стремлении необратимых деформаций к нулю.

Считаем, что необратимые деформации в материале накапливаются при достижении напряженным состоянием поверхности нагружения, которая в условиях принимаемого принципа максимума Мизеса является пластическим потенциалом. В качестве такой поверхности будем использовать условие пластичности Треска, обобщенное на случай учета вязких свойств материалов [11], в форме

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta|\varepsilon_k^p|, \quad (1.5)$$

где  $k$  – предел текучести,  $\eta$  – коэффициент вязкости,  $\sigma_i$  – компоненты главных напряжений,  $\varepsilon_k^p$  – компоненты главных скоростей пластических деформаций.

Связь скоростей необратимых деформаций с напряжениями устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0. \quad (1.6)$$

**2. Начальное упругое равновесие.** Пусть несжимаемый упруговязкопластический материал, деформационные свойства которого описаны выше, находится между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями: неподвижной внешней поверхностью, радиус которой равен  $R$ , и внутренней, радиусом  $r = r_0$ , которая движется вдоль оси  $z$ . Таким образом, решение данной краевой задачи ищется в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$ . Искать его будем в классе функций  $u = u_z(r, t), v = v_z(r, t), p = p(r, z, t)$ . Граничными условиями задачи являются

$$\begin{aligned} u(R, t) = v(R, t) &= 0, \\ v(r_0, t) &= \alpha t. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Полагаем, что до момента времени  $t_0 = 0$  материал деформировался упруго, а с этого момента времени в окрестности внутренней (подвижной) жесткой стенки начинается пластическое течение. Вычислим параметры данного упругого равновесного состояния, которое является начальным условием для последующего процесса необратимого деформирования.

Для отличных от нуля компонент тензора деформаций в рассматриваемом случае имеем

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}u'^2, \quad d_{rz} = \frac{1}{2}u', \quad u' = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (2.2)$$

Из (1.3), (1.4) и (2.2) для компонент напряжений с точностью до слагаемых второго порядка малости по компонентам градиента перемещений получим зависимости

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} &= -(p + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)u'^2 = -s, \\ \sigma_{zz} &= -(p + 2\mu) - \frac{1}{2}(b - \mu)u'^2 = -s + \mu u'^2, \\ \sigma_{rz} &= \mu u'. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Согласно условиям равновесия

$$\sigma_{rz,r} + \sigma_{zz,z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0, \quad \sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \quad (2.4)$$

$s$  является функцией только  $z$ , так что  $s = az + a_0$ . Для того, чтобы напряжения  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$  и  $\sigma_{zz}$  были конечными при  $z \rightarrow \infty$ , необходимо положить  $a = 0$ . Тогда решение упругой задачи получаем в виде

$$\sigma_{rz} = \frac{c}{r}, \quad u = \frac{c}{\mu} \ln \frac{r}{R},$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -a_0, \quad \sigma_{zz} = -a_0 + \frac{c^2}{\mu r^2}. \quad (2.5)$$

Для нахождения компоненты перемещения и использовалось первое граничное условие (2.1). Для определения постоянной  $c$  воспользуемся условием пластичности (1.5), которое в нашем случае принимает форму

$$\sigma_{rz} \Big|_{r=r_0} = -k. \quad (2.6)$$

Постоянная  $a_0$  влияет только на распределение компонент нормальных напряжений. Поэтому её можно считать заданной величиной, как остающейся постоянной во время пластического течения, так и изменяющейся со временем. Величина  $u_0$ , на которую, таким образом, необходимо сдвинуть внутреннюю поверхность для начала на ней пластического течения, равна

$$u_0 = \frac{k}{\mu} r_0 \ln \frac{R}{r_0}. \quad (2.7)$$

Компоненты обратимых деформаций по найденному полю перемещений согласно (1.2) определяются зависимостями

$$\begin{aligned} e_{rz} &= \frac{1}{2} u' = -\frac{1}{2} \frac{k}{\mu} \frac{r_0}{r}, \\ e_{rr} &= -\frac{3}{2} e_{rz}^2, \quad e_{zz} = \frac{1}{2} e_{rz}^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

**3. Вязкопластическое течение.** Положим далее, что, начиная с момента времени  $t_0 = 0$ , внутренняя поверхность движется со скоростью  $v = \alpha t$ ,  $\alpha = const$ . При этом развивающаяся область необратимого деформирования будет ограничена поверхностями  $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ . В области  $r_1(t) \leq r \leq R$  материал остается в упругом состоянии. Рассчитаем параметры напряженно-деформированного состояния, соответствующего скорости  $v^* = \alpha t_1 (t \geq t_0)$  при  $r = r_0$ .

В области обратимого деформирования  $r_1 \leq r \leq R$ , интегрируя уравнение равновесия (квазистатическое приближение), как и ранее, найдем

$$\sigma_{rz} = \frac{c(t_1)}{r}, \quad u = \frac{c(t_1)}{\mu} \ln \frac{r}{R}, \quad v = 0. \quad (3.1)$$

Согласно формуле Мурнагана (1.3) при  $p_{ij} \neq 0$  с учётом кинематических зависимостей (2.8) для компонент напряжений в области пластического течения получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} &= -(p_1 + 2\mu) - 2(b + \mu)e_{rz}^2 = -s_1, \\ \sigma_{zz} &= -(p_1 + 2\mu) - 2(b - \mu)e_{rz}^2 = -s_1 + 4\mu e_{rz}^2, \\ \sigma_{rz} &= 2\mu e_{rz}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

С другой стороны, интегрируя уравнения равновесия в области пластического течения  $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ , можно получить



$$s_1 = a_1, \quad \sigma_{rz} = \frac{c_1(t_1)}{r}, \quad e_{rz} = \frac{c_1(t_1)}{2\mu r}. \quad (3.3)$$

Из условий непрерывности компонент напряжений на упругопластической границе  $r = r_1(t)$  следует, что

$$a_1 = a_0, \quad c_1(t_1) = c(t_1).$$

Пластический потенциал (1.5) в нашем случае запишется в форме

$$f(\sigma_{rz}, \varepsilon_{rz}^p) = \sigma_{rz}^2 - (k - \eta \varepsilon_{rz}^p)^2 = 0. \quad (3.4)$$

Следуя ассоциированному закону пластического течения (1.6), из (3.4) найдем

$$\sigma_{rz} = -k + \eta \varepsilon_{rz}^p, \quad \lambda = \frac{\varepsilon_{rz}^p}{\eta \varepsilon_{rz}^p - k}. \quad (3.5)$$

Сравнение (3.3) и (3.5) позволяет найти скорость пластической деформации

$$\varepsilon_{rz}^p = \frac{1}{\eta} \left( \frac{c(t_1)}{r} + k \right). \quad (3.6)$$

Учитывая, что на упругопластической границе  $r = r_1(t)$ ,  $\varepsilon_{rz}^p = 0$ , получим

$$r_1 = -\frac{c}{k}. \quad (3.7)$$

Кинематические зависимости

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} v_{z,r} = \varepsilon_{rz}^e + \varepsilon_{rz}^p, \\ d_{rz} &= e_{rz} + p_{rz}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

имеющие место в рассматриваемом случае, позволяют найти скорости точек в области пластического течения

$$v = \frac{2}{\eta} \left( c \ln \frac{r}{r_0} + k(r - r_0) \right) + v^*. \quad (3.9)$$

Из условия равенства скоростей (3.1) и (3.9) на упругопластической границе  $r = r_1$ , учитывая (3.7), получаем уравнение для определения значения  $r_1$ , соответствующего значению скорости  $v^* = \alpha t_1$  на поверхности  $r = r_0$

$$k \left[ r_1 \left( \ln \frac{r_1}{r_0} - 1 \right) + r_0 \right] = \frac{\eta \alpha t_1}{2}. \quad (3.10)$$

Перемещение в области необратимого деформирования находится интегрированием (3.9) с точностью до произвольной функции  $f(r)$

$$u = \frac{2t}{\eta} \left( c \ln \frac{r}{r_0} + k(r - r_0) \right) + v^* t + f(r). \quad (3.11)$$

Функция  $f(r)$  должна быть такой, чтобы перемещения (3.1) и (3.11) и их производные  $u'$  были непрерывны при  $r = r_1$ , а также, чтобы перемещения (2.7) и (3.11) совпадали при  $t = t_0 = 0$ . Таким образом, получим

$$f(r) = \frac{c}{\mu} \ln \frac{r}{R}. \quad (3.12)$$

Окончательное решение задачи о вязкопластическом течении представляется зависимостями:

в упругой области

$$\sigma_{rz} = -k \frac{r_1}{r}, \quad u = \frac{k}{\mu} r_1 \ln \frac{R}{r}, \quad v = 0, \quad e_{rz} = -\frac{k}{2\mu} \frac{r_1}{r};$$

в области вязкопластического течения

$$u = \frac{2kt}{\eta} \left( r_1 \ln \frac{r_0}{r} + r - r_0 \right) + v^* t + \frac{k}{\mu} r_1 \ln \frac{R}{r},$$

$$v = \dot{u},$$

$$\varepsilon_{rz}^p = \frac{k}{\eta} \left( 1 - \frac{r_1}{r} \right).$$

Обратимые деформации, а, следовательно, и напряжения в области вязкопластического течения вычисляются по тем же зависимостям, что и в упругой области. Необратимые деформации согласно (1.2) находятся соотношениями

$$p_{rz} = \frac{kt}{\eta} \left( 1 - \frac{r_1}{r} \right), \quad p_{zz} = 2e_{rz} p_{rz},$$

$$p_{rr} = 2e_{rz} (e_{rz} + p_{rz}) - \frac{1}{2} u'^2. \quad (3.13)$$

Развитие границы области вязкопластического течения  $r_1 \rightarrow \frac{r_1}{R}$  от времени

$\tau = \frac{\alpha t^2}{r_0}$  при значениях постоянных

$$\frac{r_0}{R} = 0.2; \quad \frac{k}{\mu} = 0.00621, \quad b = \frac{\mu}{\eta} \sqrt{\frac{r_0}{\alpha}} = 400 \quad (3.14)$$

приведено на рис. 1, распределение перемещений  $u \rightarrow \frac{u}{R}$  при  $\frac{r_1}{R} = 0.8$  – на рис. 2

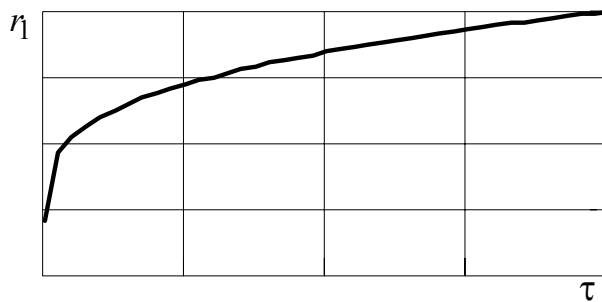


Рис. 1. Изменение границы области вязкопластического течения

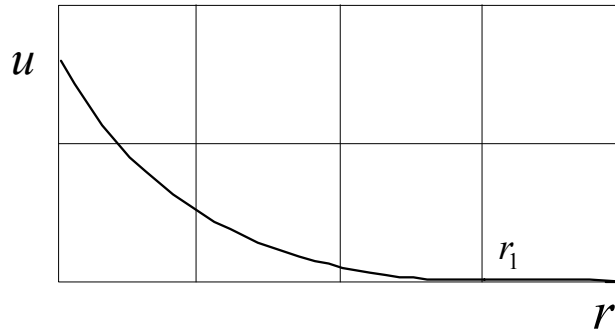


Рис. 2. Распределение перемещений в текущий момент времени

**4. Разгрузка.** Пусть, начиная с некоторого момента времени  $t = t_1$ , скорость поверхности  $r = r_0$  уменьшается, например, по закону

$$v = \alpha t_1 - \beta(t - t_1) \quad (4.1)$$

до нуля, то есть конечным моментом разгрузки является  $t_k = \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)t_1$ . Рассмотрим изменение параметров напряженно-деформированного состояния в каждый момент времени  $t_1 \leq t^* \leq t_k$  процесса разгрузки.

Начиная с момента времени  $t = t_1$ , в материале присутствует 3 области: область обратимого деформирования  $R \leq r \leq r_1$ , область с не изменяющимися накопленными необратимыми деформациями  $r_1 \leq r \leq r_2(t)$  и область  $r_2(t) \leq r \leq r_0$ , в которой продолжается пластическое течение.

Интегрируя уравнение равновесия в упругой области, также как и ранее, найдем

$$\sigma_{rz} = \frac{c(t^*)}{r}, \quad u = \frac{c(t^*)}{\mu} \ln \frac{r}{R}, \quad v = 0. \quad (4.2)$$

В области  $r_1 \leq r \leq r_2(t)$  согласно уравнениям переноса изменяются компоненты  $p_{rr}$ ,  $p_{zz}$  пластических деформаций и  $\varepsilon_{rr}^D$ ,  $\varepsilon_{zz}^D$  скоростей необратимых деформаций за счет изменения упругих деформаций. Неизменной остается компонента деформаций  $p_{rz}$  ( $\varepsilon_{rz}^D = 0$ )

$$p_{rz} = \frac{kt_1}{\eta} \left(1 - \frac{r_1}{r}\right). \quad (4.3)$$

Перемещение в этой области найдем из условия  $\frac{1}{2}u' = e_{rz} + p_{rz}$ , постоянную интегрирования определяя из условия равенства перемещений при  $r = r_1$

$$u = \frac{2kt_1}{\eta} \left(r - r_1 + r_1 \ln \frac{r_1}{r}\right) + \frac{c(t^*)}{\mu} \ln \frac{r}{R}, \quad (4.4)$$

тогда скорость  $v = \dot{u} = 0$ .

В области продолжающегося пластического течения  $r_2(t) \leq r \leq r_0$ , также как были получены зависимости (3.6), (3.7), (3.9) и (3.11), найдем

$$\varepsilon_{rz}^p = \frac{1}{\eta} \left( \frac{c(t^*)}{r} + k \right), \quad r_2 = -\frac{c(t^*)}{k},$$

$$v = \frac{2}{\eta} \left( c(t^*) \ln \frac{r}{r_0} + k(r - r_0) \right) + v^* - \beta(t^* - t_1), \quad (4.5)$$

$$u = \frac{2t}{\eta} \left( c(t^*) \ln \frac{r}{r_0} + k(r - r_0) \right) + v^* t - \beta(t^* - t_1)t + g(r).$$

Из условий непрерывности перемещения и его производных при  $r = r_2$  определим  $g(r)$  и получим уравнение для определения значения  $r_2$ , соответствующего значению  $v^* - \beta(t^* - t_1)$  скорости поверхности  $r = r_0$

$$g(r) = \frac{2kt_1}{\eta} \left( r - r_1 + r_1 \ln \frac{r_1}{r} \right) + \frac{c(t^*)}{\mu} \ln \frac{r}{R},$$

$$\frac{2k}{\eta} \left( r_2 \left( \ln \frac{r_2}{r_0} - 1 \right) + r_0 \right) = v^* - \beta(t^* - t_1). \quad (4.6)$$

Изменение поверхности  $r_2 \rightarrow \frac{r_2}{R}$  показано на рис. 3.

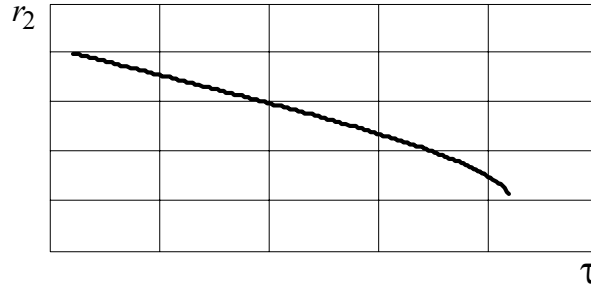


Рис. 3. Изменение границы области вязкопластического течения при разгрузке

Как видно, в конечный момент разгрузки  $t = t_k$   $r_2$  совпадает с поверхностью  $r = r_0$ , и компонента  $p_{rz}$  деформаций будет постоянной в области  $r_1 \leq r \leq r_0$ .

В любой текущий момент процесса разгрузки  $t^*$  решение задачи определяется зависимостями:

в упругой области

$$\sigma_{rz} = -k \frac{r_2}{r}, \quad u = \frac{k}{\mu} r_2 \ln \frac{R}{r}, \quad v = 0, \quad e_{rz} = -\frac{k}{2\mu} \frac{r_2}{r};$$

в области  $r_1 \leq r \leq r_2(t)$

$$u = \frac{2kt_1}{\eta} \left( r - r_1 + r_1 \ln \frac{r_1}{r} \right) - \frac{k}{\mu} r_2 \ln \frac{r}{R}, \quad v = 0;$$

$$p_{rz} = \frac{kt_1}{\eta} \left( 1 - \frac{r_1}{r} \right);$$

в области вязкопластического течения  $r_2(t) \leq r \leq r_0$

$$u = \frac{2kt}{\eta} \left( r - r_0 - r_2 \ln \frac{r}{r_0} \right) + \frac{2kt_1}{\eta} \left( r - r_1 + r_1 \ln \frac{r_1}{r} \right) - \frac{k}{\mu} r_2 \ln \frac{r}{R} + v^* t - \beta(t^* - t_1)t,$$

$$v = \dot{u}, \quad p_{rz} = \frac{kt}{\eta} \left( 1 - \frac{r_2}{r} \right) + \frac{kt_1}{\eta} \left( 1 - \frac{r_1}{r} \right).$$

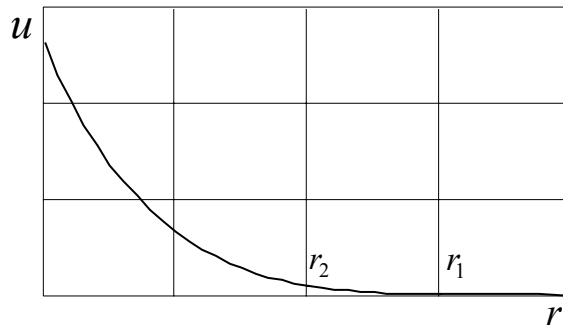


Рис. 4. Распределение перемещений в текущий момент разгрузки

В конечный момент разгрузки  $t = t_k$  компонента остаточных напряжений  $\sigma_{rz} = -\frac{kr_0}{r}$ , то есть она равно тому же самому значению, что и в момент начала пластического течения.

Распределение перемещений в текущий момент разгрузки показано на рис. 4.

г. Владивосток

Поступила: 30 ноября 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Докл. АН СССР. – 1996. Т.347. – №2. – С. 199–201.
2. Буренин, А. А. Продавливание упруговязкопластического материала между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. Л. Мазелис // Прикладная математика и механика. – 2006. Т. 70. Вып. 3. – С. 481–489.
3. Быковцев, Г. И. О вязкопластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления / Г. И. Быковцев, А. Д. Чернышов // ПМТФ. – 1964. – №4. – С. 94–96.
4. Знаменский, В. А. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах / В. А. Знаменский, Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 114–118.

5. *Ковтанюк, Л. В.* Вязкопластическое течение и остаточные напряжения в тяжелом слое несжимаемого материала, находящегося на наклонной плоскости. / Л. В. Ковтанюк // Математические модели и методы механики сплошных сред. Сборник научных трудов к 60-летию А. А. Буренина. Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, – 2007. – С. 120–128.
6. *Ковтанюк, Л. В.* О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу / Л. В. Ковтанюк // ДАН. – 2005. Т. 400. – №6. – С. 764–767.
7. *Ковтанюк, Л. В.* О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов / Л. В. Ковтанюк, А. В. Шитиков // Вестник ДВО РАН. – 2006. – №4. – С. 87–93.
8. *Мосолов, П. П.* Механика жесткопластических сред. / П. П. Мосолов, В. П. Мясников. – М. : Наука, 1981. – 208 с.
9. *Мясников, В. П.* Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязкопластической среды / В. П. Мясников // ПМТФ. – 1961. – № 2. – С. 79–86.
10. *Огибалов, П. М.* Нестационарные движения вязкопластических сред / П. М. Огибалов, А. Х. Мирзаджанзаде. – М. : Изд-во Московского университета, 1970. – 415 с.
11. *Резунов, А. В.* Задача о чистом сдвиге вязко-пластического материала между двумя цилиндрическими поверхностями / А. В. Резунов, А. Д. Чернышов // Механика деформируемого твердого тела. Межвузовский сборник. – Куйбышев : Изд-во Волжская коммуна. 1975. – С. 32–36.

## О НАГРУЖЕНИИ ОКРЕСТНОСТИ ВЫРЕЗА В ЛИНЕЙНО УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ ПАРОЙ СИЛ

(Тульский государственный университет)

Рассматривается постановка задачи о нагружении выреза в линейно упругой плоскости парой сил. На основании полученной системы граничных интегральных уравнений предложен метод дискретного решения, приведены полученные результаты.

Механика квазихрупкого разрушения, базирующаяся на представлениях линейно упругого тела, рассматривает асимптотическое распределение напряженно-деформированного состояния вблизи свободного от нагрузки края трещины. Трещина в данном случае моделируется математическим разрезом и общее решение зависит от трех действительных параметров, которые присутствуют в качестве множителей при членах асимптотики. Другим модельным представлением трещиноподобного дефекта является разрез физический. Масштабный уровень данного разреза определяет подход к описанию процесса разрушения. Если это уровень кристаллической решетки [5;6], то процесс в данном случае описывается потенциалами межатомного взаимодействия. Альтернативным подходом является выбор масштабного уровня, где остаются справедливыми гипотезы механики сплошной среды [7]. Оценка данного уровня дана в работах [1;2]. К настоящему времени наиболее изученным и экспериментально обоснованным является предельное состояние трещины типа нормального отрыва. В этом случае задача разрушения может быть рассмотрена как посредством приложения сосредоточенных сил к берегам математического разреза, так и физического. Однако поворот соответствующих сил на девяносто градусов в одном направлении для физического разреза приведет к появлению пары сил. Рассмотрению соответствующего воздействия для линейно упругой среды и посвящена данная работа.

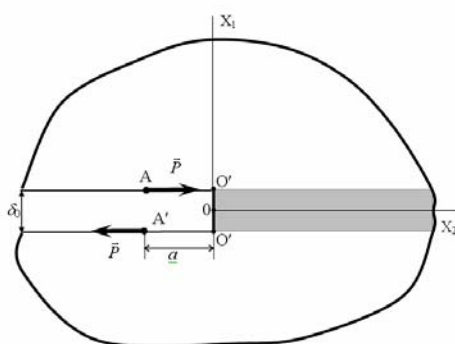


Рис.1

**Постановка задачи.** Рассмотрим нагружение окрестности выреза равным по толщине слою взаимодействия [1;2] в линейно упругой плоскости согласно схеме, показанной на рис. 1, соответствующей разрушению типа плоского сдвига.

Полагаем, что связь между напряжениями и деформациями описывается соотношениями линейной теории упругости для случая плоского деформирования. В силу антисимметрии внешней нагрузки относительно плоскости  $x_1 = 0$  рассмотрим верхнюю полуплоскость ( $x_1 \geq \delta_0/2$ ) (рис. 2), а действие слоя заменим нагрузкой на полуплоскость

$$\hat{q}(x) = -\left(\hat{\sigma}_{11}\bar{e}_1 + \hat{\sigma}_{21}\bar{e}_2\right) \quad (\text{здесь и далее } x \equiv x_2/\delta_0 - \text{ безразмерная координата;}$$

$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}\beta$   $i, j = 1, 2$  – безразмерные напряжения;  $\beta = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$  – параметр материала;  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона).

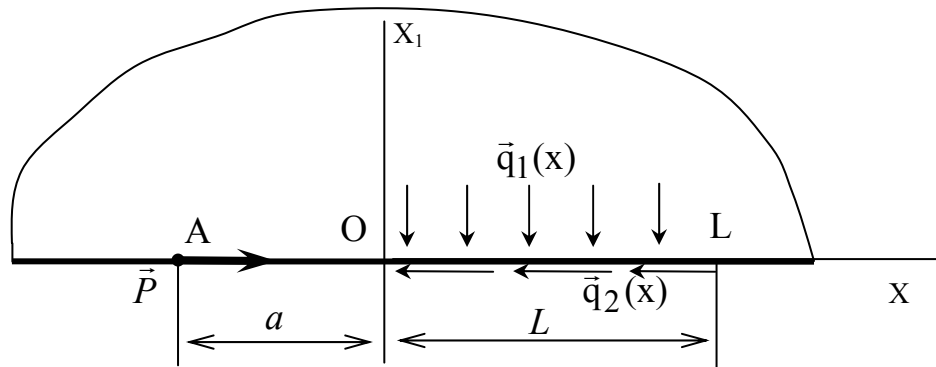


Рис. 2

Соотношения Фламана [4] связывают внешнюю нагрузку  $\hat{q}(x)$  с перемещениями границы безразмерным выражением

$$\hat{u}_2(x) = -\hat{P} \ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) + \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \ln\left|\frac{x-\xi}{L-\xi}\right| d\xi, \quad (1)$$

$$\hat{u}_1(x) = \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln\left|\frac{x-\xi}{L-\xi}\right| d\xi, \quad (2)$$

здесь  $\hat{u}_i(x) = \hat{u}_i(x_1, x) \Big|_{x_1=\delta_0/2} = u_i(x)/\delta_0$ ,  $i = 1, 2$  – безразмерные перемещения границы верх-

ней полуплоскости;  $\hat{P} = P\beta/\delta_0$  – безразмерная сила на единицу толщины;  $L$  – удаленная точка с нулевым перемещением;  $L$  – расстояние от начала координат до  $L$ .

Напряжения связаны с деформацией законом Гука в состоянии плоской деформации

$$\varepsilon_{11} = \hat{A}\hat{\sigma}_{11} - \hat{B}\hat{\sigma}_{22}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{21} = \hat{C}\hat{\sigma}_{21}, \quad (4)$$



где  $\hat{A} = \frac{(1-\nu^2)}{E\beta} = \frac{\pi}{2}$ ;  $\hat{B} = \frac{\nu(1+\nu)/E}{\beta} = \frac{\nu\pi}{2(1-\nu)}$ ;  $\hat{C} = \frac{2(1+\nu)}{E\beta} = \frac{\pi}{(1-\nu)}$  – безразмерные постоянные.

При дальнейшем изложении будем считать, что перемещение  $\hat{u}_2(x_1, x)$  в слое взаимодействия определяется следующим выражением

$$\hat{u}_2(x_1, x) = \left. \frac{\partial \hat{u}_2(x_1, x)}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} x_1. \quad (5)$$

Рассмотрим деформацию материала слоя взаимодействия

$$\varepsilon_{21} = 0.5 \left( \frac{\partial \hat{u}_1(x_1, x)}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_2(x_1, x)}{\partial x_1} \right).$$

Из равенства (5) следует, что

$$\left. \frac{\partial \hat{u}_2(x_1, x)}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = 2\hat{u}_2(x_1, x) \Big|_{x_1=\delta_0/2} = 2\hat{u}_2(x). \quad (6)$$

Из (4), (6) получим

$$\hat{u}_2 = \hat{C} \hat{\sigma}_{21} - 0.5 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x}. \quad (7)$$

Преобразуем (1) при помощи (7)

$$\hat{C} \hat{\sigma}_{21}(x) - 0.5 \frac{\partial \hat{u}_1(x)}{\partial x} = -\hat{P} \ln \left( \frac{x+a}{L+a} \right) + \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi. \quad (8)$$

Продифференцируем по  $x$  левую и правую части равенства (2)

$$\frac{d\hat{u}_1}{dx} = \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi. \quad (9)$$

Предполагаем, что в процессе приложения внешней нагрузки, согласно схеме рис. 1, выполняется условие антисимметрии по компоненте тензора напряжения  $\sigma_{11}$ . Следовательно, на срединной плоскости слоя взаимодействия  $x_1 = 0$  имеем

$$\sigma_{11}(x_1, x) \Big|_{x_1=0} = 0. \quad (10)$$

Из условий равновесия слоя  $\frac{\partial \hat{\sigma}_{11}}{\partial x_1} = -\frac{\partial \hat{\sigma}_{21}}{\partial x}$ , полагая закон изменения  $\sigma_{11}$  по координате  $x_1$  линейным, получим

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{11}(x_1, x)}{\partial x_1} = 2 \left( \hat{\sigma}_{11}(\delta_0/2, x) - \hat{\sigma}_{11}(0, x) \right) = 2 \hat{\sigma}_{11}(\delta_0/2, x).$$

С учетом условия (10) связь компонент тензора напряжений границе слоя принимает вид

$$\hat{\sigma}_{11} \Big|_{x_1=\delta_0/2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\sigma}_{21}}{\partial x} \Big|_{x_1=\delta_0/2}. \quad (11)$$

Уравнение равновесия слоя вида  $\frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -\frac{\partial \hat{\sigma}_{21}}{\partial x_1}$  со связью (4) примет форму

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -\frac{1}{\hat{C}} \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x_1} = -0.5 \frac{1}{\hat{C}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \hat{u}_1(x_1, x)}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_2(x_1, x)}{\partial x_1} \right). \quad (12)$$

Из выражений (6) и (12) следует

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -\frac{1}{2\hat{C}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \hat{u}_1(x_1, x)}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2\hat{C}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \hat{u}_1(x_1, x)}{\partial x_1} \right) = -\frac{1}{2\hat{C}} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x}. \quad (13)$$

С учетом затухания поля перемещений на бесконечности и закона (3) выражение (13) дает следующую связь между диагональными компонентами тензора напряжений

$$\hat{\sigma}_{22} = -\frac{1}{2\hat{C}} \left( \hat{A} \hat{\sigma}_{11} - \hat{B} \hat{\sigma}_{22} \right)$$

или

$$\hat{\sigma}_{22} = -\frac{(1-\nu) \hat{\sigma}_{11}}{4(1-0.25\nu)}. \quad (14)$$

Таким образом, имеем систему интегральных уравнений (8), (9), дополняемую связями (11) и (14). Перепишем полученную систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\hat{C} \hat{\sigma}_{21}(x) - 0.5 \frac{\partial \hat{u}_1(x)}{\partial x} = -\hat{P} \ln \left( \frac{x+a}{L+a} \right) + \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \quad (15)$$

$$\frac{d\hat{u}_1}{dx} = \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi, \quad (16)$$

$$\hat{\sigma}_{11} \Big|_{x_1=\delta_0/2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\sigma}_{21}}{\partial x} \Big|_{x_1=\delta_0/2}, \quad (17)$$

$$\hat{\sigma}_{22} = -\frac{(1-\nu) \hat{\sigma}_{11}}{4(1-0.25\nu)}. \quad (18)$$

Подставив (16) в (15) система (15) – (18) преобразуется к виду

$$\hat{C} \hat{\sigma}_{21}(x) - 0.5 \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi = -\hat{P} \ln \left( \frac{x+a}{L+a} \right) + \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \quad (19)$$

$$\hat{\sigma}_{11} \Big|_{x_1=\delta_0/2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\sigma}_{21}}{\partial x} \Big|_{x_1=\delta_0/2}, \quad (20)$$

$$\hat{\sigma}_{22} = -\frac{(1-\nu)\hat{\sigma}_{11}}{4(1-0.25\nu)} \quad (21)$$

с граничным условием  $\sigma_{21}|_{x=0} = 0$ . Здесь основными неизвестными являются граничные напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{21}$ .

**Дискретное представление решения.** Разобьем часть границы полуплоскости ( $x>0$ ) на  $n$  единичных элементов. Предполагаем постоянство напряжений в пределах длины каждого  $\delta_0$ -элемента. В этом случае обобщенные напряжения в  $i$ -ом элементе на отрезке  $i-1 \leq x \leq i$  определяются выражениями

$$\sigma_{11}^{(i)} = \int_{i-1}^i \hat{\sigma}_{11}(x) dx; \quad \sigma_{21}^{(i)} = \int_{i-1}^i \hat{\sigma}_{21}(x) dx.$$

Построим дискретные выражения интегральных операторов в уравнениях (19), (20). Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\zeta) \ln \frac{|x-\zeta|}{L-\zeta} d\zeta = \int_0^n \hat{\sigma}_{21} \ln \frac{|x-\zeta|}{L-\zeta} d\zeta = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{i-1}^i \hat{\sigma}_{21} \ln \frac{|x-\zeta|}{L-\zeta} d\zeta = \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{21}^{(i)} \left[ \int_{i-1}^i \ln |x-\zeta| d\zeta - \int_{i-1}^i \ln(L-\zeta) d\zeta \right] = \sum_{i=1}^{i=n} \psi^{(i)}(x) \sigma_{21}^{(i)} - \sum_{i=1}^{i=n} C^{(i)} \sigma_{21}^{(i)}, \end{aligned}$$

$$\text{где } \psi^{(i)}(x) = \int_{i-1}^i \ln |x-\zeta| d\zeta, \quad C^{(i)} = \int_{i-1}^i \ln |L-\zeta| d\zeta,$$

$$A_2 = \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\zeta) \frac{1}{x-\zeta} d\zeta = \int_0^n \hat{\sigma}_{11} \frac{1}{x-\zeta} d\zeta = \sum_{i=1}^{i=n} \psi_1^{(i)}(x) \sigma_{11}^{(i)},$$

$$\text{где } \psi_1^{(i)}(x) = \int_{i-1}^i \frac{1}{x-\zeta} d\zeta.$$

После перехода к дискретным операторам проинтегрируем левую и правую части рассматриваемой системы по  $j$  отрезку, где  $j-1 \leq x \leq j$ .

В результате оператор  $A_1$  принимает вид

$$A_1^j [\sigma_{21}^{(i)}] = \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{21}^{(i)} \int_{j-1}^j \int_{i-1}^i \ln |x-\zeta| d\zeta dx - \sigma_{21}^{(i)} \int_{j-1}^j \int_{i-1}^i \ln |L-\zeta| d\zeta dx,$$

а оператор  $A_2$  соответственно

$$A_2^j [\sigma_{11}^{(i)}] = \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{11}^{(i)} \int_{j-1}^j \int_{i-1}^i \frac{1}{x-\zeta} d\zeta dx.$$

Введем обозначения

$$\varphi^{(ji)} = \int_{j-1}^j \int_{i-1}^i \ln|x-\zeta| d\zeta dx, \quad \psi_1^{(ji)} = \int_{j-1}^j \int_{i-1}^i \frac{1}{(x-\zeta)} d\zeta dx; \quad C^{(ij)} = \int_{j-1}^j \int_{i-1}^i \ln(L-\zeta) d\zeta dx,$$

и приведем для них окончательные выражения.

В случае  $j > i$

$$\begin{aligned} \varphi_{(+)}^{(ji)} &= -(j-i)^2 \ln(j-i) + \frac{1}{2}(j-i-1)^2 \ln(j-i-1) + \frac{1}{2}(j-i+1) \ln(j-i+1) - \frac{3}{2}, \\ \psi_{(+)}^{(ji)} &= -2(j-i) \ln(j-i) + (j-i-1) \ln(j-i-1) + (j-i+1) \ln(j-i+1). \end{aligned}$$

При  $j = i$  для вычисления интеграла  $\int_{j-1}^j \int_{j-1}^j \ln|x-\zeta| d\zeta dx \quad x \in [j-1; j]$

представим его в следующем виде

$$\int_{j-1}^j \left[ \int_{j-1}^x \ln(x-\zeta) d\zeta + \int_x^j \ln(\zeta-x) d\zeta \right] dx.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$\varphi_{(0)}^{(ji)} = -\frac{3}{2}.$$

Для  $\psi_1^{(ji)}$  в случае  $j = i$  имеем:  $\psi_1^{(ji)} = 0$ .

Случай  $j < i$

$$\begin{aligned} \varphi_{(-)}^{(ji)} &= (i-j)^2 \ln(i-j) - \frac{1}{2}(i-j+1)^2 \ln(i-j+1) - \frac{1}{2}(i-j-1)^2 \ln(i-j-1) - \frac{1}{2}, \\ \psi_{(-)}^{(ji)} &= 2(i-j) \ln(i-j) - (i-j-1) \ln(i-j-1) - (i-j+1) \ln(i-j+1). \end{aligned}$$

При  $\forall i, j$

$$\begin{aligned} C^{(ji)} &= -(n-i) \ln(n-i) + (n-i+1) \ln(n-i+1) - 1, \\ D^{(j)} &= \int_{j-1}^j \ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) dx = (j+a) \ln \frac{j+a}{n+a} - (j+a-1) \ln\left(\frac{j+a-1}{n+a}\right) - 1. \end{aligned}$$

С учетом постоянства напряжений на отрезке  $[j-1, j]$  из (20) получим

$$\sigma_{21}^{(j)} - \sigma_{21}^{(j-1)} = -2\sigma_{11}^{(j)}.$$

В результате полная дискретная модель в силу введенных обозначений примет вид:

$$\hat{C} \hat{\sigma}_{21}^{(j)} - 0.5 A_2^j [\hat{\sigma}_{11}^{(i)}] = -\hat{P} D^{(j)} + A_1^j [\hat{\sigma}_{21}^{(i)}], \quad (22)$$

$$\hat{\sigma}_{12}^{(j)} - \hat{\sigma}_{12}^{(j-1)} = -2\hat{\sigma}_{11}^{(j)}, \quad (23)$$

$$\hat{\sigma}_{22}^{(j)} = -\frac{(1-\nu) \hat{\sigma}_{11}^{(j)}}{4(1-0.25\nu)}. \quad (24)$$

Предложенная дискретизация системы интегро-дифференциальных уравнений (19) – (21) близка по идеологии к методу граничного элемента [3] с постоянной аппроксимацией поля напряжений на элементе. Однако, в данном случае напряжения постоянны на каждом элементе (на протяжении всей его длины), а не рассчитываются в конкретной

(серединной) точке элемента с последующим постоянным распространением на весь элемент.

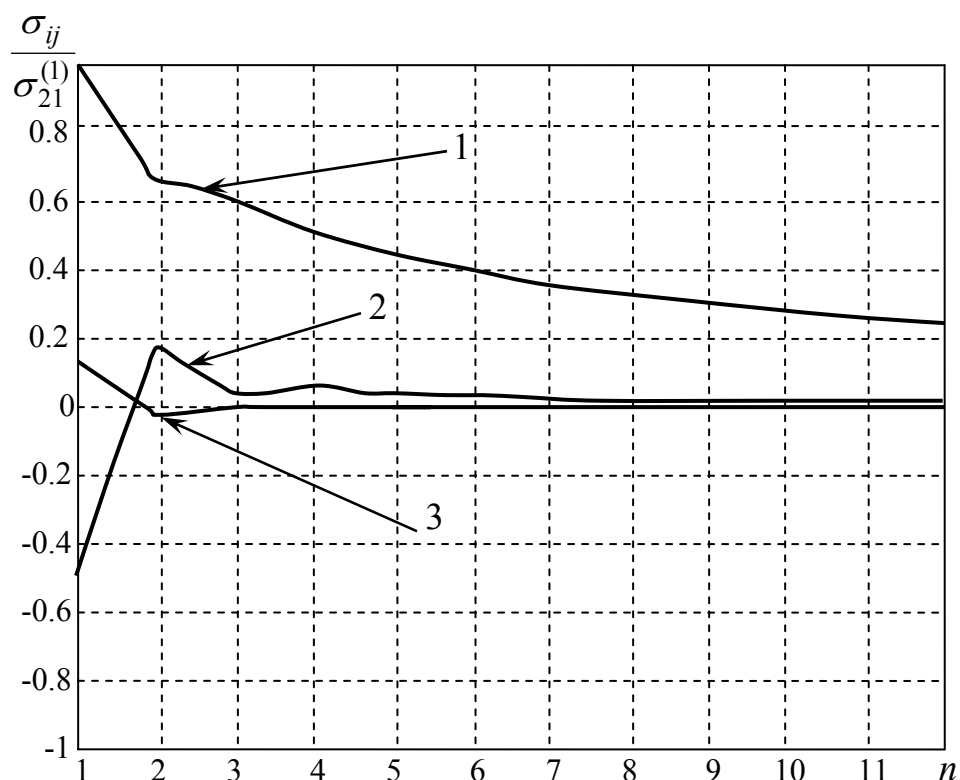


Рис. 3

Дискретная модель (22) – (24) содержит бесконечное количество линейных уравнений ( $n \rightarrow \infty$ ), дополненное граничным условием на торце  $x = 0 : \sigma_{21}^{(0)} = 0$ . Но, для анализа области в вершине физического разреза можно, с достаточной степенью точности, ограничиться конечным числом элементов. Отметим, что при количестве элементов больше 1000 значение компонент тензора напряжений на первых двадцати элементах практически не меняется.

На рис. 3 представлена зависимость распределения напряжений на первых 12 элементах при следующих расчетных характеристиках:  $n=1000$ ;  $a=10$  коэффициента Пуассона:  $\nu = 0.25$ . Кривые 1, 2 и 3 определяют соответственно напряжения  $\sigma_{21}, \sigma_{11}, \sigma_{22}$ , отнесенные к напряжению  $\sigma_{21}^{(1)}$  достигаемому на первом элементе. Отметим, что варьирование коэффициента Пуассона в диапазоне от 0 до 0.4 не оказывало существенного изменения картины. Из рисунка видно, что на первых двух элементах напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  по порядку величины соизмеримы с напряжением  $\sigma_{21}$  и их учет необходим в определении критического состояния рассмотренной схемы нагружения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 06-01-00047 и № 07-01-96402).

г. Тула

Поступила: 09 ноября 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Глаголев, В. В.* Об одном способе определения связей между критическими значениями характеристик процесса установившегося разделения материала / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Проблемы прочности. – 2006. – №2. – С. 47–58.
2. *Глаголев, В. В.* Оценка толщины слоя взаимодействия как универсального параметра материала / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2006. – №5. – С. 194–203.
3. *Крауч С.* Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд; Пер. с англ. – М. : Мир, 1987. – 328 с.
4. *Лурье, А. И.* Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 939 с.
5. *Новожилов, В. В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности / В. В. Новожилов // ПММ. – 1969. – № 2. – С. 212–222.
6. *Петров, Ю. В.* О “квантовой” природе разрушения хрупких сред / Ю. В. Петров // Докл. АН. 1991. Т. 321. – №1. – С. 66–68.
7. *Черепанов, Г. П.* Саморазрушение / Г. П. Черепанов // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию Е. И. Шемякина. – М. : ФИЗМАТЛИТ. – 2006. – С. 142–152.

**К УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С НЕОДНОРОДНЫМ  
УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ НАГРУЖЕНИИ**

*(Воронежский государственный университет)*

Исследованию устойчивости оболочек с наполнителем при нагружении посвящены работы [1; 3]. При этом в работе [3] наполнитель описывался соотношениями теории малых упругопластических деформаций [5] и предположении степенной зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций, а в работе [1] соотношениями теории упрочняющегося упруговязкопластического тела [8].

Отметим, что устойчивость сферического тела под действием внутреннего давления рассматривалась в работах [4; 7]. При этом в [4] в рамках приближенного подхода Лейбензона-Ишлинского и теории малых упругопластических деформаций, а в [7] в рамках точных трехмерных уравнений устойчивости для модели упругопластического тела.

В данной работе в рамках трехмерной линеаризованной теории устойчивости исследована задача устойчивости упругой изотропной сферической оболочки с неоднородным упруговязкопластическим наполнителем при всестороннем равномерном нагружении. Физические параметры наполнителя изменяются по экспоненциальному закону. Пластические деформации в упругой оболочке не возникают.

При решении задачи докритическое состояние определялось в рамках геометрически линейной теории. При этом в упругой области имеет место закон Гука, а в пластической области соотношения теории упруговязкопластического тела.

Для описания упруговязкопластических свойств воспользуемся моделью сложной среды [8] с функцией нагружения

$$F = \left( S_j^i - c \varepsilon_j^i - \eta \dot{\varepsilon}_j^i \right) \left( S_j^i - c \varepsilon_j^i - \eta \dot{\varepsilon}_j^i \right) - K^2 = 0 \quad (1)$$

и ассоциированным законом течения в форме

$$\dot{\varepsilon}_j^i = \lambda_0 \left( S_j^i - c \varepsilon_j^i - \eta \dot{\varepsilon}_j^i \right). \quad (2)$$

Здесь  $c$  и  $\eta$  – коэффициенты упрочнения и вязкости соответственно,  $K$  – предел текучести;

$S_j^i = \sigma_j^i - \frac{1}{3} \sigma_k^k g_j^i$  – компоненты девиатора тензора напряжений,  $\varepsilon_j^i$  – компоненты тензора

пластических деформации,  $\dot{\varepsilon}_j^p$  – компоненты тензора скоростей пластических деформаций,  $\lambda_0$  – неопределенный множитель,  $g_j^i$  – смешанные компоненты метрического тензора.

Полные деформации в пластической области  $\varepsilon_j^i$  состоят из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_j^i = \varepsilon_j^e + \varepsilon_j^p. \quad (3)$$

Причем упругие составляющие связаны с напряжениями законом Гука

$$\sigma_j^i = \lambda \varepsilon_k^k g_j^i + 2\mu \varepsilon_j^i. \quad (4)$$

Формулы Коши связывают полные деформации связаны с перемещениями

$$\varepsilon_j^i = \frac{1}{2} (\nabla^i u_j + \nabla^j u_i). \quad (5)$$

Уравнения равновесия и граничные условия приняты в обычной форме. Заметим, если в деформируемом теле одновременно существуют области упругих и пластических деформаций, то на границе их раздела  $\mathcal{V}$  должны выполняться условия непрерывности перемещений и вектора поверхностных сил [2; 6].

Линеаризованная связь между амплитудами напряжений и деформаций для несжимаемой упруговязкопластической среды согласно [8] представима в виде

$$\begin{aligned} \sigma_j^i &= (a_{i\alpha} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha u_\alpha + \hat{p}) g_j^i + (1 - g_j^i) g^{ii} G_j^i (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \\ a_{ij} &= 2\mu \delta_{ij} - 3\hat{a} f_{ii}^0 f_{jj}^0, f_{ij}^0 = S_{ij}^0 - c \varepsilon_{ij}^0, G_j^i = \mu, \Sigma i, j, \\ \hat{a} &= \frac{4}{3} \chi \frac{\mu^2}{K^2 (2\mu + c + i\Omega\eta)}, \end{aligned} \quad (6)$$

$\hat{p}$  – гидростатическое давление,  $\mu$  – параметр Ламе. Значение  $\chi=1$  соответствует упруговязкопластической среде заполнителя,  $\chi=0$  – упругой среде оболочки. Индекс «0» вверху относится к величинам в докритическом состоянии. Знак  $\Sigma$  обозначает отсутствие суммирования по указанным индексам.

Исследование устойчивости основного состояния составной оболочки сводится [8] к решению уравнений равновесия в вариациях для областей оболочки и заполнителя при соответствующих граничных условиях.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\nabla_i (\sigma_j^i + \sigma^{0i\alpha} \nabla_\alpha u_j) + \rho \Omega^2 u_j = 0, \quad (7)$$

граничные условия

$$(\sigma_j^i + \sigma^{0i\alpha} \nabla_\alpha u_j) n_i = P_j, \quad (8)$$



$P_j = 0$  в случае «мертвой» нагрузки. Условия непрерывности напряжений и перемещений на границе контакта оболочки и заполнителя

$$\left( \sigma_j^{(1)i} + \sigma^{0(1)i\alpha} \nabla_\alpha u_j^{(1)} \right) n_j^{(1)} + \left( \sigma_j^i + \sigma^{0i\alpha} \nabla_\alpha u_j \right) n_j = 0, u_j^{(1)} - u_j = 0. \quad (9)$$

Здесь индексом «1» сверху обозначены величины, относящиеся к заполнителю, остальные величины относятся к оболочке.

К соотношениям (6) – (9) для заполнителя и оболочки следует присоединить условия несжимаемости

$$\nabla_\alpha u^{(1)\alpha} = 0, \nabla_\alpha u^\alpha = 0. \quad (10)$$

Уравнения (6) – (10) представляют собой связную краевую задачу устойчивости относительно амплитуд компонент векторов перемещений  $u, v, w, u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}$  и гидростатических давлений  $\hat{p}, \hat{p}^{(1)}$  для оболочки и заполнителя соответственно. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потере устойчивости основного состояния. При этом критические значения комбинаций параметров нагружения определяются из условия

$$\min(\text{Im} \Omega_k) = 0, (k = 1, 2, \dots), \quad (11)$$

где  $\Omega_k$  – собственные значения краевой задачи.

Исследуем устойчивость упругой изотропной сферической оболочки (рис. 1) с неоднородным упруговязкопластическим заполнителем. Положим, что все физические параметры заполнителя являются функциями радиуса следующего вида

$$\mu_2 = \mu_{20} e^{-\alpha r}, \eta_2 = \eta_{20} e^{-\alpha r}, c_2 = c_{20} e^{-\alpha r}, \rho_2 = \rho_{20} e^{-\alpha r}, K_2 = K_{20} e^{-\alpha r}, \alpha > 0.$$

Обозначим через  $b$  внешний радиус оболочки,  $\gamma$  – внешний радиус заполнителя, а  $a$  – радиус кругового отверстия, т.е. радиус полости. По контуру оболочки равномерно распределена нагрузка интенсивности  $p$ , а к внутреннему контуру заполнителя приложена равномерно распределенная нагрузка  $q$  (рис.1). Таким образом, рассматривается двусвязная область – упругая оболочка и упрочняющийся упруговязкопластический заполнитель – при всестороннем равномерном сжатии, т.е. ограничимся случаем, когда в оболочке не возникают пластические деформации.

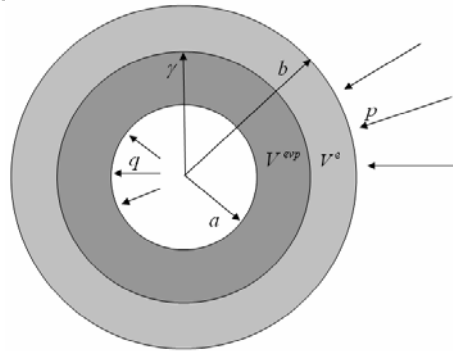


Рис. 1

Исходя из уравнений равновесия и граничных условий на поверхности оболочки и заполнителя, привлекая при этом соотношения (1) – (5), учитывая условия несжимаемости, а также условия на поверхности контакта оболочка-заполнитель, находим докритическое напряженно-деформированное состояние, которое в осесимметричном случае ( $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$ ) в сферической системе координат  $(\rho, \theta, \varphi)$  имеет вид

для оболочки –

$$u_r^{0e} = \frac{C_1}{r^2}, \sigma_r^{0e} = -\frac{4\mu_1 C_1}{r^3} + C_2, \sigma_\theta^{0e} = \frac{2\mu_1 C_1}{r^3} + C_2, \quad (12)$$

для заполнителя –

$$u_r^{0(1)} = B_1 r^{-2}, \varepsilon_r^{0(1)p} = -2\varepsilon_\theta^{0(1)p} = -\frac{2\mu_2 B_1 + k_2 r^3}{(2\mu_2 + c_2)r^3},$$

$$\sigma_r^{0(1)} = -\frac{2\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left( c_{20} B_1 \left( \frac{2}{r^3} - \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\alpha^2}{r} \right) e^{-\alpha r} + c_{20} B_1 \alpha^3 E_*(r) + 3k_{20} E_*(r) \right) + B_2, \quad (13)$$

$$\sigma_\theta^{0(1)} = -\frac{2\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left( c_{20} B_1 \left( -\frac{1}{r^3} - \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\alpha^2}{r} \right) e^{-\alpha r} + c_{20} B_1 \alpha^3 E_*(r) + 3k_{20} E_*(r) + \frac{3}{2} k_{20} e^{-\alpha r} \right) + B_2,$$

где

$$C_1 = B_1 = \frac{\frac{6\mu_{20}k_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}}(E_*(a) - E_*(\gamma)) + p - q}{4\mu_1 \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1}{\gamma^3} \right) + \frac{2\mu_{20}c_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left( \left( \frac{2}{\gamma^3} - \frac{\alpha}{\gamma^2} + \frac{\alpha^2}{\gamma} \right) e^{-\alpha\gamma} - \left( \frac{2}{a^3} - \frac{\alpha}{a^2} + \frac{\alpha^2}{a} \right) e^{-\alpha a} + \alpha^3 (E_*(\gamma) - E_*(a)) \right)},$$

$$C_2 = \frac{4\mu_1 C_1}{b^3} - p, B_2 = \frac{2\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left( c_{20} C_1 \left( \frac{2}{a^3} - \frac{\alpha}{a^2} + \frac{\alpha^2}{a} \right) e^{-\alpha a} + c_{20} C_1 \alpha^3 E_*(a) + 3k_{20} E_*(a) \right) - q, \quad (14)$$

$$k_{20}^2 = \frac{2}{3} K_{20}^2, E_*(r) = \int \frac{e^{-\alpha r}}{r} dr.$$

Отметим, что решения (12) – (14) получены при предположении, что оболочка и заполнитель деформируются совместно без проскальзывания и отставания.

Для осесимметричной формы потери устойчивости уравнения равновесия в вариациях (7) в сферической системе координат принимают вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \sigma_r^0 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \sigma_\theta^0 \frac{1}{r} \left( \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r} \right) + \rho \Omega^2 u_r = 0. \quad (15)$$

Здесь компоненты с индексом нуль сверху определяются соотношениями (12) – для оболочки и (13) – для заполнителя. Из формул (6) выводим

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \hat{p} + 2(\mu - \tilde{a}) \frac{du_r}{dr} + 2\tilde{a} \frac{u_r}{r}, \\
\sigma_\theta &= \hat{p} + \tilde{a} \frac{du_r}{dr} + (2\mu - \tilde{a}) \frac{u_r}{r}, \\
\tilde{a} &= \frac{4}{3} \chi \frac{\mu^2}{(2\mu + c + i\Omega\eta)}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя в уравнение (15) соотношения (16) и учитывая при этом условия несжимаемости (10) для оболочки и заполнителя находим для оболочки –

$$\begin{aligned}
u_r^e &= \frac{A_1}{r^2}, \quad \sigma_r^e = \left( -\frac{4\mu_1}{r^3} - \frac{5\mu_1}{r^6} C_1 + \frac{4\mu_1}{r^3 b^3} C_1 - \frac{p}{r^3} + \frac{\rho_1^0 \Omega^2}{r} \right) A_1 + M_1, \\
\sigma_\theta^e &= \sigma_r^e + 6\mu_1 \frac{A_1}{r^3} = \left( \frac{2\mu_1}{r^3} - \frac{5\mu_1}{r^6} C_1 + \frac{4\mu_1}{r^3 b^3} C_1 - \frac{p}{r^3} + \frac{\rho_1^0 \Omega^2}{r} \right) A_1 + M_1,
\end{aligned} \tag{17}$$

для заполнителя –

$$\begin{aligned}
u_r^{(1)} &= \frac{A_2}{r^2}, \quad \sigma_r^{(1)} = A_2 \left( \frac{e^{-\alpha r}}{r} + \alpha E_*(r) \right) \left( \rho_{20}^0 \Omega^2 - 3\mu_{20} \left( 4 - \frac{8\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20} + i\Omega\eta_{20}} \right) \right) + \\
&+ \frac{6A_2\mu_{20}c_{20}B_1}{2\mu_{20} + c_{20}} \left( \left( -\frac{5}{4} \frac{1}{r^4} + \frac{3}{4} \frac{\alpha}{r^3} - \frac{7}{8} \frac{\alpha^2}{r^2} + \frac{7}{8} \frac{\alpha^3}{r} \right) e^{-\alpha r} + \frac{7}{8} \alpha^4 E_*(r) - \alpha^3 \right) - \\
&- \frac{9A_2\mu_{20}k_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left( \frac{e^{-\alpha r}}{r} + \alpha E_*(r) + 2 \frac{E_*(r)}{r} \right) + 3B_2 \frac{A_2}{r} + M_2, \\
\sigma_\theta^{(1)} &= \sigma_r^e + 6A_2\mu_{20} \frac{e^{-\alpha r}}{r^3} \left( 1 + \frac{2\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20} + i\Omega\eta_{20}} \right),
\end{aligned} \tag{18}$$

где  $A_1, A_2, B_1, B_2$  – постоянные интегрирования, которые определяются из условий непрерывности перемещений и напряжений (9) на границе контакта оболочки и заполнителя при  $r = \gamma$ , граничных условий (8) на внешней поверхности оболочки при  $r = b$  и внутренней поверхности при  $r = a$ . В рассматриваемом случае они принимают соответственно вид

$$\begin{aligned}
u_r^e &= u_r^{(1)}, \quad \sigma_r^e = \sigma_r^{(1)} \quad \text{ï} \quad \delta \text{è} \quad r = \gamma, \\
\sigma_r^e + \sigma_r^{0e} \frac{du_r^e}{dr} &= p_r \quad \text{ï} \quad \delta \text{è} \quad r = b, \\
\sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{0(1)} \frac{du_r^{(1)}}{dr} &= q_r \quad \text{ï} \quad \delta \text{è} \quad r = a.
\end{aligned} \tag{19}$$

Заметим, что если нагрузка "мертвая", то [8]

$$p_r = q_r = 0. \quad (20)$$

Из первого условия находим  $A_1 = A_2$ . Для определения оставшихся трех констант имеем систему трех однородных линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}A_1 + 1 \cdot M_1 - 1 \cdot M_2 &= 0, \\ a_{21}A_1 + 1 \cdot M_1 + 0 \cdot M_2 &= 0, \\ a_{31}A_1 + 0 \cdot M_1 + 1 \cdot M_2 &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Коэффициенты  $a_{ij}$  имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= \Omega^2 \left( \frac{1}{\gamma} \rho_1^0 - \rho_{20}^0 \left( \frac{e^{-\alpha\gamma}}{\gamma} + \alpha E_*(\gamma) \right) \right) - \frac{3B_2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^3} \left( 4\mu_1 + p + \mu_1 C_1 \left( \frac{5}{\gamma^3} - \frac{4}{b^3} \right) \right) - \\ &\quad - \frac{6\mu_{20}c_{20}B_1}{2\mu_{20} + c_{20}} \left( \frac{7}{8} \alpha^4 E_*(\gamma) - \alpha^3 + e^{-\alpha\gamma} \left( -\frac{5}{4} \frac{1}{\gamma^4} + \frac{3}{4} \frac{\alpha}{\gamma^3} - \frac{7}{8} \frac{\alpha^2}{\gamma^2} + \frac{7}{8} \frac{\alpha^3}{\gamma} \right) \right) + \\ &\quad + \frac{9\mu_{20}k_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left( \frac{e^{-\alpha\gamma}}{\gamma} + \alpha E_*(\gamma) + 2 \frac{E_*(\gamma)}{\gamma} \right) + 3\mu_{20} \left( 4 - \frac{8\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20} + i\Omega\eta_{20}} \right) \left( \frac{e^{-\alpha\gamma}}{\gamma} + \alpha E_*(\gamma) \right), \\ a_{21} &= \frac{7\mu_1 C_1}{b^6} - \frac{2C_2}{b^3} - \frac{4\mu_1}{b^3} - \frac{p}{b^3} + \frac{\rho_1^0 \Omega^2}{b}, \\ a_{31} &= \rho_{20}^0 \Omega^2 \left( \frac{e^{-\alpha a}}{a} + \alpha E_*(a) \right) + \frac{3B_2}{a} - 3\mu_{20} \left( 4 - \frac{8\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20} + i\Omega\eta_{20}} \right) \left( \frac{e^{-\alpha a}}{a} + \alpha E_*(a) \right) + \\ &\quad + \frac{6\mu_{20}c_{20}B_1}{2\mu_{20} + c_{20}} \left( \left( \frac{4}{3} \frac{1}{a^6} - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{a^5} + \frac{2}{3} \frac{\alpha^2}{a^4} - \frac{5}{4} \frac{1}{a^4} + \frac{3}{4} \frac{\alpha}{a^3} - \frac{7}{8} \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{7}{8} \frac{\alpha^3}{a} \right) e^{-\alpha a} + \frac{7}{8} \alpha^4 E_*(a) + \frac{2}{3} E_*(a) - \alpha^3 \right) - \\ &\quad - \frac{9\mu_{20}k_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left( \frac{e^{-\alpha a}}{a} + \alpha E_*(a) + 2 \frac{E_*(a)}{a} - \frac{4}{3} \frac{E_*(a)}{a^3} \right) - \frac{2B_2}{a^3}. \end{aligned} \quad (22)$$

Условие существования нетривиального решения этой системы есть равенство нулю определителя, раскрывая который получаем

$$\begin{aligned} \Phi(p, q, \Omega, \lambda_i) &= \rho_{20}^0 \Omega^2 \left( \frac{e^{-\alpha a}}{a} - \frac{e^{-\alpha\gamma}}{\gamma} + \alpha E_*(a) - \alpha E_*(\gamma) \right) + \rho_1^0 \Omega^2 \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{b} \right) + \\ &\quad + \mu_1 C_1 \left( \frac{1}{b^6} + \frac{4}{b^3 \gamma^3} - \frac{5}{\gamma^6} \right) + 4\mu_1 \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1}{\gamma^3} \right) - p \left( \frac{1}{b^3} + \frac{1}{\gamma^3} \right) + 3B_2 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\gamma} \right) - \frac{2B_2}{a^3} + \\ &\quad + \frac{6\mu_{20}c_{20}B_1}{2\mu_{20} + c_{20}} \left( \left( \frac{5}{4} \frac{1}{\gamma^4} - \frac{3}{4} \frac{\alpha}{\gamma^3} + \frac{7}{8} \frac{\alpha^2}{\gamma^2} - \frac{7}{8} \frac{\alpha^3}{\gamma} \right) e^{-\alpha\gamma} - \frac{7}{8} \alpha^4 E_*(\gamma) + \frac{7}{8} \alpha^4 E_*(a) + \frac{2}{3} E_*(a) \right) + \\ &\quad + \frac{6\mu_{20}c_{20}B_1}{2\mu_{20} + c_{20}} \left( \frac{4}{3} \frac{1}{a^6} - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{a^5} + \frac{2}{3} \frac{\alpha^2}{a^4} - \frac{5}{4} \frac{1}{a^4} + \frac{3}{4} \frac{\alpha}{a^3} - \frac{7}{8} \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{7}{8} \frac{\alpha^3}{a} \right) e^{-\alpha a} + \\ &\quad + \frac{9\mu_{20}k_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left( \frac{e^{-\alpha\gamma}}{\gamma} + \alpha E_*(\gamma) + 2 \frac{E_*(\gamma)}{\gamma} - \frac{e^{-\alpha a}}{a} - \alpha E_*(a) - 2 \frac{E_*(a)}{a} + \frac{4}{3} \frac{E_*(a)}{a^3} \right) + \\ &\quad + 3\mu_{20} \left( 4 - \frac{8\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20} + i\Omega\eta_{20}} \right) \left( \frac{e^{-\alpha\gamma}}{\gamma} + \alpha E_*(\gamma) - \frac{e^{-\alpha a}}{a} - \alpha E_*(a) \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Перейдя к безразмерным величинам, получим

$$\begin{aligned}
\Phi(p, q, \Omega, \lambda_i) = & \Omega^2 \frac{\rho_2 \mu_1}{b^2} \left( \frac{e^{-\alpha ab}}{ab} - \frac{e^{-\alpha \gamma b}}{\gamma b} + \alpha E_*(ab) - \alpha E_*(\gamma b) \right) + \Omega^2 \frac{\rho_1 \mu_1}{b^3} \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) + \\
& + \frac{\mu_1 C_1}{b^6} \left( 1 + \frac{4}{\gamma^3} - \frac{5}{\gamma^6} \right) + \frac{4\mu_1}{b^3} \left( 1 - \frac{1}{\gamma^3} \right) - \frac{p\mu_1}{b^3} \left( 1 + \frac{1}{\gamma^3} \right) + \frac{3B_2}{b} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\gamma} \right) - \frac{2B_2}{a^3 b^3} + \\
& + \frac{6\mu_1 \mu_2 c_2 C_1}{2\mu_2 + c_2} \left( \left( \frac{5}{4} \frac{1}{(\gamma b)^4} - \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(\gamma b)^3} + \frac{7}{8} \frac{\alpha^2}{(\gamma b)^2} - \frac{7}{8} \frac{\alpha^3}{\gamma b} \right) e^{-\alpha \gamma b} - \frac{7}{8} \alpha^4 E_*(\gamma b) + \frac{7}{8} \alpha^4 E_*(ab) + \frac{2}{3} E_*(ab) \right) + \\
& + \frac{6\mu_1 \mu_2 c_2 C_1}{2\mu_2 + c_2} \left( \frac{4}{3} \frac{1}{(ab)^6} - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{(ab)^5} + \frac{2}{3} \frac{\alpha^2}{(ab)^4} - \frac{5}{4} \frac{1}{(ab)^4} + \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(ab)^3} - \frac{7}{8} \frac{\alpha^2}{(ab)^2} + \frac{7}{8} \frac{\alpha^3}{ab} \right) e^{-\alpha ab} + \\
& + \frac{9\mu_1 \mu_2 k_2}{2\mu_2 + c_2} \left( \frac{e^{-\alpha \gamma b}}{\gamma b} - \frac{e^{-\alpha ab}}{ab} + \alpha E_*(\gamma b) - \alpha E_*(ab) + 2 \frac{E_*(\gamma b)}{\gamma b} - 2 \frac{E_*(ab)}{ab} + \frac{4}{3} \frac{E_*(ab)}{(ab)^3} \right) + \\
& + 3\mu_1 \mu_2 \left( 4 - \frac{8\mu_2}{2\mu_2 + c_2 + i\Omega \eta_2} \right) \left( \frac{e^{-\alpha \gamma b}}{\gamma b} - \frac{e^{-\alpha ab}}{ab} + \alpha E_*(\gamma b) - \alpha E_*(ab) \right),
\end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned}
C_1 = & \frac{6\mu_2 k_2 (E_*(ab) - E_*(\gamma b)) + p - q}{2\mu_2 + c_2} \\
& 4 \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1}{(\gamma b)^3} \right) + \frac{2\mu_2 c_2}{2\mu_2 + c_2} \left( \left( \frac{2}{(\gamma b)^3} - \frac{\alpha}{(\gamma b)^2} + \frac{\alpha^2}{\gamma b} \right) e^{-\alpha \gamma b} - \left( \frac{2}{(ab)^3} - \frac{\alpha}{(ab)^2} + \frac{\alpha^2}{ab} \right) e^{-\alpha ab} + \alpha^3 (E_*(\gamma b) - E_*(ab)) \right) \\
B_2 = & \frac{2\mu_1 \mu_2}{2\mu_2 + c_2} \left( c_2 C_1 \left( \left( \frac{2}{(ab)^3} - \frac{\alpha}{(ab)^2} + \frac{\alpha^2}{ab} \right) e^{-\alpha ab} + \alpha^3 E_*(ab) \right) + 3k_2 E_*(ab) \right) - q\mu_1.
\end{aligned}$$

Здесь величины, имеющие размерность напряжения, отнесены к модулю сдвига оболочки  $\mu_1$ , а имеющие размерность длины – к внешнему радиусу оболочки  $b$ ;  $\lambda_i$  – геометрические и физико-механические характеристики оболочки и заполнителя.

Таким образом, вопрос определения критической комбинации нагрузок сводится к разрешимости уравнения (24). Однако, анализ такого уравнения затруднен ввиду того, что наряду с приложенными нагрузками, геометрическими и физико-механическими характеристиками оболочки и заполнителя, в него входит в общем случае произвольное комплексное число  $\Omega$ . Поэтому, для упрощения вычисления при численном анализе можно считать, что  $i\Omega = s$  – действительное число. В этом случае критерием устойчивости будет условие  $s < 0$ . Бесспорно, что это сужает область допустимых возмущений, однако это позволяет получить достоверные результаты относительно такого класса возмущений.

г. Воронеж

Поступила: 5 декабря 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреева, И. Ю.* Моделирование отказов цилиндрической оболочки с упруговязкопластическим наполнителем при осевом сжатии / И. Ю. Андреева, Н. А. Медведь, А. Н. Спорыхин // Прикладные задачи механики и теплообмена в авиационной технике : Тр. II Всерос. науч.-техн. конф. – Воронеж, 2001. – Ч.1. – С. 12 – 18.
2. *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
3. *Гузь, А. Н.* Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел / А. Н. Гузь, И. Ю. Бабич. – Киев : Наукова думка, 1985. – Т. 4. – 279 с.
4. *Ершов, Л. В.* Об осесимметричной потере устойчивости толстостенной сферической оболочки, находящейся под действием равномерного давления / Л. В. Ершов // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1960. – №4. – С. 81–83.
5. *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : Наука, 1963. – 271 с.
6. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 2002. – 821 с.
7. *Кирсанов, М. И.* О неустойчивости сферического тела при равномерном нагружении / М. И. Кирсанов, А. Н. Спорыхин // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1979. – №1. – С. 161–165.
8. *Спорыхин, А. Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин. – Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та, 1997. – 361 с.

## ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА

(Воронежский государственный архитектурно-строительный университет)

Статически определимые соотношения при условии пластичности Мизеса рассматривались [2, 56]. В данной работе для заданных зависимостей напряжений при которых удовлетворяется условие пластичности Мизеса, получены решения двумерной задачи.

Уравнения равновесия в декартовой системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Условие пластичности Мизеса

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} = 1. \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем напряжения отнесены к пластической постоянной.

Следуя [1, 51], запишем зависимости для напряжений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= P + \sin \varphi \cos \psi; & \tau_{xy} &= \sin \varphi \sin \psi; \\ \sigma_y &= P - \sin \varphi \cos \psi; & \tau_{xz} &= \cos \varphi \cos \psi; \\ \sigma_z &= P; & \tau_{yz} &= \cos \varphi \sin \psi. \end{aligned} \quad (3)$$

Не трудно видеть, что условие пластичности Мизеса будет удовлетворено при любых функциях  $\varphi$  и  $\psi$ .

Предположим, что функция  $\varphi$  зависит от координаты  $x$ , а функция  $\psi$  – от координаты  $y$ . Подставляя в уравнения равновесия, получим

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \cos \varphi \cos \psi \frac{d\varphi}{dx} + \sin \varphi \cos \psi \frac{d\psi}{dy} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \cos \varphi \sin \psi \frac{d\varphi}{dx} + \sin \varphi \sin \psi \frac{d\psi}{dy} = 0, \quad (5)$$

$$- \sin \varphi \cos \psi \frac{d\varphi}{dx} + \cos \varphi \cos \psi \frac{d\psi}{dy} = 0, \quad (6)$$

Из уравнения (6) следует

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \frac{d\varphi}{dx}. \quad (7)$$

Это значит, что

$$\frac{d\psi}{dy} = C_1; \quad \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \frac{d\varphi}{dx} = C_1. \quad (8)$$

Интегрируя уравнения (8), получим

$$\psi = C_1 y + C_2; \quad \cos \varphi = C_3 e^{-C_1 x}. \quad (9)$$

Подставляя в уравнение (4) значение  $\frac{d\psi}{dy}$  из (7), а в уравнение (5) значение  $\frac{d\varphi}{dx}$

из (7), получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \cos \psi \left( \cos \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \right) \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \sin \psi \left( \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} + \sin \varphi \right) \frac{d\psi}{dy} = 0. \quad (11)$$

Если умножить уравнение (10) на  $dx$ , а уравнение (11) на  $dy$  и сложим, получим

$$dP + \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} d\varphi + \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} d\psi = 0. \quad (12)$$

Таким образом, используя выражения (9) и (12), можно для любых значений  $x$  и  $y$  определить  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $P$ .

г. Воронеж

Поступила: 28 ноября 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коробкин В. Д. Статически допустимые поля напряжений пространственной задачи теории пластичности // Прикладные задачи механики и тепломассообмена в авиастроении. Часть 1. Труды второй Всероссийской научно-технической конференции: Воронеж. – 2001. – С. 51–53.
2. Максимова, Л. А. О статически определимых соотношениях при условии пластичности Мизеса // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 56–58.



ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕЙ СРЕДЫ  
С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ОТВЕРСТИЙ  
И ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН

(Азербайджанский технический университет,  
институт математики и механики НАН Азербайджана)

Рассматривается задача разрушения для тепловыделяющей среды, ослабленной периодической системой круговых отверстий и прямолинейными трещинами вдоль оси абсцисс и ординат неравной длины. Считается, что среда находится в стационарном состоянии, и теплосъем осуществляется через поверхности отверстий. Найдены коэффициенты интенсивности напряжений.

Рассматривается изотропная упругая тепловыделяющая среда, ослабленная периодической системой круговых отверстий, имеющих радиус  $\lambda$  ( $\lambda < 1$ ). Центры этих отверстий находятся в точках  $P_m = m\omega$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $\omega = 2$ . Из контуров круговых отверстий исходят симметричные прямолинейные трещины, направленные по осям абсцисс и ординат, причем их длины по двум направлениям не одинаковые (рис. 1). Контур круговых отверстий и берега трещин свободны от внешних усилий. Считается, что по всему объему тела интенсивность тепловыделения  $q$  равномерна, тело может свободно расширяться и система находится в стационарном состоянии, а теплосъем осуществляется через поверхности отверстий. Кроме того, принято, что максимальный температурный перепад в среде невелик и свойства материала тепловыделяющей среды постоянны в пределах этого перепада.

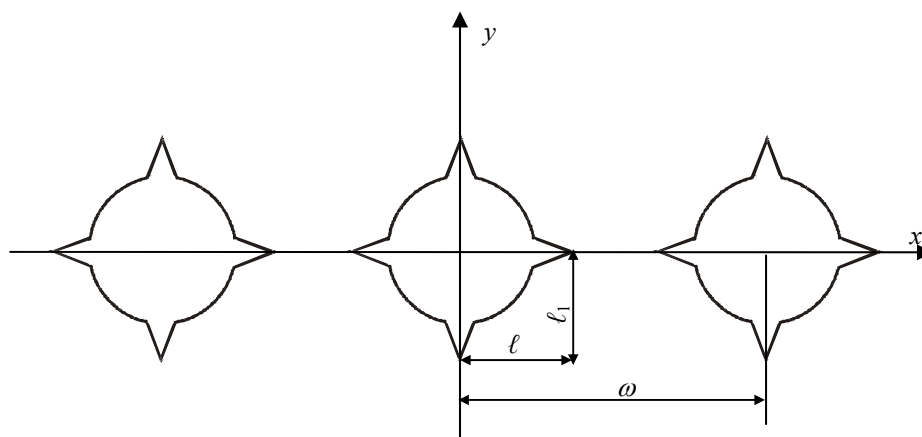


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Температура  $T(x, y)$  в области  $D$ , занятой средой, является решением уравнения теории теплопроводности

$$\Delta T + \frac{q}{\delta} = 0,$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\delta$  – коэффициент теплопроводности среды.

На контуре отверстий  $L_m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) для температуры имеем граничное условие теплообмена

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\alpha_*}{\delta} (T_0 - T).$$

Здесь  $T_0$  – температура охлаждающей среды,  $\alpha_*$  – коэффициент теплоотдачи.

В силу симметрии граничных условий и геометрии области  $D$ , занятой средой, напряжения и температура являются периодическими функциями с основным периодом  $\omega$ .

Температуру  $T(x, y)$  в области  $D$  можно искать в виде

$$T(x, y) = 2 \operatorname{Re} F(z) - \frac{qz\bar{z}}{4\delta},$$

где  $F(z)$  – аналитическая в области  $D$  функция, удовлетворяющая на контуре отверстий  $L_m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) краевому условию

$$2 \operatorname{Re} \left[ e^{i\theta} \left( F'(z) - \frac{q\bar{z}}{4\delta} \right) \right] = \frac{\alpha_*}{\delta} \left( T_0 - F(z) - \overline{F(z)} + \frac{qz\bar{z}}{4\delta} \right).$$

Основное уравнение задачи о температурных напряжениях будет иметь вид

$$\Delta \Delta U(x, y) + \alpha E \Delta T(x, y) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $U(x, y)$  – функция напряжений Эри,  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения,  $E$  – модуль упругости материала среды.

Общий интервал бигармонического уравнения (1) можно представить в виде

$$U(x, y) = \frac{q_* z^2 \bar{z}^2}{64} + 2 \operatorname{Re} \left\{ z \overline{\varphi(z)} - \frac{\alpha E}{4} z \overline{f(z)} + \chi(z) \right\}, \quad (2)$$

где  $q_* = \alpha E q / \delta$ ,  $f(z) = \int F(z) dz$ ,  $F(z)$ ,  $\varphi(z)$ ,  $\chi(z)$  – аналитические в области  $D$  функции.

С помощью функции Эри (2) для компонент тензора напряжений в области  $D$  находим

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{q_* z \bar{z}}{4} + 8 \operatorname{Re} \left[ \Phi(z) - \frac{\alpha E}{4} F(z) \right], \quad (3)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = \frac{q_* \bar{z}^2}{8} + 4 \left\{ \bar{z} \Phi'(z) - \frac{\alpha E}{4} \bar{z} F'(z) + \Psi(z) \right\},$$

где  $\Phi(z) = \varphi'(z)$ ,  $\Psi(z) = \psi'(z) = \chi''(z)$ .

С помощью формул (3) и граничных условий на контурах круговых отверстий и берегах прямолинейных трещин задача сводится [3] к определению двух аналитических в области  $D$  функций  $\Phi_*(z)$  и  $\Psi(z)$  из краевых условий

$$\Phi_*(\tau) + \overline{\Phi_*(\tau)} - [\overline{\tau} \Phi'_*(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} + \frac{q_* \lambda^2}{32} = 0, \quad (4)$$

$$\Phi_*(t) + \overline{\Phi_*(t)} + t \overline{\Phi'_*(t)} + \overline{\Psi(t)} + \frac{3q_* t^2}{32} = 0, \quad (5)$$

$$\Phi_*(t_1) + \overline{\Phi_*(t_1)} + t_1 \overline{\Phi'_*(t_1)} + \overline{\Psi(t_1)} + \frac{3q_* t_1^2}{32} = 0, \quad (6)$$

где  $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $t$  и  $t_1$  – аффиксы точек берегов трещин, направленных по осям абсцисс и ординат, соответственно,  $\Phi_*(z) = \Phi(z) - \frac{\alpha E}{4} F(z)$ .

Решение краевой задачи (4) – (6) ищем в виде [1]

$$\Phi_*(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z), \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z), \quad (7)$$

$$\Phi_1(z) = \beta_1 \rho_2(z) + \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (8)$$

$$\Psi_1(z) = bz^2 - \beta_1 S_1(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-z) dt, \quad (9)$$

$$\Psi_2(z) = -\frac{\pi z}{2\omega^2} \int_{L_1} g(t) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t-z) dt,$$

$$\Phi_3(z) = \frac{i}{2\omega} \int_{L_2} g_1(t_1) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) dt_1, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Psi_3(z) = & -\frac{i}{2\omega} \int_{L_2} \left\{ \overline{g_1(t_1)} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) + \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\pi}{\omega} (2t_1 + iz) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) \right] g_1(t_1) \right\} dt_1. \end{aligned}$$

Интегралы в (9), (10) берутся по линиям  $L_1 = \{[-\ell, -\lambda] + [\lambda, \ell]\}$  и  $L_2 = \{[-\ell_1, -\lambda] + [\lambda, \ell_1]\}$ ,  $g(x)$ ,  $g_1(y)$  – искомые функции, характеризующие разрыв смещений при переходе через линию трещин.

$$\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{\omega} z\right)} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2, \quad \rho_2(z) = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 z^2 + \ln \sin\left(\frac{\pi}{\omega} z\right),$$

$$S(z) = \sum_m' \left[ \frac{P_m}{(z - P_m)^2} - \frac{2z}{P_m^2} - \frac{1}{P_m} \right], \quad S_1(z) = -\int S(z) dz.$$

Штрих у суммы означает, что при суммировании исключается индекс  $m = 0$ .

Из условий симметрии относительно координатных осей находим

$$\operatorname{Im} b = 0, \quad \operatorname{Im} \alpha_{2k} = 0, \quad \operatorname{Im} \beta_{2k} = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Из условия периодичности поля температур, напряжений, а также условия постоянства главного вектора всех сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в  $D$ , находим

$$b = \frac{q_*}{32}, \quad \alpha_0 = \frac{\pi^2}{24} \beta_2 \lambda^2 + C, \quad \beta_1 = -\frac{\alpha E}{4} \beta_1^*, \quad \beta_1^* = \frac{q}{4\delta} \frac{3\omega^2}{\pi^2},$$

$$C = -\frac{\beta_1}{4} \left[ 2\rho_3(1) - 2S_2(1) + 2\rho_1(1) - \frac{\pi^2}{18} \right],$$

где  $S_2(z) = -\int S_1(z) dz$ ,  $\rho_3(z) = \int \rho_2(z) dz$ .

Нетрудно убедиться, что представления (7) – (10) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений. Неизвестные функции  $g(x)$ ,  $g_1(y)$  и коэффициенты  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$  должны быть определены из краевых условий (4) – (6). Так как выполняются условия периодичности, то система граничных условий (4) вырождается в одно функциональное уравнение, например, на контуре  $L_0$  ( $\tau = \lambda e^{i\theta}$ ), а система краевых условий (5) вырождается в граничное условие на  $L_1$ , соответственно система граничных условий (6) вырождается в краевое условие на линии  $L_2$ .

Для составления уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$  функций  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  представим граничное условие (4) в виде

$$\Phi_1(\tau) + \overline{\Phi_1(\tau)} - [\overline{\tau} \Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta} + \frac{q_* \lambda^2}{32} = f_1(\theta) + if_2(\theta) + \varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta), \quad (11)$$

где

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = -\Phi_2(\tau) - \overline{\Phi_2(\tau)} + [\overline{\tau} \Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta}, \quad (12)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = -\Phi_3(\tau) - \overline{\Phi_3(\tau)} + [\overline{\tau} \Phi_3'(\tau) + \Psi_3(\tau)] e^{2i\theta}. \quad (13)$$

Относительно функций  $f_1 + if_2$  и  $\varphi_1 + i\varphi_2$  будем считать, что они разлагаются на контуре  $|\tau| = \lambda$  в ряды Фурье.

В силу симметрии эти ряды имеют вид

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \operatorname{Im} A_{2k} = 0,$$

$$A_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_1(\theta) + if_2(\theta)] e^{-2ki\theta} d\theta, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (14)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \operatorname{Im} B_{2k} = 0,$$

$$B_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta)] e^{-2ki\theta} d\theta, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (15)$$

Подставив (12) в (14) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью теории вычетов, найдем

$$A_{2k} = -\frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) f_{2k}(t) dt,$$

где  $f_0(t) = 2\gamma(t)$ ,  $f_2(t) = -\frac{\lambda^2}{2} \gamma^{(2)}(t)$ ,

$$f_{2k}(t) = \frac{\lambda^{2k}(2k-1)}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-3)!} \gamma^{(2k-2)}(t) \quad (k = 2, 3, \dots),$$

$$f_{-2k}(t) = -\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \gamma(t) = ctg \frac{\pi}{\omega} t.$$

Аналогично, подставив (13) в (15) и повторяя предыдущие действия, получим соотношения, определяющие коэффициенты  $B_{2k}$

$$\varphi_0(it_1) = \delta(it_1) - \overline{\delta(it_1)},$$

$$\varphi_2(it_1) = -\frac{\lambda^2}{2} \delta^{(2)}(it_1) + 2[\delta(it_1) - it_1 \delta'(it_1)],$$

$$\varphi_{2k}(it_1) = \frac{(1-2k)\lambda^{2k}}{(2k)!} \delta^{(2k)}(it_1) + \frac{2\lambda^{2k-2}}{(2k-2)!} [k\delta^{(2k-2)}(it_1) - it_1 \delta^{(2k-1)}(it_1)] \quad (k = 2, 3, \dots),$$

$$\varphi_{-2k}(it_1) = -\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \overline{\delta^{(2k)}(it_1)} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \delta(it_1) = ctg \frac{\pi}{\omega} (it_1).$$

Подставив в левую часть граничного условия (12) вместо  $\Phi_1(\tau)$ ,  $\overline{\Phi_1(\tau)}$ ,  $\Phi_1'(\tau)$  и  $\Psi_1(\tau)$  их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\exp(i\theta)$ , после некоторых преобразований получим две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (16)$$

$$A_{j,k} = (2j+1) \gamma_{j,k} \lambda^{2j+2k+2},$$

$$\gamma_{0,0} = \frac{3}{8} \lambda^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1) g_{i+1}^2 \lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}},$$

$$\gamma_{i,k} = -\frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+1}}{(2j+1)!(2k+1)! 2^{2j+2k+2}} \frac{(2j+2k+4)! g_{j+k+2} \lambda^2}{(2j+2)!(2k+2)! 2^{2j+2k+4}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!(2k+2i+1)! g_{i+j+1} g_{k+j+1}}{(2j+1)!(2k+1)!(2i+1)! 2^{2j+2k+4i+4}} + b_{j,k},$$

$$b_{0,k} = 0, \quad b_{j,0} = 0, \quad b_{i,k} = \frac{g_{j+1} g_{k+1} \lambda^2}{2^{2j+2k+4}} \left[ \frac{12 + \pi^2 \lambda^2}{12 - \pi^2 \lambda^2} \right],$$

$$(j = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= M_2 - \frac{q_* \lambda^2}{32} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1} \lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}} A_{-2k-2}^*, \\
b_{2j+2} &= A_{2j+2} + \frac{(2j+1)g_{j+1} \lambda^{2j+2} (2C - A_0^*)}{K_1 2^{2j+2}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j)!(2k+3)! 2^{2j+2k+4}} A_{-2k-2}^*, \\
K_1 &= 1 - \frac{\pi^2}{12} \lambda^2, \quad A_0^* = \beta_1 (1 - 2 \ln \lambda) - \frac{q_* \lambda^2}{32} + M_0, \quad A_{-2}^* = \frac{q_* \lambda^2}{32} + M_{-2}, \\
A_4^* &= M_4 - \frac{3}{64} \beta_1 g_2 \lambda^4, \quad A_{2k+2}^* = M_{2k+2} + \beta_1 \left( \frac{g_k \lambda^{2k}}{2^{2k}} - \frac{(2k+1)g_{k+1} \lambda^{2k+2}}{(2k+2)2^{2k+2}} \right), \\
A_{-2k-2}^* &= M_{-2k-2} + \beta_1 \frac{g_{k+1} \lambda^{2k+2}}{(2k+2)2^{2k+2}}, \quad g_{j+1} = 2 \sum_m' \frac{1}{m^{2j+2}}, \\
M_0 &= A_0 + B_0 - \frac{q_* \lambda^2}{32}, \quad M_{2k} = A_{2k} + B_{2k}, \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).
\end{aligned}$$

Постоянные  $\beta_{2k}$  определяются из следующих равенств

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= \frac{1}{K_1} \left[ 2C - A_0^* + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1} \cdot \lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} \alpha_{2k+2} \right], \quad (17) \\
\beta_{2j+4} &= (2j+3) \alpha_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)! 2^{2j+2k+4}} \alpha_{2k+2} - A_{-2j-2}^*.
\end{aligned}$$

Требуя, чтобы функции (7) – (10) удовлетворяли краевому условию (5) на  $L_1$ , после некоторых преобразований получим сингулярное интегральное уравнение относительно искомой функции  $g(x)$

$$\frac{1}{\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt + N(x) = 0, \quad (18)$$

где

$$N(x) = \frac{3q_* x^2}{32} + 2\Phi_s(x) + x\Phi'_s(x) + \Psi_s(x),$$

$$\Phi_s(x) = \Phi_1(x) + \Phi_3(x), \quad \Psi_s(x) = \Psi_1(x) + \Psi_3(x).$$

Аналогично, подставив (7) – (10) в краевое условие (6) на  $L_2$ , после некоторых преобразований получаем еще одно сингулярное интегральное уравнение относительно искомой функции  $g_1(y)$ :

$$\frac{1}{\omega} \int_{L_2} \left\{ g_1(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-y) + \overline{g_1(t)} \left[ \operatorname{cth} \frac{\pi}{\omega} (t-y) - \frac{\pi}{\omega} (t-y) \operatorname{sh}^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t-y) \right] \right\} dt + H(y) = 0, \quad (19)$$

$$H(y) = \frac{3q_* y^2}{32} + \Phi_0(iy) + \overline{\Phi_0(iy)} + iy_0 \overline{\Phi'_0(iy)} + \overline{\Psi(iy)},$$

$$\Phi_0(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi_0(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z).$$

В механике хрупкого разрушения [1; 4; 5] особый интерес представляет коэффициент интенсивности напряжений, характеризующий напряженно-деформированное состояние в окрестности концов трещины.

Для коэффициентов интенсивности напряжений в конце трещины будем иметь формулы

$$K_I^\ell = -\lim_{x \rightarrow \ell} \left[ \sqrt{2\pi|x-\ell|} \cdot g(x) \right],$$

$$K_I^{\ell_1} = -\lim_{y \rightarrow \ell_1} \left[ \sqrt{2\pi|y-\ell_1|} \cdot g_1(y) \right].$$

Сингулярные интегральные уравнения (18), (19) совместно с алгебраическими система уравнений (16) и (17) являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить функции  $g(x)$  и  $g_1(y)$ , а также коэффициенты  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$ . Зная функции  $g(x)$ ,  $g_1(y)$ ,  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  можно определить напряженно-деформированное состояние тепловыделяющей среды.

Используя разложения функций  $\operatorname{cth} \frac{\pi}{\omega} z$ ,  $\operatorname{sh}^{-2} \frac{\pi}{\omega} z$ , замену переменных и процедуру алгебраизации интегральных уравнений [2; 4], получим две конечные алгебраические системы:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{m,k} g_k^0 + \frac{1}{2} N_*(\eta_m) = 0, & (m=1, 2, \dots, n-1) \\ \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} g_k^0 \cdot \operatorname{tg} \frac{(2k-1)\pi}{4n} = 0; \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \sum_{v=1}^n a_{m,v} g_{1,v}^0 + \frac{1}{2} H_*(\eta_m) = 0, & (m=1, 2, \dots, n-1) \\ \sum_{v=1}^n (-1)^{v+n} g_{1,v}^0 \cdot \operatorname{tg} \frac{(2v-1)\pi}{4n} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Перейдем теперь к построению окончательной системы уравнений. С помощью уравнений (17) из остальных алгебраических систем (20) и (21) исключим неизвестные  $\beta_{2k}$ . После этого объединим эти системы. Результирующая система будет замкнутой относительно входящих в нее неизвестных  $\alpha_{2k}$ ,  $g_k^0$ ,  $g_{1,v}^0$ . В эти уравнения входят величины  $\ell$  и  $\ell_1$ , характеризующие длину трещин, соответственно по осям абсцисс и ординат. В случае устойчивых трещин, находящихся подвижно-равновесном состоянии, их длины заранее неизвестны, а подлежат определению из дополнительного физического условия, задаваемого в кончике трещины. Для линейно-упругого тела таким условием является локальный критерий роста трещины Гриффитса-Ирвина  $K_I = K_{Ic}$ . В случае неустойчивых трещин это условие позволяет определить величину предельного значения интенсивности внутренних источников тела. В этом случае длина трещины считается известной. После нахождения приближенных значений  $g_k^0$  и  $g_{1,v}^0$  искомым функций в узловых точках коэффициенты интенсивности напряжений  $K_I^\ell$  и  $K_I^{\ell_1}$  определялись следующими соотношениями

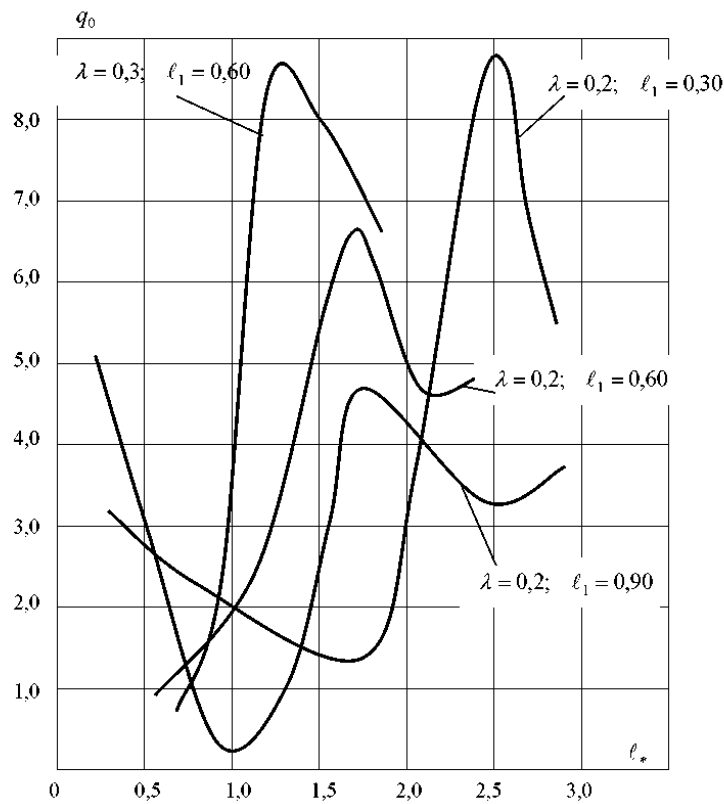
$$K_I^\ell = \sqrt{\pi\ell(1-\lambda_1^2)} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k g_k^0 \cdot \operatorname{ctg} \frac{2k-1}{4n} \pi, \quad (22)$$

$$K_I^{\ell_1} = \sqrt{\pi\ell_1(1-\lambda_2^2)} \cdot \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n (-1)^v g_{1,v}^0 \cdot \operatorname{ctg} \frac{2v-1}{4n} \pi,$$

где  $\lambda_1 = \lambda/\ell$ ,  $\lambda_2 = \lambda/\ell_1$

Таким образом, в случае устойчивых трещин из-за неизвестного размера трещины системы алгебраических уравнений оказываются нелинейными. В этом случае, к алгебраическим системам добавляются еще два уравнения

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi\ell(1-\lambda_1^2)} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k g_k^0 \cdot \operatorname{ctg} \frac{2k-1}{4n} \pi &= K_{Ic}, \\ \sqrt{\pi\ell_1(1-\lambda_2^2)} \cdot \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n (-1)^v g_{1,v}^0 \cdot \operatorname{ctg} \frac{2v-1}{4n} \pi &= K_{Ic}. \end{aligned} \quad (23)$$



**Рис. 2.** Зависимость критической интенсивности тепловыделения  $q_0 = q^* \sqrt{\omega}/K_c$  от длины трещин  $l_* = (\ell - \lambda)/\lambda$



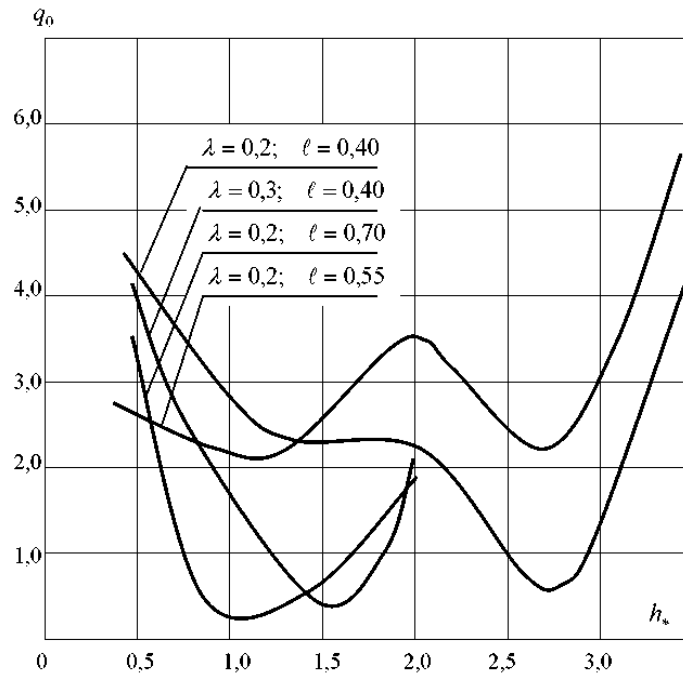


Рис. 3. Зависимость критической интенсивности теплового потока  $q_0 = q^* \sqrt{\omega} / K_c$  от длины трещин  $h_* = (\ell_1 - \lambda) / \lambda$

Однако решение нелинейной замкнутой системы при заданной интенсивности тепловыделения затруднительно. Поэтому проще считать заданным  $\ell$  и  $\ell_1$ , а находить соответствующую интенсивность тепловыделения в среде. Объединенная система решалась методом Гаусса с выбором главного элемента для разных значений порядка  $n$  ( $n$  – число чебышевских узлов разбиения интервала интегрирования) в зависимости от расстояния между отверстиями. Как показали расчеты для диапазона  $0,1 \leq \lambda \leq 0,6$  достаточно взять  $n = 20$ , а в диапазоне изменения радиуса кругового отверстия  $0,6 \leq \lambda \leq 0,8$  оказалось достаточным взять  $n = 40$ , а бесконечные системы (16), (17) урезать до 12 уравнений (решения совпадают с точностью до четвертого знака). Для радиуса кругового отверстия  $\lambda > 0,8$ , начиная с  $n = 60$ , решения совпадают с точностью до третьего знака, при этом системы (16), (17) урезались до 30 уравнений. Отметим, что значения параметра  $\lambda > 0,8$  выпадают из рабочего диапазона изменения радиуса кругового отверстия для среды. Быстрая сходимость полученных систем уравнений в диапазоне  $0 < \lambda \leq 0,8$  объясняется тем, что коэффициенты систем (16), (17), (20), (21), а также формулы для функций  $f_{2k}(t)$ ,  $\varphi_{2k}(t)$  содержат высокие степени параметра. Были проведены расчеты по определению коэффициентов интенсивности напряжений. С помощью критерия хрупкого разрушения были определены зависимости критической интенсивности тепловыделения  $q_0 = q^* \sqrt{\omega} / K_{IC}$ . На основании полученных результатов на рис. 2 – 3 построены графики зависимости  $q_0$  от длины трещин.

г. Баку

Поступила: 25 января 2008 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Мирсалимов, В. М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. – Баку : ЭЛИМ, 1984. – 124 с.
2. *Мирсалимов, В. М.* Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
3. *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
4. *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – Киев : Наукова думка, 1976. – 443 с.
5. *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.

**ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ АРМИРОВАНИЯ НА ПРЕДЕЛЬНУЮ НАГРУЗКУ  
МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ**

*(Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН)*

В последнее время в инженерной практике все чаще находят применение тонкостенные элементы конструкций из металлокомпозитов. Известно, что несущая способность реальных конструкций в рамках упругого деформирования, как правило, низка и далека от своего полного исчерпания. Особенно это касается армированных конструкций, несущая способность фазовых материалов которых отличается на порядки как в рамках упругости, так и за ее пределами. В связи с этим особую актуальность приобретает вопрос об определении предельной внешней нагрузки, выдерживаемой армированной конструкцией при полном исчерпании несущей способности всеми субструктурными элементами композиции. Однако полное решение или близкие (верхнюю и нижнюю) границы несущей способности можно получить лишь для некоторого узкого круга задач [1], поэтому выдвигаемые практикой новые задачи требуют привлечения численных методов решения математической задачи о предельном статическом равновесии армированных конструкций в рамках жесткопластической модели. Настоящее исследование посвящено определению верхней границы несущей способности металлокомпозитных оболочек вращения и «механизмов» их пластического течения с использованием теории линейного программирования.

Рассматриваются тонкие оболочки вращения постоянной или переменной толщины  $H = 2h(\theta)$ , осесимметрично нагруженные и армированные. Нагрузки в окружном направлении отсутствуют, армирование осуществляется по меридионально-окружным или меридионально-симметричным спиральным траекториям двумя семействами арматуры. При таких структурах армирования, нагружении и геометрии оболочек в них отсутствует скручивание, поэтому направления главных напряжений и скоростей деформаций в связующем и в композиции в целом совпадают с меридиональным и окружным направлениями.

Кромки оболочки задаются значениями  $0 \leq \theta_* < \theta_{**} < \pi$  ( $\theta_* \leq \theta \leq \theta_{**}$ ;  $\theta$  – угол между осью вращения и нормалью к срединной поверхности), угол  $\theta_{**}$  определяет опорный контур оболочки,  $\theta_*$  – полюсное отверстие в вершине оболочки; при  $\theta_* = 0$  имеем замкнутую в вершине оболочку, при  $\theta_* > 0$  – в окрестности вершины оболочки имеется полюсное отверстие, которое предполагается закрытым абсолютно жесткой круглой пластиной (крышкой), жестко скрепленной с верхней кромкой оболочки.

Согласно формулировке кинематического метода [1], для определения верхней (кинематической) границы несущей способности оболочки требуется найти минимум параметра  $p^*$  нагрузки, действующей на поверхность оболочки,

$$p^* = \iint_S D dS - \iint_S (g_1 v_1 + g_3 v_3) dS - G \dot{\delta} \quad (v_2 \equiv 0) \quad (1)$$

при условии нормировки

$$\bar{P} \dot{\delta} + \iint_S (\bar{p}_1 v_1 + \bar{p}_3 v_3) dS = 1 \quad (v_2 \equiv 0) \quad (2)$$

и ограничениях-неравенствах

$$D \geq \sum_{j=1}^n Q_{j,r} \dot{q}_j, \quad r=1, 2, \dots, \zeta \quad (D \geq 0), \quad (3)$$

где  $P = p^* \bar{P}$  – результирующая поверхностной нагрузки, действующей на крышку вертикально вниз;  $p_i = p^* \bar{p}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – компоненты поверхностной нагрузки, действующей на оболочку (здесь и далее нижний индекс 1 означает меридиональное, 2 – окружное, 3 – нормальное к срединной поверхности направления);  $G$  – внешняя сила, действующая на крышку и не зависящая от параметра нагружения (например, вес крышки совместно с прикрепленными к ней грузами; величины  $\bar{P}$ ,  $G$  и функции  $\bar{p}_i(\theta)$  заданы);  $\dot{\delta}$  – скорость вертикального смещения крышки;  $v_i = \dot{u}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – кинематически допустимые скорости смещения точек срединной поверхности оболочки ( $v_2 \equiv 0$ , так как смещение в окружном направлении отсутствует,  $u_3$  – прогиб), поэтому к (1) – (3) следует добавить кинематические граничные условия;  $g_i$  – компоненты приведенной нагрузки, действующей на единицу площади срединной поверхности и независимой от параметра  $p^*$ ;  $S$  – площадь срединной поверхности оболочки;  $D$  – диссипация, отнесенная к единице площади срединной поверхности;  $\zeta$  – количество угловых точек линеаризованной предельной поверхности (поверхности текучести) материала армированной оболочки;  $Q_{j,r}$  – значения  $j$ -х обобщенных напряжений в  $r$ -й угловой точке предельной поверхности;  $\dot{q}_j$  – обобщенные скорости деформаций, определяемые кинематически допустимыми скоростями;  $n$  – количество обобщенных напряжений и скоростей; нижний индекс после запятой означает номер угловой точки поверхности текучести; точка над функцией означает частную производную по времени.

К соотношениям (1) – (3) следует добавить кинематические условия совместного смещения крышки и верхней кромки оболочки, которые предполагаются жестко связанными,

$$v_1(\theta_*) = \dot{\delta} \sin \theta_*, \quad v_3(\theta_*) = -\dot{\delta} \cos \theta_*, \quad v_3'(\theta_*) - v_1(\theta_*) = 0 \quad (4)$$

и условия закрепления опорного контура, который считается жестко заделанным,

$$v_1(\theta_{**}) = v_3(\theta_{**}) = 0, \quad v_3'(\theta_{**}) = 0, \quad (5)$$

где штрих означает дифференцирование по  $\theta$ .

Чтобы избежать построения гиперповерхности текучести для металлокомпозитных оболочек со сложными и неоднородными структурами армирования в обобщенных напряжениях (в четырехмерном фазовом пространстве усилий-моментов), далее рассматри-

вается двухслойная модель оболочки. Расчеты, проведенные в [1] для изотропных стальных оболочек, показывают, что двухслойная модель тонкостенной конструкции гарантирует вполне приемлемую точность. Уточнение же верхней границы несущей способности таких оболочек за счет использования  $N$ -слойной модели ( $N \geq 3$ ) с практической точки зрения пренебрежимо мало, но порождает значительные технические трудности.

Подробное описание кинематического метода определения верхней границы несущей способности осесимметрично армированных оболочек вращения, фазовые материалы которых различно сопротивляются растяжению и сжатию, с применением двухслойной модели тонкостенной конструкции, анализ линеаризованных предельных кривых материала композиции при разных структурах армирования, дискретизация задачи и адаптация ее к методам линейного программирования подробно изложены в [1,6,8], поэтому не будем здесь останавливаться на обсуждении этих вопросов. Отметим лишь, что при меридионально-симметричном армировании ( $\omega_1(\theta) = \omega_2(\theta)$ ,  $\psi_1(\theta) = -\psi_2(\theta)$ ,  $\sigma_1^* = \sigma_2^*$ ,  $\sigma_1^{**} = \sigma_2^{**}$ ) равенства (15) в [6] следует заменить на

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1}^{(i)} &= a\sigma_0 + 2\omega_1\sigma_1^*l_1^2, \quad \sigma_{22,1}^{(i)} = a\sigma_0 + 2\omega_1\sigma_1^*l_2^2, \quad \sigma_{11,2}^{(i)} = 2\omega_1\sigma_1^*l_1^2, \quad \sigma_{22,2}^{(i)} = a\sigma_0 + 2\omega_1\sigma_1^*l_2^2, \\ \sigma_{11,3}^{(i)} &= -2\omega_1\sigma_1^{**}l_1^2, \quad \sigma_{22,3}^{(i)} = a\sigma_0 - 2\omega_1\sigma_1^{**}l_2^2, \quad \sigma_{11,4}^{(i)} = -a\sigma_0 - 2\omega_1\sigma_1^{**}l_1^2, \quad \sigma_{22,4}^{(i)} = -2\omega_1\sigma_1^{**}l_2^2, \\ \sigma_{11,5}^{(i)} &= -a\sigma_0 - 2\omega_1\sigma_1^{**}l_1^2, \quad \sigma_{22,5}^{(i)} = -a\sigma_0 - 2\omega_1\sigma_1^{**}l_2^2, \quad \sigma_{11,6}^{(i)} = -2\omega_1\sigma_1^{**}l_1^2, \quad \sigma_{22,6}^{(i)} = -a\sigma_0 - 2\omega_1\sigma_1^{**}l_2^2, \\ \sigma_{11,7}^{(i)} &= 2\omega_1\sigma_1^*l_1^2, \quad \sigma_{22,7}^{(i)} = -a\sigma_0 + 2\omega_1\sigma_1^*l_2^2, \quad \sigma_{11,8}^{(i)} = a\sigma_0 + 2\omega_1\sigma_1^*l_1^2, \quad \sigma_{22,8}^{(i)} = 2\omega_1\sigma_1^*l_2^2 \quad (0 \leq \psi \leq \pi/4); \\ \sigma_{11,1}^{(i)} &= a\sigma_0 + 2\omega_1\sigma_1^*l_1^2, \quad \sigma_{22,1}^{(i)} = a\sigma_0 + 2\omega_1\sigma_1^*l_2^2, \quad \sigma_{11,2}^{(i)} = 2\omega_1\sigma_1^*l_1^2, \quad \sigma_{22,2}^{(i)} = a\sigma_0 + 2\omega_1\sigma_1^*l_2^2, \\ \sigma_{11,3}^{(i)} &= -a\sigma_0 + 2\omega_1\sigma_1^*l_1^2, \quad \sigma_{22,3}^{(i)} = 2\omega_1\sigma_1^*l_2^2, \quad \sigma_{11,4}^{(i)} = -a\sigma_0 - 2\omega_1\sigma_1^{**}l_1^2, \quad \sigma_{22,4}^{(i)} = -2\omega_1\sigma_1^{**}l_2^2, \\ \sigma_{11,5}^{(i)} &= -a\sigma_0 - 2\omega_1\sigma_1^{**}l_1^2, \quad \sigma_{22,5}^{(i)} = -a\sigma_0 - 2\omega_1\sigma_1^{**}l_2^2, \quad \sigma_{11,6}^{(i)} = -2\omega_1\sigma_1^{**}l_1^2, \quad \sigma_{22,6}^{(i)} = -a\sigma_0 - 2\omega_1\sigma_1^{**}l_2^2, \\ \sigma_{11,7}^{(i)} &= a\sigma_0 - 2\omega_1\sigma_1^{**}l_1^2, \quad \sigma_{22,7}^{(i)} = -2\omega_1\sigma_1^{**}l_2^2, \quad \sigma_{11,8}^{(i)} = a\sigma_0 + 2\omega_1\sigma_1^*l_1^2, \quad \sigma_{22,8}^{(i)} = 2\omega_1\sigma_1^*l_2^2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$(\pi/4 < \psi \leq \pi/2), \quad i = 1, 2,$$

где

$$\begin{aligned} a(\theta) &= 1 - \omega_1(\theta) - \omega_2(\theta), \quad l_1(\theta) = \cos\psi(\theta), \\ l_2(\theta) &= \sin\psi(\theta), \quad \psi_1(\theta) = -\psi_2(\theta) = \psi(\theta); \end{aligned} \quad (7)$$

$\sigma_{11,j}^{(i)}$ ,  $\sigma_{22,j}^{(i)}$  – координаты  $j$ -й угловой точки кривой текучести композиции  $i$ -го слоя ( $1 \leq j \leq \zeta = 8$ );  $\sigma_0$  – предел текучести материала изотропного связующего, подчиняющегося критерию текучести Треска;  $\sigma_k^*$ ,  $\sigma_k^{**}$  – пределы текучести арматуры  $k$ -го семейства при растяжении и сжатии соответственно;  $\omega_k$ ,  $\psi_k$  – плотности и углы (отсчитываемые от меридионального направления) армирования проволокой  $k$ -го семейства соответственно ( $k = 1, 2$ ).

Так как арматура предполагается постоянного поперечного сечения и обрывается только на кромках оболочки, то плотность армирования  $k$ -м семейством определяется равенством [5]

$$\begin{aligned} \omega_k(\theta) &= [h_*\omega_{k*} \cos\psi_{k*} R_{2*} \sin\theta_*] / [h(\theta) \cos\psi_k(\theta) R_2(\theta) \sin\theta], \\ h_* &= h(\theta_*), \quad \omega_{k*} = \omega_k(\theta_*), \quad \psi_{k*} = \psi_k(\theta_*), \quad R_{2*} = R_2(\theta_*), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\omega_{k*}$  – постоянные, которые можно варьировать;  $R_2$  – радиус кривизны срединной поверхности в окружном направлении. Равенство (8) не выполняется лишь при окружном армировании (так как  $\cos\psi_k \equiv 0$ ), в этом случае  $\omega_k(\theta)$  – произвольная функция [5], удовлетворяющая физическим ограничениям

$$\omega_k \geq 0 \quad (k=1, 2), \quad \omega_1 + \omega_2 \leq \omega_* < 1, \quad (9)$$

$\omega_*$  – предельно допустимая удельная суммарная плотность армирования (на практике обычно  $\omega_* \approx 0,7$ ).

Исследуем несущую способность сферических и эллипсоидальных оболочек, нагруженных внутренним давлением. Предполагается, что на крышку может действовать не только внутреннее давление, но и внешняя фиксированная нагрузка  $G$  (см. (1)), не зависящая от параметра нагружения. Под параметром  $p^*$  будем понимать величину внутреннего давления, тогда в (1), (2) следует принять

$$\bar{P} = -\pi r_*^2, \quad g_1 = g_3 = 0, \quad \bar{p}_1 = 0, \quad \bar{p}_3 = 1,$$

где  $r_*$  – радиус крышки оболочки; действием массовых нагрузок пренебрегаем.

Рассматриваются изотропные оболочки из магниевого сплава ИМВ-2 и конструкционной стали марки С440, а также композитные оболочки, изготовленные из сплава ИМВ-2 и армированные стальной проволокой У8А ( $d = 80$  мкм), причем срединная поверхность на опорном контуре пересекает опорную плоскость под прямым углом ( $\theta_{**} = \pi/2$ ). Физико-механические характеристики фазовых материалов приведены в табл. 1, где  $\sigma_s$  – предел текучести материала,  $\rho$  – его объемная плотность.

Таблица 1

**Физико-механические характеристики фазовых материалов [2], [7]**

Материал	$\sigma_s$ , МПа	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Магниевый сплав ИМВ-2	190	1590
Конструкционная сталь марки С440	400	7800
Стальная проволока У8А	2500	7800

Геометрия оболочек определяется следующими размерами: радиус крышки  $r_* = 0,2$  м; радиус сферической оболочки  $R = r_0 = 1$  м; для эллипсоидальных оболочек первого типа (ЭОТ1) – сплюснутых – радиус опорного контура  $r_0 = 1,2$  м, а высота в полюсной точке  $h_p = 0,694$  м; для эллипсоидальных оболочек второго типа (ЭОТ2) – вытянутых –  $r_0 = 0,8$  м,  $h_p = 1,563$  м. (Более подробно геометрия оболочки вращения при заданных  $r_0$ ,  $h_p$ ,  $r_*$  определяется формулами (1), (22) в [6].) При таком задании размеров оболочек объем пространства, ограниченный ими и опорной поверхностью и определяемый интегралом

$$V_* = \pi \int_{\theta_*}^{\theta_{**}} R_1(\theta) R_2^2(\theta) \sin^3 \theta d\theta,$$

остается постоянным. (Здесь  $R_1$  – радиус кривизны оболочки в меридиональном направлении.)

Толщина армированных оболочек  $H = 1$  см, толщина же изотропных оболочек выбирается так, чтобы их масса была равна массе соответствующих по геометрии металлокомпозитных конструкций.

В табл. 2 приведены некоторые результаты расчетов изотропных и композитных оболочек ( $G = 0$ ), перекрестно армированных по меридиональным ( $\psi_1 = 0$ ) и окружным ( $\psi_2 = \pi/2$ ) направлениям. Структуры армирования оболочек характеризуются следующими значениями плотностей армирования (см. (8)):  $\omega_{1*} = 0,3$  – для сферического пояса;  $\omega_{1*} = 0,33$  – для ЭОТ1;  $\omega_{1*} = 0,26$  – для ЭОТ2; для всех трех типов оболочек  $\omega_2(\theta) = 0,084$ , что в рамках точности используемой теории обеспечивает выполнение ограничений (9) и одинаковый относительный расход арматуры  $V_a/V = 0,168$  в конструкциях рассматриваемой геометрии, где

$$V_a = 2\pi \int_{\theta_*}^{\theta_{**}} \sum_{k=1}^2 \omega_k(\theta) R_1 R_2 H \sin \theta d\theta, \quad V = 2\pi \int_{\theta_*}^{\theta_{**}} R_1 R_2 H \sin \theta d\theta.$$

Таблица 2

Характеристика решения	Материал оболочки		
	ИМВ-2	С440	ИМВ-2 – У8А
Сферическая оболочка			
$p^*$ , МПа	2,598	1,938	3,910
$H$ , см	1,766	0,710	1,0
Эллипсоидальная оболочка первого типа (ЭОТ1)			
$p^*$ , МПа	1,489	1,201	2,799
$H$ , см	1,654	0,710	1,0
Эллипсоидальная оболочка второго типа (ЭОТ2)			
$p^*$ , МПа	3,307	2,757	7,244
$H$ , см	1,656	0,711	1,0

Из табл. 2 следует, что при одной и той же массе наибольшее внутреннее давление выдерживают металлокомпозитные оболочки. Геометрия оболочек также влияет на предельную нагрузку: чем больше вытянута оболочка по вертикали, тем больше ее несущая способность, поэтому из всех рассмотренных выше оболочек наибольшим значением  $p^*$  обладает металлокомпозитная ЭОТ2 ( $p^* = 7,244$  МПа), а наименьшим – стальная ЭОТ1 ( $p^* = 1,201$  МПа).

На рис. 1 изображены зависимости предельного внутреннего давления  $p^*$  от угла  $\psi = \text{const}$  (см. (6), (7)) спирального армирования оболочек разной геометрии: кривая 1 характеризует несущую способность сферической оболочки ( $\omega_{k*} = 0,3$ ); линия 2 – ЭОТ1 ( $\omega_{k*} = 0,33$ ); кривая 3 – ЭОТ2 ( $\omega_{k*} = 0,26$ ,  $k = 1, 2$ ). (Указанные значения  $\omega_{k*}$  подобраны таким образом, чтобы относительный объем арматуры в оболочках оставался прежним:  $V_a/V = 0,168$ .) Точкам  $\psi = 0$  на рис. 1 соответствует меридиональное армирование обо-

лочек, а  $\psi = \pi/2$  – окружное (при этом  $\omega_k(\theta)$  определяется по закону (8) в предположении, что  $\cos\psi_{k*}/\cos\psi_k = 1$ ).

Точкам максимумов кривых соответствуют рациональные проекты на множестве рассматриваемых спиральных структур армирования. Так, для ЭОТ1 (кривая 2) рациональным будет меридиональное армирование ( $\psi = 0$ ), для других же типов оболочек – перекрестное армирование, а именно: для сферической оболочки (линия 1) – под углами  $\psi_1 = -\psi_2 = \psi \approx \pi/20$ , а для ЭОТ2 (кривая 3) – под углами  $\psi_1 = -\psi_2 = \psi \approx 19\pi/20$  (см. точку B). Следовательно, не всегда армирование по направлениям главных напряжений (меридиональному или окружному) является наилучшим.

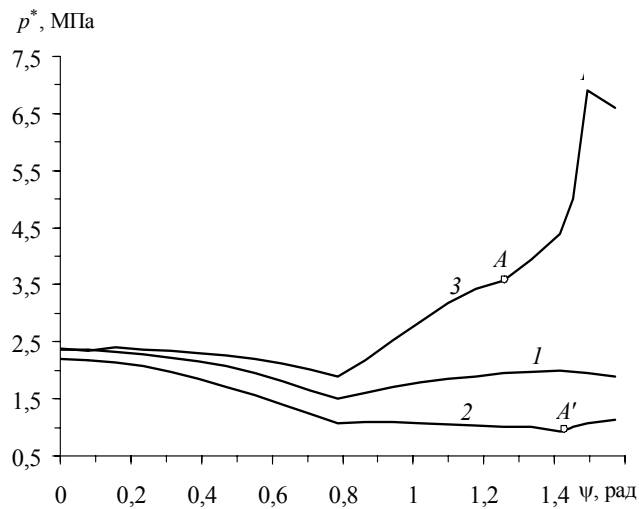


Рис. 1

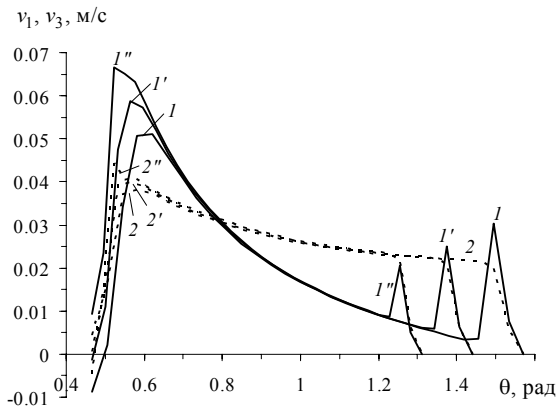


Рис. 2

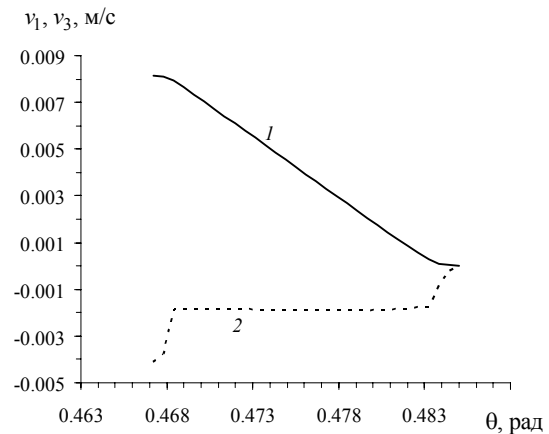


Рис. 3

Для сферической оболочки (линия 1) при всех углах армирования наблюдается один «механизм» пластического течения: под действием внутреннего давления в предельном состоянии «течет» вся оболочка. Для эллипсоидальных оболочек наблюдается



смена «механизмов» пластического течения при изменении углов армирования  $\psi$ . Точки  $A, B$  на кривой 3 и точка  $A'$  на линии 2 характеризуют такую смену «механизмов течения». На рис. 2, 3 изображены кривые, характеризующие скорости смещения точек срединной поверхности в меридиональном ( $v_1$  – штриховые линии с номерами 2, 2', 2'') и нормальном ( $v_3$  – сплошные линии с номерами 1, 1', 1'') направлениях и соответствующие разным «механизмам» пластического течения оболочек. Так, при углах армирования  $0 \leq \psi < \psi_A \approx 1,257$  рад в предельном состоянии наблюдается пластическое течение всей ЭОТ2 (на всем ее меридиональном протяжении  $\theta_* = 0,467 \leq \theta \leq \theta_{**} = \pi/2$ ); кривые 1, 2 на рис. 2 характеризуют такой «механизм течения» при  $\psi = \psi_A - 0$  (точкам изломов на этих кривых соответствуют пластические шарниры). При углах армирования  $\psi_A < \psi < \psi_B \approx 1,492$  рад в предельном состоянии наблюдается частичное пластическое течение оболочки, когда нижняя ее часть остается жесткой, а «течение» наблюдается в некоторой окрестности крышки ( $\theta_* \leq \theta \leq \theta_p$ ,  $1,31 \leq \theta_p \leq 1,44$  рад); «механизмы» такого пластического течения при  $\psi = \psi_A + 0$  и  $\psi = \psi_B - 0$  характеризуются кривыми 1', 2' и 1'', 2'' на рис. 2. (Аналогичные «механизмы течения» наблюдаются для ЭОТ1 левее и правее точки  $A'$  на кривой 2 рис. 1).

При углах армирования  $\psi_B < \psi \leq \pi/2$  наблюдается «срез» крышки у ЭОТ2, когда пластическое течение происходит в малой окрестности скрепления оболочки с крышкой, остальная же часть оболочки остается жесткой. На рис. 3 приведены кривые, характеризующие «срез» крышки при  $\psi = \psi_B + 0$  (см. точку  $B$  на рис. 1). Из этого рисунка видно, что участок пластического деформирования составляет  $\Delta\theta = 0,485 - 0,467 = 0,018$  рад, т.е. всего 1,63 % от всей меридиональной протяженности оболочки (от разности  $\theta_{**} - \theta_* = 1,104$  рад).

Таким образом, при некоторых входных данных задачи предельного равновесия оболочки (например, при определенных структурах армирования) могут реализоваться несколько «механизмов» их пластического течения, обеспечивающих одно и то же значение предельной нагрузки. Смена «механизмов течения» наблюдается также и при варьировании толщины  $H$  как армированных, так и изотропных оболочек. Неединственность решения в задачах предельного равновесия оболочек вращения ранее была обнаружена авторами в [3], [6].

Сравнение точек максимумов на кривых рис. 1 со значениями  $p^*$ , приведенными в табл. 2 для армированных оболочек, показывает, что меридионально-окружное армирование является наилучшим из всех рассмотренных структур армирования.

При реализации в предельном состоянии «механизмов» частичного пластического течения оболочки в окрестности крышки или при «срезе» крышки дополнительно повысить несущую способность конструкции можно за счет ее усиления (например, увеличения плотностей армирования или толщины оболочки) именно в некоторой окрестности крышки. (При этом можно в ряде случаев ослабить оболочку в нижней части – в окрестности опорного контура, где она остается жесткой.)

Точки левых участков кривых 1, 1' на рис. 2 имеют отрицательные ординаты. Это означает, что под действием внутреннего давления в предельном состоянии при «механизмах» полного или частичного пластического течения оболочек крышка и окрестная

часть оболочки проседают вниз. (Такие же «механизмы» пластического течения реализуются, в частности, и в оболочках с меридионально-окружным армированием, приведенных в табл. 2). Следовательно, чтобы дополнительно повысить несущую способность оболочек с такими «механизмами течения», нужно к крышке приложить внешнюю силу  $G = -P^*$  (см. (1)), действующую вертикально вверх ( $P^* > 0$ ). Наоборот, на рис. 3 ординаты точек кривой 1, неотрицательны, т.е. при «срезе» крышки дополнительно повысить несущую способность конструкции можно за счет приложения к крышке внешней силы, направленной вертикально вниз ( $P^* < 0$ ).

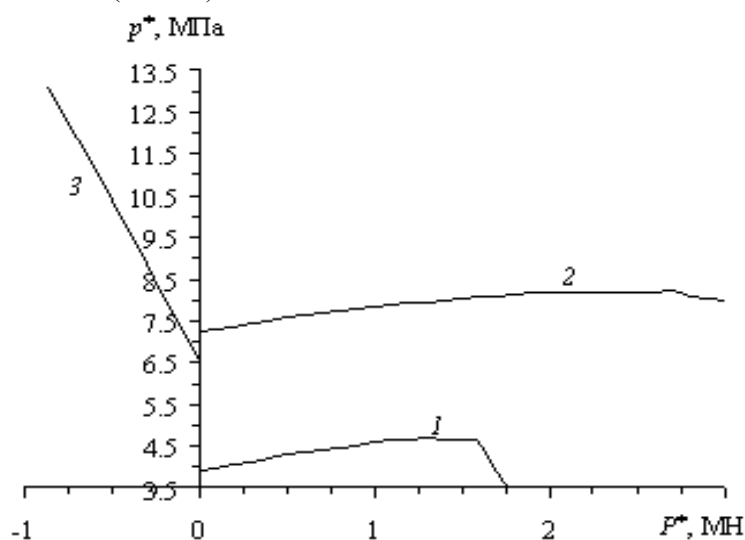


Рис. 4

На рис. 4 изображены кривые, характеризующие зависимости  $p^*(P^*)$  для трех оболочек: кривая 1 соответствует сферической оболочке, линии 2, 3 – ЭОТ2; кривые 1, 2 характеризуют оболочки с меридионально-окружным армированием (параметры армирования даны при описании табл. 2), линия 3 – с окружным армированием, соответствующим правой точке на кривой 3 рис. 1. Кривая 1 на рис. 4 имеет локальный максимум  $p_{\max}^* = 4,68$  МПа при  $P^* = 1,3$  МН, т.е. за счет догружения крышки несущую способность сферической оболочки можно дополнительно повысить на 19,7%. Точка излома на этой линии характеризует смену «механизмов» пластического течения оболочки. Локальный максимум  $p_{\max}^* = 8,17$  МПа на кривой 2 реализуется в точке  $P^* = 1,9$  МН, а значит, за счет догружения крышки несущую способность соответствующей оболочки можно повысить на 12,7%. Поведение кривой 3 показывает, что наибольшего эффекта можно добиться при догружении крышки при ее «срезе». Несущую способность оболочки, соответствующей линии 3, за счет догружения крышки силой  $P_{\max}^* = -0,87$  МН можно увеличить вдвое. (Дальнейшее увеличение внешней нагрузки  $P^*$  по модулю в этом случае на практике не возможно, так как при  $P^* = -0,873$  МН происходит «срез» крышки от этой силы при отсутствии внутреннего давления в оболочке:  $p^* = 0$ .)

В заключение отметим, что выше всюду крышка оболочки предполагалась абсолютно жесткой. В действительности же следовало бы оценить и несущую способность крышки в предположении об абсолютной жесткости оболочки. Для круглых изотропных и металлокомпозитных пластин (каковой и предполагается крышка) это можно сделать методами, изложенными в [1], [4]. Изучение этого вопроса выходит за рамки настоящего исследования в силу ограниченного объема статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–08–00152–а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ерхов, М. И.* Теория идеально пластических тел и конструкций / М. И. Ерхов. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
2. *Композиционные материалы.* Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
3. *Налимов, А. В.* Неединственность решений задач статики жесткопластического тела / А. В. Налимов, Ю. В. Немировский // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XVIII Межресп. конф., Кемерово, 1–3 июля 2003 г. / Под ред. В.М. Фомина. – Новосибирск: Изд-во «Нонпарель», 2003. – С. 115–121.
4. *Немировский, Ю. В.* Влияние структуры армирования и формы профиля на предельное равновесие поперечно изгибаемых кольцевых пластин / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Вестник ННГУ. Серия Механика. – 2006. – Вып. 1 (7). – С. 123–133.
5. *Немировский, Ю. В.* О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т. 3, № 2. – С. 20 – 40.
6. *Немировский, Ю. В.* Предельное равновесие железобетонных куполов вращения / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Изв. вузов. Строительство. – 2005. – № 8. – С. 4–11.
7. *СНиП II–23–81\**: Стальные конструкции / Госстрой России. – М.: ГУП ЦПП, 2003. – 90 с.
8. *Nemirovsky, Yu. V.* Yield surfaces for reinforced concrete Axis-symmetrical plates and shells / Yu. V. Nemirovsky // Archiwum inżynierii ladowej. – 1974. – Т. XX, No 4. 575 – 590.

## НАЧАЛЬНОЕ ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРИ ВЫСАДКЕ ВЫСОКОГО ЦИЛИНДРА

(Московский государственный технологический университет «Станкин»)

Рассмотрено начальное пластическое течение высокого идеально пластического цилиндра при однородном напряженном состоянии в задаче высадки плоским инструментом с различными условиями трения. Показано, что поле скоростей перемещений, зависящее от кинематических граничных условий, оказывается неоднородным и определяет искривление свободной границы цилиндра, удовлетворительно согласующееся с экспериментом.

Процессы высадки утолщений различной формы на концах длинной цилиндрической заготовки широко распространены в машиностроении [4]. Первой операцией обычно является высадка заготовки с большой высотой свободной границы для образования предварительной формы заготовки, обеспечивающей получение окончательной формы утолщения на последующих операциях. Интересной особенностью высадки высокой цилиндрической заготовки на первой операции является однородное напряженное состояние осевого сжатия при неоднородном пластическом течении, которое приводит к образованию криволинейной боковой границы цилиндра.

Ниже приведена расчетная модель начального пластического течения высокого цилиндра при высадке с различными кинематическими граничными условиями для идеально пластической модели материала при условии полной пластичности [2; 3]. Форма искривленной свободной границы цилиндра при малом относительном перемещении инструмента хорошо согласуется с экспериментом при холодной высадке цилиндрической заготовки из малоуглеродистой стали.

На рис.1 показана правая половина расчетной области при высадке цилиндра диаметром  $d$  и высотой  $h$ , закрепленного по диаметру  $d$  в нижнем неподвижном инструменте, плоским подвижным верхним инструментом. Используем цилиндрическую систему координат  $r, z, \theta$  принимая плоскость  $z = 0$  на торце нижнего инструмента. Координаты  $r, z$ , напряжения и скорости перемещений принимаем безразмерными величинами, отнесенными к радиусу цилиндра  $d/2$ , напряжению текучести  $\sigma_s$  и скорости  $V$  подвижного инструмента, соответственно.

В случае идеально гладкого или шероховатого верхнего инструмента при  $h > 1$  или  $h > 2$  соответственно, напряженное состояние цилиндра в пластической области определяется свободной границей  $AB$  как однородное осевое сжатие с прямолинейными линиями скольжения  $\zeta$  и  $\eta$  в пластической области

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0, \sigma_z = -1, \varphi = -\pi/4, \quad (1)$$

где  $\varphi$  – угол наклона  $\zeta$  – линии скольжения с осью  $r$ .

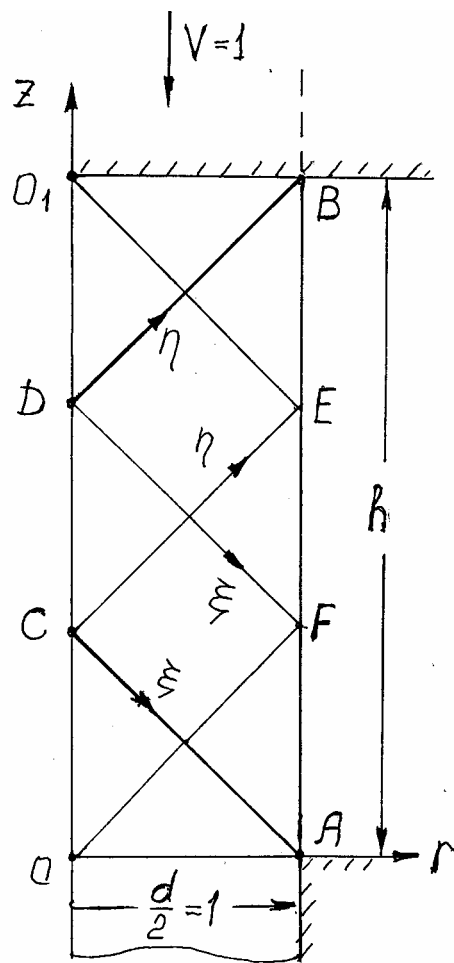


Рис. 1

Линия скольжения  $AC$  является границей пластической области с жесткой областью цилиндра, ограниченного нижним неподвижным инструментом. При наличии контактного трения на границе подвижного верхнего инструмента линия скольжения  $BD$  также является жесткопластической границей с жесткой областью  $BDO_1$ , перемещающейся вместе с инструментом. Прямолинейные линии скольжения могут быть продолжены в жесткие области, как показано на рис.1, поэтому однородное напряженное состояние осевого сжатия (1) является статически допустимым. Поле линий скольжения с жесткопластической границей  $BD$  справедливо также при наличии канала диаметром  $d$  в верхнем инструменте, как показано на рис.1 штриховой линией. В случае идеально гладкого плоского верхнего инструмента область  $BDO_1$  является пластической с неоднородным полем скоростей перемещений.

Для расчета скоростей перемещений в пластической области используем дифференциальные соотношения вдоль линий скольжения, которые при положительной радиальной скорости перемещения имеют вид [1]

$$dV_{\xi} - V_{\eta}d\varphi + \frac{V_{\xi}dr - V_{\eta}dz}{2r} = 0 \quad \text{вдоль } \xi, \quad (2)$$

$$dV_{\eta} + V_{\xi}d\varphi + \frac{V_{\xi}dz + V_{\eta}dr}{2r} = 0 \quad \text{вдоль } \eta. \quad (3)$$

Скорости перемещений вдоль линий скольжения  $V_{\xi}$  и  $V_{\eta}$  связаны со скоростями перемещений  $V_r$  и  $V_z$  в цилиндрических координатах соотношениями, которые при  $\varphi = -\pi/4$  имеют вид

$$V_{\xi} = (V_r - V_z)/\sqrt{2}, \quad V_{\eta} = (V_r + V_z)/\sqrt{2}, \quad (4)$$

$$V_r = (V_{\xi} + V_{\eta})/\sqrt{2}, \quad V_z = (V_{\eta} - V_{\xi})/\sqrt{2}. \quad (5)$$

При  $\varphi = -\pi/4$  имеем соотношения  $dz = -dr$  вдоль  $\xi$ - линии скольжения и  $dz = dr$  вдоль  $\eta$ - линии скольжения, и дифференциальные соотношения (2), (3) при  $d\varphi = 0$  принимают вид

$$dV_{\xi} + \frac{(V_{\xi} + V_{\eta})dr}{2r} = 0 \quad \text{вдоль } \xi, \quad (6)$$

$$dV_{\eta} + \frac{(V_{\xi} + V_{\eta})dr}{2r} = 0 \quad \text{вдоль } \eta. \quad (7)$$

Заметим, что при сжатии цилиндра идеально гладкими плитами однородному напряженному состоянию (1) соответствует однородное поле скоростей деформаций

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{\theta} = 1/2h, \quad \varepsilon_z = -1/h \quad (8)$$

и линейное изменение скоростей перемещений

$$V_r = r/2h, \quad V_z = -z/h, \quad (9)$$

удовлетворяющее кинематическим граничным условиям

$$V_r = 0 \text{ при } r = 0, \quad V_z = 0 \text{ при } z = 0, \quad V_z = -1 \text{ при } z = h. \quad (10)$$

В этом случае нестационарный процесс пластического сжатия цилиндра оказывается автомодельным с неизменным напряженно-деформированным состоянием без искривления боковой границы при уменьшении высоты  $h$ . Девиатор напряжений напряженного состояния (1) имеет вид

$$S_r = S_{\theta} = 1/3, \quad S_z = -2/3. \quad (11)$$

Из соотношений (8) и (11) следует пропорциональность девиаторов напряжений и скоростей деформаций в соответствии с теорией течения Мизеса.

В рассматриваемой ниже задаче высадки цилиндра условие соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций выполняется, как и в приведенной выше задаче сжатия цилиндра гладкими плитами. Но вследствие изменения кинематических граничных условий для скоростей перемещений пропорциональность девиаторов напряжений и скоростей деформаций не имеет места, тогда как условие неотрицательности диссипации энергии в пластической области выполняется, и полученное решение является полным в рамках теории идеальной пластичности [1-3].

На неподвижной жесткопластической границе  $AC$  скорости перемещений непрерывны

$$V_{\xi} = 0, \quad V_{\eta} = 0, \quad z = 1 - r, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (12)$$

В случае трения на границе контакта с верхним инструментом непрерывны скорости перемещений  $V_r = 0$ ,  $V_z = -1$  на жесткопластической границе  $BD$ , и из соотношений (4) находим

$$V_\xi = 1/\sqrt{2}, \quad V_\eta = -1/\sqrt{2}, \quad z = h - 1 + r, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (13)$$

В случае гладкой границы верхнего инструмента непрерывна только скорость  $V_z = -1$ , и из второго соотношения (5) следует

$$V_\xi = V_\eta + \sqrt{2}, \quad z = h, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (14)$$

На оси симметрии принимаем линейное изменение скоростей перемещений аналогичное соотношениям (9). В случае трения на границе контакта с верхним инструментом скорости на отрезке  $CD$  оси симметрии имеют вид

$$V_z = \frac{1-z}{h-2}, \quad V_r = 0, \quad r = 0, \quad 1 \leq z \leq h-1. \quad (15)$$

В случае гладкой границы контакта с верхним инструментом скорости перемещений на отрезке  $CO_1$  оси симметрии имеют вид

$$V_z = \frac{1-z}{h-1}, \quad V_r = 0, \quad r = 0, \quad 1 \leq z \leq h. \quad (16)$$

Граничные условия для скоростей перемещений вдоль линий скольжения на указанных отрезках оси симметрии находим из соотношений (4)

$$V_\eta = -V_\xi = V_z / \sqrt{2}. \quad (17)$$

Поле скоростей перемещений в пластической области находили численным интегрированием дифференциальных соотношений (6), (7) с граничными условиями (12) – (17). В случае трения на границе верхнего инструмента сначала определяли скорости перемещений в области  $ACDF$ , решая задачу Коши с граничными условиями (15), (17) на отрезке  $CD$  оси симметрии, с последующим решением задачи Гурса с граничными условиями (12) на  $\xi$ - линии скольжения  $AC$  и известными скоростями перемещений на  $\eta$ - линии скольжения, проходящей через точку  $C$ . Затем определяли скорости перемещений в области  $BDF$  из решения задачи Гурса с граничными условиями (13) на  $\eta$ - линии скольжения  $BD$  и известными скоростями перемещений на  $\xi$ - линии скольжения  $DF$ . В случае гладкой границы верхнего инструмента сначала определяли скорости перемещений в области  $ACO_1EA$ , решая задачу Коши с граничными условиями (16), (17) на отрезке  $CO_1$  оси симметрии, с последующим решением смешанной задачи в области, ограниченной линиями скольжения, проходящими через точки  $O_1$  и  $B$ , с граничными условиями (14) на  $O_1B$ , и задачи Гурса в области, ограниченной линиями скольжения проходящими через точки  $B$  и  $E$  с известными на них скоростями перемещений.

Расчеты выполняли для сетки линий скольжения с квадратными ячейками и постоянным шагом  $\Delta r$  между узловыми точками. Дифференциалы и переменные в соотношениях (6) и (7) заменяли конечными разностями и средними значениями между узловыми точками и получали линейную систему уравнений, решение которой для регулярных узлов имеет вид

$$V_\xi = [b_1 + a(b_1 - b_2)] / (1 + 2a), \quad (18)$$

$$V_\eta = [b_2 - a(b_1 - b_2)] / (1 + 2a), \quad (19)$$

$$a = \frac{\Delta r}{2(2r_{12} + \Delta r)}, b_1 = V_{\xi 1} - a(V_{\xi 1} + V_{\eta 1}), b_2 = V_{\eta 2} - a(V_{\xi 2} + V_{\eta 2}), \quad (20)$$

Координаты  $r$  и скорости перемещений с нижними индексами 1 и 2 в соотношениях 20 обозначают известные переменные в узловых точках 1 и 2 на  $\xi$ - и  $\eta$ - линиях скольжения соответственно. Аппроксимация дифференциального соотношения (7) конечными разностями и граничное условие (14) определяют значения скоростей перемещений в узлах сетки на гладкой границе инструмента

$$V_{\eta} = (b_2 - \sqrt{2} a) / (1 + 2a), V_{\xi} = V_{\eta} + \sqrt{2}, \quad (21)$$

Коэффициенты  $a$  и  $b_2$  в (21) определяются соотношениями (20).

Приведенные ниже численные результаты получены на сетке с шагом  $\Delta r = 0.0167$ . Профили, рассчитанные по скоростям перемещений  $V_r, V_z$  границы  $AB$  цилиндра для шероховатого (1) и гладкого (2) верхнего инструмента для  $h = 4.6$  и перемещения  $\Delta h = 0.8$ , и  $h = 2$  и  $\Delta h = 0.35$  показаны на рис. 2 и 3 соответственно.

При высадке цилиндра высотой  $h = 4.6$  шероховатым инструментом выпуклый профиль боковой поверхности оказывается несимметричным со смещением максимума к верхнему подвижному

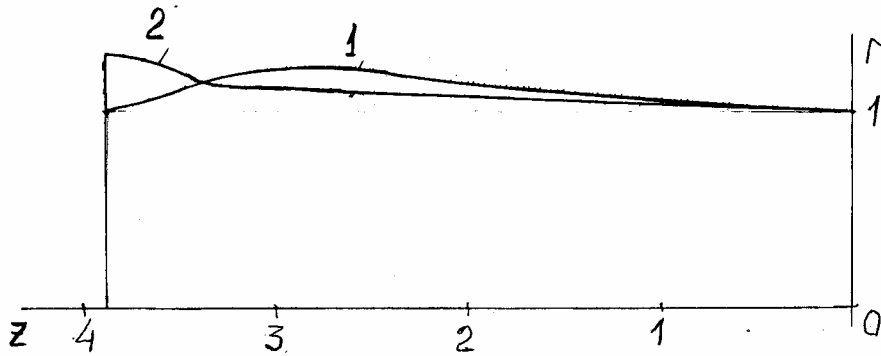


Рис. 2

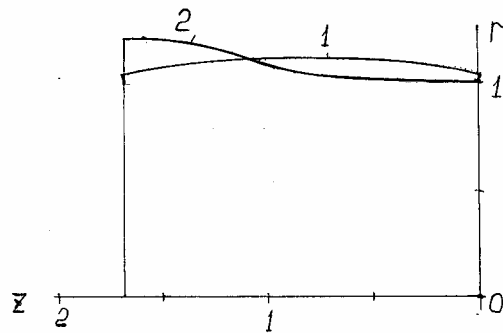


Рис. 3



инструменту. При высоте цилиндра высотой  $h = 2$  жесткопластическая граница  $BD$  совпадает с линией скольжения  $CE$  (рис. 1), и в точке  $D$  на оси симметрии скорость  $V_z$  меняется скачком от  $-1$  до нуля. В результате этого вдоль линий скольжения ближайших к жесткопластическим границам происходит быстрое изменение скоростей, и на боковой поверхности цилиндра в точках ближайших к точкам  $A$  и  $B$  наблюдается сдвиговой характер смещения. На остальной части боковой границы скорости перемещений изменяются плавно и приводят к образованию симметричного выпуклого профиля (рис. 3).

При высадке цилиндра гладким инструментом (кривые 2 на рис. 2 и 3) скорости перемещений непрерывны во всей пластической области. Профиль смещенной боковой поверхности цилиндра получается выпукло-вогнутым с максимумом на границе подвижного инструмента и плавным переходом к конической поверхности около нижнего неподвижного инструмента.

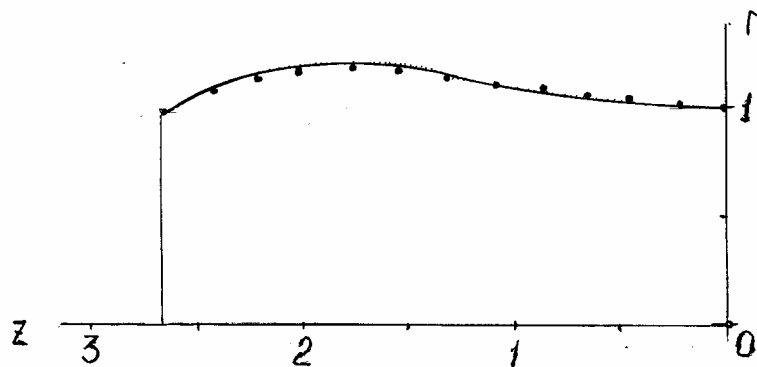


Рис. 4

На рис. 4 показано сравнение расчетного (сплошная кривая) и экспериментального (•) профилей боковой границы цилиндра, ограниченного по диаметру  $d$  в полостях подвижного и неподвижного инструмента, для  $h = 3.47$  и  $\Delta h = 0.8$ . Материал цилиндра – малоуглеродистая сталь. Диаметр цилиндра  $d = 10$  мм. Измерение профиля после высадки выполнено с точностью  $0.1$  мм. Расчетный профиль практически совпадает с экспериментальным профилем с точностью до погрешностей измерений.

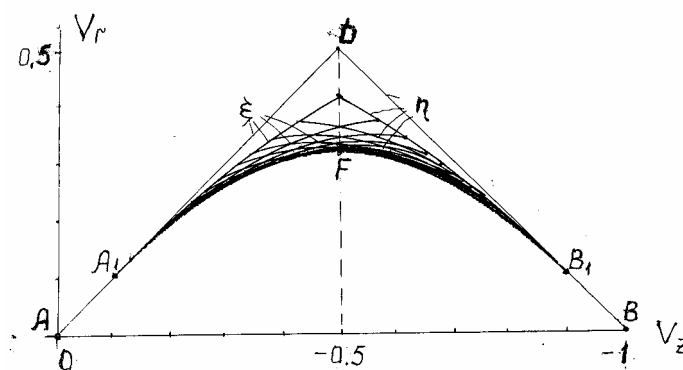


Рис. 5

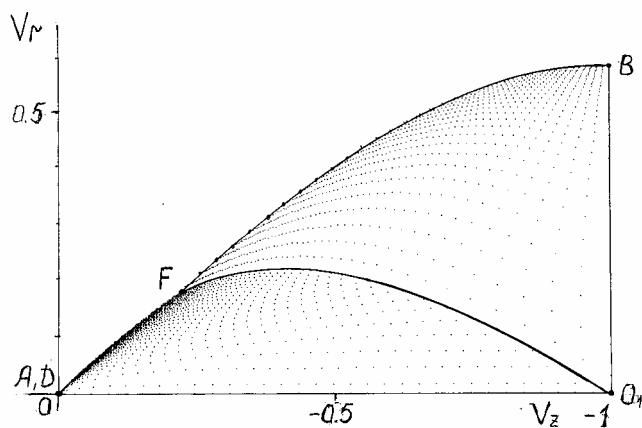


Рис. 6

На рис. 5 и 6 показаны годографы скоростей перемещений на плоскости  $\{V_r, V_z\}$  для шероховатого и гладкого инструмента соответственно при  $h = 2$ .

При шероховатом подвижном инструменте (рис. 5) линии скольжения  $AD$  и  $BD$  отображаются на плоскости годографа прямыми линиями с разрывом скорости  $1/\sqrt{2}$ . Отображение  $\xi$ - и  $\eta$ - линий скольжения симметрично относительно нормальной плоскости, проходящей через точку  $D$ , на которой скорость  $V_z = -0.5$  постоянна. Линии скольжения обоих семейств на плоскости годографа асимптотически приближаются к куполообразной огибающей  $AFB$ , отображающей боковую границу цилиндра. Из годографа видно, что в большей части пластической области скорости перемещений близки к скоростям боковой границы. Линии годографа  $AFB$  на рис. 3 соответствует симметричный профиль 1 с угловыми точками около точек  $A$  и  $B$  инструмента, которым на плоскости годографа соответствуют точки  $A_1$  и  $B_1$ .

При гладком подвижном инструменте поле скоростей непрерывно и отображается на плоскости годографа (рис. 6) точками, соответствующими узловым точкам поля линий скольжения. Линии  $B$  годографа соответствует профиль 2 смещенной боковой границы на рис. 3. Отрезку  $FB$  линии годографа на рис. 3 соответствует выпукло-вогнутая часть профиля 2, и отрезку  $AF$  годографа – коническая часть профиля 2 около неподвижного инструмента.

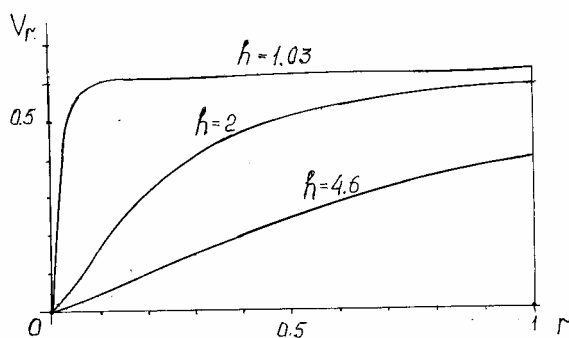


Рис. 7

На рис. 7 показаны распределения радиальной скорости перемещения на границе контакта с гладким подвижным инструментом для трех значений  $h$ , при которых поле скоростей перемещений в пластической области непрерывно. Из этого рисунка видно нелинейное распределение скоростей даже при больших значениях  $h$ . При  $h \rightarrow 1$  изменение скорости приближается к разрывному в малой области около оси симметрии при малом изменении скоростей в большей части пластической области. Этот предел соответствует средней линии  $V_z = -0.5$  на рис. 5, и среднему сечению симметричного профиля 1 на рис. 3.

г. Москва

Поступила: 13 ноября 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Друянов, Б. А. Теория технологической пластичности / Б. А. Друянов, Р. И. Непершин. – М. : Машиностроение, 1990. – 272 с.
2. Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М.: Наука, 1966. – 232 с.
3. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
4. Машиностроение. Энциклопедия. Том III-2. Технологии заготовительных производств. – М. : Машиностроение, 1996. – 209. – 212 с.

## ОБ ОДНОЙ СИММЕТРИИ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

(Сибирский государственный аэрокосмический университет имени  
М. Ф. Решетнева)

В статье рассмотрена одна из симметрий уравнений двумерной идеальной пластичности. Впервые приведено соответствующее ей точечное преобразование, которое названо квазирастяжением, и изучены некоторые его свойства. Показано как оно действует на характеристики решения Прандтля.

1. Рассмотрим двумерные уравнения идеальной пластичности записанные в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x - 2K(\theta_x \cos 2\theta + \theta_y \sin 2\theta) &= 0, \\ \sigma_y - 2K(\theta_x \sin 2\theta - \theta_y \cos 2\theta) &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\sigma$  – гидростатическое давление,  $\theta$  – угол между первым главным направлением тензора напряжений и осью  $Ox$ ,  $K$  – постоянная пластичности, индекс внизу означает дифференцирование.

Известно[1], что система уравнений допускает, в смысле Ли, бесконечномерную алгебру Ли операторов, которая порождается базисом

$$\begin{aligned}X_1 &= \partial_\sigma, \quad X_2 = x\partial_x + y\partial_y, \\ X_3 &= -y\partial_x + x\partial_y + \partial_\theta, \\ X_4 &= \left(x\cos 2\theta + y\sin 2\theta + \frac{y_\sigma}{K}\right)\partial_x + \\ &+ \left(x\sin 2\theta - y\cos 2\theta - \frac{x_\sigma}{K}\right)\partial_y - 4K\theta_\sigma - \frac{\sigma}{K}\partial_\theta, \\ X_5 &= \xi^+(\sigma, \theta)\partial_x + \eta^+(\sigma, \theta)\partial_y.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь оператор  $X_5$  порождает бесконечный идеал алгебры Ли (2), при этом коэффициенты  $\xi^+, \tau^+$  оператора  $X_5$  являются произвольными решениями следующей линейной системы уравнений

$$\begin{aligned}\xi_\theta^+ - 2K(\xi_\sigma^+ \cos 2\theta + \eta_\sigma^+ \sin 2\theta) &= 0, \\ \eta_\theta^+ - 2K(\xi_\sigma^+ \sin 2\theta - \eta_\sigma^+ \cos 2\theta) &= 0.\end{aligned}$$

2. Каждый оператор из (2) порождает однопараметрическую группу непрерывных преобразований, допускаемых системой (1). Для каждого оператора, кроме  $X_4$ , эти группы известны. Приведем их. Оператор  $X_1$  порождает однопараметрическую группу трансляций

$$\sigma' = \sigma + a_1,$$

где  $a_1$  – групповой параметр.

Оператор  $X_2$  порождает однопараметрическую группу гомотетий (растяжений) в плоскости  $xу$

$$x' = x \exp a_2, \quad y' = y \exp a_2.$$

Оператор  $X_3$  порождает группу вращений

$$\begin{aligned} x' &= x \cos a_3 + y \sin a_3, \\ y' &= -x \sin a_3 + y \cos a_3, \\ \theta' &= \theta + a_3. \end{aligned}$$

Оператор  $X_5$  порождает обобщенную группу трансляций (переносов) на плоскости переменных  $xу$ .

$$x' = x + a_5 \xi^+(\sigma, \theta), \quad y' = y + a_5 \eta^+(\sigma, \theta).$$

Можно показать, выкладки для краткости опущены, что оператор  $X_4$  порождает однопараметрическую группу следующих преобразований

$$\begin{aligned} x' &= \cos \theta' (x \cos \theta + y \sin \theta) \exp a - \sin \theta' (-x \sin \theta + y \cos \theta) \exp(-a), \\ y' &= \sin \theta' (x \cos \theta + y \sin \theta) \exp a + \cos \theta' (-x \sin \theta + y \cos \theta) \exp(-a), \end{aligned}$$

$$\sigma' = K \left[ \left( \frac{\sigma}{2K} - \theta \right) \exp 2a + \left( \frac{\sigma}{2K} + \theta \right) \exp(-2a) \right], \quad (3)$$

$$\theta' = \frac{1}{2} \left[ - \left( \frac{\sigma}{2K} - \theta \right) \exp 2a + \left( \frac{\sigma}{2K} + \theta \right) \exp(-2a) \right],$$

где для удобства параметр  $a_4$  заменен символом  $a$ . Преобразования (3) мы назовем квазирастяжением. Откуда следует это название будет видно из свойств преобразований (3).

3. Некоторые свойства преобразования (3).

А) Нетрудно убедиться, что преобразование (3) соответствует оператору  $X_4$ . Для этого следует проверить равенства:

$$\left. \frac{dx'}{da_4} \right|_{a_4=0} = x \cos 2\theta + y \sin 2\theta + y \frac{\sigma}{K},$$

$$\left. \frac{dy'}{da_4} \right|_{a_4=0} = x \sin 2\theta - y \cos 2\theta - \frac{x\sigma}{K},$$

$$\left. \frac{d\sigma'}{da_4} \right|_{a_4=0} = -4K\theta, \quad \left. \frac{d\theta'}{da_4} \right|_{a_4=0} = -\frac{\sigma}{K}.$$

В) Для лучшего понимания смысла преобразования (3) умножим  $x'$  на  $\cos \theta'$ ,  $y'$  на  $\sin \theta'$  и сложим. Получаем

$$x' \cos \theta' + y' \sin \theta' = (x \cos \theta + y \sin \theta) \exp a_4$$

Теперь умножим  $x'$  на  $\sin \theta'$ ,  $a y'$  на  $\cos \theta'$  и сложим. Получаем

$$-x' \sin \theta' + y' \cos \theta' = (-x \sin \theta + y \cos \theta) \exp(-a_4).$$

Умножим  $\sigma'$  на  $\frac{1}{2K}$  и сложим с  $\theta'$ . Получаем

$$\frac{\sigma'}{2K} - \theta' = \left( \frac{\sigma}{2K} - \theta \right) \exp(2a_4).$$

Аналогично получаем

$$\frac{\sigma'}{2K} + \theta' = \left( \frac{\sigma}{2K} + \theta \right) \exp(-2a_4).$$

Полученные преобразования можно компактно записать в виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \bar{x} \exp a_4, \quad \bar{y}' = \bar{y} \exp(-a_4), \\ \xi' &= \xi \exp(2a_4), \quad \eta' = \eta \exp(-2a_4). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\xi, \eta$  инвариантны. Римана уравнения (1), которые постоянны вдоль характеристик этой системы, а  $\bar{x} = x \cos \theta + y \sin \theta$ ,  $\bar{y} = -x \sin \theta + y \cos \theta$  переменные предложенные Михлиным.

Из формул (4) следует и название преобразования (3) – квазирастяжение.

С) Используя формулы (4) найдем инвариантные преобразования (3). Независимых вариантов будет 3. Вот они:

$$\begin{aligned} I_1 &= \bar{x}\bar{y} = (x \cos \theta + y \sin \theta)(-x \sin \theta + y \cos \theta), \\ I_2 &= \xi \tau = \left( \frac{\sigma}{2K} - \theta \right) \left( \frac{\sigma}{2K} \right), \\ I_3 &= \xi \cdot \bar{y}^2 = \left( \frac{\sigma}{2K} \right) (-x \sin \theta + y \cos \theta)^2. \end{aligned}$$

Инварианты  $I_1, I_2, I_3$  можно использовать для построения инвариантных решений системы уравнений (1). Это будет сделано в последующих работах.

4. Покажем, как действует построенное преобразование (3) на решения уравнений идеальной пластичности.

В качестве примера такого решения возьмем решение Прандтля, которое запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma &= -K \left( x - 2\sqrt{1-y^2} \right), \\ \cos \theta &= y. \end{aligned}$$

Это решение можно использовать для описания сжатия пластического слоя между жесткими плитами.

Известно, что это решение имеет две характеристики

$$\begin{aligned} x &= -2\theta + \sin 2\theta + c_1, \quad y = \cos 2\theta, \\ x &= 2\theta - \sin 2\theta + c_2, \quad y = \cos 2\theta \end{aligned} \quad (5)$$

и соотношения на них

$$\frac{\sigma}{2K} - \theta = c_1, \quad \frac{\sigma}{2K} + \theta = c_2,$$

где  $c_i$  – произвольные постоянные. Подействуем преобразованием (3) на первую характеристику (5). Для простоты будем считать, что  $c_1 = 0$ , а это значит, что мы рассматриваем характеристику, проходящую через точку (0,1).

В результате, после несложных преобразований, получаем

$$\begin{aligned} x \left( \cos \theta' \cos \theta \exp \frac{a}{2} + \sin \theta' \sin \theta \exp \left( -\frac{a}{2} \right) \right) + y \left( \cos \theta' \sin \theta \exp \frac{a}{2} - \sin \theta' \cos \theta \exp \left( -\frac{a}{2} \right) \right) = \\ = -2\theta' + \sin 2\theta', \\ x \left( \sin \theta' \sin \theta \exp \frac{a}{2} - \cos \theta' \sin \theta \exp \left( -\frac{a}{2} \right) \right) + y \left( \sin \theta' \sin \theta \exp \frac{a}{2} + \cos \theta' \cos \theta \exp \left( -\frac{a}{2} \right) \right) = \\ = \cos 2\theta', \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\theta' = \theta \exp(-a)$ .

Найдем  $x$  и  $y$  из системы уравнений (6). Решение этой системы облегчается тем, что ее определитель равен 1.

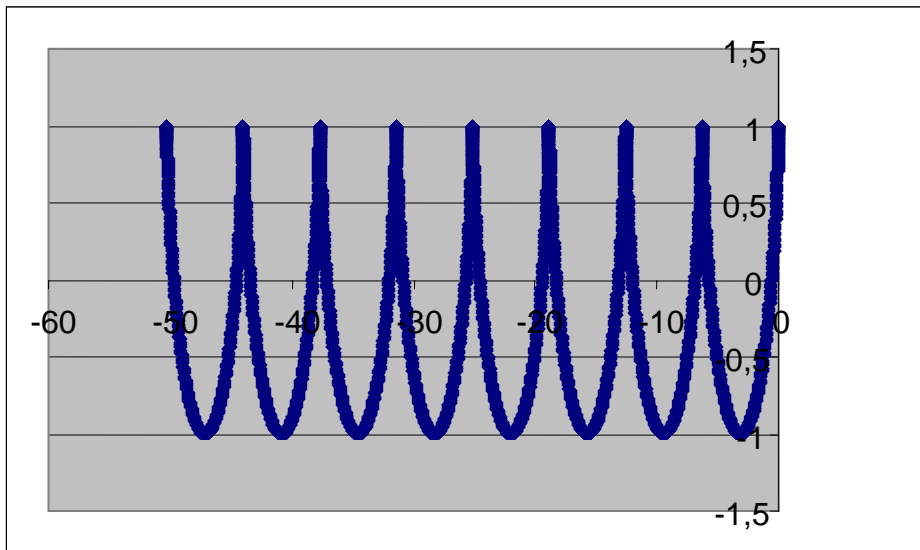
В результате имеем:

$$\begin{aligned} x = (-2\theta' + \sin \theta') \cdot \left( \sin \theta' \sin \theta \exp \frac{a}{2} + \cos \theta' \cos \theta \exp \left( -\frac{a}{2} \right) \right) - \cos 2\theta' \times \\ \times \left( \cos \theta' \sin \theta \exp \frac{a}{2} - \sin \theta' \cos \theta \exp \left( -\frac{a}{2} \right) \right), \\ y = \cos 2\theta' \left( \cos \theta' \cos \theta \exp \frac{a}{2} + \sin \theta' \sin \theta \exp \left( -\frac{a}{2} \right) \right) + (2\theta' - \sin 2\theta') \times \\ \times \left( \sin \theta' \cos \theta \exp \frac{a}{2} - \cos \theta' \sin \theta \exp \left( -\frac{a}{2} \right) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

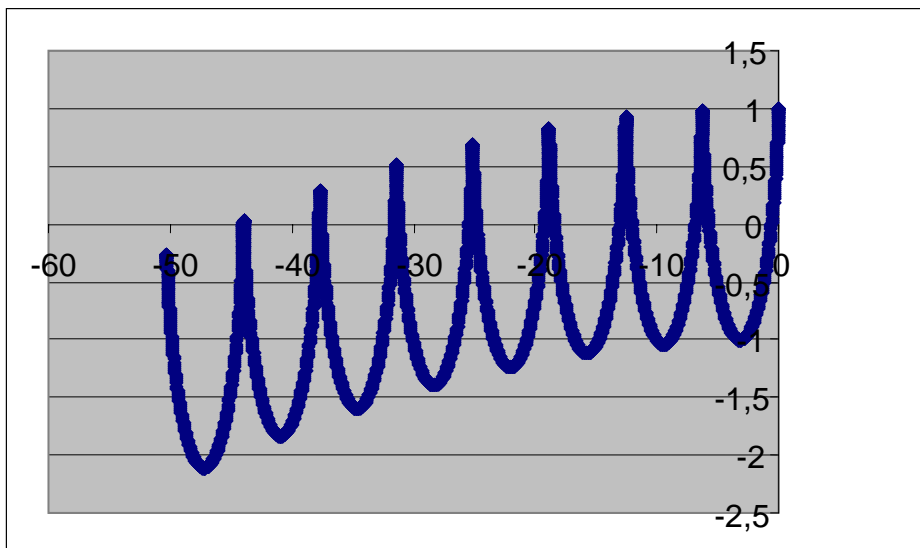
где  $\theta' = \theta \exp(-a)$ .

Формула (7) дает эволюцию характеристики решения Прандтля под действием преобразования (3), соответствующего оператору  $X_4$ .

Приведем графики этой характеристики при разных значениях группового параметра  $a$ .



**Рис. 1.** График характеристики решения Прандтля.  $a = 0$



**Рис. 2.** График преобразованной характеристики решения Прандтля.  $a = 0,001$



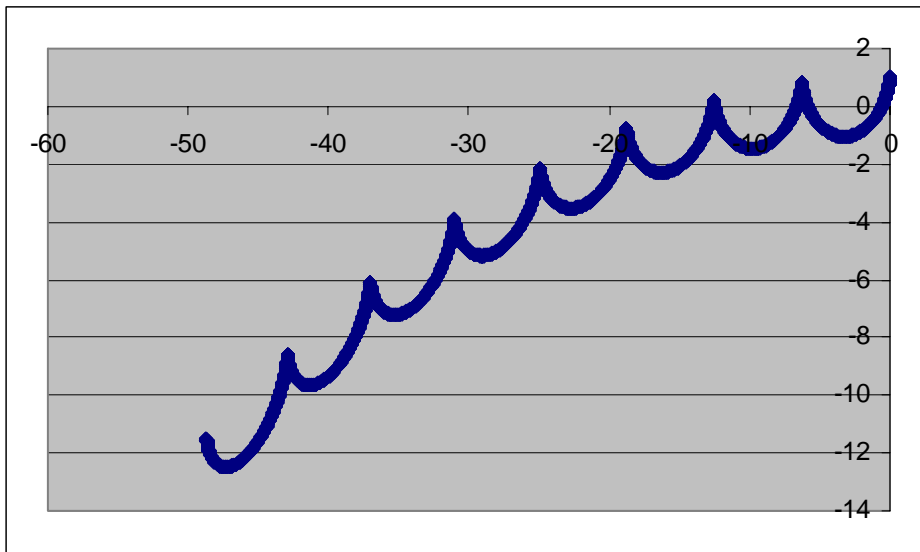


Рис. 3. График преобразованной характеристики решения.  $a = 0,01$

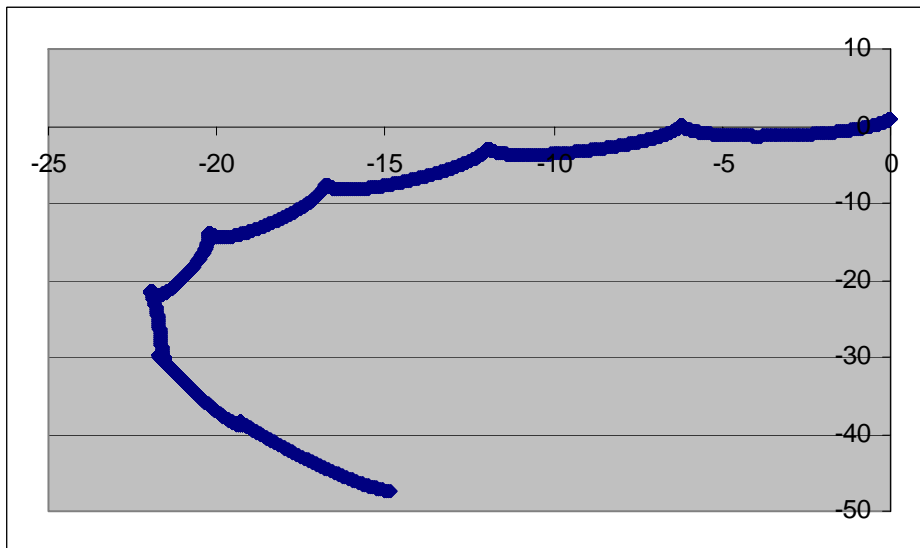


Рис. 4. График преобразованной характеристики решения.  $a = 0,05$

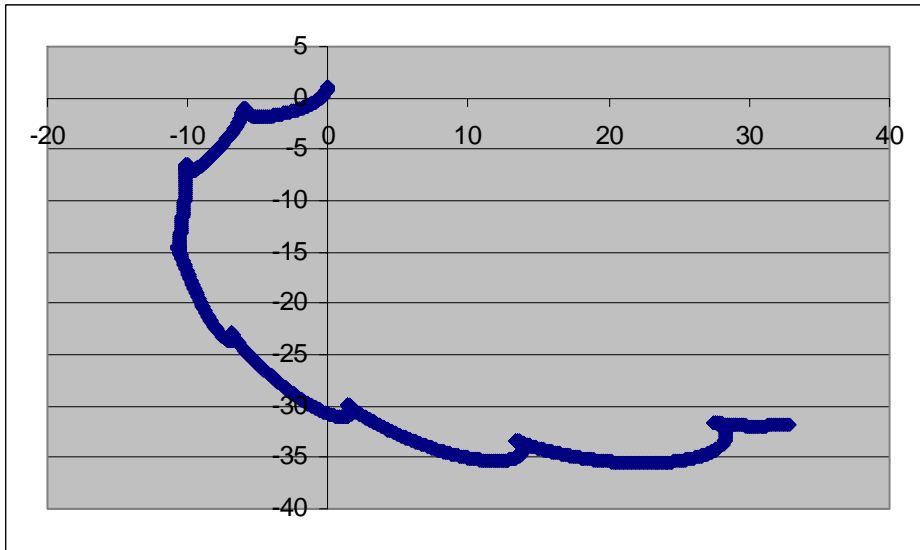


Рис. 5. График преобразованной характеристики решения.  $a = 0,1$

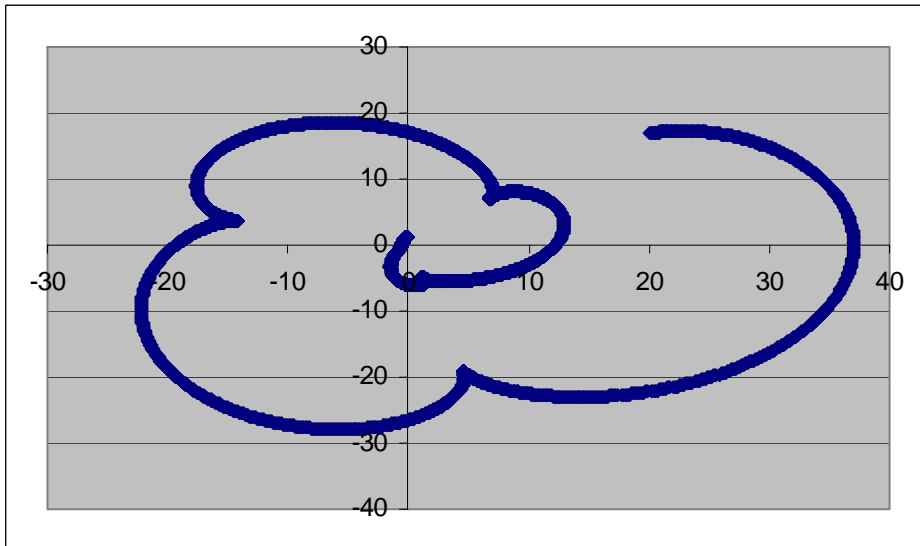


Рис. 6. График преобразованной характеристики решения.  $a = 0.5$

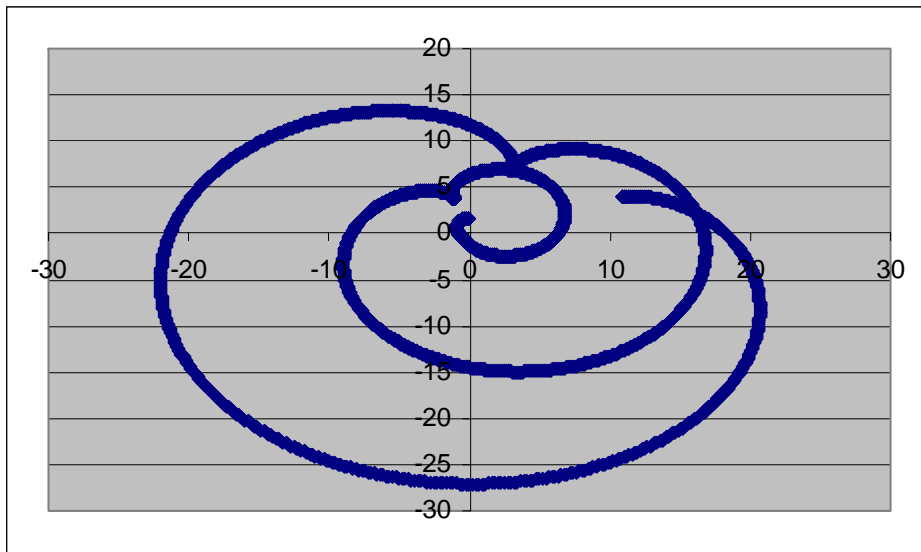


Рис 7. График преобразованной характеристики решения.  $a = 1$

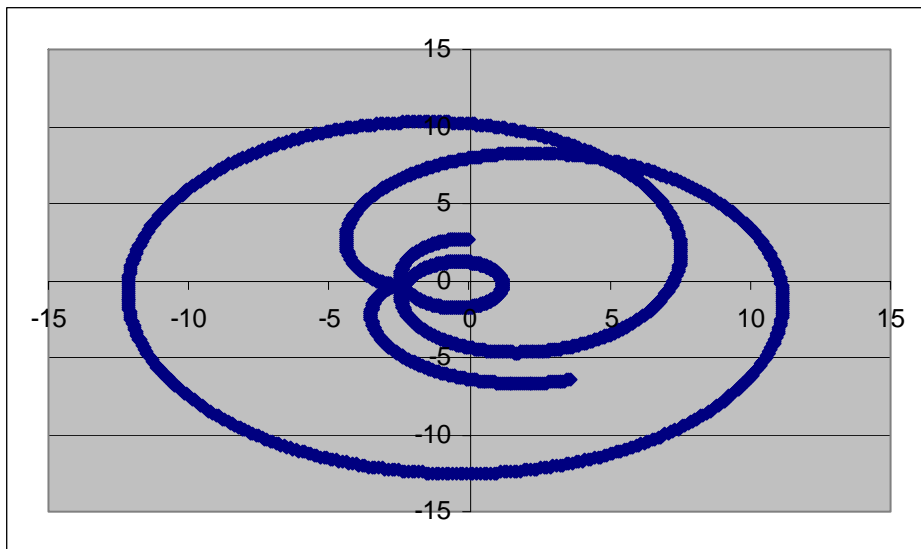


Рис 8. График преобразованной характеристики решения.  $a = 2$

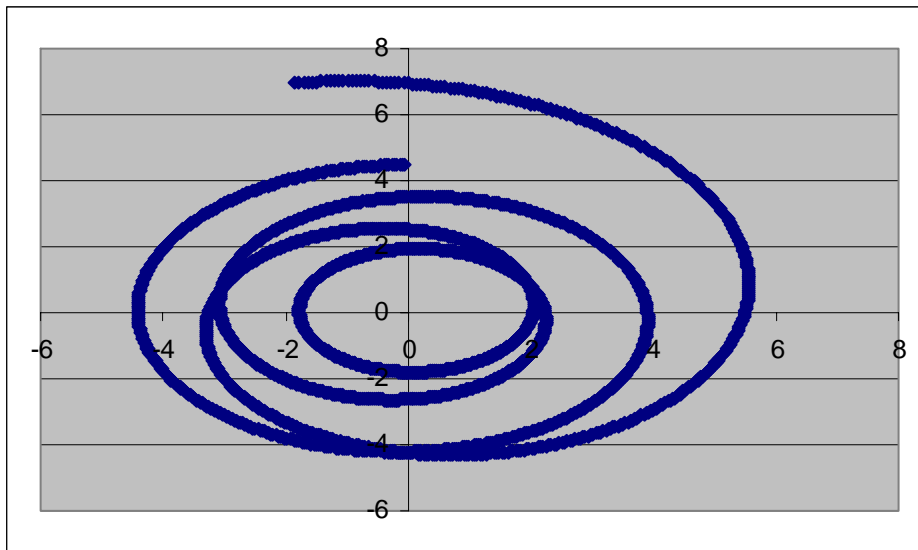


Рис. 9. График преобразованной характеристики решения.  $a = 3$

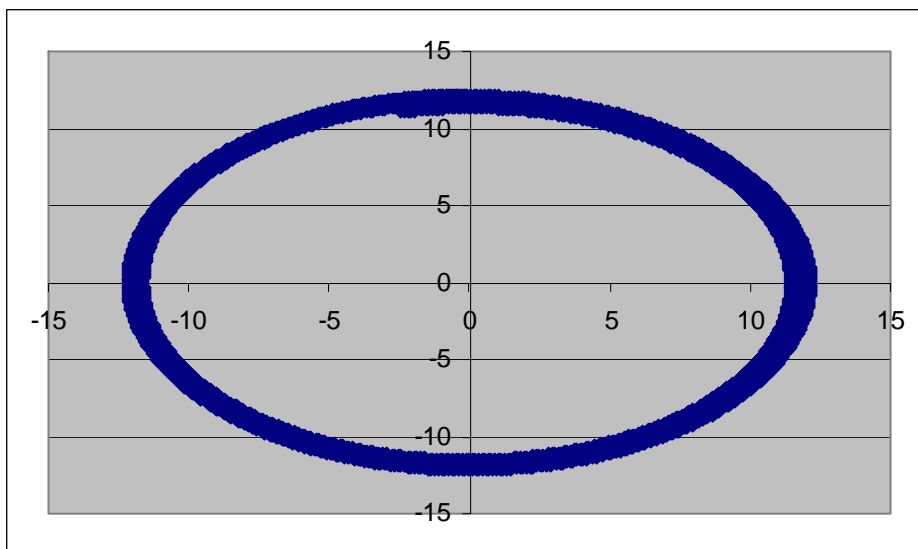


Рис.10. График преобразованной характеристики решения.  $a = 5$

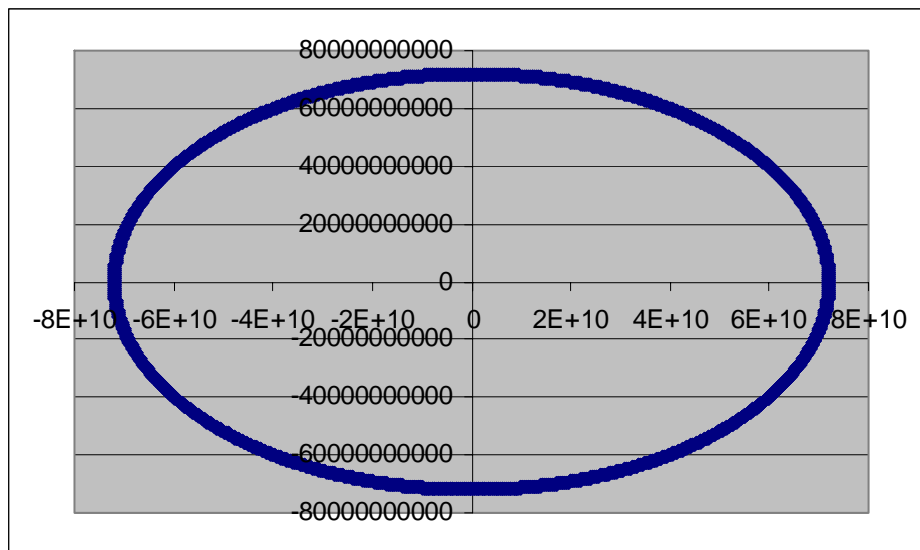


Рис.11. График преобразованной характеристики решения.  $a = 50$

Все решения, изображенные на рисунках 1 – 11 построены в EXCEL с шагом 0,001. Пусть  $a$  – большой параметр, тогда из формул (7) без труда получаем

$$x = -\sin \theta \exp \frac{a}{2}, y = \cos \theta \exp \frac{a}{2}. \quad (8)$$

Это значит, что при больших значениях параметра  $a$  характеристики совершают осцилляции около окружности, заданной параметрическими формулами (8).

Такие осцилляции видны на рис. 10 и 11. Это значит, что решение, которому соответствуют эти характеристики может служить для описания пластического течения материала между коаксильными цилиндрами.

Более подробное описание этих и других решений будет дано в последующих работах.

г. Красноярск

Поступила: 17 декабря 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Киряков, П. П. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. – 190 с.

ON THE COLLAPSE OF THREE TOWERS IN NEW YORK  
ON SEPTEMBER 11, 2001

*(Florida International University)*

**Abstract.** The purpose of this paper is to estimate the floors where the New York collapses started from based on the well-documented evidence that all collapses took time equal to free fall time. An earlier analysis of the government-supported, progressive failure version showed that all collapses started significantly lower than the floors subjected to fire as a result of impact of terrorist planes, see Cherepanov and Esparragoza (2007) in *Int. J. Fracture*, V. 143, pp 203-206. A new, more sophisticated analysis of the New York collapses called the hybrid theory is advanced below. It explores the possibility that collapses started on several floors simultaneously, not in one floor as suggested in all previous theories. According to the hybrid theory the collapses of World Trade Center towers ran in two phases: (i) in the first phase dynamic fracture waves disintegrated a part of the towers producing the dust cloud and explosion sound well-documented and well-evidenced, and (ii) in the second phase the progressive failure front disintegrated the lower part of the towers that remained intact in the first phase. To illustrate many possible modes of progressive failure the slowest mode, the fastest mode, and three intermediate modes were first studied below and then the hybrid mode was introduced. The hybrid theory allows one to get rid of evident defects of earlier theories and explain all basic facts and observations of the matter not understood before, in particular, why the time of all collapses was free fall time independent of the position of critical floors the collapses started from. It was shown that the floors disintegrated in the very beginning of the collapses were located considerably lower than the floors hit by terrorists and subjected to fire. And so, this most sophisticated analysis of the New York collapses confirms the earlier conclusion and suggests that fracture waves were produced by explosives and not arisen from thermal stresses of fire as hypothesized earlier. The numerical work in the present paper was done by Prof. I. E. Esparragoza from Pennsylvania State University.

**Keywords:** Collapse, tower, WTC, mechanics, theory, evidence, observation, dust cloud, explosion, free fall, critical floor, fracture wave, progressive failure, the slowest mode, the fastest mode, intermediate mode, hybrid mode, analysis, calculations

## **1. Introduction**

Progressive failure was the common mode of all collapses of tall buildings as emphasized by Bazant and Verdure (2006). In an earlier paper by Bazant and Zhou (2002) they expressed the belief of civil engineers of the world that progressive failure runs in the free fall regime, which seemed to have supported the government version of the New York collapses because of the well-known observation of the free fall time of all collapses.

According to the government version these collapses represented a simple progressive failure caused by the following chain of bad events: the crush of terrorist plane into a critical

floor set a fire, severed 13% of the total of 287 steel columns and stripped fire insulation from all columns that collapsed in one hour from creep buckling, which triggered the start of general progressive collapse by buckling floor-by-floor up to the ground. Bazant and Verdure (2006) indicated that the towers would have survived if not all fire insulation had been stripped. National Institute of Standards studied column fragments in the rubble and established that all fire insulation had been stripped, but I think it was stripped during the collapse and not by terrorists.

The government theory of progressive failure proves to be inconsistent with all facts and observations on the initial stage of the collapses, see in this issue the previous paper by G.P. Cherepanov entitled “A critical analysis of the government theory: the collapse of the New York towers on September 11, 2001”. However, on the final stage, it is well-confirmed by visual observations which show the progressive failure front marked by a dust cloud moving down into the intact structure.

An alternative theory by Cherepanov (2005) suggests that fracture waves disintegrated the towers at the very beginning of each collapse. The theory contradicts to the visual observation of the progressive failure front on the final stage of the collapses although it well explains dust, explosion sounds, and the free fall time of all three collapses. Also, in Cherepanov (2006a) it was proven that the acceleration of progressive failure is significantly less than the gravitational acceleration so that progressive failure is significantly slower than free fall which refutes the earlier belief of civil engineers that progressive failure is a free fall, see Bazant and Zhou (2002). [The report by Bazant and Verdure (2006) with a new unsuccessful attempt to explain free fall represents a response to the articles by Cherepanov (2006a and b) sent to Dr. Bazant in January, 2005].

Failure/fracture waves/ fronts are exposed and well-observed by dust clouds fracture waves create by pulverizing concrete, glass, marble etc. When we observe dust clouds in collapses we observe the work of fracture waves. A dust cloud is the marker of a fracture wave. Buckling or any other mode of failure cannot produce dust. When a car moves on a dusty road the car position is identified as the front of moving dust. As well the failure front in the tower collapse can be observed by dust clouds. According to the well-known pictures of the New York towers' collapses, a dust cloud was instantly created at the beginning of the collapses which covered a considerable part of the tower, with the lower part of the tower being intact. In a while, the lower front of dust cloud moved down marking the front of progressive failure.

Below we study five characteristic modes of progressive collapse and then introduce a hybrid mode that explains all available facts mentioned above.

## **2. Progressive Failure: Critical Floor Effect**

Let us study progressive failure of a tower of height  $H_o$ . Very many different modes of progressive failure are possible depending, particularly, on the position of critical floor where a collapse starts from. Let us illustrate this point by five specific modes using the equations of progressive collapse derived by Cherepanov (2006a), with the rubble size being ignored. For the sake of simplicity and clarity let us assume also that the mass of the tower is uniformly distributed along the vertical and the resistance of the underlying, intact structure to the motion of the upper mass falling down is zero. These assumptions provide only a conservative estimate of the critical floors where collapses start from. The account of finite resistance and actual non-uniform mass distribution in the towers leads to the critical floors located significantly lower than those following from this estimate, because finite resistance and actual non-uniform mass

distribution slow down the collapse process, see Cherepanov(2006), and Cherepanov and Esparragoza (2007).

a. The top floor is critical.

In this case the equations of progressive failure are as follows, Cherepanov (2006):

$$\frac{dM}{dt} = m \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d}{dt} \left( M \frac{dx}{dt} \right) = Mg \quad \left( m = \frac{M_o}{H_o} \right). \quad (1)$$

Here:  $g = 9.8$  m/s,  $t$  is time,  $x$  is the vertical coordinate positioning the front of progressive failure and directed downward so that the top of the tower corresponds to  $x = 0$  and the ground floor to  $x = H_o$ ,  $M$  is the mass of the upper structure that moves down under gravity force and increases with time because it absorbs the underlying structure,  $M_o$  is the mass of the whole tower,  $m$  is the mass of the tower per unit length assumed to be constant just for the purpose of getting some exact conservative estimate.

Under the natural initial conditions:

$$M = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{when } t = 0, \quad (2)$$

the solution of equations (1) is very simple:

$$M = \frac{1}{6} mgt^2, \quad x = \frac{1}{6} gt^2. \quad (3)$$

And so, in this mode the acceleration of the moving mass  $M$  is equal to  $g/3$ , and the collapse of the tower of height  $H_o$ , in meters, will take  $\sqrt{6H_o/g}$  seconds. The height of the New York towers is  $H_o = 420$  m; so that the collapse in this mode would take 16.4 s. It is the slowest mode of progressive failure. Of course, this time will be even less for the real value of mass distribution in the tower.

b. The ground floor is critical.

In this case referred below as mode B we have:

$$M = 2mx, \quad \frac{d}{dt} \left( M \frac{dx}{dt} \right) = -Mg \quad \left( m = \frac{M_o}{H_o} \right). \quad (4)$$

Here:  $M$  is the mass of the intact structure that moves down under gravity force and decreases with time from  $M_o$  to zero because it is absorbed on the ground floor,  $2x$  is the height of the intact structure at the moment of time  $t$  so that  $x$  is positioning its center of gravity. In this mode the ground floor coincides with the fixed front of progressive failure.

The initial condition equations in this mode are:

$$x = \frac{1}{2} H_o, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{when } t = 0. \quad (5)$$

The solution to the problem (4) and (5) can be written as follows:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{3} g \left( \frac{1}{8} H_o^3 - x^3 \right)},$$



$$t = \sqrt{\frac{3}{2g}} \int_x^{H_o/2} \frac{xdx}{\sqrt{\frac{1}{8}H_o^3 - x^3}}.$$

And so, in this mode the acceleration of the moving mass  $M$  is equal to

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \left[ 1 + \frac{4m}{3x^2} \left( \frac{1}{8}H_o^3 - x^3 \right) \right]. \quad (7)$$

This acceleration is always greater than  $g$  and increases with decrease of  $x$  in the process of collapse.

The total time of collapse is equal to

$$T = \eta \sqrt{\frac{3H_o}{4g}}, \quad (8)$$

where

$$\eta = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2/3)}{3\Gamma(7/6)} \approx 0.85$$

in terms of Gamma- function  $\Gamma(x)$ .

The collapse of the New York towers in this mode would take  $T = 4.8$  s. It is the fastest mode of progressive failure. Again, this time would be significantly greater for the real mass distribution in the tower.

For comparison, the collapse of a tall building of height  $H_o$  by industrial implosion takes  $\sqrt{2H_o/g}$  seconds because it runs as free fall of disintegrated fragments. For the New York towers, it would take 9.4 s for any mass distribution in the towers, which is about the time observed for the collapses of both towers.

An intermediate floor is critical.

Suppose the collapse starts on a floor at height  $H_*$  from the ground so that the lower structure disintegrates on the progressive failure front moving down while the upper structure of height  $(H_o - H_*)$  moves downward intact until the progressive failure front reaches the ground floor—the first phase; after that moment the upper, intact structure disintegrates in the fastest mode B studied above—the second phase.

For the first phase of the collapse we have:

$$\frac{dM}{dt} = m \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d}{dt} \left( M \frac{dx}{dt} \right) = Mg \quad \left( m = \frac{M_o}{H_o} \right). \quad (9)$$

When  $t = 0$ :  $x = 0$ ,  $M = M_*$  where  $M_* = m(H_o - H_*)$ .

Here:  $x$  is the vertical coordinate positioning the progressive failure front and directed downward, with the origin at the critical floor;  $M$  is the moving mass that increases from  $M_*$  to  $M_o$  on the first phase.

The solution to the problem (9) can be written as follows

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{2}{3} mg \sqrt{M^3 - M_*^3}} \quad (M_* = m(H_o - H_*)), \quad (10)$$

$$t = \sqrt{\frac{3}{2mg}} \int_{M_*}^M \frac{MdM}{\sqrt{M^3 - M_*^3}}. \quad (11)$$

The acceleration of moving mass  $M$  is equal to

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{3} g \left( 1 + 2 \frac{M_*^3}{M^3} \right). \quad (12)$$

And so, the time of collapse on this phase is equal to  $T_1$

$$T_1 = \sqrt{\frac{3H_o}{2g}} \sqrt{\mu} F(\mu), \quad \left( \mu = 1 - \frac{H_*}{H_o} \right) \quad (13)$$

where

$$F(\mu) = \int_1^{1/\mu} \frac{xdx}{\sqrt{x^3 - 1}}, \quad (14)$$

and

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} [\sqrt{\mu} F(\mu)] = 2.$$

Function  $F(\mu)$  decreases monotonically in interval  $(0, 1)$  with its derivative being infinite at  $\mu = 0$  and  $\mu = 1$ . According to equation (12) the acceleration of moving mass  $M$  is equal to  $g$  at the beginning of the collapse and then decreases to  $g/3$ .

The upper structure of height  $H_o - H_*$  can disintegrate in many different ways. I consider below only three pure modes of the second phase as follows:

(i) The upper structure instantly disintegrates within the time frame of the first phase or at the very beginning of the second phase;

(ii) In the end of the first phase when the failure front reaches the ground, the falling upper structure stops and then disintegrates on the bottom in mode B studied above. According to equation (8) the time of collapse on the second phase in this mode is equal to  $T_2$

$$T_2 = \eta \sqrt{\frac{3}{4g}} (H_o - H_*). \quad (15)$$

(iii) The upper structure moves down without to stop when the failure front reaches the ground, so that its speed in the end of the first phase is the same as at the beginning of the second phase. The second phase disintegration of the upper structure on the ground floor is governed by equations (4) under the following initial condition equations:

$$x = \frac{1}{2} (H_o - H_*), \quad \frac{dx}{dt} = -V \quad \text{when } t = 0. \quad (16)$$

Here  $t = 0$  is the beginning of the second phase and  $V$  is the speed of upper structure at the end of the first phase

$$V = \frac{1}{H_o} \sqrt{\frac{2}{3} g [H_o^3 - (H_o - H_*)^3]}, \quad (17)$$

as it follows from equations (9) and (10).

The solution of equations (4) satisfying equations (16) can be written as follows:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{x} \sqrt{g \left( A - \frac{2}{3} x^3 \right)}, \quad (18)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_x^{\mu H_o/2} \frac{xdx}{\sqrt{A - \frac{2}{3} x^3}}, \quad M = 2mx \quad (19)$$

where

$$\mu = 1 - \frac{H_*}{H_o}, \quad (20)$$

$$A = \frac{1}{12} H_o^3 [\mu^3 + 2\mu^2(1 - \mu^3)]. \quad (21)$$

The time of collapse on the second phase in this mode is equal to  $T_3$

$$T_3 = \left( \frac{3}{2} \right)^{2/3} g^{-1/2} A^{1/6} G(\mu), \quad (22)$$

where

$$G(\mu) = \int_0^{a(\mu)} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^3}}, \quad (23)$$

$$a(\mu) = \left( \frac{\mu}{2 + \mu - 2\mu^3} \right)^{1/3}. \quad (24)$$

The total time of collapse is evidently equal to the sum of the durations of the first and second phases.

It is interesting to find the critical floor for which the total time of the collapse is the same as for free fall. Equating the total time of collapse in different modes to  $\sqrt{2H_o/g}$ , we can find the following equations:

$$(i) \quad \sqrt{\mu} F(\mu) = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad (25)$$

$$(ii) \quad \sqrt{3\mu} [\sqrt{2} F(\mu) + \eta] = 2\sqrt{2}, \quad (26)$$

$$(iii) \quad \sqrt{\mu} F(\mu) + \frac{1}{\sqrt{2}} \mu^{1/3} (2 + \mu - 2\mu^3)^{1/6} G(\mu) = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (27)$$

Here  $\eta$ ,  $F(\mu)$ , and  $G(\mu)$  are defined by equations (8), (14) and (23).

The root of equations (25) to (27) is as follows:

$$\begin{aligned}
\text{Mode (i): } \mu &= 0.31 \quad (H_* / H_o = 0.69), \\
\text{Mode (ii): } \mu &= 0.72 \quad (H_* / H_o = 0.28), \\
\text{Mode (iii): } \mu &= 0.35 \quad (H_* / H_o = 0.65).
\end{aligned} \tag{28}$$

Applying these modes of progressive collapse to the New York twin towers predicts that the collapses of both towers started on the following floor:

$$\begin{aligned}
&\text{The 75}^{\text{th}} \text{ floor assuming mode (i),} \\
&\text{The 31}^{\text{st}} \text{ floor assuming mode (ii), and} \\
&\text{The 72}^{\text{nd}} \text{ floor assuming mode (iii).}
\end{aligned} \tag{29}$$

It is assumed that the towers had 110 floors, 3.8 m high each floor.

Corresponding predictions for the neighboring 47-story building provide the following critical floor: (i) the 32<sup>nd</sup> floor, (ii) the 13<sup>th</sup> floor, and (iii) the 30<sup>th</sup> floor.

And so, the model of progressive failure is inconclusive if used accurately, although it always predicts that the critical floor of the collapse of the New York towers is significantly lower than the floors hit by terrorists and subjected to fire. It is a conservative estimate. An account of rubble size, real mass distribution, and resistance of underlying structure provides an even lower critical floor. An unsuccessful attempt by Bazant and Verdure (2006) to explain free fall time is due to that they used the 80<sup>th</sup> floor as the critical floor, which is too high, although it is still much lower than the 95<sup>th</sup> floor of the South Tower hit by terrorists.

Switching on and off different pure modes in the course of time may give an infinite number of various scenarios of collapse in the regime of progressive failure.

Also, other intact floors can get disintegrated, with forming some new zones of destruction, so that for many simultaneously acting critical floors the effect may be undistinguishable from that of fracture waves.

### 3. A Hybrid Mode

Any failure front is accompanied by some mini-scale fracture waves which pulverize concrete, glass, marble etc into dust. Therefore, dust clouds serve as some markers of failure fronts and fracture waves. The dust cloud observed in all collapses of the New York towers got almost instantly grown at the beginning of collapse and covered a considerable part of the tower. In a while, the lower front of the cloud moved downward along intact structure up to the ground. Based on this observation, the most reasonable scenario was this: (i) on the first phase fracture waves disintegrated a part of the tower immediately covered by a dust cloud and (ii) on the second phase the progressive failure front disintegrated the lower part of the tower remained intact on the first phase. Figure 1 depicts the fracture wave zone of length  $h_w$  almost instantly disintegrated on the first phase, and the progressive failure zone of length  $h_f$  which disintegrated on the second phase by progressive failure.

Let us calculate the time of collapse. We assume that the second phase started after top fragments in the fracture wave zone freely fell down on the top of the progressive failure zone which took  $\sqrt{2h_w/g}$  seconds. For the second phase we have the following equations of progressive failure:

$$\frac{dM}{dt} = m \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d}{dt} \left( M \frac{dx}{dt} \right) = Mg - R, \tag{30}$$

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{2gh_w}, \quad M = M_p = m(H_o - h_f) \text{ when } t = 0. \quad (31)$$

Here:  $x$  is the vertical coordinate directed downward positioning the progressive failure front so that at the beginning of the second phase  $t = 0$  and  $x = 0$ , and at the end of the second phase  $t = T_3$  and  $x = h_f$ ;  $M$  is the moving mass;  $R$  is the resistance of underlying, intact structure.

For the purpose of conservative estimate, we assume that  $R = 0$ . In this case, the solution to problem (30) and (31) can be written as follows:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{2}{3}} mg \sqrt{M^3 - M_H^3}, \quad (32)$$

$$t = \sqrt{\frac{3}{2mg}} \int_{M_p}^M \frac{MdM}{\sqrt{M^3 - M_H^3}}, \quad (33)$$

where

$$M_H^3 = 3m^3(H_o - h_f)^2 \left( \frac{1}{3}H_o - \frac{1}{3}h_f - h_w \right). \quad (34)$$

The acceleration of moving mass  $M$  is equal to

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{3}g \left( 1 + 2 \frac{M_H^3}{M^3} \right). \quad (35)$$

And so, the time of collapse on this phase is equal to  $T_3$

$$T_3 = \sqrt{\frac{3}{2mg}} \int_{M_p}^{M_o} \frac{MdM}{\sqrt{M^3 - M_H^3}} \quad (36)$$

Here, evidently,  $M_o > M_p > M_H \geq 0$ .

The total time of collapse in the hybrid mode is equal to

$$T = \sqrt{\frac{2h_w}{g}} + \sqrt{\frac{3}{2mg}} \int_{M_p}^{M_o} \frac{MdM}{\sqrt{M^3 - M_H^3}}. \quad (37)$$

According to the actual observations the total time of collapses was equal to free fall time  $\sqrt{2H_o/g}$  which provides the following equation

$$2\sqrt{H_o} = 2\sqrt{h_w} + \sqrt{\frac{3}{m}} \int_{M_p}^{M_o} \frac{MdM}{\sqrt{M^3 - M_H^3}}. \quad (38)$$

It serves to determine the parameters  $h_w$  and  $h_f$  defining the position of floors disintegrated by fracture waves at the very beginning of collapses.

#### 4. An Analysis of the Hybrid Mode

Let us introduce the following dimensionless parameters  $f$  and  $\delta$

$$f = \frac{M_P}{M_o} = 1 - \frac{h_F}{H_o}, \quad \delta^3 = f^3 \left( 1 - \frac{3h_w}{fH_o} \right), \quad (39)$$

So that

$$M_P = fM_o, \quad M_H = \delta M_o. \quad (40)$$

From equations (34) and (39) it follows that

$$1 > f > \delta \geq 0. \quad (41)$$

Using  $f$  and  $\delta$  equation (38) can be written as follows

$$\frac{3}{2} \int_f^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^3 - \delta^3}} + \sqrt{f \left[ 1 - \left( \frac{\delta}{f} \right)^3 \right]} = \sqrt{3}. \quad (42)$$

Let us start from the extreme case when  $\delta = 0$ . In this case we have:

$$\delta = 0, \quad f = 3 \frac{h_w}{H_o}, \quad \text{i.e.,} \quad H_o = h_F + 3h_w, \quad (43)$$

$$\frac{dM}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3} mgM}, \quad t = \sqrt{\frac{6}{mg}} (\sqrt{M} - \sqrt{M_P}), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{3}, \quad (44)$$

$$T_3 = \sqrt{\frac{6H_o}{g}} (1 - \sqrt{f}), \quad T = \sqrt{\frac{2h_w}{g}} + \sqrt{\frac{6H_o}{g}} (1 - \sqrt{f}). \quad (45)$$

In this case equation (42) yields

$$\sqrt{f} = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{3}), \quad \text{i.e.,} \quad f = 0.402 \quad (46)$$

From equations (43) and (46) it follows that

$$h_w = 0.133H_o, \quad h_F = 0.598H_o. \quad (47)$$

Applying this result to the New York twin towers, we get that fracture waves disintegrated all floors from the 66<sup>th</sup> to the 81<sup>st</sup> floor at the very beginning, if this extreme case took place. According to equation (44) it is the slowest mode of the hybrid collapse. For all other modes the value of  $h_w$ , the wave-destroyed zone, is smaller than 15 floors.

The numerical analysis of equation (42) results in the following table:

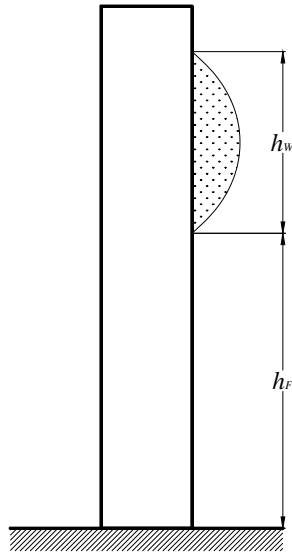
$\delta$	0	0.1	0.2	0.3	~0.315
$f$	0.402	0.400	0.389	0.345	~0.316
$h_w / H_o$	0.133	0.131	0.112	0.040	0.0
$h_F / H_o$	0.598	0.600	0.610	0.655	0.684
Initially destroyed floors of New York towers	66 to 81	66 to 81	67 to 80	72 to 77	~75

As seen, in the other extreme case when  $\delta = 0.3150$  and  $f = 0.316$  the hybrid mode coincides with the progressive failure mode (i) studied above in Section 2.

The present analysis shows that, similarly to the pure progressive collapse modes, the floors of New York towers destructed at the very beginning of the collapses appear to be significantly lower than the floors hit by terrorists and subjected to fire. From here, it follows that fracture waves were, probably, produced by explosives and not arisen from thermal stresses of fire as it was suggested earlier, see the previous paper of this author.

An account of resistance  $R$  of underlying, intact structure to the motion of falling mass leads to an increase of the wave-destructed zone  $h_w$  and a decrease of the initially intact zone  $h_F$ . It is remarkable that the official theory of pure progressive collapse, if correctly used, also predicts that the critical floor was located significantly lower than the floors hit by terrorists and subjected to fire. Unfortunately, this conclusion is under taboo in “free” scientific press .

And so, the hybrid mode allows us to also solve one of the mysteries of these collapses, namely, why the time of collapses was almost the same for both twin towers and almost equal to free fall time. Fracture waves scattered the effect of the position of the critical floor where the collapses started from, so that although this position may well be different in both towers, the collapse time is almost invariant with respect to this difference.



**Fig. 1.** Fracture wave zone of length  $h_w$  and progressive failure zone of length  $h_F$  .

## 5. Conclusion

It was shown that, if progressive failure would be the only regime of the collapses of the New York towers, then the time of collapses of both twin towers would be equal to free fall time, namely 9.4 s only if the critical floor, one and same for both towers, would be significantly lower than the floors hit by terrorists and subjected to fire. The latter conclusion follows also from the hybrid theory.

The hybrid theory was shown to explain the observations not understood earlier, namely (i) free fall time of all collapses, almost independent of the position of the critical floor, (ii) visual observations of the towers during the collapses that the lower parts of towers remained intact until failure front reached them, and (iii) visual observations of dust clouds, the markers of fracture waves. It proves that all collapses were initiated on the floors located significantly lower than the floors hit by terrorists and subjected to fire. The latter conclusion follows also from the equations of pure progressive collapse, see Bazant and Verdure (2006), and Cherepanov and Esparragoza (2007).

USA, Florida

Received: December 19, 2007

#### REFERENCES

1. *Bazant, Z. P.* Why did World Trade Center collapse? / Z. P. Bazant, Y. Zhou // *J. Engineering Mechanics*. – 128(1).–2006.–P. 1-6.
2. *Bazant, Z. P.* Mechanics of progressive collapse Report No. 06-06/ c605T / Z. P. Bazant, M. Verdure // Dept. of Civil and Environmental Engineering : Northwestern University, Evanston, Illinois 60208, USA. – 2006. – P. 1–14.
3. *Cherepanov, G. P.* September 11 and fracture mechanics / G. P. Cherepanov // *Int. J. Fracture*. – 2005. – V. 132. – No. 2. – P. L25–L26.
4. *Cherepanov, G. P.* Mechanics of the WTC collapse / G. P. Cherepanov // *Int. J. Fracture*. – 2006a. – 141. – P. 287–289.
5. *Cherepanov, G. P.* On the collapse of World Trade Center in New York on September 11 / G. P. Cherepanov // *Int. J. Engineering and Automation Problems*. – 2001. – № 1. – P. 10–20.
6. *Cherepanov, G. P.* Progressive collapse of towers: the resistance effect / G. P. Cherepanov, I. E. Esparragoza // *Int. J. Fracture*. – 2007. – 143. – P. 203–206
7. Cherepanov, G. P. A critical analysis of the government's theory: the collapse of the New York towers on Sept. 11, 2001 / G. P. Cherepanov, see this issue.



**A CRITICAL ANALYSIS OF THE GOVERNMENT'S THEORY:  
THE COLLAPSE OF THE NEW YORK TOWERS ON SEPTEMBER 11, 2001**

*(Florida International University)*

The generally-accepted explanation of the collapse of the World Trade Center towers in New York on September 11, 2001 is based on the speculative “theory” of progressive buckling of cold bearing columns at the speed of free fall triggered by creep buckling of the hot columns of the critical floor under the fire and by dynamic impact of the upper structure. In the present paper the basic assumptions and calculations of the “theory” are re-visited and examined. It is shown that the thermal stresses, not creep, played the main part, and the dynamic stresses from the collapse of bearing columns in the critical floor were much less than those calculated in the “theory”. The “theory” cannot explain the free fall, explosion sound, and pulverization of the buildings. These facts of the matter can only be explained by fracture waves that disintegrated the towers, at least partially, just at the very beginning of each collapse. It is suggested that, consistent with all known facts of the matter, at least in the initial stage, heating of bearing columns and horizontal trusses in the “hot” spot caused high thermal stresses, both compressive and tensile, in the buildings, the thermal stresses combined with gravitational, technological, and dynamic stresses triggered a self-maintaining fracture wave, and the fracture wave disintegrated a substantial part of the entire building by invisible cracks producing the sound of explosion and providing the conditions necessary for free fall of steel fragments and dust clouds of tiny fragments of glass, marble and concrete. The technical subjects, namely the theory of fracture waves, the problem of dynamic impact, and fracture waves in steel structures are treated in Appendices A, B, and C respectively.

The September 11 collapses have caused already two wars and millions of deaths. They deserve to be studied by science due to the unwillingness of governmental agencies of the US and other countries to undertake scientific and criminal investigations.

## **I. INTRODUCTION**

The collapses of three tallest buildings in New York on September 11, 2001 aroused interest of engineering community to the unsolved problem of safety and destruction of man-made structures. While the general cause of the collapses—fire—has been generally recognized afterwards, it was not known to experts before the collapses; no people were evacuated during the fire and 330 firemen sent to extinguish the fire died together with about 1500 people in the buildings. Evidently, the collapse of this steel structure from fire was hard to foresee because the pulverization failure mode of steel structures has, never before, been observed in practice or any tests commonly resulted in few broken parts. Nevertheless, the official “theory” first published and substantiated in<sup>1</sup> appeared on the next day after the collapses. It has never been examined; moreover, NIST engineers made a numerical model on this “theory”. The general

conclusion derived was that the collapses were unavoidable as a result of the fire<sup>1</sup>, contrary to the pre-fire judgment.

According to the “theory” the bearing columns of the critical floor under the fire collapsed from high-temperature creep buckling and the upper structure fell down producing an enormous dynamic load, 64 times exceeding the static one, that crashed the underlying structure in the progressive buckling regime. In what follows the basic assumptions and calculations of the “theory” are re-visited and examined. It is shown that the thermal stresses, not creep, played the primary role and that the dynamic load from impact was much less than that calculated by Bazant<sup>1</sup>. The “theory” cannot explain the free fall regime of the collapses, pulverization of the buildings, and explosion sound from the collapses. The only scientific explanation of all these facts of the matter is that self-maintaining fracture waves disintegrated the buildings by invisible cracks just at the very beginning of each collapse<sup>2</sup> providing the necessary conditions for the free fall of the top part of the buildings. It is only self-maintaining fracture waves that could pulverize a good deal of the entire solid structure. All other failure modes studied in fracture mechanics and materials science are characterized by the separation of a structure into two or few parts. The self-maintaining fracture waves pulverized the WTC towers and the adjacent 47-story building like the detonation wave does a TNT piece or the flame does a fuel. It should be noted that common fracture waves of the explosion and penetration mechanics, although maybe relevant, are not considered here.

Moreover, if we accept the theory of progressive failure as NIST and the American/British scientific establishment did, the strict Newton’s –law—based analysis of progressive failure leads to the conclusion that all collapses started on the floors located significantly lower than the floors hit by terrorists and subjected to fire.

## II. TRIGGERING MECHANISM: THERMAL STRESSES VS. CREEP

“A loss of protective thermal insulation of steel columns during the initial blast accelerated the heating of the columns to very high sustained temperature well above 800°C which lowered the yield strength and caused creep buckling of more than half of the columns in the critical floor, so that the upper part of the structure above this floor fell down and, by enormous vertical dynamic load, destroyed the underlying segment of the tower; and so the series of impacts and failures proceeded all the way down”<sup>1</sup>, the “theory” says, when paying no attention to thermal stresses, combustion of spilled fuel in the critical floor, and residual technological stresses arisen from rolling, welding, and assembling.

Let us verify the basic assumptions of this “theory”. First, the loss of the protective thermal insulation of more than half of the 260 columns of the critical floor by the aircraft impact is nothing but a miracle because the aircraft was very small compared to the horizontal dimension of the floor. Also, the time between each crash and collapse took about one hour which was, by itself, a very little time for a creep action in a steel column at the level of stresses, at least, three times less than the yield strength and/or the buckling stress at normal temperature, due to the safety factor, even if the entire lateral surface of the column was exposed to the temperature 800°C all this time.

The rate of heat propagation is controlled by the thermal diffusivity, which is equal to  $12 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  for steel and about a fifty times less for the protective thermal insulation. How fast is this process in terms of time? Let us provide an accurate example. Suppose the initial temperature of steel half-space is zero. It takes one hour to increase the temperature to 650°C at the distance 8 cm from the surface kept at 800°C all this time. For the thermal insulation, the

corresponding distance is about 1 cm, all other conditions being the same. For details of the calculation, see pp.120-123 in the reference textbook<sup>3</sup>. In other words, one hour is about the time necessary for the heat to penetrate through the protective thermal insulation of a bearing column; it takes one more hour to warm up the column itself. There is no time for creep action.

Secondly, the assumption that 800°C was the temperature of four-meter-long bearing columns of the critical floor during the fire is too arbitrary. Again, let us examine an example of accurate calculation. Suppose n-octane fuel is burned in the constant pressure, adiabatic combustor of an aircraft engine with 40% excess air, and the fuel is injected into the combustor at 25°C while the air from the compressor enters this combustor at 600 KPa, 300°C (see Problem 11.38 on p.587 in the reference textbook<sup>4</sup>). One can find that the combustion products leave the combustor for the turbine at the temperature 769°C (see p.754 in same text for this answer), so that the mean temperature of turbine blades is well below 700°C. These are the real conditions of the fuel combustion in the engines of some aircrafts.

Let us compare the combustion of the fuel spilled in the critical floor with the combustion of this fuel in the aircraft engine. The combustor will be the whole-floor, open-to-air, space with a liquid fuel layer on the bottom, with the air entering this combustor from the atmosphere at 100 KPa, 25°C. Compare the temperature of the aircraft turbine blades with that of thermally protected columns of the floor. The combustion in the engine runs under the perfect conditions of homogeneous turbulence in a homogeneous mixture designed to achieve the temperature of combustion products as high as possible. The combustion in the open, non-adiabatic floor is, evidently, incomplete, far from the stoichiometric balance, with cold air and a low air-fuel ratio, with the reaction in convective flames providing a very non-uniform distribution of temperature in space and time. For example, the temperature of the tip of the convective flame of a candle can achieve 500°C but you can put it out with a finger because the mean temperature of the flame is below 100°C. And so, the mean temperature in the burning surroundings of the bearing columns was probably below 500°C while locally, at some spots close to the ceiling of the floor, it could achieve 1000°C and higher because of high adiabatic flame temperatures of the fuel. For creep buckling to be true, the entire column has to be at a high temperature for a long time.

Thirdly, the decrease of the yield strength of steel was too little to play a significant role in the collapses. Structural hot-rolled steel used in columns has the yield strength about 600 MPa and the ultimate strength about 900 MPa, at 20°C. At 800°C the numbers are 10 to 20% lower while the nominal stress in columns was, at least, three to ten times less than the yield strength. Some possible phase transitions in steel at this temperature causing creep require time, well not sufficient under the circumstances as explained above.

From this analysis of conflagration, it follows that the claim of creep buckling of the “theory” is groundless. A measurable creep of structural austenitic steels starts from about 540°C. Meanwhile, this and higher temperatures could be achieved only locally, in the top parts of some bearing columns and adjacent horizontal trusses of the ceiling where the flame temperature was maximal. And because of the thermal protection, these temperatures could be sustained during some time much less than one hour.

For the “theory”, it is essential that each bearing column of the floor should be, from the bottom to the top, heated to one and same high temperature sustained for a long time, because in the case of uniform heating of all columns there are no thermal stresses in the columns, so that the thermal stresses can be ignored. If only some of the columns are heated, the thermal stresses arise that can achieve an order of  $\alpha ET$  under the conditions of total constraint where  $\alpha$  is the

thermal expansion coefficient,  $E$  is Young's modulus, and  $T$  is the temperature. For steel  $\alpha = 12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$  and  $E = 200 \text{ GPa}$  so that at  $800^\circ\text{C}$  the thermal stress can be as high as  $2 \text{ GPa}$  which is about four times greater than the yield strength of steel at  $800^\circ\text{C}$ , i.e. it is certainly unrealizable.

The calculation of the time-space distribution of temperature and thermal stresses in a building under the real conditions of a fire is a delicate procedure responsible for providing a correct prediction or explanation of a final outcome. Whether a building would collapse or be preserved depends on the thermal stress distribution. Any material volume or structure will be torn into pieces by thermal stresses if some part of the structure is heated too fast to a high temperature. A numerical model of the collapse should include, as the most important part, the vaporization of liquid fuel layer, the gas dynamics of reacting mixture in the critical floor, heat exchange, and the development of temperature and thermal stresses in the building. Such a model has not, as yet, been done.

Just for the purpose of rough estimate, let us do some calculations using the notion of a "hot spot" inside the building. The bearing columns in the hot spot are heated to one and same temperature  $T$  while the bearing columns outside the hot spot retain the initial temperature  $T = 0$ . And so, the thermal stresses in the hot columns are compressive while in the cold columns they are tensile. In the case of the conflagration in the WTC towers and adjacent 47-story building, the core columns were probably in the hot spot while, at least, some bearing columns of framed tube cooled by atmospheric air were outside the hot spot. Compressive thermal stresses, being diffused only by floor trusses and cold columns of framed tube, penetrated far into cold columns and trusses of the upper and underlying structure. Combined with gravitational and residual technological stresses, the compressive thermal stresses inside the building created a heating bomb, so that a fracture wave was born that disintegrated a good deal of the entire tower for less than  $0.1 \text{ s}$ .

For a comparison, a Batavian tear<sup>5</sup> just taken from a glass bath and treated by fluoric acid to dissolve the cracked surface layer has a core under high compressive stresses and a flawless surface layer under high tensile stress about  $5 \text{ GPa}$ . Breaking the tiny tail on the Batavian tear releases the elastic energy of compressive stresses in a fracture wave that propagates at the speed of sound and pulverizes glass into micron-size fragments (see Appendix A). This failure mode is similar to the pulverization of the WTC towers. Also, as a reminder, the compressive residual stress from rolling in steel columns can achieve a half or more of the yield strength. For the discussion of fracture waves in steel structures, see Appendix C.

Let us consider, in some detail, what happened during the conflagration in the critical floor. The vapor of liquid fuel spilled on the bottom of the floor got mixed with atmospheric oxygen of the floor and an occasional inflammation excited the exothermal reaction of the mixture so that, based on the above calculation of combustion, the temperature and pressure of combustion products in the floor could achieve up to  $750^\circ\text{C}$  and  $400 \text{ Kpa}$ . This blast stage took some seconds. The gas pressure could not tear off even the cloth of someone inside the blast, not to say about the thermal protection insulation of steel columns. But, the pressure broke all windows and made the floor open to atmosphere. The comparatively steady stage of fire took about one hour. On this stage, cold air from outside supplying oxygen necessary for combustion flew in along the bottom of the floor while hot products of combustion flew out along the ceiling of the floor. The pressure of gas in the floor on this stage was about  $100 \text{ Kpa}$  as outside. The combustion took place in convective flames, whose bottom had the vaporization

temperature of fuel, i.e. less than 100°C, while mean temperature on the top of flames, at the ceiling, could certainly achieve 800°C and much higher due to high adiabatic flame temperature of octane. A linear approximation leads to about one meter long column top part under temperature 550°C and higher. It is the long horizontal trusses in the ceiling of the critical floor that could first experience the temperature increase and buckling from thermal stresses. Creep and softening of concrete in this ceiling, together with the buckling of the trusses, significantly decreased the support of the upper ends of the hot bearing columns in the critical floor during the fire.

To demonstrate the action of thermal stresses within the framework of the “hot spot” model we assume in what follows that the bottom of the critical floor and the cold ceiling of the next upper floor are rigid while the ceiling of the critical floor is softening during the fire. Let us assume also that all hot columns are elastic up to buckling and all cold columns are elastic up to tensile failure.

Suppose  $S_A$  is the cross-section area of all bearing columns of the critical floor. Let us assume that  $\beta S_A$  is the cross-section area of the hot bearing columns heated to the temperature  $T$  and  $(1-\beta)S_A$  is the cross-section area of cold bearing columns at the temperature  $T = 0$ . As a result, the hot columns will be subject to the compressive thermal stress

$$\sigma = -\delta(1-\beta)\alpha ET \text{ where } 0 < \beta < 1, \quad \frac{1}{2} < \delta < 1, \quad (1)$$

while the cold columns will be subject to the tensile thermal stress

$$\sigma = \delta\beta\alpha ET \text{ where } 0 < \beta < 1, \quad \frac{1}{2} < \delta < 1. \quad (2)$$

The coefficient  $\delta$  takes into account the elastic reaction of the upper ends of columns. For rigid floor trusses  $\delta = 1$ , and for very soft floor trusses, when the elastic reaction of supports is created by the columns themselves,  $\delta = 0.5$ . And so, the hot columns will be under action of the sum of compressive gravitational and thermal stresses while the cold columns will be unloaded by the thermal stresses. In this illustrative estimate, we ignore residual stresses.

A collapse can start either from tensile failure of cold columns or from the buckling of hot columns in the critical floor. Let us estimate the critical size of the hot spot for both cases.

Suppose that the buckling of hot columns occurs at  $\beta = \beta_b$  and that  $-f\sigma_Y$  is the nominal stress in all columns of the floor from the weight of the upper structure, where  $f$  is the safety factor and  $\sigma_Y$  is the yield strength of hot steel. Let  $-f_o\sigma_Y$  be the stress in hot columns when the buckling occurs, where  $f_o \geq f$  evidently. From here and equation (1) it follows that

$$f\sigma_Y + \delta(1-\beta_b)\alpha ET = f_o\sigma_Y, \quad (3)$$

and

$$\beta_b = 1 - \frac{(f_o - f)\sigma_Y}{\delta\alpha ET}. \quad (4)$$

Now, suppose that the failure of cold columns from tensile stresses occurs at  $\beta = \beta_T$ . From here and equation (2), it follows that

$$\delta\beta_T\alpha ET - f\sigma_Y = \sigma_b, \quad (5)$$

and

$$\beta_b = 1 - \frac{(f_o - f)\sigma_Y}{\delta\alpha ET}, \quad (6)$$

where  $\sigma_b$  is the ultimate tensile strength of structural steel. Make the ratio  $\beta_b / \beta_T$  from equations (4) and (6)

$$\frac{\beta_b}{\beta_T} = \frac{\delta\alpha ET - f_o\sigma_Y + f\sigma_Y}{\sigma_b + f\sigma_Y}. \quad (7)$$

From equation (7) it follows that

$$\frac{\beta_b}{\beta_T} > 1 \text{ because } \delta\alpha ET > \sigma_b + f_o\sigma_Y. \quad (8)$$

For example, for typical values when  $\alpha ET = 2 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_Y = 0.5 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_b = 0.7 \text{ GPa}$ ,  $f_o = 0.5$ ,  $f = 0.25$ , and  $\delta = 0.75$ , we get  $\beta_b / \beta_T = 5/3$ .

It means that the collapse started from tensile failure of cold columns because the critical size of the hot spot in this scenario was less than that in the scenario of the buckling of hot columns. The hot spot was evidently expanding during the fire.

And so, the failing cold columns of the critical floor played the role of a tail of a Batavian tear that explodes into small fragments when the tail is broken. The failure of the cold columns of the critical floor, even more probable because of thermal extension and possible failure of hot horizontal trusses, started the process of release of elastic energy of compressive stresses that occurred in a self-maintaining fracture wave because it is only the fracture wave that can pulverize material.

### III. DYNAMICS: ACCURATE VS. APPROXIMATE ANALYSIS

According to the ‘‘theory’’ the upper part of the tower above the critical floor freely fell down in the beginning of the collapse and created an ‘‘enormous’’ dynamic stress in the bearing columns of the underlying structure, so that the maximum dynamic stress was 64.5 times greater than the nominal static stress in these columns from the weight of the upper structure<sup>1</sup>. ‘‘This estimate is calculated from the elastic wave equation’’, the ‘‘theory’’ says.

Let us verify this calculation. Suppose mass  $m$  falls down under gravitational force and hits the end of a vertical elastic column or bar at the speed  $V_o$  and sticks to the end. It is easy to find the material velocity  $v_x$  and stress  $\sigma_x$  in the column/bar arising from this impact (see Appendix B for technical details):

$$v_x = \frac{mg}{SE}c + \left( V_o - \frac{mg}{SE}c \right) \exp\left[ \frac{SE}{mc^2}(x-ct) \right], \quad (9)$$

$$\sigma_x = -\frac{mg}{S} + \left( -\frac{V_o}{c}E + \frac{mg}{S} \right) \exp\left[ \frac{SE}{mc^2}(x-ct) \right]. \quad (10)$$

Here:  $0 < x < ct$ ;  $t$  is the time from the moment of impact  $t = 0$ ;  $x$  is the coordinate along the bar located at  $x > 0$ ;  $E$  is Young’s modulus and  $c$  is the speed of elastic waves in the column equal to  $\sqrt{E/\rho}$  where  $\rho$  is the density; and  $S$  is the column cross-section area. For  $x > ct > 0$  both  $\sigma_x$  and  $v_x$  equal zero.

In particular, at the end of the column at  $x = 0$   $t > 0$ , the stress and velocity are:

$$\sigma_x = -\frac{mg}{S} + \left( -\frac{V_o}{c} E + \frac{mg}{S} \right) \exp \left[ -\frac{SE}{mc} t \right], \quad (11)$$

$$v_x = \frac{mg}{SE} c + \left( V_o - \frac{mg}{SE} c \right) \exp \left[ -\frac{SE}{mc} t \right]. \quad (12)$$

The maximum stress is equal to:

$$\sigma_x = -\frac{V_o}{c} E \text{ when } x = 0 \quad t = 0. \quad (13)$$

If the assumption of the “theory” about free fall of the upper structure is accepted, that is all bearing columns of steel in the critical floor suddenly disappeared, then  $V_o = \sqrt{2gh} = 8.5 \text{ m/s}$  because the height of the floor  $h = 3.7 \text{ m}$  and  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ . For steel columns,  $c = 5.1 \text{ Km/s}$  and  $E = 200 \text{ GPa}$ , so that according to equation (13) the maximum stress in the columns of the underlying structure is equal to  $340 \text{ MPa}$ . Based on the indicated estimate of the “theory” the nominal static stress in these columns, that is  $mg/S$ , should be equal to  $340/64.5 = 5 \text{ MPa}$  which is a hundred times less than the yield strength of steel (of the order of pressure produced by high heels of a girl). The approximate estimate of the “theory” is very inaccurate.

However, even the maximum stress  $340 \text{ MPa}$  from the impact is still about six times less than the maximum possible thermal stress  $2 \text{ GPa}$ . Besides, the maximum stress  $340 \text{ MPa}$  is greatly exaggerated. If we take into account that the falling mass (projectile) is not concentrated but distributed in a bar similar to the subject column, the maximum stress becomes twice less (Appendix B). Further, even more significant decrease of the maximum dynamic stress is due to the residual resistance of buckling hot columns in the critical floor. And so, the role of dynamic overload from the impact of the upper structure turns out to be secondary as compared to the thermal stresses. The dynamic stress could contribute to the compressive thermal stresses of the underlying columns to mutually create a fracture wave, if these columns had not been disintegrated still earlier by a fracture wave. The time of free fall of the upper structure for the height  $h = 3.7 \text{ m}$  equals, at least,  $\sqrt{2h/g} = 0.75 \text{ s}$  which is much greater than the time  $0.1 \text{ s}$  necessary to disintegrate the whole building by a self-maintaining fracture wave if it was created immediately after the tensile failure of cold bearing columns (see Appendices A and C).

By the way, the maximum dynamic stress traveled all the way down at the speed of longitudinal elastic waves in the steel framework of the WTC tower so that the fracture wave of disintegration would immediately follow the shock wave of “enormous” compression because no material could bear the “enormous” load. And so, if applied consistently, the “theory” would support the fracture wave mechanism of the collapses, not the progressive failure mechanism.

Using equations (11) and (12) we can analyze the comparative role of static,  $mg/S$ , and dynamic,  $VE/c$ , stresses in this event. If  $VE/c$  is greater than  $mg/S$ , which may be true if the critical floor was close to the top of the tower, the maximum dynamic stress at  $t = 0$  can be greater than the static stress and tends exponentially to the static stress as time elapses. However, if  $VE/c$  is less than  $mg/S$ , which is surely true if the critical floor was far from the top of the tower, as it follows from the pictures of the collapses, the maximum dynamic stress at  $t = 0$  is less than the static stress and tends exponentially to the latter as time grows. And so, the maximum dynamic effect from impact occurs from initial collapse of the top floor,

and it is negligibly small for the impact of a heavy upper structure, contrary to the implication of the “theory”.

#### **IV. FREE FALL: FRACTURE WAVE VS. PROGRESSIVE FAILURE**

To explain the free fall regime of the collapses, the “theory” assumes that at any moment of collapse there are exist an upper part of the tower that moves down and an underlying structure that rests intact, and that “ the underlying structure produces no reaction and resistance to the falling upper part because the inelastic energy dissipation in plastic hinges of collapsing columns is much less than the kinetic energy of the falling mass”<sup>1</sup>.

This thesis is an evident blunder. The loss of kinetic energy of the falling mass is caused, mostly, by the elastic deformation of the underlying structure, and the resistance of a solid structure is due, mostly, to the elastic reaction that can stop the falling mass even if the inelastic energy dissipation is zero. For example, the “enormous” dynamic overload from the impact of the upper structure on the critical floor, which is according to the “theory” 64.5 times greater than the static load, should be also applied to the moving mass creating the force of resistance, by the Newton law, which is disregarded by the “theory”.

Even within the framework of progressive failure model, the inelastic energy dissipation was miscalculated. It is true that the energy dissipated in plastic hinges of buckling columns of the underlying structure is about 8.4 times less than the decrease of the gravitational energy of the upper structure falling down in the critical floor. However, it is valid with account of only one plastic hinge per column of one floor, which contradicts to the following facts. First, the dynamic instability of columns/bars occurs by higher order modes of buckling (the greater is the dynamic load, the higher is the mode of buckling). Secondly, the debris should be two-meter-long segments of columns, which is very far from the reality. The same calculation would predict the ratio 2.8, and not 8.4, if three plastic hinges per column of one floor would be taken into account. In this case the debris would be one-meter-long segments of columns, which is closer to the reality. Any accurate calculation would show that the inelastic energy dissipation during the collapse is significant and comparable with the decrease of gravitational energy and the value of the corresponding kinetic energy.

Let us analyze the model of “progressive failure” using more accurate analysis of dynamics. Suppose that all columns of the critical floor disappeared and the upper structure freely fell down on the underlying structure, as suggested in the “theory”. From Section 3 it follows that the maximum total stress in the columns of the underlying structure from the impact is less than 170 MPa which is, at least, four times less than the yield strength of steel, or the buckling stress of well-designed columns. Taking into consideration that 170 MPa is greatly exaggerated by the free fall assumption and that this maximum stress is kept for a quite short time much less than about 0.01 s, it is doubtful that this improvised impact could produce any fracture or failure in the columns of the underlying structure. The buckling failure from the impact could be possible only in the case of very flexible columns of a very bad design, if the critical floor was close to the top of the tower, because the buckling stress of even flexible columns is several times greater for the dynamic load than that for the static load due to higher modes of buckling.

Moreover, even if we accept that the resistance of the underlying , intact structure to the motion down of the upper structure is zero, the acceleration of the falling mass appears to be significantly smaller than the gravitational acceleration so that free fall can’t be explained within the framework of progressive failure unless we accept that the collapses started on the floors located significantly lower than the floors hit by planes which leads to some pre-



meditated collapses ,not tied to terrorists’ planes, the conspiracy theory we refused to accept from the very beginning.

Hence, the progressive failure is nothing but a result of the miscalculations.

The only possible explanation of the free fall regime of the collapses is that the buildings were disintegrated by fracture waves at the beginning of each collapse, which took about 0.1 s because fracture waves propagate at the speed of longitudinal elastic waves in steel, glass, concrete, and marble (see Appendices A and C). The disintegration by cracking is unnoticeable for such a short time because the volume of cracks is very small as compared to the volume of intact material, with no visible deformations during that time. The cracking of the tower for 0.1 s produced the sound emission heard as an explosion. A boom would be heard if the cracking took 10 s as suggested by the “theory” of progressive failure. For a fracture wave to propagate, a material should be loaded by compressive stresses of high energy because this energy is released in the fracture wave. (See Appendices A and C).

The initial velocity of fragments behind the fracture wave has an order of 10 m/s depending on material and stress; for glass it is about four times greater than for steel. The size of fragments behind the fracture wave depends on stress and material. For steel it has an order of one meter, and for glass, concrete and marble it is about 0.1 to 10  $\mu\text{m}$ . Combination of free gravitational fall of heavy steel fragments and explosive sweep-away of particles of glass, concrete and marble in the form of dust clouds created the picture of the collapses observed on TV screens.

A classical example of the fracture wave action is a Batavian tear of glass<sup>5</sup>. If one breaks a tiny tail on the Batavian tear, it explodes into a cloud of dust with a loud sound. It takes  $10^{-5}$  s to pulverize a five-centimeter tear by a fracture wave and  $10^{-2}$  s to create a one-meter cloud of micron-size particles of glass.

And so, the fracture wave mechanism of the WTC collapse and of the collapse of the neighboring 47-story building is supported by the following facts:

- (i) All buildings collapsed in free fall regime;
- (ii) Each collapse was accompanied by the pulverization of the buildings and by a sound of explosion;
- (iii) The size of steel fragments and dust particles of glass, concrete and marble corresponds to that calculated in the theory of fracture waves.

Fracture waves have never, before the WTC collapse, been observed in steel structures. Let us explain why. The fragments of steel behind a fracture wave have an order of one meter (see Appendix C). It means that the size of the steel structure has to be much larger. The WTC collapse is so far the only known case of destruction of such a large steel structure from compressive stresses.

## **V. FRACTURE WAVE VS. SHOCK WAVE**

Let us summarize the basic properties of shock waves and fracture waves<sup>5</sup>. Both waves represent some fronts of discontinuity of material density, velocity, and stresses.

Shock waves are produced by impacts and explosions in gases, liquids, and solids. The density of material behind a shock wave is always greater than in front of the wave. The maximum compressive stress behind a shock wave is always greater than in front of the wave. The normal velocity of a shock wave is always greater than the speed of sound (in solids and liquids, slightly greater). The thickness of a shock wave is defined by viscous properties of a material.

It is a widely spread but wrong belief that a shock wave can disintegrate a material into small fragments. To disintegrate means to crack, but a shock wave cannot crack a solid because any cracking is accompanied by a dilatation of the solid. A fracture wave should always follow a shock wave in order to disintegrate a material, which is common in explosion and penetration mechanics.

Self-maintaining fracture waves can be produced only by high compressive stresses in solids, typically under triaxial compression (Appendices A and C). Fracture wave separates an intact material in front of the wave from a destructed material behind the wave. The mean density of a material behind a fracture wave is always less than in front of the wave. The maximum compressive stress behind a fracture wave is always less than in front of the wave. The normal velocity of steady fracture waves is equal to the speed of longitudinal elastic waves (Appendices A and C). For unsteady fracture waves observed by explosions and impacts, the normal velocity is less and determined from the solution of a particular problem, that is, depends on boundary and initial conditions.

## VI. CONCLUSIONS

It was shown that, in the tragic collapses on September 11, 2001:

(i) Creep played secondary role, and these were the thermal stresses that triggered the collapses;

(ii) Tensile failure of some cold bearing columns from the thermal stresses started the collapses, and not the creep buckling of hot columns;

(iii) Dynamic stress from the impact of the upper structure on the initial stage of each collapse was insufficient to produce a failure of the underlying structure;

(iv) A self-maintaining fracture wave, originated after tensile failure of some cold bearing columns in the critical floor, disintegrated, at least, a significant part of each building for about 0.1 s and produced the sound of explosion, and steel fragments fell down in the free fall regime while fragments of glass, concrete and marble created dust clouds.

The exact conditions triggering fracture waves in very large steel structures need to be studied which is a challenging problem for the future.

## REFERENCE

1. *Anderson, E. E.* Thermodynamics / E. E. Anderson : PWS Publishing Co., Boston, 760. –1993
2. *Bazant, Z. P.* / Z. P. Bazant, Y. J. Zhou // Eng. Mechanics– 2002.– V.128. – 1. – P. 1-6
3. *Cherepanov, G. P.* / G. P. Cherepanov // Int. J. Fracture. –2005. – V. 132. – P. L25—L26
4. *Cherepanov, G. P.* Mechanics of Brittle Fracture / G. P. Cherepanov : McGraw-Hill, New York, 940 . – 1979
5. *Cherepanov, G. P.* // Int. J. Engineering & Automation Problems / G. P. Cherepanov. – No.1. – P. 10-20 . – 2006
6. *Cherepanov, G. P.* // Int. J. Fracture / G. P. Cherepanov. – V. 141. –2006. – P. 287-289
7. *Cherepanov, G. P.* / G. P. Cherepanov, I. E. Esparragoza // Int. J. Fracture. – V.143. –2007. – P. 203-206
8. *Ozisik, M. N.* Heat Transfer / M. N. Ozisik : Mc Graw-Hill, New York, 780. – 1985

## APPENDIX A. THE THEORY OF FRACTURE WAVES

The fracture wave is a front of discontinuity of mass density, material velocity and stresses that separates an intact material in front of the fracture wave from a destructed one behind. The mass density behind a fracture wave is always less than that in front of the wave because any cracking of a solid dilates it.

The conservation laws on the fracture wave can be written as follows:  
mass conservation

$$\rho_0 (V - v_0) = \rho_F (V - v_F), \quad (\text{A.1})$$

momentum conservation

$$-\sigma_0 + \rho_0 (V - v_0)^2 = -\sigma_F + \rho_F (V - v_F)^2, \quad (\text{A.2})$$

energy conservation

$$\frac{1}{2}(V - v_0)^2 + \frac{U_0}{\rho_0} - \frac{\sigma_0}{\rho_0} = \frac{1}{2}(V - v_F)^2 + \frac{U_F}{\rho_F} - \frac{\sigma_F}{\rho_F} + \frac{D}{\rho_F}. \quad (\text{A.3})$$

Here: lower index 0 refers to the intact material in front of the fracture wave, lower index  $F$  refers to the destructed material behind the fracture wave,  $V$  is the normal velocity of the fracture wave,  $v$  is the material velocity normal to the fracture front,  $\rho$  is the material density,  $U$  is the volume density of elastic energy of the material,  $\sigma$  is the stress component normal to the fracture front,  $D$  is the volume density of surface energy of the destructed material.

Equations (A.1) to (A.3) can be re-written as follows:

$$\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_F} = \frac{1}{\rho_0} \frac{v_F - v_0}{V - v_0}, \quad (\text{A.4})$$

$$\sigma_0 - \sigma_F = \rho_0 (V - v_0)(v_F - v_0), \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{D}{\rho_F} = \frac{U_0}{\rho_0} - \frac{U_F}{\rho_F} + \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_F) \left( \frac{1}{\rho_F} - \frac{1}{\rho_0} \right). \quad (\text{A.6})$$

Let us assume that the intact material is at rest, i.e.,  $v_0 = 0$ . Then, the values of  $\rho_F$ ,  $v_F$  and  $D$  can be found from equations (A.4) to (A.6) as follows:

$$\rho_F = \frac{\rho_0}{1 - \frac{\sigma_0 - \sigma_F}{\rho_0 V^2}}, \quad (\text{A.7})$$

$$v_F = \frac{\sigma_0 - \sigma_F}{\rho_0 V}, \quad (\text{A.8})$$

$$D = \frac{\rho_F}{\rho_0} \left( U_0 - \frac{\sigma_0^2 - \sigma_F^2}{2\rho_0 V^2} \right) - U_F. \quad (\text{A.9})$$

From equations (A.7) and (A.8), it follows that  $v_F < 0$  and  $\sigma_0 < 0$  because  $\rho_0 > \rho_F$  due to the physical meaning of the fracture wave. It means that the fracture wave can propagate only in a compressed material and the velocity of destructed material is always opposite to the normal velocity of the fracture wave.

Let us confine ourselves by steady fracture waves, typical for self -maintaining destruction. Assume for a moment that  $V < c$  where  $c$  is the speed of longitudinal elastic waves in the material. An elastic forerunning field ahead of such a fracture wave would also be steady-state. However, from the theory of elasticity it follows that steady elastic field can propagate only at the speed of  $c$ . (The shear wave is, evidently, impossible). It means the assumption is not valid, so that  $V \geq c$  for steady fracture waves. From equation (A.7) it follows that  $\rho_F$  is

very close to  $\rho_0$ , i.e.  $\rho_F \approx \rho_0$  because  $\sigma_0 \ll E$  and  $\rho_0 V^2 \geq \rho_0 c^2 \approx E$ . And so, equation (A.9) becomes

$$D = U_0 - \frac{\sigma_0^2}{2\rho_0 V^2} - \left( U_F - \frac{\sigma_F^2}{2\rho_0 V^2} \right). \quad (\text{A.10})$$

Let us neglect by the mutual contacts of fragments of the destructed material because of lost coherence, so that  $\sigma_0 \gg \sigma_F$  and  $U_0 \gg U_F$ , and equations (A.8) and (A.10) take the form

$$v_F = \frac{\sigma_0}{\rho_0 V}, \quad D = U_0 - \frac{\sigma_0^2}{2\rho_0 V^2}. \quad (\text{A.11})$$

Let us analyze  $D$  as a function of  $V$ . Based on the principle of minimum of surface energy the value of  $D$  should be minimum possible because  $D$  is the surface energy of the destructed material in unit volume. From this principle, it follows that  $V = c$ , because  $D$  is minimal at  $V = c$ . In 1967, the same conclusion was derived by this author and Leo A. Galin based on the analogy between the fracture wave and detonation wave in TNT (the Chapman-Jouguet hypothesis<sup>5</sup>).

And so, the basic equations of steady fracture waves can be summarized as follows:

$$V = c, \quad D = U_0 - \frac{\sigma_0^2}{2\rho_0 c^2}, \quad v_F = \frac{\sigma_0}{\rho_0 c}, \quad \rho_F \approx \rho_0. \quad (\text{A.12})$$

These equations are valid for any anisotropic, quasi-brittle materials whose dimensions are much greater than the thickness of the fracture wave and the size of fragments of the destructed material. It should be noted that an account of comparatively minor residual stresses behind a fracture wave leads to a simple modification of eqns.(A.12), with no significant effect on calculation results. Using the effective surface energy  $\Gamma$  of the cracking of the material known from fracture mechanics tests, one can estimate the size of fragments of the destructed material in terms of  $\Gamma$  and  $D$ . E.g., for the two fracture modes one can find that:

if fragments are identical cubes with rib  $d$ ,

$$d = 12 \frac{\Gamma}{D}, \quad (\text{A.13})$$

and if fragments are long identical needles of hexagonal cross-section with rib  $r$ ,

$$2r = \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{\Gamma}{D}. \quad (\text{A.14})$$

The needle shape of fragments was observed in some experiments with glass specimens<sup>5</sup>.

Suppose an isotropic material is in the state of hydrostatic compression by stress  $\sigma_0$  in front of the fracture wave. In this case, we have

$$U_0 = \frac{3(1-2\nu)}{2} \frac{\sigma_0^2}{E}, \quad \rho_0 c^2 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (\text{A.15})$$

Here  $E$  and  $\nu$  are Young's modulus and Poisson's ratio. Using equations (A.12) to (A.15) we get the following results for silicate glass at  $\Gamma = 2 \text{ N/m}$ ,  $\rho_0 = 2.4 \text{ g/cm}^3$ ,

$E = 7 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ , and  $\nu = 0.17$ :  $V = c = 5950 \text{ m/s}$  and

at  $\sigma_0 = -500 \text{ N/mm}^2$ :  $v_F = -35 \text{ m/s}$ ,  $D = 1.9 \text{ N/mm}^2$ ,  $d = 12.8 \mu\text{m}$ ,  $2r = 5 \mu\text{m}$ ;

at  $\sigma_0 = -1 \text{ KN/mm}^2$ :  $v_F = -70 \text{ m/s}$ ,  $D = 7.5 \text{ N/mm}^2$ ,  $d = 3.2 \mu\text{m}$ ,  $2r = 1.2 \mu\text{m}$ ;

at  $\sigma_0 = -5 \text{ KN/mm}^2$ :  $v_F = -350 \text{ m/s}$ ,  $D = 187.5 \text{ N/mm}^2$ ,  $d = 0.1 \mu\text{m}$ ,  $2r = 0.05 \mu\text{m}$ .

The glass needles in the range of  $2r$  from about  $1 \mu\text{m}$  to about  $10 \mu\text{m}$  were observed experimentally<sup>5</sup>. For rocks and building materials like concrete, marble, and wood the figures for  $v_F$ ,  $D$ ,  $d$ , and  $r$  are comparable to those in glass because their specific surface energy  $\Gamma$  is comparable with that of glass.

The dust produced by the collapses of three buildings on September 11, 2001 was created by micron-size fragments of glass, concrete and marble, in correspondence with these calculations.

## APPENDIX B. THE PROBLEM OF DYNAMIC IMPACT

Suppose a concentrated mass  $m$  falls down under gravitational force and hits the end of a vertical elastic column or bar at the speed  $V_o$  and sticks to the end. Let  $t$  be the time from the moment of impact  $t = 0$  and  $x$  be the coordinate along the column located at  $x \geq 0$ . The impact produces the field of the dynamic stress  $\sigma_x(x, t)$  and displacement  $u(x, t)$  in the column that can be found from the following boundary value problem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{for } ct > x > 0, \quad (\text{B.1})$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = S \sigma_x + mg \quad \text{when } x = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$u = 0 \quad \text{when } x \geq ct, \quad (\text{B.3})$$

$$v_x = V_o \quad \text{when } x = 0, \quad t = 0. \quad (\text{B.4})$$

Here:

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_x = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (\text{B.5})$$

$E$  is Young's modulus,  $\rho$  is the material density,  $S$  is the column cross-section area, and  $c$  is the speed of elastic waves in the column.

The general solution  $u = F_1(x - ct) + F_2(x + ct)$  to the wave equation (B.1) turns into  $u = F_1(x - ct) - F_1(0)$  to meet the boundary condition eq. (B.3). And so, using eqs. (B.5) we find:

$$\sigma_x = EF_1'(x - ct), \quad v_x = -cF_1'(x - ct), \quad (\text{B.6})$$

where  $F_1(\xi)$  is an arbitrary function of  $\xi$  that can be found from the differential eq. (B.2) and initial condition eq. (B.4) as follows:

$$F_1(\xi) = -\frac{mg}{S} + \left( -\frac{V_o}{c} + \frac{mg}{SE} \right) \exp\left( \frac{SE}{mc^2} \xi \right). \quad (\text{B.7})$$

Equations (9) and (10) in the main text immediately follow from eqs. (B.6) and (B.7).

To estimate the effect of a distributed mass suppose that the falling mass is a half-infinite elastic bar moving down at the speed  $V_o$ . Designate by  $E_p$ ,  $S_p$ ,  $\rho_p$ , and  $c_p$  the corresponding constants of this bar (subscript  $p$  stands for projectile) and  $\sigma_x^+(x, t)$  and  $v_x^+(x, t)$  the dynamic stress and material velocity in the projectile. One can find that:

$$v_x = V, \quad \sigma_x = -E \frac{V}{c} \quad \text{when } ct > x > 0, \quad (\text{B.8})$$

$$v_x^+ = V, \quad \sigma_x^+ = -E_p \frac{SE}{S_p E_p c_p} V \quad \text{when } 0 > x > -c_p t, \quad (\text{B.9})$$

where

$$V = V_o \left( 1 + \frac{c_p}{c} \frac{ES}{E_p S_p} \right)^{-1}. \quad (\text{B.10})$$

Particularly, when the projectile is a rigid bar so that  $E_p S_p \gg ES$ , we get

$$V = V_o, \quad v_x = V_o, \quad \sigma_x = -E \frac{V_o}{c} \quad (ct > x > 0), \quad (\text{B.11})$$

which coincides with the maximum stress and velocity in the column at  $x = 0$  and  $t = 0$  in the case of the concentrated mass  $m$ .

When  $c_p = c$  and  $E_p S_p = ES$  which is valid, e.g., if the projectile is the same as the column, we get

$$V = \frac{1}{2} V_o, \quad v_x = \frac{1}{2} V_o, \quad \sigma_x = -\frac{1}{2} E \frac{V_o}{c}. \quad (\text{B.12})$$

Hence, with the account of elasticity of distributed mass of the projectile the dynamic stress becomes twice less.

### APPENDIX C. FRACTURE WAVES IN STEEL STRUCTURES

Self-sustaining steady fracture waves can propagate in solid bodies subjected to triaxial compression of high elastic energy. Under triaxial compression all materials are capable to endure much higher compressive stresses than under biaxial or single-axial compression. If a plane in such a metastable, compressed body is released from stress, the material near the plane gets destructed, and a fracture wave can arise that transforms the metastable stressed state of the

intact material into a stable, unloaded, condition of the destructed material. Fracture wave is the front where this transition occurs. The driving force of the fracture wave is the excessive elastic energy of the intact material.

Let us show that a self-maintaining steady fracture wave cannot propagate along a bar axially compressed by stress  $\sigma_o$ . Indeed, in this case equation (A.12) yields

$$D = U_o - \frac{\sigma_o^2}{2\rho_o c^2} = 0 \text{ because } U_o = \frac{\sigma_o^2}{2E} \text{ and } c^2 = \frac{E}{\rho_o}. \quad (\text{C.1})$$

A bar cannot accumulate an excessive elastic energy necessary for the steady propagation of fracture wave, so that bars are destructed in unsteady regimes.

However, in a plate biaxially compressed along its plane by stress  $\sigma_o$ , a self-maintaining steady fracture wave can propagate. Indeed, in this case

$$U_o = \frac{1-\nu}{E} \sigma_o^2, \quad c^2 = \frac{E}{\rho_o(1-\nu^2)}, \quad (\text{C.2})$$

and equation (A.12) yields

$$D = U_o - \frac{\sigma_o^2}{2\rho_o c^2} = \frac{(1-\nu)^2}{2E} \sigma_o^2. \quad (\text{C.3})$$

And so, under biaxial compression a plate can accumulate some excessive elastic energy necessary for the self-maintaining steady fracture waves.

Suppose a steady fracture wave propagates in a solid space of steel. Typical values of constants for steel are:  $\Gamma = 20$  KN/m,  $\rho_o = 7.9$  g/cm<sup>3</sup>,  $E = 200$  GPa,  $\nu = 0.3$ . Using eqs. (A.12) and (A.15) one can find:  $V = c = 5500$  m/s, and

$$\text{at } \sigma_o = -1 \text{ KN/mm}^2: D = 1.14 \text{ N/mm}^2, d = 21 \text{ cm}, v_F = -20 \text{ m/s},$$

$$\text{at } \sigma_o = -500 \text{ N/mm}^2: D = 0.29 \text{ N/mm}^2, d = 82 \text{ cm}, v_F = -9 \text{ m/s}.$$

Since the fragments of destructed steel have the dimension of an order of one meter, the thickness of the fracture wave in solid steel is measured by meters, so that the size of steel specimens has to be much larger than one meter. Hence, steady fracture waves in solid steel cannot be observed in laboratory conditions.

However, large-scale steel structures represent a complex architectural framework of bars, columns, beams, trusses that create shape and support like cohesion forces keep atoms fixed in crystals. The continuum mechanics approach assumes such a complex structure to be a solid continuum. We apply this approach to the WTC tower. Let us consider a homogeneous isotropic elastic body whose shape is exactly same as the WTC tower, with the material density  $\rho_b$ , Young's modulus  $E_b$  and shear modulus  $G_b$  of the body being determined as follows:

$$\rho_b S_b = \rho_o S_A, \quad E_b S_b = E S_A, \quad G_b S_b = G S_A. \quad (\text{C.4})$$

Here:  $S_b$  is the area of the critical floor;  $\rho_o$ ,  $E$ , and  $G$  are the density, Young's modulus and shear modulus of steel in bearing columns of the tower; and  $S_A$  is the total cross-section area of all columns of critical floor. Equations (C.4) mean that the compression and shear stiffness of the continuum material are equal to the corresponding stiffness of the critical floor and that the density of the body is an average value defined similarly to porous materials.

For the sake of simplicity we assume that  $\rho_b$ ,  $E_b$  and  $G_b$  defined by the critical floor will be the same for any floor (which is strictly valid only for equistrong tower designs). The similar assumptions are used when a steel specimen being considered an elastic continuum. As a reminder, the mass of steel is concentrated in nucleons of very small volume (e.g., the WTC tower can be compressed into a particle visible only by microscope).

Let us find Poisson's ratio  $\nu_b$  and the speed  $c_b$  of longitudinal elastic waves in this elastic continuum using equations (A.15) and (C.4)

$$1 + \nu_b = \frac{E_b}{2G_b} = \frac{E}{2G} = 1 + \nu, c_b^2 = \frac{E_b(1 - \nu_b)}{\rho_b(1 + \nu_b)(1 - 2\nu_b)} = \frac{E(1 - \nu)}{\rho_b(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = c^2. \quad (C.5)$$

Hence,  $\nu_b = \nu$  and  $c_b = c$ , that is Poisson's ratio and the speed of longitudinal elastic waves in this continuum coincide with those values for solid steel ( $\nu = 0.3$  and  $c = 5500$  m/s).

From here and the continuum model of the WTC tower, it follows that the self-maintaining steady fracture wave traveled in the WTC tower at the speed  $V = c = 5500$  m/s. Since the characteristic size of fragments behind fracture wave in solid steel is about one meter, it is reasonable to assume that the thickness of the fracture wave in the WTC tower was about the height of the floor or even several floors. To estimate the size of steel fragments behind the fracture wave in the WTC tower we assume that they represent some segments of bearing columns cracked along sliding planes inclined at  $45^\circ$  to the axis of the column supposed to be a solid, round cylinder.

The energy dissipated by the creation of the segments of height  $h$ , is equal to  $2\sqrt{2}\pi^2\Gamma$  in terms of effective surface energy or  $\pi^2 Dh_s$  in terms of effective volume density of dissipated energy. From here, it follows that

$$h_s = 2\sqrt{2} \frac{\Gamma}{D}. \quad (C.6)$$

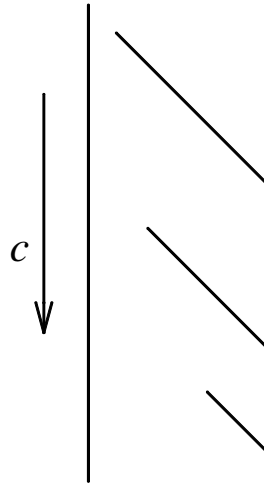
Suppose  $\sigma_o$  is the compressive stress in the intact column in front of the fracture wave from gravitational, thermal, dynamic, and technological stresses (e.g., from rolling, welding, and assembling). Equation (A.12) yields in this case

$$D = U_o - \frac{\sigma_o^2}{2\rho_o c^2} = \frac{0.9\sigma_o^2}{7E} \text{ because } \nu = 0.3, U_o = \frac{\sigma_o^2}{2E}. \quad (C.7)$$

Using eqs. (C.6) and (C.7) for  $E = 200$  GPa and  $\Gamma = 20$  KN/m one can find:  
at  $\sigma_o = -1$  KN/mm<sup>2</sup>:  $D = 0.64$  N/mm<sup>2</sup>,  $h_s = 8.8$  cm,  
at  $\sigma_o = -500$  N/mm<sup>2</sup>:  $D = 0.16$  N/mm<sup>2</sup>,  $d = 35.2$  cm.

It should be noted that the speed of the fracture wave has no direct correlation with the speed of growth of isolated cracks which is demonstrated by Figure C1. For isolated tensile cracks, the limiting speed is Rayleigh speed, and for shear cracks like those on Figure C1 the limiting speed is the speed of shear elastic waves<sup>5</sup>. However, the factual speed of the crack growth is usually much less than the limiting speed so that the thickness of the fracture wave in the WTC tower was much greater than the size of steel fragments as demonstrated by Figure C1.





**FIG C1.** A plausible structure of the fracture wave in a column

USA, Florida

Received: December 19, 2007



**Амензаде Рафаель Юсиф-оглы** ([mexanika.bsu.az@mail.ru](mailto:mexanika.bsu.az@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.



**Баженов Валентин Георгиевич** ([bazhenov@dk.mech.unn.ru](mailto:bazhenov@dk.mech.unn.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.



**Буренин Анатолий Александрович** ([burenin@iacp.dvo.ru](mailto:burenin@iacp.dvo.ru), [burenin@dvo.ru](mailto:burenin@dvo.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, ИА-ПУ ДВО РАН, г. Владивосток.



**Варданын Седрак Ваникович** ([vardanyan\\_s@yahoo.com](mailto:vardanyan_s@yahoo.com)) – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.



**Демьянов Юрий Андреевич** – доктор технических наук, профессор, Московский лесотехнический институт, г. Королев Московской области



**Зубчанинов Владимир Георгиевич** ([vgz@rambler.ru](mailto:vgz@rambler.ru), [kafsm@yandex.ru](mailto:kafsm@yandex.ru)) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.



**Ивлев Дюис Данилович** ([Ivlev21@mail.ru](mailto:Ivlev21@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.



**Каюмов Рашит Абдулхакович** ([kayumov@rambler.ru](mailto:kayumov@rambler.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.



**Климов Дмитрий Михайлович** ([klimov@ipmnet.ru](mailto:klimov@ipmnet.ru)) – Академик РАН, Институт проблем механики РАН, г. Москва.



**Ломакин Евгений Викторович** ([lomakin@nw.math.msu.su](mailto:lomakin@nw.math.msu.su)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.



**Максимова Людмила Анатольевна** ([strangcheb@mail.ru](mailto:strangcheb@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.



**Манжиров Александр Владимирович** ([manzh@ipmnet.ru](mailto:manzh@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики РАН, г. Москва.



**Маркин Алексей Александрович** ([markin@uic.tula.ru](mailto:markin@uic.tula.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.



**Матченко Николай Михайлович** ([ekc@tula.ru](mailto:ekc@tula.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.



**Миронов Борис Гурьевич** ([prorektor@chdpu.edu.ru](mailto:prorektor@chdpu.edu.ru)) – доктор физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.



**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович** ([irakon63@hotmail.com](mailto:irakon63@hotmail.com)) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.



**Михайлов Глеб Константинович** ([gkmikh@proc.ru](mailto:gkmikh@proc.ru), [gkmikh@mail.ru](mailto:gkmikh@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.



**Немировский Юрий Владимирович** ([nemirov@itam.nsc.ru](mailto:nemirov@itam.nsc.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.



**Непершин Ростислав Иванович** ([Nepershin\\_r@pop.mtu.ru](mailto:Nepershin_r@pop.mtu.ru)) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технический университет «СТАНКИН», г. Москва.



**Победря Борис Ефимович** ([rob@mail.ru](mailto:rob@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.



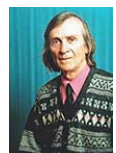
**Радаев Юрий Николаевич** ([radayev@ssu.samara.ru](mailto:radayev@ssu.samara.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный университет, г. Самара.



**Редкозубов Сергей Алексеевич** ([nike109@yandex.ru](mailto:nike109@yandex.ru), [marusbka434@yandex.ru](mailto:marusbka434@yandex.ru)) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.



**Сенашов Сергей Иванович** ([sen@sibsau.ru](mailto:sen@sibsau.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.



**Спорыхин Анатолий Николаевич** ([pmmdeans@main.vsu.ru](mailto:pmmdeans@main.vsu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.



**Тамуж Витаутас Петрович** ([tamuzs@pmi.lv](mailto:tamuzs@pmi.lv)) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.



**Тихонов Сергей Владимирович** ([strangcheb@mail.ru](mailto:strangcheb@mail.ru)) – ученый секретарь редакции журнала, кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.



**Трещев Александр Анатольевич** ([taa@uic.tula.ru](mailto:taa@uic.tula.ru)) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет; г. Тула.



**Хромов Александр Игоревич** ([khromovai@list.ru](mailto:khromovai@list.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.



**Черепанов Геннадий Петрович** ([genadyc@netscape.net](mailto:genadyc@netscape.net), [genacherpanov@hotmail.com](mailto:genacherpanov@hotmail.com)) – доктор физико-математических наук, профессор, пожизненный член Нью-Йоркской академии наук, Флорида, США.



**Чигарев Анатолий Власович** ([chigarev@rambler.ru](mailto:chigarev@rambler.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.



**Шашкин Александр Иванович** ([pmmdeans@main.vsu.ru](mailto:pmmdeans@main.vsu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.



**Шемякин Евгений Иванович** ([esh@msu.ru](mailto:esh@msu.ru), [eshem@mech.math.msu.su](mailto:eshem@mech.math.msu.su)) – Академик РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

1. **«Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния».** Статья должна быть подписана автором и представлена вместе с дискетой или выслана на электронные адреса редакции: [ivlev21@mail.ru](mailto:ivlev21@mail.ru), [strangcheb@mail.ru](mailto:strangcheb@mail.ru).

2. Авторы представляют статьи, набранные на компьютере в текстовом редакторе Microsoft Word (7.0, 6.0 версии). Формат бумаги – А4, поля: справа, слева и сверху 3 см, снизу 6 см.

3. Размер шрифта – 11. Абзацный отступ – 1 см. Интервал – одинарный. Текст статьи набирается шрифтом Times New Roman с выравниванием по ширине и автоматическим переносом слов. Страницы не нумеруются. Заголовок пишется жирным шрифтом заглавными буквами. Фамилия и инициалы автора даются курсивом в правом верхнем углу над заголовком.

4. **Иллюстрации:**

должны быть пронумерованы и упомянуты в тексте;  
подрисовочные подписи выполняются шрифтом размера 9.

5. **Формулы** и буквенные обозначения по тексту должны быть набраны в среде редактора формул Microsoft Equation 3.0. Шрифт для греческих букв – Symbol, для всех остальных – Times New Roman, основной размер – 11, крупный индекс – 7, мелкий – 5.

В формулах следует избегать громоздких обозначений. Формулы располагаются по центру страницы. В случае необходимости формулы нумеруются.

6. **Таблицы** выполняются шрифтом 9. Они могут быть с заголовками и без них. Заголовок набирается полужирным шрифтом 9. Таблицы необходимо пронумеровать и упомянуть в тексте.

7. **Список литературы** набирается по алфавиту шрифтом Times New Roman размера 9. Фамилия и инициалы автора или первое слово в названии издания (если нет автора) выделяются курсивом.

Ссылки на используемую литературу даются внутри текста в квадратных скобках. Например: [1, 23], где 1 – порядковый номер в списке использованной литературы, 23 – номер страницы.

8. **Сведения об авторах «Вестника ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния»** включают фамилию, имя и отчество автора, данные об ученой степени и занимаемой должности. Например, *Ивлев Дюис Данилович* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева.

## ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ

*Ивлев Д. Д., Матченко Н. М.*

### ОБ ЭВОЛЮЦИИ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

*Чувашский государственный педагогический университет  
им. И. Я. Яковлева,  
Тульский государственный университет*

В работе [1] определены три состояния идеально пластического материала. Пластическое состояние, при котором напряжения удовлетворяют условию пластичности в виде одной гладкой функции текучести

$$f(\sigma_{ij})=0. \quad (1)$$

Развитое пластическое состояние, при котором напряжения удовлетворяют условию пластичности в виде пересечения двух гладких функций текучести

$$f_1(\sigma_{ij})=0, f_2(\sigma_{ij})=0, \quad (2)$$

## ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ СПИСКА ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Быковцев, Г. И.* О вязкопластическом течении круглых пластин и оболочек / Г. И. Быковцев, Т. Д. Семькина // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – № 4. – С. 68–76.
2. *Кирияков, П. П.*, Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Кирияков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. – 190 с.
3. *Кроха, В. А.* Упрочнение металлов при холодной пластической деформации : справочник / В. А. Кроха. – М. : Машиностроение, 1980. – 157 с.
4. *Одинокоев, В. И.* Разрушение льда под действием гидростатического давления на подведенном плавающем контейнере с учетом его заполнения водой / В. И. Одинокоев, А. М. Сергеева // Механика микронеоднородных материалов и разрушение : тезисы докладов IV Всероссийского семинара (Екатеринбург, 23–24 марта 2006 г.). – Екатеринбург : Изд-во УГТУ-УПИ, 2006. – С. 43.
5. *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 396 с.
6. *Maugin, G. A.* The Thermomechanics of Plasticity and Fracture / G. A. Maugin. – Cambridge : Cambridge University Press, 1992. – 350 p.
7. *Radayev, Y. N.* On directional average of the local anisotropic damage / Y. N. Radayev // Int. J. Fracture. – 2004. – V. 128. – P. 293–307.

*Адигамов Аркадий Энгелевич* – кандидат технических наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой высшей математики Московского государственного горного университета, г. Москва.

*Амензаде Рафаэль Юсиф оглы* – доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой «Теоретическая механика и механика сплошной среды» Бакинского государственного университета, г. Баку.

*Баженов Валентин Георгиевич* – доктор физико-математических наук, профессор Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород.

*Буренин Анатолий Александрович* – доктор физико-математических наук, профессор Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

*Глаголев Вадим Вадимович* – доктор физико-математических наук, профессор Тульского государственного университета, г. Тула.

*Горбенко Олег Данилович* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики Воронежского государственного университета, г. Воронеж.

*Зенин Алексей Николаевич* – магистр шестого курса факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж.

*Ивлев Дюис Данилович* – доктор физико-математических наук, профессор Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары.

*Киясбейли Энфира Талат гызы* – кандидат физико-математических наук, зав. лабораторией аэромеханики при кафедре «Теоретическая механика и механика сплошной среды» Бакинского государственного университета, г. Баку.

*Ковтанюк Лариса Валентиновна* – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории «Механика деформируемого твердого тела» Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

*Коробкин Валерий Дмитриевич* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета, г. Воронеж.



*Ломунов Владимир Кириллович* – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород.

*Мазелис А. Л.* – аспирант Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

*Маркин Алексей Александрович* – доктор физико-математических наук, профессор Тульского государственного университета, г. Тула.

*Мирсалимов Вагиф Мирахмедович* – доктор физико-математических наук, профессор Заведующий кафедрой «Соппротивление материалов» Азербайджанского технического университета, г. Баку.

*Мяснянкин Юрий Михайлович* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж.

*Немировский Юрий Владимирович* – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича, г. Новосибирск.

*Непершин Ростислав Иванович* – доктор технических наук, профессор кафедры систем пластического деформирования Московского государственного технического университета «СТАНКИН», г. Москва.

*Осетров Сергей Львович* – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород.

*Радаев Юрий Николаевич* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики сплошных сред Самарского государственного университета, г. Самара.

*Редкозубов Сергей Алексеевич* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Московского государственного горного университета, г. Москва.

*Семыкина Татьяна Дмитриевна* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж.

*Сенашов Сергей Иванович* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Сибирского государственного аэрокосмического университета, г. Красноярск.

*Спрыхин Анатолий Николаевич* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж.

*Хромов Александр Игоревич* – доктор физико-математических наук, профессор Самарского государственного аэрокосмического университета, г. Самара.

*Черепанов Геннадий Петрович* – доктор физико-математических наук, профессор, пожизненный член Нью-Йоркской академии наук, Флорида, США.

*Шахбандаев Эльмеддин Гуссейн оглы* – аспирант института математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку.

*Юденков Алексей Витальевич* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Смоленской государственной сельскохозяйственной академии, г. Смоленск.

*Янковский Андрей Петрович* – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича, г. Красноярск.

*Яровой Геннадий Петрович* – доктор физико-математических наук, профессор, ректор Самарского государственного университета, г. Самара.

<i>Горбенков О. Д., Мяснянкин Ю. М., Семыкина Т. Д.</i>	Слово о Г. И. Быковцеве. Воронеж.....	5
<i>Радаев Ю. Н., Яровой Г. П.</i>	К 70-летию Г. И. Быковцева. Самара.....	11
<i>Хромов А. И.</i>	Учитель. Самара.....	30
<i>Буренин А. А.</i>	Г. И. Быковцев и дальневосточная механика деформирования. Владивосток.....	32
<i>Черепанов Г. П.</i>	Памяти Г. И. Быковцева.....	38
<i>Ивлев Д. Д.</i>	Черные страницы.....	40
<i>Адигамов А. Э., Редкозубов С. А., Юденков А. В.</i>	Моделирование смешанных краевых задач теории упругости на основе теоремы единственности для бианалитических функций .....	48
<i>Амензаде Р. Ю., Киясбейли Э. Т.</i>	Вариационный метод геометрически нелинейной теории неоднородных упругих оболочек.....	57
<i>Баженов В. Г., Ломунов В. К., Осетров С. Л.</i>	Исследование применимости жесткопластической модели в задачах импульсного деформирования упругопластических пластин при малых и больших прогибах.....	64
<i>Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Мазелис А. Л.</i>	Об учёте упругих свойств среды при её вязкопластическом течении в зазоре между коаксиальными цилиндрическими поверхностями.....	70
<i>Глаголев В. В., Маркин А. А.</i>	О нагружении окрестности выреза в линейно упругой плоскости парой сил.....	80
<i>Зенин А. Н., Спорыхин А. Н.</i>	К устойчивости упругой сферической оболочки с неоднородным упруговязкопластическим наполнителем при нагружении.....	88

<i>Коробкин В. Д.</i>	Частный случай решения двумерной задачи при условии пластичности Мизеса.....	96
<i>Мирсалимов В. М., Шахбандаев Э. Г.</i>	Предельное равновесие тепловыделяющей среды с периодической системой отверстий и прямолинейных трещин...	98
<i>Немировский Ю. В., Янковский А. П.</i>	Влияние структуры армирования на предельную нагрузку металлокомпозитных оболочек вращения.....	108
<i>Непершин Р. И.</i>	Начальное пластическое течение при высадке высокого цилиндра.....	117
<i>Сенашов С. И.</i>	Об одной симметрии двумерных уравнений идеальной пластичности.....	125
<i>G. P. Cherepanov</i>	On the collapse of three towers in New York on September 11, 2001.....	135
<i>G. P. Cherepanov</i>	A critical analysis of the government's theory: the collapse of the New York towers on September 11, 2001.....	146
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....		163
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ.....		167
АВТОРЫ ЖУРНАЛА.....		169

**Вестник**  
Чувашского государственного педагогического университета  
им. И. Я. Яковлева

Серия: Механика предельного состояния

№ 1(4) • 2008

Отв. за выпуск	А. Н. Роштова С. В. Матвеев С. В. Тихонов П. Н. Кузнецов
----------------	---

Технические редакторы	А. Н. Роштова С. В. Матвеев С. В. Тихонов П. Н. Кузнецов
-----------------------	---

Компьютерная верстка, макет С. В. Тихонова

---

Подписано в печать 29.02.2008. Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Гарнитура Times New Roman.  
Усл. печ. л. 43,5. Тираж 300 экз. Цена свободная. Заказ № 2138

---

Отпечатано на участке оперативной полиграфии  
ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет  
им. И. Я. Яковлева»

428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38