

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал
№ 4(42)
октябрь – декабрь 2019 г.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Заместитель ответственного секретаря: С. В. Матвеев

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Е. В. Ломакин, Л. А. Максимова,
А. А. Маркин, Г. К. Михайлов, Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин,
В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин,
А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж
(Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

Адрес редакции и издательства: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1184

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2019

Р. И. Непершин

О ПЛАСТИЧЕСКОМ ВЫДАВЛИВАНИИ ТОНКОСТЕННОГО СТАКАНА

*Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”,
г. Москва, Россия*

Аннотация. Рассчитывается идеально пластическое течение при выдавливании тонкостенного цилиндрического стакана жестким пуансоном при условии полной пластичности Треска. Вычисляются линии скольжения, контактные напряжения и годографы скоростей пластического течения для сферической и конической формы пуансона с учетом контактного трения по Прандтлю и контролем положительности диссипативной функции пластического течения. Получены зависимости контактных напряжений и среднего давления на пуансон от формы контактной границы, трения и относительной толщины стенки стакана.

Ключевые слова: тонкостенный стакан, выдавливание, сферический пуансон, конический пуансон, идеально пластическое течение, условие полной пластичности Треска, контактное трение, линии скольжения, контактные напряжения, годограф скоростей, диссипативная функция.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.001

УДК: 539.374 + 621.751

Введение. При крупносерийном производстве в машиностроении экономически эффективным способом изготовления полых деталей типа стакан является выдавливание жестким пуансоном из цилиндрической заготовки на механических и гидравлических прессах с высокой производительностью при экономии металла и уменьшении трудоемкости последующей механической обработки [1]. При высокой пластичности заготовки возможны процессы холодного выдавливания с высокой точностью цилиндрических поверхностей и минимальной механической обработке торцов [1, 2].

Выдавливание стаканов из углеродистых и легированных сталей сопровождается высокими контактными давлениями на инструмент в зависимости от технологических параметров процесса и контактного трения, которые приводят к снижению стойкости инструмента вследствие износа и усталости. Поэтому актуальной проблеме расчета технологических нагрузок на инструмент при выдавливании посвящено много работ.

В начальный период развития теории пластичности применяли инженерные методы с использованием приближенных условий равновесия и условий пластичности

© Непершин Р. И., 2019

Непершин Ростислав Иванович

e-mail: nepershin_rigambler.ru, доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”, г. Москва, Россия.

Поступила 20.09.2019

[3, 4, 5]. Аналитические методы оценки верхней оценки нагрузки для кинематически возможных полей скоростей пластического течения приведены в [6, 7, 8, 9]. Применение метода конечных элементов на основе математической теории пластичности [10, 11, 12] ограничено трудностями решения больших систем нелинейных уравнений с неизвестными жесткопластическими границами и сингулярным изменением напряжений и скоростей в точках пересечения границ пластической области с контактной границей инструмента.

В настоящей работе приведено решение задачи осесимметричного идеально пластического течения при выдавливании стакана, удовлетворяющее полной системе дифференциальных уравнений для напряжений и скоростей при условии полной пластичности на ребре призмы Треска в пространстве главных напряжений. В этом случае дифференциальные уравнения относятся к гиперболическому типу [13] и соответствуют сдвиговому механизму трехмерной пластической деформации по двум плоскостям скольжения. Решение получено численным интегрированием системы дифференциальных уравнений для напряжений и скоростей с использованием процедуры решения элементарных задач Коши и смешанного типа и контролем положительности диссипативной функции [14].

Рассматривается переход к стационарному пластическому течению при выдавливании стакана жестким пуансоном сферической и конической форм с учетом контактного трения по Прандтлю. На начальной стадии происходит нестационарный процесс вдавливания жесткой сферы или конуса в пластическое полупространство [14, 15, 16]. Пластическая область расширяется до контакта с границей матрицы и переходит в стационарное пластическое течение в стенку стакана. Ниже жесткопластической границы в заготовке возникают малые упругопластические деформации, которые в идеально пластической модели не учитываются. В этой области для расчета контактных напряжений на границах матрицы и выталкивателя при известных напряжениях на жесткопластической границе можно использовать метод конечных элементов для упругопластического тела [17].

Постановка задачи и основные уравнения. На рис. 1 показана схема выдавливания стакана из цилиндрической заготовки пуансоном диаметром d в полости матрицы диаметром D с нижним выталкивателем. Инструмент принимается жестким; пуансон перемещается со скоростью V , матрица и выталкиватель неподвижны.

Рассматривается начало стационарного пластического течения с образованием пластической области, ограниченной границами контакта с пуансоном и матрицей, свободной границей по толщине выдавливаемой стенки стакана и жесткопластической границей с нижней недеформируемой частью заготовки. При скольжении на границах контакта с инструментом принимается условие пластического трения по Прандтлю $\mu = \tau_c / \sigma_Y$, где τ_c — контактное касательное напряжение и σ_Y — напряжение текучести материала заготовки. При $\mu > 0$ на криволинейной границе пуансона в окрестности оси симметрии образуется центральная жесткая область [7].

Сила Q , действующая на пуансон, определяется напряжениями на границе контакта с пластической областью, зависящими от формы границы, коэффициента трения μ и квадрата отношения диаметров пуансона и матрицы, определяющего относительное изменение площади сечения заготовки и толщину стенки h при заданном диаметре пуансона d :

$$e = \frac{d^2}{D^2}, \quad h = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1 \right), \quad e^* < e < 1. \quad (1)$$

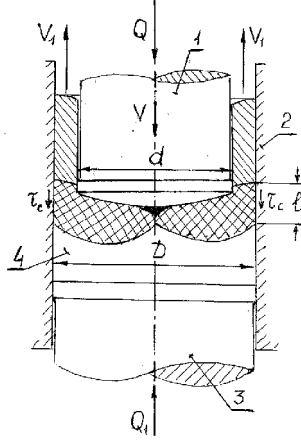


Рис. 1. Схема выдавливания стакана: 1 — пуансон, 2 — матрица, 3 — выталкиватель, 4 — заготовка

При $e < e^*$ пластическая область не распространяется до стенки матрицы; для сферической и конической форм пуансона нестационарное пластическое течение в этом случае моделируется вдавливанием в пластическое полупространство [14, 15, 16]. При $e \rightarrow 1$ происходит калибровка заготовки в замкнутой полости матрицы с образованием тонкого торцевого заусенца при $h \rightarrow 0$. Сила Q_1 , действующая на выталкиватель, при известном значении Q определяется условием статического равновесия заготовки с учетом трения на границе контакта l матрицы с пластической областью:

$$Q_1 = Q + \sigma_Y \mu \pi D l. \quad (2)$$

Скорость стенки стакана V_1 определяется условием пластической несжимаемости при заданной скорости пуансона V :

$$V_1 = \frac{Ve}{1-e}. \quad (3)$$

Материал заготовки идеально пластический; в пластической области выполняется условие полной пластичности на ребре призмы Треска в пространстве главных напряжений при осевой симметрии и положительной радиальной скорости $V_r > 0$ [13, 14]:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 1, \quad \sigma_2 = \sigma_1, \quad \sigma_2 = \sigma_\theta. \quad (4)$$

Напряжение текучести σ_Y принято за единицу для напряжений; σ_θ — окружное главное напряжение в цилиндрических координатах r, z, θ . При условиях (4) дифференциальные уравнения равновесия для напряжений и уравнения несжимаемости и изотропии для скоростей пластического течения приводятся к гиперболическому типу с характеристиками, совпадающими с ортогональными линиями скольжения ξ, η на плоскости r, z :

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{для } \xi, \quad \frac{dz}{dr} = -\operatorname{ctg} \varphi \quad \text{для } \eta; \quad (5)$$

с дифференциальными соотношениями для $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ и угла φ наклона касательной ξ линии скольжения к оси r

$$d\sigma - d\varphi = \frac{1}{2} \frac{dr + dz}{r} \quad \text{вдоль } \xi, \quad (6)$$

$$d\sigma + d\varphi = \frac{1}{2} \frac{dr - dz}{r} \quad \text{вдоль } \eta \quad (7)$$

и для проекций V_ξ , V_η вектора скорости на ξ и η линии скольжения

$$dV_\xi - V_\eta d\varphi = -\frac{1}{2} \frac{V_\xi dr - V_\eta dz}{r} \quad \text{вдоль } \xi, \quad (8)$$

$$dV_\eta + V_\xi d\varphi = -\frac{1}{2} \frac{V_\xi dz + V_\eta dr}{r} \quad \text{вдоль } \eta. \quad (9)$$

При $V_r > 0$ и соотношениях (4) диссипативная функция пластического течения положительна при выполнении неравенств $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_3 < 0$ для главных скоростей деформаций на плоскости r , z , которые при вычислениях линий скольжения и скоростей по уравнениям (5)–(9) приводятся к одному неравенству [18]

$$\Gamma + \frac{V_r}{r} > 0, \quad \Gamma = \frac{\partial V_\xi}{\partial \eta} - V_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial V_\eta}{\partial \xi} + V_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad (10)$$

где Γ — максимальная скорость деформации сдвига на плоскости r , z .

Уравнения (5)–(7) образуют замкнутую систему для переменных r , z , σ , φ и интегрируются численным методом [14] при известных граничных условиях для напряжений, которые в цилиндрических координатах определяются формулами

$$\sigma_r = \sigma - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_z = \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_\theta = \sigma + \frac{1}{2}, \quad \tau_{rz} = \frac{1}{2} \cos 2\varphi. \quad (11)$$

После вычисления линий скольжения определяются значения r , z , φ и уравнения (8), (9) образуют замкнутую систему для скоростей V_ξ , V_η , которые интегрируются численным методом [14] при известных граничных условиях на границах пластической области с проверкой неравенства (10). Проекция вектора скорости в цилиндрических координатах связаны с V_ξ и V_η уравнениями

$$V_r = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_z = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi. \quad (12)$$

Уравнения (12) определяют вектор скорости на плоскости годографа V_r , V_z в соответствующих узловых точках сетки линий скольжения на плоскости r , z .

Линии скольжения. На рис. 2 показаны линии скольжения на плоскости r , z справа от оси симметрии с началом координат в нижней точке O сферической границы пуансона. При заданном радиусе пуансона $r_0 = d/2$ и матрицы $r_1 = D/2$, которые удовлетворяют неравенству (1), происходит пластическое течение в стенку стакана толщиной $h = r_1 - r_0$ при скольжении материала вдоль границ контакта с пуансоном AG и матрицей BE . В случае контактного трения $\mu > 0$ линии скольжения пересекают границы контакта под углом $\gamma = (1/2) \arccos 2\mu$, при $\gamma < \pi/4$. В точке F на оси симметрии $r = 0$, $\tau_{rz} = 0$ из четвертой формулы (11) следуют углы наклона линий скольжения $\pm\pi/4$. Условия $\gamma < \pi/4$ на контактных границах скольжения и $\varphi = -\pi/4$ на оси симметрии для ξ линии скольжения определяют границы EF с жесткой зоной заготовки и FG с центральной жесткой зоной на пуансоне. При отсутствии трения $\mu = 0$, $\gamma = \pi/4$; граница FG стягивается к центру O , пластическое скольжение происходит по всей границе контакта с пуансоном OA .

Граница OA сферического пуансона задается радиусом ρ_0 с центром на оси симметрии. Координаты этой границы на плоскости r , z вычисляются в параметрической форме в зависимости от угла наклона касательной α к оси r :

$$r = \rho_0 \sin \alpha, \quad z = \rho_0(1 - \cos \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_A, \quad \alpha_A = \arcsin \frac{r_0}{\rho_0}. \quad (13)$$

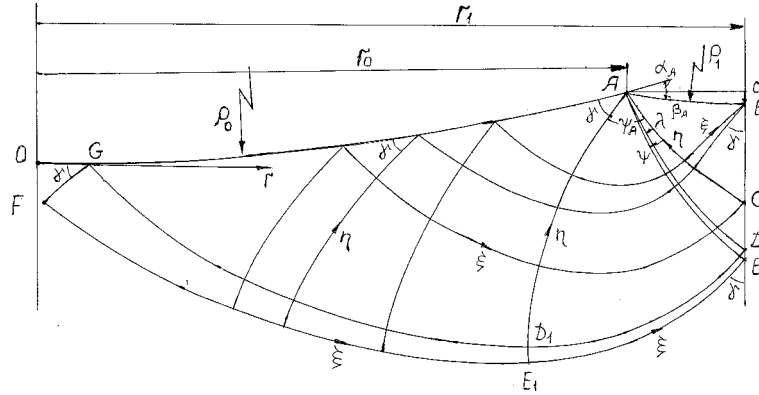


Рис. 2. Линии скольжения в пластической области

Граница OA конического пуансона определяется прямой, проходящей через центр O с заданным углом наклона α :

$$z = r \operatorname{tg} \alpha, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad \alpha \geq \frac{\pi}{4} - \gamma. \quad (14)$$

При выполнении неравенства (14) для угла α скольжение происходит по всей границе OA конического пуансона без образования центральной жесткой зоны. При низких значениях коэффициента трения μ неравенство (14) выполняется при малых углах α_A , применяемых, например, при холодном выдавливании стальных стаканов [2].

Задача является статически определяемой при известной свободной границе AB пластического течения в стенку стакана. На начальной стадии вдавливания жесткой сферы и конуса в заготовку образуется криволинейная граница вследствие напыла материала над границей заготовки [14, 15, 16]. В настоящей модели свободная граница AB принимается дугой окружности с радиусом ρ_1 и центром на границе r_1 (рис. 2) при смещении a точки B относительно точки A по оси z . Величина a определяется условием положительности диссипативной функции (10) при вычислениях линий скольжения и поля скоростей. Радиус ρ_1 и угол β_A наклона касательной к границе AB в точке A определяются толщиной стенки h и смещением a по формулам

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \frac{h^2 + a^2}{a}, \quad \beta_A = -\arcsin \frac{2ha}{h^2 + a^2}. \quad (15)$$

Координаты границы AB на плоскости r, z вычисляются в параметрической форме в зависимости от угла наклона касательной β к оси r :

$$r = r_1 + \rho_1 \sin \beta, \quad z = z_A - a + \rho_1(1 - \cos \beta), \quad \beta_A \leq \beta \leq 0, \quad (16)$$

где координата z_A точки A вычисляется по формулам (13) или (14). Вдоль границы AB напряжения в (4) равны $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -1$; линии скольжения образуют углы $\pm\pi/4$ с нормалью, совпадающей с направлением σ_1 . Граничные условия для системы уравнений (5)–(7) на AB определяются уравнениями (16) границы AB и значениями σ и φ :

$$\sigma = -\frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \beta. \quad (17)$$

Сингулярная точка A пересечения контактной границы пуансона OA и свободной границы AB является вырожденной ξ линией скольжения с координатами, определяемыми уравнениями (13) при $\alpha = \alpha_A$, $r_A = r_0$, $z_A = \rho_0(1 - \cos \alpha_A)$ для сферического пуансона, или (14) при $r_A = r_0$, $z_A = r_0 \operatorname{tg} \alpha_A$ для конического пуансона. Эта точка является центром сходящихся η линий скольжения с углом веера

$$\psi_A = \frac{3\pi}{4} + \beta_A - \alpha_A - \gamma, \quad \gamma = \frac{1}{2} \operatorname{arccos} 2\mu. \quad (18)$$

Угол φ в точке A , удовлетворяющий граничному условию (17) на AB , определяется условием ортогональности ξ и η линий скольжения в пределах изменения угла веера ψ_A :

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \beta_A - \zeta, \quad 0 \leq \zeta \leq \psi_A. \quad (19)$$

Значения σ в этой точке с граничным условием $-1/2$ на AB определяются интегрированием уравнения (6), правая часть которого равна нулю:

$$\sigma = -\left(\frac{1}{2} + \zeta\right), \quad 0 \leq \zeta \leq \psi_A. \quad (20)$$

Значения σ и φ в точке A на границе контакта с пуансоном определяются из уравнений (18)–(20) при $\zeta = \psi_A$:

$$\sigma_A = -\left(\frac{1}{2} + \psi_A\right), \quad \varphi_A = \alpha_A + \gamma - \frac{\pi}{2}. \quad (21)$$

При $\mu > 0$ точка B является второй сингулярной точкой с вырожденной η линией скольжения, в которой образуется веер ξ линий скольжения с углом

$$\psi_B = \frac{\pi}{4} - \gamma \quad (22)$$

и угол φ изменяется от $\pi/4$ на границе AB до $\pi/2 - \gamma$ на границе матрицы по уравнению

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \zeta, \quad 0 \leq \zeta \leq \psi_B. \quad (23)$$

Значения σ в точке B с граничным условием $-1/2$ на AB определяются интегрированием уравнения (7), правая часть которого равна нулю:

$$\sigma = -\left(\frac{1}{2} + \zeta\right), \quad 0 \leq \zeta \leq \psi_B. \quad (24)$$

В точке B на границе матрицы значения σ и φ равны

$$\sigma_B = -\left(\frac{1}{2} + \psi_B\right), \quad \varphi_B = \frac{\pi}{2} - \gamma. \quad (25)$$

Линии скольжения вычисляются программой на Фортране по следующему алгоритму. По уравнениям (15), (16) вычисляется граница AB и по граничным условиям (17) решается задача Коши в области, ограниченной линиями скольжения η и ξ , проходящими через точки A и B , с использованием численных процедур расчета r , z , σ , φ в регулярных узлах сетки линий скольжения [14]. Вычисляется веер ξ линий скольжения по значениям σ , φ в сингулярной точке B и известным значениям r , z , σ , φ на ξ

линии скольжения, проходящей через точку B на границе AB . Затем решается задача смешанного типа на границе BC по данным на ξ линии скольжения, проходящей через точку B на границе контакта с матрицей, и граничным условиям на BC

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad r = r_1. \quad (26)$$

Значения z и σ на границе BC вычисляются из конечно-разностных аппроксимаций уравнений (5), (7) для η линий скольжения и граничных условий (26):

$$z = z_\eta + \operatorname{ctg} \tilde{\varphi} \Delta r, \quad \tilde{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi_\eta + \varphi), \quad \Delta r = r_\eta - r_1, \quad (27)$$

$$\sigma = \sigma_\eta + \varphi_\eta - \varphi + \frac{1}{2} \frac{\Delta z - \Delta r}{\tilde{r}}, \quad \Delta z = z_\eta - z, \quad \tilde{r} = \frac{1}{2}(r_\eta + r_1), \quad (28)$$

где переменные с нижним индексом η известны в узловой точке пересечения ξ и η линий скольжения, ближайших к границе BC .

В области ACD решается задача Гурса по известным значениям r, z, σ, φ на η линии скольжения AC и значениям φ и σ в сингулярной точке A с углом веера $\lambda < \psi_A$, и задача смешанного типа по данным на ξ линии скольжения, проходящей через точку C , и граничным условиям (26) на CD . Затем решается задача Гурса в области ADD_1 по известным данным на η линии скольжения AC и значениям φ и σ в сингулярной точке A с углом веера $\psi_A - \lambda$.

В области AD_1G решается задача смешанного типа по известным данным на η линии скольжения AD_1 и граничным условиям на границе AG , которые в случае сферического пуансона определяются уравнениями границы (13) и переменным углом φ :

$$\varphi = \alpha + \gamma - \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \alpha < \alpha_A, \quad (29)$$

и в случае конического пуансона — уравнением (14) и постоянным углом φ :

$$\varphi = \alpha_A + \gamma - \frac{\pi}{2}. \quad (30)$$

При решении задачи смешанного типа используются конечно-разностные аппроксимации уравнений (5), (6) для ξ линии скольжения, проходящей через ближайший к границе AG узел на η линии скольжения и уравнения (13), (29) или (14), (30) в зависимости от формы контактной границы AG .

В случае сферической границы AG конечно-разностные уравнения для ξ линии скольжения и уравнения (13), (29) приводятся к трансцендентному уравнению для угла наклона касательной α в точке пересечения ξ линии скольжения с границей AG :

$$\cos \alpha + \left(\sin \alpha - \frac{r_\xi}{\tilde{\rho}} \right) \operatorname{tg} \tilde{\varphi}_\xi + \frac{z_\xi}{\tilde{\rho}} - 1 = 0, \quad \tilde{\varphi}_\xi = \frac{1}{2} \left(\alpha + \gamma + \varphi_\xi - \frac{\pi}{2} \right), \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho_0}{r_0}, \quad (31)$$

где $r_\xi, z_\xi, \varphi_\xi$ — известные значения r, z, φ в узловой точке пересечения ξ и η линий скольжения около границы AG . Уравнение (31) решается итерационным методом Ньютона с точностью 10^{-3} с использованием в качестве начального приближения предыдущее значение угла α на границе AG , начиная с α_A в точке A . Затем по уравнениям (13) и (29) вычисляются координаты r, z и φ на границе AG , зависящие от угла α . Значение σ в этой точке находится из конечно-разностного уравнения для соотношения (6) вдоль ξ линии скольжения:

$$\sigma = \sigma_\xi + \varphi - \varphi_\xi + \frac{1}{2} \frac{\Delta r + \Delta z}{\tilde{r}}, \quad \Delta r = r_\xi - r, \quad \Delta z = z_\xi - z, \quad \tilde{r} = \frac{r + r_\xi}{2}, \quad (32)$$

где r_ξ , z_ξ , σ_ξ — известные значения r , z , σ в узловой точке пересечения ξ и η линий скольжения около границы AG .

В случае конической границы AG с углом наклона α_A координаты точки пересечения границы AG с ξ линией скольжения, проходящей через узловую точку на η линии скольжения около границы AG , определяются формулами

$$r = \frac{z_\xi - r_\xi \operatorname{tg} \tilde{\varphi}_\xi}{\operatorname{tg} \alpha_A - \operatorname{tg} \tilde{\varphi}_\xi}, \quad z = r \operatorname{tg} \alpha_A, \quad \tilde{\varphi}_\xi = \frac{\alpha_A + \gamma + \varphi_\xi}{2} - \frac{\pi}{4}. \quad (33)$$

Значения φ и σ в этой точке вычисляются по уравнениям (30), (32).

Приведенная выше последовательность вычислений линий скольжения в области $ACDD_1G$ от линии скольжения AC , зависящей от граничных условий (15)–(17) на свободной границе AB , определяет точку G на границе AG и линию скольжения DD_1G в зависимости от угла веера линий скольжения λ , который является неизвестным параметром задачи.

В случае гладкой сферической границы пуансона при $\mu = 0$, $\gamma = \pi/4$, и в случае конической границы с углом α , удовлетворяющим неравенству (14), центральная жесткая зона на пуансоне не образуется. Точка G совпадает с центром O и параметр λ удовлетворяет неявному уравнению для радиуса точки G , определяемому алгоритмом вычисления линий скольжения:

$$r_G(\lambda) = 0. \quad (34)$$

Параметр λ определяется варьированием значений в исходных данных программы при выводе на экран монитора сетки линий скольжения и радиуса r_G , удовлетворяющего уравнению (34) с точностью $r_G/r_0 \leq 0,02$.

При $\mu > 0$, $\gamma < \pi/4$ на сферической границе пуансона образуется центральная жесткая зона, ограниченная линией скольжения FG с точкой F на оси симметрии, которая зависит от углов веера λ и ψ в точке A :

$$r_F(\lambda, \psi) = 0, \quad \varphi_F(\lambda, \psi) = -\frac{\pi}{4}, \quad \lambda < \psi < \psi_A. \quad (35)$$

Линия скольжения FG определяется последовательностью решения краевых задач:

- 1) задачи Гурса по данным на η линии скольжения AD и на вырожденной ξ линии скольжения в точке A с углом веера $\psi - \lambda$;
- 2) задачи смешанного типа с условиями (26) на границе DE ;
- 3) задачи Гурса по данным на η линии скольжения, проходящей через точку E , и на ξ линии скольжения DG , зависящей от угла λ .

В этом случае в исходных данных программы задается начальное приближение угла λ , определяющее линию скольжения DG . Затем вычисляются угол ψ и линии скольжения в области $DEFG$ по условию $|\varphi_F + \pi/4| \leq 0,02$ и изменяется значение λ для выполнения первого равенства (35) с точностью $r_F/r_0 \leq 0,02$.

При условии положительности диссипативной функции (10), проверяемой при вычислениях поля скоростей, вычисляются контактные давления на границах скольжения AG и BE пуансона и матрицы:

$$p = \frac{1}{2} \sin 2\gamma - \sigma, \quad \gamma = \frac{1}{2} \arccos 2\mu, \quad (36)$$

и численным интегрированием нормальных и касательных напряжений на жестко-пластических границах FE или GD (при $\mu = 0$) определяются давление q и сила Q ,

действующая на пуансон:

$$q = \frac{8I}{d^2}, \quad Q = 2\pi I, \quad I = - \int_F^E r(\sigma dr + 0,5 dz) \text{ или } I = - \int_G^D r(\sigma dr + 0,5 dz). \quad (37)$$

Поле скоростей. После вычисления линий скольжения (рис. 2) определяются граничные условия для скоростей на жесткопластических границах EF и FG и на границах контакта AG и BE с инструментом, которые позволяют вычислить скорости V_ξ , V_η численным интегрированием уравнений (7), (8). Затем по формулам (12) вычисляются скорости V_r , V_z на плоскости годографа скоростей, соответствующие узловым точкам сетки линий скольжения на плоскости r , z . Скорость вдавливания пуансона при вычислениях поля скоростей принимается за единицу.

На жесткопластических границах EF и FG , пересекающих ось симметрии, скорости непрерывны [14, 19, 20]. Центральная жесткая область перемещается со скоростью пуансона $V_r = 0$, $V_z = -1$. Жесткая область ниже границы EF неподвижна. Из уравнений (12) находим

$$V_\xi = -\sin \varphi, \quad V_\eta = -\cos \varphi \quad \text{на } FG, \quad (38)$$

$$V_\xi = 0, \quad V_\eta = 0 \quad \text{на } EF. \quad (39)$$

В случае гладкой сферической границы пуансона точки F и G совпадают с центром O с граничным условием (39) на жесткопластической границе EF . Точка O при $\mu = 0$ и точка F при $\mu > 0$ являются сингулярными точками поля скоростей, так как в этих точках граничные условия меняются скачком при переходе от скорости пуансона к неподвижной жесткой области заготовки. Сингулярные поля скоростей в зависимости от полярного угла с центром в этих точках при $\varphi \rightarrow -\pi/4$ приведены в [18, 19, 20].

На границах контакта пластической области с пуансоном и матрицей непрерывность скорости по нормали к границам приводит к граничным условиям

$$V_\xi = V_\eta \operatorname{tg} \gamma + \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \quad \text{на } AG, \quad (40)$$

$$V_\xi = V_\eta \operatorname{tg} \gamma \quad \text{на } BE. \quad (41)$$

Сетка линий скольжения, вычисляемая по граничным условиям для напряжений на свободной границе AB и на контактных границах AG и BE , при угловом шаге $\Delta\varphi$ порядка 10^{-2} в сингулярных точках A и B содержит несколько тысяч узловых точек. Поэтому представление поля напряжений в пластической области в виде таблиц числовых значений r , z , σ , φ и напряжений (11) в цилиндрических координатах ни в статьях научных журналов, ни в монографиях для специалистов практически невозможно. Однако эта информация, представляющая интерес для инженеров-механиков и технологов, может быть получена в виде электронных файлов, выводимых оператором ФОРТРАН'а в процессе вычислений линий скольжения.

В алгоритме расчета линий скольжения используется возобновление данных на текущих линиях скольжения в процессе решения приведенных выше краевых задач для дифференциальных уравнений (5)–(7), необходимых для последующего расчета поля скоростей по уравнениям (8), (9). Поэтому при вычислении скоростей выполняется обратный расчет линий скольжения с использованием известных значений r , z , σ , φ на жесткопластических границах FG и EF при $\mu > 0$ или на границе OE при $\mu = 0$. В точках сферической границы AG или AO также сохраняются значения r , z , σ , φ , полученные с использованием угла α при приближенном решении уравнения (31).

В этом случае сохраняется полная идентичность линий скольжения, полученных по граничным условиям для напряжений, с линиями скольжения при обратном вычислении от жесткопластических границ с расчетами скоростей по уравнениям (8), (9) с граничными условиями для скоростей (38)–(39). При вычислениях скоростей V_ξ , V_η в регулярных точках линий скольжения процедура расчета переменных r , z , σ , φ дополняется решением линейных конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальные уравнения (8), (9) при известных значениях r , z , φ [14].

Для сферического пуансона при $\mu > 0$ вычисление поля скоростей начинается решением задачи Гурса по известным значениям r , z , σ , φ и граничным условиям (38), (39) для скоростей V_ξ , V_η , с последующим решением задачи смешанного типа по данным на η линии скольжения, проходящей через точку E , и граничным условиям (26) и (41) на BE . Значения r , z , σ , φ , V_ξ , V_η в точках пересечения ξ линий скольжения с границей BE определяются из конечно-разностных аппроксимаций дифференциальных уравнений (5), (6), (8) и граничных условий (26), (41) по формулам

$$r = r_1, \quad z = z_\xi + \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \Delta r, \quad \tilde{\varphi} = \frac{\varphi_\xi + \varphi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad \Delta r = r_1 - r_\xi, \quad (42)$$

$$\sigma = \sigma_\xi + \varphi - \varphi_\xi + \frac{1}{2} \frac{\Delta z + \Delta r}{\tilde{r}}, \quad \Delta z = z - z_\xi, \quad \tilde{r} = \frac{r_\xi + r_1}{2}, \quad (43)$$

$$V_\xi = V_{\xi\xi} \frac{1 + c_1 - c_2}{1 - c_1 + c_2}, \quad V_\eta = V_\xi \operatorname{ctg} \varphi, \quad c_1 = \frac{\varphi - \varphi_\xi}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta r - \Delta z}{\tilde{r}}, \quad (44)$$

где нижним индексом ξ обозначены известные значения переменных в точке η линии скольжения, ближайшей к границе BE .

Дальнейшие вычисления линий скольжения и поля скоростей выполняются по известным данным на ξ линии скольжения GD (сферический пуансон, $\mu > 0$) или на ξ линии скольжения OD (сферический пуансон, $\mu = 0$; конический пуансон, $\mu \geq 0$) с граничными условиями (39), где точка F совпадает с O , и с граничными условиями (40), (41) на AG и BE . Расчеты выполняются от границы AG к границе BE с возобновлением данных на ξ линиях скольжения от GD или OD к сингулярной точке A на выходе из пластической области.

При решении смешанной задачи в точках на границе AG используются данные α , r , z , σ , φ , сохранившиеся при вычислениях линий скольжения от свободной границы AB , а скорости V_ξ , V_η на границе AG определяются из конечно-разностного уравнения, аппроксимирующего дифференциальное уравнение (9), и граничного условия (40) по формулам

$$V_\xi = \frac{c_1}{c_2}, \quad V_\eta = V_\xi \operatorname{tg} \gamma + c_3, \quad (45)$$

$$c_1 = V_{\eta\eta} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta r}{\tilde{r}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\varphi - \varphi_\eta + \Delta z / \tilde{r}}{V_{\xi\eta} + c_3}, \quad c_2 = 1 + \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \gamma \left(\varphi - \varphi_\eta + \frac{\Delta z}{\tilde{r}} \right) + \frac{\Delta r}{\tilde{r}} \right),$$

$$c_3 = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}, \quad \Delta r = r - r_\eta, \quad \Delta z = z - z_\eta, \quad \tilde{r} = r_\eta + r,$$

где нижним индексом η обозначены известные значения переменных в точке ξ линии скольжения, ближайшей к границе AG .

Полученные значения r , z , σ , φ , V_ξ , V_η в точке на границе AG и известные данные в точках текущей ξ линии скольжения, начиная от GD или OD , используются при циклическом вычислении регулярных узлов с возобновлением ξ линии скольжения до границы BE , на которой вычисляются значения r , z , σ , φ , V_ξ , V_η по формулам

(42)–(44). Процесс вычислений ξ линий скольжения по уравнениям (45) и (42)–(44) на границах AG и BE продолжается до линии скольжения, проходящей через точку B границы BE . Затем выполняются вычисления по уравнениям (45) на границе AG с возобновлением числа $m = \text{int}(\psi_B/\Delta\varphi)$ ξ линий скольжения, проходящих через сингулярную точку B до свободной границы AB . Последующие вычисления ξ линий скольжения продолжаются от границы AG до свободной границы AB с определением скоростей в N заданных точках этой границы до сингулярной точки A .

При вычислениях линий скольжения и скоростей выполняется численная проверка неравенства (10) диссипативной функции. При нарушении этого неравенства в исходных данных программы увеличивается смещение a точки B свободной границы AB относительно точки A в уравнениях (15), (16). Кривизна свободной границы увеличивается и области с отрицательными значениями диссипативной функции, порождаемые этой границей, уменьшаются. При выполнении неравенства (10) при смещении a вычисленные линии скольжения и скорости пластического течения принимаются за решение задачи пластического течения, удовлетворяющего полной системе дифференциальных уравнений (5)–(9) и приведенным статическим и кинематическим граничным условиям. При малой толщине стенки стакана h область, ограниченная границей AB , уменьшается при малых значениях скорости окружной деформации V_r/r , приближаясь к плоскому течению с прямолинейной границей AB при $a \rightarrow 0$.

Численные результаты. В приводимых расчетах величины, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу пуансона r_0 ; величины, имеющие размерность напряжения, отнесены к напряжению текучести σ_Y материала заготовки. Методика оценки σ_Y с учетом влияния скорости деформации и накопленной пластической деформации приведена в [14, 17].

Пластическое течение при выдавливании стакана при заданной форме контактной границы пуансона определяется двумя параметрами — относительным изменением начальной площади сечения заготовки e и коэффициентом контактного трения μ . Радиус матрицы r_1 и толщина стенки стакана h при $r_0 = 1$ определяются параметром e из формул (1):

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{e}} - 1.$$

Ниже приведены расчеты для сферической формы пуансона с радиусом сферы $r_0 = 4$ и углом наклона касательной $\alpha_A = 0,2527$ в точке A , и для конической формы с углом наклона образующей $\alpha = 0,2618$ к оси r . В табл. 1 приведены расчетные значения параметров пластического течения при выдавливании стакана сферическим (1) и коническим (2) пуансонами для $e = 0,7$ и $\mu = 0,15$.

Таблица 1. Выдавливание стакана. $e = 0,7$, $\mu = 0,15$

Форма пуансона	r_1	h	a	q	λ	ψ	ψ_A	ψ_B
1	1,195	0,195	0,018	3,073	0,230	0,265	1,287	0,152
2	1,195	0,195	0,018	3,037	0,270	—	1,277	0,152

Линии скольжения с распределениями давления на границах контакта с инструментом и годографы скоростей при выдавливании стакана с параметрами, приведенными в табл. 1, показаны на рис. 3 для сферического и на рис. 4 для конического пуансона.

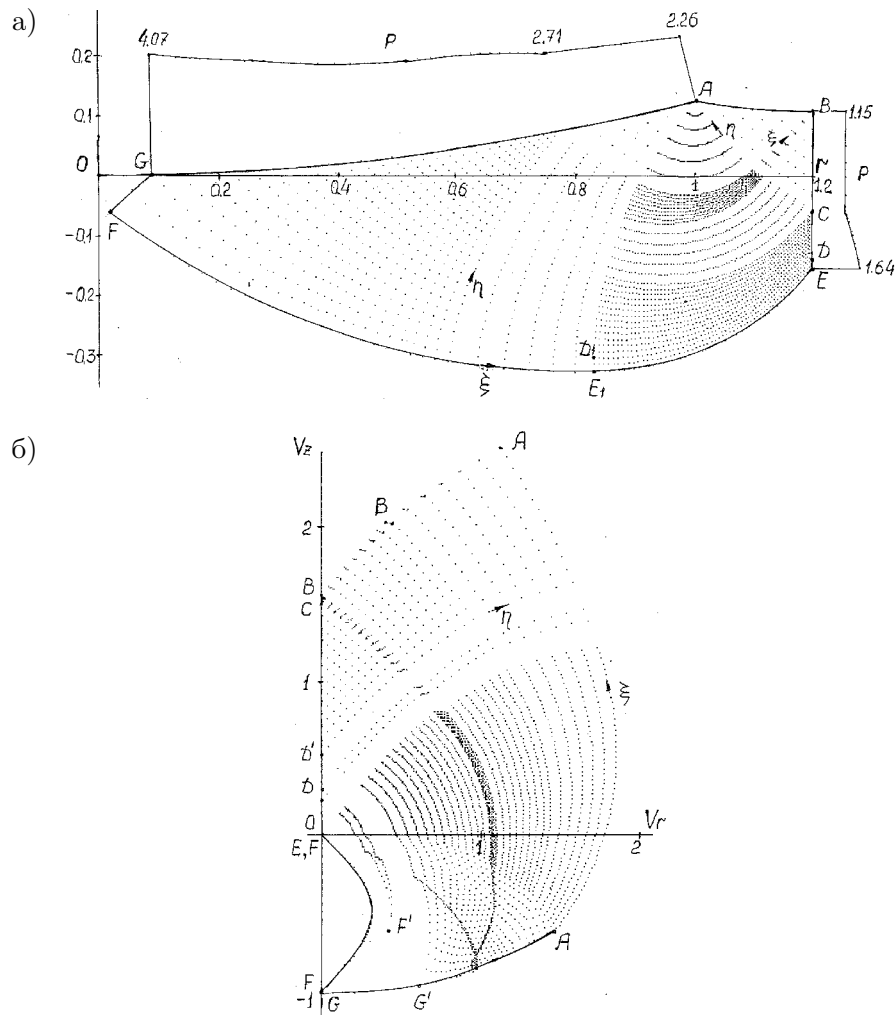


Рис. 3. Линии скольжения и контактные давления (а), годограф скоростей (б) при выдавливании сферическим пуансоном. $\rho_0 = 4$, $e = 0,7$, $\mu = 0,15$

При $e = 0,7$ и толщине стенки стакана $h = 0,195$ пластическое течение при положительной диссипативной функции получено при смещении $a = 0,018$ и малой кривизне свободной границы AB . Координаты линий скольжения на плоскости r, z и на плоскости годографа скоростей V_r, V_z выводятся пикселями на экран монитора графической программой ФОРТРАН'а.

Контактное трение при вдавливании сферического пуансона приводит к образованию малой центральной жесткой области на плоскости r, z на рис. 3а. Сетка линий скольжения с числом узлов $N = 7$ на свободной границе AB с углами веера $\psi_A = 1,287$ и $\psi_B = 0,152$ в сингулярных точках A и B вычислена с угловым шагом $\Delta\varphi = 0,0173$. Угловые параметры $\lambda = 0,230$ и $\psi = 0,265$ удовлетворяют уравнениям (35) с точностью $0,021$. Линии скольжения с малой кривизной, определяемые решением задачи Коши от свободной границы AB , отображаются на контактных границах с сингулярными точками A и B треугольными зонами с малой кривизной границ, которые

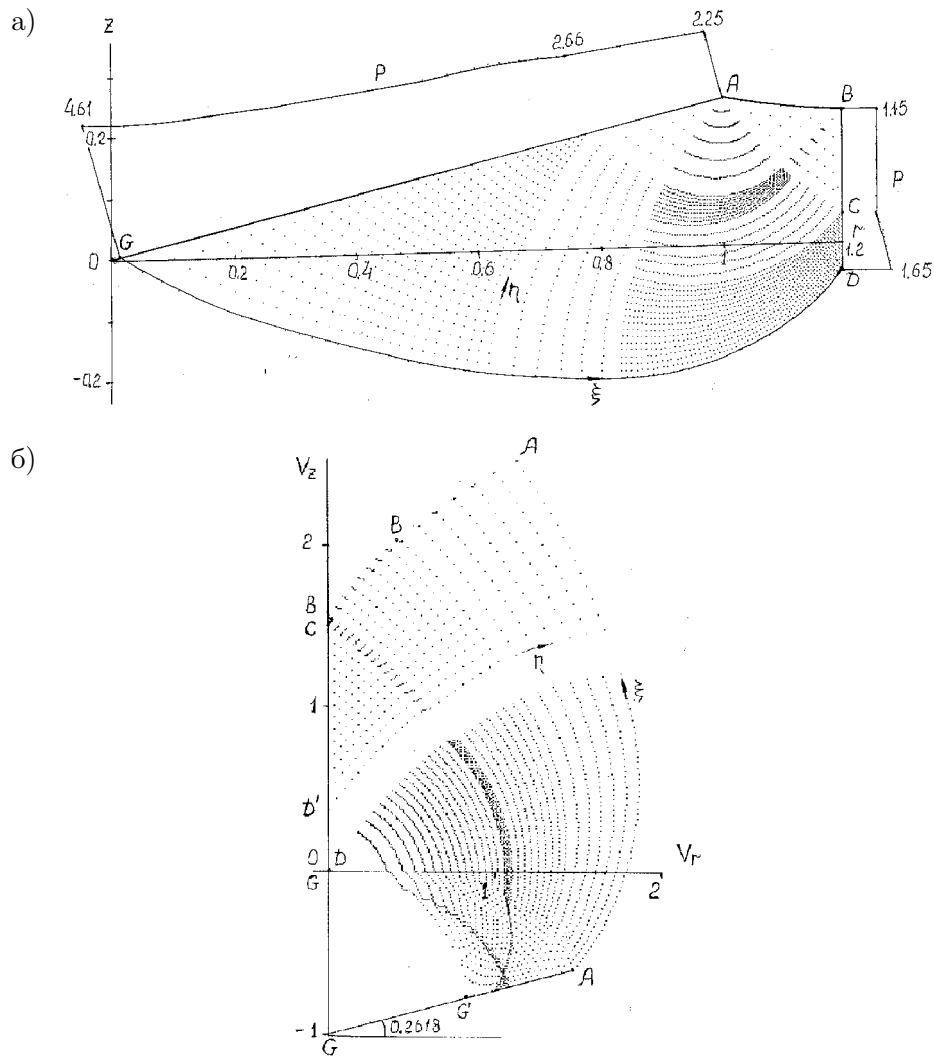


Рис. 4. Линии скольжения и контактные давления (а), годограф скоростей (б) при выдавливании коническим пуансоном. $\alpha = 0,2618$, $e = 0,7$, $\mu = 0,15$

распространяются от контактных границ широкими полосами в сетке линий скольжения.

На рис. 3б показано отображение сетки линий скольжения на плоскость годографа скоростей. Разрывное изменение граничных условий (38), (39) в точке F приводит к скачкообразному изменению скоростей на линиях скольжения, ближайших к жесткопластическим границам FG и FE , которое распространяется до границы матрицы и затем вдоль η линий скольжения, проходящих через точки E и D централизованного поля линий скольжения с сингулярной точкой A . Отображения линий скольжения в окрестности точки F приближаются к сингулярному полю скоростей при $r \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow -\pi/4$ [20], которое показано на рис. 3б сплошной линией. Широкие полосы линий скольжения с малой кривизной, распространяющиеся от свободной границы AB и от

контактных границ с инструментом на рис. 3а, отображаются на годографе узкими криволинейными полосами с малым изменением скоростей по ширине полосы.

Линии скольжения и годограф скоростей при вдавливании коническим пуансоном, показанные на рис. 4, вычислены для параметра $\lambda = 0,270$, при котором уравнение (34) выполняется с точностью 0,0143 и диссипативная функция пластического течения положительна. В этом случае имеется одна жесткопластическая граница DG и скачкообразное изменение скоростей в окрестности этой границы вследствие разрывного изменения граничных условий (39) и (40) в точке G , которое распространяется до границы матрицы и вдоль η линии скольжения, проходящей через точку D и сингулярную точку A . Распределения контактного давления на инструмент, линии скольжения (рис. 4а) и годограф скоростей (рис. 4б) близки к выдавливанию сферическим пуансоном на рис. 3 вследствие близости значений углов α и α_A .

Распределение давления p и касательного напряжения τ_c на контактной границе AG можно использовать для расчета напряжений и прочности пуансона при циклических нагрузках. Распределение давления и касательного напряжения на границе матрицы BE с пластическим скольжением и контактные напряжения на границах матрицы и выталкивателя с жесткой зоной заготовки ниже жесткопластической границы FE можно использовать для расчета циклической прочности матрицы и выталкивателя (рис. 1). В этой зоне пластические деформации малы и возможно использование метода конечных элементов для упругопластической модели заготовки [17] при известных нормальных $-\sigma$ и касательных $\tau = 1/2$ напряжениях на границе FE . В табл. 2 приведены данные для нечетных узлов жесткопластической границы FE из 93 узлов, показанных на рис. 3а с нумерацией от F к E . Числовые значения $r, z, \sigma, \varphi, V_\xi, V_\eta$ в узловых точках ξ линий скольжения от жесткопластической границы FE до сингулярной точки A могут быть выведены в виде таблиц в программе вычисления поля скоростей.

В табл. 3 и 4 приведены расчетные значения среднего давления q для сферического и конического пуансонов в зависимости от параметров e и μ . Увеличение параметра e приводит к уменьшению толщины стенки стакана и увеличению давления на пуансон. Увеличение коэффициента трения μ приводит к дополнительному увеличению давления. Давление на конический пуансон с углом наклона образующей $\alpha = 0,2618$ незначительно снижается по сравнению с давлением на сферический пуансон с радиусом сферы $\rho_0 = 4$ и углом наклона касательной $\alpha_A = 0,2527$ в точке A при малой кривизне контактной границы. Размерное значение силы, действующей на пуансон, определяется формулой $Q = \pi d^2 \sigma_Y q / 4$.

Заключение. Приведено численное решение задачи осесимметричного пластического течения при выдавливании тонкостенного цилиндрического стакана сферическим и коническим пуансонами. Рассматривается модель идеально пластического тела при условии полной пластичности на ребре призмы Треска с учетом контактного трения по Прандтлю.

Свободная граница пластической области при течении материала в стенку стакана при переходе к стационарной стадии процесса принимается криволинейной с малой кривизной, стремящейся к нулю при уменьшении толщины стенки стакана, при которой диссипативная функция пластического течения в пластической области положительна.

Условие равновесия при переходе к поступательному движению стенки стакана на стационарной стадии выполняется точно, а кинематическое условие выполняется в

Таблица 2. Жесткопластическая граница FE , рис. 3а

r	$-z$	$-\sigma$	φ	r	$-z$	$-\sigma$	φ
0,022	0,063	3,835	-0,688	0,939	0,320	2,042	0,227
0,075	0,105	3,639	-0,623	0,955	0,316	2,000	0,259
0,126	0,139	3,496	-0,563	0,969	0,312	1,958	0,291
0,175	0,168	3,376	-0,509	0,984	0,307	1,917	0,322
0,222	0,193	3,269	-0,459	0,998	0,302	1,876	0,354
0,268	0,214	3,171	-0,412	1,012	0,297	1,835	0,385
0,313	0,233	3,081	-0,367	1,025	0,291	1,795	0,416
0,347	0,245	3,032	-0,351	1,038	0,285	1,754	0,447
0,374	0,255	3,013	-0,355	1,051	0,279	1,714	0,478
0,404	0,266	2,988	-0,354	1,063	0,272	1,674	0,509
0,441	0,280	2,933	-0,328	1,075	0,265	1,635	0,540
0,483	0,293	2,852	-0,277	1,087	0,258	1,595	0,571
0,524	0,303	2,774	-0,230	1,098	0,251	1,556	0,601
0,563	0,312	2,699	-0,184	1,109	0,243	1,517	0,632
0,635	0,322	2,586	-0,122	1,119	0,235	1,478	0,663
0,722	0,330	2,468	-0,062	1,129	0,227	1,440	0,694
0,800	0,333	2,361	-0,004	1,138	0,219	1,401	0,724
0,840	0,332	2,299	0,033	1,148	0,211	1,363	0,755
0,858	0,332	2,255	0,066	1,157	0,202	1,325	0,785
0,875	0,330	2,212	0,099	1,165	0,193	1,287	0,816
0,891	0,328	2,169	0,131	1,173	0,184	1,249	0,846
0,908	0,326	2,126	0,163	1,181	0,175	1,211	0,877
0,924	0,323	2,084	0,195	1,188	0,166	1,174	0,907
				1,195	0,157	1,137	0,938

Таблица 3. Давление q на сферический пуансон, $\rho_0 = 4$

e	h	μ				
		0,0	0,05	0,10	0,15	0,20
0,70	0,19	2,645	2,797	2,942	3,073	3,193
0,75	0,15	2,705	2,870	3,024	3,163	3,293
0,80	0,12	2,810	2,984	3,148	3,301	3,440
0,85	0,08	2,971	3,160	3,335	3,498	3,653
0,90	0,05	3,266	3,480	3,681	3,869	4,047

интегральной форме вследствие пластической несжимаемости материала. При малой толщине стенки стакана пластическое течение в окрестности свободной границы приближается к плоскому течению, и кинематическое условие перехода к поступательному движению стенки стакана приближается к точному.

Таблица 4. Давление q на конический пуансон, $\alpha = 0,2618$

e	h	μ				
		0,0	0,05	0,10	0,15	0,20
0,70	0,19	2,593	2,753	2,899	3,073	3,164
0,75	0,15	2,661	2,832	2,992	3,141	3,277
0,80	0,12	2,766	2,948	3,119	3,274	3,426
0,85	0,08	2,937	3,133	3,323	3,479	3,641
0,90	0,05	3,226	3,447	3,656	3,858	4,042

Численное решение задачи с контролем условия положительности диссипативной функции пластического течения автоматизировано на ФОРТРАН'е. Приведены примеры расчета линий скольжения и годографа скоростей пластического течения с распределениями давления на контактных границах с инструментом и на жесткопластической границе с заготовкой, которые могут быть использованы для расчетов прочности инструмента при циклических нагрузках.

Приведены зависимости среднего давления на сферический и конический пуансоны от средней деформации заготовки, толщины стенки стакана и контактного трения. Полная информация о напряженном состоянии и скоростях пластического течения вдоль линий скольжения может быть выведена файлом с таблицами числовых значений ФОРТРАН-программой.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Машиностроение. Энциклопедия. Т. 3–2. Технология заготовительных производств. Москва: Машиностроение, 1996. 734 с.
- [2] Холодная объемная штамповка. Справочник / под ред. Г. А. Навроцкого. Москва: Машиностроение, 1973. 496 с.
- [3] Гофман О., Закс Г. Введение в теорию пластичности для инженеров. Москва: Машгиз, 1957. 280 с.
- [4] Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш. Механика пластических деформаций при обработке металлов. Москва: Машиностроение, 1968. 504 с.
- [5] Сторожев М. В., Попов Е. А. Теория обработки металлов давлением. Москва: Машиностроение, 1977. 423 с.
- [6] Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров. Москва: Машиностроение, 1979. 567 с.
- [7] Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов. Москва: Металлургия, 1972. 408 с.
- [8] Степанский Л. Г. Расчеты процессов обработки металлов давлением. Москва: Машиностроение, 1979. 215 с.
- [9] Avitzur V. Handbook of Metal Forming Processes. New York: Wiley, 1983.
- [10] Osakada K., Nakano J., Mori K. Finite Element Method for Rigid-Plastic Analysis of Metal Forming — Formulation for Finite Deformation // Int. J. Mech. Sci. 1982. no. 24. p. 459.
- [11] Oh S. I. Finite Element Analysis of Metal Forming Problems with Arbitrary Shaped Dies // Int. J. Mech. Sci. 1982. no. 24. p. 479.
- [12] Mori K., Osakada K., Fukuda M. Simulation of Severe Plastic Deformation by Finite Element Method with Spatially Fixed Elements // Int. J. Mech. Sci. 1983. no. 25. p. 775.
- [13] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 704 с.
- [14] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU "STANKIN", 2016. 310 p.

- [15] Непершин Р. И. О внедрении гладкого сферического штампа в идеально пластическое полупространство // Доклады РАН. 2003. Т. 389, № 5. С. 616–620.
- [16] Непершин Р. И. Внедрение сферического штампа в идеально пластическое полупространство при наличии контактного трения // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 3. С. 490–503.
- [17] Друапов В. А., Nepershin R. I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 1994. 407 p.
- [18] Непершин Р. И. Сдавливание жесткопластической сферы плоскими штампами // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 1(35). С. 26–38.
- [19] Shield R. T. On the plastic flow of metals under condition of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. London. 1955. Vol. A 233, no. 1193. P. 267–287.
- [20] Eason G., Shield R. T. The plastic indentation of a semi-infinite solid by perfectly rough circular punch // Z. Angew. Math. Phys. 1960. Vol. 11, no. 1. P. 33–43.

R. I. Nepershin

ON THE PLASTIC EXTRUSION OF A THIN-WALLED CAN

Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia

Abstract. Ideal plastic flow analysis of a thin-walled cylindrical can extrusion by the rigid punch is given for Tresca full plasticity yield criterion. The slip lines, contact pressure and velocity hodographs of plastic flow are calculated for the sphere and cone punches, with Prandtl's contact friction consideration and positive plastic dissipation function control. Contact pressures and the punch mean pressure relations versus the punch contact boundary, friction and the can wall thickness are calculated.

Keywords: thin-walled can, extrusion, spherical punch, cone punch, ideal plasticity, Tresca full plasticity, contact friction, slip lines, contact stresses, velocity hodographs, dissipative function.

REFERENCES

- [1] Mechanical Engineering Encyclopedia. Vol. III-2. Blank production technology. Moscow: Mashinostroenie, 1996. 734 p. (in Russian).
- [2] Cold Forging Handbook / Ed. by G. A. Navrotsky. Moscow: Mashinostroenie, 1973. 496 p. (in Russian).
- [3] Hoffman O., Sachs G. Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [4] Thomsen E. G., Yang C. T., Kobayashi S. Mechanics of Plastic Deformation in Metal Processing. New York: Macmillan, 1965. 486 p.
- [5] Storojev M. V., Popov E. A. Theory of Metals Forming. Moscow: Mashinostroenie, 1977. 423 p. (in Russian).
- [6] Johnson W., Mellor P. B. Engineering Plasticity. London: Van Nostrand Reinhold, 1973.
- [7] Tomlenov A. D. The Theory of Plastic Deformation of Metals. Moscow: Metallurgy, 1972. 408 p. (in Russian).
- [8] Stepansky L. G. Analyses of the Metal Forming Processes. Moscow: Mashinostroenie, 1979. 215 p. (in Russian).
- [9] Avitzur B. Handbook of Metal Forming Processes. New York: Wiley, 1983.
- [10] Osakada K., Nakano J., Mori K. Finite Element Method for Rigid-Plastic Analysis of Metal Forming — Formulation for Finite Deformation // Int. J. Mech. Sci. 1982. no. 24. p. 459.

Nepershin Rostislav Ivanovich, Doctor of Eng. Sci., Professor, Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia.

-
- [11] Oh S. I. Finite Element Analysis of Metal Forming Problems with Arbitrary Shaped Dies // *Int. J. Mech. Sci.* 1982. no. 24. p. 479.
- [12] Mori K., Osakada K., Fukuda M. Simulation of Severe Plastic Deformation by Finite Element Method with Spatially Fixed Elements // *Int. J. Mech. Sci.* 1983. no. 25. p. 775.
- [13] Ishlinsky A. Y., Ivlev D. D. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian).
- [14] Nepershin R. I. *Applied Problems of Plasticity*. Moscow: MSTU "STANKIN", 2016. 310 p.
- [15] Nepershin R. I. On indentation of the ideal plastic half-space by the smooth spherical punch // *Doklady Akademii Nauk*. 2003. Vol. 389, no. 5. P. 616–620. (in Russian).
- [16] Nepershin R. I. Indentation of the ideal plastic half-space by the spherical punch with the contact friction account // *Appl. Math. And Mech.* 2006. Vol. 70. Iss. 3. P. 490–503. (in Russian).
- [17] Druyanov B. A., Nepershin R. I. *Problems of Technological Plasticity*. Amsterdam: Elsevier, 1994. 407 p.
- [18] Nepershin R. I. Compression of the rigid-plastic sphere by the flat dies // *Vestnik CGPU. Limit State Mechanics*. 2018. no. 1(35). P. 26–38. (in Russian).
- [19] Shield R. T. On the plastic flow of metals under condition of axial symmetry // *Proc. Roy. Soc. London*. 1955. Vol. A 233, no. 1193. P. 267–287.
- [20] Eason G., Shield R. T. The plastic indentation of a semi-infinite solid by perfectly rough circular punch // *Z. Angew. Math. Phys.* 1960. Vol. 11, no. 1. P. 33–43.

А. Н. Спорыхин

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. На основе модели упрочняющегося упруговязкопластического тела исследовано напряженно-деформированное состояние сферической полости под действием нагрузок, постоянной внешней, и зависящей от времени внутренней. Получены точные аналитические решения для полей напряжений и перемещений в упругой области и пластической области, когда вязкость возрастает пропорционально времени процесса деформирования.

Ключевые слова: сферическая полость, пластичность, вязкость, упрочнение, динамическая нагрузка.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.002

УДК: 539.374

Известно [1], что подземные полости сферической формы являются ответственной конструкцией, используемой для хранения нефти, газа и т.д. Поэтому расчет их поведения при воздействии динамических нагрузок имеет большое значение при их проектировании и прогнозировании чрезвычайных ситуаций. Имеющиеся в литературе решения [2] аналогичной задачи получены в рядах.

В настоящей работе в квазистатической постановке рассматривается деформирование сферической полости радиуса a в невесомом полупространстве. По контуру полости равномерно распределена нагрузка P , например, давление газа на породный контур при взрыве, а на бесконечности действует нагрузка q , выражения для которых имеют вид

$$P = P_0 e^{\hat{a}t}, \quad q = q_0 = gh, \quad t_* \leq t < t_0,$$

где g — средний объемный вес вышележащих пород; h — глубина заложения полости, \hat{a} — известная константа. Напряженно-деформированное состояние массива в осесимметричном случае ($\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$) определяется уравнением равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (1)$$

© Спорыхин А. Н., 2019
Спорыхин Анатолий Николаевич
e-mail: visloguzova99@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 10.09.2019

законом Гука и соотношениями Коши для упругой области. Решая эту систему уравнений, находим

$$u = \frac{c_1}{r^2}, \quad \sigma_r^e = -4\mu \frac{c_1}{r^3} + c_2, \quad \sigma_\theta^e = 2\mu \frac{c_1}{r^3} + c_2. \quad (2)$$

Из условия отсутствия объемного расширения в пластической зоне получаем

$$\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = \frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} = 0,$$

откуда

$$\varepsilon_\theta = -\frac{\varepsilon_r}{2}, \quad u = \frac{B_1}{r^2}.$$

Из ассоциированного закона пластического течения [3]

$$e_{ij}^p = \psi(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta e_{ij}^p) \quad (3)$$

имеем

$$e_r^p = \psi(S_r - c\varepsilon_r^p - \eta e_r^p), \quad e_\theta^p = \psi(S_\theta - c\varepsilon_\theta^p - \eta e_\theta^p), \quad e_\varphi^p = \psi(S_\varphi - c\varepsilon_\varphi^p - \eta e_\varphi^p). \quad (4)$$

Так как $\varepsilon_\theta^p = \varepsilon_\varphi^p$, то из этих равенств следует, что $S_\theta = S_\varphi$, $S_\theta = -S_r/2$. Функция нагружения [3]

$$(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta e_{ij}^p)(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta e_{ij}^p) = K^2 \quad (5)$$

принимает вид

$$(S_r - c\varepsilon_r^p - \eta e_r^p)^2 = \tilde{K}^2, \quad \tilde{K}^2 = \frac{2}{3}K^2. \quad (6)$$

Далее согласно [4] полагаем, что вязкость горных пород возрастает пропорционально времени процесса деформирования, т.е.

$$\eta = \eta_0 t. \quad (7)$$

Значение модуля η_0 для различных горных пород приведены в [4]. Учитывая (7), а также

$$\varepsilon_r^e = \varepsilon_r - \varepsilon_r^p, \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad S_r = 2\mu(\varepsilon_r - \varepsilon_r^p),$$

из соотношения (6) выводим

$$\frac{d\varepsilon_r^p}{dt} + \frac{\alpha_0}{t}\varepsilon_r^p = -\left(\tilde{K} + \frac{4\mu B_1}{r^3}\right) \frac{1}{\eta_0 t}, \quad \alpha_0 = \frac{2\mu + c}{\eta_0}. \quad (8)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varepsilon_r^p = -\frac{1}{2\mu + c} \left[\left(\tilde{K} + \frac{4\mu B_1}{r^3} \right) + B_2 t^{-\alpha_0} \right]. \quad (9)$$

Из условия $\varepsilon_r^p = 0$ при $t = t_*$ определяем постоянную интегрирования B_2 :

$$B_2 = \frac{1}{2\mu + c} \left(\tilde{K} + \frac{4\mu B_1}{r^3} \right) t_*^{\alpha_0}. \quad (10)$$

Вычисляя

$$\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta = \frac{3\mu}{2\mu + c} \left(\tilde{K} - \frac{2cB_1}{r^3} + B_2 t^{-\alpha_0} \right),$$

из уравнения (1) находим

$$\sigma_r^p = -2\mu_0 \left[3\tilde{K} \ln r (1 + t_*^{\alpha_0} t^{-\alpha_0}) + \frac{2B_1}{r^3} (c - 2\mu t_*^{\alpha_0} t^{-\alpha_0}) \right] + B_3,$$

$$\sigma_{\theta}^p = 3\mu_0 \left[\tilde{K} - \frac{2cB_1}{r^3} + \left(\tilde{K} + \frac{4\mu B_1}{r^3} \right) t_*^{\alpha_0} t^{-\alpha_0} \right] + \sigma_r^p, \quad \mu_0 = \frac{\mu}{\alpha_0 \eta_0}.$$

Для определения констант интегрирования C_1 , C_2 , B_1 , B_3 и радиуса поверхности раздела областей упругого и пластического деформирования γ имеем граничное условие $\sigma_r^p = -P_0 e^{\hat{a}t}$ при $r = a$, условие на “бесконечности” $\sigma_r^e = \sigma_{\theta}^e = q = -gh$ при $r \rightarrow \infty$ и условия сопряжения при $r = \gamma$: $\sigma_r^e = \sigma_r^p$, $u^e = u^p$. В предположении, что в момент начала пластического течения $t = t_*$ зарождение пластической области начинается от внутренней границы сферической полости, начальные условия задаются в форме $\gamma = a$ при $t = t_*$. Откуда находим

$$C_1 = B_1 = \frac{3\mu_0 \tilde{K}(1+T) \ln(\gamma/a) + P_0 e^{\hat{a}t} - q}{2\mu_0 [2\mu a^3(1+T) + \gamma^3(c - 2\mu T)]} a^3 \gamma^3, \quad C_2 = q = -gh,$$

$$B_3 = -P_0 e^{\hat{a}t} + 2\mu_0 \left[3\tilde{K}(1+T) \ln a + \frac{2B_1}{a^3}(c - 2\mu T) \right], \quad T = t_*^{\alpha_0} t^{-\alpha_0}$$

и уравнение для определения радиуса упругопластической границы γ в массиве горных пород

$$\frac{3\mu_0 \tilde{K}(1+T) \ln(\gamma/a) + P_0 e^{\hat{a}t} - q}{2[2\mu_0 a^3(1+T) + \gamma^3(c - 2\mu T)]} [2\mu a^3(1+T) - 2\gamma^3(c - 2\mu T)] + 3\mu_0 \tilde{K}(1+T) \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{\gamma}{a} \right) + P_0 e^{\hat{a}t} - q = 0. \quad (11)$$

Из уравнения (11) следует, что пластическое состояние возникает на поверхности выработки $\gamma = a$ при $t = t_*$ ($P = P_0 e^{\hat{a}t} = P_*$) при $q = P_* + \tilde{K}$, что совпадает с результатами работы [1], полученными при решении аналогичной задачи при статическом деформировании.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики и горных пород. Москва: Физматлит, 2004. 232 с.
- [2] Кривоченко А. В., Спорыхин А. Н. Динамическое деформирование упруговязкопластического полого шара // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 5. С. 169–175.
- [3] Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Воронежский государственный университет, 1997. 360 с.
- [4] Михайлюк А. В. Горные породы при неравномерных динамических нагрузках. Киев: Наук. думка, 1980. 153 с.

A. N. Sporykhin

DYNAMIC DEFORMATION OF A HALF-SPACE WITH A SPHERICAL CAVITY

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The stress-strain state of a spherical cavity under the action of loads, constant external and time-dependent internal, is investigated on the basis of the model of a hardening elastic-viscoplastic body. Exact analytical solutions are obtained for stress and displacement fields in the elastic region and the plastic region, when the viscosity increases proportionally to the time of the deformation process.

Keywords: spherical cavity, plasticity, viscosity, hardening, dynamic load.

REFERENCE

- [1] Sporykhin A. N., Shashkin A. I. Stability of equilibrium of spatial bodies and problems of mechanics and rocks. Moscow: Fizmatlit, 2004. 232 p. (in Russian).
- [2] Krivochenko A. V., Sporykhin A. N. Dynamic deformation of elastic-viscoplastic hollow ball // PMTF. 2009. Vol. 50, no. 5. P. 169–175. (in Russian).
- [3] Sporykhin A. N. The perturbation method in problems of stability of complex environments. Voronezh: Voronezh state University, 1997. 360 p. (in Russian).
- [4] Mikhaylyuk A. V. Rocks under uneven dynamic loads. Kiev: Science Dumka, 1980. 153 p. (in Russian).

Е. Е. Абашкин, А. А. Соснин, А. В. Ткачева

ВЛИЯНИЯ ЛОКАЛЬНОГО ТЕПЛООВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА МАТЕРИАЛ СТАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ МАРКИ СТЗ С ОБРАЗОВАНИЕМ ПРОЖИГА

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. В работе описываются исследования теплового воздействия пламени газовой горелки на стальную пластину. В ходе данного воздействия в материале пластины появляется отверстие – прожиг. Для описания процесса строится одномерная математическая модель, основанная на модели Прандтля-Рейса. Предел текучести и упругие модули принимаем зависящими от температуры. В качестве критерия пластического течения принимается условие Ишлинского-Ивлева, в котором введено слагаемое, отвечающее за упрочнение материала.

Ключевые слова: температурные напряжения, точечный нагрев, остаточные напряжения, упругость, пластичность, упрочнение, условие Ишлинского-Ивлева

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.003

УДК: 539.374+ 539.224

1. Введение.

Локализованное высокотемпературное воздействие вызывает в металлической пластине необратимые процессы, приводящие к нарушению сплошности материала и образованию прожига. Этим явлением широко пользуются на производстве для резки металлов. В зависимости от теплового воздействия и химического состава материал может упрочняться и разупрочняться [1-4]. Это происходит из-за фазовых переходов, возникающих при высоких температурах, что приводит к изменению физико-механических характеристик, а именно: упругие модули и предел текучести. Температурному деформированию пластины посвящено много работ [5-9]. Всех их объединяет

Поступила 20.09.2019

© Абашкин Е. Е., Соснин А. А., Ткачева А. В., 2019

Абашкин Евгений Евгеньевич

e-mail: abashkine@mail.ru, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия,

Соснин Александр Александрович

e-mail: alekshak@mail.ru, старший научный сотрудник, кандидат технических наук, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия,

Ткачева Анастасия Валерьевна

e-mail: 4nansi4@mail.ru, старший научный сотрудник, кандидат физ.-мат. наук, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия,

Работа выполнена в рамках государственного задания № 075-00414-19-00.

оторванность от натурального эксперимента. Ни в одной из них авторы не приводят сравнения расчетных данных полученных вычислений с экспериментальными данными. В работах [10, 11] возможность получения нарушения сплошности в виде прожига. Для полноты описания прожига, происходящего в стальной пластине, в настоящей работе построена математическая модель точечного нагрева пластины. Полученные благодаря математическому моделированию остаточные напряжения, сравниваются с остаточными напряжениями, образовавшимися в стальной пластине, нагретой ацетиленовым пламенем газовой горелки и снятых с ее поверхности при помощи анализатора остаточных напряжений RIGAKU MSF-3M.

Ранее нами в статье [12] была решена задача о разупрочнении пластины в результате локального нагрева газовой горелкой. Температура нагрева приближалась к температуре плавления, но не превышала ее. В настоящей работе рассмотрим локальный нагрев, который приведет к нарушению сплошности пластины, то есть к образованию прожига.

2. Основы математической модели.

В качестве основы математической модели принимаем модель Прандтля-Рейса, в которой деформации полагаются малыми и складывающимися из обратимых e_{ij}^e и необратимых e_{ij}^p .

$$d_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = 0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1)$$

где $u_{i,j}$ – компоненты вектора перемещений, d_{ij} – компоненты тензора полной деформации.

Обратимые деформации связаны с напряжениями σ_{ij} и температурой T законом Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - 3\alpha K (T - T_0)) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e \quad (2)$$

σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, T , T_0 – текущая и начальная температура, λ , μ , K – упругие модули, μ модуль сдвига G , $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ модуль всестороннего сжатия.

Необратимые деформации развиваются, если напряженное состояние достигнет поверхности нагружения, об этом гласит ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{de_{ij}^p}{dt} = d\xi \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}; \quad d\xi > 0; \quad f(\sigma_{ij}) = 0; \quad (3)$$

$f(\sigma_{kl}, c, \eta, k) = 0$ – уравнения поверхности нагружения в пространстве напряжений, k – предел текучести материала, c – коэффициент упрочнения, η – коэффициент вязкости при пластическом течении.

В качестве появления пластического течения воспользуемся кусочно-линейным пластическим потенциалом – условием максимальных приведенных напряжений (условием Ишлинского-Ивлева)

$$f = \max |\sigma_i - ce_i^p - \eta \varepsilon_i^p - \sigma| - \frac{4}{3}k = 0, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{jj}. \quad (4)$$

Распределение температуры задается законом температуропроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = aT_{,jj} - \chi(T - T_0) \quad (5)$$

где a – коэффициент температуропроводности, χ – коэффициент теплоотдачи $\chi = 2\beta (\zeta\rho h)^{-1}$ β – теплоотдача от деформируемого и проводящего тепло тела в окружающую среду, ζ – удельная теплоемкость на единицу массы, ρ – плотность материала пластины, h – толщина пластины.

Принимая во внимание высокую температуру нагрева материала, в отличие от классического случая теории температурных напряжений, задаваемой зависимостями (1) и (2), когда в них λ , μ , k постоянные величины, свяжем зависимости последних от температуры

$$\begin{aligned} k(T) &= k_0 (\tau)^2; & v(T) &= 0.5 - (0.5 - v_0) \tau \\ \lambda &= \frac{2v\mu}{1-2v}; & \tau &= \frac{T_p - T}{T_p - T_0} \\ \mu &= \mu_0 (-65.94 \cdot 10^{-3} T^2 + 41.08 T + 77.82 \cdot 10^3) \cdot 84000^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

В (7) k_0 , v_0 , μ_0 – предел текучести, коэффициенты Пуассона, модуль сдвига при комнатной температуре, T_p – температура плавления металла. Завершает систему уравнений (1-6) уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,i} = 0. \quad (7)$$

3. Постановка задачи и ее решение В цилиндрической системе координат (r, φ, z) расположена пластина, которая нагревается от источника тепла, расположенного в центре $r = 0$

$$T(r, t) = Vt, \quad 0 \leq r \leq R_0, \quad (8)$$

V – скорость нагрева, R_0 – радиус пятна нагрева. Когда температура в центре пластины станет равной $T(0, t_*) = T_p$, (T_p – температура плавления) источник отводится. В радиусе нагрева $0 \leq r \leq R_0$ металл вытекает и образуется отверстие (прожиг), после чего материал пластины остывает.

Теплоотводом от боковых поверхностей пластины пренебрегаем из-за малой толщины, которую не учитываем. Распределения температуры в материале пластины во все время исследования определяется из закона теплопроводности в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial T}{\partial t} = aT, - \chi(T - T_0). \quad (9)$$

Решения температурной задачи (8 – 10) получаем численно с помощью метода прогонки на неявной сетке.

В условиях плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) из зависимостей закона Дюамеля–Неймана имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)u_{r,r} + 2\lambda\mu r^{-1}u_r - 6K\mu T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (2\lambda\mu u_{r,r} + 4\mu(\lambda + \mu)r^{-1}u_r - 6K\mu T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подстановка (10) в уравнение равновесия

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \quad (11)$$

Приводит к уравнению для вычисления перемещения u_r

$$\phi u_{r,rr} + \zeta u_{r,r} + \omega u_r + \beta = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\phi &= 4\mu g w^{-1}, \\ \varsigma &= 4(\mu^2 \lambda_{,r} + \mu_{,r}(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)) w^{-2} + 4\mu g w^{-1} r^{-1}, \\ \omega &= 2(2\mu^2 \lambda_{,r} + \lambda^2 \mu_{,r}) w^{-2} r^{-1} - 4\mu g w^{-1} r^{-2}, \\ \beta &= -\theta T_0 (8\mu^2 \lambda_{,r} + 2(3\lambda^2 + 4\lambda\mu + 4\mu^2) \mu_{,r}) w^{-2} - 6K\mu T_0 \theta_{,r} w^{-1}.\end{aligned}$$

$$g = \lambda + \mu, \quad w = \lambda + 2\mu$$

В качестве граничных условий выбираем условия

$$u_r|_{r=0} = 0 \quad \sigma_r|_{r=R} = 0, \quad (13)$$

где R – расстояние до края пластины. Эти граничные условия будут справедливы до образования прожига, отверстия возникаемого в следствии теплового воздействия, когда металл вытекает из твердой пластины. После образования прожига граничные условия (13) изменятся на

$$\sigma_r|_{r=R_0} = 0 \quad \sigma_r|_{r=R} = 0. \quad (14)$$

Решения обыкновенное дифференциальное уравнение (12) совместно с граничными условиями (13) находим численно используя метод сеток.

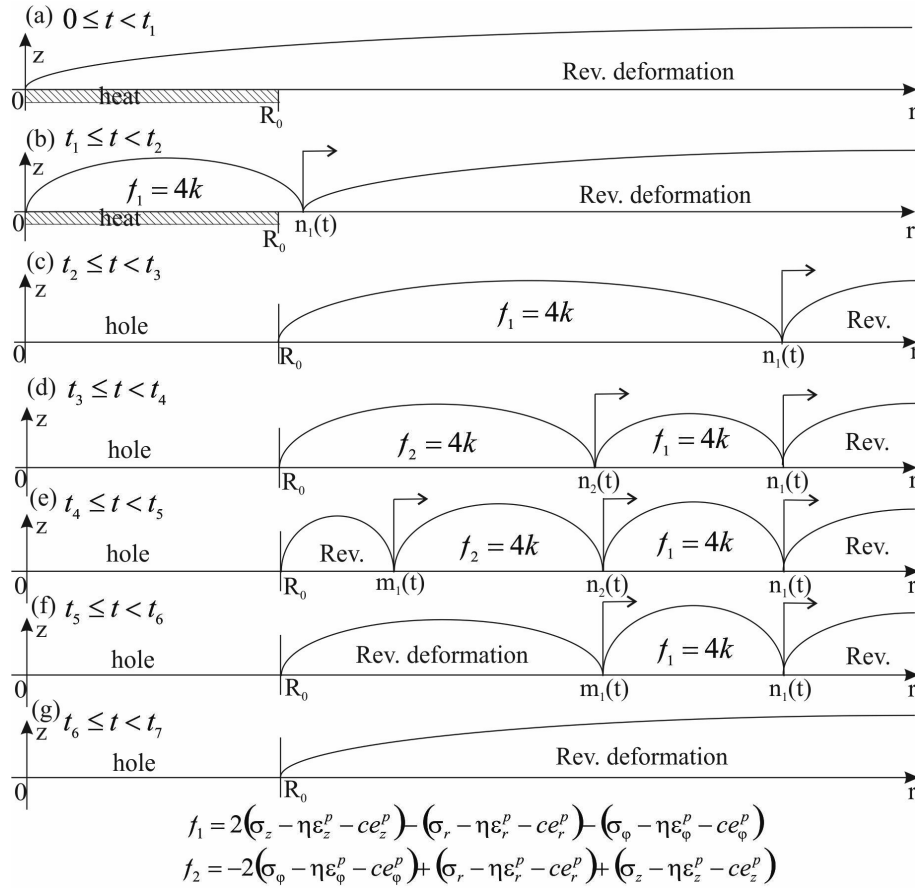


Рис. 1. Схема деформирования пластины

С некоторого момента времени $t = t_1$ в центре нагрева (рис. 1) выполнится условие пластического течения $2(\sigma_z - \eta e_z^p - ce_z^p) - (\sigma_r - \eta e_r^p - ce_r^p) - (\sigma_\varphi - \eta e_\varphi^p - ce_\varphi^p) = 4k$. Здесь зародится упругопластическая граница $r = n_1(t)$. В области $0 \leq r \leq n_1(t)$ материал пластины пластически течет, что приводит к образованию и развитию необратимых деформаций. Закон Дюамеля – Неймана в этом случае запишется в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (4\mu g (u_{r,r} - e_r^p) + 2\mu\lambda (r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - 6K\mu\alpha (T - T_0)) w^{-1}, \\ \sigma_y &= (2\mu\lambda (u_{r,r} - e_r^p) + 4\mu g (r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - 6K\mu\alpha (T - T_0)) w^{-1}.\end{aligned}\quad (15)$$

Из ассоциированного закона пластического течения (3) находим $\varepsilon_r^p = \varepsilon_\varphi^p = -\zeta$, $\varepsilon_z^p = 2\zeta$, $e_r^p = e_\varphi^p = -\zeta\tau + \tilde{e}_r^p$, $e_z^p = 2\zeta\tau + \tilde{e}_z^p$. Слагаемые $\zeta\tau$ являются приращением необратимой деформации \tilde{e}_r^p , существовавшей или зародившейся на предыдущем временном шаге, $\tau = \Delta t$ шаг по времени. Учитывая вышесказанное и (15) находим

$$\begin{aligned}\zeta &= -(3\mu K (u_{r,r} + r^{-1}u_r - 2\alpha (T - T_0)) + 2wk - 3(wc + 2\mu K) \tilde{e}_r^p) p \\ \sigma_r &= 2\mu (g ((2\mu - \lambda + 6c) \tau) u_{r,r} + ((3c\lambda + g(\lambda - 2\mu)) \tau) r^{-1}u_r) p + \\ &+ (4g(\lambda - 2\mu) \tau k - 6(\lambda wc\tau + 3\mu K \eta) \tilde{e}_r^p - 6\mu K (\eta + c\tau) \alpha (T - T_0)) p, \\ \sigma_\varphi &= 2\mu (((c\lambda - g(\lambda - 2\mu)) \tau + \lambda\eta) u_{r,r} + g((\lambda - 2\mu + 2c) \tau + 2\eta) r^{-1}u_r) p + \\ &+ (4g(\lambda - 2\mu) \tau k - (2\lambda wc\tau + 6\mu K \eta) \tilde{e}_r^p - 6\mu K (\eta + c\tau) \alpha (T - T_0)) p, \\ p &= ((wc + 2g(\lambda - 2\mu)) \tau + w\eta)^{-1}.\end{aligned}\quad (16)$$

Проводя численное решение дифференциального уравнения равновесия (11), на каждом временном шаге находятся перемещения. В области пластического течения дифференциальное уравнение равновесия строится на подобии (12).

Область пластического течения распространяется дальше области нагрева $R_0 < n_1$. Когда металл расплавится, образуется свободная граница $r = R_0$. Материал пластины будет пластически деформироваться в области $R_0 \leq r \leq n_1(t)$, при этом граница $n_1(t)$ непрерывно продвигается вглубь пластины. После образования свободной границы $r = R_0$ на ней начинает выполняться условие пластического течения $-2(\sigma_\varphi - \eta e_\varphi^p - ce_\varphi^p) + (\sigma_r - \eta e_r^p - ce_r^p) + (\sigma_z - \eta e_z^p - ce_z^p) = 4k$. Здесь зарождается новая граница $n_2(t)$, которая будет разделять области пластического течения на две $R_0 \leq r \leq n_2(t)$ и $n_2(t) \leq r \leq n_1(t)$. В новой области пластического течения закон Дюамеля – Неймана переписывается в виде

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{r,r} - e_r^p - p_r) + 2\lambda\mu(r^{-1}u_r - e_\varphi^p - p_\varphi) - 6K\mu\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (2\lambda\mu(u_{r,r} - e_r^p - p_r) + 4\mu(\lambda + \mu)(r^{-1}u_r - e_\varphi^p - p_\varphi) - 6K\mu\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}.\end{aligned}\quad (17)$$

В (17) p_r , p_φ – необратимые деформации, накопленные за предыдущие пластическое течение. Из ассоциированного закона пластического течения (3) находим

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r^p = \varepsilon_z^p = \zeta, \quad \varepsilon_\varphi^p = -2\zeta, \quad e_r^p = e_\varphi^p = \zeta\tau + \tilde{e}_r^p, \quad e_z^p = -2\zeta\tau + \tilde{e}_z^p. \quad \text{Находим} \\
\zeta = ((A - 2B)u_{r,r} + (B - 2A)r^{-1}u_r + D\alpha(T - T_0) + \\
+ ((5A - B + 6c)\tilde{e}_r^p - 4k)z \\
\sigma_r = (2\tau(2A^2 + B^2) + 6A(\eta + c\tau))u_{r,r}z + \\
+ (B - \tau(A + B)(B - 2A)z)r^{-1}u_r + \\
+ (4(A + B)\tau k - 6\eta(A + B)\tilde{e}_r^p - 6D(\eta + (A + c)\tau)\alpha(T - T_0))z, \\
\sigma_\varphi = (2\tau(2A^2 + B^2) + 6A(\eta + c\tau))zr^{-1}u_r + \\
+ (B - \tau(A + B)(B - 2A)z)u_{r,r} + \\
+ (4(A + B)\tau k - 6\eta(A + B)\tilde{e}_r^p - 6D(\eta + (A + c)\tau)\alpha(T - T_0))z, \\
A = 4\mu gw^{-1}; \quad B = 2\mu\lambda w^{-1}; \quad D = -6K\mu w^{-1}, \\
z = (6\eta + (5A - B + 6c)\tau)^{-1}
\end{aligned} \tag{18}$$

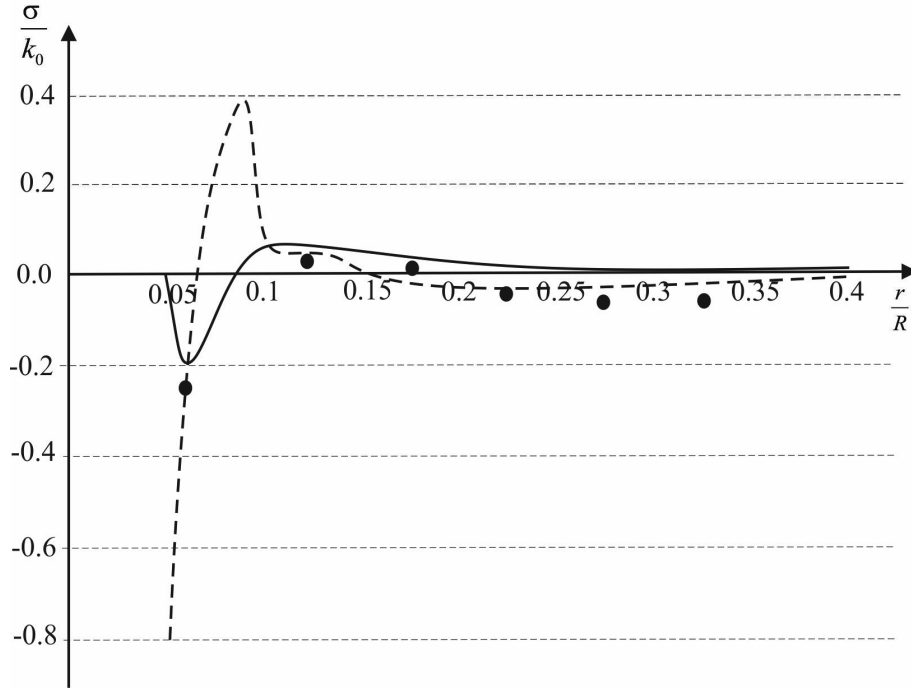


Рис. 2. Остаточные напряжения в материале пластины. σ_{rr} – сплошная линия; $\sigma_{\varphi\varphi}$ – пунктирная линия; σ_{rr} (получено экспериментально) – точка.

Решая численно уравнение равновесия (11) с учетом (10), (16), (18) получаем, что через некоторое время на свободной внутренней границе перестают расти необратимые деформации, и образуется разгружающая упругопластическая граница $m(t)$, которая впоследствии догонит границу $n_2(t)$ и границу $n_1(t)$. Произойдет разгрузка. Следует учитывать, что упругие модули (7) сохраняют свое значения при остывании, этим моделируются фазовые переходы. Остывание напряжения в материале пластины находятся численно из решения дифференциального уравнения равновесия (11). Остаточные напряжения приведены на рис. 2.

4. Физическое моделирование.

Для проведения натурального эксперимента возьмем стальную пластину, выполненную из Ст3 с размерами радиуса 200 мм, толщиной 12 мм. Физико-механические характеристики для Ст3 $\rho = 7.850 \cdot 10^3$ кгм⁻³, удельная теплоемкость 0,48 кДж/(кгК), теплопроводность 55,5 Вт/(мК), $k_0 = 255$ МПа, $\mu_0 = 74000$ МПа, $T_p = 1400^\circ\text{C}$, $\alpha = 11,5 \cdot 10^{-6}$, коэффициенты теплоотдачи нагретого металла в окружающую среду 7,6 Вт/(мК).

До начала эксперимента, используя метод рентгена дифрактометрии, произведем замер остаточных напряжений в материале пластины, убедимся в их малых значениях. В центре поместим источник тепла (газовая горелка) и произведем нагрев до расплава металла и образования сквозного отверстия (прожига) в пластине. После нагрева дождемся полного остывания и произведем снятие остаточных напряжений. На рисунке 2 показаны распределения остаточных напряжений.

Основные отличия проделанной работы от опубликованной ранее [12] состоит в том, что нагреваемая пластина доведена до образования в ней отверстия. В обеих работах для построения математической модели использовалось условие Илинского-Ивлева. В настоящей работе учитывается не только упрочнение материала, но и вязкость пластического течения. Это сделано для того чтобы приблизить расчеты к результатам натурального эксперимента. Учет упрочнения уменьшает уровень необратимых деформаций, а учет вязкости уменьшает расчетную область распространения пластического течения, как бы сжимая ее. Двумя этими особенностями материала можно добиться неплохой сходимости результатов численного моделирования и натурального эксперимента, тем самым довая возможность инженером создавать проэты металлоконструкций приближенных к реальным.

5. Заключение.

Исследования влияния процессов локального теплового воздействия на материал стальной пластины марки Ст3 с образованием прожига показало, что в зоне интенсивного теплового воздействия происходит увеличение остаточных напряжений. Вследствие роста остаточных напряжений в зоне интенсивного теплового воздействия, происходит разупрочнение материала стальной пластины, эти изменения оказывают негативное влияние на прочностные свойства материала. Использование условия максимальных приведенных напряжений (условия Ишлинского – Ивлева) с введением слагаемого, отвечающего за упрочнение материала и вязкость при пластическом течении, позволяет рассчитать остаточные напряжения в материале стальной пластины после теплового воздействия с образованием прожига, что подтверждается сравнением численного эксперимента с натурным.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бровер А.В. Устойчивость к разупрочнению при отпуске стали 65 после различных способов термической обработки, включающих поверхностное упрочнение Известия высших учебных заведений // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2006. № 6. С. 30–33.
- [2] Деформационное упрочнение и разупрочнение меди вследствие структурных перестроек при сложном нагружении / Е.Г. Пашинская, В.Ю. Таренков, В.Н. Варюхин [и др.] // Деформация и разрушение материалов. 2007. № 5. С. 27–33.
- [3] Коджаспиров Г.Е., Сулягин Р.В., Карьялайнен Л.П. Влияние температурно-деформационных условий на упрочнение и разупрочнение азотсодержащих коррозионно-стойких сталей // Металловедение и термическая обработка металлов. 2005. № 11(605). С. 22–26.

- [4] Анализ механизмов деформационного упрочнения стали с бейнитной структурой / В.Е. Громов, Е.Н. Никитина, Ю.Ф. Иванов [и др.] // *Металлург*. 2017. № 4. С. 59–65.
- [5] Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Осесимметричное деформирование круговой трехслойной пластины в температурном поле // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. 2018. № 1(327). С. 13–22.
- [6] Горшков С.А., Дац Е.П., Мурашкин Е.В. Расчет плоского поля температурных напряжений в условиях пластического течения и разгрузки // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2014. № 3(21). С. 169–175.
- [7] Вестяк В.А., Земсков А.В., Эрихман Н.Н. Численно-аналитическое решение обратной коэффициентной задачи термоупругости для пластины // *Вестник Московского авиационного института*. 2009. № 16(6). С. 244–250.
- [8] Шляхин Д.А., Даулетмуратова Ж.М. Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой пластины // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2018. № 5(77). С. 1–18.
- [9] Белов А.В., Поливанов А.А. Исследование влияния вида напряженного состояния на длительную прочность плоских пластин в условиях температурной ползучести и высокотемпературной водородной коррозии // *Фундаментальные исследования*. 2015. № 7(3). С. 501–506.
- [10] Захаров Н.С., Запонов А.Э. Тепловое действие лазерного излучения на конструкционные металлические сплавы // *Двойные технологии*. 2017. № 1(78). С. 8–12.
- [11] Математическая модель коррекции тока для компенсации изменения высоты электрода в процессе ручной дуговой сварки / Ю.А. Арутюнов, А.А. Дробязко, Е.А. Чащин [и др.] // *Интернет-журнал "Науковедение"*. 2017. № 9(2). С. 58–68.
- [12] Абашкин А.А., Ткачева А.В. Разупрочнение материала стальной пластины вследствие локального температурного воздействия // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2019. № 3(41). С. 85–95.

E. E. Abashkin, A. A. Sosnin, A. V. Tkacheva

THE INFLUENCE OF LOCAL THERMAL EFFECTS ON THE MATERIAL OF THE STEEL PLATE OF THE ST3 BRAND WITH THE FORMATION OF BURNING

Institute of Machine Science and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. The paper describes studies of the thermal effect of a gas burner flame on a steel plate. During this exposure, a hole appears in the plate material - burning. To describe the process, a one-dimensional mathematical model is constructed based on the Prandtl-Reis model. The yield strength and elastic moduli are assumed to be temperature dependent. As a criterion of plastic flow, the Ilinsky-Ivlev condition is adopted, in which the term is introduced, which is responsible for the hardening of the material.

Keywords: temperature stresses, spot heating, residual stresses, elasticity, ductility, hardening, Ilinsky-Ilev condition

Abashkin Evgeny Evgenievich, Junior Researcher, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk-on-Amur, Russia,
Sosnin Alexander Alexandrovich, Senior Researcher, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk-on-Amur, Russia,
Tkacheva Anastasia Valerevna, Senior Researcher, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

REFERENCES

- [1] Brover A. Resistance to softening during tempering of steel 65 after various methods of heat treatment, including surface hardening *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii // Proceedings of higher education. Ferrous metallurgy.* 2006. no. 6. P. 30–33. (in Russian).
- [2] Strain hardening and softening of copper due to structural rearrangements under complex loading / E. Pashinskaya, V. Tarenkov, V. Varyukhin et al. // *Deformation and fracture of materials.* 2007. no. 5. P. 27–33. (in Russian).
- [3] Kojaspirov G., Sulyagin R., Karjalainen L. Influence of temperature-strain conditions on the hardening and softening of nitrogen-containing corrosion-resistant steels // *Metallurgy and heat treatment of metals.* 2005. no. 11 (605). P. 22–26. (in Russian).
- [4] Analysis of the mechanisms of strain hardening of steel with a bainitic structure / B. Gromov, E. Nikitina, Y. Ivanov et al. // *Metallurgist.* 2017. no. 4. P. 59–65. (in Russian).
- [5] Starovoitov E., Leonenko D. Axisymmetric deformation of a circular three-layer plate in a temperature field // *Fundamental and applied problems of engineering and technology.* 2018. no. 1 (327). P. 13–22. (in Russian).
- [6] Gorshkov S., Dats E., Murashkin E. Calculation of a flat field of temperature stresses in conditions of plastic flow and unloading // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics.* 2014. no. 3 (21). P. 169–175. (in Russian).
- [7] Vestyak B., Zemskov A., Erichman N. Numerical-analytical solution of the inverse coefficient problem of thermoelasticity for a plate // *Bulletin of the Moscow Aviation Institute.* 2009. no. 16 (6). P. 244–250. (in Russian).
- [8] Shlyakhin D., Dauletmuratova J. Nonstationary axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed round plate // *Engineering Journal: Science and Innovation.* 2018. no. 5 (77). P. 1–18. (in Russian).
- [9] Belov A., Polivanov A. Study of the influence of the type of stress state on the long-term strength of flat plates under conditions of thermal creep and high-temperature hydrogen corrosion // *Basic Research.* 2015. no. 7 (3). P. 501–506. (in Russian).
- [10] Zakharov N., Cufflinks A. Thermal effect of laser radiation on structural metal alloys // *Dual Technologies.* 2017. no. 1 (78). P. 8–12. (in Russian).
- [11] Mathematical model of current correction to compensate for changes in the height of the electrode during manual arc welding / Y. Arutyunov, A. Drobyazko, E. Chashchin et al. // *Internet journal "Science of Science".* 2017. no. 9 (2). P. 58–68. (in Russian).
- [12] Abashkin A., Tkacheva A. Softening of steel plate material due to local temperature exposure // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics.* 2019. no. 3(41). P. 85–95. (in Russian).

А. А. Абдурахманов, В. В. Глаголев, О. В. Инченко

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ АДГЕЗИВА ПРИ СДВИГЕ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Исследуется напряженно-деформированное состояние тонкого адгезионного слоя в слоистом композите при сдвиговом характере нагружения с учетом возможного упругопластического деформирования. На основе упрощенной постановки в дифференциальном виде получены аналитические решения поставленной задачи. Найдена зависимость внешней критической нагрузки от длины зоны пластического деформирования материала слоя.

Ключевые слова: адгезионный слой, композит, упругопластическое деформирование

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.004

УДК: 539.375

Введение. В настоящее время основным подходом при моделировании прочности адгезионных соединений является представление адгезионного слоя слоем нулевой толщины и использование критериальной базы механики квазихрупкого разрушения [1-3]. В этом случае пренебрегают толщиной адгезива, а его механические свойства сводятся к адгезионным силам взаимодействия [4], сопряженных слоев материалов, которые могут иметь разные механические [5] или прочностные свойства [6,7]. Аналитические решения в этом случае получаются, как правило, в рамках упрощающих гипотез [8-10].

Наряду с данными моделями имеет место подход, учитывающий толщину адгезионного слоя (АС), в рамках модели контактного слоя [11,12] и модели слоя взаимодействия [13,14]. В модели контактного слоя пренебрегают напряжением, действующим

© Абдурахманов А. А., Глаголев В. В., Инченко О. В., 2019

Абдурахманов Амир Абдурауфович

e-mail: dragon.1993@inbox.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович

e-mail: vadim@tsu.tula.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Инченко Оксана Владимировна

e-mail: inchenko_ov@mail.ru, кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 19-41-710001 р_а.

Поступила 02.10.2019

ортогонально отрыву, которое может учитываться при формулировке условий возможного перехода слоя в состояние пластического деформирования. Отметим, что в настоящее время в состав адгезионных слоев могут входить пластификаторы. Данное обстоятельство дает возможность описывать поведение данных слоев в рамках упругопластической модели. В данной работе на основе концепции слоя взаимодействия предлагается постановка задачи нагружения адгезионного соединения с упругопластическими свойствами близкая к регламентной схеме испытания на адгезионную прочность ГОСТ 14759-69.

Постановка задачи. Рассмотрим композитную пластину, состоящую из двух консолей 1 и 2 длиной $\ell + a$, с одинаковыми толщинами h и механическими свойствами. Консоли сопряжены АС толщиной δ_0 по отрезку ℓ согласно Рис.1. На левом торце консоли 1 действует горизонтальная распределенная нагрузка постоянной интенсивности P . Правый торец пластины жестко закреплен от перемещений. Вся остальная поверхность пластины свободна от напряжений. Считаем материал пластин линейно упругим, а материал АС - идеально упругопластическим. Полагая, что пластические деформации в слое реализуются по длине $x_1 \in [0; \ell_p] \cup (\ell - \ell_p; \ell]$, при значении интенсивности внешней нагрузки, соответствующей началу пластического течения в вершине слоя, необходимо определить НДС в данном композите.

Для описания взаимодействия слоя 3 с телами 1 и 2 применим концепцию «слоя взаимодействия», развитую в работах [13-15]. В этом случае равновесие тел 1 и 2, согласно [13,15] запишем в вариационной форме для тела 1:

$$\int_{S_1} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \delta u dl \quad (1)$$

и тела 2:

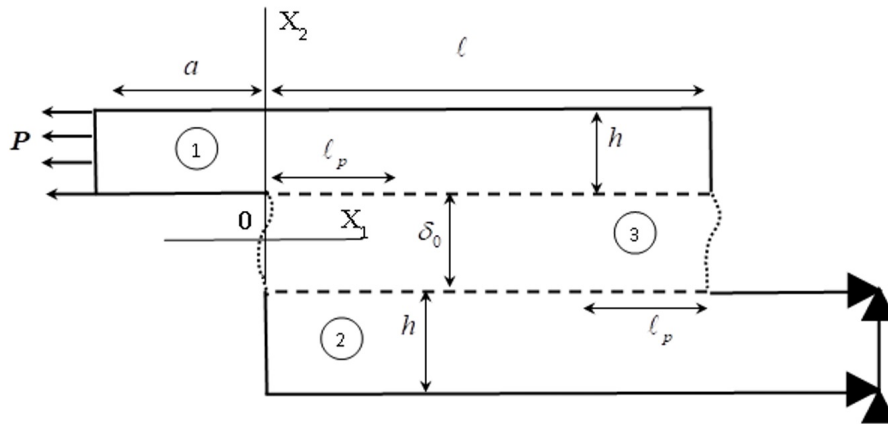


Рис. 1. Схема нагружения композитной пластины.

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx_1 + \\ & + 0.5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

где S_1, S_2 – площади тел 1 и 2; L_1, L_2 – контуры левых торцов тел 1 и 2; σ, ϵ – тензоры напряжений и деформаций в телах 1 и 2; u – поле перемещений; $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\epsilon}_{11}, \bar{\epsilon}_{22}, \bar{\epsilon}_{12}$ – компоненты тензоров средних напряжений и деформаций слоя 3 с соответствующими

компонентами: $\bar{\sigma}_{21}(x_1) = \bar{\sigma}_{12}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2$,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{22}(x_1) &= \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2, & \bar{\sigma}_{11}(x_1) &= \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2, \\ \bar{\epsilon}_{11}(x_1) &= 0.5 \left(\frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right), & \bar{\epsilon}_{21}(x_1) &= \bar{\epsilon}_{12}(x_1) = \\ & 0.5 \left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0.5 \left(\frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right). \end{aligned}$$

где u_k^+, u_k^- – соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя; $k = 1, 2$ здесь и далее. Постулируется жесткое сцепление между границами АС и областями 1, 2, а также равенство модуля и противоположность направления векторов напряжений по границам слоя.

Уравнения (1) и (2) замкнем определяющими соотношениями в форме закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon \delta_{ij} \right), \quad (3)$$

где E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона тел 1 и 2; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – объемное расширение; δ_{ij} – символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Для материала АС определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций. В области упругого деформирования определяющие соотношения примут вид:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right), \quad (4)$$

где E_3, ν_3 – модуль упругости и коэффициент Пуассона АС.

В области упругопластического деформирования АС определяющие соотношения для средних по толщине слоя напряжений принимаем в виде критерия Треска – Сен-Венана [16]:

$$\bar{\sigma}_{ij}^{\max} = \tau_0 \quad (5)$$

где $\bar{\sigma}_{ij}^{\max}$ – максимальное касательное напряжение; τ_0 – предел текучести.

Таким образом, решение системы (1) – (5) сводится к определению поля перемещений $u(x_1, x_2)$ в телах 1 и 2 (см. Рис. 2) при заданных граничных условиях.

Для упрощения задачи и получения аналитического решения принимаем, что поле перемещений согласно концепции «дифференциального сдвига» [17] определено следующим образом в теле 1:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^+(x_1), u_2(x_1, x_2) = 0, \quad (6)$$

и теле 2:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^-(x_1), u_2(x_1, x_2) = 0. \quad (7)$$

При данной схеме нагружения для средних напряжений в слое для плоской деформации реализуется напряженное состояние следующего вида:

$$\bar{\sigma}_{11} \neq 0; \bar{\sigma}_{22} \neq 0; \bar{\sigma}_{12} \neq 0; \bar{\sigma}_{33} \neq 0. \quad (8)$$

При решении задачи полагаем, что напряжение в области пластического деформирования имеет место упругая сжимаемость $\bar{\sigma} = 3K\bar{\epsilon}$, где $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33}$. Для материала слоя в состоянии плоской деформации, как в работе [18], предполагаем равенство нулю пластических $\epsilon_{33}^p = 0$ и упругих компонент деформаций $\epsilon_{33}^e = 0$ в направлении базисного вектора e_3 . В силу положений (6) и (7) полагаем равенство нулю пластических $\epsilon_{22}^p = 0$ и упругих компонент деформаций $\epsilon_{22}^e = 0$ в направлении базисного вектора e_2 . Считаем деформации малыми и для стадии упругопластического деформирования справедливое следующее разложение: $\epsilon_{ii} = \epsilon_{ii}^e + \epsilon_{ii}^p$, $i = 1, 2, 3$. В этом случае для рассматриваемой схемы нагружения слоя напряжения в области пластического деформирования получаем: $\bar{\epsilon} = \epsilon_{11} = \epsilon_{11}^e$, следовательно, диагональные напряжения в слое и на стадии упругопластического деформирования могут быть определены в виде (6). Таким образом $\bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33} = \frac{\nu_3}{(1-\nu_3)}\bar{\sigma}_{11}$. При этом касательные напряжения слоя в силу (7) связаны с пределом текучести соотношением:

$$\bar{\sigma}_{12} = -\frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta\bar{\sigma}_{11}^2}}{2}, \quad (9)$$

где: $\beta = \left(\frac{1-4\nu_3+4\nu_3^2}{(1-\nu_3)^2}\right)$.

С учетом (6)-(9) преобразуем систему (1), (2) к следующим дифференциальным уравнениям для тела 1:

$$\frac{d\sigma_{11}^{(1)}}{dx_1} = 0 \quad \text{на участке} \quad x_1 \in [-a; 0); \quad (10)$$

$$h\frac{d\sigma_{11}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0\frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = -\frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta\bar{\sigma}_{11}^2}}{2} \quad \text{на участке} \quad x_1 \in (0; \ell_p); \quad (11)$$

$$h\frac{d\sigma_{11}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0\frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{21} \quad \text{на участке} \quad x_1 \in (\ell_p; \ell - \ell_p); \quad (12)$$

$$h\frac{d\sigma_{11}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0\frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = -\frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta\bar{\sigma}_{11}^2}}{2} \quad \text{на участке} \quad x_1 \in (\ell - \ell_p; \ell); \quad (13)$$

и тела 2:

$$h\frac{d\sigma_{11}^{(2)}}{dx_1} + 0.5\delta_0\frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = \frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta\bar{\sigma}_{11}^2}}{2} \quad \text{на участке} \quad x_1 \in (0; \ell_p); \quad (14)$$

$$h\frac{d\sigma_{11}^{(2)}}{dx_1} + 0.5\delta_0\frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = -\bar{\sigma}_{21} \quad \text{на участке} \quad x_1 \in (\ell_p; \ell - \ell_p); \quad (15)$$

$$h\frac{d\sigma_{11}^{(2)}}{dx_1} + 0.5\delta_0\frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = \frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta\bar{\sigma}_{11}^2}}{2} \quad \text{на участке} \quad x_1 \in (\ell - \ell_p; \ell); \quad (16)$$

$$\frac{d\sigma_{11}^{(2)}}{dx_1} = 0 \quad \text{на участке} \quad x_1 \in (\ell; a]. \quad (17)$$

Решения уравнений сопрягаются в точках $x_1 = 0$:

$$h\sigma_{11}^{(1)} \Big|_{x_1=0-0} = \left(h\sigma_{11}^{(1)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=0+0}, \quad (18)$$

$$u_1^+ \Big|_{x_1=0-0} = u_1^+ \Big|_{x_1=0+0}, \quad (19)$$

$x_1 = \ell_p$:

$$\left(h\sigma_{11}^{(1)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=\ell_p-0} = \left(h\sigma_{11}^{(1)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=\ell_p+0}, \quad (20)$$

$$u_1^+ \Big|_{x_1=\ell_p-0} = u_1^+ \Big|_{x_1=\ell_p+0}, \quad (21)$$

$$\left(h\sigma_{11}^{(2)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=\ell_p-0} = \left(h\sigma_{11}^{(2)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=\ell_p+0}, \quad (22)$$

$$u_1^- \Big|_{x_1=\ell_p-0} = u_1^- \Big|_{x_1=\ell_p+0}, \quad (23)$$

$x_1 = \ell - \ell_p$:

$$\left(h\sigma_{11}^{(1)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=\ell-\ell_p-0} = \left(h\sigma_{11}^{(1)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=\ell-\ell_p+0}, \quad (24)$$

$$u_1^+ \Big|_{x_1=\ell-\ell_p-0} = u_1^+ \Big|_{x_1=\ell-\ell_p+0}, \quad (25)$$

$$\left(h\sigma_{11}^{(2)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=\ell-\ell_p-0} = \left(h\sigma_{11}^{(2)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=\ell-\ell_p+0}, \quad (26)$$

$$u_1^- \Big|_{x_1=\ell-\ell_p-0} = u_1^- \Big|_{x_1=\ell-\ell_p+0}, \quad (27)$$

$x_1 = \ell$:

$$\left(h\sigma_{11}^{(2)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=\ell-0} = h\sigma_{11}^{(2)} \Big|_{x_1=\ell+0}, \quad (28)$$

$$u_1^- \Big|_{x_1=\ell-0} = u_1^- \Big|_{x_1=\ell+0}, \quad (29)$$

с граничными условиями:

$$\sigma_{11}^{(1)} \Big|_{x_1=-a} = P, \quad (30)$$

$$\left(h\sigma_{11}^{(2)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=0} = 0, \quad (31)$$

$$\left(h\sigma_{11}^{(1)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=\ell} = 0, \quad (32)$$

$$u_1^- \Big|_{x_1=\ell+a} = 0. \quad (33)$$

Определяющие соотношения (3), (4) в данном случае для состояния плоской деформации приобретают вид:

для консолей:

$$\sigma_{11}^{(1)} = D \frac{du_1^+}{dx_1}; \sigma_{11}^{(2)} = D \frac{du_1^-}{dx_1}; \quad (34)$$

для слоя на участке $x_1 \in [\ell_p, \ell - \ell_p]$:

$$\bar{\sigma}_{12} = L \frac{(u_1^+ - u_1^-)}{\delta_0}; \bar{\sigma}_{11} = D_1 \left(\frac{du_1^+}{dx_1} + \frac{du_1^-}{dx_1} \right), \quad (35)$$

где $D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $L = \frac{E_3}{2(1+\nu_3)}$; $D_1 = \frac{E_3(1-\nu_3)}{2(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$.

В этом случае на участках $x_1 \in [0; \ell_p) \cup (\ell - \ell_p; \ell]$ имеет место связь компонент средних напряжений и производных граничных перемещений:

$$\bar{\sigma}_{12} = -\frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta\bar{\sigma}_{11}^2}}{2}; \quad \bar{\sigma}_{11} = D_1 \left(\frac{du_1^+}{dx_1} + \frac{du_1^-}{dx_1} \right). \quad (36)$$

Решение задачи. Запишем решение (10)-(36) для каждого из участков:

$$u_1^+ = \frac{C_1}{D}x_1 + C_2; \quad x_1 \in [-a; 0); \quad (37)$$

$$u_1^+ = -\frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta D_1^2 C_3^2}}{4hD}x_1^2 + C_5x_1 + C_6; \quad x_1 \in (0, \ell_p); \quad (38)$$

$$u_1^- = C_3x_1 + C_4 + \frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta D_1^2 C_3^2}}{4hD}x_1^2 - C_5x_1 - C_6; \quad x_1 \in (0, \ell_p); \quad (39)$$

$$u_1^+ = C_9e^{kx_1} + C_{10}e^{-kx_1} + \frac{C_7}{2}x_1 + \frac{C_8}{2}; \quad x_1 \in (\ell_p, l - \ell_p); \quad (40)$$

$$u_1^- = \frac{C_7}{2}x_1 + \frac{C_8}{2} - C_9e^{kx_1} - C_{10}e^{-kx_1}; \quad x_1 \in (\ell_p, l - \ell_p); \quad (41)$$

$$u_1^+ = -\frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta D_1^2 C_3^2}}{4hD}x_1^2 + C_{13}x_1 + C_{14}; \quad x_1 \in (l - \ell_p, l); \quad (42)$$

$$u_1^- = C_{11}x_1 + C_{12} + \frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta D_1^2 C_3^2}}{4hD}x_1^2 - C_{13}x_1 - C_{14}; \quad x_1 \in (l - \ell_p, l); \quad (43)$$

$$u_1^- = C_{15}x_1 + C_{16}; \quad x_1 \in (l, l + a]; \quad (44)$$

где: $C_1 = P$; $C_3 = C_7 = C_{11} = \frac{hP}{hD + \delta_0 D_1}$; $C_5 = \frac{P(hD + 0.5\delta_0 D_1)}{D(hD + \delta_0 D_1)}$;

$$C_2 = C_6 = \frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta D_1^2 C_3^2}}{2hD}\ell_p^2 + \frac{2C_{10}(e^{2k\ell_p} + e^{k\ell})}{e^{k(\ell_p + \ell)}} - \frac{aP}{D} - 2C_5\ell_p - C_7\left(\frac{l}{2} - \ell_p\right);$$

$$C_4 = \frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta D_1^2 C_3^2}}{2hD}\ell_p^2 + \frac{2C_{10}(e^{2k\ell_p} + e^{k\ell})}{e^{k(\ell_p + \ell)}} - \frac{2aP}{D} - 2C_5\ell_p - C_7(l - 2\ell_p) - C_3\ell_p;$$

$$C_8 = \frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta D_1^2 C_3^2}}{2hD}\ell_p^2 + \frac{2C_{10}(e^{2k\ell_p} + e^{k\ell})}{e^{k(\ell_p + \ell)}} - \frac{2aP}{D} - 2C_5\ell_p - C_7(l - \ell_p);$$

$$C_{10} = \frac{1}{2kD} \left(P - \frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta D_1^2 C_3^2}}{h}\ell_p \right) \frac{e^{k(\ell_p + \ell)}}{(e^{2k\ell_p} - e^{k\ell})}; \quad C_9 = \frac{C_{10}}{e^{k\ell}};$$

$$C_{12} = \frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta D_1^2 C_3^2}}{2hD}\ell_p^2 + \frac{2C_{10}(e^{2k\ell_p} + e^{k\ell})}{e^{k(\ell_p + \ell)}} - \frac{2aP}{D} - 2C_5\ell_p - C_{11}(l - \ell_p);$$

$$C_{13} = \frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta D_1^2 C_3^2}}{2hD}l - \frac{0.5\delta_0 D_1 P}{D(hD + \delta_0 D_1)};$$

$$C_{14} = C_{11}l + C_{12} - \frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta D_1^2 C_3^2}}{4hD}l^2 + \frac{aP}{D} + \frac{0.5\delta_0 D_1 Pl}{D(hD + \delta_0 D_1)};$$

$$C_{15} = \frac{P}{D}; \quad C_{16} = -(l + a)\frac{P}{D}; \quad k = \sqrt{\frac{2L}{\delta_0 hD}}.$$

Связь между длиной пластической зоны и внешней нагрузкой определим из условия достижения в точке предела текучести:

$$\bar{\sigma}_{12}|_{x_1=\ell_p} = L \frac{(u_1^+ - u_1^-)}{\delta_0} \Big|_{x_1=\ell_p} = -\frac{\sqrt{4\tau_0^2 - \beta\bar{\sigma}_{11}^2}}{2} \quad (45)$$

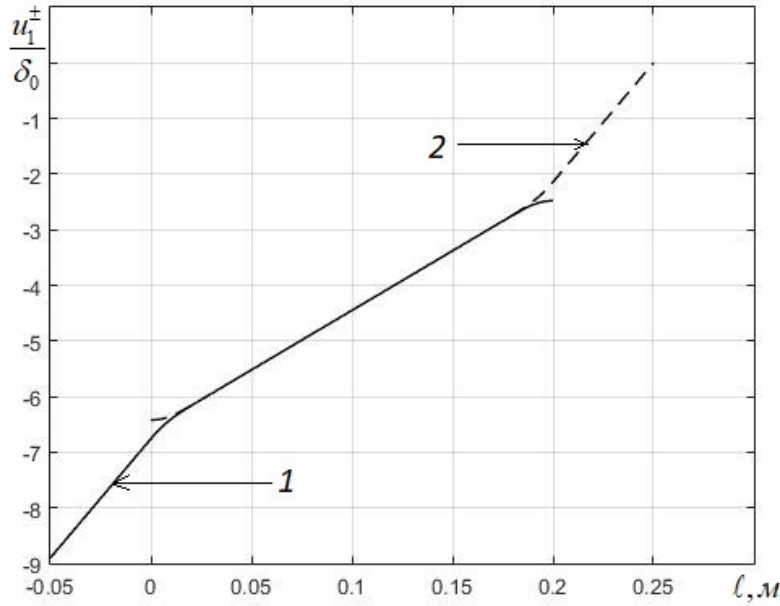


Рис. 2. Распределение поля перемещений.

Связь (45) с учетом выражения (35) и решения (40)-(41) приводит к следующему выражению внешней нагрузки:

$$P = \frac{2\tau_0 m (hD + \delta_0 D_1)}{h\sqrt{(\beta D_1^2 m^2 + 4L^2 m_1^2)}}, \quad (46)$$

где: $m = e^{2k\ell_p} (2L\ell_p - kD\delta_0 h) + e^{k\ell} (2L\ell_p + kD\delta_0 h)$, $m_1 = (e^{2k\ell_p} + e^{k\ell}) (hD + \delta_0 D_1)$.

В качестве материала для расчета рассмотрим композит со следующими характеристиками консолей: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$ и адгезионного слоя: $E_3 = 9 \cdot 10^9$ Па, $\nu_3 = 0.3$, $\tau_0 = 2 \cdot 10^8$ Па. Геометрические характеристики слоистого композита выбираем следующими: $\ell = 0.2$ м, $a = 0.05$ м, $h = 0.05$ м. На Рис. 2-4 построены распределения полей перемещений и напряжений при длине пластической зоны $\ell_p = 0.01$ м и толщине слоя $\delta_0 = 10^{-5}$ м.

График 1 на Рис. 2 определяет перемещение u_1^+ , а график 2 - перемещение u_1^- . Перемещения отнесены к толщине слоя.

График 1 на Рис. 3 определяет напряжение $\sigma_{11}^{(1)}$, а график 2 - напряжение $\sigma_{11}^{(2)}$. Напряжения отнесены к пределу текучести.

График 1 на Рис. 4 определяет напряжение $\bar{\sigma}_{11}$, а график 2 - напряжение $\bar{\sigma}_{12}$. Напряжения отнесены к пределу текучести.

На Рис. 5 и 6 построены зависимости внешней нагрузки от длины пластической зоны на основе соотношения (46). Графики 1, 2, 3 на Рис. 5 соответствуют толщинам слоя 10^{-6} м, 10^{-5} м, 10^{-4} м, а графики 1, 2, 3 на Рис. 6 - толщинам слоя 10^{-8} м, 10^{-7} м, 10^{-6} м.

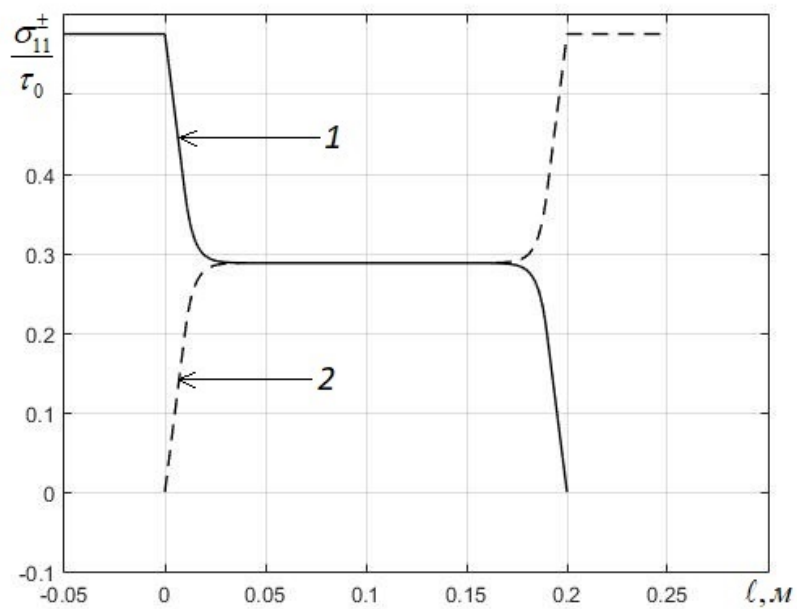


Рис. 3. Распределение поля напряжений в консолях.

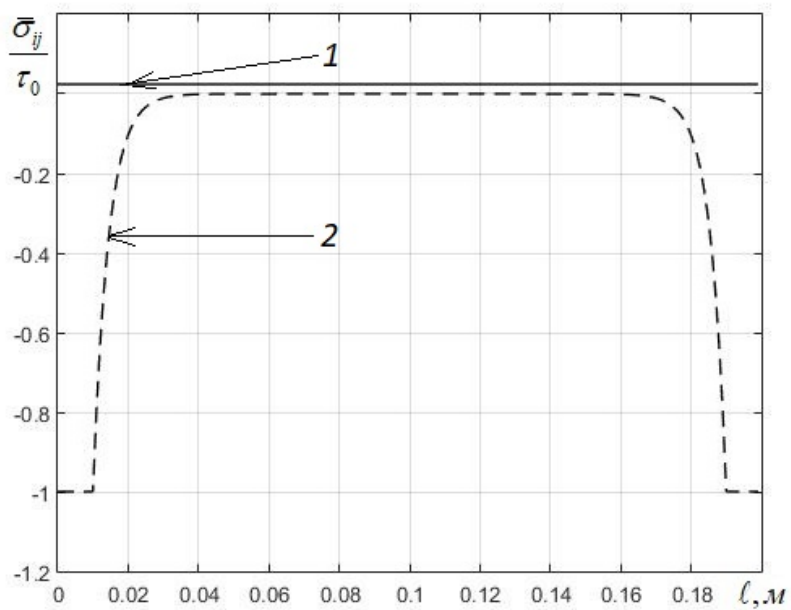


Рис. 4. Распределение поля напряжений в слое.

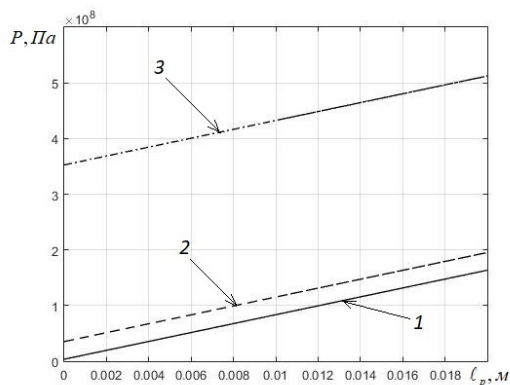


Рис. 5. Зависимость нагрузки от длины пластической зоны

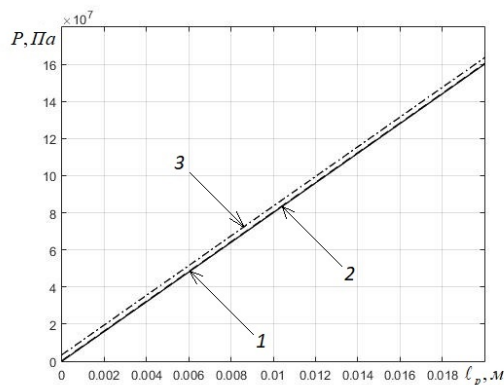


Рис. 6. Зависимость нагрузки от длины пластической зоны

Из сравнения Рис. 5 и 6 видно, что толщина адгезионного слоя имеет определяющее значение в формировании внешней нагрузки при конечности напряженного состояния в слое. Для малых толщин слоя, согласно Рис. 6, длина пластической зоны является основным фактором в формировании значения внешней нагрузки.

Заключение. Предложена модель упругопластического деформирования тонкого адгезионного слоя в слоистом композите. Показано, что учет толщины слоя существенен при расчете внешней нагрузки. Для малых толщин слоя внешняя нагрузка зависит только от длины зоны необратимых деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
- [2] Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1974. 640 с.
- [3] Allen H.G., Feng Z. Classification of Structural Sandwich Panel Behaviour // Mechanics of Sandwich Structures. Springer, Dordrecht. 1998. pp. 1-12.
- [4] Фроленкова Л.Ю., Шоркин В.С. Поверхностная энергия и энергия адгезии упругих тел // Изв. РАН. МТТ. 2017. №1. С. 76–91.
- [5] Астапов И.С., Астапов Н.С., Корнев В.М. Модель расслоения композита при поперечном сдвиге // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015. №2(21). С. 149–161.
- [6] Baldan A. Adhesively-bonded joints in metallic alloys, polymers and composite materials: Mechanical and environmental durability performance // Journal of Materials Science. 2004. V. 39. No 15. pp. 4729–4797.
- [7] Sun C.T., Jih C.J. On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media // Engineering Fracture Mechanics. 1987. № 1(28). pp. 13–20.
- [8] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.
- [9] Fang X., Charalambides P. G. The fracture mechanics of cantilever beams with an embedded sharp crack under end force loading // Engineering Fracture Mechanics. 2015. V. 149. pp. 1-17.
- [10] Mattei O., Bardella L. A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions // Eur. J. Mech. A-Solid. 2016. V. 58. pp. 172-186.
- [11] Андреев В.И., Цыбин Н.Ю., Турусов Р.А. Анализ краевого эффекта касательных напряжений при сдвиге двухконсольной балки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. № 3(14). С. 180-186.
- [12] Андреев В.И., Цыбин Н.Ю., Турусов Р.А. Определение напряженно-деформированного состояния трехслойной балки с применением контактного слоя // Вестник МГСУ. 2016. № 4. С. 17-26.

- [13] Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А. Моделирование процесса разделения композита с адгезионным слоем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 2. С. 34–44.
- [14] Глаголев В.В., Маркин А.А., Пашинов С.В. Биметаллическая пластина в однородном температурном поле // Механика композиционных материалов и конструкций. 2017. № 3(23). С. 331-343.
- [15] Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // International Journal of Solids and Structures. 2019. V. 158. P. 141-149.
- [16] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 704 с.
- [17] Volkersen O. Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten. Luftfahrtforschung. 1938. V. 15. P. 41–47.
- [18] Глаголев В.В., Маркин А.А. Об одной постановке задачи упругопластического разделения // Прикладная механика и техническая физика. 2009. №4(50). С. 187-195.

A. A. Abdurakhmanov, V. V. Glagolev, O. V. Inchenko

ELASTOPLASTIC SHEAR ADHESIVE DEFORMATION

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. The stress-strain state of a thin adhesive layer in a layered composite under shear loading is studied taking into account possible elastoplastic deformation. On the basis of a simplified statement in a differential form, analytical solutions to the problem are obtained. The dependence of the external critical load on the length of the zone of plastic deformation of the layer material is found.

Keywords: adhesive layer, composite, elastoplastic deformation.

REFERENCES

- [1] Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. Mechanics of multilayer structures. M.: Mashinostroyeniye. 1980. 375 p. (in Russian)
- [2] Cherepanov G.P. Fracture Mechanics of Composite Materials. M.: Nauka. 1974. 640 p. (in Russian)
- [3] Allen H.G., Feng Z. Classification of Structural Sandwich Panel Behaviour // Mechanics of Sandwich Structures. Springer, Dordrecht. 1998. pp. 1-12.
- [4] Frolenkova L.Y., Shorkin V.S. Surface energy and adhesion energy of elastic bodies // Mechanics of Solids. 2017. No 1(52). pp. 62–74.
- [5] Astapov I.S., Astapov N.S., Kornev V.M. Lamination model of composite affected by lateral shift // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015. No 2(21). pp. 149–161. (in Russian)
- [6] Baldan A. Adhesively-bonded joints in metallic alloys, polymers and composite materials: Mechanical and environmental durability performance // Journal of Materials Science. 2004. V. 39. No 15. pp. 4729–4797.
- [7] Sun C.T., Jih C.J. On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media // Engineering Fracture Mechanics. 1987. No 1(28). pp. 13–20.
- [8] Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kriger S. Plates and shells. M.: Fizmatgiz. 1963. 636 p. (in Russian)

© Abdurakhmanov A. A., Glagolev V. V., Inchenko O. V., 2019
Abdurakhmanov Amir Abduraufovich
 e-mail: dragon.1993@inbox.ru, Postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia
Glagolev Vadim Vadimovich
 e-mail: vadim@tsu.tula.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Tula State University, Tula, Russia
Inchenko Oksana Vladimirovna
 e-mail: inchenko_ov@mail.ru, Ph.D. Phys. & Math., Tula State University, Tula, Russia

-
- [9] Fang X., Charalambides P. G. The fracture mechanics of cantilever beams with an embedded sharp crack under end force loading // *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. V. 149. pp. 1-17.
- [10] Mattei O., Bardella L. A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions // *Eur. J. Mech. A-Solid*. 2016. V. 58. pp. 172-186.
- [11] Andreyev V.I., Tsybin N.Yu., Turusov R.A. Analysis of the edge effect of shear stresses of a two-console beam affected by shift // *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*. 2018. No 3(14). pp. 180-186. (in Russian)
- [12] Andreyev V.I., Tsybin N.Yu., Turusov R.A. Determination of the stress-strain state of a three-layer beam using a contact layer // *Vestnik MGSU*. 2016. No 4. pp. 17-26. (in Russian)
- [13] Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. Separation process modeling of composite with adhesive layer // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No 2. pp. 34-44.
- [14] Glagolev V.V., Markin A.A., Pashinov S.V. Bimetal plate in a uniform temperature field // *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*. 2017. № 3(23). pp. 331-343. (in Russian)
- [15] Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *International Journal of Solids and Structures*. 2019. V. 158. pp. 141-149.
- [16] Ishlinskiy A. Yu., Ivlev D. D. *Mathematical Theory of Plasticity*. M.: FIZMATLIT. 2001. 704 p. (in Russian)
- [17] Volkersen O. Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten. *Luftfahrtforschung*. 1938. V. 15. pp. 41-47.
- [18] Glagolev V.V., Markin A.A. One formulation of the problem of elastoplastic separation // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2009. № 4(50). pp. 701 - 707.

С. В. Фирсов, А. Н. Прокудин

ПОЛЗУЧЕСТЬ И ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Изучается процесс деформирования вращающегося цилиндра, изготовленного из материала с упругими, вязкими и пластическими свойствами. Рассматривается цилиндр как с закрепленными, так и свободными концами. Деформации в цилиндре предполагаются малыми. Скорость вращения сначала возрастает от нуля до заданного максимального значения, затем в течение некоторого промежутка времени остается постоянной, после чего снижается вплоть до полной остановки цилиндра. Угловое ускорение в течение всего процесса пренебрежимо мало. Первоначально рост необратимых деформаций вызван ползучестью материала, но при определенной скорости вращения в цилиндре зарождается и развивается область пластического течения. После возникает разгружающая упругопластическая граница: область течения при продвижении данной граничной поверхности по объему уменьшается. Упругопластические границы являются местом, где изменяется механизм производства необратимых деформаций. Определяющая система уравнений решается с помощью метода конечных разностей. Приведены и проанализированы результаты расчетов, в том числе для релаксации напряжений после остановки цилиндра.

Ключевые слова: вращение цилиндра, полый цилиндр, малые деформации, вязкопластичность, ползучесть, плоская деформации, обобщенная плоская деформация.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.005

УДК: 539.374

Введение

Расчёт напряжений и деформаций во вращающихся дисках и валов является одной из классических задач механики деформируемого твёрдого тела. Подобные расчёты приводятся во многих учебниках и монографиях. Среди подобных работ следует

© Фирсов С. В., Прокудин А. Н., 2019

Фирсов Сергей Викторович

e-mail: firsov.s.new@yandex.ru, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Прокудин Александр Николаевич

e-mail: sunbeam_85@mail.ru, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00038. Механизм накопления необратимых деформаций сформулирован в рамках государственного задания ИМиМ ДВО РАН № 075-00414-19-00.

Поступила 20.03.2019

отметить работу С. П. Тимошенко [1], в которой впервые было предложено рассчитывать распределения напряжений с помощью решения соответствующей краевой задачи теории упругости. Ограничиваясь чисто упругими телами, данную задачу можно считать принципиально решённой после полученного А. И. Лурье [2] общего решения этой задачи с произвольной зависимостью упругого потенциала от инвариантов тензора конечных деформаций.

Чисто необратимое деформирование вращающихся цилиндров впервые было рассмотрено А. Надаи [3] в рамках жёсткопластического анализа. Ю. Н. Работновым [4] был рассмотрен случай, где в качестве источника необратимых деформаций в цилиндре выступала ползучесть. Упругопластическое деформирование впервые рассматривалось в [5]. Однако, как было позже показано в работе [6], данное решение имело неисправимый изъян, связанный с разрывом перемещений на упругопластической границе. Полное решение задачи упругопластического деформирования вращающегося сплошного цилиндра было рассмотрено в цикле работ [6–8]. В них приведено решение для стадий упругого деформирования, начала пластического течения, распространения пластического течения на весь цилиндр, последующего упругого деформирования при уменьшении скорости вращения и появления повторного пластического течения. В дальнейшем задачи упругопластического деформирования вращающихся цилиндров и дисков рассматривались неоднократно для различных граничных условий и кинематических постановок [9–15].

Постановка задачи

Пусть слой материала с упругими, вязкими и пластическими свойствами занимает область, ограниченную круговыми цилиндрическими поверхностями $r = R_1$ и $r = R_2$ ($R_2 > R_1$). Далее рассмотрим случаи, когда такой слой длинный (бесконечно длинный) либо длина его является малой. Это позволит рассматривать одномерный случай деформирования. Примем, что область $r < R_1$ является полостью. Полагаем, что выбранный таким способом цилиндр с полостью вращается с угловой скоростью $\omega(t)$. При этом $\omega(0) = 0$ и первоначально цилиндр вращается ускоренно до достижения некоторой наибольшей скорости ω_{max} , после чего замедленно до полной остановки. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) одномерность процесса деформирования за счёт вращения цилиндра означает, что единственной независимой переменной оказывается r . Далее эту координату будем использовать в безразмерной форме

$$\xi = \frac{r}{R_2}, \quad \xi_0 = \frac{R_1}{R_2}, \quad 0 < \xi_0 \leq \xi \leq 1.$$

Деформации во вращающемся теле считаем малыми и складываемыми из обратимых и необратимых. Ненулевыми в рассматриваемом случае будут только компоненты d_{rr} , $d_{\varphi\varphi}$ и d_{zz} тензора полных деформаций

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \frac{u}{\xi}, \quad d_{zz} = e_{zz} + p_{zz}. \quad (1)$$

Здесь $e_{rr}, e_{\varphi\varphi}, e_{zz}$ — компоненты тензора обратимых (упругих) деформаций; $p_{rr}, p_{\varphi\varphi}, p_{zz}$ — необратимые деформации; $u = u_r/R_2$ — безразмерное перемещение.

Обратимые деформации задают напряжения $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{rr} &= \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_\tau} = (\alpha + 2\beta)(u_{,\xi} - p_{rr}) + \alpha(\xi^{-1}u - p_{\varphi\varphi}) + \alpha(d_{zz} - p_{zz}), \\ \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} &= \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma_\tau} = \alpha(u_{,\xi} - p_{rr}) + (\alpha + 2\beta)(\xi^{-1}u - p_{\varphi\varphi}) + \alpha(d_{zz} - p_{zz}), \\ \tilde{\sigma}_{zz} &= \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_\tau} = \alpha(u_{,\xi} - p_{rr}) + \alpha(\xi^{-1}u - p_{\varphi\varphi}) + (\alpha + 2\beta)(d_{zz} - p_{zz}).\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь σ_τ — предел текучести; $\alpha = \lambda\sigma_\tau^{-1}$, $\beta = \mu\sigma_\tau^{-1}$; λ, μ — параметры Ламе в законе Гука для упругой среды.

Рассматривая цилиндр бесконечно длинным, в (2) принимают $d_{zz} = 0$, что и задаёт плоские деформированные состояния. Иногда рассматривают случай так называемых обобщённых плоских состояний, когда d_{zz} находят согласно принимаемому ограничению на распределение σ_{zz}

$$2\pi \int_{\xi_0}^1 \xi \tilde{\sigma}_{zz} d\xi = 0. \quad (3)$$

Подстановка $\tilde{\sigma}_{zz}$ из (2) в (3) приводит к следующей зависимости

$$d_{zz} = \frac{2}{1 - \xi_0^2} \int_{\xi_0}^1 \xi \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} (p_{rr} + p_{\varphi\varphi}) + p_{zz} \right) d\xi - \frac{2\alpha}{\alpha + 2\beta} \frac{u(1) - \xi_0 u(\xi_0)}{1 - \xi_0^2}.$$

Будем считать угловое ускорение малым настолько, что бы имелась возможность пренебречь силой инерции, определяемой вращательным ускорением. Это упрощающее предположение позволяет рассматриваемой задаче оставаться одномерной. Единственное уравнение равновесия примет в таком случае форму

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{rr}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}}{\xi} = -\xi \psi^2, \quad \psi^2 = \frac{R_0^2}{\sigma_\tau} \rho \omega^2, \quad (4)$$

где ρ — плотность среды; ω — скорость вращения среды.

После подстановки в (4) компонент напряжений из (2) получаем дифференциальное уравнение для компоненты $u_r = u(\xi, \tilde{t})$ перемещений

$$\begin{aligned}u_{,\xi\xi} + \xi^{-1}u_{,\xi} - \xi^{-2}u &= 2\xi^{-1} \frac{\beta}{\alpha + 2\beta} (p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) + \\ &+ p_{rr,\xi} + \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} (p_{\varphi\varphi,\xi} + p_{zz,\xi}) - \frac{\xi \psi^2}{\alpha + 2\beta}.\end{aligned}\quad (5)$$

В данном дифференциальном уравнении (5) время t является независимым параметром, то есть в любой фиксированный (рассматриваемый) момент времени уравнение (5) является обыкновенным дифференциальным уравнением.

Механизм накопления необратимых деформаций

В данной работе рассматриваются два механизма накопления необратимых деформаций — пластичность и ползучесть. В нашем случае формулы для определения ненулевых компонент тензора необратимых деформаций примут вид

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = \varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{rr}^v, \quad \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^v, \quad \frac{dp_{zz}}{dt} = \varepsilon_{zz}^p + \varepsilon_{zz}^v, \quad (6)$$

где $\varepsilon_{rr}^p, \varepsilon_{\varphi\varphi}^p, \varepsilon_{zz}^p$ — скорости деформаций пластичности, $\varepsilon_{rr}^v, \varepsilon_{\varphi\varphi}^v, \varepsilon_{zz}^v$ — скорости деформаций ползучести. Если в рассматриваемой области напряжения не достигли предела текучести, то скорости деформаций пластичности равны нулю.

Для расчёта скоростей деформации ползучести использовалась теория типа течения [4]. Рассмотрим её наиболее простую и часто используемую вариацию — степенной закон Нортона. В качестве меры напряжений $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ возьмём интенсивность напряжений. В итоге получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^v &= \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{rr}}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^v = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}, \quad \varepsilon_{zz}^v = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{zz}}, \quad \Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \\ \Sigma^2 &= \frac{3}{2} \left((\sigma_{rr} - \sigma)^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma)^2 + (\sigma_{zz} - \sigma)^2 \right), \quad \sigma = \frac{1}{3} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}), \end{aligned} \quad (7)$$

где B и n — параметры ползучести для среды.

Используя соотношения (7), а так же введя безразмерную переменную по времени $\tilde{t} = t/t^*$, где t^* — продолжительность всего процесса деформирования; получим в итоге соотношения для определения скорости деформаций ползучести

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{rr}^v &= \varepsilon_{rr}^v t^* = \frac{3}{2} \tilde{B} n \tilde{\Sigma}^{n-2} (\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}), \quad \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^v = \frac{3}{2} \tilde{B} n \tilde{\Sigma}^{n-2} (\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} - \tilde{\sigma}), \\ \tilde{\varepsilon}_{zz}^v &= \frac{3}{2} \tilde{B} n \tilde{\Sigma}^{n-2} (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}), \quad \tilde{B} = \sigma_\tau^{n-1} B t^*, \quad \tilde{\Sigma} = \frac{\Sigma}{\sigma_\tau}. \end{aligned} \quad (8)$$

Скорости деформаций пластического течения, так же как и скорости деформаций ползучести, определяются уровнем и распределением по деформируемому телу напряжений. В качестве пластического потенциала принимаем обобщённый потенциал Мизеса в форме

$$\begin{aligned} f(\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \varepsilon_{rr}^p, \varepsilon_{\varphi\varphi}^p, \varepsilon_{zz}^p) &= \\ &= (\sigma_{rr} - \sigma - \eta \varepsilon_{rr}^p)^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma - \eta \varepsilon_{\varphi\varphi}^p)^2 + (\sigma_{zz} - \sigma - \eta \varepsilon_{zz}^p)^2 - \frac{2}{3} \sigma_\tau^2. \end{aligned} \quad (9)$$

где η — коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению.

Пластическое течение происходит в условиях $f = 0$. Ассоциированный закон пластического течения запишем в виде

$$\varepsilon_{rr}^p = \theta \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rr}}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \theta \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}, \quad \varepsilon_{zz}^p = \theta \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}}, \quad \theta > 0. \quad (10)$$

После подстановки (9) в (10) получим выражение для скоростей. Для нахождения неизвестного коэффициента θ подставим полученные скорости в (9). Подставив найденное значение коэффициента в формулы скорости пластического течения, в итоге получим

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{rr}^p &= \varepsilon_{rr}^p t^* = \frac{1}{\tilde{\eta}} \frac{\tilde{\Sigma} - 1}{\tilde{\Sigma}} (\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}), \quad \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^p = \frac{1}{\tilde{\eta}} \frac{\tilde{\Sigma} - 1}{\tilde{\Sigma}} (\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} - \tilde{\sigma}), \\ \tilde{\varepsilon}_{zz}^p &= \frac{1}{\tilde{\eta}} \frac{\tilde{\Sigma} - 1}{\tilde{\Sigma}} (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}), \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{\sigma_\tau t^*}. \end{aligned} \quad (11)$$

Следует отметить, что при использовании модели вязкопластичности, интенсивности напряжений могут принимать значения больше предела текучести $\tilde{\Sigma} > 1$. При этом мы по прежнему будем находиться на поверхности нагружения (9). Из-за ненулевых значений скоростей пластической деформации (11) при $\tilde{\Sigma} > 1$ так же будет происходить смещение поверхности нагружения (9). Которая, при уменьшении скоростей до нуля, вернётся в положение $\tilde{\Sigma} = 1$.

Численный расчёт

Данная система уравнений в частных производных разрешалась методом конечных разностей. Полученная на таком пути конечно-разностная схема расчётов тестировалась решениями частных задач данного класса, где имеются аналитические решения. К последним относятся задачи об упругом деформировании [16], установившемся вязкопластическом течении [17] и об установившейся ползучести [18].

Функцию $\psi(t)$ из (4), обозначающую скорость вращения, зададим в виде

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\psi_{max} \left(1 - \cos\left(\pi \frac{\tilde{t}}{\tilde{t}_1}\right)\right), & 0 \leq \tilde{t} < \tilde{t}_1, \\ \psi_{max}, & \tilde{t}_1 \leq \tilde{t} < \tilde{t}_2, \\ \frac{1}{2}\psi_{max} \left(1 + \cos\left(\pi \frac{\tilde{t}-\tilde{t}_2}{\tilde{t}_3-\tilde{t}_2}\right)\right), & \tilde{t}_2 \leq \tilde{t} < \tilde{t}_3, \\ 0, & \tilde{t}_3 \leq \tilde{t} \leq 1, \end{cases}$$

где $\tilde{t} = t/t^*$ — безразмерное время, $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3$ — назначаемые безразмерные моменты времени. Для удобства дальнейшего обращения дадим названия приведённым временным интервалам. 1 фаза: $0 \leq \tilde{t} < \tilde{t}_1$ — нагрузка; 2 фаза: $\tilde{t}_1 \leq \tilde{t} < \tilde{t}_2$ — выдержка; 3 фаза: $\tilde{t}_2 \leq \tilde{t} < \tilde{t}_3$ — разгрузка; 4 фаза: $\tilde{t}_3 \leq \tilde{t} \leq 1$ — релаксация.

Таким образом, параметрами задачи наряду с теми, что задают конструктивную геометрию ξ_0 и свойства материала $\alpha, \beta, \tilde{\eta}, \sigma_\tau, \tilde{B}, n$, оказываются и безразмерные, отнесённые к t^* , моменты времени $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3$. При этом ψ_{max} играет роль интенсивности задаваемого воздействия на материал, а t^* — временное распределение такого воздействия. Остановимся на влиянии последних на эволюцию напряжённо-деформированных состояний и итоговое распределение остаточных напряжений.

При проведении расчётов постоянные материала и геометрические размеры зададим следующие:

$$R_1 = 0,02 \text{ м}; \quad R_2 = 0,1 \text{ м}; \quad \rho = 7700 \text{ кг/м}^3; \quad \lambda = 240,942 \text{ ГПа}; \quad \mu = 76,087 \text{ ГПа}; \\ B = 4,1 \cdot 10^{-22} \text{ с}^{-1} \cdot \text{Па}^{1-n}; \quad n = 3; \quad \sigma_\tau = 30 \text{ МПа}; \quad \eta = 84 \text{ ГПа}.$$

Такие параметры отвечают некоторым конструктивным маркам стали. Безразмерные параметры в этом случае примут значения

$$\xi_0 = 0,2; \quad \alpha = 8031,4; \quad \beta = 2536,2; \quad \tilde{B} = 3,69 \cdot 10^{-7} t^*; \quad \tilde{\eta} = 2800/t^*.$$

Временные назначаемые параметры принимаем следующими

$$\tilde{t}_1 = 0,015; \quad \tilde{t}_2 = 0,965; \quad \tilde{t}_3 = 0,98.$$

Протяжённость процесса менялась от одной секунды до одного часа с промежуточными значениями $t^* = 10$ секунд, $t^* = 1$ минута и $t^* = 10$ минут.

Граничные условия запишем в следующем виде

$$\tilde{\sigma}_{rr}(\xi_0, \tilde{t}) = 0, \quad \tilde{\sigma}_{rr}(1, \tilde{t}) = 0.$$

Расчёты показывают, что пластическое течение в деформируемой части материала цилиндра неизменно начинается с граничной поверхности $\xi = \xi_0$. Скорость вращения, при которой впервые выполняется условие пластического течения, вычисляется из соотношения $\tilde{\Sigma} = 1$, следующего из (6)–(11). Значения такой скорости оказываются меньше тех значений, которые получаются в том случае, когда ползучесть материала не учитывается. Что, впрочем, предсказуемо, так как ползучесть снижает уровень напряжённых состояний.

При выбранных параметрах материала и геометрии получаем, что для обеспечения начала пластического течения необходимо принимать: $\psi_{max} > 1,123$ в случае плоских деформируемых состояний; $\psi_{max} > 1,116$ — в случае обобщённых плоских деформируемых состояний. Далее в расчётах в качестве ψ_{max} принимались значения больше приведённых с той целью, что бы область пластического течения заведомо присутствовала, а так же что бы наблюдалось повторное пластическое течение там, где это возможно. Для этого принималось $\psi_{max} = 1,7$.

Плоская деформация

Пластичность. Для целей сравнения первоначально отметим основные качественные особенности решения задачи без учёта ползучести материала. Примем в соотношении (6) скорости деформаций ползучести равными нулю: $\varepsilon_{rr}^v = \varepsilon_{\varphi\varphi}^v = \varepsilon_{zz}^v = 0$.

Пусть $t^* = 1$ час. При указанных параметрах задачи область пластического течения развивается от внутренней границы деформируемого слоя $\xi = \xi_0$. Упругопластическая граница продвигается к внешней граничной поверхности $\xi = 1$. После достижения своего максимального положения продвижение границы останавливается. Впоследствии наблюдается снижение интенсивности напряжений за счёт накопления необратимых деформаций, и в итоге напряжения достигают значения $\tilde{\Sigma} = 1$. После этого на внешней границе пластической области зарождается разгружающая упругопластическая граница, быстро достигающая внутренней граничной поверхности слоя $\xi = \xi_0$.

При разгрузке, когда угловая скорость вращения уменьшается, происходит повторное (обратное) пластическое течение. Оно возникает на внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$ и развивается, охватывая область, примыкающую к этой граничной поверхности. Исчезновение области пластического течения связано с разгружающей упругопластической границей, возникающей в некоторый последующий момент времени в месте остановившейся первоначальной упругопластической границы и распространяющийся к границе $\xi = \xi_0$ деформируемого материала.

Отмечаемые качественные особенности решения являются результатами расчётов, когда $t^* = 1$ час. Они так же соответствуют расчётам для случая $t^* = 10$ минут. В случае $t^* = 1$ минута наблюдаются небольшие отличия при повторном пластическом течении. При $t^* = 10$ секунд область пластического течения не успевает достигнуть своего максимального размера до начала стадии разгрузки, что приводит к немного меньшим значениям накопленных необратимых деформаций и небольшому уменьшению области повторного пластического течения. При $t^* = 1$ секунда интенсивности напряжений не успевают перераспределиться до начала стадии разгрузки, что приводит к значительному уменьшению размера области пластического течения и, соответственно, значительному уменьшению накопленных необратимых деформаций (чуть более чем в два раза). В связи с этим на стадии разгрузки интенсивности напряжений не достигают критических значений и область повторного пластического течения не появляется. Итоговые распределения интенсивностей напряжений представлено рис. 1а.

При увеличении скорости вращения до $\psi_{max} = 2,0$ область пластического течения распространяется на весь деформируемый слой. При этом после достижения максимальной скорости вращения не наблюдается снижения интенсивностей напряжений. Во всём деформируемом слое они принимают значения $\tilde{\Sigma} > 1$. Вследствие этого

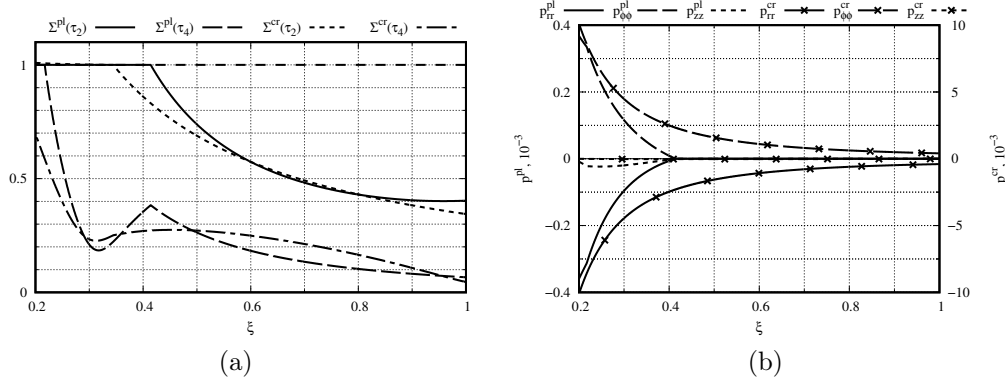


Рис. 1. Напряжённно-деформированное состояние (НДС) слоя в случае плоской деформации при $t^* = 1$ час: (а) интенсивности напряжений в моменты времени \tilde{t}_2 и \tilde{t}_4 . Σ^{pl} — без ползучести; Σ^{cr} — с учётом ползучести; (б) остаточные необратимые деформации в слое: p_{ij}^{pl} — без учёта ползучести; p_{ij}^{cr} — с учётом ползучести.

происходит интенсивное накопление необратимых деформаций на протяжении всего процесса. Однако это не оказывает сильного влияния на характер распределения остаточных напряжений в слое.

При скоростях вращения $\psi_{max} < 1,6$ область повторного пластического течения не появляется.

Ползучесть. Изучим влияние ползучести материала на его деформирование в этом случае. Примем, что скорости деформаций ползучести в формуле (6) определяются из соотношений (8).

Первоначальная область пластического течения распространяется почти на ту же область, что и в предыдущем случае. Однако после этого на месте нагружающей упругопластической границы зарождается разгружающая упругопластическая граница. В итоге после сокращения размера области пластического течения почти на треть данная граница останавливается. В отличие от предыдущего случая, интенсивности напряжений внутри оставшейся области пластического течения перестают уменьшаться. Что в свою очередь приводит к постоянному накоплению пластических деформаций внутри данной области до самого момента начала разгрузки. Тем временем происходит постепенное уменьшение интенсивностей напряжений вне области пластического течения, пока они не достигнут определённого значения. Такое поведение характерно для случаев $t^* = 1$ час и $t^* = 10$ минут. В случаях $t^* = 1$ минута и $t^* = 10$ секунд напряжения не успевают релаксировать до того же значения. При $t^* = 1$ секунда область пластического течения не успевает распространиться до своего максимального размера до начала стадии разгрузки.

На стадии разгрузки появляется область повторного пластического течения (за исключением случая $t^* = 1$ секунда). Однако чем больше значение t^* , тем меньше максимальный размер данной области. После достижения своего максимального размера, область повторного пластического течения начинает уменьшаться, пока полностью не исчезнет. После окончания пластического течения релаксация напряжений во всём

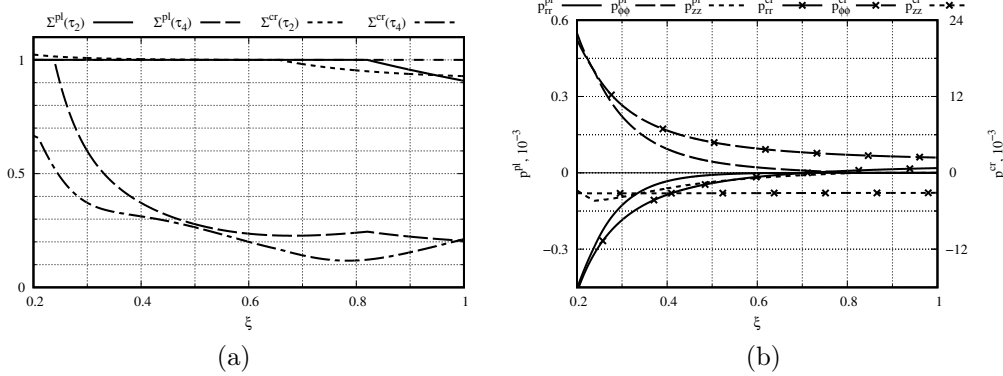


Рис. 2. НДС слоя в случае обобщённой плоской деформации при $t^* = 1$ час: (а) интенсивности напряжений в моменты времени \tilde{t}_2 и \tilde{t}_4 . Σ^{pl} — без ползучести; Σ^{cr} — с учётом ползучести; (б) остаточные необратимые деформации в слое: p^{pl} — без учёта ползучести; σ_{ij}^{cr} — с учётом ползучести.

деформируемом слое продолжается. При этом значения перемещений и необратимых деформаций остаются неизменными.

Обобщённая плоская деформация

Пластичность. Исключим влияние ползучести, полагая $\varepsilon_{rr}^v = \varepsilon_{\phi\phi}^v = \varepsilon_{zz}^v = 0$. Наблюдается картина, схожая со случаем плоской деформации. Только области пластического течения, как первичная, так и вторичная, достигают большего размера. Для случаев, когда протяженность процесса составляет $t^* = 1$ секунда и $t^* = 10$ секунд, область пластического течения не успевает достигнуть своего максимального размера до начала стадии разгрузки. Соответственно повторное пластическое течение занимает чуть меньшую область при $t^* = 10$ секунд и вовсе не появляется при $t^* = 1$ секунда. При остальных временных промежутках наблюдаются одинаковые результаты. Распределения интенсивностей напряжений представлены на рисунке 2а.

Ползучесть. Изучим влияние ползучести материала на его деформирование в данном случае. Скорости деформаций ползучести зададим в соответствии с (8). Зарождение области пластического течения так же происходит на внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$. Уругопластическая граница продвигается в направлении свободной граничной поверхности $\xi = 1$. Однако она останавливается раньше, чем в рассмотренном ранее случае. Причём, чем больше рассматриваемый промежуток времени, тем на меньшую область распространяется пластическое течение. За исключением случаев $t^* = 1$ секунда и $t^* = 10$ секунд, когда пластическая граница не успевает достигнуть своего максимального положения до начала стадии разгрузки.

Также после остановки уругопластической границы на её месте рождается разгружающая уругопластическая граница и движется в направлении внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$. После достижения определённого положения движение разгружающей границы практически прекращается. В оставшейся области пластического течения интенсивности напряжений принимают значения $\tilde{\Sigma} > 1$, что приводит

к постоянному пластическому течению. В случае $t^* = 1$ минута разгружающая граница не успевает дойти до заданного положения до начала стадии разгрузки.

На стадии разгрузки появляется повторное пластическое течение во всех случаях, кроме случая $t^* = 1$ секунда. Отметим, что чем больше продолжительность, тем меньше область повторного пластического течения. После снятия нагрузки значения необратимых деформаций и перемещений не меняются, в то время как напряжения постепенно релаксируют.

Заключение

На основе вышесказанного можно сделать вывод, что при нагрузке ползучесть приводит к небольшому перераспределению напряжений в слое (их оттоку от внешней границы слоя к внутренней границе) и непрерывному росту перемещений и необратимых деформаций. Причём в случае небольших увеличений нагрузки сверх критической (при которой начинается пластическое течение) происходит резкое увеличение скорости роста необратимых деформаций. Что касается релаксации напряжений после снятия нагрузки, она происходит, но с малой скоростью. При этом перемещения остаются, можно сказать, неизменными, когда необратимые деформации еле заметно уменьшаются.

Так же следует отметить, что перераспределение напряжений при ползучести приводит к уменьшению области как исходного пластического течения, так и повторного. Также увеличиваются напряжения на внутренней границе, что приводит в некоторых случаях к их увеличению и поддержанию выше поверхности нагружения и, соответственно, постоянному накоплению пластических деформаций рядом с внутренней границей. В то время как без учёта ползучести, при использовании модели вязкопластичности, напряжения со временем сходят с поверхности нагружения и пластическое течение прекращается (за исключением случая, когда пластическое течение распространяется на всю область).

*Авторы выражают благодарность Буренину Анатолию Александровичу за неизменное внимание к работе и высказанные замечания по её результатам.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука, 1979. 576 с.
- [2] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
- [3] Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids, Volume One. 2nd Edition. McGraw Hill, 1950. 572 p.
- [4] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва: Наука, 1966. 752 с.
- [5] Hodge P. G., Balaban M. Elastic-plastic analysis of a rotating cylinder // International Journal of Mechanical Sciences. 1962. Vol. 4, no. 6. P. 465–476.
- [6] Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // ZAMP – Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik. 1984. Vol. 35, no. 5. P. 601–617.
- [7] Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // International Journal of Engineering Science. 1997. Vol. 35, no. 3. P. 253–267.
- [8] Linder T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation // ZAMM – Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1998. Vol. 78, no. 2. P. 75–86.
- [9] Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube // Acta Mechanica. 1983. Vol. 50, no. 1-2. P. 1–8.
- [10] Mack W. The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends // Tech. Mech. 1991. no. 12. P. 119–124.
- [11] Mack W. Rotating Elastic-plastic tube with free ends // International Journal of Solids and Structures. 1991. Vol. 27, no. 11. P. 1461–1476.

- [12] Rees D. W. A. Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1999. Vol. 79, no. 4. P. 281–288.
- [13] Güven U. Elastic-Plastic Rotating Disk with Rigid Inclusion // Mechanics of Structures and Machines. 1999. Vol. 27, no. 1. P. 117–128.
- [14] Güven U., Parmaksizoglu C., Altay O. Elastic-Plastic Rotating Annular Disk with Rigid Casing // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1999. Vol. 79, no. 7. P. 499–503.
- [15] Aleksandrova N. Exact Deformation Analysis of a Solid Rotating Elastic-Perfectly Plastic Disk // International Journal of Mechanical Sciences. 2014. Vol. 88. P. 55–60.
- [16] Фирсов С. В. Необратимые деформации вращающегося цилиндра // Известия АлтГУ. Математика и механика. 2018. Т. 102, № 4. С. 114–117.
- [17] Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра // Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18, № 2. С. 242–260.
- [18] Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Расчёт ползучести вращающегося цилиндра со свободными концами // Вестник ЧГПУ им. И.Я.Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. Т. 35, № 1. С. 63–73.

S. V. Firsov, A. N. Prokudin

CREEP AND PLASTIC FLOW IN ROTATING HOLLOW CYLINDER

Institute of machinery and metallurgy of Far Eastern Branch of the RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. Deformation of a rotating hollow cylinder made of material with elastic, plastic and creep properties is studied. Cylinders with fixed and free ends are considered. It is assumed that strains in cylinder are small. Angular velocity firstly increases gradually from zero to specified maximum value. After that, it is maintained constant for some time interval. Finally, angular velocity decreases gradually until the cylinder stands still. It is supposed that the rotation speed varies slowly with time, so angular acceleration may be neglected. Initially, irreversible strains are caused only by the creep of the material but at a certain value of angular velocity the plastic region appears and develops in the cylinder. After that, an unloading elastoplastic boundary arises. The region of plastic flow decreases with the advancement of this boundary surface in media. Elastic-plastic boundaries are the place where the mechanism of production of irreversible deformations changes. The constitutive system of equations is solved by using the finite difference method. The results of numerical calculations including stress relaxation after stand-still of a cylinder are presented and analyzed.

Keywords: rotating cylinder, hollow cylinder, small strain, viscoplasticity, creep, plain strain, generalized plain strain.

REFERENCES

- [1] Timoshenko S. P., Gud'er D. Teoriia uprugosti. Moscow: Nauka, 1979. 576 p. (in Russian).
- [2] Lur'e A. I. Nelineinaia teoriia uprugosti. Moscow: Nauka, 1980. 512 p. (in Russian).
- [3] Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids, Volume One. 2nd Edition. McGraw Hill, 1950. 572 p.
- [4] Rabotnov I. N. Polzuchest' elementov konstruksii. Moscow: Nauka, 1966. 752 p. (in Russian).

Firsov Sergey Viktorovich, Junior Researcher, Institute of machinery and metallurgy of Far Eastern Branch of the RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Prokudin Alexander Nikolaevich, Candidate of Engineering Sciences, Leading Researcher, Institute of machinery and metallurgy of Far Eastern Branch of the RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

- [5] Hodge P. G., Balaban M. Elastic-plastic analysis of a rotating cylinder // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1962. Vol. 4, no. 6. P. 465–476.
- [6] Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // *ZAMP – Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik*. 1984. Vol. 35, no. 5. P. 601–617.
- [7] Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // *International Journal of Engineering Science*. 1997. Vol. 35, no. 3. P. 253–267.
- [8] Linder T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation // *ZAMM – Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1998. Vol. 78, no. 2. P. 75–86.
- [9] Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube // *Acta Mechanica*. 1983. Vol. 50, no. 1-2. P. 1–8.
- [10] Mack W. The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends // *Tech. Mech.* 1991. no. 12. P. 119–124.
- [11] Mack W. Rotating Elastic-plastic tube with free ends // *International Journal of Solids and Structures*. 1991. Vol. 27, no. 11. P. 1461–1476.
- [12] Rees D. W. A. Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1999. Vol. 79, no. 4. P. 281–288.
- [13] Güven U. Elastic-Plastic Rotating Disk with Rigid Inclusion // *Mechanics of Structures and Machines*. 1999. Vol. 27, no. 1. P. 117–128.
- [14] Güven U., Parmaksizoğlu C., Altay O. Elastic-Plastic Rotating Annular Disk with Rigid Casing // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1999. Vol. 79, no. 7. P. 499–503.
- [15] Aleksandrova N. Exact Deformation Analysis of a Solid Rotating Elastic-Perfectly Plastic Disk // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014. Vol. 88. P. 55–60.
- [16] Firsov S. V. Irreversible Deformations of a Rotating Cylinder // *Izvestiya of Altai State University. Physical and Mathematical Sciences*. 2018. Vol. 102, no. 4. P. 114–117. (in Russian).
- [17] Prokudin A. N., Firsov S. V. Viscoplastic flow in a rotating hollow cylinder // *Far Eastern Mathematical Journal*. 2018. Vol. 18, no. 2. P. 242–260. (in Russian).
- [18] Prokudin A. N., Firsov S. V. Creep Analysis of Rotating Cylinder With Free Ends // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2018. Vol. 35, no. 1. P. 63–73. (in Russian).

Ю. Н. Радаев

ОБ ОДНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛОСКИХ НЕОБРАТИМО СЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ СРЕД КУЛОНА-МОРА И ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРАНДТЛЯ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Неплотно связанные сыпучие среды находят широкое применение в строительстве. Важнейшее качество сыпучих сред — их пористость и необратимая сжимаемость (разрыхляемость) при течении. В работе рассматриваются течения необратимо сжимаемых неплотно связанных сред Кулона—Мора и обобщенных идеально пластических тел Прандтля, характеризующихся наличием определяющей зависимости между максимальным касательным напряжением и средним (точно медианным) напряжением. Для сред Кулона—Мора указанная зависимость является линейной. Промежуточное главное нормальное напряжение не оказывает при этом никакого влияния на текучесть. Исследование ограничивается состояниями (гранями) условия текучести, уравнения которых в пространстве главных напряжений Хейя—Вестергарда явно не содержат промежуточное главное нормальное напряжение. В этом случае, который реализуется, в частности, в условиях плоских течений удастся установить гиперболичность системы дифференциальных уравнений кинематики. Данная система дифференциальных уравнений формулируется в криволинейной координатной сетке, определяемой главными направлениями приращения тензора деформации. В качестве метода исследования выбран метод асимптотических директоров. Рассматриваются также кинематические уравнения в общем трехмерном случае.

Ключевые слова: среда Кулона—Мора, идеально пластическое тело Прандтля, пористость, сжимаемость, главное напряжение, асимптотические директоры, сопряженные директоры, течение, кинематика, гиперболичность

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.006

УДК: 539.374

© Радаев Ю. Н., 2019

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844 „Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности“).

Поступила 01.10.2019

1. Предварительные сведения и вводные замечания. Сыпучие среды (пески, грунты, гранулированные среды) состоят из множества отдельных однородных частиц, которые могут взаимодействовать друг с другом. Такие среды способны сопротивляться исключительно сжимающим нормальным напряжениям и не оказывают никакого сопротивления растягивающим. Строительство дорог и железнодорожных путей, производство бетона, разного рода строительные работы не обходятся без сыпучих материалов. Например, песок широко применяется в строительных работах в качестве основания под фундаменты, для изготовления различных строительных материалов, бетонов и растворов, в дорожном строительстве. Важнейшее качество песка — его пористость. Песок легко переходит из рыхлого в плотное состояние при водонасыщении, а также вибрационном воздействии.

Среда Кулона—Мора, характеризующаяся взаимным трением и сцеплением элементов, является основной континуальной моделью механики сыпучих сред и традиционно рассматривается как важнейшее обобщение модели идеально пластической среды. В теориях, основанных на критерии Кулона—Мора, условие начала течения представляет собой набор линейных соотношений, связывающих между собой главные нормальные напряжения, причем „промежуточное“ главное напряжение никак не влияет на это условие. Критерий Кулона—Мора, следовательно, связывает между собой максимальное и минимальное главные напряжения. Можно показать также, что он выражается через касательное и нормальное напряжения, действующие на элементарном плоском элементе, вдоль которого осуществляется скольжение одной части массива неплотно связанной среды относительно другой его части.

Математическое моделирование течений сыпучих сред традиционно выполняется средствами математической теории пластичности (см. [1–9]). Обозначим через σ трехмерный тензор напряжений Коши. Симметрия тензора напряжений обеспечивает возможность его спектрального представления:

$$\sigma = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (1)$$

где \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений σ ; σ_1 , σ_2 , σ_3 — главные нормальные напряжения (собственные значения тензора напряжений). Собственные векторы указывают направления главных осей напряжений.

В механике идеально пластических и обобщенных идеально пластических тел особую роль играют промежуточное главное нормальное напряжение и максимальное (минимальное) главное нормальное напряжение. Занумеруем главные оси тензора напряжений так, чтобы для актуального напряженного состояния соответствующие главные нормальные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 расположились бы в порядке убывания

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (2)$$

В результате несложных рассуждений получается следующая математическая форма критерия Кулона—Мора (см., например, [10, 11]):

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c \cos \gamma - \sin \gamma \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad (3)$$

где c , γ — определяющие постоянные.

Вводя максимальное касательное τ_{\max} и среднее (медианное) s напряжения согласно

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (4)$$

$$s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad (5)$$

имеем также

$$\tau_{\max} = c \cos \gamma - \sin \gamma s. \quad (6)$$

Отметим еще одну форму критерия Кулона—Мора (3) для сыпучих сред с трением и сцеплением, напоминающую по форме критерий текучести Треска, широко распространенный в механике идеально пластического тела:

$$\sigma_1 - a\sigma_3 = 2k. \quad (7)$$

Здесь материальные постоянные a и k связаны с c и γ соотношениями

$$a = \frac{1 - \sin \gamma}{1 + \sin \gamma}, \quad k = \frac{c \cos \gamma}{1 + \sin \gamma}.$$

Таким образом, сыпучая среда Кулона—Мора в рамках теории течения идеально пластических сред определяется кусочно-линейной функцией текучести

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1 - a\sigma_3 \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3). \quad (8)$$

Если в среде отсутствует внутреннее трение ($\gamma \rightarrow 0$), то $a \rightarrow 1$, $k \rightarrow c$ и критерий текучести Кулона—Мора переходит в критерий максимального касательного напряжения Треска

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k. \quad (9)$$

Из (7) следует формулировка критерия предельного состояния идеально сыпучей среды, т.е. среды с нулевым внутренним сцеплением ($c = 0$), принадлежащая Мору:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = a. \quad (10)$$

Дальнейшее обобщение модели сыпучей среды Кулона—Мора было выполнено в работах Л. Прандтля; зависимость максимального касательного напряжения от медианного напряжения задается следующей максимально общей зависимостью:

$$\tau_{\max} = f(s). \quad (11)$$

2. Трехмерные кинематические соотношения для течений необратимо сжимаемых неплотно связанных сред. Введем в рассмотрение приращение вектора перемещения $d\mathbf{u}$ и приращение тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$. Полная кинематическая картина сжимаемых течений сред Кулона—Мора и обобщенных идеально пластических тел Прандтля в предельном состоянии систематическим образом строится на основе развитых в [10–12] представлений об асимптотических направлениях, сопряженных направлениях и о мгновенно нерастяжимых линейных элементах. В частности, в двумерных задачах (индекс 2 соответствует направлению, ортогональному плоскости течения), при постановке которых условие $d\varepsilon_2 = 0$ заведомо удовлетворяется, можно как мы увидим ниже достаточно просто установить гиперболичность дифференциальных уравнений, характеризующих кинематику течения, и получить соотношения для приращений перемещений $d\mathbf{u}$ вдоль линий, касающихся мгновенно нерастяжимых директоров. В плоских течениях мгновенно нерастяжимые директоры будут одновременно указывать характеристические направления системы дифференциальных уравнений кинематики. Изложение в существенных своих чертах будет опираться на представления основных соотношений в изостатических координатных сетках. Относящиеся к указанным представлениям результаты были получены (а затем систематически использовались) в монографиях [8], [9].

Прежде всего мы рассмотрим некоторые основные кинематические соотношения в общем трехмерном случае, а затем получим их более простые двумерные варианты. Такой подход выглядит не только систематическим, но и весьма полезным как демонстрация вывода двумерных уравнений, исходя из точных двумерных.

Соотношения Коши, связывающие приращение тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$ с приращением вектора перемещений $d\mathbf{u}$, имеют форму прямого тензорного уравнения

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \otimes d\mathbf{u}) + (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T. \quad (1)$$

Приращения перемещений $d\mathbf{u}$ можно представить в виде разложения по векторам локального ортонормированного базиса в пространстве $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$

$$d\mathbf{u} = \mathbf{l}du_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m}du_{\langle 2 \rangle} + \mathbf{n}du_{\langle 3 \rangle}. \quad (2)$$

Здесь величины $du_{\langle j \rangle}$ не являются действительными приращениями, а служат для обозначения физических компонент вектора $d\mathbf{u}$ в триортогональной изостатической координатной сетке. Тем не менее, о величинах $du_{\langle j \rangle}$ мы будем говорить как о приращениях перемещений, помня однако, что они таковыми в действительности не являются.

Трехмерный оператор Гамильтона ∇ , как нетрудно установить, в триортогональной изостатической системе координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 определяется согласно (h_j — параметры Ламе координатной системы)

$$\nabla = \mathbf{l} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi^1} + \mathbf{m} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \mathbf{n} \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^3}. \quad (3)$$

Градиент приращения вектора перемещения $\nabla \otimes d\mathbf{u}$ на основании формулы (2) вычисляется в виде:

$$\begin{aligned} \nabla \otimes d\mathbf{u} = & \mathbf{l} \otimes \nabla du_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \nabla du_{\langle 2 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \nabla du_{\langle 3 \rangle} + \\ & + (du_{\langle 1 \rangle}) \nabla \otimes \mathbf{l} + (du_{\langle 2 \rangle}) \nabla \otimes \mathbf{m} + (du_{\langle 3 \rangle}) \nabla \otimes \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Градиенты от физических компонент приращения вектора перемещений находятся следующим образом

$$\begin{aligned} \nabla du_{\langle 1 \rangle} &= \mathbf{l} \frac{1}{h_1} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial \xi^1} + \mathbf{m} \frac{1}{h_2} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial \xi^2} + \mathbf{n} \frac{1}{h_3} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial \xi^3}, \\ \nabla du_{\langle 2 \rangle} &= \mathbf{l} \frac{1}{h_1} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial \xi^1} + \mathbf{m} \frac{1}{h_2} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial \xi^2} + \mathbf{n} \frac{1}{h_3} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial \xi^3}, \\ \nabla du_{\langle 3 \rangle} &= \mathbf{l} \frac{1}{h_1} \frac{\partial du_{\langle 3 \rangle}}{\partial \xi^1} + \mathbf{m} \frac{1}{h_2} \frac{\partial du_{\langle 3 \rangle}}{\partial \xi^2} + \mathbf{n} \frac{1}{h_3} \frac{\partial du_{\langle 3 \rangle}}{\partial \xi^3} \end{aligned} \quad (5)$$

или, вводя операторы дифференцирования вдоль координатных направлений

$$d_1 = \mathbf{l} \cdot \nabla, \quad d_2 = \mathbf{m} \cdot \nabla, \quad d_3 = \mathbf{n} \cdot \nabla, \quad (6)$$

можно соотношения (5) переписать в несколько более компактной форме

$$\begin{aligned} \nabla du_{\langle 1 \rangle} &= \mathbf{l}(d_1 du_{\langle 1 \rangle}) + \mathbf{m}(d_2 du_{\langle 1 \rangle}) + \mathbf{n}(d_3 du_{\langle 1 \rangle}), \\ \nabla du_{\langle 2 \rangle} &= \mathbf{l}(d_1 du_{\langle 2 \rangle}) + \mathbf{m}(d_2 du_{\langle 2 \rangle}) + \mathbf{n}(d_3 du_{\langle 2 \rangle}), \\ \nabla du_{\langle 3 \rangle} &= \mathbf{l}(d_1 du_{\langle 3 \rangle}) + \mathbf{m}(d_2 du_{\langle 3 \rangle}) + \mathbf{n}(d_3 du_{\langle 3 \rangle}). \end{aligned} \quad (7)$$

Воспользуемся далее формулами для частных производных от базисных векторов \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} по криволинейным координатам ξ^1 , ξ^2 , ξ^3 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \xi^1} &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} \mathbf{m} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} \mathbf{n} = -(d_2 h_1) \mathbf{m} - (d_3 h_1) \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \mathbf{m} = (d_1 h_2) \mathbf{m}, \\ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \xi^3} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \mathbf{n} = (d_1 h_3) \mathbf{n};\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^1} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} \mathbf{l} = (d_2 h_1) \mathbf{l}, \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^2} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \mathbf{l} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \mathbf{n} = -(d_1 h_2) \mathbf{l} - (d_3 h_2) \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^3} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \mathbf{n} = (d_2 h_3) \mathbf{n};\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^1} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} \mathbf{l} = (d_3 h_1) \mathbf{l}, \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \mathbf{m} = (d_3 h_2) \mathbf{m}, \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^3} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \mathbf{l} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \mathbf{m} = -(d_1 h_3) \mathbf{l} - (d_2 h_3) \mathbf{m};\end{aligned}\tag{10}$$

в результате приходим к следующим представлениям для градиентов единичных векторов локального базиса:

$$\begin{aligned}\nabla \otimes \mathbf{l} &= -\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} - \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \\ &\quad + \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\ \nabla \otimes \mathbf{m} &= \frac{1}{h_1} (d_2 h_1) \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} - \\ &\quad - \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\ \nabla \otimes \mathbf{n} &= \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} - \\ &\quad - \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}.\end{aligned}\tag{11}$$

С помощью (7) и (11) градиент приращения вектора перемещения $\nabla \otimes d\mathbf{u}$, данный формулой (4), находится в виде

$$\begin{aligned}
 \nabla \otimes d\mathbf{u} = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
 & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
 & + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
 & + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_2du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} & \left[-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_3du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
 & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
 & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} & \left[-\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
 & + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle} \right].
 \end{aligned} \tag{12}$$

Транспонировав уравнение (12), находим

$$\begin{aligned}
 (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
 & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
 & + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
 & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_2du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} & \left[-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_3du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
 & + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
 & + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} & \left[-\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
 & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle} \right].
 \end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя далее выражения (12) и (13) в соотношения Коши (1), приходим к следующему представлению:

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{\varepsilon} = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\
& + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
& + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2}\mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_2du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2}\mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_3du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2}\mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_2du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2}\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 2 \rangle} - \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2}\mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_3du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2}\mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 2 \rangle} - \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle} \right].
\end{aligned}$$

Последнюю формулу можно несколько упростить, вводя нормальные кривизны κ_{ij} (κ_{ij} — кривизна проекции изостаты с номером i , причем проектирование осуществляется параллельно главному направлению j на плоскость, ортогональную этому направлению) в соответствии с

$$\begin{aligned}
d_1h_3 &= h_3\kappa_{32}, & d_2h_3 &= h_3\kappa_{31}, & d_3h_2 &= h_2\kappa_{21}, \\
d_1h_2 &= h_2\kappa_{23}, & d_2h_1 &= h_1\kappa_{13}, & d_3h_1 &= h_1\kappa_{12}.
\end{aligned} \tag{14}$$

В результате получим следующие выражения для физических компонент тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$ в криволинейных координатах ξ^1, ξ^2, ξ^3 :

$$\begin{aligned}
d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} &= \kappa_{13}du_{\langle 2 \rangle} + \kappa_{12}du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 1 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} &= \kappa_{23}du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{21}du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} &= \kappa_{32}du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{31}du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} &= -\kappa_{13}du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{23}du_{\langle 2 \rangle} + d_2du_{\langle 1 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} &= -\kappa_{12}du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{32}du_{\langle 3 \rangle} + d_3du_{\langle 1 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} &= -\kappa_{21}du_{\langle 2 \rangle} - \kappa_{31}du_{\langle 3 \rangle} + d_3du_{\langle 2 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $d\varepsilon_{\langle ij \rangle}$ действительными приращениями не являются; $d\varepsilon_{\langle ij \rangle}$ — физические компоненты тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$ в криволинейных координатах ξ^1, ξ^2, ξ^3 , т.е.

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{\varepsilon} = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n}d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} + \\
& + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l}d\varepsilon_{\langle 21 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} + \\
& + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l}d\varepsilon_{\langle 31 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}d\varepsilon_{\langle 32 \rangle}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что можно также ввести в рассмотрение кривизны k_{ij} (k_{ij} — нормальная кривизна изостатической траектории с номером i на координатной поверхности $\xi^j =$

const), поскольку легко устанавливаются соотношения

$$\begin{aligned}\kappa_{12} &= k_{13}, & \kappa_{13} &= k_{12}, \\ \kappa_{21} &= k_{23}, & \kappa_{23} &= k_{21}, \\ \kappa_{31} &= k_{32}, & \kappa_{32} &= k_{31}.\end{aligned}$$

Если заметить, что в криволинейных координатах ξ^1, ξ^2, ξ^3 только диагональные компоненты тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$ отличны от нуля, то полученная выше формула для приращения тензора деформации приводит к следующим шести соотношениям:

$$d\varepsilon_1 = \frac{1}{h_1}(d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1}(d_3 h_1) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, \quad (17)$$

$$d\varepsilon_2 = \frac{1}{h_2}(d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2}(d_3 h_2) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle}, \quad (18)$$

$$d\varepsilon_3 = \frac{1}{h_3}(d_1 h_3) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3}(d_2 h_3) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle}, \quad (19)$$

$$-\frac{1}{h_1}(d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_2}(d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} = 0, \quad (20)$$

$$-\frac{1}{h_1}(d_3 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_3}(d_1 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} = 0, \quad (21)$$

$$-\frac{1}{h_2}(d_3 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} - \frac{1}{h_3}(d_2 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} = 0. \quad (22)$$

Они естественно распадаются на две группы по три соотношения: первая группа определяет главные приращения деформации, вторая — выражает соосность тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и приращения тензора деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}$.

Вводя кривизны в соотношения (17)–(22) согласно (14), получим (см. также (15))

$$d\varepsilon_1 = \kappa_{13} du_{\langle 2 \rangle} + \kappa_{12} du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, \quad (23)$$

$$d\varepsilon_2 = \kappa_{23} du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{21} du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle}, \quad (24)$$

$$d\varepsilon_3 = \kappa_{32} du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{31} du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle}, \quad (25)$$

$$-\kappa_{13} du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{23} du_{\langle 2 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} = 0, \quad (26)$$

$$-\kappa_{12} du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{32} du_{\langle 3 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} = 0, \quad (27)$$

$$-\kappa_{21} du_{\langle 2 \rangle} - \kappa_{31} du_{\langle 3 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} = 0. \quad (28)$$

Все полученные выше соотношения наиболее компактно представляются в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \kappa_{13} & \kappa_{12} \\ \kappa_{23} & d_2 & \kappa_{21} \\ \kappa_{32} & \kappa_{31} & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} -\kappa_{13} + d_2 & -\kappa_{23} + d_1 & 0 \\ -\kappa_{12} + d_3 & 0 & -\kappa_{32} + d_1 \\ 0 & -\kappa_{21} + d_3 & -\kappa_{31} + d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix} = 0. \quad (30)$$

3. Переход к двумерному случаю. Кинематика плоского необратимо сжимаемого течения. С этого момента, предположим, что течение является плоским (плоскость течения ортогональна направлению 2). Нетрудно заметить, что переход от трехмерных уравнений к двумерным в данных в предыдущем разделе работы матричных кинематических соотношениях очень просто выполняется, если учесть, что

$$du_{<2>} = 0, \quad d\varepsilon_2 = 0, \quad d_2 = 0, \quad \kappa_{23} = 0, \quad \kappa_{21} = 0, \quad \kappa_{13} = 0, \quad \kappa_{31} = 0.$$

Удобно также ввести сокращенные обозначения для кривизн изостатических траекторий в плоскости течения

$$\kappa_1 = \kappa_{12}, \quad \kappa_3 = \kappa_{32}.$$

В итоге приходим к следующим матричным соотношениям:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1 \\ 0 \\ d\varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \kappa_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \kappa_3 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ 0 \\ du_{<3>} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & d_1 & 0 \\ -\kappa_1 + d_3 & 0 & -\kappa_3 + d_1 \\ 0 & d_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ 0 \\ du_{<3>} \end{pmatrix} = 0. \quad (2)$$

Отделяя в (1) и (2) независимые уравнения, имеем

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \kappa_1 \\ \kappa_3 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ du_{<3>} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$(-\kappa_1 + d_3)du_{<1>} + (-\kappa_3 + d_1)du_{<3>} = 0. \quad (4)$$

Матричное уравнение (3) представляет собой запись соотношений Коши в плоском случае в изостатической координатной сетке. Уравнение (4) выражает то обстоятельство, что тензор напряжений и приращение тензора деформации имеют одинаково ориентированные в плоскости течения главные оси. К этому уравнению необходимо присоединить еще одно кинематическое соотношение с тем, чтобы получить замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно физических компонент $du_{<1>}$, $du_{<3>}$ приращения вектора перемещений. Таким соотношением может, например, выступать следующее, уравнение, связывающее главные приращения деформации $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$:

$$d\varepsilon_2 = \sin^2 \frac{\nu}{2} d\varepsilon_1 + \cos^2 \frac{\nu}{2} d\varepsilon_3. \quad (5)$$

В изотропных средах можно вести речь о, по крайней мере, одном общем триэдре главных осей тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и $d\boldsymbol{\varepsilon}$, следовательно, спектральное представление приращения тензора деформации лучше всего взять в форме

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}(d\varepsilon_1) + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}(d\varepsilon_2) + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}(d\varepsilon_3), \quad (6)$$

где \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} — ортонормированный базис из собственных векторов, общих как для тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, так и для приращения тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$; $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$ — главные приращения (пластической) деформации (собственные значения тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$). Для течений, для которых второй главной оси соответствуют промежуточные главные нормальное напряжение и главное приращение деформации, мы введем особую нумерацию осей главного триэдра так, чтобы наряду с (2) выполнялись неравенства

$$d\varepsilon_1 \geq d\varepsilon_2 \geq d\varepsilon_3. \quad (7)$$

Далее можно ввести понятие об асимптотических директорах инкремента тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$ и указать его представление в асимптотических директорах ${}^{\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime}\mathbf{n}$ (см. [10–12]):

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I}(d\varepsilon_2) + (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)\text{sym}({}^{\prime}\mathbf{l} \otimes {}^{\prime}\mathbf{n}). \quad (8)$$

Угол между асимптотическими директорами ${}^{\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime}\mathbf{n}$ вычисляется с помощью кинематического параметра Лоде

$$\cos \iota = -\nu, \quad (9)$$

где

$$\nu = \frac{2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}. \quad (10)$$

С учетом кинематического ограничения $d\varepsilon_2 = 0$ соотношение (5) будет иметь вид

$$\sin^2 \frac{\iota}{2} d\varepsilon_1 + \cos^2 \frac{\iota}{2} d\varepsilon_3 = 0. \quad (11)$$

Подставляя в это уравнение главные приращения деформаций из (3), получим дифференциальное уравнение

$$\sin^2 \frac{\iota}{2} (d_1 du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_1 du_{\langle 3 \rangle}) + \cos^2 \frac{\iota}{2} (d_3 du_{\langle 3 \rangle} + \kappa_3 du_{\langle 1 \rangle}) = 0. \quad (12)$$

Таким образом разыскиваемая замкнутая система уравнений относительно приращений перемещений состоит из (4) и (12):

$$\begin{aligned} (-\kappa_1 + d_3) du_{\langle 1 \rangle} + (-\kappa_3 + d_1) du_{\langle 3 \rangle} &= 0, \\ \sin^2 \frac{\iota}{2} (d_1 du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_1 du_{\langle 3 \rangle}) + \cos^2 \frac{\iota}{2} (d_3 du_{\langle 3 \rangle} + \kappa_3 du_{\langle 1 \rangle}) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Напомним, что в случае течения среды Кулона–Мора угол ι (как, впрочем, и для любых других идеально пластических сред, характеризующихся кусочно-линейным условием текучести) будет постоянным, поскольку

$$\cos \iota = \frac{1 - a}{1 + a}.$$

В стандартных обозначениях теории поля система дифференциальных уравнений (13) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (-\kappa_1 + \mathbf{n} \cdot \nabla) du_{\langle 1 \rangle} + (-\kappa_3 + \mathbf{l} \cdot \nabla) du_{\langle 3 \rangle} &= 0, \\ \sin^2 \frac{\iota}{2} ((\mathbf{l} \cdot \nabla) du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_1 du_{\langle 3 \rangle}) + \cos^2 \frac{\iota}{2} ((\mathbf{n} \cdot \nabla) du_{\langle 3 \rangle} + \kappa_3 du_{\langle 1 \rangle}) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Выделим главную часть последней системы:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \nabla) du_{\langle 1 \rangle} + (\mathbf{l} \cdot \nabla) du_{\langle 3 \rangle} + \dots &= 0, \\ \sin^2 \frac{\iota}{2} (\mathbf{l} \cdot \nabla) du_{\langle 1 \rangle} + \cos^2 \frac{\iota}{2} (\mathbf{n} \cdot \nabla) du_{\langle 3 \rangle} + \dots &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Ее структура позволяет заключить, что система дифференциальных уравнений (14) принадлежит к гиперболическому аналитическому типу. Действительно, обозначая

через $N_{\langle 1 \rangle}$, $N_{\langle 3 \rangle}$ компоненты единичного вектора, ортогонального к кривой слабого разрыва приращений перемещений, построим характеристический определитель и рассмотрим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} N_{\langle 3 \rangle} & N_{\langle 1 \rangle} \\ \sin^2 \frac{\omega_l}{2} N_{\langle 1 \rangle} & \cos^2 \frac{\omega_l}{2} N_{\langle 3 \rangle} \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение, вместе с условием нормировки

$$N_{\langle 1 \rangle}^2 + N_{\langle 3 \rangle}^2 = 1$$

позволяет определить в точности два вещественных характеристических направления в плоскости течения. Нетрудно видеть, что характеристические направления совпадают с направлениями сопряженных директоров ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$. Сопряженные директоры — два направления в плоскости, ортогональной второй главной оси тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$, которые ортогональны направлениям асимптотических директоров ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$. Директор ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$ ортогонален асимптотическому директору ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$, а директор ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$ ортогонален ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$:

$${}^{\prime\prime}\mathbf{n} \cdot {}^{\prime\prime}\mathbf{l} = 0, \quad {}^{\prime\prime}\mathbf{l} \cdot {}^{\prime\prime}\mathbf{n} = 0. \quad (16)$$

Если смотреть на плоскость, ортогональную второму главному направлению, со стороны оперения вектора \mathbf{m} , то директор ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$ получается в результате поворота собственного вектора \mathbf{l} в указанной плоскости на угол $\frac{\pi - \omega_l}{2}$ по ходу часовой стрелки, а директор ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$ — поворотом вектора \mathbf{l} на тот же угол против хода часовой стрелки.

Таким образом, можно констатировать, что кинематика сред Кулона—Мора и обобщенных идеально пластических тел Прандтля моделируется гиперболической системой дифференциальных уравнений в частных производных, характеристические направления которой совпадают с направлениями сопряженных директоров приращения тензора деформации.

4. Основные результаты и выводы. 1. Обсуждаются и развиваются понятия об асимптотических директорах симметричного тензора напряжений и приращения тензора деформации, а также об ортогональных им направлениях (определяющих ориентацию сопряженных директоров).

2. Предложена новая схема моделирования сжимаемых течений сред Кулона—Мора и обобщенных пластических тел Прандтля, основанная на представлении об асимптотических направлениях приращения тензора деформации.

3. Исследованы трехмерные кинематические уравнения, пригодные для описания течений необратимо сжимаемых сред. Найдены удобные матричные формы кинематических уравнений.

4. В случае плоских сжимаемых течений получена замкнутая система кинематических уравнений, в которую входит угол между асимптотическими направлениями приращения тензора деформации.

5. Замкнутая система дифференциальных уравнений кинематики классифицируется как гиперболическая. Установлено, что характеристические направления указанной системы совпадают с направлениями сопряженных директоров приращения тензора деформации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А.А. Пластичность. Часть первая. Упруго-пластические деформации. М.: Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с.
- [2] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
- [3] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [4] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [5] Надаи А. Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М., Л.: ОНТИ, 1936. 280 с.
- [6] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. 648 с.
- [7] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969. 864 с.
- [8] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.
- [9] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. 2-е изд. перераб. и доп. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 240 с.
- [10] Радаев Ю.Н. Мгновенно-нерастяжимые директоры в кинематике трехмерных течений сред Кулона–Мора // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 467–483.
- [11] Радаев Ю.Н. К теории неплотно связанных сред Кулона–Мора и обобщенных пластических тел Прандтля // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. №4(38). С. 3-24.
- [12] Радаев Ю.Н. Асимптотические оси тензоров напряжений и приращения деформации в механике сжимаемых континуумов // Изв. РАН. Мех. тверд тела. 2013. №5. С. 77-85.

Y. N. Radayev

ON A HYPERBOLIC MODEL OF PLANE IRREVERSIBLY COMPRESSIBLE FLOWS OF COULOMB–MOHR AND PRANDTL PERFECTLY PLASTIC MEDIA

Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. Loosely bonded granular media are common in construction industry and in view of it are interesting for mathematics and continuum mechanics. The most important quality of granular media is their porosity and irreversible compressibility (loosening) in the course of a flow process. The paper deals with flow kinematic of the irreversibly compressible Coulomb–Mohr granular media and the generalized perfectly plastic Prandtl media, characterized by a relationship between the maximum tangential stress and the average (the exactly median) stress. For the Coulomb–Mohr model this relationship is linear. The intermediate principal normal stress does not have any effect on yielding. The study is restricted to those states of yielding that can be described by the yield condition which does not include the intermediate principal stress. In this case, which is realized, in particular, under conditions of plane flows, it is possible to establish the hyperbolicity of the system of kinematic differential equations. This system is formulated in the curvilinear coordinate net determined by the principal directions of the strain tensor increment. The method of asymptotic directors known from a number of previous discussions is employed for the given analysis. Kinematic equations in the general three-dimensional case are also considered.

Keywords: Coulomb–Mohr media, Prandtl perfectly plastic media, porosity, compressibility, principal stress, asymptotic directions, conjugate directors, flow, kinematics, hyperbolicity.

Radayev Yuri Nickolaevich

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

REFERENCES

- [1] Ilyushin A.A. Plastic. Part one. Elastic-plastic deformations. M.: Gostekhteoretizdat, 1948. 376 p.
- [2] Sokolovsky V.V. Theory of plasticity. M.: Vyssh. shk, 1969. 608 p.
- [3] Kachanov L.M. Fundamentals of the theory of plasticity. M.: Nauka, 1969. 420 p.
- [4] Ivlev D.D. The theory of perfect plasticity. M.: Nauka, 1966. 232 p.
- [5] Nadai A. Plasticity. The mechanics of the plastic state of matter. M., L.: ONTI, 1936. 280 p.
- [6] Nadai A. Plasticity and destruction of solids. V. 1. M.: Izd-vo inostr. lit-ry, 1954. 648 p.
- [7] Nadai A. Plasticity and destruction of solids. V. 2. M.: Mir, 1969. 864 p.
- [8] Radaev Yu.N. The spatial problem of the mathematical theory of plasticity. Samara: Izd-vo Samarskogo gos. universiteta, 2004. 147 p.
- [9] Radaev Yu.N. The spatial problem of the mathematical theory of plasticity. 2nd ed. Samara: Izd-vo Samarskogo gos. universiteta, 2006. 240 p.
- [10] Radaev Yu.N. Instantly inextensible directors in the kinematics of three-dimensional flows of Coulomb media—Mora // *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2018. V. 18. No. 4. P. 467–483.
- [11] Radaev Yu.N. On the theory of loosely coupled Coulomb media—Mora and generalized Prandtl plastic bodies // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit States*. 2018. No 4 (38). P. 3-24.
- [12] Radaev Yu. N. Asymptotic axes of stress tensors and strain increments in the mechanics of compressible continua // *Izv. RAN. Mekhanika Tverdogo Tela*. 2013. No 5. pp. 77-85.

Ю. В. Немировский

РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ТАВРОВЫХ БАЛОК

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

Аннотация. Тавровые однородные конструкции широко используются в различных отраслях машиностроения, судо-авиакосмической техники и в строительной индустрии. В связи с резким возрастанием требований к созданию экономически выгодной, надежной при длительной эксплуатации, мало затратной по ресурсам новой техники в последние годы интенсивно развиваются исследования по проблемам расчета и оптимального проектирования композитных изделий. Многочисленные, хорошо отработанные технологии склеивания, сварки взрывом, диффузионной сварки, холодного и плазменного газодинамического напыления позволяют сегодня создавать в больших масштабах нужные для практического использования гибридные слоистые конструкции из практически любых доступных конструкционных материалов. Главная и пока не решенная проблема здесь состоит в разработке принципов подбора и расстановки материалов для обеспечения наиболее эффективной работы создаваемых конструкций в требуемых условиях эксплуатации. В данной работе этот вопрос рассматривается применительно к одному из широко распространенных типов симметричных и несимметричных тавровых стержней.

Ключевые слова: рациональное проектирование, полиметаллические тавровые балки, изгибающий момент, деформация.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.007

УДК: 539.374

Симметричные двутавровые стержни. Рассмотрим полиметаллические гибридные стержни с защитными и подкрепляющими слоями типа, изображенные на рис. 1, 2.

Будем считать структуру расположения материалов в сечениях стержней симметричной относительно осей $z = 0$ и $y = 0$ и что стержни испытывают поперечный изгиб в плоскости $y = 0$, а все составляющие материалы одинаково сопротивляются при деформировании растяжению и сжатию. Тогда связь возникающих напряжений

© Немировский Ю. В., 2019
Немировский Юрий Владимирович
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №19-01-00038-а.

Поступила 01.09.2019

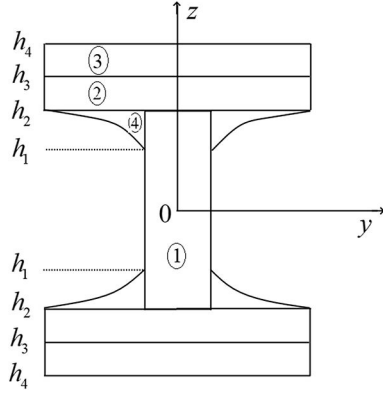


Рис. 1

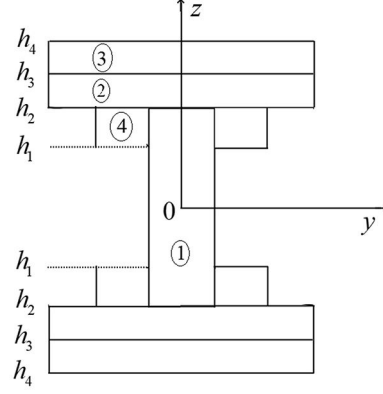


Рис. 2

в фазовых материалах с искривлением $\kappa(x)$ оси стержня будет иметь вид [9]

$$\sigma_i = A_i \kappa z + B_i \kappa^3 z^3, \quad (1)$$

$$\kappa(x) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$B_i = -\frac{4}{27} \frac{A_i^3}{(\sigma_i^*)^2}, \quad \varepsilon_i^* = \frac{3}{2} \frac{\sigma_i^*}{A_i}, \quad (3)$$

где A_i , σ_i^* — модуль упругости и предел прочности i -го фазового материала. Изгибающий момент связан с напряжениями в сечении стержня выражением

$$M = 4 \left[\Delta_1 \int_0^{h_2} \sigma_1 z dz + \Delta_2 \int_{h_2}^{h_3} \sigma_2 z dz + \Delta_2 \int_{h_3}^{h_4} \sigma_3 z dz + \int_{h_1}^{h_2} [b_4(z) - \Delta_1] \sigma_4 z dz \right],$$

где $b_4(z)$ — функция, определяющая закон изменения подкрепляющего слоя:

$$b_4^+(z) = \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)}{(h_2^\alpha - h_1^\alpha)} \left[z^\alpha + \frac{(\Delta_1 h_2^\alpha - \Delta_2 h_1^\alpha)}{\Delta_2 - \Delta_1} \right]. \quad (4)$$

При $\alpha = 1$ имеем линейный закон подкрепления, при $\alpha = 2$ — параболический и при $\alpha = -1$ — гиперболический. Для структуры на рис. 2 имеем

$$b_4^* = \Delta_3 - \Delta_1. \quad (5)$$

Здесь Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 — половина ширины сечения в соответствующем слое. Учитывая зависимости (1), (2), после интегрирования получим для M выражение

$$M = R_1 \kappa + R_2 \kappa^3, \quad (6)$$

где

$$R_1 = \frac{4}{3} [A_1 \Delta_1 h_2^3 + A_2 \Delta_2 (h_2^3 - h_1^3) + A_3 \Delta_2 (h_4^3 - h_3^3) + 3A_4 \phi_1(h_1, h_2)], \quad (7)$$

$$R_2 = \frac{4}{5} [\Delta_1 h_2^5 B_1 + \Delta_2 (h_3^5 - h_2^5) B_2 + \Delta_2 (h_4^5 - h_3^5) B_3 + 5\phi_2(h_1, h_2) B_4],$$

$$\phi_1(h_1, h_2) = \int_{h_1}^{h_2} b^+(z) z^2 dz, \quad \phi_2(h_1, h_2) = \int_{h_1}^{h_2} b^+(z) z^4 dz. \quad (8)$$

Далее рассмотрим два наиболее важных с точки зрения эксплуатации предельных состояния рассматриваемой конструкции.

Первое — предельно-упругое состояние, когда ни один из фазовых материалов не выходит за предел упругости. В этом случае следует принять всюду $B_i = 0$. Рациональной будем считать конструкцию, у которой максимальная по модулю деформация будет равна предельному упругому значению для соответствующего фазового материала:

$$\varepsilon_i^0 = \frac{\sigma_i^0}{A_i}, \quad (9)$$

где σ_i^0 — предел упругости i -го материала. Таким образом, при реализации первого предельного состояния для рассматриваемого рационального проекта должны выполняться требования

$$\kappa = \kappa_0 = \frac{\varepsilon_1^0}{h_3}, \quad h_2 = \frac{\varepsilon_4^0}{\varepsilon_1^0} h_3, \quad h_4 = \frac{\varepsilon_3^0}{\varepsilon_1^0} h_1 \quad (10)$$

и материалы должны располагаться в сечении балки по требованию

$$\varepsilon_1^0 > \varepsilon_4^0, \quad \varepsilon_3^0 > \varepsilon_1^0. \quad (11)$$

В этом случае предельный изгибающий момент M_0 будет равен

$$M_0 = R_1 \kappa_0. \quad (12)$$

Рассмотрим для сравнения в качестве эталона стандартный двутавр с шириной стенки и полки $2\Delta_1^0$, $2\Delta_2^0$, высотой стенки $2h_2^0$ из материала с пределом упругости σ_0^0 . Его предельный упругий момент будет равен

$$M_0^0 = R_0 \kappa_0^0, \quad R_0 = \frac{4}{3} A_0 [\Delta_2^0 h_2^{03} - (\Delta_2^0 - \Delta_1^0) h_1^{03}], \quad (13)$$

$$\kappa_0^0 = \frac{\varepsilon_0^0}{h_2^0} = \frac{\sigma_0^0}{A_0 h_2^0}. \quad (14)$$

При одинаковых условия нагружения и закрепления равенство

$$M_0 = M_0^0 \quad (15)$$

с учетом выражений (9)–(11) и (14) устанавливает связь между геометрическими и механическими параметрами, обеспечивающую одинаковую предельную несущую способность гибридной и эталонной балки. Тогда для оценки качественного гибридного проекта необходимо рассмотреть их относительные веса и стоимости:

$$\frac{B}{B_0} = \frac{\rho_1 [2h_1 \Delta_1 + (h_3 - h_2) \Delta_2] + \rho_3 \Delta_2 (h_4 - h_3) + \rho_4 \phi_4 (h_1, h_2)}{\rho_0 [\Delta_2^0 (h_2^0 - h_1^0) + h_1^0 \Delta_1^0]}, \quad (16)$$

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\rho_1 c_1 [2h_1 \Delta_1 + (h_3 - h_2) \Delta_2] + \rho_3 c_3 \Delta_2 (h_4 - h_3) + \rho_4 c_4 \phi_4 (h_1, h_2)}{\rho_0 c_0 [\Delta_2^0 (h_2^0 - h_1^0) + h_1^0 \Delta_1^0]}, \quad (17)$$

$$\phi_4 (h_1, h_2) = \int_{h_1}^{h_2} b_4(z) dz,$$

ρ_i , ρ_0 , c_i , c_0 — плотности и удельные стоимости соответствующих материалов.

Второе предельное состояние реализуется за пределами упругости, когда деформация в соответствующем материале будет достигать уровня предельной деформации

предразрушения ε_i^* . Будем считать рациональными проекты, для которых максимальные неупругие (при $B_i \neq 0$) деформации в каждом из материалов будут достигать соответствующих предельно допустимых значений [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]:

$$\varepsilon_i^* = \frac{3 \sigma_i^*}{2 A_i}.$$

Тогда

$$\kappa = \kappa^* = \frac{\varepsilon_1^*}{h_3}, \quad h_2 = \frac{\varepsilon_4^*}{\varepsilon_1^*} h_3, \quad h_4 = \frac{\varepsilon_3^*}{\varepsilon_1^*} h_1 \quad (18)$$

и материалы должны располагаться в сечении балки по требованию

$$\varepsilon_1^* > \varepsilon_4^*, \quad \varepsilon_3^* > \varepsilon_1^*. \quad (19)$$

Предельный момент предразрушения будет равен

$$M^* = R_1 \kappa^* + R_2 (\kappa^*)^3, \quad (20)$$

а соответствующий предельный момент предразрушения для эталонной балки будет равен

$$M_0^* = R_1^0 \kappa_0^* + R_2^0 (\kappa_0^*)^3, \quad (21)$$

$$R_1^0 = \frac{4}{3} A_0 [\Delta_2^0 h_2^{03} - (\Delta_2^0 - \Delta_1^0) h_1^{03}], \quad R_2^0 = \frac{4}{5} B_0 [\Delta_2^0 h_2^{05} - (\Delta_2^0 - \Delta_1^0) h_1^{05}], \quad (22)$$

$$\kappa_0^* = \frac{\varepsilon_0^*}{h_2^0}.$$

Равенство $M^* = M_0^*$ здесь также определит зависимость между физическими и геометрическими параметрами, при которых гибридная и эталонная конструкция будут иметь одинаковый уровень предельных нагрузок предразрушения. Варьируя остальными свободными параметрами материалов и геометрии слоев, можно получить широкий спектр проектов, которые для заданных уровней нагрузок несущей способности будут приемлемы по весовым и экономическим характеристикам.

Несимметричные двутавровые и однитавровые конструкции. В ряде случаев при нагружениях в плоскости тавровая конструкция в структуре поперечного сечения может иметь лишь одну плоскость симметрии, как показано, например, на рис. 3. Такие конструкции будем называть несимметричными двутавровыми или однитаврами (при отсутствии областей 5 и 6).

В выбранной системе координат для деформаций $\varepsilon(x, z)$ будем иметь выражение

$$\varepsilon(x, z) = e_0(x) + z\kappa(x), \quad e_0(x) = \frac{du_0(x)}{dx}, \quad \kappa = -\frac{d^2w(x)}{dx^2}.$$

Закон деформирования в i -й зоне сечения:

$$\sigma_i(x, z) = A_i(\varepsilon_0 + z\kappa) + B_i(\varepsilon_0 + z\kappa)^3 \quad (23)$$

при $h_{i-1} \leq z \leq h_i$. Выражение (23) удобнее представить в эквивалентной форме:

$$\sigma_i = A_i \kappa (z - z_0) + B_i \kappa^3 (z - z_0)^3, \quad (24)$$

где

$$z_0(x) = -\frac{\varepsilon_0(x)}{\kappa} \quad (25)$$

— координата нейтральной линии в сечении. Это поле напряжений создает в поперечном сечении стержня продольное усилие N и изгибающий момент M :

$$N = 2\kappa[S_1(z_0) + \kappa^2 S_2(z_0)], \quad M = 2\kappa[\Phi_1(z_0) + \kappa^2 \Phi_2(z_0)], \quad (26)$$

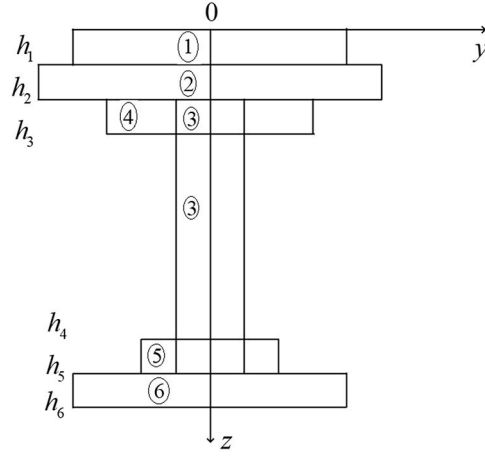


Рис. 3.

где

$$S_1 = \sum_{i=1}^6 A_i \Delta_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} (z - z_0) dz, \quad S_2 = \sum_{i=1}^6 A_i \Delta_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} (z - z_0)^3 dz,$$

$$\Phi_1(z_0) = \sum_{i=1}^6 A_i \Delta_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} (z - z_0) z dz, \quad \Phi_2(z_0) = \sum_{i=1}^6 A_i \Delta_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} (z - z_0)^3 z dz$$

для изображенного на рис. 3 несимметричного двутавра. Для однитаврового сечения в этих формулах следует применять $\Delta_5 = \Delta_6 = 0$. В случае поперечного изгиба $N = 0$, $\kappa \neq 0$ двутаврового или однитаврового стержня получим связи между искривлением стержня и координатой нейтральной линии стержня z_0 :

$$S_1(z_0) + \kappa^2 S_2(z_0) = 0. \quad (27)$$

Рациональный проект несимметричного двутавра должен при $\kappa > 0$ соответствовать требованиям

$$e_0 = -\varepsilon_1^*, \quad e_0 + h_1 \kappa = -\varepsilon_2^*, \quad e_0 + h_2 \kappa = -\varepsilon_4^*, \quad e_0 + h_5 \kappa = \varepsilon_5^*, \quad e_0 + h_6 \kappa = \varepsilon_6^*. \quad (28)$$

Из этих соотношений получим

$$h_1 = \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\varepsilon_4^* + \varepsilon_6^*} h_6, \quad h_2 = \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_4^*}{\varepsilon_4^* + \varepsilon_6^*} h_6, \quad h_5 = \frac{\varepsilon_5^* + \varepsilon_1^*}{\varepsilon_6^* + \varepsilon_1^*} h_6, \quad z_0^* = \frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_6^* + \varepsilon_1^*} h_6, \quad (29)$$

$$\varepsilon_1^* > \varepsilon_2^*, \quad \varepsilon_2^* > \varepsilon_4^*, \quad \varepsilon_6^* > \varepsilon_5^*, \quad \kappa^* = \frac{\varepsilon_6^* + \varepsilon_1^*}{h_6}.$$

Соотношения (29) определяют геометрические и физические требования расстановки слоев в рассматриваемом рациональном проекте. В случае однитавровой конструкции (при $\Delta_5 = 0$, $\Delta_6 = 0$) в замен (28), (29) получим соотношения

$$e_0 = -\varepsilon_1^*, \quad \kappa^* = \frac{\varepsilon_1^* + \varepsilon_5^*}{h_5}, \quad z_0^* = \frac{\varepsilon_1^0}{\varepsilon_5^* + \varepsilon_1^*} h_5, \quad h_2^* = \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_4^*}{\varepsilon_5^* + \varepsilon_1^*} h_5, \quad h_1^* = \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\varepsilon_5^* + \varepsilon_1^*} h_5, \quad (30)$$

$$\varepsilon_1^* > \varepsilon_4^*, \quad \varepsilon_1^* > \varepsilon_2^*.$$

Соответствующие предельные изгибающие моменты M^* получим по формуле (29), подставляя соответствующие значения:

$$\kappa = \kappa^*, \quad z = z_0^*, \quad M^* = M(\kappa^*, z_0^*). \quad (31)$$

Решение задачи предельно допустимого состояния для несимметричных эталонных однородных двутавров или однотоавров, изображенных на рис. 4, 5, получим по выше-

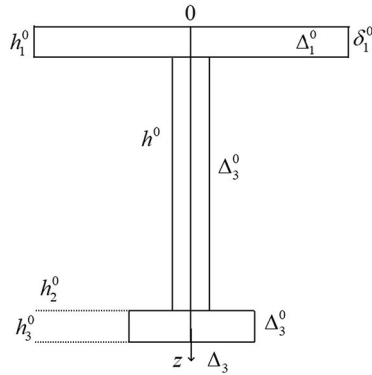


Рис. 4

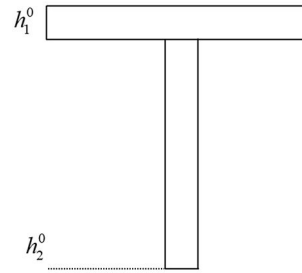


Рис. 5

написанным формулам, если для всех материалов примем характеристики диаграмм, описывающих деформированное состояние, и соответствующие геометрические параметры обозначим

$$A_i = A^0, \quad B_i = B^0, \quad \Delta_i = \Delta_i^0, \quad h_i = h_i^0, \quad b_i = b_i^0.$$

Тогда для сечений, изображенных на рис. 4, 5, будем иметь в предельном состоянии

$$e_0^* = -\varepsilon_0^*, \quad \kappa_0^* = \frac{2\varepsilon_0^*}{h_3^0}, \quad z_{00}^* = \frac{h_3^0}{2}, \quad h_3^0 = \delta_1^0 + \delta_2^0 + A_0$$

для несимметричного двутавра, и

$$e_0^* = -\varepsilon_0^*, \quad \kappa_0^* = \frac{2\varepsilon_0^*}{h_2^0}, \quad z_{00}^* = \frac{h_2^0}{2}, \quad h_2^0 = \delta_1^0 + h^0$$

для однотоавра. Тогда предельный эталонный момент M_0^* будет вычислен по формуле (29), если принять $M_0^* = M(\kappa_0^*, z_{00}^*)$. В этом случае равенство $M_* = M_0^*$ будет обеспечивать одинаковую несущую способность эталонных и гибридных рациональных конструкций, а их сравнительные относительные качества можно вычислить по формулам, подобным вышеприведенным для симметричных двутавров.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В. Второе предельное состояние однородных и композитных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 150–159.
- [2] Fleck J., Laber A., Leonard R. Explosive welding of composite materials // J. Compos. Mater. 1969. Vol. 3, no. 4. P. 669–701.
- [3] Король В. К., Гилленгорн М. С. Основы производства многослойных материалов. Москва: Металлургия, 1978. 277 с.
- [4] Дерibas А. А. Физика прочности и сварки взрывом. Новосибирск: Наука, 1977. 188 с.

- [5] Немировский Ю. В. Рациональное проектирование плоских преград при воздействии взрывных нагрузок // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф: тр. VII Всероссийской научной конференции. Красноярск, 2003. Т. 1. С. 191–194.
- [6] Немировский Ю. В. Равнопрочные слоистые арки и балки // Известия вузов. Строительство. 1996. № 8. С. 20–25.
- [7] Немировский Ю. В. Оптимальные и равнопрочные слоистые балки и арки в условиях ползучести // Проблемы оптимального проектирования сооружений: сб. докладов Всероссийского семинара. Новосибирск, 1997. С. 33–38.
- [8] Немировский Ю. В. Об определении времени допустимой эксплуатации конструкций в условиях ползучести // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела. Динамика сплошной среды. Новосибирск, 2001. Т. 119. С. 87–91.
- [9] Немировский Ю. В. Прогнозирование нелинейного деформирования гибридных композитных материалов // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела: тр. II международной конференции. Казань, 2009. С. 261–263.

Yu. V. Nemirovskii

RATIONAL DESIGN OF HYBRID POLYMETALLIC T-BEAMS

S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

Abstract. Homogeneous structures are widely used in various branches of engineering, ship-and-aerospace engineering and in the construction industry. Due to the sharp increase in the requirements for creating an economically viable, reliable, long-term, low-resource new equipment, in recent years, research on the problems of calculation and optimal design of composite products has been intensively developing. Numerous, well-developed technologies of bonding, explosion welding, diffusion welding, cold and plasma gas-dynamic spraying allow today to create on a large scale hybrid layered structures necessary for practical use from practically any available structural materials. The main and not yet resolved problem here is to develop principles for the selection and placement of materials to ensure the most efficient operation of the created structures in the required operating conditions. In this paper, this question is considered in relation to one of the widespread types of symmetric and asymmetric T-bars.

Keywords: rational design, polymetallic T-beams, bending moment, deformation.

REFERENCES

- [1] Nemirovskii Y. V. Second extreme state of uniform and composite beams // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2009. no. 1. P. 150–159. (in Russian).
- [2] Fleck J., Laber A., Leonard R. Explosive welding of composite materials // J. Compos. Mater. 1969. Vol. 3, no. 4. P. 669–701.
- [3] King V. K., Gillengorn M. S. Basics of Production of Multilayer Materials. Moscow: Metallurgiya, 1978. 277 p. (in Russian).
- [4] Deribas A. A. Physics of Strength and Blast Welding. Novosibirsk: Nauka, 1977. 188 p. (in Russian).
- [5] Nemirovskii Y. V. Rational design of flat barriers under the impact of explosive loads // Sovremennye metody matematicheskogo modelirovaniya prirodnyh i antropogennyh katastrof: trudy VII Vserossijskoj nauchnoj konferencii. Krasnoyarsk, 2003. Vol. 1. P. 191–194. (in Russian).

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

-
- [6] Nemirovskii Y. V. Equal-strength layered arches and beams // *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo*. 1996. no. 8. P. 20–25. (in Russian).
 - [7] Nemirovskii Y. V. Optimal and equal-strength laminated beams and arches in creep conditions // *Problems of optimal design of structures: sb. dokladov Vserossijskogo seminar*. Novosibirsk, 1997. P. 33–38. (in Russian).
 - [8] Nemirovskii Y. V. On Determination of Time of Permissible Operation of Structures in Creep Conditions // *Sovremennye Problemy Mekhaniki Deformiruemogo Tverdogo Tela. Dinamika sploshnoj sredy*. Novosibirsk, 2001. Vol. 119. P. 87–91. (in Russian).
 - [9] Nemirovskii Y. V. Prediction of nonlinear deformation of hybrid composite materials // *Problems of nonlinear mechanics of deformable hard body: Works of the II International Conference*. Kazan, 2009. P. 261–263. (in Russian).

Б. Г. Миронов¹, Ю. Б. Миронов²

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ИДЕАЛЬНОГО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

¹Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

²Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе исследовано кручение неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала. Получены интегралы, определяющие напряженное и деформированное состояния цилиндрического стержня при линеаризованном условии пластичности. Построено поле характеристик основных соотношений, найдены линии разрыва напряжений.

Ключевые слова: неоднородный цилиндрический стержень, идеальный жесткопластический материал, поле характеристик, линии разрыва напряжений.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.011

УДК: 539.735

Введение. Кручение представляет собой один из видов деформации тел, характеризующийся взаимным поворотом его поперечных сечений под влиянием моментов, действующих в этих сечениях. Кручение стержней довольно часто встречается в инженерной практике, особенно в машиностроении. Теория кручения изотропных и анизотропных стержней из идеального жесткопластического материала изложена в работах [1, 2, 3, 4]. Переход к случаю стержня из неоднородного материала приводит к определенным трудностям: задачу в общем случае невозможно проинтегрировать. Отдельные случаи кручения неоднородных и составных стержней рассмотрены в работах [5, 6, 7].

Основные результаты. Соотношения теории кручения неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y);\end{aligned}\tag{1}$$

© Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б., 2019

Миронов Борис Гурьевич

e-mail: mbg.chspu@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

Миронов Юрий Борисович

e-mail: mistiam@gmail.com, кандидат технических наук, декан, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия.

Поступила 01.10.2019

— уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

— условие пластичности:

$$(\tau_{xz} - K_1)^2 + (\tau_{yz} - K_2)^2 = k_0; \quad (3)$$

— соотношения ассоциированного закона пластического течения:

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{\tau_{xz} - K_1} = \frac{\varepsilon_{yz}}{\tau_{yz} - K_2}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0, \quad (4)$$

где σ_{ij} — компоненты напряжения; ε_{ij} — компоненты скорости деформации; $K_1 = K_1(xy)$, $K_2 = K_2(xy)$, $k_0 = \text{const}$.

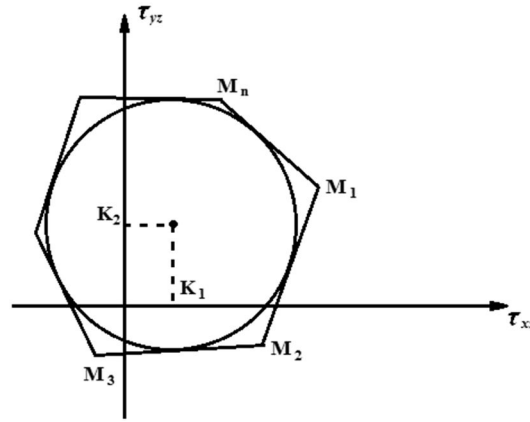


Рис. 1.

Условие пластичности (3) в плоскости τ_{xz} , τ_{yz} представляет окружность радиуса k_0 (рис. 1), центр которой находится в точке с координатами K_1 , K_2 . Предположим, что окружность условия текучести (3) заменена замкнутой ломанной $M_1 M_2 M_3 \dots M_n M_1$ (рис. 1):

$$A_i(\tau_{xz} - K_1) + B_i(\tau_{yz} - K_2) = k_0, \quad (5)$$

где A_i , $B_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Условие (5) представляет на некотором отрезке линейризованное условие пластичности (3). Рассматривая условие (5) в качестве пластического потенциала, получим вместо (4) соотношение

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{A_i} = \frac{\varepsilon_{yz}}{B_i}. \quad (6)$$

Интегрируя соотношение (6) и часть соотношений (4) и учитывая, что в начальный момент закручивания компоненты деформации e_{ij} равны 0, получим

$$\frac{e_{xz}}{A_i} = \frac{e_{yz}}{B_i}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0. \quad (7)$$

Из (7) следует

$$B_i e_{xz} - A_i e_{yz} = 0. \quad (8)$$

Предположим, что компоненты перемещения u , v , w имеют вид

$$u = \theta yz, \quad v = -\theta xz, \quad w = w(x, y), \quad (9)$$

где θ — крутка, w — депланация. Выражая компоненты деформации через компоненты перемещения, из (8), (9) получим

$$-B_i \frac{\partial w}{\partial x} + A_i \frac{\partial w}{\partial y} = \theta(A_i x + B_i y). \quad (10)$$

Из (10) следует, что прямые

$$A_i x + B_i y = C_{i1} \quad (C_{i1} = \text{const}) \quad (11)$$

являются характеристиками. Вдоль характеристик (11) имеют место соотношения

$$B_i w + \theta C_{i1} x = C_{i2} \quad \text{или} \quad A_i w - \theta C_{i1} y = C_{i3}, \quad (12)$$

где $C_{i2}, C_{i3} = \text{const}$ вдоль характеристики.

Для дальнейшего необходимы не столько выражения для депланации, сколько выражения для компонент деформации.

Дифференцируя соотношение (10) по переменной x , получим уравнение

$$-B_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + A_i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \theta A_i. \quad (13)$$

Из уравнения (13) следует, что вдоль характеристик (11) справедливы соотношения

$$B_i \frac{\partial w}{\partial x} + \theta A_i x = C_{i4} \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \theta y = C_{i5}, \quad (14)$$

где $C_{i4}, C_{i5} = \text{const}$ вдоль характеристики. Аналогично дифференцируя соотношение (10) по переменной y , получим уравнение

$$-B_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + A_i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \theta B_i. \quad (15)$$

Из уравнения (15) следует, что вдоль характеристик (11) справедливы соотношения

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \theta x = C_{i6} \quad \text{или} \quad A_i \frac{\partial w}{\partial y} - \theta B_i y = C_{i7}, \quad (16)$$

где $C_{i6}, C_{i7} = \text{const}$ вдоль характеристики.

Используя второе соотношение (14) и первое соотношение (16) получим, что вдоль характеристик (11) справедливы соотношения

$$e_{xz} - \theta y = \frac{1}{2} C_{i5}, \quad e_{yz} + \theta x = \frac{1}{2} C_{i6}. \quad (17)$$

Следует отметить, что из соотношений (17), (11), (8) вытекает

$$A_i C_{i6} - B_i C_{i5} = 2\theta C_{i1}. \quad (18)$$

Дифференцируя уравнение (5) по переменной y , получим

$$A_i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + B_i \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = A_i \frac{\partial K_1}{\partial y} + B_i \frac{\partial K_2}{\partial y}. \quad (19)$$

С учетом (2) из уравнения (19) имеем

$$A_i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - B_i \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = A_i \frac{\partial K_1}{\partial y} + B_i \frac{\partial K_2}{\partial y}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что вдоль характеристик (11) справедливы следующие соотношения для компонент напряжения:

$$A_i \tau_{xz} = A_i K_{11} + B_i K_{12}, \quad B_i \tau_{yz} = k_0 + A_i (K_1 - K_{11}) + B_i (K_2 - K_{12}), \quad (21)$$

где

$$K_{1s} = \int \frac{\partial K_s}{\partial y}(\alpha, y) dy, \quad \alpha = \frac{1}{A_i}(C_{i1} - B_i y), \quad (s = 1, 2). \quad (22)$$

Аналогично дифференцируя уравнение (5) по переменной x , с учетом (2) получим, что вдоль характеристик (11) справедливы следующие соотношения для компонент напряжения:

$$B_i \tau_{yz} = A_i K_{21} + B_i K_{22}, \quad A_i \tau_{xz} = k_0 + A_i(K_1 - K_{21}) + B_i(K_2 - K_{22}), \quad (23)$$

где

$$K_{2s} = \int \frac{\partial K_s}{\partial x}(x, \beta) dx, \quad \beta = \frac{1}{B_i}(C_{i1} - A_i x), \quad (s = 1, 2). \quad (24)$$

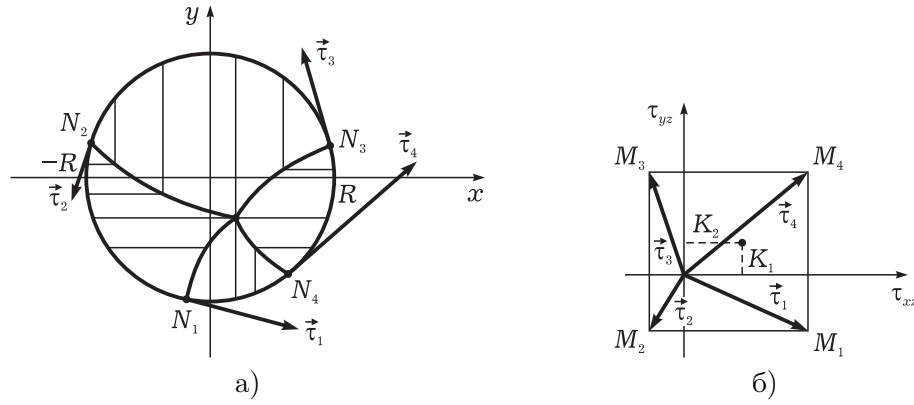


Рис. 2.

Рассмотрим кручение цилиндрического стержня с круговым сечением с центром в начале координат и радиуса R (рис. 2а). На контуре сечения вектор касательного напряжения $\vec{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$ направлен по касательной к контуру. В качестве линеаризованного условия пластичности (5) выберем контур $M_1M_2M_3M_4$ квадрата со стороной $2k_0$ (рис. 2б):

$$M_1M_2: \quad \tau_{yz} = K_2 - k_0, \quad (25)$$

$$M_2M_3: \quad \tau_{xz} = K_1 - k_0, \quad (26)$$

$$M_3M_4: \quad \tau_{yz} = K_2 + k_0, \quad (27)$$

$$M_4M_1: \quad \tau_{xz} = K_1 + k_0. \quad (28)$$

Здесь мы имеем четыре семейства характеристик

$$y = C_{11}, \quad x = C_{21}, \quad y = C_{31}, \quad x = C_{41}. \quad (29)$$

Из (18), (22), (24) и (29) следует

$$C_{15} = -2\theta C_{11}, \quad K_{12} = 0, \quad (30)$$

$$C_{26} = 2\theta C_{21}, \quad K_{21} = 0, \quad (31)$$

$$C_{35} = 2\theta C_{31}, \quad K_{12} = 0, \quad (32)$$

$$C_{46} = -2\theta C_{41}, \quad K_{21} = 0. \quad (33)$$

Тогда из (2) и (25), (26), (27), (28) соответственно вдоль характеристик (29) имеем

$$\tau_{yz} = K_2 - k_0, \quad \tau_{xz} = k_{11}(x, y), \quad (34)$$

$$\tau_{xz} = K_1 - k_0, \quad \tau_{yz} = k_{21}(x, y), \quad (35)$$

$$\tau_{yz} = K_2 + k_0, \quad \tau_{xz} = k_{12}(x, y), \quad (36)$$

$$\tau_{xz} = K_1 + k_0, \quad \tau_{yz} = k_{22}(x, y), \quad (37)$$

где

$$x_0^2 + y_0^2 = R^2,$$

$$k_{11} = - \int \frac{\partial K_2}{\partial y}(x, y) dx, \quad k_{11}x_0 + (K_2 - k_0)y_0 = 0,$$

$$k_{21} = - \int \frac{\partial K_1}{\partial x}(x, y) dy, \quad (K_1 - k_0)x_0 + k_{21}y_0 = 0,$$

$$k_{12} = - \int \frac{\partial K_2}{\partial y}(x, y) dx, \quad k_{12}x_0 + (K_2 + k_0)y_0 = 0,$$

$$k_{22} = - \int \frac{\partial K_1}{\partial x}(x, y) dy, \quad (K_1 + k_0)x_0 + k_{22}y_0 = 0.$$

Особо следует остановиться на линиях разрыва напряжений. Линии разрыва напряжений являются следом исчезающих жестких областей. На них всегда выполняются соотношения

$$e_{xz} = e_{yz} = 0. \quad (38)$$

На контуре поперечного сечения стержня определим точки N_1, N_2, N_3, N_4 соответственно из условий

$$(K_1 + k_0)x + (K_2 - k_0)y = 0, \quad (39)$$

$$(K_1 - k_0)x + (K_2 - k_0)y = 0, \quad (40)$$

$$(K_1 - k_0)x + (K_2 + k_0)y = 0, \quad (41)$$

$$(K_1 + k_0)x + (K_2 + k_0)y = 0. \quad (42)$$

В точках N_1, N_2, N_3, N_4 вектор касательного напряжения соответственно имеет вид

$$\vec{\tau}_1 = (K_1 + k_0, K_2 - k_0) = \overrightarrow{OM}_1, \quad (43)$$

$$\vec{\tau}_2 = (K_1 - k_0, K_2 - k_0) = \overrightarrow{OM}_2, \quad (44)$$

$$\vec{\tau}_3 = (K_1 - k_0, K_2 + k_0) = \overrightarrow{OM}_3, \quad (45)$$

$$\vec{\tau}_4 = (K_1 + k_0, K_2 + k_0) = \overrightarrow{OM}_4. \quad (46)$$

Из (29) и (34), (35), (36), (37) имеем уравнения линий разрыва напряжений, выходящих соответственно из точек N_1, N_2, N_3, N_4 :

$$\frac{dx}{K_1 + k_0 - k_{11}} = \frac{dy}{k_{22} - K_2 + k_0}, \quad (47)$$

$$\frac{dx}{K_1 - k_0 - k_{11}} = \frac{dy}{k_{21} - K_2 + k_0}, \quad (48)$$

$$\frac{dx}{K_1 - k_0 - k_{12}} = \frac{dy}{k_{21} - K_2 - k_0}, \quad (49)$$

$$\frac{dx}{K_1 + k_0 - k_{12}} = \frac{dy}{k_{22} - K_2 - k_0}. \quad (50)$$

Заключение. Таким образом, в работе получены интегралы, определяющие напряженное и деформированное состояния неоднородного идеального жесткопластического стержня при кручении для линеаризованного условия пластичности, найдены

характеристики основных соотношений. Исследовано предельное состояние неоднородного идеального жесткопластического стержня с круговым сечением: построено поле характеристик основных соотношений, найдены соотношения вдоль характеристик и линии разрыва напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколовский В. В. Теория пластичности. Москва: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Москва: Наука, 1966. 232 с.
- [3] Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. Москва: ИЛ, 1956. 398 с.
- [4] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [5] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. Москва: Мир, 1964. 156 с.
- [6] Миронов Б. Г. К теории кручения неоднородных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 236–240.
- [7] Миронов Б. Г. О кручении цилиндрического неоднородного стержня с круговым сечением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 3(33). С. 95–100.

B. G. Mironov¹, Yu. B. Mironov²

**ON THE TORSION OF INHOMOGENEOUS CYLINDRICAL RODS
MADE OF AN IDEAL RIGID-PLASTIC MATERIAL**

¹*Russian University of transport, Moscow, Russia*

²*Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia*

Abstract. The torsion of inhomogeneous rods made of an ideal rigid-plastic material is investigated. Integrals determining the stress and strain States of a cylindrical rod under a linearized plasticity condition are obtained. The field of characteristics of the basic relations is constructed, lines of a rupture of stresses are found.

Keywords: a nonuniform cylindrical rod, the perfect rigid-plastic material, the characteristics, break lines of stress.

REFERENCES

- [1] Sokolovskij V. V. Theory of plasticity. Moscow: Higher school, 1969. 608 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity. Moscow: Science, 1966. 232 p. (in Russian).
- [3] Prager V., Hoge F. G. Theory of ideally plastic bodies. Moscow: IL, 1956. 398 p. (in Russian).
- [4] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [5] Olshak V., Ryhlevskiy Y., Urbanovskiy B. Theory of plasticity of inhomogeneous bodies. Moscow: Mir, 1964. 156 p. (in Russian).
- [6] Mironov B. G. On the theory of torsion of inhomogeneous rods // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ja. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state. 2014. no. 4(22). P. 236–240. (in Russian).
- [7] Mironov B. G. On torsion of a cylindrical inhomogeneous rod with a circular cross section // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ja. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state. 2017. no. 3(33). P. 95–100. (in Russian).

Boris Gurjevich Mironov, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of department, Russian University of transport, Moscow, Russia.

Yuri Borisovich Mironov, Candidate of technical Sciences, Dean, Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia.

Ю. Н. Радаев

О КИНЕМАТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЯХ ВДОЛЬ МГНОВЕННО НЕРАСТЯЖИМЫХ ЛИНИЙ В ТЕЧЕНИЯХ СЖИМАЕМЫХ СРЕД

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются течения сжимаемых сред с нулевым значением промежуточного главного приращения тензора деформации. Подобные течения характерны для неплотно связанных (сыпучих) сред Кулона—Мора и обобщенных идеально пластических тел Прандтля, находящихся в состоянии плоской деформации. Тела Прандтля имеют определяющую зависимость, связывающую максимальное касательное напряжение и среднее (точно медианное) напряжение. В случае сред Кулона—Мора указанная зависимость является линейной. Промежуточное главное нормальное напряжение не оказывает при этом никакого влияния на текучесть или переход в предельное состояние. В этих условиях удается установить гиперболичность системы дифференциальных уравнений кинематики и получить дифференциальные соотношения вдоль характеристических линий, которые состоят из элементов, не испытывающих мгновенные удлинения

Ключевые слова: среда Кулона—Мора, идеально пластическое тело Прандтля, сжимаемость, течение, главное напряжение, асимптотические директоры, сопряженные директоры, гиперболичность, характеристика

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.010

УДК: 539.374

1. Вводные замечания. В механике идеально пластических и обобщенных идеально пластических тел особую роль играют промежуточное главное нормальное напряжение и максимальное (минимальное) главное нормальное напряжение [1–6]. Занумеруем главные оси тензора напряжений так, чтобы для актуального напряженного состояния соответствующие главные нормальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ расположились бы в порядке убывания

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (1)$$

© Радаев Ю. Н., 2019

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844 „Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности“).

Поступила 10.10.2019

В терминах главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ критерий текучести Кулона—Мора для сыпучих сред с внутренним трением и сцеплением формулируется в следующем виде [7, 8]:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c \cos \gamma - \sin \gamma \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad (2)$$

где c, γ — определяющие постоянные.

Если воспользоваться значениями максимального касательного τ_{\max} и среднего (точного медианного) s напряжений

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (3)$$

$$s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad (4)$$

то критерий текучести Кулона—Мора приводится к форме

$$\tau_{\max} = c \cos \gamma - \sin \gamma s. \quad (5)$$

Наконец, критерий Кулона—Мора (2) можно также привести к следующему виду:

$$\sigma_1 - a\sigma_3 = 2k, \quad (6)$$

напоминающему по форме критерий текучести Треска.

Материальные постоянные a и k связаны с c и γ соотношениями

$$a = \frac{1 - \sin \gamma}{1 + \sin \gamma}, \quad k = \frac{c \cos \gamma}{1 + \sin \gamma}.$$

Если в среде отсутствует внутреннее трение ($\gamma \rightarrow 0$), то $a \rightarrow 1, k \rightarrow c$ и критерий текучести Кулона—Мора переходит в критерий максимального касательного напряжения Треска

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k. \quad (7)$$

Обобщенные идеально пластические тела Прандтля характеризуются нелинейной определяющей зависимостью максимального касательного напряжения от медианного напряжения:

$$\tau_{\max} = f(s). \quad (8)$$

2. Дифференциальные уравнения кинематики сжимаемого течения. Рассмотрим дифференциальные уравнения кинематики сжимаемых течений. Имея ввиду приложения к механике сыпучих и неплотно связанных сред удобнее вести речь о приращениях вектора перемещения $d\mathbf{u}$ и тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$.

Соотношения Коши связывают приращение тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$ с приращением вектора перемещений $d\mathbf{u}$ следующим тензорным уравнением:

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \otimes d\mathbf{u}) + (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T. \quad (1)$$

Приращение вектора перемещений $d\mathbf{u}$ можно представить в виде разложения по векторам локального ортонормированного базиса в пространстве $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$

$$d\mathbf{u} = \mathbf{l}du_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m}du_{\langle 2 \rangle} + \mathbf{n}du_{\langle 3 \rangle}. \quad (2)$$

В случае изотропных сред базис $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ удобнее всего ориентировать вдоль главных осей тензора напряжений (или тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$). Действительно в изотропных средах можно вести речь о, по крайней мере, одном общем триэдре главных осей тензоров

σ и $d\epsilon$, следовательно, спектральное представление приращения тензора деформации лучше всего взять в форме

$$d\epsilon = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}(d\epsilon_1) + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}(d\epsilon_2) + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}(d\epsilon_3), \quad (3)$$

где \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} — ортонормированный базис из собственных векторов, общих как для тензора напряжений σ , так и для приращения тензора деформации $d\epsilon$; $d\epsilon_1$, $d\epsilon_2$, $d\epsilon_3$ — главные приращения (пластической) деформации (собственные значения тензора $d\epsilon$). Для течений, для которых второй главной оси соответствуют промежуточные главные нормальное напряжение и главное приращение деформации, мы введем особую нумерацию осей главного триэдра так, чтобы наряду с (1) выполнялись неравенства

$$d\epsilon_1 \geq d\epsilon_2 \geq d\epsilon_3. \quad (4)$$

Формулы Коши приводят к следующим весьма компактным матричным уравнениям:

$$\begin{pmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\epsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \kappa_{13} & \kappa_{12} \\ \kappa_{23} & d_2 & \kappa_{21} \\ \kappa_{32} & \kappa_{31} & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -\kappa_{13} + d_2 & -\kappa_{23} + d_1 & 0 \\ -\kappa_{12} + d_3 & 0 & -\kappa_{32} + d_1 \\ 0 & -\kappa_{21} + d_3 & -\kappa_{31} + d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix} = 0. \quad (6)$$

Здесь $d\epsilon_1$ — собственные значения тензора $d\epsilon$; d_j — производные по направлению изостатических траекторий; κ_{ij} — кривизна проекции изостаты с номером i , причем проектирование осуществляется параллельно главному направлению j на плоскость, ортогональную этому направлению.

Переход от трехмерных уравнений кинематики к двумерным достаточно просто выполняется, если учесть, что

$$du_{\langle 2 \rangle} = 0, \quad d\epsilon_2 = 0, \quad d_2 = 0, \quad \kappa_{23} = 0, \quad \kappa_{21} = 0, \quad \kappa_{13} = 0, \quad \kappa_{31} = 0.$$

Введем также сокращенные обозначения для кривизн изостатических траекторий в плоскости течения

$$\kappa_1 = \kappa_{12}, \quad \kappa_3 = \kappa_{32}.$$

В результате приходим к с следующим матричным соотношениям:

$$\begin{pmatrix} d\epsilon_1 \\ 0 \\ d\epsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \kappa_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \kappa_3 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ 0 \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & d_1 & 0 \\ -\kappa_1 + d_3 & 0 & -\kappa_3 + d_1 \\ 0 & d_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ 0 \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix} = 0. \quad (8)$$

Оставляя в (7) и (8) независимые уравнения, получаем

$$\begin{pmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \kappa_1 \\ \kappa_3 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$(-\kappa_1 + d_3)du_{\langle 1 \rangle} + (-\kappa_3 + d_1)du_{\langle 3 \rangle} = 0. \quad (10)$$

Замкнутая относительно физических компонент $du_{\langle 1 \rangle}$, $du_{\langle 3 \rangle}$ система дифференциальных уравнений получается, если к последнему уравнению присоединить еще

одно кинематическое соотношение. Таким соотношением выступает следующее, уравнение, связывающее главные приращения деформации $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$ и угол ι между асимптотическими директорами тензора $d\varepsilon$:

$$d\varepsilon_2 = \sin^2 \frac{\iota}{2} d\varepsilon_1 + \cos^2 \frac{\iota}{2} d\varepsilon_3. \quad (11)$$

Понятие об асимптотических директорах инкремента тензора деформации $d\varepsilon$ и его представление в терминах асимптотических директоров \mathbf{l} , \mathbf{n} рассматривается в статьях [7–9]. Так, диадное представление инкремента тензора деформации $d\varepsilon$ имеет вид

$$d\varepsilon = \mathbf{I}(d\varepsilon_2) + (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) \text{sym}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}). \quad (12)$$

Угол между асимптотическими директорами \mathbf{l} , \mathbf{n} вычисляется с помощью кинематического параметра Лоде

$$\cos \iota = -\nu, \quad (13)$$

где

$$\nu = \frac{2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}. \quad (14)$$

С учетом кинематического ограничения $d\varepsilon_2 = 0$, выполняющегося для плоского деформированного состояния, кинематический параметр Лоде вычисляется согласно

$$\nu = -\frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}, \quad (15)$$

а уравнение (11) будет иметь вид

$$\sin^2 \frac{\iota}{2} d\varepsilon_1 + \cos^2 \frac{\iota}{2} d\varepsilon_3 = 0. \quad (16)$$

Подставляя в это уравнение главные приращения деформаций из (9), получим замыкающее дифференциальное уравнение

$$\sin^2 \frac{\iota}{2} (d_1 du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_1 du_{\langle 3 \rangle}) + \cos^2 \frac{\iota}{2} (d_3 du_{\langle 3 \rangle} + \kappa_3 du_{\langle 1 \rangle}) = 0. \quad (17)$$

Таким образом разыскиваемая замкнутая система уравнений относительно приращений перемещений $du_{\langle 1 \rangle}$, $du_{\langle 3 \rangle}$ состоит из (10) и (17):

$$\begin{aligned} (-\kappa_1 + d_3) du_{\langle 1 \rangle} + (-\kappa_3 + d_1) du_{\langle 3 \rangle} &= 0, \\ \sin^2 \frac{\iota}{2} (d_1 du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_1 du_{\langle 3 \rangle}) + \cos^2 \frac{\iota}{2} (d_3 du_{\langle 3 \rangle} + \kappa_3 du_{\langle 1 \rangle}) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

В случае течения среды Кулона–Мора угол ι будет постоянным, поскольку

$$\cos \iota = \frac{1 - a}{1 + a}.$$

В стандартных обозначениях теории поля система дифференциальных уравнений (18) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (-\kappa_1 + \mathbf{n} \cdot \nabla) du_{\langle 1 \rangle} + (-\kappa_3 + \mathbf{l} \cdot \nabla) du_{\langle 3 \rangle} &= 0, \\ \sin^2 \frac{\iota}{2} ((\mathbf{l} \cdot \nabla) du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_1 du_{\langle 3 \rangle}) + \cos^2 \frac{\iota}{2} ((\mathbf{n} \cdot \nabla) du_{\langle 3 \rangle} + \kappa_3 du_{\langle 1 \rangle}) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Система дифференциальных уравнений (19) принадлежит к гиперболическому аналитическому типу. Характеристические направления совпадают с направлениями сопряженных директоров ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$. Сопряженные директоры — два направления в плоскости, ортогональной второй главной оси тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$, которые ортогональны направлениям асимптотических директоров ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$. Директор ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$ ортогонален асимптотическому директору ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$, а директор ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$ ортогонален ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$:

$${}^{\prime\prime}\mathbf{n} \cdot {}^{\prime\prime}\mathbf{l} = 0, \quad {}^{\prime\prime}\mathbf{l} \cdot {}^{\prime\prime}\mathbf{n} = 0. \quad (20)$$

Если смотреть на плоскость, ортогональную второму главному направлению, со стороны оперения вектора \mathbf{m} , то директор ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$ получается в результате поворота собственного вектора \mathbf{l} в указанной плоскости на угол $\frac{\pi - \alpha_l}{2}$ по ходу часовой стрелки, а директор ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$ — поворотом вектора \mathbf{l} на тот же угол против хода часовой стрелки.

3. Дифференциальные соотношения вдоль характеристических линий. Сначала заметим, что линии, всюду касающиеся поля направлений ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$, обладают одним замечательным кинематическим свойством [7, 8]. Действительно, принимая во внимание (12) и (20), сразу же находятся мгновенные удлинения линейных элементов, направленных вдоль директоров ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$; все они оказываются равными промежуточному главному приращению деформации $d\varepsilon_2$:

$$\begin{aligned} {}^{\prime\prime}\mathbf{l} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot {}^{\prime\prime}\mathbf{l} &= d\varepsilon_2, \\ {}^{\prime\prime}\mathbf{n} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot {}^{\prime\prime}\mathbf{n} &= d\varepsilon_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Соотношения для мгновенных удлинений (21) при выполнении условия $d\varepsilon_2 = 0$ упрощаются:

$$\begin{aligned} {}^{\prime\prime}\mathbf{l} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot {}^{\prime\prime}\mathbf{l} &= 0, \\ {}^{\prime\prime}\mathbf{n} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot {}^{\prime\prime}\mathbf{n} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

На основании второго и третьего соотношения в (22) сразу же приходим к выводу о том, что в процессе течения линейные элементы, перпендикулярные направлениям асимптотических директоров ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$, не претерпевают мгновенных удлинений, т.е. материальные волокна, ориентированные вдоль директоров ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$, мгновенно не удлиняются и не укорачиваются. Таким образом, рассматриваемые линии образуют две мгновенно нерастяжимые системы.

Перейдем к выводу дифференциальных соотношений вдоль характеристических линий системы уравнений (18).

Прежде всего вместо физических компонент $du_{\langle 1 \rangle}$, $du_{\langle 3 \rangle}$ приращения вектора перемещения $d\mathbf{u}$ относительно базиса \mathbf{l} , \mathbf{n} введем его ортогональные проекции на сопряженные направления ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$. Простые выкладки позволяют получить формулы, связывающие указанные величины:

$$\begin{aligned} du_{\langle \bar{1} \rangle} &= {}^{\prime\prime}\mathbf{l} \cdot d\mathbf{u} = -\cos \frac{\alpha_l}{2} du_{\langle 3 \rangle} + \sin \frac{\alpha_l}{2} du_{\langle 1 \rangle}, \\ du_{\langle \bar{3} \rangle} &= {}^{\prime\prime}\mathbf{n} \cdot d\mathbf{u} = \cos \frac{\alpha_l}{2} du_{\langle 3 \rangle} + \sin \frac{\alpha_l}{2} du_{\langle 1 \rangle}. \end{aligned} \quad (23)$$

Полученные формулы можно обратить:

$$\begin{aligned} du_{\langle 1 \rangle} &= \cos \frac{\iota}{2} \frac{du_{\langle \bar{1} \rangle} + du_{\langle \bar{3} \rangle}}{\sin \iota}, \\ du_{\langle 3 \rangle} &= \sin \frac{\iota}{2} \frac{-du_{\langle \bar{1} \rangle} + du_{\langle \bar{3} \rangle}}{\sin \iota}. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее необходимо преобразовать d -операторы. Для этого применим формулы преобразования [6]. Предположим, что на плоскости имеется локальный ортонормированный базис \mathbf{l}, \mathbf{m} , а другой локальный базис состоит из, вообще говоря, неортогональных единичных векторов $\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{m}}$, первый из которых отклоняется от орта \mathbf{l} на угол ψ_1 по ходу часовой стрелки, а второй отклоняется от орта \mathbf{l} на угол ψ_2 против хода часовой стрелки. Мы считаем, что $\psi_1 > 0$, $\psi_2 > 0$, $\psi_1 + \psi_2 \neq \pi$. Углы ψ_1, ψ_2 могут, вообще говоря, изменяться при движении вдоль координатных линий локальной базисной системы \mathbf{l}, \mathbf{m} . Можно показать, что формулы преобразования дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} d_1 &= \mathbf{l} \cdot \nabla, & d_3 &= \mathbf{n} \cdot \nabla, \\ \bar{d}_1 &= \bar{\mathbf{l}} \cdot \nabla, & \bar{d}_3 &= \bar{\mathbf{n}} \cdot \nabla \end{aligned}$$

при переходе от одной локальной базисной системы к другой имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_1 + \frac{\cos \psi_2 - \cos \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_3, \\ d_3 &= \frac{-\sin \psi_1 - \sin \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_1 + \frac{\sin \psi_2 + \sin \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_3. \end{aligned} \quad (25)$$

В рассматриваемом случае следует положить

$$\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{l}, \quad \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{n}, \quad \psi_1 = \psi_2 = \frac{\pi - \iota}{2},$$

т.е. d -операторы дифференцирования вдоль изостатических d_1, d_3 и сопряженных направлений \bar{d}_1, \bar{d}_3 оказываются связанными между собой формулами

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{2 \sin \frac{\iota}{2}} (\bar{d}_1 + \bar{d}_3), \\ d_3 &= \frac{1}{2 \cos \frac{\iota}{2}} (\bar{d}_3 - \bar{d}_1). \end{aligned} \quad (26)$$

Если сейчас воспользоваться соотношениями между компонентами вектора приращения перемещения (24) и соотношениями для дифференциальных операторов (26), подставляя их в систему кинематических уравнений (18), то в результате ряда преобразований (умножая первое уравнение на $\sin \frac{\iota}{2} \cos \frac{\iota}{2}$, складывая со вторым, вычитая из второго уравнения и переставляя полученное уравнение со вторым) можно получить дифференциальные соотношения вдоль характеристических линий

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 du_{\langle \bar{1} \rangle} - \frac{\cos \iota du_{\langle \bar{1} \rangle} + du_{\langle \bar{3} \rangle}}{\sin \iota} \bar{d}_1 \left(\theta - \frac{\iota}{2} \right) &= 0, \\ \bar{d}_3 du_{\langle \bar{3} \rangle} + \frac{du_{\langle \bar{1} \rangle} + \cos \iota du_{\langle \bar{3} \rangle}}{\sin \iota} \bar{d}_3 \left(\theta + \frac{\iota}{2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где θ — угол между некоторым фиксированным направлением в плоскости течения и собственным вектором \mathbf{l} .

Таким образом с точки зрения кинематики плоскость течения сжимаемой среды выглядит сотканной из двух семейств мгновенно нерастяжимых нитей; вдоль нитей выполняются кинематические соотношения (27).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [2] Надаи А. Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М., Л.: ОНТИ, 1936. 280 с.
- [3] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. 648 с.
- [4] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969. 864 с.
- [5] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.
- [6] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. 2-е изд. перераб. и доп. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 240 с.
- [7] Радаев Ю.Н. Мгновенно-нерастяжимые директоры в кинематике трехмерных течений сред Кулона—Мора// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 467–483.
- [8] Радаев Ю.Н. К теории неплотно связанных сред Кулона—Мора и обобщенных пластических тел Прандтля// Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. №4(38). С. 3-24.
- [9] Радаев Ю.Н. Асимптотические оси тензоров напряжений и приращения деформации в механике сжимаемых континуумов// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2013. №5. С. 77-85.

Y. N. Radayev

**KINEMATIC DIFFERENTIAL EQUATIONS ALONG THE
INSTANTANEOUSLY NOT ELONGATING LINES IN COMPRESSIBLE FLOWS**

Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper deals with flows of compressible media with the zero intermediate principal increment of the strain tensor. Such flows can be observed for loosely bonded Coulomb–Mohr media and the generalized Prandtl perfectly plastic solids in plane strain states. The Prandtl solids have the constitutive equation related the maximum tangent stress to the mean (exactly median) stress. In the case of Coulomb–Mohr media, the specified dependence is linear. The intermediate principal stress has no effect on yielding or transition to a limit state. Under these conditions, it is then possible to prove the hyperbolicity of the system of differential equations of kinematics and to obtain differential relations along the characteristic lines, which consist of linear elements which are not instantaneously elongate.

Keywords: Coulomb–Mohr media, Prandtl perfectly plastic media, compressibility, flow, principal stress, asymptotic directions, conjugate directors, hyperbolicity, characteristics

REFERENCES

- [1] Ivlev D.D. The theory of perfect plasticity. M.: Nauka, 1966. 232 p.
- [2] Nadai A. Plasticity. The mechanics of the plastic state of matter. M., L.: ONTI, 1936. 280 p.
- [3] Nadai A. Plasticity and destruction of solids. V. 1. M.: Izd-vo inostr. lit-ry, 1954. 648 p.
- [4] Nadai A. Plasticity and destruction of solids. V. 2. M.: Mir, 1969. 864 p.
- [5] Radaev Yu.N. The spatial problem of the mathematical theory of plasticity. Samara: Izd-vo Samarskogo gos. universiteta, 2004. 147 p.
- [6] Radaev Yu.N. The spatial problem of the mathematical theory of plasticity. 2nd ed. Samara: Izd-vo Samarskogo gos. universiteta, 2006. 240 p.
- [7] Radaev Yu.N. Instantly inextensible directors in the kinematics of three-dimensional flows of Coulomb media—Mora // *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika.* 2018. V. 18. No. 4. P. 467–483.
- [8] Radaev Yu.N. On the theory of loosely coupled Coulomb media—Mora and generalized Prandtl plastic bodies // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit States.* 2018. No 4 (38). P. 3–24.
- [9] Radaev Yu. N. Asymptotic axes of stress tensors and strain increments in the mechanics of compressible continua // *Izv. RAN. Mekhanika Tverdogo Tela.* 2013. No 5. pp. 77–85.

Radayev Yuri Nickolaevich

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ d -ОПЕРАТОРОВ В МОДЕЛЯХ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Получены формулы преобразования дифференциальных d -операторов, с которыми приходится оперировать в двумерных и трехмерных задачах математической теории пластичности и механики растущих тел. Указанные преобразования вызваны изменением криволинейных координатных систем с целью упрощения дифференциальных уравнений (в частности, теории пластичности) и дифференциальных ограничений, накладываемых на поверхности роста, в теориях растущих тел. В работе выполнен вывод формул преобразования и рассмотрены соответствующие примеры.

Ключевые слова: d -оператор, пластическое течение, аддитивное производство, поверхностный рост, поверхность наращивания, дифференциальное ограничение

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.009

УДК: 539.374

1. Введение. Моделирование процессов деформирования и наращивания твердых тел связано с решением специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных [1, 2, 3]. Эти уравнения содержат операторы дифференцирования по пространственным направлениям [3]. Для краткости назовем их d -операторами. Иногда удается упростить дифференциальные уравнения и дифференциальные ограничения, возникающие при описании поведения твердых тел, переходом к новым координатным сеткам. После введения, в разделе 2 настоящей работы выводятся формулы преобразования дифференциальных d -операторов от текущей ортогональной сетки к произвольной криволинейной (не обязательно ортогональной) координатной сетке. В

© Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. 2019

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 18-01-00844, 19-51-60001, 17-01-00712) и по теме государственного задания министерства науки и высшего образования Российской Федерации (№ государственной регистрации АААА-А17-117021310381-8).

Поступила 19.11.2019

разделе 3 работы показано важное применение, полученных в разделе 2 формул преобразования d -операторов, к задачам механики растущих тел. Речь идет об основном элементе теории — дифференциальном ограничении на поверхности наращивания. В этом случае, удобно связать один из ортов координатной сетки с вектором нормали к поверхности наращивания, а два других — с базисными ортами, расположенными в касательной плоскости. В теории идеальной пластичности применение формул преобразования d -операторов позволяет в простой и удобной форме получить интегрируемые соотношения Генки в задаче о плоской деформации идеально пластического тела [3], что и продемонстрировано в разделе 4. В разделе 5 приводятся формулы для пересчета компонент несимметричного тензора напряжений при переходе к неортогональной сетке на поверхности наращивания. Эти формулы необходимы для постановки граничных условий на поверхности наращивания.

2. Преобразование операторов дифференцирования вдоль координатных направлений на плоскости.

Ниже дается вывод формул преобразования операторов d_k дифференцирования вдоль координатных направлений на плоскости при переходе от ортогональной сетки к произвольной (необязательно ортогональной) криволинейной сетке.

Предположим, что на плоскости имеется локальный ортонормированный базис \mathbf{l} , \mathbf{m} , а другой локальный базис состоит из, вообще говоря, неортогональных единичных векторов $\bar{\mathbf{l}}$, $\bar{\mathbf{m}}$, первый из которых отклоняется от орта \mathbf{l} на угол ψ_1 по ходу часовой стрелки, а второй отклоняется от орта \mathbf{l} на угол ψ_2 против хода часовой стрелки. Мы считаем, что $\psi_1 > 0$, $\psi_2 > 0$, $\psi_1 + \psi_2 \neq \pi$. Углы ψ_1 , ψ_2 могут, вообще говоря, изменяться при движении вдоль координатных линий локальной базисной системы \mathbf{l} , \mathbf{m} .

Найдем формулы преобразования дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} d_1 &= \mathbf{l} \cdot \nabla, & d_2 &= \mathbf{m} \cdot \nabla, \\ \bar{d}_1 &= \bar{\mathbf{l}} \cdot \nabla, & \bar{d}_2 &= \bar{\mathbf{m}} \cdot \nabla \end{aligned}$$

при переходе от одной локальной базисной системы к другой. Эти операторы, как следует из их определения, представляют собой производные вдоль соответствующих координатных линий.

Коэффициенты в разложении

$$\mathbf{l} = \bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2 \tag{1}$$

на основании

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{l}} &= \cos \psi_1 = k_1 + k_2 \cos(\psi_1 + \psi_2), \\ \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{m}} &= \cos \psi_2 = k_2 + k_1 \cos(\psi_1 + \psi_2) \end{aligned}$$

вычисляются в следующем виде

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}, \\ k_2 &= \frac{\cos \psi_2 - \cos \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Аналогично для разложения

$$\mathbf{m} = \bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2 \tag{3}$$

с помощью

$$\begin{aligned}\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{l}} &= -\sin \psi_1 = s_1 + s_2 \cos(\psi_1 + \psi_2), \\ \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} &= \sin \psi_2 = s_2 + s_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)\end{aligned}$$

можно получить

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{-\sin \psi_1 - \sin \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}, \\ s_2 &= \frac{\sin \psi_2 + \sin \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}.\end{aligned}\tag{4}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}d_1 &= \mathbf{l} \cdot \nabla = (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \cdot \nabla = k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2, \\ d_2 &= \mathbf{m} \cdot \nabla = (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \cdot \nabla = s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2,\end{aligned}$$

то в итоге искомые формулы преобразования имеют вид

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_1 + \frac{\cos \psi_2 - \cos \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_2, \\ d_2 &= \frac{-\sin \psi_1 - \sin \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_1 + \frac{\sin \psi_2 + \sin \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_2.\end{aligned}\tag{5}$$

В случае преобразования поворота исходного базиса \mathbf{l} , \mathbf{m} , т.е. когда

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} - \psi, \quad \psi_2 = \psi,$$

полученные формулы упрощаются

$$\begin{aligned}d_1 &= \sin \psi \bar{d}_1 + \cos \psi \bar{d}_2, \\ d_2 &= -\cos \psi \bar{d}_1 + \sin \psi \bar{d}_2.\end{aligned}\tag{6}$$

Обратное по отношению к (6) преобразование есть

$$\begin{aligned}\bar{d}_1 &= \sin \psi d_1 - \cos \psi d_2, \\ \bar{d}_2 &= \cos \psi d_1 + \sin \psi d_2.\end{aligned}\tag{7}$$

Полученные выше формулы преобразования дифференциальных d -операторов оказываются весьма удобным средством при исследовании систем уравнений в частных производных, с которыми приходится сталкиваться в двумерных задачах математической теории пластичности. То же самое можно сказать о задачах механики растущих тел [4, 5, 6, 7]. Соответствующий круг вопросов рассмотрен в следующих разделах работы.

3. Дифференциальное ограничение на растущей поверхности, сформулированное в эйлеровых переменных.

Можно показать [8, 9, 10], что дифференциальное ограничение на поверхности наращивания можно записать в виде

$$c[\nabla_j \tau^{*ji}(x^k) + \nabla_j \mathfrak{J}^{ji} + X^i(x^k)] - [n_j \partial_t \tau^{ji}(x^k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x^s)+0} = 0 \quad (t = \tau^* + 0).\tag{8}$$

где ∇_j — ковариантное дифференцирование по эйлеровой метрике, c — линейная скорость поверхности наращивания в направлении нормали, τ^{ij} — тензор напряжений (вообще говоря несимметричный), ∂_t — производная по времени при фиксированных координатах x^k , $X^i(x^k) = X^i(x^k, t)|_{t=\tau^*(x^s)-0}$, $X^i = X^i(x^k, t)$, — объемные силы, \mathfrak{J}^{ji} —

интеграл скачков напряжений, $\overset{*}{\tau}{}^{ij}(x^k) = \tau^{ij}(x^k, t)|_{t=\overset{*}{\tau}(x^s)-0}$, $t = \overset{*}{\tau}(x^s) - 0$ момент времени непосредственно перед моментом включения элемента в состав основного тела (Рис. 2). Момент времени $t = \overset{*}{\tau}(x^s) + 0$ соответствует моменту непосредственно после присоединения элемента к поверхности наращивания.

Заметим, что

$$\mathfrak{T}^{ij} = \int_{\overset{*}{\tau}-0}^{\overset{*}{\tau}+0} [\partial. \tau^{ij}(x^k, t')] dt'.$$

Дифференциальное ограничение (8) для напряжений на поверхности наращивания в ортогональной системе координат, можно представить в форме (в отсутствие массовых сил и скачков напряжений)

$$[cd_j \overset{*}{\tau}_{<ji>} - n_{<j>} \partial. \tau_{<ji>}(x_k, t)] \Big|_{t=\overset{*}{\tau}(x_s)+0} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (9)$$

В (9) индекс 3 соответствует направлению нормали, а индексы 1 и 2 — касательным направлениям к поверхности наращивания. Выпишем соотношение (9) в криволинейной системе координат, воспользовавшись преобразованием (5) при условии, что орт, соответствующий индексу 3, направлен вдоль нормали \mathbf{n} к поверхности наращивания.

После подстановки соотношений (5) в дифференциальное ограничение (9) с учетом обозначений (2), (4) и равенства (11) получим

$$\begin{aligned} & [c(k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2) \overset{*}{\tau}_{<11>} + (s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2) \overset{*}{\tau}_{<21>} + d_3 \overset{*}{\tau}_{<31>} - \\ & - n_{<1>} \partial. \tau_{<11>}(x_k, t) - n_{<2>} \partial. \tau_{<21>}(x_k, t) - n_{<3>} \partial. \tau_{<31>}(x_k, t)] \Big|_{t=\overset{*}{\tau}(x_s)+0} = 0, \\ & [c(k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2) \overset{*}{\tau}_{<12>} + (s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2) \overset{*}{\tau}_{<22>} + d_3 \overset{*}{\tau}_{<32>} - \\ & - n_{<1>} \partial. \tau_{<12>}(x_k, t) - n_{<2>} \partial. \tau_{<22>}(x_k, t) - n_{<3>} \partial. \tau_{<32>}(x_k, t)] \Big|_{t=\overset{*}{\tau}(x_s)+0} = 0, \quad (10) \\ & [c(k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2) \overset{*}{\tau}_{<13>} + (s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2) \overset{*}{\tau}_{<23>} + d_3 \overset{*}{\tau}_{<33>} - \\ & - n_{<1>} \partial. \tau_{<13>}(x_k, t) - n_{<2>} \partial. \tau_{<23>}(x_k, t) - n_{<3>} \partial. \tau_{<33>}(x_k, t)] \Big|_{t=\overset{*}{\tau}(x_s)+0} = 0. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что

$$d_3 = \bar{d}_3 = \mathbf{n} \cdot \nabla. \quad (11)$$

За счет выбора углов ψ_1, ψ_2 можно упростить вид дифференциальных ограничений (10). Вообще говоря, в соотношениях (10) компоненты тензора напряжений $\overset{*}{\tau}_{<ji>}$ необходимо преобразовать к новому базису. Соотношения для преобразования компонент тензора напряжений будут даны в разделе 5 работы.

4. Идеальная пластичность. Плоская деформация. Рассмотрим пример использования полученных формул преобразования в модели идеально пластического тела в условиях плоского деформированного состояния [3]. Плоское деформированное состояние характеризуется условием $\varepsilon_{33} = 0$. Любое условие пластичности в случае плоского деформированного состояния приводится к виду $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, σ_1, σ_2 — собственные значения симметричного тензора напряжений, k предел текучести при чистом сдвиге. В плоскости течения x_1, x_2 имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий. Одно из семейств будем идентифицировать номером

1, другое — номером 2. Обозначая через θ угол наклона к оси x_1 изостаты первого семейства, а через κ_1, κ_2 — кривизны изостат, имеем

$$\kappa_1 = -d_1\theta, \quad \kappa_2 = d_2\theta. \quad (12)$$

Уравнения равновесия, сформулированные в изостатической координатной сетке, сводятся к двум соотношениям Ламе–Максвелла

$$\begin{aligned} d_1\sigma_1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} &= 0, \\ d_2\sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где ρ_1, ρ_2 радиусы кривизны линий главных напряжений, причем эти величины считаются положительными, если с возрастанием натурального параметра вдоль кривой касательная вращается против часовой стрелки, при этом положительное направление вдоль первой траектории выбирается произвольно, а положительное направление вдоль второй траектории определяется вращением против хода часовой стрелки положительного направления первой траектории. Так как в случае плоской пластической деформации $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, то уравнения (13) приобретают следующий вид:

$$d_1\sigma_1 + \frac{2k}{\rho_1} = 0, \quad d_2\sigma_2 + \frac{2k}{\rho_2} = 0, \quad (14)$$

Эта система гиперболична. Характеристики делят пополам угол между главными направлениями напряжений. Вводя в систему (14) на основании формулы (7) производные вдоль характеристических направлений (примем, что первая характеристика отклоняется от первого главного направления напряжений, соответствующего наибольшему главному напряжению, на угол $\pi/4$ по ходу часовой

$$\bar{d}_1 = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{d}_2 = \frac{d_1 + d_2}{\sqrt{2}}, \quad (15)$$

складывая, а затем вычитая одно из другого уравнения системы 15, получим интегрируемые соотношения Генки вдоль характеристик:

$$\bar{d}_1(\sigma_1 - 2k\theta) = 0, \quad \bar{d}_2(\sigma_1 + 2k\theta) = 0. \quad (16)$$

5. Преобразование несимметричного тензора напряжений при переходе к неортогональному базису. Несимметричный тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ можно записать как линейную комбинацию базисных тензорных произведений с сомножителями $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \tau_{\langle 11 \rangle} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \tau_{\langle 12 \rangle} \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} + \tau_{\langle 21 \rangle} \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} + \tau_{\langle 22 \rangle} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \tau_{\langle 23 \rangle} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \\ & + \tau_{\langle 32 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 13 \rangle} \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 31 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{l}. \end{aligned} \quad (17)$$

Найдем диадное представление тензора $\boldsymbol{\tau}$ после замены базиса $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ на новый базис $\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{n}}$. Подставив в формулу (17) формулы (1) и (3), получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \tau_{\langle 11 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) + \tau_{\langle 12 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) + \\ & + \tau_{\langle 21 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) + \tau_{\langle 22 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) + \\ & + \tau_{\langle 23 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 32 \rangle} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \\ & + \tau_{\langle 13 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 31 \rangle} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2), \end{aligned} \quad (18)$$

кроме того, имеем:

$$\begin{aligned}
 \tau = & \tau_{\langle 11 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} k_1^2 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} k_1 k_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} k_2 k_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} k_2^2) + \\
 & + \tau_{\langle 12 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} k_1 s_1 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} k_1 s_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} k_2 s_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} k_2 s_2) + \\
 & + \tau_{\langle 21 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} s_1 k_1 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} s_1 k_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} s_2 k_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} s_2 k_2) + \\
 & + \tau_{\langle 22 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} s_1^2 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} s_1 s_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} s_2 s_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} s_2^2) + \\
 & + \tau_{\langle 23 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n} s_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} s_2) + \tau_{\langle 32 \rangle} (\mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}} s_1 + \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}} s_2) + \\
 & + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 13 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n} k_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} k_2) + \tau_{\langle 31 \rangle} (\mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}} k_1 + \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}} k_2).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Соберем затем слагаемые с одинаковыми диадами базисных директоров $\bar{\mathbf{l}}$, $\bar{\mathbf{m}}$, \mathbf{n} . После ряда преобразований приходим к:

$$\begin{aligned}
 \tau = & (k_1^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_1 s_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + k_1 s_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1^2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \\
 & + (k_1 k_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_1 s_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + s_1 k_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1 s_2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \\
 & + (k_1 k_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_2 s_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + s_2 k_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1 s_2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \\
 & + (k_2^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_2 s_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + k_2 s_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_2^2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \\
 & + (k_2 \tau_{\langle 13 \rangle} + s_2 \tau_{\langle 23 \rangle}) \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} + (k_2 \tau_{\langle 31 \rangle} + s_2 \tau_{\langle 32 \rangle}) \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \\
 & + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + (k_1 \tau_{\langle 13 \rangle} + s_1 \tau_{\langle 23 \rangle}) \bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n} + (k_1 \tau_{\langle 31 \rangle} + s_1 \tau_{\langle 32 \rangle}) \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Откуда, окончательно, формулы преобразования компонент тензора напряжений τ от исходного базиса к искаженному примут вид:

$$\begin{aligned}
 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} &= k_1^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_1 s_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + k_1 s_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1^2 \tau_{\langle 22 \rangle}, \\
 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} &= k_1 k_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_1 s_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + s_1 k_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1 s_2 \tau_{\langle 22 \rangle}, \\
 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} &= k_1 k_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_2 s_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + s_2 k_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1 s_2 \tau_{\langle 22 \rangle}, \\
 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle} &= k_2^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_2 s_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + k_2 s_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_2^2 \tau_{\langle 22 \rangle}, \\
 \tau_{\langle \bar{2}\bar{3} \rangle} &= k_2 \tau_{\langle 13 \rangle} + s_2 \tau_{\langle 23 \rangle}, \\
 \tau_{\langle \bar{3}\bar{2} \rangle} &= k_2 \tau_{\langle 31 \rangle} + s_2 \tau_{\langle 32 \rangle}, \\
 \tau_{\langle \bar{3}\bar{3} \rangle} &= \tau_{\langle 33 \rangle}, \\
 \tau_{\langle \bar{1}\bar{3} \rangle} &= k_1 \tau_{\langle 13 \rangle} + s_1 \tau_{\langle 23 \rangle}, \\
 \tau_{\langle \bar{3}\bar{1} \rangle} &= k_1 \tau_{\langle 31 \rangle} + s_1 \tau_{\langle 32 \rangle}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Далее рассмотрим обращение формул (21). Формулы преобразования базисных директоров $\bar{\mathbf{l}}$, $\bar{\mathbf{m}}$, \mathbf{n} в директоры \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} можно принять как

$$\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{l} \bar{k}_1 + \mathbf{m} \bar{k}_2, \tag{22}$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{l} \bar{s}_1 + \mathbf{m} \bar{s}_2, \tag{23}$$

$$\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{n}. \tag{24}$$

Тогда коэффициенты в разложении (22), (23) легко получить на основании соотношений

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{l} &= \cos \psi_1 = \bar{k}_1, \\
\bar{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{m} &= -\sin \psi_1 = \bar{k}_2, \\
\bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{l} &= \cos \psi_2 = \bar{s}_1, \\
\bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} &= \sin \psi_2 = \bar{s}_2.
\end{aligned} \tag{25}$$

Снова запишем тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ как линейную комбинацию базисных тензорных произведений

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \tau_{\langle 11 \rangle} \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \tau_{\langle 12 \rangle} \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \tau_{\langle 21 \rangle} \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \tau_{\langle 22 \rangle} \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \tau_{\langle 23 \rangle} \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} + \\
&+ \tau_{\langle 32 \rangle} \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 13 \rangle} \bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 31 \rangle} \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Подставляя в формулу (26) разложения (22), (23), получим

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \tau_{\langle 11 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) + \tau_{\langle 12 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) + \\
&+ \tau_{\langle 21 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) + \tau_{\langle 22 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) + \\
&+ \tau_{\langle 23 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 32 \rangle} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \\
&+ \tau_{\langle 13 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 31 \rangle} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2).
\end{aligned} \tag{27}$$

Раскроем скобки в (27), в результате приходим к:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \tau_{\langle 11 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \bar{k}_1^2 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_1\bar{k}_2 + \mathbf{m} \otimes \bar{k}_2\bar{k}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_2^2) + \\
&+ \tau_{\langle 12 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \bar{k}_1\bar{s}_1 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_1\bar{s}_2 + \mathbf{m} \otimes \bar{k}_2\bar{s}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_2\bar{s}_2) + \\
&+ \tau_{\langle 21 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \bar{s}_1\bar{k}_1 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_1\bar{k}_2 + \mathbf{m} \otimes \bar{s}_2\bar{k}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_2\bar{k}_2) + \\
&+ \tau_{\langle 22 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \bar{s}_1^2 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_1\bar{s}_2 + \mathbf{m} \otimes \bar{s}_2\bar{s}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_2^2) + \\
&+ \tau_{\langle 23 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}\bar{s}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}\bar{s}_2) + \tau_{\langle 32 \rangle} (\mathbf{n} \otimes \bar{s}_1 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_2) + \\
&+ \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 13 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}\bar{k}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}\bar{k}_2) + \tau_{\langle 31 \rangle} (\mathbf{n} \otimes \bar{k}_1 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_2).
\end{aligned} \tag{28}$$

Соберем слагаемые с одинаковыми диадами, состоящими из векторов \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} . После ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= (\bar{k}_1^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + \bar{s}_1^2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \\
&+ (\bar{k}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + \bar{s}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} + \\
&+ (\bar{k}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + \bar{s}_2 \bar{k}_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} + \\
&+ (\bar{k}_2^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + \bar{s}_2^2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \\
&+ (\bar{k}_2 \tau_{\langle 13 \rangle} + \bar{s}_2 \tau_{\langle 23 \rangle}) \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + (\bar{k}_2 \tau_{\langle 31 \rangle} + \bar{s}_2 \tau_{\langle 32 \rangle}) \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \\
&+ \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + (\bar{k}_1 \tau_{\langle 13 \rangle} + \bar{s}_1 \tau_{\langle 23 \rangle}) \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + (\bar{k}_1 \tau_{\langle 31 \rangle} + \bar{s}_1 \tau_{\langle 32 \rangle}) \mathbf{n} \otimes \mathbf{l}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Откуда, окончательно формулы преобразования компонент тензора напряжений τ от искаженного базиса к исходному запишем в форме:

$$\begin{aligned}
 \tau_{\langle 11 \rangle} &= \bar{k}_1^2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1^2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}, \\
 \tau_{\langle 12 \rangle} &= \bar{k}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{s}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}, \\
 \tau_{\langle 21 \rangle} &= \bar{k}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{s}_2 \bar{k}_1 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}, \\
 \tau_{\langle 22 \rangle} &= \bar{k}_2^2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_2^2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}, \\
 \tau_{\langle 23 \rangle} &= \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{3} \rangle} + \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{3} \rangle}, \\
 \tau_{\langle 32 \rangle} &= \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{3}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{3}\bar{2} \rangle}, \\
 \tau_{\langle 33 \rangle} &= \tau_{\langle \bar{3}\bar{3} \rangle}, \\
 \tau_{\langle 13 \rangle} &= \bar{k}_1 \tau_{\langle \bar{1}\bar{3} \rangle} + \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{2}\bar{3} \rangle}, \\
 \tau_{\langle 31 \rangle} &= \bar{k}_1 \tau_{\langle \bar{3}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{3}\bar{2} \rangle}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Таким образом, формулы преобразования дифференциальных d -операторов могут выступить как эффективный инструмент преобразования дифференциальных уравнений и граничных условий в различных разделах механики деформируемого твердого тела [11, 12, 13].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупруго-пластических тел. 1987.
- [2] Ковалев В. А. Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.
- [3] Ю.Н. Радаев. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара СамГУ, 2007. 142 с.
- [4] Арутюнян Н.Х. Наумов В.Э. Радаев Ю.Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 1. Движение потока осаждаемых частиц с переменной скоростью // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 5. С. 6–24.
- [5] Арутюнян Н.Х. Наумов В.Э. Радаев Ю.Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 2. Случай падения приращиваемых частиц с постоянной скоростью // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 6. С. 99–112.
- [6] Stadnik N.E. Dats E.P. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. 2018. Т. 991, № 1. с. 012075.
- [7] Stadnik N. E. Murashkin E. V. Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // AIP Conference Proceedings. 2019. Т. 2116. с. 380013.
- [8] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об одном дифференциальном ограничении в асимметричных теориях механики растущих тел // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 38–46.
- [9] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. Т. 23.
- [10] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 3(41). С. 11–29.
- [11] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Математические модели и современные физические теории поля // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9:4(2). С. 41–94.
- [12] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Точно сохраняющиеся инварианты связанного микрополярного термоупругого поля // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12:4. С. 71–79.

- [13] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Полевые уравнения и d -тензоры термоупругого континуума с “тонкой” микроструктурой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13:2(1). С. 60–68.

Yu. N. Radayev, E. V. Murashkin

TRANSFORMATION FORMULAE FOR d -OPERATORS IN MECHANICS OF SOLIDS

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
pr. Vernadskogo 101 korp. 1, Moscow, 119526 Russian Federation*

Abstract. The transformation formulae for differential d -operators are obtained. Such operators can be found in two-dimensional and three-dimensional problems of the mathematical theory of plasticity and the mechanics of growing solids. These transformations are caused by in the course of varying in the coordinate systems in order to simplify the differential equations (in particular, in the theory of plasticity) and the differential constraints imposed on the growing surface known in mechanics of growing solids. In the paper, the transformation formulae are derived and the corresponding examples are considered and discussed.

Keywords: d -operator, plastic flow, additive manufacturing, growing surface, differential constraint

REFERENCES

- [1] Arutyunyan N.Kh., Drozdov A.D., Naumov V.E. Mechanics of growing viscoelastic-plastic solids. 1987.
- [2] Kovalev V.A., Radayev Yu.N. Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics. Saratov: SSU, 2010. 328 c.
- [3] Radayev Yu.N. Three-dimensional Problem of the Mathematical Theory of Plasticity. Samara: SamSU, 2007. 142 c.
- [4] Harutyunyan N.Kh., Naumov V.E., Radaev Yu.N. Dynamic accretion of the elastic layer. Part 1. The motion of the flow of deposited particles with a variable velocity // *Izv. USSR AS. MTT.* 1992. № 5. C. 6–24.
- [5] Harutyunyan N.Kh., Naumov V.E., Radaev Yu.N. Dynamic accretion of the elastic layer. Part 2. The case of deposition of incremental particles at a constant velocity // *Izv. USSR AS. MTT.* 1992. № 6. C. 99–112.
- [6] Stadnik N.E. Dats E.P. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels // *Journal of Physics: Conference Series.* IOP Publishing. 2018. T. 991, № 1. c. 012075.
- [7] Stadnik N. E. Murashkin E. V. Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // *AIP Conference Proceedings.* 2019. T. 2116. c. 380013.
- [8] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in asymmetric theories of mechanics of growing solids // *Izv. Ros. Akad. Nauk Mekh. Tv. Tela.* 2019. № 6. C. 38–46.
- [9] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a class of constitutive equations on a growing surface // *Vestn. ChGPU I.Ya. Yakovleva. Ser. Lim. St. Mech.* 2019. № 3(41). C. 11–29.
- [10] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* T. 23.
- [11] Kovalev V., Radayev Y. Mathematical models and contemporary theories of physical fields // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2009. Vol. 9:4(2). P. 41–94.
- [12] Kovalev V., Radayev Y. On precisely conserved quantities of coupled micropolar thermoelastic field // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2012. Vol. 12:4. P. 71–79.

Yuri N. Radayev, D.Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Evgenii V. Murashkin, Cand.Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

- [13] Kovalev V., Radayev Y. Covariant field equations and d -tensors of hyperbolic thermoelastic continuum with fine microstructure // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2013. Vol. 13:2(1). P. 60–68.

Э. Т. Акинлаби, Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин, Н. Э. Стадник

ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО–ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

Институт прикладной математики ДВО РАН г. Владивосток, Россия

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН г. Москва, Россия

Университет Йоханнесбурга, г. Йоханнесбург, Южная Африка

Аннотация. Исследовано напряженно-деформированное состояния многослойного упруго-пластического материала в условиях неравномерного теплового расширения. Исследованы особенности необратимого деформирования при произвольном выборе параметров Ламе в каждом слое. Получены решения для напряжений и перемещений в одномерной задаче о нагреве многослойной сферы.

Ключевые слова: температурное напряжение, функционально–градиентный материал, пластичность, крип, температура, упругость, сферическая симметрия

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.008

УДК: 539.374

1. Введение. В настоящее время существует обширная литература по функционально-градиентным материалам, конструкциям и покрытиям, посвященная их свойствам, методам исследования и расчета, а также технологиям изготовления

© Акинлаби Э. Т., Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Стадник Н. Э. 2019

Акинлаби Эшер Титилайо

e-mail: etakinlabi@uj.ac.za, профессор, кафедра машиностроения науки, факультет инженерии и строительства, Университет Йоханнесбурга, Южная Африка

Дац Евгений Павлович

e-mail: dats@dvo.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Стадник Никита Эдуардович, младший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Работа выполнена по теме государственного задания министерства науки и высшего образования РФ (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №17-01-00712, 19-51-60001, 18-01-00844).

Поступила 19.07.2019

[1, 2, 3]. Во всех приведенных работах рассматриваются в основном упругие материалы, что ограничивает классы используемых в космической промышленности структур. Зависимость свойств предполагается от одной координаты, не учитывается возможность изменения свойств с течением времени. Анализ аддитивных технологий не основан на современных методах механики аддитивных технологий и процессов роста, что может привести к принципиальным ошибкам.

Существует несколько способов математического задания градиентного распределения механических характеристик внутри упругопластического материала. Одним из наиболее простых подходов в задании градиента для физических параметров является представление материала в виде многослойной структуры, где в каждом слое заданы различные значения параметров Ламе, коэффициента теплового расширения, предела текучести и др. М Переход к дискретному распределению таких характеристик с последующим описанием деформирования многослойного материала позволяет определить способность такого подхода качественно описывать напряженно-деформированное состояние в рамках моделей непрерывного распределения параметров (заданных при помощи непрерывных функций координат) в функционально-градиентных средах. Несомненным преимуществом дискретного задания градиента является возможность строить точные решения для напряженно-деформированного состояния материала с учетом нелинейных эффектов.

В условиях температурного воздействия, проявляющего свойства осевой симметрии, были получены аналитические решения ряда краевых задач термоупругопластического деформирования. Так, в работах [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] рассматривались решения краевых задач расчета полей остаточных деформаций и напряжений в условиях центральной (сферической) симметрии для упругопластического материала, определены особенности решения при нестационарном тепловом градиенте. Работы [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] посвящены проблемам построения решений для напряжений и перемещений в упругопластическом материале в условиях осевой симметрии в цилиндрических координатах. Были выявлены особенности расчета напряженного состояния в случае плоского напряженного и плоского деформированного состояния материала с учетом зависимости предела текучести от температуры.

2. Определяющие модельные соотношения и основные уравнения. Для описания деформирования многослойного объекта воспользуемся моделью малых упруго-пластических деформаций, в которой тензор деформаций d_{ij} состоит из упругой(обратимой) e_{ij} и пластической (необратимой) p_{ij} составляющей:

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad (1)$$

где u_i — компоненты вектора перемещений, ∂_j — оператор частного дифференцирования по пространственной координате. Определяющие уравнение между упругими компонентами тензора деформаций и компонентами тензора напряжений Коши примем в форме подобной термоупругому закону Дюамеля–Неймана:

$$\sigma_{ij}^{(v)} = 2\mu_v e_{ij}^{(v)} + (\lambda_v e_{kk}^{(v)} - (3\lambda_v + 2\mu_v)\alpha_v \Delta)\delta_{ij} \quad (2)$$

Здесь и далее верхний и/или нижний индекс $v = 1 \dots n$ определяет порядковый номер материального слоя в диапазоне от 0 до n , считая от начала координат; λ_v , μ_v , α_v — параметры ламе и коэффициент линейного теплового расширения в каждом слое, Δ — разница между начальной (комнатной) и текущей (повышенной) температурой,

определяющая степень нагрева. В этом случае, тепловое расширение материала определяется зависимостью

$$e_T^{(v)} = \alpha_v \Delta = \alpha_v (T - T_0).$$

Начало процесса необратимого деформирования свяжем с выполнением условия пластичности Треска в окрестности нагрева пластины

$$f^{(v)}(\sigma_{ij}) = 0, \quad (3)$$

В условиях принципа максимума Мизеса поверхность (3) оказывается пластическим потенциалом. И ассоциированный закон пластического течения записывается в виде

$$\partial_t \varepsilon_{ij}^{(v)} = \xi^{(v)} \frac{\partial f^{(v)}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \xi^{(v)} = \sqrt{\partial_t \varepsilon_{kl}^{(v)} \partial_t \varepsilon_{lk}^{(v)}} \left(\frac{\partial f^{(v)}}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f^{(v)}}{\partial \sigma_{nm}} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (4)$$

В областях обратимого и необратимого деформирования справедливы уравнения равновесия, которые в условиях отсутствия массовых сил можно записать в виде

$$\partial_j \sigma_{ji} = 0. \quad (5)$$

Систему уравнений (1)–(5) следует дополнить краевыми условиями, характерными для конкретной краевой задачи.

3. Деформирования слоистого материала при изменении температурного поля. Рассмотрим термоупругопластическую полую сферическую конструкцию, состоящую из n слоев, имеющих различные термо-механические характеристики. Будем полагать, что основным механизмом деформирования материала сферы является возникновение температурных деформаций вследствие равномерного нагрева материала сферического слоя. Очевидно, что если принять различные значения коэффициента теплового расширения для каждого слоя, то возникающий градиент деформаций приведет к появлению температурных напряжений.

Интегрирование уравнений равновесия (5) при подстановке определяющих соотношений (1)–(4) приводит к формулам для компонент тензора напряжений и вектора перемещений справедливым в каждом слое в условиях центральной симметрии в сферической системе координат

$$\sigma_{rr}^v = A_v + \frac{1}{B_v^3}, \quad \sigma_{\theta\theta}^v = \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)} = A_v - \frac{1}{2B_v^3}, \quad u_r^{(v)} = r\alpha_v \Delta + \frac{A_v r}{3\lambda_v + 2\mu_v} - \frac{B_v}{4\mu_v r^2}. \quad (6)$$

Здесь A_v , B_v — неизвестные константы интегрирования, определяемые из краевых условий задачи. В общем случае размер каждого слоя может быть различным, а радиальная координата слоя под номером v изменяется в диапазоне $R_{v-1} \leq r \leq R_v$, где R_{v-1} , R_v — внутренняя и внешняя поверхность v -слоя.

Для определения констант интегрирования в (6) воспользуемся граничными условиями, которые на контактных поверхностях и на внешней поверхности сферы можно принять в форме:

$$\sigma_{rr}^v(R_v) = \sigma_{rr}^{v+1}(R_v), \quad u_r^v(R_v) = u_r^{v+1}(R_v), \quad \sigma_{rr}^{(n)}(R_n) = 0, \quad v = 1 \dots (n-1). \quad (7)$$

Возникающий при неравномерном тепловом расширении градиент напряжений способен вызывать процесс необратимого деформирования материала. В этом случае в условиях сферической симметрии при выполнении условия пластичности

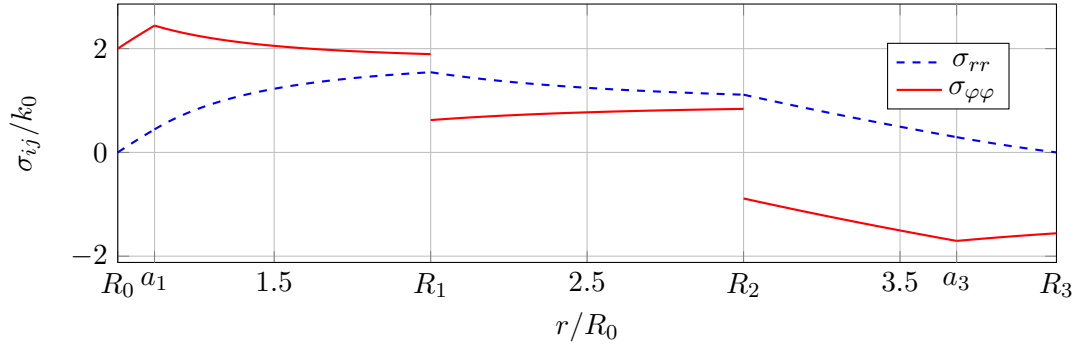


Рис. 1. Напряжения при неравномерном тепловом расширении композитного сферического слоя. $R_0 = 0.05$ см, $R_1/R_0 = 2$, $R_2/R_0 = 3$, $R_3/R_0 = 4$, $\alpha_1 = \alpha_0$, $\alpha_1 = 2\alpha_0$, $\alpha_1 = 3\alpha_0$, $\mu_1 = \mu_0$, $\mu_2 = 2\mu_0$, $\mu_3 = 3\mu_0$, $\Delta T = 120^\circ C$.

$(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 = 4k^2$ (где k — предел текучести при чистом сдвиге) в материале формируются области необратимого деформирования (пластического течения). Напряженно-деформированное состояние в таких областях соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr}^{(v)} &= F_v - 4s_v k_v \ln(r), & \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(v)} = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(v)} &= F_v - 4s_v k_v \ln(r) - 2s_v k_v, \\ \bar{u}_r^{(v)} &= \frac{G_v}{r^2} - \frac{4s_v k_v}{3\lambda_v + 2\mu_v} r \ln(r) + r \left(\frac{F_v}{3\lambda_v + 2\mu_v} + \alpha_v \Delta \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и далее черта над функцией означает ее принадлежность к области пластического течения. Константы интегрирования F_v , G_v наряду с константами (6) находятся из системы граничных условий (7) с учетом условий непрерывности напряжений и перемещений ну упругопластических границах a_v :

$$\bar{\sigma}_{rr}^{(v)}(a_v) = \sigma_{rr}^{(v)}(a_v), \quad \bar{u}_r^{(v)}(a_v) = u_r^{(v)}(a_v), \quad v = 0 \dots m, \quad (9)$$

где m - количество областей необратимого деформирования. Значения упругопластических границ a_v определяются из численного решения системы уравнений, задающих непрерывность на них окружных напряжений:

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(a_v) = \sigma_{\theta\theta}(a_v), \quad v = 0 \dots m. \quad (10)$$

Таким образом, для n слоев с m областями пластического течения имеем систему из $n + m + 1$ уравнений для определения неизвестных параметров A_v , B_v , F_v , G_v , a_v .

В следующем разделе рассмотрим задачу о расчете напряженно-деформированного состояния трехслойной упругопластической сферы, подверженной нестационарному тепловому воздействию. Постановка задачи может быть осуществлена с различными граничными условиями, которые определяют особенности деформирования неоднородного слоя с разными свойствами: 1) свободная внешняя и внутренняя поверхность сферы; 2) зафиксированная внутренняя и свободная внешняя поверхность сферы. Различные граничные условия на внутренней поверхности позволяют оценить влияние неравномерного теплового расширения и механических характеристик материала на его напряженно-деформированное состояние.

4. Деформирование в условиях свободного теплового расширения внутренней и внешней поверхности трехслойной сферы. Рассмотрим процесс

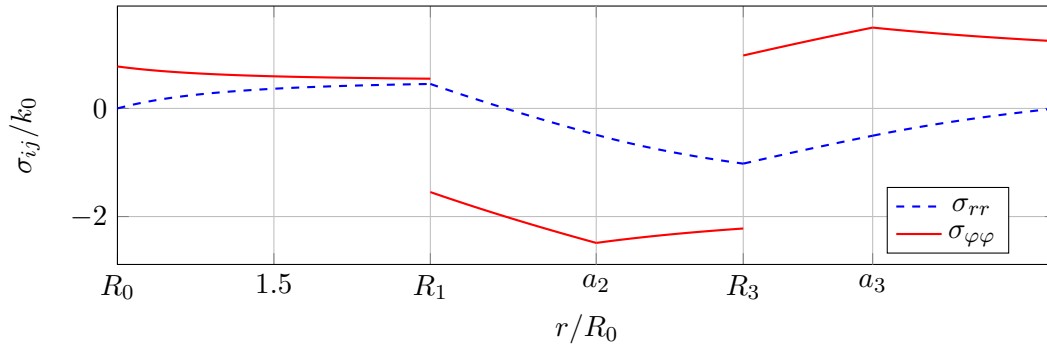


Рис. 2. Напряжения при неравномерном тепловом расширении композитного сферического слоя. $R_0 = 0.05$ см, $R_1/R_0 = 2$, $R_2/R_0 = 3$, $R_3/R_0 = 4$, $\alpha_1 = \alpha_0$, $\alpha_2 = 2\alpha_0$, $\alpha_3 = \alpha_0$, $\mu_1 = \mu_0$, $\mu_2 = \mu_0$, $\mu_3 = \mu_0$, $\Delta T = 420^\circ C$.

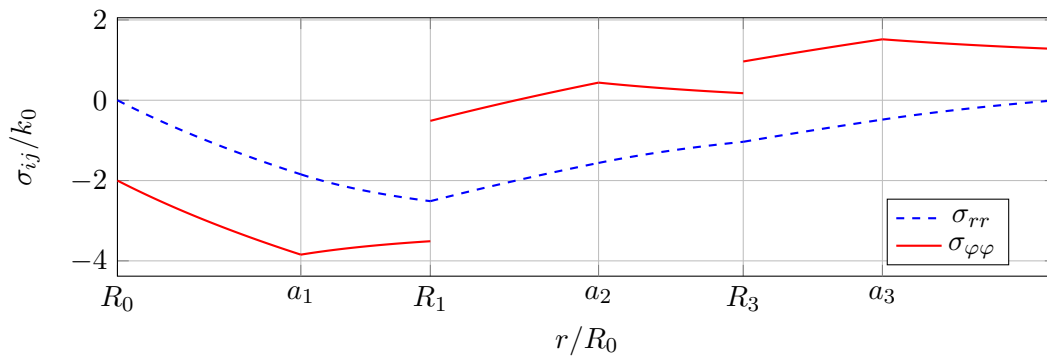


Рис. 3. Напряжения при неравномерном тепловом расширении композитного сферического слоя. $R_0 = 0.05$ см, $R_1/R_0 = 2$, $R_2/R_0 = 3$, $R_3/R_0 = 4$, $\alpha_1 = 3\alpha_0$, $\alpha_2 = 2\alpha_0$, $\alpha_3 = \alpha_0$, $\mu_1 = 3\mu_0$, $\mu_2 = 2\mu_0$, $\mu_3 = \mu_0$, $\Delta T = 520^\circ C$.

деформирования материала, подверженного равномерному температурному воздействию при свободном расширении внутренней и внешней поверхности сферического слоя.

В таком случае решение термоупругой задачи описывается соотношениями (6), (7). Отметим что, в условиях одинакового теплового расширения ($\alpha_i = \alpha_{i+1}$) константы интегрирования в соотношениях (6) принимают нулевые значения, и следовательно напряжения в многослойном материале при нагреве не возникают, несмотря на различия в параметрах ламы у каждого слоя. Таким образом, уровень градиента коэффициента линейного теплового расширения при переходе от слоя к слою в данной постановке задачи оказывает решающего влияния.

На рис. 1–3 изображены характерные распределения полей формирующихся температурных напряжений при повышенной температуре.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Akinlabi E., Akinlabi S. Effect of heat input on the properties of dissimilar friction stir welds of aluminium and copper // *American Journal of Materials Science*. 2012. Vol. 2, no. 5. P. 147–152.
- [2] Scanning velocity influence on microstructure, microhardness and wear resistance performance of laser deposited Ti6Al4V/TiC composite / R. Mahamood, E. Akinlabi, M. Shukla et al. // *Materials & design*. 2013. Vol. 50. P. 656–666.
- [3] Mahamood RM, Akinlabi ET. *Functionally graded materials*. Springer, 2017.
- [4] Dats E. P., Murashkin E. V., Velmurugan R. Calculation of Irreversible Deformations in a Hollow Elastic-Plastic Sphere under Nonsteady Thermal Action // *Bulletin of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2015. Vol. 25, no. 3. P. 168–175.
- [5] Дац Е. П., Мокрин С. Н., Мурашкин Е. В. Расчет накопленной остаточной деформации в процессе «нагрева-охлаждения» упругопластического шара // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2012. № 4. С. 250–264.
- [6] Burenin A., Murashkin E., Dats E. Residual stresses in AM fabricated ball during a heating process // *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 1959. p. 070008.
- [7] Murashkin E., Dats E. Thermal Residual Stresses Computing in Elastic-Plastic Ball with Rigid Inclusion under Heat Treatments // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*. 2018. Vol. 2235. P. 811–814.
- [8] Murashkin E., Dats E. Applications of Multi-Physics Modelling for Simulations of Thermo-Elastic-Plastic Materials // *Fourth International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry*. Corfu Island, Greece, 24 - 27 Aug, 2017: Conference Publishing Services of IEEE, 2018. P. 76–80.
- [9] Murashkin E., Dats E. Thermoelastoplastic Deformation of a Multilayer Ball // *Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 52, no. 5. P. 30–36.
- [10] Murashkin E. V., Dats E. P., Klindukhov V. V. Numerical Analysis of the Elastic-Plastic Boundaries in the Thermal Stresses Theory Frameworks // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2017. Vol. 937. p. 012060.
- [11] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the residual stress field under local thermal actions // *Mechanics of Solids*. 2014. Mar. T. 49, № 2. С. 218–224. URL: <https://doi.org/10.3103/S0025654414020113>.
- [12] Дац Е. П., Мокрин С. Н., Мурашкин Е. В. Расчет остаточных напряжений полого цилиндра из термоупругопластического материала // *Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам*. Алушта: МАИ, 2013. С. 18–22.
- [13] Dats E. P., Murashkin E. V., Gupta N. K. On Yield Criterion Choice in Thermoelastoplastic Problems // *Procedia IUTAM*. 2017. Vol. 23. P. 187–200.
- [14] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On a Multi-Physics Modelling Framework for Thermo-elastic-plastic Materials Processing // *Procedia Manufacturing*. 2017. Vol. 7. P. 427–434.
- [15] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On Heating of Thin Circular Elastic-plastic Plate with the Yield Stress Depending on Temperature // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 173. P. 891–896.
- [16] Murashkin E., Dats E. Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2018. Vol. 991. p. 012060.
- [17] Murashkin E., Dats E. Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Thermoelasticity // *IAENG International Journal of Applied Mathematics*. 2017. Vol. 47. P. 261 – 264.

E. T. Akinlabi, E. P. Dats, E. V. Murashkin, N. E. Stadnik

THERMOELASTIC PLASTIC DEFORMATION OF A FUNCTIONAL GRADIENT MATERIAL UNDER CONDITIONS OF CENTRAL SYMMETRY

Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

University of Johannesburg, Johannesburg South Africa

Abstract. The present paper is devoted to problem of thermoelastoplastic deformation of hollow torus. The requisite equation of the temperature stresses theory are furnished in toroidal coordinate frame. The residual stresses in a hollow elastoplastic torus subject to non-uniform radial heating are calculated and graphically analyzed. The approximate analytical solution of the noted problem is obtained in the framework of the generalized plane stress state approach. The stress and displacement fields are computed in the thermoelastic and plastic flow domains. The correctness and applicability of the obtained solutions for a torus of arbitrary size under conditions of axisymmetric thermal effect are discussed.

Keywords: temperature stress, functional graded material, yield, creep, temperature, elasticity, spherical symmetry

REFERENCES

- [1] Akinlabi ET, Akinlabi SA. Effect of heat input on the properties of dissimilar friction stir welds of aluminium and copper // American Journal of Materials Science. 2012. T. 2, № 5. С. 147–152.
- [2] Scanning velocity influence on microstructure, microhardness and wear resistance performance of laser deposited Ti6Al4V/TiC composite / RM Mahamood, ET Akinlabi, M Shukla [и др.] // Materials & design. 2013. T. 50. С. 656–666.
- [3] Mahamood RM, Akinlabi ET. Functionally graded materials. Springer, 2017.
- [4] Dats E. P., Murashkin E. V., Velmurugan R. Calculation of Irreversible Deformations in a Hollow Elastic-Plastic Sphere under Nonsteady Thermal Action // Bulletin of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. Vol. 25, no. 3. P. 168–175.

Akinlabi Esther Titilayo

e-mail: etakinlabi@uj.ac.za, Professor, Department of Mechanical Engineering Science, Faculty of Engineering and the Built Environment, University of Johannesburg, South Africa

Dats Evgeniy Pavlovich

e-mail: dats@dvo.ru, PhD, Assistant Professor, Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok, Russia

Murashkin Evgenii Valerievich

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, PhD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Stadnik Nikita Eduardovich Junior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (state registration number AAAA-A17-117021310381-8) and RFBR projects (17-01-00712, 18-01-00844), and financial support of the SA (NRF) / RUSSIA (RFBR) joint science and technology research collaboration (project No. RUSA180527335500/19-51-60001)

-
- [5] Dats E.P., Mokrin S.N., Murashkin E.V. Calculation of accumulated residual deformation in the process of "heating-cooling" of an elastoplastic ball // Bulletin of the I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Limit State Mechanics. 2012. № 4. С. 250–264.
- [6] Burenin A., Murashkin E., Dats E. Residual stresses in AM fabricated ball during a heating process // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. p. 070008.
- [7] Murashkin E., Dats E. Thermal Residual Stresses Computing in Elastic-Plastic Ball with Rigid Inclusion under Heat Treatments // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2018. Vol. 2235. P. 811–814.
- [8] Murashkin E., Dats E. Applications of Multi-Physics Modelling for Simulations of Thermo-Elastic-Plastic Materials // Fourth International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry. Corfu Island, Greece, 24 - 27 Aug, 2017: Conference Publishing Services of IEEE, 2018. P. 76–80.
- [9] Murashkin E., Dats E. Thermoelastoplastic Deformation of a Multilayer Ball // Mechanics of Solids. 2017. Vol. 52, no. 5. P. 30–36.
- [10] Murashkin E. V., Dats E. P., Klindukhov V. V. Numerical Analysis of the Elastic-Plastic Boundaries in the Thermal Stresses Theory Frameworks // Journal of Physics: Conf. Series. 2017. Vol. 937. p. 012060.
- [11] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the residual stress field under local thermal actions // Mechanics of Solids. 2014. Mar. T. 49, № 2. С. 218–224. URL: <https://doi.org/10.3103/S0025654414020113>.
- [12] Dats E.P., Mokrin S.N., Murashkin E.V. Calculation of residual stresses of a hollow cylinder made of thermopurgoplastic material // Materials of the XVIII International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Systems. Alushta: MAI, 2013. С. 18–22.
- [13] Dats E. P., Murashkin E. V., Gupta N. K. On Yield Criterion Choice in Thermoelastoplastic Problems // Procedia IUTAM. 2017. Vol. 23. P. 187–200.
- [14] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On a Multi-Physics Modelling Framework for Thermo-elastic-plastic Materials Processing // Procedia Manufacturing. 2017. Vol. 7. P. 427–434.
- [15] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On Heating of Thin Circular Elastic-plastic Plate with the Yield Stress Depending on Temperature // Procedia Engineering. 2017. Vol. 173. P. 891–896.
- [16] Murashkin E., Dats E. Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder // Journal of Physics: Conf. Series. 2018. Vol. 991. p. 012060.
- [17] Murashkin E., Dats E. Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Tmermoplasticity // IAENG International Journal of Applied Mathematics. 2017. Vol. 47. P. 261 – 264.

Т. Г. Рытова

К ВОПРОСУ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО-НАПРЯЖЕННЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. Разработана программа испытаний потери устойчивости заполненных сыпучим материалом тонкостенных замкнутых предварительно напряженных цилиндрических оболочек. Проработан алгоритм создания предварительного напряжения горизонтальных цилиндрических оболочек.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, автоцистерна, сыпучий наполнитель, устойчивость, предварительное напряжение, программа испытаний.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.012

УДК: 539.3

Введение и обзор. Предварительное напряжение в конструкциях позволяет уменьшить расход материала, стоимость самих конструкций и их изготовления при полном удовлетворении эксплуатационных требований. Способы создания предварительного напряжения в вертикальных цилиндрических резервуарах приведены в работе Белени Е. И. [1]. Технически возможно создание предварительного напряжения в цилиндрической оболочке обмоткой высокопрочной проволокой или лентой с данным напряжением. В работе [1] приводятся единичные примеры обмотки цилиндрических аппаратов высокопрочной проволокой. Но не разработана методика создания предварительного напряжения для горизонтальных цилиндрических резервуарах.

Экспериментальные исследования проводились Беленя Е. И., Астряб С. М., Рамазановым Э. Б., Степкиным С. А., основные результаты изложены в работах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. В основном испытывались вертикальные цилиндрические оболочки для нефтегазовой отрасли, работающие под давлением.

В работах [8, 9, 10] изложены аналитические, численные и экспериментальные методы исследований динамической потери устойчивости предварительно нагруженных стальных труб.

© Рытова Т. Г., 2019

Рытова Татьяна Георгиевна

e-mail: tanusha2884@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 15.09.2019

В работах М. Zeinoddini [11, 12, 13] рассмотрено поведение предварительно загруженных стальных труб, подвергнутых ударным воздействиям. Автором разработана программа испытаний стальных труб длиной до 2 м на комбинацию предварительных статических нагрузжений и последующих динамических воздействий. Граничные условия назначены так, что образцы ограничены от поворота, но могут свободно перемещаться вдоль своей оси. Груз весом 15–50 кг, свободно перемещающийся по установке в вертикальном направлении, ударяется в середине образца, падение груза происходит со скоростью 7 м/с. В тестовых задачах авторы скорость и массу падающего груза оставляли неизменной, изменяли предварительное нагружение образцов. В испытаниях при первых падениях груза труба восстанавливала первоначальную форму, образец оставался устойчивым. При упругих реакциях при соударении груз отскакивал от образца, поднимаясь на определенную высоту, и снова повторно воздействовал на трубу при падении. Фиксировались остаточные деформации. Отмечается хорошая согласованность численных результатов с экспериментами (расхождение численного и экспериментального значений критической нагрузки составляет 6%). В результате исследований автор доказал применимость расчетной модели трубы для последующего численного исследования образцов с другими геометрическими параметрами.

В статьях [14, 15] разработан новый вариант метода конечных элементов для расчета осесимметричных колебаний упругих ортотропных оболочек вращения, частично заполненных жидкостью, с учетом дискретного подкрепления оболочек шпангоутами и предварительного статического напряженно-деформированного состояния.

В настоящее время наиболее подробно исследованы задачи о напряженно-деформированном состоянии и потери устойчивости цилиндрических оболочек, без учета влияния заполнителя на потерю устойчивости, частично освещен вопрос об устойчивости цилиндрической оболочки с заполнителем. Комплексный экспериментально-теоретический анализ, численные исследования в полном объеме предварительно напряженных горизонтальных тонкостенных цилиндрических оболочек практически отсутствуют.

Развитие автомобильных перевозок сыпучих материалов, обладающих малой плотностью (цемент, мука, зерно и т.д.), требует совершенствования конструкций полуприцепов-цистерн, которые должны стать надежным средством для транспортировки бестарных грузов по дорогам 1–3 категорий условий эксплуатации. Для повышения эффективности перевозки сыпучих материалов автомобильная промышленность стремится освоить производство опрокидываемых при разгрузке тонкостенных большегабаритных цистерн, представляющих собой комбинацию цилиндрической и полусферических оболочек в стальном или алюминиевом исполнении. Конструкция цистерны должна быть безопасной в эксплуатации, экономичной и по возможности обладать минимальной трудоемкостью в изготовлении.

Планируемый рост объемов транспортировки сыпучих материалов требует увеличения габаритов автоцистерн с соблюдением условия максимальной грузоподъемности при минимальной металлоемкости. Это возможно при создании предварительно напряженных корпусов автоцистерн. Данный вопрос еще мало изучен и на производстве не имелось аналогов данных цистерн.

При рациональном выборе геометрических параметров цистерны одной из главных задач является расчет конструкции на устойчивость. В настоящее время данная проблема до конца не изучена. Большое влияние на величину критической нагрузки играют возмущающие факторы, такие как начальные несовершенства формы оболочки,

условий нагружения, условия крепления обмотки и т.д., которые трудно поддаются учету.

Для исследования устойчивости предварительно-напряженной замкнутой тонкостенной цилиндрической оболочки, заполненной сыпучим материалом, при изгибе необходимы разработка и верификация на экспериментальных данных математической модели, алгоритма решения и программного обеспечения, которые будут соответствовать современному уровню компьютерного моделирования. Расчет предварительно-напряженных цилиндрических оболочек, наполненных сыпучим материалом, трудоемок и сложен.

1. Практические аспекты создания предварительно-напряженных тонкостенных цилиндрических оболочек. Для повышения надежности несущих конструкций необходимо применять вероятностные методы. Предварительное напряжение цилиндрических тонкостенных оболочек может создаваться различными способами, такими как обмоткой цилиндрической оболочки высокопрочной проволокой или лентой, стягиванием бандажами для повышения несущей способности. При выборе способа создания предварительного напряжения необходимо оценить степень надежности каждого способа.

В работах [16], M. Alrsai et al. [17], S. Gong et al. [18], Z. Jiexin et al. [19], F. Wang [20], F.-C. Wang et al. [21], J. Zheng et al. [22] представлены результаты испытаний конструкций PIP с одинаковыми внутренними и разными наружными трубами. Замечено, что геометрические и деформационные свойства наружной трубы влияют на предельную нагрузку внутренней трубы. Предложены эмпирические выражения для оценки предельной нагрузки внутренней трубы. Используемые в морских платформах колонны, состоящие из двух вложенных друг в друга цилиндрических стальных труб, пространство между которыми заполнено бетоном (Concrete Filled Double Skin Steel Tube — CFDST), обладают определенными преимуществами по сравнению с классическими аналогами — трубой, заполненной бетоном (Concrete Filled Steel Tube — CFST) [23]. Трехслойные композитные оболочки CFDST используются также в подводных трубопроводах [24]. Проведены параметрические исследования влияния прочности внешней и внутренней оболочек, бетона и отношения пустот на характеристики сжатия и изгиба композитных трубопроводов, подвергаемых воздействию давления. Показано, что наличие внутренней трубы повышает устойчивость композитной оболочки.

В строительстве предварительное напряжение используется в инвентарных обсадных трубах при устройстве буронабивных свай. Что также подтверждает актуальность вопроса создания предварительно-напряженных труб с целью увеличения несущей способности и уменьшения массы конструкций.

Проанализировав используемые в морских платформах двойные цилиндрические стальные трубы, а также в обсадных трубах при создании буронабивных свай, можно проработать новый вариант создания предварительного напряжения. При использовании конструкций из двух вложенных друг в друга цилиндрических стальных труб при нагреве диаметр внешней трубы увеличивается, насаживается на внутреннюю трубу, при остывании происходит обжатие внутренней трубы.

2. Метод испытания на устойчивость предварительно-напряженных горизонтальных тонкостенных цилиндрических оболочек с заполнителем. Для опытного образца, описанного в работе Федоровой Т. Г. [25], создается предварительное напряжение нижеизложенными способами.

1. При помощи высокопрочной предварительно растянутой обмотки перераспределяются усилия в конструкции, при этом для разгрузки внутренний более тонкий слой изготавливаем из менее прочного материала. Для автоцистерны применяем алюминиевый сплав, как и в цистернах без предварительного напряжения. Предварительное напряжение, созданное усилием натяжения проволоки, назначается исходя из условия одновременного достижения напряжениями в стенке и обмотке расчетных сопротивлений при полном заполнении сыпучим материалом оболочки, и из условия создания минимального предварительного напряжения с точки зрения обеспечения устойчивости оболочки без дополнительных средств. Навивка производится в окружном направлении или по спирали под углом к продольной оси оболочки, витки наматываются вплотную друг к другу и размещают с определенным шагом.

2. При помощи кольцевой многослойной обмотки профилированной высокопрочной лентой методом Ширенбека [1]. Производят предварительный нагрев профилированной ленты до 700° с быстрым охлаждением после укладки.

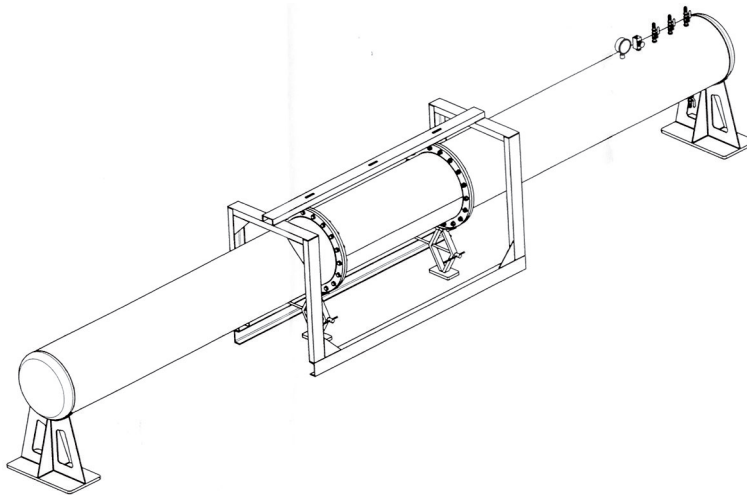


Рис. 1. Экспериментальная установка

Задача экспериментальных исследований — определение форм потери устойчивости, изменение формы поперечного сечения в процессе деформирования, определение величины критической нагрузки и перемещений предварительно-напряженного образца, измерение деформаций.

Программа испытания состоит из следующих этапов:

- выбор образца, визуальный осмотр начальных несовершенств;
- измерение начальных геометрических размеров образца, нанесение рисок на его рабочей поверхности;
- навивка образца с постоянным по длине оболочки контролируемым усилием натяжения и одинаковым шагом витков;
- наклеивание тензорезисторов на наружную поверхность образца в верхней и нижней точке в предполагаемом месте потери устойчивости в осевом и кольцевом направлениях;

- заполнение образца металлическим порошком объемом, заданным экспериментом;
- настройка измерительного оборудования;
- подключение тензорезисторов к измерителю деформаций;
- нагружение образца — первая шаговая нагрузка;
- измерение показаний тензорезисторов прибором ИДЦ-1 и Теремом-4;
- измерение перемещение нагружаемого торца образца индикатором часового типа ИЧ-10;
- измерение диаметров в осевом и кольцевом направлениях электронным штангенциркулем в фиксированных сечениях по длине образца;
- измерение меридиональных и кольцевых деформаций;
- дальнейшее пошаговое увеличение вертикальной нагрузки на образец и повторение всех вышеприведенных измерений; фиксация деформированной формы образца при потере устойчивости;
- дальнейшее нагружение вертикальной силой с целью изучения закритического поведения образца до общей потери устойчивости образца.

После проведения экспериментов выполнить статистическую обработку.

По изложенной выше методике будут проведены следующие испытания:

- опытный образец без заполнителя;
- опытный образец, заполненный железным порошком;
- опытный образец, заполненный железным порошком, подверженный внутреннему давлению.

Заключение. Разработана программа испытаний потери устойчивости тонкостенной предварительно-напряженной цилиндрической оболочки, заполненной сыпучим материалом. Прописаны способы создания предварительного напряжения тонкостенных горизонтальных цилиндрических оболочек. По разработанной программе будут выполнены экспериментальные исследования в научной лаборатории НИУ МГСУ.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Беленя Е. И. Предварительно-напряженные металлические листовые конструкции. Москва: Стройиздат, 1979. 192 с.
- [2] Астряб С. М. Исследование прочности тонкостенных предварительно-напряженных цилиндрических оболочек, работающих под равномерным внутренним давлением // Тр. III Международной конференции по предварительно-напряженным металлическим конструкциям. Москва, 1971. Т. 1.
- [3] Астряб С. М. Экспериментальные исследования устойчивости тонкостенного кольца, усиленного натянутой гибкой нитью // Изв. ВУЗов. Сер. Строительство и архитектура. 1968. № 2.
- [4] Беленя Е. И., Сафарян М. К., Рамазанов Э. Б. Экспериментальные исследования предварительно-напряженного стального резервуара // Экспрессинформация Мингазпрома. Москва, 1968. № 23.
- [5] Рамазанов Э. Б. Устойчивость предварительно-напряженных цилиндрических металлических оболочек // Тр. III Международной конференции по предварительно-напряженным металлическим конструкциям. Москва, 1971. Т. 1.
- [6] Росато Д. В., Грове К. С. Намотка стеклонитью. Развитие метода, производство, области применения и конструирования. Москва, 1969.
- [7] Степкин С. А. Устойчивость тонкостенного цилиндра, обжатого гибкой напряженной обмоткой // Сборник трудов ЛИИЖТ. Ленинград, 1964. Т. 229.
- [8] Harding J. E., Onoufriou T. Behaviour of ring-stiffened cylindrical members amaged by local denting // J. Construct Steel Res. 1995. no. 33(3). P. 237–257.

- [9] Ricles J. M., Bruin M. W. Evaluation of analysis methods for response prediction of ent-damaged tubular steel bracing members // In: 30th International offshore technology Conference. Houston, Texas, 4–7 May 1998. Richardson, Texas, 1998. Vol. 2: Pattern & marine system design. OTC 8735. P. 215–228.
- [10] Walker A. C., McCall S. Experimental investigation of damaged stiffened cylindrical shells // J. Thin-Walled Struct. 1998. no. 30(1–4). P. 79–94.
- [11] Zeinoddini M., Harding J. E., Parke G. A. R. Dynamic behaviour of axially pre-loaded tubular steel members of offshore structures subjected to impact damage // J. Ocean Eng. 1999. no. 26. P. 963–978.
- [12] Zeinoddini M., Harding J. E., Parke G. A. R. Effect of impact damage on the capacity of tubular steel members of offshore structures // J. Mar. Struct. 1998. no. 11(4–5). P. 141–158.
- [13] Zeinoddini M., Parke G. A. R., Harding J. E. Behaviour of axially preloaded steel tubes subjected to lateral impacts (an experimental study) // J. Impact Eng. 2002. no. 27(6). P. 669–690.
- [14] Шклярчук Ф. Н., Рей Ч. Расчет осесимметричных колебаний оболочек вращения с жидкостью методом конечных элементов // Вестник Московского авиационного института. 2012. Т. 9, № 5. С. 197–204.
- [15] Шклярчук Ф. Н., Рей Ч. Расчет неосесимметричных колебаний оболочек вращения с жидкостью методом конечных элементов // Вестник Московского авиационного института. 2013. Т. 20, № 2. С. 49–58.
- [16] Гоник Е. Г. Экспериментальный и теоретический анализ изгиба и упругопластического выпучивания тонкостенных цилиндрических оболочек с сыпучим наполнителем: дисс. ... канд. техн. наук. Новгород, 2019.
- [17] Alrsai M., Karampour H., Albermani F. On collapse of the inner pipe of a pipe-in-pipe system under external pressure // Engineering Structures. 2018. Vol. 172. P. 614–628.
- [18] Buckle propagation of sandwich pipes under external pressure / S. Gong, X. Wang, T. Zhang et al. // Engineering Structures. 2018. Vol. 175. P. 339–354.
- [19] Jiexin Z., Palmer A., Brunning P. Overtrawlability and mechanical damage of pipe-in-pipe // J. of Applied Mechanics, Transactions ASME. 2014. Vol. 81, no. 3. Art. no. 031006.
- [20] Wang F. Effective design of submarine pipe-in-pipe using Finite Element Analysis // Ocean Engineering. 2018. Vol. 153. P. 23–32.
- [21] Wang F.-C., Li W., Han L.-H. Interaction behavior between outer pipe and liner within offshore lined pipeline under axial compression // Ocean Engineering. 2019. Vol. 175. P. 103–112.
- [22] Indentation and external pressure on subsea single wall pipe and pipe-in-pipe / J. Zheng, A. Palmer, P. Brunning et al. // Ocean Engineering. 2014. Vol. 83. P. 125–132.
- [23] Ekmekyapar T., Hasan H. G. The influence of the inner steel tube on the compression behaviour of the concrete filled double skin steel tube (CFDST) columns // Marine Structures. 2019. Vol. 66. P. 197–212.
- [24] Wang F.-C., Han L.-H. Analytical behavior of carbon steel-concrete-stainless steel double-skin tube (DST) used in submarine pipeline structure // Marine Structures. 2019. Vol. 63. P. 99–116.
- [25] Федорова Т. Г. Экспериментально-теоретическое исследование упругопластического деформирования, потери устойчивости и закритического поведения цилиндрических оболочек с сыпучим наполнителем при изгибе: монография. Чебоксары: ИД “Среда”, 2018. 184 с.

T. G. Rytova

ON THE ISSUE OF LOSS OF STABILITY OF PRE-STRESSED THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELLS

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. A program of stability loss tests for thin-walled closed prestressed cylindrical shells filled with bulk material has been developed. An algorithm for creating a prestress of horizontal cylindrical shells is developed.

Keywords: cylindrical shell, tank truck, bulk filler, stability, pre-stress, test program.

REFERENCES

- [1] Belenja E. I. Pre-strained sheet metal design. Moscow: Stroizdat, 1979. 192 p. (in Russian).
- [2] Astriab S. M. Study of the strength of thin-walled pre-stressed cylindrical shells working under uniform internal pressure // Proceedings of the III International conference on pre-stressed metal structures. Moscow, 1971. Vol. 1. (in Russian).
- [3] Astriab S. M. Experimental studies of the stability of a thin-walled ring reinforced with a stretched flexible thread // Izv. higher educational. Ser. Construction and architecture. 1968. no. 2. (in Russian).
- [4] Belena E. I., Safarian M. K., Ramazanov E. B. Experimental study of pre-tensioned steel tank // Expressinform of the Ministry of gas industry. 1968. no. 23. (in Russian).
- [5] Ramazanov E. B. Stability of pre-stressed cylindrical metal shells // Proceedings of the III International conference on pre-stressed metal structures. Moscow, 1971. Vol. 1. (in Russian).
- [6] Rosato D. V., Grove K. S. Winding the vitreous. Development of the method, production, application and design. Moscow, 1969. (in Russian).
- [7] Stepkin S. A. Stability of a thin-walled cylinder compressed by a flexible stressed winding // Proceedings of LIIZHT. Leningrad, 1964. Vol. 229. (in Russian).
- [8] Harding J. E., Onoufriou T. Behaviour of ring-stiffened cylindrical members amaged by local denting // J. Construct Steel Res. 1995. no. 33(3). P. 237–257.
- [9] Ricles J. M., Bruin M. W. Evaluation of analysis methods for response prediction of ent-damaged tubular steel bracing members // In: 30th International offshore technology Conference. Houston, Texas, 4–7 May 1998. Richardson, Texas, 1998. Vol. 2: Pattern & marine system design. OTC 8735. P. 215–228.
- [10] Walker A. C., McCall S. Experimental investigation of damaged stiffened cylindrical shells // J. Thin-Walled Struct. 1998. no. 30(1–4). P. 79–94.
- [11] Zeinoddini M., Harding J. E., Parke G. A. R. Dynamic behaviour of axially pre-loaded tubular steel members of offshore structures subjected to impact damage // J. Ocean Eng. 1999. no. 26. P. 963–978.
- [12] Zeinoddini M., Harding J. E., Parke G. A. R. Effect of impact damage on the capacity of tubular steel members of offshore structures // J. Mar. Struct. 1998. no. 11(4–5). P. 141–158.
- [13] Zeinoddini M., Parke G. A. R., Harding J. E. Behaviour of axially preloaded steel tubes subjected to lateral impacts (an experimental study) // J. Impact Eng. 2002. no. 27(6). P. 669–690.
- [14] Shklyarchuk F. N., Ray C. Calculation of axisymmetric oscillations of shells of rotation with a liquid by the finite element method // Bulletin of the Moscow aviation Institute. 2012. Vol. 9, no. 5. P. 197–204. (in Russian).
- [15] Shklyarchuk F. N., Ray C. Calculation of non-axisymmetric vibrations of shells of revolution with liquid by finite element method // Bulletin of Moscow aviation Institute. 2013. Vol. 20, no. 2. P. 49–58. (in Russian).
- [16] Gonik E. G. Experimental and theoretical analysis of bending and elastic-plastic bulging of thin-walled cylindrical shells with loose filler: Thesis for the title of candidate of technical Sciences. N. Novgorod, 2019. (in Russian).
- [17] Alrsai M., Karampour H., Albermani F. On collapse of the inner pipe of a pipe-in-pipe system under external pressure // Engineering Structures. 2018. Vol. 172. P. 614–628.
- [18] Buckle propagation of sandwich pipes under external pressure / S. Gong, X. Wang, T. Zhang et al. // Engineering Structures. 2018. Vol. 175. P. 339–354.
- [19] Jiexin Z., Palmer A., Brunning P. Overtrawlability and mechanical damage of pipe-in-pipe // J. of Applied Mechanics, Transactions ASME. 2014. Vol. 81, no. 3. Art. no. 031006.
- [20] Wang F. Effective design of submarine pipe-in-pipe using Finite Element Analysis // Ocean Engineering. 2018. Vol. 153. P. 23–32.
- [21] Wang F.-C., Li W., Han L.-H. Interaction behavior between outer pipe and liner within offshore lined pipeline under axial compression // Ocean Engineering. 2019. Vol. 175. P. 103–112.
- [22] Indentation and external pressure on subsea single wall pipe and pipe-in-pipe / J. Zheng, A. Palmer, P. Brunning et al. // Ocean Engineering. 2014. Vol. 83. P. 125–132.

- [23] Ekmekyapar T., Hasan H. G. The influence of the inner steel tube on the compression behaviour of the concrete filled double skin steel tube (CFDST) columns // *Marine Structures*. 2019. Vol. 66. P. 197–212.
- [24] Wang F.-C., Han L.-H. Analytical behavior of carbon steel-concrete-stainless steel double-skin tube (DST) used in submarine pipeline structure // *Marine Structures*. 2019. Vol. 63. P. 99–116.
- [25] Fedorova T. G. Experimental and theoretical study of elastic-plastic deformation, loss of stability and supercritical behavior of cylindrical shells with a loose filler during bending: monograph. Cheboksary: Publishing House “Medium”, 2018. 184 p. (in Russian).

Т. Г. Рытова¹, Л. А. Максимова^{2,3}, М. В. Петров³, Н. Г. Пфаненштиль⁴

АНАЛИЗ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТОНКОСТЕННОЙ ОБОЛОЧКИ, ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ НА ДВЕ ОПОРЫ, С СЫПУЧИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

¹ *Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия*

² *Российский университет транспорта, г. Москва, Россия*

³ *Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

⁴ *Казанский филиал Российского государственного университета правосудия, г. Казань, Россия*

Аннотация. Приводятся результаты экспериментального исследования потери устойчивости заполненных сыпучим материалом тонкостенных замкнутых цилиндрических оболочек, шарнирно опертых на две опоры. Разработан способ приближенного расчета на устойчивость при изгибе тонкостенных цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим материалом. Показан приближенный расчет автоцистерны от весовой нагрузки.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, автоцистерна, сыпучий наполнитель, упруго-пластический изгиб, устойчивость, критическая нагрузка, эксперимент.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.013

УДК: 539.3

Введение. Потеря устойчивости и закритическое поведение тонкостенных оболочек, заполненных сыпучим материалом, рассмотрены в работах [1, 2, 3, 4, 5, 6].

© Рытова Т. Г., Максимова Л. А., Петров М. В., Пфаненштиль Н. Г., 2019

Рытова Татьяна Георгиевна

e-mail: tanusha2884@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна

e-mail: maximova_ng@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта, г. Москва; Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Петров Михаил Васильевич

e-mail: rimmmapetrova20@gmail.com, доктор технических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Пфаненштиль Надежда Георгиевна

e-mail: nfedorova83@mail.ru, кандидат исторических наук, доцент, Казанский филиал Российского государственного университета правосудия, г. Казань, Россия.

Поступила 01.11.2019

Часть работ была посвящена экспериментальным исследованиям. Так, в работе В. И. Моссаковского [7] рассматривается возможность перенесения результатов модельных исследований в натуру. В работе [7] представлены результаты испытаний и статистической обработки гладких цилиндрических оболочек при различных вариантах нагружений, в том числе при действии поперечной силы. Исследования проводились на моделях с геометрическими параметрами $R/\delta = 300$, $L/R = 2,5$, приемлемых для лабораторных исследований. По результатам обработки экспериментов В. И. Моссаковский сделал выводы: а) закон распределения параметра несущей способности близок к нормальному; б) среднее значение параметра отношения экспериментальной критической нагрузки к теоретической ($Q_{\text{э}}/Q_{\text{т}}$) почти не изменяется с увеличением размеров образцов.

В работе А. В. Саченкова [8] приведена идея совмещения теоретического и экспериментального методов исследования оболочек и пластин, который будет основан на теории подобия и размерностей. Теоретико-экспериментальный метод А. В. Саченкова позволяет по предварительному теоретическому анализу установить определяющие параметры, построить формулы, вывести функциональные зависимости, с помощью которых описываются характерные особенности поведения оболочек, устанавливаемые в последующем на основании экспериментальных данных. Данный метод апробирован при исследовании напряженного состояния круговой цилиндрической оболочки при действии локальной поперечной нагрузки. Результаты изложены в работе Ю. Г. Коноплева [9].

Отметим, что при экспериментальных исследованиях устойчивости цилиндрических оболочек возникают трудности, связанные с качественным изготовлением образцов, правильной передачей нагрузок. По данным ранее проведенных экспериментов [9, 10] расхождение экспериментальных и расчетных данных по величине критической нагрузки достигает более двух раз.

Теоретическому исследованию потери устойчивости цилиндрических оболочек при изгибе посвящены работы А. С. Вольмира, А. С. Ноздрина, Ю. Н. Бердникова [11, 12], основанные на классическом решении линейной задачи потери устойчивости при изгибе, для вычисления критических напряжений цилиндрической оболочки при изгибе за пределами упругости авторы использовали численные методы. Задачу изгиба трубы исследовал Ю. В. Коновалов [13]. Приведен уточняющий коэффициент, больший по значению, чем полученный по приближительным расчетам.

Задача исследования потери устойчивости тонкостенных оболочек является трехмерной, физически и геометрически нелинейной. Но оценочного приближенного метода расчета нет. Поэтому разработка способа приближенного расчета на устойчивость при изгибе тонкостенных цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим материалом, является весьма актуальной, необходимой для производства.

Экспериментальное исследование устойчивости тонкостенной оболочки, шарнирно опертой на две опоры. Натурные испытания устойчивости большегабаритных автомобильных цистерн для транспортировки сыпучих материалов требуют огромных затрат. Для определения характера потери устойчивости были проведены эксперименты на модельных образцах. Рассматривались тонкостенные цилиндрические оболочки.

В работе Федоровой Т. Г. [14] проведен ряд экспериментов на модельных образцах, изготовленных глубокой вытяжкой из алюминиевого сплава 3004 в состоянии

Н19. Экспериментальные исследования устойчивости цилиндрических оболочек с заполнителем при изгибе выполнялись на образцах, имеющих следующие начальные размеры: толщина стенки оболочки $h(t) = 0,10 \pm 0,01$ мм, отношение длины оболочки к толщине $L/h = 1350$, радиусы оболочки $R = 328h$. Было проведено несколько типов испытаний: один торец образца жестко зашпемлен, к другому прикладывается поперечная нагрузка, направленная вниз, образец без заполнителя; один торец образца жестко зашпемлен, к другому прикладывается поперечная нагрузка, направленная вниз, образец заполнен железным порошком; один торец образца жестко зашпемлен, к другому прикладывается поперечная нагрузка, образец заполнен железным порошком. Результаты численного решения задачи были получены на основе вычислительного комплекса “Динамика-3” [15]. Сравнительный анализ результатов численных и экспериментальных исследований показал, что разработанная вычислительная модель качественно правильно и с приемлемой для инженерной практики точностью описывает потерю устойчивости тонкостенной цилиндрической оболочки, заполненной сыпучим материалом, при изгибе.

Размеры образцов подбирались с учетом условий физического и геометрического подобия с большегабаритными автоцистернами, изготавливаемых на заводе ЗАО “Чебоксарское предприятие “Сеспель”.

На основе модельных образцов была создана модель цистерны для транспортировки сыпучих грузов. У рассматриваемой цистерны для транспортировки сыпучих грузов $R = 1275$ мм, $h = 5$ мм. Параметры подобия равны соответственно

$$\alpha_1 = \frac{R}{R'} = 0,02, \quad \alpha_3 = \frac{h}{h'} = 0,02. \quad (1)$$

Таким образом, условие геометрического подобия [7] $\alpha_1 = \alpha_3$ для выбранного образца удовлетворяется.

Цилиндрическую тонкостенную оболочку, шарнирно опертую на две опоры (рис. 1), заполняли железным порошком ПЖ-5 насыпной плотностью $\rho = 2,66$ г/см³. Испытываемая оболочка в местах соединения образцов устанавливается на две неподвижные опоры. Опоры жесткие, устойчивые, выполнены из стали в виде уголков. Испытываемая оболочка собиралась из 9 образцов, ранее описанных в работе Федоровой Т. Г. [14]. Стыковка образцов осуществлялась на специально изготовленной металлической втулке по внутреннему диаметру образца из стали, на металлическую втулку по наружной стороне наносился клей БФ-2 тонким слоем, на втулку с клеем надевались два образца с каждой стороны соответственно. После полного высыхания сверху выполняли обжим хомутами.

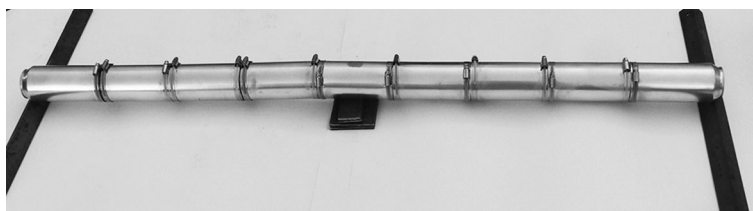


Рис. 1. Схема установки

Испытание оболочки на устойчивость проводили по следующей схеме: при пустой оболочке от собственного веса измеряли диаметры оболочки в осевом и кольцевом направлениях штангенциркулем в пяти сечениях по длине образца (сечение на левой опоре, сечение в середине оболочки между опорами, сечение на правой опоре); поэтапно выполнялась засыпка образца на 30%, 60%, 90%. На каждом этапе измеряли диаметры оболочки в осевом и кольцевом направлениях штангенциркулем, засыпку производили до критического значения, при которой происходит потеря устойчивости оболочки, фиксировали деформированную форму образца с помощью фотоаппарата (рис. 2).

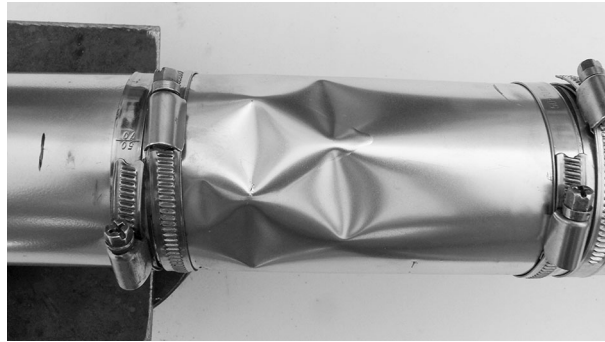


Рис. 2. Потеря устойчивости в центральной части образца

После завершения испытаний всех оболочек, был проведен анализ остаточной формы образцов. Гофры образуются в сжатой зоне и имеют ромбовидную форму. До потери устойчивости оболочки деформировались упруго. Величина критической массы, при которой происходила потеря устойчивости, 0,103 кН при заполнении образца железным порошком на 90%.

Расчет на устойчивость подъемной автоцистерны. В работе Федоровой Т. Г. [14] рассмотрено численное исследование потери устойчивости большегабаритных цистерн для транспортировки сыпучих материалов. В расчетах емкость моделировалась замкнутой цилиндрической оболочкой ($h = 0,5$ см, $R/h = 255$, $L/R = 12,5$), которая на торцах опиралась на неподвижные недеформируемые плиты. Оболочка выполнена из сплава АМг5, имеющего следующие механические характеристики: плотность $\rho = 2,65$ г/см³, модуль упругости $E = 63$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,32$, предел текучести $\sigma_T = 0,146$ ГПа, модуль кинематического упрочнения $g = 0,2088$ ГПа.

Результаты расчета следующие. При достижении весовой нагрузкой значения, равного 4,2 допустимого проектом веса груза, в средней части цилиндрической обечайки образуются две поперечные складки. В последующем увеличение весовой нагрузки приводит к расширению этой зоны и увеличению числа складок. Критическое напряжение по численному расчету получилось $\sigma_{cr} = 116$ МПа.

Приведем упрощенный расчет на устойчивость подъемной автоцистерны. Цистерна подъемная из алюминиевого сплава АМГ-5 имеет размеры: $R = 1,275$ м, $h = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $l = 16$ м, $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа. Масса загрузки $m = P_0 = 0,4$ МН, $\sigma_T = 146$ МПа — предел текучести материала.

Согласно способу приближенного расчета на устойчивость при поперечном изгибе тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины, заполненных сыпучим материалом, приведенному в работах [14, 15, 16], критическое напряжение, при котором оболочка теряет устойчивость, $\sigma'_{cr} = 60,4$ МПа. Критическое напряжение для оболочки, заполненной на 90%, $\sigma_{cr} = 105,8$ МПа.

Расхождение между численным значением и теоретическим значением, рассчитанному по предварительному методу, составляет 8,79%, в пределах допустимой погрешности в 10%. Что подтверждает правильность выбранной методики упрощенного расчета.

Заключение. Проведены экспериментальные исследования потери устойчивости тонкостенной цилиндрической оболочки, шарнирно опертой на двух опорах, получены значения критического напряжения. Показано, что расхождение в значениях критического напряжения, при котором оболочка теряет устойчивость, при компьютерном и ручном расчете по приближенной методике не превышает 10%. Полученные данные могут быть использованы для верификации вычислительной модели большегрузной емкости для автомобильной транспортировки сыпучих грузов [2].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Численный анализ деформирования, потери устойчивости и закритического поведения большегабаритных емкостей для автомобильной транспортировки сыпучих грузов / В. Г. Баженов, А. И. Кибец, М. В. Петров [и др.] // Проблемы прочности и пластичности. 2008. Т. 70. С. 88–96.
- [2] Теоретическое и экспериментальное исследование потери устойчивости и закритического поведения тонкостенной цилиндрической оболочки при изгибе / В. Г. Баженов, А. И. Кибец, М. В. Петров [и др.] // Проблемы прочности и пластичности. 2009. Т. 71. С. 77–83.
- [3] Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г. Экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных оболочек при чистом изгибе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2(24). С. 119–125.
- [4] Stability and supercritical behaviour of thin-walled cylindrical shell with discrete aggregate in bending / V. G. Bazhenov, E. G. Gonik, A. I. Kibets et al. // Materials Physics and Mechanics. 2016. Vol. 28. P. 16–20.
- [5] Конечно-элементное решение задачи устойчивости и закритического поведения автоцистерн для транспортировки сыпучих грузов / В. Г. Баженов, Е. Г. Гоник, А. И. Кибец [и др.] // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Т. 75, № 1. С. 56–62.
- [6] Stability and Supercritical Behavior of Large Size Tankers for Transportation of Loose Goods / V. G. Bazhenov, E. G. Gonik, A. I. Kibets et al. // J. of Machinery Manufacture and Reliability. 2015. Vol. 44, no. 5. P. 422–427.
- [7] Моссаковский В. И., Маневич Л. И., Мильцын А. М. Моделирование несущей способности цилиндрических оболочек. Киев: Наукова Думка, 1977. 141 с.
- [8] Саченков А. В. Теоретико-экспериментальный метод исследования устойчивости пластин и оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: КГУ, 1970. Т. 617. С. 391–433.
- [9] Коноплев Ю. Г., Саченков А. В. Исследование напряженного состояния круговой цилиндрической оболочки с жесткой площадкой загрузки // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: КГУ, 1966. Т. 4. С. 65–83.
- [10] Григолок Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. Москва: Наука, 1978. 360 с.
- [11] Бердников Ю. Н., Галиханов Б. К. Об одном приближенном решении задачи устойчивости цилиндрической оболочки при неоднородном поперечном давлении // Прочность конструкций. Уфа, 1980. № 4. С. 58–61.
- [12] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Москва: Физматгиз, 1967. 984 с.
- [13] Коновалов Ю. В. Изгиб бесконечной цилиндрической оболочки // Приклад. матем. и механ. 1940. Т. 4, № 5–6. С. 35–54.

- [14] Федорова Т. Г. Экспериментально-теоретическое исследование упругопластического деформирования, потери устойчивости и заkritического поведения цилиндрических оболочек с сыпучим наполнителем при изгибе: монография. Чебоксары: ИД “Среда”, 2018. 184 с.
- [15] Вычислительный комплекс “Динамика-3”. Аттестационный паспорт программного средства. Научно-технический центр по ядерной и радиационной безопасности. Регистрационный паспорт аттестации ПС № 325 от 18.04.2013.
- [16] Петров М. В., Гоник Е. Г. Расчет предельного состояния тонкостенных цилиндрических оболочек при изгибе, заполненных сыпучим материалом // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 2(40). С. 117–127.

T. G. Rytova¹, L. A. Maximova^{2,3}, M. V. Petrov³, N. G. Pfanenshtil⁴

ANALYSIS OF LOSS OF STABILITY OF A CYLINDRICAL THIN-WALLED SHELL, HINGED ON TWO SUPPORTS, WITH A LOOSE FILLER

¹*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

²*Russian University of transport, Moscow, Russia*

³*I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

⁴*Kazan Branch of the Russian State University of Justice, Kazan, Russia*

Abstract. The results of an experimental study of the loss of stability of thin-walled closed cylindrical shells filled with bulk material, hinged on two supports, are presented. A method for approximate calculation of the bending stability of thin-walled cylindrical shells filled with bulk material has been developed. An approximate calculation of the tank truck from the weight load is shown.

Keywords: cylindrical shell, tank truck, bulk filler, elastic-plastic bending, stability, critical load, experiment.

REFERENCES

- [1] Numerical analysis of deformation, loss of stability and supercritical behavior of oversized containers for the automotive transportation of bulk cargo / V. G. Bazhenov, A. I. Kibets, M. V. Petrov et al. // Problems of strength and plasticity. 2008. Vol. 70. P. 88–96. (in Russian).
- [2] Theoretical and experimental study of the loss of stability and supercritical behavior of a thin-walled cylindrical shell under bending / V. G. Bazhenov, A. I. Kibets, M. V. Petrov et al. // Problems of strength and plasticity. 2009. Vol. 71. P. 77–83. (in Russian).
- [3] Petrov M. V., Fedorova T. G., Gonik E. G. Experimental study of the loss of stability of thin-walled shells under pure bending // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named I. Yakovlev. Series: The Mechanics of the Ultimate State. 2015. no. 2(24). P. 119–125. (in Russian).

Rytova Tatyana Georgievna, Candidate of technical Sciences, associate Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

Maximova Lyudmila Anatolyevna, Doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Russian University of transport, Moscow; I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Petrov Mikhail Vasilyevich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Pfanenshtil Nadezhda Georgievna, Candidate of historical Sciences, Associate Professor, Kazan Branch of the Russian State University of Justice, Kazan, Russia.

-
- [4] Stability and supercritical behaviour of thin-walled cylindrical shell with discrete aggregate in bending / V. G. Bazhenov, E. G. Gonik, A. I. Kibets et al. // *Materials Physics and Mechanics*. 2016. Vol. 28. P. 16–20.
- [5] Finite element solution to the problem of stability and supercritical behavior of tank trucks for the transport of bulk cargo / V. G. Bazhenov, E. G. Gonik, A. I. Kibets et al. // *Problems of strength and plasticity*. 2013. Vol. 75, no. 1. P. 56–62. (in Russian).
- [6] Stability and Supercritical Behavior of Large Size Tankers for Transportation of Loose Goods / V. G. Bazhenov, E. G. Gonik, A. I. Kibets et al. // *J. of Machinery Manufacture and Reliability*. 2015. Vol. 44, no. 5. P. 422–427.
- [7] Mossakovsky V. I., Manevich L. I., Miltsyn A. M. Modeling of the bearing capacity of cylindrical shells. Kiev: Naukova Dumka, 1977. 141 p. (in Russian).
- [8] Sachenkov A. V. Theoretical and experimental method for studying the stability of plates and shells // *Research on the theory of plates and shells*. Kazan: Kazan University press, 1970. Vol. 617. P. 391–433. (in Russian).
- [9] Konoplev Y. G., Sachenkov A. V. Study of the stress state of a circular cylindrical shell with a rigid loading platform // *Research on the theory of plates and shells*. Kazan: Kazan University press, 1966. Vol. 4. P. 65–83. (in Russian).
- [10] Grigolyuk E. I. Stability of shells. Moscow: Nauka, 1978. 360 p. (in Russian).
- [11] Berdnikov Y. N., Galimkhanov B. K. On one approximate solution of the problem of stability of a cylindrical shell under inhomogeneous transverse pressure // *Strength of structures*. Ufa, 1980. no. 4. P. 58–61. (in Russian).
- [12] Volmir A. S. Stability of deformable systems. Moscow: Fizmatgiz, 1967. 984 p. (in Russian).
- [13] Kononov Y. V. Bending of an infinite cylindrical shell // *Butt. mod. and mechanism*. 1940. Vol. 4, no. 5–6. P. 35–54. (in Russian).
- [14] Fedorova T. G. Experimental and theoretical study of elastic-plastic deformation, loss of stability and supercritical behavior of cylindrical shells with a loose filler during bending: monograph. Cheboksary: Publishing House “Medium”, 2018. 184 p. (in Russian).
- [15] Computer complex “Dynamics-3”. Certification passport of the software. Scientific and technical center for nuclear and radiation safety. Registration passport of certification of PS No. 325 from 18.04.2013. (in Russian).
- [16] Petrov M. V., Gonik E. G. Calculation of the limit state of thin-walled cylindrical shells at bending filled with loose material // *Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named I. Yakovlev*. Series: Mechanics of the limit state. 2019. no. 2(40). P. 117–127. (in Russian).

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига, Латвия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трецев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `prede1.sty`. Стиль `prede1.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Непершин Р. И.</i> О пластическом выдавливании тонкостенного стакана	3
<i>Спорышин А. Н.</i> Динамическое деформирование полупространства со сферической полостью	21
<i>Абаишкин Е. Е., Соснин А. А., Ткачева А. В.</i> Влияния локального теплового воздействия на материал стальной пластины марки Ст3 с образованием прожига	25
<i>Абдурахманов А. А., Глаголев В. В., Инченко О. В.</i> Упругопластическое деформирование адгезива при сдвиге	34
<i>Фирсов С. В., Прокудин А. Н.</i> Ползучесть и пластическое течение во вращающемся полом цилиндра	45
<i>Радаев Ю. Н.</i> Об одной гиперболической модели плоских необратимо сжимаемых течений сред Кулона-Мора и пластических тел Прандтля	56
<i>Немировский Ю. В.</i> Рациональное проектирование гибридных полиметаллических тавровых балок	69
<i>Мионов Б. Г., Мионов Ю. Б.</i> К вопросу о кручении неоднородных цилиндрических стержней из идеального жесткопластического материала	77
<i>Радаев Ю. Н.</i> О кинематических соотношениях вдоль мгновенно нерастяжимых линий в течениях сжимаемых сред	84
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Преобразования дифференциальных d -операторов в моделях механики деформируемых сред	92
<i>Акинлаби Э. Т., Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Стадник Н. Э.</i> Термоупругопластическое деформирование функционально-градиентного материала в условиях центральной симметрии	103
<i>Рытова Т. Г.</i> К вопросу потери устойчивости предварительно-напряженных тонкостенных цилиндрических оболочек	111
<i>Рытова Т. Г., Максимова Л. А., Петров М. В., Пфаненшталь Н. Г.</i> Анализ потери устойчивости цилиндрической тонкостенной оболочки, шарнирно опертой на две опоры, с сыпучим наполнителем	119
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	126
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	129
СОДЕРЖАНИЕ	131

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2019. № 4 (42)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 27.12.2019. Выход в свет 22.12.2019.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 16,5.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском отделе Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38