

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

**ВЕСТНИК**  
**ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**  
**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**

**Научный журнал**  
**№ 2(40)**  
**апрель – июнь 2019 г.**

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"  
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.  
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 13109

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Ответственный редактор:** Ю. Н. Радаев

**Заместитель ответственного редактора:** Н. М. Матченко

**Ответственные секретари:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

**Заместитель ответственного секретаря:** С. В. Матвеев

**Редакционная коллегия:** В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,  
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов,  
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Е. В. Ломакин, Л. А. Максимова,  
А. А. Маркин, Г. К. Михайлов, Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин,  
В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин,  
А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

**Международный совет:** В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж  
(Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

**Адрес редакции и издательства:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

**Тел.:** (8352) 22-28-71, доб. 1184

**E-mail:** predel21@mail.ru

**WWW:** <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический  
университет им. И. Я. Яковлева, 2019



А. В. Гавриленко, В. И. Гультияев, С. Л. Субботин

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБОВ СЖАТО-ИЗОГНУТОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЁННОГО БЕЗ СЦЕПЛЕНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ЭЛЕМЕНТА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДВУХЛИНЕЙНОЙ ДИАГРАММЫ СОСТОЯНИЯ БЕТОНА

Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия

**Аннотация.** В статье приводится описание методики расчёта прогибов изгибаемых железобетонных элементов, предварительно напряжённых арматурой без сцепления. В основу методики положено использование двухлинейной диаграммы состояния сжатого бетона. Процесс нагружения элемента предложено отслеживать по деформациям. Выделен ряд характерных этапов работы напряжённой без сцепления балки при росте внешней нагрузки. Для характерных этапов приведены расчётные зависимости, позволяющие оценить момент сечения и кривизну. По полученным формулам осуществлён расчёт ряда балок, испытанных на изгиб в ранее проведённом экспериментальном исследовании. Из сопоставления результатов счёта с данными эксперимента сделаны выводы о возможности использования предлагаемого метода.

**Ключевые слова:** напряжение без сцепления, нелинейная деформационная модель, двухлинейная диаграмма состояния, идеальный упругопластический материал, испытание на изгиб.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.001

УДК: 620.173.21, 539.3

За рубежом весьма популярны предварительно напрягаемые в условиях строительной площадки железобетонные конструкции, в которых напрягаемая арматура не имеет сцепления с бетоном по всей её длине, а усилия обжатия передаются на бетон только по торцам. Использование в строительстве такой технологии, называемой постнапряжением, имеет ряд технологических и экономических преимуществ [1]. В нашей стране наблюдается недостаток нормативной документации, позволяющей выполнить расчёт и проектирование таких конструкций.

---

© Гавриленко А. В., Гультияев В. И., Субботин С. Л., 2019

*Гавриленко Алексей Владимирович*

**e-mail:** gawaw@mail.ru, аспирант кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия,

*Гультияев Вадим Иванович*

**e-mail:** vig0@mail.ru, доктор технических наук, профессор кафедры конструкции и сооружения, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия

*Субботин Сергей Львович*

**e-mail:** sbtn@yandex.ru, доктор технических наук, профессор кафедры конструкции и сооружения, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 15.05.2019

Одним из наиболее актуальных методов расчёта бетонных и железобетонных элементов, содержащихся в нормативной документации в нашей стране, можно считать нелинейную деформационную модель – НДМ [2, с. 5].

При этом расчёт по НДМ целесообразно производить с использованием вычислительной техники [2, с. 75], что требует создания компьютерной программы. Однако при написании такой программы могут быть допущены определённые ошибки, которые не окажутся фатальными для выполнения программы в целом, но при этом приведут к получению недостоверных результатов. Для исключения данных ошибок требуется процесс отладки, при котором результат программного счёта, полученный при различных входных данных, сопоставляется с заведомо известным результатом, полученным каким-либо или иным способом, например – аналитически.

В связи с этим была поставлена задача по получению методами механики материалов ряда аналитических расчётных зависимостей, позволяющих оценить напряжения в сжатом бетоне и прогиб балки без сцепления.

#### Основные предпосылки методики расчёта

В поставленной задаче интерес представляет величина прогиба только в одной точке по длине балки – в середине её пролёта. В связи с этим прогиб элемента от действия внешних сосредоточенных сил целесообразно определять по формуле Мора с применением способа Верещагина. Согласно [3, с. 34] и [4, с. 184], прогиб рассматриваемого элемента в середине его пролёта от действия эксплуатационных нагрузок может быть выражен формулой:

$$f = \frac{Fa}{24EI} (3l^2 - 4c^2), \quad (1)$$

где  $F$  – сосредоточенные силы, приложенные к балке на расстояниях  $c$  от её опор;  $l$  – пролёт балки;  $E$  – начальный модуль упругости бетона;  $I$  – момент инерции поперечного сечения.

Расчёт по формуле (1) затруднён, поскольку при работе железобетонного элемента в ряде его сечений образуются трещины, приводящие к уменьшению момента инерции в таких сечениях и соответствующему росту прогиба элемента.

В методике актуального свода правил [5] предлагается вычислять кривизну элемента на участках с трещинами и без трещин по различным формулам. Однако в рассматриваемом элементе отсутствует арматура, имеющая сцепление с бетоном, что делает затруднительным корректное определение кривизны на участках с трещинами в растянутой зоне по [5]. Методика, предложенная в [6], требует выполнения ряда итераций и на практике оказывается достаточно трудоёмкой.

Для получения способа определения прогибов элемента с трещинами, выражение (1) приближённо преобразуем к следующему виду:

$$f = \frac{M_{\max}}{24EI} (3l^2 - 4c^2). \quad (2)$$

При работе в упругой стадии кривизна элемента связана с изгибающим моментом известным соотношением:

$$\frac{1}{\rho_{\max}} = \frac{M_{\max}}{EI}. \quad (3)$$

В свою очередь кривизна элемента может быть записана как:

$$\frac{1}{\rho_{\max}} = \frac{\varepsilon_b}{x}, \quad (4)$$

что следует из геометрических соображений.

Тем самым из (2) получаем следующую формулу для определения прогиба элемента в середине пролёта:

$$f = \frac{\varepsilon_b}{24x} (3l^2 - 4c^2). \quad (5)$$

Для отыскания прогиба по данной формуле целесообразно задаться несколькими стадиями работы элемента, в которых будет различаться величина деформации наиболее сжатого волокна бетона  $\varepsilon_b$ . Примем, что гипотеза плоских сечений в рассматриваемом случае полностью соблюдается. Для описания работы бетона зададимся двухлинейной диаграммой  $\sigma - \varepsilon$ , приведённой в [5], т.е. будем рассматривать бетон идеальным упругопластическим материалом [7, с. 41]. Учитывая изложенные обстоятельства, а также задаваясь рядом данных из приведённого ранее экспериментального исследования, вполне возможно определить высоту сжатой зоны бетона в сечении и далее прогиб по выражению (5).

Наличие трещин в растянутой зоне рассматриваемой балки при определении её прогиба по формуле (5) учитывается исключением из рассмотрения растянутого бетона при исчерпании его прочности. Критерии образования трещин и исчерпания прочности бетона приняты в соответствии с рекомендациями [5]. Рассмотрение сечения без учёта растянутого бетона приводит к уменьшению высоты сжатой зоны, что влечёт соответствующий рост прогиба элемента после образования трещин.

#### **Стадии и этапы работы элемента, расчётные зависимости**

В экспериментальном исследовании балок без сцепления, выполненном ранее, были получены графики “прогиб – нагрузка” для ряда образцов (рис. 1).

По данным графиков, а также на основании натурных наблюдений за поведением балок при их изготовлении и испытании, принимая во внимание основные особенности технологии производства работ при возведении подобных конструкций в реальных объектах, с учётом общепринятого подхода к рассмотрению стадий работы железобетонных элементов [8], были выделены основные этапы работы рассматриваемых балок без сцепления:

- I. Стадия предварительного напряжения
- II. Стадия работы под нагрузкой без трещин в растянутой зоне
- III. Стадия работы под нагрузкой после образования трещин в растянутой зоне.

В каждой из данных стадий дополнительно можно выделить определённые этапы работы элемента, рассмотренные подробнее далее.

**Стадия I “предварительное напряжение”.** Расчётная схема элемента дана на рис. 2.

В данной стадии к элементу прикладывается усилие предварительного обжатия. Сам элемент перед началом напряжения, как правило, расположен на опалубке и в его сечениях отсутствуют внутренние усилия, обусловленные действием его собственного веса. Обжатие может компенсировать часть нагрузки от собственного веса элемента либо её всю. Элемент может получить предварительный выгиб. Правильный выбор усилия предварительного напряжения с целью компенсации части изгибающего момента, вызванного собственным весом, является важным этапом в проектировании постнапряжённых конструкций [9, с. 11].

**Стадия II “работа под нагрузкой без трещин в растянутой зоне”.** Расчётная схема элемента приведена на рис. 3.

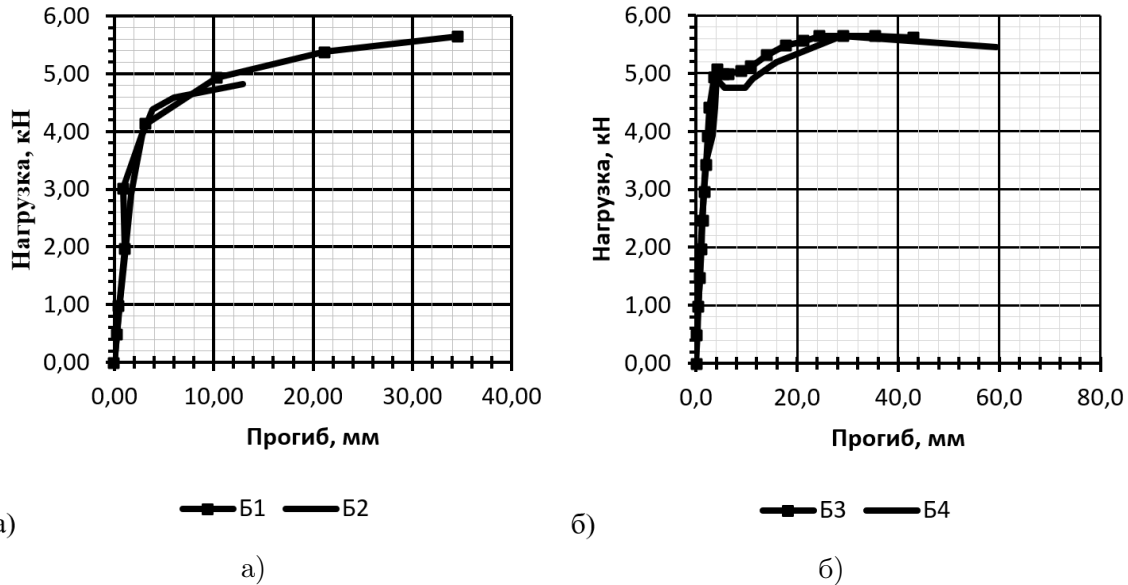


Рис. 1. Графики, показывающие зависимость “прогиб – нагрузка”: а – для образцов-балок Б1 и Б2, б – для образцов-балок Б3 и Б4

При росте внешней нагрузки постепенно гасятся сжимающие усилия, заданные при предварительном обжатии. Напряжения в бетоне нижней части конструкции от сжимающих переходят к растягивающим.

При этом можно выделить два характерных этапа работы элемента на данной стадии:

**II.1.** Бетон по высоте сечения работает линейно, при этом в бетоне верхней части возникают сжимающие напряжения, а в бетоне нижней части – растягивающие. Окончание данного этапа работы элемента характеризуется достижением в наиболее растянутом волокне деформации  $\varepsilon_{bt1}$ , которая определяет переход линейной зависимости напряжений от деформаций к нелинейной (см. рис. 3, б). По графикам на рис. 1 данной стадии соответствует относительно линейный участок при прогибе балки от 0 примерно до 4 мм.

Из геометрических соображений для данной стадии получаем:

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_{bt1,red}x}{h-x}. \quad (6)$$

На данной стадии работы элемента считаем, что деформации в сжатом бетоне не достигли величины  $\varepsilon_{b1}$ , поэтому наибольшее напряжение в сжатой зоне сечения, с учётом рекомендаций [5], может быть найдено как:

$$\sigma_b = \varepsilon_b E_b = \frac{\varepsilon_{bt1}x E}{h-x}. \quad (7)$$

Из выражения равенства нулю проекций сил на горизонтальную ось получаем квадратное уравнение, из решения которого может быть найдена высота сжатой зоны  $x$ :

$$(\varepsilon_{bt1,red}bE - R_{btb})x^2 + (2R_{btb}h + 2N_{II.1})x - R_{btb}bh^2 - 2N_{II.1}h = 0. \quad (8)$$

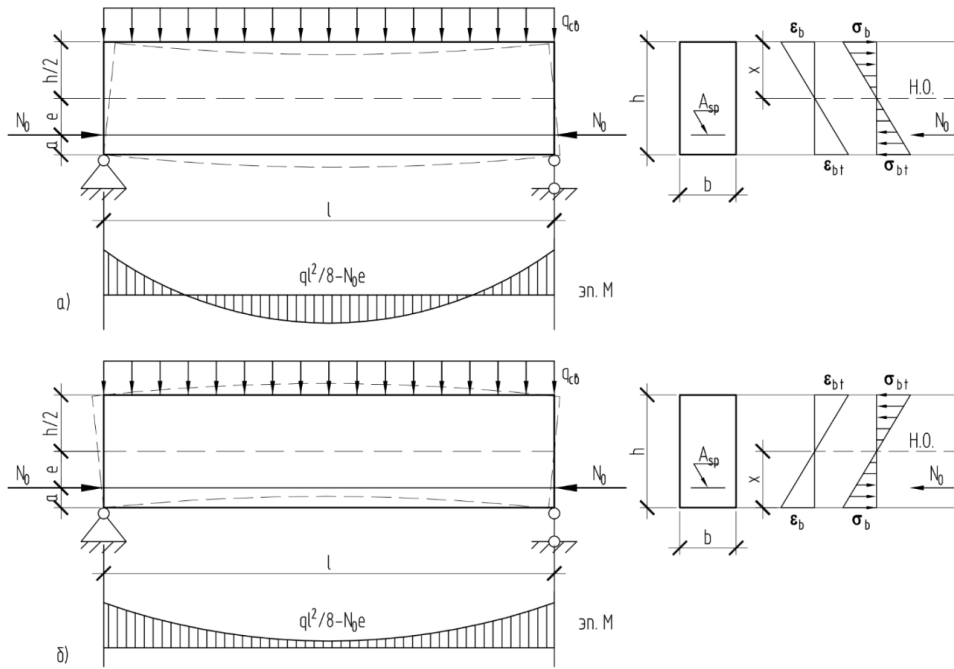


Рис. 2. Элемент в стадии предварительного напряжения: а – в случае, если  $ql^2/8 > N_0e$ ; б – в случае, если  $ql^2/8 < N_0e$

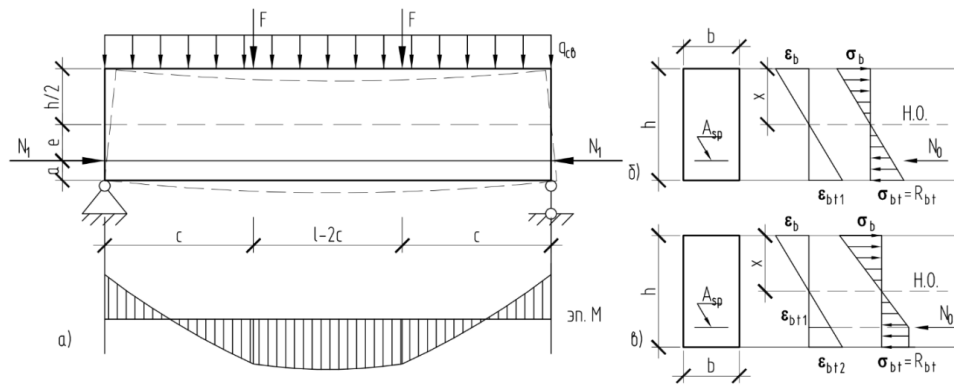


Рис. 3. Элемент в стадии работы под нагрузкой без трещин в растянутой зоне: а – схема элемента; б, в – распределение деформаций и напряжений по высоте сечения на этапах II.1 и II.2 соответственно

Уравнение равенства нулю моментов относительно нейтральной оси позволяет отыскать момент сечения в данной стадии:

$$M_{II.1} = \frac{1}{3} \sigma_b b x^2 + \frac{1}{3} R_{bt} b (h - x)^2 + N_{II.1} (h - x - a). \quad (9)$$

**II.2.** С дальнейшим ростом внешней нагрузки в растянутом бетоне развивается зона неупругих деформаций. Данный этап работы элемента завершается при достижении в наиболее растянутом волокне деформации  $\varepsilon_{bt2}$ , являющейся предельной деформацией для бетона при растяжении. Тем самым, в сечении достигнут момент трещинообразования (см. рис. 3, в).

Находим относительную деформацию наиболее сжатого волокна:

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_{bt2}x}{h-x}. \quad (10)$$

Считаем, что относительные деформации сжатого бетона по-прежнему не достигли величины  $\varepsilon_{b1}$ , поэтому по аналогии с (7) выражаем напряжения в сжатом бетоне:

$$\sigma_b = \frac{\varepsilon_{bt2}xE}{h-x}. \quad (11)$$

Высота сжатой зоны определится из квадратного уравнения:

$$\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{bt2}bE - \frac{11}{30}R_{bt}b\right)x^2 + \left(\frac{22}{15}R_{bt}bh + N_{II.2}\right)x - \frac{11}{15}R_{bt}bh^2 - N_{II.2}h = 0. \quad (12)$$

Момент сечения:

$$M_{II.2} = \frac{1}{3}\sigma_b bx^2 + \frac{611}{1350}R_{bt}b(h-x)^2 + N_{II.2}(h-x-a). \quad (13)$$

**Стадия III “работа под нагрузкой после образования трещин в растянутой зоне”.** Расчётная схема элемента приведена на рис. 4.

Принимаем, что после образования трещины растянутый бетон полностью исключается из работы сечения. В предварительных расчётах работу бетона на участках между трещинами учтём приближённо: примем, что в сечении, расположенном посередине расстояния между трещинами, в растянутом бетоне достигается предельная деформация  $\varepsilon_{bt2}$ . Распределение относительных деформаций в сжатом бетоне примем равномерным по всей верхней грани балки, тем самым в сечении, находящемся посередине расстояния между трещинами, в сжатом бетоне достигается деформация  $\varepsilon_b$  такая же, как и в сечении с трещиной.

Из геометрических соображений высота сжатой зоны в таком сечении оказывается равной:

$$x_1 = \frac{h\varepsilon_b}{\varepsilon_b + \varepsilon_{bt2}}. \quad (14)$$

Для расчёта прогиба по формуле (5) в данном случае необходимо использовать следующую высоту сжатой зоны:

$$x_{cp} = \frac{x + x_1}{2}. \quad (15)$$

В третьей стадии могут быть выделены следующие основные этапы работы элемента:

**III.1.** При постепенном росте внешней нагрузки был достигнут момент, когда трещина образовалась (стадия II.2). Растянутый бетон сразу выключился из работы, что привело к снижению момента инерции сечения и, соответственно, к резкому увеличению прогиба элемента. Величина внешней нагрузки при этом не изменилась. Данный этап работы отчётливо прослеживается по графикам (рис.1, б) в виде горизонтального



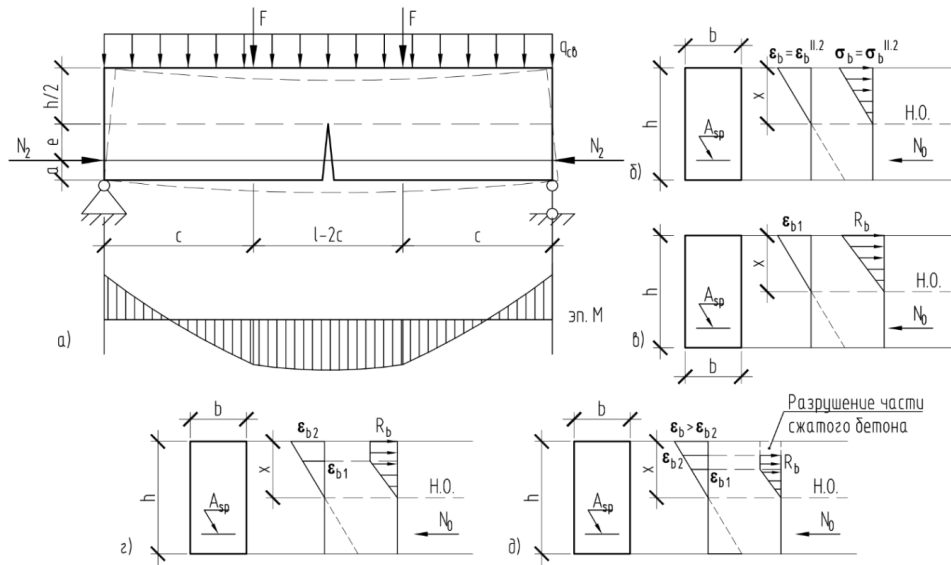


Рис. 4. Элемент в стадии работы под нагрузкой после образования трещин в растянутой зоне: а – схема элемента; б... д – распределение деформаций и напряжений по высоте сечения на этапах III.1... III.4

участка при нагрузке порядка 4,8 кН. Изгибающий момент на данном этапе считаем равным моменту в предельной стадии II.2, то есть моменту, вызвавшему образование трещины:  $M_{III.1} = M_{II.2}$ .

Считаем, что в данном случае в сжатой зоне относительные деформации ещё не достигли величины  $\epsilon_{b1}$ , поэтому их величину можем определить по формуле:

$$\epsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_{b,red}}. \quad (16)$$

Величина напряжений в сжатом бетоне в данном случае может быть получена из выражения:

$$\sigma_b = \frac{2N_{III.1}}{bx}. \quad (17)$$

Высота сжатой зоны из уравнений равновесия статики:

$$x = 3 \left( h - a - \frac{M_{II.2}}{N_{III.1}} \right). \quad (18)$$

Момент сечения:

$$M_{III.1} = \frac{1}{2} \sigma_b b x \left( h - \frac{x}{3} - a \right). \quad (19)$$

Чтобы учесть работу растянутого бетона между трещинами, при вычислении прогиба по формуле (5) в данном случае следует использовать среднюю высоту сжатой зоны  $x_{cp}$ , определённую по формуле (15).

**III.2.** В наиболее сжатом волокне бетона достигается деформация  $\epsilon_{b1}$ , которая, в соответствии с двухлинейной диаграммой  $\sigma - \epsilon$ , определяет переход линейной зависимости напряжений от деформаций к нелинейной.

Величина относительной деформации наиболее сжатого волокна в данном случае известна и, согласно указаниям [5], равна:

$$\varepsilon_{b1} = \frac{R_b}{E_{b,red}} = \varepsilon_{b1,red} = 0,0015. \quad (20)$$

Высота сжатой зоны из уравнения равенства нулю проекций сил на горизонтальную ось:

$$x = \frac{2N_{III.2}}{R_b b}. \quad (21)$$

Момент сечения:

$$M_{III.2} = \frac{1}{2} R_b b x \left( h - \frac{x}{3} - a \right). \quad (22)$$

При вычислении прогиба по формуле (5) в данном случае также целесообразно использовать среднюю высоту сжатой зоны  $x_{cp}$ , определённую по формуле (15).

**III.3.** В наиболее сжатом волокне достигается деформация  $\varepsilon_{b2}$ , которая является предельной деформацией бетона при сжатии. В сечении достигается предельный момент по несущей способности. По графикам на рис. 1 данной стадии соответствует точка, в которой достигнута наибольшая внешняя нагрузка на элемент.

Величина относительной деформации наиболее сжатого волокна бетона в данном случае в соответствии с [5] принимается равной  $\varepsilon_{b2} = 0,0035$ .

Высота сжатой зоны определяется из уравнения:

$$x = \frac{14}{11} \frac{N_{III.3}}{R_b b}. \quad (23)$$

Момент сечения:

$$M_{III.3} = \frac{11}{14} R_b b x \left( h - \frac{31}{77} x - a \right). \quad (24)$$

Как и в двух предыдущих случаях, в формулу для определения прогиба (5) целесообразно подставлять величину  $x_{cp}$ , определённую по (15).

**III.4.** В наиболее сжатом волокне бетона сжатой зоны деформация  $\varepsilon_b > \varepsilon_{b2}$ , часть бетона разрушается и выключается из работы. Данную стадию можно отчётливо отследить по графику на рис.1, б – после достижения прогиба порядка 24-26 мм происходит дальнейший рост прогиба при снижении воспринимаемой балкой внешней нагрузки. С практической точки зрения рассмотрение данной стадии работы избыточно, поэтому в данном случае оно не производится.

Следует отметить, что в процессе работы балочного элемента без сцепления усилие в напрягаемой арматуре изменяется. Так, сразу после приложения к конструкции предварительного обжатия усилие начинает снижаться вследствие развития вторых потерь (длительная релаксация напряжений в арматуре, ползучесть и усадка бетона и другие).

При приложении к элементу внешней нагрузки он получает определённый прогиб. Вследствие этого происходит геометрическое приращение длины арматурного каната, что вызывает прирост усилий в арматуре без сцепления. Данное явление в ряде источников называется “антипотерями” [10]. В зарубежных нормативных документах, а также в работах иностранных и отечественных исследователей предложены различные способы расчётного определения величины антипотерь. Ввиду сложности данного

вопроса, на этапе предварительной проработки аналитической методики расчёта прогибов балок без сцепления усилие в напрягаемой арматуре целесообразно принимать по полученным ранее данным эксперимента.

#### Вычисление прогиба элемента

Исходные данные примем по натурным параметрам балок, испытанных ранее на изгиб. Размеры поперечного сечения, прочность бетона на сжатие и величина защитного слоя бетона для напрягаемой арматуры по образцам балкам Б1–Б4 приведены в строках 1–3 таблицы 1.

Как отмечалось ранее, усилие в нитях напрягаемой арматуры изменяется в процессе нагружения постнапряжённых конструкций внешней нагрузкой, поэтому его величиной будем задаваться отдельно в каждой из ранее выделенных стадий.

Ввиду обстоятельств, изложенных в [11], величина  $R_b$ , полученная при испытании стандартных образцов кубов на сжатие, может отличаться от фактической величины напряжений, при которой произошло разрушение сжатого бетона в балках.

Чтобы проверить данное обстоятельство, расчёты выполним дважды:

- при прочности бетона, полученной при испытании образцов на сжатие (строка 4 табл. 1);
- при прочности бетона, определённой расчётом по предельной стадии III.3 работы балки.

Для того, чтобы получить расчётную прочность бетона на сжатие, представим выражение (24) в следующем виде:

$$M_{III.3} = N_{III.3} \left( h - a - \frac{31}{77}x \right), \quad (25)$$

откуда можем найти альтернативное выражение для определения высоты сжатой зоны:

$$x = \frac{77}{31} \left( h - a - \frac{M_{III.3}}{N_{III.3}} \right). \quad (26)$$

Далее из (23) выражаем искомую величину через высоту сжатой зоны бетона  $x$ :

$$R_b = \frac{14}{11} \frac{N_{III.3}}{bx}. \quad (27)$$

Расчёт по формулам (26) и (27) выполним для нескольких значений  $M_{III.3}$  и  $N_{III.3}$ , взятых по экспериментальным данным в близкой окрестности от момента разрушения балки. Итоговую расчётную величину  $R_b$  вычислим как среднее арифметическое полученных значений.

Результаты расчёта по формуле (27) для балок Б1–Б4 сведены в строку 8 таблицы 1.

Величины прочности бетона на растяжение и начального модуля упругости бетона принимаем по данным таблиц [5], предварительно определив класс бетона на сжатие  $B_{по}$  величине  $R_b$ , измеренной в экспериментальном исследовании или вычисленной по формуле (27). Прочность бетона на растяжение и начальный модуль упругости приведены в строках 5...7 и 9...11 таблицы 1.

Необходимые величины относительных деформаций бетона при двухлинейной диаграмме  $\sigma - \varepsilon$  примем в соответствии с рекомендациями свода правил [5].

Расчёт производился в следующем порядке:

№	Параметр	Ед. изм.	Величина параметра по образцам			
			Б1	Б2	Б3	Б4
1	Ширина сечения, $b$	см	19,97	19,96	20,08	19,95
2	Высота сечения, $h$	см	10,07	10,18	10,03	9,99
3	Защитный слой арматуры, $a_{sp}$	см	2,97	2,97	2,97	2,97
4	Прочность бетона на сжатие по образцам-кубам, $R_b$	кН/см <sup>2</sup>	2,63	2,63	3,00	3,00
5	Класс бетона на сжатие по образцам-кубам, $B_1$	–	29,34	29,34	33,92	33,92
6	Прочность бетона на растяжение $R_{bt}$ по классу $B_1$	кН/см <sup>2</sup>	0,17	0,17	0,19	0,19
7	Начальный модуль упругости бетона $E_b$ по классу $B_1$	кН/см <sup>2</sup>	3217,01	3217,01	3406,66	3406,66
8	Прочность бетона на сжатие по расчёту в стадии III.3, $R_b$	кН/см <sup>2</sup>	1,05	1,04	1,95	2,46
9	Класс бетона на сжатие по расчёту в стадии III.3, $B_2$	–	14,09	13,98	26,42	33,72
10	Прочность бетона на растяжение $R_{bt}$ по классу $B_2$	кН/см <sup>2</sup>	0,11	0,11	0,16	0,19
11	Начальный модуль упругости бетона $E_b$ по классу $B_2$	кН/см <sup>2</sup>	2308,73	2298,29	3070,93	3398,78

Таблица 1. Исходные данные для расчёта

1. По экспериментальным данным (см. табл. 2) для каждой из выделенных стадий работы элемента задаёмся предварительной величиной усилия в нитях напрягаемой арматуры  $N_i$ .

Образец Б1		Образец Б2		Образец Б3		Образец Б4	
Нагрузка, $F$ , кН	$N$ , кН	Нагрузка, $F$ , кН	$N$ , кН	Нагрузка, $F$ , кН	$N$ , кН	Нагрузка, $F$ , кН	$N$ , кН
0,00	55,50	0,00	55,10	0,00	51,24	0,00	47,15
0,49	57,05	1,05	50,64	0,49	51,24	0,49	47,38
0,98	57,05	1,96	52,35	0,98	51,24	0,98	47,44
1,96	57,05	2,91	51,59	1,96	51,33	1,96	47,44
3,02	56,08	3,37	50,16	2,96	51,33	2,94	47,57
4,13	55,56	3,94	50,43	3,92	51,35	3,92	47,59
4,92	58,80	4,38	50,43	4,92	51,11	4,91	47,59
5,38	64,49	4,58	50,43	5,30	54,61	5,19	51,30
5,65	65,55	4,82	53,67	5,65	59,12	5,65	53,25

Таблица 2. Величина усилия в напрягаемой арматуре в зависимости от внешней нагрузки

2. При известных исходных данных и величине  $N_i$  вычисляем  $x, \varepsilon_b, \sigma_b$  и  $M_i$  для данной стадии работы элемента.

3. Определяем расчётную величину внешней нагрузки в данной стадии по формуле:

$$F_i = \frac{M_i - 0,125ql^2}{c}, \quad (28)$$

где  $q$  – равномерно-распределённая нагрузка от собственного веса балки, равная  $q = 0,00462$  кН/см;  $l$  – пролёт балки между опорами,  $l = 192$  см;  $c$  – расстояние от опоры до точки приложения внешней сосредоточенной нагрузки,  $c = 61$  см.

4. По экспериментальным данным при известной величине внешней нагрузки  $F_i$  линейной интерполяцией определяем уточнённую величину усилия в нитях напрягаемой арматуры  $N_i$ .

5. Повторяем расчёт на шагах 2...4 до тех пор, пока расхождение между изначально заданной и уточнённой величинами  $N_i$  не окажется в пределах 5%.

6. Зная уточнённые величины  $x, \varepsilon_b$  и  $\sigma_b$  по шагу 5, вычисляем при необходимости  $x_{cp}$  по формуле (15) и далее прогиб элемента по (5).

Величины прогиба, полученные в результате расчёта, а также расчётное значение внешней сосредоточенной нагрузки  $F$ , при котором данный прогиб был получен, сведены в таблицу 3 для всех балок при двух вариантах прочности бетона.

Стадия	Образец-балка							
	Б1		Б2		Б3		Б4	
	$F$ , кН	$f$ , мм	$F$ , кН	$f$ , мм	$F$ , кН	$f$ , мм	$F$ , кН	$f$ , мм
Бетон В1								
II.1	4,33	1,30	4,04	1,21	4,08	1,21	3,80	1,17
II.2	4,31	1,61	4,10	1,52	4,16	1,53	3,92	1,50
III.1	4,31	1,78	4,10	1,89	4,16	1,98	3,92	2,12
III.2	6,52	10,21	5,37	10,59	5,73	10,84	4,71	11,21
III.3	6,78	24,72	5,51	25,25	5,89	25,74	5,19	26,15
Бетон В2								
II.1	3,93	1,56	3,66	1,44	3,93	1,27	3,80	1,17
II.2	3,77	1,84	3,56	1,74	3,95	1,58	3,91	1,50
III.1	3,77	1,70	3,56	1,68	3,95	1,82	3,91	2,11
III.2	4,61	8,16	4,27	8,48	4,84	10,20	4,62	10,86
III.3	5,55	20,45	4,82	21,39	5,61	24,28	5,30	25,46

Таблица 3. Результаты вычисления прогибов

### Сопоставление результатов расчёта с данными эксперимента

По результатам расчётов были получены величины прогиба балок в середине пролёта и соответствующие данным прогибам величины внешней нагрузки (см. табл. 3). Для удобства анализа полученных результатов и сопоставления их с данными эксперимента на графики, показывающие измеренную в эксперименте зависимость прогиба от внешней нагрузки, были наложены аналогичные графики, составленные по результатам счёта (рис. 5).

Из приведённых графиков следует, что использование в расчётах прочности бетона В1, полученной при испытаниях образцов-кубов, в двух случаях из трёх приводит к

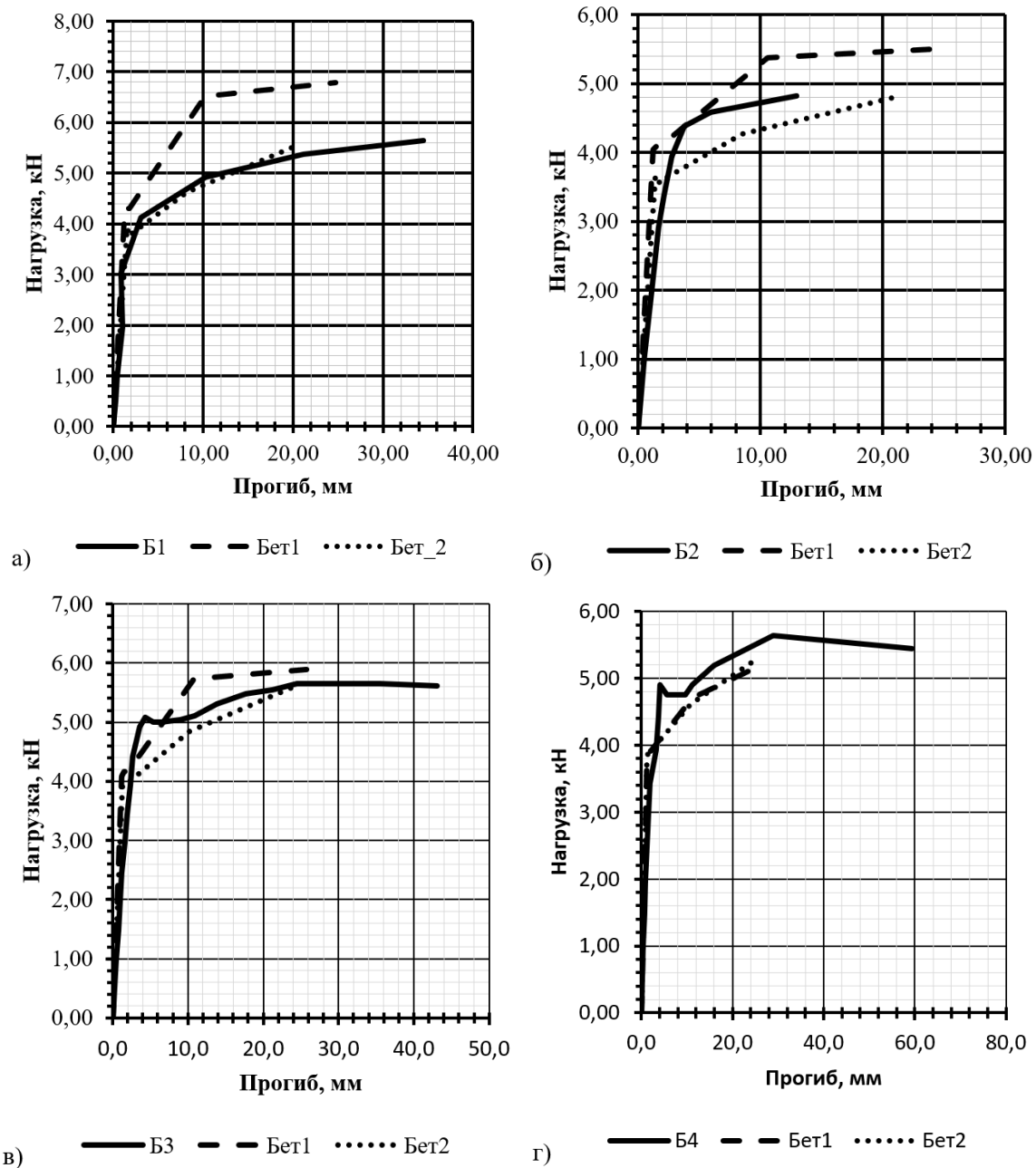


Рис. 5. Сопоставление экспериментального и расчётного прогиба: а – для образца Б1, б – для образца Б2, в – для образца Б3, г – для образца Б4

получению завышенных значений внешней нагрузки при одинаковых с экспериментальными значениями прогибов. В то же время при использовании расчётных характеристик бетона В2 наблюдается тенденция к занижению результатов. На практике

получение несколько заниженных результатов, полученных при использовании расчётных параметров бетона, можно считать более приемлемыми, поскольку это даст определённый “запас” в прочности и жёсткости реальной конструкции.

Также по графикам можно заметить, что на этапе работы конструкции до образования трещины результаты практически идентичны для обоих вариантов бетона. При этом наблюдается определённое завышение жёсткости конструкции относительно экспериментальных данных.

После образования трещины можно судить, как правило, о качественном соответствии полученных расчётом графиков данным эксперимента.

### **Заключение**

Была предложена аналитическая методика расчёта прогибов балок, напряжённых арматурой без сцепления. Предполагалось, что поведение бетона при росте внешней нагрузки описывается двухлинейной диаграммой  $\sigma - \varepsilon$ , приведённой в нормативной документации по расчёту бетонных и железобетонных конструкций, актуальной на данный момент.

В поведении рассматриваемых конструкций под нагрузкой были выделены основные стадии и этапы работы. На каждом из них были получены расчётные зависимости, позволяющие определить необходимые для расчёта прогибов величины, в частности, высоту сжатой зоны. По данным экспериментального исследования ряда образцов-балок, напряжённых арматурой без сцепления, были приняты необходимые исходные данные для расчёта по полученным аналитическим зависимостям.

В результате сопоставления расчётных и экспериментальных величин прогиба можно сделать вывод о том, что предложенный подход к определению прогибов в целом показывает сходимость с данными эксперимента, однако в ряде случаев точность получаемых результатов не может быть названа удовлетворительной. В связи с этим в дальнейшем представляет интерес развитие предложенного расчётного подхода, в частности, применение в нём трёхлинейной или криволинейной диаграммы состояния бетона.

## **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Расчёт балок, напряжённых арматурой без сцепления, методами линейной механики материалов / А.В. Гавриленко, Т.Р. Баркая, С.Л. Субботин [и др.] // Жилищное хозяйство и коммунальная инфраструктура. 2018. № 4(7). с. 16–21.
- [2] Кодыш Э.Н., Никитин И.К., Трекин Н.Н. Расчёт железобетонных конструкций из тяжёлого бетона по прочности, трещиностойкости и деформациям. М.: АСВ, 2010. 352 с.
- [3] ACI 435R-95. Control of deflection in concrete structures / ACI Committee 435. 1995.
- [4] Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1970. 544 с.
- [5] СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. Введ. 01.01.2013. 2012.
- [6] Mast R. Analysis of cracked prestressed concrete sections: a practical approach // PCI Journal. 1998. p. 80–91.
- [7] Зубчанинов В.Г. Механика сплошных деформируемых сред, 2 изд. Тверь: ЧуДо, 2000. 703 с.
- [8] Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. 5 изд. М.: Стройиздат, 1991. 767 с.
- [9] Cross E. Post-tensioning in Building Structures. Austress Freyssinet Pty Ltd.
- [10] Поргаев Д.В. Расчет и конструирование монолитных преднапряженных конструкций гражданских зданий : научное издание. М.: Ассоциация строительных вузов, 2011. 248 с.
- [11] О назначении допусков на линейные размеры и форму кубических и призматических бетонных образцов при испытаниях на сжатие / Л.М. Абрамов, С.Н. Маклакова, М.А. Галкина [и др.] // Вестник Чувашия государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4(34). с. 74–81.

A. V. Gavrilenko, V. I. Gulyaev, S. L. Subbotin

**DEFLECTION DETERMINATION OF AN ECCENTRICALLY CURVED  
CONCRETE ELEMENT PRESTRESSED WITHOUT BOND BY USING  
BI-LINEAR DIAGRAM OF CONCRETE STATE**

*Tver State Technical University, Tver, Russia*

**Abstract.** There is a description of a deflection calculation method of posttensioned unbonded concrete elements in this paper. Method is based on use of bi-linear diagram of concrete state. Loading process is suggested to track by strains. Some key stages of posttensioned unbonded beam work are determined. For these stages calculated dependencies for estimation of curvature and ultimate bending moment of cross section are given. Calculation of some beams, which were investigated in previous experimental study, are made using suggested formulas. By comparison of experimental data and calculated results conclusion about possibility of use of suggested method is given.

**Keywords:** : posttension, non-linear deformation model, bi-linear state diagram, perfect elastic-plastic material, bending test

REFERENCES

- [1] Calculation of beams prestressed by reinforcement without bond to concrete by methods of linear mechanics of materials / A. Gavrilenko, T. Barkaya, S. Subbotin et al. // *Zhilishchnoye khozyaystvo i kommunal'naya infrastruktura*. 2018. no. 4(7). p. 16–21. (in Russian).
- [2] Kodysh E., Nikitin I., Trekin N. Calculation of reinforced concrete structures made of heavy concrete for strength, crack resistance and deformations. M.: ASV, 2010. 352 p. (in Russian).
- [3] ACI 435R-95. Control of deflection in concrete structures / ACI Committee 435. 1995.
- [4] Feodos'yev V. Strength of materials. M.: Nauka, 1970. 544 p. (in Russian).
- [5] SP 63.13330.2012. Concrete and reinforcement concrete structures. The main provisions. Updated edition of SNiP 52-01-2003. 01.01.2013. 2012. (in Russian).
- [6] Mast R. Analysis of cracked prestressed concrete sections: a practical approach // *PCI Journal*. 1998. p. 80–91.
- [7] Zubchaninov V. Mechanics of continuous deformable environments. 2 edition. Tver': ChuDo, 2000. 703 p. (in Russian).
- [8] Baykov V., Sigalov E. Reinforced concrete structures. 5 edition. M.: Stroyizdat, 1991. 767 p. (in Russian).
- [9] Cross E. Post-tensioning in Building Structures. Austress Freyssinet Pty Ltd.
- [10] Portayev D. Calculation and design of monolithic posttensioned constructions of civil buildings : scientific publication. M.: Assotsiatsiya stroitel'nykh vuzov, 2011. 248 p. (in Russian).
- [11] On the appointment of tolerances for linear dimensions and shape of cubic and prismatic concrete specimens under compression tests / L. Abramov, S. Maklakova, M. Galkina et al. // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*. 2017. no. 4(34). p. 74–81. (in Russian).

---

*Gavrilenko Alexey Vladimirovich*, Postgraduate Student, Tver State Technical University, Tver, Russia.

*Gulyaev Vadim Ivanovich*, Doctor of Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

*Subbotin Sergey Lvovich*, Doctor of Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.



Ю. В. Немировский

## ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ГИБРИДНЫХ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ПЛАСТИН БЕЗ ПРЯМЫХ УГЛОВ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия*

**Аннотация.** Для класса гибридных слоистых пластин с контурами не имеющих прямых углов при различных условиях нагружения и закрепления контуров, разработан метод определения первых (предельно упругих) и вторых (нагрузка предразрушения) предельных нагрузок. Определены критерии их достижения, получены необходимые системы разрешающих уравнений и описан метод их решения.

**Ключевые слова:** гибридные слоистые пластины, полигональные, с контуром и без прямых углов, защемление и шарнирное закрепление на контуре, первое (предельно упругое) и второе (состояние предразрушения) предельные состояния, критерий достижения предельных состояний, определение предельных нагрузок.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.014

УДК: 539.374

### Введение

Полигональные пластинки различных видов находят широкое применение в различных отраслях машиностроения, судостроительной и авиационной технике и предприятиях стройиндустрии. Расчеты напряженно-деформированного состояния и несущей способности (за редким исключением) касаются прямоугольных и трапецевидных пластин на основе моделей упругих сред [1] или модели идеальных жестко-пластических материалов по схеме А.А. Гвоздева. Эти модели давно показывают невозможность выполнения все возрастающих экономических и эксплуатационных требований к изделиям при использовании конструкций из однородных материалов.

---

© Немировский Ю. В., 2019  
*Немировский Юрий Владимирович*  
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00038.

Поступила 20.03.2019

В настоящее время разработано множество эффективных и надежных технологических методов (склейка, различные типы сварок, плазменного и холодного газодинамического напыления, электронной наплавки и др.) позволяющие создавать разнообразные гибридные конструкции из практически любых наборов материалов. Разрабатываемые в настоящее время методы исследования и оценки несущей способности таких композитных конструкций основывается на моделях упругих сред и не позволяют надежно и адекватно оценивать их реальное поведение. Дело в том, что от вновь создаваемых материалов требуют существенного увеличения прочностных и пластических характеристик, что приводит к иным перераспределениям полей напряжений и деформаций в гибридных конструкциях, чем предсказываемые в рамках упругих расчетов. Кроме того, возникающие нелинейные начально-краевые задачи приводят к серьезным аналитическим и численным проблемам при реализации процедур их решения [2, 3].

В представленной работе разработан новый подход к расчету и анализу предельных состояний определенного класса полигональных гибридных и однородных пластин, позволяющих с единых позиций анализировать два принципиально разных предельных состояния: первое — предельно упругое, когда во всех составляющих материалах не будет превышен предел упругости и второе предельное состояние (состояние предразрушения), когда все материалы или некоторые из них деформируются пластически, но ни один из них не разрушается.

### Основные уравнения

Будем рассматривать однородные или слоистые изотропные попарно симметричные отсчетной (срединной) поверхности пластинки из различных материалов одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Основные уравнения динамического и квазистатического деформирования гибридных слоистых пластин симметричной структуры, учитывающие возможности как упругого, так и неупругого деформирования материалов были получены в работе [4]. При этом в декартовой системе координат  $(x, y, z)$  напряжения в  $j$ -ом слое при поперечном изгибе пластин определяется равенствами

$$\sigma_{xj} = \frac{\Phi_j(\varepsilon_u)}{\varepsilon_u} \left( \varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y \right), \quad \tau_j = \frac{\Phi_j(\varepsilon_u)}{\varepsilon_u} \gamma, \quad \sigma_{yj} = \frac{\Phi_j(\varepsilon_u)}{\varepsilon_y + \frac{1}{2}\varepsilon_x}, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma$  связаны с прогибом  $w(x, y)$  пластины выражениями

$$\varepsilon_x = -z\kappa_x, \quad \varepsilon_y = -z\kappa_y, \quad \gamma = -z\kappa_{xy}, \quad (2)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (3)$$

где  $z$  — координата, отсчитываемая от срединной поверхности вдоль нормали к ней,

$$\varepsilon_u = |z|\kappa_u, \quad \kappa_u = (\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_x\kappa_y + \kappa_{xy}^2). \quad (4)$$

Изгибающие  $M_x, M_y$  и крутящие  $M_{xy}$  моменты определяются выражениями

$$\begin{aligned}
 M_x &= 2 \sum_{j=1}^n \int_{h_{j-1}}^{h_j} \sigma_{xj} z dz, & M_y &= 2 \sum_{j=1}^n \int_{h_{j-1}}^{h_j} \sigma_{yj} z dz, \\
 M_{xy} &= 2 \sum_{j=1}^n \int_{h_{j-1}}^{h_j} \tau_j z dz, & (h_0 &= 0),
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

где  $h_j$  — координаты границы раздела слоев.

Уравнения равновесия при поперечном изгибе имеют вид

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q_0 \varphi_1(x, y) = 0,
 \tag{6}$$

$q_0$  — амплитуда нагрузки,  $\varphi(x, y)$  — функция ее распределения по поверхности пластинки.

Для материалов одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию диаграммы деформирования достаточно надежно могут быть аппроксимированы кубическими параболой [3] и таким образом можно принять зависимости

$$\Phi_j(\varepsilon_u) = A_j \varepsilon_u + B_j \varepsilon_u^3, \quad (0 \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_j^*),
 \tag{7}$$

$$B_j = \frac{A_j}{3(\varepsilon_j^*)^2}, \quad \varepsilon_j^* = \frac{3\sigma_j^*}{2A_j},
 \tag{8}$$

$A_j, \sigma_j^*, \varepsilon_j^*$  — модуль Юнга, предел прочности и предельная деформация предразрушения материала  $j$ -го слоя гибридной пластинки.

Зависимости (7) позволяют рассматривать как упругое (при  $B_j = 0$ ), так и неупругое (при  $B_j \neq 0$ ) состояния материала  $j$ -го слоя.

Для слоистых конструкций по требованиям эксплуатации важно рассматривать два предельных состояния [5]: первое — предельно упругое, когда для всех составляющих материалов  $B_j = 0$  и  $\varepsilon_u \leq \varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \dots, \varepsilon_n^0)$ , где  $\varepsilon_j^0 = \frac{\sigma_{0j}}{A_j}$  и  $\sigma_{0j}$  — предел упругости  $j$ -го слоя. Второе (состояние предразрушения), когда  $B_j \neq 0$ ,  $\varepsilon_u \leq \varepsilon_* = \min(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_n^*)$ ,  $\varepsilon_k^*$  — предельная деформация предразрушения  $k$ -го слоя материала пластинки.

При этом по характеру расположения материалов и геометрическим параметрам слоев будем выделять подклассы гибридных рациональных конструкций и гибридных не вполне рациональных конструкций. Под гибридными рациональными будем понимать такие слоистые гибридные пластинки, в которых при заданном типе нагружения и закрепления первое или второе предельное состояние реализуется одновременно во всех материалах. Это означает, с учетом равенства (4), что для таких пластин в случае первого предельного состояния расположение материалов и геометрические параметры слоев должны удовлетворять соотношениям

$$h_j \kappa_u^0 = \varepsilon_j^0, \quad j = 1, 2, \dots, n,
 \tag{9}$$

$$\kappa_u^0 = \frac{\varepsilon_1^0}{h_1}, \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{\varepsilon_2^0}{\varepsilon_1^0}, \quad \frac{h_3}{h_1} = \frac{\varepsilon_3^0}{\varepsilon_1^0}, \quad \dots, \quad \frac{h_n}{h_1} = \frac{\varepsilon_n^0}{\varepsilon_1^0},
 \tag{10}$$

$$\varepsilon_n^0 > \varepsilon_{n-1}^0 > \dots > \varepsilon_2^0 > \varepsilon_1^0.
 \tag{11}$$

Аналогично, для второго предельного состояния гибридных рациональных пластин должны выполняться соотношения

$$\kappa_u^* = \frac{\varepsilon_1^*}{h_1}, \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_1^*}, \quad \frac{h_3}{h_1} = \frac{\varepsilon_3^*}{\varepsilon_1^*}, \quad \dots, \quad \frac{h_n}{h_1} = \frac{\varepsilon_n^*}{\varepsilon_1^*}, \quad (12)$$

$$\varepsilon_n^* > \varepsilon_{n-1}^* > \dots > \varepsilon_2^* > \varepsilon_1^*. \quad (13)$$

которые определяют порядок расстановки материалов по толщине и соотношения между геометрическими размерами слоев.

Значительно более широкий подкласс «не вполне рациональных проектов» при отсутствии ограничивающих требований на порядок расстановки слоев и взаимосвязи их геометрических параметров можно анализировать опираясь на концепцию «слабейшего звена» и закономерности (1)-(4) в конкретных случаях.

Из заданного материалов рассматриваемых слоистых пластин «слабейшее звено по первому предельному состоянию» определяется требованием

$$\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \dots, \varepsilon_n^0), \quad (14)$$

а по второму предельному состоянию — требованиям

$$\varepsilon_* = \min(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_n^*). \quad (15)$$

Тогда, если в рассматриваемой слоистой пластине  $k$ -й слой материала является слабым звеном по первому предельному состоянию, то для этого случая

$$B_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad \text{и} \quad \tilde{\kappa}_u^0 = \frac{\varepsilon_0}{h_k}, \quad \tilde{\kappa}_u^0 = \max_{x,y \in S} \kappa_u(x, y), \quad (16)$$

и равенство (16) позволяет определить амплитуду первой предельной нагрузки в этом случае. Рассматривая все возможные перестановки слоев из данного набора материалов можно провести сравнительный анализ изменения первых предельных нагрузок и допустимых геометрических параметров

$$h_m < \frac{\varepsilon_m^0}{\varepsilon_0} h_k, \quad m \neq k. \quad (17)$$

Для второго предельного состояния аналогичные выражения будут иметь вид

$$\sigma_k^* = A_k h_k \tilde{\kappa}_u \left( 1 + \frac{B_k}{A_k} h_k^2 \tilde{\kappa}_u^2 \right), \quad h_m < \frac{\varepsilon_m^*}{\varepsilon_*} h_k, \quad \tilde{\kappa}_u = \max_{x,y \in S} \kappa_u(x, y). \quad (18)$$

Пользуясь выражениями (1)-(5) и (7) для  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_{xy}$  получим выражения

$$\begin{aligned} M_x &= D_1 R_1(w) + D_2 R_2(w), \\ M_y &= D_1 R_3(w) + D_2 R_4(w), \\ M_{xy} &= D_1 R_5(w) + D_2 R_6(w), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} R_1(w) &= 2\kappa_x + \kappa_y, & R_2(w) &= (2\kappa_x + \kappa_y)\kappa_u^2 \\ R_3(w) &= 2\kappa_y + \kappa_x, & R_4(w) &= (2\kappa_y + \kappa_x)\kappa_u^2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} R_5(w) &= \kappa_{xy}, & R_6(w) &= \kappa_{xy}\kappa_u^2, \\ \kappa_u^2 &= \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_x\kappa_y + \kappa_{xy}^2, \end{aligned} \quad (21)$$

$$D_1 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n A_j (h_j^3 - h_{j-1}^3), \quad D_2 = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^n B_j (h_j^5 - h_{j-1}^5), \quad (22)$$

и для прогиба  $w(x, y)$  из (6) получим уравнение

$$L_1(w) + L_2(w) + q_0 \varphi(x, y) = 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} L_1(w) &= D_1 \left[ \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 R_5}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R_3}{\partial y^2} \right], \\ L_2(w) &= D_2 \left[ \frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 R_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R_4}{\partial y^2} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Необходимые краевые условия для уравнения (23) получаются в виде классических соотношений для прогиба классической кирхгофской теории пластин в зависимости от формы контура и условий его закрепления.

### Метод решения

Будем рассматривать подкласс выпуклых полигональных пластин, контуры которых не содержат прямых углов.

Некоторые такие пластины такого типа изображены на рис. 1, 2, 3.

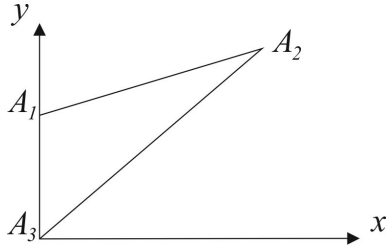


Рис. 1

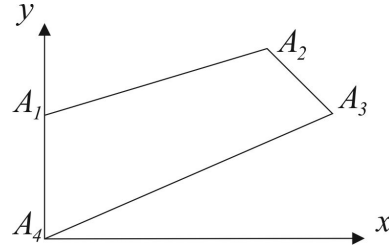


Рис. 2

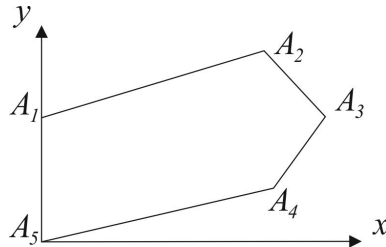


Рис. 3

Свяжем систему декартовых координат  $(x, y)$  с одной из сторон  $(x, y)$  с одной из сторон  $A_0A_1$  рассматриваемых многоугольников, как указано на рис. 1-3 и обозначим координаты вершин  $A_i(x_i, y_i)$ ,  $A_0(x_0, y_0)$  и будем считать в дальнейшем для простоты  $x_0 = 0, y_0 = 0$ . Тогда уравнения прямых  $A_{i-1}A_i$  будут иметь вид

$$A_0A_1 : \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq y_1, \quad (25)$$

$$A_iA_{i+1} : \quad \Psi_i(x, y) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i} - 1 = 0, \quad y_i \leq y \leq y_{i+1}, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (26)$$

Будем считать в дальнейшем, что на стороне  $A_0A_1$  пластина может быть закреплена или шарнирно оперта, а на остальных сторонах — закреплена.

Учитывая сложный нелинейный характер разрешающего уравнения (23) для прогиба  $w(x, y)$  дальнейшее решение задачи будем строить на основе удобных модификаций метода Бубнова-Галеркина [6].

В первом приближении прогиб для соответствующих пластин будем искать в форме

$$w(x, y) = C_k \Psi_k(x, y), \quad (27)$$

где  $C_k = const$ , а функция  $\Psi_k(x, y)$  подбирается так, чтобы были выполнены соответствующие граничные условия закрепления на контуре рассматриваемой пластины.

Тогда для треугольной пластины соответствующей рис. 1 в случае закреплении всех сторон будем иметь

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= C_1 \Psi_1(x, y) \\ \Psi_1(x, y) &= x^2 \Psi_1^2(x, y) \Psi_2^2(x, y), \end{aligned} \quad (28)$$

а в случае шарнирного закрепления стороны  $A_0A_1$

$$\begin{aligned} w_2(x, y) &= C_2 \Psi_2(x, y) \\ \Psi_2(x, y) &= x^3 \Psi_1^2(x, y) \Psi_2^2(x, y), \end{aligned} \quad (29)$$

Для четырехугольной закреплённой пластинки на рис. 2 будем иметь

$$\begin{aligned} w_3(x, y) &= C_3 \Psi_3(x, y) \\ \Psi_3(x, y) &= x^2 \Psi_1^2(x, y) \Psi_2^2(x, y) \Psi_3^2(x, y), \end{aligned} \quad (30)$$

и для той же пластины с шарнирным закреплением стороны  $A_0A_1$

$$\begin{aligned} w_4(x, y) &= C_4 \Psi_4(x, y) \\ \Psi_4(x, y) &= x^3 \Psi_1^2(x, y) \Psi_2^2(x, y) \Psi_3^2(x, y). \end{aligned} \quad (31)$$

Аналогичные зависимости можно выписать и для пятиугольных пластин на рис. 3.

Путем повсеместной замены  $x \leftrightarrow y$  можно получить необходимые формулы в случае, когда шарнирно опертая сторона будет расположена по оси  $x$ .

После выполнения процедуры Бубнова-Галеркина для нахождения связи постоянных  $C_k$  с амплитудой действующих нагрузок в случае первого предельного состояния получим линейное алгебраическое уравнение, а в случае второго предельного состояния кубическое уравнение, действительный корень которого определяется по известным формулам [7]. Получив таким образом решение задачи в первом приближении и решая на его основе с помощью известных процедур задачу: найти  $\max_{x, y \in S} \kappa_u^2$  и пользуясь критериями (9), (14), (16) определим соответствующие им амплитуды предельных нагрузок.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Власов В. З. Тонкостенные пространственные системы. Москва: Госстройиздат, 1958. 502 с.
- [2] Кошур В. Д., Немировский Ю. В. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1990. 190 с.
- [3] Немировский Ю. В. Прогнозирование нелинейного деформирования гибридных композитных материалов // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела. Труды второй международной конференции. Казань: Казанский государственный университет, 2009.

- [4] Немировский Ю. В. Динамика пластических слоисто-волоконистых пластин // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. Самара: Самарский государственный технический университет, 2017. С. 106–110.
- [5] Немировский Ю. В. Второе предельное состояние полиметаллических круглых и кольцевых пластин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1(23). С. 189–195.
- [6] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Мир: Москва, 1988. 352 с.
- [7] Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. Восьмое изд. Наука: Москва, 1966. 870 с.

Yu. V. Nemirovskii

## LIMIT STATE OF HYBRID POLYGONAL PLATES WITHOUT RIGHT ANGLES

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

**Abstract.** For a class of hybrid laminated plates with contours that do not have right angles under various conditions of loading and fixing the contours, a method has been developed for determining the first (extremely elastic) and second (pre-failure load) ultimate loads. The criteria for their achievements, obtained the necessary systems of solving equations and described the method of their solution.

**Keywords:** hybrid layered plates, polygonal, with and without contour of right angles, pinching and hinging on the contour, the first (extremely elastic) and second (pre-fracture state) limit states, the criterion of reaching the limit states, the determination of the limit loads.

## REFERENCES

- [1] Vlasov V. Z. Thin-walled spatial systems. Moscow: Gosstroyizdat, 1958. 502 p. (in Russian).
- [2] Koshur I. D., Nemirovskii Y. V. Continuous and discrete models of dynamic deformation structural elements. Novosibirsk: Nauka, 1990. 190 p. (in Russian).
- [3] Nemirovskii Y. V. Predicting Non-Linear Deformation of Hybrid composite materials // Problems of nonlinear mechanics of a deformable solid body. Proceedings of the second international conference. Kazan: Kazan State University, 2009. (in Russian).
- [4] Nemirovskii Y. V. Dynamics of plastic layered fiber plates // Materials of the X All-Russian Conference on Mechanics deformable solid body. Samara: Samara State Technical University, 2017. P. 106–110. (in Russian).
- [5] Nemirovskii Y. V. The second limit state of polymetallic round and ring plates // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. no. 1 (23). P. 189–195. (in Russian).
- [6] Fletcher K. Numerical methods based on the Galerkin method. Mir: Moscow, 1988. 352 p. (in Russian).
- [7] Vygodsky M. I. Higher Mathematics Handbook. Eighth edition. Nauka: Moscow, 1966. 870 p. (in Russian).

---

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

Б. Г. Миронов<sup>1</sup>, А. В. Никитин<sup>2</sup>

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

<sup>1</sup>Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Чебоксарский институт (ф) Московского политехнического университета,  
г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** Рассматривается предельное состояние неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Материал предполагается неоднородным и обладающим свойствами анизотропии в пластической области. Неоднородность материала заключается в том, что предел текучести зависит от координат, причем он постоянен вдоль концентрических окружностей. Определено предельное состояние трубы в первом приближении.

**Ключевые слова:** пластичность, неоднородность, труба, анизотропия.

УДК: 539.3

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.002

Рассмотрим толстостенную трубу радиусов  $a$ ,  $b$  ( $a < b$ ), которая находится под действием внутреннего давления (рис. 1). Будем считать, что внешняя поверхность трубы свободна от усилий.

Условие пластичности примем в виде [1]

$$Z \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + W(\tau_{xy})^2 = k_{xy}^2, \quad k_1, k_2, k_3 = \text{const}, \quad (1)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  — компоненты напряжения в декартовой системе координат.

Положим

$$k_{xy} = k_0 + \delta c(x^2 + y^2), \quad Z = 1 + \delta z, \quad W = 1 + \delta w, \quad (2)$$

где  $\delta$  — малый безразмерный параметр,  $k_0$ ,  $c$ ,  $z$ ,  $w = \text{const}$ . Согласно (2) предел текучести  $k$  сохраняет постоянное значение вдоль концентрических окружностей

$$c(x^2 + y^2) = d, \quad d = \text{const}, \quad (3)$$

---

© Миронов Б. Г., Никитин А. В., 2019

*Миронов Борис Гурьевич*

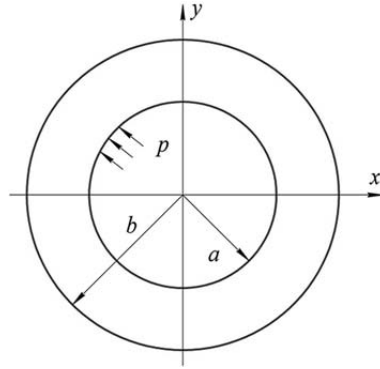
**e-mail:** mbg.chspru@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

*Никитин Андрей Витальевич*

**e-mail:** ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чебоксарский институт (ф) Московского Политехнического университета, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.05.2019




 Рис. 1. Толстостенная труба радиусов  $a, b; a < b$ .

и изменяется в зависимости от изменения величины  $d$ . Перейдем к полярным координатам:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (4)$$

Связь между напряжениями в декартовой системе координат  $x, y$  и напряжениями в полярной системе координат  $\rho, \theta$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (1), (5) получим условие пластичности в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho - \sigma_\theta^2 (Z \cos^2 2\theta + W \sin^2 2\theta) + 4\tau_{\rho\theta}^2 (Z \sin^2 2\theta + W \cos^2 2\theta) + \\ + 2\sigma_\rho - \sigma_\theta \tau_{\rho\theta} Z - W \sin 4\theta = 41 + c\delta \rho^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Граничные условия на внутренней поверхности трубы имеют вид

$$\sigma_\rho|_{\rho=a} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}|_{\rho=a} = 0. \quad (8)$$

Положим, что искомое решение зависит от малого параметра  $\delta$ , которое будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(I)} \delta + \sigma_{ij}^{(II)} \delta^2 + \dots \quad (9)$$

Предположим, что в исходном нулевом приближении имеет место осесимметричное состояние трубы:

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (10)$$

Из (6), (9), (10) следует

$$\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)} = -2. \quad (11)$$

Решая совместно (7), (10), (11), получим

$$\sigma_\rho^{(0)} = 2 \ln \rho + C, \quad \sigma_\theta^{(0)} = 2 + 2 \ln \rho + C, \quad (12)$$

где  $C = \text{const}$ . Согласно (8) в нулевом приближении граничные условия примут вид

$$\sigma_\rho^{(0)}|_{\rho=a} = -p. \quad (13)$$

Из (12), (13) имеем

$$\sigma_\rho^{(0)} = -p + 2 \ln \frac{\rho}{a}, \quad \sigma_\theta^{(0)} = -p + 2 + 2 \ln \frac{\rho}{a}. \quad (14)$$

С учетом (10), (14) из (6) получим

$$\sigma_\theta^{(I)} - \sigma_\rho^{(I)} = 2c\rho^2 + \left( \frac{z+w}{2} + \frac{z-w}{2} \cos 4\theta \right). \quad (15)$$

Уравнениям равновесия (7) удовлетворим, полагая, что

$$\sigma'_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma'_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \quad \tau'_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (16)$$

Из (15), (16) имеем

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 2c\rho^4 + \rho^2(G + H \cos 4\theta), \quad (17)$$

где  $G = (z+w)/2$ ,  $H = (z-w)/2$ .

В первом приближении граничные условия согласно (8) имеют следующий вид:

$$\sigma'_\rho|_{\rho=a} = 0, \quad \tau'_{\rho\theta}|_{\rho=a} = 0. \quad (18)$$

Компоненты напряжения определяются из (16), (17):

$$\begin{aligned} \sigma'_\rho &= \frac{\cos 4\theta}{8\rho} \left[ \left( Ha(\sqrt{15}) \sin(\sqrt{15} \ln \rho) + 7 \cos(\sqrt{15} \ln \rho) \right) \cos(\sqrt{15} \ln a) - \right. \\ &\quad \left. - \left( Ha(\sqrt{15}) \cos(\sqrt{15} \ln \rho) - 7 \sin(\sqrt{15} \ln \rho) \right) \sin(\sqrt{15} \ln a) - 7H\rho \right] + \\ &\quad + c \frac{\rho^2}{a^2} + G \ln \frac{\rho}{a}, \\ \sigma'_\theta &= \frac{\cos 4\theta}{8\rho} \left[ \left( Ha(\sqrt{15}) \sin(\sqrt{15} \ln \rho) + 7 \cos(\sqrt{15} \ln \rho) \right) \cos(\sqrt{15} \ln a) - \right. \\ &\quad \left. - \left( Ha(\sqrt{15}) \cos(\sqrt{15} \ln \rho) - 7 \sin(\sqrt{15} \ln \rho) \right) \sin(\sqrt{15} \ln a) + H\rho \right] + \\ &\quad + c \frac{3\rho^2}{a^2} + G \ln(\rho + 1), \\ \tau'_{\rho\theta} &= \frac{\sin 4\theta}{240\rho} \left[ -60aH \left( \cos(\sqrt{15} \ln \rho) - \frac{1}{4} \sin(\sqrt{14} \ln \rho) \right) \cos(\sqrt{15} \ln a) - \right. \\ &\quad \left. - 60Ha\sqrt{15} \left( \cos(\sqrt{15} \ln \rho) + \frac{1}{60} a \sin(\sqrt{15} \ln \rho) \right) \sin(\sqrt{15} \ln a) + 60\rho H \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, (19) полностью описывают напряженное состояние неоднородно-анизотропной трубы в первом приближении.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
- [2] Ивлев Д. Д. Об анизотропии пластических тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2010. № 2(66). С. 64–68.
- [3] Никитин А. В. Предельное состояние неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1(23). С. 60–70.
- [4] Никитин А. В., Тихонов С. В. Упругопластическое состояние трансляционно-анизотропной линейно-неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2013. № 4(80). Ч. 2. С. 148–155.
- [5] Никитин А. В., Миронов Б. Г. Определение перемещений в пластической и упругой областях в толстостенной неоднородной трубе при трансляционной анизотропии // Сборник статей по материалам XIV международной заочной научно-практической конференции “Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии”. № 2(14). 2014. С. 93–106.

*B. G. Mironov<sup>1</sup>, A. V. Nikitin<sup>2</sup>*

**ON THE DETERMINATION OF THE LIMIT STATE NON-UNIFORM PIPE  
UNDER INTERNAL PRESSURE**

<sup>1</sup>*Russian University of transport, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Cheboksary Institute (f) of Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** Considered limit state of the inhomogeneous pipes under internal pressure. The material is assumed heterogeneous, and possess the properties of anisotropy in the plastic region. The heterogeneity of the material is that pre-turnover depend on the coordinates, and it is constant along concentric circles. Defined limit state of the pipe in the first approximation.

**Keywords:** plasticity, heterogeneity, pipe, anisotropy.

## REFERENCES

- [1] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. Moscow: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D. On the anisotropy of plastic bodies // Bulletin of I. Ya. Yakovlev Chuvash state pedagogical University. 2010. no. 2(66). P. 64–68. (in Russian).
- [3] Nikitin A. V. Limit state of inhomogeneous pipe under internal pressure // Bulletin of the I. Ya. Yakovlev Chuvash state pedagogical University. Series: limit state Mechanics. 2015. no. 1(23). P. 60–70. (in Russian).
- [4] Nikitin A. V., Tihonov S. V. Elastic-plastic state translational-linear anisotropic inhomogeneous pipes under internal pressure // Bulletin of I. Ya. Yakovlev Chuvash state pedagogical University. 2013. no. 4(80). Part 2. P. 148–155. (in Russian).
- [5] Nikitin A. V., Mironov B. G. Determination of displacements in plastic and elastic regions in a thick-walled inhomogeneous pipe under translational anisotropy // Collection of articles based on the XIV international correspondence scientific-practical conference “Scientific discussion: mathematics, physics, chemistry, biology”. No. 2(14). 2014. P. 93–106. (in Russian).

---

*Mironov Boris Gurjevich*, Dr. of Sci. Phys. & Math., Professor, Department Chair, Russian University of transport, Moscow, Russia.

*Nikitin Andrej Vitaljevich*, Candidate of Sci. Phys. & Math., Associate Professor, Cheboksary Institute (f) of Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia.

С. А. Аскеров

## ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ В БАРАБАНЕ, ОСЛАБЛЕННОМ ТРЕЩИНОЙ СО СВЯЗЯМИ МЕЖДУ БЕРЕГАМИ В КОНЦЕВЫХ ЗОНАХ, ПРИ ТОРМОЖЕНИИ АВТОМОБИЛЯ

*Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджан*

**Аннотация.** . Рассмотрена задача о температурных напряжениях в тормозном барабане, ослабленном трещиной при торможении автомобиля. Принято, что при многократном торможении в области фактического касания элементов пары трения тормозной системы автомобиля в результате неравномерного нагрева образуются дефекты материала (прижоги, термические пятна и микротрещины). Проведено математическое описание предельного состояния в барабане с трещиной со связями между берегами в концевых зонах при торможении автомобиля. По критериям трещиностойкости получены соотношения для определения предельного значения интенсивности теплового воздействия, при котором в барабане тормозного механизма произойдет рост трещины.

**Ключевые слова:** тормозной барабан грузового автомобиля, трещина со связями в концевых зонах, предельное термоупругое состояние.

УДК: 539.375

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.003

**Введение.** Как известно, пара трения «барабан-накладка» грузовых автомобилей работает в условиях сложного напряженного состояния. Исследования показывают [1, 2], что в областях фактического касания из-за сильного нагрева в тонких приповерхностных слоях образуются прижоги, термические пятна и зародышевые микротрещины. Это приводит к нагреву металлического барабана и потере тормозного момента.

Для барабанного тормоза грузового автомобиля температурные напряжения играют решающую роль при длительных торможениях. Для обеспечения безопасности транспортных средств на этапе проектирования важное значение имеет разработка методов расчета несущей способности тормозного барабана по критериям трещиностойкости. Вопросы хрупкого разрушения тормозного барабана при торможении автомобиля рассматривались в работах [3, 4].

---

© Аскеров С. А., 2019

*Аскеров Сахиб Азер оглы*

e-mail: sahibesgerov77@gmail.com, ассистент, Азербайджанский Технический Университет, г. Баку, Азербайджан.

Поступила 04.02.2019

Неравномерный нагрев в тормозном барабане при торможении грузового автомобиля способствует появлению напряжений и деформаций. Поэтому имеет важное значение разработка расчетной модели, позволяющей прогнозировать предельное напряженно-деформированное состояние в стадии разрушения тормозного барабана с учетом температурных напряжений.

**Постановка задачи.** Принято, что при повторно-кратковременном режиме торможения тормозной барабан подвергается многократному циклическому нагружению и при этом в его материале возникает трещина со связями между берегами в концевых зонах (зонах предразрушения). Зоны предразрушения моделируем как области, где межчастичные связи материала ослаблены, а взаимодействие берегов зон предразрушения – силами сцепления между ними. Размеры концевых зон сравнимы с размером трещины и зависят от вида материала. Берега трещины вне концевых зон свободны от внешних нагрузок.

Отнесем тормозной барабан к полярной системе координат  $r\theta$ , начало координат которой находится в центре концентрических окружностей  $L_0$  и  $L$  с радиусами  $R_0$ ,  $R$ , соответственно. Внутренний контур барабана полагаем близким к круговому. Рассмотрим некоторую реализацию шероховатости внутренней поверхности тормозного барабана. Представим границу внутреннего контура барабана  $L'$  в виде

$$\rho(\theta) = R + \varepsilon H(\theta),$$

где  $\varepsilon = R_{max}/R$  – малый параметр;  $R_{max}$  – наибольшая высота выступа (впадины) неровности внутренней поверхности барабана;  $H(\theta)$  – функция, не зависящая от малого параметра.

В центре трещины с концевыми зонами предразрушения разместим начало локальной системы координат  $x_1O_1y_1$ , ось  $x_1$  которой совпадает с линией зоны и образует с осью  $Ox$  ( $\theta = 0$ ) угол  $\alpha_1$ . В процессе работы фрикционной пары “барабан-накладка” при действии тепловой нагрузки в связях, соединяющих берега трещины, будут возникать нормальные  $q_{y_1}(x_1)$  и касательные  $q_{x_1y_1}(x_1)$  напряжения. Таким образом, к берегам трещины в концевых зонах будут приложены нормальные  $q_{y_1}(x_1)$  и касательные  $q_{x_1y_1}(x_1)$  напряжения, соответственно. Эти напряжения неизвестны и подлежат определению в процессе решения задачи механики контактного разрушения.

В исследуемом случае трещина состоит из двух областей: внутренней и двух концевых зон. Внутренняя область трещины в барабане – это противоположные берега трещины свободные от нагрузок. Вторая область трещины – это концевые зоны  $(-l_1, l_1)$  и  $(\lambda_2, l_1)$  со связями между берегами.

Принято, что в начальной стадии роста трещины, ее размеры гораздо меньше толщины барабана.

Температурное поле в барабане описывается уравнением теории теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\omega}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0; \quad (1)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial n} &= -Q_b(\theta) \quad \text{на площадке контакта,} \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} - \alpha(T - T_c) &= 0 \quad \text{вне площадки контакта,} \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_0(T - T_c) &= 0 \quad \text{на наружной поверхности барабана.} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $T(r, \theta)$  – температурная функция;  $\omega$  – угловая скорость вращения барабана в момент торможения автомобиля;  $a$  – температуропроводность материала барабана;  $\lambda$  – теплопроводность материала барабана;  $n$  – нормаль к контуру барабана;  $Q_b(\theta)$  – интенсивность поверхностного источника тепла, приходящееся на барабан;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи с внутренней цилиндрической поверхности барабана с температурой среды  $T_c$ ;  $\alpha_0$  – коэффициент теплоотдачи с внешней цилиндрической поверхности барабана.

**Определение температурного поля в тормозном барабане.** С помощью метода возмущений, краевую задачу теории теплопроводности сводим к последовательности граничных задач, которые в каждом приближении решаются методом разделения переменных.

Граничные условия задачи о термоупругом напряженном состоянии на внутреннем и внешнем контурах тормозного барабана при торможении имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad r = R_0; \\ \sigma_n = 0, \quad \tau_{nt} = 0 \quad \text{при} \quad r = \rho(\theta). \end{aligned} \quad (3)$$

На берегах трещины с концевыми зонами граничные условия будут

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1} = 0, \quad \tau_{x_1 y_1} = 0 \quad \text{при} \quad y_1 = 0 \quad \lambda_1 \leq x_1 \leq \lambda_2, \\ \sigma_{y_1} = q_{y_1}, \quad \tau_{x_1 y_1} = q_{x_1 y_1} \quad \text{при} \quad y_1 = 0 \quad -l_1 \leq x_1 \leq \lambda_1 \quad \text{и} \quad \lambda_2 \leq x_1 \leq l_1. \end{aligned} \quad (4)$$

В граничных условиях (1)-(2) не хватает соотношения, связывающего раскрытие берегов концевых зон предразрушения и напряжения в связях:

$$(v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - u_1^-) = \Pi_y(x_1, q_{y_1}) q_{y_1}(x_1) - i\Pi_x(x_1, q_{x_1 y_1}) q_{x_1 y_1}(x_1) \quad (5)$$

Здесь  $(v_1^+ - v_1^-)$  – нормальная; и  $(u_1^+ - u_1^-)$  – касательная составляющие раскрытия концевых зон предразрушения; функции  $\Pi_y(x_1, q_{y_1})$  и  $\Pi_x(x_1, q_{x_1 y_1})$  представляют собой эффективные податливости связей, зависящие от их натяжения. При постоянных значениях функций  $\Pi_y$  и  $\Pi_x$  имеем в (5) линейный закон деформирования связей. В общем случае закон деформирования связей является нелинейным и задан.

**Метод решений.** Напряжения и перемещения в тормозном барабане будем искать в виде разложений по малому параметру, пренебрегая, для упрощения, членами, содержащими  $\varepsilon$  степени выше первой.

Краевые условия задачи в нулевом приближении имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0)} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad r = R_0; \\ \sigma_r^{(0)} = 0; \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad r = R; \\ \sigma_{y_1}^{(0)} = 0, \quad \tau_{x_1 y_1}^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad y_1 = 0 \quad \lambda_1 \leq x_1 \leq \lambda_2; \\ \sigma_{y_1}^{(0)} = q_{y_1}^{(0)}, \quad \tau_{x_1 y_1}^{(0)} = q_{x_1 y_1}^{(0)} \quad \text{при} \quad y_1 = 0 \quad -l_1 \leq x_1 < \lambda_1 \quad \text{и} \quad \lambda_2 < x_1 \leq l_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия задачи в первом приближении имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad r = R_0; \\ \sigma_r^{(1)} = N, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = T_t \quad \text{при} \quad r = R; \\ \sigma_{y_1}^{(1)} = 0, \quad \tau_{x_1 y_1}^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad y_1 = 0 \quad \lambda_1 \leq x_1 \leq \lambda_2; \\ \sigma_{y_1}^{(1)} = q_{y_1}^{(1)}, \quad \tau_{x_1 y_1}^{(1)} = q_{x_1 y_1}^{(1)} \quad \text{при} \quad y_1 = 0 \quad -l_1 \leq x_1 < \lambda_1 \quad \text{и} \quad \lambda_2 < x_1 \leq l_1; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} N &= -H(\theta) \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta}^{(0)} \frac{1}{R} \frac{dH(\theta)}{d\theta} \quad \text{при } r = R, \\ T_t &= (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) \frac{1}{R} \frac{dH(\theta)}{d\theta} - H(\theta) \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(0)}}{\partial r}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для нахождения решения задачи термоупругости в каждом приближении используем термоупругий потенциал перемещений [5]. В рассматриваемой задаче термоупругий потенциал перемещений определяется дифференциальными уравнениями

$$\Delta F^{(0)} = \beta T^{(0)}, \quad \Delta F^{(1)} = \beta T^{(1)}, \quad (9)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\beta = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha_*$ ;  $\mu$  и  $\alpha_*$  – коэффициент Пуассона и коэффициент линейного температурного расширения материала тормозного барабана, соответственно.

Для решения уравнений (9) использовались методы разделения переменных и вариации постоянных. Температурные функции  $T^{(0)}(r, \theta)$  и  $T^{(1)}(r, \theta)$  берутся в виде рядов Фурье из решения задачи теории теплопроводности (1)–(2).

После определения  $F^{(0)}(r, \theta)$  по известным формулам [5] находим соответствующие напряжения  $\bar{\sigma}_r^{(0)}$ ,  $\bar{\sigma}_\theta^{(0)}$ ,  $\bar{\tau}_{r\theta}^{(0)}$  в нулевом приближении. Поскольку найденные напряжения не будут удовлетворять граничным условиям (5) термоупругого напряженного состояния, возникающего от действия неравномерного температурного поля в тормозном барабане, требуется найти второе напряженное состояние  $\bar{\bar{\sigma}}_r^{(0)}$ ,  $\bar{\bar{\sigma}}_\theta^{(0)}$ ,  $\bar{\bar{\tau}}_{r\theta}^{(0)}$ . Для отыскания второго напряженного состояния в нулевом приближении граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_r^{(0)} &= -\bar{\sigma}_r^{(0)}, \quad \bar{\bar{\tau}}_{r\theta}^{(0)} = -\bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} \quad \text{при } r = R, \\ \bar{\bar{\sigma}}_r^{(0)} &= -\bar{\sigma}_r^{(0)}, \quad \bar{\bar{\tau}}_{r\theta}^{(0)} = -\bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} \quad \text{при } r = R_0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_{y_1}^{(0)} &= -\bar{\sigma}_{y_1}^{(0)}, \quad \bar{\bar{\tau}}_{x_1 y_1}^{(0)} = -\bar{\tau}_{x_1 y_1}^{(0)} \quad \text{при } y_1 = 0, \lambda_1 \leq x_1 \leq \lambda_2; \\ \bar{\bar{\sigma}}_{y_1}^{(0)} &= q_{y_1}^{(0)} - \bar{\sigma}_{y_1}^{(0)}, \quad \bar{\bar{\tau}}_{x_1 y_1}^{(0)} = q_{x_1 y_1}^{(0)} - \bar{\tau}_{x_1 y_1}^{(0)} \quad \text{при} \\ & y_1 = 0 \quad -l_1 \leq x_1 < \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 < x_1 \leq l_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Комплексные потенциалы, описывающие второе напряженное состояние, ищутся в виде [6, 7]

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(z) &= \Phi_0^{(0)}(z) + \Phi_1^{(0)}(z) + \Phi_2^{(0)}(z), \\ \Psi^{(0)}(z) &= \Psi_0^{(0)}(z) + \Psi_1^{(0)}(z) + \Psi_2^{(0)}(z), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(0)}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \Psi_0^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k, \\ \Phi_1^{(0)}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-l_1}^{l_1} \frac{g_1^0(t)}{t-z_1} dt, \\ \Psi_1^{(0)}(z) &= \frac{1}{2\pi} e^{-2i\alpha_1} \int_{-l_1}^{l_1} \left[ \frac{g_1^0(t)}{t-z_1} - \frac{\bar{T}_1 g_1^0(t) e^{i\alpha_1}}{(t-z_1)^2} \right] dt, \\ T_1 &= t e^{i\alpha_1} + z_1^0, \quad z_1 = e^{-i\alpha_1} (z - z_1^0). \end{aligned}$$

Искомая функция  $g_1^0(t)$  характеризует раскрытие берегов трещины с концевыми зонами:

$$g_1^{(0)}(x_1) = \frac{2G}{i(1+\kappa)} \frac{\partial}{\partial x_1} [u_1^+(x_1, 0) - u_1^-(x_1, 0) + i(v_1^+(x_1, 0) - v_1^-(x_1, 0))].$$

Комплексные потенциалы  $\Phi_2^{(0)}(z)$  и  $\Psi_2^{(0)}(z)$  ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(0)}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-l_1}^{l_1} \left\{ \left( \frac{1}{z\bar{T}_1-1} + \frac{1}{2} \right) \bar{T}_1 e^{i\alpha_1} g_1^0(t) + \left[ \frac{\bar{T}_1}{2} - \frac{z^2\bar{T}_1-2z+T_1}{(z\bar{T}_1-1)^2} \right] e^{-i\alpha_1} \overline{g_1^0(t)} \right\} dt, \\ \Psi_2^{(0)}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-l_1}^{l_1} \left[ \frac{e^{i\alpha_1} \bar{T}_1^3}{(z\bar{T}_1-1)^2} g_1^0(t) + \right. \\ &\quad \left. \left( z^2\bar{T}_1^2 + 4 - 3z\bar{T}_1 + zT_1\bar{T}_1^2 - 3T_1\bar{T}_1 \right) \frac{\bar{T}_1 e^{-i\alpha_1}}{(z\bar{T}_1-1)^3} \overline{g_1^0(t)} \right] dt. \end{aligned}$$

Таким образом, сумма (12) комплексных потенциалов описывает второе напряженное состояние тормозного барабана с граничными условиями (10)-(11) и раскрытием смещений  $g_1^{(0)}(x_1)$  на отрезке  $|x_1| \leq l_1$ . Удовлетворяя функциями (12) условиям (11) на берегах трещины, получим комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции  $g_1^{(0)}(x_1)$ :

$$\int_{-l_1}^{l_1} \left[ R(t, x) g_1^{(0)}(t) + S(t, x) \overline{g_1^{(0)}(t)} \right] dt = \pi f^{(0)}(x_1) \quad |x| \leq l_1. \quad (13)$$

Здесь  $f^{(0)}(x_1) = \begin{cases} l f_1^{(0)}(x_1) & \text{на берегах трещины} \\ f_2^{(0)}(x_1) & \text{на берегах зон предразрушения} \end{cases}$

$$f_1^{(0)}(x) = - \left( \bar{\sigma}_{y_1}^{(0)} - i \bar{\tau}_{x_1 y_1}^{(0)} \right) - \left[ \Phi_0^{(0)}(x) + \overline{\Phi_0^{(0)}(x)} + x \overline{\Phi_0^{(0)'}}(x) + \overline{\Psi_0^{(0)}(x)} \right],$$

$$f_2^{(0)}(x) = - \left( q_{y_1}^0 - i q_{x_1 y_1}^0 \right) - \left( \bar{\sigma}_{y_1}^{(0)} - i \bar{\tau}_{x_1 y_1}^{(0)} \right) - \left[ \Phi_0^{(0)}(x) + \overline{\Phi_0^{(0)}(x)} + x \overline{\Phi_0^{(0)'}}(x) + \overline{\Psi_0^{(0)}(x)} \right].$$

В случае внутренней трещины с концевыми зонами предразрушения к сингулярному интегральному уравнению (13) следует добавить дополнительное условие, вытекающее из физического смысла задачи и выражающее однозначность смещений при обходе контура трещины

$$\int_{-l_1}^{l_1} g_1^{(0)}(t) dt = 0. \quad (14)$$

Удовлетворяя граничным условиям (10), записанным через комплексные потенциалы, функциями (12), получаем бесконечную линейную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  потенциалов  $\Phi_0^{(0)}(z)$  и  $\Psi_0^{(0)}(z)$ . В правую часть этой системы входят интегралы от искомых функций  $g_1^{(0)}(x_1)$ .



Сингулярное интегральное уравнение (13) при дополнительном условии (14) с помощью процедуры алгебраизации [7, 8] (применяются квадратурные формулы Гаусса-Чебышева) сводится к системе  $M$  алгебраических уравнений для нахождения  $M$  неизвестных  $g_1^{(0)}(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ )

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M l_1 \left[ R(l_1 t_m, l_1 x_r) g_1^{(0)}(t_m) + S(l_1 t_m, l_1 x_r) \overline{g_1^{(0)}(t_m)} \right] = f^{(0)}(x_r), \quad (15)$$

$$f^{(0)}(x_r) = \begin{cases} l f_1^{(0)}(x_r) & \text{на берегах трещины} \\ f_2^{(0)}(x_r) & \text{на берегах зон предразрушения} \end{cases}$$

$$\sum_{m=1}^M g_1^{(0)}(t_m) = 0 \quad r = 1, 2, \dots, M-1,$$

где  $t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi = 0$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ),  $x_r = \cos \frac{r}{M} \pi$  ( $r = 1, 2, \dots, M-1$ ).

Если в системе (15) перейти к комплексно-сопряженным величинам, получим еще  $M$  алгебраических уравнений.

В правые части системы (15) входят неизвестные значения нормальных  $q_{y_1}^{(0)}(x_1)$  и касательных  $q_{x_1 y_1}^{(0)}(x_1)$  напряжений в узловых точках разбиения концевых зон трещины. Условием, определяющим неизвестные напряжения в связях между берегами в концевых зонах трещины, служит дополнительное соотношение (5) в нулевом приближении. Используя полученное решение в нулевом приближении, можно записать

$$g_1^{(0)}(x_1) = \frac{2G}{1 + \kappa} \frac{d}{dx} \left[ \text{Py} \left( x_1, q_{y_1}^{(0)}(x_1) \right) q_{y_1}^{(0)}(x_1) - i \text{Px} \left( x_1, q_{x_1 y_1}^{(0)}(x_1) \right) q_{x_1 y_1}^{(0)}(x_1) \right]. \quad (16)$$

Это комплексное дифференциальное уравнение служит для нахождения напряжений  $q_{y_1}^{(0)}(x_1)$  и  $q_{x_1 y_1}^{(0)}(x_1)$  в связях между берегами в концевых зонах трещины.

Для построения недостающих алгебраических уравнений для нахождения напряжений  $q_{y_1}^{(0)}(t_{m_1})$  и  $q_{x_1 y_1}^{(0)}(t_{m_1})$  в узловых точках требуем выполнения условий (16) в узловых точках  $t_{m_1}$  ( $m_1 = 1, 2, \dots, M_1$ ), содержащихся в концевых зонах трещины. При этом использовали метод конечных разностей.

Для замкнутости полученных алгебраических уравнений не хватает двух уравнений, которые определяют размеры концевых зон предразрушения. Такими условиями служат условия конечности напряжений в вершинах трещины. Записывая условия конечности напряжений для каждой вершины трещины, получаем два недостающих уравнения:

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^{(0)}(t_m) \text{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0,$$

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^{(0)}(t_m) \text{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0. \quad (17)$$

Перейдем к построению решения задачи в первом приближении. На основании полученного решения находим компоненты напряжений в тормозном барабане в нулевом приближении:

$$\sigma_r^{(0)} = \bar{\sigma}_r^{(0)} + \bar{\bar{\sigma}}_r^{(0)}, \quad \sigma_\theta^{(0)} = \bar{\sigma}_\theta^{(0)} + \bar{\bar{\sigma}}_\theta^{(0)}, \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = \bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} + \bar{\bar{\tau}}_{r\theta}^{(0)}. \quad (18)$$

При  $r = R$  находим функции  $N$  и  $T_t$ . С помощью термоупругого потенциала перемещений  $F^{(1)}(r, \theta)$  по известным формулам [5] находим соответствующие напряжения

$\bar{\sigma}_r^{(1)}$ ,  $\bar{\sigma}_\theta^{(1)}$ ,  $\bar{\tau}_{r\theta}^{(1)}$  в первом приближении. Так как найденные напряжения не удовлетворяют граничным условиям (7), необходимо найти второе напряженное состояние  $\bar{\bar{\sigma}}_r^{(1)}$ ,  $\bar{\bar{\sigma}}_\theta^{(1)}$ ,  $\bar{\bar{\tau}}_{r\theta}^{(1)}$ . Краевые условия задачи для отыскания второго напряженного состояния в первом приближении имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_r^{(1)} &= N - \bar{\sigma}_r^{(1)}, & \bar{\bar{\tau}}_{r\theta}^{(1)} &= T_t - \bar{\tau}_{r\theta}^{(1)} \quad \text{при } r = R; \\ \bar{\bar{\sigma}}_r^{(1)} &= -\bar{\sigma}_r^{(1)}, & \bar{\bar{\tau}}_{r\theta}^{(1)} &= -\bar{\tau}_{r\theta}^{(1)} \quad \text{при } r = R_0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_{y_1}^{(1)} &= -\bar{\sigma}_{y_1}^{(1)}, & \bar{\bar{\tau}}_{x_1 y_1}^{(1)} &= -\bar{\tau}_{x_1 y_1}^{(1)} \quad \text{при } y_1 = 0 \quad \lambda_1 \leq x_1 \leq \lambda_2; \\ \bar{\bar{\sigma}}_{y_1}^{(1)} &= q_{y_1}^{(1)} - \bar{\sigma}_{y_1}^{(1)}, & \bar{\bar{\tau}}_{x_1 y_1}^{(1)} &= q_{x_1 y_1}^{(1)} - \bar{\tau}_{x_1 y_1}^{(1)} \quad \text{при} \\ & y_1 = 0 \quad -l_1 \leq x_1 < \lambda_1 \quad \text{и} \quad \lambda_2 < x_1 \leq l_1. \end{aligned} \quad (20)$$

Граничные условия (19)–(20) для отыскания второго напряженного состояния с помощью формул Колосова-Мусхелишвили можно записать в виде краевой задачи для отыскания комплексных потенциалов  $\Phi^{(1)}(z)$  и  $\Psi^{(1)}(z)$ . Комплексные потенциалы  $\Phi^{(1)}(z)$  и  $\Psi^{(1)}(z)$  ищутся в виде аналогичном (12), при этом дальнейший ход решения задачи такой же, как и в нулевом приближении.

После определения искомых величин для прогнозирования предельного напряженного состояния барабана тормозного механизма автомобиля, при котором возможен рост трещины, использовали критерий критического раскрытия берегов трещины у основания концевых зон предразрушения [9]

$$|(u_1^+ - u_1^-) - i(v_1^+ - v_1^-)| = \delta_c \quad \text{при } x_1 = \lambda_1 \quad \text{и} \quad x_1 = \lambda_2, \quad (21)$$

где  $\delta_c$  – характеристика трещиностойкости материала тормозного барабана, определяемая опытным путем [10].

**Выводы.** Найденные соотношения позволяют исследовать термоупругое напряженное состояние барабана тормозного механизма автомобиля, ослабленного трещиной с концевыми зонами предразрушения, прогнозировать предельный уровень напряженного состояния, при котором происходит развитие трещины со связями между берегами в барабане при торможении автомобиля.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Newcomb T. Energy dissipated during braking // *Wear*. 1980. Vol. 59. p. 401–407.
- [2] Чичинадзе А.В., Матвеевский Р.М., Браун Э.Д. Материалы в триботехнике нестационарных процессов. М.: Наука, 1986. 248 с.
- [3] Гейдаров Ш.Г. Предельно-равновесное состояние тормозного барабана при наличии малых трещин в момент торможения автомобиля // *Динамика и прочность механических систем*. Баку, 1997. с. 13–27.
- [4] Гейдаров Ш.Г. Исследование дефектов в тормозном барабане автомобиля // *Ученые записки АзГТУ*. 1999. Т. VIII, № 2. с. 171–175.
- [5] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматлит, 1963. 252 с.
- [6] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [7] Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
- [8] Мирсалимов В.М. Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.
- [9] Мирсалимов В.М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары // *ПММ*. Т. 71, № 1. с. 132–151.

[10] Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1991. 416 с.

S. A. Askerov

### LIMIT STATE OF A DRUM WEAKENED BY CRACK WITH INTERFACIAL BONDS IN END ZONES DURING VEHICLE BRAKING

*Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan*

**Abstract.** The problem of temperature stresses in a brake drum weakened by a crack during vehicle braking is considered. It is assumed that during repeated braking in area of actual contact of the elements of friction pair of the vehicle braking system as a result of uneven heating, material defects (burns, thermal spots and microcracks) are formed. A mathematical description of the limit state in a drum weakened by crack with interfacial bonds in end zones during vehicle braking has been carried out. According to the crack re-sistance criteria, relations for determining the limit value of intensity of the heat effect at which in the brake drum crack growth occurs are obtained.

**Keywords:** brake drum of a truck, crack with interfacial bonds in end zones, limit thermoelastic state.

### REFERENCES

- [1] Newcomb T. Energy dissipated during braking // *Wear*. 1980. Vol. 59. p. 401–407.
- [2] Chichinadze A., Matveyevskiy R., Braun E. Materials in the tribotechnology of non-stationary processes. M.: Nauka, 1986. 248 p. (in Russian).
- [3] Geydarov S. The maximum equilibrium state of the brake drum in the presence of small cracks at the time of braking the car // *Dinamika i prochnost' mekhanicheskikh sistem*. Baku, 1997. p. 13–27. (in Russian).
- [4] Geydarov S. Investigation of defects in the brake drum of a car // *Uchenyye zapiski AzTU*. 1999. Vol. VIII, no. 2. p. 171–175. (in Russian).
- [5] Parkus G. Unsteady temperature stresses. Fizmatlit, 1963. 252 c.
- [6] Muskhelishvili N. Some basic tasks of the mathematical theory of elasticity. M.: Nauka, 1966. 707 p. (in Russian).
- [7] Panasyuk V., Savruk M., Datsyshin A. Stress distribution near cracks in plates and shells. Kiyev: Nauk. dumka, 1976. 443 p. (in Russian).
- [8] Mirsalimov V. One-dimensional elastoplastic problems. M.: Nauka, 1987. 256 p. (in Russian).
- [9] Mirsalimov V. To the solution of the problem of contact fracture mechanics about the nucleation and development of a crack with bonds between the edges in the sleeve of a friction pair // *PMM*. Vol. 71, no. 1. p. 132–151. (in Russian).
- [10] Panasyuk V. Mechanics of quasi-brittle fracture of materials. Kiyev: Nauk. dumka, 1991. 416 p. (in Russian).

---

*Askerov Sahib Azer ogly*,

e-mail: : sahibesgerov77@gmail.com, Assistant, Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan.

Ю. Н. Радаев

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ДИРЕКТОРЫ В АСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЯХ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** В работе получены новые представления трехмерного асимметричного тензора напряжений и соответствующие им формы дифференциальных уравнений равновесия. Асимметричные теории механики деформируемого твердого тела по-прежнему привлекают пристальное внимание в связи с необходимостью математического моделирования механического поведения современных материалов (например, ауксетиков с помощью теорий гемитропной микрополярной упругости). Исследование ограничивается только такими асимметричными тензорами второго ранга, для которых удается сохранить понятие о вещественных собственных значениях, но отказаться от взаимной ортогональности направлений главного триэдра. Обсуждается точная алгебраическая формулировка указанных условий асимметричности. В статье обобщаются тензорные представления симметричного тензора напряжений, основанные на естественном репере асимптотических направлений. Полученные результаты являются ярким свидетельством в пользу алгебраической „гиперболичности“ симметричных и асимметричных тензоров второго ранга в трехмерном пространстве.

**Ключевые слова:** пространственные асимптотические директоры, асимметричные теории механики сплошных деформируемых тел, тензор напряжений, ауксетики

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.004

УДК: 539.374

1. Предварительные сведения и вводные замечания. Асимметричные теории механики деформируемого твердого тела в настоящее время по-прежнему привлекают пристальное внимание исследователей в связи с необходимостью математического моделирования механического поведения современных материалов (например, ауксетиков с помощью теорий гемитропной микрополярной упругости).

---

© Радаев Ю. Н., 2019

*Радаев Юрий Николаевич*

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844 „Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности“)

Поступила 05.06.2019

Для микрополярных теорий механики деформируемого твердого тела характерны следующие уравнения равновесия, записанные в терминах силовых и моментных напряжений [1, 2] (см. также [3]):

$$\begin{aligned}\nabla_i t^{ik} &= -X^k, \\ \nabla_i \mu^i_{\cdot k} - 2\tau_k &= -Y_k,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $X^k$  — объемные силы;  $Y_k$  — объемные пары;  $t^{ik}$  — асимметричный тензор силовых напряжений (force stress tensor), складывающийся из симметричной  $t^{(ik)}$  и антисимметричной  $t^{[ik]}$  частей

$$t^{ik} = t^{(ik)} + t^{[ik]};\tag{2}$$

$\mu^i_{\cdot k}$  — асимметричный тензор моментных напряжений (couple stress tensor);  $\tau_j$ ,  $\mu^j$  — ассоциированные с силовыми и моментными напряжениями векторы, определяемые согласно

$$\begin{aligned}-\tau_j &= \frac{1}{2} e_{jik} t^{[ik]}, \\ t^{[ik]} &= -e^{ikj} \tau_j, \\ +\mu^i &= \frac{1}{2} e^{iks} \mu_{[ks]}, \\ \mu_{[is]} &= +e_{isj} \mu^j.\end{aligned}\tag{3}$$

В дальнейшем интерес будет представлять асимметричный тензор второго ранга  $\mathbf{t}$  и мы будем вести речь именно о нем, хотя в равной степени все сказанное может относиться и к тензору моментных напряжений.

2. Асимметричные тензоры, подобные диагональному тензору. Ограничимся только такими асимметричными тензорами второго ранга  $\mathbf{t}$ , для которых удастся сохранить понятия о главных осях и вещественных собственных значениях, но отказаться от взаимной ортогональности направлений главного триэдра. Поэтому будем полагать, что тензор  $\mathbf{t}$  подобен некоторому диагональному тензору. Последнее означает, что тензор  $\mathbf{t}$  может быть представлен (с точностью до подобия) в форме

$$\mathbf{StS}^{-1} = \sum_{a=1,2,3} t_a \mathbf{1}_a^a \otimes \mathbf{1},\tag{1}$$

где  $\mathbf{S}$  — невырожденный тензор второго ранга;  $\mathbf{1}_a^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ),  $\mathbf{1}^b$  ( $b = 1, 2, 3$ ) — взаимные тройки линейно независимых векторов;  $t_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) — вещественные собственные значения тензора  $\mathbf{StS}^{-1}$ , а, следовательно, и тензора  $\mathbf{t}$ .

Напомним, что взаимные тройки линейно независимых векторов  $\mathbf{1}_a^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ),  $\mathbf{1}^b$  ( $b = 1, 2, 3$ ) удовлетворяют фундаментальному соотношению

$$\mathbf{1}_a^b \cdot \mathbf{1}^b = \delta_a^b.$$

В качестве примера (необходимого в дальнейшем исследовании) приведем диагональное представление единичного тензора  $\mathbf{I}$ :

$$\mathbf{I} = \sum_{a=1,2,3} \mathbf{1}_a^a \otimes \mathbf{1}.\tag{2}$$

Выясним условия, при которых все собственные значения асимметричного тензора  $\mathbf{t}$  оказываются вещественными. Для этого рассмотрим характеристическое уравнение тензора  $\mathbf{t}$ :

$$-\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3 = 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \operatorname{tr} \mathbf{t}, \\ 2J_2 &= (\operatorname{tr} \mathbf{t})^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{t}^2), \\ 6J_3 &= (\operatorname{tr} \mathbf{t})^3 - 3 \operatorname{tr} \mathbf{t} \operatorname{tr}(\mathbf{t}^2) + 2 \operatorname{tr}(\mathbf{t}^3) = 6 \det \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (4)$$

В общем случае кубического уравнения

$$e_0\lambda^3 + e_1\lambda^2 + e_2\lambda + e_3 = 0 \quad (5)$$

в результате замены переменной

$$\lambda = \lambda' - \frac{e_1}{3e_0}$$

получается приведенное уравнение

$$\begin{aligned} \lambda'^3 + e'_2\lambda' + e'_3 &= 0, \\ e'_2 &= \frac{e_2}{e_0} - \frac{e_1^2}{3e_0^2}, \\ e'_3 &= \frac{2e_1^3}{27e_0^3} - \frac{e_1e_2}{3e_0^2} + \frac{e_3}{e_0} \end{aligned} \quad (6)$$

с дискриминантом

$$d = -27e'_2{}^3 - 4e'_3{}^2$$

или

$$d = E_1^2E_2^2 - 4E_1^3E_3 - 27E_3^2 - 4E_2^3 + 18E_1E_2E_3, \quad (7)$$

где

$$E_j = \frac{e_j}{e_0} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Условие вещественности корней кубического уравнения (5) есть (см., например, [4])

$$d \geq 0, \quad (8)$$

причем поскольку для тензора  $\mathbf{t}$  имеем

$$E_1 = -J_1, \quad E_2 = J_2, \quad E_3 = -J_3,$$

то дискриминант его характеристического уравнения (3) находится в виде

$$d = J_1^2J_2^2 - 4J_1^3J_3 - 27J_3^2 - 4J_2^3 + 18J_1J_2J_3. \quad (9)$$

3. Представление асимметричного тензора второго ранга с одним кратным собственным значением. Различные диадные представления [5, 6], справедливые для симметричных тензоров второго ранга, допускают обобщение на случай асимметричных тензоров, подобных диагональным тензорам. Речь идет прежде всего об обобщении понятия асимптотического направления.

Предположим сначала, что два собственных значения тензора  $\mathbf{t}$  совпадают:

$$t_1 = t_2.$$

Третье собственное значение  $t_3$  тензора  $\mathbf{t}$  будем считать отличным от первых двух.

Можно дать точную алгебраическую характеристику этого случая: дискриминант (9) характеристического уравнения тензора  $\mathbf{t}$  (3) должен быть равен нулю, а второй из коэффициентов приведенного уравнения — отличен от нуля, т.е.

$$d = 0, \quad 3J_2 - J_1^2 \neq 0.$$

Воспользуемся далее представлением единичного тензора (2). После очевидных преобразований находим

$$\mathbf{S}\mathbf{t}\mathbf{S}^{-1} = t_1\mathbf{I} + (t_3 - t_1)\mathbf{1}_3^3 \otimes \mathbf{1}, \quad (1)$$

откуда получаем

$$\mathbf{t} = t_1\mathbf{I} + (t_3 - t_1)(\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{1}_3) \otimes (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{1}_3). \quad (2)$$

Вводя затем директоры

$$\mathbf{d}_* = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{1}_3, \quad \mathbf{d}^* = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{1}_3,$$

находим следующее представление асимметричного тензора  $\mathbf{t}$  с помощью двух ненормированных директоров:

$$\mathbf{t} = t_1\mathbf{I} + (t_3 - t_1)\mathbf{d}_* \otimes \mathbf{d}^*, \quad (3)$$

где следует учитывать, что

$$\mathbf{d}_* \cdot \mathbf{d}^* = (\mathbf{1}_3 \cdot \mathbf{S}^{-T}) \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{1}_3) = \mathbf{1}_3 \cdot \mathbf{1}_3 = 1, \quad (4)$$

т.е. директоры  $\mathbf{d}_*$  и  $\mathbf{d}^*$  в диадном представлении (3) связаны между собой одним скалярным соотношением (4).

Диадное представление (3) позволяет заключить, что:

1. директор  $\mathbf{d}_*$  — собственный вектор тензора  $\mathbf{t}$ , соответствующий собственному значению  $t_3$ ;
2. любой вектор, ортогональный  $\mathbf{d}_*$ , является собственным с кратным собственным значением  $t_1 = t_2$ ;
3. направления, указываемые директорами  $\mathbf{d}_*$  и  $\mathbf{d}^*$ , можно считать асимптотическими для тензора  $\mathbf{t}$ ;
4. векторное произведение  $\mathbf{d}_* \times \mathbf{d}^*$  представляет собой собственный вектор тензора  $\mathbf{t}$  с кратным собственным значением  $t_1 = t_2$ ;
5. двойное векторное произведение  $\mathbf{d}_* \times (\mathbf{d}_* \times \mathbf{d}^*)$  представляет собой собственный вектор

тензора  $\mathbf{t}$  с кратным собственным значением  $t_1 = t_2$ ;

6. тройка векторов  $\mathbf{d}, \mathbf{d} \times \mathbf{d}, \mathbf{d} \times (\mathbf{d} \times \mathbf{d})$  образует базис в пространстве.

Отметим также, что имеет место равенство

$$\text{tr}(\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}) = \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 1.$$

Диадное представление (3) будет справедливо, если разделить диаду  $\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}$  на скалярное произведение  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}$ , равное в силу (4) единице. Полученное отношение не изменит значения при нормировке асимптотических директоров на единицу. В терминах нормированных на единицу директоров поэтому имеем для асимметричного тензора  $\mathbf{t}$  представление:

$$\mathbf{t} = t_1 \mathbf{I} + (t_3 - t_1) \frac{\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}}, \quad (5)$$

где следует принимать во внимание условия нормировки директоров

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 1, \quad \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 1.$$

Симметричная и антисимметричная части тензора  $\mathbf{t}$  легко вычисляются с помощью диадного представления (3); в результате приходим к формулам

$$\text{sym } \mathbf{t} = t_1 \mathbf{I} + \frac{1}{2} (t_3 - t_1) (\mathbf{d} \otimes \mathbf{d} + \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}), \quad (6)$$

$$\text{asym } \mathbf{t} = \frac{1}{2} (t_3 - t_1) (\mathbf{d} \otimes \mathbf{d} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}). \quad (7)$$

Для симметричной и антисимметричной частей тензора  $\mathbf{t}$  в случае нормированных асимптотических директоров (см. (5)) находятся следующие выражения:

$$\text{sym } \mathbf{t} = t_1 \mathbf{I} + \frac{1}{2} \frac{t_3 - t_1}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}} (\mathbf{d} \otimes \mathbf{d} + \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}), \quad (8)$$

$$\text{asym } \mathbf{t} = \frac{1}{2} \frac{t_3 - t_1}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}} (\mathbf{d} \otimes \mathbf{d} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}). \quad (9)$$

Заметим, что в математической теории пластичности (с симметричным тензором напряжений) величина

$$\frac{|t_3 - t_1|}{2}$$

имеет смысл максимального (по всем ориентациям в пространстве) касательного напряжения в заданной точке.

4. Представление асимметричного тензора второго ранга, все собственные значения которого различны. Предположим, что все собственные значения тензора  $\mathbf{t}$  различны и упорядочим их в порядке убывания:

$$t_1 > t_2 > t_3.$$



В этом случае дискриминант (9) характеристического уравнения тензора  $\mathbf{t}$  (3) должен быть строго положительным:

$$d > 0.$$

На основании тензорного представления единичного тензора (2) получаем

$$\mathbf{S}\mathbf{t}\mathbf{S}^{-1} = t_2\mathbf{I} + (t_1 - t_2)\mathbf{l}_1^1 \otimes \mathbf{l}_1^1 + (t_3 - t_2)\mathbf{l}_3^3 \otimes \mathbf{l}_3^3, \quad (1)$$

откуда

$$\mathbf{t} = t_2\mathbf{I} + (t_1 - t_2)(\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{l}_1^1) \otimes (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{l}_1^1) + (t_3 - t_2)(\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{l}_3^3) \otimes (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{l}_3^3). \quad (2)$$

Определяя директоры согласно

$$\mathbf{h}_* = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{l}_1^1, \quad \mathbf{h}^* = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{l}_1^1, \quad \mathbf{d}_* = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{l}_3^3, \quad \mathbf{d}^* = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{l}_3^3,$$

приходим к следующему представлению асимметричного тензора  $\mathbf{t}$ :

$$\mathbf{t} = t_2\mathbf{I} + (t_1 - t_2)\mathbf{h}_* \otimes \mathbf{h}^* + (t_3 - t_2)\mathbf{d}_* \otimes \mathbf{d}^*, \quad (3)$$

где (ненормированные) директоры связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_* \cdot \mathbf{d}^* &= 1, & \mathbf{h}_* \cdot \mathbf{h}^* &= 1, \\ \mathbf{h}_* \cdot \mathbf{d}^* &= 0, & \mathbf{d}_* \cdot \mathbf{h}^* &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что:

1. директор  $\mathbf{d}_*$  — собственный вектор тензора  $\mathbf{t}$ , соответствующий минимальному собственному значению  $t_3$ ;
2. директор  $\mathbf{h}_*$  — собственный вектор тензора  $\mathbf{t}$ , соответствующий максимальному собственному значению  $t_1$ ;
3. любой вектор, ортогональный как  $\mathbf{d}_*$ , так и  $\mathbf{h}_*$  является собственным (ему соответствует промежуточное собственное значение  $t_2$ ), поэтому третий собственный вектор можно выбрать как векторное произведение  $\mathbf{d}_* \times \mathbf{h}_*$ ;
4. векторы  $\mathbf{d}_*$ ,  $\mathbf{d}_* \times \mathbf{h}_*$ ,  $\mathbf{h}_*$  образуют в трехмерном пространстве базисный триэдр тензора  $\mathbf{t}$ .

Нормируя директоры на единицу, приходим к следующему диадному представлению асимметричного тензора  $\mathbf{t}$ :

$$\mathbf{t} = t_2\mathbf{I} + (t_1 - t_2)\frac{\mathbf{h}_* \otimes \mathbf{h}^*}{\mathbf{h}_* \cdot \mathbf{h}^*} + (t_3 - t_2)\frac{\mathbf{d}_* \otimes \mathbf{d}^*}{\mathbf{d}_* \cdot \mathbf{d}^*}, \quad (5)$$

в котором следует учитывать нормирующие равенства и условия ортогональности

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_* \cdot \mathbf{h}_* &= 1, & \mathbf{h}^* \cdot \mathbf{h}^* &= 1, & \mathbf{d}_* \cdot \mathbf{d}_* &= 1, & \mathbf{d}^* \cdot \mathbf{d}^* &= 1; \\ \mathbf{h}_* \cdot \mathbf{d}_* &= 0, & \mathbf{d}_* \cdot \mathbf{h}^* &= 0. \end{aligned}$$

Несложные вычисления позволяют получить формулы для симметричной и антисимметричной частей тензора  $\mathbf{t}$  в терминах нормированных асимптотических директоров:

$$\text{sym } \mathbf{t} = t_2 \mathbf{I} + \frac{1}{2} \frac{t_1 - t_2}{\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}} (\mathbf{h} \otimes \mathbf{h} + \mathbf{h} \otimes \mathbf{h}) + \frac{1}{2} \frac{t_3 - t_2}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}} (\mathbf{d} \otimes \mathbf{d} + \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}), \quad (6)$$

$$\text{asym } \mathbf{t} = \frac{1}{2} \frac{t_1 - t_2}{\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}} (\mathbf{h} \otimes \mathbf{h} - \mathbf{h} \otimes \mathbf{h}) + \frac{1}{2} \frac{t_3 - t_2}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}} (\mathbf{d} \otimes \mathbf{d} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}). \quad (7)$$

5. Новые формы уравнений равновесия для асимметричного тензора силовых напряжений. Полученным в предыдущих разделах работы диадным представлениям тензора  $\mathbf{t}$  соответствуют новые формы уравнений равновесия. В декартовой системе координат уравнения (1) приобретают вид

$$\begin{aligned} \partial_j t_{ji} &= -X_i, \\ \partial_j \mu_{ji} + \epsilon_{ijk} t_{jk} &= -Y_i. \end{aligned} \quad (1)$$

Если использовать ненормированные асимптотические директоры, то диадные представления тензора  $\mathbf{t}$  следующим образом записываются в координатной форме:

$$t_{ji} = t_1 \delta_{ji} + (t_3 - t_1) d_j d_i,$$

$$t_{ji} = t_2 \delta_{ji} + (t_1 - t_2) h_j h_i + (t_3 - t_2) d_j d_i.$$

Для дивергенции тензора  $\mathbf{t}$  имеем:

$$\begin{aligned} \partial_j t_{ji} &= \partial_i t_1 + d_i d_j \partial_j (t_3 - t_1) + (t_3 - t_1) [d_i \partial_j d_j + d_j \partial_j d_i], \\ \partial_j t_{ji} &= \partial_i t_2 + h_i h_j \partial_j (t_1 - t_2) + (t_1 - t_2) [h_i \partial_j h_j + h_j \partial_j h_i] - \\ &\quad - d_i d_j \partial_j (t_2 - t_3) - (t_2 - t_3) [d_i \partial_j d_j + d_j \partial_j d_i]. \end{aligned} \quad (2)$$

В итоге на основании данных выше формул получаем уравнения равновесия для асимметричных силовых напряжений  $\mathbf{t}$  в терминах ненормированных асимптотических директоров.

В случае кратного собственного значения  $t_1 = t_2$  векторное уравнение равновесия есть:

$$\nabla t_1 + \mathbf{d}(\mathbf{d} \cdot \nabla)(t_3 - t_1) + (t_3 - t_1) [\mathbf{d}(\nabla \cdot \mathbf{d}) + (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{d}] = -\mathbf{X}. \quad (3)$$

В случае различных собственных значений  $t_1 > t_2 > t_3$  векторное уравнение равновесия есть:

$$\begin{aligned} \nabla t_2 - \mathbf{d}(\mathbf{d} \cdot \nabla)(t_2 - t_3) - (t_2 - t_3) [\mathbf{d}(\nabla \cdot \mathbf{d}) + (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{d}] + \\ + \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \nabla)(t_1 - t_2) + (t_1 - t_2) [\mathbf{h}(\nabla \cdot \mathbf{h}) + (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}] = -\mathbf{X}. \end{aligned} \quad (4)$$

К приведенным выше уравнениям необходимо присоединить также условия, связывающие ненормированные асимптотические директоры: к уравнению (3) условие (4), а к уравнению (4) — четыре условия (4).

## 6. Заключение.

1. Диадные представления, используемые в теории идеальной пластичности и справедливые для симметричных тензоров второго ранга, допускают обобщение на случай асимметричных тензоров, подобных диагональным тензорам.
2. Обобщенное диадное представление асимметричного тензора второго ранга с одним кратным собственным значением отличается наибольшей формальной простотой, поскольку включает только два пространственных директора, связанных между собой одним скалярным условием.
3. Обобщенное диадное представление асимметричного тензора второго ранга с различными собственными значениями содержит четыре пространственных директора, связанных между собой четырьмя скалярными условиями.
4. Полученные специальные формы уравнений равновесия выражены в терминах, наиболее естественных с алгебраической точки зрения.
5. Полученные результаты являются дополнительным свидетельством в пользу алгебраической „гиперболичности“ симметричных и асимметричных тензоров второго ранга в трехмерном пространстве [7].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford New York Toronto Sydney Paris Frankfurt: Pergamon Press, 1986. Vol. iii. 383 p.
- [2] Радаев Ю.Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 3. с. 504–517.
- [3] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [4] Сушкевич А.К. Основы высшей алгебры. М., Л.: ОНТИ, 1937. 476 с.
- [5] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 240 с.
- [6] Радаев Ю.Н. Асимптотические оси тензоров напряжений и приращения деформации в механике сжимаемых континуумов // Изв. РАН. Мех. тверд тела. 2013. № 5. С. 77–85.
- [7] Радаев Ю.Н. Гиперболические теории и задачи механики деформируемого твердого тела // Международная конференция „Современные проблемы механики“, посв. 100-летию Л.А. Галина (20-21 сентября 2012 г., г. Москва). Тезисы докл. М.: Самарский государственный технический университет, 2012. С. 75–76.

Y. N. Radayev

**THREE-DIMENSIONAL ASYMPTOTIC DIRECTORS IN ASYMMETRIC THEORIES OF CONTINUUM MECHANICS***Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** In this paper new representations of three-dimensional asymmetric stress tensor and the corresponding form of the differential equilibrium equations are given. Asymmetric theories of solid mechanics continue to attract attention in connection with the necessity of mathematical modelling of the mechanical behaviour of the advanced materials (e.g., auxetics by means of the hemitropic micropolar theory of elasticity). The study is restricted to such asymmetric second rank tensors, for which it is still possible to retain the notion of real eigenvalues, but not to accept the mutual orthogonality of the directors of the principal trihedron. The exact algebraic formulation of these asymmetry conditions is discussed. The study extends the tensor representations of the symmetric stress tensor based on the notion of asymptotic directions. The obtained results are a clear evidence in favor of algebraic hyperbolicity both the symmetric and asymmetric second rank tensors in three-dimensional space.

**Keywords:** spatial asymptotic directors, asymmetric theories of mechanics of continuous deformable bodies, stress tensor, auxetic.

## REFERENCES

- [1] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford New York Toronto Sydney Paris Frankfurt: Pergamon Press, 1986. Vol. iii. 383 p.
- [2] Radayev Y. Pravilo mnozhitel' v kovariantnykh formulirovках mikropolyarnykh teoriy mekhaniki kontinuumov // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2018. Vol. 22, no. 3. p. 504–517.
- [3] Novatskiy V. Teoriya uprugosti. M.: Mir, 1975. 872 p.
- [4] Sushkevich A. Osnovy vysshey algebry. M., L.: ONTI, 1937. 476 p.
- [5] Radayev Y. Prostranstvennaya zadacha matematicheskoy teorii plastichnosti. Samara: Izd-vo Samarskogo Gos. Universiteta, 2006. 240 p.
- [6] Radayev Y. Asimptoticheskiye osi tenzorov napryazheniy i prirashcheniya deformatsii v mekhanike szhimayemykh kontinuumov // Izv. RAN. Mekh. Tverd. Tela. 2013. no. 5. P. 77–85.
- [7] Radayev Y. Giperbolicheskiye teorii i zadachi mekhaniki deformiruyemogo tverdogo tela // Mezhdunarodnaya konferentsiya „Sovremennyye problemy mekhaniki“, posv. 100-letiyu L.A. Galina (20-21 sentyabrya 2012 g., g. Moskva). Tezisy dokl. M.: Samarskiy Gosudarstvennyy Tekhnicheskii Universitet, 2012. P. 75–76.

---

*Radayev Yuri Nickolaevich*

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

Р. И. Непершин

## О ПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ ПРИ ХОЛОДНОМ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОМ НАПЫЛЕНИИ

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия

**Аннотация.** . Приведено моделирование пластического деформирования сферических металлических частиц при холодном газодинамическом напылении поверхности. Образование покрытия происходит при больших деформациях частиц, которые рассчитываются по теории идеальной пластичности при контакте с неподвижной поверхностью и между частицами, движущимися по общей нормали к поверхности. При высоких сверхзвуковых скоростях частиц происходит пластическое изменение формы сферы в тонкий диск с образованием покрытия из нескольких деформируемых частиц.

**Ключевые слова:** холодное газодинамическое напыление, пластическая деформация, сферическая частица, идеальная пластичность, линии скольжения, кинетическая энергия, скорость частицы, толщина покрытия, плотность покрытия.

УДК: 539.374+539.231

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.005

**Введение.** Процесс образования покрытия при сверхзвуковом газодинамическом напылении металлическим порошком из сферических частиц без существенного подгрева, влияющего на напряжение текучести частиц, получил название холодного газодинамического напыления (ХГН) [1-3] с перспективой практического применения для защиты от коррозии и повышения антифрикционных свойств пар трения.

Физическим механизмом образования покрытия при ХГН является пластическое формоизменение сферических частиц порошка за счет высокой начальной кинетической энергии при сверхзвуковых скоростях. Пластическая деформация частиц при контакте с напыляемой поверхностью и между частицами при достаточно высокой плотности частиц в потоке газа приводят к образованию сплошного покрытия с высокой прочностью и плотностью в зависимости от пластических свойств частиц и режимов напыления [3].

---

© Непершин Р. И., 2019

Непершин Ростислав Иванович

e-mail: nepershin\_ri@rambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия.

Поступила 04.02.2019

Вследствие больших пластических деформаций сферических частиц при ХГН в настоящей работе используется модель идеального жесткопластического тела при условии полной пластичности [4]. Напряжение текучести  $\sigma_y$  может быть выбрано по динамической твердости [5]. Рассчитывается локальная пластическая область, контактное давление и изменение формы при сжатии сферической частицы. Зависимость силы сопротивления пластическому деформированию от перемещения сферы относительно границы контакта используется в уравнении движения сферических частиц по теореме об изменении кинетической энергии при пластическом деформировании. Технологические режимы напыления и свойства частиц определяют пластическое образование покрытия методом ХГН.

Особенностью идеально пластической модели при использовании концепции динамического напряжения текучести является непрерывное изменение области контактной пластической деформации. Уравнение движения сферических частиц с учётом сопротивления пластическому деформированию определяет снижение скорости и конечное пластическое деформирование в зависимости от напряжения текучести, начальной скорости и плотности материала частиц. В настоящей работе не ставится задача моделирования ХГН во всей сложности связанных научных проблем [3]. Рассматривается только процесс нарастания толщины покрытия по модели движения и деформирования идеально пластических сфер, как один из основных механизмов образования покрытия.

Задача контактного деформирования идеально пластической сферы является обратной задачей А.Ю. Ишлинского о вдавливании жесткой сферы в идеально пластическое полу-пространство [4,6]. Пластическое деформирование жесткопластической сферы при сжатии плоскими штампами при условии полной пластичности приведено в [7].

**Форма деформируемой сферы.** При сжатии идеально пластической сферы образуются круговые границы контакта с выдавливанием материала на свободную поверхность сферы. На рис. 1 показана правая половина сферы с радиусом  $R_s$ , который принимается за единицу длины, при перемещении  $s$  относительно неподвижной границы  $z = 0$  в цилиндрических координатах  $r, z$  с началом в центре границы контакта  $OА$ . Границы пластической области с учетом контактного трения показаны штриховыми линиями.

Изменение формы сферы с увеличением радиуса контакта  $a$ , длины  $l$  и угла наклона  $\alpha$  свободной границы  $AB$  пластической области при увеличении перемещения  $s$  определяется условием пластической несжимаемости. Свободная граница  $AB$ , касательная к сфере с углом наклона  $\alpha$ , принимается прямолинейной. Сегмент нижней полусферы высотой  $1 - \cos \alpha$  принимает форму усеченного конуса высотой  $h$ . Равенство объема сегмента сферы и усеченного конуса при заданном угле  $\alpha$  приводит к кубическому уравнению для  $h$

$$h^3 - 3h(h \cos \alpha - \sin^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha = (1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (1)$$

Переменные  $a$ ,  $l$  и  $s$  связаны с  $\alpha$  и  $h$  соотношениями

$$a = \sin \alpha - l \cos \alpha, \quad l = h / \sin \alpha, \quad s = 1 - h - \cos \alpha, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

При  $\alpha = 0$  из уравнения (1) следует  $h = 0$ . Контактная пластическая область стягивается в точку при  $s = a = l = 0$ . При  $\alpha = \pi/2$  из (1) находим  $h = 2/3$  и  $s = 1/3$ .

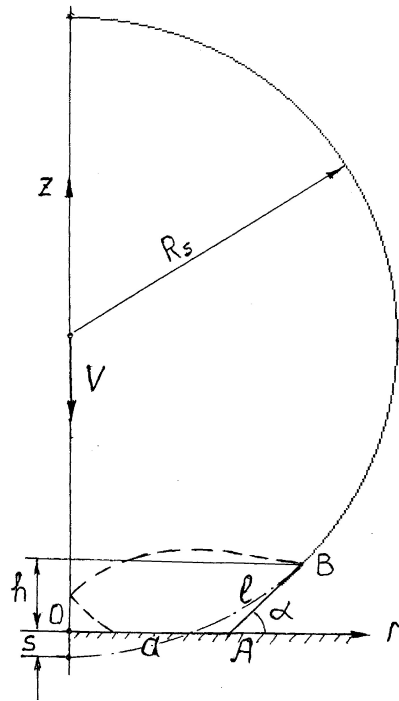


Рис. 1. Форма сферы при  $s < 1/3$ . --- Контур недеформированной сферы.

Начальная сфера переходит в полусферу, сопряженную с цилиндром радиуса  $a = 1$  и высотой  $h = 2/3$ . При  $0 < \alpha < \pi/2$  решение уравнения (1) находим по формулам Кардана для переменной  $l = h/\sin \alpha$ . Кубическое уравнение для переменной  $l$  имеет вид

$$l^3 - 3 \operatorname{tg} \alpha l^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha l = (1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha) / (\sin \alpha \cos^2 \alpha) = c. \quad (3)$$

Из уравнений (3) и (1) находим

$$l = (c - \operatorname{tg}^3 \alpha)^{1/3} + \operatorname{tg} \alpha, \quad h = l \sin \alpha \quad (4)$$

где  $c$  – правая часть уравнения (3). При  $\alpha = \pi/2$  и  $s = 1/3$  нижняя полусфера деформируется в диск с отношением диаметра к высоте  $D/H = 3$ .

В процессе газодинамического напыления начальная скорость частицы  $V_0$ , деформируемой на контакте с неподвижной поверхностью, снижается вследствие уменьшения ее кинетической энергии при сопротивлении пластическому деформированию. Следующая частица, движущаяся по общей нормали к поверхности с деформируемой на контакте частицей со скоростью  $V_0$ , вступает в контакт с верхней полусферой деформированной частицы на поверхности покрытия. Происходит пластическое сжатие первой частицы между двумя контактными поверхностями и второй частицы на контакте с нижней полусферой. Аналогичный процесс происходит с последующими частицами, приходящими в контакт с предыдущими деформируемыми частицами, с образованием толщины покрытия при прохождении сопла над рассматриваемой точкой напыляемой поверхности.

При перемещении  $s = 1/3$  по двум контактными поверхностям первая частица деформируется в диск с отношением  $D/H = 1.5$ . При достаточно большой начальной кинетической энергии частиц этот диск сжимается по высоте при контактном давлении  $q$  определяемой формулой

$$q = 1 + \frac{1}{3} \frac{\mu D}{H}, \quad 0 < \mu < 0.5, \quad (5)$$

где  $\mu$  – коэффициент пластического трения по Прандтлю.

При  $s > 1/3$  происходит сжатие диска на границе контакта с увеличением отношения  $D/H$ . Равенство потока скорости через границы контакта и через свободную границу диска с радиусом  $R > 1$  приводит к соотношениям для приращений переменных  $R$ ,  $s$  и  $H$

$$\Delta R = \frac{1}{3} \Delta s R (2(1-s)), \quad 1-s = H, \quad \Delta s = -\Delta H. \quad (6)$$

При увеличении перемещения  $s = s_0 + \Delta s$ ,  $s_0 \geq 1/3$  из уравнения (6) находим радиус  $R = R_0 + \Delta R$ ,  $R_0 \geq 1$  и толщину  $H = 1-s$  сжимаемого диска, и по формуле (5) находим зависимость  $q(s)$ .

**Пластическая область при  $s < 1/3$ .** Пластическое течение в контактной пластической области при  $s < 1/3$  (рис. 1) рассчитывается методом линий скольжения [8] при условии полной пластичности [4]. При расчете линий скольжения и скоростей в пластической области за характерный размер принимаем радиус отпечатка  $a = 1$  с началом координат  $r, z$  в центре границы контакта и скорость центра сферы по оси  $z$  – за единицу скорости  $V_z = -1$  при неподвижной границе контакта. Линии скольжения определяются граничными условиями сжатия вдоль пластической границы  $AB$  с углом наклона  $\alpha$ , контактными трением  $\mu$  на границе скольжения и условием симметрии на оси  $z$ . Поле скоростей рассчитывается по граничным условиям непрерывности скоростей на жесткопластических границах с контролем условия положительности диссипативной функции в пластической области.

На рис. 2 показан пример расчета линий скольжения (а) и годографа скоростей (б) при сжатии сферы  $s = 0.0248$ , с радиусом контакта  $a = 0.312$ , длиной  $l = 0.179$  и углом наклона  $\alpha = 0.4987$  свободной границы при  $\mu = 0.2$ .

Полярная особенность поля скоростей [9,10] в окрестности оси симметрии около точки  $E$  на годографе показана штриховой линией. Жесткопластические границы  $BE$  и  $EF$  линий скольжения на годографе скоростей стягиваются в точки. На ближайших к этим границам линиях скольжения напряжения  $\sigma$  и углы  $\varphi$  непрерывны. Полярная особенность поля скоростей в окрестности точки  $E$  приводит к быстрому изменению скоростей при переходе к пластической области в узкой полосе жесткопластических границ  $BE$ ,  $EF$  и вдоль линии скольжения  $FB$ . Поле скоростей с границей скольжения  $AF$  изображается на годографе областью  $ADF$ . Остальная часть пластической области изображается на годографе  $\eta$  линиями, стягивающимися к точке  $BE$ . Линия скольжения  $ACC_1$ , на которой кривизна  $\eta$  линий скольжения меняет знак (рис. 2а), изображается на годографе точками возврата  $\eta$  линий скольжения с полем скоростей областей  $ABC$  и  $BCC_1$ . Граница  $AB$  на годографе прямолинейна. Диссипативная функция положительна во всей пластической области. На рис. 2с показано распределение давления на границе контакта, жесткопластические границы и смещение границы  $AB$  пластической области при малом перемещении  $\Delta s = 0.05$ .



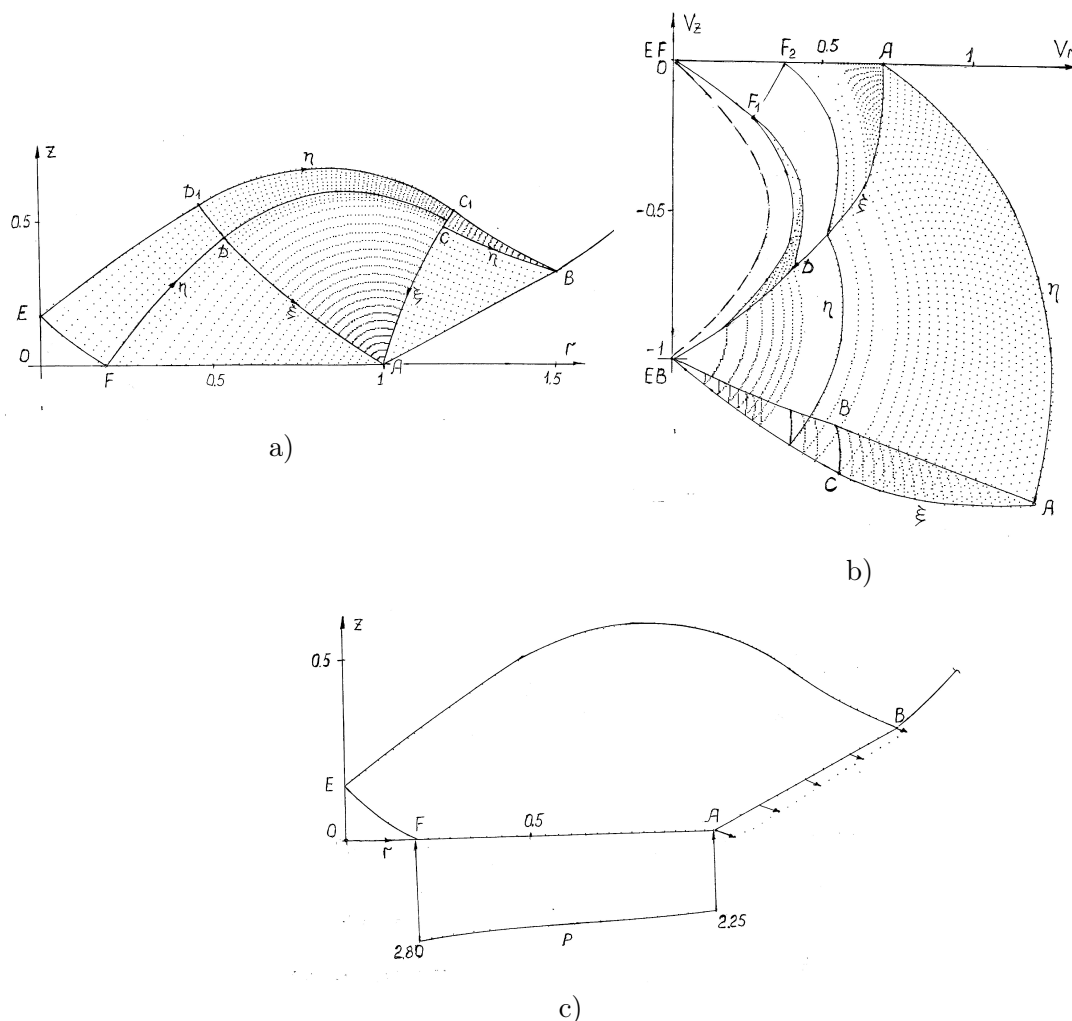


Рис. 2. Формы поперечных сечений стержней.

Деформирование сферы в зависимости от перемещения  $s$  приведено в табл.1. При  $s = 1/3$  радиус контакта  $a = 1$  равен радиусу начальной сферы. В табл. 2 приведены зависимости среднего контактного давления  $q$  от перемещения  $s$  для линий скольжения, вычисленных для коэффициентов трения  $\mu = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ .

**Динамика деформируемых сфер.** Покрытие при ХГН образуется отдельными частицами на некотором расстоянии от кромки сопла, с нарастанием толщины за счёт пластического деформирования последующих частиц. Конечная толщина покрытия, расход порошка, производительность процесса зависят от конструкции сопла, технологических параметров и рассчитываются на основе теории газовой динамики струи с дисперсными частицами с использованием статистических оценок основных параметров [3].

Деформируемую сферическую частицу с единичным радиусом  $R_c = 1$  и плотностью  $\rho$  рассматриваем как поступательно движущееся тело с постоянной массой

$s$	$a$	$l$	$\alpha$	$s$	$a$	$l$	$\alpha$
0.001	0.055	0.032	0.087	0.100	0.550	0.336	0.873
0.004	0.110	0.065	0.174	0.121	0.606	0.372	0.960
0.009	0.165	0.097	0.262	0.145	0.661	0.410	1.047
0.016	0.220	0.130	0.349	0.170	0.717	0.449	1.135
0.025	0.275	0.163	0.436	0.198	0.772	0.489	1.222
0.036	0.330	0.196	0.524	0.228	0.829	0.531	1.309
0.049	0.385	0.230	0.611	0.261	0.885	0.574	1.396
0.064	0.440	0.265	0.698	0.296	0.942	0.619	1.484
0.081	0.495	0.300	0.785	0.333	1.000	0.667	1.571

Таблица 1. Напряжения на границе  $AC$ 

$\mu$	0.05	0.1	0.15	0.2	$\mu$	0.05	0.1	0.15	0.2
$s$	$q$				$s$	$q$			
0.001	2.811	2.847	2.876	2.898	0.100	1.912	1.944	1.972	2.002
0.004	2.715	2.746	2.777	2.805	0.121	1.810	1.838	1.870	1.900
0.009	2.615	2.648	2.679	2.707	0.145	1.705	1.734	1.767	1.798
0.016	2.517	2.550	2.580	2.607	0.170	1.600	1.628	1.663	1.695
0.025	2.417	2.453	2.482	2.508	0.198	1.495	1.525	1.559	1.592
0.036	2.319	2.351	2.380	2.408	0.228	1.385	1.420	1.457	1.489
0.049	2.218	2.250	2.278	2.306	0.261	1.278	1.316	1.352	1.384
0.064	2.116	2.150	2.178	2.204	0.296	1.171	1.211	1.248	1.280
0.081	2.013	2.046	2.073	2.104	0.333	1.070	1.109	1.145	1.179

Таблица 2. Контактное давление  $q$  при  $s \leq 1/3$ 

$m = (4/3)\pi\rho$ , на которое действует сила сопротивления  $P(s)$  контактному пластическому деформированию, зависящая от перемещения  $s$  центра сферы по нормали относительно неподвижной поверхности

$$P(s) = \pi\sigma_Y a^2 q(s), \quad (7)$$

где  $a$  – радиус границы контакта отнесенный к радиусу сферы,  $q$  – среднее давление на границе контакта отнесенное к напряжению текучести  $\sigma_Y$ . Зависимость  $a^2 q(s)$  при  $\mu = 0.3$  с учетом шероховатости поверхности напыления приведена в табл. 3. При  $s > 1/3$ ,  $a = R > 1$  и  $q(s)$  вычисляются по уравнениям (6) и (5). Так как  $P(s)$  является известной функцией перемещения, то зависимость скорости частицы от перемещения  $s$  находим по теореме об изменении кинетической энергии материальной точки без учета силы тяжести частицы, малой по сравнению с силой  $P$

$$V_2 = V_0^2 - \frac{3}{2} \frac{\sigma_Y}{\rho} \int_0^s a^2 q ds, \quad (8)$$

$s$	$a^2q$	$s$	$a^2q$	$s$	$a^2q$
0.000	0.000	0.036	0.265	0.145	0.783
0.001	0.009	0.049	0.345	0.170	0.864
0.004	0.034	0.064	0.431	0.198	0.939
0.009	0.075	0.081	0.518	0.228	1.007
0.016	0.128	0.100	0.607	0.261	1.065
0.025	0.192	0.121	0.697	0.296	1.109
				0.333	1.143

Таблица 3. Зависимость  $a^2q$  от  $s \leq 1/3$  при  $\mu = 0.3$ 

где  $V_0$  – скорость частицы перед контактом с неподвижной поверхностью. Принимая  $V_0$  за единицу скорости, уравнение (8) запишем для относительной скорости частицы в виде

$$V^2 = 1 - CAp(s), \quad (9)$$

$$C = 1.5\sigma_Y / (\rho V_0^2), \quad (10)$$

$$Ap(s) = \int_0^s a^2q ds, \quad (11)$$

где  $C$  – динамический параметр, зависящий от напряжения текучести и плотности материала частицы и ее скорости перед контактом с неподвижной границей;  $Ap$  – работа пластического деформирования в безразмерных переменных, определяемая численным интегрированием зависимости  $a^2q(s)$ .

Время контакта в зависимости от перемещения  $s$  при  $V \geq 0$  определяется интегралом

$$t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 - CAp(s)}}, \quad 0 < s < s_c, \quad (12)$$

где  $s_c$  – конечное перемещение частицы до ее остановки, которое определяется из уравнений (9) – (11) при  $V = 0$

$$\int_0^{s_c} a^2q ds = 1/C. \quad (13)$$

Время контакта до остановки частицы определяется интегралом (12) при  $s \rightarrow s_c$ . Уравнения (9) – (13) показывают, что для пластичных порошков с низким напряжением текучести металлических частиц уменьшение коэффициента  $C$ , эквивалентное повышению начальной скорости  $V_0$ , приводит к замедлению снижения скорости и повышению конечной пластической деформации и времени контакта при увеличении перемещения  $s$  и деформации сферы. Повышение плотности частицы также приводит к увеличению пластической деформации и времени контакта. Эти зависимости согласуются с экспериментальными данными [3].

Толщина и плотность покрытия. Покрытие образуется пластической деформацией  $N$  частиц, движущихся со скоростью  $V_0 = 1$  по нормали к напыляемой поверхности с

расстоянием  $L_0$  между их центрами. При деформировании первой частицы на жесткой границе напыляемой поверхности при перемещении  $s$  до остановки за время  $t_c$  расстояние между центрами первой и второй частиц уменьшается на величину  $t_c - s$ . Если выполняется равенство  $L_0 + s - t_c = 2$ , то в момент остановки первой частицы происходит ее контакт со второй частицей. В случае неравенства

$$L_0 \geq 2 + t_c - s, \quad (14)$$

пластическая деформация первой и второй частиц происходит при остановке первой частицы. Сферическая часть первой частицы сдавливается при контакте со второй частицей на величину  $s$ . При выполнении неравенства (14) увеличение толщины покрытия происходит последовательным пластическим деформированием  $N$  частиц на неподвижной поверхности, образованной предыдущими частицами. Конечная толщина покрытия  $H_c$  в среднем сечении по длине напыляемого слоя определяется формулой

$$H_c = 2N(1-s) + s. \quad (15)$$

Изменение плотности покрытия при пластическом деформировании сферических частиц с плотностью  $\rho$  зависит от распределения деформируемых частиц на напыляемой поверхности. На рис. 3 показано регулярное расположение деформируемых частиц на поверхности покрытия в виде дисков равного радиуса  $R \geq 1$ , образующихся при пластическом сжатии двух сфер на величину  $S_0 \geq 1/3$ . Центры дисков находятся в вершинах равностороннего треугольника с длиной стороны  $2R$ . Начальная плотность покрытия при постоянной толщине дисков по этой схеме определяется отношением площади треугольника  $\sqrt{3}R^2$  к площади секторов трех дисков внутри этого треугольника с плотностью  $\rho$

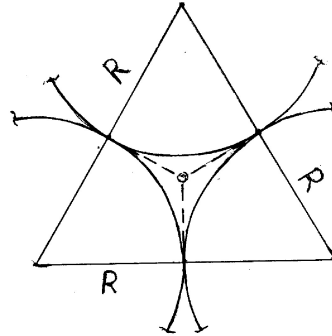


Рис. 3. Контакт пластических дисков на поверхности напыления. — Заполнение полости при деформировании дисков в шестигранные призмы.

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \rho_s = 0.9067\rho. \quad (16)$$

Минимальный радиус диска  $R = 1$  при  $S_0 = 1/3$  равен радиусу начальной сферы и соответствует наибольшей плотности распределения частиц на напыляемой поверхности. При  $R > 1$  плотность распределения частиц на поверхности уменьшается. Плотность покрытия  $\rho_0$  определяется пластическим сжатием  $s_0$  определяемым условием сохранения объема

$$S_0 = 1 - \frac{2}{3R^2}, \quad R \geq 1. \quad (17)$$

При  $s > S_0$  происходит пластическая деформация дисков на границах контакта с заполнением полости между ними. В предельном случае полного закрытия полости диск превращается в правильную шестигранную призму и покрытие без внутренних пор имеет максимальную плотность  $\rho$ . Сжатие  $S^*$  сферических частиц, соответствующее максимальной плотности покрытия, определяется условием сохранения объема

$$S^* = 1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}R^2}, \quad R \geq 1. \quad (18)$$

Увеличение плотности покрытия от  $\rho_0 = 0.9067\rho$  до плотности материала частиц  $\rho$  происходит при малом увеличении сжатия сферы  $\Delta s = S^* - S_0 = 0.0621/R^2$ . На этом участке происходит пластическое формоизменение диска в шестигранную призму с увеличением контактного давления по сравнению с формулой (5) вследствие увеличения давления на боковых гранях контакта при уменьшении свободной границы при заполнении полости на рис. 3. Но при малом значении  $\Delta s$  работа пластической деформации на этом участке возрастает незначительно и не приводит к существенному росту начальной кинетической энергии частиц. Это согласуется с экспериментальными данными о высокой плотности покрытия при ХГН [3].

**Численные результаты.** . Выполнены расчеты процессов ХГН для частиц алюминиевого порошка при  $\sigma_Y = 300$  МПа для скоростей  $V_0$  от 600 м/с до 1000 м/с, при которых получено прочное соединение деформированных частиц с напыляемой поверхностью [3]. Этому диапазону соответствует изменение параметра  $C$  в интервале от 4.5 до 1.5.

На рис. 4 показаны зависимости скорости и перемещения  $V(t)$ ,  $s(t)$  деформируемой частицы, полученные при  $C = 2$ . Увеличение радиуса контакта  $a$ , радиуса диска  $R$  и силы  $P(s)$  приводит к плавному снижению скорости до нуля за время контакта  $t_c = 0.93$  при  $s = 0.539$ . Остановка деформируемой сферы до ее контакта со следующей сферой происходит при расстоянии между центрами сфер  $L_0 > 2.391$ . На начальном участке кривой  $V(t)$  ускорение мало. В средней части времени контакта скорость снижается вдвое и силы инерции малы по сравнению с сопротивлением пластическому деформированию, пропорциональным динамическому напряжению текучести  $\sigma_Y$ . Размерные значения  $s$ ,  $L_0$ ,  $D$ ,  $H$  определяются умножением на радиус сферы  $R_s$ , скорости  $V$  – на начальную скорость  $V_0$ , и времени  $t_c$  – на отношение радиуса сферы  $R_s$  к скорости  $V_0$ .

В табл. 4 приведены результаты расчета пластического деформирования сферических частиц в процессе ХГН при изменении параметра  $C$  от 4.5 (низкие скорости  $V_0$  и высокие значения  $\sigma_Y$ ) до 1.5 (высокие скорости  $V_0$  и низкие значения  $\sigma_Y$ ). При  $C > 3.5$  сфера деформируется в диск с диаметром близким к диаметру недеформированной сферы при уменьшении контактного давления и времени контакта до остановки сферы. При  $C > 4$  пластическое сжатие  $s$  становится меньше  $1/3$  и может

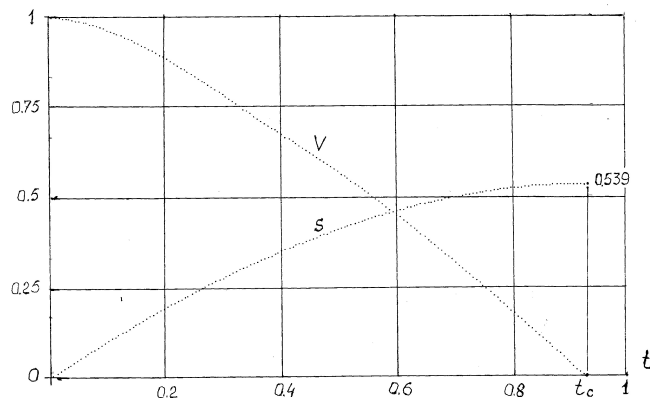


Рис. 4. Зависимости скорости  $V$  и сжатия сферы  $s$  от времени  $t$  при  $C = 2$ .

$C$	$s$	$D$	$H$	$q$	$t_c$	$L_0$
1.5	0.638	2.713	0.724	1.499	1.038	2.400
2.0	0.539	2.405	0.922	1.348	0.930	2.391
2.5	0.464	2.231	1.072	1.278	0.810	2.346
3.0	0.408	2.122	1.185	1.239	0.714	2.306
3.5	0.364	2.047	1.272	1.215	0.634	2.272
4.0	0.329	1.994	1.341	1.198	0.558	2.229
4.5	0.309	1.958	1.391	1.188	0.516	2.211

Таблица 4. Деформирование сферы в зависимости от  $C$

быть недостаточным для соединения деформированных частиц с напыляемой поверхностью [3].

При значениях  $C < 3$  пластическое сжатие частиц увеличивается с увеличением контактного давления и времени контакта. Это приводит к надежному соединению деформируемых частиц с напыляемой поверхностью. Расстояние  $L_0$  между соседними частицами, при котором движение и деформация первой частицы заканчивается до ее контакта со второй частицей, изменяется от 2.4 до 2.2 с малым зазором между частицами. При обычной концентрации частиц в потоке газа расстояние между ними больше радиуса частиц [3]. При этом движение и деформирование частиц при ХГН описывается уравнениями (9) – (13) для  $N$  частиц образующих конечную толщину покрытия (15).

**Заключение.** Представлена модель пластического деформирования сферических частиц при холодном газодинамическом напылении покрытий поверхности, основанная на решении задачи о сжатии жесткопластической сферы на поверхности покрытия и уравнения движения сферы по теореме об изменении кинетической энергии с использованием концепции динамического напряжения текучести в контактной пластической области.

Увеличение пластической области и сопротивления пластическому деформированию приводят к плавному снижению скорости сферы до нуля. При сжатии сферической частицы относительно контактной границы более  $1/3$  ее радиуса образуется структура покрытия в виде тонких дисков с минимальной плотностью 91% от плотности частицы. При дальнейшем увеличении сжатия на 6% диски деформируются в тонкие шестигранные призмы с увеличением плотности покрытия до плотности частиц.

Пластическое сжатие сферических частиц зависит от безразмерного параметра уравнения движения сферы, определяемого начальной скоростью, напряжением текучести и плотностью частицы. Статистические оценки количества частиц и плотности их распределения на напыляемой поверхности позволяют определять толщину и плотность покрытия в зависимости от конструкции сопла и технологических параметров напыления.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алхимов А.П., Косарев В.Ф., Папырин А.М. Метод “холодного” газодинамического напыления // ДАН СССР. 1990. Т. 315. с. 1062–1065.
- [2] Алхимов А.П., Папырин А.М. Способ получения алюминиевых покрытий. Патент РФ. 1618782. Бюл. № 1. 1991.
- [3] Холодное газодинамическое напыление. Теория и практика / А.П. Алхимов, С.В. Клинков, В.Ф. Косарев [и др.]. М.: Физматлит, 2010. 536 с.
- [4] Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
- [5] Беляков Л.В., Витман Ф.Ф., Златин Н.А. О процессе соударения деформируемых тел и его моделировании // Журнал технической физики. № 8. с. 990–995.
- [6] Ишлинский А.Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля // ПММ. 1944. Т. 8, № 3. с. 201–224.
- [7] Непершин Р.И. Сдавливание жесткопластической сферы плоскими штампами // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 1(35). с. 26–38.
- [8] Nepershin R. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU STANKIN. 310 p.
- [9] Shield R. On the plastic flow of metals under condition of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. London. 1955. Vol. 233, no. 1193. p. 267–287.
- [10] Eason G., Shield R. The plastic indentation of a semi-infinite solid by perfectly rough circular punch // Z. Angew. Math. Phys. 1960. Vol. 11, no. 1. p. 33–43.

*R. I. Nepershin*

## ON THE SPHERICAL PARTICLES PLASTIC DEFORMATION DURING COLD GAS-DYNAMICS SPRAY

*Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia*

**Abstract.** Simulation of the spherical particles plastic deformation during cold gas-dynamics spray on the rigid surface is presented. The ideal plasticity model is assumed for simulation of the particles contact plastic deformation on the rigid boundary and between the particles moving orthogonal to the spray surface. High supersonic velocities of the particles induce plastic deformation of the sphere to a thin disc, and the surface coating is generated from a number of deformed particles.

**Keywords:** cold gas-dynamics spray, plastic deformation, spherical particle, ideal plasticity, slip lines, kinetic energy, particle velocity, coating thickness, coating density.

## REFERENCES

- [1] Alkhimov A., Kosarev V., Papyrin A. Method of “cold” gas-dynamics spray // DAN SSSR. 1990. Vol. 315. p. 1062–1065. (in Russian).
- [2] Alkhimov A., Papyrin A. Method of aluminum coating manufacture. Patent RF. 1618782. Byul. № 1. 1991.
- [3] Cold gas-dynamics spray. Theory and practice / A. Alkhimov, S. Klinkov, V. Kosarev et al. M.: Fizmatlit, 2010. 536 p. (in Russian).
- [4] Ishlinskiy A., Ivlev D. Mathematical Theory of Plasticity. M.: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian).
- [5] Belyakov L., Vitman F., Zlatin N. On the collision process of deformed solids and its simulation // Zhurnal tekhnicheskoy fiziki. no. 8. p. 990–995. (in Russian).
- [6] Ishlinskiy A. Axisymmetric problem of plasticity and Brinell’s test // PMM. 1944. Vol. 8, no. 3. p. 201–224. (in Russian).
- [7] Nepershin R. Compression of the rigid-plastic sphere by the flat dies // Vestnik CHGPU im. I.YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel’nogo sostoyaniya. 2018. no. 1(35). p. 26–38. (in Russian).
- [8] Nepershin R. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU STANKIN. 310 p.
- [9] Shield R. On the plastic flow of metals under condition of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. London. 1955. Vol. 233, no. 1193. p. 267–287.
- [10] Eason G., Shield R. The plastic indentation of a semi-infinite solid by perfectly rough circular punch // Z. Angew. Math. Phys. 1960. Vol. 11, no. 1. p. 33–43.



Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин

## ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ТОРОИДАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

*Владивостокский государственный университет экономики и сервиса,  
Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**Аннотация.** Представленная статья посвящена проблеме термоупругопластического деформирования полого тора. Основные уравнения теории температурных напряжений представлены в тороидальной системе координат. Рассчитаны и графически проанализированы остаточные напряжения в полом упругопластическом торе, подверженном неравномерному радиальному нагреву. Приближенное аналитическое решение указанной задачи получено в рамках подхода обобщенного плоского напряженного состояния. Поля напряжений и смещений вычислены в областях термоупругого деформирования и пластического течения. Обсуждаются корректность и применимость полученных решений для тора произвольного размера в условиях осесимметричного теплового воздействия.

**Ключевые слова:** термоупругость, термопластичность, температурное напряжение, предел текучести, остаточное напряжение, остаточная деформация, тор, тороидальные координаты

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.006

УДК: 539.374

### Введение

Расчет полей температурных напряжений в процессах изготовления и эксплуатации изделий является одной из важных задач современной технологической практики. Процессы формирования объектов аддитивного производства зачастую протекают

---

Поступила 10.04.2019

© Дац Е.П., Мурашкин Е.В., 2019

*Дац Евгений Павлович*

**e-mail:** [dats@dvo.ru](mailto:dats@dvo.ru), кандидат физико-математических наук, доцент, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия,

*Мурашкин Евгений Валерьевич*

**e-mail:** [murashkin@ipmnet.ru](mailto:murashkin@ipmnet.ru), кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания министерства науки и высшего образования РФ (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №17-01-00712, 19-51-60001, 18-51-05012).

при сильно меняющихся температурных полях. К таким процессам относятся: лазерная стереолитография [1], селективное лазерное спекание [2], электронно-лучевая плавка [3], моделирование методом наплавления [4], метод многоструйного моделирования [5], изготовление объектов с использованием ламинирования [6], 3D-печать [7], компьютерная осевая литография, экструзия материала. Изменение градиентов температурного поля приводит к образованию концентраторов остаточных напряжений и развитию зон необратимого деформирования. Моделирование подобных технологических процессов логично проводить в рамках теории температурных напряжений. Наиболее полное изложение этой теории проделано в монографии [8]. В условиях температурного воздействия, проявляющего свойства осевой симметрии, были получены аналитические решения ряда краевых задач термоупругопластического деформирования. Так, в работах [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21] рассматривались решения краевых задач расчета полей остаточных деформаций и напряжений в условиях центральной (сферической) симметрии для упругопластического материала, определены особенности решения при нестационарном тепловом градиенте. Работы [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 35, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49] посвящены проблемам построения решений для напряжений и перемещений в упругопластическом материале в условиях осевой симметрии в цилиндрических координатах. Были выявлены особенности расчета напряженного состояния в случае плоского напряженного и плоского деформированного состояния материала с учетом зависимости предела текучести от температуры.

Настоящее исследование посвящено расчету параметров напряженно-деформированного состояния материала в условиях тороидальной симметрии. Расчеты удобно будет проводить в тороидальных координатах. Тороидальная система координат находит широкое применение в моделировании процессов в объектах, геометрия которых может быть описана в данной системе наиболее простым образом. Тороидальная форма конструкций часто используется при проектировании объектов в областях магнитогидродинамики, управляемом термоядерном синтезе, магнитостатике и др. Учет температурного поля в таких конструкциях может оказаться существенным при оценке прочностных характеристик при учете температурных деформаций.

### 1. Дифференциальные уравнения теории температурных напряжений в условиях тороидальной симметрии

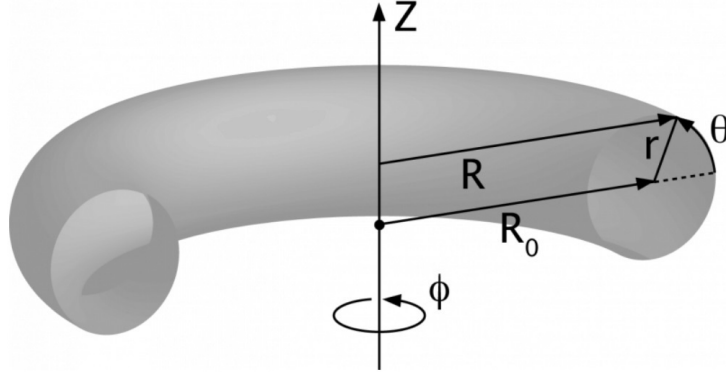
Переход от декартовых координат  $(X, Y, Z)$  к тороидальным  $(r, \theta, \phi)$  (Рис. ) можно провести согласно преобразованию:

$$\begin{aligned} X &= (R_0 + r \sin \theta) \cos \phi, \\ Y &= (R_0 + r \sin \theta) \sin \phi, \\ Z &= R_0 \cos \theta, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $R_0$  – главный тороидальный радиус,  $r \in [r_1, r_2]$ ,  $r_1$  и  $r_2$  внутренний и внешний радиусы полого тора.

Примем, что центр тора совпадает с началом системы координат. При этом уравнение образующей оси тора определяется равенством  $r = 0$ .

Воспользуемся моделью малых упругопластических деформаций Прандля–Рейса, обобщенной на случай учета температурных эффектов. Тензор полных деформаций

Рис. 1. Тороидальные координаты  $(r, \theta, \phi)$ ,  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ .

полагается состоящим из термоупругой  $e_{ij}$  и пластической  $p_{ij}$  частей аддитивной зависимости

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij}. \quad (2)$$

Компоненты тензора малых деформаций в тороидальных координатах определяются через компоненты  $u_i$  вектора перемещений в виде:

$$\begin{aligned} d_{rr} &= u_{r,r}, \quad d_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_{r,\theta}}{r} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \\ d_{\theta\theta} &= \frac{u_{\theta,\theta}}{r} + \frac{u_r}{r}, \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta}{\Omega} + \frac{u_{\varphi,\varphi}}{\Omega}, \\ d_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{u_{r,\varphi}}{\Omega} + u_{\varphi,r} - \frac{u_\varphi \sin \theta}{\Omega} \right), \quad d_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_{\theta,\varphi}}{\Omega} + u_{\varphi,\theta} - \frac{u_\varphi \cos \theta}{\Omega} \right), \\ \Omega &= R_0 + r \sin \theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее индексом после запятой обозначается частное дифференцирование по соответствующей пространственной координате.

Уравнения равновесия в условиях тороидальной симметрии можно записать в форме:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{r\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\sin \theta}{\Omega} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} + \text{ctg} \theta (\sigma_{r\theta})) &= 0 \\ \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\theta\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\sin \theta}{\Omega} (\sigma_{r\theta} + \text{ctg} \theta (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})) &= 0 \\ \sigma_{r\varphi,r} + \frac{\sigma_{\theta\varphi,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\varphi\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{2 \sin \theta}{\Omega} (\sigma_{r\varphi} + \text{ctg} \theta (\sigma_{\theta\varphi})) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

В областях термоупругого деформирования исследуемого материала деформации и напряжения связаны законом Дюамеля–Неймана [8]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} (e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{\phi\phi}) - \alpha \delta_{ij} (3\lambda + 2\mu) (T - T_0) + 2\mu e_{ij}, \quad (5)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $\lambda$ ,  $\mu$  — параметры Ламе (константы материала),  $\alpha$  — коэффициент линейного теплового расширения,  $(T - T_0)$  — разница между текущей и начальной температурой материала.

Расчет напряженно-деформированного состояния материала при медленном изменении теплового воздействия осуществляется в рамках квазистатической теории температурных напряжений, когда выражения для полей напряжений и перемещений зависят от известного температурного распределения. Для определения поля температуры воспользуемся уравнением теплопроводности, записанным в тороидальных координатах:

$$T_{,rr} + \frac{(R_0 + 2r \sin \theta)T_{,r}}{r(R_0 + r \sin \theta)} + \frac{T_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{\cos \theta T_{,\theta}}{r(R_0 + r \sin \theta)} + \frac{T_{,\phi\phi}}{(R_0 + r \sin \theta)^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (6)$$

При известных значениях функций  $p_{ij}$  и заданных граничных условиях система соотношений (3)–(6) полностью определяет напряженно-деформированное состояние материала.

**2. Постановка краевой задачи.** Рассмотрим полый тор с размерами  $R_0$  и  $r_1 < r < r_2$ . Будем полагать, что материал подвержен влиянию симметричного относительно декартовой оси  $Z$  теплового воздействия. В таком случае напряженно-деформированное состояние не зависит от окружной координаты  $\phi$  и справедливы соотношения:

$$u_\phi = 0, \quad d_{r\phi} = d_{\theta\phi} = 0, \quad \sigma_{r\phi} = \sigma_{\theta\phi} = 0 \quad (7)$$

Пусть изменение температурного поля от начального значения  $T_0$  (при котором отсутствуют деформации и напряжения) до некоторого  $T_k$  является равномерным  $T_{,r} = 0$ , а на поверхностях тора выполняются условия свободного теплового расширения

$$\sigma_{rr}(r_1, \theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r_1, \theta) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_2, \theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r_2, \theta) = 0. \quad (8)$$

В этом случае в изотропном термоупругом материале сохраняются начальные значения тензора напряжений, вместе с тем диагональные компоненты тензора деформаций имеют равномерное распределение

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta) = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = 0, \quad \sigma_{\phi\phi}(r, \theta) = 0, \quad d_{r\theta}(r, \theta) = 0, \\ d_{rr}(r, \theta) = \alpha(T_k - T_0), \quad d_{\theta\theta}(r, \theta) = \alpha(T_k - T_0), \quad d_{\phi\phi}(r, \theta) = \alpha(T_k - T_0). \end{aligned} \quad (9)$$

Из уравнений равновесия (4) с учетом соотношений (9), можно вычислить компоненты вектора перемещений:

$$u_r(r, \theta) = \alpha(T_k - T_0)(r + R_0 \sin \theta), \quad u_\theta(r, \theta) = \alpha(T_k - T_0)R_0 \cos \theta. \quad (10)$$

Из (10) следует, что даже в простейшей постановке, задача об определении перемещений в торе является двумерной. При неравномерном температурном воздействии двумерные численные решения для деформаций и напряжений удастся описать приближенными одномерными зависимостями, используя общепринятые гипотезы о плоских напряженно-деформированных состояниях материала.

**3. Термоупругое равновесие полого тора.** Исследуем условия формирования напряжений при термоупругом равновесии материала ( $d_{ij} = e_{ij}$ ). Рассмотрим решение стационарного уравнения теплопроводности (6) с граничными условиями:

$$T(r_1, \theta) = T_k, \quad T(r_2, \theta) = T_0. \quad (11)$$

Численный анализ показывает, что получаемое распределение температурного поля существенно зависит от геометрии тора и при малых значениях параметра  $\epsilon = r_2/R_0$  может быть описано функцией, зависящей только от радиальной координаты. При стремлении  $\epsilon = r_2/R_0$  к нулю, тороидальная симметрия переходит в цилиндрическую,

что позволяет получать одномерные аналитические решения. При таком подходе важным является определение допустимых конечных значений параметра  $\epsilon$ , при которых цилиндрические решения будут удовлетворительно описывать двумерные численные тороидальные решения при заданной геометрии. Стационарное уравнение теплопроводности при  $\epsilon = 0$  имеет простой вид:  $T_{,r} + rT_{,rr} = 0$ . Максимальное отклонение аналитического решения данного уравнения от численного решения уравнения (6) составляет менее 2% при  $\epsilon = 0.1$  и  $r_1/r_2 = 0.4$ . Следовательно с достаточно высокой степенью точности температурное распределение при  $\epsilon < 0.1$  можно считать одномерным.

Определим напряженно-деформированное состояние материала в условиях термоупругого равновесия при  $\epsilon = 0$ . Система уравнений равновесия (4) примет вид:

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0. \quad (12)$$

Компоненты вектора перемещений представим в следующей форме:

$$u_r(r, \theta) = F(r) + R_0 C \sin \theta, \quad u_\theta(r, \theta) = R_0 C \cos \theta. \quad (13)$$

где  $F(r)$  — неизвестная функция радиуса,  $C$  — неизвестная константа. Используя (13), запишем соотношения для деформаций при  $\epsilon = 0$ :

$$d_{rr} = F_{,r} \quad d_{\phi\phi} = C \quad d_{\theta\theta} = \frac{F}{r} \quad d_{r\theta} = 0 \quad (14)$$

Далее, подставив выражения (14) в систему уравнений равновесия (12), получим уравнение для определения функции  $F(r)$ :

$$F_{,rr} + (r^{-1}F)_{,r} = \alpha\gamma T_{,r} \quad \gamma = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)}. \quad (15)$$

Решением (15) является функция

$$F(r) = \frac{\gamma}{r} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho d\rho + Ar + \frac{B}{r}, \quad \Delta(r) = \alpha(T(r) - T_0). \quad (16)$$

где  $A, B$  — константы интегрирования. Функция (17) соответствует общему решению для перемещений в цилиндре в условиях плоского деформированного состояния. Решения для напряжений (5) с учетом (17) примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda C + 2A(\lambda + \mu) - \frac{2\mu B}{r^2} - \frac{2\mu\gamma}{r^2} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho d\rho, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda C + 2A(\lambda + \mu) - \frac{2\mu B}{r^2} - \frac{2\mu\gamma}{r^2} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho d\rho, \\ \sigma_{\phi\phi} &= 2\lambda A + (\lambda + 2\mu)C - 2\mu\gamma\Delta(r). \end{aligned} \quad (17)$$

Константы  $A, B$  находятся из условий свободного теплового расширения (8):

$$A = \frac{1}{(\lambda + \mu)} \left( \frac{\mu\gamma}{(r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho d\rho - \frac{\lambda C}{2} \right), \quad B = \frac{\gamma r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho d\rho. \quad (18)$$

Константа  $C$ , определяется из условия:

$$\int_{r_1}^{r_2} 2\pi \sigma_{\phi\phi}(\rho) \rho d\rho = 0 \quad (19)$$

Уравнение (19) встречается в задачах расчета напряжений в цилиндрах в условиях обобщенного плоского деформированного состояния, при этом вместо напряжения  $\sigma_{\phi\phi}$  используется напряжение  $\sigma_{zz}$ . Из (19) получим:

$$C = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \Delta(\rho) \rho d\rho \quad (20)$$

При термоупругом деформировании выражение (20) соответствует величине среднего теплового расширения, распределенной по объему тора. Подстановка найденных значений (18), (20) в выражения 17 приводит к совпадению окружных напряжений на поверхностях, что согласуется с численным моделированием напряженно-деформированного состояния тора при малых значениях параметра  $\epsilon < 0.1$ .

$$\sigma_{\phi\phi}(r_1) = \sigma_{\theta\theta}(r_1), \quad \sigma_{\phi\phi}(r_2) = \sigma_{\theta\theta}(r_2). \quad (21)$$

На графике представлено распределение напряжений при термоупругом деформировании материала тора.

**4. Необратимое деформирование тора.** Процесс расчета термоупругого деформирования при увеличении значения температуры  $T_k$  ограничен возможностью выхода напряженного состояния на поверхность текучести (призма Треска), заданную условием:

$$\max |\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|, |\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}|, |\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{\theta\theta}| - 2k(T) = 0 \quad (22)$$

где  $k = k_0(1 - \beta\Delta)$  — предел текучести материала,  $\beta$  — константа материала, задающая степень падения предела текучести при росте температуры.

Пластическое течение возникает на внутренней поверхности тора при выполнении условия (22) в форме:

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2k, \quad \sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} = 2k. \quad (23)$$

По мере роста параметра  $T_k$  граница зоны пластичности  $b$  движется в направлении внешней поверхности. Формулы для перемещений и напряжений в области упругого деформирования  $b < r < r_2$  остаются справедливыми с точностью до новых констант интегрирования  $A, B, C$ .

Зона пластичности состоит из двух частей: область полной пластичности  $r_1 < r < a$  (ребро призмы Треска), в которой выполняется условие (23), и область пластичности  $a < r < b$  (грань призмы Треска), в которой выполняется условие пластичности:

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} = 2k. \quad (24)$$

В области  $r_1 < r < a$  задача является статически определимой, и напряжения являются решениями системы уравнений равновесия (4) с учетом условий (8), (23):

$$\sigma_{rr}^* = -\frac{2}{r} \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho, \quad \sigma_{\theta\theta}^* = \sigma_{\phi\phi}^* - \frac{2}{r} \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - 2k. \quad (25)$$

Перемещения в данной области вновь представим в виде суммы функций (13):

$$u_r(r, \theta) = F^*(r) + R_0 C \sin \theta, \quad u_\theta(r, \theta) = R_0 C \cos \theta. \quad (26)$$

Отметим, что константа  $C$  требует своего определения и при пластическом течении.

Так как напряжения в пластической зоне являются функциями радиуса, то границы пластических течений распространяются в радиальном направлении и их положение не зависит от угловой координаты. Следовательно, представления перемещений

в виде (26) обеспечивают их непрерывность при определенном выборе констант интегрирования, входящих в функцию  $F^*(r)$ . Уравнение для поиска данной функции найдем из условия пластической несжимаемости

$$p_{rr} + p_{\theta\theta} + p_{\phi\phi} = 0 \quad (27)$$

Выразив упругие деформации через напряжения (25), и просуммировав полученный результат с использованием условия (27), получим:

$$C + F_{,r}^* + \frac{F^*}{r} + \frac{2}{(3\lambda + 2\mu)} \left( 3 \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + 2k(r) \right) - 3\Delta(r) = 0. \quad (28)$$

Проинтегрировав уравнение (28) найдем:

$$F^*(r) = \frac{3}{r} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho d\rho - \frac{1}{(3\lambda + 2\mu)} \left( r \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{1}{r} \int_{r_1}^r k(\rho) \rho d\rho \right) + Cr + \frac{D}{r}, \quad (29)$$

где  $D$  – константа интегрирования.

Далее рассмотрим решения в области  $a < r < b$ . Согласно ассоциированному закону пластического течения, выполнение условия (24) приводит к следующим соотношениям для компонент пластических деформаций:

$$p_{rr} + p_{\phi\phi} = 0, \quad p_{\theta\theta} = 0. \quad (30)$$

Перемещения в данной области представим в виде

$$u_r^{**}(r, \theta) = F^{**}(r) + R_0 C \sin \theta, \quad u_\theta^{**}(r, \theta) = R_0 C \cos \theta. \quad (31)$$

Подстановка функций (31) в уравнения равновесия с учетом равенств (24) и (30) приводит к дифференциальному уравнению:

$$F_{,rr}^{**} + \frac{F_{,r}^{**}}{r} - \frac{\eta^2 F^{**}}{r^2} - \psi \Delta_{,r} + \frac{\mu C + k + r k_{,r}}{(\lambda + \mu)r} = 0, \quad \eta = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}}, \quad \psi = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}. \quad (32)$$

Проинтегрировав уравнение (32), получим:

$$F^{**}(r) = \frac{\psi}{2\eta} \left( \frac{(\eta + 1)}{r^\eta} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho^\eta d\rho + (\eta - 1) r^\eta \int_{r_1}^r \frac{\Delta(\rho)}{\rho^\eta} d\rho \right) + rC - \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \left( \frac{1}{r^\eta} \int_{r_1}^r k(\rho) \rho^\eta d\rho + r^\eta \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho^\eta} d\rho \right) + Mr^\eta + \frac{N}{r^\eta}, \quad (33)$$

где  $M, N$  – константы интегрирования.

Из условия пластичности (24) с учетом функции (33) следует решение для радиальной пластической деформации:

$$p_{rr}^{**} = \frac{1}{2} \left( F_{,r}^{**} - C - \frac{k}{\mu} \right). \quad (34)$$

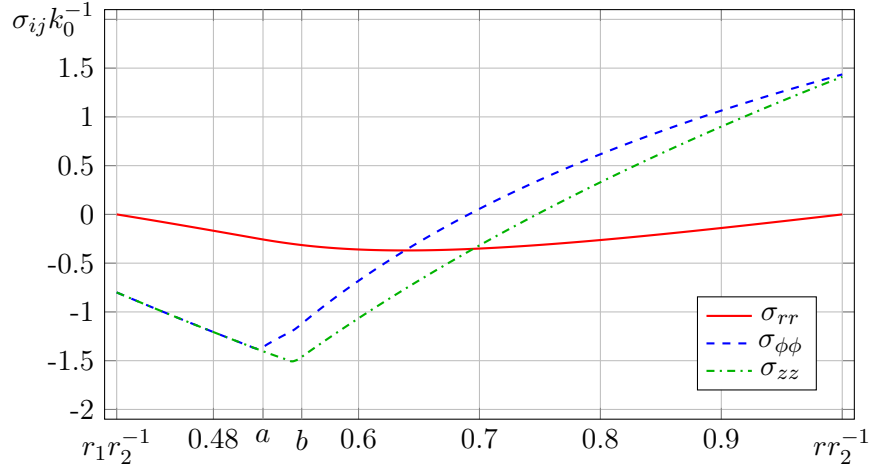


Рис. 2. Температурные напряжения при развитии пластического течения на внутренней поверхности,  $r_1 r_2^{-1} = 0.4$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $a r_2^{-1} = 0.521$ ,  $b r_2^{-1} = 0.553$ .

Функции напряжений в области ( $a < r < b$ ) имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{**} &= \frac{\psi}{2\eta} \left( (\eta - 1) \nu_1 r^{(\eta-1)} \int_{r_1}^r \frac{\Delta(\rho)}{\rho^\eta} d\rho - \frac{(\eta + 1) \nu_2}{r^{(\eta+1)}} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho^\eta d\rho \right) + \nu_1 r^{(\eta-1)} M - \\ &- \frac{1}{(\lambda + \mu)} \left( \nu_1 r^{\eta-1} \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho^\eta} d\rho - \frac{\nu_2}{r^{\eta+1}} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho^\eta d\rho \right) - \frac{\nu_2 N}{r^{(\eta+1)}} + (3\lambda + 2\mu) C, \\ \sigma_{\theta\theta}^{**} &= \frac{\psi}{2\eta} \left( (\eta - 1) \nu_1 r^{(\eta-1)} \int_{r_1}^r \frac{\Delta(\rho)}{\rho^\eta} d\rho + \frac{(\eta + 1) \nu_2}{r^{(\eta+1)}} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho^\eta d\rho \right) - \mu \psi \Delta(r) - \\ &- \frac{\lambda k(r)}{(\lambda + \mu)} - \frac{1}{(\lambda + \mu)} \left( \nu_1 r^{\eta-1} \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho^\eta} d\rho + \frac{\nu_2}{r^{\eta+1}} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho^\eta d\rho \right) + \\ &+ (3\lambda + 2\mu) C + \nu_1 r^{(\eta-1)} M + \frac{\nu_2 N}{r^{(\eta+1)}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Система уравнений для поиска констант  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $M$ ,  $N$  состоит из условий (8), (19) и условий непрерывности радиальных напряжений и перемещений на границах  $a$ ,  $b$ .

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^a \sigma_{\phi\phi}^*(\rho) \rho d\rho + \int_a^b \sigma_{\phi\phi}^{**}(\rho) \rho d\rho + \int_b^{r_2} \sigma_{\phi\phi}(\rho) \rho d\rho &= 0, \quad \sigma_{rr}(r_2) = 0, \\ u_r^*(a) = u_r^{**}(a), \quad \sigma_{rr}^*(a) = \sigma_{rr}^{**}(a), \quad u_r^*(b) = u_r(b), \quad \sigma_{rr}^{**}(b) &= \sigma_{rr}(b). \end{aligned} \quad (36)$$

Выражения для констант не приводятся в силу их громоздкости.

Вычисление границ пластического течения с учетом известных констант интегрирования осуществляется при помощи численного решения системы уравнений, задающих непрерывность окружных напряжений на границах [24, 25]:

$$\sigma_{\theta\theta}^*(a) = \sigma_{\theta\theta}^{**}(a), \quad \sigma_{\theta\theta}^{**}(b) = \sigma_{\theta\theta}(b). \quad (37)$$



На рис. 2 представлен пример распределения напряжений в случае развития пластического течения на внутренней поверхности тора.

Отметим, что по мере увеличения температуры внутренней поверхности  $T_k$  на внешней поверхности так же возможно появление и развитие второй зоны пластического течения. Общие решения в данной зоне совпадают с полученными ранее с точностью до противоположного знака перед функцией предела текучести.

### 5. Заключение

Решения для напряжений и перемещений, полученные в условиях термоупругого равновесия сравнивались с численными результатами для различных значений параметра  $\epsilon$ . Было установлено, что при значениях  $\epsilon < 0.1$  максимальное отклонение аналитических решений для напряжений составляет менее 4% от численных расчетов. При этом решения для перемещений отличаются менее чем на 1% от численных аналогов. Таким образом, можно сделать вывод о том, полученные аналитические зависимости с высокой степенью точности можно использовать для расчета напряженно-деформированного состояния термоупругого материала при конечных значениях параметра  $\epsilon$ . Очевидно, что данные решения являются полезными при моделировании процесса пластического течения, так как позволяют получать наиболее простым способом распределения напряжений и перемещений в зонах течения и обеспечивают непрерывность исследуемых функций на упругопластических границах. Дальнейшее исследование напряженно-деформированного состояния в условиях тороидальной симметрии связано с построением приближенных решений, учитывающих нестационарность температурного градиента и возможность возникновения повторного пластического течения при разгрузке.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Production of materials with spatially-controlled cross-link density via vat photopolymerization / Gregory I Peterson, Johanna J Schwartz, Di Zhang [и др.] // ACS applied materials & interfaces. 2016. Т. 8, № 42. С. 29037–29043.
- [2] Liu Weiping, DuPont JN. Fabrication of functionally graded TiC/Ti composites by laser engineered net shaping // Scripta Materialia. 2003. Т. 48, № 9. С. 1337–1342.
- [3] Metal fabrication by additive manufacturing using laser and electron beam melting technologies / Lawrence E Murr, Sara M Gaytan, Diana A Ramirez [и др.] // Journal of Materials Science & Technology. 2012. Т. 28, № 1. С. 1–14.
- [4] Anisotropic material properties of fused deposition modeling ABS / Sung-Hoon Ahn, Michael Montero, Dan Odell [и др.] // Rapid prototyping journal. 2002. Т. 8, № 4. С. 248–257.
- [5] Material jetting additive manufacturing: An experimental study using designed metrological benchmarks / Yee Ling Yap, Chengcheng Wang, Swee Leong Sing [и др.] // Precision engineering. 2017. Т. 50. С. 275–285.
- [6] Mueller Bernhard, Kochan Detlef. Laminated object manufacturing for rapid tooling and patternmaking in foundry industry // Computers in Industry. 1999. Т. 39, № 1. С. 47–53.
- [7] Lipson Hod, Kurman Melba. Fabricated: The new world of 3D printing. John Wiley & Sons, 2013.
- [8] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. Москва: Мир, 1964.
- [9] Lippmann H. The Effect of a Temperature Cycle on the Stress Distribution in a Shrink Fit // International Journal of Plasticity. 1992. Vol. 8. P. 567–582.
- [10] Ломакин В. А. Одномерная задача о температурных напряжениях в упругопластической среде // Инженерный сборник. 1959. Т. 25. С. 9–11.
- [11] Raniecki B. Stresses in an Elastic-Plastic Hollow Sphere Subjected to a Variable Temperature Field // Rozpr. Inz. 1966. Vol. 14. p. 479.

- [12] Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Велмуруган Р. Вычисление необратимых деформаций в полом упруго-пластическом шаре в условиях нестационарного температурного воздействия // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3. С. 168–175.
- [13] Дац Е. П., Мокрин С. Н., Мурашкин Е. В. Расчет накопленной остаточной деформации в процессе «нагрева-охлаждения» упруго-пластического шара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4. С. 250–264.
- [14] Дац Е. П., Мокрин С. Н. О повторном нагреве сплошного упруго-пластического шара // Сборник тезисов докладов XXXVI Дальневосточной математической школы-семинара имени академика Е. В. Золотова. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2012. С. 106–109.
- [15] Бурени А. А., Дац Е. П., Мокрин С. Н. Формирование поля остаточных напряжений в упруго-пластических телах за счет локального теплового воздействия // Международная конференция «Современные проблемы механики», посвященная 100-летию А. А. Галина. Тезисы докладов. Москва: ИПМех РАН, 2012. с. 20.
- [16] Дац Е. П. Возникновение и развитие зон необратимого деформирования в процессе нагревания и охлаждения // Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении. Сборник статей. №4. Комсомольск-на-Амуре: ИМиМ ДВО РАН, 2013. С. 16–26.
- [17] Burenin A., Murashkin E., Dats E. Residual stresses in AM fabricated ball during a heating process // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. p. 070008.
- [18] Murashkin E., Dats E. Thermal Residual Stresses Computing in Elastic-Plastic Ball with Rigid Inclusion under Heat Treatments // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2018. Vol. 2235. P. 811–814.
- [19] Murashkin E., Dats E. Applications of Multi-Physics Modelling for Simulations of Thermo-Elastic-Plastic Materials // Fourth International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry. Corfu Island, Greece, 24 - 27 Aug, 2017: Conference Publishing Services of IEEE, 2018. P. 76–80.
- [20] Murashkin E., Dats E. Thermoelastoplastic Deformation of a Multilayer Ball // Mechanics of Solids. 2017. Vol. 52, no. 5. P. 30–36.
- [21] Murashkin E., Dats E., Klindukhov V. Numerical Analysis of the Elastic-Plastic Boundaries in the Thermal Stresses Theory Frameworks // Journal of Physics: Conf. Series. 2017. Vol. 937. p. 012060.
- [22] Bland D. Elasto-plastic thick-walled tubes of work-hardening subject to internal and external pressures and to temperature gradients // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1956. Vol. 4. P. 209–229.
- [23] Dats E., Mokrin S., Murashkin E. Calculation of the Residual Stress Field of the Thin Circular Plate under Unsteady Thermal Action // Key Engineering Materials. 2016. Vol. 685. P. 37–41.
- [24] Dats E., Mokrin S., Murashkin E. Calculation of the Residual Stresses of Hollow Cylinder under Unsteady Thermal Action // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2015. Vol. 2218. P. 1043–1046.
- [25] Dats E., Murashkin E. On Unsteady Heat Effect in Center of the Elastic-Plastic Disk // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2016. Vol. 2223. P. 69–72.
- [26] Буренин А. А., Дац Е. П., Мурашкин Е. В. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия // Известия РАН. Механика твердого тела. 2014. № 2. С. 124–131.
- [27] Пластическое течение и разгрузка полого цилиндра в процессе «нагрева-охлаждения» / А. А. Буренин, Е. П. Дац, С.Н. Мокрин [и др.] // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2. С. 22–28.
- [28] Дац Е. П., Ткачева А. В. Численное исследование температурных напряжений, вызванных процессом горячей посадки цилиндрических деталей // Успехи механики сплошных сред. Международная конференция, приуроченная к 75-летию академика В.А. Левина. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2014. С. 481–484.
- [29] Дац Е. П., Мокрин С. Н., Мурашкин Е. В. Расчет остаточных напряжений полого цилиндра из термоупруго-пластического материала // Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам. Алушта: МАИ, 2013. С. 18–22.

- [30] Dats E. P., Murashkin E. V., Gupta N. K. On Yield Criterion Choice in Thermoelastoplastic Problems // *Procedia IUTAM*. 2017. Vol. 23. P. 187–200.
- [31] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On a Multi-Physics Modelling Framework for Thermo-elastic-plastic Materials Processing // *Procedia Manufacturing*. 2017. Vol. 7. P. 427–434.
- [32] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On Heating of Thin Circular Elastic-plastic Plate with the Yield Stress Depending on Temperature // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 173. P. 891–896.
- [33] Murashkin E., Dats E. Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2018. Vol. 991. p. 012060.
- [34] Odeno H. Transient Thermal Stresses in Elasto-Plastic Discs // *Journal Mechanical Engineering Science*. 1969. Vol. 2. P. 384–391.
- [35] Orcan Y. Residual Stresses And Secondary Plastic Flow in a Heat Generating Elastic-Plastic Cylinder With Free Ends // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1995. Vol. 33. P. 1689–1698.
- [36] Murashkin E., Dats E. Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Thermoelasticity // *IAENG International Journal of Applied Mathematics*. 2017. Vol. 47. P. 261 – 264.
- [37] Orcan Y., Gamer U. Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Cylinder // *Acta Mechanica*. 1991. Vol. 90. P. 61–80.
- [38] Gamer U. On the Elastic-Plastic Deformation of a Sphere Subjected to a Spherically Symmetrical temperature Field // *Journal of Thermal Stresses*. 1988. Vol. 13. P. 159–173.
- [39] Eraslan A., Orcan Y. Thermoplastic Response of a Linearly Hardening Cylinder Subjected to Nonuniform Heat Source and Convective Boundary Condition // *Mechanics Based Design of Structures and Machines: An International Journal*. 2004. Vol. 32. P. 133–164.
- [40] Eraslan A., Orcan Y. Thermal Stresses in Elastic-Plastic Tubes With Temperature-Dependent Mechanical And Thermal Properties // *Journal of Thermal Stresses*. 2001. Vol. 24. P. 1097–1113.
- [41] Guven U., Altay O. Elastic-Plastic Solid Disk With Nonuniform Heat Source Subjected to External Pressure // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000. Vol. 42. P. 831–842.
- [42] Guven U., Altay O. Linear Hardening Solid Disk With Rigid Casing Subjected to a Uniform Heat Source // *Mechanics Research Communications*. 1998. Vol. 25. P. 679–684.
- [43] Gulgec M., Orcan Y. On The Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Cylinder Exhibiting Linear Hardening // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (ZAMM)*. 1999. Vol. 79. P. 493–498.
- [44] Eraslan A., Orcan Y. Computation of Transient Thermal Stresses in Elastic-Plastic Tubes: Effect of Coupling And Temperature Dependent Physical Properties // *Journal of Thermal Stresses*. 2002. Vol. 25. P. 559–572.
- [45] Gamer U. Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Disk // *Journal of Thermal Stresses*. 1985. Vol. 8. P. 41–51.
- [46] Mack W. Thermal Assembly of an Elastic-Plastic Hub And a Solid Shaft // *Arch. Appl. Mech*. 1993. Vol. 63. P. 42–50.
- [47] Bengeri M., Mack W. The Influence of the Temperature Dependence of the Yield Stress on the Stress Distribution in a Thermally Assembled Elastic-Plastic Shrink Fit // *Acta Mechanica*. 1994. Vol. 103. P. 243–257.
- [48] Kovacs A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits // *Periodica Polytechnica. Ser.: Mech. Eng*. 1996. Vol. 40. P. 103–112.
- [49] Kovacs A. Hardening Effects on the Stress Distribution in a Shrink Fit under Cyclic Thermal Loading // *Periodica Polytechnica Ser.: Mech. Eng*. 1991. Vol. 35. P. 49–64.

*E. P. Dats, E. V. Murashkin*

## THERMAL STRESSES UNDER TOROIDAL SYMMETRY

*Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok, Russia*

*Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia*

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The present paper is devoted to problem of thermoelastoplastic deformation of hollow torus. The requisite equation of the temperature stresses theory are furnished in toroidal coordinate frame. The residual stresses in a hollow elastoplastic torus subject to non-uniform radial heating are calculated and graphically analyzed. The approximate analytical solution of the noted problem is obtained in the framework of the generalized plane stress state approach. The stress and displacement fields are computed in the thermoelastic and plastic flow domains. The correctness and apliability of the obtained solutions for a torus of arbitrary size under conditions of axisymmetric thermal effect are discussed.

**Keywords:** thermoelasticity, thermoplasticity, thermal stress, yield point, residual stress, residual strain, torus

## REFERENCES

- [1] Production of materials with spatially-controlled cross-link density via vat photopolymerization / Gregory I Peterson, Johanna J Schwartz, Di Zhang [и др.] // ACS applied materials & interfaces. 2016. Т. 8, № 42. С. 29037–29043.
- [2] Liu Weiping, DuPont JN. Fabrication of functionally graded TiC/Ti composites by laser engineered net shaping // Scripta Materialia. 2003. Т. 48, № 9. С. 1337–1342.
- [3] Metal fabrication by additive manufacturing using laser and electron beam melting technologies / Lawrence E Murr, Sara M Gaytan, Diana A Ramirez [и др.] // Journal of Materials Science & Technology. 2012. Т. 28, № 1. С. 1–14.
- [4] Anisotropic material properties of fused deposition modeling ABS / Sung-Hoon Ahn, Michael Montero, Dan Odell [и др.] // Rapid prototyping journal. 2002. Т. 8, № 4. С. 248–257.
- [5] Material jetting additive manufacturing: An experimental study using designed metrological benchmarks / Yee Ling Yap, Chengcheng Wang, Swee Leong Sing [и др.] // Precision engineering. 2017. Т. 50. С. 275–285.
- [6] Mueller Bernhard, Kochan Detlef. Laminated object manufacturing for rapid tooling and patternmaking in foundry industry // Computers in Industry. 1999. Т. 39, № 1. С. 47–53.
- [7] Lipson Hod, Kurman Melba. Fabricated: The new world of 3D printing. John Wiley & Sons, 2013.
- [8] Boley B., Weiner J. Theory of Thermal Stresses. New York: Wiley, 1964.
- [9] Lippmann H. The Effect of a Temperature Cycle on the Stress Distribution in a Shrink Fit // International Journal of Plasticity. 1992. Vol. 8. P. 567–582.
- [10] Lomakin V. A. The one-dimensional problem of temperature stresses in an elastoplastic medium // Engineering Proceeding. 1959. Т. 25. С. 9–11.

---

*Dats Evgeniy Pavlovich*

e-mail: dats@dvo.ru, PhD, Assistant Professor, Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok, Russia,

*Murashkin Evgenii Valerievich*

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, PhD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

- [11] Raniecki B. Stresses in an Elastic-Plastic Hollow Sphere Subjected to a Variable Temperature Field // *Rozpr. Inz.* 1966. Vol. 14. p. 479.
- [12] Dats E.P., Murashkin E.V., Velmurugan R. Calculation of irreversible strains in a hollow elastoplastic ball under conditions of unsteady temperature exposure // *Bulletin of the I. Yakovleva Chuvash State Pedagogical University. Series: Limit States Mechanics.* 2015. № 3. С. 168–175.
- [13] Dats E.P., Mokrin S.N., Murashkin E.V. Calculation of accumulated residual deformation in the process of "heating-cooling" of an elastoplastic ball // *Bulletin of the I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Limit State Mechanics.* 2012. № 4. С. 250–264.
- [14] Dats E.P., Mokrin S.N. On reheating a continuous elastoplastic ball // *Abstracts of XXXVI Far Eastern Mathematical School-Seminar named after Academician E.V. Zolotov. Vladivostok: IAPU FEB RAS,* 2012. С. 106–109.
- [15] Burenin A. A., Dats E. P., Mokrin S. N. The formation of the field of residual stresses in elastoplastic bodies due to local heat exposure // *International Conference "Modern Problems of Mechanics" dedicated to the 100th anniversary of L. A. Galin. Abstracts.* Москва: ИПМех РАН, 2012. с. 20.
- [16] Dats E. P. The emergence and development of zones of irreversible deformation during heating and cooling // *Applied problems of the mechanics of a solid and advanced technologies in mechanical engineering. Digest of articles. №4. Komsomolsk-on-Amur: IMiM FEB RAS,* 2013. С. 16–26.
- [17] Burenin A., Murashkin E., Dats E. Residual stresses in AM fabricated ball during a heating process // *AIP Conference Proceedings.* 2018. Vol. 1959. p. 070008.
- [18] Murashkin E., Dats E. Thermal Residual Stresses Computing in Elastic-Plastic Ball with Rigid Inclusion under Heat Treatments // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science.* 2018. Vol. 2235. P. 811–814.
- [19] Murashkin E., Dats E. Applications of Multi-Physics Modelling for Simulations of Thermo-Elastic-Plastic Materials // *Fourth International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry. Corfu Island, Greece, 24 - 27 Aug, 2017: Conference Publishing Services of IEEE,* 2018. P. 76–80.
- [20] Murashkin E., Dats E. Thermoelastoplastic Deformation of a Multilayer Ball // *Mechanics of Solids.* 2017. Vol. 52, no. 5. P. 30–36.
- [21] Murashkin E., Dats E., Klindukhov V. Numerical Analysis of the Elastic-Plastic Boundaries in the Thermal Stresses Theory Frameworks // *Journal of Physics: Conf. Series.* 2017. Vol. 937. p. 012060.
- [22] Bland D. Elasto-plastic thick-walled tubes of work-hardening subject to internal and external pressures and to temperature gradients // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 1956. Vol. 4. P. 209–229.
- [23] Dats E., Mokrin S., Murashkin E. Calculation of the Residual Stress Field of the Thin Circular Plate under Unsteady Thermal Action // *Key Engineering Materials.* 2016. Vol. 685. P. 37–41.
- [24] Dats E., Mokrin S., Murashkin E. Calculation of the Residual Stresses of Hollow Cylinder under Unsteady Thermal Action // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science.* 2015. Vol. 2218. P. 1043–1046.
- [25] Dats E., Murashkin E. On Unsteady Heat Effect in Center of the Elastic-Plastic Disk // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science.* 2016. Vol. 2223. P. 69–72.
- [26] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the residual stress field under local thermal actions // *Mechanics of Solids.* 2014. Mar. T. 49, № 2. С. 218–224. URL: <https://doi.org/10.3103/S0025654414020113>.
- [27] Plastic flow and unloading of a hollow cylinder during the «heating-cooling» action / A. A. Burenin, E. P. Dats, S. Mokrin et al. // *Bulletin of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State.* 2013. Vol. 16, no. 2. P. 22–28.
- [28] Dats E.P., Tkacheva A.V. Numerical study of temperature stresses caused by the process of hot landing of cylindrical parts // *Advances in continuum mechanics. International conference dedicated to the 75th anniversary of academician V.A. Levina. Vladivostok: IACP FEB RAS,* 2014. С. 481–484.
- [29] Dats E.P., Mokrin S.N., Murashkin E.V. Calculation of residual stresses of a hollow cylinder made of thermopurgoplastic material // *Materials of the XVIII International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Systems. Alushta: MAI,* 2013. С. 18–22.
- [30] Dats E. P., Murashkin E. V., Gupta N. K. On Yield Criterion Choice in Thermoelastoplastic Problems // *Procedia IUTAM.* 2017. Vol. 23. P. 187–200.

- 
- [31] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On a Multi-Physics Modelling Framework for Thermo-elastic-plastic Materials Processing // *Procedia Manufacturing*. 2017. Vol. 7. P. 427–434.
- [32] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On Heating of Thin Circular Elastic-plastic Plate with the Yield Stress Depending on Temperature // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 173. P. 891–896.
- [33] Murashkin E., Dats E. Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2018. Vol. 991. p. 012060.
- [34] Odeno H. Transient Thermal Stresses in Elasto-Plastic Discs // *Journal Mechanical Engineering Science*. 1969. Vol. 2. P. 384–391.
- [35] Orcan Y. Residual Stresses And Secondary Plastic Flow in a Heat Generating Elastic-Plastic Cylinder With Free Ends // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1995. Vol. 33. P. 1689–1698.
- [36] Murashkin E., Dats E. Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Thermoelasticity // *IAENG International Journal of Applied Mathematics*. 2017. Vol. 47. P. 261 – 264.
- [37] Orcan Y., Gamer U. Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Cylinder // *Acta Mechanica*. 1991. Vol. 90. P. 61–80.
- [38] Gamer U. On the Elastic-Plastic Deformation of a Sphere Subjected to a Spherically Symmetrical temperature Field // *Journal of Thermal Stresses*. 1988. Vol. 13. P. 159–173.
- [39] Eraslan A., Orcan Y. Thermoplastic Response of a Linearly Hardening Cylinder Subjected to Nonuniform Heat Source and Convective Boundary Condition // *Mechanics Based Design of Structures and Machines: An International Journal*. 2004. Vol. 32. P. 133–164.
- [40] Eraslan A., Orcan Y. Thermal Stresses in Elastic-Plastic Tubes With Temperature-Dependent Mechanical And Thermal Properties // *Journal of Thermal Stresses*. 2001. Vol. 24. P. 1097–1113.
- [41] Guven U., Altay O. Elastic-Plastic Solid Disk With Nonuniform Heat Source Subjected to External Pressure // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000. Vol. 42. P. 831–842.
- [42] Guven U., Altay O. Linear Hardening Solid Disk With Rigid Casing Subjected to a Uniform Heat Source // *Mechanics Research Communications*. 1998. Vol. 25. P. 679–684.
- [43] Gulgec M., Orcan Y. On The Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Cylinder Exhibiting Linear Hardening // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (ZAMM)*. 1999. Vol. 79. P. 493–498.
- [44] Eraslan A., Orcan Y. Computation of Transient Thermal Stresses in Elastic-Plastic Tubes: Effect of Coupling And Temperature Dependent Physical Properties // *Journal of Thermal Stresses*. 2002. Vol. 25. P. 559–572.
- [45] Gamer U. Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Disk // *Journal of Thermal Stresses*. 1985. Vol. 8. P. 41–51.
- [46] Mack W. Thermal Assembly of an Elastic-Plastic Hub And a Solid Shaft // *Arch. Appl. Mech*. 1993. Vol. 63. P. 42–50.
- [47] Bengeri M., Mack W. The Influence of the Temperature Dependence of the Yield Stress on the Stress Distribution in a Thermally Assembled Elastic-Plastic Shrink Fit // *Acta Mechanica*. 1994. Vol. 103. P. 243–257.
- [48] Kovacs A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits // *Periodica Polytechnica. Ser.: Mech. Eng*. 1996. Vol. 40. P. 103–112.
- [49] Kovacs A. Hardening Effects on the Stress Distribution in a Shrink Fit under Cyclic Thermal Loading // *Periodica Polytechnica Ser.: Mech. Eng*. 1991. Vol. 35. P. 49–64.

В. В. Козлов, А. А. Маркин

## ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ КЛАССА ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

*Тульский государственный университет, г. Тула, Россия*

**Аннотация.** Рассмотрена постановка класса задач нелинейной теории упругости. Предложен численный метод решения задач данного класса. Приведены элементы верификации численного метода для задачи осевого сдвига полого цилиндра. На основании сравнения полученных результатов с САЕ Fidesys сформулированы выводы о возможности применения предложенного метода для решения задач рассматриваемого класса.

**Ключевые слова:** численный метод, полый цилиндр, нелинейная упругость

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.007

УДК: 539.3

### 1. Введение

В работе рассматриваются постановки задач нелинейной теории упругости, напряженно-деформированное состояние которых не зависит от осевой координаты. Частные постановки этого класса задач представлены в работах [1-6]. Отличием данного исследования является обобщение частных постановок и представление единого подхода к их решению.

Многие задачи нелинейной теории упругости не имеют аналитического решения, что нашло отражение в работах [7-9]. Таким образом, актуальным является развитие численных методов, позволяющих получить корректные оценки напряженно-деформированного состояния нелинейно-упругой среды. В работе предложен численный метод, позволяющий решать задачи нелинейной теории упругости выбранного класса. Результаты работы метода иллюстрируются решением задачи об осевом сдвиге полого цилиндра [1]. На основании сравнения полученных результатов с САЕ Fidesys делается вывод о достоверности предложенного метода.

---

© Козлов В. В., Маркин А. А. 2019

*Козлов Виктор Вячеславович*

e-mail: vvkozlovtsu@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия,

*Маркин Алексей Александрович*

e-mail: markin-nikram@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МД-1803.2019.1) и РФФИ (проект № 18-31-20053).

Поступила 01.05.2019

## 2. Постановки задач.

Рассмотрим постановку задач нелинейной теории упругости для бесконечного цилиндра. Рассматривается класс задач, напряженно-деформированное состояние которых зависит только от радиальной координаты  $R$ . Внутренний радиус цилиндра обозначим  $R_{in}$ , внешний -  $R_{en}$ .

Пусть  $(x^1, x^2, x^3) = (R, \theta, z_0)$  - цилиндрические координаты материальной точки цилиндра в начальном состоянии, ось  $Oz$  совпадает с осью симметрии тела. Тогда положение точки в начальном состоянии записывается в виде

$$\mathbf{x} = R \mathbf{e}_R + z_0 \mathbf{e}_{z_0} = R \mathbf{e}_1 + z_0 \mathbf{e}_3,$$

где  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_R$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{z_0}$  - базисные векторы цилиндрической системы.

Будем полагать  $(r, \varphi, z)$  - цилиндрические координаты этой же точки в деформированном состоянии. В рамках данной модели связь между указанными координатами может быть выражена в виде:

$$r = R + u_R(R); \quad \varphi = \theta + u_\theta(R); \quad z = z_0 + u_{z_0}(R) \quad (1)$$

Для рассматриваемого класса задач удобно ввести подвижную систему координат, повернутую относительно исходной на угол  $u_\theta$  и характеризуемую базисом  $\mathbf{e}_1^{(n)} = \mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_2^{(n)} = \mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_3^{(n)} = \mathbf{e}_z$ , связанным с базисом исходной системы координат соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos(u_\theta) \mathbf{e}_R + \sin(u_\theta) \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin(u_\theta) \mathbf{e}_R + \cos(u_\theta) \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_{z_0}. \end{aligned}$$

Тогда с учётом (1) радиус-вектор точки в деформированном состоянии запишем в виде:

$$\mathbf{x} = (R + u_R) \mathbf{e}_r + (z_0 + u_{z_0}) \mathbf{e}_{z_0}$$

Запишем выражения векторов материального базиса  $\mathfrak{D}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}$ :

$$\mathfrak{D}_1 = (1 + u'_R) \mathbf{e}_r + (R + u_R) u'_\theta \mathbf{e}_\varphi + u'_{z_0} \mathbf{e}_{z_0}, \quad \mathfrak{D}_2 = (R + u_R) \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathfrak{D}_3 = \mathbf{e}_{z_0}$$

Из последних формул можно найти базис  $\mathfrak{D}^i$ :

$$\mathfrak{D}^1 = \frac{\mathbf{e}_r}{1 + u'_R}, \quad \mathfrak{D}^2 = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{R + u_R} - \frac{u'_\theta}{1 + u'_R} \mathbf{e}_r, \quad \mathfrak{D}^3 = \mathbf{e}_{z_0} - \frac{u'_{z_0}}{1 + u'_R} \mathbf{e}_r \quad (2)$$

Найдены представления аффинора деформации  $\Phi$ , тензора Коши-Грина  $\mathbf{G}$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= (1 + u'_R) \mathbf{e}_R \mathbf{e}_r + (R + u_R) u'_\theta \mathbf{e}_R \mathbf{e}_\varphi + \\ &+ u'_{z_0} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_z + \left(1 + \frac{u_R}{R}\right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_{z_0} \mathbf{e}_z = \Phi^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^{(n)}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{G} = \mathbf{U}^2 &= \Phi \cdot \Phi^T = \left( (1 + u'_R)^2 + u'_{z_0}{}^2 + (R u'_\theta)^2 \right) \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \\ &+ u'_{z_0} (\mathbf{e}_R \mathbf{e}_{z_0} + \mathbf{e}_{z_0} \mathbf{e}_R) + \frac{(R + u_R)^2}{R} u'_\theta (\mathbf{e}_R \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_R) + \\ &+ \frac{(R + u_R)^2}{R^2} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_{z_0} \mathbf{e}_{z_0} = G^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (4)$$

Аналитические представления других мер описания деформированного состояния среды, таких как левого тензора Генки  $\mathbf{\Gamma}$ , левой меры искажения  $\mathbf{U}$ , тензора поворота  $\mathbf{R}$  громоздки и неудобны в использовании. Однако данные меры могут использоваться в определяющих соотношениях при определении напряженного состояния среды.



Зная обобщенные перемещения  $u_R, u_\theta, u_{z_0}$ , по формуле (4) можно найти числовые значения  $G^{ij}$  в любой точке цилиндра. Решив стандартную задачу определения собственных значений  $\lambda^i$  и векторов  $\mathbf{a}_i = a_i^j \mathbf{e}_j$  меры Коши-Грина, получим представления мер  $\mathbf{G}, \mathbf{U}, \mathbf{\Gamma}$  в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \lambda^i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i \\ \mathbf{G} &= \mathbf{U}^2 \Rightarrow \mathbf{U} = \sqrt{\lambda^i} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i \\ \mathbf{\Gamma} &= \ln \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{\Gamma} = \ln \lambda^i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку диады в представлении (5) меры  $\mathbf{G}$  состоят только из базисных векторов неподвижной цилиндрической системы координат, то производные меры  $\mathbf{U}, \mathbf{\Gamma}$  также будут содержать в диадах только векторы  $\mathbf{e}_i$ . В то же время методика получения тензора поворота  $\mathbf{R} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{\Phi}$  с учетом формулы (3) указывает, что диадное представление тензора  $\mathbf{R}$  будет иметь вид:

$$\mathbf{R} = R^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^{(n)} \quad (6)$$

При необходимости могут быть конкретизированы и другие меры описания деформированного состояния. Формулы (3)–(5) показывают, что компоненты тензоров деформаций зависят от обобщенных перемещений, их производных и радиальной координаты.

Ввиду отсутствия массовых сил уравнение равновесия примет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0},$$

где  $\nabla = \partial^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  - оператор Гамильтона в актуальном базисе,  $\mathbf{S}$  - тензор напряжений Коши.

В силу того, что нагружение не зависит от координаты  $z_0$ , компоненты тензора напряжений зависят только от радиальной координаты:  $s^{ij} = s^{ij}(R)$ . Положим, что тензор напряжений с помощью выбранного определяющего соотношения записан разложением по диадам, составленным из базисных векторов повернутой цилиндрической системы координат, т.е.  $\mathbf{S} = s^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^{(n)}$ . Тогда, рассмотрев последнее выражение и конкретизируя производные  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x^i}$ , с учетом (2) получаем уравнение равновесия в виде

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} &= \left( \frac{1}{1+u'_R} \frac{ds^{RR}}{dR} + \frac{s^{R\theta} - s^{\theta\theta}}{R+u_R} \right) \mathbf{e}_r + \\ &+ \left( \frac{1}{1+u'_R} \frac{ds^{R\theta}}{dR} + \frac{2s^{R\theta}}{R+u_R} \right) \mathbf{e}_\varphi + \left( \frac{1}{1+u'_R} \frac{ds^{Rz}}{dR} + \frac{s^{Rz}}{R+u_R} \right) \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7)$$

В качестве граничных условий используем значения функций перемещений на радиусах цилиндра:

$$u_\theta(R_{in}) = u_{\theta,in}, u_\theta(R_{en}) = u_{\theta,en}. \quad (8)$$

$$u_{z_0}(R_{in}) = u_{z_0,in}, u_{z_0}(R_{en}) = u_{z_0,en}. \quad (9)$$

$$u_R(R_{in}) = u_{R,in}, u_R(R_{en}) = u_{R,en}. \quad (10)$$

Таким образом, (7) – (10) вместе с формулой для компонент тензора истинных напряжений Коши определяют постановку решаемой задачи определения обобщенных перемещений.

### 3. Численный метод.

Опишем численный метод, применяемый для решения краевой задачи (7)–(10) и позволяющий найти обобщенные перемещения. Чтобы постановка (7)–(10) стала полной, необходимо использовать определяющее соотношение. Тогда, из формул для

мер описания деформированного состояния (3)–(6), конкретизированные компоненты тензора напряжений, входящие в (7), будут зависеть от обобщенных перемещений и их производных первого порядка по радиальной координате. Запишем выражения, позволяющие сформулировать конечно-разностную аппроксимацию компонент тензора истинных напряжений.

Разделим отрезок значений радиальной координаты  $R \in [R_{in}, R_{en}]$  на дискретные значения с шагом  $h$ :

$$R_i = R_{in} + ih, \quad i = 0, \dots, n, \quad h = \frac{R_{en} - R_{in}}{n} \quad (11)$$

Точки  $R_0 = R_{in}$ ,  $R_n = R_{en}$  будем соответственно называть левой и правой граничными точками, прочие точки - внутренними. Тогда в каждой дискретной точке выбранную функцию обобщенного перемещения обозначим  $f_i$ , аппроксимация первой производной обобщенного перемещения запишем с точностью до  $O(h^2)$ .

При этом во внутренних точках используем выражения

$$f'|_{R=R_i} = f'_i = \frac{f|_{R=R_{i+1}} - f|_{R=R_{i-1}}}{2h} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2), \quad (12)$$

на левой граничной точке

$$f'|_{R=R_0} = f'_0 = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} + O(h^2), \quad (13)$$

на правой граничной точке

$$f'|_{R=R_n} = f'_n = \frac{3f_n - 4f_{n-1} + f_{n-2}}{2h} + O(h^2). \quad (14)$$

Дискретные значения производных первого порядка компонент тензора истинных напряжений Коши по радиальной координате  $(s^{ij})'_R$ , входящих в (7), могут быть записаны с помощью аналогичных (12)–(14) формул.

Таким образом, в каждой точке (11) относительно дискретных значений обобщенных перемещений записываем три нелинейных уравнения (7). Граничные условия (8)–(10) используются в левой и правой граничных точках. Получаем замкнутую систему нелинейных уравнений. Процесс нахождения решения этой системы реализован итерационным численным методом Левенберга-Марквардта [10, 11].

#### 4. Результаты для осевого сдвига.

Рассмотрим осевой сдвиг полого цилиндра. Для данного вида деформированного состояния граничные условия (8)–(10) записываются в виде

$$\begin{aligned} u_\theta(R_{in}) &= 0, & u_\theta(R_{en}) &= 0, \\ u_{z_0}(R_{in}) &= 0, & u_{z_0}(R_{en}) &= u_{z_0, en}, \\ u_R(R_{in}) &= 0, & u_R(R_{en}) &= 0 \end{aligned}$$

Используем определяющее соотношение [12]

$$\boldsymbol{\sigma}_R = 2G\tilde{\boldsymbol{\Gamma}} + K(\boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E},$$

где  $\boldsymbol{\sigma}_R$  - повернутый обобщенный тензор напряжений,  $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}$  - девиатор тензора деформаций Генки,  $\mathbf{E}$  - единичный тензор,  $G$  - модуль сдвига,  $K$  - модуль объемного расширения.

В качестве начального приближения функций перемещений использовались аналитические результаты задачи для несжимаемого материала, полученные в рамках линейной теории упругости:

$$\begin{aligned} u_R &= 0, \\ u_\theta &= 0, \\ u_{z_0} &= \frac{u_{z_0, en}(\ln R - \ln R_{in})}{\ln R_{en} - \ln R_{in}}. \end{aligned}$$

Тогда, с помощью программного комплекса, реализующего численный алгоритм, для параметров  $R_{in} = 0.6$  м,  $R_{en} = 1$  м,  $u_{z_0, en} = 0.25$  м,  $G = 0.5$  МПа,  $K = 50$  МПа получим распределения обобщенных перемещений, что позволяет конкретизировать напряженно-деформированное состояние среды.

Для проверки достоверности результатов используем сравнения полученных обобщенных перемещений и напряжений с САЕ Fidesys. Поскольку в промышленных САЕ необходимо рассматривать геометрически конечные объекты, рассмотрим цилиндр высотой 10 м. С учётом используемых значений  $R_{in} = 0.6$  м,  $R_{en} = 1$  м, можно считать, что посередине высоты цилиндра краевые эффекты на торцах будут оказывать незначительное влияние на напряженно-деформированное состояние. Задав необходимые параметры, соответствующие рассмотренной постановке осевого сдвига, в САЕ Fidesys, получим напряженно-деформированное состояние.

Ниже представлены зависимости перемещений, компоненты напряжений  $s^{Rz_0}$  от радиальной координаты, полученные с помощью предложенного численного метода и САЕ Fidesys.

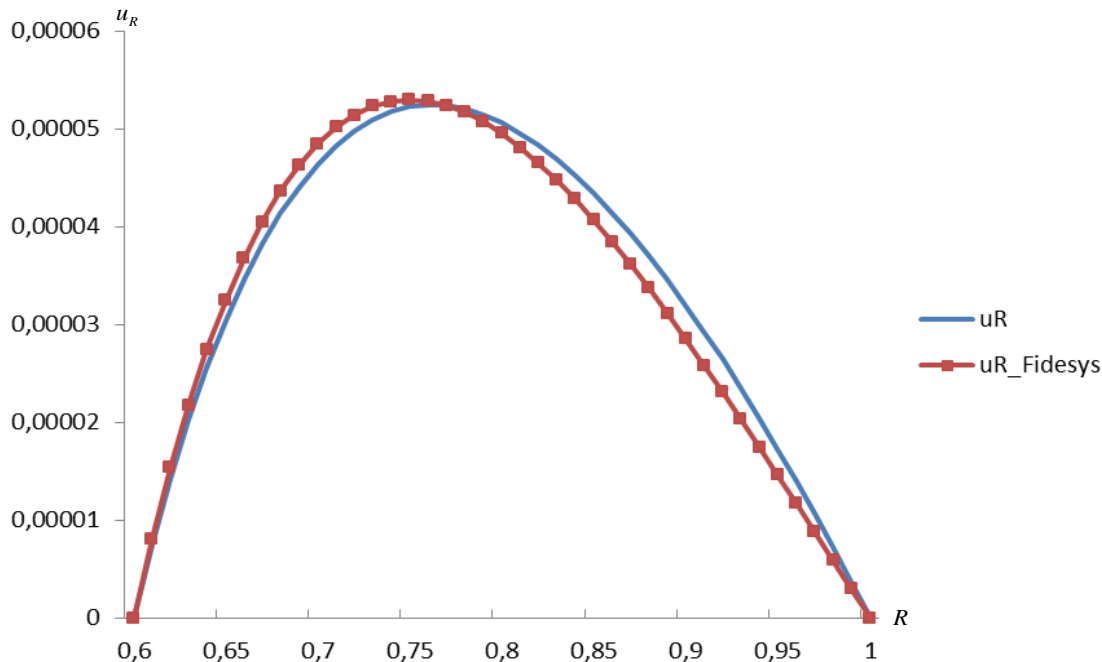


Рис. 1. Радиальное перемещение в зависимости от радиальной координаты.

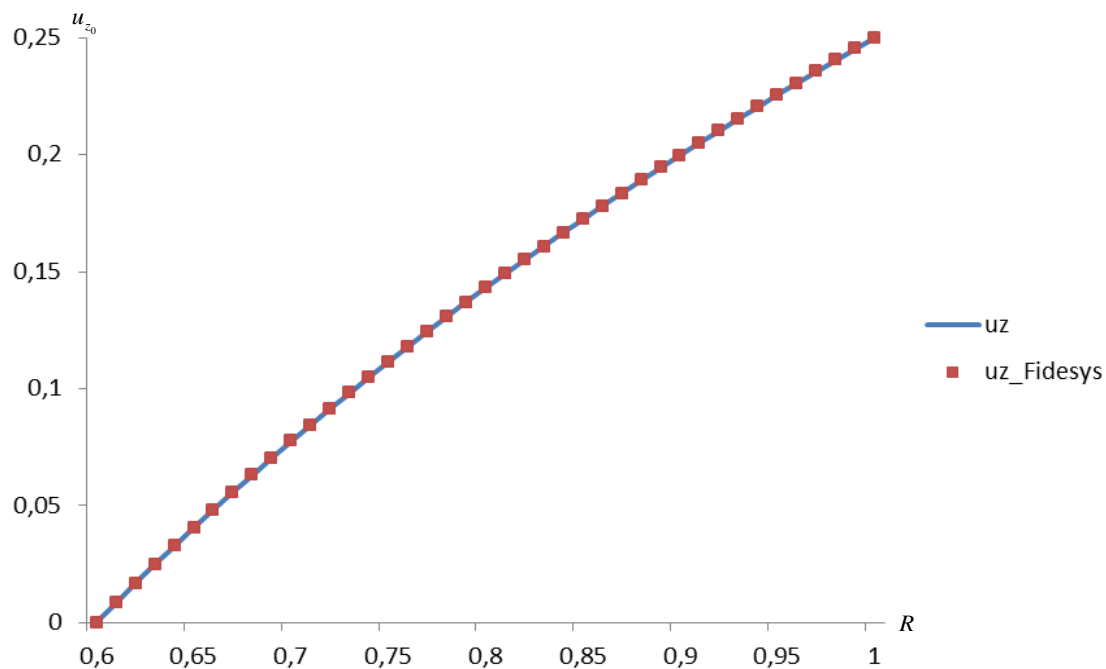


Рис. 2. Осевое перемещение в зависимости от радиальной координаты.

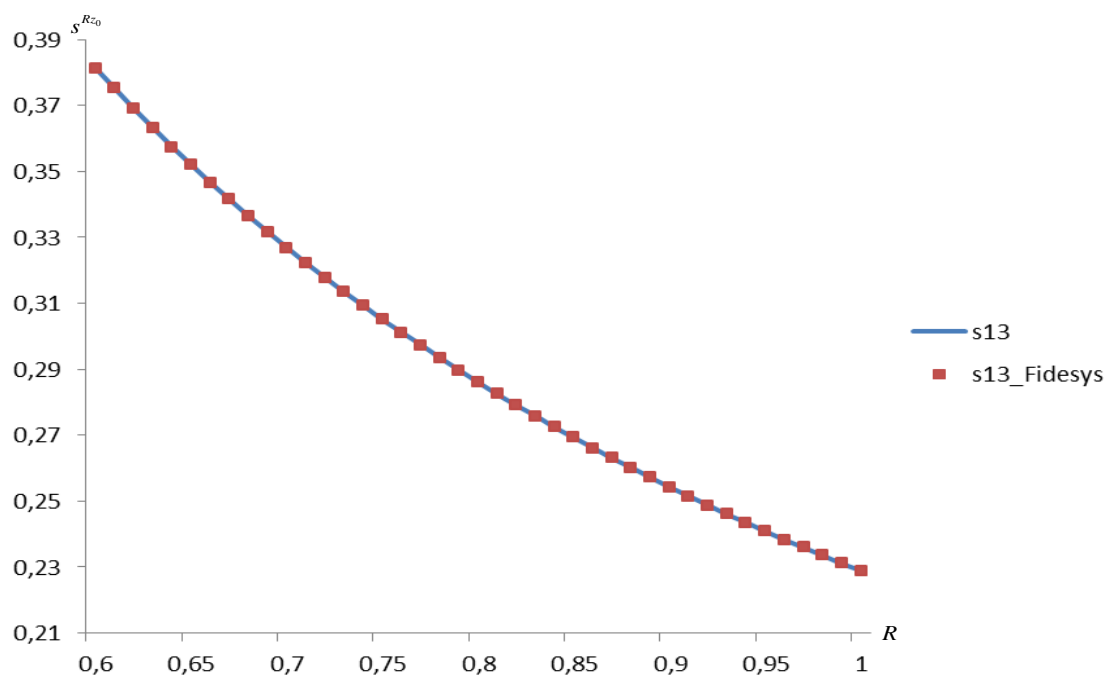


Рис. 3. Компонента тензора напряжений  $s^{Rz_0}$  в зависимости от радиальной координаты.

Таким образом, можно утверждать, что разработанный программный комплекс позволяет качественно оценить напряженно-деформированного состояния рассмотренного осевого сдвига полого цилиндра и может быть использован для определения напряженно-деформированного состояния предлагаемых в работе постановок задач нелинейной теории упругости.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Козлов В.В., Маркин А.А. Комбинированный сдвиг сжимаемого нелинейно-упругого полого цилиндра // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2015. Т. 2. С. 42–52.
- [2] Чиков В.С. Экспериментальные методики конкретизации определяющих соотношений с использованием цилиндрических образцов // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 2. с. 38–49.
- [3] Пономарев С.Д., Бидерман В.Л. Расчеты на прочность в машиностроении. Москва: МАШГИЗ, 1958. Т. 2. 975 с.
- [4] Millard F. V., Jiang Q. . On compressible materials capable of sustaining axisymmetric shear deformations. Part 2: rotational shear of isotropic hyperelastic materials // Q J Mechanics Appl Math. 1997. Vol. 50, no. 2. p. 211–237.
- [5] Лавендел Э.Э. Расчет резинотехнических изделий. М.: Машиностроение, 1976. 228 с.
- [6] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 512 с.
- [7] Курочка К.С. Метод численного решения краевых задач нелинейной теории упругости // Вестник Гомельского государственного технического университета им. П.О. Сухого. № 1. С. 49–57.
- [8] Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. Учеб. пособие. 2 изд. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
- [9] Пешков И.М. Численное моделирование разрывных решений в нелинейной теории упругости // Прикладная математика и техническая физика. Т. 50, № 5. с. 152–161.
- [10] Levenberg K. Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares // Quart. Appl. Math. 1944. no. 2. P. 164–168.
- [11] Marquardt D. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1963. Vol. 11, no. 2. P. 431–441.
- [12] Маркин А.А., Христинич Д.В. Нелинейная теория упругости: учеб. пособие. 2 изд. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. 92 с.

V. V. Kozlov, A. A. Markin

## FORMULATION AND METHOD FOR SOLVING A CLASS OF NONLINEAR ELASTICITY PROBLEMS

*Tula State University, Tula, Russia*

**Abstract.** The formulation of the class of problems of the nonlinear theory of elasticity is considered. A numerical method for solving problems of this class is proposed. The elements of verification of the numerical method for the axial shear problem of a hollow cylinder are given. Based on a comparison of the results obtained with CAE Fidesys, conclusions are formulated about the possibility of using the proposed method for solving problems of the considered class.

**Keywords:** numerical method, hollow cylinder, nonlinear elasticity

### REFERENCES

- [1] Kozlov V., Markin A. Combined shear compressible nonlinearity elastic hollow cylinder // *Izvestiya Tula State University. Physical sciences.* 2015. Vol. 2. P. 42–52. (in Russian).
- [2] Chikov V. Experimental methods of concerning the determining relations with the use of cylindrical samples // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State.* 2018. no. 2. p. 38–49. (in Russian).
- [3] Ponomarev S., Biderman V. *Strength calculations in mechanical engineering.* M.: MASHGIZ, 1958. Vol. 2. 975 p. (in Russian).
- [4] Millard F. B., Jiang Q. On compressible materials capable of sustaining axisymmetric shear deformations. Part 2: rotational shear of isotropic hyperelastic materials // *Q J Mechanics Appl Math.* 1997. Vol. 50, no. 2. p. 211–237.
- [5] Lavendel E. *Calculations of rubber-technical products.* M.: Mashinostroyeniye, 1976. 228 p. (in Russian).
- [6] Lur'ye A. *Nonlinear theory of elasticity.* M: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1980. 512 p. (in Russian).
- [7] Kurochka K. Metod chislennogo resheniya krayevykh zadach nelineynoy teorii uprugosti // *Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. P.O. Sukhogo.* no. 1. P. 49–57. (in Russian).
- [8] Pobedrya B. *Numerical methods in elasticity and plasticity theory. Tutorial.* 2 edition. M.: Izd-vo MGU, 1995. 366 p. (in Russian).
- [9] Peshkov I. Numerical simulation of discontinuous solutions in nonlinear elasticity theory // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* Vol. 50, no. 5. P. 858–865. (in Russian).
- [10] Levenberg K. Method for the Solution of Certain Problems in Last Squares // *Quart. Appl. Math.* 1944. no. 2. P. 164–168.
- [11] Marquardt D. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters // *SIAM Journal on Applied Mathematics.* 1963. Vol. 11, no. 2. P. 431–441.
- [12] Markin A., Khristich D. *Nonlinear theory of elasticity: tutorial.* 2 edition. Tula: Izd-vo TulGU, 2007. 92 p. (in Russian).

---

*Kozlov Viktor Vyacheslavovich*

e-mail: vvkozlovtsu@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Associate Professor, Tula State University, Tula.

*Markin Alexey Alexandrovich*

e-mail: markin-nikram@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula.

Ю. В. Немировский

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ ГИБРИДНЫХ ДЕРЕВО-ПЛАСТИКОВЫХ КЛЕЕНЫХ БРУСЬЕВ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия*

**Аннотация.** Предполагаемое активное освоение Приполярных и Северо-восточных районов России требует ускоренного создания и развития специальной строительной индустрии для обширных удаленных географических территорий со слабыми грунтовыми основаниями. Совершенно ясно, что массовая экономически приемлемая застройка в таких районах должна быть основана на использовании сборно-разборных деревянных и дерево-пластмассовых сооружений [1,2]. Учитывая транспортные трудности и высокую экономическую стоимость “северных завозов” в эти районы, при массовых локализованных застройках обживаемых территорий следует делать упор на максимальное использование местных возобновляемых лесных ресурсов. Это потребует проведения расширенных специальных программ исследований по уточнению специфических свойств деревьев различной номенклатуры как конструкционных материалов и по разработке методов расчета и проектирования элементов деревянных конструкций с учетом обнаруженных специфических свойств. Такие разработки станут особенно актуальными в настоящее время, поскольку проблема реконструкции существующих зданий и развитие малоэтажного строительства в городах и поселках рассматривается как социально-политическая и экономическая задача первостепенной важности при обеспечении населения жильем в достаточном количественном измерении и по критериям экономической доступности для большинства. Здесь дополнительным полезным подспорьем для массового применения деревянных конструкций могут выступать строительство стропильных покрытий и возведение мансардных этажей в различных типах жилых и административных зданий.

**Ключевые слова:** предельное состояние, дерево, пластик, брусья, композиционные материалы, полимеры, деформирование, гибридные конструкции.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.008

УДК: 539.374

---

© Немировский Ю. В., 2019  
*Немировский Юрий Владимирович*  
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00038.

Поступила 31.05.2019

Квазиизотропные и композиционные материалы на полимерной основе широко используются в строительной практике [3-7], и как показывают многочисленные эксперименты [4-9], они при деформировании проявляют качественные особенности, сходные с особенностями деформирования различных пород деревьев. Одно из наиболее ярких проявлений таких особенностей состоит в свойстве существенной разносопротивляемости при растяжении и сжатии. В то же время полимерные изделия, как и деревянные обладают малым удельным весом. Это побуждает к созданию комбинированных дерево-пластиковых гибридных конструкций для наиболее рационального использования взаимных достоинств материалов и снижения стоимости изготовления и длительной эксплуатации конструкций.

Изготовление линейных элементов гибридных конструкций достаточно легко приспособить к различному уровню технологии производства и может быть реализовано как в примитивных условиях строительных полигонов, так и в цеховых условиях, включая гибкое автоматизированное производство. Реализация таких производств характеризуется высокой технологической универсальностью, при которой все основные несущие элементы можно изготавливать в виде серий однотипных форм [2,3,10,11]. При этом возникает возможность непрерывно изменять формы, наборы структурных материалов, размеры элементов за счет быстрой переналадки формирующего устройства [3,10,11]. Это снимает ограничение с номенклатуры проектируемых сооружений и обеспечивает выбор оптимально-планировочных решений по проектированию необходимых сооружений. На основе линейных гибридных дерево-пластиковых элементов можно компоновать здания и сооружения самого различного назначения – как малоэтажные быстро монтируемые, так и многоэтажные с подвальными гаражами, мансардами и целым рядом ограждающих заборов, спортивных и развлекательных площадок, овощехранилищ и универсальных холодильников. Помимо простоты и универсального производства такие гибридные дерево-пластиковые линейные конструкции при перемещении к разным строительным объектам не требуют использования спец автотранспортных средств, и могут быть реализованы при движении по существующим трассам, что существенно ускоряет время и удешевляет расходы на строительство.

**Особенности деформирования деревянных и пластиковых стержней – образцов.** Многочисленные испытания образцов различных пород деревьев, армированных и неармированных пластиков [2-11] указывают на определенное качественное сходство их диаграмм при растяжении и диаграмм при сжатии. Отмечается, что диаграммы сжатия дерева, армированных и неармированных полимеров имеют сильно выраженный нелинейный характер, тогда как диаграммы растяжения почти линейны или слабо нелинейны, модули упругости при растяжении и сжатии практически совпадают, а пределы прочности при растяжении и сжатии отличаются в несколько раз. На рис. 1 в качестве иллюстрации приведены диаграммы растяжения (р) и сжатия (с) для сосны, ясеня, лиственницы, текстолита, и однонаправленного армированного композита на основе эпоксидного связующего и высокомодульных углеродных волокон.



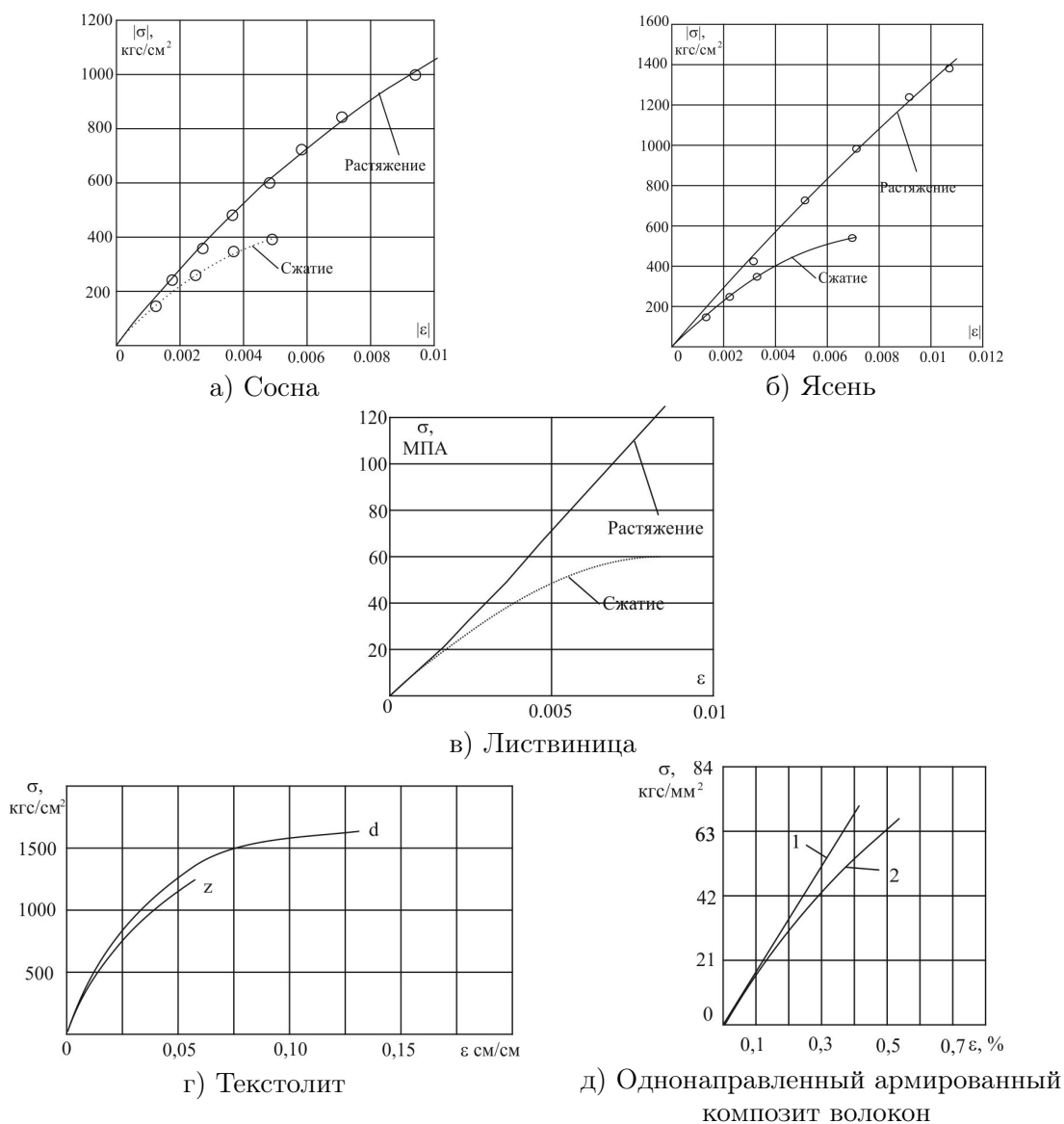


Рис. 1. Диаграммы растяжения (р) и сжатия (с).

Эти диаграммы указывают на то, что дерево и многие армированные и неармированные материалы, также как и некоторые другие широко распространенные конструкционные материалы (бетоны, чугуны, модифицированные стали, титаны и цветные сплавы) необходимо относить к классу разносопротивляющихся материалов. Общая теория описания физических процессов деформирования [12-16] таких материалов находится пока в зачаточном состоянии и весьма сложна для использования при практических расчетах конструкций, находящихся в условиях сложного напряженного состояния. В случае одноосного напряженно-деформированного состояния, используемого при расчете стержневых конструкций ферменного, балочного, рамного или арочного типа рассматриваемые диаграммы в пределах устойчивых процессов

(процессов предразрушений) деформирования ( $-\varepsilon_*^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*^+$ ) с достаточной точностью могут быть аппроксимированы зависимостями [12-14, 17]:

$$\sigma = A\varepsilon + B\varepsilon^2 + C\varepsilon^3, \quad (-\varepsilon_*^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*^+) \quad (1)$$

или

$$\sigma = A\varepsilon + B\varepsilon^2, \quad (-\varepsilon_*^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*^+) \quad (2)$$

где  $\varepsilon_*^-$  и  $\varepsilon_*^+$  - деформации предразрушения при сжатии и растяжении, соответствующие пределам прочности  $\sigma_*^-$  и  $\sigma_*^+$  при сжатии и растяжении. При известных данных испытаний образца конкретного материала коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  для зависимостей (1), (2) могут быть получены с помощью известных процедур [21] обработки экспериментальных данных методом наименьших квадратов. В табл. 1 приведены результаты такой обработки для трех регулярно используемых в строительной практике пород деревьев: сосны, ели и ясеня.

№	Породы	A 10 <sup>3</sup> МПа	B 10 <sup>6</sup> МПа	C 10 <sup>9</sup> МПа	$\varepsilon_*^+$ 10 <sup>-3</sup>	$\varepsilon_*^-$ 10 <sup>-3</sup>	$\sigma_*^+$ МПа	$\sigma_*^-$ МПа	$\gamma$ КН/м <sup>3</sup>
1	Сосна	15.55	0.373	-0.094	7.4	-4.6	97.6	54.4	5.00
2	Ясень	12.60	0.451	-0.042	11.0	-7.2	137.4	51.8	6.77
3	Ель	13.24	0.610	-0.078	7.0	-5.0	95.9	41.2	4.41

Таблица 1. Кубическая аппроксимация

№	Породы	A 10 <sup>3</sup> МПа	B 10 <sup>6</sup> МПа	$\varepsilon_*^+$ 10 <sup>-3</sup>	$\varepsilon_*^-$ 10 <sup>-3</sup>	$\sigma_*^+$ МПа	$\sigma_*^-$ МПа	$\gamma$ КН/м <sup>3</sup>
1	Сосна	15.97	2.65	7.4	-4.6	97.6	54.4	5.00
2	Ясень	15.21	0.773	11.0	-7.2	137.4	51.8	6.77
3	Ель	14.01	1.789	-5.0	-5.0	95.9	41.2	4.41

Таблица 2. Квадратичная аппроксимация

Аналогичные результаты были получены также для других пород деревьев [15-20]: березы, дуба, осины, тополя, кедра при использовании известных из литературы атласов испытания образцов древесины различных пород. Аналогичным образом, привлекая известные данные об испытаниях образцов из армированных и неармированных полимеров [3-9] можно таким же образом вычислить для них коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  соответствующие зависимостям (1), (2). К сожалению, полные атласы диаграмм деформирования не опубликованы или недоступны. В научно-технических публикациях можно найти для определенных марок полимеров более или менее достоверные сведения по стандартным характеристикам: модулям упругости, пределам прочности, и предельно допустимым деформациям при растяжении и сжатии. Поэтому в работе [17] был разработан подход, позволяющий определять коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в аппроксимациях (1), (2) через вышеупомянутые стандартные характеристики. При кубической аппроксимации (1) используются условия

$$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = -\varepsilon_*^-} = 0 \quad (3)$$

$$\sigma(\varepsilon_*^+) = \sigma_*^+, \quad \sigma(-\varepsilon_*^-) = -\sigma_*^- \quad (4)$$

где  $\varepsilon_*^\pm$  - значения предельных деформаций устойчивого деформирования при растяжении и сжатии (деформаций предразрушения). Тогда для коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  получим систему уравнений

$$\begin{aligned} A + 2B\varepsilon_*^- + 3C(\varepsilon_*^-)^2 &= 0 \\ A - B\varepsilon_*^- + C(\varepsilon_*^-)^2 &= E_*^- \\ A + B\varepsilon_*^+ + C(\varepsilon_*^+)^2 &= E_*^+ \end{aligned} \quad (5)$$

$$E_*^+ = \frac{\sigma_*^+}{\varepsilon_*^+}, \quad E_*^- = \frac{\sigma_*^-}{\varepsilon_*^-} \quad (6)$$

где  $\sigma_*^+$ ,  $\sigma_*^-$  - пределы прочности при растяжении и сжатии,  $E_*^+$ ,  $E_*^-$  - предельно допустимые секущие модули при растяжении и сжатии. Решение системы уравнений (5) можно представить в форме

$$A = E_*^- \frac{(R + 3k + 3k^2)}{(k + 1)^2}, \quad B = \frac{A}{\varepsilon_*^-} \frac{(2R - 3 + k^2)}{(R + 3k + 2k^2)}, \quad C = \frac{A}{(\varepsilon_*^-)^2} \frac{(R - 2 - k)}{(R + 3k + 2k^2)} \quad (7)$$

где

$$R = \frac{E_*^+}{E_*^-}, \quad k = \frac{\varepsilon_*^+}{\varepsilon_*^-} \quad (8)$$

При использовании квадратичной аппроксимации (2) система уравнений для коэффициентов  $A$ ,  $B$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} A - B\varepsilon_*^- &= E_*^- \\ A + B\varepsilon_*^+ &= E_*^+ \end{aligned} \quad (9)$$

а ее решение можно представить в форме

$$A = E_*^- \frac{(R + k)}{(k + 1)}, \quad B = \frac{A}{\varepsilon_*^-} \frac{(R - 1)}{(R + k)} \quad (10)$$

Учитывая вышеуказанное качественное сходство диаграмм деформирования различных пород деревьев и типов полимерных материалов для всех используемых материалов при последующем построении математической модели деформирования будем использовать однотипные зависимости (2) или (3) с соответствующими значениями коэффициентов, вычисленных на основе испытаний конкретных материалов. Такой подход позволит при сохранении сравнительно простых численных процедур решения задач деформирования гибридных стержневых конструкций существенно расширить номенклатуру создаваемых конструкций и разработать в дальнейшем эффективные методы их оптимального проектирования. В таблице 1 и 2 в качестве примеров приведены необходимые для расчетов характеристики трех пород деревьев при кубической и квадратной аппроксимациях.

**Основные уравнения гибридного клееного дерево-пластового бруса.** Под гибридным клеевым дерево-пластиковым брусом будем понимать совокупность призматических брусков из материала различных пород дерева или типов пластиковых материалов с параллельными осями и разными формами поперечных сечений, соединенных по всех призматическим стыкующимся поверхностям с помощью клея. Если  $x$  - ось брусков, а  $S_m$  - площадь поперечного сечения каждого бруса, то общая площадь

поперечного сечения склеенного гибридного бруса будет равна  $S = \sum_{\alpha=1}^m S_{\alpha}$ . В настоящее время разработаны такие марки клеев, у которых прочность клеевого слоя на отрыв и сдвиг соразмерна или даже превышает соответствующие прочностные соединяемых материалов. Поэтому можно считать, что при достаточно тонких прослойках клея, соединение различных брусьев друг с другом по общим соприкасающимся поверхностям будет идеальным, и склеенный брус будет деформироваться как единый брус, с неоднородными кусочно-постоянными свойствами по сечению. Свяжем с рассматриваемым брусом декартову систему координат  $x, y, z$ , так что ось  $x$  будет осью рассматриваемого бруса и имеет определенную привязку к поперечному сечению. Для упрощения получающихся в дальнейшем решений будем считать, что структуры гибридных брусьев и распределения внешних нагрузок согласованы так, что они не вызывают эффектов закручивания, либо эти эффекты столь незначительны, что ими можно пренебречь. Тогда рассматриваемый гибридный стержень будет испытывать изгиб с растяжением-сжатием в плоскостях  $xy$  и  $yz$ , и в случае малых деформаций и перемещений, возникающие внутренние усилия  $N$  и моменты  $M_y, M_z$  будут подчиняться уравнениям равновесия

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q_y - \frac{dm_z}{dx}, \quad \frac{d^2 M_y}{dx^2} = q_z - \frac{dm_y}{dx}, \quad \frac{dN}{dx} = -q_x \quad (11)$$

Здесь  $N$  - проекция вектора внутреннего усилия на ось  $x$ ;  $M_y, M_z$  - проекции вектора внутреннего момента на оси  $z$  и  $y$ . Точка приложения вектора внутренних усилий лежит на оси стержня. Величины  $q_x, q_y, q_z$  - проекции вектора внешней нагрузки, приложенной на оси стержня,  $m_z, m_y$  - проекции вектора внешнего распределенного момента на оси  $z$  и  $y$ . Внутренние силовые факторы  $N, M_y, M_z$  связаны с продольными напряжениями  $\sigma_{\alpha}$  в гибридных брусках выражениями

$$N = \sum_{\alpha} \iint_{S_{\alpha}} \sigma_{\alpha} dS_{\alpha}, \quad M_y = \sum_{\alpha} \iint_{S_{\alpha}} \sigma_{\alpha} z dS_{\alpha}, \quad M_z = \sum_{\alpha} \iint_{S_{\alpha}} \sigma_{\alpha} y dS_{\alpha} \quad (12)$$

Поскольку соединяемые материалы обладают соразмерными по порядку характеристиками прочности и жесткости для гибридных стержней рассматриваемого типа можно использовать классические гипотезы Кирхгофа-Лява, то связь между деформациями  $\varepsilon(x, y, z)$  и перемещениями  $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$  оси стержня выражается формулой

$$\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_0 - y\kappa_z - z\kappa_y \quad (13)$$

$$\varepsilon_0(x) = \frac{du_0}{dx}, \quad \kappa_y = \frac{d^2 v_0}{dx^2}, \quad \kappa_z = \frac{d^2 w_0}{dx^2} \quad (14)$$

Здесь  $\varepsilon_0(x), \kappa_y, \kappa_z$  - продольная деформация на уровне оси стержня и изменение кривизны оси стержня в проекции на оси  $z$  и  $y$ . Связи между напряжениями  $\sigma_{\alpha}$  и деформациями  $\varepsilon$  в  $\alpha$ - слое выражается соотношениями (1) или (2) с соответствующими коэффициентами. Интегрируя уравнения (11), для внутренних усилий получим выражения

$$N(x) = N(0) - \int_0^x q_x dx,$$

$$M_z(x) = M_z(0) - Q_y(0)x - \int_0^x m_z dx + \int_0^x \left( \int_0^x q_y dx \right) dx \quad (15)$$

$$M_y(x) = M_y(0) - Q_z(0)x - \int_0^x m_y dx + \int_0^x \left( \int_0^x q_z dx \right) dx$$

В случае статически определимых задач значения  $N(0)$ ,  $Q_y(0)$ ,  $Q_z(0)$ ,  $M_z(0)$ ,  $M_y(0)$  определяются из условий равновесия на концах стержня, и тогда выражения (15) будут характеризовать известные законы изменения внутренних сил вдоль оси стержня. При известных функциях  $N_x$ ,  $M_z(x)$ ,  $M_y(x)$  из уравнений (11) учитывая соответствующие структуры гибридного стержня и зависимости (1) или (2), будем получать систему трех нелинейных алгебраических уравнений в виде полиномов третьих или вторых степеней относительно трех неизвестных функций  $\varepsilon_0(x)$ ,  $\kappa_z(x)$ ,  $\kappa_y(x)$  которые могут быть численно решены с помощью построения асимптотических приближений. После нахождения функций  $\varepsilon_0(x)$ ,  $\kappa_z(x)$ ,  $\kappa_y(x)$  для перемещений  $u_0(x)$ ,  $v(x)$ ,  $w(x)$ , учитывая выражения (14) получим

$$\begin{aligned} u_0(x) &= u_0(0) + \int_0^x \varepsilon_0(x) dx, & v(x) &= v(0) + \phi_y(0)x + \int_0^x \left( \int_0^x \kappa_y(x) dx \right) dx \\ \phi_y(x) &= \phi_y(0) + \int_0^x \kappa_y(x) dx, & w(x) &= w(0) + \phi_z(0)x + \int_0^x \left( \int_0^x \kappa_z(x) dx \right) dx \\ \phi_z(x) &= \phi_z(0) + \int_0^x \kappa_z(x) dx \end{aligned} \quad (16)$$

В случае статически неопределимых конструкций соответствующая система разрешающих нелинейных уравнений относительно искомым перемещений  $u_0(x)$ ,  $v(x)$ ,  $w(x)$  может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{nkt} \frac{d}{dx} \left( \left( \frac{du_0}{dx^2} \right)^{n-k+1} \left( \frac{d^2v_0}{dx^2} \right)^{t-1} \left( \frac{dw_0}{dx^2} \right)^{k-t} \right) + q_x = 0 \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{nk(t+1)} \frac{d^2}{dx^2} \left( \left( \frac{du_0}{dx^2} \right)^{n-k+1} \left( \frac{d^2v_0}{dx^2} \right)^{t-1} \left( \frac{dw_0}{dx^2} \right)^{k-t} \right) - \frac{dm_y}{dx} + q_z = 0 \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{n(k+1)t} \frac{d^2}{dx^2} \left( \left( \frac{du_0}{dx^2} \right)^{n-k+1} \left( \frac{d^2v_0}{dx^2} \right)^{t-1} \left( \frac{dw_0}{dx^2} \right)^{k-t} \right) - \frac{dm_z}{dx} + q_y = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} D'_{nkt} &= (-1)^{k-1} C_n^{k-1} C_{k-1}^{t-1} D_{nkt} \\ D'_{nk(t+1)} &= (-1)^{k-1} C_n^{k-1} C_{k-1}^{t-1} D_{nk(t+1)} \\ D'_{n(k+1)t} &= (-1)^{k-1} C_n^{k-1} C_{k-1}^{t-1} D_{n(k+1)t} \end{aligned} \quad (18)$$

Решения таких нелинейных краевых задач обычно проводится на основе традиционных процедур метода Бубнова-Галеркина для которых в необходимых конкретных случаях определяются необходимое количество и вид конечных рядов разложения исходных функций, скорость сходимости уточняющих приближений и устойчивость

процедур численного счета в зависимости от параметров входящих в коэффициенты разрешающей системы [21].

**Пример расчета.** В качестве примера был рассмотрен пример расчета статически определимого (шарнирно-опертого) трехслойного деревянного бруса длиной 6м, с прямоугольной шириной 20 см, и общей высотой 40 см, нагруженного равномерно распределенной по пролету нагрузкой интенсивности  $q_0$ . Были рассмотрены комбинации пород дерева: 1 – Ель, 2 – Ясень, 3 – Сосна, 4 – Дуб, 5 – Береза, 6 – Лиственница. В таблицах 3,4 приведены некоторые результаты расчетов.

№	Распределение пород	$q_{\max}$ [кН/м]	$w_{\max}$ [см]	$h_1$ [см]	$h_2$ [см]	$h_3$ [см]	№ слоя в котором достигнуты предельные деформации
1	333	79	7,7	13,3	13,3	13,3	1
2	6-5	108	12,9	20,0	0	20,0	1
3	5-6	76	9,2	20,0	0	20,0	1
4	65	65	8,3	20,0	0	20,0	1
5	86	86	10,4	13,3	13,3	13,3	2

Таблица 3. Результаты расчетов

№	Хар-р начала разрушения: растяжение (+), сжатие (-)	Вес балки [кН]	Стоимость [руб]	Степень нагружения нижних волокон [%]
1	-	2,40	1005	53
2	-	3,08	912	56
3	-	3,08	912	58
4	-	2,12	960	78
5	-	2,36	926	60

Таблица 4. Результаты расчетов

№	Порода древесины [кН/м <sup>3</sup> ]	Удельный вес [Руб/м <sup>3</sup> ]	Удельная стоимость
1	Ель	4,41	2000
2	Ясень	6,77	3000
3	Сосна	5,00	2100
4	Дуб	6,87	3200
5	Береза	6,28	1300
6	Лиственница	6,57	2500

Таблица 5.

Во втором столбце табл. 3 дано распределение пород по слоям. Так шифр 615 означает, что первый слой сделан из лиственницы, второй – из ели и третий – из березы. В столбцах 3 и 4 приведены максимальная нагрузка и максимальный прогиб

балки. Стоимость балки (столбец 11 табл.) включает в себя только стоимость древесины. Стоимость  $1\text{м}^3$  взята по данным сети Интернет и равна 1300 Руб/ $\text{м}^3$  для березы, 2000 Руб/ $\text{м}^3$  для ели, 2500 Руб/ $\text{м}^3$  для лиственницы и 2100 Руб/ $\text{м}^3$  для сосны. В столбце 12 приведена степень нагружения крайних нижних волокон, равная  $\max(\varepsilon(x - 0.5h)) / \varepsilon_{3*}^+$ .

Из анализа результатов расчетов следует:

- (1) Варьирование пород слоев приводит к значительному изменению величины предельной нагрузки и максимального прогиба. Предельная нагрузка изменяется в 1.66 раза, максимальный прогиб в 1.55 раза.
- (2) Вес балок изменяется максимум в 1.45 раза, стоимость – в 1.10 раза.
- (3) В расчете №5 (строка 5 табл. 3) предельные деформации были достигнуты во внутреннем слое балки. Тогда как в однородных конструкциях предельные деформации всегда достигаются на фибровых волокнах балки. В расчетах №1-4 предельные деформации достигались на верхних фибровых волокнах.
- (4) Во всех расчетах нижние волокна балки были сильно недогружены, что является следствием значительной разнородности древесины.

Ряд других расчетов для конструкций гибридных деревянных и дерево-пластиковых брусев был выполнен также в работах [15-20, 22-25].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Загородков Е. И. Малоэтажное домостроение в большом городе // Изв. Вузов. Строительство. 2013. № 5. С. 90–93.
- [2] Губенко А. Б. Клееные деревянные конструкции в строительстве. Москва: Госстройиздат, 1957.
- [3] Конструкции из дерева и пластмасс. Учебник для вузов / под ред. Г. С. Карлсона, Ю. В. Слицикоухова. Самара: Стройиздат, 1986. 643 с.
- [4] У.Новиков В. Полимерные материалы для строительства. Справочник. Москва: Высшая школа, 1995. 448 с.
- [5] Губенко А. Б. Прочность и деформативность конструкций с применением пластмасс. Москва: Стройиздат, 1966. 122 с.
- [6] Соломатов В. И., Бобрышев А. И., Химмлер А. Г. Полимерные композиционные материалы в строительстве. Москва: Стройиздат, 1988. С. 5–68.
- [7] Композиционные материалы / под ред. Л. Браутмена, Р. Крока. Москва: Машиностроение, 1978. Т. 7. С. 62–72.
- [8] Конструкционные полимеры Методы экспериментального исследования. Кн. 1 / под ред. П. И. Огибалова. Москва: Изд-во Московского госуниверситета, 1972. с. 322.
- [9] Технические свойства полимерных материалов. Учебно-справочное пособие / под ред. В. К. Крыжановского. 2 изд. СПб: Профессия, 2005. с. 288.
- [10] Ханин А. В. О разрушении клеодоцатых балок увеличенной высоты // Конструкции из клееной древесины и пластмасс. Л: ЛИСИ, 1979. С. 19–25.
- [11] М.Боровиков А., Уголев Б. Н. Справочник по древесине / под ред. Б. Н. Уголева. М.: Лесная промышленность, 1989. с. 296.
- [12] Немировский Ю. В. Метод расчета композитных стержневых систем из разномодульных материалов // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики. Материалы V Всеросс. Научн. Конф. Томск: Изд-во ТГУ, 2006. С. 288–290.
- [13] Немировский Ю. В. Расчет и рациональное проектирование деревянных стержневых элементов // Современные проблемы совершенствования и развития конструкций в строительстве и транспорте. Сб. Науч. Тр. III Междунар. Научно-технич. конф. Самара: Изд-во СамГАСУ, 2005. С. 247–251.
- [14] Немировский Ю. В., В.Мищенко А., Вохмянин И. Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. Новосибирск: НГАСУ, 2004. с. 488.

- [15] Немировский Ю. В., И.Болтаев А. Некоторые особенности деформирования нелинейного разносопротивляющегося материала однопролетных балок // Вестник ТГАСУ. 2016. № 4. С. 95–106.
- [16] Немировский Ю. В., И.Болтаев А. Особенности деформирования и разрушения деревянных клеевых многопролетных балок. Сообщение 2 // Известия вузов. Строительство. 2016. № 7. С. 83–91.
- [17] Немировский Ю. В., И.Болтаев А. Влияние формы и расположения слоев на напряженно-деформированное состояние гибридных деревянных балок // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2017. № 10. С. 73–83.
- [18] Немировский Ю. В., И.Болтаев А. Расчет и проектирование гибридных деревянных брусьев // Вестник ПНИПУ. Серия: Механика. 2017. № 3. С. 129–152.
- [19] Немировский Ю. В., И.Болтаев А. Особенности деформирования гибридных брусьев из древесины // Известия вузов. Лесной журнал. 2018. № 4.
- [20] Немировский Ю. В., И.Болтаев А. Сложный изгиб и начальное разрушение гибридных деревянных брусьев // Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки., 2017. № 4. С. 699–716.
- [21] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва: Мир, 1988. с. 322.
- [22] Немировский Ю. В., И.Болтаев А. Метод расчета деревянных стропильных покрытий зданий. Сообщение 1. Моделирование и общие закономерности // Известия вузов. Строительство. 2014. № 3. С. 5–13.
- [23] Немировский Ю. В., И.Болтаев А. Особенности деформирования и разрушения деревянных клеевых многопролетных балок. Сообщение 1 // Известия вузов. Строительство. 2016. № 6. С. 116–126.
- [24] В.Мищенко А., Немировский Ю. В. Оценка прочности комбинированных дерево-пластмассовых балок // Современные проблемы совершенствования и развития металлических, деревянных, пластмассовых конструкций в строительстве и на транспорте. Сб. науч. трудов III Междунар. научно-технич. конф. Самара: Изд-во СамГАСУ, 2005. С. 228–233.
- [25] П.Пятикрестовский К., Хунагов Х. С. Обоснование зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций для нелинейного расчета деревянных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 1. С. 62–69.
- [26] Ржаницын А. Р. К вопросу о теоретическом весе стержневых конструкций. Москва: Стройиздат, 1949. С. 252–265.

Yu. V. Nemirovskii

## LIMIT CONDITIONS OF HYBRID WOOD-PLASTIC GLUED BEAMS

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

**Abstract.** The proposed active development of the Subpolar and North-Eastern regions of Russia requires the accelerated creation and development of a special construction industry for vast remote geographic areas with weak soil bases. It is completely clear that mass economically acceptable development in such areas should not be based on the use of collapsible wooden and wood-plastic structures [1,2]. Given the transport difficulties and the high economic value of the “northern deliveries” to these areas, with massive localized development of the inhabited territories, emphasis should be placed on the maximum use of local renewable forest resources. This will require extended special research programs to clarify the specific properties of trees of various nomenclatures as structural materials and to develop methods for calculating and designing elements of wooden structures taking into account specific properties found. Such developments are becoming especially relevant at present, since the problem of reconstructing existing buildings and developing low-rise construction in cities and towns is considered as a socio-political and economic task of paramount importance when providing the population with housing in sufficient quantitative terms and according to the criteria of economic affordability for the majority. Here, an additional useful tool for the mass use of wooden structures can be the construction of roof trusses and the construction of attic floors in various types of residential and office buildings.



**Keywords:** limiting condition, wood, plastic, beams, composite materials, polymers, deformation, hybrid structures.

## REFERENCES

- [1] Zagorodkov E. Low housing construction in the big city // *Izv. Vuzov. Construction*. 2013. no. 5. P. 90–93.
- [2] Gubenko A. *Glued wooden constructions in construction*. Moscow: Gosstroyizdat, 1957.
- [3] *Constructions from a tree and plastic. The textbook for higher education institutions* / Ed. by G. C. Y. S. and. Samara: Stroyizdat, 1986. 643 p.
- [4] Novikov V. *Polymeric materials for construction. Reference book*. Moscow: Higher school, 1995. 448 p.
- [5] Gubenko A. *Durability and a deformability of constructions using plastic*. Moscow: Stroyizdat, 1966. 122 p.
- [6] Solomatov V., Bobryshev A., Himmler A. *Polymeric composition materials in construction*. Moscow: Stroyizdat, 1988. P. 5–68.
- [7] *Composition materials* / Ed. by L. B. R. K. and. Moscow: Mechanical engineering, 1978. Vol. 7. P. 62–72.
- [8] *Constructional polymers Methods of a pilot study. Prince 1* / Ed. by P. Ogibalova. Moscow: Publishing house of the Moscow State University, 1972. p. 322.
- [9] *Technical properties of polymeric materials. Educational handbook* / Ed. by V. Kryzhanovsky. 2 edition. SPb: Profession, 2005. p. 288.
- [10] Khanin A. About destruction the kleedoshchatykh of beams of the increased height // *Constructions from glued wood and plastic. Л: LISI*, 1979. P. 19–25.
- [11] Borovikov A., Ugolev B. *Reference book on wood* / Ed. by B. Ugoleva. M.: Forest industry, 1989. p. 296.
- [12] Nemirovsky Y. A method of calculation of composite rod systems from the raznomodulnykh of materials // *Fundamental and applied problems of modern mechanics. Materials V of Vseross. Nauchn. Konf. Tomsk: Izdatelstvo TGU*, 2006. P. 288–290.
- [13] Nemirovskiy Y. V. Calculation and rational design of wooden rod elements // *Modern problems of improvement and development of structures in construction and transport. Сб. Науч. Тр. III Internunar. Scientific технич. konf. Samara: SamGASU*, 2005. P. 247–251.
- [14] Nemirovskiy Y. V., Mischenko A. V., Vokhmyanin I. T. *Rational and optimal design of layered core systems*. Novosibirsk: NGASU, 2004. p. 488.
- [15] Nemirovskiy Y. V., I.Boltayev A. Some features of deformation of nonlinear divergent material of single-span beams // *TGASU Gazette*. 2016. no. 4. P. 95–106.
- [16] Nemirovskiy Y. V., I.Boltayev A. Peculiarities of deformation and destruction of wooden adhesive multi-span beams. Message 2 // *University News. Construction*. 2016. no. 7. P. 83–91.
- [17] Nemirovskiy Y. V., I.Boltayev A. Influence of shape and arrangement of layers on stress-deformed state of hybrid wooden beams // *V.G. Shukhova BGTU Gazette*. 2017. no. 10. P. 73–83.
- [18] Nemirovskiy Y. V., I.Boltayev A. Calculation and design of hybrid wooden bars // *PLIPU Journal. Series: Mechanics*. 2017. no. 3. P. 129–152.
- [19] Nemirovskiy Y. V., I.Boltayev A. Features of deformation of hybrid wood bars // *University News. Forest Journal*. 2018. no. 4.
- [20] Nemirovskiy Y. V., I.Boltayev A. Complex bending and initial destruction of hybrid wooden bars // *SamGTU Gazette. Series: Physical-mat. Sciences*,. 2017. no. 4. P. 699–716.
- [21] Fletcher K. *Numerical methods based on the Galerkin method*. Moscow: World, 1988. p. 322.
- [22] Nemirovskiy Y. V., I.Boltayev A. Method of calculation of wooden sling coatings of buildings. Message 1. modeling and general patterns // *University News. Construction*. 2014. no. 3. P. 5–13.

---

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

- 
- [23] Nemirovskiy Y. V., I.Boltayev A. Peculiarities of deformation and destruction of wooden adhesive multi-span beams. Message 1 // University News. Construction. 2016. no. 6. P. 116–126.
- [24] Mischenko A. V., Nemirovskiy Y. V. Strength evaluation of combined wood-plastic beams // Modern problems of improvement and development of metal, wooden, plastic structures in construction and transport. Сб. науч. Works of III Internunar. scientific технич. conf. Samara: SamGASU, 2005. P. 228–233.
- [25] Pyatikrestovsky K. P., Hunagov H. S. Validity of dependence between stress and strain intensities for nonlinear calculation of wooden structures // Construction mechanics and calculation of structures. 2011. no. 1. P. 62–69.
- [26] Rzhanitsin A. R. To the question of theoretical weight of rod structures. Moscow: Stroyizdat, 1949. P. 252–265.

В. А. Городцов, Д. С. Лисовенко

## МОДУЛЬ ЮНГА, КОЭФФИЦИЕНТ ПУАССОНА И МОДУЛЬ СДВИГА ДЛЯ ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ КРИСТАЛЛОВ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** Изучена изменчивость модуля Юнга, коэффициента Пуассона и модуля сдвига гексагональных кристаллов. Получены аналитические выражения для экстремальных значений этих упругих характеристик. На основе экспериментальных данных об упругих постоянных из справочника Ландолта-Бернштейна дан численный анализ экстремумов для гексагональных кристаллов. Предложены классификационные схемы для экстремумов модуля Юнга, коэффициента Пуассона и модуля сдвига.

**Ключевые слова:** модуль Юнга, коэффициент Пуассона, модуль сдвига, ауксетики, кристаллы, гексагональные кристаллы.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.009

УДК: 539.32

### 1. Введение

В современном материаловедении активно используются наноматериалы, которые изготовлены из кристаллов. Для анизотропных материалов модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль сдвига зависят от ориентации кристаллических образцов. Термодинамическое требование положительной определенности энергии деформации накладывает на упругие характеристики материалов некоторые ограничения. Для изотропных материалов они сводятся к тому, что модуль Юнга и модуль сдвига должны быть положительными, а коэффициент Пуассона может меняться только в пределах  $-1 \leq \nu \leq 0.5$  [1]. В случае анизотропных материалов коэффициенты Пуассона могут иметь произвольные величины [2].

---

© Городцов В. А., Лисовенко Д. С., 2019

*Городцов Валентин Александрович*

e-mail: gorod@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

*Лисовенко Дмитрий Сергеевич*

e-mail: lisovenk@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 18-19-00736 „Развитие механики упругого и пластического деформирования и разрушения для совместного дизайна слоистых композитов“).

Поступила 10.06.2019

Модули Юнга, модули сдвига и коэффициенты Пуассона монокристаллов различных кристаллических систем анализировались во многих работах [3–15]. Экстремальные значения модуля Юнга исследованы с помощью метода множителей Лагранжа для кубических и гексагональных кристаллов в [16]. В результате анализа были получены три экстремальных значения модуля Юнга. В случае тетрагональных кристаллов найдено пять экстремальных значений модуля Юнга [17]. В [18] были исследованы стационарные значения модуля Юнга для орторомбических, тетрагональных, тригональных, гексагональных и кубических кристаллов.

Экстремальные значения коэффициента Пуассона для кубических кристаллов были проанализированы в [19, 20]. В этих работах показано, что кроме стандартных экстремальных значений коэффициентов Пуассона  $\nu_{[100],[001]}$ ,  $\nu_{[001],[110]}$ ,  $\nu_{[1\bar{1}0],[110]}$ ,  $\nu_{[111],[111]}$  (первые три числа в квадратных скобках указывают направление поперечной деформации, а последние три числа – направление растяжения) экстремальные значения коэффициента Пуассона могут также наблюдаться при специальных ориентациях. В [20, 21] также показано, что экстремальные значения коэффициента Пуассона свойственны метастабильным кристаллам, например, кристаллам с эффектом памяти формы. Изменчивость коэффициента Пуассона гексагональных кристаллов также анализировались в [22–28]. В [22] были исследованы модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль сдвига для гексагональных кристаллов Tl и Cd при некоторых частных ориентациях. Для этих кристаллов были построены ориентационные зависимости упругих характеристик, а для кристалла кадмия выявлен отрицательный коэффициент Пуассона. Ошибка в этом утверждении связана с неверным пересчетом коэффициентов податливости в [22]. Отрицательный коэффициент Пуассона при некоторых ориентациях может иметь кристалл цинка [23]. Анализ изменчивости коэффициента Пуассона гексагональных кристаллов [24–26] выявляет еще шесть кристаллов (MoS<sub>2</sub>, Zn, Be, сплав BeCu (2.4%at.Cu), TiB<sub>2</sub>, C<sub>7</sub>H<sub>12</sub>, MnAs) с отрицательным коэффициентом Пуассона (гексагональных ауксетиков). Наименьшее значение коэффициента Пуассона –0.28 достигается у кристалла MoS<sub>2</sub>. Среди кристаллов других кристаллических систем найдено гораздо большее количество ауксетиков. На данный момент известно свыше 450 кристаллических ауксетиков [24, 25, 30–42]. Более 300 ауксетиков обнаруживается среди кубических кристаллов [43]. В [44–46] предложена классификация кристаллов на основе знака коэффициента Пуассона. Все кристаллические материалы можно разделить на неауксетики (материалы с положительным коэффициентом Пуассона при любой ориентации), полные ауксетики (материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона при любой ориентации) и частичные ауксетики (материалы, у которых коэффициент Пуассона может менять знак в зависимости от ориентации). В [44] были указаны необходимые и достаточные условия для нахождения неауксетиков и полных ауксетиков. В [27] был проведен анализ среднего по поперечным направлениям коэффициента Пуассона. В этой статье обсуждались необходимые и достаточные условия для гексагональных неауксетиков, частичных ауксетиков и полных ауксетиков. Установлено, в частности, что все гексагональные кристаллы имеют положительный средний по поперечным направлениям коэффициент Пуассона.

Ниже анализируются экстремальные значения модуля Юнга, коэффициента Пуассона и модуля сдвига для гексагональных кристаллов с помощью необходимого и

достаточного условий экстремума и обсуждаются классификационные схемы экстремальных значений модуля Юнга и модуля сдвига, трех стационарных значений коэффициента Пуассона.

## 2. Упругие характеристики

Модуль Юнга  $E(\mathbf{n})$  и коэффициент Пуассона  $\nu(\mathbf{n}, \mathbf{m})$  для анизотропных материалов зависят от единичных векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{m}$  [47]

$$\frac{1}{E(\mathbf{n})} = s_{ijkl}n_i n_j n_k n_l, \quad \frac{\nu(\mathbf{n}, \mathbf{m})}{E(\mathbf{n})} = -s_{ijkl}n_i n_j m_k m_l. \quad (1)$$

Здесь  $s_{ijkl}$  – тензорные коэффициенты податливости. В случае одноосного растяжения единичный вектор  $\mathbf{n}$  направлен вдоль оси растяжения, а вектор  $\mathbf{m}$  перпендикулярен ему.

Модуль сдвига  $G(\mathbf{n}, \mathbf{m})$  в линейной упругости определяется двумя единичными векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{m}$  [47]

$$G^{-1}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = 4s_{ijkl}n_i m_j n_k m_l. \quad (2)$$

Вектор  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к плоскости скольжения, а вектор  $\mathbf{m}$  – единичный вектор направления скольжения.

Упругость гексагональных кристаллов характеризуется пятью матричными коэффициентами податливости  $s_{11}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{13}$ ,  $s_{33}$ ,  $s_{44}$  и дополнительным условием  $s_{66} = 2(s_{11} - s_{12})$  (далее используем матричные коэффициенты податливости вместо тензорных коэффициентов  $s_{ijkl}$ ) [48].

Модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль сдвига для гексагональных кристаллов можно записать в виде

$$\begin{aligned} E^{-1}(\mathbf{n}) &= s_{11}(1 - n_3^2)^2 + s_{33}n_3^4 + (2s_{13} + s_{44})(1 - n_3^2)n_3^2, \\ -\frac{\nu(\mathbf{n}, \mathbf{m})}{E(\mathbf{n})} &= s_{12}(m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (s_{11} + s_{33} - 2s_{13} - s_{44})m_3^2 n_3^2 + s_{13}(m_3^2 + n_3^2), \\ G^{-1}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) &= s_{66}(m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + 4(s_{11} + s_{33} - 2s_{13} - s_{44})m_3^2 n_3^2 + s_{44}(m_3^2 + n_3^2). \end{aligned}$$

Если ориентацию кристаллического стержня в кристаллографической системе координат описывать с помощью трех углов Эйлера  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , то можно использовать следующие выражения единичных векторов  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{m}$  через углы Эйлера  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \sin \theta \\ -\cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \\ \cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Тогда модуль Юнга  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$  и модуль сдвига  $G$  можно переписать через угловые зависимости следующим образом

$$\frac{1}{s_{11}E} = 1 + (\Pi_1 - \Pi_{01} \sin^2 \theta) \cos^2 \theta, \quad (3)$$

$$-\frac{\nu}{s_{13}E} = 1 + (\Pi_2 \sin^2 \psi + \Pi_{02} \cos^2 \theta \cos^2 \psi) \sin^2 \theta, \quad (4)$$

$$\frac{1}{s_{44}G} = 1 + (\Pi_3 \sin^2 \psi + 4\Pi_{03} \cos^2 \theta \cos^2 \psi) \sin^2 \theta, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{01} &\equiv \frac{\delta}{s_{11}}, & \Pi_{02} &\equiv \frac{\delta}{s_{13}}, & \Pi_{03} &\equiv \frac{\delta}{s_{44}}, \\ \Pi_1 &\equiv \frac{s_{33} - s_{11}}{s_{11}}, & \Pi_2 &\equiv \frac{s_{12} - s_{13}}{s_{13}}, & \Pi_3 &\equiv \frac{2s_{11} - 2s_{12} - s_{44}}{s_{44}}, \\ \delta &\equiv s_{11} + s_{33} - 2s_{13} - s_{44}. \end{aligned}$$

Модуль Юнга гексагональных кристаллов зависит лишь от одного угла Эйлера  $\theta$ . Коэффициент Пуассона и модуль сдвига оказываются зависящим от двух углов Эйлера  $\theta$ ,  $\psi$  и не зависят от угла  $\varphi$ . Безразмерные параметры  $\Pi_{01}$ ,  $\Pi_{02}$ ,  $\Pi_{03}$ ,  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  являются характеристиками степени анизотропии гексагональных кристаллов. В пределе изотропной среды эти факторы анизотропии обращаются в нуль. Количество факторов анизотропии для гексагональных кристаллов оказывается в два раза больше, чем у кубических кристаллов. Кубические кристаллы характеризуются тремя безразмерными факторами анизотропии  $\Pi \equiv -2s_{12}/\Delta$ ,  $\delta \equiv \Delta/s_{11}$ ,  $P = 2(s_{11} - s_{12})/s_{44}$  [15, 43, 46]. Здесь  $\Delta \equiv s_{11} - s_{12} - 0.5s_{44}$ . Основываясь на термодинамических неравенствах  $s_{11} > 0$ ,  $s_{33} > 0$ , накладываемых на коэффициенты податливости, находим следующие ограничения для безразмерных параметров гексагональных кристаллов:  $\Pi_1 > -1$ ,  $\Pi_3 > -1$ . Зависимости модуля Юнга, коэффициента Пуассона и модуля сдвига являются периодическими функциями  $\theta$  и  $\psi$  с периодами  $T_\theta = T_\psi = \pi$ .

### 3. Экстремальные значения модуля Юнга

Проанализируем экстремальные значения модуля Юнга. Необходимое условие экстремальности модуля Юнга требуют выполнения условия стационарности

$$\frac{dE(\theta)}{d\theta} = 0.$$

В результате дифференцирования выражения для модуля Юнга (3) по углу  $\theta$  это условие дает следующее уравнение для стационарных значений

$$\sin 2\theta (2\Pi_{01} \cos^2 \theta + \Pi_1 - \Pi_{01}) = 0.$$

Решениями уравнения будут три стационарные точки  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi/2$  и  $\theta_3$ ,  $\cos^2 \theta_3 = (\Pi_{01} - \Pi_1)/(2\Pi_{01})$ . Этим стационарным точкам соответствуют три значения модуля Юнга. Два из них имеют простой вид

$$E_1 = \frac{1}{s_{33}} = \frac{1}{s_{11}(1 + \Pi_1)}, \quad (6)$$

$$E_2 = \frac{1}{s_{11}}, \quad (7)$$

и достигаются при  $\theta_1 = 0$  и  $\theta_2 = \pi/2$  соответственно. Третье стационарное значение  $E_3 > 0$

$$E_3 = \frac{4\Pi_{01}}{4\Pi_{01} - (\Pi_1 - \Pi_{01})^2} \frac{1}{s_{11}} \quad (8)$$

может достигаться при

$$\cos^2 \theta_3 = \frac{\Pi_{01} - \Pi_1}{2\Pi_{01}}.$$

Исследуем далее значения  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  с точки зрения выполнения достаточного условия экстремума функции одной переменной. Если в указанных стационарных точках вторая производная модуля Юнга больше нуля, то стационарная точка является точкой минимума (и наоборот).

В случае стационарной точки  $\theta_1 = 0$  мы имеем  $E = E_1$  и

$$\frac{d^2 E(\theta)}{d\theta^2} = \frac{2(\Pi_1 + \Pi_{01})}{s_{11}(1 + \Pi_1)^2}. \quad (9)$$

Тогда согласно достаточному условию экстремума функции с учетом положительности коэффициента податливости  $s_{11}$  и  $(1 + \Pi_1)^2$  значение модуля Юнга  $E_1$  будет минимумом при  $\Pi_1 + \Pi_{01} > 0$  и максимумом при  $\Pi_1 + \Pi_{01} < 0$ . Значение  $E_1$  соответствует растяжению в направлении  $[0001]$  ( $E_1 = E_{[0001]}$ ).

В случае стационарной точки  $\theta_2 = \pi/2$  имеем  $E = E_2$  и

$$\frac{d^2 E(\theta)}{d\theta^2} = \frac{2(\Pi_{01} - \Pi_1)}{s_{11}}. \quad (10)$$

Модуль Юнга  $E_2$  будет минимумом при  $\Pi_{01} - \Pi_1 > 0$  и максимумом при  $\Pi_{01} - \Pi_1 < 0$ . Значение  $E_2$  соответствует растяжению в направлении  $[2\bar{1}\bar{1}0]$  ( $E_2 = E_{[2\bar{1}\bar{1}0]}$ ).

Вторая производная модуля Юнга для стационарной точки  $\theta_3$ ,  $\cos^2 \theta_3 = (\Pi_{01} - \Pi_1)/(2\Pi_{01})$  имеет вид

$$\frac{d^2 E(\theta)}{d\theta^2} = \frac{32\Pi_{01}(\Pi_1^2 - \Pi_{01}^2)}{s_{11}[(\Pi_1 + \Pi_{01})^2 - 4\Pi_{01}]^2}. \quad (11)$$

Следовательно, модуль Юнга  $E_3$  является минимумом при  $\Pi_{01}(\Pi_1^2 - \Pi_{01}^2) > 0$  и максимумом при  $\Pi_{01}(\Pi_1^2 - \Pi_{01}^2) < 0$ . Анализ, проведенный для 143 гексагональных кристаллов из справочника [49], показал, что у 27 кристаллов отсутствует экстремальное значение  $E_3$ . Только два экстремальных значения  $E_1$  и  $E_2$  имеют, например, бериллий Be, титан Ti, таллий Tl, кадмий Cd, сплав CdMg, сплав CdZn, In<sub>2</sub>Bi, MnAs, Mn<sub>5</sub>Si<sub>3</sub>, NdCo<sub>5</sub>.

На Рис.1 представлена классификационная схема для экстремумов модуля Юнга в зависимости от двух безразмерных параметров  $\Pi_{01}$  и  $\Pi_1$ , полученная на основе анализа формул (6)-(11). На этом рисунке точками нанесены значения безразмерных параметров  $\Pi_{01}$  и  $\Pi_1$  для 143 гексагональных кристаллов, представленных в [49]. Большинство гексагональных кристаллов находятся в интервале  $-1 < \Pi_1 < 0$  и зоне с  $E_{1m} > E_{2m} > E_{3m}$ . Здесь и ниже под  $E_{im}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) будем обозначать экстремальные значения модуля Юнга  $E_i$ . На классификационной схеме выделено шесть зон с различными неравенствами между экстремальными значениями модуля Юнга  $E_{1m}$ ,  $E_{2m}$ ,  $E_{3m}$ . Для каждой из этих шести зон на Рис.2 приведены примеры угловых зависимостей модуля Юнга некоторых гексагональных кристаллов. В Табл.1 для кристаллов, представленных на Рис.2, даются экстремальные значения модуля Юнга.

Таблица 1. Экстремальные значения модулей Юнга для некоторых гексагональных кристаллов. Глобальные максимальные и минимальные значения выделены полужирным.

Кристаллы	$E_1$		$E_2$		$E_3$	
	ГПа		ГПа		ГПа	
Cd	<b>28.9</b>	min	<b>80.6</b>	max	-	-
Ba(NO <sub>2</sub> ) <sub>2</sub> ·H <sub>2</sub> O	<b>22.2</b>	min	<b>37.0</b>	max	-	-
Cd <sub>0.751</sub> Zn <sub>0.249</sub>	<b>31.4</b>	min	<b>87.0</b>	max	-	-
Zn	<b>36.1</b>	min	122	min	<b>126</b>	max
BN <sub>3</sub>	<b>136</b>	min	138	min	<b>165</b>	max
$\beta$ -LiAlSiO <sub>4</sub>	<b>67.1</b>	min	112	min	<b>138</b>	max
Tc	345	min	<b>313</b>	min	<b>402</b>	max
WC	<b>826</b>	min	<b>595</b>	min	<b>827</b>	max
LiKSO <sub>4</sub>	54.0	min	<b>40.2</b>	min	<b>54.1</b>	max
CeNi <sub>5</sub>	<b>210</b>	max	<b>152</b>	min	-	-
MnAs	<b>108</b>	max	<b>38.5</b>	min	-	-
In <sub>2</sub> Bi	<b>35.2</b>	max	<b>16.4</b>	min	-	-
Mg	<b>50.8</b>	max	45.5	max	<b>42.9</b>	min
CdSe	<b>59.5</b>	max	43.3	max	<b>38.9</b>	min
CsNiCl <sub>3</sub>	<b>58.5</b>	max	30.1	max	<b>18.8</b>	min
MoS <sub>2</sub>	45.2	max	<b>209</b>	max	<b>44.9</b>	min
GaN	150	max	<b>196</b>	max	<b>82.6</b>	min
InN	82.6	max	<b>104</b>	max	<b>35.5</b>	min

Как видно из Рис.1 существуют две зоны, в которых отсутствует экстремальное значение  $E_{3m}$ . Угловые зависимости модуля Юнга для этих зон представлены на Рис.2а и Рис.2г. Материалами, у которых имеется два экстремальных значения  $E_{1m}$  и  $E_{2m}$ , являются, например, бериллий Be и его сплавы с Cu, кадмий Cd и его сплавы с Mg или Zn, In<sub>2</sub>Bi, MnAs, Tl и Ag<sub>2</sub>Al. В двух зонах  $E_{3m} > E_{2m} > E_{1m}$  (Рис.2б) и  $E_{3m} > E_{1m} > E_{2m}$  (Рис.2в) имеем максимальное значение  $E_{3m}$ . Два других значения  $E_{1m}$  и  $E_{2m}$  являются минимальными значениями. Для кристаллов Zn и BN<sub>3</sub> (Рис.2б) значение модуля Юнга  $E_{1m}$  является глобальным минимальным значением, а  $E_{2m}$  - локальным минимумом. В случае кристаллов Tc и WC (Рис.2в) имеет место обратная ситуация:  $E_{2m}$  - глобальный минимум, а  $E_{1m}$  - локальный минимум. Для зон  $E_{1m} > E_{2m} > E_{3m}$  (Рис.2д) и  $E_{2m} > E_{1m} > E_{3m}$  (Рис.2е) значение модуля Юнга  $E_{3m}$  является глобальным минимумом, а значения  $E_{1m}$  и  $E_{2m}$  - максимумы. Значение  $E_{1m}$  будет глобальным максимумом для кристаллов Mg и CdSe (Рис.2д) и локальным максимумом для кристаллов MoS<sub>2</sub> и GaN (Рис.2е). В случае экстремального значения модуля Юнга  $E_{2m}$  имеет место обратная ситуация: с локальным максимумом для кристаллов Mg и CdSe и глобальным максимумом для кристаллов MoS<sub>2</sub> и GaN.

Наибольшая разница между максимальным и минимальным значениями модуля Юнга обнаруживается у графита ( $E_{\max}/E_{\min} = 71.8$ ). Большая разница ( $E_{\max}/E_{\min} > 5$ ) также выявляется у RbNiCl<sub>3</sub> ( $E_{\max}/E_{\min} = 5.52$ ) и CsNiF<sub>3</sub>



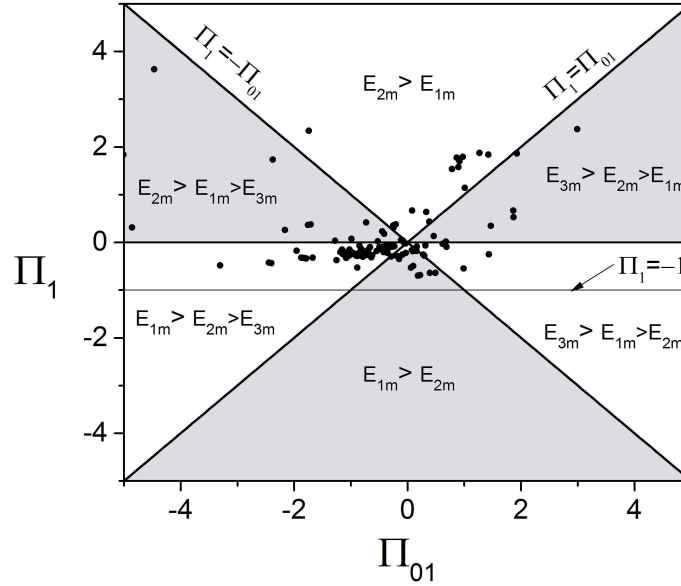


Рис. 1. Классификационная схема экстремальных значений модуля Юнга гексагональных кристаллов на плоскости безразмерных параметров  $\Pi_{01}$  и  $\Pi_1$ . Кругами отмечены значения безразмерных параметров  $\Pi_{01}$  и  $\Pi_1$  для 143 гексагональных кристаллов из [49].

( $E_{\max}/E_{\min} = 5.72$  для одного экспериментального набора коэффициентов податливости и 10.6 для второго набора коэффициентов податливости). Максимальный модуль Юнга с  $E_{\max} > 500$  ГПа обнаруживается у графита ( $E_{\max} = 1020$  ГПа), WC ( $E_{\max} = 827$  ГПа), SiC ( $E_{\max} = 556$  ГПа), Re ( $E_{\max} = 588$  ГПа) и Ru ( $E_{\max} = 550$  ГПа).

#### 4. Экстремальные значения коэффициента Пуассона

Проанализируем экстремальные значения коэффициента Пуассона. Выражение (4) для коэффициента Пуассона зависит от двух углов Эйлера. Необходимые условия экстремальности (достижения максимумов или минимумов) коэффициента Пуассона состоят в выполнении условий стационарности

$$\frac{\partial \nu(\theta, \psi)}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial \nu(\theta, \psi)}{\partial \theta} = 0.$$

В результате дифференцирования выражения для коэффициента Пуассона (4) по углам  $\theta$  и  $\psi$  эти условия дают следующую систему уравнений для стационарных значений углов

$$\begin{cases} \sin^2 \theta \sin 2\psi (\Pi_2 - \Pi_{02} \cos^2 \theta) = 0 \\ \sin 2\theta [\Pi_1 + \Pi_{01} \cos 2\theta + \Pi_2 \sin^2 \psi (1 + \Pi_1 - \Pi_{01} \sin^4 \theta) + \\ + \Pi_{02} \cos^2 \psi (\cos 2\theta + \Pi_1 \cos^4 \theta)] = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Решениями первого уравнения будут  $\theta = 0$ ;  $\psi = 0$  или  $\psi = \pi/2$  и  $\cos^2 \theta = \Pi_2/\Pi_{02}$ . Подстановка их во второе уравнение системы (12) позволяет найти восемь стационарных точек.

Значение коэффициента Пуассона

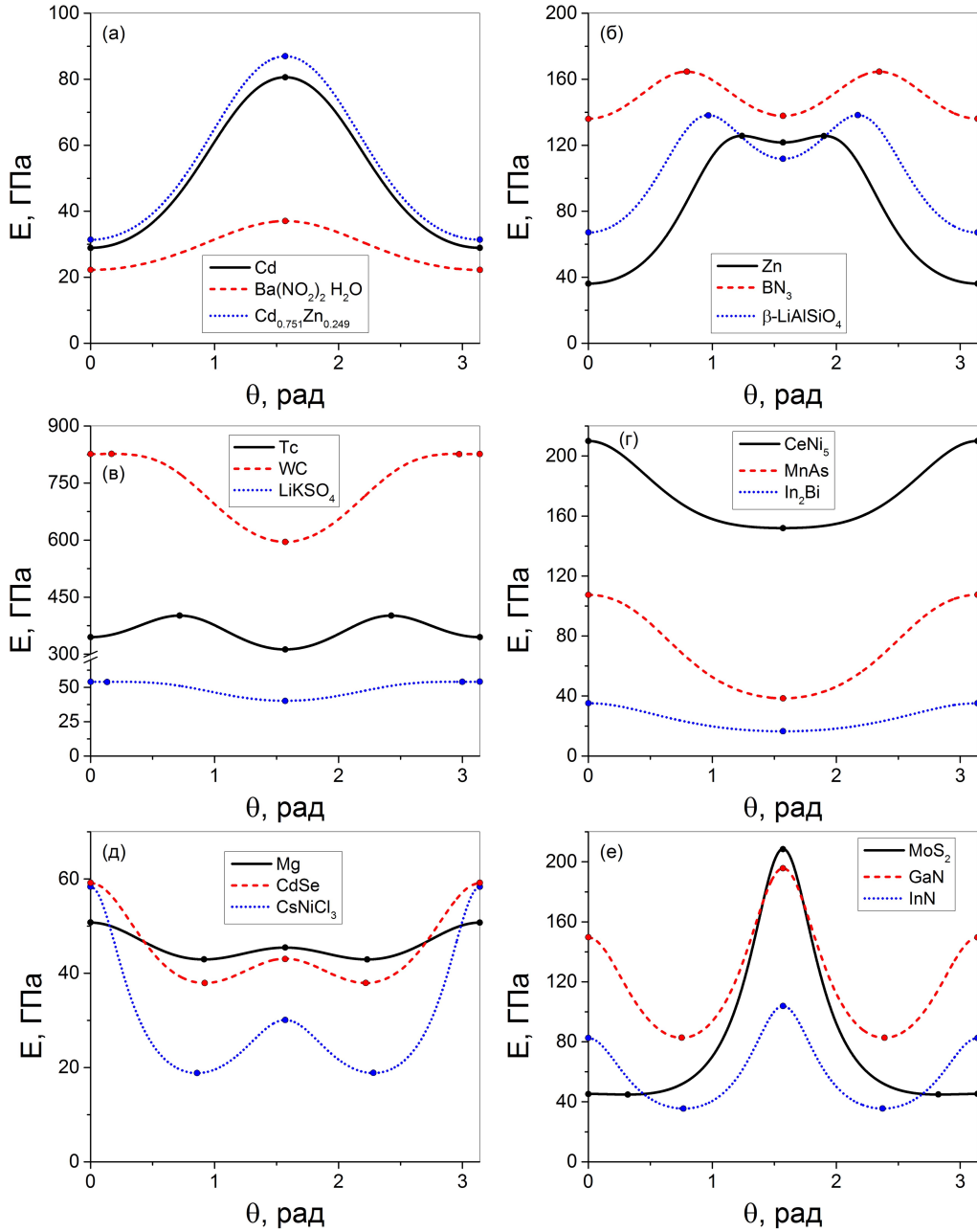


Рис. 2. Угловые зависимости модулей Юнга для некоторых гексагональных кристаллов, попадающих в зоны:  $E_{2m} > E_{1m}$  (а),  $E_{3m} > E_{2m} > E_{1m}$  (б),  $E_{3m} > E_{1m} > E_{2m}$  (в),  $E_{1m} > E_{2m}$  (г),  $E_{1m} > E_{2m} > E_{3m}$  (д),  $E_{2m} > E_{1m} > E_{3m}$  (е).

$$\nu_1 = \nu_{(0001),[0001]} = -\frac{s_{13}}{s_{33}} = -\frac{s_{13}}{s_{11}(1 + \Pi_1)} \quad (13)$$

достигается при  $\theta = 0$  и произвольном угле  $\psi$ . Данное стационарное значение соответствует растяжению в направлении  $[0001]$  и поперечной деформации в плоскости  $(0001)$ .

Значения коэффициентов Пуассона

$$\nu_2 = \nu_{[2\bar{1}\bar{1}0],[01\bar{1}0]} = -\frac{s_{13}}{s_{11}} \quad (14)$$

и

$$\nu_3 = \nu_{[000\bar{1}],[01\bar{1}0]} = -\frac{s_{12}}{s_{11}} = -\frac{s_{13}(1 + \Pi_2)}{s_{11}} \quad (15)$$

соответствуют точкам  $\theta = \pi/2$ ,  $\psi = 0$  и  $\theta = \psi = \pi/2$ , соответственно.

Гексагональные кристаллы имеют следующие термодинамические ограничения, накладываемые на коэффициенты податливости

$$s_{11} > 0, \quad s_{33} > 0, \quad s_{44} > 0, \quad -s_{11} < s_{12} < s_{11}, \quad s_{33}(s_{11} + s_{12}) > 2s_{13}^2.$$

Используя эти неравенства и формулы (13)–(15), можно записать ограничения, накладываемые на коэффициенты Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$ ,

$$\begin{aligned} -\sqrt{\frac{s_{11}}{2s_{33}}(1 - \nu_3)} < \nu_1 < \sqrt{\frac{s_{11}}{2s_{33}}(1 - \nu_3)}, \\ -\sqrt{\frac{s_{33}}{2s_{11}}(1 - \nu_3)} < \nu_2 < \sqrt{\frac{s_{33}}{2s_{11}}(1 - \nu_3)}, \\ -1 < \nu_3 < 1 - \frac{2s_{13}^2}{s_{11}s_{33}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Численный анализ верхней границы  $c = 1 - 2s_{13}^2/(s_{11}s_{33})$  для 173 гексагональных кристаллов показывает, что эти значения для большинства кристаллов находятся в интервале от 0.65 до 0.9. Наименьшее значение  $c$  обнаруживается для цинка (0.57). В то время как коэффициент Пуассона  $\nu_3$  для цинка равен  $-0.07$ . Наименьшая разница между коэффициентом  $\nu_3$  и  $c$  выявляется у  $C_7H_{12}$  (0.76 и 0.86),  $Tl$  (0.77 и 0.91),  $In_2Bi$  (0.72 и 0.90),  $BN_3$  (0.55 и 0.69) и  $CuCl$  (0.68 и 0.88). Стационарные значения коэффициента Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_4$ ,  $\nu_5$ ,  $\nu_6$ ,  $\nu_7$ ,  $\nu_8$  не имеют простых ограничений. В [2] было показано, что коэффициент Пуассона для гексагональных кристаллов может иметь сколь угодно большое положительное или отрицательное значение при условии положительной определенности плотности энергии деформации.

Существование других стационарных значений возможно при выполнении определенных ограничений на безразмерные комплексы коэффициентов податливости. Дополнительные стационарные значения коэффициента Пуассона имеют следующую общую структуру

$$\nu = -\frac{s_{13}}{s_{11}} f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_{01}, \Pi_{02}, \psi, \cos^2 \theta).$$

При этом подходящие значения углов  $\theta$ ,  $\psi$  могут быть найдены среди решений системы уравнений (12). Два решения уравнения (12) при  $\sin 2\psi = 0$ , т.е. при  $\psi = 0$  и  $\psi = \pi/2$ , позволяют привести второе уравнение в (12) к двум квадратным уравнениям относительно  $\cos^2 \theta$  и  $\sin^2 \theta$ , решение которых позволяет получить явные формулы стационарных значений.

При  $\psi = 0$  стационарные значения коэффициента Пуассона имеют вид

$$\nu_{4,5} = -\frac{s_{13}}{s_{11}} \frac{1 + 0.25\Pi_{02} \sin^2 2\theta}{1 + \Pi_1 \cos^2 \theta - 0.25\Pi_{01} \sin^2 2\theta} \quad (17)$$

при ограничениях

$$0 \leq \cos^2 \theta_{4,5} = \frac{-(\Pi_{01} + \Pi_{02}) \pm \sqrt{D_1}}{\Pi_1 \Pi_{02}} \leq 1, \quad (18)$$

$$D_1 = (\Pi_{01} + \Pi_{02})^2 - \Pi_1 \Pi_{02} (\Pi_1 - \Pi_{01} - \Pi_{02}) \geq 0. \quad (19)$$

Значение  $\nu_4$  получается если в формуле (18) брать знак плюс, а  $\nu_5$  - минус.

При  $\psi = \pi/2$  получаются следующие ограничения

$$0 \leq \sin^2 \theta_{6,7} = \frac{-\Pi_{01} \pm \sqrt{D_2}}{\Pi_{01} \Pi_2} \leq 1, \quad (20)$$

$$D_2 = \Pi_{01}^2 + \Pi_{01} \Pi_2 (\Pi_1 + \Pi_{01} + \Pi_2 + \Pi_1 \Pi_2) \geq 0 \quad (21)$$

при которых имеют место стационарные значения коэффициента Пуассона

$$\nu_{6,7} = -\frac{s_{13}}{s_{11}} \frac{1 + \Pi_2 \sin^2 \theta}{1 + \Pi_1 \cos^2 \theta - 0.25\Pi_{01} \sin^2 2\theta}. \quad (22)$$

Еще одно решение получается из второго уравнения в (12) при

$$\cos^2 \psi = \frac{a}{b}, \quad (23)$$

$$a = (\Pi_1 - \Pi_{01})\Pi_{02}^2 + \Pi_2[\Pi_{02}(1 + \Pi_1 + 2\Pi_{01}) - \Pi_1(\Pi_{02}^2 + \Pi_2^2 - 2\Pi_2\Pi_{02})],$$

$$b = \Pi_{02}(\Pi_{02} - \Pi_2)(\Pi_{02} + \Pi_1\Pi_2) + \Pi_{01}\Pi_2(\Pi_{02}^2 + 2\Pi_2\Pi_{02} - \Pi_2^2),$$

используя подстановку в него решения первого уравнения (12) вида  $\cos^2 \theta = \Pi_2/\Pi_{02}$ . Решение этих двух уравнений позволяет определить из (4) экстремальное значение коэффициента Пуассона  $\nu_8$ .

Исследуем далее значения коэффициентов Пуассона  $\nu_1 - \nu_8$  с точки зрения выполнения достаточного условия экстремума функции двух переменных. Если в указанных стационарных точках из вторых производных коэффициента Пуассона

$$A = \frac{\partial^2 \nu}{\partial \theta^2}, \quad B = \frac{\partial^2 \nu}{\partial \theta \partial \psi}, \quad C = \frac{\partial^2 \nu}{\partial \psi^2}$$

образовать комбинацию

$$D = AC - B^2,$$

то при  $D > 0$  достигаются экстремумы коэффициента Пуассона в соответствующей стационарной точке (максимум при  $A < 0$  и  $C < 0$  или минимум при  $A > 0$  и  $C > 0$ ). В случае  $D < 0$  в стационарной точке экстремумы отсутствуют, а при  $D = 0$  требуется дополнительный анализ [50].

В случае стационарной точки с  $\theta = 0$  и любым  $\psi$  имеем  $\nu = \nu_1$ , и комбинация коэффициентов  $D$  обращается в нуль ( $D = 0$ ). В силу  $D = 0$  требуется дополнительный

Таблица 2. Значения коэффициентов Пуассона  $\nu_1 - \nu_7$  для некоторых гексагональных кристаллов. Глобальные максимальные и минимальные значения выделены полужирным. Приняты обозначения: М – максимум, м – минимум.

Кристаллы	$\nu_1$		$\nu_2$		$\nu_3$		$\nu_4$		$\nu_5$		$\nu_6$		$\nu_7$	
BN <sub>3</sub>	0.39	-	0.39	-	0.55	-	-	-	<b>0.27</b>	m	<b>0.58</b>	M	-	-
Cd	0.26	-	<b>0.73</b>	M	<b>0.10</b>	m	-	-	0.25	m	0.27	M	-	-
CdS	0.33	-	<b>0.26</b>	m	<b>0.48</b>	M	0.45	M	-	-	-	-	0.31	m
CdTe	0.29	-	<b>0.22</b>	m	<b>0.47</b>	M	0.44	M	-	-	-	-	0.28	m
Co	0.25	-	<b>0.18</b>	m	<b>0.46</b>	M	0.35	M	-	-	-	-	-	-
CuCl	0.36	-	<b>0.17</b>	m	<b>0.68</b>	M	0.44	M	-	-	-	-	0.36	-
Gd	0.24	-	<b>0.21</b>	m	<b>0.31</b>	M	0.29	M	-	-	-	-	0.24	m
GaN	0.37	-	0.49	-	0.18	-	<b>0.72</b>	M	-	-	-	-	<b>0.13</b>	m
GaSe	<b>0.09</b>	m	0.26	-	0.26	-	<b>0.50</b>	M	-	-	-	-	-	-
GaS	0.08	-	0.24	m	0.26	M	<b>0.54</b>	M	-	-	-	-	<b>0.07</b>	m
Hf	0.26	-	<b>0.22</b>	m	<b>0.35</b>	M	0.28	M	-	-	-	-	-	-
Ho	0.21	-	<b>0.19</b>	m	<b>0.28</b>	M	0.24	M	-	-	-	-	-	-
InN	0.41	-	0.52	-	0.22	-	<b>0.79</b>	M	-	-	-	-	<b>0.12</b>	m
Mg	0.25	-	<b>0.23</b>	m	<b>0.35</b>	M	0.32	M	-	-	-	-	0.25	m
MoS <sub>2</sub>	0.12	-	<b>0.58</b>	M	<b>-0.28</b>	m	-	-	-	-	-	-	-	-
Sc	0.21	-	<b>0.18</b>	m	<b>0.34</b>	M	0.32	M	-	-	-	-	0.21	m
SiC	0.09	-	<b>0.08</b>	m	0.18	M	<b>0.25</b>	M	-	-	-	-	-	-
Tl	0.38	-	0.12	-	0.779	-	-	-	<b>0.10</b>	m	<b>0.783</b>	M	-	-
Ti	0.27	-	<b>0.19</b>	m	<b>0.49</b>	M	0.27	-	-	-	-	-	-	-
WC	0.27	-	0.20	-	0.28	-	-	-	<b>0.15</b>	m	<b>0.30</b>	M	-	-
Zn	0.25	-	<b>0.85</b>	M	<b>-0.07</b>	m	-	-	0.07	m	0.28	M	-	-
ZnO	0.32	-	<b>0.27</b>	m	<b>0.44</b>	M	0.37	M	-	-	-	-	0.32	m
ZnS	0.26	-	<b>0.20</b>	m	<b>0.398</b>	M	0.395	M	-	-	-	-	0.25	m

анализ для каждого конкретного кристалла. Коэффициент Пуассона  $\nu_1$  будет экстремумом, например, для BaSc<sub>x</sub>Fe<sub>12-x</sub>O<sub>19</sub> ( $\nu_1 = \nu_{\min}$ ), GaSe ( $\nu_1 = \nu_{\min}$ ), Zr-O ( $\nu_1 = \nu_{\max}$ ).

В случае стационарной точки  $\theta = \pi/2$ ,  $\psi = 0$  имеем  $\nu = \nu_2$  и

$$D = \frac{4s_{13}^2(\Pi_{02} - \Pi_1 + \Pi_{01})\Pi_2}{s_{11}^2},$$

$$A = -\frac{2s_{13}(\Pi_{02} - \Pi_1 + \Pi_{01})}{s_{11}}, \quad C = -\frac{2s_{13}\Pi_2}{s_{11}}.$$

Тогда согласно достаточному условию экстремума функции значение коэффициента Пуассона  $\nu_2$  будет экстремальным, если  $(\Pi_{02} - \Pi_1 + \Pi_{01})\Pi_2 > 0$ . Значение  $\nu_2$  будет максимумом при  $s_{13}(\Pi_{02} - \Pi_1 + \Pi_{01}) > 0$  или  $s_{13}\Pi_2 > 0$  и минимумом при  $s_{13}(\Pi_{02} - \Pi_1 + \Pi_{01}) < 0$  или  $s_{13}\Pi_2 < 0$  с учетом положительности коэффициента податливости  $s_{11}$ .

В случае стационарной точки  $\theta = \psi = \pi/2$  имеем  $\nu = \nu_3$  и

$$D = -\frac{4s_{13}^2 [(\Pi_{01} - \Pi_1)(1 + \Pi_2) - \Pi_2] \Pi_2}{s_{11}^2},$$

$$A = -\frac{2s_{13} [(\Pi_{01} - \Pi_1)(1 + \Pi_2) - \Pi_2]}{s_{11}}, \quad C = \frac{2s_{13}\Pi_2}{s_{11}}.$$

Значение коэффициента Пуассона  $\nu_3$  будет экстремальным, если  $[(\Pi_{01} - \Pi_1)(1 + \Pi_2) - \Pi_2]\Pi_2 > 0$ . Значение  $\nu_3$  является максимумом при  $s_{13}[(\Pi_{01} - \Pi_1)(1 + \Pi_2) - \Pi_2] > 0$  или  $s_{13}\Pi_2 < 0$  и минимумом при  $s_{13}[(\Pi_{01} - \Pi_1)(1 + \Pi_2) - \Pi_2] < 0$  или  $s_{13}\Pi_2 > 0$ .

Для стационарных значений коэффициента Пуассона  $\nu_4 - \nu_8$  вторые производные  $A$ ,  $C$  и  $D$  имеют громоздкий аналитический вид. Поэтому в работе был проведен только их численный анализ для 143 гексагональных кристаллов. Результаты этого анализа представлены в Табл.2. В этой таблице приведены значения только семи стационарных значений коэффициента Пуассона  $\nu_1 - \nu_7$ . Значение  $\nu_8$  пропущено, так как проведенный анализ изменчивости коэффициента Пуассона для 143 гексагональных кристаллов показал, что коэффициент  $\nu_8$  является точкой перегиба. Глобальные максимальные и минимальные значения в Табл.2 выделены полужирным.

С помощью численного анализа изменчивости коэффициента Пуассона гексагональных кристаллов удается выявить семь кристаллов с отрицательным минимальным коэффициентом Пуассона. Этими кристаллами являются Be ( $\nu_{\min} = -0.005$ ), Be-Cu at 2.4% ( $\nu_{\min} = -0.04$ ), MnAs ( $\nu_{\min} = -0.04$ ), MoS<sub>2</sub> ( $\nu_{\min} = -0.28$ ), C<sub>7</sub>H<sub>12</sub> ( $\nu_{\min} = -0.15$ ), TiB<sub>2</sub> ( $\nu_{\min} = -0.03$ ) и Zn ( $\nu_{\min} = -0.07$ ). На Рис.3 приведены поверхности коэффициента Пуассона для этих гексагональных ауксетиков. Поверхность коэффициента Пуассона для сплава BeCu не приведена, так как слабо отличается от поверхности Be. Также отрицательный коэффициент Пуассона обнаруживается у кристаллов Ca<sub>10</sub>(PO<sub>4</sub>)<sub>6</sub>(OH)<sub>2</sub>, CdS и InSe. Однако эти три кристалла имеют два (и более) экспериментальных набора коэффициентов податливости. При других наборах коэффициент Пуассона оказывается положительным. Наибольшие значения коэффициента Пуассона с  $\nu_{\max} \geq 0.8$  выявляются у графита ( $\nu_{\max} = 0.86$ ), RbNiCl<sub>3</sub> ( $\nu_{\max} = 0.84$ ), RbMnCl<sub>3</sub> ( $\nu_{\max} = 0.81$ ) и KMg<sub>3</sub>AlSi<sub>3</sub>O<sub>10</sub>(OH,F)<sub>2</sub> ( $\nu_{\max} = 0.80$ ). Обнаруживается 29 кристаллов, у которых максимальное значение коэффициента Пуассона больше 0.5 (больше верхней границы для изотропных материалов).

Анализ стационарных значений коэффициента Пуассона, описываемых формулами (13) - (22), показывает, что коэффициенты  $\nu_1$  и  $\nu_2$  будут отрицательными при  $s_{13} > 0$ . Однако большинство гексагональных кристаллов имеют отрицательное значение коэффициента податливости  $s_{13}$ . Положительный коэффициент  $s_{13}$  выявляется только у одного из пяти наборов упругих констант CdS [49]. Стационарное значение коэффициента Пуассона  $\nu_3$  оказывается отрицательным при  $s_{12} > 0$ . Это имеет место для кристаллов MoS<sub>2</sub>, Zn и одного из наборов упругих констант для Ca<sub>10</sub>(PO<sub>4</sub>)<sub>6</sub>(OH)<sub>2</sub>, InSe из [49]. В связи с тем, что большинство гексагональных кристаллов имеют отрицательное значение коэффициента податливости  $s_{13}$ , отрицательные коэффициенты Пуассона  $\nu_{4,5}$  и  $\nu_{6,7}$  будут наблюдаться при  $\Pi_{02} < -4$  и  $\Pi_2 < -1$  соответственно. Условие  $\Pi_{02} < -4$  выполняется для гексагональных ауксетиков Be ( $\Pi_{02} = -5.20$ ), Be-Cu at 2.4% ( $\Pi_{02} = -18.33$ ), MnAs ( $\Pi_{02} = -5.15$ ), C<sub>7</sub>H<sub>12</sub> ( $\Pi_{02} = -5.58$ ) и TiB<sub>2</sub> ( $\Pi_{02} = -4.19$ ). Ауксетиков, у которых коэффициенты Пуассона  $\nu_{6,7}$  отрицательны ( $\Pi_2 < -1$ ), не обнаружено, т.к. условия (20) и (21) для этих материалов не выполняются.

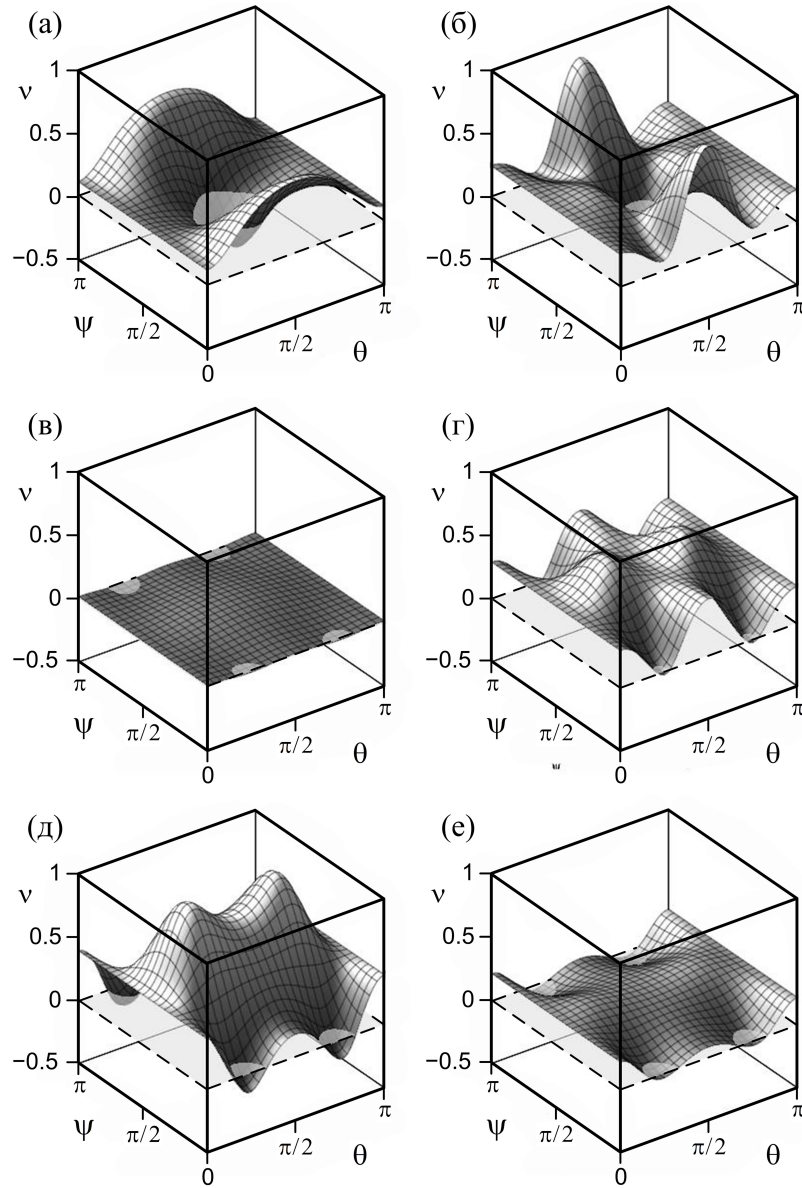


Рис. 3. Поверхности коэффициентов Пуассона гексагональных ауксетиков  $\text{MoS}_2$  (а),  $\text{Zn}$  (б),  $\text{Be}$  (в),  $\text{TiB}_2$  (г),  $\text{C}_7\text{H}_{12}$  (д) и  $\text{MnAs}$  (е).

На Рис.4, основываясь на формулах (13) - (15), представлена классификационная схема для трех коэффициентов Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  и  $\nu_3$  в зависимости от двух безразмерных параметров  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . На этом рисунке точками нанесены значения безразмерных параметров  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  для 143 гексагональных кристаллов из [49]. Другие пять коэффициентов Пуассона  $\nu_4 - \nu_8$  зависят от четырех безразмерных параметров  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_{01}$ ,  $\Pi_{02}$  (см. формулы (13)-(22)). На Рис.4 точками нанесены значения безразмерных параметров  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  для 143 гексагональных кристаллов из [Ландолт]. Как видно из рисунка большинство кристаллов находится в интервале  $-1 < \Pi_1 < 0$  и  $\nu_3 > \nu_1 > \nu_2$ .

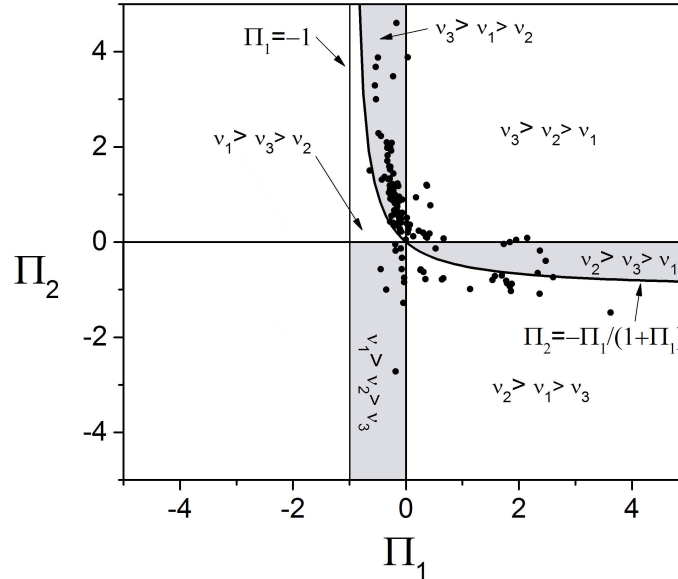


Рис. 4. Классификационная схема трех экстремальных значений коэффициента Пуассона гексагональных кристаллов на плоскости безразмерных параметров  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Кружками отмечены значения безразмерных параметров  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  для 143 гексагональных кристаллов из [49].

На классификационной схеме выделено шесть зон с различными неравенствами между экстремальными значениями коэффициента Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  и  $\nu_3$ . Для каждой из этих зон на Рис.5 представлены поверхности коэффициента Пуассона  $\nu(\theta, \psi)$  в случае некоторых гексагональных кристаллов.

Анализ стационарных значений коэффициентов Пуассона показывает, что если существуют коэффициенты  $\nu_4$  и  $\nu_7$ , то  $\nu_5$  и  $\nu_6$  отсутствуют (и наоборот). При этом коэффициенты Пуассона  $\nu_4$  и  $\nu_7$  являются максимумами,  $\nu_5$  и  $\nu_6$  - минимумами. Как видно из Рис.5 коэффициенты Пуассона  $\nu_4$  и  $\nu_7$  выявляются у кристаллов CdSe, GaS, графита, GaN, RbNiCl<sub>3</sub>. Для кристалла CdSe коэффициенты  $\nu_4$  и  $\nu_7$  являются локальным максимумом и локальным минимумом соответственно. В случае кристаллов GaS, графита, GaN, RbNiCl<sub>3</sub> коэффициенты Пуассона  $\nu_4$  и  $\nu_7$  будут глобальным максимумом и глобальным минимумом. Для кристалла MnAs коэффициент Пуассона  $\nu_5$  принимает отрицательное значение и является глобальным минимумом, а  $\nu_6$  - глобальным максимумом.

### 5. Экстремальные значения модуля сдвига

Проанализируем экстремальные значения модуля сдвига. Выражение (5) для модуля сдвига гексагональных кристаллов зависит от двух углов Эйлера. Необходимые условия экстремальности (достижения максимумов или минимумов) модуля сдвига состоят в выполнении условий стационарности

$$\frac{\partial G(\theta, \psi)}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial G(\theta, \psi)}{\partial \theta} = 0.$$

В результате дифференцирования выражения для модуля сдвига (5) по углам  $\theta$  и  $\psi$  эти условия дают следующую систему уравнений для стационарных значений углов



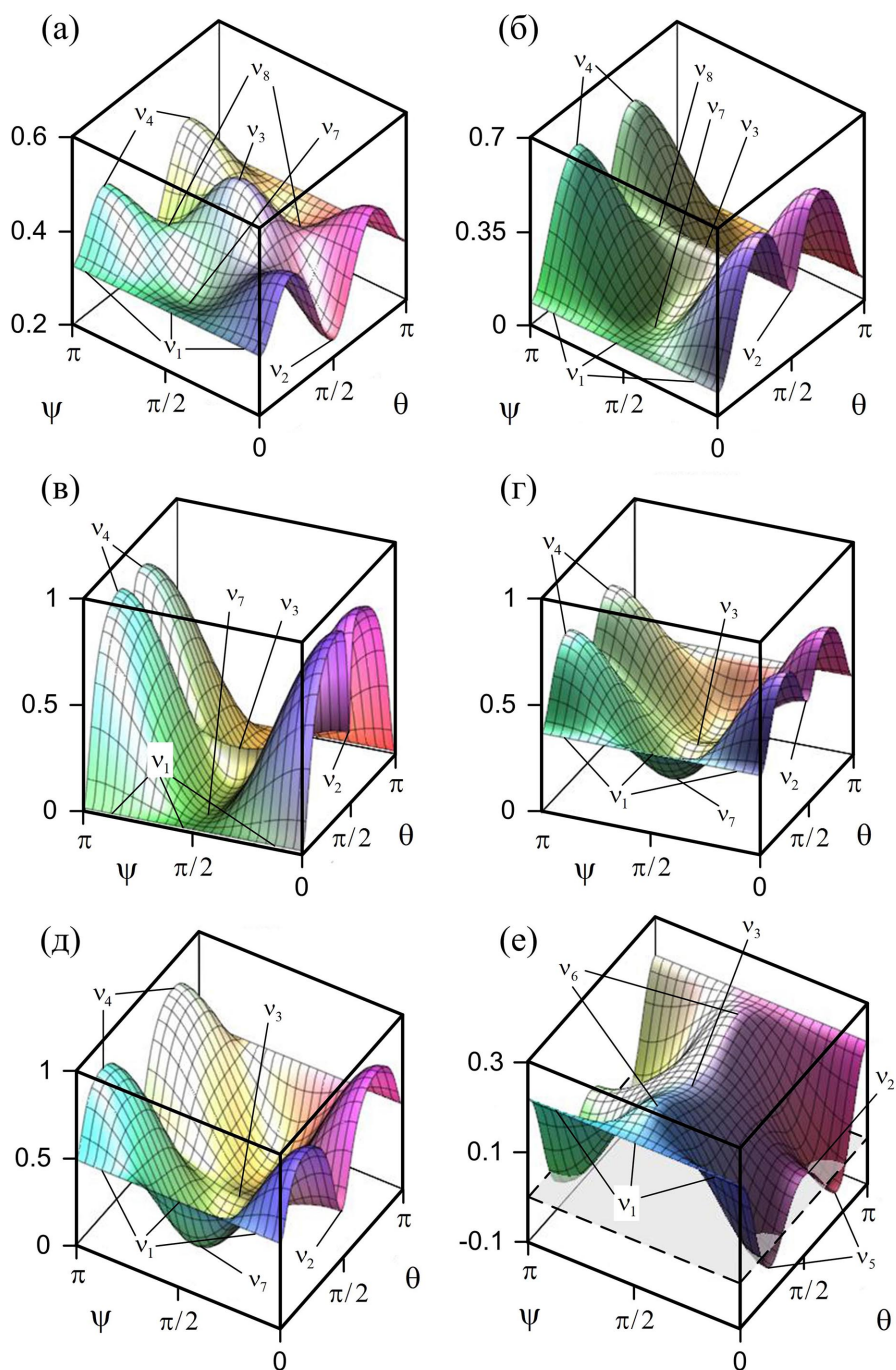


Рис. 5. Поверхности коэффициента Пуассона для некоторых гексагональных кристаллов, попадающих в зоны:  $\nu_3 > \nu_1 > \nu_2$  (CdSe) (а),  $\nu_3 > \nu_2 > \nu_1$  (GaS) (б),  $\nu_2 > \nu_3 > \nu_1$  (C, графит) (в),  $\nu_2 > \nu_1 > \nu_3$  (GaN) (г),  $\nu_1 > \nu_2 > \nu_3$  (RbNiCl<sub>3</sub>) (д),  $\nu_1 > \nu_3 > \nu_2$  (MnAs) (е).

$$\begin{cases} \sin^2 \theta \sin 2\psi (\Pi_3 - 4\Pi_{03} \cos^2 \theta) = 0 \\ \sin 2\theta (\Pi_3 \sin^2 \psi + 4\Pi_{03} \cos 2\theta \cos^2 \psi) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Решениями первого уравнения будут  $\theta = 0$ ;  $\psi = 0$  или  $\psi = \pi/2$  и  $\cos^2 \theta = \Pi_3/(4\Pi_{03})$ . Подстановка их во второе уравнение системы (24) позволяет найти несколько стационарных точек:  $\theta = 0$  и  $\psi$  произвольное;  $\psi = 0$  и  $\theta = \pi/4$ ;  $\psi = 0$  и  $\theta = \pi/2$ ;  $\psi = 0$  и  $\theta = 3\pi/4$ ;  $\psi = \pi/2$  и  $\theta = \pi/2$ ;  $\psi = \psi_0$  и  $\theta = \theta_0$ ,  $0 \leq \cos^2 \psi_0 = \Pi_3/(4\Pi_{03} - \Pi_3) \leq 1$ ,  $0 \leq \cos^2 \theta_0 = \Pi_3/(4\Pi_{03}) \leq 1$ . Этим стационарным точкам соответствуют четыре значения модуля сдвига.

Значение модуля сдвига

$$G_1 = \frac{1}{s_{44}} \quad (25)$$

достигается при  $\theta = 0$  и любых углах  $\psi$ , а также при  $\theta = \pi/2$ ,  $\psi = 0$ . Это возможно для плоскости скольжения (0001) и направлений скольжения  $\mathbf{m} = (\cos(\varphi + \psi), \sin(\varphi + \psi), 0)^T$  и  $\mathbf{n} = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)^T$ ,  $\mathbf{m} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T$ . Угол  $\varphi$  является углом поворота кристаллографической системы координат в плоскости (0001), т.е. в плоскости изотропии.

Другое значение модуля сдвига

$$G_2 = \frac{1}{s_{44}(1 + \Pi_3)} = \frac{1}{s_{66}} \quad (26)$$

достигается при  $\theta = \psi = \pi/2$ , что соответствует единичным векторам  $\mathbf{n} = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)^T$ ,  $\mathbf{m} = (0, 0, 1)^T$ . Третье значение

$$G_3 = \frac{1}{s_{44}(1 + \Pi_{03})} = \frac{1}{s_{11} + s_{33} - 2s_{13}} \quad (27)$$

достигается при  $\theta = \pi/4$ ,  $\psi = 0$  и  $\theta = 3\pi/4$ ,  $\psi = 0$ , что соответствует векторам  $\mathbf{n} = (\sqrt{2}/2 \sin \varphi, -\sqrt{2}/2 \cos \varphi, \sqrt{2}/2)^T$ ,  $\mathbf{m} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T$ . Наконец, обратное значение модуля сдвига

$$G_4^{-1} = s_{44} \left( 1 + \Pi_3 - \frac{\Pi_3^2}{4\Pi_{03}} \right) \quad (28)$$

возможно в стационарных точках  $\theta_0, \psi_0$  при  $0 \leq \cos^2 \theta_0 = 0.25\Pi_3/\Pi_{03} \leq 1$ ,  $0 \leq \cos^2 \psi_0 = \Pi_3/(4\Pi_{03} - \Pi_3) \leq 1$ .

Исследуем далее значения  $G_1, G_2, G_3, G_4$  с точки зрения выполнения достаточного условия экстремума функции двух переменных (см. стр.100).

В случае стационарной точки  $\theta = \pi/2$ ,  $\psi = 0$  мы имеем  $G = G_1$  и

$$D = \frac{16\Pi_{03}\Pi_3}{s_{44}}, \quad A = -\frac{8\Pi_{03}}{s_{44}}. \quad (29)$$

Определение коэффициентов  $A, B, C, D$  представлено на стр.100. Тогда согласно достаточному условию экстремума функции с учетом положительности коэффициента податливости  $s_{44}$  значение модуля сдвига  $G_1$  будет экстремальным, если  $\Pi_3 > 0$ ,  $\Pi_{03} > 0$  или  $\Pi_3 < 0$ ,  $\Pi_{03} < 0$ . При  $\Pi_{03} > 0$  ( $A < 0$ ) значение  $G_1$  соответствует максимуму, а при  $\Pi_{03} < 0$  ( $A > 0$ ) минимуму.

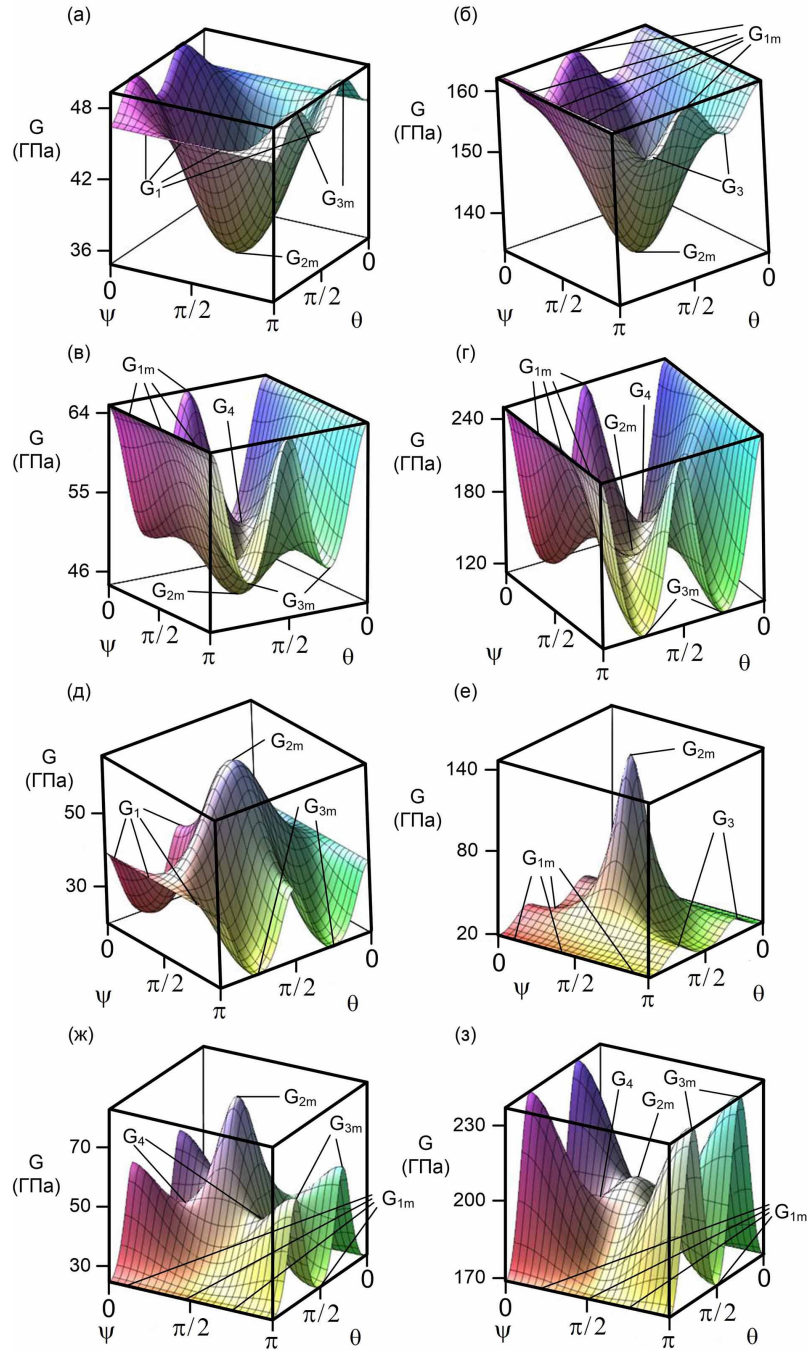


Рис. 6. Зависимость модуля сдвига  $G(\theta, \psi)$  от двух углов ориентации гексагональных кристаллов Ti ( $G_3 > \bar{G}_1 > G_2$ ) (а), Be ( $G_1 > \bar{G}_3 > G_2$ ) (б),  $\text{BN}_3$  ( $G_1 > G_3 > G_2$ ) (в),  $\text{TiB}_2$  ( $G_1 > G_2 > G_3$ ) (г), Zn ( $G_2 > \bar{G}_1 > G_3$ ) (д),  $\text{MoS}_2$  ( $G_2 > \bar{G}_3 > G_1$ ) (е), GaN ( $G_2 > G_3 > G_1$ ) (ж) и SiC ( $G_3 > G_2 > G_1$ ) (з).  $\bar{G}_n$  - значения модуля сдвига в стационарных точках, не являющихся экстремальными значениями.

В случае стационарной точки с  $\theta = 0$  и любым  $\psi$  имеем  $G = G_1$ , комбинация коэффициентов  $D$  обращается в нуль и

$$A = -\frac{2(4\Pi_{03}\cos^2\psi + \Pi_3\sin^2\psi)}{s_{44}}. \quad (30)$$

Таблица 3. Экстремальные значения модуля сдвига для некоторых гексагональных кристаллов и значения углов  $\theta_0$ ,  $\psi_0$  (в градусах), при которых достигается значение  $G_4$ , а также значения безразмерных параметров  $\Pi_3$ ,  $\Pi_{03}$  и  $\alpha_3 = \Pi_{03}(2\Pi_{03} - \Pi_3)$ .

Кристаллы	$\Pi_{03}$	$\Pi_3$	$\alpha_3$	$G_1$ , ГПа	$G_2$ , ГПа	$G_3$ , ГПа	$G_4$ , ГПа	$\theta_0$ град	$\psi_0$ град
Be	0.04	0.21	-0.005	<b>162</b>	<b>134</b>	156	—	—	—
Cd	0.23	-0.49	0.21	18.8	<b>36.8</b>	<b>15.3</b>	—	—	—
CdSe	-0.32	-0.08	0.17	<b>13.4</b>	14.53	<b>19.6</b>	14.46	75.5	75.0
Co	-0.24	0.06	0.13	70.9	<b>66.8</b>	<b>93.6</b>	—	—	—
GaN	-0.60	-0.71	0.29	<b>24.1</b>	<b>83.1</b>	59.7	48.1	56.9	49.4
GaSe	-0.54	-0.73	0.18	<b>10.2</b>	<b>37.9</b>	21.9	19.6	54.2	43.9
C (графит)	-0.88	-0.99	0.69	<b>4</b>	<b>439</b>	34.3	13.9	58.0	51.4
MnAs	0.36	1.14	-0.15	<b>34.5</b>	<b>16.1</b>	25.4	—	—	—
MoS <sub>2</sub>	-0.40	-0.87	-0.03	<b>18.6</b>	<b>146</b>	30.8	—	—	—
C <sub>7</sub> H <sub>12</sub>	1.22	3.33	-1.09	<b>0.91</b>	<b>0.21</b>	0.41	—	—	—
SiC	-0.29	-0.17	0.12	<b>169</b>	204	<b>237</b>	198	67.2	65.2
Ti	-0.06	0.34	0.03	46.5	<b>34.7</b>	<b>49.5</b>	—	—	—
TiB <sub>2</sub>	1.21	0.79	1.96	<b>250</b>	140	<b>113</b>	151	66.2	63.8
Zn	0.97	-0.40	2.28	39.5	<b>65.6</b>	<b>20.0</b>	—	—	—

В силу  $D = 0$  здесь требуется дополнительный анализ для каждого конкретного кристалла. Для кристаллов Be и TiB<sub>2</sub> на Рис.6б и Рис.6г представлены поверхности изменчивости модуля сдвига в зависимости от двух углов Эйлера  $\theta$ ,  $\psi$ , из которых видно, что значения  $G_1$  при  $\theta = 0$  и любом  $\psi$  являются максимальными. Для этих материалов безразмерные параметры  $\Pi_3$ ,  $\Pi_{03}$  положительны (см. Табл.3) и соответственно  $A$  отрицательно. Для кристаллов GaN и SiC значение модуля сдвига  $G_1$  при  $\theta = 0$  будет минимальным (Рис.6ж и Рис.6з). Кристаллы GaN и SiC характеризуются отрицательными безразмерными параметрами  $\Pi_3$ ,  $\Pi_{03}$  (см. Табл.3) и соответственно положительными значениями  $A$ . У кристаллов Zn и Ti безразмерные параметры имеют противоположные знаки (Zn -  $\Pi_3 = -0.40$ ,  $\Pi_{03} = 0.97$ ; Ti -  $\Pi_3 = 0.34$ ,  $\Pi_{03} = -0.06$ ). Поэтому  $A$  может менять знак в зависимости от величины угла  $\psi$  при  $\theta = 0$ . Тогда, как видно из Рис.6а и Рис.6д для кристаллов Ti и Zn, значение модуля сдвига  $G_1$  не является экстремальным.

В случае стационарной точки  $\theta = \psi = \pi/2$  имеем  $G = G_2$  и

$$D = \frac{4\Pi_3^2}{s_{44}^2(1 + \Pi_3)^4} > 0, \quad A = \frac{2\Pi_3}{s_{44}(1 + \Pi_3)^2}. \quad (31)$$

Значение  $G_2$  будет всегда являться экстремальным в силу положительности  $D$ . При  $\Pi_3 > 0$   $A$  также положительно и значение  $G_2$  является минимальным для модуля сдвига. При  $\Pi_3 < 0$  справедливо  $A < 0$  и обсуждаемое значение оказывается максимумом.

В случае стационарных точек  $\theta = \pi/4$ ,  $\psi = 0$  и  $\theta = 3\pi/4$ ,  $\psi = 0$  имеем  $G = G_3$  и

$$D = \frac{8\Pi_{03}(2\Pi_{03} - \Pi_3)}{s_{44}^2(1 + \Pi_{03})^4}, \quad A = \frac{8\Pi_{03}}{s_{44}(1 + \Pi_{03})^2}. \quad (32)$$

Значение  $G_3$  будет экстремумом при  $\Pi_{03}(2\Pi_{03} - \Pi_3) > 0$  в силу положительности  $D$ . При  $\Pi_{03} > 0$  оказывается  $A > 0$  и значение  $G_3$  является минимумом, а при  $\Pi_{03} < 0$  ( $A < 0$ ) максимумом.

Наконец, для  $G = G_4$  при выполнении условий  $0 \leq \cos^2 \theta_0 = 0.25\Pi_3/\Pi_{03} \leq 1$ ,  $0 \leq \cos^2 \psi_0 = \Pi_3/(4\Pi_{03} - \Pi_3) \leq 1$  имеем

$$D = -\frac{512(2\Pi_{03} - \Pi_3)(4\Pi_{03} - \Pi_3)\Pi_3^2\Pi_{03}^2}{s_{44}^2(4\Pi_{03} + 4\Pi_3\Pi_{03} - \Pi_3^2)^4}, \quad (33)$$

$$A = \frac{32\Pi_3^2\Pi_{03}}{s_{44}(4\Pi_{03} + 4\Pi_3\Pi_{03} - \Pi_3^2)^2}. \quad (34)$$

Анализ, проведенный для 143 гексагональных кристаллов из справочника [49], показал, что для 43 кристаллов не возможна реализация  $G = G_4$  (см. Табл.3). Для других ста гексагональных кристаллов комбинация коэффициентов  $D$  всегда отрицательна, т.е.  $G_4$  не может быть экстремумом. В этих случаях  $G_4$  соответствует точкам перегиба. Это хорошо видно на Рис.6в, г, ж и з. В Табл.3 даны значения углов  $\theta_0$ ,  $\psi_0$ , при которых существует  $G_4$ .

В Табл.3 приведены экстремальные значения модуля сдвига ряда хорошо известных материалов. Полужирным в таблице отмечены глобальные максимальные и минимальные значения модуля сдвига. Как видно из таблицы значение  $G_1$  не является экстремумом при  $\psi = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  для четырех кристаллов Cd, Co, Ti, Zn. Для этих кристаллов безразмерные параметры  $\Pi_3$  и  $\Pi_{03}$  имеют противоположные знаки и соответственно  $D < 0$ . Для большинства гексагональных кристаллов значение  $G_2$  оказывается глобальным максимумом или глобальным минимумом (см. Табл.3). Для кристаллов CdSe, SiC, TiB<sub>2</sub>, указанных в Табл.3, значение  $G_2$  является локальным экстремумом. Это иллюстрирует Рис.6з для кристалла SiC. В Табл.3 присутствуют кристаллы, у которых  $\Pi_{03}(2\Pi_{03} - \Pi_3) > 0$ , но значения  $G_3$  не является глобальным экстремумом. Такими будут кристаллы GaN, GaSe, C (графит). Для них значение  $G_3$  является локальным экстремумом. Для кристалла GaN это видно из Рис.6ж. Наибольшая разница между максимальным и минимальным значениями выявляется у слоистого материала - графита ( $G_{\max}/G_{\min} = 109.75$ ). Большое различие между максимумом и минимумом характерно также для MoS<sub>2</sub>.

На Рис.7 изображена классификационная схема для экстремумов модуля сдвига в зависимости от двух безразмерных параметров  $\Pi_{03}$  и  $\Pi_3$ , полученная на основе анализа формул (25) – (34). На этом рисунке точками нанесены значения безразмерных параметров  $\Pi_{03}$  и  $\Pi_3$  для всех гексагональных кристаллов из [49]. Большинство кристаллов имеют  $\Pi_{03} < 0$ . На классификационной схеме выделено восемь зон с различными неравенствами между  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ . Для каждой из этих зон на Рис.6 дается

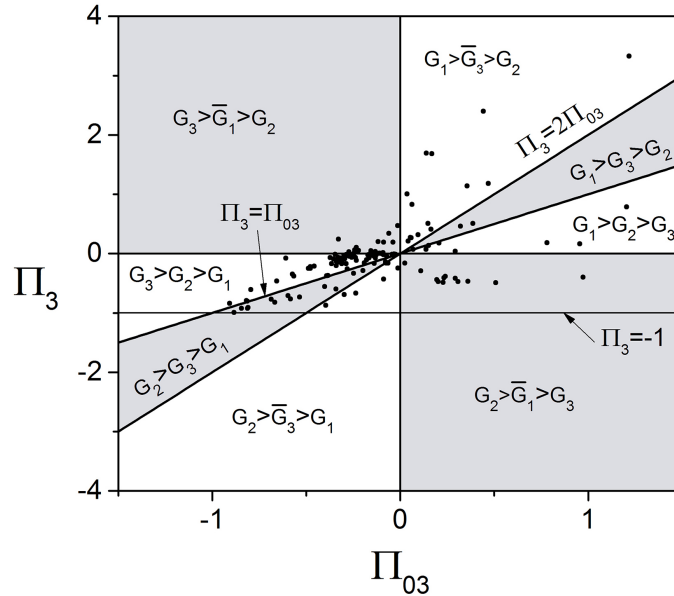


Рис. 7. Классификационная схема экстремальных значений модуля сдвига гексагональных кристаллов в зависимости от безразмерных параметров  $\Pi_{03}$  и  $\Pi_3$ . Кругами отмечены значения безразмерных параметров  $\Pi_{03}$  и  $\Pi_3$  для 143 гексагональных кристаллов из [49].  $\bar{G}_n$  - значения модуля сдвига в стационарных точках, не являющихся экстремальными значениями.

по одному примеру поверхности модуля сдвига. Значения модулей в стационарных точках, не являющихся экстремальными, обозначены через  $\bar{G}_n$ .

Как видно из Рис.6 в четырех поверхностях отсутствует значение  $G_4$  (Рис.6а,б,д,е), а на других четырех поверхностях  $G_4$  присутствует (Рис.6в,г,ж и з). Это характерно не только для представленных на рисунке материалов, но и для других гексагональных материалов, попадающих в соответствующие классификационные зоны. Сравнение Рис.6а и Рис.6б показывает, что значение  $G_2$  будет глобальным минимумом в обоих случаях, а  $G_3$  и  $G_1$  при  $\psi = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  являются максимумом и точкой перегиба для Ti и точкой перегиба и максимумом для Be. В случае поверхностей модуля сдвига для  $\text{VN}_3$  (Рис.6в) и  $\text{TiB}_2$  (Рис.6г) значение  $G_1$  при  $\psi = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  соответствует глобальному максимуму. Значения  $G_2$  и  $G_3$  являются минимумами (глобальный  $G_2$  и локальный  $G_3$  для  $\text{VN}_3$  и локальный  $G_2$  и глобальный  $G_3$  для  $\text{TiB}_2$ ). Сравнение поверхностей модулей сдвига для Zn (Рис.6д) и  $\text{MoS}_2$  (Рис.6е) показывает, что  $G_2$  будет глобальным максимумом, а  $G_3$  и  $G_1$  при  $\psi = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  являются минимумом и точкой перегиба для Zn и точкой перегиба и минимумом для  $\text{MoS}_2$ . В случае поверхностей модуля сдвига для GaN (Рис.6ж) и SiC (Рис.6з) значение  $G_1$  при  $\psi = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  соответствует глобальному минимуму. Значения  $G_2$  и  $G_3$  являются максимумами (глобальный  $G_2$  и локальный  $G_3$  для GaN и локальный  $G_2$  и глобальный  $G_3$  для SiC).

#### Заключение

В работе проведен аналитический анализ изменчивости модуля Юнга, коэффициентов Пуассона и модуля сдвига. Получены выражения трех стационарных значений

для модуля Юнга. Два стационарных значения существует для всех гексагональных кристаллов и соответствуют значениям модуля Юнга при растяжении в направлениях  $[0001]$  и  $[2\bar{1}\bar{1}0]$ . Третье стационарное значение имеет место, когда выполняется условие, накладываемое на некоторую комбинацию из коэффициентов податливости. Двадцать семь гексагональных кристаллов из ста сорока трех не имеют третьего экстремального значения. В результате численно-аналитического анализа предложена классификационная схема для экстремальных значений модуля Юнга в зависимости от двух безразмерных параметров анизотропии.

Анализ изменчивости коэффициента Пуассона выявляет восемь стационарных значений. Три значения существуют для всех гексагональных кристаллов. Этими коэффициентами Пуассона оказываются  $\nu_{(0001),[0001]}$ ,  $\nu_{[2\bar{1}\bar{1}0],[01\bar{1}0]}$ ,  $\nu_{[000\bar{1}],[01\bar{1}0]}$ . Пять других стационарных значений имеют место при выполнении различных ограничений. С помощью численного анализа удалось выявить семь гексагональных ауссетиков Be ( $-0.005$ ), Be-Cu at 1.1% Cu ( $-0.005$ ), Be-Cu at 2.4% ( $-0.04$ ), MnAs ( $-0.04$ ), MoS<sub>2</sub> ( $-0.28$ ), C<sub>7</sub>H<sub>12</sub> ( $-0.15$ ) и Zn ( $-0.07$ ). Предложена классификационная схема для трех стационарных значений коэффициентов Пуассона в зависимости от двух безразмерных параметров анизотропии.

Получены аналитические выражения экстремальных значений модуля сдвига для гексагональных кристаллов. На основе экспериментальных данных из справочника Ландолта-Бернстайна дан численный анализ экстремумов. Наибольшее различие между максимальным и минимальным значениями модуля сдвига обнаружено у слоистого кристалла - графита. Большие изменения между максимумом и минимумом характерно для дисульфида молибдена. Предложена классификационная схема для экстремальных значений модуля сдвига в зависимости от двух безразмерных параметров анизотропии.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука. 195 с.
- [2] Ting T. C. T., Chen T. Poisson's ratio for anisotropic elastic materials can have no bounds // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 2005. Vol. 58, no. 1. p. 73–82.
- [3] Turley J., Sines G. The anisotropy of Young's modulus, shear modulus and Poisson's ratio in cubic materials // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1971. Vol. 4, no. 2. p. 264–271.
- [4] Gunton D. J., Saunders G. A. The Young's modulus and Poisson's ratio of arsenic, antimony and bismuth // *J. Mater. Sci.* 1972. Vol. 7, no. 9. p. 1061–1068.
- [5] Yeganeh-Haeri A., Weidner D. J., Parise J. B. Elasticity of  $\alpha$ -cristobalite: a silicon dioxide with negative Poisson's ratio // *Science*. 1992. Vol. 257, no. 5070. p. 650–652.
- [6] Boulanger P., Hayes M. Poisson's ratio for orthorhombic materials // *J. Elasticity*. 1998. Vol. 50, no. 1. p. 87–89.
- [7] Hayes M., Shuvalov A. On the extreme values of Young's modulus, the shear modulus, and Poisson's ratio for cubic materials // *J. Appl. Mech.* 1998. Vol. 65, no. 3. p. 786–787.
- [8] Ting T. C. T. Very large Poisson's ratio with a bounded transverse strain in anisotropic elastic materials // *J. Elasticity*. 2004. Vol. 77, no. 2. p. 163–176.
- [9] Ting T. C. T. On anisotropic elastic materials for which Young's modulus  $e(n)$  is independent of  $n$  or the shear modulus  $g(n,m)$  is independent of  $n$  and  $m$  // *J. Elasticity*. 2005. Vol. 81, no. 3. p. 271–292.
- [10] Ting T. C. T. The stationary values of Young's modulus for monoclinic and triclinic materials // *J. Mechanics*. 2005. Vol. 21, no. 4. p. 249–253.
- [11] Norris A. N. Extreme values of Poisson's ratio and other engineering moduli in anisotropic materials // *J. Mech. Mater. Struc.* 2006. Vol. 1, no. 4. p. 793–812.
- [12] Guo C. Y., Wheeler L. Extreme Poisson's ratios and related elastic crystal properties // *J. Mech. Phys. Solids*. 2006. Vol. 54, no. 4. p. 690–707.

- [13] Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И. Анизотропия упругих свойств материалов // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 6. С. 131–151.
- [14] Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Модуль Юнга кубических ауксетиков // Письма о материалах. 2011. Т. 1, № 3. с. 127–132.
- [15] Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Модуль сдвига кубических кристаллов // Письма о материалах. 2012. Т. 2, № 1. с. 21–24.
- [16] Cazzani A., Rovati M. Extrema of Young's modulus for cubic and transversely isotropic solids // *Int. J. Solids Struct.* 2003. Vol. 40, no. 7. p. 1713–1744.
- [17] Cazzani A., Rovati M. Extrema of Young's modulus for elastic solids with tetragonal symmetry // *Int. J. Solids Struct.* 2005. Vol. 42. p. 18–19.
- [18] Ting T. C. T. Explicit expression of the stationary values of Young's modulus and the shear modulus for anisotropic elastic materials // *J. Mechanics.* 2005. Vol. 21, no. 4. p. 255–266.
- [19] Norris A. N. Poisson's ratio in cubic materials // *Proc. Roy. Soc. A.* 2006. Vol. 462, no. 2075. p. 3385–3405.
- [20] Елишин А. И., Лисовенко Д. С. Экстремальные значения коэффициента Пуассона кубических кристаллов // ЖТФ. 2016. Т. 61, № 10. с. 1516–1524.
- [21] Gunton D. J., Saunders G. A. Stability limits on the Poisson ratio: application to a martensitic transformation // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A.* 1975. Vol. 343, no. 1632. p. 63–83.
- [22] Li Y. The anisotropic behavior of Poisson's ratio, Young's modulus, and shear modulus in hexagonal materials // *Phys. Status Solidi A.* 1976. Vol. 38, no. 1. p. 171–175.
- [23] Lubarda V. A., Meyers M. A. On the negative Poisson ratio in monocrystalline zinc // *Scripta Mater.* 1999. Vol. 40, no. 8. p. 975–977.
- [24] Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Ауксетическая механика кристаллических материалов // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 43–62.
- [25] Elastic anisotropy and extreme Poisson's ratios in single crystals / Z. A. D. Lethbridge, R. I. Walton, A. S. H. Marmier et al. // *Acta Mater.* 2010. Vol. 58, no. 19. p. 6444–6451.
- [26] Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Изменчивость упругих свойств гексагональных ауксетиков // ДАН. 2011. Т. 441, № 4. С. 468–471.
- [27] Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Средний коэффициент Пуассона для кристаллов. Гексагональные ауксетики // Письма о материалах. 2013. Т. 3, № 1. с. 7–11.
- [28] Komarova M. A., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Variability of Young's modulus and Poisson's ratio of hexagonal crystals // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2018. Vol. 347. p. 012019.
- [29] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. The elastic properties of hexagonal auxetics under pressure // *Phys. Status Solidi B.* 2016. Vol. 253, no. 7. p. 1261–1269.
- [30] Milstein F., Huang K. Existence of a negative Poisson ratio in fcc crystals // *Phys. Rev. B.* 1979. Vol. 19, no. 4. p. 2030–2033.
- [31] Ballato A. Poisson's ratio for tetragonal, hexagonal, and cubic crystals // *IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control.* 1996. Vol. 43, no. 1. p. 56–62.
- [32] Negative Poisson's ratios as a common feature of cubic metals / R. H. Baughman, J. M. Shacklette, A. A. Zakhidov et al. // *Nature.* 1998. Vol. 392, no. 6674. p. 362–365.
- [33] Rovati M. On the negative Poisson's ratio of an orthorhombic alloy // *Scripta Mater.* 2003. Vol. 48, no. 3. p. 235–240.
- [34] Rovati M. Directions of auxeticity for monoclinic crystals // *Scripta Mater.* 2004. Vol. 51, no. 11. p. 1087–1091.
- [35] Elastic constants internal friction, and piezoelectric coefficient of  $\alpha$ -TeO<sub>2</sub> / H. Ogi, M. Fukunaga, M. Hirao et al. // *Phys. Rev. B.* 2004. Vol. 69, no. 2. p. 024104.
- [36] Tokmakova S. P. Stereographic projections of Poisson's ratio in auxetic crystals // *Phys. Status Solidi B.* 2005. Vol. 242, no. 3. p. 721–729.
- [37] Wojciechowski K. W. Poisson's ratio of anisotropic systems // *Comput. Methods Sci. Techn.* 2005. Vol. 11, no. 1. p. 73–79.
- [38] Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Связь среднего коэффициента Пуассона с модулем Юнга для кубических кристаллов. Ауксетики в среднем // ДАН. 2012. Т. 443, № 6. С. 677–681.



- [39] Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона для 7-ми константных тетрагональных кристаллов и нано/микротрубок из них // *Физ. Мезомех.* 2015. Т. 18, № 3. с. 213–222.
- [40] Ауксетики среди 6-ти константных тетрагональных кристаллов / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов, Д. С. Лисовенко [и др.] // *Письма о материалах.* 2015. Т. 5, № 4. с. 409–413.
- [41] Механические характеристики 7-ми константных ромбоэдрических кристаллов и нано/микротрубок из них / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов, Д. С. Лисовенко [и др.] // *Письма о материалах.* 2016. Т. 6, № 2. с. 93–97.
- [42] Новикова Н. Е., Лисовенко Д. С., Сизова Н. Л. Особенности структуры, упругие модули и картина деформации и разрушения по Кнупу монокристаллов гидрофталатов калия, рубидия, цезия и аммония // *Кристаллография.* 2018. Т. 63, № 3. С. 425–440.
- [43] Отрицательный коэффициент Пуассона для кубических кристаллов и нано/микротрубок / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов, Д. С. Лисовенко [и др.] // *Физ. Мезомех.* 2013. Т. 16, № 6. С. 13–31.
- [44] Ting T. C. T., Barnett D. M. Negative Poisson's ratios in anisotropic linear elastic media // *J. Appl. Mech.* 2005. Vol. 72, no. 6. p. 929–931.
- [45] Branka A. C., Heyes D. M., Wojciechowski K. W. Auxeticity of cubic materials // *Phys. Status Solidi B.* 2009. Vol. 246, no. 9. p. 2063–2071.
- [46] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Classification of cubic auxetics // *Phys. Status Solidi B.* 2013. Vol. 250, no. 10. p. 2038–2043.
- [47] Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики. Наука: Мир, 1979. 640 с.
- [48] Най Дж. Физические свойства кристаллов. М.: ИЛ, 1960. 385 с.
- [49] Second and Higher Order Elastic Constants of Landolt-Börnstein // *Group III Condensed Matter* / Ed. by D. F. Nelson. Springer, 1992. Vol. 29.
- [50] Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 1. 479 с.

V. A. Gorodtsov, D. S. Lisovenko

## YOUNG'S MODULUS, POISSON'S RATIO AND SHEAR MODULUS FOR HEXAGONAL CRYSTALS

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The variability of Young's modulus, Poisson's ratio and shear modulus of hexagonal crystals has been studied. Analytical expressions for extreme values of these elastic characteristics are obtained. Based on experimental data of elastic constants from the Landolt-Börnstein reference book, the numerical analysis of extrema for hexagonal crystals is given. Classification schemes for the extrema of Young's modulus, Poisson's ratio and shear modulus are proposed.

**Keywords:** Young's modulus, Poisson's ratio, shear modulus, auxetics, crystals, hexagonal crystals

### REFERENCES

- [1] Landau L. D., Lifshitz E. M. Theory of elasticity (Course of Theoretical Physics). Butterworth-Heinemann. T. 7.
- [2] Ting T. C. T., Chen T. Poisson's ratio for anisotropic elastic materials can have no bounds // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2005. Vol. 58, no. 1. p. 73–82.
- [3] Turley J., Sines G. The anisotropy of Young's modulus, shear modulus and Poisson's ratio in cubic materials // J. Phys. D: Appl. Phys. 1971. Vol. 4, no. 2. p. 264–271.
- [4] Gunton D. J., Saunders G. A. The Young's modulus and Poisson's ratio of arsenic, antimony and bismuth // J. Mater. Sci. 1972. Vol. 7, no. 9. p. 1061–1068.
- [5] Yeganeh-Haeri A., Weidner D. J., Parise J. B. Elasticity of  $\alpha$ -cristobalite: a silicon dioxide with negative Poisson's ratio // Science. 1992. Vol. 257, no. 5070. p. 650–652.
- [6] Boulanger P., M.Hayes. Poisson's ratio for orthorhombic materials // J. Elasticity. 1998. Vol. 50, no. 1. p. 87–89.
- [7] Hayes M., Shuvalov A. On the extreme values of Young's modulus, the shear modulus, and Poisson's ratio for cubic materials // J. Appl. Mech. 1998. Vol. 65, no. 3. p. 786–787.
- [8] Ting T. C. T. Very large Poisson's ratio with a bounded transverse strain in anisotropic elastic materials // J. Elasticity. 2004. Vol. 77, no. 2. p. 163–176.
- [9] Ting T. C. T. On anisotropic elastic materials for which Young's modulus  $e(n)$  is independent of  $n$  or the shear modulus  $g(n,m)$  is independent of  $n$  and  $m$  // J. Elasticity. 2005. Vol. 81, no. 3. p. 271–292.
- [10] Ting T. C. T. The stationary values of Young's modulus for monoclinic and triclinic materials // J. Mechanics. 2005. Vol. 21, no. 4. p. 249–253.
- [11] Norris A. N. Extreme values of Poisson's ratio and other engineering moduli in anisotropic materials // J. Mech. Mater. Struc. 2006. Vol. 1, no. 4. p. 793–812.
- [12] Guo C. Y., Wheeler L. Extreme Poisson's ratios and related elastic crystal properties // J. Mech. Phys. Solids. 2006. Vol. 54, no. 4. p. 690–707.
- [13] Annin B. D., Ostrosablin N. I. Anisotropy of elastic properties of materials // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2008. Vol. 49, no. 6. p. 998–1014.
- [14] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Young's modulus of cubic auxetics // Letters on Materials. 2011. Vol. 1, no. 3. p. 127–132.

---

*Gorodtsov Valentin Aleksandrovich*

e-mail: gorod@ipmnet.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia,

*Lisovenko Dmitry Sergeevich*

e-mail: lisovenk@ipmnet.ru, Dr.. Sci. Phys. & Math., Head of Laboratory, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

- [15] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Shear modulus of cubic crystals // *Letters on Materials*. 2012. Vol. 2, no. 1. p. 21–24.
- [16] Cazzani A., Rovati M. Extrema of Young's modulus for cubic and transversely isotropic solids // *Int. J. Solids Struct.* 2003. Vol. 40, no. 7. p. 1713–1744.
- [17] Cazzani A., Rovati M. Extrema of Young's modulus for elastic solids with tetragonal symmetry // *Int. J. Solids Struct.* 2005. Vol. 42. p. 18–19.
- [18] Ting T. C. T. Explicit expression of the stationary values of Young's modulus and the shear modulus for anisotropic elastic materials // *J. Mechanics*. 2005. Vol. 21, no. 4. p. 255–266.
- [19] Norris A. N. Poisson's ratio in cubic materials // *Proc. Roy. Soc. A*. 2006. Vol. 462, no. 2075. p. 3385–3405.
- [20] Epishin A. I., Lisovenko D. S. Extreme values of the Poisson's ratio of cubic crystals // *Tech. Phys.* 2016. Vol. 61, no. 10. p. 1516–1524.
- [21] Gunton D. J., Saunders G. A. Stability limits on the Poisson ratio: application to a martensitic transformation // *Proc.* 1975. Vol. 343, no. 1632. p. 63–83.
- [22] Li Y. The anisotropic behavior of Poisson's ratio, Young's modulus, and shear modulus in hexagonal materials // *Phys. Status Solidi A*. 1976. Vol. 38, no. 1. p. 171–175.
- [23] Lubarda V. A., Meyers M. A. On the negative Poisson ratio in monocrystalline zinc // *Scripta Mater.* 1999. Vol. 40, no. 8. p. 975–977.
- [24] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Auxetic mechanics of crystalline materials // *Mech. Solids*. 2010. Vol. 45, no. 4. p. 529–545.
- [25] Elastic anisotropy and extreme Poisson's ratios in single crystals / Z. A. D. Lethbridge, R. I. Walton, A. S. H. Marmier et al. // *Acta Mater.* 2010. Vol. 58, no. 19. p. 6444–6451.
- [26] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Variability of elastic properties of hexagonal auxetics // *Dokl. Phys.* 2011. Vol. 56, no. 12. p. 602–605.
- [27] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Average Poisson's ratio for crystals. Hexagonal auxetics // *Letters on Materials*. 2013. Vol. 3, no. 1. p. 7–11.
- [28] Komarova M. A., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Variability of Young's modulus and Poisson's ratio of hexagonal crystals // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2018. Vol. 347. p. 012019.
- [29] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. The elastic properties of hexagonal auxetics under pressure // *Phys. Status Solidi B*. 2016. Vol. 253, no. 7. p. 1261–1269.
- [30] Milstein F., Huang K. Existence of a negative Poisson ratio in fcc crystals // *Phys. Rev. B*. 1979. Vol. 19, no. 4. p. 2030–2033.
- [31] Ballato A. Poisson's ratio for tetragonal, hexagonal, and cubic crystals // *IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*. 1996. Vol. 43, no. 1. p. 56–62.
- [32] Negative Poisson's ratios as a common feature of cubic metals / R. H. Baughman, J. M. Shacklette, A. A. Zakhidov et al. // *Nature*. 1998. Vol. 392, no. 6674. p. 362–365.
- [33] Rovati M. On the negative Poisson's ratio of an orthorhombic alloy // *Scripta Mater.* 2003. Vol. 48, no. 3. p. 235–240.
- [34] Rovati M. Directions of auxeticity for monoclinic crystals // *Scripta Mater.* 2004. Vol. 51, no. 11. p. 1087–1091.
- [35] Elastic constants internal friction, and piezoelectric coefficient of  $\alpha$ -TeO<sub>2</sub> / H. Ogi, M. Fukunaga, M. Hirao et al. // *Phys. Rev. B*. 2004. Vol. 69, no. 2. p. 024104.
- [36] Tokmakova S. P. Stereographic projections of Poisson's ratio in auxetic crystals // *Phys. Status Solidi B*. 2005. Vol. 242, no. 3. p. 721–729.
- [37] Wojciechowski K. W. Poisson's ratio of anisotropic systems // *Comput. Methods Sci. Techn.* 2005. Vol. 11, no. 1. p. 73–79.
- [38] R. V. Goldstein V. A. Gorodtsov D. S. L. Relation of Poisson's ratio on average with Young's modulus. auxetics on average // *Dokl. Phys.* 2012. Vol. 57, no. 4. p. 174–178.
- [39] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Young's modulus and Poisson's ratio for seven-constant tetragonal crystals and nano/microtubes // *Phys. Mesomech.* 2015. Vol. 18, no. 3. p. 213–222.
- [40] Auxetics among 6-constant tetragonal crystals / R. V. Goldstein, V. A. Gorodtsov, D. S. Lisovenko et al. // *Letters on Materials*. 2015. Vol. 5, no. 4. p. 409–413.
- [41] Mechanical characteristics for seven-constant rhombohedral crystals and their nano/microtubes / R. V. Goldstein, V. A. Gorodtsov, D. S. Lisovenko et al. // *Letters on Materials*. 2016. Vol. 6, no. 2. p. 93–97.

- 
- [42] Novikova N. E., Lisovenko D. S., Sizova N. L. Peculiarities of the structure, moduli of elasticity, and knoop indentation patterns of deformation and fracture of single crystals of potassium, rubidium, cesium, and ammonium hydrophthalates // *Crystallogr. Rep.* 2018. Vol. 63, no. 3. p. 438–450.
- [43] Negative Poisson's ratio for cubic crystals and nano/microtubes / R. V. Goldstein, V. A. Gorodtsov, D. S. Lisovenko et al. // *Phys. Mesomech.* 2014. Vol. 17, no. 2. p. 97–115.
- [44] Ting T. C. T., Barnett D. M. Negative Poisson's ratios in anisotropic linear elastic media // *J. Appl. Mech.* 2005. Vol. 72, no. 6. p. 929–931.
- [45] Branka A. C., Heyes D. M., Wojciechowski K. W. Auxeticity of cubic materials // *Phys. Status Solidi B.* 2009. Vol. 246, no. 9. p. 2063–2071.
- [46] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Classification of cubic auxetics // *Phys. Status Solidi B.* 2013. Vol. 250, no. 10. p. 2038–2043.
- [47] Sirotnin Y. I., Shaskolskaya M. P. *Fundamentals of Crystal Physics.* Moscow: Mir, 1982. 654 p.
- [48] Nye J. F. *Physical Properties of Crystals.* Oxford: Clarendon Press, 1957. 329 p.
- [49] *Second and Higher Order Elastic Constants of Landolt-Börnstein* // *Group III Condensed Matter* / Ed. by D. F. Nelson. Springer, 1992. Vol. 29.
- [50] Smirnov V. I. *A course of higher mathematics.* Pergamon Press, 1964. Vol. I (Elementary Calculus). 546 p.

Е. Г. Гоник<sup>1</sup>, М. В. Петров<sup>1</sup>

## РАСЧЕТ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ИЗГИБЕ, ЗАПОЛНЕННЫХ СЫПУЧИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

<sup>1</sup> Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары

**Аннотация.** В работе за предельное состояние принято состояние, при котором напряжение в месте потери устойчивости достигает критического значения. Устойчивость оболочек теряется в упругой стадии работы материала, поэтому для расчета критического напряжения используется принцип суперпозиции. Рассчитывается критическое напряжение для пустой оболочки, используя предложенную в работах [1, 11] формулу для расчета критического напряжения. Оболочка, заполненная сыпучим наполнителем, находится под воздействием комбинированной нагрузки: равномерно распределенной по длине весовой нагрузки и давления на внутреннюю поверхность оболочки. Напряжение от весовой нагрузки рассчитывается как отношение изгибающего момента к осевому моменту сопротивления, осевое напряжение от внутреннего гидростатического давления сыпучего наполнителя определяется по безмоментной теории оболочек. Окружным напряжением пренебрегаем ввиду малого его влияния на устойчивость. Суммарное напряжение определяет значение критического напряжения, при котором теряется устойчивость. Выполнена верификация сравнением расчетного критического напряжения с результатами экспериментов и численными расчетами. Рекомендованы расчетные зависимости для определения необходимых геометрических размеров проектируемых автоцистерн для перевозки сыпучих материалов. Методика расчета не учитывает влияние несовершенств на устойчивость, поэтому влияние несовершенств предложено учитывать увеличенным коэффициентом запаса устойчивости.

**Ключевые слова:** автоцистерна, устойчивость, оболочка, предельное состояние, напряжение, сила, момент, упругость, плотность.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.010

УДК: 539.3

**Введение.** Устойчивость пустых тонкостенных оболочек при различных видах нагружения экспериментально и теоретически исследована во многих научных работах

---

© Гоник Е. Г., Петров М. В., 2019

*Гоник Екатерина Григорьевна*

**e-mail:** katty.gonik@mail.ru, старший преподаватель, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары.

*Петров Михаил Васильевич*

**e-mail:** gimmapetrova20@gmail.com, доктор технических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары.

Поступила 01.06.2019

[1–17] и др. Исследование потери устойчивости тонкостенных оболочек, заполненных сыпучим материалом, анализ закритического их поведения выполнены в работах [17–24] и др. Изучение потери устойчивости тонкостенных оболочек, заполненных сыпучим материалом, началось в связи с изготовлением на машиностроительных предприятиях различных автоцистерн, которые при эксплуатации могут потерять устойчивость.

Проектирование, производство автоцистерн является сложным, высокотехнологичным и многокомпонентным процессом, доступным только специализированным предприятиям, оснащенным современным оборудованием и высококвалифицированными кадрами. Такими предприятиями являются: ЗАО «Чебоксарское предприятие “Сеспель”» (г. Чебоксары), ООО «СеверМолМаш» (г. Вологда), ООО «Геро» (г. Санкт-Петербург), машиностроительные заводы «Бонум» (г. Ростов-на-Дону), «Бецема» (г. Красногорск, Московская обл.), «Алексеевка ХимМаш» (Воронежская обл.), «Tropfer GmbH» (Австрия), «MAISONNEUVE group» (Франция), «Hendricks Fahrzeugwerke GmbH», «SPITZER SILO FAHRZEUGE GmbH», «Feldbinder Spezialfahrzeugwerke GmbH» (Германия) и т.д. В выпускаемой ими продукции более 150 моделей из низколегированной, нержавеющей стали, алюминиевого сплава.

Производимые автоцистерны подлежат сертификации, поэтому одной из главных проблем при проектировании автоцистерн является правильное расчетное назначение геометрических размеров, обеспечивающих прочность и устойчивость конструкции при разных режимах эксплуатации. Для этого необходимо развитие математических методов анализа, компьютерного моделирования с применением современного методического и программного обеспечения, приближенного простого метода расчета на устойчивость при изгибе. Поэтому в настоящее время устойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим материалом при изгибе, изучена недостаточно. Проблема необходима и актуальна.

Целью работы является развитие простого, инженерного метода расчета на устойчивость при изгибе тонкостенных оболочек, заполненных сыпучим наполнителем.

**Расчетные соотношения.** Критическое напряжение  $\sigma_{cr}^I$  пустых оболочек при изгибе вычисляется по зависимости [1, 11]:

$$\sigma_{cr}^I = k(l)E \frac{h}{R}, \quad (1)$$

где  $E$  модуль упругости материала оболочки;  $h$  толщина стенки;  $R$  радиус оболочки. Коэффициент  $k(l)$  зависит от соотношения  $R/l$ . Для практических расчетов для оболочек средней длины рекомендуется в работе [1]  $k = 0,3$ , для больших длинных оболочек  $k = 0,22$ . Экспериментальные исследования и численные расчеты, выполненные в работах [19, 20, 22], показали, что критическое напряжение, вычисленное по формуле (1), хорошо совпадают с результатами, полученными в экспериментах и численными расчетами, в пределах 18,8%. Поэтому формулу (1) можно использовать для расчета критического напряжения при изгибе для пустых оболочек, теряющих устойчивость в упругой стадии работы в зоне наибольших нормальных напряжений сжатия.

Тонкостенные оболочки, заполненные сыпучим материалом, находятся в условиях комбинированного нагружения. На их устойчивость при изгибе дополнительно влияют весовая нагрузка сыпучего материала и его противодействие образованию вмятин по аналогии с действием внутреннего давления.

От равномерно распределенной весовой нагрузки  $q$  максимальное нормальное напряжение сжатия  $\sigma_1$  в зоне потери устойчивости определяется в зависимости от условий закрепления оболочки. В работах [20, 22]  $\sigma_1$  определяется по зависимости

$$\sigma_1 = \frac{M}{W}, \quad (2)$$

где  $M$  — изгибающий момент в поперечном сечении в месте потери устойчивости от весовой нагрузки;  $W$  — осевой момент сопротивления. В случае консольно закрепленной оболочки изгибающий момент равен

$$M = \frac{ql^2}{2}, \quad (3)$$

где  $l$  — расстояние от свободного конца оболочки до места потери устойчивости. В случае шарнирного закрепления по концам оболочки

$$M = \frac{ql^2}{8}, \quad (4)$$

где  $l$  — расстояние между опорами.

На внутреннюю поверхность оболочки, в зоне образования вмятины, сыпучий материал создает противодействующее гидростатическое давление, равное [25]

$$P = \rho g H, \quad (5)$$

где  $\rho$  — насыпная плотность;  $H$  — высота загрузки сыпучего материала,  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

Полагая до потери устойчивости напряженное состояние оболочки безмоментным, противодействующее давление сыпучего материала создает меридиональное напряжение, в месте потери устойчивости равное [1]

$$\sigma_2 = \frac{PD}{4h} = \frac{PR}{2h} = \frac{\rho g HR}{2h}. \quad (6)$$

Так как потеря устойчивости оболочки происходит в упругости, критическое напряжение можно рассчитать, используя принцип суперпозиции и зависимости (1)–(6):

$$\sigma_{\text{cr}} = \sigma_{\text{cr}}^I + \sigma_1 \pm \sigma_2 = kE \frac{h}{R} + \frac{M}{W} \pm \frac{\rho g HR}{2h}. \quad (7)$$

В формуле (7) для третьего члена знак плюс принимается, если оболочка изгибается выпуклостью вверх, знак минус принимается, если оболочка изгибается выпуклостью вниз.

Суммарный критический изгибающий момент  $M_{\text{cr}}$  от комбинированной нагрузки в месте потери устойчивости будет равен

$$M_{\text{cr}} = \sigma_{\text{cr}} W. \quad (8)$$

Поперечная критическая нагрузка для консольно закрепленной цистерны в месте потери устойчивости равна

$$Q_{\text{cr}} = \frac{M_{\text{cr}}}{l}. \quad (9)$$

С учетом весовой нагрузки

$$Q_{\text{cr}} = F_{\text{cr}} + ql = \frac{M_{\text{cr}}}{l}, \quad (10)$$

где  $F_{\text{cr}}$  — критическая сосредоточенная сила, приложенная на свободном конце цистерны.

Из выражения (10) определяется критическая сила:

$$F_{\text{cr}} = \frac{M_{\text{cr}}}{l} - ql. \quad (11)$$

Тогда из выражения (11) допускаемая сила равна

$$F = \frac{F_{\text{cr}}}{n}, \quad (12)$$

где  $n$  коэффициент запаса устойчивости. Из выражения (11) можно рассчитать критическую длину  $l_{\text{cr}}$  цистерны при заданных силе  $F$  и материале загрузки  $q$ :

$$Fl_{\text{cr}} = M_{\text{cr}} - ql_{\text{cr}}^2. \quad (13)$$

Из решения квадратного уравнения (13) получим

$$l_{\text{cr}} = \frac{-F + \sqrt{F^2 + 4gM_{\text{cr}}}}{2q}. \quad (14)$$

Для цистерны на двух шарнирных концевых опорах критический изгибающий момент на середине пролета равен

$$M_{\text{cr}} = R\frac{l}{2} - q_{\text{cr}}\frac{l^2}{8} = q_{\text{cr}}\frac{l^2}{4} - q_{\text{cr}}\frac{l^2}{8} = q_{\text{cr}}\frac{l^2}{8} = \sigma_{\text{cr}}W, \quad (15)$$

где  $R$  реакция опоры. Из зависимости (15) критическая весовая нагрузка равна

$$q_{\text{cr}} = \frac{8\sigma_{\text{cr}}W}{l^2}. \quad (16)$$

Из зависимости (15) при известной весовой нагрузке  $q$  можно рассчитать критическую длину цистерны:

$$l_{\text{cr}} = \sqrt{\frac{8\sigma_{\text{cr}}W}{q}}. \quad (17)$$

**Верификация методики расчета.** Верификацию методики расчета выполним сравнением результатов расчета с экспериментальными результатами и численным решением.

1. Модельный образец из алюминиевого сплава радиусом  $R = 32,8$  мм, толщиной стенки  $h = 0,1$  мм, длиной  $l = 135$  мм загружен медным порошком насыпной плотностью  $\rho = 3,54$  г/см<sup>3</sup> на 90% объема и одним концом жестко закреплен, другой конец свободный. На свободный конец приложена поперечная сила, которая постепенно увеличивалась до потери устойчивости образца. Устойчивость образца терялась близко к заземленному концу. В предполагаемом месте потери устойчивости наклеивались тензодатчики для измерения деформаций и расчета критического напряжения. Опытное значение критического напряжения равно  $\sigma_{\text{cr}} = 78$  МПа.

Выполним расчет по приближенной методике. Отношение  $l/R = 135/32,8 = 4,1$ , поэтому образец можно отнести к оболочкам средней длины. Критическое напряжение для пустого образца рассчитаем по формуле (1):

$$\sigma_{\text{cr}}^I = 0,3E\frac{h}{R} = 0,3 \cdot 0,7 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,1}{32,8} = 64 \text{ МПа},$$



где  $E = 0,7 \cdot 10^5$  МПа модуль упругости материала образцов. Равномерно распределенная весовая нагрузка  $q$  равна

$$q = \frac{m}{l} = \frac{1,45 \cdot 10^{-5}}{135 \cdot 10^{-3}} = 0,107 \cdot 10^{-3} \text{ МН/м},$$

где  $m = 1,45 \cdot 10^{-5}$  МН масса загрузки. Осевой момент сопротивления

$$W = \pi h R^2 = 3,14 \cdot 0,1 \cdot 32,8^2 \cdot 10^{-9} = 0,34 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

По формулам (2), (3)

$$\sigma_1 = \frac{ql^2}{2W} = \frac{0,107 \cdot 10^{-3} \cdot 135^2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 0,34 \cdot 10^{-6}} = 2,86 \text{ МПа}.$$

По формуле (6)

$$\sigma_2 = \frac{\rho g H R}{2h} = \frac{3,54 \cdot 10^{-2} \cdot 9,8 \cdot 64 \cdot 10^{-3} \cdot 32,8 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}} = 3,7 \text{ МПа},$$

где  $H = 64 \cdot 10^{-3}$  м высота загрузки. По формуле (7) критическое напряжение

$$\sigma_{cr} = \sigma_{cr}^I + \sigma_1 + \sigma_2 = 64 + 2,86 + 3,7 = 70,56 \text{ МПа}.$$

Расхождение между опытным значением  $\sigma_{cr} = 78$  МПа и рассчитанным значением  $\sigma_{cr} = 70,56$  МПа составляет 9,5%.

2. В работе [18] выполнен численный расчет на устойчивость при изгибе автоцистерны из алюминиевого сплава АМГ-5. Размеры цистерны:  $R = 1,175$  м,  $h = 5 \cdot 10^{-3}$  м,  $l = 16$  м,  $E = 0,7 \cdot 10^5$  МПа. Цистерна загружена сыпучим материалом общей массой 1,6 МН. Расчетная схема представлена на рис. 1.

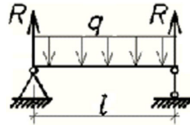


Рис. 1.

Численным расчетом [18] получено критическое напряжение  $\sigma_{cr} = 121,6$  МПа.

Расчет выполним приближенным методом. Равномерно распределенная нагрузка

$$q = \frac{m}{l} = \frac{1,6}{16} = 0,1 \text{ МН/м}.$$

Критическое напряжение равно

$$\begin{aligned} \sigma_{cr} &= \sigma_{cr}^I + \sigma_1 - \sigma_2 = 0,22E \frac{h}{R} + \frac{M}{W} - \frac{\rho g H R}{2h} = \\ &= 0,22 \cdot 0,7 \cdot 10^5 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1,275} + \frac{3,2}{0,0255} - 0,0218 \cdot 9,8 \cdot 2,15 \cdot \frac{1,275}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 127,3 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

где максимальный изгибающий момент

$$M = \frac{ql^2}{8} = \frac{0,1 \cdot 16^2}{8} = 3,2 \text{ МН} \cdot \text{м};$$

$$W = \pi h R^2 = 3,14 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,275^2 = 0,0255 \text{ м}^3;$$

объем цистерны

$$V = \pi R^2 l = 3,14 \cdot 1,275 \cdot 16 = 81,67 \text{ м}^3;$$

объем, занимаемый порошком,

$$V_1 = 0,9V = 0,9 \cdot 81,67 = 73,5 \text{ м}^3;$$

насыпная плотность

$$\rho = \frac{m}{V_1} = \frac{1,6}{73,5} = 0,0218 \text{ МН/м}^3.$$

Третий член принят со знаком минус, потому что цистерна изгибается выпуклостью вниз.

Расхождение критических напряжений двух расчетов составляет 4,5%. Значит, приближенный метод расчета можно принять для проектирования размеров цистерн на предприятиях.

Условие устойчивости запишется следующим образом:

$$\sigma = (0,22 - 0,3)E \frac{h}{R} + \frac{M}{W} \pm \rho g H \frac{R}{2h} \leq \frac{\sigma_{\text{cr}}}{n}. \quad (18)$$

Методика расчета не учитывает влияние геометрических несовершенств на устойчивость. Влияние геометрических несовершенств цистерн можно учесть снижением коэффициента запаса устойчивости  $n$ . Пользуясь условием устойчивости (18) и соотношениями (8)–(17), рассчитываются необходимые параметры цистерн.

Выводы:

- 1) рассмотренный метод расчета позволяет рассчитывать предельное состояние автоцистерн, изготавливаемых на предприятиях;
- 2) при проектировании различных цистерн, предназначенных для перевозки сыпучих материалов, можно рассчитать необходимые геометрические размеры цистерн;
- 3) методика расчета не учитывает геометрические несовершенства оболочек. Влияние геометрических несовершенств на устойчивость можно учесть увеличением коэффициента запаса устойчивости.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
- [2] Григолоук Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.
- [3] Саченков А. В. О локальной устойчивости оболочек // Изв. Казан. филиала АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1960. №14. С. 35–42.
- [4] Коноплев Ю. Г. Экспериментальное исследование задачи о действии сосредоточенной силы на цилиндрическую оболочку // Исследования по теории пластин и оболочек. 1966. №4. С. 83–90.
- [5] Ильгамов М. А. Экспериментальное исследование устойчивости консольно закрепленной цилиндрической оболочки под действием поперечной силы и внутреннего давления // Исследования по теории пластин и оболочек. 1964. №2. С. 186–191.
- [6] Саченков А. В. Теоретико-экспериментальный метод исследования устойчивости пластин и оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. 1970. Вып. 6/7. С. 391–433.
- [7] Mathon C, Limam A. Experimental collapse of thin cylindrical shells submitted to internal pressure and pure bending // Thin-Walled Structure. 2006. Vol. 44. P. 39–50.
- [8] Li L.-Y., Kettle R. Nonlinear bending response and buckling of ring-stiffened cylindrical shells under pure bending // Int. J. of Solids and Structures. 2002. Vol. 39, №3. P. 765–781.
- [9] Бойко Д. В., Железнов Л. П., Кабанов В. В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости овальных цилиндрических оболочек при комбинированном нагружении изгибающим и крутящим моментами // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2007. №3. С. 3–7.

- [10] Brazier L. G. On the flexure of thin cylindrical shells and other “Thin” Sections // *Proceedings of the Royal Society*. 1927. Ser. A, vol. 116, №773. P. 104–114.
- [11] Моссаковский В. И., Маневич Л. И., Мильцын А. М. Моделирование несущей способности цилиндрических оболочек. Киев: Наукова Думка, 1977. 141 с.
- [12] Chen L., Doerich C. and Rotter J. M. A study of cylindrical shells under global bending in the elastic-plastic range // *Steel Construction Design and Research*. 2008. Vol. 1. №1. P. 59–65.
- [13] Houliara S., Karamanos S. Stability of long transversely-isotropic elastic cylindrical shells under bending // *Int. J. of Solids and Structures*. 2010. V. 47. P. 10–24.
- [14] Rotter J. M., Sadowski A. J., Chen L. Nonlinear stability of thin elastic cylinders of different length under global bending // *Int. J. of Solids and Structures*. 2014. V. 51. P. 2826–2839.
- [15] Xu Z., Gardner L., Sadowski A. J. Nonlinear stability of elastic elliptical cylindrical shells under uniform bending // *Int. J. of Mechanical Sciences*. 2017. Vol. 128–129. P. 593–606.
- [16] Wang J., Sadowski A. J. Elastic imperfect tip-loaded cantilever cylinders of varying length // *Int. J. of Mechanical Sciences*. 2018. Vol. 140. P. 200–210.
- [17] Fajuyitan O. K., Sadowski A. J., Wadee M. A., Rotter J. M. Nonlinear behaviour of short elastic cylindrical shells under global bending // *Thin-Walled Structures*. 2018. Vol. 124. P. 574–587.
- [18] Баженов В. Г., Кибец А. И., Петров М. В., Шошин Д. В. Численный анализ деформирования, потери устойчивости и закритического поведения большегабаритных емкостей для автомобильной транспортировки сыпучих грузов // *Проблемы прочности и пластичности*. 2008. Вып. 70. С. 88–96.
- [19] Баженов В. Г., Кибец А. И., Петров М. В., Федорова Т. Г., Шошин Д. В. Теоретическое и экспериментальное исследование потери устойчивости и закритического поведения тонкостенной цилиндрической оболочки при изгибе // *Проблемы прочности и пластичности*. 2009. Вып. 71. С. 77–83.
- [20] Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г. Экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных оболочек при чистом изгибе // *Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева*. Серия: Механика предельного состояния. 2015. №2(24). С. 119–125.
- [21] Vazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G., Frolova I. A. Stability and supercritical behaviour of thin-walled cylindrical shell with discrete aggregate in bending // *Materials Physics and Mechanics*. 2016. Vol. 28. P. 16–20.
- [22] Баженов В. Г., Гоник Е. Г., Кибец А. И., Кибец Ю. И., Павленкова Ю. В., Петров М. В., Федорова Т. Г. Конечно-элементное решение задачи устойчивости и закритического поведения автоцистерн для транспортировки сыпучих грузов // *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Т. 75, №1. С. 56–62.
- [23] Vazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Petrov M. V. and Fedorova T. G. Stability and Supercritical Behavior of Large Size Tankers for Transportation of Loose Goods // *J. of Machinery Manufacture and Reliability*. 2015. Vol. 44, №5. P. 422–427.
- [24] Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г., Пфаненштиль Н. Г. Способ приближенного расчета на устойчивость при поперечном изгибе тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины, заполненных сыпучим материалом // *Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева*. Сер. Механика предельного состояния. 2018. №4(38). С. 120–128.
- [25] Цытович Н. А. Механика грунтов. М.: Высш. школа, 1983. 288 с.

E. G. Gonik<sup>1</sup>, M. V. Petrov<sup>1</sup>

## CALCULATION OF THE LIMIT CONDITION OF THIN WALL CYLINDRICAL SHELLS DURING BENDING FILLED WITH A BULK FILLER

<sup>1</sup>I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary

**Abstract.** In the paper, a state in which the voltage at the point of buckling reaches a critical value is taken as the limit state. The stability of the shells is lost in the elastic stage of the material, therefore, the principle of superposition is used to calculate the critical stress. The critical stress for the empty shell is calculated using the formula for calculating the critical stress proposed in [1, 11]. The shell filled with bulk aggregate is under the influence of a combined load: a weight load that is uniformly distributed along the length and pressure on the inner surface of the shell. The stress from the weight load is calculated as the ratio of the bending moment to the axial moment of resistance; the axial stress from the internal hydrostatic pressure of the loose aggregate is determined by the momentless theory of shells. Circumferential stress is neglected due to its small effect on stability. The total voltage determines the value of the critical voltage at which stability is lost. Verification is performed by comparing the calculated critical voltage with experimental results and numerical calculations. Recommended calculated dependencies to determine the required geometric dimensions of the designed tank trucks for transportation of bulk materials. The calculation method does not take into account the effect of imperfections on stability; therefore, the influence of imperfections is proposed to be taken into account by an increased factor of stability.

**Keywords:** tank truck, stability, shell, limit state, stress, force, moment, elasticity, density.

## REFERENCES

- [1] Volmir A. S. Stability of deformable systems. M.: Nauka, 1967. 984 p.
- [2] Grigolyuk E. I., Kabanov V. Century. Stability of shells. M.: Nauka, 1978. 360 p.
- [3] Sachenkov A. B. About local stability of shells // *Izv. Kazan. filiala AN SSSR. Ser.fiz.-mat. i tekhn. nauk.* 1960. No 14. P. 35–42.
- [4] Konoplev Yu. G. Experimental task study on the effect of concentrated force on cylindrical Shell // *Studies on the theory of plates and shells.* 1966. No 4. Page 83–90.
- [5] Ilgamov M. A. Experimental study of stability of cantilevered cylindrical shell Under the action of transverse force and internal pressure // *Studies on the theory of plates and shells.* 1964. No. 2. P. 186–191.
- [6] Sachenkov A. B. Theoretical-experimental method of studying stability of plates and shells // *Research on plate and shell theory.* 1970. 6/7. P. 391–433.
- [7] Mathon C, Limam A. Experimental collapse of thin cylindrical shells submitted to internal pressure and pure bending // *Thin-Walled Structure.* 2006. Vol. 44. P. 39–50.
- [8] Li L. Y., Kettle R. Nonlinear bending response and buckling of ring-stiffened cylindrical shells under pure bending // *Int. J. of Solids and Structures.* 2002. Vol. 39, №3. P. 765–781.

---

*Gonik Ekaterina Grigoryevna*

e-mail: katya.gonik@mail.ru, Senior lecturer, I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

*Petrov Mikhail Vasilyevich*

e-mail: rimmapetrova20@gmail.com, Doctor of technical Sciences, Professor, I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

- [9] D. V., Zhelezov L. P., Boars V. Century. Study of nonlinear deformation and stability Oval cylindrical shells at combined loading with bending and torsional moments //Izvestia Higher education institutions. Aircraft Engineering. 2007. No 3. P. 3–7.
- [10] Brazier L. G. On the flexure of thin cylindrical shells and other “Thin” Sections // Proceedings of the Royal Society. 1927. Ser. A, vol. 116, No 773. P. 104–114.
- [11] Mossakovsky V. I., Manevich L. I., Miltsyn And. M. Modeling the Bearing Capacity of Cylindrical Kiev: Naukova Dumka, 1977. 141 p.
- [12] Chen L., Doerich C. and Rotter J. M. A study of cylindrical shells under global bending in the elastic-plastic range // Steel Construction Design and Research. 2008. Vol. 1, No 1. P. 59–65.
- [13] Houliara S., Karamanos S. Stability of long transversely-isotropic elastic cylindrical shells under bending // Int. J. of Solids and Structures. 2010. V. 47. P. 10–24.
- [14] Rotter J. M., Sadowski A. J., Chen L. Nonlinear stability of thin elastic cylinders of different length under global bending // Int. J. of Solids and Structures. 2014. V. 51. P. 2826–2839.
- [15] Xu Z., Gardner L., Sadowski A. J. Nonlinear stability of elastic elliptical cylindrical shells under uniform bending // Int. J. of Mechanical Sciences. 2017. Vol. 128–129. P. 593–606.
- [16] Wang J., Sadowski A. J. Elastic imperfect tip-loaded cantilever cylinders of varying length // Int. J. of Mechanical Sciences. 2018. Vol. 140. P. 200–210.
- [17] Fajuyitan O. K., Sadowski A. J., Wadee M. A., Rotter J. M. Nonlinear behaviour of short elastic cylindrical shells under global bending // Thin-Walled Structures. 2018. Vol. 124. P. 574–587.
- [18] Bazhenov V. G., Kibets And. I., Petrov M. V., Shoshin D. Century. Numerical strain analysis, loss Stability and short-critical behavior of large-size containers for automotive transportation of loose Cargo //Problems of strength and plasticity. 2008. 70. P. 88–96.
- [19] Bazhenov V. G., Kibets And. I., Petrov M. V., Fedorova T. G., Shoshin D. Century. Theoretical and experimental Study of stability loss and short-term behavior of thin-walled cylindrical shell in case of Bending //Problems of strength and plasticity. 2009. 71. P. 77–83.
- [20] Petrov M. V., Fedorova T. G., Gonik E. . Experimental study of resistance loss Thin-walled shells at pure bending //Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. No. 2 (24). P. 119–125.
- [21] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G., Frolova I. A. Stability and supercritical behaviour of thin-walled cylindrical shell with discrete aggregate in bending // Materials Physics and Mechanics. 2016. Vol. 28. P. 16–20.
- [22] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets And. I., Kibets Yu. I., Pavlenkova Yu. V., Petrov M. V., Fedorova T. . Conotthere is a solution to the problem of stability and short-critical behavior of tankers for Transportation of loose cargoes //Problems of strength and plasticity. 2013. 75, No 1. P. 56–62.
- [23] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Petrov M. V. and Fedorova T. G. Stability and Supercritical Behavior of Large Size Tankers for Transportation of Loose Goods // J. of Machinery Manufacture and Reliability. 2015. Vol. 44, №5. P. 422–427.
- [24] Petrov M. V., Fedorova T. G., Gonik E. G., Pfanenshtil N. Approximate Calculation Method for Stability at transverse bending of thin-walled cylindrical shells of medium length filled with loose Material //Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2018. No 4 (38). P. 120–128.
- [25] Tsytoovich N. A. Soil mechanics. M.: Vysch. School, 1983. 288 p.

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области, Россия.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

**Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

**Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ковалев Владимир Александрович (vlad\_koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

**Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

**Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su)** – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Максимова Людмила Анатольевна** ([maximova\\_ng@mail.ru](mailto:maximova_ng@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Маркин Алексей Александрович** ([markin@tsu.tula.ru](mailto:markin@tsu.tula.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Матвеев Сергей Владимирович** ([sergio2100@mail.ru](mailto:sergio2100@mail.ru)) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Матченко Николай Михайлович** ([ekc\\_05@mail.ru](mailto:ekc_05@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Миронов Борис Гурьевич** ([mbg.chspu@yandex.ru](mailto:mbg.chspu@yandex.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович** ([mir-vagif@mail.ru](mailto:mir-vagif@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

**Михайлов Глеб Константинович** ([gkmikh@mail.ru](mailto:gkmikh@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

**Мурашкин Евгений Валерьевич** ([evmurashkin@gmail.com](mailto:evmurashkin@gmail.com)) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Немировский Юрий Владимирович** ([nemirov@itam.nsc.ru](mailto:nemirov@itam.nsc.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Непершин Ростислав Иванович** ([nepershin\\_ri@rambler.ru](mailto:nepershin_ri@rambler.ru)) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

**Орлов Виктор Николаевич** ([orlowvn@rambler.ru](mailto:orlowvn@rambler.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

**Радаев Юрий Николаевич** ([radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ревуженко Александр Филиппович** ([revuzhenko@yandex.ru](mailto:revuzhenko@yandex.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

**Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv)** – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига, Латвия.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

**Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru) и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

**на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2e с использованием стиля `prede1.sty`. Стиль `prede1.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Гавриленко А. В., Гультаев В. И., Субботин С. Л.</i> Определение прогибов сжато-изогнутого предварительно напряжённого без сцепления железобетонного элемента при использовании двухлинейной диаграммы состояния бетона.....	3
<i>Немировский Ю. В.</i> Предельное состояние гибридных полигональных пластин без прямых углов.....	17
<i>Мионов Б. Г., Никитин А. В.</i> Об определении предельного состояния неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления.....	24
<i>Аскеров С. А.</i> Предельное состояние в барабане, ослабленном трещиной со связями между берегами в концевых зонах, при торможении автомобиля .....	28
<i>Радаев Ю. Н.</i> Пространственные асимптотические директоры в асимметричных теориях механики сплошных деформируемых тел.....	36
<i>Непершин Р. И.</i> О пластическом деформировании сферических частиц при холдном газодинамическом напылении .....	45
<i>Дац Е. П., Мурашкин Е. В.</i> Температурные напряжения в условиях тороидальной симметрии.....	57
<i>Козлов В. В., Маркин А. А.</i> Постановка и метод решения класса задач нелинейной теории упругости.....	71
<i>Немировский Ю. В.</i> Предельные состояния гибридных дерево-пластиковых клееных брусьев.....	79
<i>Городцов В. А., Лисовенко Д. С.</i> Модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль сдвига для гексагональных кристаллов.....	91
<i>Гоник Е. Г., Петров М. В.</i> Расчет предельного состояния тонкостенных цилиндрических оболочек при изгибе, заполненных сыпучим наполнителем.....	117
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	126
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	129
СОДЕРЖАНИЕ .....	131

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2019. № 2 (40)**

**Отв. за выпуск:** С. В. Тихонов

**Технические редакторы:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Компьютерная верстка:** С. В. Тихонов, С. В. Матвеев

**Макет:** С. В. Тихонов

---

Подписано в печать 22.06.2019. Выход в свет 28.06.2019.  
Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 16,9.  
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

---

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском отделе Чувашского государственного  
педагогического университета им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38