

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**

**Научный журнал
№ 3(41)
июль – сентябрь 2019 г.**

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Заместитель ответственного секретаря: С. В. Матвеев

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Е. В. Ломакин, Л. А. Максимова,
А. А. Маркин, Г. К. Михайлов, Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин,
В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин,
А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж
(Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

Адрес редакции и издательства: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1184

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2019

*Светлой памяти
Геннадия Ивановича Быковцева посвящается*

А. А. Буренин

УРАВНЕНИЕ ВОЗМОЖНЫХ МОЩНОСТЕЙ В ДИНАМИКЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Приводится вывод уравнений возможных мощностей для случая, когда в среде возможно распространение поверхностей разрывов скоростей, на которых терпят разрыв необратимые деформации.

Ключевые слова: упругость, пластическое течение, уравнение возможных мощностей, ударные волны, диссипативные разрывы.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.011

УДК: 539.374

1. Введение.

Уравнение возможных мощностей в математической теории пластического течения служит вариационной постановке задач теории. С помощью данного уравнения указываются ограничения, при которых задачи теории пластичности имеют единственное решение [1,2]. Это же уравнение служит основанием для формирования экстремальных принципов теории упругопластического деформирования и предельных теорем [1,2] теории. Здесь запишем такое уравнение в условиях, когда в среде возможно распространение поверхностей сильных разрывов (ударных волн), где претерпевают разрывы не только скорости и напряжения, но и необратимые деформации.

2. Исходные модельные зависимости.

Деформации d_{ij} в деформируемом теле полагаем малыми и содержащими обратимую e_{ij} и необратимую p_{ij} составляющие [1,2]

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

© Буренин А. А., 2019

Буренин Анатолий Александрович

e-mail: mail@imim.ru, доктор физико-математических наук, член корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Поступила 01.08.2019

Работа выполнена в рамках государственного задания № 075-00414-19-00.

Соотношения (1) записаны в прямоугольной декартовой системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$); u_i – компоненты вектора перемещений. Смысл составляющей p_{ij} не уточняем. Это могут быть и пластические деформации, и вязкие (деформации ползучести), и некоторая сумма их. Важно, что в составе полных деформаций d_{ij} присутствуют обратимые e_{ij} , задающие консервативный механизм деформирования, определяемый упругими свойствами среды. Поэтому e_{ij} иногда называем упругими деформациями, то есть далее упругие деформации и обратимые деформации означают одно и то же. Если в некотором объеме сплошной среды отсутствуют поверхности разрывов скоростей перемещений и, следовательно, деформаций и напряжений, то в любой ее точке выполняется локальное следствие закона сохранения энергии [3,4]

$$\rho \frac{de}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}); \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

В (2) ρ – плотность среды, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, q_j – компоненты вектора теплового потока, e – плотность распределения внутренней энергии. Последняя является функцией деформаций d_{ij} и плотности распределения энтропии $s(t, x_1, x_2, x_3)$, то есть $e = e(d_{ij}, s)$. При этом согласно второму закону термодинамики [5]

$$\frac{de}{ds} = T, \quad (3)$$

где T – абсолютная температура. Относительно функции $e = e(e_{ij}, s)$ принимаем еще одно предположение. Пусть такая функция ответственна только за консервативный механизм деформирования, когда $e = e(e_{ij}, s)$, то есть является функцией только обратимых (упругих) деформаций [4]. Тогда, следуя (1) и (2), имеем:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial e_{ij}} \varepsilon_{ij}^e + \rho \frac{\partial e}{\partial s} \frac{ds}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p; \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p; \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{de_{ij}}{dt}; \quad \varepsilon_{ij}^p = \frac{dp_{ij}}{dt}$$

Отсюда, с учетом (3)

$$\left(\rho \frac{\partial e}{\partial e_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \varepsilon_{ij}^e + \rho T \frac{ds}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p$$

Отдельная возможность существования консервативного процесса упругого деформирования, диссипативных процессов деформирования и теплопроводности является термодинамическим следствием. Согласно этому следствию, получаем

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial e}{\partial e_{ij}} \quad (5)$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p \quad (6)$$

Перепишем уравнение баланса энтропии (6) в форме именно уравнения баланса

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -J_{j,j} + \frac{1}{T}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{1}{T^2}q_j T_{,j} \quad (7)$$

$$J_j = \rho s v_j + T^{-1} q_j$$

Вектор с компонентами J_j является полным потоком энтропии. Он определяет поток энтропии в объеме, занимаемый телом, и перераспределения энтропии внутри деформируемого объема. За производство энтропии внутри объема ответственны два его источника внутри этого объема. Последний слагаемый правой части (7) задает производство энтропии за счет необратимого процесса теплопроводности, предпоследний – за счет процесса необратимого деформирования. Обратимый процесс только упругого деформирования является таким образом изоэнтропическим.

Далее принимаем адиабатическое приближение для процесса деформирования. Опираясь на то, что механические процессы являются неизмеримо более быстрыми по сравнению с процессом передачи тепла, считаем $q_j \equiv 0$. Иначе, коэффициент теплопроводности полагаем равным нулю. Тогда, следуя (6) и (7) запишем

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p; \quad \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -(\rho s v_j)_{,j} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (8)$$

Зависимость (5) приводит к закону Гука, если положить $\rho = \text{const}$ и $\rho e = W(e_{ij})$. Для изотропной среды имеем

$$W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2;$$

$$I_1 = e_{kk}; \quad I_2 = e_{ij} e_{ji}; \quad (9)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

Здесь λ , μ – параметры Ламе. Выбор инвариантов I_1 и I_2 произволен. Если по соображениям следующим из практики применения линейных законов связи «напряжения-деформации», например, не устраивает нормальная изотропия материала среды уже на стадии обратимого деформирования, то можно принять $I_1 = e_{kk}$, $I_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ (\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2 \right\}^{1/2}$. Инвариант I_2 в этом случае, где $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, а σ_i главные значения тензора напряжений, называют интенсивностью напряжений. При таком выборе инвариантов непосредственно в квадратичном приближении для $W(I_1, I_2)$ приходим к материалам по – разному сопротивляющимся растяжению и сжатию [6]. Имеются примеры, когда в теории и расчетах удобно использовать зависимость, обратимую (9). Получим такое соотношение, введя термодинамический потенциал $\gamma(\sigma_{ij}, s)$ вида

$$\gamma(\sigma_{ij}, s) = \rho^{-1} e(\sigma_{ij}, s) - \sigma_{ij} e_{ij} \quad (10)$$

Подстановка (10) в (2) позволяет записать

$$\left(e_{ij} - \rho \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma_{ij}} \right) \frac{d\sigma_{ij}}{dt} + \rho T \frac{ds}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p$$

Отсюда следует и определяющее соотношение, связывающее деформации с напряжениями

$$e_{ij} = \rho \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma_{ij}} \quad (11)$$

и уравнение баланса энтропии (6) или (7).

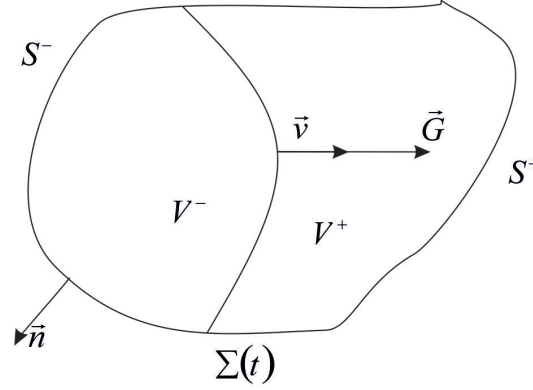


Рис. 1. Деформируемый объем и его деление на части поверхностью разрывов $\Sigma(t)$

Полагаем теперь, что в области V занимаемого деформируемым телом, движется поверхность Σ , делящая объем V на две части V^+ и V^- (рис.1). В случае малых деформаций (1) и линейной зависимости деформаций от напряжений (9), (11) скорость продвижения данной поверхности G является постоянной. Динамические условия совместности разрывов, являющиеся следствием законов сохранения, в общем случае имеют вид [7]:

$$\begin{aligned} [\sigma_{ij}] \nu_j &= \rho^+ (v_j^+ \nu_j - G) [v_i] \\ \sigma_{ij}^+ [v_i] \nu_j &= \rho^+ (v_j^+ \nu_j - G) \left\{ \frac{[v_i][v_i]}{2} + [e] \right\} - [q_j] \nu_j \end{aligned}$$

Здесь квадратными скобками обозначен разрыв переменной, так $[m] = m^+ - m^-$, где m^+ вычисляется непосредственно перед Σ , m^- – сразу за Σ ; ν_j – компоненты единичной нормали к Σ . В рассматриваемом адиабатическом приближении для деформируемой среды $q_j \equiv 0$. В силу принятой малости деформаций пренебрегаем где это возможно слагаемыми, содержащими квадраты компонент v_j скоростей перемещений. В таком случае динамические условия совместности разрывов упрощаются и могут быть записаны в форме

$$[\sigma_{ij}] \nu_j + \rho G [v_i] = 0 \quad (12)$$

$$[\sigma_{ij} v_i] \nu_j + \frac{1}{2} \rho G [v_i v_i + 2e] = 0$$

Разрыв $[e]$ плотности распределения внутренней энергии $e = e(e_{ij}, s)$ можно вычислить представив ударную волну Σ тонким переходным слоем, где одинаково проявляются как консервативные, так и диссипативные свойства процесса деформирования. Проинтегрировав по переходному слою найдем

$$\rho [e] = \frac{1}{2} [\sigma_{ij} e_{ij}] + \int_{p_{ij}^+}^{p_{ij}^-} \sigma_{ij} dp_{ij} \quad (13)$$

Подстановка (13) во второе соотношение (12) позволяет переписать следствие закона сохранения энергии в виде

$$\frac{1}{2} \rho G [v_i v_i] + [\sigma_{ij} v_i] \nu_j + \frac{G}{2} [\sigma_{ij} e_{ij}] + G \int_{p_{ij}^+}^{p_{ij}^-} \sigma_{ij} dp_{ij} = 0 \quad (14)$$

Если воспользоваться геометрическими и кинематическим условиями совместности разрывов [8]

$$[m_{,j}] = \gamma \nu_j + g^{\alpha\beta} [m]_{,\alpha} x_{j,\beta} \quad (15)$$

$$[\dot{m}] = -G\gamma + \frac{\delta[m]}{\delta t}; \quad g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}$$

то можно получить зависимости

$$\begin{aligned} [v_i] &= G [u_{i,j}] \nu_j \\ [e_{ij}] &= -\frac{1}{2G} ([v_i] \nu_j + [v_j] \nu_i) \end{aligned}$$

Используем последнее в следующих тождественных преобразованиях

$$\begin{aligned} [\sigma_{ij} v_i] \nu_j &= \sigma_{ij}^+ [v_i] \nu_j + v_i [\sigma_{ij}] \nu_j - [\sigma_{ij}] [v_i] \nu_j = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{ij}^+ ([v_i] \nu_j + [v_j] \nu_i) - \rho G v_i^+ [v_i] + \rho G [v_i] [v_i] = \\ &= -G \sigma_{ij}^+ [e_{ij}] - \rho G v_i^+ [v_i] + \rho G [v_i] [v_i] \\ \frac{1}{2} \rho [v_i v_i] &= \rho G v_i^+ [v_i] - \frac{1}{2} \rho G [v_i] [v_i] \end{aligned}$$

Эти соотношения позволяют переписать (14) в виде:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \rho G [v_i] [v_i] + \rho G v_i^+ [v_i] - G \sigma_{ij}^+ [e_{ij}] - \rho G v_i^+ [v_i] + \rho G [v_i] [v_i] + \\ + \frac{1}{2} G [\sigma_{ij} e_{ij}] + G \int_{p_{ij}^+}^{p_{ij}^-} \sigma_{ij} dp_{ij} = 0, \end{aligned}$$

или, приводя в последнем равенстве подобные и вычисляя разрыв произведений, запишем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \rho G [v_i] [v_i] - G \sigma_{ij}^+ [e_{ij}] - G \sigma_{ij}^+ [p_{ij}] + \frac{1}{2} G \sigma_{ij}^+ [e_{ij}] + \frac{1}{2} G e_{ij}^+ [\sigma_{ij}] - \\ - \frac{1}{2} G [\sigma_{ij}] [e_{ij}] + G \int_{-p_{ij}^+}^{p_{ij}^-} \sigma_{ij} dp_{ij} = 0, \end{aligned}$$

Замечаем, что согласно теореме Бетти для линейной упругой среды $\sigma_{ij}^+ [e_{ij}] - e_{ij}^+ [\sigma_{ij}] = 0$. Тогда из последнего равенства следует

$$-\frac{1}{2} (\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-) [p_{ij}] = \int_{p_{ij}^+}^{p_{ij}^-} \sigma_{ij} dp_{ij} \quad (16)$$

Соотношение (16) представляет таким образом прямое следствие закона сохранения энергии на поверхности разрывов Σ . Важно, что оно является следствием только предположения об изотропной линейной связи «напряжения-деформации», то есть в рамках закона Гука (9). Механизм необратимого деформирования может быть любым.

Отмечаем, что второй слагаемый в правой части уравнения баланса энтропии, являясь источником энтропии, обязан быть при $\varepsilon_{ij}^p \neq 0$ строго положительным. Так как всегда $T > 0$, то $\sigma_{ij}\varepsilon_{ji}^p > 0$. Следовательно $\sigma_{ij}dp_{ji} > 0$ ($dt > 0$). Но тогда

$$\int_{p_{ij}^+}^{p_{ij}^-} \sigma_{ij} dp_{ij} > 0; \quad -\frac{\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-}{2} [p_{ij}] > 0 \quad (17)$$

Данные ограничения на процессы в ударной волне накладывает второй закон термодинамики. Замечаем, что в случае только обратимого деформирования неравенства (17) обращаются в тождество. Они имеют смысл только при $\varepsilon_{ij}^p \neq 0$. Но ударная волна в упругой (гиперупругой [9]) также является необратимым процессом; в [10] показано, что в этом случае требование второго закона термодинамики сводится также к неравенству, накладываемому только на $[e]$ или $[\gamma]$. Причем эти разрывы полностью определяются параметрами обратимого деформирования. Следовательно, в упругой среде существует аналог теоремы Цемплена, известной в газовой динамике [11]. В рассматриваемом случае диссипативной поверхности разрывов скоростей роль теоремы Цемплена играют неравенства (17).

В объемах V^+ и V^- , на которые делит поверхность $\Sigma(t)$ объем V наряду с уравнением баланса внутренней энергии (1) выполняется уравнение движения

$$\sigma_{ij,j} + \rho\chi_i = \rho \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (18)$$

Обозначим через n_j компоненты внешней единичной нормали к поверхности $S = S^+ + S^-$ динамически деформируемого тела (рис. 1)

Проведем цепочку следующих тождественных преобразований

$$\begin{aligned} \int_S \sigma_{ij} v_i n_j dS &= \int_{S^+} \sigma_{ij} v_i n_j dS + \int_{S^-} \sigma_{ij} v_i n_j dS = \\ &= \int_{S^+} \sigma_{ij} v_i n_j dS + \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^- v_i^- \nu_j d\Sigma - \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^+ v_i^+ \nu_j d\Sigma + \int_{\Sigma} [\sigma_{ij} v_i] \nu_j d\Sigma = \\ &= \int_{V^+} \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} dV + \int_{V^-} \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} dV + \int_{V^+} \sigma_{ij} v_{i,j} dV + \int_{V^-} \sigma_{ij} v_{i,j} dV - \\ &\quad - \int_{V^+} \rho \chi_i v_i dV - \int_{V^-} \rho \chi_i v_i dV + \int_{\Sigma} [\sigma_{ij} v_i] \nu_j d\Sigma = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{V^+} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i v_i + \sigma_{ij} e_{ij}) dV + \int_{V^-} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i v_i + \sigma_{ij} e_{ij}) dV \right] + \\ &+ \int_{V^+} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p dV + \int_{V^-} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p dV - \int_V \rho \chi_i v_i dV + \int_{\Sigma} [\sigma_{ij} v_i] \nu_j d\Sigma = \\ &= \frac{d}{dt} \int_V \left(\rho \frac{v_i v_i}{2} + \frac{\sigma_{ij} e_{ij}}{2} \right) dV + \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p dV - \int_V \rho \chi_i v_i dV + \\ &\quad + \int_{\Sigma} \left(\rho G \frac{[v_i v_i]}{2} + G \frac{[\sigma_{ij} e_{ij}]}{2} + [\sigma_{ij} v_i] \nu_j \right) d\Sigma \end{aligned}$$

Здесь с целью исключения объемов V^+ и V^- использовалось следствие закона сохранения массы

$$\frac{d}{dt} \int_{V^+} g(t, x_1, x_2, x_3) dt = \int_{V^+} \frac{\partial g}{\partial t} dV + \int_{S^+} g v_j n_j dS - \int_{\Sigma} g G d\Sigma$$

и аналогичное соотношения для V^- . Для подынтегрального выражения в поверхностном интеграле по Σ после некоторых тождественных преобразований можно получить

$$\rho G \frac{[v_i v_i]}{2} + \frac{G}{2} [\sigma_{ij} v_i] \nu_j = -\frac{\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-}{2} [p_{ij}]$$

Таким образом получаем окончательное соотношение

$$\begin{aligned} & \int_S \sigma_{ij} v_i n_j dS + \int_V \rho \chi_i v_i dv = \\ & = \frac{d}{dt} \int_V \left(\rho \frac{v_i v_i}{2} + \frac{\sigma_{ij} e_{ji}}{2} \right) dV + \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p dV - \int_{\Sigma} \frac{\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-}{2} [p_{ji}] d\Sigma \end{aligned} \quad (19)$$

Соотношение (19) и является искомым уравнением возможных мощностей, или по терминологии [1] уравнением скорости виртуальных работ. Согласно этому уравнению мощность внешнего воздействия на тело (левая часть (19)) расходуется на скорость изменения кинетической и потенциальной (упругой) энергии в теле (первое слагаемое правой части (19)), и на диссипацию энергии в объеме V и на поверхности Σ (соответствующие последующие слагаемые правой части). Соотношение (16) подчеркивает термодинамический смысл последнего слагаемого в (19).

3. Заключение.

Отдельно следует заметить, что уравнение (19) записано в условиях, что деформации являются малыми, полные деформации считаются складывающимися из своих обратимых и необратимых составляющих. Для напряжений и обратимых (упругих) деформаций выполняются зависимости линейной изотропной теории упругости (в частности теорема Бетти [12]). Диссипативный механизм деформирования не конкретизируется; он может быть любым по предпочтениям исследователя.

Очевидно, что уравнение (19) может быть распространено на случаи, когда в теле присутствуют не одна, а несколько поверхностей разрывов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [2] Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
- [3] Курапатенко В.Ф. Модели механики сплошных сред. Челябинск: Геотур, 2007. 303 с.
- [4] Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
- [5] Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 457 с.
- [6] Буренин А.А., Ярушина В.М. К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // В кн. «Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород». К 75-летию академика Шемякина Е.И. М.: Физматлит. 2006. С. 100-106.
- [7] Седовский В.М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука-Физматлит, 1997. 208 с.
- [8] Томос Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
- [9] Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 312 с.
- [10] Буренин А. А., Чернышов А. Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве // ПММ. 1978. Т. 42. В.4. С. 711–717
- [11] Рахматуллин Х.А., Сагомоян А.Я., Бунимович А.И., Зверев Н.Н. Газовая динамика. М.: Высш. Школа, 1965. 722 с.

- [12] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

A. A. Burenin

VIRTUAL POWER PRINCIPLE IN DYNAMICS OF ELASTIC-PLASTIC SOLIDS

Institute of Machine Science and Metallurgy of FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. The derivation of the equations of virtual powers is given for the case when it is possible to propagate the surfaces of velocity discontinuities in the medium at which irreversible deformations undergo rupture.

Keywords: elasticity, plastic flow, equation of possible powers, shock waves, dissipative discontinuities

REFERENCES

- [1] Bykovtsev G.I., Ivlev D.D. Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian)
 [2] Ishlinsky A.Yu., Ivlev D.D. Mathematical theory of plasticity. M.: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian)
 [3] Kuropatenko V.F. Model of continuum mechanics. Chelyabinsk: Geotur, 2007. 303 p. (in Russian)
 [4] Burenin A.A., Kovtanyuk L.V. Large irreversible deformations and elastic aftereffect. Vladivostok: Dalnauka, 2013. 312 p. (in Russian)
 [5] De Groot S., Mazur P. Nonequilibrium thermodynamics. Moscow: Mir, 1964. 457 p. (in Russian)
 [6] Burenin A.A., Yarushina V.M. To modeling of deformation of materials, differently resisting stretching and compression // In in. "Problems of mechanics of deformable solids and rocks". To the 75th anniversary of Shemyakin E. I. M.: Fizmatlit. 2006. pp. 100–106. (in Russian)
 [7] Sadovsky V.M. Discontinuous solutions in problems of dynamics of elastic-plastic media. Moscow: Nauka-Fizmatlit, 1997. 208 p. (in Russian)
 [8] Tomoe T. Plastic flow and fracture in solids. Moscow: Mir, 1964. 308 p. (in Russian)
 [9] Prager V. Introduction to continuum mechanics. M.: Izd-vo Inostr. lit, 1963. 312 p. (in Russian)
 [10] Burenin A.A., Chernyshov A.D. Shock waves in an isotropic elastic space //PMM. 1978. Vol. 42. I. 4. p. 711–717. (in Russian)
 [11] Rakhmatullin H.A., Sagomonyan A.Ya., Bunimovich A. I., Zverev N.N. Gas dynamics. M.: No. School, 1965. 722 p. (in Russian)
 [12] Novatsky V. Theory of elasticity. Moscow: Mir, 1975. 872 p. (in Russian)

Burenin Anatoliy Aleksandrovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Corresponding member of RAS, Principal researcher of the Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Ю. Н. Радаев, Е. В. Мурашкин

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ НА РАСТУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Работа посвящена выводу определяющих соотношений на поверхности наращивания. Предложенный подход основывается на результатах, известные из алгебры рациональных инвариантов. Аргументы тензорных функционалов выбраны с учетом их инвариантности относительно локальных поворотов координатного репера относительно нормали к поверхности наращивания. Построена полная система совместных рациональных инвариантов тензора напряжений и единичного вектора нормали к поверхности наращивания. Проведена геометрическая визуализация рассматриваемых рациональных инвариантов. Приведен вывод формул преобразования операторов дифференцирования вдоль координатных направлений на касательной плоскости к поверхности наращивания при переходе от заданной ортогональной сетки к произвольной (необязательно ортогональной) криволинейной сетке. Полученные граничные условия на поверхности наращивания геометрически и механически непротиворечивы. Сформулированные дифференциальные ограничения подразумевают экспериментальную идентификацию нескольких определяющих функций. Симметрия тензора напряжений при моделировании не учитывается.

Ключевые слова: аддитивное производство, 3D-печать, поверхностный рост, поверхность наращивания, остаточное напряжение, определяющее уравнение, рациональный инвариант, дифференциальное ограничение, полная система, производная по направлению

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.012

УДК: 539.374

© Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. 2019

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17–19–01257).

Поступила 20.03.2019

Введение. Традиционные методы изготовления изделий сложной формы подразумевают разнообразные технологические процессы обработки, как связанные со снятием материала, так и основанные на синтезе изделий путем последовательного нанесения материала на поверхность произвольной формы. Изготовление изделий путем добавления нового материала широко используется в современной инженерной практике [1]. К таким способам аддитивного производства относятся: лазерная стереолитография [2], селективное лазерное спекание, электронно-лучевая плавка, моделирование методом наплавления, метод многоструйного моделирования, изготовление объектов с использованием ламинирования, 3D-печать [3], компьютерная осевая литография, послойное бетонирование [4].

3D Printing (3DP) аналогичен технологии селективного лазерного спекания, только здесь не используется плавление: объект формируется из порошкового материала путём склеивания, с использованием струйной печати для нанесения жидкого клея. Технология 3D-печати позволяет производить цветное моделирование за счет добавления в клей красителей (непосредственно во время печати), или за счет использования нескольких печатающих головок с цветным клеем [3].

Послойное бетонирование конструкций также относится к методам аддитивных технологий [4]. Послойное бетонирование можно разделить на два вида, в зависимости от времени между заливками. В случае “горячего шва” перерыв между слоями меньше 12 часов. Второй тип послойной заливки — “холодный шов”. В этом случае необходимо дождаться полного затвердевания предыдущего слоя для исключения возможного растрескивания не затвердевшей части под действием вновь добавленного материала.

Методы аддитивного производства, описанные выше, в основе своей используют хорошо известные природные процессы: аккреция космических объектов, формирование лавин и ледников, процессы роста кристаллов, рост атеросклеротических бляшек [5, 6]. Для всех этих явлений характерен поверхностный рост. Рост атеросклеротической бляшки можно описать как процесс изначальной инфильтрации компонентов плазмы крови в тонкий приповерхностный слой внутренней стенки артерии. Рост зародыша кристалла происходит путем присоединения к его поверхности отдельных атомов или их групп.

Основная особенность наращиваемого тела состоит в том, что тело формируется (“достраивается”) в процессе деформирования. Это обстоятельство, разумеется, существенно осложняет анализ таких процессов деформирования по сравнению с телами, состав материальных частиц которых в ходе деформирования не меняется. Достаточно упомянуть ситуацию, которая имеет место в динамике абсолютно твердого тела переменной массы — учет переменной массы, с одной стороны, приводит к более сложным математическим задачам, а с другой стороны, — порождает качественно новые эффекты в поведении тел. Естественно ожидать, что при обобщении этой модели на деформируемые тела произойдет дальнейшее усложнение начально-краевых задач, а влияние параметров наращивания на реакцию тела станет более многообразным.

Некоторые наиболее существенные отличия математической модели наращиваемого тела от классической модели тела постоянного состава кратко анализируются в работе обзорного характера [1]. Эти различия проявляются уже при описании движения наращиваемого тела как увеличивающейся совокупности материальных частиц.

Решение каждой конкретной задачи наращивания деформируемых тел представляет собой самостоятельную и трудоемкую проблему [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Существенной особенностью постановки краевых задач механики наращиваемых тел является постановка граничных условий на поверхности раздела исходного материала и наращиваемой части [14, 15, 16]. В настоящей работе будут рассматриваться несколько вариантов определяющих соотношений на поверхности наращивания, начиная от простейших соотношений (см. известную книгу Г. И. Быковцева: [16], С. 288–292) до некоторых существенных обобщений теории. При изложении будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в публикациях [16, 17, 18, 19, 20].

1. Понятия и уравнения, связанные с наращиваемой поверхностью. 1.1. Концептуальные особенности механики поверхностного роста. В силу особенностей наращиваемого тела изменение его геометрической формы обусловлено двумя факторами — искажением под действием нагрузок (это обычный в механике деформируемых тел фактор) и формоизменением за счет добавления материала по его внешней поверхности. Последний фактор характерен именно для тел переменного состава. Для правильного описания напряженно-деформированного состояния тела необходимо четко различать оба механизма формоизменения тела в рамках соответствующей математической модели. Укажем здесь на такой элементарный пример. Предположим, что первоначально имеется сплошной шар из сжимаемого материала. Внешним давлением он обжимается в радиальном направлении. Если он при этом не наращивается, то его внешний радиус при прогрессирующем обжатии будет уменьшаться и это изменение размеров будет очевидным признаком наличия напряжений внутри его. В случае же наращивания внешний радиус шара может вести себя по-разному в зависимости от конкретных обстоятельств — как убывать, так и возрастать. В частности, он может оставаться и постоянным, если скорость притока материала к внешней поверхности соответствующим образом согласована с нарастанием интенсивности внешнего давления на шар. Можно также наращивать исходный шар в отсутствие внешнего давления и снова получать разительно различающиеся распределения напряжений, если варьировать окружное “натяжение” наращиваемых элементарных слоев. Во всяком случае совершенно ясно, что изменение геометрических характеристик наращиваемого тела почти ничего не говорит о его напряженном состоянии. В этом состоит одно из принципиальных отличий наращиваемого тела от тела постоянного состава.

В классической механике деформируемого твердого тела обычно считается, что множество материальных частиц, образующих данное тело, не изменяется в процессе его деформирования. Такие материальные объекты условимся называть телами постоянного состава. Однако, многообразие процессов деформирования, с которыми мы сталкиваемся в окружающей нас действительности, не укладывается в рамки этих представлений. Под воздействием разнообразных факторов множество частиц, образующих тело, может изменяться в очень широких пределах. Такие тела называются далее *телами переменного состава*. Встречаются ситуации, когда тело в процессе деформирования теряет свои частицы — так происходит, например, при коррозионных повреждениях, износе, абляции, эрозии, расплавлении. В подобных ситуациях можно говорить о телах уменьшающегося состава или, короче, *распадающихся телах*. Весьма часто приходится сталкиваться также со случаями увеличения массы деформируемого тела за счет добавления к нему новых материальных частиц. Так происходит, например, при последовательном возведении массивных бетонных конструкций,

намораживании льда, изготовлении деталей способами намотки и напыления, выращивании кристаллов и т. д. Тела, переменность состава которых обусловлена притоком материала к ним извне, будем называть наращиваемыми телами. Заметим, что в динамику абсолютно твердого тела понятие тела переменного состава (массы) было введено И.В. Мещерским еще в конце прошлого века, однако понятие деформируемого твердого тела переменного состава появилось в механике существенно позднее.

Важно отметить, что “зарождение” или “исчезновение” материальных частиц может, в принципе, происходить как внутри тела, так и на его поверхности. По первому типу протекают, например, процессы биологического роста или деградации тканей, а по второму типу — разнообразные технологические процессы (напыление, затвердевание, намотка и т. п.). В дальнейшем будут рассматриваться только процессы наращивания деформируемых тел, поскольку этот случай значительно сложнее с точки зрения его математического моделирования, чем случай распадающегося тела. Кроме того, все рассуждения будут ограничены процессами наращивания по внешней поверхности тела. Явления зарождения частиц во внутренних точках тела из рассмотрения исключаются.

Процесс присоединения к телу новых элементов будем называть *наращиванием*, а соответствующую часть внешней поверхности, к которой в текущий момент времени присоединяются бесконечно тонкие слои материала, — *поверхностью наращивания*. Поверхностью наращивания может быть вся свободная внешняя поверхность тела (односвязная или многосвязная) или ее часть. Тело, существовавшее до начала наращивания, будем называть *основным телом*. Тело, составленное из материальных элементов, которые присоединились к основному телу за промежуток времени от момента начала наращивания до рассматриваемого момента времени, назовем *дополнительным телом*, а объединение основного тела с дополнительным телом — *растущим телом* или *наращиваемым телом*. Возможны процессы наращивания, начинающиеся с зарождения единственной материальной частицы, когда основное тело, как таковое, отсутствует. Такая возможность в последующих рассуждениях, как правило, не исключается. Однако, учитывая особенности реальных процессов наращивания, будем предполагать, что основное тело существует.

Процессы наращивания целесообразно классифицировать еще по одному признаку — на *дискретные* и *непрерывные*. При дискретном наращивании к телу в отдельные моменты времени присоединяются объемы материала конечных размеров, а при непрерывном к телу постоянно добавляются бесконечно малые частицы или, скажем, бесконечно тонкие слои материала. Итак, основными характерными чертами рассматриваемой здесь концепции наращиваемого деформируемого твердого тела являются следующие: 1) дополнительные элементы материала присоединяются к телу по его внешней поверхности; 2) процесс наращивания протекает непрерывно — за каждый бесконечно малый промежуток времени к телу присоединяется инфинитезимальный объем материала; 3) наращивание происходит одновременно с нагружением тела поверхностными и/или массовыми силами. Одна из принципиально важных особенностей процесса наращивания состоит в том, что приращиваемые элементы могут находиться как в ненапряженном (естественном) состоянии, так и в, вообще говоря, произвольном состоянии “преднапряжения”, которое никак не согласовано с состоянием поверхностного слоя тела, к которому они присоединяются.

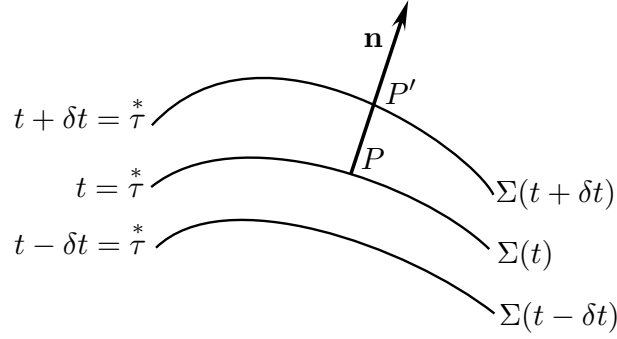


Рис. 1. Распространяющаяся в пространстве поверхность наращивания Σ (Propagating Growing Surface).

1.2. Основные уравнения, связанные с растущей поверхностью. Зададим перемещающуюся в пространстве поверхность наращивания Σ в неявном виде уравнением

$$t = \tau^*(x^i). \quad (1)$$

В этом случае единичная нормаль \mathbf{n} к поверхности τ , направленная в сторону ее распространения, вычисляется через вектор пространственного градиента от (1), т.е.

$$n_i = c \partial_i \tau^*, \quad c = |\nabla \tau^*|^{-1}, \quad (2)$$

где ∇ — оператор Гамильтона, c — линейная скорость поверхности наращивания в направлении нормали \mathbf{n} , которая определяется согласно (Рис. 1)

$$c = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{|\overrightarrow{PP'}|}{\delta t}. \quad (3)$$

Для восстановления напряжений по известным скоростям можно воспользоваться формулами, данными в [16]:

$$\begin{aligned} \tau^{ij} &= \int_{\tau^*+0}^t [\partial. \tau^{ij}(x^k, t')] dt' + \mathfrak{J}^{ji} + \tau^{*ij}(x^k), \\ \mathfrak{J}^{ji} &= \int_{\tau^*-0}^{\tau^*+0} [\partial. \tau^{ij}(x^k, t')] dt', \end{aligned} \quad (4)$$

где τ^{ij} — тензор напряжений Коши, $\partial.$ — производная по времени при фиксированных координатах x^k , \mathfrak{J}^{ji} — интеграл скачков напряжений, $\tau^{*ij}(x^k) = \tau^{ij}(x^k, t)|_{t=\tau^*(x^s)-0}$ компоненты тензора напряжений, вычисленные в момент времени $t = \tau^*(x^s) - 0$ прямо перед моментом включения элемента в состав основного тела (Рис. 2). Момент времени $t = \tau^*(x^s) + 0$ соответствует моменту сразу после присоединения элемента к поверхности наращивания.

Подставим актуальные напряжения (4) в уравнение равновесия

$$\nabla_j \tau^{ji} + X^i = 0. \quad (5)$$

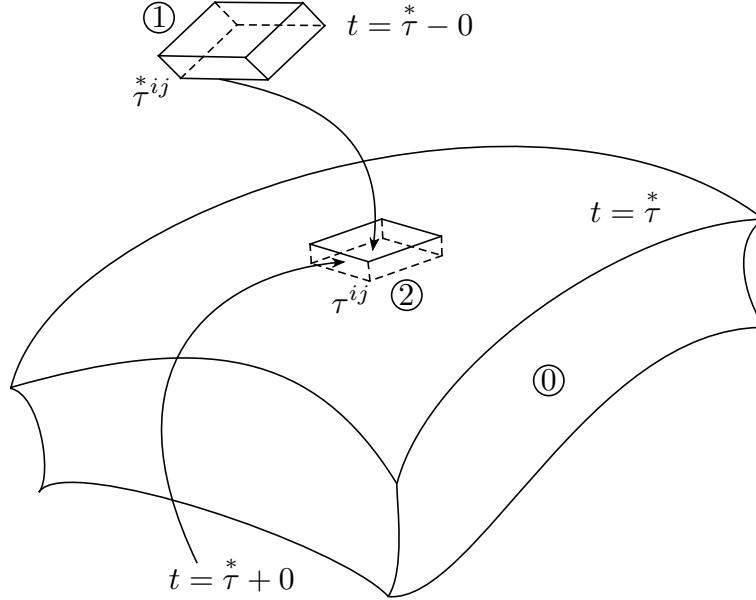


Рис. 2. Процесс поверхностного роста. 0) Основное тело. 1) Состояние элемента за момент до присоединения к основному телу. 2) Состояние элемента сразу после вхождения в состав основного тела.

Здесь $X^i = X^i(x^k, t)$ — объемные силы.

В результате получим

$$\nabla_j \left\{ \int_{\tau^*+0}^t [\partial_t \tau^{ji}(x^k, t')] dt' + \mathfrak{J}^{ji} + \tau^{*ji}(x^k) \right\} + X^i = 0 \quad (t \geq \tau^* + 0). \quad (6)$$

Раскрывая скобки по правилу дифференцирования интеграла, зависящего от параметра¹, преобразуем соотношение (6) к виду

$$\int_{\tau^*+0}^t \nabla_j [\partial_t \tau^{ji}(x^k, t')] dt' + \nabla_j \mathfrak{J}^{ji} - (\nabla_j \tau^*) [\partial_t \tau^{ji}(x^k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x^s)+0} + \nabla_j \tau^{*ji}(x^k) + X^i = 0. \quad (7)$$

Подставим формулу (2) в (7)

$$\int_{\tau^*+0}^t \nabla_j [\partial_t \tau^{ji}(x^k, t')] dt' + \nabla_j \mathfrak{J}^{ji} - c^{-1} [n_j \partial_t \tau^{ji}(x^k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x^s)+0} + \nabla_j \tau^{*ji}(x^k) + X^i = 0. \quad (8)$$

Меняя местами дифференцирования по пространственной и временной координате и вычисляя интеграл в (8) с учетом (5), получим

$$-X^i + X^i(x^k) + \nabla_j \mathfrak{J}^{ji} - c^{-1} [n_j \partial_t \tau^{ji}(x^k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x^k)+0} + \nabla_j \tau^{*ji}(x^k) + X^i = 0, \quad (9)$$

¹Параметрами здесь выступают пространственные координаты x^k , причем нижний предел интегрирования зависит от x^k .

где $\dot{X}^i(x^k) = X^i(x^k, t)|_{t=\dot{\tau}(x^s)+0}$.

Окончательно, группируя подобные слагаемые и умножая обе части равенства (9) на c , получим дифференциальное ограничение на поверхности наращивания в тензорной форме

$$c[\nabla \cdot \dot{\tau}(x^k) + \nabla \cdot \mathfrak{J} + \dot{X}(x^k)] - [\mathbf{n} \cdot \partial \tau(x^k, t)]|_{t=\dot{\tau}(x^s)+0} = \mathbf{0} \quad (t = \dot{\tau} + 0), \quad (10)$$

и координатной записи

$$c[\nabla_j \dot{\tau}^{ji}(x^k) + \nabla_j \mathfrak{J}^{ji} + \dot{X}^i(x^k)] - [n_j \partial \tau^{ji}(x^k, t)]|_{t=\dot{\tau}(x^s)+0} = 0 \quad (t = \dot{\tau} + 0). \quad (11)$$

На самом деле соотношения (10) и (11) не зависят от времени t .

Условие (10) следует рассматривать как дифференциальное ограничение для напряжений на поверхности наращивания. Действительно, если удастся выразить напряжения $\dot{\tau}$ через актуальные напряжения τ на поверхности наращивания Σ , то из соотношения (10) можно получить дифференциальное уравнение для напряжений τ . Альтернативные способы получения граничных условий на поверхности наращивания подробно обсуждались, например в публикациях [14, 15].

Отметим несколько специальных случаев формулировки дифференциального ограничения (11):

- (1) При самоуравновешенности скачков напряжений ($\nabla_j \mathfrak{J}^{ji} = 0$) дифференциальное ограничение (11) можно записать в форме

$$c[\nabla_j \dot{\tau}^{ji}(x^k) + \dot{X}^i(x^k)] - [n_j \partial \tau^{ji}(x^k, t)]|_{t=\dot{\tau}(x^s)+0} = 0 \quad (t = \dot{\tau} + 0). \quad (12)$$

- (2) Пусть, кроме того, напряженные состояния присоединяемых элементов самоуравновешены, т.е. справедливо

$$\nabla_j \dot{\tau}^{ji}(x^k) = 0, \quad (13)$$

следовательно, дифференциальное ограничение (11) преобразуется к более простому виду

$$c[\dot{X}^i(x^k)] - [n_j \partial \tau^{ji}(x^k, t)]|_{t=\dot{\tau}(x^s)+0} = 0 \quad (t = \dot{\tau}). \quad (14)$$

- (3) Если вдобавок к (12) и (13) отсутствуют объемные силы

$$X^i(x^k, t) = 0, \quad (15)$$

то условие (11) можно записать в виде

$$[n_j \partial \tau^{ji}(x^k, t)]|_{t=\dot{\tau}(x^s)+0} = 0 \quad (t = \dot{\tau}). \quad (16)$$

или

$$[\partial n_j \tau^{ji}(x^k, t)] - [\tau^{ji}(x^k, t)] \partial n_j = 0 \quad (t = \dot{\tau} + 0). \quad (17)$$

- (4) Если скорость распространения поверхности наращивания c равна нулю, то соотношение (11) преобразуется

$$[n_j \partial \tau^{ji}(x^k, t)]|_{t=\dot{\tau}(x^s)+0} = \partial [n_j \tau^{ji}(x^k, t)]|_{t=\dot{\tau}(x^s)+0} = 0. \quad (18)$$

Откуда, после интегрирования по времени получаем хорошо известное из теории упругости краевое условие (без указания значений правой части):

$$[n_j \tau^{ji}(x^k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x^s)+0} = t^i(x^k). \quad (19)$$

В общем случае напряжения τ^* будут связаны с актуальными напряжениями на поверхности наращивания тензорно–функциональной зависимостью

$$\tau^* = \mathfrak{F}(\tau, \mathbf{n}, \dots). \quad (20)$$

Многозначие в соотношении (20) означает возможную зависимость функции \mathfrak{F} от дополнительных параметров, характеризующих процесс наращивания. В простейшей модели множество дополнительных параметров может быть пустым. В частности, функция \mathfrak{F} может зависеть от микроструктурных директоров и теплофизических переменных связанных с растущей поверхностью. Физический смысл дополнительных директоров [17, 18, 19, 20] может быть связан с характерными направлениями выкладки волокон в тканых композитных материалах, арматуры в бетонных конструкциях, намотке нитей в катушке и т.д. Функция \mathfrak{F} , на самом деле, должна зависеть от таких комбинаций аргументов, которые инвариантны относительно поворотов вокруг оси, определяемой директором \mathbf{n} .

2. Простейший вариант дифференциального ограничения на поверхности наращивания. Рассмотрим инвариантно–геометрическую интерпретацию случая, обсуждаемого в работе [16]. Пусть на поверхности наращивания τ известны поверхностные усилия \mathbf{t} :

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \tau. \quad (21)$$

В этом случае примем для сужения на двумерный плоский элемент T тензора τ^* обозначение τ_{2d}^* и будем оперировать с простейшей зависимостью

$$\tau_{2d}^* = \mathfrak{F}_{2d}(\mathbf{t}, \mathbf{n}). \quad (22)$$

В декартовой системе координат тензоры τ_{2d}^* и \mathfrak{F}_{2d} представляются в форме 2×2 матриц:

$$\tau_{2d}^* = \begin{pmatrix} \tau_{11}^* & \tau_{12}^* \\ \tau_{21}^* & \tau_{22}^* \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{F}_{2d} = \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_{11} & \mathfrak{F}_{12} \\ \mathfrak{F}_{21} & \mathfrak{F}_{22} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

В дальнейшем удобно воспользоваться разложением вектора поверхностных усилий (Рис. 3) на сумму составляющих в виде

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_\perp + \mathbf{t}_\parallel. \quad (24)$$

Здесь \mathbf{t}_\perp — проекция вектора поверхностных усилий на касательную плоскость T к мгновенной поверхности наращивания Σ , \mathbf{t}_\parallel — проекция на нормальное направление к поверхности наращивания.

В качестве аргументов тензорной функции \mathfrak{F} выберем совместные рациональные инварианты тензора второго ранга τ и вектора \mathbf{n} , неизменные при повороте координатного репера вокруг директора \mathbf{n} . В таком случае, рационально независимую систему рациональных инвариантов [21] выпишем в следующем виде:

$$|\mathbf{t}|^2 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, \quad |\mathbf{t}_\parallel| = |\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}|, \quad |\mathbf{t}_\perp|^2. \quad (25)$$

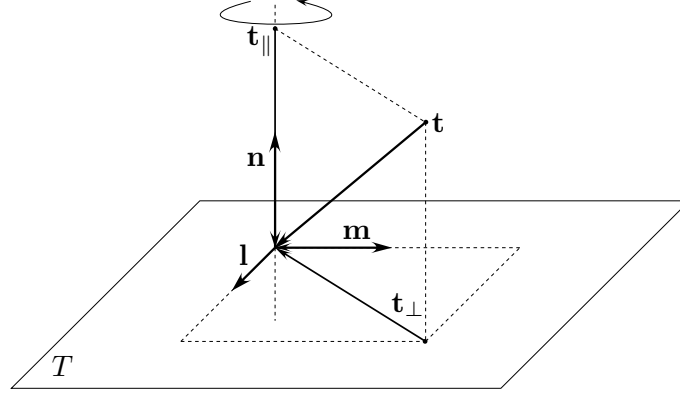


Рис. 3. Геометрическая визуализация вектора поверхностных усилий.

При этом, в системе инвариантов (25) существует очевидная сизигия

$$|\mathbf{t}|^2 = |\mathbf{t}_{\parallel}|^2 + |\mathbf{t}_{\perp}|^2. \quad (26)$$

Поэтому, устраняя первый инвариант в списке (25), система независимых рациональных инвариантов примет вид

$$|\mathbf{t}_{\parallel}|, \quad |\mathbf{t}_{\perp}|^2. \quad (27)$$

Определяющее соотношение на поверхности наращивания τ , с учетом (27), можно принять в форме

$$\frac{\tau^*}{2d} = \mathfrak{F}_{2d}(|\mathbf{t}_{\parallel}|, |\mathbf{t}_{\perp}|^2). \quad (28)$$

Соотношение (28) имеет ясный механический смысл. Выберем декартову систему координат (Рис. 3) таким образом, чтобы орт \mathbf{k} был направлен вдоль нормали \mathbf{n} к поверхности наращивания, а для проекции вектора поверхностных усилий \mathbf{t} в касательной плоскости T к поверхности наращивания справедливо следующее разложение

$$|\mathbf{t}_{\perp}|^2 = |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{l}|^2 + |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{m}|^2. \quad (29)$$

Тогда проекции вектора \mathbf{t} на орты выбранной системы координат можно выразить через актуальные напряжения (здесь и далее индексы, заключенные в скобки $\langle \dots \rangle$, относятся к системе координат с базисом $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$)

$$|\mathbf{t}_{\parallel}| = |\tau_{\langle 33 \rangle}|, \quad |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{l}|^2 = \tau_{\langle 31 \rangle}^2, \quad |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{m}|^2 = \tau_{\langle 32 \rangle}^2. \quad (30)$$

В итоге, определяющее соотношение (28) запишем в форме

$$\frac{\tau^*}{2d} = \mathfrak{F}_{2d}(|\tau_{\langle 33 \rangle}|, \tau_{\langle 31 \rangle}^2 + \tau_{\langle 32 \rangle}^2). \quad (31)$$

Отметим, что соотношение (31) совпадает с аналогичным условием в работе [16]. Однако, в отличие от работы [16] тензор \mathfrak{F}_{2d} не является шаровым, т.е. имеет четыре определяющих функции на поверхности наращивания².

²В симметричном случае определяющих функций будет три. Для изотропного симметричного случая остается одна определяющая функция.

Подставив условие (31) в уравнение (11), получим дифференциальное ограничение для напряжений на поверхности наращивания в координатной форме

$$c[d_j F_{\langle ji \rangle} + X_{\langle i \rangle}^*(x_k)] - \partial \cdot \tau_{\langle 3i \rangle}(x_k, t) \Big|_{t=\tau^*(x_s)+0} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (32)$$

где d_j — оператор дифференцирования по направлениям:

$$d_3 = \mathbf{n} \cdot \nabla, \quad d_1 = \mathbf{l} \cdot \nabla, \quad d_2 = \mathbf{m} \cdot \nabla, \quad (33)$$

т.е. в (33) индекс 3 соответствует направлению нормали, а индексы 1 и 2 — касательным направлениям к поверхности наращивания. Подробное исследование аппарата операторов дифференцирования по направлению см. в [22]

Заметим, что система независимых совместных рациональных инвариантов (27) не является полной, в ней не учтены совместные инварианты, содержащие квадрат тензора напряжений τ .

3. Инвариантно-полная формулировка дифференциального ограничения на поверхности наращивания. Полная система совместных инвариантов тензора второго ранга τ и вектора \mathbf{n} , кроме инвариантов (27), включает в себя дополнительные инварианты

$$|\mathbf{t}_{\parallel}| = |\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}|, \quad |\mathbf{t}_{\perp}|^2, \quad |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{t}_{\perp}|^2. \quad (34)$$

В соотношении (34) вектор \mathbf{t}_{\perp} вычисляется в произвольной координатной сетке согласно

$$\mathbf{t}_{\perp} = \mathbf{n} \cdot \tau^2, \quad t_s = n_j \tau^{ji} \tau_{is} = t^i \tau_{is}. \quad (35)$$

Кроме того, следуя рассуждениям предыдущего раздела, для вектора \mathbf{t}_{\perp} в (34) (Рис. 4) справедливо

$$\mathbf{t}_{\perp} = \mathbf{t}_{\parallel} + \mathbf{t}_{\perp}. \quad (36)$$

Вместо инварианта $|\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{t}_{\perp}|^2$ в (34) можно использовать $\cos^2 \varpi$, в силу справедливости равенства

$$|\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{t}_{\perp}|^2 = |\mathbf{t}_{\perp}|^2 |\mathbf{t}_{\perp}|^2 \cos^2 \varpi. \quad (37)$$

Полная система совместных рациональных инвариантов тензора напряжений τ и вектора \mathbf{n} примет вид

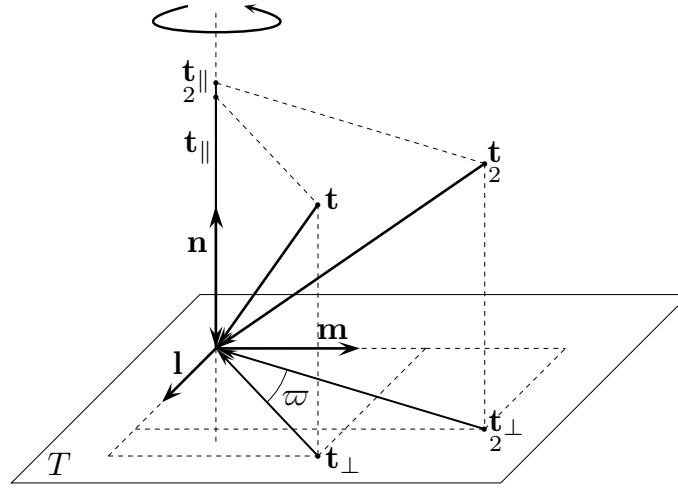
$$|\mathbf{t}_{\parallel}|, \quad |\mathbf{t}_{\perp}|^2, \quad |\mathbf{t}_{\parallel}|, \quad |\mathbf{t}_{\perp}|^2, \quad |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{t}_{\perp}|^2. \quad (38)$$

Тогда определяющее соотношение (20) на поверхности наращивания в терминах полной системы совместных инвариантов (38) асимметричного тензора второго ранга τ и вектора \mathbf{n} , для сужения на двумерный плоский элемент T тензора τ^* , примет вид

$$\tau_{2d}^* = \mathfrak{F}_{2d}(|\mathbf{t}_{\parallel}|, |\mathbf{t}_{\perp}|^2, |\mathbf{t}_{\parallel}|, |\mathbf{t}_{\perp}|^2, |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{t}_{\perp}|^2). \quad (39)$$

Выберем, как и в предыдущем случае, декартову прямоугольную систему координат (Рис. 4) таким образом, чтобы орт \mathbf{k} был направлен вдоль нормали \mathbf{n} к поверхности наращивания. Для вектора проекции поверхностных усилий \mathbf{t} в касательной плоскости T к поверхности наращивания примем (29), а для вектора \mathbf{t}_{\perp} соответствует очевидное равенство

$$|\mathbf{t}_{\perp}|^2 = |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{l}|^2 + |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{m}|^2. \quad (40)$$


 Рис. 4. Геометрическая визуализация векторов \mathbf{t} , \mathbf{t}_2 и его проекций.

Инварианты (27) и (38) и длин проекций (29) и (40) вычисляются через актуальные напряжения τ на поверхности наращивания согласно

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{l}|^2 &= \tau_{\langle 31 \rangle}^2, & |\mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}|^2 &= \tau_{\langle 32 \rangle}^2, & |\mathbf{t}_\parallel| &= |\tau_{\langle 33 \rangle}|, \\
 |\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{l}|^2 &= |\tau_{\langle 3s \rangle} \tau_{\langle s1 \rangle}|^2 = |\tau_{\langle 31 \rangle} \tau_{\langle 11 \rangle} + \tau_{\langle 32 \rangle} \tau_{\langle 21 \rangle} + \tau_{\langle 33 \rangle} \tau_{\langle 31 \rangle}|^2, \\
 |\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{m}|^2 &= |\tau_{\langle 3s \rangle} \tau_{\langle s2 \rangle}|^2 = |\tau_{\langle 31 \rangle} \tau_{\langle 12 \rangle} + \tau_{\langle 32 \rangle} \tau_{\langle 22 \rangle} + \tau_{\langle 33 \rangle} \tau_{\langle 32 \rangle}|^2, \\
 |\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n}| &= |\tau_{\langle 3s \rangle} \tau_{\langle s3 \rangle}| = |\tau_{\langle 31 \rangle} \tau_{\langle 13 \rangle} + \tau_{\langle 32 \rangle} \tau_{\langle 23 \rangle} + \tau_{\langle 33 \rangle}^2|, \\
 |\mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_\perp|^2 &= |\tau_{\langle 31 \rangle} \tau_{\langle 3l \rangle} \tau_{\langle l1 \rangle} + \tau_{\langle 32 \rangle} \tau_{\langle 3l \rangle} \tau_{\langle l2 \rangle}|^2 = \\
 &= |\tau_{\langle 31 \rangle}^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + \tau_{\langle 31 \rangle} \tau_{\langle 32 \rangle} \tau_{\langle 21 \rangle} + \tau_{\langle 31 \rangle}^2 \tau_{\langle 33 \rangle} + \tau_{\langle 32 \rangle} \tau_{\langle 31 \rangle} \tau_{\langle 12 \rangle} + \\
 &+ \tau_{\langle 32 \rangle}^2 \tau_{\langle 22 \rangle} + \tau_{\langle 32 \rangle} \tau_{\langle 33 \rangle}|^2.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Последнее из данных выше соотношений, содержащее кубические по напряжениям слагаемые, следует отнести к классу никогда не используемых в механике деформируемого твердого тела.

Определяющее соотношение на поверхности наращивания (39) с учетом выражений (41) и приняв следующие обозначения для инвариантов,

$$\begin{aligned}
 I &= |\tau_{\langle 33 \rangle}|, & II &= \tau_{\langle 31 \rangle}^2 + \tau_{\langle 32 \rangle}^2, & III &= |\tau_{\langle 31 \rangle} \tau_{\langle 13 \rangle} + \tau_{\langle 32 \rangle} \tau_{\langle 23 \rangle} + \tau_{\langle 33 \rangle}^2|, \\
 IV &= |\tau_{\langle 31 \rangle} \tau_{\langle 11 \rangle} + \tau_{\langle 32 \rangle} \tau_{\langle 21 \rangle} + \tau_{\langle 33 \rangle} \tau_{\langle 31 \rangle}|^2 + \\
 &+ |\tau_{\langle 31 \rangle} \tau_{\langle 12 \rangle} + \tau_{\langle 32 \rangle} \tau_{\langle 22 \rangle} + \tau_{\langle 33 \rangle} \tau_{\langle 32 \rangle}|^2, \\
 V &= |\tau_{\langle 31 \rangle}^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + \tau_{\langle 31 \rangle} \tau_{\langle 32 \rangle} \tau_{\langle 21 \rangle} + \tau_{\langle 31 \rangle}^2 \tau_{\langle 33 \rangle} + \tau_{\langle 32 \rangle} \tau_{\langle 31 \rangle} \tau_{\langle 12 \rangle} + \\
 &+ \tau_{\langle 32 \rangle}^2 \tau_{\langle 22 \rangle} + \tau_{\langle 32 \rangle} \tau_{\langle 33 \rangle}|^2.
 \end{aligned} \tag{42}$$

можно выписать в форме

$$\tau_{2d}^* = \mathfrak{F}_{2d}(I, II, III, IV, V). \tag{43}$$

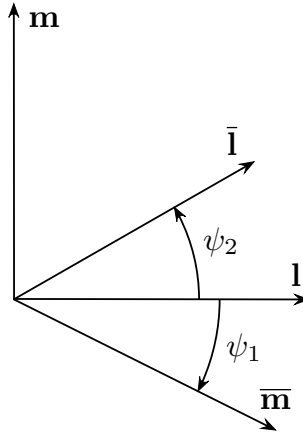


Рис. 5. Исходный и искаженный базисы в касательной плоскости к поверхности наращивания. ψ_1, ψ_2 — углы, характеризующие поворот и одновременно искажение ортогональной сетки на поверхности наращивания

или в упрощенной форме

$$\frac{\tau}{2d} = \frac{\mathfrak{F}}{2d}(I, II, III, IV). \quad (44)$$

Граничные условия в форме дифференциальных ограничений на поверхности наращивания (10), (11), в случае, когда приращиваемый материал обладает микроструктурными особенностями, можно обобщить введением в аргументы функции (20) дополнительных микроструктурных директоров, связанных с характерными направлениями выкладки материала в процессах намотки нитей или производстве тканых композитов.

4. Формулы преобразования для дифференциальных операторов d_1, d_2 . В этом разделе мы рассмотрим вывод формул преобразования операторов $d_k (k = 1, 2)$ дифференцирования вдоль координатных направлений в касательной плоскости T при переходе от данной *ортогональной* сетки к произвольной (необязательно ортогональной) криволинейной сетке.

Предположим, что на плоскости T имеется локальный ортонормированный базис \mathbf{l}, \mathbf{m} , а другой локальный базис состоит, вообще говоря, из неортогональных единичных векторов $\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{m}}$, первый из которых отклоняется от орта \mathbf{l} на угол ψ_1 по ходу часовой стрелки, а второй отклоняется от орта \mathbf{l} на угол ψ_2 против хода часовой стрелки. Мы считаем, что оба угла положительны $\psi_1 > 0, \psi_2 > 0, \psi_1 + \psi_2 \neq \pi$. Углы ψ_1, ψ_2 могут, вообще говоря, изменяться при движении вдоль координатных линий локальной базисной системы \mathbf{l}, \mathbf{m} (Рис. 5).

Найдем формулы преобразования дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} d_1 &= \mathbf{l} \cdot \nabla, & d_2 &= \mathbf{m} \cdot \nabla, \\ \bar{d}_1 &= \bar{\mathbf{l}} \cdot \nabla, & \bar{d}_2 &= \bar{\mathbf{m}} \cdot \nabla, \end{aligned}$$

при переходе от одной локальной базисной системы к другой. Эти операторы, как следует из их определения, представляют собой производные вдоль соответствующих координатных линий.

Коэффициенты разложения базисного вектора \mathbf{l} вычислим по формуле

$$\mathbf{l} = \bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2, \quad (45)$$

тогда, на основании следующих соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{l}} &= \cos \psi_1 = k_1 + k_2 \cos(\psi_1 + \psi_2), \\ \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{m}} &= \cos \psi_1 = k_2 + k_1 \cos(\psi_1 + \psi_2), \end{aligned} \quad (46)$$

коэффициенты в разложении (45) вычисляются в следующем виде

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}, \\ k_2 &= \frac{\cos \psi_2 - \cos \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}, \end{aligned} \quad (47)$$

Аналогично для разложения базисного директора \mathbf{m} имеем

$$\mathbf{m} = \bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2, \quad (48)$$

откуда с помощью уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{l}} &= -\sin \psi_1 = s_1 + s_2 \cos(\psi_1 + \psi_2), \\ \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} &= \sin \psi_1 = s_2 + s_1 \cos(\psi_1 + \psi_2), \end{aligned} \quad (49)$$

можно получить выражения для коэффициентов в разложении (48)

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{-\sin \psi_1 - \sin \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}, \\ s_2 &= \frac{\sin \psi_2 + \sin \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}, \end{aligned} \quad (50)$$

Поскольку справедливы следующие зависимости

$$\begin{aligned} d_1 &= \mathbf{l} \cdot \nabla = (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \cdot \nabla = \bar{d}_1 k_1 + \bar{d}_2 k_2, \\ d_2 &= \mathbf{m} \cdot \nabla = (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \cdot \nabla = \bar{d}_1 s_1 + \bar{d}_2 s_2, \end{aligned}$$

то в итоге искомые формулы преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_1 + \frac{\cos \psi_2 - \cos \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_2, \\ d_2 &= \frac{-\sin \psi_1 - \sin \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_1 + \frac{\sin \psi_2 + \sin \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_2, \end{aligned} \quad (51)$$

В случае преобразования поворота исходного базиса \mathbf{l} , \mathbf{m} , т. е. когда

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} - \psi, \quad \psi_2 = \psi$$

полученные формулы (51) несколько упрощаются:

$$\begin{aligned} d_1 &= \sin \psi \bar{d}_1 + \cos \psi \bar{d}_2, \\ d_2 &= -\cos \psi \bar{d}_1 + \sin \psi \bar{d}_2, \end{aligned} \quad (52)$$

Обратное по отношению к (52) преобразование есть

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 &= \sin \psi d_1 - \cos \psi d_2, \\ \bar{d}_2 &= \cos \psi d_1 + \sin \psi d_2, \end{aligned} \quad (53)$$

Далее в рамках указанного выше случая (поворот исходного базиса \mathbf{l}, \mathbf{m}) рассмотрим преобразование повторных дифференциальных операторов. Сначала положим, что угол ψ постоянен. Несложные вычисления показывают, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} d_1 d_1 &= \sin^2 \psi \overline{d_1 d_1} + \sin \psi \cos \psi (\overline{d_1 d_2} + \overline{d_2 d_1}) + \cos^2 \psi \overline{d_2 d_2}, \\ d_2 d_2 &= \cos^2 \psi \overline{d_1 d_1} - \sin \psi \cos \psi (\overline{d_1 d_2} + \overline{d_2 d_1}) + \sin^2 \psi \overline{d_2 d_2}, \end{aligned}$$

откуда следуют формулы для операторов повторного дифференцирования

$$\begin{aligned} d_1 d_1 + d_2 d_2 &= \overline{d_1 d_1} + \overline{d_2 d_2}, \\ d_1 d_1 - d_2 d_2 &= -\cos 2\psi \overline{d_1 d_1} + \sin 2\psi (\overline{d_1 d_2} + \overline{d_2 d_1}) + \cos 2\psi \overline{d_2 d_2}, \end{aligned}$$

первая из которых указывает на инвариантность оператора $d_1 d_1 + d_2 d_2$ при поворотах локального базиса \mathbf{l}, \mathbf{m} . Замечая, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} -d_1 d_2 &= \sin \psi \cos \psi (\overline{d_1 d_1} - \overline{d_2 d_2}) + \cos^2 \psi \overline{d_2 d_1} - \sin^2 \psi \overline{d_1 d_2}, \\ -d_2 d_1 &= \sin \psi \cos \psi (\overline{d_1 d_1} - \overline{d_2 d_2}) + \cos^2 \psi \overline{d_1 d_2} - \sin^2 \psi \overline{d_2 d_1}, \end{aligned}$$

приходим к формулам для смешанных производных по направлениям

$$\begin{aligned} d_1 d_2 - d_2 d_1 &= \overline{d_1 d_2} - \overline{d_2 d_1}, \\ d_1 d_2 + d_2 d_1 &= \sin 2\psi (\overline{d_1 d_2} - \overline{d_2 d_1}) + \cos 2\psi (\overline{d_1 d_2} + \overline{d_2 d_1}), \end{aligned}$$

Первая из них устанавливает инвариантность оператора $d_1 d_2 - d_2 d_1$ при поворотах локального базиса \mathbf{l}, \mathbf{m} .

В случае поворота локального базиса на половину прямого угла имеем

$$\psi = \frac{\pi}{4},$$

и полученные только что формулы позволяют заключить, что

$$\begin{aligned} d_1 d_1 + d_2 d_2 &= \overline{d_1 d_1} + \overline{d_2 d_2}, \\ d_1 d_2 - d_2 d_1 &= \overline{d_1 d_2} - \overline{d_2 d_1}, \end{aligned}$$

Если угол ψ не является постоянным, то формулы преобразования повторных операторов несколько усложняются. Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} d_1 d_1 &= \sin^2 \psi (\overline{d_1 d_1} - (\overline{d_1 \psi} \overline{d_2}) + \sin \psi \cos \psi (\overline{d_1 d_2} + \overline{d_2 d_1} - (\overline{d_1 \psi} \overline{d_1} + (\overline{d_2 \psi} \overline{d_2})) + \\ &\quad + \cos^2 \psi (\overline{d_2 d_2} + (\overline{d_2 \psi} \overline{d_1})), \\ d_2 d_2 &= \cos^2 \psi (\overline{d_1 d_1} - (\overline{d_1 \psi} \overline{d_2}) - \sin \psi \cos \psi (\overline{d_1 d_2} + \overline{d_2 d_1} - (\overline{d_1 \psi} \overline{d_1} + (\overline{d_2 \psi} \overline{d_2})) + \\ &\quad + \sin^2 \psi (\overline{d_2 d_2} + (\overline{d_2 \psi} \overline{d_1})), \end{aligned}$$

откуда сразу находим выражение для суммы смешанных производных по направлению второго порядка

$$d_1 d_1 + d_2 d_2 = \overline{d_1 d_1} + \overline{d_2 d_2} + (\overline{d_2 \psi} \overline{d_1}) - (\overline{d_1 \psi} \overline{d_2}), \quad (54)$$

На основании формул преобразования

$$\begin{aligned} -d_1 d_2 &= \sin \psi \cos \psi (\overline{d_1 d_1} - \overline{d_2 d_2} - (\overline{d_1 \psi} \overline{d_2} - (\overline{d_2 \psi} \overline{d_1})) + \\ &\quad + \cos^2 \psi (\overline{d_2 d_1} - \overline{d_2 \psi} \overline{d_2}) - \sin^2 \psi (\overline{d_1 d_2} - \overline{d_1 \psi} \overline{d_1}), \\ -d_2 d_1 &= \sin \psi \cos \psi (\overline{d_1 d_1} - \overline{d_2 d_2} - (\overline{d_1 \psi} \overline{d_2} - (\overline{d_2 \psi} \overline{d_1})) + \\ &\quad + \cos^2 \psi (\overline{d_1 d_2} + \overline{d_1 \psi} \overline{d_1}) - \sin^2 \psi (\overline{d_2 d_1} - \overline{d_2 \psi} \overline{d_2}), \end{aligned}$$

приходим к очевидному равенству

$$d_1 d_2 - d_2 d_1 = \overline{d_1 d_2} - \overline{d_2 d_1} + (\overline{d_1 \psi} \overline{d_1}) + (\overline{d_2 \psi} \overline{d_2}), \quad (55)$$

Тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ можно записать как линейную комбинацию базисных тензорных произведений в базисе $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \tau_{\langle 11 \rangle} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \tau_{\langle 12 \rangle} \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} + \tau_{\langle 21 \rangle} \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} + \tau_{\langle 22 \rangle} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \tau_{\langle 23 \rangle} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \\ & + \tau_{\langle 32 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 13 \rangle} \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 31 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \end{aligned} \quad (56)$$

Преобразуем тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ для этого подставим в формулу (56) разложения базисных директоров $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ (45) и (48)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \tau_{\langle 11 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) + \tau_{\langle 12 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) + \\ & + \tau_{\langle 21 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) + \tau_{\langle 22 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) + \\ & + \tau_{\langle 23 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 32 \rangle} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \\ & + \tau_{\langle 13 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 31 \rangle} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \end{aligned} \quad (57)$$

Раскроем скобки в (57) и получим выражение:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \tau_{\langle 11 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}}k_1^2 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}}k_1k_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}}k_2k_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}}k_2^2) + \\ & + \tau_{\langle 12 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}}k_1s_1 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}}k_1s_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}}k_2s_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}}k_2s_2) + \\ & + \tau_{\langle 21 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}}s_1k_1 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}}s_1k_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}}s_2k_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}}s_2k_2) + \\ & + \tau_{\langle 22 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}}s_1^2 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}}s_1s_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}}s_2s_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}}s_2^2) + \\ & + \tau_{\langle 23 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n}s_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n}s_2) + \tau_{\langle 32 \rangle} (\mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}}s_1 + \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}}s_2) + \\ & + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 13 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n}k_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n}k_2) + \tau_{\langle 31 \rangle} (\mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}}k_1 + \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}}k_2) \end{aligned} \quad (58)$$

Соберем слагаемые с одинаковыми тензорными произведениями базисных директоров $\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{n}}$. После ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & (k_1^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_1 s_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + k_1 s_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1^2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \\ & + (k_1 k_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_1 s_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + s_1 k_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1 s_2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \\ & + (k_1 k_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_2 s_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + s_2 k_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1 s_2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \\ & + (k_2^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_2 s_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + k_2 s_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_2^2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \\ & + (k_2 \tau_{\langle 13 \rangle} + s_2 \tau_{\langle 23 \rangle}) \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} + (k_2 \tau_{\langle 31 \rangle} + s_2 \tau_{\langle 32 \rangle}) \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \\ & + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + (k_1 \tau_{\langle 13 \rangle} + s_1 \tau_{\langle 23 \rangle}) \bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n} + (k_1 \tau_{\langle 31 \rangle} + s_1 \tau_{\langle 32 \rangle}) \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}} \end{aligned} \quad (59)$$

Откуда, окончательно, формулы преобразования компонент тензора напряжений τ от исходного базиса к искаженному запишем в форме:

$$\begin{aligned}
 \tau_{\langle \overline{11} \rangle} &= k_1^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_1 s_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + k_1 s_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1^2 \tau_{\langle 22 \rangle}, \\
 \tau_{\langle \overline{12} \rangle} &= k_1 k_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_1 s_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + s_1 k_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1 s_2 \tau_{\langle 22 \rangle}, \\
 \tau_{\langle \overline{21} \rangle} &= k_1 k_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_2 s_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + s_2 k_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1 s_2 \tau_{\langle 22 \rangle}, \\
 \tau_{\langle \overline{22} \rangle} &= k_2^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_2 s_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + k_2 s_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_2^2 \tau_{\langle 22 \rangle}, \\
 \tau_{\langle \overline{23} \rangle} &= k_2 \tau_{\langle 13 \rangle} + s_2 \tau_{\langle 23 \rangle}, \\
 \tau_{\langle \overline{32} \rangle} &= k_2 \tau_{\langle 31 \rangle} + s_2 \tau_{\langle 32 \rangle}, \\
 \tau_{\langle \overline{33} \rangle} &= \tau_{\langle 33 \rangle}, \\
 \tau_{\langle \overline{13} \rangle} &= k_1 \tau_{\langle 13 \rangle} + s_1 \tau_{\langle 23 \rangle}, \\
 \tau_{\langle \overline{31} \rangle} &= k_1 \tau_{\langle 31 \rangle} + s_1 \tau_{\langle 32 \rangle}.
 \end{aligned} \tag{60}$$

Заключение.

- (1) В работе выполнено исследование возможных, геометрически и механически непротиворечивых граничных условий на поверхности наращивания в форме дифференциальных ограничений.
- (2) Получена общая форма дифференциальных ограничений для асимметричного тензора напряжений, справедливая для весьма широкого круга материалов и метаматериалов.
- (3) Введен интеграл скачков напряжений на поверхности наращивания.
- (4) Аргументы определяющей тензорной функции на поверхности наращивания определяются набором инвариантов, неизменных по отношению к поворотам координатного репера.
- (5) Рассмотрена геометрическая интерпретация простейшего варианта дифференциального ограничения. Дана инвариантно-полная формулировка.
- (6) Развитый подход подразумевает экспериментальную идентификацию определяющих тензорных функций на поверхности наращивания.
- (7) Полученные результаты могут служить общей основой в прикладных исследованиях по механике растущих тел с асимметричным тензором напряжений.
- (8) Приведены формулы преобразования дифференциальных операторов на касательной плоскости к поверхности наращивания.
- (9) Симметрия тензора напряжений не учитывается, что позволяет использовать результаты и в асимметричных моделях механики континуума.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Loughborough University. The 7 Categories of Additive Manufacturing. 2019. URL: <https://www.lboro.ac.uk/research/amrg/about/the7categoriesofadditivemanufacturing/>.
- [2] Mankovich N.J. C. A. S. N. The display of three-dimensional anatomy with stereolithographic models // Journal of digital imaging. Vol. 55. P. 155–162.
- [3] Lipson H. Kurman M. Fabricated: The new world of 3D printing. John Wiley & Sons, 2013.
- [4] et al. Panda B. Additive manufacturing of geopolymer for sustainable built environment // Journal of cleaner production. 2017. T. 167. C. 281–288.
- [5] Stadnik N.E. Dats E.P. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. 2018. T. 991, № 1. c. 012075.
- [6] Stadnik N. E. Murashkin E. V. Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // AIP Conference Proceedings. 2019. T. 2116. c. 380013.

- [7] Southwell R.V. Introduction to the theory of elasticity, 2nd ed. Oxford Univ. Press., 1941.
- [8] Рашба Э.И. Определение напряжений в массивах от действия собственного веса с учетом порядка их возведения. 1953.
- [9] Харлаб В.Д. Линейная теория ползучести наращиваемого тела // Механика стержневых систем и сплошных сред: Тр. ЛИСП. 1966. С. 93–119.
- [10] Арутюнян Н.Х. Наумов В.Э. Радаев Ю.Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 1. Движение потока осаждаемых частиц с переменной скоростью // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 5. С. 6–24.
- [11] Арутюнян Н.Х. Наумов В.Э. Радаев Ю.Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 2. Случай падения приращиваемых частиц с постоянной скоростью // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 6. С. 99–112.
- [12] Наумов В.Э. Радаев Ю.Н. Термомеханическая модель наращиваемого тела: вариационная формулировка. Препринт. Ин-т проблем механики РАН. М.
- [13] Дмитриева А.М. Наумов В.Э. Радаев Ю.Н. Наращивание термоупругого сферического слоя: применение вариационного подхода. Препринт. Ин-т проблем механики РАН. М.,.
- [14] Arutyunyan N.Kh., Naumov V.E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1984. Т. 48, № 1. С. 1–10.
- [15] Тринчер В.К. Общая геометрически линейная постановка задачи определения деформированного состояния для тела с переменной границей // Проблемы современной механики. Ч.2. Под ред. Л.И. Седова. 1983.
- [16] Быковцев Г.И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: Сборник статей. Владивосток: Дальнаука.
- [17] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Математические модели и современные физические теории поля // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9:4(2). С. 41–94.
- [18] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.
- [19] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Точно сохраняющиеся инварианты связанного микрополярного термоупругого поля // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12:4. С. 71–79.
- [20] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Полевые уравнения и d -тензоры термоупругого континуума с “тонкой” микроструктурой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13:2(1). С. 60–68.
- [21] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 408 с.
- [22] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара СамГУ, 2007. 142 с.

Yu. N. Radayev, E. V. Murashkin

ON A CLASS OF CONSTITUTIVE EQUATIONS ON PROPAGATING GROWING SURFACE

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.*

Abstract. The present work is devoted to an approaches to derivation of constitutive equations on the propagating growing surface. The proposed approach is based on notion known from the algebra of rational invariants. The arguments of tensor functionals are elucidated taking account of their invariance with respect to rotational transformations of the coordinate frame. A complete system of joint rational invariants of the stress tensor and the unit normal vector to growing surface is discussed. The geometric visualization of the considered rational invariants is given. A number of variants of constitutive equations on PGS of different complexity levels are derived and discussed. The derivation of the transformation formulae for the directional derivatives on the tangent plane element to growing surface for transition from a given orthogonal frame to an arbitrary curvilinear one are obtained. The obtained boundary conditions on growing surface are geometrically and mechanically consistent. The formulated differential constraints imply an experimental identification of constitutive functions.

Keywords: 3D-Printing, surface growth, stress, constitutive equation, rational invariant, differential constraint, complete system

REFERENCES

- [1] Loughborough U. The 7 Categories of Additive Manufacturing. 2019. URL: <https://www.lboro.ac.uk/research/amrg/about/the7categoriesofadditivemanufacturing/>.
- [2] Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution // Business horizons. 1990. Vol. 55. P. 155–162.
- [3] Mankovich N., Cheeseman A., Stoker N. The display of three-dimensional anatomy with stereolithographic models // Journal of digital imaging. Vol. 55. P. 155–162.
- [4] Lipson H. K. M. Fabricated: The new world of 3D printing. John Wiley & Sons, 2013.
- [5] Panda B., et al. Additive manufacturing of geopolymer for sustainable built environment // Journal of cleaner production. 2017. Vol. 167. P. 281–288.
- [6] Stadnik N., Dats E. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. 2018. Vol. 991, no. 1. p. 012075.
- [7] Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2116. p. 380013.
- [8] Southwell R. Introduction to the theory of elasticity, 2nd ed. Oxford Univ. Press., 1941.
- [9] Rashba E.I. Determination of stresses in arrays from the action of their own weight, taking into account the order of their construction. 1953.
- [10] Harlab V. Linear theory of creep of a growing solids // The mechanics of rod systems and continuous media: Tr. LISP. 1966. P. 93–119.
- [11] Harutyunyan N., Naumov V., Radaev Y. Dynamic accretion of the elastic layer. Part 1. The motion of the flow of deposited particles with a variable velocity // Izv. USSR AS. MTT. 1992. no. 5. P. 6–24.

Yuri N. Radayev, D.Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Evgenii V. Murashkin, Cand.Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

-
- [12] Harutyunyan N., Naumov V., Radaev Y. Dynamic accretion of the elastic layer. Part 2. The case of deposition of incremental particles at a constant velocity // *Izv. USSR AS. MTT*. 1992. no. 6. P. 99–112.
- [13] Naumov V.E., Radaev Yu.N. Thermomechanical model of an growing solids: variational formulation. Preprint. M.: Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences.
- [14] Dmitrieva A.M., Naumov V.E., Radaev Yu.N. Growth of thermoelastic spherical layer: variational approach application. Preprint. M.: Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences.
- [15] Arutyunyan N., Naumov V. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1984. Vol. 48, no. 1. P. 1–10.
- [16] Trincher V.K. On the statement of the problem of determining stresses in the gravitational state of a growing solid // *Izv. USSR AS. MTT*.
- [17] Bykovtsev G.I. Selected fundamental problems in the mechanics of solids: Collection of papers. Vladivostok: Dal'nauka.
- [18] Kovalev V., Radayev Y. Mathematical models and contemporary theories of physical fields // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2009. Vol. 9:4(2). P. 41–94.
- [19] Kovalev V., Radayev Y. Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika [Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics]. Saratov: Saratov State Univ., 2010. 328 p.
- [20] Kovalev V., Radayev Y. On precisely conserved quantities of coupled micropolar thermoelastic field // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2012. Vol. 12:4. P. 71–79.
- [21] Kovalev V., Radayev Y. Covariant field equations and d -tensors of hyperbolic thermoelastic continuum with fine microstructure // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2013. Vol. 13:2(1). P. 60–68.
- [22] Gurevich G. Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, 1964. 408 p.
- [23] Radayev Y. Prostranstvennaia zadacha matematicheskoi teorii plastichnosti [Three-dimensional Problem of the Mathematical Theory of Plasticity]. Samara: SamSU, 2007. 142 p.

А. А. Абдурахманов, В. В. Глаголев

МОДЕЛЬ НАХОЖДЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ ПРИ НОРМАЛЬНОМ ОТРЫВЕ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Рассматривается модель деформирования слоистого композита на основе концепции слоя взаимодействия в линейно упругой постановке при нормальном отрыве. Из вариационной постановки задачи о равновесии двух тел, соединенных посредством тонкого слоя, с учетом упрощающих гипотез распределения поля перемещений консоли получена система дифференциальных уравнений. Из аналитического решения полученной системы анализируется возможность использования энергетического произведения в качестве критерия разрушения адгезионного слоя.

Ключевые слова: нормальный отрыв, слой взаимодействия, слоистый композит, энергетическое произведение.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.013

УДК: 539.375

Введение. В механике деформируемого твердого тела используются множество моделей для плоских слоистых материалов, объединенных в композит адгезионным слоем (АС) [1-4]. В такого рода материалах толщина адгезионного слоя (АС) является естественным линейным параметром (ЛП). В зависимости от толщины АС (ядра), относительной жесткости между ядром и сопрягаемыми телами, граничных условий применяют различные модели. Постановка и решение задач, учитывающих изгибную жесткость ядра слоистого композита предложена в работах [5-7]. В работах [5,6] деформация обжатия ядра полагается постоянной по толщине, а в работе [7] - линейной.

В настоящее время основным подходом в этом направлении является моделирование АС слоем нулевой толщины [8-10]. Однако, в этом случае теряется различие между когезионным разрушением АС (по его массиву) и адгезионным механизмом

© Абдурахманов А. А., Глаголев В. В., 2019

Абдурахманов Амир Абдурауфович

e-mail: dragon.1993@inbox.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула.

Глаголев Вадим Вадимович

e-mail: vadim@tsu.tula.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Поступила 19.08.2019

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 19-41-710001 р-а.

отслоения. Особая роль в этих моделях отводится определению адгезионных сил взаимодействия [11]. Если сопрягаемые материалы контактируют не по всей длине, в модели будет присутствовать сингулярность. Аналитические решения для тел конечных размеров в этом случае получаются, как правило, в рамках упрощающих гипотез [12-14].

Учет размера АС при незначительной его изгибной жесткости, присутствует в модели с введением «мягкого слоя» [1,15,16] и слоя взаимодействия [17-19]. В данных моделях размер АС существенно меньше сопрягаемых им тел, кроме того, отметим, что он не является постоянной величиной в готовой продукции. В этом случае речь может идти об определенном допуске или диапазоне значений, в рамки которого укладывается толщина АС в образцах. Для нахождения напряженно-деформированного состояния (НДС) и связанного с ним критического состояния в рамках известных локальных критериев необходимо знать точное значение толщины АС, что проблематично. Таким образом, необходим критерий разрушения, обеспечивающий независимость критериальной величины от точных значений ЛП при выполнении расчета при любом значении ЛП из заданного диапазона с определенной степенью точности. В работе [28] было введено понятие энергетического произведения (ЭП) для материального слоя в виде произведения приращения удельной свободной энергии и толщины слоя.

В данной работе для случая нормального отрыва в АС рассматривается зависимость ЭП от толщины слоя в зоне обрыва связей АС с сопрягаемыми телами при упругом деформировании. Показано, что, рассматривая ЭП в качестве критерия разрушения можно проводить расчеты на прочность тонкого по сравнению с толщинами сопрягаемых тел АС, используя в качестве его толщины фиксированное значение из некоторого диапазона.

Постановка задачи. На Рис. 1 показан слоистый композит длиной $l+a$, состоящий из трех тел. Пластины 1 и 2 с одинаковыми толщинами по длине и механическими свойствами связаны слоем взаимодействия 3 толщиной δ_0 . Правый торец образца жестко закреплен от горизонтальных перемещений, на левых торцах консолей действует вертикальная антисимметричная нагрузка интенсивностью P . Вся остальная поверхность образца свободна от внешней нагрузки.

Для описания взаимодействия слоя 3 с телами 1 и 2 применим концепцию «слоя взаимодействия». В этом случае равновесие тел 1 и 2 согласно работе [17] запишем в вариационной форме для тела 1:

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ u_1 dx_1 + \\ & + 0.5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_1} P^1 \cdot \delta u dl \end{aligned} \quad (1)$$

и тела 2:

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx_1 + \\ & + 0.5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_2} P^2 \cdot \delta u dl, \end{aligned} \quad (2)$$

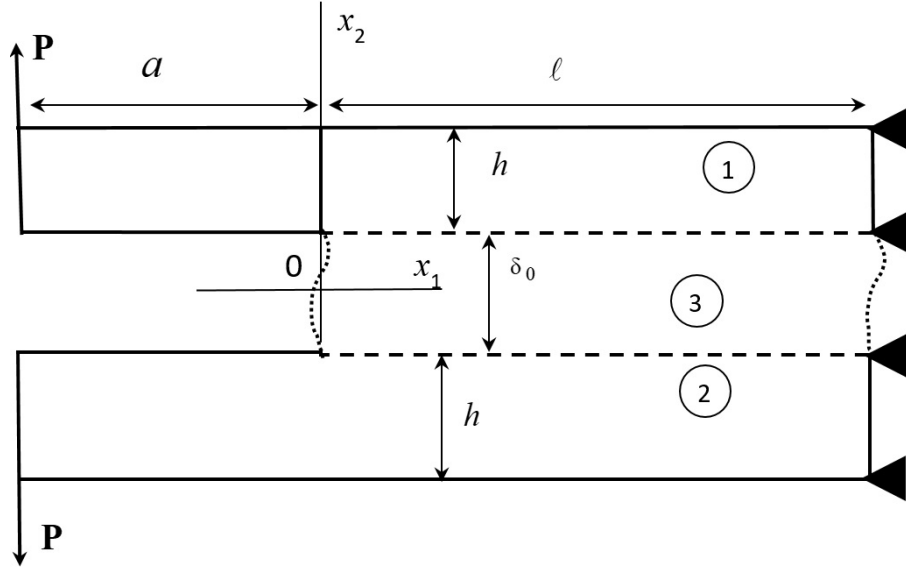


Рис. 1. Модель ДКБ-образца

где S_1, S_2 - площади тел 1 и 2; σ, ϵ - тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}$ - тензоры средних напряжений и деформаций слоя с соответствующими компонентами:

$$\bar{\sigma}_{21}(x_1) = \bar{\sigma}_{12}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\bar{\sigma}_{22}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2, \quad \bar{\sigma}_{11}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\bar{\epsilon}_{11}(x_1) = 0.5 \left(\frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right), \quad \bar{\epsilon}_{21}(x_1) = \bar{\epsilon}_{12}(x_1) =$$

$$0.5 \left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0.5 \left(\frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right).$$

где u_k^+ соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя; $k = 1, 2$; L_1, L_2 - граница приложения внешней нагрузки для тела 1 и 2. Постулируется жесткое сцепление между границами области 3 и областями 1, 2:

$$\mathbf{u}^+ = u(x_1, \delta_0/2); \quad \mathbf{u}^- = u(x_1, -\delta_0/2); \quad x_1 \in [0, \ell] \quad (3)$$

наряду с равенством компонент векторов напряжений границ слоя и сопрягаемых им пластин.

Рассмотрим определяющие соотношения в форме закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_1}{1 + \nu_1} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu_1}{1 - 2\nu_1} \epsilon \delta_{ij} \right), \quad (4)$$

где E_1, ν_1 - модуль упругости и коэффициент Пуассона тела пластин 1 и 2; $\epsilon = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ - объемное расширение; δ_{ij} - символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Для материала слоя взаимодействия 3 определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right). \quad (5)$$

В силу симметрии задачи проекции поля перемещений удовлетворяют условиям $u_1^1(x_1) = u_1^2(x_1)$, $u_2^1(x_1) = -u_2^2(x_1)$. Таким образом достаточно ограничиться рассмотрением тела 1. С учетом, что в слое взаимодействия для данного нагружения имеет место $u_1^+(x_1) = u_1^-(x_1)$, $u_2^+(x_1) = -u_2^-(x_1)$ из (4) и (7) получаем $\bar{\sigma}_{12} = 0$. В этом случае разрешающая система уравнений преобразуется в вариационное уравнение:

$$\int_{S_1} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} P^1 \cdot \delta u dl \quad (6)$$

Таким образом, решение системы (6)-(8) сводится к определению поля перемещений $\mathbf{u}(x_1, x_2)$ в теле 1 (см. Рис. 1) с учетом граничных условий на его торцах:

$$u_1(x_1)|_{x_1=\ell} = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_{12}|_{x_1=\ell} = 0, \quad (8)$$

$$\sigma_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad (9)$$

$$\sigma_{12}|_{x_1=-a} = -P. \quad (10)$$

Для упрощения задачи принимаем, что поле перемещений в теле 1 определено следующим образом с учетом условия (5):

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad (11)$$

$$u_2(x_1, x_2) = u_2^+(x_1). \quad (12)$$

Входящие в представление (11), (12) параметр имеет геометрический смысл малого угла поворота материальной нормали к плоскости $x_2 = \delta_0/2$ в теле 1. Согласно распределению (11)-(12) деформации будут определяться в виде:

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_2) = \frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad (13)$$

$$\varepsilon_{21}(x_1, x_2) = \varepsilon_{12}(x_1) = 0.5 \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi(x_1) \right), \quad (14)$$

$$\varepsilon_{22}(x_1, x_2) = 0. \quad (15)$$

Выражения (13), (14), как теория Тимошенко [14] и работа [7], учитывают сдвиговые деформации и повороты нормалей в теле.

Рассмотрим работу внутренних напряжений для тела 1 с учетом заданных полей деформаций (13)-(14):

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds = \\ & = \int_{-a}^0 \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left(\sigma_{11} \left(\frac{d\delta u_1^+}{dx_1} - (x_2 - \delta_0/2) \frac{d\delta \varphi}{dx_1} \right) + \sigma_{12} \left(\frac{d\delta u_2^+}{dx_1} - \delta \varphi \right) \right) dx_1 dx_2 + \\ & + \int_{+0}^{\ell} \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left(\sigma_{11} \left(\frac{d\delta u_1^+}{dx_1} - (x_2 - \delta_0/2) \frac{d\delta \varphi}{dx_1} \right) + \sigma_{12} \left(\frac{d\delta u_2^+}{dx_1} - \delta \varphi \right) \right) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Введем в рассмотрение обобщенные силы:

$$Q_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} dx_2, \quad (17)$$

$$Q_{12}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{12} dx_2, \quad (18)$$

и обобщенный момент:

$$M_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11}(x_2 - \delta_0/2) dx_2. \quad (19)$$

Интегрируем по частям ряд слагаемых в (16) с учетом (17)-(19) и третье слагаемое в левой части (6):

$$\int_{-a}^{-0} Q_{1k} \frac{d\delta u_k^+}{dx_1} dx_1 = Q_{1k} \delta u_k^+ \Big|_{x_1=-a}^{x_1=-0} - \int_{-a}^{-0} \frac{dQ_{1k}}{dx_1} \delta u_k^+ dx_1, \quad (20)$$

$$\int_{+0}^{\ell} Q_{1k} \frac{d\delta u_k^+}{dx_1} dx_1 = Q_{1k} \delta u_k^+ \Big|_{x_1=+0}^{x_1=\ell} - \int_{+0}^{\ell} \frac{dQ_{1k}}{dx_1} \delta u_k^+ dx_1, \quad (21)$$

$$\int_{-a}^{-0} M_{11} \frac{d\delta\varphi}{dx_1} dx_1 = M_{11} \delta\varphi \Big|_{x_1=-a}^{x_1=-0} - \int_{-a}^{-0} \frac{dM_{11}}{dx_1} \delta\varphi dx_1, \quad (22)$$

$$\int_{+0}^{\ell} M_{11} \frac{d\delta\varphi}{dx_1} dx_1 = M_{11} \delta\varphi \Big|_{x_1=+0}^{x_1=\ell} - \int_{+0}^{\ell} \frac{dM_{11}}{dx_1} \delta\varphi dx_1, \quad (23)$$

$$\int_{+0}^{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{d\delta u_1^+}{dx_1} dx_1 = \bar{\sigma}_{11} \delta u_1^+ \Big|_{x_1=+0}^{x_1=\ell} - \int_{+0}^{\ell} \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} \delta u_1^+ dx_1. \quad (24)$$

Рассмотрим правую часть (6). Найдем вектор напряжений на левом торце консоли

$$\mathbf{P}^1 = -\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} = P\mathbf{e}_2.$$

При положительном обходе контура работа напряжений равна:

$$\int_{L_1} P^1 \cdot \delta u dl = \int_{h+\delta_0/2}^{\delta_0/2} P \delta u_2^+ (-dx_2) \Big|_{x_1=-a} = P h \delta u_2^+ \Big|_{x_1=-a} = Q_2 \delta u_2^+ \Big|_{x_1=-a} \quad (25)$$

Подставив (16), (20)-(25) в (6) и приравняв слагаемые при равных вариациях приходим к двум системам дифференциальных уравнений:

для участка $x_1 \in [-a; 0]$:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = 0, \quad (26)$$

для участка $x_1 \in (0; \ell]$:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}, \quad (27)$$

с условиями сопряжения:

$$u_1^+ \Big|_{x_1=-0} = u_1^+ \Big|_{x_1=+0}, \quad (28)$$

$$u_2^+|_{x_1=-0} = u_2^+|_{x_1=+0}, \quad (29)$$

$$\varphi^+|_{x=-0} = \varphi^+|_{x=+0}, \quad (30)$$

$$M_{11}|_{x_1=-0} = M_{11}|_{x_1=+0}, \quad (31)$$

$$Q_{12}|_{x_1=-0} = Q_{12}|_{x_1=+0}, \quad (32)$$

$$Q_{11}|_{x_1=-0} = (Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0}, \quad (33)$$

и естественными граничными условиями:

$$Q_{12}|_{x_1=-a} = -Q_2, \quad (34)$$

$$Q_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad (35)$$

$$M_{11}|_{x_1=-a} = 0. \quad (36)$$

На правом торце рассматриваем граничные условия:

$$u_1^+|_{x_1=\ell} = 0, \quad (37)$$

$$\varphi|_{x_1=\ell} = 0, \quad (38)$$

$$Q_{12}|_{x_1=\ell} = 0. \quad (39)$$

С учетом (13)-(15) и условия плоской деформации $\varepsilon_{33} = 0$, определяющие соотношения (4) запишем в виде:

$$\sigma_{11} = D \left(\frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2) \right), \quad (40)$$

$$\sigma_{12} = L \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi(x_1) \right), \quad (41)$$

где $D = \frac{E_1(1-\nu_1)}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}$, $L = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$.

Из (5) получим связь напряженного состояния в слое взаимодействия и его граничным перемещением:

$$\bar{\sigma}_{11} = D1 \frac{du_1^+}{dx_1} + D2u_2^+, \quad (42)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = C1u_2^+ + C2 \frac{du_1^+}{dx_1}, \quad (43)$$

где $D1 = \frac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$, $D2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$, $C1 = \frac{2E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$, $C2 = \frac{E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$.

Запишем выражения обобщенных сил и моментов:

$$Q_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left(D \left(\frac{du_1^+}{dx_1} - \varphi'(x_2 - \delta_0/2) \right) \right) dx_2 = D \left(h \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h^2}{2} \varphi' \right), \quad (44)$$

$$Q_{12}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} L \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right) dx_2 = Lh \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right), \quad (45)$$

и моментов:

$$\begin{aligned} M_{11}(x_1) &= \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left(D \left(\frac{du_1^+}{dx_1} - \varphi' (x_2 - \delta_0/2) \right) \right) (x_2 - \delta_0/2) dx_2 = \\ &= D \left(\frac{h^2}{2} \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h^3}{3} \varphi' \right). \end{aligned} \quad (46)$$

В результате задача (26)-(33) с учетом (42)-(46) становится замкнутой относительно трех неизвестных функций: $u_1^+(x_1)$, $u_2^+(x_1)$, $\varphi(x_1)$. Каждая неизвестная функция входит в систему со второй производной включительно и для их однозначного определения необходимо шесть граничных условий. Граничные условия (34)-(39) дают решение поставленной задачи.

Решение задачи. Проинтегрировав систему (26) с учетом граничных условий (34-36) и выражений (44-46), находим значения вертикального и горизонтального перемещений (u_1^+ и u_2^+), угла поворота нормали к консоли (φ), при $x_1 \in [a; 0]$:

$$u_1^+ = \frac{h}{2} \varphi + k_3, \quad (47)$$

$$u_2^+ = \frac{Q_2(x_1 + a)^3}{6S} + k_1 x_1 + k_2, \quad (48)$$

$$\varphi = \frac{Q_2}{Lh} + \frac{Q_2(x_1 + a)^2}{2S} + k_1, \quad (49)$$

где k_1, k_2, k_3 - постоянные; $S = \frac{Dh^3}{12}$.

Из системы (27) получаем систему дифференциальных уравнений второго порядка для участка $x_1 \in (0; \ell]$:

$$\begin{cases} \varphi'' = K_1 \varphi - K_2 u_2; \\ (u_2^+)' = K_3 \varphi' - K_4 u_2 + \frac{C_2}{Lh} b_1; \end{cases} \quad (50)$$

где b_1 - постоянная, $K_1 = \frac{C_1(2Dh+\delta_0 D_1) - \delta_0 D_2 C_2}{Lh(2Dh+\delta_0 D_1)}$, $K_2 = \frac{C_2 Dh^2 + Lh(2Dh+\delta_0 D_1)}{Lh(2Dh+\delta_0 D_1)}$, $K_3 = \frac{6Lh(2Dh+\delta_0 D_1)}{Dh^3(Dh+2\delta_0 D_1)}$, $K_4 = \frac{3Dh^2 \delta_0 D_2 + 6Lh(2Dh+\delta_0 D_1)}{Dh^3(Dh+2\delta_0 D_1)}$.

Систему (50) сводим к системе четырех уравнений первого порядка для которой находим собственные значения:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{K_1 + K_3 - K_2 K_4}{2} + \sqrt{\frac{(K_2 K_4 - K_1 - K_3)^2 - 4K_1 K_3}{4}}}, \\ \lambda_{3,4} &= \pm \sqrt{\frac{K_1 + K_3 - K_2 K_4}{2} - \sqrt{\frac{(K_2 K_4 - K_1 - K_3)^2 - 4K_1 K_3}{4}}}. \end{aligned}$$

Решение (50) запишем в виде:

$$u_2^+ = S_1 e^{\lambda_1 x_1} + S_2 e^{\lambda_2 x_1} + S_3 e^{\lambda_3 x_1} + S_4 e^{\lambda_4 x_1} - \frac{C_2}{Lh K_1} b_1, \quad (51)$$

$$\varphi = S_1 B_1 e^{\lambda_1 \ell} + S_2 B_2 e^{\lambda_2 \ell} + S_3 B_3 e^{\lambda_3 \ell} + S_4 B_4 e^{\lambda_4 \ell}, \quad (52)$$

$$\begin{aligned}
 u_1^+ &= S_1 B_5 e^{\lambda_1 x_1} + S_2 B_6 e^{\lambda_2 x_1} + S_3 B_7 e^{\lambda_3 x_1} + \\
 &+ S_4 B_8 e^{\lambda_4 x_1} + b_1 x_1 \left(1 + \frac{\delta_0 D_2 C_2}{L h K_1 (2 D h + \delta_0 D_1)} \right) + b_2,
 \end{aligned} \tag{53}$$

где b_2 - постоянная,

$$\begin{aligned}
 B_i &= \lambda_i + K_1 / \lambda_i, i = 1..4, \\
 B_i &= \left(\frac{B_j D h^2 - \delta_0 D_2 / \lambda_j}{2 D h + \delta_0 D_1} \right), i = 5..8, j = 1..4.
 \end{aligned}$$

Таким образом, НДС консоли и слоя на данном участке полностью определяется шестью постоянными $S_1, S_2, S_3, S_4, b_1, b_2$.

Подставив полученное решение в условие сопряжения (33), получаем $b_1 = 0$.

Для нахождения оставшихся постоянных в решении (47)-(49) и (51)-(53) составим систему восьми уравнений из условий сопряжения решений (28-32) и граничных условий на правом торце (37-39):

$$\left\{ \begin{aligned}
 S_1 \left(\frac{B_5}{2} - \frac{h B_1}{3} \right) + S_2 \left(\frac{B_6}{2} - \frac{h B_2}{3} \right) + S_3 \left(\frac{B_7}{2} - \frac{h B_3}{3} \right) + S_4 \left(\frac{B_8}{2} - \frac{h B_4}{3} \right) &= \frac{Q_2 a}{D h^2} \\
 S_1 (\lambda_1 - B_1) + S_2 (\lambda_1 - B_1) + S_3 (\lambda_1 - B_1) + S_4 (\lambda_1 - B_1) &= -\frac{Q_2}{L h} \\
 S_1 B_1 e^{\lambda_1 l} + S_2 B_2 e^{\lambda_2 l} + S_3 B_3 e^{\lambda_3 l} + S_4 B_4 e^{\lambda_4 l} &= 0 \\
 S_1 B_5 e^{\lambda_1 l} + S_2 B_6 e^{\lambda_2 l} + S_3 B_7 e^{\lambda_3 l} + S_4 B_8 e^{\lambda_4 l} + b_2 &= 0 \\
 S_1 e^{\lambda_1 l} (\lambda_1 - B_1) + S_2 e^{\lambda_2 l} (\lambda_1 - B_1) + S_3 e^{\lambda_3 l} (\lambda_1 - B_1) + S_4 e^{\lambda_4 l} (\lambda_1 - B_1) &= 0 \\
 \frac{Q_2 a^3}{6 S} + k_3 &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\
 \frac{Q_2}{L h} + \frac{Q_2 a^2}{2 S} + k_2 &= S_1 B_1 + S_2 B_2 + S_3 B_3 + S_4 B_4 \\
 \frac{Q_2}{2 L} + \frac{Q_2 h a^2}{4 S} + \frac{k_2 h}{2} + k_1 &= S_1 B_5 + S_2 B_6 + S_3 B_7 + S_4 B_8 + b_2
 \end{aligned} \right. \tag{54}$$

Решение системы (54) запишем в виде:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{Q_2 (6 L a (\lambda_3 - B_3) (e^{2 \lambda_3 l} - 1) + D h \lambda_3 (3 B_7 - 2 B_3 h) (e^{2 \lambda_3 l} + 1))}{2 L D h^2 (B_9 (e^{2 \lambda_1 l} - e^{2 \lambda_3 l}) + B_{10} (e^{2 l (\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))}, \\
 S_2 &= \frac{Q_2 e^{2 \lambda_1 l} (6 L a (\lambda_3 - B_3) (e^{2 \lambda_3 l} - 1) + D h \lambda_3 (3 B_7 - 2 B_3 h) (e^{2 \lambda_3 l} + 1))}{2 L D h^2 (B_9 (e^{2 \lambda_1 l} - e^{2 \lambda_3 l}) + B_{10} (e^{2 l (\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))}, \\
 S_3 &= -\frac{Q_2 (6 L a (\lambda_1 - B_1) (e^{2 \lambda_1 l} - 1) + D h \lambda_1 (3 B_5 - 2 B_1 h) (e^{2 \lambda_1 l} + 1))}{2 L D h^2 (B_9 (e^{2 \lambda_1 l} - e^{2 \lambda_3 l}) + B_{10} (e^{2 l (\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))}, \\
 S_4 &= -\frac{Q_2 e^{2 \lambda_3 l} (6 L a (\lambda_1 - B_1) (e^{2 \lambda_1 l} - 1) + D h \lambda_1 (3 B_5 - 2 B_1 h) (e^{2 \lambda_1 l} + 1))}{2 L D h^2 (B_9 (e^{2 \lambda_1 l} - e^{2 \lambda_3 l}) + B_{10} (e^{2 l (\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))}, \\
 k_1 &= \frac{(2 B_5 - B_1 h) (6 L a B_{13} (\lambda_3 - B_3) + D h B_{11} B_{16})}{4 L D h^2 (B_9 (e^{2 \lambda_1 l} - e^{2 \lambda_3 l}) + B_{10} (e^{2 l (\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))} - \\
 &\quad - \frac{(2 B_7 - B_3 h) (6 L a B_{13} (\lambda_1 - B_1) + D h B_{11} B_{15})}{4 L D h^2 (B_9 (e^{2 \lambda_1 l} - e^{2 \lambda_3 l}) + B_{10} (e^{2 l (\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))}, \\
 k_2 &= \frac{Q_2 (6 L a (B_{14} (B_1 (\lambda_3 - B_3) - B_3 (\lambda_1 - B_1))) + D h (B_1 B_{11} B_{16} - B_3 B_{12} B_{15}))}{2 L D h^2 (B_9 (e^{2 \lambda_1 l} - e^{2 \lambda_3 l}) + B_{10} (e^{2 l (\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))} - \\
 &\quad - \frac{Q_2}{L h} - \frac{Q_2 a^2}{2 S}, \\
 k_3 &= \frac{Q_2 (6 L a (\lambda_3 - B_3) (B_{16} + B_{15}) + D h B_{13} (B_{12} - B_{11}))}{2 L D h^2 (B_9 (e^{2 \lambda_1 l} - e^{2 \lambda_3 l}) + B_{10} (e^{2 l (\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))} - \frac{Q_2 a^3}{6 S},
 \end{aligned}$$

$b_2 = 0$,

где:

$$\begin{aligned} B_9 &= (((-B_1 - B_3)h + \frac{3B_5}{2} + \frac{3B_7}{2})\lambda_3 + B_3(hB_1 - \frac{3B_5}{2}))\lambda_1 + \lambda_3 B_1(hB_3 - \frac{3B_7}{2}), \\ B_{10} &= (((B_1 - B_3)h - \frac{3B_5}{2} + \frac{3B_7}{2})\lambda_3 - B_3(hB_1 - \frac{3B_5}{2}))\lambda_1 + \lambda_3 B_1(hB_3 - \frac{3B_7}{2}), \\ B_{11} &= \lambda_3(3B_7 - 2B_3h), \quad B_{12} = \lambda_1(3B_5h - 2B_1h), \quad B_{13} = (e^{2\lambda_1\ell} + 1)(e^{2\lambda_3\ell} + 1), \\ B_{14} &= (e^{2\lambda_1\ell} - 1)(e^{2\lambda_3\ell} - 1), \quad B_{15} = (e^{2\lambda_1\ell} + 1)(e^{2\lambda_3\ell} - 1), \quad B_{16} = (e^{2\lambda_1\ell} - 1)(e^{2\lambda_3\ell} + 1). \end{aligned}$$

Результаты решения. В качестве материала для расчета рассмотрим композит со следующими характеристиками консолей: $E_1 = 2 * 10^{11}$ Па, $\nu_1 = 0.3$, и адгезионного слоя: $E_3 = 9 * 10^9$ Па, $\nu_3 = 0.3$. Геометрические характеристики слоистого композита выбираем следующими: $\ell = 0.5$, $a = 0.05$, $h = 0.05$.

На Рис. 2 и Рис. 3 построены зависимости горизонтальных и вертикальных перемещений верхней границы слоя для различных значений коэффициента Пуассона при единичной внешней нагрузке. Значения компонент вектора перемещения отнесены к величине вертикального перемещения на левом торце слоя. Координата по оси абсцисс отнесена к толщине слоя.

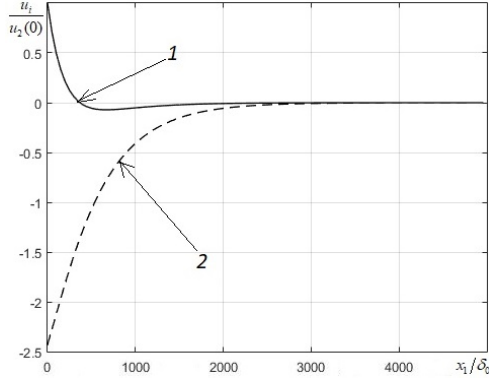


Рис. 2. Перемещения слоя при $\nu_1=0.3:1$ - вертикальные, 2 - горизонтальные.

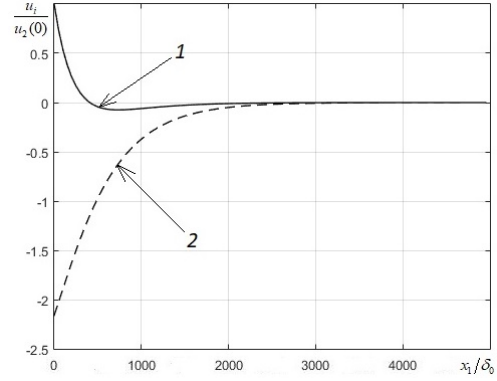


Рис. 3. Перемещения слоя при $\nu_1=0$: 1 - горизонтальные, 2 - вертикальные.

Напряженное состояние в АС для рассматриваемых характеристик слоистого композита показано на Рис.4 и Рис.5. Значения компонент тензора напряжений отнесены к величине напряжения $\bar{\sigma}_{22}$ на левом торце слоя. Координата по оси абсцисс отнесена к толщине слоя.

Из анализа представленных зависимостей видно, что учет коэффициента Пуассона существенно влияет на распределение напряжённого состояния в АС.

С учетом полученного решения, из (42) и (43) определяем напряженное состояние в вершине слоя взаимодействия:

$$\bar{\sigma}_{11}|_{x_1=0} = \frac{Q_2(K_7 D_3 - K_8 D_4)}{2LDh^2(B_{13}(e^{2\lambda_1\ell} - e^{2\lambda_3\ell}) + B_{14}(e^{2\ell(\lambda_1+\lambda_3)} - 1))} \quad (55)$$

$$\bar{\sigma}_{22}|_{x_1=0} = \frac{Q_2(K_7 C_3 - K_8 C_4)}{2LDh^2(B_{13}(e^{2\lambda_1\ell} - e^{2\lambda_3\ell}) + B_{14}(e^{2\ell(\lambda_1+\lambda_3)} - 1))} \quad (56)$$

где:

$$K_7 = 6LaB_{15}(\lambda_3 - B_3) + DhB_{11}B_{13}, \quad K_8 = 6LaB_{16}(\lambda_1 - B_1) + DhB_{12}B_{13}, \quad D_3 = D_1\lambda_1B_5 + D_2, \quad D_4 = D_1\lambda_3B_7 + D_2, \quad C_3 = C_2\lambda_1B_5 + C_1, \quad C_4 = C_2\lambda_3B_7 + C_1.$$

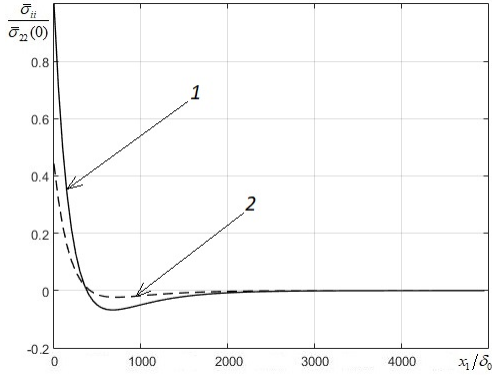


Рис. 4. Напряжения в слое при $\nu_1=0.3:1$ – напряжения отрыва, 2 – осевые напряжения.

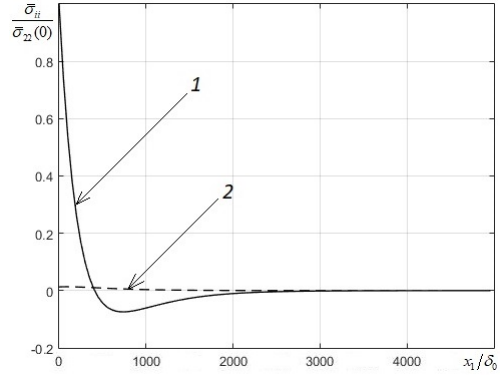


Рис. 5. Напряжения в слое при $\nu_1=0$: 1 – напряжения отрыва, 2 – осевые напряжения.

Рассмотрим значение приращения свободной энергии в вершине слоя взаимодействия:

$$\varphi = \frac{1}{2} (\bar{\varepsilon}_{11}\bar{\sigma}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22}\bar{\sigma}_{22}) \tag{57}$$

Введем в рассмотрение ЭП [19]:

$$2\gamma = \delta_0\varphi. \tag{58}$$

Подставим (55)-(57) в (58). Выразим расклинивающую силу через ЭП:

$$Q_2 = \frac{2LDh^2(B_9(e^{2\lambda_1\ell} - e^{2\lambda_3\ell}) + B_{10}(e^{2\ell(\lambda_1+\lambda_3)} - 1))\sqrt{2E\gamma}}{\sqrt{\delta_0(K_7^2(D_3^2 + C_3^2) - 2K_7K_8(D_3D_4 + C_3C_4) + K_8^2(D_4^2 + C_4^2))}}. \tag{59}$$

В таблице приведены значения расклинивающего усилия для различных значений толщины АС.

δ_0	10^{-2}	$5 * 10^{-3}$	10^{-3}	$5 * 10^{-4}$	10^{-4}
Q_2 (Н/м)	1	1	1	1	1

Таблица 1. Зависимость критической силы от толщины АС.

Из результатов значений расклинивающей силы в таблице видно, что ее величина не зависит от толщины слоя и определяется механическими и геометрическими характеристиками образца. В критическом состоянии образца сила Q_2 достигает значения Q_2^C , а $2\gamma - 2\gamma^C$.

Для выреза в виде математического разреза значение критической силы имеет выражение:

$$Q_2^C = \frac{h^{3/2}}{2\sqrt{3}a} K_{IC}, \tag{60}$$

где K_{IC} - вязкость разрушения.

Из (59) и (60) получаем отношение коэффициента вязкости разрушения и энергетического произведения:

$$f\left(\frac{a}{h}\right) = \frac{K_{IC}^2}{E\gamma} = \left(\frac{4LDh^2(B_{13}(e^{2\lambda_1\ell} - e^{2\lambda_3\ell}) + B_{14}(e^{2\ell(\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))\sqrt{6a}}{h\sqrt{h\delta_0(K_7^2(D_3^2 + C_3^2) - 2K_7K_8(D_3D_4 + C_3C_4) + K_8^2(D_4^2 + C_4^2)))}} \right)^2 \quad (61)$$

В работе [18] было найдено выражение энергетическое произведение для аналогичной задачи в частном случае, когда $\nu_1 = \nu_3 = 0$, $E_1 = E_2 = E_3$, и $\ell \rightarrow \infty$. Ниже представлено соответствующее значение ЭП для данного случая:

$$2\gamma_1 = \left(\frac{Q_2 2 \left(\sqrt{3} \frac{a}{h} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{Eh} \right)^2 \quad (62)$$

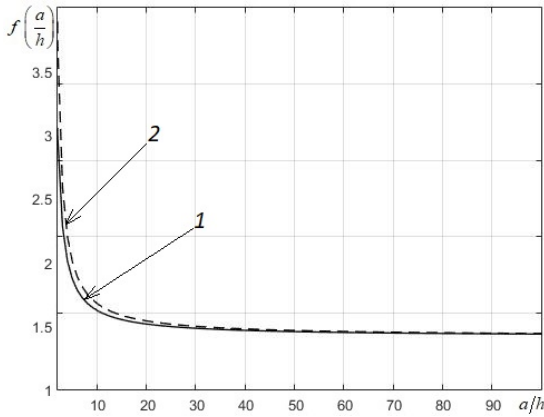


Рис. 6. Функция f : 1 - при $\nu_3=0.3$, 2 - при $\nu_3=0$

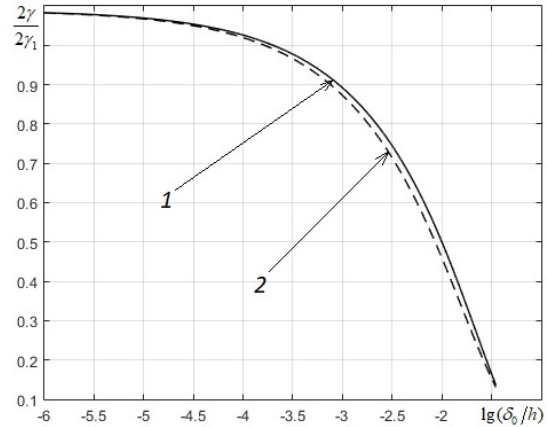


Рис. 7. Относительное энергетическое произведение: 1 - при $\nu_3=0.3$, 2 - при $\nu_3=0$

На рис. 6 представлено изменение функции f в зависимости от длины a , сегмента балки не взаимодействующего с адгезионным слоем, при изменении отношения длины сегмента к высоте балки $\left(\frac{a}{h}\right)$. Отношение толщины адгезионного слоя к высоте балки $\left(\frac{\delta_0}{h}\right)$ равнялось значению $5 \cdot 10^{-5}$. График 1 соответствует расчетным значениям, а график 2 – нулевым значениям коэффициентов Пуассона и равенства модулей упругости материалов композита.

На Рис.7 представлено изменение ЭП в зависимости от толщины АС. Толщина АС изменялась в пределах от $5 \cdot 10^{-8}$ до $5 \cdot 10^{-2}$. Значения ЭП отнесены к значению ЭП для случая, когда $\delta_0 = 5 \cdot 10^{-8}$ и $\nu = 0.3$.

Результаты Рис. 7 дает неплохое соответствие формул (58) и (62) при нулевых значениях коэффициентов Пуассона и равенства модулей упругости материалов композита. Однако увеличение значений коэффициентов Пуассона и различие в модулях упругости АС и сопрягаемых им материалов приводит к существенному различию ЭП, вычисляемому по формулам (58) и (62).

Данный результат дает связь между критическим значением энергетического произведения и механическими характеристиками материала.

Заключение. Из найденных распределений полей перемещений границы АС получены зависимости ЭП на торце слоя. Рассматривая критическое значение ЭП в качестве критерия разрушения тонкого АС, можно в определенном диапазоне проводить расчеты без фиксации значения толщины АС. В этом случае расчет критического состояния АС может быть следующим. Так в образце с заданными геометрическими и механическими характеристиками при $\delta_0^* = \delta_0/h \leq 10^{-5}$ из эксперимента можно найти внешнюю критическую нагрузку. По данной нагрузке находится критическое значение ЭП. Для образцов, выбирая любой относительный параметр из диапазона $\delta_0 \in (0; \delta_0^*]$, при данном виде нагружения можно определить критическую внешнюю нагрузку, сопоставляя значение ЭП на торце слоя с критическим.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
- [2] Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1974. 640 с.
- [3] Allen H.G., Feng Z. Classification of Structural Sandwich Panel Behavior // *Mechanics of Sandwich Structures*. Springer, Dordrecht, 1998. pp. 1–12.
- [4] Lurie S., Volkov-Bogorodskii D., Tuchkova N. Exact solution of Eshelby-Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions // *Acta Mechanica*. 2015. No 3. pp. 1–12.
- [5] Mattei O., Bardella L. A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions // *Eur. J. Mech. A-Solid*. 2016. Vol. 58. pp. 172–186.
- [6] Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // *Composite Structures*. 2016. Vol. 137. pp. 140–147.
- [7] Panteghini A., Bardella L. Structural theory and finite element modelling of linear elastic sandwich beams // *Eur. J. Mech. A-Solid*. 2017. Vol. 61. pp. 393–407.
- [8] Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Отслоение покрытий под действием термоупругих напряжений (Балочное приближение) // *Вестник СамГУ. Естественная серия*. 2007. №4(54). С. 66–83.
- [9] Устинов К.Б. Об отслоении слоя от полуплоскости; условия упругой заделки для пластины эквивалентной слою // *Изв. РАН. МТТ*. 2015. № 1(50). С. 75–95.
- [10] Evans A.G., Hutchinson J.W. On the mechanics of delamination and spalling on compressed films // *International Journal of Solids and Structures*. 1984. № 5(20). pp. 455–466.
- [11] Фроленкова Л.Ю., Шоркин В.С. Поверхностная энергия и энергия адгезии упругих тел // *Изв. РАН. МТТ*. 2017. №1(52). С. 76–91.
- [12] Mantari J.L., Yarasca J. A simple and accurate generalized shear deformation theory for beams // *Composite Structures*. 2015. Vol. 134. pp. 593–601.
- [13] Joseph R.P., Wang B.L., Samali B. Size effects on double cantilever beam fracture mechanics specimen based on strain gradient theory // *Engineering Fracture Mechanics*. 2017. Vol. 169. pp. 309–320.
- [14] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.
- [15] Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Изгиб двуслойной балки с нежестким контактом между слоями // *Прикладная математика и механика*. 2011. № 1(75). С. 112–121.
- [16] Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Обобщенная модель Тимошенко-Рейсснера для многослойной пластины // *Изв. РАН. МТТ*. 2016. №5(51). С. 22–35.
- [17] Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А. Моделирование процесса разделения композита с адгезионным слоем // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. № 2. С. 34–44.
- [18] Абдурахманов А.А., Глаголев В.В., Глаголева М.О. Об одном модельном представлении деформирования двухконсольной балки // *Вестник ТулГУ. Серия: Дифференциальные уравнения и прикладные задачи*. 2019. № 1. С. 26–36.
- [19] Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *International Journal of Solids and Structures*. 2019. Vol. 158. pp. 141–149.

A. A. Abdurakhmanov, V. V. Glagolev

MODEL OF FINDING THE STRESSED-DEFORMED STATE OF THE ADHESION LAYER AT NORMAL SEPARATION

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. A model of deformation of a layered composite is considered on the basis of the concept of an interaction layer in a linearly elastic formulation with normal separation. From the variational formulation of the equilibrium problem for two bodies connected by means of a thin layer, taking into account the simplifying hypotheses of the distribution of the console displacement field, a system of differential equations is obtained. From the analytical solution of the resulting system, the possibility of using the energy product as a criterion for the destruction of the adhesive layer is analyzed.

Keywords: normal separation, interaction layer, layered composite, energy product.

REFERENCES

- [1] Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. Mechanics of multilayer structures. M.: Mechanical Engineering, 1980.375 p. (in Russian)
- [2] Cherepanov G.P. Fracture mechanics of composite materials. M. : Nauka, 1974. 640 p. (in Russian)
- [3] Allen H.G., Feng Z. Classification of Structural Sandwich Panel Behavior // Mechanics of Sandwich Structures. Springer, Dordrecht, 1998. pp. 1–12. (in Russian)
- [4] Lurie S., Volkov-Bogorodskii D., Tuchkova N. Exact solution of Eshelby-Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions // Acta Mechanica. 2015.No 3. pp. 1–12. (in Russian)
- [5] Mattei O., Bardella L. A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions // Eur. J. Mech. A-Solid. 2016. Vol. 58. pp. 172–186. (in Russian)
- [6] Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // Composite Structures. 2016. Vol. 137. pp. 140–147. (in Russian)
- [7] Panteghini A., Bardella L. Structural theory and finite element modeling of linear elastic sandwich beams // Eur. J. Mech. A-Solid. 2017. Vol. 61. pp. 393–407. (in Russian)
- [8] Goldstein R.V., Osipenko N.M. Detachment of coatings under the action of thermoelastic stresses (Beam approximation) // Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya. 2007. No 4 (54). pp. 66–83. (in Russian)
- [9] Ustinov K.B. On the delamination of a layer from a half-plane; elastic sealing conditions for an equivalent layer plate // Izv. RAN. MTT. 2015. No 1 (50). pp. 75–95. (in Russian)
- [10] Evams A.G., Hutchinson J.W. On the mechanics of delamination and spalling on compressed films // International Journal of Solids and Structures. 1984. No. 5 (20). pp. 455–466. (in Russian)
- [11] Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S. Surface energy and adhesion energy of elastic bodies // Izv. RAN. MTT. 2017. No1 (52). S. 76–91. (in Russian)
- [12] Mantari J.L., Yarasca J. A simple and accurate generalized shear deformation theory for beams // Composite Structures. 2015. Vol. 134. pp. 593–601. (in Russian)

© Abdurakhmanov A. A., Глаголев В. В., 2019

Abdurakhmanov Amir Abduraufovich

e-mail: dragon.1993@inbox.ru, Postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia

Glagolev Vadim Vadimovich

e-mail: vadim@tsu.tula.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Tula State University, Tula, Russia

-
- [13] Joseph R.P., Wang B.L., Samali B. Size effects on double cantilever beam fracture mechanics specimen based on strain gradient theory // *Engineering Fracture Mechanics*. 2017. Vol. 169. pp. 309–320. (in Russian)
- [14] Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. *Plates and shells*. M.: Fizmatgiz, 1963. 636 p. (in Russian)
- [15] Morozov N.F., Tovstik P.E. Bending of a two-layer beam with non-rigid contact between layers // *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2011. No 1 (75). pp. 112–121. (in Russian)
- [16] Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. A generalized Timoshenko-Reissner model for a multilayer plate // *Izv. RAN. MTT*. 2016. No 5 (51). pp. 22–35. (in Russian)
- [17] Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. Modeling the process of separation of a composite with an adhesive layer // *Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*. 2016. No. 2. pp. 34–44. (in Russian)
- [18] Abdurakhmanov A.A., Glagolev V.V., Glagoleva M.O. About one model representation of double-beam beam deformation // *Vestnik TulGU. Seriya: Differencial'nye uravneniya i prikladnye zadachi*. 2019. No 1. pp. 26–36. (in Russian)
- [19] Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *International Journal of Solids and Structures*. 2019. Vol. 158. pp. 141–149. (in Russian)

П. С. Иванов, В. И. Прокопьев

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ИЗОГНУТОЙ ОСИ БАЛКИ С ПЕРЕМЕННЫМ СЕЧЕНИЕМ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ ФУРЬЕ

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается новый метод решения уравнения изогнутой оси балки с переменным сечением с помощью рядов Фурье. Вводится специальное скалярное произведение учитывающее дифференциальное уравнение и граничные условия, что позволяет получить решение в виде ряда Фурье. Полученный ряд обладает хорошей сходимостью и ее сохранением после дифференцирования.

Ключевые слова: чистый изгиб, балка с переменным сечением, ряды Фурье, ортогональные полиномы, линейный дифференциальный оператор.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.41.3.001

УДК: 539.311

Введение. Уравнение изогнутой оси балки с переменным сечением [1, с. 293] широко применяется на практике и имеет множество методов решения. Классический аналитический метод [2, с. 139] сводит уравнение к системе дифференциальных уравнений первого порядка, которая часто не может быть явно решена. Среди численных методов решения можно выделить метод конечных разностей, метод Рунге-Кутты и им подобные [3, с. 237]. Они позволяют найти приближенное решение, но имеют ограничения по устойчивости и точности решения. В настоящей статье будет описан новый метод решения основанный на рядах Фурье по ортогональным полиномам, но со специальным условием ортогональности включающим дифференциальный оператор и граничные условия. Подобные скалярные произведения содержащие дополнительные слагаемые рассматривались ранее [4-6], но отсутствие дифференциального оператора в них не позволяло раскрыть физическую природу этих слагаемых и использовать для решения прикладных задач.

© Иванов П. С., Прокопьев В. И., 2019

Иванов Павел Сергеевич

e-mail: arlon@mail.ru, аспирант, преподаватель, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Прокопьев Валерий Иванович

e-mail: vprokoriev@mail.ru, кандидат технических наук, профессор, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 05.07.2019

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение изогнутой оси балки с переменным сечением с корректными граничными условиями записанными в общем виде:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = q(x) \quad (1)$$

$$\begin{cases} L_1 u|_{x=0} = f_1 \\ L_2 u|_{x=0} = f_2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} L_3 u|_{x=l} = f_3 \\ L_4 u|_{x=l} = f_4 \end{cases} \quad (3)$$

где $u(x)$ - функция прогиба, l - длина балки, $EI(x)$ - изгибная жесткость балки, $q(x)$ - распределенная внешняя нагрузка, $f_i \in \mathfrak{R}(i = 1, 2, 3, 4)$. Предполагается, что $EI(x)$ - положительная непрерывная функция, а $q(x)$ - непрерывная функция. $\{L_i\}_{i=1}^4$ - линейные дифференциальные операторы с переменными коэффициентами не выше 3-го порядка, т.е. $L_i = \sum_{j=0}^3 a_{ij}(x) \frac{d^j}{dx^j}$, и предполагается, что старший ненулевой коэффициент равен 1.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$Lu = \frac{d^4 u}{dx^4} + 2 \frac{EI'(x)}{EI(x)} \frac{d^3 u}{dx^3} + \frac{EI''(x)}{EI(x)} \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{q(x)}{EI(x)} \quad (4)$$

Основной результат. Основная идея решения заключается том, что функции $u(x)$ для всевозможных $q(x)$ порождают линейное пространство S (следует из линейности уравнения (4) и граничных условий (2),(3)). Следовательно, мы можем определить скалярное произведение в пространстве S в следующем виде

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 Lf \cdot Lg dx + f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + f''(0)g''(0) + f'''(0)g'''(0) \quad (5)$$

Введем систему полиномов $\{q_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ ортонормированную в (5), то есть $\langle q_i, q_j \rangle = \delta_{ij}$, где δ_{ij} - символ Кронекера. Такую систему можно построить применив процесс ортогонализации Гильберта-Шмидта[7, с. 140] к системе степенных функций $\{x^i\}_{i=0}^{\infty}$. Предполагается, что система $\{q_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ полна в пространстве S , а значит любой элемент пространства S может быть представлен в виде ряда Фурье по данной системе.

Далее, рассмотрим задачу Коши для уравнения (4), где начальные условия

$$\begin{cases} u(0) = A \\ u'(0) = B \\ u''(0) = C \\ u'''(0) = D \end{cases} \quad (6)$$

где A, B, C, D - произвольные числа.

Тогда решение задачи Коши принадлежит пространству S и может быть представлено в виде

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i q_i(x), \quad (7)$$

где

$$c_i = \langle u, q_i \rangle = \int_{-1}^1 Lu \cdot Lq_i dt + u(0)q_i(0) + u'(0)q_i'(0) + u''(0)q_i''(0) + u'''(0)q_i'''(0). \quad (8)$$

Подставляя (4) и (6) в (8) получим

$$c_i = \langle u, q_i \rangle = \int_{-1}^1 q(t) \cdot Lq_i dt + Aq_i(0) + Bq_i'(0) + Cq_i''(0) + Dq_i'''(0). \quad (9)$$

Подставим (9) в (7) и введем обозначения $D^{(n,m)}(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} q^{(n)}(t)q^{(m)}(x)$ - ядро Дирихле, $u_0(x) = \int_{-1}^1 q(t) \cdot LD^{(0,0)}(t, x)dt$, получим

$$u(x) = u_0(x) + A \cdot D^{(0,0)}(0, x) + B \cdot D^{(1,0)}(0, x) + C \cdot D^{(2,0)}(0, x) + D \cdot D^{(3,0)}(0, x). \quad (10)$$

Так как A, B, C, D - произвольные числа, можно их подобрать так, чтобы $u(x)$ удовлетворяла граничным условиям (2) и (3), тем самым решив краевую задачу (1)-(3). Для этого достаточно подставить (10) в граничные условия и решить полученную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} A L_i D^{(0,0)}(0, x) \Big|_{x=0} + B L_i D^{(1,0)}(0, x) \Big|_{x=0} + C L_i D^{(2,0)}(0, x) \Big|_{x=0} + \\ + D L_i D^{(3,0)}(0, x) \Big|_{x=0} = f_i - L_i u_0|_{x=0}, \quad (i = 1, 2) \\ A L_i D^{(0,0)}(0, x) \Big|_{x=l} + B L_i D^{(1,0)}(0, x) \Big|_{x=l} + C L_i D^{(2,0)}(0, x) \Big|_{x=l} + \\ + D L_i D^{(3,0)}(0, x) \Big|_{x=l} = f_i - L_i u_0|_{x=l}, \quad (i = 3, 4) \end{aligned} \quad (11)$$

Пример. Пусть $l = 4$, $EI = 1 + x^3$, $q(x) = \sin(\pi x)$. На конце $x = 0$ - жесткое закрепление, а на $x = 2$ - свободный конец, т.е.

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \\ M(l) = EI(l)u''(l) = 0 \\ Q(l) = EI(l)u''(l) + EI(l)u'''(l) = 0 \end{cases}$$

Уравнение (4) примет вид

$$Lu = \frac{d^4 u}{dx^4} + \frac{6x^2}{1+x^3} \frac{d^3 u}{dx^3} + \frac{6x}{1+x^3} \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\sin(\pi x)}{1+x^3}$$

Находим $\{q_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$, как было указано ранее в статье. Для данного примера были вычислены 16 элементов, приведем первые пять из них:

$$\begin{aligned} q_0 &= 1 \\ q_1 &= x \\ q_2 &= 0.146385x^2 \\ q_3 &= 0.0481677x^3 - 0.257959x^2 \\ q_4 &= 0.0195747x^4 - 0.1040009x^3 + 0.10598x^2 \end{aligned}$$

Так как граничные условия для $x = 0$ совпадают с (11), то $A = 0$ и $B = 0$. Подставим $\{q_i(x)\}_{i=0}^{16}$ в последние уравнения из (11), получим систему

$$\begin{cases} 0.999996 \cdot C + 1.999986 \cdot D = -0.636618 \\ -1.119541 \cdot 10^{-6}C + 0.999994 \cdot D = 1.191711 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$

В итоге имеем $C = -0.636621$ и $D = 4.7899 \cdot 10^{-7}$.

На следующих графиках представлены $u(x)$, $M(x) = EI(x)u''(x)$, $Q(x) = (EI(x)u''(x))'$ и $EI(x)Lu(x)$.

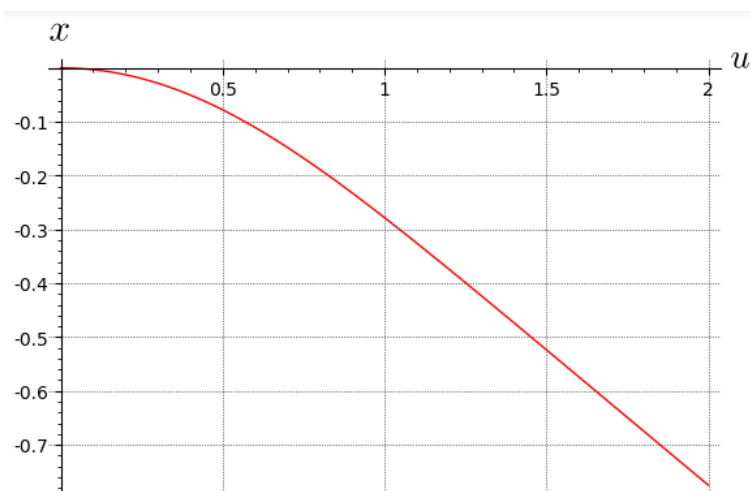


Рис. 1. Функция $u(x)$

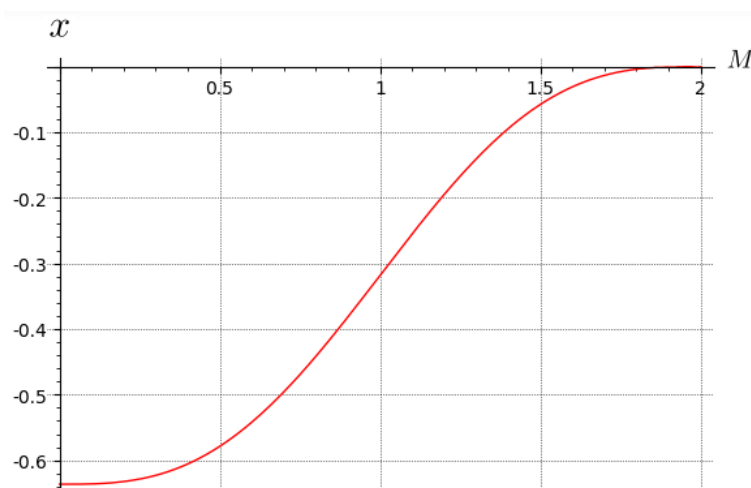
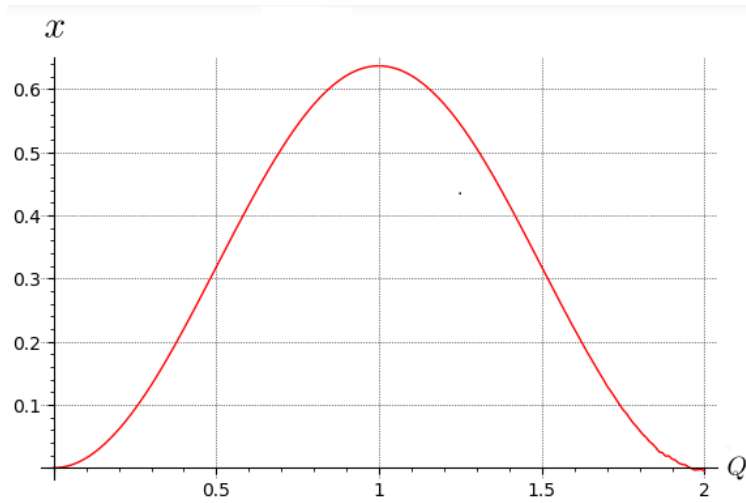
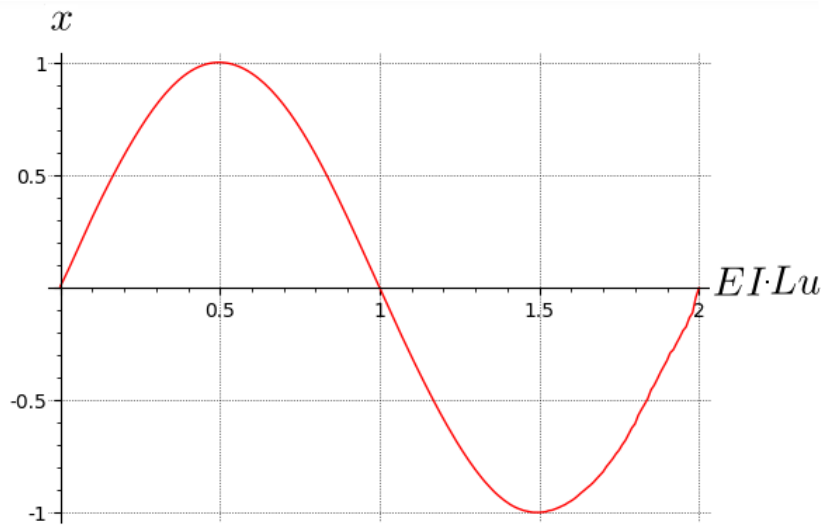


Рис. 2. Функция $M(x)$

Рис. 3. Функция $Q(x)$ Рис. 4. Функция $EI(x)Lu(x)$

Дискуссия и выводы. Для решения краевой задачи (2)-(4) нами было введено скалярное произведение (5). Отметим ключевые отличия его от классического скалярного произведения пространства $L^2[a, b]$ [8, с. 382] применяемого для классических рядов Фурье (тригонометрические, по полиномам Лежандра), а также связь с решением соответствующего дифференциального уравнения.

Во-первых оно включает линейный дифференциальный оператор L , что отражает необходимость сходимости ряда не только для $u(x)$, но и производных до 4-го порядка включительно. Строгое математическое доказательство этого утверждения является вопросом функционального анализа и будет рассмотрено в будущих статьях.

Во-вторых четыре последних слагаемых в (5) характеризуют граничные условия. Не сложно заметить, что из формулы (10), следует что $\{D^{(i,0)}(0, x)\}_{i=0}^3$ - решения однородного уравнения $Lu = 0$, когда соответствующее условие из (6) равно 1, а остальные ноль. Т.е. их линейная комбинация - общее решение однородного уравнения $Lu = 0$, что отражено в формуле (10).

В-третьих в формуле (10) $u_0(x) = \int_{-1}^1 q(t) \cdot LD^{(0,0)}(t, x) dt$ отражает частное решение краевой задачи (2)-(4). Отметим, что, если принять $A = B = C = D = 0$, то $u(x) = \int_{-1}^1 q(t) \cdot LD^{(0,0)}(t, x) dt$, и следовательно $LD^{(0,0)}(t, x)$ может быть связана с функцией Грина задачей Коши для уравнения (4), это требует дальнейших исследований.

При составлении скалярного произведения (5) была поставлена задачи Коши для уравнения (4), но это является необязательным. Можно сразу ввести скалярное произведение удовлетворяющее условиям (2)-(3) в виде

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 Lf \cdot Lg dx + L_1 f|_{x=0} L_1 g|_{x=0} + L_2 f|_{x=0} L_2 g|_{x=0} + L_3 f|_{x=l} L_3 g|_{x=l} + L_4 f|_{x=l} L_4 g|_{x=l} \quad (12)$$

И найдя соответствующую ортонормированную систему полиномов $\{q_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$, можно сразу найти ответ для $u(x)$

$$u(x) = u_0(x) + f_1 \cdot L_1 D^{(0,0)}(t, x) \Big|_{t=0} + f_2 \cdot L_2 D^{(0,0)}(t, x) \Big|_{t=0} + f_3 \cdot L_3 D^{(0,0)}(t, x) \Big|_{t=l} + f_4 \cdot L_4 D^{(0,0)}(t, x) \Big|_{t=l} \quad (13)$$

Но такое решение хоть и проще, но обладает важным недостатком для практического применения. Большая часть времени при расчете уходит на нахождение системы $\{q_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ с помощью ортогонализации Грама-Шмидта. Если $q(x)$ является кусочно-непрерывной функцией или имеются сосредоточенные нагрузки, придется разбить балку на участки и на каждом из них будут свои граничные условия и условия сопряжения. Понадобится вычислять отдельно ортонормированную систему на каждом участке, что является очень времязатратным.

Дальнейшим развитием представленного метода является решение систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (чистый изгиб композитной балки с переменным сечением) и уравнения в частных производных с переменными коэффициентами (колебания балки с переменным сечением).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М. : Наука, 1975. 576 с.
- [2] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Наука, 1974. 331 с.
- [3] Калиткин Н.Н. Численные методы: учеб. пособие – 2-е изд., исправленное. СПб. : БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
- [4] Марчелан Ф., Осиленкер Б. П. Оценки полиномов, ортогональных по отношению к скалярному произведению Лежандра–Соболева // Матем. заметки. 1997. № 62. Ч. 6. С. 871–880
- [5] Осиленкер Б.П. О некоторых экстремальных задачах для алгебраических полиномов в нагруженных пространствах // Изв. вузов. Матем. 2010. №2. С. 53–65
- [6] Осиленкер Б.П. Симметричные полиномы Лежандра–Соболева в пространствах Понтрягина–Соболева // Матем. физ., анал., геом. 2002. № 9. Ч.3. С. 385–393
- [7] Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998. 160 с.

- [8] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. М. : Физматлит, 2004. 572 с.

P. S. Ivanov, V. I. Prokopiev

THE GENERAL SOLUTION FOR THE EULER–BERNOULLI EQUATION OF BEAM WITH VARIABLE CROSS-SECTION USING FOURIER SERIES

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. A new method for solving of the Euler–Bernoulli equation of beam with variable cross-section using Fourier series is considered. A special scalar product is introduced taking into account the differential equation and boundary conditions, which allows to obtain a solution in the form of a Fourier series. The resulting series has good convergence and its retaining after differentiation.

Keywords: pure bending, beam with variable cross-section, Fourier series, orthogonal polynomials, linear differential operator.

REFERENCES

- [1] Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of elasticity. M. :Nauka, 1975. 576 p. (in Russian)
 [2] Pontryagin L.S. Ordinary differential equations. M. :Nauka, 1974. 331 p. (in Russian)
 [3] Kalitkin N.H. Numerical methods: studies. manual. 2nd ed., revised. SPb. : BHW-Petersburg, 2011. 592 p. (in Russian)
 [4] Marchelan F., Osilenker B.P. Estimates of polynomials orthogonal with respect to the Legendre–Sobolev scalar product // Mat. Zametki. 1997. Vol. 62. Part 6. pp. 871–880 (in Russian)
 [5] Osilenker B.P. On some extremal problems for algebraic polynomials in loaded spaces // Izv. universities. Mat. 2010. Vol. 2. pp. 53–65 (in Russian)
 [6] Osilenker B.P. Symmetric Legendre–Sobolev Polynomials in Pontryagin–Sobolev Spaces // Mat. physical., anal., geom. 2002. Vol. 9. Part 3. pp. 385–393 (in Russian)
 [7] Dyachenko M.I., Ulyanov P.L. Measure and integral. M. : Factorial, 1998. 160 p. (in Russian)
 [8] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. 7th ed. M. : Fizmatlit, 2004. 572 p. (in Russian)

Ivanov Pavel Sergeevich

e-mail: arlon@mail.ru, postgraduate, lecturer, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

Prokopiev Valeriy Ivanovich

e-mail: vipropkiev@mail.ru, Candidate of Engineering Sciences, Professor, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

К. Н. Пестов, О. Н. Любимова, М. В. Останин

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТИПА СТЕФАНА

Дальневосточный федеральный университет, г.Владивосток, Россия

Аннотация. Предлагается конечно-разностный метод решения двухфазных задач типа Стефана с одновременно существующими и изменяющимися несколькими границами раздела фаз. Суть метода состоит в ведении в уравнение теплопроводности дополнительной функции — источника тепла, которая определяет положение фронта фазового перехода и численно находится на каждом временном слое. Приведены результаты расчетов по предложенному методу задач с импульсным источником и двумерной задачи с неоднородными краевыми условиями. Проведено сравнение с результатами классической задачи Стефана и квазистационарным решением Лейбензона при решении задачи о промерзании трубы.

Ключевые слова: фазовый переход первого рода, задача Стефана, разностная схема, численные методы, граница раздела фаз.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.41.3.002

УДК: 519.633:517.958

Введение

Актуальность поиска наиболее простых и эффективных алгоритмов кинетики фазовых границ связанных с фазовыми переходами первого рода в классификации Эренфеста, обусловлена не только практическими задачами плавления и кристаллизации металла, но и проектированием уникальных сооружений, например, мерзлотных плотин, оснований нефтяных платформ и пирсов из льда для эксплуатации в арктических условиях. Одной из основных особенностей моделирования подобных сооружений является необходимость учета возможности резкого изменения физических свойств тела плотины, пирса или основания платформы при переходе из мерзлого состояния (льда)

© Пестов К. Н., Любимова О. Н., Останин М. В., 2019

Пестов Константин Николаевич

e-mail: kopestov@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Дальневосточный федеральный университет, г.Владивосток, Россия.

Любимова Ольга Николаевна

e-mail: berms@mail.ru, кандидат физико-математических наук, профессор, Дальневосточный федеральный университет, г.Владивосток, Россия.

Останин Максим Валентинович

e-mail: ostanin.mv@dvvfu.ru, ассистент, Дальневосточный федеральный университет, г.Владивосток, Россия.

Поступила 31.05.2019

в талое (вода). В результате одной из задач при формировании модели является определение границ областей мерзлых и талых рассматриваемого сооружения. При моделировании подобных явлений существуют два основных подхода к решению задач с границей раздела фаз: сквозной счет и явное выделение границы раздела фаз. Методы первого направления способны выявить важные особенности термических процессов при фазовых переходах, однако описание локальных полей температуры и динамики положения границы фазового перехода при таком подходе невозможно. Численные методы, второго подхода как правило обладают высокой точностью выделения межфазной границы, но становятся алгоритмически весьма сложными в случае многофазных и многомерных задач или для случая циклического изменения температуры на границе, когда число немонотонно движущихся фронтов может быть несколько, причем некоторые из них могут сливаться друг с другом или исчезать. Среди наиболее распространенных: метод ловли фронта в узел сетки [1], методы адаптивной сетки [2], выпрямления фронта [3] и дробных шагов [4]. Метод ловли фронта в узел сетки имеет два варианта реализации, когда задается временной шаг, а пространственная сетка подбирается так, чтобы фронт попал в узел и наоборот, когда временной шаг подбирается так, чтобы фронт попал в узел стационарной пространственной сетки. Оба варианта ограничены случаем только одного монотонно меняющегося фронта. При использовании методов адаптивной сетки возникает нетривиальная задача на каждом временном слое строить «хорошую» сетку, причем для сложных областей задача построения сетки может по сложности превосходить исходную задачу. Методы выпрямления фронтов основаны на замене пространственной переменной, так чтобы исходная задача в области с криволинейной границей переходила в уже другую задачу, определенной в прямоугольной области. Метод тоже имеет ограничение по числу фронтов. Предлагаемый в настоящей статье численный метод является некоторым симбиозом сквозных методов и метода ловли фронта в узел сетки. Метод можно применять для случая любого количества фронтов, как для одномерных, так и для многомерных задач

Постановка задачи

Рассмотрим Материальное тело в виде одномерного стержня, двумерной пластины или трехмерной области сделано из материала, теплофизические свойства которого задаются следующими параметрами: c^+ , c^- — удельная теплоемкость, ρ^+ , ρ^- — плотность, λ^+ , λ^- — коэффициент теплопроводности соответственно жидкой и твердой фаз, T^* , Q^* — температура и скрытая теплота плавления.

Для простоты изложения зависимость коэффициентов c , ρ , λ от температуры можно не учитывать и ввести коэффициент температуропроводности $a = \lambda/(c\rho)$

Тело в каждый момент времени может содержать несколько одновременно существующих твердых и жидких зон, пересекающихся по поверхностям фазового перехода $S(t) = \{x|T(x,t) = T^*\}$. Объединение всех твердых зон обозначим через $\Omega_l(t) = \{x|T(x,t) < T^*\}$, а объединение жидких через $\Omega_s(t) = \{x|T(x,t) > T^*\}$. В процессе теплопередачи может меняться как положение фронтов, так и их количество: могут рождаться новые, исчезать или сливаются в один. Каждый фронт — это односвязная поверхность, такая что $S(t) = \{x|T(x,t) = T^*\}$. Если фронтов нет, то тело находится полностью в твердом или жидком состоянии.

Функция температуры внутри каждой из фаз описывается уравнением теплопроводности

$$c\rho = \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T, x \in \Omega_l(t) \cup \Omega_s(t)$$

В классической постановке на границе фазового перехода задаются два условия. Первое — условие непрерывности температуры $[T]_s = 0$ т.е. скачок температуры равен нулю. Второе — это условие Стефана $\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right]_s = Q^* \frac{\partial \xi}{\partial t}$, где ξ — скорость движения фронта и n — вектор нормали к поверхности S .

Построим модель фазового перехода без условия Стефана. Доопределим (сгладим) коэффициент теплопроводности на границе раздела фаз следующим образом:

$$\lambda = \begin{cases} \lambda^+, & \text{если } T \leq T^* - T' \\ \lambda^*, & \text{если } T^* - T' \leq T \leq T^* + T' \\ \lambda^-, & \text{если } T \geq T^* + T' \end{cases}$$

Рассмотрим некоторый малый объем тела ΔV . Пусть в момент времени t^* он достиг температуры плавления, тогда уравнение баланса энергии с учетом закона Фурье за малое время $\Delta t = t - t^*$, такое, что этот объем не изменил агрегатного состояния, можно записать в виде

$$\int_{\partial V} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} ds \Delta t = \int_V \Delta Q dV,$$

Здесь ΔQ — приращение тепла за время Δt . Этот объем сменит состояние, если $\Delta Q = \rho Q^*$.

Воспользовавшись непрерывностью коэффициента теплопроводности и теоремой Остроградского-Гаусса, разделяя обе части на Δt и переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \begin{cases} c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, & T \neq T^* \text{ или } Q = \rho^- Q^* \text{ или } Q = -\rho^+ Q^* \\ \frac{\partial Q}{\partial t}, & T = T^* \text{ и } Q < \rho^- Q^* \text{ и } Q > -\rho^+ Q^* \end{cases} \quad (1)$$

Введем две функции, позволяющие учесть непрерывное накопление (выделение) энергии, затрачиваемой на фазовый переход (или выделяемой при фазовом переходе) в уравнении теплопроводности (1) следующим образом:

$$\gamma(x, t) = \begin{cases} 1, & T = T^* \\ 0, & T \neq T^* \end{cases}, Q(x, t) = \begin{cases} \bar{Q}, & \text{для } \gamma(x, t) = 1 \\ 0, & \text{для } \gamma(x, t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Здесь \bar{Q} — ограниченная функция, характеризующая удельное (отнесенное к единице объема) тепло, затраченное на фазовый переход, которая определяется в процессе решения.

Используя формулы (2), уравнение (1) может быть переписано в виде

$$c\rho(1 - \gamma(x, t)) \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T - \gamma(x, t) \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (3)$$

На внешней границе всего тела заданы условия теплообмена по закону Ньютона (краевые условия 3-го рода):

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} - \chi (T - T_e(t)) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (4)$$

где χ — коэффициент теплоотдачи, T_e — функция температуры окружающей среды, n — вектор нормали к внешней поверхности.

В начальный момент времени $t = 0$ задано некоторое распределение температуры $T|_{t=0} = T_0(x)$. Математическая модель, содержащая уравнение (1) и краевые условия, является замкнутой.

Разностная схема

Изложение предлагаемого численного метода ведется на примере одномерной задачи в декартовых координатах. Для многомерного случая задача отличается только за счет температурной части, так как в уравнении (1) введенная функция q дифференцируется только по времени, в криволинейных координатах изменяется только выражение лапласиана.

В одномерном случае не ограничивая общности можно считать, что решение ищется в области $D = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 1, t \geq 0\}$. Построим пространственно-временную сетку $\omega = \omega_x \times \omega_t$ равномерную по координате с шагами $\Delta_x: \omega_x = \{x_{i+1} = x_i + \Delta_x, i = 0 \dots N-1\}$ и неравномерную по времени $\omega_t = \{t_{j+1} = t_j + \Delta_{t,j}, j = 0, 1, 2, \dots\}$ с переменным шагом $\Delta_{t,j}$

Шаг по времени будем выбирать следующим образом. Если в теле фазовых переходов нет, то задача теплопроводности решается с фиксированным начальным шагом Δ_t . Фазовый переход в теле появляется, как только температура в какой-то точке станет равна T^* . Соответственно на следующем временном шаге температура в этой точке известна, и ищется в этом узле только функция $Q(x, t)$. Если найденное значение попало в интервал $(\rho^+ Q^*, \rho^- Q^*)$, то шаг Δ_t приемлем. Если же Q не попало в указанный интервал, то шаг необходимо уменьшить, например вдвое, и пересчитать временной слой. Фазовый переход произойдет в точке, если выполнится одно из условий: $Q = -\rho^+ Q^*$ или $Q = \rho^- Q^*$. В первом случае произойдет плавление, во втором затвердевание. Зададим точность попадания в концы интервала. Таким образом, определим шаг $\Delta_{t,j}$

$$\Delta_{t,j} = \begin{cases} \Delta_t, & \text{если } T_i^j < T^* - \varepsilon \text{ или } T_i^j > T^* + \varepsilon, \\ \frac{\Delta_t}{2^s}, & \text{если } -\rho^+ Q^* + \varepsilon \leq Q_i^j \leq \rho^- Q^* - \varepsilon, \end{cases}$$

где s — номер итерации на j — ом временном слое.

Рассмотрим аппроксимацию уравнений (3)-(5) и краевых условий (6). Из начальных условий известно решение на нулевом временном слое $T_i^0 = T_0(x_i)$.

Каждому внутреннему узлу в теле на j — ом временном слое ставится в соответствие разностное уравнение:

$$c\rho(1 - \gamma_i^j) \frac{T_i^j - T_i^{j-1}}{\Delta_{t,j}} = \lambda \frac{T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j}{\Delta_x^2} - \gamma_i^j \frac{Q_i^j - Q_i^{j-1}}{\Delta_{t,j}}, i = 1, \dots, N-1 \quad (5)$$

В граничных узлах задаются уравнения

$$\lambda \frac{T_1^j - T_0^*}{\Delta_x} - \chi_0(T_0^j - T_e^j) = 0, \lambda \frac{T_N^j - T_{N-1}^j}{\Delta_x} - \chi_N(T_N^j - T_e^j) = 0 \quad (6)$$

Положение границы фазового перехода можно отследить по сеточной функции, которая определяется как

$$\gamma_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } -\rho^+ Q^* + \varepsilon < Q_i^{j-1} < \rho^- Q^* - \varepsilon \text{ и } T^* - \varepsilon < T_i^{j-1} < T^* + \varepsilon \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Если $\gamma_i^j = 1$, то в данной точке в данный момент времени находится граница фазового перехода. Если $\gamma_i^j = 0$, то уравнение (1) в данной точке превращается в обыкновенное уравнение теплопроводности. Сеточные функции Q_i^j и T_i^j в зависимости от γ_i^j равны

$$T_i^j = \begin{cases} T_i^j, & \text{если } \gamma_i^j = 0, \\ T_i^{j-1}, & \text{если } \gamma_i^j = 1, \end{cases} \quad Q_i^j = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma_i^j = 0, \\ Q_i^j, & \text{если } \gamma_i^j = 1 \end{cases}$$

Систему уравнений (4),(5) запишем в матричном виде $A^j T^j = B^j$, где $T^j = (T_0^j, \dots, T_N^j)^T$ — вектор значений температуры на j — ом временном слое. Матрица системы $A^j = (a_{ml})$ является трехдиагональной. Ее элементы и элементы вектора свободных членов определяются следующим образом:

при $m = 1$ (x_0^j — начальная точка):

$$a_{11} = -\frac{\lambda}{\Delta_x} - \chi_0, a_{12} = \frac{\lambda}{\Delta_x}(1 - \gamma_2^j), b_1 = -\chi_0 T_0(t_j) - \frac{\lambda}{\Delta_x} \gamma_2^j,$$

при $1 < m < N$ (x_m^j — внутренняя точка):

$$a_{m,m-1} = \frac{\lambda}{\Delta_x^2}(1 - \gamma_{m-1}^j), a_{m,m+1} = \frac{\lambda}{\Delta_x^2}(1 - \gamma_{m+1}^j)$$

$$a_{mm} = \left(\frac{2\lambda}{\Delta_x^2} + \frac{c\rho}{\Delta_{t,j}} \right) (\gamma_m^j - 1) - \frac{\gamma_m^j}{\Delta_{t,j}}$$

$$b_m = c\rho(\gamma_m^j - 1)T_m^{j-1} - \gamma_m^j \frac{Q_m^{j-1}}{\Delta_{t,j}} - \frac{\lambda}{\Delta_x^2}(1 - \gamma_{m+1}^j)T_{m+1}^{j-1} - \frac{\lambda}{\Delta_x^2}(1 - \gamma_{m-1}^j)T_{m-1}^{j-1}$$

при $m = N$ (x_N^j — конечная точка):

$$a_{N,N-1} = -\frac{\lambda}{\Delta_x}(\gamma_{N-1}^j - 1), a_{NN} = \frac{\lambda}{\Delta_x} - \chi_0, b_N = -\chi_N T_N(t_j) + \frac{\lambda}{\Delta_x} \gamma_{N-1}^j.$$

Все остальные элементы матрицы равны нулю. Система может быть эффективно решена методом прогонки.

Примеры численного моделирования

Во всех рассмотренных примерах $N = 100$. Рассмотрим две одномерных задачи, имеющие аналитическое решение.

Классическая задача Стефана.

Задача о промерзании в области $x \geq 0$ ставится следующим образом. Необходимо найти распределение температуры $T(x, t)$ и закон движения фронта фазового перехода $\xi = \xi(t)$, если в начальный момент все полупространство занято водой, имеющей нулевую температуру $T(x, 0) = 0$, а в последующие моменты времени на границе задана постоянная отрицательная температура: $T(0, t) = T_0$. Задача имеет аналитическое решение известное как автомодельное решение Стефана [6].

При численном моделировании были заданы следующие граничные условия: $T(0, t) = -5^\circ\text{C}$, $T(1, t) = 0^\circ\text{C}$. Параметры материала: $a = \frac{\lambda}{c\rho}$; $a^+ = 0.136 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, $a^- = 0.988 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, $Q = 332400 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$. Задача является однофазной, поскольку температура в одной фазе постоянна и равна начальной температуре (рис. 1). Графики положения фронта во времени на рис. 1а соответствуют: $\xi_s(t)$ — автомодельному решению Стефана, $\xi_n(t)$ — численному решению. Максимальная относительная погрешность

на данной сетке не превышает 4%, на сетке $N = 200$ не превосходит 2.1 %. Заметим, что метод демонстрирует хорошую сходимость к автомодельному решению.

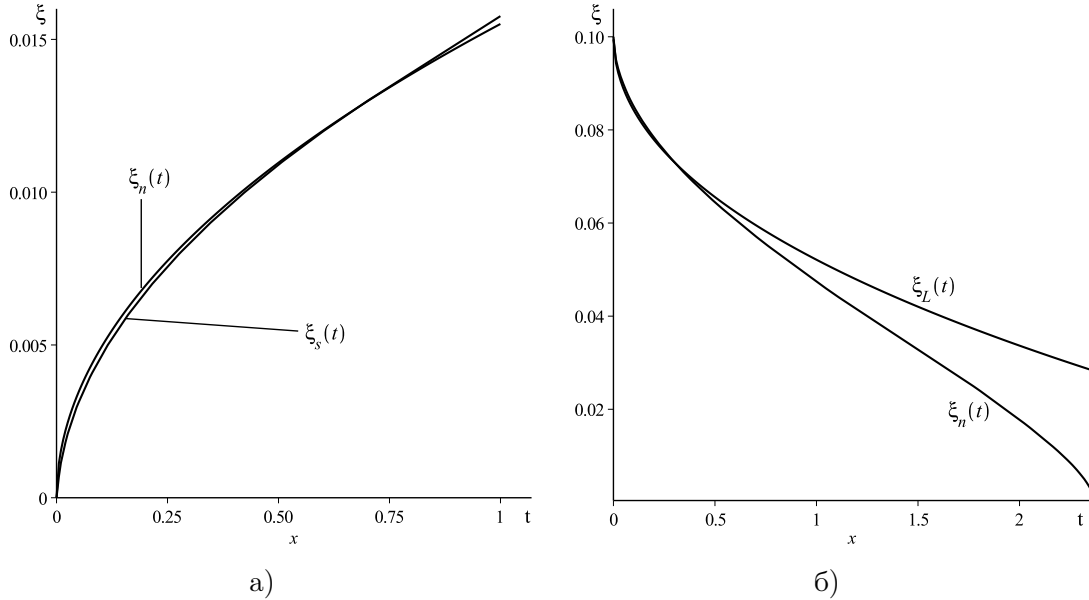


Рис. 1. Сравнение численного решения с а) автомодельным решением б) решением Лейбенсона

Задача о промерзании цилиндрической трубы.

Имеется неограниченный по высоте цилиндр радиуса R , заполненный водой при температуре $T(r, 0) = 0^\circ\text{C}$, $0 \leq r \leq R$. Начиная с некоторого момента времени $t = 0$ на поверхности цилиндра поддерживается постоянная температура $T(R, t) = T_0$, $t > 0$. Фронт промерзания начинает двигаться от поверхности к оси цилиндра, и через некоторое время вся жидкость в трубе замерзает. Задача имеет полуаналитическое решение квазистационарным методом Лейбенсона [2]. Краевые условия при моделировании приняты следующие: $T_0 = -5^\circ\text{C}$, $\frac{\partial T}{\partial x}|_x = 0$ материал — вода, $R = 0.1\text{м}$.

Графики движения фронта по времени на рис. 1б соответствуют: $\xi_L(t)$ — решению Лейбенсона, $\xi_n(t)$ — численному решению. На начальном этапе, пока распределение температуры в замершей части можно описывать стационарными решениями, кривые практически не отличаются. В дальнейшем наблюдается отклонение, которое можно объяснить погрешностью метода Лейбенсона. Время полного затвердевания $t = 2.98$ (ч).

Пример задачи с импульсным источником.

На правый конец стержня длины l импульсом подается тепловой поток высокой интенсивности $q = -\frac{2 \cdot 10^8}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$ второй же конец стержня теплоизолирован. Начальная температура равна $T(x, 0) = 20^\circ\text{C}$. Параметры материала $a^+ = 0.136 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$, $a^- = 0.988 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$, $Q^* = 332400 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$, $T^* = 660^\circ$ соответствуют алюминию $l = 0.1\text{м}$. Подобные задачи возникают, например при моделировании сварочных процессов.

На рис. 2а показано изменение температуры в различных точках стержня с течением времени. График зависимости положения фронта от времени изображен на рис.

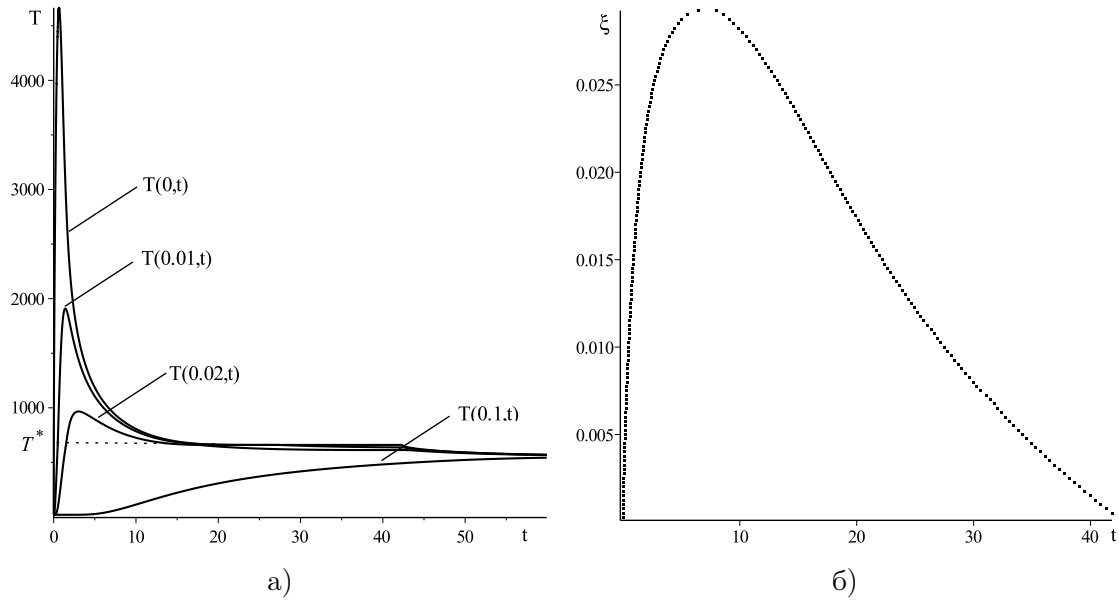


Рис. 2. Временной профиль температуры в некоторых точках стержня и положение фронта.

26. Максимальная толщина проплавления составляет $\xi_m ax = 0.029$ и соответствует времени $t = 8.63$ (ч). После этого времени стержень начинает кристаллизироваться. Причем в виду того, что разница температур на концах стержня значительна, второй фронт не образуется. Ко времени $t = 41.83$ (ч) стержень вернулся в полностью твердое состояние.

Граничные условия $T(0,t) = 10 \sin\left(\frac{\pi t}{21600}\right)$, $T(0.1,t) = -10 \sin\left(\frac{\pi t}{21600}\right)$. Начальная температура $T(x,0) = 10^\circ C$ Материал – вода.

На рис.3 представлены результаты моделирования. На рис. За приведен характер распределения температуры по времени на левом конце $x = 0$ и в середине стержня $x = 0.5$. Заметно, что изменение температуры в середине стержня имеет периодический характер при $t > 15$.

На рис. 3б приведено положение фронта фазового перехода во времени. Видно, что сначала материал слева начинает плавиться, затем возникают оба фронта, т.е. периодические граничные условия определяют и периодическую динамику движения фронта.

Пример двумерной задачи.

Рассматривается задача о плавлении квадратного алюминиевого бруса со стороной $h = 1$ бесконечной длины и начальной температурой $\hat{Q}_0 = 20^\circ$. Условия на боковых поверхностях заданы в виде

$$\left[\lambda \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} + \chi_1(T(x,y,t) - \hat{Q}_e) \right] \Big|_{x=0} = 0 \quad \left[\lambda \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} + \chi_2(T(x,y,t) - \hat{Q}_e) \right] \Big|_{y=0} = 0$$

$$\left[\lambda \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} + \chi_3(T(x,y,t) - \hat{Q}_e) \right] \Big|_{x=h} = 0 \quad \left[\lambda \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} + \chi_4(T(x,y,t) - \hat{Q}_e) \right] \Big|_{y=h} = 0$$

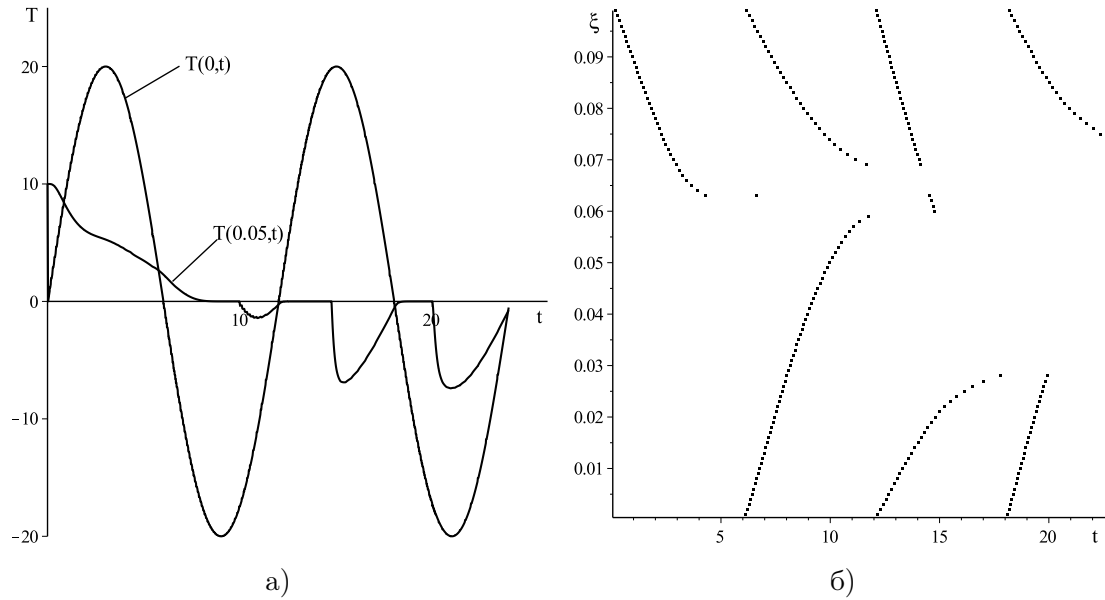


Рис. 3. Временной профиль температуры и положение фронта.

где $\hat{Q}_e = 2200^\circ C$, а коэффициенты теплоотдачи соответствуют вариантам а) $\chi_1 = 300 \frac{W}{m^2 \cdot C}$, $\chi_2 = 400 \frac{W}{m^2 \cdot C}$, $\chi_3 = 100 \frac{W}{m^2 \cdot C}$, $\chi_4 = 200 \frac{W}{m^2 \cdot C}$ б) $\chi_1 = 0 \frac{W}{m^2 \cdot C}$, $\chi_2 = 0 \frac{W}{m^2 \cdot C}$, $\chi_3 = 200 \frac{W}{m^2 \cdot C}$, $\chi_4 = 400 \frac{W}{m^2 \cdot C}$

На рис. 4 представлены результаты расчета, кривые линии представляют собой фронт фазового перехода в различные моменты времени

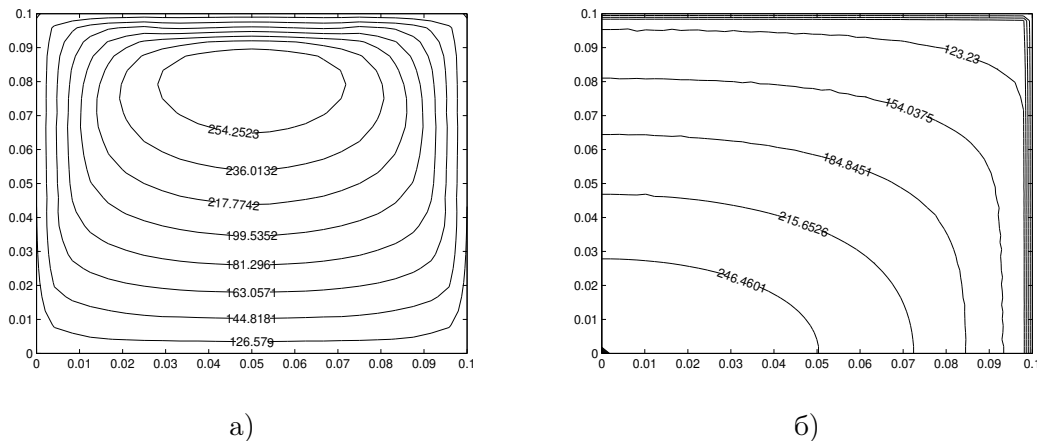


Рис. 4. Динамика фронта фазового перехода во времени.

Заключение

В настоящей работе предложен численный метод решения одно- и многомерных задач типа Стефана с несколькими границами раздела фаз. Метод позволяет решать

задачи с заранее неизвестным количеством фронтов, для областей произвольной геометрии, сложными граничными условиями. Результаты расчетов приведенных задач демонстрируют простоту расчетов и адекватность результатов. Практическое применение метода можно связать с различными технологическими задачами в материаловедении, например, при получении слоистых композиционных материалов методами температурной обработки и прогнозировании поведения грунтов в гидротехнических сооружениях при сезонных колебаниях температуры.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Никитенко Н.И. Исследование процессов тепло- и массообмена методом сеток. к.-наук. Думка, 1978. 213 с.
- [2] Лыков А.В. теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
- [3] Будаков Б.М., Соловьева Е. Н., Успенский А.Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задач Стефана // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. № 5. С. 828–840.
- [4] Самарский А. А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. № 5. С. 816–827.
- [5] Будаков Б.М., Гольдман Н.А., Успенский А. Б. разностные схемы с выпрямлением фронтов для решения многофронтовых задач типа Стефана // Докл. АН СССР. 1966. № 4. С. 735–738.
- [6] Голубева А.А. стандартная программа численного решения краевой задачи Стефана для одномерных параболических уравнений разностным методом с «дробными шагами по x и t » // Методы решения краевых и обратных задач теплопроводности / (Под ред. А. Б. Успенского). Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1975. С. 39–51.
- [7] Дарьин Н.А., Мажукин В.И. математическое моделирование задачи Стефана на адаптивной сетке // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 7.

K. N. Pestov, O. N. Lyubimova, M. V. Ostanin

THE METHOD OF SOLVING PROBLEMS TYPE OF STEFAN WITH PHASE TRANSITIONS OF THE FIRST KIND

Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

Abstract. The finite-difference method of solving the two-phase Stefan-type problems with several simultaneously existing and variable phase interfaces is proposed. The principle of method consists in entering into the heat conduction equation the additional function – heat source which identifies the position of the phase transition front and is numerically determined on every temporal layer. The calculation results based on the proposed method for problems with pulsed source and two-dimensional problem with the inhomogeneous boundary conditions are presented. The results were compared with those of the classical Stefan type problem and quasi-stationary Laybenson solution for the problem of the pipe freezing.

Keywords: first-order phase transition, Stefan problem, difference scheme, numerical methods, phase interface.

REFERENCES

- [1] Nikitenko N.I. Study of the heat-mass exchange processes by the grid method. Kiev: Naukova Dumka, 1978. 213 p. (in Russian)
- [2] Lykov A.V. Theory of thermal conduction. Moscow.: Vysshaya shkola, 1967. 600 p. (in Russian)
- [3] Budak B.M., Solovyeva E.N., Uspensky A.B. Finite difference method with smoothing of coefficients for solving the Stefan problems // Journal of numerical mathematics and mathematical physics. 1965. No. 5. pp. 828–840. (in Russian)
- [4] Samarsky A.A., Moiseenko B.D. Economic scheme of the through computation for the multi-dimensional Stefan problem // Journal of numerical mathematics and mathematical physics. 1965. No. 5. pp. 816–827 (in Russian)
- [5] Budak B.M., Goldman N.A., Uspensky A.B. Difference schemes with front rectification for solving the multi-front Stefan problems // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1966. No. 4. pp. 735–738 (in Russian)
- [6] Golubeva A.A. Standard program of the computation solution of the boundary Stefan problem for one-dimensional parabolic equations by the finite difference method with «fractional steps in x and t » // Methods for solving boundary value and inverse problems of thermal conductivity. Moscow: Publ. of Moscow University. 1975. pp. 39–51 (in Russian)
- [7] Daryin N.A., Mazhukin V.I. Mathematical modeling of the Stefan problem on the adaptive grid // Differential equations. 1987. No. 7. pp. 1154–1160 (in Russian)

Pestov Konstantin Nikolaevich

e-mail: kopestov@yandex.ru, Candidate of physico & mathematical sciences, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

Lyubimova Olga Nikolaevna

e-mail: berms@mail.ru, Candidate of physico & mathematical sciences, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

Ostanin Maxim Valentinovich

e-mail: ostanin.mv@dvfu.ru, assistant & mathematical sciences, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

Н. И. Петров

О РЕШЕНИИ ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В СЛУЧАЕ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе рассматривается решение линеаризованных уравнений теории малых упругопластических деформаций [1-6] в случае осесимметричной задачи. Предполагается, что в начальном состоянии имеет место простое растяжение. В первом приближении получены соотношения для компонент перемещений, деформаций и напряжений. Решения выражаются через функции Бесселя нулевого и первого порядка.

Ключевые слова: линеаризация, растяжение, напряжение, деформация, функция Бесселя.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.41.3.003

УДК: 539.375

В случае осесимметричной деформации соотношения теории малых упругопластических деформаций имеют вид [1-2].

$$\begin{aligned}\sigma_r - \sigma &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_r, & \sigma_z - \sigma &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_z, & \sigma_\theta - \sigma &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_\theta, \\ \tau_{rz} &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{rz}, & \sigma_i &= \Phi(e_i), & e_r + e_\theta + e_z &= 0, \\ \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ e_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(e_r - e_\theta)^2 + (e_\theta - e_z)^2 + (e_z - e_r)^2 + 6e_{rz}^2 \right]^{\frac{1}{2}},\end{aligned}\quad (1)$$

Обозначим $\Phi(e_i) = 3\Psi(e_i)e_i$. Соотношения примут вид:

$$\sigma_r - \sigma = 2\Psi(e_i)e_r, \quad \sigma_z - \sigma = 2\Psi(e_i)e_z, \quad \sigma_\theta - \sigma = 2\Psi(e_i)e_\theta, \quad \tau_{rz} = 2\Psi(e_i)e_{rz}. \quad (2)$$

© Петров Н. И., 2019
Петров Николай Ильич
e-mail: ni.petrov46@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей физики, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 20.07.2019

Решение будем искать в виде рядов по степеням параметра δ

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_{ij}^n, \quad e_i = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n e_i^n.$$

Предположим, что в начальном состоянии имеет место простое растяжение

$$\sigma_z^0 = const, \quad \sigma_r^0 = \sigma_\theta^0 = \tau_{rz}^0 = 0, \quad e_r^0 = e_\theta^0 = -\frac{1}{2}e_z^0, e_{r\theta}^0 = 0.$$

Для функции $\Psi(e_i)$ имеет место разложение

$$\Psi(e_i) = \Psi^{(0)}(e_i^0) + \delta \frac{d\Psi^{(0)}}{de_i} e_i' + \delta^2 \left[\frac{1}{2} \frac{d^2\Psi^{(0)}}{de_i^2} (e_i')^2 + \frac{d\Psi^{(0)}}{de_i} e_i'' \right] + \dots$$

где значения функции Ψ и ее производных взяты в исходном состоянии при $e_i = e_i^0$.

Линеаризованные соотношения (2) в первом приближении имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r' &= \sigma' + 2Be_r' + (B+A)e_z', & \sigma_\theta' &= \sigma' + 2Be_\theta' + (B+A)e_z', \\ \sigma_z' &= \sigma' + 2Ae_z', & \tau_{rz}' &= 2Be_{rz}', \end{aligned} \quad (3)$$

где $e_i^0 = e_z^0$, $e_i' = e_z'$, $B = \Psi(e_i^0)$, $A - B = \frac{d\Psi(e_i^0)}{de_i} e_z^0$.

Уравнению неразрывности удовлетворим, полагая

$$u_z' = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi'}{\partial r}, \quad u_r' = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi'}{\partial z}. \quad (4)$$

Для компонент тензора деформаций получаем выражения

$$\begin{aligned} e_r' &= \frac{\partial u_r'}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z \partial r}, & e_\theta' &= \frac{u_r'}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial z}, & e_z' &= \frac{\partial u_z'}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z \partial r}, \\ e_{rz}' &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r'}{\partial z} + \frac{\partial u_z'}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial r^2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношения (3) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_r' &= \sigma' + 2B \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z \partial r} \right) + (B-A) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z \partial r}, \\ \sigma_\theta' &= \sigma' + 2B \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) + (B-A) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z \partial r}, \\ \sigma_z' &= \sigma' + 2A \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z \partial r}, & \tau_{rz}' &= 2B \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial r^2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_r'}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}'}{\partial z} + \frac{\sigma_r' - \sigma_\theta'}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}'}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z'}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}'}{r} = 0. \quad (7)$$

Используя соотношения (6) и уравнения равновесия (7) получим уравнение для определения функции φ'

$$\frac{\partial^4 \varphi'}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \varphi'}{\partial r^3} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial \varphi'}{\partial r} +$$

$$+ \frac{(3A - B)}{B} \frac{\partial^4 \varphi'}{\partial r^2 \partial z^2} - \frac{(3A - B)}{B} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi'}{\partial z^2 \partial r} + \frac{\partial^4 \varphi'}{\partial z^4} = 0. \quad (8)$$

В работах [5, 6] решение уравнения (8) рассмотрено в полиномах. В данной работе рассмотрим решение уравнения (8) в виде:

$$\varphi'(r, z) = \varphi(r) \sin \nu z. \quad (9)$$

Тогда из (8) и (9), получим

$$\frac{d^4 \varphi}{dr^4} - \frac{2}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} + \left(\frac{3}{r^2} - \frac{3A - B}{B} \nu^2 \right) \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \left(-\frac{3}{r^3} + \frac{3A - B}{B} \frac{\nu^2}{r} \right) \frac{d\varphi}{dr} + \nu^4 \varphi = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) можно записать следующим образом

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \mu^2 \right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \bar{\mu}^2 \varphi \right) = 0, \quad (11)$$

где

$$\mu^2 = \frac{\nu^2}{2B} \left[(B - 3A) + i\sqrt{3(B - A)(B + 3A)} \right],$$

$$\bar{\mu}^2 = \frac{\nu^2}{2B} \left[(B - 3A) - i\sqrt{3(B - A)(B + 3A)} \right] \quad (12)$$

Общим решением уравнения (11) является сумма решений уравнений

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\varphi_1}{dr} + \mu^2 \varphi_1 = 0, \quad \frac{d^2 \varphi_2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\varphi_2}{dr} + \bar{\mu}^2 \varphi_2 = 0. \quad (13)$$

Подстановками

$$\varphi_1(r) = rQ_1(\mu r), \quad \varphi_2 = rQ_2(\bar{\mu}r) \quad (14)$$

из (11) получаем уравнения

$$\mu^2 r^2 Q_1'' + \mu r Q_1' + (\mu^2 r^2 - 1) Q_1 = 0, \quad \bar{\mu}^2 r^2 Q_2'' + \bar{\mu} r Q_2' + (\bar{\mu}^2 r^2 - 1) Q_2 = 0, \quad (15)$$

Общие интегралы уравнений (15) являются линейными комбинациями функций Бесселя и Неймана первого порядка. Функции Неймана обращаются в бесконечность при $r = 0$ и в решении они должны отсутствовать. Для того, чтобы $\varphi'(r, z)$ не содержала мнимых членов возьмем в ее выражении произвольные постоянные сопряженными, то есть полагаем

$$\varphi'(r, z) = r [\bar{C}\mu I_1(\mu r) + C\bar{\mu} I_1(\bar{\mu}r)] \sin \nu z, \quad (16)$$

где $I_1(\mu r)$ – функция Бесселя первого порядка.

Согласно (4), (5), (6) и (9) получим

$$u'_r = -\frac{\nu}{r} \varphi \cos \nu z, \quad u'_z = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \sin \nu z, \quad e'_r = \frac{\nu}{r} \left[\frac{1}{r} \varphi - \frac{d\varphi}{dr} \right] \cos \nu z, \quad e'_\theta = -\frac{\nu}{r^2} \varphi \cos \nu z,$$

$$e'_{rz} = \frac{\nu}{r} \frac{d\varphi}{dr} \cos \nu z, \quad e'_{rz} = \frac{1}{2r} \left[\frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \nu^2 \varphi \right] \sin \nu z,$$

$$\sigma'_r = \left[B \frac{1}{\nu r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - B \frac{1}{\nu r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \left(B \frac{1}{\nu r^3} - 3A \frac{\nu}{r} \right) \frac{d\varphi}{dr} + 2B \frac{\nu}{r^2} \varphi \right] \cos \nu z,$$

$$\begin{aligned}
\sigma'_\theta &= \left\{ B \frac{1}{\nu r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - B \frac{1}{\nu r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \left[(2B - 3A) \frac{\nu}{r} + B \frac{1}{\nu r^3} \right] \frac{d\varphi}{dr} - 2B \frac{\nu}{r^2} \varphi \right\} \cos \nu z, \\
\sigma'_z &= \left[B \frac{1}{\nu r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - B \frac{1}{\nu r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + B \left(\frac{\nu}{r} + \frac{1}{\nu r^3} \right) \frac{d\varphi}{dr} \right] \cos \nu z, \\
\tau'_{rz} &= B \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \nu^2 \varphi \right) \sin \nu z.
\end{aligned} \tag{17}$$

Сложим уравнения (13)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2 \varphi_1}{dr^2} + \frac{d^2 \varphi_2}{dr^2} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = -\mu^2 \varphi_1 - \bar{\mu}^2 \varphi_2, \\
\frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} &= -\frac{\nu^2}{2B} \left[(B - 3A) \varphi_1 + i\sqrt{3(B - A)(B + 3A)} \varphi_1 + \right. \\
&\left. + (B - 3A) \varphi_2 - i\sqrt{3(B - A)(B + 3A)} \varphi_2 \right], \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2.
\end{aligned} \tag{18}$$

Уравнение (18) запишем в виде

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = -\nu^2 \left(e^{i\alpha} \varphi_1 + e^{-i\alpha} \varphi_2 \right), \quad \alpha = \arctg \frac{\sqrt{3(B - A)(B + 3A)}}{(B - 3A)}. \tag{19}$$

Продифференцировав равенства (13) и сложив, получаем

$$\frac{d^3 \varphi}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d\varphi}{dr} = -\nu^2 \left(e^{i\alpha} \frac{d\varphi_1}{dr} + e^{-i\alpha} \frac{d\varphi_2}{dr} \right). \tag{20}$$

С учетом (19), (20) соотношения (16) принимают вид

$$\begin{aligned}
u'_r &= -\frac{\nu}{r} (\varphi_1 + \varphi_2) \cos \nu z, \quad u'_z = \frac{1}{r} \left(\frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{d\varphi_2}{dr} \right) \sin \nu z, \\
e'_r &= \frac{\nu}{r} \left[\frac{1}{r} (\varphi_1 + \varphi_2) - \left(\frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{d\varphi_2}{dr} \right) \right] \cos \nu z, \quad e'_\theta = -\nu (\varphi_1 + \varphi_2) \cos \nu z, \\
e'_z &= \frac{\nu}{r} \left(\frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{d\varphi_2}{dr} \right) \cos \nu z, \quad e'_{rz} = \frac{\nu^2}{2r} \left[(1 - e^{i\alpha}) \varphi_1 + (1 - e^{-i\alpha}) \varphi_2 \right] \sin \nu z, \\
\sigma'_r &= \frac{\nu}{r} \left[2B \frac{1}{r} (\varphi_1 + \varphi_2) - (3A + B e^{i\alpha}) \frac{d\varphi_1}{dr} - (3A + B e^{-i\alpha}) \frac{d\varphi_2}{dr} \right] \cos \nu z, \\
\sigma'_\theta &= \frac{\nu}{r} \left\{ [(2B - 3A) - B e^{i\alpha}] \frac{d\varphi_1}{dr} + [(2B - 3B) - B e^{-i\alpha}] \frac{d\varphi_2}{dr} - \right. \\
&\left. - 2B \frac{1}{r} (\varphi_1 + \varphi_2) \right\} \cos \nu z, \quad \sigma'_z = B \frac{\nu}{r} \left[(1 - e^{i\alpha}) \frac{d\varphi_1}{dr} + (1 - e^{-i\alpha}) \frac{d\varphi_2}{dr} \right] \cos \nu z, \\
\tau'_{rz} &= B \frac{\nu^2}{r} \left((1 - e^{i\alpha}) \varphi_1 + (1 - e^{-i\alpha}) \varphi_2 \right) \sin \nu z,
\end{aligned} \tag{21}$$

где $\varphi_1 = \bar{C} \mu r I_1(\mu r)$, $\varphi_2 = C \bar{\mu} r I_1(\bar{\mu} r)$.

$$\frac{d\varphi_1}{dr} = \bar{C} \mu^2 r I_0(\mu r), \quad \frac{d\varphi_2}{dr} = C \bar{\mu}^2 r I_0(\bar{\mu} r)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Пластичность. Москва: Гостехиздат, 1948. 376 с.
- [2] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
- [3] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 704 с.
- [4] Ивлеев Д. Д., Михайлова М. В., Петров Н. И. О полиномиальных решениях линеаризованных уравнений теории малых упругопластических деформаций в полярных координатах // Известия ИТА ЧР. 1996-1997. № 3(4)-2(7). С. 64–69.
- [5] Петров Н. И. Полиномиальное решение линеаризованных задач осесимметричного состояния в теории малых упругопластических деформаций // Известия ИТА ЧР. 1996-1997. № 3(4)-2(7). С. 70–71.
- [6] Петров Н. И. Решение линеаризованных задач осесимметричного состояния в теории малых упругопластических деформаций в полиномах // Фундаментальные и прикладные исследования в области естественных и технических наук. Труды международной научно-практической конференции. Белгород: Агентство перспективных научных исследований (АПНИ), 2018.

N. I. Petrov

**ON THE SOLUTION OF LINEARIZED EQUATIONS OF THE THEORY OF
SMALL ELASTOPLASTIC DEFORMATIONS IN THE CASE OF AN
AXISYMMETRIC PROBLEM**

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. We considers the solution of the linearized equations of the theory of small elastoplastic deformations in the case of axisymmetric problems. It is assumed that in the initial state there is a simple stretching. In the first approximation, the relations for the components of displacements, strains and stresses are obtained. Solutions are expressed in terms of the Bessel functions of zero and first order.

Keywords: linearization, tension, stress, strain, Bessel function.

REFERENCE

- [1] Ilyushin A. A. Plasticity. Moscow: Gostekhizdat, 1948. 376 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. Moscow: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian).
- [3] Ishlinsky A. Y., Ivlev D. D. Mathematical theory of plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian).
- [4] Ivlev D. D., Mikhailova M. V., Petrov N. I. On Polynomial soluthions of the linearized equatons of the theory of small elastoplastic strains in polar coordinates // Izvestia ITA ChR. 1996-1997. no. 3 (4)- 2 (7). P. 64–69. (in Russian).
- [5] Petrov N. I. Polynomial soluthions of the linearized equatons of linearized problems of an axisymmetric state in the theory of small elastoplastic deformations // Izvestia ITA ChR. 1996-1997. no. 3 (4)- 2 (7). P. 70–71. (in Russian).
- [6] Petrov N. I. The solution of linearized problems of an axisymmetric state in the theory of small elastoplastic deformations in polynomials // Materials of the international scientific-practical conference "Fundamental and Applied Research in the Field of Natural and Technical Sciences". Belgorod: Agency for Advanced Research (APNI), 2018. (in Russian).

Petrov Nikolay Iluich, Candidate Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of general physics, Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

А. В. Ткачева, С. Г. Жилин, Е. Е. Абашкин, О. Н. Комаров

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗОНЕ ТЕРМИЧЕСКОГО ВЛИЯНИЯ НЕРАЗЪЕМНОГО СОЕДИНЕНИЯ СТАЛЬНЫХ ПРОТЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Представлена усовершенствованная математическая модель расчета остаточных напряжений в материале, формируемых в результате теплового воздействия в процессах автоматической сварки под слоем флюса на стык протяженных стальных элементов. Модель содержит параметры вязкости и деформационного упрочнения в критерии пластического течения. Она основана на методе численного исследования процесса наплавки, заключающегося в решении задачи теплопроводности и механической задачи, предполагающем, что материал пластины сплошной и деформируется упругопластически. Постановка тепловой задачи при моделировании процесса деформирования в зоне термического влияния рассматривается в одномерном случае, то есть с пренебрежением краевыми эффектами на концах длинных пластин. В математической формулировке задачи считали длину сопрягаемых пластин бесконечно большой, а ширину одинаковой. Работоспособность расчетной математической модели подтверждается сопоставимостью экспериментальных значений с полученными в результате расчетов.

Ключевые слова: упругость, пластичность, упрочнение, вязкость, температурные напряжения, фазовые переходы, зона термического влияния

DOI: 10.26293/chgpu.2019.41.3.004

УДК: 539.374+ 539.224

© Ткачева А. В., Жилин С. Г., Абашкин Е. Е., Комаров О. Н., 2019

Ткачева Анастасия Валерьевна

e-mail: 4nansi4@mail.ru, старший научный сотрудник, кандидат физ.-мат. наук, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия,

Жилин Сергей Геннадьевич

e-mail: zhilin@imim.ru, ведущий научный сотрудник, кандидат технических наук, доцент, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия,

Абашкин Евгений Евгеньевич

e-mail: abashkine@mail.ru, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия,

Комаров Олег Николаевич

e-mail: olegnikolaevitsch@rambler.ru, Врио директора института, ведущий научный сотрудник, кандидат технических наук, доцент, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

1. Введение.

Важным критерием оценки качества металлоконструкций является их эксплуатационная прочность. Высокие механические характеристики неразъемных соединений металлоконструкций, в значительной степени определяемые остаточными напряжениями, формируются, как правило, в процессе локального оплавления и последующего охлаждения зоны стыка соединяемых элементов в результате сварки. Наиболее распространенным способом получения неразъемных соединений является процесс автоматической сварки под слоем флюса, обеспечивающий равномерное протекание теплофизических явлений в сварочной ванне и ее защиту от взаимодействия с окружающей средой. Неразъемное соединение в таком процессе получают при помощи непрерывного электрода, выполненного в виде проволоки. На формирование материала стыковой зоны оказывает влияние ряд факторов: режимы теплового воздействия (тепловая мощность и скорость перемещения электрода), материалы проволоки (порошковой и сплошного сечения), флюса и т.д. Сложность в прогнозировании качественных характеристик материала зоны термического влияния на всем протяжении стыка определяет актуальность поиска расчетных вариантов формирования картины остаточных напряжений такой зоны.

Термомеханику процессов, происходящих при формировании неразъемного соединения сваркой, рассматривали известные советские и российские ученые: Рыкалин Н.Н., Болдырев А.М., Алешин П.А.. Попытка объяснить остаточные напряжения и деформации в зоне сварного шва вылилась в теорию сварочных процессов, которая описывает со стороны технической направленности – режимы, типы, механизмы сварки [1-3], со стороны исследовательской направленности – температурные поля, фазовые переходы, остаточные деформации и напряжения [4-7]. Эволюция представлений о процессах теплового воздействия на стыковую зону привела к необходимости считать материал сборки упругопластическим. Такой подход позволяет количественно и качественно оценить опытно наблюдаемое явление формирования полей остаточных напряжений в околошовной зоне, влияние которых на качество сборки преимущественно отрицательное. Область шва, теплоизолированного шлаком, традиционно появляющимся при сварке имеет повышенные теплоёмкостные и теплоизолирующие свойства, а значит имеет место проявление вязких свойств металла. Таким образом, наряду с упругими и пластическими свойствами металла математическая модель обязана учитывать и вязкие его свойства.

Построение обобщенной всеобъемлющей физико-механической модели сварочного процесса опирающейся на техническую и исследовательскую направленность является основной задачей инженера исследователя. Многофакторность процессов сварки определяет необходимость опытного подтверждения результатов математического моделирования. Таким образом, целью исследований является разработка математической модели распределения остаточных напряжений в зоне термического влияния неразъемного соединения стальных протяженных элементов.

Проверка результатов математического моделирования возможна при использовании высокоточного экспериментального оборудования, благодаря которому произведена регистрация остаточных напряжений в зоне сварного шва. Экспериментальные данные сопоставлены с рассчитанными напряжениями, полученными в ходе ранее

Поступила 04.05.2019

Работа выполнена в рамках государственного задания № 075-00414-19-00.

проводимых численных экспериментов [8-10], построенных на упруго пластической модели пластины. Натурными испытаниями установлено, что в материале сварного шва предел текучести повышается с увеличением ударной вязкости, что предопределило появление варианта построения новой математической модели, учитывающей упрочнение (эффект Баушингера) и вязкость, возникающие при пластическом течении.

В настоящей работе строится одномерная математическая модель сварки, результаты которой подтверждают экспериментальные данные о полученных остаточных напряжениях на поверхности сварной пластины.

2. Основы математической модели.

Рассмотрим в декартовой системе координат x, y, z стальную пластину шириной S . Длину пластин считаем бесконечно большой, чтобы иметь одномерную задачу теплопроводности. На краю пластины происходит быстрый разогрев со скоростью b так, что

$$T|_{x=0} = bt \quad (1)$$

где T – абсолютная температура, t – время. На другой границе считаем отток тепла из-за незначительности граничной кромки пренебрежительно малым

$$T_{,x}|_{x=S} = 0 \quad (2)$$

Здесь индексом после запятой обозначена производная по данной пространственной переменной. Условие (2) означает отсутствие теплового потока через границу $x = S$. Уравнение теплопроводности запишем в виде

$$T_{,t} = aT_{,xx} - \psi \left(1 - \psi_* \psi^{-1} e^{-\gamma x^2}\right) (T - T_0) \quad (3)$$

В (3) a – коэффициент температуропроводности. Последнее слагаемое в (3) задает отток тепла в окружающую среду. Постоянные ψ, ψ_* и γ задают интенсивность потери тепла в точке с координатой x, T_0 – комнатная температура. Выбор функции оттока тепла в (3) связан с теплоизоляционными способностями флюса. Постоянные позволяют приблизить теплоизоляционные свойства к полученным в ходе натурального эксперимента. Краевая задача для уравнения теплопроводности (3) с граничными условиями (1) и (2) далее решается численно. Проведение расчетов по конечно – разностному аналогу данной задачи не вызывает затруднений. В качестве начального условия краевой задачи принимаем $T(x, 0) = T_0$, где T_0 – комнатная температура.

Предполагаем деформации малыми, складываемыми из обратимых e_{ij}^e и необратимых e_{ij}^p деформаций

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

u_i – компоненты вектора перемещений ($i = 1, 2, 3$); В начальный момент времени полагаем, что необратимых деформаций в пластине нет. Зависимость деформации e_{ij}^e , напряжения σ_{ij} и температуры T запишем законом Дюамеля–Неймана.

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - 3\alpha K (T - T_0)) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e \quad (5)$$

где α – коэффициент линейного расширения, $\lambda, \mu, K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – упругие модули, δ_{ij} – компоненты единичного тензора, составленного из символов Кронекера.

Необратимые деформации начнут расти, когда напряженное состояние достигнет поверхности нагружения (условия пластического течения).

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{de_{ij}^p}{dt} = \zeta \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \zeta > 0 \quad (6)$$

где $f(\sigma_{ij}) = 0$ – поверхность нагружения в пространстве напряжений. В качестве поверхности нагружения положим

$$f(\sigma_{ij}) = \max \left| \sigma_i - \eta \varepsilon_{ij}^p - c e_{ij}^p - \sigma \right| - \frac{4}{3} k; \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{jj}; \quad \zeta > 0 \quad (7)$$

k – предел текучести, η – коэффициент вязкости и c – коэффициент упрочнения. Выбор (7) объясняется тем, что, как показано в [9, 10], при выборе в качестве условия пластического течения максимальных касательных напряжений (критерий Треска–Сен-Венана) краевая задача, подобная той, что будет рассмотрена, может быть некорректной.

Замыкает описанную систему уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (8)$$

Поскольку процесс получения неразъемного соединения сваркой сопровождается высокой температурой в зоне локального теплового воздействия, то зависимостями упругих модулей, предела текучести, коэффициента вязкости от температуры пренебрегать нельзя [11-13]. Поэтому положим, что

$$\begin{aligned} k(T) &= k_0(\tau)^2; \\ \eta(T) &= \eta_0(1 - \tau) \\ E(T) &= E_p - (E_p - E_0)\tau; \\ v(T) &= 0.5 - (0.5 - v_0)\tau; \\ \lambda &= \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+v)}; \quad \tau = \frac{T_p - T}{T_p - T_0} \end{aligned} \quad (9)$$

В (6) E , v – модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно, E_p – значения модуля Юнга при температуре плавления T_p . Если бы в материале свариваемых пластин не происходили структурные изменения, то зависимости (9) были бы справедливы как при активном процессе нагревания, так и при остывании и разгрузке. С целью учета возможных фазовых превращений будем считать, что упругие модули E и v при остывании не меняются. Через k_0 в (9) обозначим предел текучести материала при комнатной температуре T_0 , η_0 – коэффициент вязкости при T_0 .

Для конкретного случая $\sigma_z = 0$ и $e_y = 0$ уравнения (5) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_E &= (4\mu(\lambda + \mu)u_{x,x} - 6K\mu\alpha(T - T_0))(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_y &= (2\mu\lambda u_{x,x} - 6K\mu\alpha(T - T_0))(\lambda + 2\mu)^{-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

Из единственного нетривиального уравнения равновесия $\sigma_{x,x} = 0$ и (8), следует

$$u_x = \frac{3}{2} \int_0^x \alpha(T(\rho) - T_0) K(\rho) \gamma_1(\rho) d\rho + \frac{C_1}{4} \int_0^x \gamma_1(\rho) \gamma_2(\rho) \mu(\rho)^{-1} d\rho + C_2 \quad (11)$$

$$\gamma_1(\rho) = (\lambda(\rho) + \mu(\rho))^{-1}; \quad \gamma_2(\rho) = (\lambda(\rho) + 2\mu(\rho)),$$

$$\sigma_x = C_1; \quad \sigma_y = \left(\frac{\lambda}{2} C_1 - 3\alpha\mu K(T - T_0) \right) (\lambda + \mu)^{-1};$$

$$\sigma_z = 0; C_1 = -\frac{6 \int_0^s \alpha (T(\rho) - T_0) K(\rho) \gamma_1(\rho) d\rho}{\int_0^s \mu(\rho)^{-1} \gamma_1(\rho) \gamma_2(\rho) d\rho}; C_2 = 0$$

в которых постоянные интегрирования C_1 и C_2 являются функциями температуры и, следовательно, времени. Называя C_1 и C_2 постоянными интегрирования, подразумеваем только, что они не зависят от пространственной координаты. Для их определения в каждый момент времени следует воспользоваться рассмотренными выше граничными условиями ($u_x|_{x=0} = 0$; $u_x|_{x=s} = 0$). При нагревании напряжения растут по абсолютной величине и в итоге могут достичь одной из поверхностей нагружения.

3. Пластическое течение.

С ростом температуры пластины на линии $x = 0$ выполнится условие $(\sigma_x - c e_x^p - \eta \varepsilon_x^p) + (\sigma_z - c e_z^p - \eta \varepsilon_z^p) - 2(\sigma_y - c e_y^p - \eta \varepsilon_y^p) = 4k$; здесь зарождается пластическое течение. Следствие из закона Дюамеля-Неймана (10) следует переписать

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{x,x} - e_x^p) + 2\mu\lambda(-e_y^p) - 6K\mu\alpha(T - T_0))(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_y &= (2\mu\lambda(u_{x,x} - e_x^p) + 4\mu(\lambda + \mu)(-e_y^p) - 6K\mu\alpha(T - T_0))(\lambda + 2\mu)^{-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

Из ассоциированного закона пластического течения находим $\varepsilon_x^p = \varepsilon_z^p = \zeta$, $\varepsilon_y^p = -2\zeta$, $e_x^p = e_z^p = \zeta\tau + \tilde{e}_x^p$, $e_y^p = -2\zeta\tau + \tilde{e}_y^p$. Слагаемые $\zeta\tau$ являются приращением необратимой деформации \tilde{e}_x^p , существовавшей или зародившейся на предыдущем временном шаге, $\tau = \Delta t$ шаг по времени. Из (12) и уравнения равновесия $\sigma_{x,x} = 0$ находим

$$\begin{aligned} u_x &= \int_0^x f_1(\rho) d\rho + C_1 \int_0^x f_2(\rho) d\rho + C_3; \quad C_3 = 0; \\ \sigma_x &= C_1; \quad \sigma_y = \int_0^x f_3(\rho) d\rho + C_1 \int_0^x f_4(\rho) d\rho; \\ e_x^p &= e_z^p = \zeta\tau + \tilde{e}_x^p; \quad e_y^p = -2\zeta\tau + \tilde{e}_y^p. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= (1.5K(\eta + (A + 2\mu)\tau)\alpha(T(\rho) - T_0) + \mu\eta\tilde{e}_x^p - 2/3\mu\tau k) \times \\ &\quad \times ((\eta + \tau c)(\lambda + \mu) + 2\mu K\tau)^{-1}; \\ f_2 &= (4\mu)^{-1} + 0,25(\eta + (A + 2\mu)\tau)((\eta + \tau c)(\lambda + \mu) + 2\mu K\tau)^{-1}; \\ f_3 &= (-3\mu K\alpha(T(\rho) - T_0)(\eta + c\tau) + 6\mu K\eta\tilde{e}_E^p - 4\mu Kk\tau)((\eta + \tau c)(\lambda + \mu) + 2\mu K\tau)^{-1}; \\ f_4 &= (0,5\lambda\eta + (K\mu + 0,5\lambda c)\tau)((\eta + \tau c)(\lambda + \mu) + 2\mu K\tau)^{-1}; \\ \zeta &= (6^{-1}C_1\mu + K\mu\alpha(T(\rho) - T_0) - \tilde{e}_x^p(2\mu K + (\lambda + \mu)c) - 2/3(\lambda + \mu)k) \times \\ &\quad \times ((\eta + \tau c)(\lambda + \mu) + 2\mu K\tau)^{-1} \end{aligned}$$

Коэффициенты интегрирования C_1 , C_2 , C_3 находятся из граничных условий, моделирующих равенство перемещений на упругопластической границе и ($u_x|_{x=0} = 0$; $u_x|_{x=s} = 0$). Область пластического течения будет расти пока идет процесс нагревания.

4. Разгрузка.

Отведение источника тепла приводит к образованию разгружающей упругопластической границы материала пластины (рис.1). В условиях присутствия накопленных и со временем неизменяющихся необратимых деформаций p_x и p_y соотношения закона Дюамеля-Неймана вместе с уравнением равновесия позволяют записать решение в области данного обратимого деформирования в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_1, \quad \sigma_y = -3K\mu\alpha\gamma_1\alpha(T(\rho) - T_0) + p_y\gamma_1 + 0.5\gamma_1C_1 \\ u_x &= \frac{3}{2} \int_0^x \alpha(T(\rho) - T_0) K(\rho) \gamma_1(\rho) d\rho + \frac{C_1}{4} \int_0^x \gamma_1(\rho) \gamma_2(\rho) \mu(\rho)^{-1} d\rho + C_4 + \\ &\quad + 0.5 \int_0^x \lambda(\rho) \gamma_1(\rho) p_y(\rho) d\rho + \int_0^x p_x(\rho) d\rho \end{aligned} \quad (14)$$

5. Повторное пластическое течение.

В некоторый последующий момент времени на линии $x = 0$ выполнится условие пластичности $2(\sigma_y - Ae_y^p - \eta\varepsilon_y^p) - (\sigma_x - Ae_x^p - \eta\varepsilon_x^p) - (\sigma_z - Ae_z^p - \eta\varepsilon_z^p) = 4k$. Выполнение условия пластичности Ишлинского-Ивлева на границе $x = 0$ приводит к развитию новой области пластического течения. Следуя уравнению равновесия $\sigma_{x,x} = 0$, зависимостям закона Дюамеля-Неймана и ассоциированному закону пластического течения для напряжений, перемещений и необратимых деформаций получаем:

$$\begin{aligned} u_x &= \int_0^x f_1(\rho) d\rho + C_1 \int_0^x f_2(\rho) d\rho + C_5 \\ \sigma_x &= C_1; \quad \sigma_y = \int_0^x f_3(\rho) d\rho + C_1 \int_0^x f_4(\rho) d\rho; \\ e_x^p &= e_z^p = \zeta\tau + \tilde{e}_x^p; \quad e_y^p = -2\zeta\tau + \tilde{e}_y^p \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= (1.5K(\eta + (A + 2\mu)\tau)\alpha(T(\rho) - T_0) + \mu\eta\tilde{e}_x^p - 2/3\mu\tau k) \times \\ &\quad \times ((\eta + \tau c)(\lambda + \mu) + 2\mu K\tau)^{-1}; \\ f_2 &= (4\mu)^{-1} + 0,25(\eta + (A + 2\mu)\tau)((\eta + \tau c)(\lambda + \mu) + 2\mu K\tau)^{-1}; \\ f_3 &= (-3\mu K\alpha(T(\rho) - T_0)(\eta + \tau c) + 6\mu K\eta\tilde{e}_E^p - 4\mu Kk\tau)\tau((\eta + \tau c)(\lambda + \mu) + 2\mu K\tau)^{-1}; \\ f_4 &= (0,5\lambda\eta + (K\mu + 0,5\lambda A)\tau)((\eta + \tau c)(\lambda + \mu) + 2\mu K\tau)^{-1}; \\ \zeta &= (6^{-1}C_1\mu + K\mu\alpha(T(\rho) - T_0) - \tilde{e}_x^p(2\mu K + (\lambda + \mu)c) - 2/3(\lambda + \mu)k) \times \\ &\quad \times ((\eta + \tau c)(\lambda + \mu) + 2\mu K\tau)^{-1} \end{aligned}$$

6. Остаточные напряжения.

В ходе остывания материала пластины на линии $x = 0$ образуется разгружающая упругопластическая граница $x = m_2(t)$, которая, продвигаясь, достигает границы $x = n_2(t)$. По мере охлаждения пластины температурный градиент перестает существовать, происходит разгрузка. Остаточные напряжения и перемещения в материале закрепленной пластины определяются из соотношений.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_1, \quad \sigma_y = 0.5\lambda C_1 g^{-1} - 3K\mu g^{-1} p_y, \\ u_x &= C_1 \int_0^x w(\rho) x (4\mu(\rho) g(\rho))^{-1} d\rho + \int_0^x p_x(\rho) d\rho + 0.5 \int_0^x \lambda(\rho) g^{-1}(\rho) p_y(\rho) d\rho, \\ C_1 &= \left(\int_0^S p_x(\rho) d\rho + 0.5 \int_0^S \lambda(\rho) g^{-1}(\rho) p_y(\rho) d\rho \right) \left(\int_0^S w(\rho) x (4\mu(\rho) g(\rho))^{-1} d\rho \right)^{-1}. \\ g &= \lambda + \mu, \quad w = \lambda + 2\mu \end{aligned}$$

На рисунке 2 изображено распределение остаточных напряжений в материале стальной пластины (Ст3). Кривая 1 изображает остаточное напряжение σ_y ($\sigma_x = 0.0987k_0$), где $\eta = 0$, $c = 0$. Кривая 2 – σ_y ($\sigma_x = 0,0624k_0$), где $\eta = 0$, $c = 80$. Кривая 3 – σ_y ($\sigma_x = 0,008k_0$), где $\eta = 8$, $c = 0$ (η (Пас)). Кривая 4 – σ_y ($\sigma_x = 0,0012k_0$), где $\eta = 8$, $c = 80$ (Па).

Точки на поле графика отражают данные, полученные в результате натурального эксперимента с использованием метода рентгенодифрактометрии. Метод основан на определении межплоскостного расстояния между кристаллическими решетками с помощью измерения угла отражения луча. Исследование проводилось на анализаторе остаточных напряжений RIGAKU MSF-3M.

Как видно из рисунка 2 остаточные напряжения, полученные в результате натурального эксперимента, сопоставимы с остаточными напряжениями, полученными в результате математического моделирования. Основной проблемой в расчетах является определение коэффициентов η и c , так как они различны для каждого материала. Задача их поиска существенно упрощается ввиду наличия экспериментальных данных.

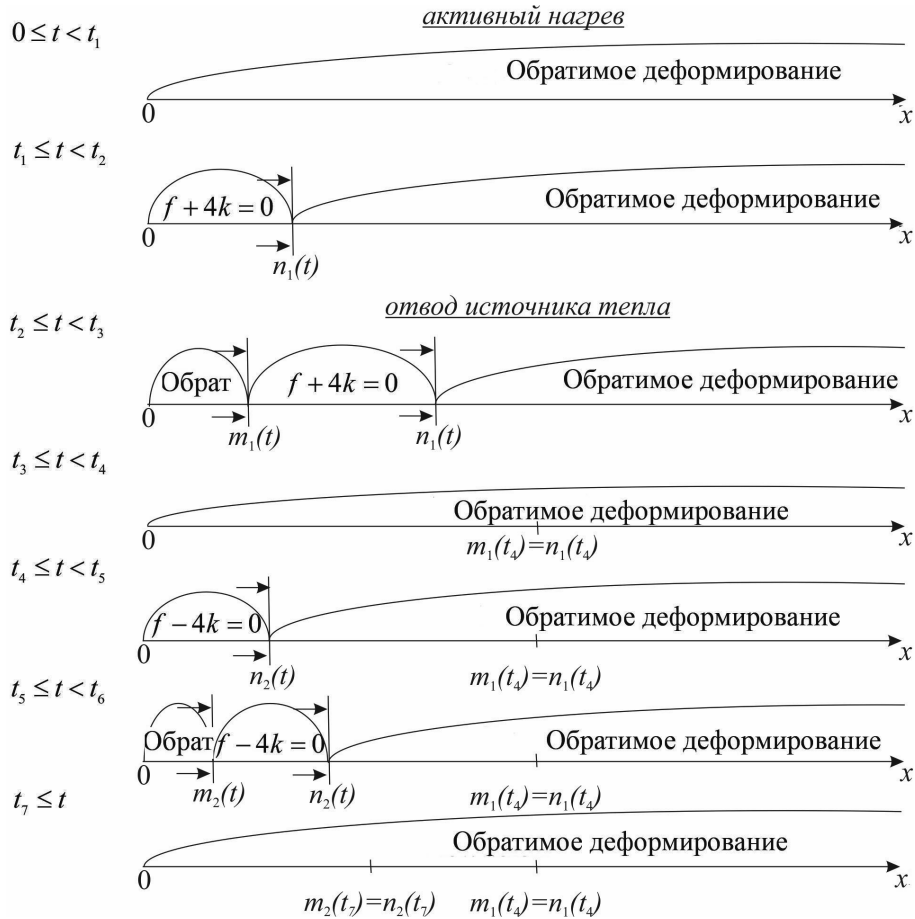


Рис. 1. Схема деформирования пластины

Описанная в этой работе математическая модель сварочного процесса, объясняет повышение значений предела текучести неразъемного соединения, полученного автоматической сваркой под флюсом. Упрочнение влияет на предел текучести. Это обстоятельство позволяет сделать вывод, что предел текучести возрастет или уменьшится в зависимости от знака выражения cp_{ii} . Так, экспериментально подтверждено, что предел текучести увеличился и стал равен $k = 1.07k_0$.

Расчеты последовательными шагами по времени убедительно показали, что во всех случаях возникает повторное (обратное) пластическое течение, в процессе которого формируются растягивающие остаточные напряжения и повышается предел текучести металла околошовной зоны, что и регистрируется последующими инструментальными измерениями на опытных образцах.

Таким образом, сопоставимость экспериментальных значений с теоретическими пределами отклонений подтверждает работоспособность расчетной математической модели. Невозможным представляется упрощение данной модели в предположении,

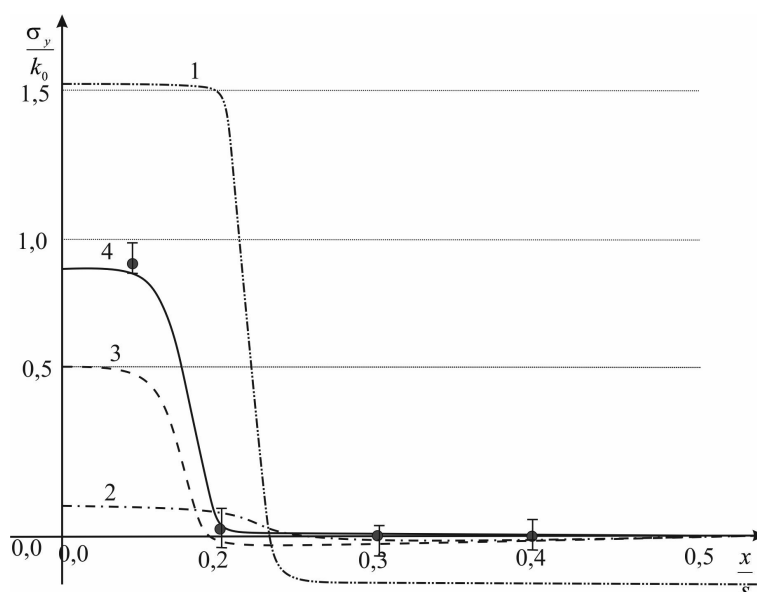


Рис. 2. Распределение остаточного напряжения в материале пластины.

что пластическое течение идеально или отток тепла от пластины по ее ширине постоянный. Теплоизоляция околошовной зоны, учет вязких свойств металла и его упрочнения в процессе необратимого деформирования задают итоговые механические свойства металла околошовной зоны и уровень остаточных напряжений в нем, что соответствует экспериментально полученным значениям.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сварка. Введение в специальность / В.А. Фролов, В.В. Пешков, А.Б. Коломенский [и др.]. М., 2004. 230 с.
- [2] Черепяхин А.А., Виноградов В.М., Шпунькин Н.Ф. Технология сварочных работ. Москва: Юрайт, 2017. 273 с.
- [3] Металлические конструкции. В 3 т. Т. 3 / под общ. ред. В.В. Кузнецова. М.: АСВ, 1999. 528 с.
- [4] Рыкалин Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке. М.: Машгиз, 1951. 295 с.
- [5] Прохоров Н.Н. Физические процессы в металлах при сварке. Т.2. Внутренние напряжения, деформации и фазовые превращения. М: Металлургия, 1976. 600 с.
- [6] Монфаред Ф.Х., Пантелеенко А.Ф. Математическое моделирование сварочных деформаций в тонких пластинах // Вестник БНТУ. 2011. № 5. С. 18–25.
- [7] Биленко Г.А., Моргунов Е.А., Коробов Ю.С. Компьютерное моделирование напряженного состояния сварного соединения из нержавеющей стали 03X18H9M3, выполненного многопроходной орбитальной сваркой // Сварка и диагностика : сборник докладов Международного форума, Екатеринбург, 25–27 ноября 2014 г. Екатеринбург : УрФУ, 2015. С. 35–41.
- [8] Абашкин Е.Е., Каинг М., Ткачева А.В. Температурные напряжения пластины // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4(30). С. 24–33.
- [9] Абашкин Е.Е., Жилин С.Г., Комаров О.Н., Ткачева А.В. Влияние теплового режима совместного электродугового и алюмотермического воздействия на формирование структуры и свойств наплавляемого металла // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. 2018. Т. 20. № 2. С. 62–74.

- [10] Абашкин Е.Е., Ткачева А.В., Щербатюк Г.А. Условие пластичности максимальных приведённых касательных напряжений в качестве средства расчётов эволюции плоских напряжённых состояний // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2018. Т. 1. № 2(34). С. 51–62.
- [11] Механические свойства редких металлов / ред. Л. Д. Соколов. М. : Metallurgia, 1972. 288 с.
- [12] Ершов В.И. Интенсификация формоизменяющих операций листовой штамповки Учебное пособие для ПТУ. М.: Высшая школа, 1989. 87 с.
- [13] Лихтман В.И., Ребиндер П.А., Карпенко Г.В. Влияние поверхностно-активной среды на процессы деформации металлов М.: Изд-во Академии наук СССР, 1954. 208 с.

A. V. Tkacheva, S. G. Zhilin, E. E. Abashkin, O. N. Komarov

DISTRIBUTION OF RESIDUAL STRESSES IN THE HEAT-AFFECTED ZONE OF PERMANENT CONNECTION OF STEEL EXTENDED ELEMENTS

Institute of Machine Science and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. An improved mathematical model is presented for calculating residual stresses in a material that are formed as a result of thermal effects in automatic welding processes under a layer of reflux at the junction of extended steel elements. The model contains the parameters of viscosity and strain hardening in the criteria of plastic flow. It is based on the methods of numerical investigation of the surfacing process, which assumes that the material of the plates is solid and is deformed elastoplastic. The formulation of a thermal problem in modeling the process of deformation in the heat-affected zone is possible in one case when there is a need for a regional effect at the ends of long plates. In the mathematical interpretation of the problem, the length of the mating plates is read infinitely large, and the width is the same. The efficiency of the computational mathematical model is confirmed by a comparable experimental value obtained as a result of calculations.

Keywords: elasticity, plasticity, hardening, viscosity, temperature stresses, phase transitions, heat-affected zone

REFERENCES

- [1] Welding. Introduction to specialty /V.A. Frolov, V.V. Peshkov, A.B. Kolomensky [et al]. M., 2004. 230 p. (in Russian).
- [2] Cherepakhin A.A., Vinogradov V.M., Spunkin N.F. Welding technology. Moscow: Yurayt, 2017. 273 p. (in Russian).
- [3] Metal Structures. Vol. 3/ Ed. V.V. Kuznetsov. M.: ASV, 1999. 528 p. (in Russian).
- [4] Rykalin N.N. Heat Process Calculations for Welding. M.: Mashgiz, 1951. 295 p. (in Russian).
- [5] Prokhorov N.N. Physical processes in metals during welding. Vol.2. Entrapment of stress, deformations and phase transformations. Metallurgy, 1976. 600 p. (in Russian).

Tkacheva Anastasia Valerevna, Senior Researcher, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk-on-Amur, Russia,

Zhilin Sergey Gennadievich, Leading Researcher, Candidate of Technical Sciences, assistant professor, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk-on-Amur, Russia,

Abashkin Evgeny Evgenievich, Junior Researcher, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk-on-Amur, Russia,

Komarov Oleg Nikolaevich, Acting Director, Candidate of Technical Sciences, assistant professor, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

-
- [6] Montfared F.H., Panteleenko A.F. Mathematical modeling of welding deformations in thin plates// Vestnik BNTU. 2011. No 5. pp. 18–25. (in Russian).
- [7] Bilenko G.A., Morgunov E.A., Korobov Y.S. Computer simulation of stress state of 03X18H9M3 stainless steel welded joint made by multi-pass orbital welding // Welding and diagnostics: collection of reports of the International Forum, Yekaterinburg, November 25-27, 2014. Yekaterinburg: Urfu, 2015. pp. 35–41. (in Russian).
- [8] Abashkin E.E., Kaing M., Tkacheva A.V. Temperature Stresses Plate// Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2016. № 4(30). pp. 24-33. (in Russian).
- [9] Abashkin E.E., Gilin S.G., Komarov O.N., Tkacheva A.V. The influence of the thermal regime of the joint electric arc and aluminothermic action on the formation of the structure and properties of the deposited metal //The Journal of Perm National Research Polytechnic University. Mechanical engineering, materials science. 2018. Vol. 20. No. 2. pp. 62–74. (in Russian).
- [10] Abashkin E.E., Tkacheva A.V., Scherbatyuk G.A. Condition of plasticity of maximum given tangential stresses as a means of calculations of evolution of flat stressed states//Scientists of the note of Komsomolsky-on-Amur state technical university. 2018. Vol. 1. No. 2(34). pp. 51–62. (in Russian).
- [11] Mechanical properties of rare metals /ed. L. D. Sokolov. Moscow: Metallurgy, 1972. 288 p. (in Russian).
- [12] V.I. Ershov Intensification of Forming Operations of Sheet Stamping Tutorial for STP. M.: Vysshaya shkola, 1989. 87 p. (in Russian).
- [13] Lichtman V.I., Rebinder P.A., Carpenko G.V. Influence of surface-active environment on metal deformation processes M.: Izd-vo Akademii nauk SSSR, 1954. 208 p. (in Russian).

Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко

ВСЕСТОРОННЕЕ ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ СЖАТИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

*Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,
г. Владивосток, Россия*

Аннотация. В данной работе в рамках модели малых деформаций приводится решение одномерной краевой задачи о деформировании материала с упругими, вязкими и пластическими свойствами в цилиндрическом слое под действием равномерного изменяющегося со временем давления, приложенного к его внутренней границе. Вязкие свойства среды учитываются на стадии деформирования, предваряющей пластическое течение. Рассчитаны обратимые и необратимые деформации, напряжения и перемещения. Установлены закономерности продвижения упругопластических границ в слое.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, пластичность, необратимые деформации.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.41.3.005

УДК: 539.37

Для обработки конструкционных материалов в технологической практике применяются различные методы. Одним из таких методов является метод холодной формовки в условиях ползучести [1]. В процессе обработки материалов могут возникать области пластического течения, вносящие большие изменения в этот процесс. На упругопластических границах, разделяющих области течения и области ползучести происходит смена механизмов накопления необратимых деформаций. На изучение таких механизмов направлена данная работа, в которой на примере одномерной краевой задачи о

© Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л., 2019

Ковтанюк Лариса Валентиновна

e-mail: lk@iasp.dvo.ru, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия.

Панченко Галина Леонидовна

e-mail: ranchenko.21@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, исполняющий обязанности старшего научного сотрудника, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00038).

Поступила 11.06.2019

деформировании цилиндрического слоя исследуются процессы интенсивного деформирования материала, когда накапливаемые им необратимые деформации могут быть как деформациями ползучести, так и пластичности.

1. Основные модельные соотношения. В математической модели малых деформаций полные деформации d_{ij} складываются из обратимой e_{ij} и необратимой p_{ij} составляющих

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (1)$$

Здесь u_i — компоненты вектора перемещений, x_i — пространственные координаты точки деформируемой среды.

Напряжения в среде определяются только через обратимые деформациями из закона Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (2)$$

в котором λ, μ — параметры Ламе.

Полагаем, что необратимые деформации p_{ij} накапливаются в материале непосредственно с начала процесса деформирования и могут быть как деформациями ползучести, так и пластическими деформациями. При описании поведения материала в условиях накопления им сначала деформаций ползучести, а затем пластических деформаций будем использовать модель [2, 3].

Диссипативный механизм деформирования свяжем только с вязкими и пластическими свойствами материалов. В областях, где напряженное состояние еще не достигло поверхности текучести, диссипативный механизм деформирования зададим в форме закона ползучести Нортона [4]

$$V(\sigma_{ij}) = B \Sigma^n (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \max |\sigma_i - \sigma_j|, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (3)$$

В данных соотношениях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений, ε_{ij}^v — скорости деформаций ползучести, B, n — заданные параметры ползучести материала.

При достижении напряженным состоянием поверхности текучести диссипативный механизм деформирования меняется: начинается пластическое течение. В качестве такой поверхности будем использовать условие пластичности Треска [5]

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k, \quad (4)$$

где ε_{ij}^p — компоненты тензора скоростей пластических деформаций, k — предел текучести. Связь скоростей пластических деформаций с напряжениями осуществляется ассоциированным законом пластического течения

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \xi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \xi_k \frac{\partial f^{(k)}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \xi > 0, \quad \xi_k > 0, \quad (5)$$

в котором первая формула соответствует грани условия пластичности (4), а вторая — ребру этого же условия.

Считаем, что накопленные к моменту начала пластического течения деформации ползучести являются начальными значениями для пластических деформаций.

2. Постановка задачи и ее решение до пластического течения. Пусть слой материала, ограниченный цилиндрическими поверхностями $r = r_0$ и $r = R$ ($R > r_0$),

нагружен равномерным давлением по его внутренней границе:

$$\sigma_{rr}|_{r=r_0} = -p(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad (6)$$

где $p(t)$ — известная возрастающая функция, σ_{rr} — радиальная компонента тензора напряжений в цилиндрической системе координат r, φ, z .

Согласно соотношениям (1) в рассматриваемом случае для отличных от нуля компонент тензора деформаций получим зависимости

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}. \quad (7)$$

В соотношениях (7) $u = u_r$ — единственная отличная от нуля компонента вектора перемещений.

Воспользовавшись законом Гука (2), выпишем не равные нулю компоненты тензора напряжений цилиндрического слоя

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)e_{rr} + \lambda e_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda + 2\mu)e_{\varphi\varphi} + \lambda e_{rr}, \quad \sigma_{zz} = \lambda(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}). \quad (8)$$

В рамках квазистатического приближения запишем уравнение равновесия в рассматриваемом случае

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \quad (9)$$

Соотношения (3) в данном случае примут вид

$$V = B(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^n, \quad \varepsilon_{rr}^v = \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} = -\varepsilon_{\varphi\varphi} = -\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} = -Bn(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^{n-1}, \quad (10)$$

$$\varepsilon_{rr}^v + \varepsilon_{\varphi\varphi}^v = 0, \quad p_{rr} + p_{\varphi\varphi} = 0.$$

Перепишем зависимости (7) следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = e_{rr} + e_{\varphi\varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} = e_{rr} - e_{\varphi\varphi} + 2p_{rr}. \quad (11)$$

Выразим из соотношений (8) обратимые деформации через напряжения

$$e_{rr} = \frac{(\lambda + 2\mu)\sigma_{rr} - \lambda\sigma_{\varphi\varphi}}{4\mu(\lambda + \mu)}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{(\lambda + 2\mu)\sigma_{\varphi\varphi} - \lambda\sigma_{rr}}{4\mu(\lambda + \mu)}. \quad (12)$$

Исключая обратимые деформации из уравнений (11) с помощью (12) и интегрируя полученные уравнения с использованием уравнения равновесия (9) и второго граничного условия (6), найдем

$$u = \frac{r\sigma_{rr}}{2(\lambda + \mu)} + \frac{c(t)}{r}, \quad \sigma_{rr} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{c(t)}{2} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \int_r^R \frac{p_{rr}}{r} dr \right), \quad (13)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{c(t)}{r^2} + p_{rr} \right).$$

Из второй зависимости (10) и третьего соотношения (13) получим интегрируемое дифференциальное уравнение для компоненты необратимых деформаций $p_{rr}(r, t) = -p_{\varphi\varphi}$

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial t} = -Bn \left(\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{c(t)}{r^2} + p_{rr} \right) \right)^{n-1}. \quad (14)$$

Используя первое граничное условие (6), из второй зависимости (13) найдем выражение для неизвестной функции интегрирования $c(t)$

$$c(t) = \frac{R^2 r_0^2}{r_0^2 - R^2} \left(2 \int_{r_0}^R \frac{p_{rr}}{r} dr - \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} p(t) \right). \quad (15)$$

Решение интегро-дифференциального уравнения (14) с начальным условием $p_{rr}(r, 0) = 0$ получено конечно-разностным методом с использованием составной формулы трапеций [6] для приближенного вычисления интеграла. Данный конечно-разностный метод ранее был успешно применен для решения краевой задачи о всестороннем гидростатическом сжатии сферического слоя [7].

По известным значениям напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ из зависимостей (12) найдем компоненты обратимых деформаций. Далее из третьего соотношения (8) вычислим компоненту напряжений σ_{zz} . Распределение перемещений по слою можно найти из первой формулы (13) или из второй зависимости (7):

$$u = r (e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi}). \quad (16)$$

3. Пластическое течение в цилиндрическом слое. Возрастание функции давления $p(t)$ приведет к тому что в некоторый момент времени $t = t_0$ на внутренней границе цилиндрического слоя $r = r_0$ выполнится условие пластичности (4). С этого момента времени от внутренней поверхности $r = r_0$ начинает развиваться область пластического течения $r_0 \leq r \leq m(t)$. При этом область $m(t) \leq r \leq R$ остается вязкоупругой областью, в которой имеются обратимые деформации и деформации ползучести. Таким образом, граница $r = m(t)$ является движущейся границей области пластического течения.

Условие пластичности Треска (4) в рассматриваемом случае примет вид

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = 2k. \quad (17)$$

Согласно второму граничному условию (6), а также соотношениям (7)-(10) и (16) в области $m(t) \leq r \leq R$ продолжают выполняться зависимости (12)-(14) и (15).

Интегрируя уравнение равновесия (9) с учетом (16) и первого граничного условия (6) в области пластического течения $r_0 \leq r \leq m(t)$, получим

$$\sigma_{rr} = 2k \ln \frac{r}{r_0} - p(t), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \left(1 + \ln \frac{r}{r_0} \right) - p(t). \quad (18)$$

Из условия непрерывности компоненты напряжения σ_{rr} на упругопластической границе $r = m(t)$ и соотношений (13) и (17) следует выражение для функции $c(t)$

$$c(t) = \frac{R^2 m^2}{m^2 - R^2} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \left(2k \ln \frac{m}{r_0} - p(t) \right) + 2 \int_m^R \frac{p_{rr}}{r} dr \right). \quad (19)$$

Из ассоциированного закона пластического течения (5) и условия пластичности (16) найдем

$$\varepsilon_{rr}^p = -\varepsilon_{\varphi\varphi}^p = -\xi, \quad \varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = 0, \quad p_{rr} + p_{\varphi\varphi} = 0. \quad (20)$$

Учитывая зависимости (17), (19), а также условие непрерывности необратимых деформаций на упругопластической границе $r = m(t)$, проинтегрируем уравнения (11) в области течения $r_0 \leq r \leq m(t)$ и, таким образом, получим

$$u = \frac{r}{2(\lambda + \mu)} \left(2k \ln \frac{r}{r_0} - p(t) \right) + \frac{c(t)}{r}, \quad p_{rr} = -p_{\varphi\varphi} = \frac{(\lambda + 2\mu)k}{2\mu(\lambda + \mu)} - \frac{c(t)}{r^2}. \quad (21)$$

Чтобы разрешить интегро-дифференциальное уравнение (14) в области вязкоупругого деформирования $m(t) \leq r \leq R$ относительно необратимых деформаций p_{rr} , к нему следует добавить уравнение для нахождения положения упругопластической границы $r = m(t)$ в каждый момент времени. Это уравнение следует из последнего соотношения (13) и условия $\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = 2k$ на этой границе:

$$\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{c(t)}{m^2(t)} + p_{rr}(m(t), t) \right) = 2k. \quad (22)$$

Уравнения (14) и (21) образуют систему уравнений относительно неизвестных функций $p_{rr}(r, t)$ в области вязкоупругого деформирования и $m(t)$. Для решения этой системы также использовался конечно-разностный метод с составной формулой трапеций.

Компоненты обратимых деформаций в области пластического течения $r_0 \leq r \leq m(t)$ вычисляются из зависимостей (12). Компонента напряжений σ_{zz} в обеих областях находится из последнего соотношения (8).

4. Пластическое течение в цилиндрическом слое при соответствии напряженного состояния ребру призмы Треска. В зависимости от свойств деформируемого материала в некоторый момент времени $t = t_1 > t_0$ на внутренней границе цилиндрического слоя напряженное состояние может достигнуть ребра призмы (4) в виде

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \sigma_{rr} + 2k. \quad (23)$$

Таким образом, с этого момента времени от границы $r = r_0$ начинает развиваться область пластического течения $r_0 \leq r \leq m_1(t)$, в которой выполняется условие (22). В области $m_1(t) \leq r \leq m(t)$ продолжается пластическое течение в соответствии с условием (16), а область $m(t) \leq r \leq R$ остается областью вязкоупругого деформирования.

В области $m(t) \leq r \leq R$ по-прежнему выполняются соотношения (12)-(14) и (15).

В области пластического течения $r_0 \leq r \leq m_1(t)$ интегрируя уравнение равновесия (9) с учетом (22) и первого граничного условия (6), найдем

$$\sigma_{rr} = 2k \ln \frac{r}{r_0} - p(t), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = 2k \left(1 + \ln \frac{r}{r_0} \right) - p(t). \quad (24)$$

Далее, интегрируя уравнение равновесия в области течения $m_1(t) \leq r \leq m(t)$ с учетом непрерывности напряжений на упругопластической границе $r = m_1(t)$, убедимся, что в этой области продолжают выполняться соотношения (17) и (20). Из непрерывности напряжений σ_{rr} на упругопластической границе $r = m(t)$ следует, что для функции $c(t)$ продолжает выполняться зависимость (18).

В области пластического течения $r_0 \leq r \leq m_1(t)$ из второй формулы (5) и условия пластического течения (22) найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^p &= -\xi_1 - \xi_2, & \varepsilon_{\varphi\varphi}^p &= \xi_1, & \varepsilon_{zz}^p &= \xi_2, \\ \varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p + \varepsilon_{zz}^p &= 0, & p_{rr} + p_{\varphi\varphi} + p_{zz} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Из (23) следует, что в области течения $r_0 \leq r \leq m_1(t)$ появляется третья не равная нулю компонента необратимых деформаций p_{zz} . Поэтому также начнет изменяться компонента обратимых деформаций e_{zz} , которая до этого равнялась нулю. При этом для компоненты полных деформаций d_{zz} будет выполняться соотношение

$$d_{zz} = e_{zz} + p_{zz} = 0. \quad (26)$$

Тогда из закона Гука (2) в области $r_0 \leq r \leq m_1(t)$ получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)e_{rr} + \lambda(e_{\varphi\varphi} + e_{zz}), & \sigma_{\varphi\varphi} &= (\lambda + 2\mu)e_{\varphi\varphi} + \lambda(e_{rr} + e_{zz}), \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)e_{zz} + \lambda(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}). \end{aligned} \quad (27)$$

Выразим из данных зависимостей обратимые деформации

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{(\lambda + \mu)\sigma_{rr}}{\mu(3\lambda + 2\mu)} - \frac{\lambda(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, & e_{\varphi\varphi} &= \frac{(\lambda + \mu)\sigma_{\varphi\varphi}}{\mu(3\lambda + 2\mu)} - \frac{\lambda(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \\ e_{zz} &= \frac{(\lambda + \mu)\sigma_{zz}}{\mu(3\lambda + 2\mu)} - \frac{\lambda(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Из соотношений (25) следует, что $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz}$, если

$$e_{\varphi\varphi} = e_{zz}. \quad (29)$$

Из зависимостей (23), (24) и (27) получим

$$p_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} - p_{rr}, \quad p_{zz} = -e_{\varphi\varphi}. \quad (30)$$

Используя (28), соотношения (7) в области пластического течения $r_0 \leq r \leq m_1(t)$ перепишем в следующей форме

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = e_{rr} + 2e_{\varphi\varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} = e_{rr} - 2e_{\varphi\varphi} + 2p_{rr}. \quad (31)$$

Проинтегрируем уравнения (29), исключив из них обратимые деформации с помощью зависимостей (26) и используя уравнение равновесия (9), условие пластичности (22) и первое условие (6):

$$\begin{aligned} u &= \frac{r}{3\lambda + 2\mu} \left(3k \ln \frac{r}{r_0} + \frac{k}{2} - \frac{3p(t)}{2} \right) + \frac{c_1(t)}{r}, \\ p_{rr} &= \frac{(4\lambda + 7\mu)k}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} - \frac{c_1(t)}{r^2} + \frac{1}{2(3\lambda + 2\mu)} \left(2k \ln \frac{r}{r_0} - p(t) \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Из условия непрерывности перемещений и необратимых деформаций на упруго-пластической границе $r = m_1(t)$ из соотношений (20) и (30) следует, что

$$m_1(t) = r_0 \exp \left(\frac{p(t)}{2k} - \frac{\lambda}{2\mu} - 1 \right), \quad c_1(t) = c(t) + \frac{k\mu m_1^2(t)}{2(\lambda + \mu)(3\lambda + 2\mu)}. \quad (33)$$

Из системы уравнений (14) и (21) найдем компоненту необратимых деформаций p_{rr} в области $m(t) \leq r \leq R$ и упругопластическую границу $r = m(t)$. Обратимые деформации в области пластического течения $m_1(t) \leq r \leq m(t)$ находятся из зависимостей

(12). Напряжение σ_{zz} в областях $m_1(t) \leq r \leq m(t)$ и $m(t) \leq r \leq R$ вычисляется из последнего соотношения (8).

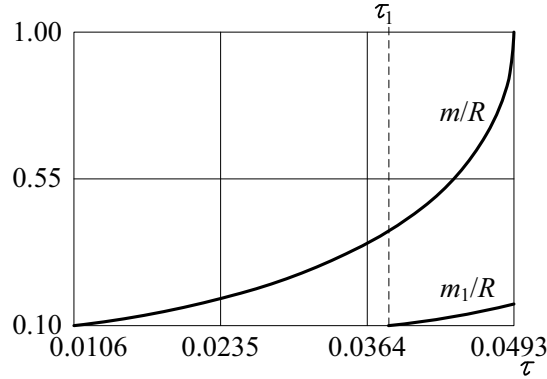


Рис. 1. Графики упругопластических границ в зависимости от времени

Расчеты проводились при линейной функции давления $p(t) = \alpha t$ и следующих значениях постоянных: $n = 3$, $Bn\mu^3/\alpha = 3.5$, $\lambda/\mu = 1.57$, $r_0/R = 0.1$, $k/\mu = 0.01$. На рис. 1 показаны графики упругопластических границ m/R и m_1/R в зависимости от безразмерного времени $\tau = \alpha t/\mu$. Распределение обратимых e_{rr} и $e_{\varphi\varphi}$ и необратимых p_{rr} и $p_{\varphi\varphi}$ деформаций по слою в момент времени $\tau_2 = 0.044$ показано на рис. 2. Рис. 3 иллюстрирует распределение деформаций e_{zz} и p_{zz} и перемещений u/R по слою в момент времени τ_2 . На рис. 4 изображены распределения напряжений σ_{rr}/μ , $\sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ и σ_{zz}/μ и разностей напряжений $(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})/\mu$ (сплошной линией), $(\sigma_{zz} - \sigma_{rr})/\mu$ (штриховой линией) и $(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})/\mu$ (пунктирной линией) по слою в этот же момент времени.

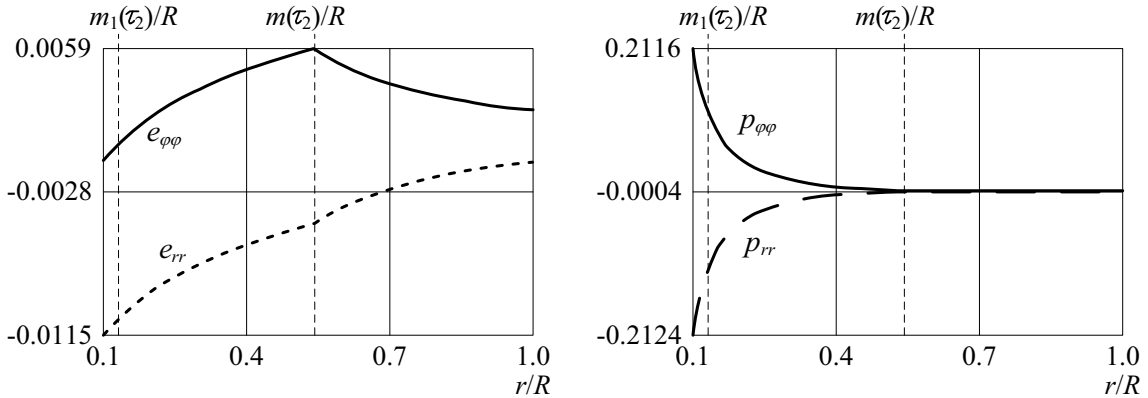


Рис. 2. Распределение обратимых и необратимых деформаций по слою

Заключение. В работе получено решение одномерной краевой задачи о пластическом течении материала цилиндрического слоя с предварительно накопленными необратимыми деформациями ползучести. Напряженное состояние при пластическом течении сначала соответствует грани условия пластичности Треска, а затем

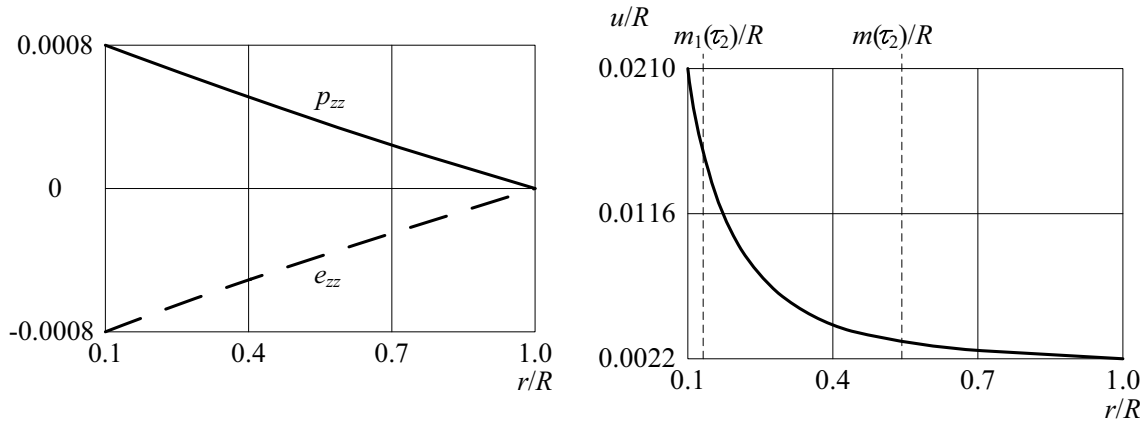


Рис. 3. Распределение деформаций e_{zz} и p_{zz} и перемещений по слою

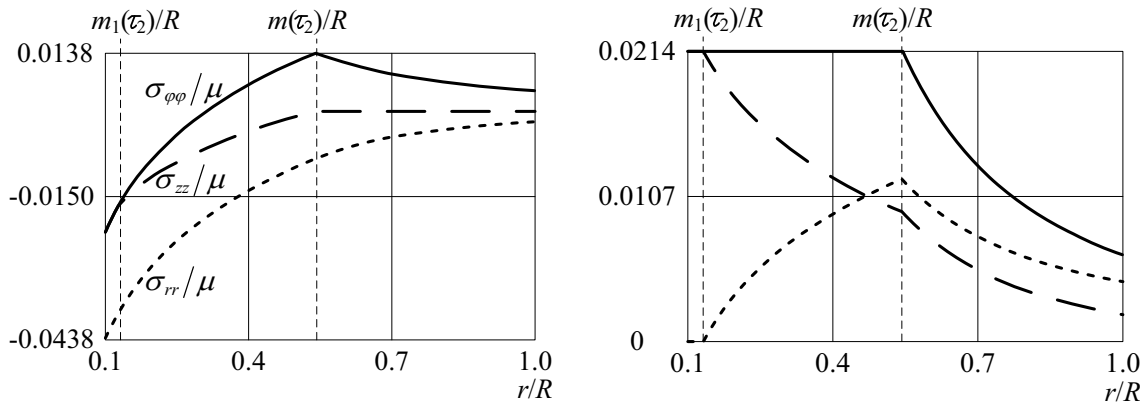


Рис. 4. Распределение напряжений и разности напряжений по слою

может выйти на ребро данного условия. Рассчитаны все параметры напряженно-деформированного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Олейников А. И., Пекарш А. И. Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей. М.: Эком, 2009. 109 с.
- [2] Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // Доклады академии наук. 2016. Т. 470. № 3. С. 275–278.
- [3] Бегун А.С., Ковтанюк Л.В., Лемза А.О. Смена механизмов накопления необратимых деформаций материалов на примере их вискозиметрического деформирования // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 1. С. 103–112.
- [4] Norton F.H. The creep steel of high temperature / F.H. Norton. Y.: Mc Graw Hill, 1929. 110 p.
- [5] Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука. 1998. 528 с.
- [6] Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2001. 382 с.

- [7] Галимзянова К.Н., Ковтаныук Л.В., Панченко Г.Л. Ползучесть и пластическое течение материала упругопластического сферического слоя в условиях всестороннего гидростатического сжатия // Вестник ЧГУУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 2(32). С. 37–44.

L. V. Kovtanyuk, G. L. Panchenko

COMPREHENSIVE HYDROSTATIC COMPRESSION OF CYLINDRICAL LAYER IN CONDITIONS OF CREEP AND PLASTIC FLOW

Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. In this work, within the framework of the small strain model, a one-dimensional boundary-value problem about deformation of a material with elastic, viscous and plastic properties in a cylindrical layer under the action of a uniform pressure varying with time applied to its internal boundary is solved. Viscous properties of medium are taken into account at a stage of deformation, which precedes plastic flow. Reversible and irreversible deformations, stresses and displacements are calculated. Laws of promotion of elastoplastic boundaries in the layer are established.

Keywords: elasticity, creep, plasticity, irreversible deformations.

REFERENCES

- [1] Oleinikov A.I., Pekarsh A.I. Integrated design of the manufacturing processes of integral panels. M. : Ekom, 2009. 109 p. (in Russian).
- [2] Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V. Large irreversible deformations under conditions of changing mechanisms of their formation and the problem of definition of plastic potentials. Doklady Physics. 2016. V. 61. pp. 463–466.
- [3] Begun A.S., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O. Change of Accumulation Mechanisms of Irreversible Deformations of Materials in an Example of Viscometric Deformation // Mechanics of Solids. 2018. V. 53. No 1. pp. 85–92.
- [4] Norton F.H. The creep steel of high temperature / F.H. Norton. Y.: Mc Graw Hill, 1929. 110 p.
- [5] Bykovtsev G.I., Ivlev D.D. Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [6] Verzhbitsky V.M. Numerical methods (mathematical analysis and ordinary differential equations): proc. manual for universities. M. : Higher education, 2001. 382 p. (in Russian).
- [7] Galimzyanova K.N., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L. Creep and plastic flow of the material of an elastoplastic spherical layer under conditions of comprehensive hydrostatic compression // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2017. No 2(32). pp. 37–44. (in Russian).

Kovtanyuk Larisa Valentinovna

e-mail: lk@iacp.dvo.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Panchenko Galina Leonidovna

e-mail: panchenko.21@yandex.ru, Candidate of Phys. & Math., Acting Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Е. Е. Абашкин, А. В. Ткачева

РАЗУПРОЧНЕНИЕ МАТЕРИАЛА СТАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ВСЛЕДСТВИЕ ЛОКАЛЬНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. В работе описываются исследования теплового воздействия горячего газа ацетиленовой горелки на стальную пластину. В ходе данного воздействия в материале пластины появляется пластическое течение, которое порождает необратимые деформации, влияющие на понижение предела текучести материала. Разупрочнение материала пластины устанавливается опытным путем в ходе серии экспериментов. Для описания физической модели разупрочнения стальной пластины вследствие температурного воздействия строится одномерная математическая модель, основанная на модели Прандтля-Рейса. Предел текучести и упругие модули принимаем зависимыми от температуры. В качестве критерия пластического течения принимается условие Ишпинского-Ивлева, в котором введено слагаемое, отвечающее за упрочнение материала.

Ключевые слова: температурные напряжения, точечный нагрев, остаточные напряжения, упругость, пластичность, упрочнение, условие Ишпинского-Ивлева

DOI: 10.26293/chgru.2019.41.3.006

УДК: 539.374

Введение

Довольно часто в научной литературе, посвященной обработке металлов давлением, встречается утверждения авторов о том, что материал может упрочняться и разупрочняться в ходе механического воздействия [1–4]. При повышении температуры до момента рекристаллизации в стальной пластине происходят фазовые переходы, которые изменяют физико-механические характеристики [1], [6], а именно: упругие модули и предел текучести. Если предел текучести в процессе деформирования увеличивается, то говорят об упрочнении металла, если уменьшается – о разупрочнении. Подвергая стальную пластину точечному (локальному) нагреву, исходящему от пламени

© Абашкин Е. Е., Ткачева А. В., 2019

Абашкин Евгений Евгеньевич

e-mail: abashkine@mail.ru, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия,

Ткачева Анастасия Валерьевна

e-mail: 4nansi4@mail.ru, старший научный сотрудник, кандидат физ.-мат. наук, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия,

Работа выполнена в рамках государственного задания № 075-00414-19-00.

Поступила 01.08.2019

горючих газов ацетиленовой горелки, нами было зафиксировано падение предела текучести более чем на 20%, то есть произошло разупрочнение стальной пластины. Хотя сталь 45, из которой была изготовлена пластина, склонна к самозакаливанию. Этот факт представляет особый интерес для инженеров – проектировщиков металлических конструкций, которые могут подвергнуться температурному воздействию и потерять свою несущую способность. По температурному деформированию пластин написано много работ [7–13]. Рост публикаций пришелся на развитие компьютерной техники. В основном это связано с возможностью производить вычисления, однако есть публикации с середины прошлого века [9–13]. Ни в одной из них авторы не приводят сравнения расчетных данных полученных вычислений с экспериментальными данными. Для полноты описания разупрочнения, происходящего в стальной пластине, в настоящей работе построена математическая модель точечного нагрева разупрочняющейся пластины. Полученные благодаря математическому моделированию остаточные напряжения сравниваются с остаточными напряжениями нагретой ацетиленовой горелкой стальной пластины, снятыми с ее поверхности при помощи RIGAKU MSF-3M анализатора остаточных напряжений.

2. Основы математической модели.

В качестве основы математической модели принимаем модель Прандтля-Рейса, в которой деформации полагаются малыми и складывающимися из обратимых e_{ij}^e и необратимых e_{ij}^p

$$d_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1)$$

где $u_{i,j}$ – компоненты вектора перемещений, d_{ij} – компоненты тензора полной деформации. Обратимые деформации связаны с напряжениями σ_{ij} и температурой T законом Дюамеля-Неймана [14]

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - 3\alpha K (T - T_0)) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \quad (2)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, T , T_0 – текущая и начальная температура, λ , μ , K – упругие модули, μ – модуль сдвига G , $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – модуль всестороннего сжатия.

Необратимые деформации развиваются, если напряженное состояние достигнет поверхности нагружения, об этом гласит ассоциированный закон пластического течения [15]

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{de_{ij}^p}{dt} = d\xi \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}; \quad d\xi > 0; \quad f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (3)$$

где $f(\sigma_{kl}, \zeta, k) = 0$ – уравнение поверхности нагружения в пространстве напряжений, k – предел текучести материала, ζ – коэффициент упрочнения.

В качестве возникновения пластического течения воспользуемся кусочно-линейным пластическим потенциалом – условием максимальных приведенных напряжений (условием Ишлинского-Ивлева) [16]

$$\max |\sigma_i - \zeta e_i^p - \sigma| - \frac{4}{3}k = 0, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{jj}. \quad (4)$$

Распределение температуры задается законом теплопроводности [17]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a T_{,jj} - \chi (T - T_0), \quad (5)$$

где a – коэффициент теплопроводности, χ – коэффициент теплоотдачи $\chi = 2\beta(\zeta\rho h)^{-1}$, β – теплоотдачи между деформируемого и проводящего тепло тела в окружающую среду, ζ – удельная теплоемкость на единицу массы, ρ – плотность материала

платины, h – толщина пластины. Принимая во внимание высокую температуру нагрева материала, в отличие от классического случая теории температурных напряжений, задаваемой зависимостями (1) и (2), когда в них λ , μ , k постоянные величины, свяжем зависимости последних от температуры [18, 19]

$$\begin{aligned} k(T) &= k_0 (\tau)^2; \quad v(T) = 0.5 - (0.5 - v_0) \tau, \\ \lambda &= \frac{2v\mu}{1-2v}; \quad \tau = \frac{T_p - T}{T_p - T_0}, \\ \mu &= \mu_0 (-65.94 \cdot 10^{-3} T^2 + 41.08 T + 77.82 \cdot 10^3) \cdot 84000^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

В (6) k_0 , v_0 , μ_0 – предел текучести, коэффициенты Пуассона, модуль сдвига при комнатной температуре, T_p – температура плавления металла.

Завершает систему уравнений (1)–(6) уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (7)$$

3. Постановка задачи. Упругое деформирование.

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) расположена пластина, которая нагревается от источника тепла, расположенного в центре $r = 0$

$$T(r, t) = qt, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad (8)$$

где q – скорость нагрева, r_0 – радиус пятна нагрева. Когда температура в центре пластины станет равной $T(0, t_*) = 0,9T_p$, источник отводится, и материал пластины остывает. Теплоотводом от боковых поверхностей пластины пренебрегаем из-за малой толщины, которую не учитываем. Распределения температуры в материале пластины определяется из закона теплопроводности (5), записанного в цилиндрической системе координат

$$T_{,t} = a (rT_{,r})_{,r} + \chi (T_0 - T). \quad (9)$$

Поскольку решения температурной задачи (7)–(9) получить не трудно с помощью численных методов [20] или аналитически [21], останавливаться на ее решении не будем и перейдем к механической задаче.

В условиях плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) из зависимостей закона Дюамеля-Неймана имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= Au_{r,r} + Br^{-1}u_r - D(T - T_0), \\ \sigma_\varphi &= Bu_{r,r} + Ar^{-1}u_r - D(T - T_0), \end{aligned} \quad (10)$$

$$A = 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad B = 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad D = 6K\mu\alpha(\lambda + 2\mu)^{-1}.$$

Подстановка (10) в уравнение равновесия

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \quad (11)$$

приводит к уравнению для вычисления перемещения u_r

$$\phi u_{r,rr} + \varsigma u_{r,r} + \omega u_r + \beta = 0, \quad (12)$$

$$\phi = A, \quad \varsigma = A_{,r} + r^{-1}A, \quad \omega = r^{-1}B_{,r} - r^{-2}A, \quad \beta = -DT_{,r} - D_{,r}(T - T_0),$$

В качестве граничных условий выбираем условия

$$u_r|_{r=0} = 0, \quad \sigma_r|_{r=R} = 0, \quad (13)$$

где R – расстояние до края пластины.

В случае учета зависимости упругих модулей от температуры, решение обыкновенного дифференциального уравнения (12) совместно с граничными условиями (13)

возможно только численно. В данной работе для численного решения применяется один из методов конечных разностей - метод сеток. Область разбивается равномерной сеткой. Для каждого узла сетки записывается в разностном виде уравнение равновесия, а на границах аппроксимируются граничные условия. Таким образом получается линейная система уравнений, которая решается методом Гаусса. Аналитическое решение при постоянных упругих модулях приведено в [22].

4. Пластическое течение

С некоторого момента времени в центре нагрева выполняется условие пластического течения $2(\sigma_z - \zeta e_z^p) - (\sigma_r - \zeta e_r^p) - (\sigma_\varphi - \zeta e_\varphi^p) = 4k$. Здесь образуется упругопластическая граница $r = n_1(t)$. В области $0 \leq r \leq n_1(t)$ материал пластины пластически течет, что приводит к образованию и развитию необратимых деформаций. Закон Дюамеля – Неймана в этом случае запишется в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= A(u_{r,r} - e_r^p) + B(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - D(T - T_0), \\ \sigma_\varphi &= B(u_{r,r} - e_r^p) + A(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - D(T - T_0).\end{aligned}\quad (14)$$

Из ассоциированного закона пластического течения (3) находим $\varepsilon_r^p = \varepsilon_\varphi^p$, $\varepsilon_\varphi^p = -\zeta$, $\varepsilon_z^p = 2\zeta$, $e_r^p = e_\varphi^p = -\zeta\tau + \tilde{e}_r^p$, $e_z^p = 2\zeta\tau + \tilde{e}_z^p$. Слагаемые $\zeta\tau$ являются приращением необратимой деформации \tilde{e}_r^p , существовавшей или зародившейся на предыдущем временном шаге, $\tau = \Delta t$ шаг по времени. Учитывая вышесказанное и (14) находим

$$\begin{aligned}\zeta &= \tilde{e}_r^p \tau^{-1} + g(D(T - T_0) - 0.5(A + B)(u_{r,r} + r^{-1}u_r) - 2k)\tau^{-1} \\ \sigma_r &= g(0.5(A^2 - B^2 + 6cA)u_{r,r} + 0.5(B^2 - A^2 + 6cB)r^{-1}u_r - \\ &\quad - g(3Dc(T - T_0) + 2(A + B)k), \\ \sigma_\varphi &= g(0.5(A^2 - B^2 + 6cA)r^{-1}u_r + 0.5(B^2 - A^2 + 6cB)u_{r,r}) - \\ &\quad - g(3Dc(T - T_0) + 2(A + B)k), \\ g &= (A + B + 3c)^{-1}.\end{aligned}\quad (15)$$

Проводя численное решение дифференциального уравнения равновесия (11) с учетом (15), на каждом временном шаге находятся перемещения $u_r(r, t)$. В области пластического течения дифференциальное уравнение равновесия строится на подобии (12). Благодаря тому, что кусочно-линейное условие пластического течения дает возможность записать дифференциальное уравнение равновесия в линейном виде, то построенная при численном решении система линейных уравнений решается так же методом Гаусса. Граничные условия на упругопластической границе в отличие от аналитических решений, задавать не стоит. О хорошей сходимости и численной устойчивости решения разностным методом можно судить в случае неразрывности напряжения σ_r на упругопластической границе.

5. Разгрузка и остаточные напряжения

После отвода тепла в центре $r = 0$ необратимые деформации замедляют свой рост, образуется разгружающая упругопластическая граница $r = m_1(t)$, продвигающаяся за границей $r = n_1(t)$. Через некоторый промежуток времени границы соединятся. В области разгрузки $0 \leq r \leq m_1(t)$ напряжения определяются из соотношений (14) с той лишь разницей, что необратимые деформации уже не растут и остаются постоянными. Упругие модули (6) сохраняют свои значения при остывании. Это предполагает фазовые переходы. Остаточные напряжения в материале пластины находятся численно из решения дифференциального уравнения равновесия (11) с уже известными необратимыми деформациями.

6. Физическое моделирование

Для проведения натурального эксперимента возьмем стальную пластину с размерами шириной 100 мм, длиной 200 мм, толщиной 12 мм. До начала эксперимента, используя метод рентгена дифрактометрии, произведем замер остаточных напряжений в материале пластины, убедимся в их малых значениях. В центре поместим источник тепла (ацетиленовую горелку) и произведем нагрев до температуры $T(0, t_*) = T_p$. После нагрева и полного остывания пластины произведем снятие остаточных напряжений (рис.1).

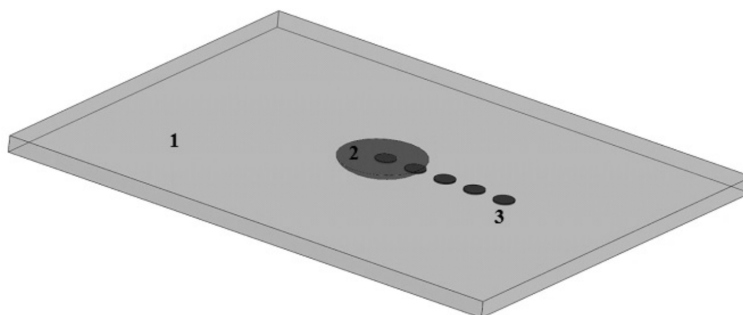


Рис. 1. Схема определения остаточных напряжений: 1 – стальная пластина; 2 – зона теплового воздействия; 3 – точки снятия данных

На рисунках 2 и 3 показаны распределения остаточных напряжений для пластин, изготовленных из различных видов стали с физико-механическими характеристиками. Для Ст3 $\rho = 7850 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, удельная теплоемкость $0,48 \text{ кДж} / (\text{кг} \cdot \text{К})$, теплопроводность $55,5 \text{ Вт} / (\text{мК})$, $k_0 = 255 \text{ МПа}$, $\mu_0 = 74000 \text{ МПа}$, $T_p = 1525^\circ\text{C}$, $\alpha = 11,5 \cdot 10^{-6}$, коэффициенты теплоотдачи нагретого металла в окружающую среду $7,6 \text{ Вт} / (\text{мК})$. Для Стальи 45 $\rho = 7814 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, удельная теплоемкость $0,5 \text{ кДж} / (\text{кг} \cdot \text{К})$, теплопроводность $67,78 \text{ Вт} / (\text{мК})$, $\mu_0 = 78000 \text{ МПа}$, $T_p = 1525^\circ\text{C}$, $\alpha = 11,1 \cdot 10^{-6}$, коэффициенты теплоотдачи нагретого металла в окружающую среду $7,6 \text{ Вт} / (\text{мК})$. Коэффициент упрочнения s взят 2000 Па [23]. Значения остаточных напряжений, полученные экспериментально изображены точками.

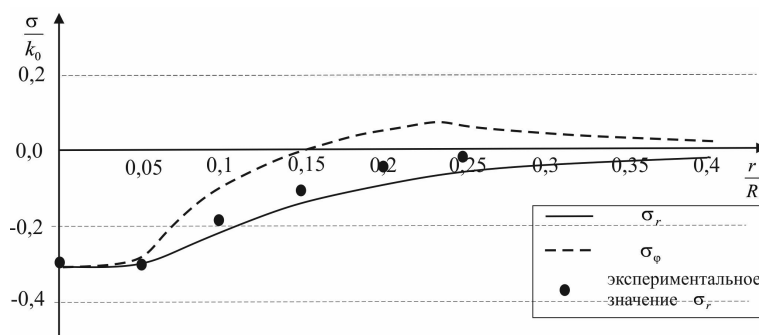


Рис. 2. Распределение остаточных напряжений в материале стальной пластины (Ст3)

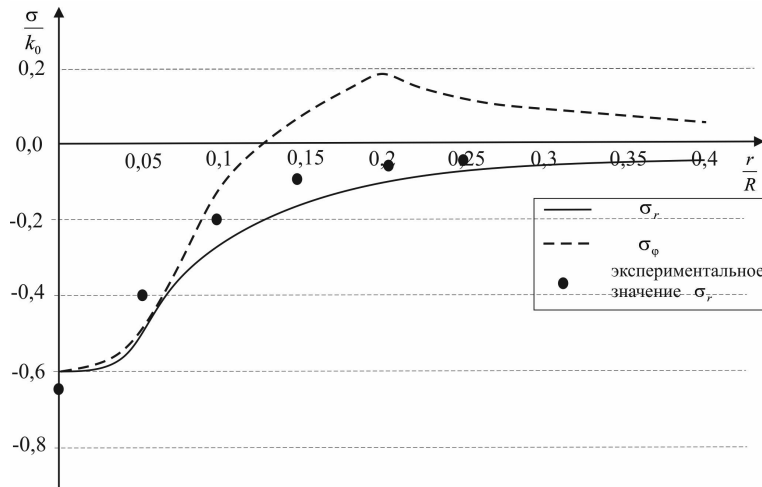


Рис. 3. Распределение остаточных напряжений в материале стальной пластины (Сталь 45)

Локальный нагрев оказывает влияние на структуру и физико-механические свойства материала пластины из углеродистой стали. Тепловое воздействие пламени горючих газов нагревает металл до температуры плавления в зоне контакта. При остывании в точке расплавления металла происходит его усадка. Для установления реальных размеров зоны теплового воздействия и микроструктурных изменений в металле пластины приведены металлографические шлифы образцов (рис. 4). Длина от центра зоны расплавления металла до окончания зоны термического влияния составила: для стали Ст3 – 13,5 мм, для стали 45 – 15,5 мм. Полученный результат совпадает с длиной зоны распределения больших остаточных напряжений, установленных в теоретических расчетах и экспериментально найденных значениях. Зона расплавления металла у образцов из стали марки Ст3 и 45 характеризуется феррито-перлитной структурой с укрупненным размером зерен. Размер зерна зоны расплавления металла в среднем составил 117 мкм., что в 6 раз больше размера зерна металла, не подвергшегося тепловому воздействию. Данные структурные изменения происходят из-за перегрева металла и впоследствии его быстрого охлаждения, что приводит к росту остаточных напряжений в металле. Это оказывает негативное влияние на физико-механические свойства материала пластины и приводит к его разупрочнению в зоне теплового воздействия.

Для проверки теоретических расчетов математической модели и определения влияния теплового воздействия пламени ацетиленовой горелки требуется провести опытные физико-механические испытания.

Образцы, полученные до и после теплового воздействия, подвергались испытанию на растяжение на тестовой машине. Из полученных результатов, представленных на рис. 5 видно, что величина предела текучести и прочности образцов после теплового воздействия снижается на 25 %.

7. Заключение

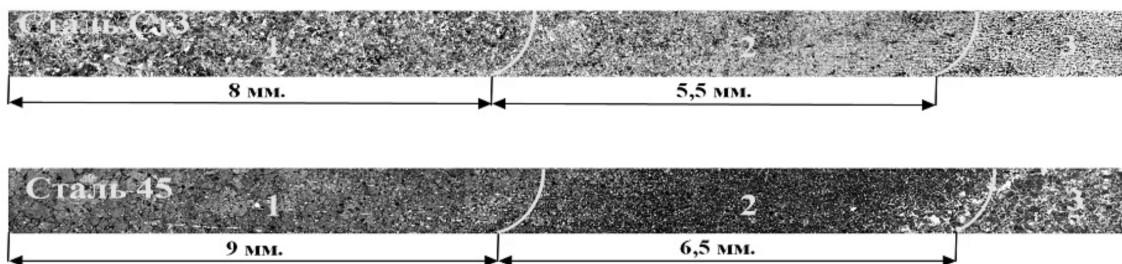


Рис. 4. Структура металла образцов, полученных после точечного теплового воздействия (x100): 1 – зона расплавления металла; 2 – зона термического влияния; 3 – зона металла не подвергшегося структурным изменениям.

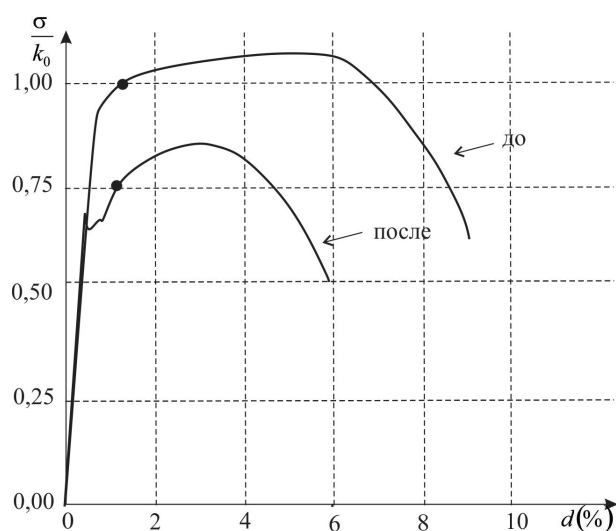


Рис. 5. Диаграмма деформирования до и после теплового воздействия

Использование условия максимальных приведенных напряжений (условия Ишлинского – Ивлева) с введением слагаемого, отвечающего за упрочнение материала, позволяет вычислить остаточные напряжения в материале стальной пластины, подвергнутой локальному термическому влиянию со стороны пламени горючих газов. Следует заметить, что в области интенсивного теплового воздействия происходят структурные превращения, с образованием новых фаз, а так же наблюдается изменения размеров зерна исходных структурных составляющих. С точки зрения упругопластичности это связывается частично с изменением упругих модулей. Таким способом эти изменения, происходящие в зоне теплового локального воздействия, оказывают влияния на прочностные характеристики металла.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Глазов Г.А. Технология металлов и других конструкционных материалов. Ленинград: Госстройиздат, 1972. 520 с.
- [2] Зайчик Л. В., Орлов Б. Д., Чулошников П. Л. Контактная электросварка легких сплавов. Москва: Машгиз, 1963. 220 с.
- [3] Медовар Б. И. Сварка хромоникелевых аустенитных сталей. Киев: Машгиз, 1954. 174 с.
- [4] Карзов Г.П., Марголин Б.З., Швецова В.А. Физико-механическое моделирование процессов разрушения. Санкт-Петербург: Политехника, 1993. 391 с.
- [5] Гринфельд М. А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. Москва: Наука, 1990. 312 с.
- [6] Соколов Л. Д. Механические свойства редких металлов. Москва: Металлургия, 1972. 288 с.
- [7] Сидоров Г.И. Об определении температурных напряжений в подкрепленных пластинах методом конечных элементов // Ученые записки ЦАГИ. Жуковский, 1975. № 6(6). С. 74–81.
- [8] Махненко В. И., Великоиваненко Е. А. Упругопластическое состояние в неограниченной тонкой пластинке при произвольном осесимметричном нагреве // Докл. науч. совещания : Тепловые напряжения в элементах конструкции. 1966. № 6. С. 63–70.
- [9] Шевченко Ю. Н. Термопластичность при переменных нагрузениях. Киев: Наук. думка, 1970. 287 с.
- [10] Фролов В.В., Винокуров В.Г., Волченко В.Н. Теоретические основы сварки. Москва: Высшая школа, 1970. 292 с.
- [11] Александров С.Е., Лямина Е.А., Новожилова О.В. Влияние зависимости предела текучести от температуры на напряженное состояние в тонком полом диске // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. № (6). С. 43–48.
- [12] Александров С.Е., Ломакин Е.В., Дзенг Й.Р. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению // ДАН. 2012. № 443(3). С. 310–312.
- [13] Буренин А.А., Дац Е.П., Мурашкин Е.В. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия // Изв. РАН МТТ. 2014. № 2. С. 124–131.
- [14] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. Москва: Мир, 1964. 517 с.
- [15] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [16] Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 704 с.
- [17] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Москва: Физматлит, 1963. 252 с.
- [18] Грешков В. М. Об одной модели пластичности для задач обработки металлов давлением // ПМТФ. 2008. № 6. С. 159–169.
- [19] Ершов В.И. Интенсификация формоизменяющих операций листовой штамповки. Москва: Высшая школа, 1989. 87 с.
- [20] Кузнецов Г.В., Шеремест М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие. Томск: Изд-во ТПУ, 2007. 172 с.
- [21] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точное решение. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 432 с.
- [22] Буренин А.А., Каинг М., Ткачева А.В. К расчету плоских напряженных состояний в теории неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // Дальневосточный математический журнал. 2018. № 18(2). С. 131–146.
- [23] Грешников С. К., Шацов А. А., Ряпосов И.В. Деформационное упрочнение отпускоустойчивых НМС на стадии равномерной деформации // Вестник ПНИПУ. Машиностроение, материаловедение. 2013. № 15(3). С. 13–18.

E. E. Abashkin, A. V. Tkacheva

SOFTENING OF STEEL PLATE MATERIAL DUE TO LOCAL TEMPERATURE EXPOSURE

Institute of Machine Science and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk - on - Amur, Russia

Abstract. The paper describes studies of the thermal effect of a combustible gas of an acetylene burner on a steel plate. As a result of this effect, irreversible deformations occur, affecting a decrease in the yield strength of the material. A variety of material represents an experimental path through a series of experiments. Only mathematical models based on Prandtl-Reis models are used to describe physical models. Load balancing modules and modules are temperature dependent. As a criterion of plastic flow, the Ishlinsky-Ivlev condition is adopted, in which the term is introduced, which is responsible for the hardening of the material.

Keywords: temperature stresses, point heating, residual stresses, elasticity, plasticity, hardening, Ishlinsky-Ilev condition

REFERENCES

- [1] Glazov G. A. Leningrad: Mechanical Engineering, 1972. 520 p. (in Russian).
- [2] Zaichik L. V., Orlovand B. D., Chuloshnikov P. L. Resistance welding of light alloys. Moscow: Mashgiz, 1963. (in Russian).
- [3] Medovar B. I. Welding of chromium-nickel austenitic steels. Kiev: Mashgiz, 1954. 174 p. (in Russian).
- [4] Karzov G., Margolin B., Shvetsova V. Physico-mechanical modeling of fracture processes. Saint Petersburg: Polytechnic, 1993. 391 p. (in Russian).
- [5] Greenfeld M. A. Methods of continuum mechanics in the theory of phase transformations. Moscow: Science, 1990. 312 p. (in Russian).
- [6] Sokolov L. D. Mechanical properties of rare metals. Moscow: Metallurgy, 1972. 288 p. (in Russian).
- [7] Sidorov G. On the determination of temperature stresses in reinforced plates by the finite element method // TsAGI Notebooks. Zhukovskiy, 1975. no. 6 (6). P. 74–81. (in Russian).
- [8] Makhnenko B. I., Velikoivanenko E. A. Elastic-plastic state in an unlimited thin plate with arbitrary axisymmetric heating // Dokl. scientific Meetings: Thermal stresses in structural elements. 1966. no. 6. P. 63–70. (in Russian).
- [9] Shevchenko Y. N. Thermoplasticity under variable loads. Kiev: Science. dumka, 1970. 287 p. (in Russian).
- [10] Frolov B., Vinokurov V., Volchenko V. Theoretical basis of welding. Moscow: High School, 1970. 292 p. (in Russian).
- [11] Alexandrov C., Lyamina E., Novozhilova O. The influence of the yield stress on temperature on the stress state in a thin hollow disk // Problems of mechanical engineering and machine reliability. 2013. no. (6). P. 43–48. (in Russian).
- [12] Alexandrov C., Lomakin E., Dzeng J. R. Solving the thermoelastic-plastic problem for a thin disk of plastically compressible material subject to thermal loading // DAN. 2012. no. 443 (3). P. 310–312. (in Russian).
- [13] Burenin A., Dats E., Murashkin E. Formation of the field of residual stresses under local thermal exposure // Izv. RAS MTT. 2014. no. 2. P. 124–131. (in Russian).
- [14] Bolly B., Weiner J. Theory of thermal stresses. Moscow: World, 1964. 517 p. (in Russian).
- [15] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [16] Ishlinsky A., Ivlev D. Mathematical Theory of Plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian).

Abashkin Evgeny Evgenievich, Junior Researcher, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur, Russia. *Tkacheva Anastasia Valerevna*, Can. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur, Russia.

- [17] Parkus G. Unsteady temperature stresses. Moscow: Fizmatlit, 1963. 252 p. (in Russian).
- [18] Greshkov B. M. On a plasticity model for metal forming tasks // Applied Mechanics and Technical Physics. 2008. no. 6. P. 159–169. (in Russian).
- [19] Ershov V. Intensification of form-forming operations of sheet stamping. Moscow: High School, 1989. 87 p. (in Russian).
- [20] Kuznetsov G., Sheremest M. Difference methods for solving heat conduction problems: study guide. Tomsk: TPU Publisher, 2007. 172 p. (in Russian).
- [21] Polyanin A. D., Zaytsev V. F. Handbook of Nonlinear Equations of Mathematical Physics: Exact Solution. Moscow: PHYSMATHLET, 2002. 432 p. (in Russian).
- [22] Burenin A., Kaing M., Tkacheva A. On the calculation of plane stress states in the theory of transient temperature stresses in elastoplastic bodies // Far Eastern Mathematical Journal. 2018. no. 18 (2). P. 131–146. (in Russian).
- [23] Greshnikov P. K., Shatsov A., Ryaposov I. Strain hardening of tempering resistant NMSs at the stage of uniform deformation // Bulletin of PNIPU. Engineering, materials science. 2013. no. 15 (3). P. 13–18. (in Russian).

В. Г. Ефремов, С. В. Матвеев, А. Н. Матвеева, С. В. Тихонов

РАВНОМЕРНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ТОНКОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, ПРИ УСЛОВИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТРЫВУ

*Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия*

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе рассматривается упругопластическое состояние тонкой пластины с круговым отверстием при равномерном растяжении. Материал пластины предполагается анизотропным. Сопротивление материала отрыву предполагается линейной функцией, зависящей от координат. Решение ищется методом малого параметра. Решение определено в нулевом и первом приближениях в упругой и пластической областях.

Ключевые слова: пластичность, упругость, линеаризация, напряжение, отрыв, анизотропия, неоднородность

УДК: 539.374

DOI: 10.26293/chgpu.2019.41.3.007

Рассмотрим анизотропную бесконечную кольцевую пластину с круговым отверстием (рис.1). Сопротивление материала отрыву $p(x, y)$ предполагается линейной функцией в первом приближении и являющейся постоянной величиной в нулевом приближении (1).

Согласно [1,2] условие пластичности примем в виде

© Ефремов В. Г. Матвеев С. В., Матвеева А. Н., С. В. Тихонов, 2019

Ефремов Вячеслав Геннадьевич

e-mail: fmf_dekanat@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович

e-mail: sergio2100@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матвеева Алена Николаевна

e-mail: goshtova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.05.2019

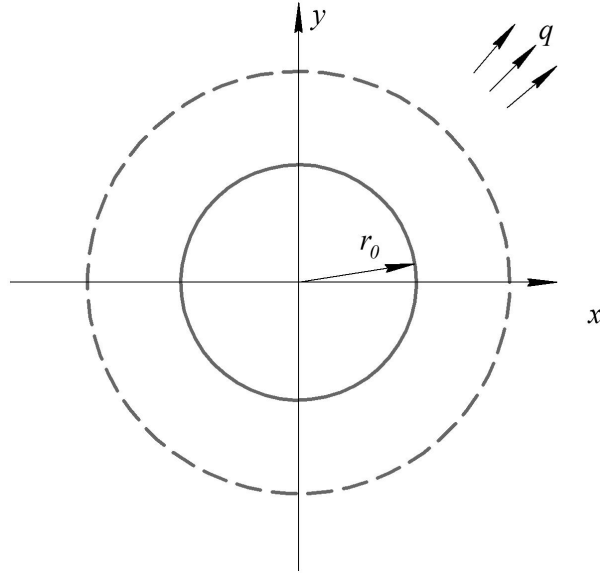


Рис. 1.

$$(A\sigma_x - p(x, y))(B\sigma_y - p(x, y)) - C\tau_{xy}^2 = 0, \quad (1)$$

где A, B, C – константы определяющие анизотропию материала $p(x, y)$ – функция сопротивления отрыву.

Положим

$$p(x, y) = p_0 + \delta(mx + ny), \quad p_0, m, n - const. \quad (2)$$

В полярной системе координат выражение (2) примет вид

$$p = p_0 + \delta (m\rho \cos(\theta) + n\rho \sin(\theta)). \quad (3)$$

Для записи выражения (1) в полярной системе координат $\rho\theta$ воспользуемся соотношениями (4).

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (1) и (4) получим

$$\begin{aligned} & AB(\sigma_\rho + \sigma_\theta)^2 - (\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 \left(\frac{AB+C}{2} + \frac{AB-C}{2} \cos 4\theta \right) - \\ & - 2\tau_{\rho\theta}^2 (AB + C + (C - AB) \cos 4\theta) - 2\tau_{\rho\theta} (\sigma_\rho - \sigma_\theta) \times \\ & \times (AB - C) \sin 4\theta - 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta)(A - B)p \cos 2\theta - \\ & - 4\tau_{\rho\theta}(A - B)p \sin 2\theta - 2(\sigma_\rho + \sigma_\theta)(A + B)p = -4p^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение будем искать с помощью метода возмущения по малому параметру δ , характеризующего степень неоднородности пластины (2), (6), для этого перейдем к безразмерным величинам. Все компоненты напряжения отнесем к значению постоянной

отрыва в нулевом приближении p_0 , величины определяющие геометрические размеры пластины отнесем некоторой линейной величине ρ_s^0 .

$$A = 1 + \delta a, \quad B = 1 + \delta b, \quad C = 1 + \delta c, \quad \alpha = \frac{r}{\rho_s^0}, \quad (6)$$

где a, b, c – постоянные, которые определяют анизотропию, δ – параметр, который будем считать достаточно малым.

Для расчета в нулевом приближении, положим $\delta = 0$, $A = B = C = 1$, тогда выражение (5) примет вид

$$(\sigma_\rho - p)(\sigma_\theta - p) - \tau_{\rho\theta}^2 = 0. \quad (7)$$

Решение будем искать аналогично работам [3-8], полагая

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(I)} + \delta^2 \sigma_{ij}^{(II)} + \dots \quad (8)$$

Примем

$$\tau_{\rho\theta i}^{(0)} = 0. \quad (9)$$

Для компонентов напряжения в пластической области будем указывать индекс – “ p ”, а упругой – ‘ e ’.

В нулевом приближении из (7 – 9) получим

$$\sigma_{\theta i}^{(0)p} = p. \quad (10)$$

Уравнения равновесия запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho^{(i)} - \sigma_\theta^{(i)}}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}^{(i)}}{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

В исходном нулевом приближении выражения (11) с учетом (8 – 10), примут вид

$$\frac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}}{\rho} = 0. \quad (12)$$

Из соотношений (10), (12) определим компоненты напряжения $\sigma_\rho^{(0)p}$

$$\sigma_\rho^{(0)p} = p_0 - \frac{C_1}{\rho}. \quad (13)$$

Учитывая, что контур отверстия свободен от усилий, $\sigma_\rho^0 = 0$ при $\rho = \alpha$, определим константу C_1 .

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = p_0 \left(1 - \frac{\alpha}{\rho} \right). \quad (14)$$

Компоненты напряжения нулевом приближении имеют вид

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = p_0 \left(1 - \frac{\alpha}{\rho} \right), \quad \sigma_{\theta 1}^{(0)p} = p_0, \quad \tau_{\rho\theta 1}^{(0)p} = 0. \quad (15)$$

Из (5), (6) (8), в первом приближении, с учётом (9), (14) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^{(I)p} = & -\frac{\alpha p_0}{8\rho}(a+b-c)\cos 4\theta + \frac{p_0}{2}(a-b)\cos 2\theta + \\ & + m\rho\cos\theta + n\rho\sin\theta + \frac{\alpha p_0}{8\rho}(a+b-c) - \frac{p_0}{2}(a+b). \end{aligned} \quad (16)$$

Соотношения (11) будут удовлетворяться с помощью подстановки

$$\sigma_{\rho}^{(I)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(I)} = \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \theta} \right). \quad (17)$$

Используя соотношения (16), (17), получим выражение для функции Эри

$$\begin{aligned} \Phi^{(I)} = & \left[-\frac{\alpha p_0}{8}(a+b+c)\rho(\ln\rho - 1) + C_1\rho + C_2 \right] \cos 4\theta + \\ & + \left[\frac{p_0\rho^2}{4}(a-b) + C_3\rho + C_4 \right] \cos 2\theta + \\ & + \left(\frac{m\rho^3}{6} + C_5\rho + C_6 \right) \cos\theta + \left(\frac{m\rho^3}{6} + C_7\rho + C_8 \right) \sin\theta + \\ & + \frac{\alpha p_0}{8}(a+b-c)\rho(\ln\rho - 1) - \frac{p_0\rho^2}{4}(a+b) + C_9\rho + C_{10}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (17), (18) следует

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} = & \left[\frac{15\alpha p_0}{8}(a+b-c)\frac{\ln\rho}{\rho} - \frac{2\alpha p_0(a+b-c)+15C_1}{\rho} - \right. \\ & \left. - \frac{16C_2}{\rho^2} \right] \cos 4\theta - \left[\frac{p_0}{2}(a-b) + \frac{3C_3}{\rho} + \frac{4C_4}{\rho^2} \right] \cos 2\theta + \\ & + \left(\frac{m\rho}{3} - \frac{C_6}{\rho^2} \right) \sin\theta + \left(\frac{n\rho}{3} - \frac{C_8}{\rho^2} \right) \cos\theta + \\ & + \frac{\alpha p_0}{8}(a+b-c)\frac{\ln\rho}{\rho} - \frac{p_0}{2}(a+b) + \frac{C_9}{\rho}, \\ \sigma_{\theta}^{(I)p} = & -\frac{\alpha p_0}{8\rho}(a+b-c)\cos 4\theta + \frac{p_0}{2}(a-b)\cos 2\theta + \\ & + \frac{\alpha p_0}{8\rho}(a+b-c) - \frac{p_0}{2}(a+b), \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = & -\left[\frac{\alpha p_0}{2\rho}(a+b-c) + \frac{4C_2}{\rho} \right] \sin 4\theta + \\ & + \left[\frac{p_0}{2}(a-b) - \frac{2C_4}{\rho^2} \right] \sin 2\theta + \\ & + \left(\frac{m\rho}{3} - \frac{C_6}{\rho^2} \right) \sin\theta - \left(\frac{n\rho}{3} - \frac{C_8}{\rho^2} \right) \cos\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

Контур отверстия пластины свободен от усилий, следовательно, справедливы соотношения

$$\sigma_{\rho}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha} = 0. \quad (20)$$

Используя соотношения (19), (20) определим константы $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, C_8, C_9$

$$\begin{aligned} C_1 = & \frac{p_0\alpha\ln\alpha}{8}(a+b-c), \quad C_2 = -\frac{p_0\alpha^2}{8}(a+b-c), \\ C_3 = & -\frac{p_0\alpha}{2}(a-b), \quad C_4 = \frac{p_0\alpha^2}{4}(a-b), \quad C_6 = \frac{m\alpha^3}{3}, \\ C_8 = & \frac{n\alpha^3}{3}, \quad C_9 = \frac{p_0\alpha}{2}(a+b) - \frac{p_0\alpha\ln\alpha}{8}(a+b-c). \end{aligned}$$

Соотношения (19), с учётом найденных значений констант, примут вид

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho^{(I)p} &= \alpha p_0 (a + b - c) \left[\frac{15 \ln \rho}{8\rho} - \frac{(16+15 \ln \alpha)}{8\rho} + \frac{2\alpha}{\rho^2} \right] \cos 4\theta - \\
&- p_0 (a - b) \left[\frac{1}{2} - \frac{3\alpha}{2\rho} + \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right] \cos 2\theta + \\
&+ m\rho \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha^3}{\rho^3} \right) \cos \theta + n\rho \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha^3}{\rho^3} \right) \sin \theta + \frac{p_0 \alpha \ln \alpha}{8\rho} c - \\
&- p_0 (a + b) \left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\rho} \right] + \frac{\alpha p_0}{8\rho} (a + b - c) \ln \frac{\rho}{\alpha}, \\
\sigma_\theta^{(I)p} &= -\frac{\alpha p_0}{8\rho} (a + b - c) \cos 4\theta + \frac{p_0}{2} (a - b) \cos 2\theta + \\
&+ m\rho \cos \theta + n\rho \sin \theta + \frac{\alpha p_0}{8\rho} (a + b - c) - \frac{p_0}{2} (a + b), \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= -\frac{\alpha p_0}{2\rho} (a + b - c) [1 - \alpha^2] \sin 4\theta + \\
&+ \frac{p_0}{2} (a - b) \left[1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right] \sin 2\theta - \\
&- m\rho \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha^3}{\rho^3} \right) \sin \theta - n\rho \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha^3}{\rho^3} \right) \cos \theta.
\end{aligned} \tag{21}$$

На границе раздела двух областей справедливо

$$\sigma_\rho^p|_{\rho=1} = \sigma_\rho^e|_{\rho=1}; \quad \sigma_\theta^p|_{\rho=1} = \sigma_\theta^e|_{\rho=1}. \tag{22}$$

Для нулевого приближения в упругой области воспользуемся соотношениями

$$\sigma_\rho^{(0)e} = E - \frac{F}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = E + \frac{F}{\rho^2}, \quad E, F = const. \tag{23}$$

Используя граничные условия $\sigma_\rho^e = q$ при $\rho = \infty$, получим

$$\sigma_\rho^{(0)e} \Big|_{\rho=\infty} = E = q. \tag{24}$$

Из (15), (22) – (24) следует

$$F = \frac{p_0 \alpha}{2}. \tag{25}$$

Откуда получим решение в упругой области

$$\sigma_\rho^{(0)e} = q - \frac{p_0 \alpha}{2\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = q + \frac{p_0 \alpha}{2\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \tag{26}$$

Из соотношений (15), (7), (11) следует

$$\alpha = \frac{2(p_0 - q)}{p_0}, \tag{27}$$

тогда радиус пластической зоны определяется соотношением

$$\rho_s^0 = \frac{a}{\alpha} = \frac{ap_0}{2(p_0 - q)}. \tag{28}$$

Компоненты напряжения в упругой зоне в первом приближении с учётом (22) примут вид

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho^{(I)e} &= \alpha p_0(a+b-c) \left[-\frac{1}{2} + 2\alpha\right] \cos 4\theta - \\
&\quad - p_0(a-b) \left[\frac{1}{2} - 3\alpha + \alpha^2\right] \cos 2\theta + \\
&\quad + m \left(\frac{1}{3} - \alpha^3\right) \cos \theta + n \left(\frac{1}{3} - \alpha^3\right) \sin \theta - \\
&\quad - p_0(a+b) \left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}\right] - \frac{\alpha p_0}{8}(a+b-c) \ln \alpha, \\
\sigma_\theta^{(I)e} &= -\frac{\alpha p_0}{8}(a+b-c) \cos 4\theta + \frac{p_0}{2}(a-b) \cos 2\theta + \\
&\quad + m \cos \theta + n \sin \theta + \frac{\alpha p_0}{8}(a+b-c) - \frac{p_0}{2}(a+b), \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= -\frac{\alpha p_0}{2}(a+b-c) [1 - \alpha^2] \sin 4\theta + \\
&\quad + \frac{p_0}{2}(a-b) [1 - \alpha^2] \sin 2\theta - \\
&\quad - m \left(\frac{1}{3} - \alpha^3\right) \sin \theta - n \left(\frac{1}{3} - \alpha^3\right) \cos \theta.
\end{aligned} \tag{29}$$

Применяя к соотношениям (29) формулы разделов (I), (III), (IV), (VI), (VIII), приведенные в [8, стр. 122], получим компоненты напряжения в первом приближении в упругой зоне

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho^{(I)e} &= \frac{p_0(a+b)}{2\rho^2} \left[\alpha - 1 - \frac{\alpha \ln \alpha}{4}\right] + \frac{p_0 \alpha \ln \alpha}{8\rho^2} c + \\
&\quad + \frac{1}{\rho^3} \left(\frac{1}{3} - \alpha^3\right) (m \cos \theta + n \sin \theta) + \\
&\quad + \frac{p_0(a-b)}{2} (1 - \alpha) \left[\frac{3}{\rho^4} + \frac{2(\alpha-2)}{\rho^2}\right] \cos 2\theta + \\
&\quad + \frac{\alpha p_0}{2}(a+b-c) \left[(\alpha-1) \left(\frac{3\alpha-5}{\rho^6} - \frac{3(\alpha-3)}{\rho^4}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{15}{4} \ln \alpha \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{3}{\rho^4}\right)\right] \cos 4\theta, \\
\sigma_\theta^{(I)e} &= -\frac{p_0(a+b)}{2\rho^2} \left[\alpha - 1 - \frac{\alpha \ln \alpha}{4}\right] - \frac{p_0 \alpha \ln \alpha}{8\rho^2} c - \\
&\quad - \frac{1}{\rho^3} \left(\frac{1}{3} - \alpha^3\right) (m \cos \theta + n \sin \theta) - \\
&\quad - \frac{3p_0(a-b)}{2\rho^4} (1 - \alpha) \cos 2\theta - \frac{\alpha p_0}{2}(a+b-c) \times \\
&\quad \times \left[(\alpha-1) \left(\frac{3\alpha-5}{\rho^6} - \frac{\alpha-3}{\rho^4}\right) + \frac{15}{4} \ln \alpha \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4}\right)\right] \cos 4\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \frac{1}{\rho^3} \left(\frac{1}{3} - \alpha^3\right) (m \sin \theta + n \cos \theta) + \\
&\quad + \frac{p_0(a-b)}{2} (1 - \alpha) \left[\frac{3}{\rho^4} + \frac{\alpha-2}{\rho^2}\right] \sin 2\theta + \\
&\quad + \frac{\alpha p_0}{2}(a+b-c) \left[(\alpha-1) \left(\frac{3\alpha-5}{\rho^6} - \frac{2(\alpha-3)}{\rho^4}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{15}{2} \ln \alpha \left(\frac{1}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4}\right)\right] \sin 4\theta.
\end{aligned}$$

Для границы раздела двух областей ρ_s в первом приближении справедливы соотношения

$$\rho_s^{(I)} = \frac{1}{4} \left(\sigma_\theta^{(I)e} - \sigma_\theta^{(I)p} \right) \quad \text{при} \quad \rho = 1.$$

Таким образом, радиус пластической зоны в первом приближении примет вид

$$\begin{aligned}
\rho_s^{(I)} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\alpha p_0 (\ln \alpha - 1)}{8} (a+b-c) + p_0(a+b) \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right] + \left(\frac{\alpha^3}{4} - \frac{1}{3}\right) m \cos \theta + \\
&\quad + \left(\frac{\alpha^3}{4} - \frac{1}{3}\right) n \sin \theta + \frac{p_0(a-b)}{8} (3\alpha - 4) \cos 2\theta + \frac{\alpha p_0}{32} (a+b+c) \times \\
&\quad \times [1 - 8(\alpha-1)^2 - 15 \ln \alpha] \cos 4\theta.
\end{aligned}$$

В работе получены компоненты напряжения в первом приближении в упругой и пластической зоне, для бесконечной тонкой пластины при условии линейной зависимости функции отрыва. Полученное решение не противоречит результатам работ [4-12].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956, 408 с.
- [2] Matveeva A.N., Matveev S.V., Tikhonov S.V., Mishin P.V., Alatirev S.S., Akimov A.P. On limit statically determinated detachment conditions for compressible anisotropic material // Journal of Physics: Conference Series. 2018. 012037.
- [3] Роштова А.Н. О плоском напряженном состоянии анизотропного идеальнопластического материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2007. Т.1. № 3. С. 19–22.
- [4] Роштова А.Н. Об общих предельных условиях при отрыве для сжимаемых анизотропных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 2. С. 131.
- [5] Матвеев С. В. Матвеева А. Н., Тихонов С. В. Деформированное состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двусосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. №1(27). С. 105–114.
- [6] Матвеев С. В. Упругопластическое состояние анизотропной среды, ослабленной горизонтальной цилиндрической полостью, с учетом силы тяжести // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. № 3-1(55). С. 12–18.
- [7] Матвеев С. В., Митрофанова Т. В., Тихонов С. В. Введение в механику предельного и упруго-пластического состояния деформируемых тел // Чебоксары. : Чуваш. гос. пед. ун-т. 2012.
- [8] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела – М. : Наука, 1978. 208 с.
- [9] Роштова А. Н. Растяжение упругопластической анизотропной тонкой пластины, ослабленной круговым отверстием // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. 2007. № 3(55). С. 22–27.
- [10] Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Рыбакова Т. И. Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4 (34). С. 59–65.
- [11] Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Тихонов С. В. Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины с круговым отверстием, подкрепленной включением, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4 (34). С. 95–103.
- [12] Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Тихонов С. В. Равномерное растяжение многослойной тонкой анизотропной пластины с эллиптическим отверстием, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 1 (39). С. 94-101.

V. G. Efremov, S. V. Matveev, A. N. Matveeva, S. V. Tikhonov

UNIFORM STRETCHING OF A THIN INHOMOGENEOUS PLATE WITH A CIRCULAR HOLE, SUBJECT TO ULTIMATE TEARING RESISTANCE

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. The paper considers the elastoplastic state thin plate with a circular hole with uniform tension. Material plates are assumed to be anisotropic. The peel resistance of the material is assumed to be a linear function, depending on the coordinates. The solution is sought by the small parameter method. The solution is determined in the zeroth and first approximations in the elastic and plastic regions.

Keywords: ductility, elasticity, linearization, stress, separation, anisotropy, heterogeneity

REFERENCES

- [1] Hill R. Mathematical theory of plasticity. M.: Gostekhizdat, 1956, 408 p.
- [2] Matveeva A.N., Matveev S.V., Tikhonov S.V., Mishin P.V., Alatirev S.S., Akimov A.P. On limit statically determinated detachment conditions for compressible anisotropic material // Journal of Physics: Conference Series. 2018. pp. 012037.
- [3] Roshtova A. N. On the plane stress state of anisotropic idealoplastic material // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2007. V. 1. Number 3. P. 19–22.
- [4] Roshtova A. N. On general limiting conditions for separation for compressible anisotropic media // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2007. No. 2. pp. 131.
- [5] Matveev S.V. Matveeva A.N., Tikhonov S.V. Deformed state an anisotropic plane weakened by a hole, supported by the inclusion, bounded by an eccentric circle, with biaxial stretching // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2016. №1 (27). pp. 105–114.
- [6] Matveev S.V. Elastic-plastic state of an anisotropic medium weakened by a horizontal cylindrical cavity, taking into account gravity // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2007. No. 3-1 (55). S. 12-18.
- [7] Matveev S.V., Mitrofanova T.V., Tikhonov S.V. Introduction to the mechanics of the limiting and elastoplastic state of deformable bodies. Cheboksary : Chuvash. gosud. ped. un-t, 2012.
- [8] Ivlev D. D., Ershov L. V. The perturbation method in the theory of an elastoplastic body. M.: Science, 1978. 208 p.

Efremov Vyacheslav Genadevich

e-mail: roshtova@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia,

Matveev Sergey Vladimirovich

e-mail: sergio2100@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia,

Matveeva Alena Nikolaevna

e-mail: roshtova@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia,

Tikhonov Sergey Vladimirovich

e-mail: strangcheb@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

-
- [9] Roshtova A. N. Stretching of an elastoplastic anisotropic thin plate weakened by a circular hole // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2007. No 3 (55). pp. 22–27.
- [10] Matveev S.V., Matveeva A.N., Rybakova T.I. Uniform stretching of a thin anisotropic plate, weakened by an elliptical hole, under the condition of resistance to separation // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2017. No 4 (34). pp. 59–65.
- [11] Matveev S.V., Matveeva A.N., Tikhonov S.V. Uniform stretching of a thin anisotropic plate with a circular hole, supported by the inclusion, provided resistance to tearing // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2017. No 4 (34). pp. 95–103.
- [12] Matveev S.V., Matveeva A.N., Tikhonov S.V. Uniform stretching of a multilayer thin anisotropic plate with an elliptical hole, subject to tear resistance // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2019. No 1(39). pp. 94–101.

А. Н. Максимов¹, Е. А. Деревянных¹, Ю. П. Дмитриев¹, Т. В. Митрофанова²

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СЖИМАЕМОГО ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ

¹ Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия

² Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе получены компоненты напряжений в пластической области для пространства из сыщучего материала, ослабленного эллипсоидальной полостью. В данной задаче действуют взаимноперпендикулярные силы на бесконечности при остутствии давлений внутри полости. Задача решена в сферической координатной системе в безразмерных единицах длины.

Ключевые слова: напряжения, деформации, пластичность, эллипсоидальная полость.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.41.3.008

УДК: 539.374

Введение

Во многих отраслях, таких как горное дело, строительная механика и причих немало важное место имеет определение напряженного состояния массива вокруг различного рода выемок и полостей. Определение напряженного состояния пространства из сжимаемого идеально-пластического материала, ослабленного сферической полостью, было приведено в [1]. В [2], [3], [4], [5], [6] были приведены решения задач для сжимаемого упругопластического материала с полостями при соблюдении условий полной пластичности Треска-Сен-Венана. В этих работах были рассмотрены все три случая, удовлетворяющие данным условиям, один из которых соответствовал случаю

© Максимов А. Н., Деревянных Е. А., Дмитриев Ю. П., Митрофанова Т. В., 2019

Максимов Алексей Николаевич

e-mail: alexei.maksimow@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Деревянных Евгения Анатольевна

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Дмитриев Юрий Петрович

e-mail: 14102010olga@mail.ru, кандидат технических наук, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Митрофанова Татьяна Валерьевна

e-mail: mitrofanova_tv@mail.ru, кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.09.2019

со сферической полостью [2], [3], [4], а два других [5], [6] представляли решение аналитической задачи. В [7] было представлено подробное решение для всех трех случаев.

В данной работе рассматривается пространство с эллипсоидальной полостью из сжимаемого идеально пластического материала при взаимноперпендикулярном приложении усилий на бесконечности. Задача решена в сферической системе координат, использован метод малого параметра, величины, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу полости ρ_0 .

Рассматривается массив из сыпучей среды, обладающей свойствами внутреннего трения и сцепления. Условие предельного состояния сыпучей среды берется в виде [8]

$$f(\sigma'_{ij}) = k_0 + a\sigma, \quad (1)$$

где $a = \operatorname{tg} \alpha$ — коэффициент внутреннего трения, α — угол внутреннего трения, σ'_{ij} — напряжения, k_0 — удельное сцепление.

Используем уравнения равновесия [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_\rho - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{\rho\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} ((\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\rho\theta}) &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} (3\tau_{\rho\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Условия пластичности Треска-Сен-Венана [8] с учетом (1):

$$\begin{aligned} (\sigma_\rho - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3)(\sigma_\theta - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3) - \tau_{\rho\theta}^2 &= 0, \\ (\sigma_\theta - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3)(\sigma_\varphi - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3) - \tau_{\theta\varphi}^2 &= 0, \\ (\sigma_\varphi - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3)(\sigma_\rho - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3) - \tau_{\rho\varphi}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а также

$$\begin{aligned} (\sigma_\rho - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3)\tau_{\theta\varphi} &= \tau_{\rho\theta}\tau_{\rho\varphi}, \\ (\sigma_\varphi - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3)\tau_{\rho\theta} &= \tau_{\rho\varphi}\tau_{\theta\varphi}, \\ (\sigma_\theta - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3)\tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\rho\theta}\tau_{\theta\varphi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия:

$$\sigma_\rho l + \tau_{\rho\theta} m + \tau_{\rho\varphi} n = P_\rho, \quad \tau_{\rho\theta} l + \sigma_\theta m + \tau_{\theta\varphi} n = P_\theta, \quad \tau_{\rho\varphi} l + \tau_{\theta\varphi} m + \sigma_\varphi n = P_\varphi, \quad (5)$$

где $\sigma_\rho, \tau_{\rho\theta}, \dots$ — компоненты девиатора напряжения; l, m, n — направляющие косинусы нормали; $P_\rho, P_\theta, P_\varphi$ — проекции усилий на оси ρ, θ, φ ; $\sigma = (\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_\varphi)/3$ — среднее давление.

Решения ищутся в виде рядов по малому параметру δ ($\delta \ll 1$) [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \sigma_\rho^0 + \delta\sigma'_\rho, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \delta\sigma'_\theta, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^0 + \delta\sigma'_\varphi, \\ \tau_{\rho\theta} &= \tau_{\rho\theta}^0 + \delta\tau'_{\rho\theta}, \quad \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\rho\varphi}^0 + \delta\tau'_{\rho\varphi}, \quad \tau_{\theta\varphi} = \tau_{\theta\varphi}^0 + \delta\tau'_{\theta\varphi}. \end{aligned} \quad (6)$$

В качестве известных напряжений в невозмущенном состоянии принимаются [1]

$$\sigma_\theta^0 = \sigma_\varphi^0, \quad \tau_{\rho\theta}^0 = \tau_{\rho\varphi}^0 = \tau_{\theta\varphi}^0 = 0; \quad (7)$$

$$\sigma_{\rho}^{0p} = \frac{k_0}{a} \left(\rho^{-\frac{12a}{3+4a}} - 1 \right), \quad \sigma_{\theta}^{0p} = \sigma_{\varphi}^{0p} = \frac{k_0}{a} \left(\rho^{-\frac{12a}{3+4a}} - 1 \right) = A + D, \quad (8)$$

где $A = (3 + 4a)/(3 - 2a)$, $D = -6k_0/(3 + 4a)$.

Линеаризируя условия пластичности (3) и (4), получим

$$\sigma'_{\rho} = A\tilde{\sigma}', \quad (9)$$

$$\tau'_{\theta\varphi} = 0, \quad (10)$$

где $\tilde{\sigma}' = \sigma'_{\theta} = \sigma'_{\varphi}$. Уравнения равновесия (2) с учетом (10) примут вид [4]

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}^0}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho}(\sigma_{\rho}^0 - \sigma_{\theta}^0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\theta}^0}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{\varphi}^0}{\partial \varphi} = 0. \quad (11)$$

Для решения (11) введем функцию $U(\rho, \theta, \varphi)$ так, чтобы выполнялись:

$$\tilde{\sigma}' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad \tau'_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad \tau'_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho^3 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \quad (12)$$

Тогда первые два уравнения (12) тождественно удовлетворяются, а последнее примет вид [4]

$$-A\rho^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + 2\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0. \quad (13)$$

Решение (13) ищется методом разделения переменных. При этом:

$$U = R(\rho) \times \Theta(\theta) \times \cos m\varphi. \quad (14)$$

Тогда для $R(\rho)$ получим уравнение [3]

$$R'' - \frac{2}{\rho A} R' + \frac{\lambda}{\rho^2 A} R = 0. \quad (15)$$

Получим решение (15):

$$R = C_1 \rho^{\chi_1} + C_2 \rho^{\chi_2}, \quad (16)$$

$$\chi_{21} = \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{\lambda}{A}}, \quad (17)$$

λ , C_1 , C_2 будут определены ниже.

Для $\Theta(\theta)$ получим [3]:

$$\Theta'' + \operatorname{ctg} \theta \cdot \Theta' + \frac{\lambda - m^2}{\sin^2 \theta} = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) является дифференциальным уравнением для присоединенных функций Лежандра. Решая совместно (18), (12) и (9), получим

$$\sigma'_{\rho} = -\frac{A}{\rho^2} R' \Theta \cos m\varphi, \quad \tau'_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho^3} R \Theta' \cos m\varphi, \quad \tau'_{\rho\varphi} = -\frac{m}{\rho^3 \sin \theta} R \Theta \sin m\varphi, \quad (19)$$

где A представлена выше, $R' = \partial R(\rho)/\partial \rho$, $\Theta' = \partial \Theta(\theta)/\partial \theta$.

После линеаризации граничных условий (5), получим [4]

$$\sigma'_{\rho} = \frac{\partial \sigma_{\rho}^0}{\partial \rho} \rho_1, \quad \tau'_{\rho\theta} = \sigma_{\theta}^0 \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta}, \quad \tau'_{\rho\varphi} = \sigma_{\varphi}^0 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \rho_1}{\partial \varphi}. \quad (20)$$

Полагая $\rho = 1$, после совместного решения (20) и (8), получим граничные условия в виде:

$$\sigma'_\rho = B\rho_1(\theta, \varphi), \quad \tau'_{\rho\theta} = -\frac{B}{2} \frac{\partial \rho_1(\theta, \varphi)}{\partial \theta}, \quad \tau'_{\rho\varphi} = -\frac{B}{2 \sin \theta} \frac{\partial \rho_1(\theta, \varphi)}{\partial \varphi}, \quad (21)$$

где $B = -2D$, $\rho_1(\theta, \varphi)$ задает уравнение эллипсоида в первом приближении и определяется $\rho = 1 + \partial \rho_1(\theta, \varphi)$:

$$\rho_1(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} [(c_1 + c_2)(1 - 3 \cos^2 \theta) + (c_1 - c_2) \sin^2 \theta \cos 2\varphi], \quad (22)$$

где

$$c_1 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_3}, \quad c_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_3},$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 — полуоси эллипсоида. Тогда решая совместно (19), (21), (22) и полагая $\rho = 1$, получим:

$$\begin{aligned} R'\Theta \cos m\varphi &= -\frac{B}{2A} [(c_1 + c_2)(1 - 3 \cos^2 \theta) + (c_1 - c_2) \sin^2 \theta \cos 2\varphi], \\ R\Theta' \cos m\varphi &= -\frac{B}{4} \frac{\partial}{\partial \theta} [(c_1 + c_2)(1 - 3 \cos^2 \theta) + (c_1 - c_2) \sin^2 \theta \cos 2\varphi], \\ mR\Theta \sin m\varphi &= \frac{B}{4} \frac{\partial}{\partial \varphi} [(c_1 + c_2)(1 - 3 \cos^2 \theta) + (c_1 - c_2) \sin^2 \theta \cos 2\varphi]. \end{aligned} \quad (23)$$

Общее решение $U(\rho, \theta, \varphi)$ складывается из двух решений:

$$U = U_0 + U_2, \quad (24)$$

где $U_0 = R_0\Theta_0$ — решение при $m = 0$; $U_2 = R_2\Theta_2 \cos 2\varphi$ — решение при $m = 2$. Тогда, решая (23) при $m = 0$ и $m = 2$, получим $\lambda = 6$ — однозначное решение (18). Тогда, решая (15) при $\lambda = 6$, получим

$$R_0 = R_2. \quad (25)$$

Функция U_2 в соответствии с (24) и (25) примет вид

$$U_2 = (c_1 - c_2) \sin^2 \theta \cos 2\varphi (C_1 \rho^{\chi_1} + C_2 \rho^{\chi_2}). \quad (26)$$

После совместного решения (24), (25) и (26), получим:

$$U(\rho, \theta, \varphi) = (C_1 \rho^{\chi_1} + C_2 \rho^{\chi_2}) [(c_1 + c_2)(1 - 3 \cos^2 \theta) + (c_1 - c_2) \sin^2 \theta \cos 2\varphi]. \quad (27)$$

Из граничных условий определяются константы:

$$C_1 = -\frac{AB\chi_1 - 2B}{4A(\chi_2 - \chi_1)} - \frac{B}{4}, \quad C_2 = \frac{AB\chi_1 - 2B}{4A(\chi_2 - \chi_1)}. \quad (28)$$

Подставляя (27) в (20) и принимая во внимание (9) и (10), получим для компонент напряжений в пластической области для пространства из сыпучего материала,

ослабленного эллипсоидальной полостью, выражения

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta}^{\prime p} &= \sigma_{\varphi}^{\prime p} = -\frac{C_1\chi_1\rho^{\chi_1} + C_2\chi_2\rho^{\chi_2}}{\rho^3} \times \\ &\times [(c_1 + c_2)(1 - 3\cos^2\theta) + (c_1 - c_2)\sin^2\theta\cos 2\varphi], \\ \tau_{\rho\theta}^{\prime p} &= \frac{C_1\rho^{\chi_1} + C_2\rho^{\chi_2}}{3\rho^3} \frac{\partial P_2^2(\cos\theta)}{\partial\theta} [3(c_1 + c_2) + (c_1 - c_2)\cos 2\varphi], \\ \tau_{\rho\varphi}^{\prime p} &= -\frac{2(C_1\rho^{\chi_1} + C_2\rho^{\chi_2})}{3\rho^3 \sin\theta} (c_1 - c_2) \sin 2\varphi P_2^2(\cos\theta), \\ \sigma_{\rho}^{\prime p} &= A\sigma_{\theta}^{\prime p}, \quad \tau_{\theta\varphi}^{\prime p} = 0.\end{aligned}\tag{29}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Максимов А. Н. Напряженное состояние идеальнопластического сжимаемого пространства, ослабленного сферической полостью // Сб. тр. Всероссийской НПК "Современное состояние прикладной науки в области механики и энергетики". Чебоксары: Чувашская ГСХА, 2016. С. 592–599.
- [2] Максимов А. Н., Ефремов В. Г. Об определении предельного напряженного состояния в массиве, ослабленном эллипсоидальной полостью // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2001. № 2(21). С. 128–134.
- [3] Максимов А. Н., Пушкаренко Н. Н. К вопросу определения возмущенного состояния идеальнопластического сжимаемого массива, ослабленного сферической полостью // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3(29). С. 117–121.
- [4] Maksimov A. N., Pushkarenko N. N. On determination of perfectly plastic disturbed rock mass state on condition of full plasticity // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. no. 1053. 012052 doi: 10.1088/1742-6596/1053/1/012052.
- [5] Максимов А. Н. Об определении возмущенного состояния массива при условии полной пластичности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4(30). С. 102–107.
- [6] К вопросу определения возмущенного состояния массива, ослабленного полостями / А. Н. Максимов, Н. Н. Пушкаренко, Е. А. Деревянных [и др.] // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 3(33). С. 58–63.
- [7] К вопросу определения предельного напряженного состояния массива, ослабленного полостями / А. Н. Максимов, Н. Н. Пушкаренко, Е. А. Деревянных [и др.] // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 2(36). С. 50–64.
- [8] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.

A. N. Maksimov¹, E. A. Derevyannykh¹, Y. P. Dmitriev¹, T. V. Mitrofanova²

STRESS STATE OF IDEALOPLASTIC COMPRESSIBLE SPACE WEAKENED BY ELLIPSOIDAL CAVITY

¹Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia
²I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. In this work, stress components in the plastic region are obtained for a space of bulk material weakened by an ellipsoidal cavity. In the formulation of this problem at infinity, mutually perpendicular forces are applied, and there is no pressure inside the cavity. The solution to the problem is obtained in a spherical coordinate system in dimensionless units of length.

Keywords: stresses, deformations, plasticity, ellipsoidal cavity.

REFERENCES

- [1] Maximov A. N. Stressed state of idealoplastic compressible space weakened by spherical cavity // Collection of works of the All-Russian NPC. Modern state of applied science in the field of mechanics and energy. Cheboksary: Chuvash GSHA, 2016. P. 592–599. (in Russian).
- [2] Maximov A. N., Efremov V. G. About definition of extreme tension in the massif weakened by an ellipsoidal cavity // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2001. no. 2(21). P. 128–134. (in Russian).
- [3] Maksimov A. N., Pushkarenko N. N. To the question of determining the perturbed state of the idealoplastic compressible massif weakened by the spherical cavity // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2016. no. 3(29). P. 117–121. (in Russian).
- [4] Maksimov A. N., Pushkarenko N. N. On determination of perfectly plastic disturbed rock mass state on condition of full plasticity // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. no. 1053. 012052 doi: 10.1088/1742-6596/1053/1/012052. (in USA).
- [5] Maksimov A. N. On Determining the Perturbed State of the Massif under Condition of Complete Plasticity // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2016. no. 4(30). P. 102–107. (in Russian).
- [6] To the question of determining the perturbed state of the massif weakened by cavities / A. N. Maksimov, N. N. Pushkarenko, E. A. Derevyannih et al. // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2017. no. 3(33). P. 58–63. (in Russian).
- [7] To the issue of determining the maximum stressed state of the massif weakened by cavities / A. N. Maksimov, N. N. Pushkarenko, E. A. Derevyannih et al. // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2018. no. 2(36). P. 50–64. (in Russian).
- [8] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. Moscow: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian).

Maksimov Alexey Nikolaevich, Candidate of Sci. Phys. & Math., Associate Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

Derevyannykh Evgenia Anatolevna, Candidate of Sci. Phys. & Math., Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

Dmitriev Yuri Petrovich, Candidate of Engineering Sciences, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

Mitrofanova Tatiana Valeryevna, Candidate of Sci. Phys. & Math., I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

С. Г. Жилин, Н. А. Богданова, О. Н. Комаров

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ УПЛОТНЕНИЯ ПОРОШКОВОГО ТЕЛА ИЗ ВОСКООБРАЗНОГО МАТЕРИАЛА НА ФОРМИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРЕССОВКИ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Достижение конечных размеров и характеристик прессовок во многом определяется свойствами исходных материалов, степенью деформации и остаточными напряжениями в уплотненном теле после снятия нагрузки. Поскольку воскообразные материалы, преимущественно, не являются конструкционными, то сведений о напряженно-деформированном состоянии получаемых из них прессовок, не вполне достаточно для прогнозирования конечных свойств и размеров последних. Актуальность исследований в этом направлении обусловлена использованием процессов формирования прессованных литейных моделей из воскообразных композиций, применяемых в литье по выплавляемым моделям. Поверхность таких прессовок отличается отсутствием тепловых усадочных дефектов. Однако, в ряде случаев, геометрия прессовок изменяется в результате релаксации уплотненного материала. В работе представлены результаты исследований влияния фракции воскообразного материала и времени его выдержки в нагруженном состоянии на величину остаточных напряжений, которые можно использовать при проектировании пресс-форм.

Ключевые слова: прессовка, воскообразный материал, пористость, деформация, остаточные напряжения, время релаксации, размерно-геометрическая точность, упругий отклик, двухпараметрическая зависимость Кольрауша.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.41.3.009

УДК: 621.74.045:53.09

© Жилин С. Г., Богданова Н. А., Комаров О. Н., 2019

Жилин Сергей Геннадьевич

e-mail: sergeyzhilin1@ Rambler.ru, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Богданова Нина Анатольевна

e-mail: joyful289@inbox.ru, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Комаров Олег Николаевич

e-mail: olegnikolaevitsch@ Rambler.ru, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Широкое распространение литья по выплавляемым моделям в машиностроении обусловлено возможностью получения сложных тонкостенных отливок с размерами соответствующими 3-8-му классам точности [1]. Реализация процесса осуществляется на нескольких основных этапах: получение выплавляемых моделей и модельных блоков, формирование на них керамических оболочек, выплавление модельного материала из оболочек, их прокатка и заливка расплавом металла.

Большое число операций, длительность процесса и высокая стоимость изделий обуславливают недопустимость брака моделей, оболочковых форм и литья в целом [2]. Этап формирования модели в традиционных процессах сопровождается возникновением усадочных дефектов, требующих исправления. Негативное влияние тепловое расширение воскообразной модельной композиции проявляется также на этапе ее выплавления из оболочковой формы. Термическое расширение модельного состава достигает 10-14 % и, в ряде случаев, приводит к частичному или полному разрушению оболочки. Таким образом, учет величины «припуска» на механическую обработку литых заготовок обусловлен как особенностями сплавов, применяемых для получения изделия, так и теплофизическими процессами, сопровождающими нагрев и охлаждение воскообразной массы [3, 4].

Формирование пористости в структуре выплавляемой модели направлено на устранение отмеченных недостатков традиционного процесса. В этой связи перспективным представляется получение этого изделия «холодным» прессованием порошкового воскообразного материала [5], механическая работа в результате уплотнения которого, переходя в тепловую, приводит к локальному повышению температуры в зоне взаимного контакта частиц материала. Управляемый нагрев компонентов порошкового тела осуществляется в направлении от периферии к его центру. По завершении процесса уплотнения прессовка представляет собой конструкцию с распределенной в структуре пористостью, величина которой может достигать 14%. Рост температуры периферийных участков прессовки в результате нагружения и нагрева позволяет получать поверхность изделия с геометрией и шероховатостью, соответствующей формообразующей полости пресс-матрицы [6]. Преимуществом такого способа получения пористости в структуре изделия является отсутствие расширения при тепловом воздействии, связанном с удалением воскообразного материала из керамической формы. К недостатку процесса следует отнести возникновение увеличения внешних размеров прессовки, вызванное релаксацией уплотненного материала после снятия нагрузки. Величина такого упругого отклика в направлении оси прессования ниже значений его тепловой усадки и составляет 0,4-1,2 % [6]. Проблемой для повсеместного использования такого процесса в машиностроении является отсутствие практических сведений о поведении материала при формовке изделий с переменной толщиной стенок и сложной пространственной конфигурацией, определяющей возникновение участков прессовки с различной плотностью и, следовательно, неконтролируемой величиной упругого отклика.

Поведение материалов при экструзии и формовке порошков металлов [7, 8, 9], полимеров [10, 11, 12] или огнеупоров [13] достаточно широко представлены в отечественных и зарубежных источниках. Ввиду того, что воскообразные материалы в

Работа выполнена в рамках государственного задания № 075-00414-19-00.
В работе принимал участие к.ф.-м.н. Потянихин Д.А.

Поступила 20.03.2019

качестве конструкционных рассматриваются крайне редко, а опыт получения прессовок из других материалов сложно интерпретировать для прогнозирования конечных свойств воскообразных прессовок исследования направленные на изучение процессов их формовки представляются в достаточной степени актуальными.

Решение проблемы перераспределения напряжений и релаксации материала заключается в подборе скорости прессования и времени выдержки прессовки в нагруженном состоянии, когда формообразующие элементы пресс-матрицы сомкнуты [14]. В ходе серии предварительных экспериментов установлено, что в условиях, когда интервал скоростей перемещения формообразующих элементов пресс-матрицы составляет 0,25–1,5 мм/сек, возможно получение прессовки с величиной упругого отклика в направлении оси нагружения, не превышающей 1,2%. Условие перемещения прессующего элемента с одинаковой скоростью для разных фракций материала или различной пористости приводит к появлению расхождения в конечных значениях плотности и, следовательно, не позволяет получать прессовки с одинаковым значением упругого отклика для всего диапазона прессовок.

Таким образом, исследование режимов получения пористой прессовки из воскообразных материалов методом «холодного» уплотнения, позволяющих понизить негативное влияние упругого отклика на размерную и геометрическую точность изделий представляет значительный интерес для промышленности. Цель работы - исследование влияния фракции воскообразного материала уплотняемого порошкового тела и времени его выдержки в нагруженном состоянии на формирование остаточных напряжений и упругого отклика получаемой прессовки.

Методы и подходы.

В качестве материала прессовок выбран воскообразный модельный сплав с равным массовым содержанием парафина и стеарина ПС50/50, соответствующий 1-ой классификационной группе [1] с температурой плавления 52°C, определенной в ходе нагрева со скоростью 2 °C/мин при помощи дифференциально-термического анализатора Shimadzu DTG-60H. В этой связи, для достоверности получаемых данных, эксперимент проводился при температуре окружающей среды 20 ± 2 °C. Технологически приемлемым диапазоном фракций воскообразного материала является 0,63–2,5 мм, определенный в ходе предварительных экспериментов, обеспечивающий формирование тонкостенных участков прессовок. Форма частиц воскообразного материала преимущественно хлопьевидная ввиду ее получения рассевом стружки ПС50/50 на ситах модели 026. это обстоятельство обуславливает неприменимость известных методик расчета конечных свойств прессовок [13], ориентированных на использование сфероидальной формы частиц. Реальный процесс получения прессовки уплотнением порошкового тела, как правило, состоит из этапов структурной деформации тела; повышения давления без увеличения плотности с последующей пластической деформацией [14]. На реальных смесях эти этапы могут осуществляться одновременно. Регистрировать величину нагрузки при уплотнении начинают с начала деформации всего объема порошкового тела в условиях, когда смещение межчастичных контактов не происходит. Для осуществления эксперимента порошок ПС50/50 помещали в упругую цилиндрическую пресс-матрицу с диаметром основания $d = 43,3$ мм (рис.1,а). Для устранения арочных эффектов смесь подвергали механической утряске с частотой 3,5 Гц до высоты h_{0i} , соответствующей начала перемещения пресс-пуансона и зависящей от массы засыпки m_i . На рис.1,а этот процесс показан в виде отрезка со

стрелками. Уплотненное таким способом порошковое тело высотой h_{0i} до прессования имеет начальную пористость Π_{0i} .

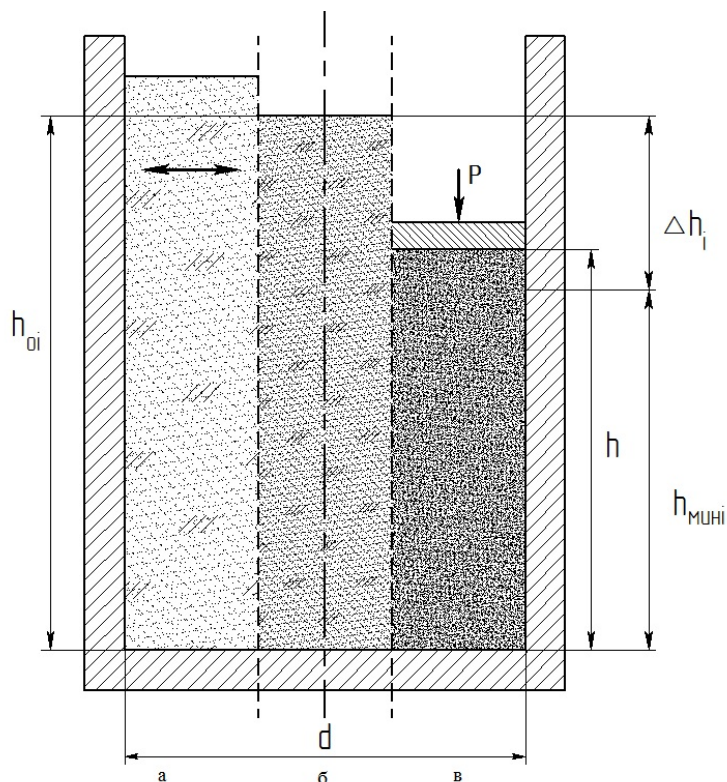


Рисунок 1. Последовательность формирования прессовки: а – состояние свободной засыпки фракции в пресс-форму; б – начало перемещения пресс-пуансона; в – завершение перемещения пресс-пуансона

Траверсу прессующего устройства с пуансоном при уплотнении модельной композиции перемещали до положения (рис. 1, в), соответствующего $h = d$ (где h – конечная высота) для получения прессовок, плотность ρ_i которых на $0 \div 12\%$ меньше плотности воскообразного материала в литом состоянии $\rho_{л} = 921$ г/см³. Поскольку воскообразный материал при $\rho_{л}$ имеет поры, то для корректных расчетов пористости прессовок целесообразным представляется использование значения ρ_{max} , соответствующего плотности воскообразного материала без пор. Удаление воздуха из воскообразного материала осуществляли в ходе компрессионного сжатия ПС50/50 на универсальной испытательной машине AG-X plus Shimadzu и определили $\rho_{max} = 0.942$ г/см³, что на $\tilde{2},3\%$ больше чем $\rho_{л}$. Пористость i -го образца Π_i определяли из выражения:

$$\Pi_i = 1 - \frac{\rho(1 - \Pi_{P_i}/100\%)}{\rho_{max}} \quad (1)$$

где Π_{P_i} – «реальная пористость» i -го образца, % .

Из фракций 0,63 мм и 2,5 мм ПС50/50 получены группы прессовок в интервале $0\% \leq \Pi_{P_i} \leq 12\%$ с шагом 2%. Массу i -го образца m_i соответствующую i -му значению реальной пористости Π_{P_i} определяли из выражения:

$$m_i = V\rho_i = \frac{\pi d^2}{4} h \cdot \rho_{\text{л}} \left(1 - \frac{\Pi_{P_i}}{100\%} \right) = \frac{\pi d^2}{4} h \cdot \rho_{\text{max}} (1 - \Pi_i) \quad (2)$$

Скорость перемещения траверсы при уплотнении, обеспечивающая снижение Π_i на равную величину за единицу времени, задается в методе испытаний тестовой машины AG-X plus Shimadzu. Таким образом, i -му значению h_{0i} , соответствует значение начальной пористости. Скорость перемещения траверсы $v_i = \text{const}$ обеспечивала снижение значения Π до нуля за время $t = 60$ секунд. Для каждой массы m_i навески ПС50/50 высота h_{mini} (рис. 1,в), соответствует полному уплотнению ($\Pi_i = 0$) и, с учетом площади S основания цилиндра формообразующей полости, рассчитывается по формуле:

$$h_{\text{mini}} = \frac{m_i}{\rho_{\text{max}} \cdot S} \quad (3)$$

Скорость перемещения траверсы при уплотнении i -ой навески определяли из выражения:

$$v_i = \frac{h_{0i} - h_{\text{mini}}}{t} = \frac{\Delta h_i}{t} \quad (4)$$

где Δh_i – условное перемещение траверсы с h_{0i} до h_{mini} , мм. Таким образом, сформированы 7 групп прессовок, характеристики которых принадлежат следующим диапазонам значений: $0\% \leq \Pi_{P_i} \leq 12\%$; $0.0223 \leq \Pi_i \leq 0.1396$; $62.9\text{г.} \leq m_i \leq 55.3\text{г.}$; $43.3\text{мм} \leq h_{\text{mini}} \leq 38,1\text{мм}$. Фракция материала существенным образом влияет на значения h_{0i} , Π_{0i} , Δh_i и v_i , которые сведены в таблицу 1. Значения в каждом из представленных интервалов распределяются линейно.

Параметры	Фракция, мм	$\Pi_{P_i}, \%$	
		0%	12%
$h_{0i}, \text{мм}$	0,63	103,0	89,0
	2,5	116,2	103,1
Π_{0i}	0,63	0,57	
	2,5	0,63	
$\Delta h_i, \text{мм}$	0,63	58,7	44,7
	2,5	71,8	58,8
$v_i, \text{мм/мин}$	0,63	59,68	50,02
	2,5	72,78	65,01

Таблица 1. Параметры прессовок

По достижении положения h траверсу фиксировали на протяжении 60 минут, и осуществляли регистрацию напряжений на ней тестовой машиной AG-X plus Shimadzu. По мере удаления воздуха из прессовки и перераспределения плотности в ее объеме напряжения снижаются, но не всегда устраняются полностью, что приводит к изменениям размеров прессовки ввиду упругого возврата O уплотненного материала, определяемого из выражения:

$$O = \frac{(d_i - d)}{d_i} \cdot 100\% \quad (5)$$

где O – упругий возврат материала, %; d и d_i – внутренний диаметр пресс-формы и высота i -ой прессовки, определяемые при помощи цифрового регистратора DIN 863 Vogel с точностью измерения 0,001 мм. Прочность на сжатие уплотненных прессовок в виде цилиндрических образцов, также осуществляемое при помощи тестовой машины AG-X plus Shimadzu со скоростью перемещения траверсы 0,1 мм/с, определяли по завершении выдержки при температуре 20 ± 2 °С в течение 48 часов.

Аппроксимация экспериментальных данных.

При аналитическом описании процесса разгрузки напряжений, возникающих на пуансоне пресс-формы при уплотнении материала, аппроксимировали экспериментальные значения, используя двухпараметрическую зависимость Кольрауша

$$\sigma_i = \sigma_0(\Pi_i) \cdot \exp \left[-(t/\tau)^k \right] \quad (6)$$

где $\sigma_0(\Pi_i)$ – максимальное значение напряжения на пресс-пуансоне для начала разгрузки при заданной пористости Π_i . К недостатку модели Кольрауша можно отнести отсутствие физического смысла ее коэффициентов в сравнении с безразмерным временем релаксации, представленным в реологической модели Максвелла [15]. Все же модель Кольрауша позволяет точнее аппроксимировать экспериментальную кривую релаксации напряжений [16]. Для определения параметров τ и k регрессионной зависимости использовали метод наименьших квадратов, применяемый к преобразованной форме исходной экспоненциальной функции. Для перехода к относительным величинам необходимо обозначить через $\tilde{\sigma}_i$ экспериментальное значение напряжения в момент времени t_i , отнесенное к $\sigma_0(\Pi_i)$: $\tilde{\sigma}_i = \sigma(t_i)/\sigma_0(\Pi_i)$. Нормированные напряжения $\tilde{\sigma}_i$ принадлежат диапазону $0 < \tilde{\sigma}_i \leq 1$, следовательно, $\ln \tilde{\sigma}_i \leq 0$. Показатель рассеяния определяем из выражения:

$$Q = \sum_{i=1}^n \left(\ln(-\ln \tilde{\sigma}_i) - \ln \left(-\ln \left(\exp^{-(t_i/\tau)^k} \right) \right) \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\ln(-\ln \tilde{\sigma}_i) - k \cdot \ln(t_i/\tau) \right)^2 \quad (7)$$

В начале разгрузки относительное напряжение $\tilde{\sigma}_i = 1$, и выражение (7) не существует, что учитывается в регрессионном анализе при выборе экспериментальных точек. Частные производные Q по τ и k приравняем к нулю:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \tau} &= 2 \sum_{i=1}^n \left(\ln(-\ln \tilde{\sigma}_i) - k \cdot \ln(t_i/\tau) \right) \cdot \frac{k}{\tau} = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial k} &= -2 \sum_{i=1}^n \left(\ln(-\ln \tilde{\sigma}_i) - k \cdot \ln(t_i/\tau) \right) \cdot \ln \left(\frac{t_i}{\tau} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Преобразовав (8), получаем систему уравнений в нормальной форме:

$$\left. \begin{aligned} k \cdot \ln \frac{1}{\tau} \cdot n + k \cdot \sum_{i=1}^n \ln t_i &= \sum_{i=1}^n \ln(-\ln \tilde{\sigma}_i), \\ k \cdot \ln \frac{1}{\tau} \cdot \sum_{i=1}^n \ln t_i + k \cdot \sum_{i=1}^n (\ln t_i)^2 &= \sum_{i=1}^n \ln(-\ln \tilde{\sigma}_i) \ln t_i. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Решаем систему уравнений (9) и получаем:

$$k \cdot \ln \frac{1}{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(-\ln \tilde{\sigma}_i) \cdot \sum_{i=1}^n (\ln t_i)^2 - \sum_{i=1}^n \ln(-\ln \tilde{\sigma}_i) \ln t_i \cdot \sum_{i=1}^n \ln t_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n (\ln t_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln t_i \right)^2} \quad (10)$$

$$k = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n \ln(-\ln \tilde{\sigma}_i) \ln t_i - \sum_{i=1}^n \ln(-\ln \tilde{\sigma}_i) \cdot \sum_{i=1}^n \ln t_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n (\ln t_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln t_i \right)^2} \quad (11)$$

Для τ запишем следующее выражение:

$$\tau = \exp \left(\frac{\sum_{i=1}^n \ln(-\ln \tilde{\sigma}_i) \ln t_i \cdot \sum_{i=1}^n \ln t_i - \sum_{i=1}^n \ln(-\ln \tilde{\sigma}_i) \cdot \sum_{i=1}^n (\ln t_i)^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n \ln(-\ln \tilde{\sigma}_i) \ln t_i - \sum_{i=1}^n \ln(-\ln \tilde{\sigma}_i) \cdot \sum_{i=1}^n \ln t_i} \right) \quad (12)$$

Параметры τ и k для уравнения релаксации (6) вычисляем подстановкой данных эксперимента в выражения (10) и (11).

Обсуждение результатов

Напряжения, возникающие на траверсе тестовой машины в ходе уплотнения воскообразного материала ПС50/50 во многом зависят от его фракции и величины Π_{Pi} , изменяющейся в диапазоне 0÷12%. На рис. 2 представлены полиномиальные экспериментальные зависимости амплитуд напряжений, характерных для момента завершения уплотнения материала, когда достигается условие $h = d$, соответствующее началу разгрузки. На рис.2 представлены величины достоверности аппроксимации полиномиальных зависимостей $R_{0,63}^2$ и $R_{2,5}^2$ для фракций ПС50/50 0,63мм и 2,5 мм соответственно.

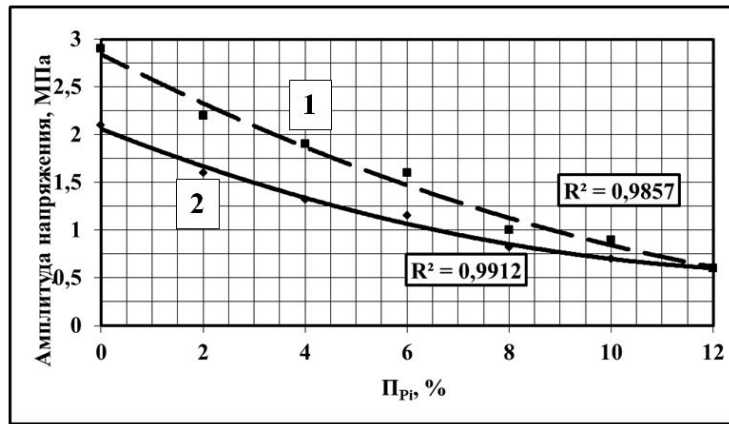


Рисунок 2. Полиномиальные зависимости амплитуд напряжений на траверсе тестовой машины в момент начала разгрузки прессовок из фракций 2,5мм (1) и 0,63мм (2) от величины Π_{Pi} .

Из рис.2 видно, что напряжения, возникающие при уплотнении крупной фракции материала выше, чем при получении прессовки из фракции 0,63, что, в целом, объясняется большей насыпной плотностью крупной фракции материала [17]. С увеличением величины Pr_i различие в значениях амплитуд напряжений для материала из разных фракций исчезают. Экспериментальные значения, характеризующие снижение напряжений на пресс-пуансоне в ходе релаксации прессовок из различных фракций ПС50/50, определенные в абсолютных величинах, за время выдержки 0÷30 минут составляют для фракций 0,63 мм и 2,5 мм 0,33÷0,26 МПа и 0,45÷0,025 МПа соответственно. Установлено, что напряжения разгрузки материала убывают быстрее, чем по экспоненциальному закону. В этой связи для визуализации процесса релаксации целесообразным представляется использование именно двухпараметрической зависимости Кольраушв, представленной уравнением (6), при помощи которых можно получить нормированные значения экспериментальных остаточных напряжений, характерных для диапазона 0÷60 минут времени релаксации материала прессовок с различной пористостью. Параметры релаксации τ и k присутствующие в выражении (6), получаемые по формулам (10) и (11) по отдельности для разных фракций материала, зависят от пористости. Для их определения использовались экспериментальные значения напряжений, полученные в течение 60 минут с момента начала разгрузки. Определено, что для фракции 2,5 мм $\tau = 0,0168$ и $k = 0,1611$, а для фракции 0,63 мм $\tau = 0,0147$ и $k = 0,1553$. Таким образом, параметры τ в зависимости от фракции материала различаются друг от друга на 12,5%, а k на 3,6%. В этой связи от фракции материала в большей мере зависит τ , а показатель степени k является характеристикой материала. Сравнение полиномиальных зависимостей нормированных напряжений для представлено на рисунке 3. На рис.3 также представлены величины достоверности аппроксимации полиномиальных зависимостей $R_{0,63}^2$ и $R_{2,5}^2$ для фракций ПС50/50 0,63мм и 2,5 мм соответственно. Из анализа данных рис.3 видно, что процесс релакса-

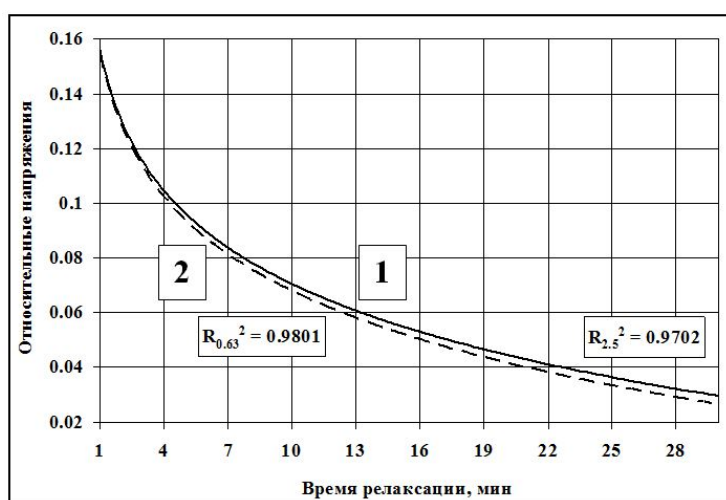


Рисунок 3. Сравнение кривых аппроксимации остаточных (безразмерных) напряжений для фракций 2,5 мм (1) и 0,63 мм (2).

ции напряжений в прессовках, полученных из меньшей фракции происходит быстрее во всем диапазоне значений Pr_i . Прессовки, получаемые из ПС50/50 фракции 2,5

более напряжены, что в немалой степени обуславливает их прочностные и размерные характеристики. Более напряженные прессовки, предположительно, будут иметь меньшую прочность и большее значение упругого возврата уплотненного материала. Экспериментально установлено, что в диапазоне значений $0\% \leq P_{Pi} \leq 12\%$ прочность на сжатие образцов из фракции 0,63 мм $\sigma_{сж0,63}$ снижается с 0,78 МПа до 0,36 МПа, а образцов из фракции 2,5 мм $\sigma_{сж2,5}$ снижается с 0,63 МПа до 0,25 МПа соответственно. Величина упругого возврата экспоненциально убывает по мере увеличения P_r , с 0 до 12% и времени выдержки материала под нагрузкой для прессовок из фракции 0,63 мм $O_{0,63}$ и составляет от 0,62% до 0,01%, а для прессовок из фракции 2,5 мм $O_{2,5}$ составляет от 0,65% до 0,02%. В целом, следует отметить, что значения $O_{0,63}$ и $O_{2,5}$ изменяются аналогично графику нормированных напряжений, представленному на рис.3, а после 30 минут выдержки существенных изменений не претерпевают.

Выводы.

В ходе эксперимента установлено, что применение крупной фракции воскообразного материала 50/50 порошкового тела приводит к росту напряжений при уплотнении, повышенным значениям остаточных напряжений и величины упругого возврата прессовки, определяющей ее геометрию. Следует отметить, что прочность таких прессовок ниже, чем при использовании фракции 0,63 мм. Интенсивное снижение величины упругого возврата материала прессовки замедляется в течение 30 минут. Фракция материала заметного влияния на величину O не оказывает.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гаранин В.Ф., Иванов В.Н., Казеннов С.А. Литье по выплавляемым моделям / под ред. В.А. Озерова. Москва: Машиностроение, 1994. 448 с.
- [2] Анализ причин брака при производстве стальных корпусных отливок посредством СКМ ЛП LVMFLOW / Т.Н. Сушко, А.С.Леднев, Т.В. Пашнева [и др.] // Вестник МГТУ им. Г. И. Носова. 2002. № 1. С. 26–29.
- [3] Радцевич Х.М. Расчет припусков и межоперационных размеров в машиностроении : учеб. пособие. Москва: Высшая школа, 2004. 272 с.
- [4] Модельные составы для точного литья / Н.Р. Прокопчук, Н.Д. Горщарик, А.Ю. Клюев [и др.] // Вестні Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя хімічных навук. 2015. № 4. С. 122–128.
- [5] Жилин С.Г., Комаров О.Н., Соснин А.А. Моделирование процессов обработки материалов давлением на основе оценки напряженно-деформированного состояния прессовок из полимерных композиций с использованием метода конечных элементов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. 2017. № Том 19 №2. С. 48–66.
- [6] Жилин С.Г., Комаров О.Н., Соснин А.А. [и др.]. Способ изготовления выплавляемых моделей.
- [7] Цеменко В.Н. Фук Д.В. Ганин С.В. Определение реологических характеристик и моделирование процесса экструзии порошковых и пористых материалов. часть 3: процесс горячей экструзии // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 2016. № 4 (254). С. 182–190.
- [8] Borovkov A.I. S. D. Non-linear Finite Element Modeling of the Titanium Briquettes Hot Extrusion Process // Computational Mechanics. 2004. no. 4. P. 29–35.
- [9] Modelling of Powder die compaction / P. Brewin, O. Coube, P. Doremus et al. London: Springer, 2008.
- [10] Аулов В.А. Влияние давления на интенсивность полос поглощения в ик спектрах прессованного порошка полиэтилена // Оптика и спектроскопия. 2009. Т. 106, № 2. С. 262–263.
- [11] Поведение при трении смесей несовместимых полимеров сверхвысокомолекулярного полиэтилена и полиметилметакрилата, полученных в среде сверхкритического диоксида углерода / А.П. Краснов, Э.Е. Саид-Галиев, О.В. Афоничева [и др.] // Трение и износ. 2007. Т. 28. С. 288–295.

- [12] Мурашов В.В. К вопросу определения упругих и прочностных свойств полимерных композиционных материалов акустическим комплексным методом // Деформация и разрушение материалов. 2014. № 11. С. 39–45.
- [13] Прибытков Г.А. Коржова В.В. Коростелева Е.Н. Прочностные свойства и особенности разрушения композитов систем Al–Cr и Al–Cr–Si, полученных горячим уплотнением порошковых смесей // Деформация и разрушение материалов. 2013. № 8. С. 13–20.
- [14] Жилин С.Г. Сапченко И.Г. Комаров О.Н. Упругий отклик прессовок при деформировании гетерогенных порошковых материалов // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4. С. 163–168.
- [15] Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа максвелла: общие свойства семейства кривых релаксации и ограничения на материальные функции // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 6. С. 31–55.
- [16] Жилин С.Г. Комаров О.Н. Потянихин Д.А. Соснин А.А. Экспериментальное определение параметров регрессионной зависимости Кольрауша для пористых прессовок из воскообразных порошковых композиций. // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. № 2.
- [17] Жилин С.Г. Богданова Н.А. Комаров О.Н. Влияние гранулометрического состава и скорости выдавливания воскообразной композиции на геометрию длинномерной прессовки при мундштучном экструдировании // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. С. 54–64.

S.G. Zhilin, N.A. Bogdanova, O.N. Komarov

INFLUENCE OF PARAMETERS OF THE COMPACTING OF POWDER BODY FROM WAX-LIKE MATERIAL ON THE FORMING OF RESIDUAL STRESSES OF PRESSING

Institute of Machinery and Metallurgy of Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation

Abstract. The achievement of the final dimensions and characteristics of the pressing is largely determined by the properties of the original materials, the degree of deformation, and residual stresses in the compacted body after load removal. Since wax-like materials are mainly not construction materials, information about the stress-strain state of the pressing obtained from them is not quite enough to predict the final properties and sizes of the latter. The relevance of research in this direction is due to the use of the processes of forming pressed foundry models from wax-like compositions used in investment casting. The surface of such pressing is characterized by the absence of thermal shrinkage defects. However, in some cases, the geometry of the pressing changes as a result of relaxation of the compacted material. The results of researches of effect of the fraction of the wax-like material and its exposure time in the loaded state on the value of residual stresses that can be used in the design of molds are presented in the paper.

Keywords: pressing, wax-like material, porosity, deformation, residual stresses, time of relaxation, dimensional and geometric accuracy, elastic response, two-parameter dependence of Kohlrausch.

REFERENCES

- [1] Ozerov V. A. Lost wax casting. 4th ed., Rev. and add. Moscow: Mashinostroyeniye, 1994. 448 p. (in Russian).
- [2] Sushko T.N., Lednev A.S., Pashneva TV., Rudneva I.G. Analysis of the causes of defects in the production of steel case castings by means of SCM LP LVMFLOW // Vestnik MGTU im. G.I. Nosova. 2002. No. 1. pp. 26-29. (in Russian).
- [3] H.M. Radtsevich [et al.]; under the general. ed. V.A. Timiryazev. Calculation of allowances and interoperational dimensions in mechanical engineering: textbook. Allowance. Moscow: Vysshaya shkola, 2004. 272 p. (in Russian).
- [4] Prokopchuk N.R., Gorscharik N.D., Klyuev A.Yu., Kozlov N.G., Rozhkova E.I., Latyshevich I.A., Bakovich N.A. Model compositions for precision casting // News of the National Academy of Sciences of Belarus. Series of Chemical Sciences, 2015. No. 4. pp. 122-128. (in Russian).
- [5] Zhilin S.G., Komarov O.N., Sosnin A.A. Modeling of processes for processing materials by pressure based on the assessment of the stress-strain state of compacts from polymer compositions using the finite element method // Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Engineering, materials science. 2017. Volume 19 No. 2. pp. 48-66; (in Russian).
- [6] Zhilin S.G., Komarov O.N., Sosnin A.A. Panchenko G.L. A method of manufacturing investment castings RF Patent No. 2632051. 05/13/2016; Publ. 10/02/2017, Bull. Number 28. (in Russian).
- [7] Tsemenko V.N., Fuk D.V., Ganin S.V. Determination of rheological characteristics and modeling of the extrusion of powder and porous materials. part 3: the process of hot extrusion // Scientific and

Zhilin Sergey Gennadevich, Ph. D. in Engineering Sciences, Assoc. Prof., Leading Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Bogdanova Nina Anatolievna, Junior Researcher. Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Komarov Oleg Nikolaevitsch, Ph. D. in Engineering Sciences, Assoc. Prof., Leading Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

- Technical Journal of St. Petersburg State Polytechnic University, 2016. No. 4 (254). pp. 182-190. (in Russian).
- [8] Borovkov A.I., Shevchenko D.V. Non-linear Finite Element Modeling of the Titanium Briquettes Hot Extrusion Process // *Computational Mechanics*, 2004. No. 4. pp. 29-35.
- [9] Brewin P.R., Coube O., Doremus P., Tweed J.H. *Modelling of Powder die compaction*. London: Springer, 2008.
- [10] Aulov V.A. The effect of pressure on the intensity of absorption bands in the IR spectra of pressed polyethylene powder // *Optics and Spectroscopy*, 2009. V. 106. No. 2. pp. 262-263. (in Russian).
- [11] Krasnov A.P., Said-Galiev E.E., Afonicheva O.V., Stakhanov A.I., Mit V.A., Nikolaev A.Yu., Atamanov A.V., Klabukova L.F. , Kalinichenko V.A., Topolnitsky O.R., Cassis M., Khokhlov A.R. The friction behavior of mixtures of incompatible polymers of ultra-high molecular weight polyethylene and polymethyl methacrylate obtained in a medium of supercritical carbon dioxide // *Friction and Wear*. 2007. V. 28. No. 3. pp. 288-295. (in Russian).
- [12] Murashov V.V. On the issue of determining the elastic and strength properties of polymer composite materials by the acoustic complex method // *Deformation and fracture of materials*. 2014. No. 11. pp. 39-45. (in Russian).
- [13] Pribytkov G.A., Korzhova V.V., Korosteleva E.N. Strength properties and fracture features of composites of Al – Cr and Al – Cr – Si systems obtained by hot compaction of powder mixtures // *Deformation and fracture of materials*. 2013. No. 8. pp. 13-20. (in Russian).
- [14] Zhilin S.G., Sapchenko I.G., Komarov O.N. The elastic response of compacts during deformation of heterogeneous powder materials // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2015. No. 4. pp. 163–168. (in Russian).
- [15] Khokhlov A.V. A nonlinear model of Maxwell-type viscoelasticity: general properties of a family of relaxation curves and restrictions on material functions // *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Natural Sciences*. 2017. No 6. pp. 31-55. (in Russian).
- [16] Zhilin S.G., Komarov O.N., Potyanikhin D.A., Sosnin A.A. Experimental determination of the parameters of the regression dependence of Kohlrausch for porous compacts from waxy powder compositions // *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2018. no. 2. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-2-1732>. (in Russian).
- [17] Zhilin S.G., Bogdanova N.A., Komarov O.N. Influence of granulometric composition and extrusion ratio of the waxy materials on the geometry of extended compact by extrusion forming// *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2018. No. 4 (38). pp. 54-64. (in Russian).

А. М. Буруруев, В. М. Козинцев, Е. В. Мурашкин, А. Л. Попов, Д. А. Челюбеев,
А. В. Ченцов, П. С. Бычков

О ПОЛЗУЧЕСТИ И РЕЛАКСАЦИИ В АДДИТИВНО ИЗГОТОВЛЕННЫХ ОБРАЗЦАХ ИЗ ФОТОПОЛИМЕРНОГО МАТЕРИАЛА

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В настоящей статье обсуждается релаксация напряжений и ползучесть в образце, полученном аддитивным способом. Образец изготавливается методом послойной фотополимеризации. Эксперимент представляет собой сжатие двух противоположных граней образца. Предложена схема экспериментальной установки и метод измерения параметров напряженно-деформированного состояния. Предложена аппроксимация кривой ползучести. Метод спекл-интерферометрии используется для исследования ползучести образца без нагрузки в процессе релаксации напряжений. Получены закономерности между релаксацией напряжений в фотополимере и ползучестью.

Ключевые слова: 3D-печать, поверхностный рост, остаточное напряжение, ползучесть, релаксация, фотополимер, кривая релаксации

DOI: 10.26293/chgpu.2019.41.3.010

УДК: 539.374

Введение

Изготовление изделий путем добавления нового материала широко используется в современной инженерной практике [1]. К таким способам аддитивного производства

© Буруруев А. М., Козинцев В. М., Мурашкин Е. В., Попов А. Л., Челюбеев Д. А., Ченцов А. В., Бычков П. С. 2019

Буруруев Алексей Михайлович

e-mail: alexey@buruguev.ru, ведущий инженер лаборатории моделирования в МДТТ ИПМех РАН, г. Москва, Россия.

Козинцев Виктор Михайлович

e-mail: kozincev@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций ИПМех РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в МДТТ ИПМех РАН, г. Москва, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 17-19-01257.

Поступила 09.09.2019

относятся: лазерная стереолитография, селективное лазерное спекание, электронно-лучевая плавка, моделирование методом наплавления, метод многоструйного моделирования, изготовление объектов с использованием ламинирования, 3D-печать, DLP (Digital Light Processing — цифровая обработка светом) [2], компьютерная осевая литография, послойное бетонирование.

Основным расходным материалом для методом DLP является жидкий фотополимер, воскообразные субстанции, а также материалы. В 3D-принтерах этого типа используется схожая система облучения световым потоком в соответствии с заданной программой на расходный материал. Под действием ультрафиолета фотополимер затвердевает, образуя слой будущего изделия. Моделирование продолжается слой за слоем, пока объект не будет полностью готов.

Проявление свойств ползучести и релаксации напряжений в разной степени характерно для всех конструкционных материалов [3, 4, 5, 6]. Наиболее заметно их проявление в пластических материалах. Не исключением являются и материалы, используемые в аддитивных технологиях [7, 8, 9].

Известны и регламентированы в стандартах испытания на ползучесть и релаксацию. Для этого создаются идеализированные условия, например, жесткого заземления краев нагруженного образца, или весового нагружения свободно висящего образца, обеспечивающие проявление только одного из этих свойств. Однако в большинстве случаев на практике нагруженные элементы находятся в упругом контакте с другими элементами конструкции. В результате происходит одновременное и взаимовлияющее проявление свойств как релаксации, так и ползучести их материалов.

В настоящей работе рассматриваются как чисто релаксационные свойства образцов из фотополимерных материалов, изготовленных послойно методом трехмерной печати с помощью 3D принтера DLP-типа, так и проявления этих свойств в условиях ползучести. Для этого была собрана измерительная установка (рис. 1), состоящая из тисков, в которых зажимался образец 2, S-образного датчика силы 1, данные с которого поступали на силоизмерительный преобразователь ТЕНЗО-М и далее обрабатывались в ЭВМ, упругой пластины 4 между силоизмерительным датчиком и образцом, выступающий край которой контактировал с субмикронным датчиком перемещений 3, также соединенным с ЭВМ.

© Буруруев А. М., Козинцев В. М., Мурашкин Е. В., Попов А. Л., Челюбеев Д. А., Ченцов А. В., Бычков П. С. 2019

Попов Александр Леонидович

e-mail: rorov@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций ИПМех РАН, г. Москва, Россия.

Челюбеев Дмитрий Анатольевич

e-mail: rorov@ipmnet.ru, младший научный сотрудник лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций ИПМех РАН, г. Москва, Россия.

Ченцов Александр Викторович

e-mail: chentsov@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник механики технологических процессов, г. Москва, Россия.

Бычков Павел Сергеевич

e-mail: bychkov@ipmnet.ru, младший научный сотрудник лаборатории моделирования в МДГТ, г. Москва, Россия.

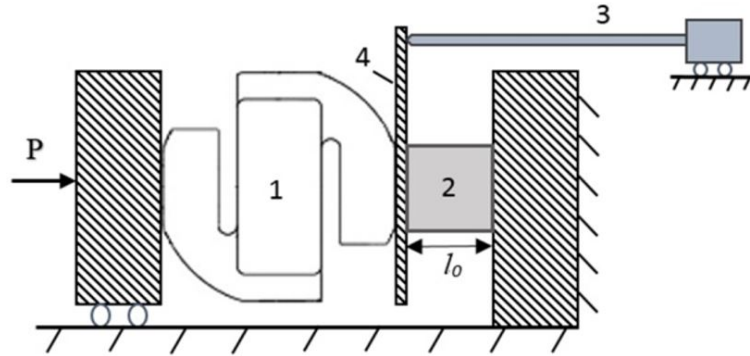


Рис. 1. Схема установки для определения кривой релаксации: 1 – S-образный тензодатчик, 2 – фотополимерный образец, 3 – субмикронный датчик перемещений, 4 – упругая пластина.

Образцы в форме параллелепипедов с размерами $20 \times 20 \times 40$ мм и кубиков с длиной грани 20 мм были напечатаны из фотополимера АВ 710 В. Послойная печать производилась с постоянной толщиной слоя City0,1 мм и пятнадцатисекундной засветкой каждого слоя. После снятия образцов с подложки выполнялась их дополимеризация путем засвечивания ртутной лампой до стадии ликвидации липкости образцов. Получаемый в результате процесса полимеризации материал обладал свойствами упругости и ползучести [3].

Оценка уровня нагружения образца, при котором приложенные нагрузки не приводили бы к появлению пластических деформаций, делалась на основании диаграммы сжатия одного из образцов, получаемой с помощью пресса ДТС-06-100. Непосредственное выполнение экспериментов проводилось с исходной сжимающей силой 7000 Н, что соответствовало среднему значению зоны упругости на диаграмме. На рис. 2 приведены экспериментальные зависимости напряжения от времени $\sigma(t)$ на начальном этапе – 10 минут (рис. 2а) и на продолжительном интервале времени – 5 часов (рис. 2б).

Полученная кривая похожа на известные зависимости для полимерных образцов [3] и может быть аппроксимирована по методике [10] в виде суммы экспонент с привлечением четырех характерных времен релаксации:

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^4 \sigma_k(t), \sigma_k(t) = a_k \exp\left(-\frac{t}{\tau_k}\right), \quad k = 1, \dots, 4, \quad (1)$$

где a_k, τ_k – аппроксимирующие постоянные; t – время.

Постоянные a_k, τ_k подбирают так, чтобы каждое из слагаемых суммы (1) корректно аппроксимировало соответствующий участок релаксации экспериментальной кривой. Результаты такого подбора приведены на рис. 3.

Вычисленные значения τ_k характерных времен релаксации можно представить в виде ступенчатой функции $\tau(t)$ (рис. 4):

$$\tau(t) = \sum_{k=1}^4 \tau_k [H(t - t_{k-1}) - H(t - t_k)], \quad t_0 = 0, t_4 = T,$$

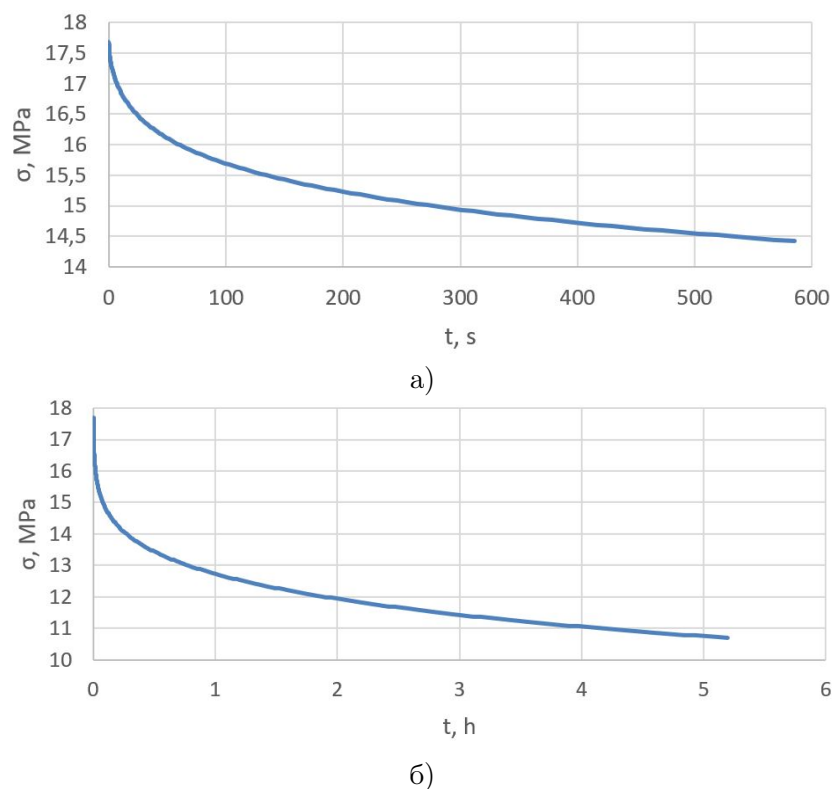


Рис. 2. Кривая релаксации напряжения в фотополимерном образце: а) на начальном этапе (0-10 мин); б) на длительном промежутке (0 – 5 ч).

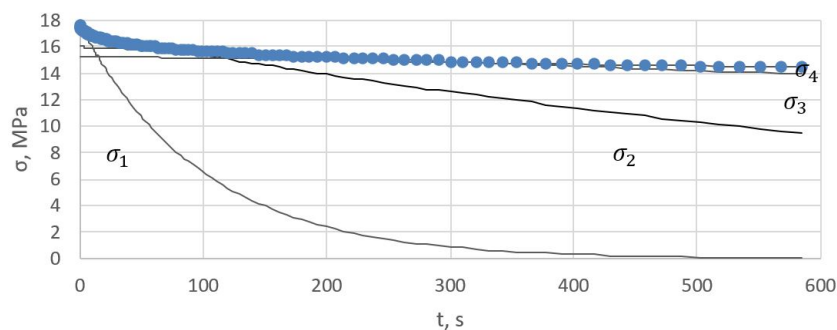


Рис. 3. Аппроксимации $\sigma_k(t)$ кривой релаксации, приведенной на рис. 2а.

где $H(t)$ – функция Хевисайда; T – полное время релаксации для кривой, изображенной на рис. 2а; t_k – моменты времени, определяющие интервалы, в которых функции $\sigma_k(t)$ наиболее близки к аппроксимируемой $\sigma(t)$. Следует отметить близкий к линейному закон изменения среднего (по участкам) времени релаксации (см. рис. 4).

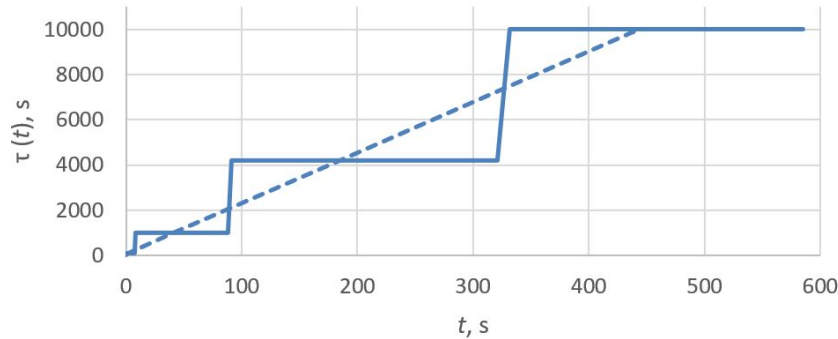


Рис. 4. Аппроксимации ступенчатыми функциями четырёх времён релаксации на характерных участках экспериментальной кривой релаксации; центральные точки участков с одинаковыми значениями времён релаксации соединены штриховой линией.

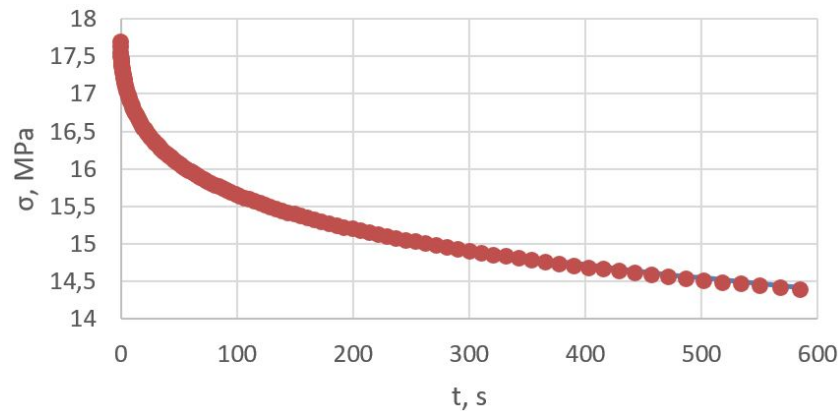


Рис. 5. Кривая релаксации и ее адаптивная аппроксимация.

Из этого следует, что наборы времён релаксации, выражающиеся ступенчатыми функциями, могут быть представлены линейными зависимостями. Это даёт возможность адаптивной аппроксимации в виде:

$$\sigma(t) = \sigma_0(t_0) \exp\left(-\frac{t-t_0}{a(t-t_0)+b}\right), \quad (2)$$

где $\sigma_0(t_0)$ - напряжение в момент t_0 начала релаксации.

Функция (2) содержит всего два аппроксимирующих параметра a , b . В качестве иллюстрации на рис. 5 представлена такая аппроксимация сплошной тонкой линией.

Таким образом, предложенная адаптивная аппроксимация обеспечивает достаточную степень приближения к экспериментально полученной кривой релаксации напряжения в фотополимерном образце.

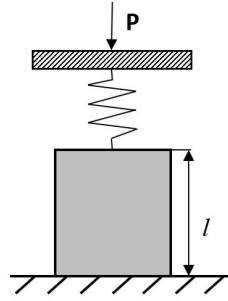


Рис. 6. Схема нагружения образца.

При сжатии образца через упругую пружину, в качестве которой выступает s-образный силоизмерительный датчик, релаксация напряжений в образце после остановки нагружения сопровождается его дополнительным сжатием, вызванным распрямлением s-образной пружины ввиду снижения сжимающей нагрузки. Это сжатие можно трактовать как ползучесть образца в условиях релаксации напряжений.

На рис. 6 изображена схема нагружения образца длиной l и площадью поперечного сечения F силой P через упругий элемент жесткостью c , при которой проявляется эффект ползучести образца в условиях релаксации напряжений. В соответствии с этой схемой считаем, что вначале происходит быстрое нагружение образца до значения силы $P = P_0$, вызывающей в образце напряжение $\sigma_0 = P_0/F$. При этом произойдет упругое сжатие образца на величину

$$\Delta l_e = \frac{P_0 l}{EF},$$

где E - модуль упругости материала образца.

Если бы образец был абсолютно жестким, то сокращение длины пружины при сжатии ее силой P_0 произошло бы на величину $u_0 = P_0/c$. Ввиду податливости образца, это перемещение будет меньше на величину Δl_e .

Следовательно, к моменту остановки нагружения имело место равенство:

$$\left(u_0 - \frac{\sigma_0 l}{E}\right) c = \sigma_0 F \quad (3)$$

После остановки нагружения образец переходит в стадию релаксации, совмещенной с ползучестью, в процессе которой возникает деформация $\varepsilon_r(t)$ и соответствующее ей сжатие образца $\Delta l_r = l\varepsilon_r(t)$. Тогда в момент времени t после начала релаксации сжатие пружины будет определяться равенством:

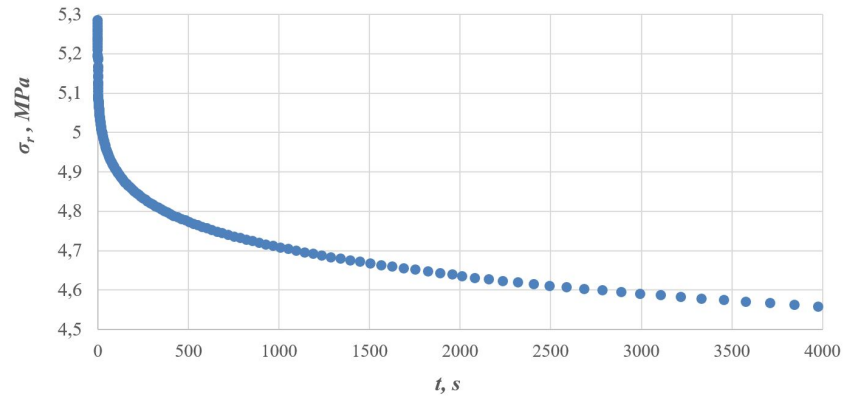
$$[u_0 - l\varepsilon_r(t)] c = \sigma_r(t) F \quad (4)$$

Исключая начальное смещение u_0 из равенств (3), (4), получим линейную зависимость между релаксирующим напряжением $\sigma_r(t)$ и деформацией ползучести $\varepsilon_r(t)$:

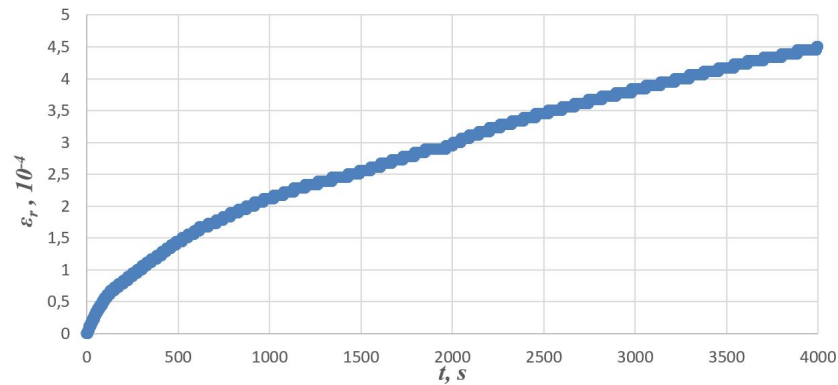
$$\sigma_r(t) = \sigma_0 - \frac{cl}{F} [\varepsilon_r(t) - \varepsilon_0], \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}. \quad (5)$$

На рис. 7 представлены, полученные экспериментально, зависимости $\sigma_r(t)(a)$, $\varepsilon_r(t) - (b)$ и вычисленная по этим кривым $\sigma_r(\varepsilon_r) - (c)$, нанесенная сплошной линией, в сопоставлении с теоретической зависимостью, построенной по формуле (5), нанесенной

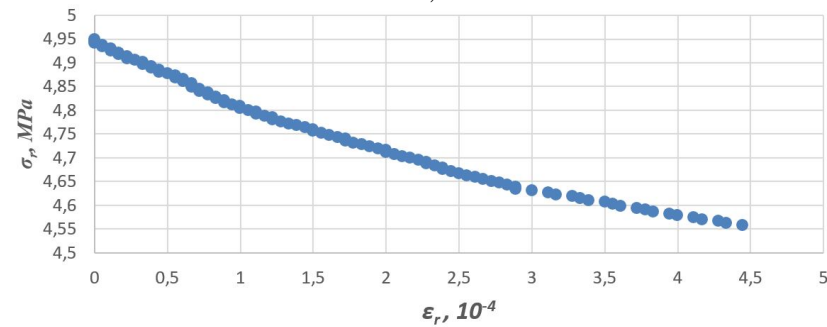
пунктирной линией; значение для жесткости s-образного силоизмерительного датчика было вычислено по данным документации к нему, где говорилось, что продольное смещение датчика при максимально допустимой нагрузке в $2T$ составляет 0,4 мм.



а)



б)



с)

Рис. 7.

Отметим, что в формуле (5), в отличие от стадии упругой разгрузки, снижение напряжения в образце происходит при росте его деформации. Подобный эффект был описан ранее в [10], где рассматривался стержень, находящийся в состоянии ползучести, соединённый с предварительно растянутой пружиной.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution // *Business horizons*. 1990. Vol. 55. P. 155–162.
- [2] Wu G.-H., Hsu S.-h. polymeric-based 3D printing for tissue engineering // *Journal of medical and biological engineering*. 2015. Vol. 35, no. 3. P. 285–292.
- [3] Работнов Ю. Н., Милейко С. Т. Кратковременная ползучесть. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970.
- [4] Бажин А. А., Мурашкин Е. В. Математическое моделирование усложненных реологических свойств материалов в условиях больших деформаций // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2010. № 2. С. 71–76.
- [5] Bazhin A., Murashkin E. Creep and stress relaxation in the vicinity of a micropore under the conditions of hydrostatic loading and unloading // *Doklady Physics / Springer*. Vol. 57. 2012. P. 294–296.
- [6] Bazhin A., Burenin A., Murashkin E. Simulation of the process of the accumulation of large irreversible deformations under plastic flow and creep conditions // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2016. Vol. 80, no. 2. P. 182–189.
- [7] Manzhirov A. V. Advances in the theory of surface growth with applications to additive manufacturing technologies // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 173. P. 11–16.
- [8] Application of the probe hole method for diagnostics of shrinkage stresses in products of additive technologies / A. Popov, V. Kozintsev, A. Levitin et al. // *IUTAM Symposium on Mechanical design and analysis for AM technologies. Symposium materials (Moscow, Russia, August 20-25. Vol. 2018. 2018. p. 66.*
- [9] Determination of Residual Stresses in Products in Additive Production by the Layer-by-Layer Photopolymerization Method / P. Bychkov, V. Kozintsev, A. Manzhirov et al. // *Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 52, no. 5. P. 524–529.
- [10] Goldstein R., Popov A., Chentsov A. Calculation experimental technique for predicting the relaxation properties of thin polymer fibers during long-term loading // *Russian Metallurgy (Metally)*. 2016. Vol. 2016, no. 10. P. 951–955.

A. M. Bururuev, V. M. Kozintsev, E. V. Murashkin, A. L. Popov, D. A. Chelubeev,
A. V. Chentsov, P. S. Bychkov

**ON CREEP AND RELAXATION IN ADDITIVE MANUFACTURED PARTS
FROM PHOTOPOLYMER MATERIAL**

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.*

Abstract. In present paper the stress relaxation and creep in additive produced sample is discussed. The sample is manufactured by by layer-by-layer photopolymerization. The experiment is the compression in two opposite faces. The scheme of experimental facility and measurement method are proposed. Stress relaxation is are plotted. The approximation of creep curve is discussed. The speckle-interferometry technique is used for a creep of load-free faces of the sample during stress relaxation process observation. The ratio between stress relaxation in a photopolymer and creep are obtained.

Keywords: 3D printing, surface growth, residual stress, creep, relaxation, photopolymer, relaxation curve

REFERENCES

- [1] Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution // Business horizons. 1990. Vol. 55. P. 155–162.
- [2] Wu G.-H., Hsu S.-h. Polymeric-based 3D printing for tissue engineering // Journal of medical and biological engineering. 2015. Vol. 35, no. 3. P. 285–292.
- [3] Bazhin A., Murashkin E. Creep and stress relaxation in the vicinity of a micropore under the conditions of hydrostatic loading and unloading // Doklady Physics / Springer. Vol. 57. 2012. P. 294–296.

Bururuev Aleksei Mikhailovich

e-mail: alexey@bururuev.ru, Leading Engineer of the Laboratory for Modeling in Mechanics of Solids IPMech RAS, Moscow, Russia.

Kozintsev Viktor Mikhailovich

e-mail: kozincev@amil.ru, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Laboratory of Mechanics and Fracture of Materials and Structures, IPME RAS, Moscow, Russia.

Murashkin Evgenii Valerievich

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Modeling Laboratory at MDTT IPMeh RAS, Moscow, Russia.

Popov Alexander Leonidovich

e-mail: popov@ipmnet.ru, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Researcher, Laboratory of Mechanics and Fracture of Materials and Structures, IPME RAS, Moscow, Russia.

Chelyubeev Dmitry Anatolyevich

e-mail: popov@ipmnet.ru, Junior Researcher, Laboratory of Mechanics and Fracture of Materials and Structures, IPMech RAS, Moscow, Russia.

Chentsov Aleksandr Viktorovich

e-mail: chentsov@ipmnet.ru, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Mechanics of Technological Processes, Moscow, Russia.

Bychkov Pavel Sergeevich

e-mail: bychkov@ipmnet.ru, Junior Researcher, Modeling Laboratory at MDTT, Moscow, Russia.

-
- [4] Bazhin A., Burenin A., Murashkin E. Simulation of the process of the accumulation of large irreversible deformations under plastic flow and creep conditions // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2016. Vol. 80, no. 2. P. 182–189.
 - [5] Bazhin A. A., Murashkin E. V. Mathematical modeling of the complicated rheological properties of materials under conditions of large deformations // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after YA Yakovleva. Series: Limit State Mechanics*. 2010. no. 2. P. 71–76.
 - [6] Manzhirov A. V. Advances in the theory of surface growth with applications to additive manufacturing technologies // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 173. P. 11–16.
 - [7] Application of the probe hole method for diagnostics of shrinkage stresses in products of additive technologies / A. Popov, V. Kozintsev, A. Levitin et al. // *IUTAM Symposium on Mechanical design and analysis for AM technologies. Symposium materials (Moscow, Russia, August 20-25. Vol. 2018. 2018. p. 66.*
 - [8] Determination of Residual Stresses in Products in Additive Production by the Layer-by-Layer Photopolymerization Method / P. Bychkov, V. Kozintsev, A. Manzhirov et al. // *Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 52, no. 5. P. 524–529.
 - [9] Rabotnov Y. N., Mileyko S. T. *Short-Term Creep*. Science. Ch. ed. Phys.–Math. lit., 1970.
 - [10] Goldstein R., Popov A., Chentsov A. Calculation experimental technique for predicting the relaxation properties of thin polymer fibers during long-term loading // *Russian Metallurgy (Metally)*. 2016. Vol. 2016, no. 10. P. 951–955.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига, Латвия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `prede1.sty`. Стиль `prede1.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Буренин А. А.</i> Уравнение возможных мощностей в динамике упругопластических тел	3
<i>Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В.</i> Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности	11
<i>Абдурахманов А. А., Глаголев В. В.</i> Модель нахождения напряженно-деформированного состояния адгезионного слоя при нормальном отрыве	30
<i>Иванов П. С., Прокопьев В. И.</i> Общее решение для уравнения изогнутой оси балки с переменным сечением с помощью рядов Фурье	44
<i>Пестов К. Н., Любимова О. Н., Останин М. В.</i> Об одном численном методе решения задач типа Стефана	51
<i>Петров Н. И.</i> О решении линеаризованных уравнений теории малых упруго-пластических деформаций в случае осесимметрической задачи	61
<i>Ткачева А. В., Жилин С. Г., Абашкин Е. Е., Комаров О. Н.</i> Распределение остаточных напряжений в зоне термического влияния неразъемного соединения стальных протяженных элементов	66
<i>Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л.</i> Всестороннее гидростатическое сжатие цилиндрического слоя в условиях ползучести и пластического течения	76
<i>Абашкин Е. Е., Ткачева А. В.</i> Разупрочнение материала стальной пластины вследствие локального температурного воздействия	85
<i>Ефремов В. Г., Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Тихонов С. В.</i> Равномерное растяжение тонкой неоднородной пластины с круговым отверстием, при условии предельного сопротивления отрыву	95
<i>Максимов А. Н., Деревянных Е. А., Дмитриев Ю. П., Митрофанова Т. В.</i> Напряженное состояние идеальнопластического сжимаемого пространства, ослабленного эллипсоидальной полостью	104
<i>Жилин С. Г., Богданова Н. А., Комаров О. Н.</i> Влияние параметров уплотнения порошкового тела из воскообразного материала на формирование остаточных напряжений прессовки	110
<i>Буруруев А. М., Козинцев В. М., Мурашкин Е. В., Попов А. Л., Челюбе-ев Д. А., Ченцов А. В., Бычков П. С.</i> О ползучести и релаксации в аддитивно изготовленных образцах из фотополимерного материала	122
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	132
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	135

СОДЕРЖАНИЕ 137

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2019. № 3 (41)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 23.09.2019. Выход в свет 27.09.2019.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 16,9.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском отделе Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38